Lineaire optimalizatie [D0H42a] - Samenvatting 2011-2012

Wouter Schaekers
—
2/3Bach Informatica - 2Bach Handelsingenieur
2Bach Handelsingenieur in de Beleidsinformatica
Master Handelsingenieur in de Beleidsinformatica

February 26, 2014

Inhoudstafel

0 Inleiding en inhoudstafel

Deze samenvatting is gemaakt voor de studenten van 2/3Bach Informatica, 2Bach Handelsingenieur, 2Bach Handelsingenieur in de Beleidsinformatica en Master Handelsingenieur in de Beleidsinformatica.
Deze samenvatting is gebaseerd op het boek. Hierbij is de negende, herziene uitgave van de cursus 'Lineair Optimaliseren' gebruikt.
Deze samenvatting bevat voorbeelden die rechtstreeks uit de cursus komen. Deze voorbeelden vallen onder de copyright van de auteurs van de cursus (D. Goossens en F.C.R. Spieksma).
Deze samenvatting is hoogstwaarschijnlijk niet foutloos. Eventuele aanpassingen kunnen gemaakt worden op https://github.com/WouterSchaekers/LineaireOptimalisatie-Samenvatting.
De auteur is niet bereid samenvattingen te signeren.
Het sturen van spam is verboden. Het stalken van de auteur is, na toestemming, slechts in uitzonderlijke omstandigheden toegestaan.
De auteur is niet verantwoordelijk voor enige gevolgen van het gebruik van deze bundel.
Het is verboden de afgedrukte versie van de samenvatting te verbranden of op te eten.

Geen langdurig gebruik zonder wiskundig advies. Alle lijnstukken voorbehouden.

"Alles moet zo eenvoudig mogelijk gemaakt worden, maar niet eenvoudiger dan dat."
-
Albert Einstein

1HgMRMvafHHFPzhn6Nwzjp6gVb5Qzrnn4r

1 Inleiding

Niet belangrijk. Slaan we over.

2 Het formuleren van lineaire optimaliseringsmodellen

In de economie is het vaak belangrijk om iets te maximaliseren (winst) of iets te minimaliseren (kosten). Om tot een maximale winst of minimale kost te komen, kunnen we gebruik maken van lineaire optimaliseringsmodellen. Zulk een optimaliseringsmodel is in feite niets anders dan een wiskundig model waarin opgelegd wordt om iets te maximaliseren of minimaliseren, waarbij aan bepaalde constraints moet worden voldaan.

2.1 Een eerste voorbeeld

Het is het best om dit te illustreren met het voorbeeld 2.1:

Een bedrijf vervaardigt houten deuren en houten tafelbladen. Per houten deur moet 1 uur aan houtbewerking en 2 uur aan afwerking (schuren en schilderen) besteed worden. Voor elk tafelblad is 1 uur houtbewerking en 1 uur afwerking nodig. Per week kunnen 80 werkuren besteed worden aan houtbewerking en 100 aan afwerking. De grondstoffen zijn onbeperkt voorradig. Uit het verleden is gebleken dat per week maximaal 40 deuren verkocht kunnen worden. Het bedrijf kan de deuren en de tafelbladen verkopen met een winst van respectievelijk 300 Eurocent en 200 Eurocent per stuk. Hoe kunnen we de wekelijkse winst zo groot mogelijk maken?

Dit vraagstuk bevat 2 variabelen, namelijk het aantal geproduceerde deuren en het aantal geproduceerde tafelbladen. Deze gaan we in ons model voorstellen door respectievelijk x_1 en x_2.
Het overeenkomstig optimaliseringsmodel:
maximaliseer $z = 300x_1 + 200x_2$
Dit is de winst die gemaximaliseerd moet worden. Dit wordt ook wel de doelfunctie genoemd.
zodanig dat
$2x_1 + x_2 \leq 100$
Het maximaal aantal uren dat kan besteed worden aan afwerking.
$x_1 + x_2 \leq 80$
Het maximaal aantal uren dat kan besteed worden aan houtbewerking.
$x_1 \leq 40$
Er kunnen maximaal 40 deuren per week verkocht worden.
$x_i \geq 0$
Dit is een beperking die er zo goed als altijd bij moet. Een negatieve hoeveelheid producten produceren is wiskundig heel leuk, maar in de realiteit niet echt haalbaar.

In dit hoofdstuk wordt er nog niet ingegaan op hoe dat zulke modellen opgelost moeten worden. Dat is pas voor hoofdstuk 5.
Voor een extra voorbeeld (2.2), zie de cursus.

2.2 Lineariteit

Deze cursus gaat over ”lineaire optimaliseringsproblemen” of ”LO problemen”. Het spreekt voor zich dat er enkel lineaire functies of ongelijkheden gebruikt worden. Uitdrukkingen zoals x_1^2, x_1x_2 of $\sqrt{x_1}$ mogen niet voorkomen.
De laatste regel van een LO model bevat de tekenbeperking van de variabelen. Deze kunnen positief (*ge*), negatief (*le*) of onbepaald (*o.i.t.* (onbeperkt in teken)) zijn.

2.3 Toepasbaarheid van lineaire modellen

Proportionaliteit: De winst bij het produceren van twee eenheden moet twee keer zo groot zijn als de winst bij het produceren van één eenheid.
Additiviteit: De winst bij het produceren van één eenheid van product 1 blijft hetzelfde, ongeacht of dat er van product 2 één eenheid of twee eenheden geproduceerd worden.
Deelbaarheid: De oplossing $\in \mathbb{Z}$.

Er zijn situaties waarbij de proportionaliteit of de additiviteit kan geschonden worden. Bijvoorbeeld bij schaalvoordelen, steup kosten en interactie tussen verschillende producten.

3 Voorbeelden

Dit hoofdstuk behandelt de vele verschillende vormen van optimaliseringsmodellen. Deze worden uitvoerig beschreven in de cursus, maar dit is mijns inziens niet nuttig. Het enige wat je nodig hebt om zulke modellen op te stellen is gezond verstand. Voor de volledigheid overlopen we toch alle modellen die besproken worden en vatten het belangrijkste samen. Voor de voorbeelden zelf, zul je de cursus moeten raadplegen.

3.1 Investeringsprobleem

Om toch een algemeen idee te krijgen maken we voor dit probleem een uitzondering en plaasten we wel een voorbeeld in de samenvatting.
Een investeringsprobleem gaat over twee of meersdere projecten waarin geïnvesteerd kan worden. Het is de bedoeling om de winst te maximaliseren door voor elk van deze projecten een deel geld te investeren.
Gegeven is de hoeveelheid winst en verlies per tijdstip per project. Het aandeel waarin geïnvesteerd wordt in een bepaald project, blijft constant over de tijd. Meestal is het zo dat op het geld dat na een tijdstip overschiet rente kan worden vergaard (in ons voorbeeld 2%) en op het bedrag dat geleend wordt rente moet worden betaald (in ons voorbeeld 2.5%).
De beslissingsvariablen zijn dus de fracties van de projecten (in ons voorgesteld door p_i).
Andere variabelen zijn het geleend bedrag per tijdstip (b_i) en het gespaarde bedrag per tijdstip (s_i).

