**Министерство образования Республики Беларусь**

**Учреждение образования  
«Брестский государственный университет**

**имени А. С. Пушкина»**

**Физико-математический факультет**

Кафедра прикладной математики

и информатики

**Попека Владимир Николаевич**

**студент 5 курса специальности «Прикладная математика»**

**Итерационная процедура решения линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве**

**дипломная работа**

Научный руководитель:

Доцент кафедры прикладной

математики и информатики,

кандидат физико-математических наук

Савчук В.Ф.

Рецензент:

Доцент кафедры алгебры, геометрии

и математического моделирования,

кандидат физико-математических наук

Мирская Е.И.

Допущен к защите

«\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2016 г.

Зав. кафедрой прикладной

математики и технологий программирования

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ О.В. Матысик

Брест 2017

Дипломная работа 29 стр., библиографий 31.

**РЕФЕРАТ**

СПЕКТР ОПЕРАТОРА, ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО, ИСТОКОПРЕДСТАВИМОСТЬ, ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА, СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ НОРМА, ПРАВИЛО ОСТАНОВА.

**Объект исследования** – операторные уравнения I рода в гильбертовом пространстве.

**Предмет исследования** – неявный итерационный метод решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями I рода.

**Цель работы** – исследовать метод при априорном и апостериорном выборе числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, изучить сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства, доказать сходимость метода в случае неединственного решения уравнения.

**Метод исследования** – методы функционального анализа и вычислительной математики.

Результатом работы является теоретическое и практическое применение метода решения некорректных задач. Предложенный в работе неявный метод итераций может быть успешно применён для решения задач акустики, синтеза антенн, спектроскопии, обратной задачи теории потенциалов, обратной задачи теории гравиметрии, уравнений Фредгольма первого рода.

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 4](#_Toc446512590)

ГЛАВА [1. Основные понятия 10](#_Toc446512591)

[1.1 Метрические пространства 10](#_Toc446512591)

[1.2 Линейные нормированные пространства 12](#_Toc446512591)

[1.3 Линейные операторы 1](#_Toc446512591)4

[1.4 Линейные операторы в гильбертовом пространстве 15](#_Toc446512591)

[1.5 Примеры некорректно поставленных задач 18](#_Toc446512591)

ГЛАВА [2. Сходимость одного метода решения линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве 22](#_Toc446512592)

[2.1 Сходимость метода с априорным выбором итераций 22](#_Toc446512591)

[2.1.1 Сходимость при точной правой части уравнения 22](#_Toc446512591)

[2.1.2 Сходимость при приближенной правой части уравнения 23](#_Toc446512591)

[2.1.3 Оценка погрешности 28](#_Toc446512591)

ГЛАВА [3. Сходимость метода в случае неединственого решения 31](#_Toc446512592)

ГЛАВА [4. Сходимость метода в энергетической Норме 34](#_Toc446512592)

ГЛАВА [5. Правило останова по невязке для неявного метода итераций 36](#_Toc446512592)

ГЛАВА [6. Правило останова по соседним приближениям в итерационных процедурах решения некорректных задач 43](#_Toc446512592)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 51](#_Toc446512593)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 53](#_Toc446512594)

**ВВЕДЕНИЕ**

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т.е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Если исходные данные известны приближённо, то упомянутая неустойчивость приводит к практической неединственности решения в рамках заданной точности и к большим трудностям в выяснении смысла получаемого приближенного решения. Важен и сам по себе факт несходимости решения задачи с приближенными данными к решению задачи с точными данными.

Значительная часть задач, встречающаяся в прикладной математике, физике, технике и управления, может быть представлена в виде операторного уравнения I-го рода

с заданным оператором и элементом . Адамаром [13, 14] было введено следующее понятие корректности:

**Определение 1.** *Задача отыскания решения уравнения (1) называется корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части уравнения его решение :*

1. *существует в пространстве ;*
2. *определено в однозначно;*
3. *устойчиво в пространстве , т.е. непрерывно зависит от правой части .*

В случае нарушения любого из этих условия задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно, при нарушении условия c) её принято называть неустойчивой.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора на всем пространстве .

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались.

Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения 1-го рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике , обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача аналитического продолжения функции, известной из части области, на всю область. Некорректны также и задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента, задача Коши для уравнения теплопроводности с обращенным временем и т.д.

Вообще некорректно большинство так называемых обратных задач, в которых по результатам действия какого-либо физического поля или процесса определяются первоначальные характеристики самого этого поля или процесса.

Однако если не изменить постановку неустойчивых задач, то обычные методы, применяемые для решения корректных задач окажутся непригодными для решения некорректных задач, так как сколь бы малой ни была погрешность исходных данных, нельзя быть уверенным в малости погрешности полученного решения. Поэтому необходимо было пересмотреть определение корректности по Адамару. И это было сделано в 1943 году А.Н. Тихоновым [9].

