Strjála Glósur

Heimir Snær Vilhjálmsson

Contents

Alskonar Glósur frá mér

Truth table

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T	T	F
F	F	T	T	F	F	F	T	T

$p \wedge q$ = AND / $p \vee q$ = OR / $p \oplus q$ = XOR / $p \to q$ = if-then

Kvantarar

Það eru tver kvanterar sem eru notaðir: $\forall$ og $\exists$.
$\forall$: Þessi sentur fyrir allt þannig dæmi væri.
$L(x, y)$ Það er nemandi x sem hefur klára námskeð y.
$\forall x(L(x, y))$ Segir okkur að allir nemendur hafa klárað námskeð y.
$\exists$: Þessi sentur fyrir eitt stak dæmi væri.
$L(x, y)$ Það er nemandi x sem hefur klára námskeð y.
$\exists x(L(x, y))$ Segir okkur að það er til nemandi sem hefur klára námskeð y.

Mengi

Gott að hafa í huga að eftirfarandi er satt.
$A \vee B \equiv A \cup B \quad A \wedge B \equiv A \cap B$

Þýðir að n er jákvæð heiltala $n \in \mathbb{Z}_+$

Dæmi úr síni prófum

Dæmi 1

Síni próf 1

p	q	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$q \rightarrow p$	$(p \wedge (\neg q)) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F

Er ekki sísana

Síni próf 2

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg(p \wedge q))$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	F	T	T	T

Er ekki sísana

Dæmi 2

Síni próf 1
Gefnar eru eftirfarandi opnar yrðingar
$L(x, y)$: nemandi x hefur lokið námskeiðinu y.
$S(x, y)$: nemandi x má skrá sig í námskeiðið y.
$U(x)$: nemandi x er útskrifaður.
Ritið eftirfarandi staðhæfingar í a) og b) með því að nota eftir því sem við á tilvistarkvantara, allsherjarkvantara, rökfræðileg tákn, og $L(x, y)$, $S(x, y)$ og $U(x)$.
a) Einar hefur ekki lokið Tölvuhögun og má ekki skrá sig í Tölvusamskipti.

$(\neg(L(\text{Einar,Tölvuhögun}) \wedge S(\text{x,Tölvusamskipti})))$

b) Enginn nemandi getur útskrifast án þess að hafa lokið bæði Forritun og Reikniritum.

$\forall x \neg U(x) \rightarrow L(x, Forritun) \wedge L(x, Reikniritum)$ **Líklega í réttu átt**

c) Gerum ráð fyrir að $\forall x \exists y (L(x, y))$ og $\exists y \forall x (\neg L(x, y))$ gildi. Úrskurðið þá fyrir hvert af eftirfarandi, hvort það hlýtur að gilda, getur ekki gilt eða óvíst er hvort það gildir, því ekki liggja fyrir nægar upplýsingar til að segja til um það. Setjið einn kross í hverja línu.

$\exists x \forall y (\neg L(x, y))$ Hlýtur að gilda
$\forall x \exists y (\neg L(x, y))$ Hlýtur að gilda
$\exists y \forall x (L(x, y))$ Hlýtur að gilda

1 KHR 1

1.1 Yrðingarökfræði (e. Propositional Logic)

Yrðingarökfræði er í stutu bara sening sem er sönn eða ósönn.
Dæmi væri "er Reykjavík höfuðborg Íslands2" sem er sönn yrðing.
Það getur líka verið $5 + 5 = 10$ sem er sönn yrðing en $2 + 2 = 5$ sem er ekki sönn yrðing. Ef við erum með dæmi eins og $x + 2 = 9$ það er oppinn yrðing nama við vitum ekki eins og $x = 7$ þá er það sönn yrðing.

1.2 Beiting á rökfræði (e. Applications of Propositional Logic)

Dæmi um beiting á rökfræði með yrðingarökfræði.
p: Skilaboð eru skimuð fyrir vírusum.
q: Skilaboð voru send frá óþekktu kerfi.
Rituð eru eftirfarandi kerfisskilyrði mep p og q.
Þetta er annahvort $p \to q$ eða $q \to p$.

a) Skilaboð eru skimuð fyrir vírusum í hvert skifti sem þau berast frá óþekktu kerfi.
Þar sem segir að skilaboð voru send frá óþekktu kerfi og p segir að skilaboð voru skimuð þá er þetta dæmi $q \to p$

b) Skilaboð voru send frá óþekktu kerfi en voru ekki skimuð fyrir vírusum.
Þar sem sagt er að skilaboð voru send frá óþekktu kerfi "en" segjir okkur að það sé eins og $q \land \neg p$.

c) Það er nauðsilegt að skima skilaboðin fyrir vírusum í hvert sinn sem þau berast frá óþekktu kerfi.
Við sjáum það er "nauðsilegt" sem segir okkur að p þarf að vera True.
Þannig það segir okkur að $q \to p$.

d) Þegar skilaboð eru send ekki frá óþekktu kerfi eru þau ekki skimuð fyrir vírusum.
Við sjáum að dæmið segir "ekki" sem segir okkur að við erum með neitun.
Þannig við erum með $(\neg q) \to (\neg p)$.

1.3 Jafngildar yrðingar (e. Propositional Equivalences)

Dæmi um sísönnu sem þýðir að eitthvað er alltaf satt.
$(p \land q) \to p$ Skoðum þetta í sanntöflu.

p	q	$p \land q$	$(p \land q) \to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

Við sjáum að yrðingin er sísana þar sem $(p \land q) \to p$ skilar alltaf True.

Skoðum Jafngildi.
Við ætlum að byrja á að umskrifa yrðinguna.$(p \land q) \to p$.
Við notum regluna um leiðingu sem er $a \to b \equiv \neg a \lor b$

$$\begin{aligned}(p \land q) \to p &\equiv (\neg(p \land q)) \to p \quad \text{skv. leiðingar reglu í töflu 7 í bók.}\\ &\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor p \quad \text{skv. De Morgan}\\ &\equiv (\neg q \lor \neg p) \lor p \quad \text{skv. Vixlregla}\\ &\equiv \neg q \lor (\neg p \lor p) \quad \text{skv. tengireglu}\\ &\equiv \neg q \lor (p \lor \neg p) \quad \text{skv. Vixlregla}\\ &\equiv \neg q \lor T \quad \text{skv. Neitunarreglu}\\ &\equiv T \quad \text{skv. dominetion law}\end{aligned}$$

Svona erum við búin að sanna að yrðingin er sísana.
Gott að hafa í huga að nota De Morgan law snema en ekki þannig alltaf og reina að hópa saman eins stökum eins og p p. Muna líka að taka einna reglu í einnu og að þær líta eins út og í töfluni.