Het (vereenvoudigd) voorbeeld:

Tijdstip	Project 1	Project 2
1	+1	-1
2	-2	+2
3	+3	-3

Zoals uit de bovenstaande tabel kan worden afgeleid, is het niet nuttig om te investeren in project 2. Maar dat is irrelevant voor het opstellen van het model.
Voor elk tijdstip beschikken we over 1 euro, die we niet moeten teruggeven. Bij het begin beschikken we dus over $1 + b_1$ euro. Een vereiste is dat we niet in het rood gaan. We mogen niet meer uitgeven dan we hebben (inclusief het geleende bedrag). Hieruit volgt de eerste constraint:
$p_2 - p_1 \leq 1 + b_1$
Het gespaarde bedrag komt overeen met:
$s_1 = 1 + b_1 + p_1 - p_2$
Bij de volgende constraint moeten we het gespaarde en het geleende bedrag van het vorige tijdstip in rekening brengen. Bovendien legt de opgave ons op dat we niet meer dan 1 euro per tijdstip mogen lenen. Dit levert ons het volgende model op:

max $z = s_3$
zdd
$s_1 - (b_1 + p_1 - p_2) = 1$
$s_2 - (b_2 - 2p_1 + 2p_2 + 1.02s_1 - 1.025b_1) = 1$
$s_3 - (b_3 + 3p_1 - 3p_2 + 1.02s_2 - 1.025b_2) = 1$
$0 \leq p_i \leq 1$ voor $i = 1, 2$
$0 \leq b_i \leq 1$ voor $i = 1, 2$
$0 \leq s_i$ voor $i = 1 \ldots 3$

3.2 Mengprobleem

Hier gaat het over het algemeen over een aantal types van producten die door het mengen van een aantal andere (basis)producten tot stand komt. (In de cursus staat een voorbeeld over drie types benzine die tot stand komen door drie soorten ruwe olie te mengen.) Voor het mengen van de (basis)producten bestaan regels. Zo moet elk type aan bepaalde voorwaarden voldoen. (Bijvoorbeeld een bepaald octaangehalte dat gehaald moet worden.) Dit soort van problemen is over het algemeen een stuk makkelijker dan het vorige probleem omdat de constrains hier bijna letterlijk in de opgave staan.
De beslissingsvariabelen zijn het aantal basisproducten dat je nodig hebt voor elk type van producten te kunnen produceren.

3.3 Menuprobleem

Het samenstellen van een 'dieet' dat aan voorwaarden voldoet (hoeveelheid calcium, vitamines, ...). De beslissingsvariabelen zijn simpelweg de hoeveelheid van elk product. Het kan zijn dat er een hulpvariabele nodig is (zoals de dagelijkse hoeveelheid energie, die tussen twee waarden moet liggen). Dit probleem is nog makkelijker dan het mengprobleem.

3.4 Roosterprobleem

Elke dag heeft men een verschillend aantal werknemers nodig. Elke werknemer werkt een x aantal opeenvolgende dagen. De bedoeling is om zo weinig mogelijk werknemers in dienst te hebben, zodat de kosten zo laag mogelijk zijn.

3.5 Stroomprobleem

Een aantal basisproducten kan worden herwerkt tot meerdere producten. Deze producten kunnen dan nog eens verder verwerkt worden. Dit probleem kan in combinatie voorkomen met een mengprobleem.

3.6 Productie-voorraadprobleem

Een bedrijf kan een maximaal aantal boten produceren per kwartaal. Dat bedrijf kan dit maximaal aantal overschrijden door zijn arbeiders overuren te laten draaien. Uiteraard is het zo dat overuren meer kosten. Het bedrijf kan ook beslissen om meer te produceren dan de vraag in dat kwartaal om zo zijn werknemers geen overuren te laten draaien. Het probleem is dat de opslag van deze goederen ook geld kost.
De beslissingsvariabelen zijn hier het aantal producten gemaakt tijdens de normale werkuren, het aantal producten gemaakt tijdens de overuren en de voorraad in elk kwartaal.

3.7 Versnijdingsprobleem

Een bedrijf heeft rollen van een bepaalde breedte. Een klant wil x rollen met een bepaalde breedte en y rollen met een andere breedte.
Dit probleem kan opgelost worden door op te schrijven op welke manieren de 'hoofdrol' kan versneden worden in de rollen die de klant nodig heeft. Daarna is het slechts een kwestie van het model juist op te stellen.

Bijvoorbeeld:
Hoofdrol = 2 meter
Benodigde rollen = 1 meter en 0.5 meter
Patronen:
$P_1 = 2x1$
$P_2 = 1x1\ 2x0.5$
$P_3 = 4x0.5$

3.8 Netwerkproblemen

3.8.1 Transportproblemen

Een bedrijf heeft een aantal vestigingen en een aantal verdeelcentra in verschillende steden. Elk verdeelcentrum heeft een verschillende vraag. Elke vestiging heeft een verschillende productie. Het is de bedoeling om zo weinig mogelijk afstand af te leggen door aan de vraag te kunnen voldoen.
De beslissingsvariabelen zijn het aantal producten dat op elke lijn wordt getransporteerd.

3.8.2 Toewijzigingsprobleem

Een bedrijf heeft een aantal mensen in dienst. Elk van deze mensen is goed in een bepaalde sectie. Het is de bedoeling om elk van deze mensen toe te wijzen aan exact één van deze secties (en dus niet meer), zodat het bedrijf als geheel het beste presteert. (Let op, de voorwaarde 'exact één' zijn heel veel constraints!) Het is onmogelijk dat er tijdens de uitvoer van een sectie gewisseld wordt. Elke persoon doet zijn sectie volledig uit.

3.8.3 Distributieprobleem

Dit is in feite hetzelfde als het transportprobleem. Het enige verschil is dat het transport niet meer rechtstreeks gaat, maar met tussenstops. De tussenstops kunnen met elkaar in verbinding staan, waardoor het soort van grafenprobleem wordt. De oplossing is niet moeilijk. Stel voor elk distributiepunt dat het aantal producten dat toekomt gelijk moet zijn aan het aantal producten dat er vertrekt.

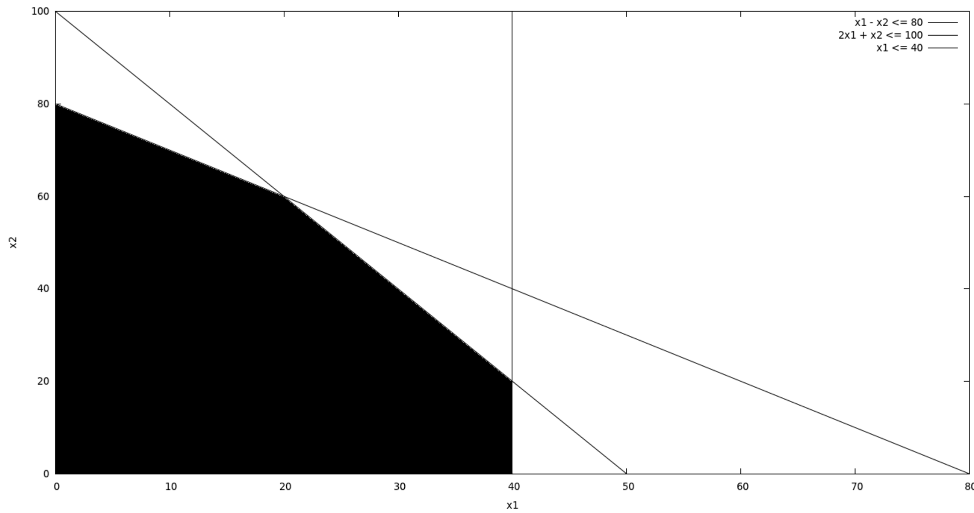
4 De geometrie van LO-problemen

Dit hoofdstuk probeert de lezer inzicht te geven in LO-problemen door middel van grafische technieken.