**Определение 2*.*** *Назовем задачу (1) корректной по Тихонову на множестве , а само множество – ее множеством корректности, если:*

1. *точное решение задачи существует в классе ,*
2. *принадлежащее множеству решение задачи единственно для любой правой части из множества ,*
3. *принадлежащее множеству решение задачи устойчиво относительно любой правой части из множества .*

Если , то корректность по Тихонову совпадает с корректностью по Адамару.

После работ А.Н.Тихонова систематическое изучение некорректных задач и способов их решения началось в 50-х годах, но особенно широкий размах оно приняло в последние 40 лет. Основные результаты отражены в монографиях М.М. Лаврентьева [8], А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [10], В.А. Морозова [5], В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы [6], О.А. Лисковца [7], Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [2] и др.

Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А.Н. Тихоновым понятии регуляризатора.

**Определение 3**. Пусть имеется некорректная в классическом смысле задача математической физики. Параметрическое семейство операторов , действующих из пространства правых частей в пространство решений , называется регуляризующим (регуляризующим алгоритмом или регуляризатором), если:

1. *при любом оператор определен на всем пространстве*
2. *если существует точное решение исходной задачи , то для любого существует такое, что для всех  
    имеет место соотношение  
    Параметр называется параметром регуляризации, – регуляризированными решениями.*

Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных.

В работе [15] А.Н. Тихонов предлагает способ построения регуляризующих операторов для уравнения (1). Это метод регуляризации решения некорректных задач. Он основан на вариационном принципе. В методе рационально выбирается параметр регуляризации, используется априорный способ выбора и предложены принципы невязки и сглаживающего функционала.

Для решения некорректных задач В.К. Иванов в работе [16] излагает метод квазирешений. Большое применение для регуляризации некорректных задач имеет также и метод невязки, предложенный Д.Л. Филлипсом [17] и В.К. Ивановым [16].

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы.

Еще в 30-е годы в работах Т. Карлемана [18], Г.М. Голузина и В.К, Крылова [19] были предложены первые методы приближений, дающие в пределе точные решения уравнения (1), если данные, т.е. оператор и правая часть заданы точно. Для решения задачи Коши для уравнения Лапласа с точными данными итеративный метод изложен в работе Б.А, Андреева [20]. В общем виде итеративный метод сформулирован А.К. Маловичко [21]. Однако в этих работах отсутствует необходимое исследование влияния погрешностей данных, которое весьма важно для решения некорректных задач. В работе [8] М.М. Лаврентьев обосновал сходимость метода последовательных приближений при приближенной правой части линейных уравнений и распространил полученные результаты на случай нелинейных уравнений. При других предположениях метод последовательных приближений был исследован Ю.Т. Антохиным [22]. Изучению итеративных методов посвящены работы В.Н. Страхова [23, 24]. Различные схемы итерационных методов, предложенные А.С. Апарциным, В.К. Ивановым, А.С. Кряневым, М.М. Лаврентьевым, В.А. Морозовым, С.М. Оганесяном, Б.Ч. Старостенко, Г.В. Хромовой, применялись для решения многих некорректных задач в гильбертовых пространствах. Для решения некорректных задач в банаховых пространствах применялись методы итераций, предложенные в работах А.Б. Бакушинского и В.Н. Страхова. В некоторых из этих работ рассматривается случай приближенных операторов. Метод простых итераций при приближенно заданных правой части и операторе изучался в работах О.А. Лисковца и Я.В. Константиновой [3, 25]. Различные схемы явных и неявных итеративных методов предложены в работах О.А. Лисковца, В.Ф. Савчука [1, 26-28] и О.В. Матысика.

Во всех работах того времени число итераций выбиралось априорно. Это означает следующее. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокопредставимо, т.е. находилась оценка погрешности метода, которая затем оптимизировалась по , т.е. вычислялось значение итераций , при котором оценка погрешности являлась минимальной.

Однако поскольку не всегда имеются сведения об истокопредставимости точного решения, то трудно разумным образом определить число итераций . Тем не менее, итеративные методы решения некорректных задач можно сделать вполне эффективными, если воспользоваться правилами останова по невязке и по соседним приближениям. Апостериорный выбор числа итераций для метода простых итераций впервые был предложен И.В. Емелиным и М.А. Красносельским [4, 11]. Дальнейшее развитие идеи работы [4] получили в работе Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [2]. О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук и О.В. Матысик [12, 29, 30] продолжили исследование в этом направлении. Ими обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям для различных схем методов итераций, явных и неявных, которые превращают предложенные итеративные методы в регуляризующие алгоритмы для задачи (1), не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, но в случае его истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

* 1. **Метрические пространства**

**Определение 1.1.** *Множество X элементов произвольной природы называется метрическим пространством, если каждой паре элементов x,y из X соответствует число ρ(x,y), которое называется расстоянием между x и y и удовлетворяет следующим условиям:*

1)

*2*

*3)*

Условия 1) – 3) называются аксиомами метрики. Аксиома 1) называется аксиомой различения, 2) – аксиома симметрии, 3) – аксиома треугольника.