1.4 Umsagnir og kvantarar (e. Predicates and Quantifiers)

Látum $P(x)$: "x er mera en 5 klukustundir í skólanum" þetta er yrðingafall þar sem formengið er x er allir nemendur í skólanum.
Við ætlum að rita eftirfarandi yrðingar sem seningar.

a) $\exists x P(x)$: Til er nemandi sem er meyra en 5 klukustundir í skólanum.
b) $\forall x P(x)$: Allir nemendur eru meira en 5 klukustundir í skólanum.
c) $\exists x \neg x P(x)$: Til er nemandi sem er ekki meyra en 5 klukustundir í skólanum.
Ef við værum með $\neg \exists x P(x)$: þar segir okkur að það sé eingin nemandi eða eins og $\forall x$
d) $\forall x \neg P(x)$: Allir nemendur eru ekki meyra en 5 klukustundir í skólanum.

Gott er að hafa í huga að $\forall x \equiv \neg \exists x$ og öfugt $\exists x \equiv \neg \forall x$

Annað dæmi.
Látum $P(x)$: "x kann rúslensku" og $Q(x)$: "x kann c++".
Formengið er x er mengi nemanda í skólanum.
Þýðum eftirfarandi seningar yfir í kvantaratrðingar.

a) Til er nemandi sem kann bæði rúslensku og c++.
Svar: $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$. Best er að muna að eftir kvantara þá kemur svigi utanum það sem kvantararinn á við.
Ef við værum með $\exists x P(x) \wedge Q(x)$ þá erum við að segja að $\exists x$ gildi bara fyrir $P(x)$ en ekki bæði.
b) Til er nemandi sem kann rúslensku en ekki c++.
Svar: $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
c) Allir nemendur kunna annahvort rúslensku eða c++.
Svar: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
d) Um gildir að eingin nemandi kann rúslensku eða c++.
Svar: $\forall x(\neg(P(x) \vee Q(x)))$

1.5 Margfaldir kvantarar (e. Nested Quantifiers)

Ritum eftirfarandi yrðingu á Íslensku.
Atugum að x og y eru rauntölur.

a) $\forall x \exists y(x < y)$: Fyrir hvert x er til y sem er særa en x.

b) $\forall x \forall y(((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \rightarrow (xy \geq 0))$: Margfeldi tveggja jákvæða rauntalna eða 0 er jákvæð rauntala eða 0.

Atugum að x, y og z eru núna rauntölur menginu.

c) $\forall x \forall y \exists z(xy = z)$: Margfaldi tveggja rauntalna er rauntala.

Annað Dæmi um margfaldi.
Látum $W(x, y)$: "x hefur skoðað y" þar sem formengið x er mengi nemanda og formengið y er vefsíða.
Ritum eftirfarandi yrðingar á Íslensku.

a) $W(Sara, ruv.is)$: Sara hefur skoðað ruv.is

b) $\exists x W(x, stae.is)$: Til er nemandi sem hefur skoðað stae.is.

c) $\exists x W(\text{Jóhanes}, x)$: Jóhanes hefur skoðað einhverja vefsíðu.

d) $\exists x(W(\text{Assa, x}) \wedge W(\text{Signý, x}))$: Til er vefsíða sem bæði Assa og Signý hafa skðað.

e) $\exists x \forall y((x \neq \text{Davíð}) \wedge (W(\text{Davíð, y}) \rightarrow W(x, y)))$: það er annar nemandi en Davíð sem hefur skoðað allar vefsíður sem Davíð hefur skoðað.

Það þarf að muna ef við erum með $\exists x \forall y$ þá er eitt x sem breytist ekki en ef við erum með $\forall y \exists x$ þá erum við að breyta x eða með marga nemandur.

f) $\exists x \exists y \forall z((x \neq y) \wedge (W(x, z) \leftrightarrow W(y, z)))$: Það eru til tver mismundandi nemandur sem hafa skoða nákvæmlega sömmu síður.

Við sjáum að í W er x og y fyrsta stakið sem segir okkur að x og y eru nemendur og z er vefsíður en x og y er ekki sama meneskjan.

1.7 Sönnunaraðferðir (e. Introduction to Proofs)

Dæmi um sönnun að suma tveggja oddatalna er slétt tala.
Skilgerining á sléttri tölu er $m = 2k$ og á oddatölu er það $m = 2k + 1$
Látum m og n vera oddatölur.
Þá má rita að $m = 2k + 1$ og $n = 2l + 1$ þar sem $k, l \in z$
Fáum: $m + n = (2k + 1) + (2l + 1) = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1)$
athgum að $k + l + 1$ er heil tala, þar með er $2(k + l + 1)$ slétt tala og þar með er $m + n$ það líka.
Við höfum sannað að summa tveggja oddatalna er slétt tala.

Annað dæmi um sönnun.
Sönnum að ef n er heil tala og $n^3 + 5$ er oddatala þá er n slétt tala.
Við erum með $p \to q$ þar sem p er oddatala $(n^3 + 5)$ og q er (n) slétt tala.
Þar sem $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ þá viljum við byrja á að sanna $\neg p \to \neg q$.
Notum mótskilyrðingu og sýnum fyrst að ef n er oddatala þá er $n^3 + 5$ slétt tala.
Látum þá $n = 2k + 1$ vera oddatölu $(k \in \mathbb{Z})$.
Skoðum:

$$n^3 + 5 = (2k + 1)^3 + 5 \tag{1}$$
$$(2k + 1)(4k^2 + 4k + 1) + 5 = (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1) + 5 \tag{2}$$
$$8k^3 + 12k^2 + 6k + 6 = 2(4k^3 + 3k^2 + 3k + 3) \tag{3}$$

Nú vitum við að $n^3 + 5 = 2(4k^3 + 3k^2 + 3k + 3)$ og er heil tala og þar með er $n^3 + 5 = 2(4k^3 + 3k^2 + 3k + 3)$ slétt tala.
Þá höfum við sýnt að ef n er oddatala þá er $n^3 + 5$ slétt tala. Með mótskilyrðingu fæst þá að ef $n^3 + 5$ er oddatala þá er n slétt tala.

2 KHR

2.1 Mengi (e. Sets)

Finnum stök í eftirfarndi mengja.
a) $\{x|x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 1\}$ = {-1,1}
Þar sem öll stök í öðru þurfa að vera jaft og 1 í mengi okkar þá erum við bara með 1 og -1.
b) $\{x|x$ er jákvæð heiltala meira en $12\}$ = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} eða $\{1, 2, 3 \ldots, 11\}$
c) {x|x er ferningstala og x $<$ 100} eða $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$
= {1,4,9,16,25,26,49,64,81}
d){x|x er heiltala og $x^2 = 2$} = {} eða tómamengi sem er svona $\varnothing$

Annað dæmi.
Látum $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{x, y\}$ vera mengi.
Finnum nú faldmengi(Mengjamargfeldi) $A \times B$ og $B \times A$ $(a, b) \in A \times B$
a) $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y), (d, x), (d, y)\}$
Það sem þarf að hafa í huga er að þar sem við byrjum með A og svo $\times B$ þá þrufa öll stök í A að vera á undan með öll stök í B. Það má lýkja þessu við hnita kerfi þar sem stökin eru púntar á hnita kerfinnu.
b) $B \times A = \{(x, a), (x, b), (x, c), (x, d), (y, a), (y, b), (y, c), (y, d)\}$

Annað dæmi
Ef A hefur m stök og B hefur n mörg stök, hvað eru þó mörg stök í $A \times B$
$A \times B$ er þá svona:
$(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_1), \ldots, (a_m, b_1)$
$(a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2), \ldots, (a_m, b_2)$
$(a_1, b_3), (a_2, b_3), (a_3, b_3), \ldots, (a_m, b_3)$
$\vdots$
$(a_1, b_n), (a_2, b_n), (a_3, b_n), \ldots, (a_m, b_n)$
Þannig það er $n * m$ mörg stök í $A \times B$.