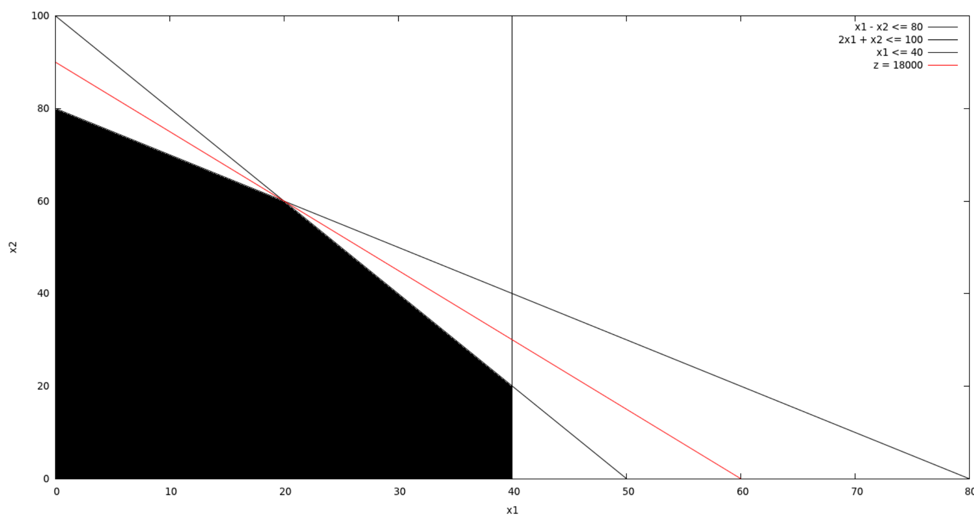
4.1 Grafisch oplossen van LO-problemen met twee variabelen

Wanneer een probleem slechts twee variabelen heeft, kan elke oplossing worden aangeduid in het vlak. Ook elke constraint kan worden voorgesteld door een rechte in datzelfde vlak.

We beschouwen het volgende voorbeeld:
max $z = 300x_1 + 200x_2$
zdd
$2x_1 + x_2 \leq 100$
$x_1 + x_2 \leq 80$
$x_1 \leq 40$
$x_i \geq 0$ voor $i = 1, 2$
Dit levert het volgende toegelaten gebied op:



Enkel de doelfunctie moet nog gevisualiseerd worden. Het probleem is dat z geen constantie is en gemaximaliseerd moet worden. Daarom moeten we gewoon een x_1 en x_2 kiezen uit het toegelaten gebied en invullen in de vergelijking. Laten we $(20, 0)$ kiezen. Dit levert $z = 6000$ op. Nu kunnen we $300x_1 + 200x_2 = 6000$ ook tekenen op de grafiek (deze lijn wordt ook wel een isokostlijn of een isowinstlijn genoemd).
Nu, 6000 is niet de maximale waarde die z kan aannemen. Daarom zullen we de lijn evenwijdig verschuiven naar rechtsboven tot we de rand hebben bereikt van het toegelaten gebied:



Het spreekt voor zich dat deze techniek ook werkt op een minimalisatieprobleem.

4.2 Bijzondere situaties

4.2.1 Meerdere oplossingen

Het is perfect mogelijk dat eer meerdere optimale oplossingen voorkomen. Dit kan gebeuren wanneer de doelfunctie-lijn evenwijdig ligt aan een grenslijn.

4.2.2 Geen toelaatbare oplossingen

Dit kan voorkomen wanneer de voorwaarden te strikt zijn.

4.2.3 Onbegrensde oplossing

Dit kan voorkomen wanneer er niet genoeg voorwaarden zijn.

4.3 Definities, terminologie en eigenschappen

Bindende beperking: Een beperking waarbij, na substitutie van de optimale oplossing, het linker en rechterdeel van de vergelijking aan elkaar gelijk zijn. Bij een niet-bindende beperking is dit uiteraard niet zo.
Redundante beperking: Een beperking die niet nodig is om tot dezelfde oplossing te komen.

Enkele eigenschappen:
Het toegelaten gebied van een LO-probleem is een convexe verzameling.
Het toegelaten gebied van een LO-probleem bevat een eindig aantal extreme punten (= punten in een convexe verzameling waarvoor geldt dat, voor elk lijnstuk dat volledig in deze verzameling ligt en dit punt bevat, dit punt een eindpunt is van dit lijnstuk).
Indien het LO-probleem een optimale oplossing heeft, dan bestaat er tenminste één extreem punt dat optimaal is.
Het is makkelijk in te zien dat deze eigenschappen juist zijn. De bewijzen van deze eigenschappen worden in deze cursus achterwege gelaten.

PS: De optimale oplossing (als er één bestaat) kan dus altijd gevonden worden door de extreme punten af te lopen.

5 De simplex methode - deel 1

Dit hoofdstuk behandelt de simplex methode, een methode om lineaire optimaliseringsproblemen op te lossen. De simplex methode vereist dat het LO-probleem in de standaardvorm staat. De standaardvorm is van de vorm:
maximaliseer $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
zdd $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ voor $i = 1 \ldots m$
$x_j \geq 0$ voor $j = 1 \ldots n$

Elk probleem zal dus eerst moeten omgezet worden naar de standaardvorm:

- minimaliseren van $f(x)$ = maximaliseren van $-f(x)$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ \& \ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i)$
- x is oit $\Rightarrow$ introduceer x^+ en x^-; $x^+, x^- \geq 0$ en vervang x door $x^+ - x^-$

5.1 Een voorbeeld

We volgen het voorbeeld uit de cursus.
Maximaliseer $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$
Zodanig dat
$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$
$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8$
$x_i \geq 0$ voor $i = 1 \ldots 3$
De opgave staat al in standaardvorm.