Говорят, что последовательность элементов сходится к элементу, если . Это записывается , либо .

**Утверждение 1.1*.*** *Если при то*

*Доказательство.* Двукратное применение аксиомы треугольника позволяет записать

.

Отсюда получим

.

Если поменять местами пары элементов и , то получится неравенство с другим знаком левой части и, стало быть,

. Поэтому из того, что

и следует, что . Таким образом, расстояние есть непрерывная функция от своих аргументов и . Утверждение 1.1 доказано.

**Утверждение 1.2**. *Если при , то , то есть в метрическом пространстве сходящаяся последовательность не может иметь два различных предела.*

*Доказательство.* следовательно,

и по аксиоме различия . Утверждение 1.2 доказано.

**Утверждение 1.3.** *В метрическом пространстве всякая сходящаяся последовательность удовлетворяют условию Больцано-Коши.*

*Доказательство.* Если , то любого существует такой номер , что при справедливо неравенство . Возьмем и . Тогда . Утверждение 1.3 доказано.

Обратное утверждение, вообще говоря, не всегда верно, так как можно указать такое метрическое пространство, для которого из выполнения признака БольцаноКоши для последовательности не следует существование элемента к которому сходиться последовательность .

**Определение 1.2.** *Метрическое пространство назывется полным, если для любой последовательности , для которой выполняется условие Больцано-Коши, в будет существовать предельный элемент.*

Рассмотрим числовое пространство , элементами которого являются упорядоченные совокупности действительных (комплексных) чисел

Расстояние в можно описать различными способами. Приведем три наиболее употребительные метрики.

1. Кубическая или метрика:
2. Октаэдрическая или метрика:
3. Сферическая или метрика:

Легко проверить, что для каждого из этих расстояний выполняются аксиомы метрики. Во всех указанных метриках сходимость последовательности элементов , равносильна сходимости по координатам, и в каждой из этих метрик является полным метрическим пространством.

* 1. **Линейные нормированные пространства**

**Определение 1.3.** *Множество X называется линейным пространством над полем R, если:*

1. *на задана композиция сложения, т.е. для любых*

*;*

1. *абелева группа по сложению;*
2. *oпределено произведение числа на элемент из X, то есть для любых и имеем ;*
3. *;*

**Определение 1.4.** *Линейное пространство называется нормированным, если любому ставиться в соответствие число называемое нормой , для которого выполняются условия:*

1

Линейное нормированное пространство всегда может быть метризовано, для этого достаточно за расстояние между элементами x и y взять норму разности т.е.

**Определение 1.5.** *Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.*

**Пример 1.1.** Пространство . Рассмотрим множества функций непрерывных на конечном отрезке . Под сложением элементов на множестве понимают обычное сложение функций и под умножением элемента на число – обычное умножение функции на число. Под нормой функции понимают максимум ее абсолютного значения: . Пространство является полным.

**Определение 1.6.** *Банахово пространство с нормой называется (вещественным) гильбертовым пространством, если для любых его элементов и , принадлежащих, определено вещественное скалярное произведение (f,g) , обладающее свойствами симметричности , аддитивности , где и такое, что*

**Пример 1.2.** Пространство квадратично суммируемых функций на отрезке гильбертово.

Наряду с обычной (по норме) сходимостью элементов гильбертова пространства, называемой *сильной сходимостью*, рассматривают также слабую сходимость.

**Определение 1.7.** *Последовательность называется слабо сходящейся к элементу , если для любого имеет место сходимость при .*

Притом, сильная сходимость всегда влечет слабую. Но, вообще говоря, обратное неверно.

Гильбертово пространство обладает следующими свойствами: из слабой сходимости , и сходимости норм следует сильная сходимость .

В гильбертовом пространстве норма элемента вводится следующим образом: .

**1.3 Линейные операторы**

Пусть и – два линейных нормированных пространства и оператор, определенный на со значениями в пространстве .

**Определение 1.8.** *Оператор называется непрерывным на элементе если из сходимости в следует сходимость в .*

Говорят, что оператор непрерывен в ,если непрерывен на каждом элементе .

**Определение 1.9.** *Оператор называется аддитивным оператором, если для любых выполняется*

Свойства аддитивного оператора.