2.2 Mengjaaðgerðir (e. Set Operations)

Látum A og B vera mengi.
A er mengi: Nemanda sem búa innan við km frá skólanum.
B er mengi: Nemaenda sem ganga í skólann.
Við ætlum að finna.
a) $A \cap B$ er mengi nemanda sem búa nið innan km frá skólanum og ganga í skólann.
b) $A \cup B$ er mengi nemanda sem sem búa við innan km við skólann eða ganga í skólann. (allt í báðum mengjum)
c) $A - B$ er mengi nemanda sem búa við innan km við skólann en ganga ekki í skólann. (allt sem er inn í A en ekki B og $A \cap B$)
d)$B - A$ er mengi nemanda sem búa ekki innan km við skólann en ganga í skólann. (allt sem er inn í B en ekki A og $B \cap A$)

Annað dæmi um stóru merginn þar sem við endurtökum rökvirkjan okkar.
Látum $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$ vera mengi.
Þar sem $i \in \mathbb{Z}_+$ Jákvæðar heiltölur.
Finnum: Sammengi.

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ Það sem $n \in \mathbb{Z}_+$

b) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ Hvernig er þetta þegar við legjum það saman.

$$
\begin{aligned}
&\{1\}\\
\cup&\{1, 2\}\\
\cup&\{1, 2, 3\}\\
\cup&\ldots\\
\cup&\{1, 2, 3, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

c) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$ Sniðmengi er bara $\{1\}$

$$
\begin{aligned}
&\{1\}\\
\cap&\{1, 2\}\\
\cap&\{1, 2, 3\}\\
\cap&\ldots\\
\cap&\{1, 2, 3, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

2.2.1 Sanna De morgan law

Látum A og B vera mengi.
Sönnum seinni De Morgan Reglu sem er $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
a) Notum við "set builder notation" og fáum.

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \{x | x \in \overline{A \cup B}\} \quad \text{skv. skilgr. set builder notation} \\
&= \{x | x \notin A \cup B\} \quad \text{skv. skilgr. fyllimengi} \\
&= \{x | \neg(x \in A \cup B)\} \quad \text{skv. skilgr. } \notin \\
&= \{x | \neg(x \in A \vee x \in B)\} \quad \text{skv. skilgr. sammengi} \\
&= \{x | \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\} \quad \text{skv. De Morgan rökvirkja} \\
&= \{x | x \notin A \wedge x \notin B\} \quad \text{skv. skilgr. } \notin \\
&= \{x | x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}\} \quad \text{skv. skilgr. fyllimengi} \\
&= \{x | x \in (\overline{A} \cap \overline{B})\} \quad \text{skv. skilgr. sniðmengi} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{skv. skilgr. set builder notation}
\end{aligned}
$$

Af þessu sést að $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) Notum íverutöflu. Skoðum töfluna.

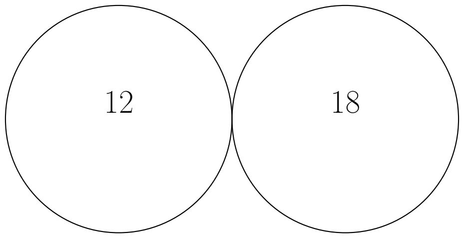
A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Við sjáum að stök í $\overline{A \cup B}$ og $\overline{A} \cap \overline{B}$ eru þau sömmu.

8.5 Talning staka í mengjum (e. Inclusion– Exclusion)

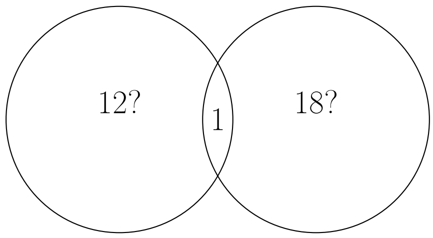
Látum A og B verqa mengi þar að með sterð á.
$|A| = 12$ og $|B| = 18$. Finnum $|A \cup B|$ ef. Formúla $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

a) $|A \cap B| = 0$ Við fáum þá $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 12 + 18 - 0 = 30$



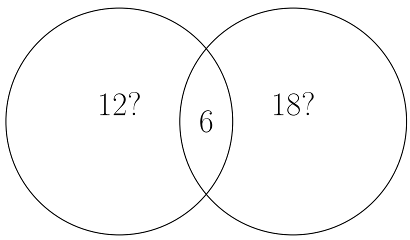
Við sjáum að hringinnir skera ekki saman.

b) $|A \cap B| = 1$ Við fáum þá $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 12 + 18 - 1 = 29$



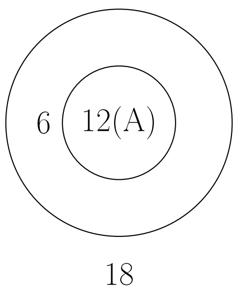
Við situm ? á 12 og 18 þar sem við vitum ekki alveg hvað er í $|A|$ og $|B|$ nema að allt saman er 29.

c) $|A \cap B| = 6$ Við fáum þá $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 12 + 18 - 6 = 24$



Við situm aftur ? á 12 og 18 þar sem við vitum ekki alveg hvað er í $|A|$ og $|B|$ nema að allt saman er allt 24.

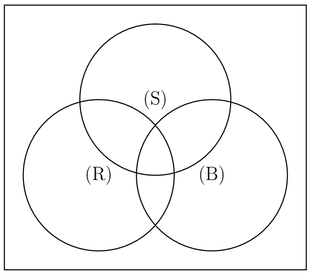
d) $A \subseteq B$ ($\subseteq$ = Öll stök í A eru í B). Formúlan ($|A \cap B| = |A| = 12$).
Fáum: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 12 + 18 - 12 = 18$



8.5.1 Annað dæmi

Látum U vera mengi nemanda, R vvera mengi nemanda sem borða rósakál, S fyrir brokolí og B fyrir blómkál. Regla: $|\overline{A}| = |U| - |A|$
Þá vitum við að:

$|U| = 270$ $\quad |R \cap S| = 26$
$|R| = 64$ $\quad |R \cap B| = 28$
$|S| = 94$ $\quad |S \cap B| = 22$
$|B| = 58$ $\quad |B \cap S \cap B| = 14$



Finnum hvessu mergir nemendur borða ekkert þessa grasmetis.
Formúla til að finna svar:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
Við byrjum á að telja allt í A, B og C en þá teljum við líka það sem er á milli þanni við mínusum það en þá vantar okkur það sem skel á milli alla þeira þannig við + það við.
$|R \cup S \cup B| = |R| + |S| + |B| - |R \cap S| - |R \cap B| - |S \cap B| + |R \cap S \cap B| = 64 + 94 + 58 - 26 - 28 - 22 + 14 = 154$ Sem borða eitthvað grameti.
Þá fæst að $|\overline{R \cup S \cup B}| = |U| - |R \cup S \cup B| = |R| + |S| + |B| - |R \cap S| - |R \cap B| - |S \cap B| + |R \cap S \cap B|$ eða $270 - 154 = 116$ Sem eru fyrir utan.