De eerste stap van de simplex methode bestaat erin spelingsvariabelen te introduceren.
Laten we kijken naar de eerste regel: $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$. Voor elke oplossing geldt dat het linkerdeel

kleiner of gelijk is aan 5. Het verschil tussen het linkerdeel en het rechterdeel heet de 'speling'. We definiëren $x_4 = 5 - (2x_1 + 3x_2 + x_3)$, $x_4 \geq 0$ als deze speling. De opgave kan herschreven worden in functie van de spelingswaarden:
Maximaliseer $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$
Zodanig dat
$x_4 = 5 - (2x_1 + 3x_2 + x_3)$
$x_5 = 11 - (4x_1 + x_2 + 2x_3)$
$x_6 = 8 - (3x_1 + 4x_2 + 2x_3)$
$x_i \geq 0$ voor $i = 1 \dots 6$

Het idee van de simplex methode is om telkens een betere oplossing te vinden. In ons voorbeeld starten we met $x_i = 0$ voor $i = 1 \dots 3$. z is dan 0. We laten $x_2 = x_3 = 0$ en hogen x_1 op. x_1 kan de waarde 2.5 bereiken (niet 3, want dan worden de spelingsvariabelen negatief). Hoe kunnen we dat weten? De voorwaarde $x_4 = 5 - (2x_1 + 3x_2 + x_3) \geq 0$ impliceert dat $x_1 \leq \frac{5}{2}$ ($x_5 \geq 0$ impliceert $x_1 \leq \frac{11}{4}$ en $x_6 \geq 0$ impliceert $x_1 \leq \frac{8}{3}$). Dus we vinden de voorlopige oplossing $z = 25/2$. Merk op dat $x_4 = 0$.
Om verder te kunnen werken, moeten alle variabelen die 0 zijn geworden naar rechts verhuizen. Dit kan door x_1 te substitueren in alle vergelijkingen. We krijgen:
$z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4$
$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$
$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$
$x_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4$
Merk op dat de vergelijking van x_1 is toegevoegd en de vergelijking van x_4 is weggevallen (deze was toch $x_4 = 0$).
We proberen de waarde van z verder op te hogen. Dit kan enkel door x_3 op te hogen. De maximale waarde voor x_3 is 1, aangezien $x_i \geq 0$. De vergelijking voor $x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$.
Het nieuwe stelsel:
$z = 13 - 3x_2 - x_4 - x_6$
$x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6$
$x_3 = 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6$
$x_5 = 1 + 5x_2 + 2x_4$
We hebben de oplossing gevonden. $z = 13$, aangezien $x_i \geq 0$. De waarden van de andere variabelen zijn onmiddellijk af te lezen. Merk op dat $x_5 = 1$. Deze variabele was de spelingsvariabele. Als we $x_1 = 2, x_2 = 0$ *en* $x_3 = 1$ invullen in vergelijking $4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$, dan krijgen we $10 \leq 11$. De speling is inderdaad 1.

5.2 Dictionairs

De bovenstaande oplossingsmethode kan ook algemeen opgesteld worden. De opdracht is als volgt:
Maximaliseer $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
Zodanig dat $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$
$x_j \geq 0$ voor $i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$

Dit vormen we om naar:
$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ voor $i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n$

Bovenstaand stelsel wordt een dictionair genoemd, omdat de waarden die gezogd worden onmiddellijk af te lezen zijn uit de vergelijkingen.
Wanneer we de waarde 0 kiezen voor de variabelen aan de rechterkant, dan vinden we een toelaatbare oplossing (wat logisch is, want het is dan rechtstreeks een oplossing van het stelsel). Dictionairs die deze eigenschap bezitten, heten toelaatbare dictionairs. Merk op dat niet alle toelaatbare oplossingen kunnen worden voorgesteld worden met een toelaatbare dictionair. Zo kan de toelaatbare oplossing $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 5, x_6 = 3$ niet voorgesteld worden door een toelaatbare dictionair.
Oplossingen die beschreven worden met een dictionair worden basisoplossingen genoemd. Van zodra een

basisoplossing een variabele heeft met een waarde die strikt kleiner is dan 0, dan spreken we over een ontoelaatbare basisoplossing.

Variabelen aan de linkerkant van de dictionair heten basisvariabelen, de variabelen aan de rechterkant heten niet-basisvariabelen. De basisvariabelen vormen de basis. De vergelijking die de sterkste beperking oplegt en dus omgevormd moet worden (om te substitueren in de andere vergelijkingen), heet de spilrij.

Verder vermelt de cursus dat de volgorde van de vergelijkingen in een dictionair niet worden gesorteerd volgens de index van de basisvariablen om zo 'de relatie tussen de dictionair en het oorspronkelijke model te behouden'. Dit is een heel mooie filosofie, maar aan zulke futuliteiten zullen we geen tijd verspillen.

6 De simplex methode - deel 2

In het vorige hoofdstuk hebben we de simplex methode behandeld. Dit hoofdstuk behandelt de vraag of de simplex methode wel altijd kan worden toegepast.

6.1 Iteratie

Kunnen we vastlopen in een iteratie?
Voor deze stap moeten we een inkomende variabele selecteren een een uitgaande variabele vinden.
De inkomende variabele is een niet-basisvariabele met een positieve coëfficiënt op de eerste rij van de dictionair (de doelfunctie). Indien er geen positieve coëfficiënten te vinden zijn, dan is de dictionair optimaal. Bij meerdere mogelijkheden, maakt het niet uit welke inkomende variabele gekozen wordt.
De uitgaande variabele is de basisvariabele waarvan de overeenkomstige vergelijking de meest strikte bovengrens oplegt aan de stijging van de inkomde variabele. Ook hier kunnen er veel of geen te vinden zijn. In het eerste geval moet je er gewoon één kiezen. In het tweede geval is er geen bovengrens en is de oplossing dus onbegrensd.

6.2 Gedegenereerdheid

Wanneer meerdere variabelen de basis kunnen verlaten, heeft dat een aantal consequenties. Beschouw het volgende voorbeeld:
$z = 2x_1 - x_2 + 8x_3$
$x_4 = 1 - 2x_3$
$x_5 = 3 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3$
$x_6 = 2 + x_1 - 3x_2 - 4x_3$
De meest strikte beperking voor x_3 is 1/2. Dit geldt voor alle vergelijkingen. We kiezen de vergelijking van x_4 als de spilrij. Substitutie geeft ons:
$z = 4 + 2x_1 - x_2 - 4x_4$
$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4$
$x_5 = -2x_1 + 4x_2 + 3x_4$
$x_6 = x_1 - 3x_2 + 2x_4$

De basisvariabelen x_5 en x_6 hebben waarde 0.
In de volgende stap van de iteratie is x_1 de inkomende variabele en x_5 de uitgaande variabele. x_1 is in dit geval 0. z blijft dus onveranderd, de dictionair is gedegenereerd. Dit verschijnsel kan een aantal keer voorkomen, maar is onschuldig. De volgende iteratie is weer gedegenereerd. De iteratie daarna is niet gedegenereerd (en optimaal).

Het is weliswaar mogelijk dat we er nooit uitgeraken en dat we blijven itereren zonder dat de waarde van z verhoogt. Na verloop van tijd zullen we dan opnieuw dezelfde dictionair tegenkomen. Dit heet cykelen.