1)

2);

3)аддитивный и непрерывный оператор является однородным, т.е. для и верно равенство .

**Определение 1.10.** *Оператор называется ограниченным, если существует число такое, что для верно неравенство*

**Определение 1.11.**  *Аддитивный оператор называется линейным, если он непрерывен.*

**Определение 1.12*.*** *Нормой оператора называется наименьшее число , для которого при . Обозначение .*

**Определение 1.13.** *Оператор , определенный в пространстве и имеющий значение в , называется обратным для оператора и обозначается если он удовлетворяет условиям:*

*1*

*2*

Отметим, что если оператор имеет обратный , то осуществляет взаимно однозначное отображение на .

**1.4 Линейные операторы в гильбертовом пространстве**

Пусть гильбертово пространство.

**Определение 1.14.** *Оператор называется сопряженным к аддитивному непрерывному оператору гильбертова пространства , если для всех справедливо равенство*

Оператор также как и аддитивен и непрерывен. Например, для интегрального оператора

(1.1)

сопряженным будет тот же интегральный оператор с ядром отличающийся от исходного порядком аргументов.

*Свойства сопряженных операторов.*

*1)*

*2);*

*3)*

*4)*

**Определение 1.15.** *Если , то оператор называется самосопряженным.*

Примером самосопряжённого оператора может служить оператор (1.1) с симметричным ядром

**Определение 1.16.** *Если для всех справедливо неравенство то самосопряженный оператор называется положительным.*

Для любого непрерывного аддитивного оператора A оператор является самосопряженным и положительным.

**Определение 1.17.** *Если соотношение имеет место для некоторых , то говорят, что собственное значение оператора , а соответствующие ему собственные элементы.*

**Определение 1.18.** *Будем говорить, что число является точкой спектра самосопряженного оператора , если существует последовательность такая, что и* Иначе говоря, есть точка спектра, если .

Совокупность всех точек спектра называется *спектром оператора* и обозначается . Ясно, что собственное значение входит в спектр, который, однако, может содержать точки, не являющиеся собственными значениями.

**Определение 1.19.** *Число называется регулярным значением оператора , если оно не принадлежит спектру этого оператора.*

Пусть подпространство гильбертова пространства . Если каждому элементу однозначно соответствует элемент то тем самым в определен оператор который называется оператором проектирования или проектором(на подпространство ).

*Свойства проекторов*.

1) Для любых , элементы и ортогональны;

2) эквивалентно ;

3) эквивалентно ;

4)

С каждым самосопряженным оператором A можно связать семейство проекторов, которое позволяет построить интегральное представление оператора.

Пусть самосопряженный оператор. Рассмотрим фукцию

Обозначим . Пусть множество всех элементов , для которых , то есть собственное подпространство оператора , отвечающее нулевому собственному значению

Обозначим, наконец, через проектор, проектирующий на подпространство . Оказывается, свойства проекторов тесно связаны со спектром оператора A, вследствие чего семейство проекторов называется спектральной функцией оператора .

*Свойства спектральной функции.*

Пусть спектр оператора совпадает с . Тогда

1) если , то ; если , то

2) если , то ;

3) спектральная функция, как функция от , непрерывна справа в том смысле, что на ;

4) проектор перестановочен с каждым оператором, перестановочным с .

Используя понятие спектральной функции, самосопряжённый оператор A со спектром можно представить в виде

, (1.2)

которое является интегральным представлением оператора.

Если , т.е. оператор неограниченный, то . Если же , то справедливо:

Для построения интеграла (1.2) нет необходимости предполагать, что семейство проекторов является спектральной функцией самосопряженного оператора. Достаточно, если семейство проекторов удовлетворяет условиям 1) и 2).

**Определение 1.20.** *Пусть семейство проекторов зависит от вещественного параметра и удовлетворяет условиям:*

*1), если ;*

*2)существуют числа и такие, что для и для .*

Тогда семейство будем называть *разложением единицы*.

**1.5 Примеры некорректно поставленных задач**

При приближенном решении математических или прикладных задач весьма существенно является вопрос о том, корректна ли решаемая задача. Большинство некорректных задач может быть приведено к уравнению 1 рода, имеющему вид:

(1.3)

в котором по заданному, не обязательно линейному, оператору , действующему из пространства в пространство , и по заданному элементу требуется определить решение в пространстве

Пространства и будем считать метрическими, а в особо оговариваемых случаях, банаховыми или даже гильбертовыми.

**Определение 1.21.** *Задача определения решения из пространства по исходным данным называется устойчивой на пространствах и , если для любого числа можно указать такое число , что из неравенства следует, что*

*, где , , ,*

По-другому, если бесконечно малым вариациям правой части соответствуют бесконечно малые вариации . Помимо этого, говорят вместо устойчивости в пространстве о непрерывной зависимости от .