2.3 Föll (e. Functions)

Ákveðum ef F er fall út frá bitastrengja í mengi heiltölu.

a) F(s) er sæti núllbits í S.

F er ekki fall því F(00) hefur tvær mismunandi útkomur þá 1,2

b) F(s) er fjöldi ása í S.

Við sjáum að þetta er fall þar sem við getum gert $F(1) = 1$, $F(110) = 2$, $F(0) = 0$. Við skilum alltaf einni útkomu.

F(s) er minsta heiltalan í þar að i-ti bita í S ás og F(s) = 0 ef S er tómastrengur.

F er ekki fall því það er ekki skilgrent fallgildi ef S innheldur bara 0.

2.3.1 Loft föll og gólf föll

Finnum eftirfarndi gildi:

a) $\lceil -\frac{3}{4} \rceil = 0$. Loft föll fara alltaf upp líka þegar við erum fyrir neðan 0.

b) $\lfloor -\frac{7}{8} \rfloor = -1$ Gólf fall fer alltaf niður.

c) $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{3}{2} \rceil \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} + 2 \rfloor = \lfloor 5/2 \rfloor = 2$ Loft og gólf föll virka eins og svigar þar sem við byrjum á insta og vinnum okkur út.

Lögar og vísar

Veldis reglur

Reglur: $a^m * a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{m*n} \quad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
a) Svona er dæmið: $2 * 2^2$ en veð horfum á þetta svona $2^1 * 2^2 = 2^{1+2} = 2^3$
b) $(2^2)^3 = 2^{2*3} = 2^6$
c) $2^{2^2} = 2^4$

Log

Finnum eftirfarndi stærðir Regla: $\log_a(a^m) = m$
a) $\log_2(1024) = \log_2(2^{10}) = 10$ þar sem 2^{10} er 1024.
b) $\log_2(1/4 = \log_2((1/2)^2)) = \log_2(2^{-2}) = -2$
c) $\log_4(8) = \log_4(2^3) = \log_4((4^{1/2})^3) = \log_4(4^{3/2}) = 3/2$

2.4 Runur og summur (e. Sequences and Summations)

Látum $\{a_n\}$ vera runu þar sem liðurinn $a_n = 2 * (-3)^n + 5^n$
a) $a_0 = 2 * (-3)^0 + 5^0 = 2 * 1 + 1 = 3$
b) $a_1 = 2 * (-3)^1 + 5^1 = 2 * (-3) + 5 = -1$
b) $a_4 = 2 * (-3)^4 + 5^4 = 2 * 81 + 625 = 787$
b) $a_5 = 2 * (-3)^5 + 5^5 = 2 * (-243) + 3125 = 2639$
Það er líka hægt að vera með runur svona.
Rúna sem byrjar á 2 og hver liður hæklar um 3
2,5,8,11,14 $\ldots\infty$

2.4.1 Runur með Reiknisformúlur

Finnum fyrstu fimm liðina með reiknisformúluni
$a_n = a_{n-1} + 3 * a_{n-2}$ þar sem $a_0 = 1$ og $a_1 = 2$
$a_0 = 1$
$a_1 = 2$
$a_2 = a_1 + 3 * a_0 = 2 + 3 * 1 = 5$
$a_3 = a_2 + 3 * a_1 = 5 + 3 * 2 = 11$
$a_4 = a_3 + 3 * a_2 = 11 + 3 * 5 = 26$
$a_5 = a_4 + 3 * a_3 = 26 + 3 * 11 = 59$

2.4.2 Summur

Finnum summuna á $\sum_{k=1}^{5}(k+1)$

$$\sum_{k=1}^{5}(1+1) + (2+1) + (3+1) + (4+1) + (5+1) = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$$

Finnum tvöfalda summu

$$\sum_{i=0}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3}(ij)\right) \text{ getur líka verið } \sum_{i=0}^{2}\left(i * \sum_{j=1}^{3} i\right) = \sum_{i=0}^{2}(i(1+2+3)) = \sum_{i=0}^{2}(i * 6)$$

Þá erum við með: $6 * \sum_{i=0}^{2} i = 6 * (0 + 1 + 2) = 6 * 3 = 18$

2.6 Fylki (e.Matrices)

Regla: Telja Lína x Dálkur.

Skoðum fylkið A $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

a) Hver er stærð á fylkinu: Það er $3x4$ að stærð.

b) Hver er þryðji dálkur í fylkinu: $3x1$ eða $= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) Önnur lína fylkisins er: $1x4$ fylkið $= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

d) Hvaða stak er númer (3,2) eða stakið í sæti: 1 (þetta er ekki fylki heldur stak.).

e) Finnum bylt fylkið A^T er fylkið: A fyrkið verður 4x3: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

2.6.1 Margföldun Fylkja

Finnum AB ef: Regla: $(k * m) * (m * n) = k * n$

a) A $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ og B $= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Fáum: AB $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*0+1*1 & 2*4+1*3 \\ 3*0+2*1 & 3*4+2*3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+1 & 8+3 \\ 0+2 & 12+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$$

b) A $= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ og B $= \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ AB $= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1*3+(-1)*1 & 1*(-2)+(-1)*0 & 1*(-1)+(-1)*2 \\ 0*3+1*1 & 0*(-2)+1*0 & 0*(-1)+1*2 \\ 2*3+3*1 & 2*(-2)+3*0 & 2*(-1)+3*2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+-1 & -2+0 & -1+-2 \\ 0+1 & 0+0 & 0+2 \\ 6+3 & -4+0 & -2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

2.6.2 Fylkja graf og stærð

Hvað vitum við um fylki A og B ef margfeldi AB og BA eru skilgreind?
Margfeldi AB er aðeins skilgreind ef A hefur jafnmarga dálka og B hefur línur.
Ef A af stærð $n \times m$ og B af stærð $s \times t$ gildir þýðir það að m = s.
Á hliðstæðan hátt fæst að BA er skilgreind aðeins ef n = t.
Þannig að ef A er $n \times m$ að stærð þá er B $m \times n$ að stærð.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.6.3 Hornlínufylki

Hornlínufylki er fylki þar sem öll stök eru 0 nema á hornalínu.
Sýnum að margfeldi tveggja hornalínufylki er hornalínufylki.
Látum A og B vera hornalínufylki af stærð $n \times n$.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Skoðum nú AB. Þegar lína i er margfölduð við dálk i fæst:
$0 + 0 + \ldots + a_{i,i} + b_{i,i} = a_{i,i}, b_{i,i}$.
Þannig að stak í $c_{i,i}$ í AB er ekki endilega 0.
Skoðum nú stak $c_{i,j}$ þar sem $i \neq j$. Við Margföldun línu i í A við dálk j í B.
Þá fæst að $c_{i,j} = 0 + 0 + \ldots + a_{i,i} \times 0 + b_{j,j} \times 0 + \ldots + 0 = 0$. Því $i \neq j$.