6.3 Begin

Kunnen we wel beginnen met de simplex methode?
De simplex methode begint normaliter met:
$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ voor $i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n$
De voorwaarde van dit stelsel is dat b_i allen positief zijn (anders is de oorsprong geen toelaatbare oplossing). Het kan perfect voorkomen dat dit niet zo is. Een voorbeeld:

Maximaliseer $x_1 - x_2 + x_3$
zodanig dat
$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -5$
$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1$
$x_i \geq 0$ voor $i = 1 \dots 3$

De oplossing is eenvoudig. Introduceer een extra variabele x_0 en vorm het stelsel om naar:

$w = -x_0$
$x_4 = 4 - (2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0)$
$x_5 = -5 - (2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0)$
$x_6 = -1 - (-x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0)$

De bedoeling van dit hulpprobleem is om w te maximaliseren. Ingaand = x_0 en uitgaand = x_5 geeft:

$w = -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5$
$x_4 = 9 - 2x_2 - x_3 + x_5$
$x_0 = 5 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5$
$x_6 = 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5$

We hebben x_5 gekozen als uitgaande variabele, omdat deze de kleinste b-waarde bevat. (Indien we bijvoorbeeld x_6 hadden gekozen als uitgaande variabele, dan was x_5 nog steeds negatief.)
De laatste dictionair van het sub-probleem:

$w = -x_0$
$x_4 = 3 - x_1 - x_6 + 2x_0$
$x_3 = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{5}x_6 - \frac{4}{5}x_0$
$x_2 = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6 - \frac{3}{5}x_0$

Het hulpprobleem is opgelost. Om dit stelsel om te vormen tot het oorspronkelijke probleem, moet je gewoon x_0 negeren. De doelfunctie is terug de oorspronkelijke doelfunctie. Merk op dat er basisvariabelen in de doelfunctie kunnen zitten. Deze moeten eruit. Gebruik hiervoor substitutie:

$z = x_1 - (\frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6) + (\frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{5}x_6)$

$z = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_5 + \frac{2}{5}x_6$
$x_4 = 3 - x_1 - x_6$
$x_3 = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{3}{5}x_6$
$x_2 = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_6$

Wanneer x_0 een basisvariabele is en de waarde van w is niet nul, dan bestaat er geen toelaatbare oplossing voor het oorspronkelijke probleem.

6.4 Matrixbeschrijving

De bedoeling van deze sectie is het vereenvoudigen van de simplex methode tot het uitvoeren van enkele simpele matrix bewerkingen.
Het bovenstaande stelsel kan omgevormd worden tot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix},\ c = \left(\tfrac{1}{5}, 0, 0, 0, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}\right)$$

of beter

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ c_B = \left(0,0,0\right),\ A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix},\ x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix},\ c_N = \left(\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}\right)$$

In het laatste stelsel zijn de matrices opgesplitst volgens basis- en niet-basisvariabelen.
$Ax = B$
$A_B x_B = b - A_N x_N$
$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$
$z = c_B x_b + c_N x_N$
$z = c_B(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N x_N = c_B A_B^{-1} b + (c_N - c_B A_B^{-1} A_N) x_N$

Als we A_B^{-1} afkorten tot B^{-1}, dan moeten we volgend stelsel oplossen:
$z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} A_N) x_N$
$x_B = B^{-1} b - B^{-1} A_N x_N$

Een voorbeeld:
$z = x_1 + 4x_2$
$x_1 + 2x_2 \leq 6$
$2x_1 + x_2 \leq 8$
$x_i \geq 0$

Gegeven dat de optimale basissamenstelling gelijk is aan (x_2, x_4):

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$z = 12 + \left(\left(1,0\right) - \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$z = 12 - x_1 - 2x_3$
$x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3$
$x_4 = 5 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3$

De cursus is er niet zo duidelijk in, maar een oplossing vinden via de matrixvorm heeft uiteraard enkel zin indien de basisvariabelen op voorhand gekend zijn.

7 Dualiteit

Elk maximalisatie LO probleem in standaard vorm correspondeert met een minimalisatie LO probleem, genaamd het duale probleem of de duaal. Deze twee problemen zijn op een interessante en fundamentele wijze met elkaar verbonden. Elke toelaatbare oplossing in het ene probleem levert een grens op voor de optimale waarde van het andere probleem. Als één van de twee problemen een optimale oplossing heeft, dan heeft de andere ook een optimale oplossing, en de waarden van die twee optimale oplossingen zijn identiek. Dit feit staat bekend als de dualiteitsstelling, en is het onderwerp van dit hoofdstuk.

Voorbeeld:
$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$
$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1$
$5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55$
$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3$
$x_i \geq 0$
Het optellen van de tweede en derde beperking levert:
$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$
$z = 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$
Dit is een bovengrens voor z. Natuurlijk is dit maar wat giswerk en dat kan niet de bedoeling zijn.
Vandaar dat we gaan werken met onbekenden. Voor ons voorbeeld:
$(y_1 + 5y_2 - y_3)x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3)x_3 + (3y_1 + 8y_8 - 5y_3)x_4 \leq y_1 + 55y_2 + 3y_3$
Er geldt $y_i \geq 0$ (anders slaat de ongelijkheid om).
Het vinden van een bovengrens voor z gaat enkel als de coëfficiënten die we vinden groter of gelijk zijn aan de coëfficiënten van z. (Je kan namelijk moeilijk zeggen dat $x_1 + 2x_2 \leq 999x_1 + x_2$.) Dus:
$y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4$
$-y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1$
$-y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5$
$3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3$
De bedoeling is om de kleinste bovengrens te vinden voor z. We krijgen een alternatief probleem, voorgesteld door de duaal (het oorspronkelijke probleem heet de primaal). De kleinste bovengrens vinden is een minimalisatieprobleem. De duaal:
$z = y_1 + 55y_2 + 3y_3$
$y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4$
$-y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1$
$-y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5$
$3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3$
$y_i \geq 0$

Merk op dat de coëfficiëntenmatrix van de duaal de getransponeerde is van deze van de primaal. De duaal van de duaal is dus opnieuw de primaal.

De duaal van
Maximaliseer $\sum_{i=1}^{n} c_j x_j$
zodanig dat $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j$
wordt gedefinieerd als
Minimaliseer $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
zodanig dat $\sum_{i=1} a_{ij} y_i \geq c_j$

7.1 De dualiteitsstelling

Als de primaal een optimale oplossing $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ heeft, dan heeft de duaal een optimale oplossing $(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ zodanig dat: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$
Het bewijs laten we achterwege.

7.2 De relatie tussen het primale en duale probleem

De primaal en de duaal zijn equivalent. Het primale probleem heeft een oplossing als en slechts als het duale probleem een optimale oplossing heeft. Als het primale probleem onbegrensd is, dan is het duale probleem

ontoelaatbaar (en vice versa). Het is vreemd genoeg wel mogelijk dat zowel de primaal als de duaal ontoelaatbaar kunnen zijn:
$z = 2x_1 - x_2$
$x_1 - x_2 \leq 1$
$-x_1 + x_2 \leq 2$
Dit probleem is ontoelaatbaar. De duaal van het probleem is ook ontoelaatbaar.
Als zowel de primaal als de duaal een oplossing hebben, dan bestaat er een optimale oplossing.

Beschouw de laatste dictionair van het probleem aan het begin van dit hoofdstuk:
$z = 29 - x_1 - 2x_3 - 11x_5 - 6x_7$
$x_2 = 14 - 2x_1 - 4x_3 - 5x_5 - 3x_7$
$x_4 = 5 - x_1 - x_3 - 2x_5 - x_7$
$x_6 = 1 + 5x_1 + 9x_3 + 21x_5 + 11x_7$
De coëfficiënten in de z-rij voor de spelingsvariabelen zijn: $x_5 : -11, x_6 : 0, x_7 : -6$. x_5 is de spelingsvariabele van de eerste rij. De coëfficiënt die hoort bij de eerste rij van het duale probleem is y_1. Voor x_6 is dat y_2 en voor x_7 is dat y_3. Ken nu voor elk van deze variabelen het tegengestelde van bovenstaande waarden toe aan de corresponderende variabelen van het duale probleem en we krijgen:
$y_1 = 11,\ y_2 = 0,\ y_3 = 6$. Vul deze in in het duale probleem en kijk wat het geeft.