Рассмотрим несколько примеров некорректных задач.

**Пример 1.3.** Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 1 рода

(1.4)

Пусть вещественное ядро не только квадратично суммируемо, но и непрерывно. Такое ядро, очевидно, преобразует любую функцию в непрерывную функцию и, следовательно, не для всякой правой части решение уравнения (1.4) существует в пространстве

Если собственное значение оператора, то есть ядро неполное, то решение, в случае его существования, не единственно в

Наконец, неустойчивость решения покажем для полного симметричного ядра. Пусть вещественные и собственные числа и соответствующие им ортонормированные функции ядра. Тогда, как известно из теории интегральных уравнений, и а решение выражается через правую часть уравнения, представленную в виде:

с помощью ряда

Если правые части сходятся к функции в пространстве , то есть

то норма разности соответствующих решений уравнения (1.4), выраженная равенством

,

не только не обязана стремиться к нулю, но и может быть бесконечно большой. В этом легко убедиться, положив

Хотя , тем не менее

и, следовательно, устойчивость решений отсутствует.

Принадлежность точки предельному множеству точек спектра оператора характерна для некорректных задач.

**Пример 1.4.** Задача дифференцирования функции , известной приближенно.

Пусть есть производная функции , известной приближенно. Функция

в метрике отличается от на величину при любых значениях . Однако производная отличается от в метрике на величину , которая может быть произвольно большой при достаточно больших значениях

Заметим, что задача нахождения производной го порядка от функции сводиться к решению интегрального уравнения первого рода:

Таким образом, эта задача не обладает свойством устойчивости, что приводит к большим затруднениям при приближенном вычислении производных.

**Пример 1.5.** Численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике .

Пусть

Если вместо брать коэффициенты для и , получим ряд . Коэффициенты этих рядов отличаются (в метрике ) на величину

которую выбором числа можно сделать сколь угодно малой. Вместе с этим разность

может быть сколь угодно большой (при последний ряд расходится).

Таким образом, если уклонение суммы ряда брать в метрике , суммирование ряда Фурье не является устойчивым.

**Пример 1.6.** Задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область.

Пусть конечная область, дуга кривой, принадлежащая области . Тогда задача аналитического продолжения функции, заданной на дуге кривой, на всю область является неустойчивой.

В самом деле, пусть точка на границе области , расстояние которой до равно и аналитическая в функция. Функция  
 где заданное положительное число, также аналитична в . На множестве эти функции отличаются одна от другой на величину модуль которой не превосходит т.е. на множестве . Величина может быть сделана произвольно малой путем выбора соответствующего значения .

Однако в области разность функций не ограничена по модулю.

ГЛАВА 2. сХОДИМОСТЬ ОДНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УрАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

* 1. **Сходимость метода с априорным выбором итераций**

Для решения уравнения в гильбертовом пространстве с неограниченным линейным самосопряженным оператором (0 не является собственным значением) предлагается использовать итерационный метод

(2.1)

Здесь – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве возьмем оператор тождественный оператор. В случае приближенной правой части , итерационный процесс (2.1) запишется в виде

(2.2)

* + 1. **Сходимость при точной правой части уравнения**

Имеет место

**Теорема 2.1.** *Итерационный процесс (2.1) сходится к точному решению уравнения*

*Доказательство*. По индукции покажем, что

*.* (2.3)

Из (2.1) при получим

так как то .

Из (2.3) при получим

Получаем, что из (2.1) равняется из (2.3).

Необходимо показать, что (2.3) при равняется (2.1) при .

Из (2.3) при имеем

Из (2.1) при получим

И подставим вместо выражение, полученное из (2.3) при .

=

Рассмотрим

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора получим

Первый из полученных интервалов разобьем на два интеграла:

Так как для , то

А для первого интеграла

в силу свойств спектральной функции. Таким образом, Аналогично, Следовательно, и сходимость метода (2.1) доказана.

**2.1.2 Сходимость при приближенной правой части уравнения**

Справедлива

**Теорема 2.2**. *Если выбирать число итераций в зависимости от так чтобы то итерационный процесс (2.2) сходится*.

*Доказательство.* Рассмотрим

Оценим сверху максимум модуля подынтегральной функции

При , отсюда – критические точки . В силу симметричности достаточно рассмотреть только в одной точке, например, .

Следовательно,

Аналогично, при

Покажем, что

Для этого вместо рассмотрим и покажем, что

При , то есть (2.5) выполняется. Предположим, что оценка (2.5) справедлива при , то есть , и покажем, что она верна при n=k+1.

Покажем, что

Докажем более сильное неравенство   
Обозначим через и найдем ее производную.