2.6.4 Fylkja formúlur

Látum A $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ vera fylki.
Finnum formúlu fyrir A^n þar sem $n \in \mathbb{Z}_+$

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sem segir okkur að formúlan fyrir $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vegna þessa að $a_{1,2}$ er einna stakið sem er ekki markfaldað með 0.

2.6.5 Anndhverfa filkis.

Látum A $= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vera fylki

Sýnum að ef $ad - bc \neq 0$ þá er: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Ef AB = I og BA = I þá er $A^{-1} = B$. Þar sem $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ eða hornalínufylki.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad}{ad-bc} - \frac{bc}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} - \frac{ab}{ad-bc} \\ \frac{cd}{ad-bc} - \frac{cd}{ad-bc} & \frac{-bc}{ad-bc} - \frac{da}{ad-bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{ab-bc}{ad-bc} & \frac{ab-ab}{ad-bc} \\ \frac{cd-cd}{ad-bc} & \frac{cd-bc}{ad-bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \frac{d}{x} & \frac{-b}{x} \\ \frac{-c}{x} & \frac{a}{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Reiknað eins og hitt.

2.6.6 Rökvirkja fylki

Látum A $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og B $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vera bitafylki.

a) Finnum $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Finnum $A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) Finnum $A \odot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Með veldi

Látum A $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ vera bitafylki.

a) Fáum $A^{[2]} = A \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Við stitum okkur leið en á prófi þá þarf að sína útreikninga eins og fyrir ofan.

b) Finnum $A^{[3]} = A^{[2]} \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) Finnum $A \vee A^{[2]} \vee A^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4 KHR

4.1 Heiltöludeiling og mátreikningur (e. Divisibility and Modular Arithmetic)

4.1.1 Heiltöludeiling

Finnum kvóta og afgang þegar. Regla: $x = q \cdot d + r$
a) 19 er deilt með 7: $19 = 2 \cdot 7 + 5$ Þar sem kvótinn er 2 og afgangurinn er 5.
b) -111 er deilt með 11: $-111 = -11 \cdot 11 + 10$ Þar sem kvótinn er -11 og afgangurinn er 10. Afgangurinn verður alltaf að vera stæri en 0.

Skoðum aðra leið.
e) 0 er deilt með 19: $q = 0/19 = 0 r = q \cdot d - x = 0 \cdot 19 - 0 = 0$
Athugum að $0 = 0 \cdot 19 + 0$ þannig að kvótinn og afgangurinn er 0.

Aukadæmi.
Þegar 36 er deilt með 5.
$q = \lfloor 36/5 \rfloor = \lfloor 7,2 \rfloor = 7$
$r = x - q \cdot d = 36 - 7 \cdot 5 = 36 - 35 = 1$
Athugum að $36 = 7 \cdot 5 + 1$
þá er kvótinn 7 og afgangurinn 1

4.1.2 Reiknirit Evklíðs og mod

Finnum eftirfarandi gildi:
a) 13 mod 3 = 1 því að $13 = 4 \cdot 3 + 1$
b) -97 mod 11 = 2
c) 155 mod 19 = 3

4.3 Prímtölur og stærsti samdeilirinn (e. Primes and Greatest Common Divisor)

Allar sléttar tölur nema 2 eru ekki prímtölur.
Ákvöðum hvort eftirfarandi tölur eru prímtölur. Tölur sem eru bara deilanlegar með 1 og sjálfan sér.
a) Talan 21 er ekki prímtala þar sem $21 = 3 \cdot 7$.
b) Talan 97 þar sem $11 > \sqrt{97} = 9,8$ segir okkur að við þrufum bara að skoða þær prímtölur sem fara upp að 11 en ekki 11 sjálf. Þannig talan er prímtala þar sem hún er ekki deilanleg með 2,3,5 eða 7 sem eru allar prímtölur upp að 11.
c) Talan 143 byrjum á að skoða $11 > \sqrt{143} = 11.99$ svo við þurfum að skoða 11 svo þá getum við séð að $11 \cdot 13 = 143$ þannig 143 er ekki prímtala.

4.3.1 Frumþáttun

Finnum frumþáttun eftirfarandi talna. Frumþáttun er að deila tölu en oft og hægt er.
a) Tala 88

$$\begin{aligned} 88 &= 2 \cdot 44 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 22 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \\ &= 2^3 \cdot 11 \end{aligned}$$

Þannig að frumþáttun 88 er $88 = 2^3 \cdot 11$
b)Talan 1001

$$\begin{aligned} 1001 &= 7 \cdot 143 \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13 \end{aligned}$$

Þannig að Frumþáttun 1001 er $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

4.3.2 Ósamþátta

Finnum af eftirfarandi tölur eru ósamþátta
a) 11, 15 og 19: Við bryjum að finna Frumþáttun talnana þar sem $11 = 11$ þar sem það er prim tala og sama með 19 en $15 = 3 \cdot 5$
Þar sem engin tala deilir Frumþætti með hvor annarri þá eru því ósamþátta tvær og tvær.
b) 14 15 og 21: $14 = 2 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$ og $21 = 3 \cdot 7$
Þannig að 14 og 21 eru samþátta og 15 og 21 eru samþátta. Vegna 7 og 3.

4.3.3 Stærsti samdeilir, gcd

Finnum stæðsta samdeiginlega deilir eftirfarandi talan.
a) Tölurnar $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$ og $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9$
Báðar tölurnar má deila með 3^5 og 5^3 Þannig að stæðsti sameiginlega deilir er $3^5 \cdot 5^3$
b) Tölurnar $11 \cdot 13 \cdot 17$ og $2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3$
Tölurnar eru ósamþátta og því er stæðsti deilir þerra 1.