7.3 Complementary slackness

Stelling: Laat $x_1^*, \ldots, x_n^*$ een optimale oplossing zijn en laat $y_1^*, \ldots, y_m^*$ een optimale oplossing zijn van het duale probleem. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor simultane optimaliteit zijn:
$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j \ of \ x_j^* = 0$
en
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^* = b_i \ of \ y_i^* = 0$
Het bewijs laten we achterwege.

Stelling (complementary slackness): Een toelaatbare oplossing $x_1^*, \ldots, x_n^*$ is optimaal als en slechts als wanneer er getallen $y_1^*, \ldots, y_m^*$ bestaan zodanig dat
$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j$ telkens wanneer $x_j^* > 0$
$y_i^* = 0$ telkens wanneer $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i$
en zodanig dat
$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j$
$y_i^* \geq 0$
Het bewijs laten we ook hier achterwege.

De laatste stelling kan gebruikt worden om de optimaliteit van een oplossing te verifiëren. Een voorbeeld:
$z = 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 4x_4 + 11x_5$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 1$
$x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 1$
$5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 22$
Er wordt beweerd dat $x_1^* = 0, x_2^* = 2, x_3^* = 0, x_4^* = 7, x_5^* = 0$ de optimale oplossing is. Stel gewoon de vergelijkingen $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j$ op telkens wanneer $x_j^* > 0$:
$-3y_1^* + 7y_2^* + 4y_3^* = -9$
$y_1^* - 2y_2^* + 2y_3^* = 4$
Stel ook de vergelijkingen $y_i^* = 0$ op telkens wanneer $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i$:
$y_2^* = 0$
Dit stelsel heeft een unieke oplossing: $(17/5, 0, 3/10)$. Deze oplossing voldoet niet aan de voorwaarde $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j$ voor $j = 3$ (reken dit na). De claim dat de optimale oplossing werd gevonden is dus fout. Merk op dat de voorwaarde $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j$ enkel moet gecontroleerd moet worden telkens wanneer $x_j^* \leq 0$, aangezien $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j$ impliceert dat $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j$.

Stelling: Als $x_1^*, \ldots, x_n^*$ een niet-gedegenereerde basisoplossing is, dan heeft $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j$ een unieke

oplossing.
Het bewijs laten we achterwege.

7.4 Economische betekenis

Definitie: De schaduwprijs van beperking i van een LO-model in de standaardvorm is het bedrag waarmee de optimale z-waarde verbetert per eenheid toename van het rechterlid b_i op voorwaarde dat na deze toename van het rechterlid de huidige basissamenstelling behouden blijft.
Het is makkelijk in te zien dat een verhoging van een b_i met één eenheid, de z-waarde doet toenemen met de duale variabele y_i. y_i is namelijk de hoeveelheid van deze vergelijking dat genomen wordt om tot de optimale z waarde te komen.
Dus: nieuwe optimale z-waarde = oude optimale z-waarde + Δ schaduwprijs van beperking i.

7.5 Algemene LO-problemen

Een algemeen LO-probleem kan gedefinieerd worden als:
maximaliseer $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
zodanig dat
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b \Rightarrow i \in G$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b \Rightarrow i \in O$
$x_j \geq 0 \Rightarrow j \in R$
$x_j \ o.i.t. \Rightarrow j \in V$

De duaal:
minimaliseer $\sum_{i=1}^{n} b_i y_i$
zodanig dat
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$ voor $j \in R$
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$ voor $j \in V$
$y_i \geq 0$ voor $i \in O$

Voorbeeld:
$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$
$5x_1 - 3x_2 + x_3 = -8$
$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 23$
$6x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 1$
$x_1 \leq 4, \ x_3 \geq 0$

Herschrijven:
$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$
$5x_1 - 3x_2 + x_3 = -8$
$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 23$
$-6x_1 - 7x_2 - 3x_3 \leq -1$
$x_1 \leq 4, \ x_3 \geq 0$

De duaal:
$z = -8y_1 + 23y_2 - y_3 + 4y_4$
$5y_1 + 4y_2 - 6y_3 + y_4 = 3$
$-3y_1 + 2y_2 - 7y_3 = 2$
$y_1 + 8y_2 - 3y_3 \geq 5$
$y_2, y_3, y_4 \geq 0$

De duaal kan ook meteen opgeschreven worden uit de primaal. We krijgen:
$z = -8y_1 + 23y_2 + y_3 + 4y_4$
$5y_1 + 4y_2 + 6y_3 + y_4 = 3$
$-3y_1 + 2y_2 + 7y_3 = 2$
$y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 5$
$y_2, y_4 \geq 0, y_3 \leq 0$

De twee dualen zijn niet identiek, maar wel equivalent.

8 Gevoeligheidsanalyse

8.1 Voorbeeld

$z = 300x_1 + 200x_2$
$2x_1 + x_2 \leq 100$
$x_1 + x_2 \leq 80$
$x_1 \leq 40$
$x_i \geq 0$

De laatste dictionair:
$z = 18000 - 100x_3 - 100x_4$
$x_2 = 60 + x_3 - 2x_4$
$x_5 = 20 + x_3 - x_4$
$x_1 = 20 - x_3 + x_4$

De optimale oplossing: $z = 18000, x_1 = 20, x_2 = 60, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 20$

8.1.1 Het wijzigen van een doelfunctiecoëfficiënt

Grafisch gezien is de helling van de doelfunctie $-3/2$. Als we de coëfficiënt van x_1 in de z-functie laten stijgen, kan het zijn dat de optimale oplossing verandert. Dit is het geval wanneer de steilheid van de eerste beperking wordt overtroffen. Dus wanneer $c_1 > 400$. De nieuwe optimale oplossing wordt $(40, 20)$. Merk op dat x_5 dan uit de basis verdwijnt en x_4 dan in de basis verschijnt. Hetzelfde kan uiteraard gebeuren wanneer de coëfficiënt daalt (waardoor de functie minder steil wordt). Dit gebeurt wanneer $c_1 < 200$. $[200, 400]$ is dan ook het stabiliteitsinterval voor c_1.

8.1.2 Het wijzigen van een rechterlid

Wat gebeurt er als we b_1 wijzigen? Dit kan je grafisch zien in figuur 8.2 (in de cursus). De rechte zal evenwijdig verschuiven. Het snijpunt dat bij het optimum hoort zal verschuiven, maar dit snijpunt blijft het optimum zolang het snijpunt toelaatbaar blijft. Voor $80 \leq b_1 \leq 120$ blijft de basissamenstelling behouden. $[80, 120]$ is het stabiliteitsinterval voor b_1. Zolang b_1 in dit interval blijft, zullen enkel de eerste twee beperkingen belangrijk zijn. De nieuwe coördinaten kunnen gevonden worden door het volgende stelsel op te lossen:
$2x_1 + x_2 = 100 + \Delta$
$x_1 + x_2 = 80$
Dit geeft $x_1 = 20 + \Delta, x_2 = 60 - \Delta$. De nieuwe optimale waarde van $z = 300(20 + \Delta) + 200(60 - \Delta) = 18000 + 100\Delta$

8.2 Algemene gevoeligheidsanalyse

We zullen de formules die we aan het einde van hoofdstuk 6 hebben gevonden gebruiken voor de algemene gevoeligheidsanalyse. We herhalen de matrixbeschrijving van een dictionair:
$z = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} A_N) x_N$
$x_B = B^{-1} b - B^{-1} A_N x_N$
Zoals je kan zien speelt B^{-1} een belangrijke rol. Het inverteren van een matrix is echter een rekenintensieve

berekening. Het kan veel makkelijker, op voorwaarde dat je de laatste dictionair hebt gevonden.