Отсюда стационарные точки функции найдется из уравнения

Поскольку и , то  
Поэтому получим Итак, по индукции доказана справедливость оценки (2.4).

Значит, и .

Поскольку и , то для сходимости достаточно выбрать зависящее от так, чтобы . Тем самым доказана сходимость метода (2.2) к точному решению .

Итак, теорема 2.2 доказана.

Покажем, что порядок оценки для нельзя улучшить, то есть что показатель степени, с которым входит в нашу оценку найден верно. Для этого приравнивается к нулю.

Точка экстремума функции найдется из равенства

Имеем при

Отсюда

Обозначим , тогда

(2.6)

Величина , то есть ограничена, поэтому, если бы не стремились бы при к нулю, а были бы ограничены снизу положительной константой, то равенство (2.6) не выполнялось бы. Поэтому . Покажем, что не может Действительно, если бы , то слева в равенстве (2.6) была бы сходимость к со скоростью , справа для

и сходимость к была бы экспоненциальной, что невозможно ввиду равенства (2.6). Поэтому не стремится к , и, значит, не медленнее, чем , то есть , где – ограниченная числовая последовательность

Подставим в выражение для

Покажем, что нуль не является предельной точной . Предположим противное, что какая-то подпоследовательность числовой последовательности стремится к нулю, .

Тогда из (2.6) имеем

(2.7)

причем ,

Из равенства (2.7) получаем, что должно быть эквивалентно , а это неверно. Следовательно, нуль не является предельной точкой числовой последовательности и поэтому .

Из выражения для видно, что в оценку для *n* входит с показателем . Значит имеет порядок и его нельзя улучшить.

Уточним константу из оценки (2.4) для . Найдем предельную точку числовой последовательности Покажем, что сходится. Так как – ограниченная последовательность, то по лемме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность и Перейдем к пределу в обеих частях равенства (2.7)

Получим уравнение для определения

Она имеет два решения . Но так как нуль не является предельной точкой для , то. Поскольку – произвольная подпоследовательность последовательности , то и

.

Вернемся теперь к функции .

Обозначим через , тогда

Следовательно, для достаточно больших справедлива следующая оценка .

Полученная в оценке (2.4) константа завышена, таким образом, не более, чем в 1.1 раза.

**2.1.3 Оценка погрешности**

В предложении, что такое решение уравнения (1) истокопредставимо, то есть

(2.8)

получим оценку Имеем и

Подынтегральная функция имеет стационарные точки, которые находятся по формуле

Тогда

Отсюда в силу симметрии функции поэтому достаточно рассмотреть в точке .

Покажем, что

При = 0.

так как то

так как

Поскольку , то – точка максимума неотрицательной функции .

Тогда . Общая оценка погрешности для метода (2.2) примет вид

(2.9)

Итак, доказана

**Теорема 2.3**. *Если точное решение уравнения истокопредставимо (2.8), то для итерационного процесса (2.2) имеет место оценка погрешности (2.9).*

Оптимизируем по полученную оценку (2.9), для чего произвольную по от правой части приравниваем к нулю. Получим

возведем все в степень

Отсюда, подставим в (2.9)

из приведения под общую степень делаем вывод, что , тогда

(2.10)

Из полученной оценки (2.10) вытекает, что оптимальная оценка не зависит от параметра , но от зависит . Поэтому за счет выбора можно добиться того, что оптимальная оценка погрешности будет достигаться на первом шаге итерации (). Для этого достаточно взять

Итеративный метод (2.2) позволяет решать уравнение с неограниченным оператором и притом необязательно положительным.

Замечание 2.1. Если оператор – ограниченный, , то следует учитывать значения функции в точке , поэтому общая оценка погрешности метода (2.2) будет иметь вид

(2.11)

Очевидно, при величина , убывающая как геометрическая прогрессия, станет меньше величины , убывающая как . Следовательно, для достаточно больших *n* оценка (2.11) примет вид (2.9).

ГЛАВА 3. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора (т.е. уравнение (1) имеет неединственное решение). Положим – ортогональное дополнение ядра до . Пусть далее – проекция   
 на , а – проекция на Справедлива

**Теорема 3.1.** *Пусть тогда для метода (2.1) справедливы следующие утверждения:*

1. *Процесс (2.1) сходится тогда и только тогда, когда уравнение   
    разрешимо. В последнем случае где - минимальное решение уравнения (1).*

*Доказательство*.