4.3.4 Evklíðs

Notum reiknirit evklíðs til að finna stæðsta sameiginlega deilir.
a) Finnum gcd(111,201) fáum:

$$\begin{aligned}
201 &= 1 \cdot 111 + 90 \\
111 &= 1 \cdot 90 + 21 \\
90 &= 4 \cdot 21 + 6 \\
21 &= 3 \cdot 6 + 3 \\
6 &= 2 \cdot 3 + 0
\end{aligned}$$

Þannig að við sjáum að skv reiknirit evklíðs er gcd(111, 201) $=$ 3
b) Finnum gcd(1001, 1331) fáum:

$$\begin{aligned}
1331 &= 1 \cdot 1001 + 330 \\
1001 &= 3 \cdot 330 + 11 \\
330 &= 30 \cdot 11 + 0
\end{aligned}$$

Þannig að við sjáum að skv reiknirit evklíðs er gcd(1001, 1331) $=$ 11

4.5 Notkun leifajafna (e. Applications of Congruences)

Bílastæði með 31 stæði (0-30).
Finnið stæði fyrir gesti með tætifalli $h(k) = k \mod 31$ út frá bílnúmeri 317, 918, 007, 100, 111 og 310.
a) Fráum:

$$
\begin{aligned}
317 &= 31 \cdot 10 + 7 \text{ þannig að } 317 \equiv 7 \mod 31 \\
918 &= 31 \cdot 29 + 19 \text{ þannig að } 918 \equiv 19 \mod 31 \\
7 &= \quad \ldots\ 7 \equiv 7 \mod 31 \\
100 &= \quad \ldots\ 100 \equiv 7 \mod 31 \\
111 &= \quad \ldots\ 111 \equiv 18 \mod 31 \\
310 &= \quad \ldots\ 310 \equiv 0 \mod 31
\end{aligned}
$$

Gestirnir fá úthlutað stæðum talan fyrir fram mod 7 19 7 7 18 0.
b) Hvað ef stæðið er upptekið.
Þá skoðar hann næsta í hring (mod 31)
Hann finnur $h(k + a)$ þar sem a er fjöldi stæða sem henn hefur prófað.
Hættum þegar a er = 31.

4.5.1 Gervislempirunnuna

Finnum gervislembirunnuna sem frameiðslufallið $x_{n+1} = 3 \cdot x_n mod 11$ ef upphafsgildið er $x_0 = 2$
$x_0 = 2$
$x_1 = 3 \cdot x_0 \mod 11 = 3 \cdot 2 \mod 11 = 6 \mod 11 = 6$
$x_2 : 3 \cdot x_1 = 3 \cdot 6 = 18 \equiv 7 \mod 11 = 7$ Þar sem $7 = 18 \mod 11$
$x_3 : 3 \cdot x_2 = 3 \cdot 7 = 21 \equiv 10 \mod 11 = 10$ þar sem $10 = 21 \mod 11$
$x_4 : 3 \cdot x_3 = 3 \cdot 10 = 30 \equiv 8 \mod 11 = 8$ þar sem $8 = 30 \mod 11$.
$x_5 : 3 \cdot x_4 = 3 \cdot 8 = 24 \equiv 2 \mod 11 = 2$ þar sem $2 = 24 \mod 11$
Athugm að $x_0 = x_5 = 2$ þannig að við erum komin með hring gervislembirunnuna endurtekur sig og er því $2, 6, 7, 10, 8, 2, 6, 7, 10, 8, 2 \ldots$

5 KHR

5.1 Stærðfræðileg þrepun (e. Mathematical Induction)

Það sem þarf til að gera þrepunar sönnun. Grunnskref(þrep) og sanna það, þrepunarförsemdu, þrepunarskref, sanna það með þrepunarförsemdu og niðurlag.

Látum P(n) vera opna yrðinguna: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2_n+1)}{6}$
Sönnum p(n) fyrir öll með $n \in \mathbb{Z}_+$ með þrepun.
a) Finnum P(1) sem Grunnskref. Setjum n=1 og fáum:
$P(n) : 1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}$
b) Sínum að P(1) er sönn yrðing. Athugum að $1^2 = 1$ og $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{2\cdot 3}{6} = 1$
Svo VH = 1 = HH þannig að P(1) er sönn.
c) Finnum þrepunarförsemdu fyrir þrepunarsönnunina.
þrepunarförsendan er sú að P(k) sé sönn fyrir eitthvað $k \in \mathbb{Z}_+$
Það er P(k) = $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2_k+1)}{6}$ Þetta er ÞF (þrepunarförsendan).
Við gerum ráð fyrir að $P(k) \to P(k+1)$ þannig við þrufum að sanna $P(k+1)$.
d) Hvað þrufum við þá að sýna í þrepunarskrefinu til að ljúka því? Við þrufum að sýna að ef P(k) (ÞF) er sönn þá er P(k+1) líka sönn. Viljum því sýna að:
$P(k+1) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$
e) Ljúkum við þrepunarskrefið með því að sanna P(k+1).
Byrjum með VH og leiðum út HH. Fáum:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$ VH í ÞF.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \text{ skv. ÞF.} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&* (k+2)(2k+3) = 2k^2 + 4k + 3 = 2k^2 + 7k + 6 \\
\text{skv. } * &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}
$$

Sem er HH sem við vildum fá svo við höfum sýnt að $P(k) \to P(k+1)$
f) Ljúkum sönnunni út frá grunnþrepi fæst með þreppun að P(n) gildir fyrir öll $n \in \mathbb{Z}_+$

5.1.1 Önnur þrepunarsönnun

Skoðum summu n fyrir slétta talnanna. $2+4+6+\ldots+2n=?$

a) Fáum formúluna fyrir summuna: $2+4+6+\ldots+2n=\sum_{i=1}^{n}2i=2\cdot\sum_{i=1}^{n}i$

$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$

Formúlan er þá $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$

b) Sönnum formúluna með þrepun. Látum P(n) vera opin yrðinguna:

$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$

Grunnþrep:

Grunnþrepið er p(1) þar sem að $2=1\cdot 1(1+1)=2$

Þrepunarförsenda:

Þrepunarförsendan er sú að P(k) gildi. Það er að $2+4+6+\ldots+2k=k(k+1)$

Þrepunarskref:

Við viljum þá sýna að P(k+1) gildi þar sem að:

$2+4+6+\ldots+2k+2(k+1)=(k+1)(k+2)$

Fáum:

$$
\begin{aligned}
2+4+6+\ldots+&2k+2(k+1)\\
&=k(k+1)+2(k+1)\\
&=(k+1)(k+2)
\end{aligned}
$$

Sem sýnir okkur að P(k+1) gildir eins og við vildum.

Niðurlag:

Skv. Grunnþrepi og þrepunarskrefi fæst með þrepun að P(n) gildir fyrir allar $n\in\mathbb{Z}_{+}$. Þar að summa n fyrstu sléttu talnana er n(n+1).

5.2 Sterk þrepun (e. Strong induction up) upp að (e. up to) "Using Strong Induction in Computational Geometry"

Það má hugsa um sterka þrepun eins og við búm til hús sem er með fyrstu og aðra hæð og við ætlum að bæta við þryðju hæð.

Gerum ráð fyrir að við eigum óendanlega mörg 3kr og 5kr frímerki.
Sönnum að við getum borgað nákvæmlega n krónur með frímerkjunum ef $n \geq 8$ og $n \in \mathbb{Z}$.
Látum P(n) vera yrðingafallið "Það er hægt að borga nákvæmlega n krónur með 3kr og 5kr frímerkjunum eingöngu.