Het voorbeeld dat voor deze sectie zal gebruikt worden:
$z = 1800x_1 + 900x_2 + 600x_3$
$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$
$4x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 20$
$2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 8$
$x_2 \leq 5$
$x_i \geq 0$
Zijn laatste dictionair:
$z = 8400 - 150x_2 - 300x_5 - 300x_6$
$x_4 = 24 + 2x_2 - 2x_5 + 8x_6$
$x_3 = 8 + 2x_2 - 2x_5 + 4x_6$
$x_1 = 2 - \frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{3}{2}x_6$
$x_7 = 5 - x_2$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.2.1 Het wijzigen van een doelfunctiecoëfficiënt

We gaan zoals in het vorige voorbeeld telkens bekijken hoe we precies kunnen bepalen voor welke waarde van een doelfunctiecoëfficiënt de optimale oplossing ongewijzigd blijft.

Geval 1: De doelfunctiecoëfficiënt hoort bij een niet-basisvariabele De niet-basisvariabelen worden voorgesteld door c_N. Enkel z zal veranderen. Als een coëfficiënt met Δ verandert, dan zal de corresponderende coëfficiënt in de z-rij met Δ veranderen. De enige voorwaarde die geldt, is het feit dat $(c_N - c_B B^{-1} A_N)x_N \leq 0$ voor elke coëfficiënt. Stel dat we c_2 veranderen naar $c_2 + \Delta$, dan krijgen we $\overline{c_2} = -150 + \Delta$. Hieruit mogen we besluiten dat wanneer $\Delta \leq 150$, de basis optimaal blijft. Het stabiliteitsinterval van $c_2 = [-\infty, 1050]$.

Een andere manier om tot 1050 te komen is via de duaal:
$w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 + 5y_4$
$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 1800$
$6y_1 + 2y_2 + \frac{3}{2}y_3 + y_4 \geq 900$
$y_1 + \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \geq 600$
$y_i \geq 0$
c_2 slaat op de tweede vergelijking. Vul daar de optimale oplossing in $y^* = (0\ 300\ 300\ 0)$.
De gereduceerde kost van eeen beslissingsvariabele x_j is de coffiënt van x_j in de z-rij van het laatste dictionair, vermenigvuldigd met -1.
De gereduceerde kost van $x_2 = 150$.

Geval 2: De doelfunctiecoëfficiënt hoort bij een basisvariabele Een basisvariabele komt overeen met c_B. Dit heeft invloed op elke coëfficiënt in de z-rij. Veronderstel dat de doelfunctiecoëfficiënt van x_1 in het voorbeeld wijzigt van c_1 naar $c_1 + \Delta$, dan krijgen we:
$\overline{c_2} = -150 - \frac{5}{4}\Delta$
$\overline{c_5} = -300 + \frac{1}{2}\Delta$
$\overline{c_6} = -300 - \frac{3}{2}\Delta$
$\Rightarrow -120 \leq \Delta \leq 600$

Het gaat ook via de duaal:
Omdat $x_1 > 0$ en $x_3 > 0$, geldt:
$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 = c_1$
$y_1 + \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 = 600$
Omdat $y_1 = 0$:
$y_2 = 1200 - \frac{1}{2}c_1$
$y_3 = -2400 + \frac{3}{2}c_1$
Omdat ook $y_4 = 0$:
$y_2 \geq 0 \Rightarrow c_1 \leq 2400$
$y_3 \geq 0 \Rightarrow c_1 \geq 1600$
$6y_1 + 2y_2 + \frac{3}{2}y_3 + y_4 \geq 900 \Rightarrow c_1 \geq 1680$
Hetgene overeenkomt met $-120 \leq \Delta \leq 600$

8.2.2 Het wijzigen van een rechterlid

Enkel b zal veranderen. Dit wil zeggen dat de coëfficiënten van de z-rij niet zullen veranderen. Enkel de waarden van de basisvariabelen zullen veranderen. Dit kan een probleem opleveren, omdat de basis dan niet-toelaatbaar kan worden. Ook hier is een gelijkaardige berekening mogelijk.
Stel dat b_2 wijzigt. We krijgen:

$$B^{-1}b = B^{-1}\begin{pmatrix}48\\20\\8\\5\end{pmatrix} + B^{-1}\begin{pmatrix}0\\\Delta\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\8\\2\\5\end{pmatrix} + \Delta\begin{pmatrix}2\\2\\-0.5\\0\end{pmatrix}$$

De coëfficiënten moeten positief blijven, dus:
$-4 \leq \Delta \leq 4$

8.2.3 Het wijzigen van een technologische coëfficiënt

Wanneer het gaat om een niet-basisvariabele, moeten enkel de coëfficiënten van de z-rij gecontrolleerd worden. Wanneer het gaat om een basis-variabele, dan moeten zowel de coëfficiënten van de z-rij gecontrolleerd worden als de nieuwe waarden van de basisvariabelen.

9 Speltheorie

De opbrengstentabel voor steen-papier-schaar (of schaar-steen-papier):

	Steen	Papier	Schaar
Steen	0	-1	1
Papier	1	0	-1
Schaar	-1	1	0

Stel je voor dat we het spel een onbeperkt aantal keer spelen. De kans dat we steen zijn is x_1, de kans dat we papier zijn is x_2 en de kans dat we schaar zijn is x_3. Logischerwijs geldt dat $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
Als de tegenstander steen kiest, dan is de opbrengst $x_2 - x_3$. Voor papier is dit $-x_1 + x_3$ en voor schaar is dit $x_1 - x_2$. Het minimum van elk van deze uitdrukkingen moet gemaximaliseerd worden. Dit komt neer op het maximaliseren van datgene wat de rijspeler zichzelf tenminste kan garanderen aan opbrengst. Dit komt overeen met een LO-probleem:
Max v
zdd
$v - x_2 + x_3 \leq 0$
$v + x_1 - x_3 \leq 0$
$v - x_1 + x_2 \leq 0$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Voor de tegenstander geldt:
Min w
zdd
$w + y_2 - y_3 \geq 0$
$w - y_1 + y_3 \geq 0$
$w + y_1 - y_2 \geq 0$
$y_1 + y_2 + y_3 = 1$
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Opbrengst betekent hier datgene wat de kolomspeler verliest aan de rijspeler. Dat bedrag moet dus zo laag mogelijk zijn.