Примем оператор к (2.1), получим

где Так как получим

Обозначим , тогда

Отсюда следовательно,

Так как – положительно определен в , т.е. и , то и поэтому Тогда

Так как для , то

в силу свойств спектральной функции. Следовательно, , откуда

Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2.1) сходится. Покажем, что уравнение разрешимо. Из сходимости к и из а) следует, что , следовательно, и уравнение разрешимо. Пусть теперь (уравнение разрешимо), следовательно, где - минимальное решение уравнения (оно единственно в ). Тогда (2.1) примет вид

Отсюда Последнее равенство разобьем на два

так как . Обозначим

получим

и, аналогично , можно показать, что . Таким образом Отсюда . Теорема 3 доказана.

**Замечание 3.1.** *Так как у нас то , т.е. итерационный метод (2.1) сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.*

ГЛАВА 4. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ

Изучим сходимость метода (2.2) в энергетической норме гильбертова пространства , где При этом, как обычно, число итераций нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности . Полагаем и рассмотрим разность . Используя интегральное представление неограниченного самосопряженного оператора, получим, что

Оценив подынтегральные функции, нетрудно показать, что при условии Таким образом, оценка погрешности для метода (2.2) в энергетической норме запишется в виде Следовательно, если в процессе (2.1) выбирать число итераций , зависящим от так, чтобы то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

**Теорема 4.1**. *При условии метод (2.1) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций выбирать из условия при*

Для метода (2.2) справедлива оценка погрешности

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим

и

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2.3) в энергетической норме достаточно выбирать чсло итераций , так, чтобы Однако относительно имеет порядок , и такой порядок обеспечивается сходимость метода итераций (2.2).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (2.2) и априорный момент останова без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (2.2) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения уравнения (1.1).

ГЛАВА 5. Правило останова по невязке для неявного метода итераций

При условии доказана сходимость метода

(5.1)

при приближенной и точной правых частях уравнения

(5.2)

и в предположении истокообразной представимости точного решения

получены оценки погрешности. Число итераций выбирается априорно.

Однако поскольку сведения об элементе и степени истокопредставимости имеются не всегда, то на основании вышесказанного трудно определить число итераций, обеспечивающих сходимость метода (5.1). Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке.

Зададим уровень останова и момент останова итерационного процесса (5.1) определим условием

*.* (5.3)

Предполагаем, что при начальном приближении невязка достаточно велика, больше уровня останова, т.е. Покажем возможность применения правила (5.3) для метода (5.1). Сначала рассмотрим семейство функций . Нетрудно показать, что для него выполнены условия:

(5.4)

(5.5)

(5.6)

. (5.7)

Далее оператора – ограниченный самосопряженный линейный.

Справедливы

**Лемма 5.1.** *Пусть – ограниченный оператор, . Тогда для при*

*Доказательство.*

При , тогда

так как при .

Итак, .

Лемма 5.1 доказана.

**Лемма 5.2.** *Пусть – ограниченный оператор, . Тогда для любого имеет место соотношение*

*Доказательство.*

Обозначим

то есть нормы ограничены.

Воспользуемся теоремой Банаха-Штейнгауза, по которой сходимость при для имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в подмножестве и ограничены независящей от постоянной.

. В качестве плотного в подмножества возьмем .

Покажем, что .

Возьмем тогда

Следовательно, и – ограничены в совокупности, поэтому

Лемма 5.2 доказана.

**Лемма 5.3.** *Пусть – ограниченный оператор, . Если для некоторой последовательности и при , имеем   
, то*

*Доказательство.*

*,* поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть , тогда , Но по условию , следовательно, .

Поскольку нуль не является собственным значением оператора , то  
 . Тогда так как – ограничены.

Получили, что подпоследовательность и поэтому подпоследовательность сильно сходится к нулю.

Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность стремится к нулю сильно.

Следовательно, и вся последовательность при .

Лемма 5.3 доказана.

Справедлива

**Теорема 5.1.** *Пусть – ограниченный самосопряженный оператор и пусть момент останова в методе* (5.1) *выбран по правилу* (5.3), *тогда при*

*Доказательство.* Известно, что , где  
. Поэтому получим

(5.8)

Так что . Рассмотрим

. (5.9)

В силу леммы 5.1 и 5.2 имеем

, (5.10)

*.* (5.11)

Кроме того, из (5.4) и (5.5) следует, что

, (5.12)

. (5.13)

Применим правило останова (5.3). Тогда , из (5.9) и (5.13) получим при

(5.14)

Для любого получим

*.* (5.15)

В частности при из (5.11) и (5.15) получаем

отсюда , так как из (5.11) , т.е. Если при этом , то, используя (5.8), получим

так как из (5.10)

Если же для некоторых последовательность окажется ограниченной, то и в этом случае

Действительно, из (5.14) . Следовательно, имеем и по лемме 5.3 получим . Отсюда

Теорема 5.1 доказана.