Grunnskref: er að P(8), P(9) og P(10) séu sannar.
Athugum að $3kr + 5kr = 8kr$ og $3 \cdot 3kr = 9kr$ og $2 \cdot 5kr = 10kr$
Þannig að P(8), P(9) og P(10) eru sannar yrðingar.

Þrepunarforsendan: $(P(j), 8 \leq j \leq k) \to P(k+1)$
Þrepunarforsendan er þá sú að fyrir eitthvað $k \geq 8$ gildir að öll P(j) eru sönn þar sem $(8 \leq j \leq k)$.
Sem sagt það er hægt að greiða hvaða upphæð milli 8 og k með 3kr og 5kr.

þrepunarskrefið: Viljum þá sýna að P(k+1) gildi.
Athugum að skv ÞF er hægt að greiða k-2 krónur.
Tökum saman slík frímerki og bætum við 3kr frímerki
Þá höfum við $(k-2) + 3 = k + 1$ kr af frímerkjunum.
Þá er hægt að segja að greiða k+1 þar af með frímerkjunum svo P(k+1) er satt.

Niðurlag: Af Grunnskref og þrepunarskref má fá með þrepun að p(n) er satt fyrir öll $n \geq 8$.
Þar sem að þau má greiða hvaða krónufjölda sem er með 3kr og 5kr frímerkjunum.

5.3 Þrepunarskilgreiningar (e. Recursive Definitions) upp að (e. up to) "Example 4"

6 KHR

6.1 Grunnatriði í talningu (e. The Basics of Counting)

6.1.1 Talningafræði, nefndir

Í skóla eru 18 stæ.nem og 325 tölv.nem.

a) Á hvað marga vegur er hægt að velja tvo fulltrúa þannig að annar sé stæ.nem og hinn tölv.nem.
   Fulltrúana má velja á $18 \cdot 325 = 5850$ vegu stæ er valinn á 18 vegum og tölv á 325 vegu.

b) Á hvesu marga vegur er hægt að velja einn fulltrúa?
   í heildina eru $18 + 325 = 343$ nemar. Það má velja einn fulltrúa á 343 vegu.

6.1.2 Talningafræði, bitastrengir

Hvessu margir bitastrengir af lengd 10 byrja og enda á 0?
Horfu á þetta svona: $\underline{0}$ $\underline{0/1}$ $\underline{0/1}$ $\underline{0/1}$ $\underline{0/1}$ $\underline{0/1}$ $\underline{0/1}$ $\underline{0/1}$ $\underline{0/1}$ $\underline{0}$

Þar sem við erum með 0/1 erum við með tvo valmöguleika 1 eða 0 þannig við notum marhföldun þar sem þetta verður 2^8.

Atugum að nú þegar er búið að velja fyrsta og síðasta bitan sem er alltaf 0.
Svo það eru 8 bitar eftir sem má gera á $\underline{2^8 = 256}$ vegu.

6.1.3 Talningafræði, bílnúmer

Hvessu margir Íslenskar númeraplötur er hægt að gera.

Skilgrening á númeraplötu $\underline{B}$ $\underline{B}$ $\underline{T}$ $\underline{T}$ $\underline{T}$ eða $\underline{B}$ $\underline{B}$ $\underline{B}$ $\underline{T}$ $\underline{T}$

Atugum að það eru 26 bókstafir og 10 tölustafir sem koma til greina.
Ef við höfum tvo bókstafi og þrjá tölustafi má velja fyrir og seinni bókstaf á 26 vegum, $26 \cdot 26$ í heildina og $10 \cdot 10 \cdot 10$ fyrir tölustafina eða $26^2 \cdot 10^3$.

Á hliðstaðinn hátt má velja bókstafi á 26^3 og tölustafi á 10^2 ef það eru 3 bókstafir og 2 tölustafir.

Hver plata er aðeins ó öðrum hópnum þbí þriðji stafurinn er annahvort bókstafur eða tölustafur.

Í heildina eru þetta þá $\underline{26^2 \cdot 10^3 + 26^3 \cdot 10^3 = 2.433.600}$ númeraplötur.

6.1.4 Talningafræði, samhverfir setrengir

Hvessu margar samhverfur af lengd n er hægt að búa til?

Við þurfum að verja $\lceil n/2 \rceil$ stafi. Aðrir stafir fylgja þeim fyrstu. Sejum að við erum með n = 8 þá fáum við $\lceil 8/2 \rceil = 4$ þar sem stafur 1 og 8 eru eins.

Hvern staf má velja á 26 vegu. Fjöldisamhverja af lengd n er því $26^{\lceil n/2 \rceil}$

6.2 Skúffureglan (e. The Pigeonhole Principle)

6.2.1 Talningafræði, umraðanir

Það eru 12 brúnir og 12 svartir sokkar í skúffu.

a) Hversu marga sokka þarf að draga til þess að vera viss um að hafa fengið sokka af sama lit?
   Það þarf að draga þrjá sokka til að vera viss.
   Ef fyrsti sokkurinn er svartur og annar brúnn þ.á þarf þriðja sokkinn tik að búa til par.

b) Hvað þarf að draga marga sokka til þess að vera viss um að hafa dreigið svart par.
   Til að vera viss um að vera með svart par af sokkum getur komið fyrir að við drögum alla brúnu sokkana fyrst og síðast eitt svart par.
   Það þarf að draga 14 sokka þá fyrstu 12 geta verið brúnir og svo síðustu tver svartir eða í hvaða röð sem er.

Við erum í raun að skoða hvessu óhepinn við getum verið eða verstu niðurstöður.

6.2.2 Talningafræði, samtektir

Hvað þarf marga nemendur í háskóla til að vera viss um að amk 100 þeirra koma úr sama fylki? (50 fylki)

Skilgrening á skúffuregluni: Ef við erum með einhver n og k breytur þá eru þær $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ í einhverju boxi.

Notum Skúffureglu. Finnum minsta fjölda nemanda N þannig að 100 mans séu í einhverju fylki (k = 50).

Fáum: $\lceil \frac{N}{50} \rceil = 100$. Atugum að $N/50 = 99$ eða $N = 99 \cdot 50 = 4950$
Það er ekki nógu stórt N. Bætum við einum og fáum N = 4951.

$\frac{4591}{50} = 99,02 = \lceil 99,02 \rceil = 100.$

Við sjáum að það er nógu stórt þannig það er minsti mögulegi fjöldinn

Það þarf því amk 4951 nemanda til að amk 100 komi úr sama fylki.

6.3 Umraðanir og samantektir (e. Permutations and Combinations)

Það er mikið annnað í kafla 6.3 en þetta er það sem ég er búin að sjá á sýni prófum.

6.3.1 Talning, bitastrengir

Hvessu margir bitastrengir innihalda 8 núll og tíu ása þannig að eftir núll kemur alltaf ás?