Wat zien we nu? De twee gegeven LO-problemen zijn elkaars duaal!
Sterke dualiteit zegt dat hetgene wat de rijspeler verdient gelijk is aan hetgene wat de kolomspeler zich kan garanderen.
De waarde van een spel is het bedrag waarvan de rijspeler weet dat dat het hoogste bedrag is dat het zich kan garanderen. Voor de kolomspeler is dat het kleinste bedrag dat het gaat verliezen.
De waarde van dit spel is 0. Dit wordt ook wel een eerlijk spel genoemd. Dit is ook niet verrassend, omdat dit een symmetrisch spel is (voor de opbrengstenmatrix geldt $a_{ij} = -a_{ji}$).

9.1 Algemeen

Algemeen kunnen we een opbrengstenmatrix opstellen:

	Kolom 1	...	Kolom m
Rij 1	a_{11}	...	a_{1m}
...	...	...	...
Rij n	a_{n1}	...	a_{nm}

De keuze van de rijspeler wordt voorgesteld door x_i, die van de kolomspeler door y_j. De gemiddelde uitbetaling wordt: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j$. De minimale uitbetaling is $min_y \; xAy = min_{j=1,\ldots,m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$.
De LO-problemen:

$z = v$
$v - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq 0$
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$
$x_i \geq 0$

$z = w$
$w - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \geq 0$
$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$
$y_i \geq 0$

Aangezien deze twee problemen elkaars primaal-duaal paar zijn, geldt dat
$min_y x^* Ay = max_x xAy^*$

10 Data envelopment analyse

10.1 Efficiëntie

Efficiëntie: De verhouding van de geleverde prestaties tot de vebruikte middelen.

Bekijk de volgende tabel:

Ploeg	Lonen	Punten	Toeschouwers
Club Brugge	13	59.6	26
Cercle Brugge	3	44.0	5.5
Roeselare	3	33.2	4.5
Zulte-Waregem	4	45.8	5.5

Club Brugge haalt 4.58 punten per euro loon dat wordt uitbetaald.
Roeselare doet het beter met 11.07. Zulte-Waregem doet het nog beter met 11.45 en Cercle Brugge doet het het best met 14.67. De relatieve efficiëntie is de efficiëntie vergelijken met de efficiëntie van degene die het best presteert. In dit geval heeft Cercle Brugge een efficiëntie van 100%, Club Brugge 31.2%.

10.2 De efficiëntie enveloppe

Bekijk de volgende tabel

Ploeg	Punten per loon	Toeschouwers per loon
Club Brugge	4.58	2
Cercle Brugge	14.67	1.83
Roeselare	11.07	1.5
Zulte-Waregem	11.45	1.38

Als we de twee variabelen in de tabel uitzetten op een grafiek (figuur 10.1), dan zien we dat Club Brugge en Cercle Brugge aan de buitenkant liggen, terwijl de twee andere ploegen binnen de veelhoek liggen. Dat wil zeggen dat deze twee ploegen met dezelfde middelen efficiënter zouden kunnen werken.

10.3 Data envelopment analyse

Input 1: Lonen
Input 2: Inwoners van de stad
Output 1: Gemiddeld aantal punten per seizoen
Output 2: Gemiddeld aantal toeschouwers per match
Output 3: Verhouding tussen eigen vermogen (EV) en vreemd vermogen (VV)

	Input		Output		
Ploeg	Lonen	Inwoners	Punten	Toeschouwers	EV/VV
Club Brugge	13	117	59.6	26	1.28
Cercle Brugge	3	117	44	5.5	0.02
Roeselare	3	57	33.2	4.5	0.13
Zulte-Waregem	4	36	45.8	5.5	2

t_i = waarde per eenheid van output o, w_i = kost per eenheid van input i.
Bijvoorbeeld de efficiëntie van Club Brugge = $\frac{59.6t_1+26t_2+1.28t_3}{13w_1+117w_2}$
Een ploeg zal de waarden van t_i en w_i zo kiezen, dat het zijn efficiëntie maximaliseert.
De voorwaarden:
De efficiëntie kan niet groter zijn dan 1.
De totale kost van de inputs is gelijk aan 1.
De gewichten zijn niet-negatief.

Elke ploeg kan nu een maximaliseringsmodel opstellen. Voor Club Brugge is dit:
$z = 59.6t_1 + 26t_2 + 1.28t_3$
$59.6t_1 + 26t_2 + 1.28t_3 - 13w_1 - 117w_2 \leq 0$
$44t_1 + 5.5t_2 + 0.02t_3 - 3w_1 - 117w_2 \leq 0$
$33.2t_1 + 4.5t_2 + 0.13t_3 - 3w_1 - 57w_2 \leq 0$
$45.8t_1 + 5.5t_2 + 2t_3 - 4w_1 - 36w_2 \leq 0$
$13w_1 + 117w_2 = 1$
$t_i, w_i \geq 0$

Dit levert volgende resultaten:
Relatieve efficiëntie Club Brugge = 1, Cercle Brugge = 1, Roeselare = 0.94, Zulte-Waregem = 1.

10.4 Schaduwprijzen

In dit onderdeel proberen we de gemakkelijkste weg naar efficiëntie te vinden. Beschouw de schaduwprijzen λ_i van Roeselare (Zie sectie 7.4 voor de betekenis van een schaduwprijs.):
$\lambda_1 = 0.023, \lambda_2 = 0.313, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0.393$
Neem de lineaire combinatie van de outputvectoren met de schaduwprijzen:

$$0.023\begin{pmatrix}59.6\\26\\1.28\end{pmatrix} + 0.313\begin{pmatrix}44\\5.5\\0.02\end{pmatrix} + 0.393\begin{pmatrix}45.8\\5.5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}33.2\\4.5\\0.82\end{pmatrix}$$

Hetzelfde voor de input geeft:

$$\begin{pmatrix}2.8\\53.46\end{pmatrix}$$

Dit zijn de streefdoelen voor Roeselare.

Voor de bovenstaande lineaire combinatie van ploegen is elke output ten minste de output van Roeselare en elke input ten hoogste de input van Roeselare.

10.5 Efficiëntie vs effectiviteit

Efficiëntie: De mate waarin een organisatie haar activiteiten goed aanpakt.
Effectiviteit: De mate waarin een organisatie haar doelstellingen haalt.

De optimale waarden voor in en output voor Cercle Brugge:
$t_1 = 0.004$
$t_2 = 0$
$t_3 = 0$
$w_1 = 0.238$
$w_2 = 0.002$

Een goed bestuurde voetbalploeg moet op al haar activiteiten efficiënt zijn. We zouden kunnen opleggen dat elk outputgewicht ten minste een fractie α bedraagt van de totale som aan outputgewichten. Hetzelfde kan gezegd worden over een fractie β vor elk inputgewicht. Voor de keuze $\alpha = \beta = 0.1$ krijgen we volgende beperkingen die aan elk model moet toegevoegd worden:
$0.9t_1 - 0.1t_2 - 0.1t_3 \geq 0$
$0.9t_2 - 0.1t_1 - 0.1t_3 \geq 0$
$0.9t_3 - 0.1t_1 - 0.1t_2 \geq 0$
$0.9w_1 - 0.1w_2 \geq 0$
$0.9w_2 - 0.1w_1 \geq 0$

$[t_1 - 0.1(t_1 + t_2 + t_3) = 0.9t_1 - 0.1t_2 - 0.1t_3]$

Efficiëntie Club Brugge = 0.56, Cercle Brugge = 0.48, Roeselare = 0.63, Zulte-Waregem = 1