Hugsum um núllin sem 01 tvenndir til að tryggja að það komi ás á eftir núlli. Horfu þá (8x 01) tvenndir og (2x ás) eftir.

Veljum þá átta sæti af 01 fyrir tvenndirnar og setjim ása í afganginn og fáum:

$((10, 8) = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$ Það eru því 45 bitastrengir sem uppfylla skilgrening.

6.3.2 Talning, bílnúmer

Eftir að gera

7 KHR

7.1 Umraðanir og samantektir (e. Permutations and Combinations)

8.1 Beiting rakningarformúla (e. Applications of Recurrence Relations) upp að (e. up to)

9 KHR

9.1 Vensl og eiginleikar þeirra (e. Relations and Their Properties)

Finnum tvenndinar í venslunnm R úr A = {0,1,2,3,4} í B = {0,1,2,3,4}.
Þar sem $(a, b) \in R$ þá og því aðeins af.
A er formengi og B er bakmengi þar sem $A \to B$. Vansl eru alltaf rituð svona $(a, b) \in R$ þar sem fyrsta mengið (a) er formengið og seinna (b) bakmengi.

a) a = b og fáum: $R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
Þetta eru allar leiðir sem a = b.

b)$a + b = 4$ og fáum $R = \{(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$.

c) lcm (a,b) = 2 og fáum $R = \{(1,2),(2,1),(2,2)\}$.
Við skoðum þetta þannig að ef við erum með 1,2 þá er það $1^1 \quad \underline{2^1}$ þar sem við tökum stæra veldið og 2 og þar sem $2^1 = 2$ þá situm við það inn.

9.1.1 Annað dæmi

Ákvörðum hvort vensk R á mengi allra vefsíða séu spegilvirk, samhverf, andsamhverf og gegnvirk ef $(a, b) \in R$ þá og því aðeins af.
Spegilvirk Þíðir að allir eru venslaðir við sjálfan sig.
Samhverf Þíðir að ef $(a, b) \in R$ þá er $(b, a) \in R$ líka aka $(a, b) \in R \to (b, a) \in R$.
Andsamhverf Ef það virkar í báðar átir þá er a og b sama stak aka:
$(aRb \wedge bRa) \to (a = b)$. Og bara í sömu átt.
Gegnvirk Ef er venslað við b og b er venslað við c þá hlítur a að vera venslað við c.
$((aRb) \wedge (bRc)) \to (aRc)$.

a) Allir sem hafa heimsótt a hafa heimsótt b. A er hlutmengi í B.
Spegilvirk: Já því allir sem hafa heimsótt a hafa heimsótt a.
Samhverf: Nei til dæmis gætu allir sem hafa heimsótt ruv.is heimsótt fb.com en ekki öfugt.
Andsamhverf: Nei til dæmis hefur fólk skoðað bloggið mitt og blogg bróðurs míns. Það er samt ekki sama vefsíða.
Gegnvirk: Já ef til eru þrjár vefsíður a, b og c þannig að allir sem skoðuð a skoðuðu b og allir sem skoðuð b skoðuð líka c þá hlítur að vera að allir sem skoðuðu a skoðuðu c.

9.1.2 Annað dæmi vensla

Látum A vera mengi nemanda og B mengi bóka.
aR_1B: a á að lesa b fyrir skólan.
aR_2B: a er búin að lesa b.

a) $R_1 \cup R_2$: á að lesa eða búin að lesa.

b) $R_1 \cap R_2$: á að lesa og búin að lesa.

c) $R_1 \oplus R_2$: á að lesa en ekki búin eða á ekki að lesa en er búin.

d) $R_1 - R_2$: á að lesa en ekki búin.

e) $R_2 - R_1$: búin að lesa en áttir ekki að lesa.

9.1.3 Annað dæmi vensla

Látum R og S vera vensl á mengi fólks.
aRb : a er foreldri b.
aSb : a er systkin b.

Finnum $\underleftarrow{R \circ S}$ og $\underleftarrow{S \circ R}$: Lesið til vinstri.
$aR \circ Sc$: a er systkin b og b er foreldri c. $(aSb \wedge bRc)$.
$aS \circ Rc$: a er foreldri c og c á systkin. $(aRb \wedge bSc)$

9.3 Framsetning vensla (e. Representing Relations)

9.3.1 Vensl framsetning með filki

Ritum eftirfarandi vensl á mengið {1,2,3} sem fylki:
$R = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$.
Fáum firkið:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9.3.2 Vensl taling staka í filki

Í fylki venslana R á $\{1,2,3,\ldots,100\}$ er hversu margir ásar ef $(a,b) \in R$ þ.þ.a.a $a \geq b$. $R = \{(a,b)|a > b\}$.

$$\text{Skoðum } M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 99 \\ 100 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 99 & 100 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Af fylkinu sést að það eru $0,1,2,3\ldots 99$ ásar í hveri línu. þá eru heildarfjöldi ása:
$\sum_{i=0}^{99} i = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$ Það eru því 4950 ásar.

9.3.3 Vensl filki samsett vensk veldi

Látum R vera vensl sem eru táknuð með fylkinu.

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Finnum R^2: Fáum $M_{R^2} \odot M_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

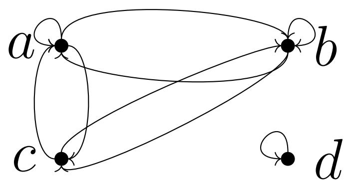
b) Finnum R^3: Fáum $M_{R^3} \odot M_R$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Hafa í huga að ef við erum með $S \odot R = M_R \odot M_S$ það verður öfugt.

9.3.4 Vensl framsetning með neti

Finnum allar tvenndinar venslunum R sem er táknað með netinnu.

Fáum: $R = \{(a,a),(a,b),(a,c),$
$(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(d,d)\}$



9.5 Jafngildisvensl (e. Equivalence Relations)

9.5.1 Jafngildisvensl

Jafngildisvensl eru spegilvirk, samhverf og gegnvirk verður að vera allt.

a) $\{(0,0),(0,2),(2,0),(2,3),(3,2),(3,3)\}$
Þau eru ekki spegilvirk en þau eru samhverf en ekki gegnvirk þannig þetta er ekki jafngildisvensl

b) $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$
Þau eru spegilvirk og samhverf þar sem við gerum fara fram og til baka og þau eru gegnvirk þar sem við getum stti okkur laið í gegnum hnútana svo já það er jafngildisvensl.

10 KHR

10.1 Net og netlíkön(e. Graphs and Graph Models)

10.2 Neta hugtök og sérstakar tegundir neta (e. Graph Terminology and Special Types of Graphs)

10.3 Framsetning og einsmótun neta (e. Representing Graphs and Graph Isomorphism)

10.4 Tengsl neta(e. Connectivity)

10.5 Euler og Hamilton leiðir (e. Euler and Hamilton Paths)

10.6 Styrsta leið (e. Shortest-Path Problems)

10.8 Litun neta (e. Graph Coloring)