**Теорема 5.2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1, *оператор А – положителен и пусть* *Тогда справедливы оценки*

(5.16)

*Доказательство*. Из (5.7) при имеем

Воспользовавшись (5.15), получим , откуда справедливо . При помощи неравенства моментов оценим

Теперь, поскольку соотношение (5.8) справедливо для любых , то

Теорема 5.2 доказана.

**Замечание 5.1.** *Порядок оценки* (5.16) *есть и он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями* .

**Замечание 5.2.** *Знание порядка истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку решения*.

ГЛАВА 6. Правило останова по соседним приближениям в итерационных процедурах решения некорректных задач

Решаем уравнение с ограниченным несамосопряженным оператором , для которого нуль принадлежит спектру, но не является собственным значением оператора. Используем итеративный метод

(6.1)

Здесь . Этот метод совпадает с методом (5.2) при самосопряженном операторе . При приближенной правой части , метод (6.1) примет вид

(6.2)

Здесь – ошибки вычисления итерации, . Обозначим .

Определим момент останова итерационной процедуры.

Зададим уровень останова и тогда момент останова определим условиями

Справедливы

**Лемма 2.1.** *Пусть приближение определяется равенствами*

*,* (6.3)

*тогда справедливы неравенства*

**Лемма 6.2.** *При любом и произвольной последовательности ошибок удовлетворяющих условию , выполняется неравенство*.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 6.1.** *Пусть уровень останова выбирается как функция от уровней и норм погрешностей и . Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если, то момент останова определен при любом начальном приближении и любых и , удовлетворяющих условиям ;*
2. *если то справедлива оценка*

1. *если кроме того   
    и где то*

*Доказательство.* a) По индукции нетрудно показать, что

Из формул (5.14) и (6.5) легко получить равенство

Учитывая, что , получим

Отсюда

(6.6)

Обозначим и рассмотрим

Первый из полученный интегралов разобьем на два интеграла:

Так как для , то

А для первого интеграла

в силу свойств спектральной функции. Таким образом, Аналогично доказывается, что . Следовательно, имеем

. Поэтому

Из леммы 6.2 вытекает Следовательно, условием момент останова определен при любом начальном приближении и любых и

б) Рассмотрим последовательность (6.3) и определим момент останова условием

(6.7)

Из (6.6) имеем Отсюда следует, что . Из (6.4) получаем при

Поскольку

то

Однако

и

поэтому

Так как по (6.7) при , то справедливо . Учитывая, что и , из последнего неравенства получаем

в) Покажем, что

Для этого достаточно показать, что

В самом деле,

что равносильно равенству (6.9). Из равенства (6.5) вычтем (6.9), получим (6.8). Отсюда

где и Следовательно,

(6.10)

В частности (6.10) справедливо и при . Если при , тогда, как показано ранее, , поэтому для доказательства достаточно показать, что

Из (6.8) нетрудно доказать, что

Так как спектр оператора принадлежит отрезку [0,1], то справедливо неравенство . Действительно

Обозначим тогда

При

Имеем ,

следовательно,

Из (6.11) при , получим

Поскольку по условию теоремы где , , то при всех достаточно малых выполняется неравенство , поэтому из утверждения б) получим

Так как

Отсюда

Умножим обе части последнего неравенства на, получим

Множитель и дробь

ограничена при Поэтому при   
 Отсюда и из (2.10) при

Если номера останова , зависящие от не стремятся к при , а окажутся ограниченными, то и в этом случае

Теорема 6.1 доказана.

**Замечание 6.1.** *Можно показать, что*

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе проведены теоретические исследования по изучению неявного итерационного метода решения некорректных задач. Основные результаты можно сформулировать следующим образом:

1. изучен неявный итеративный метод решения уравнения 1-го рода в гильбертовом пространстве;
2. доказана сходимость метода при точной и приближенной правой части уравнения в случае единственного решения;
3. получены оценки погрешности метода, которые оптимизированы;
4. получена погрешность при счете с округлениями;
5. доказана сходимость метода при точной правой части уравнения в случае неединственного решения;
6. использование энергетической нормы позволило получить оценки погрешности и априорный момент останова без дополнительного требования на гладкость решения;
7. обосновано применение к итерационному методу правила останова по невязке и по соседним приближениям.

Результаты дипломной работы докладывались на:

- Международной научно практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (БрГу, 22 -23 октября 2015 г.);

- Международной научно практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (БрГу, 21 октября 2016 г.);

Предложенным методом могут быть решены обратная задача теории потенциала, обратная задача гравиметрии, задача об изучении спектрального состава светового излучения (задача спектроскопии), задача синтеза оптических систем, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента.

Опубликованы статьи:

1. Попека, В.Н. О регуляризации некоторых задач в гильбертовом пространстве с неограниченным оператором / В.Н. Попека, В.Ф. Савчук // Сборник материалов Международной научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (Брест, 22-23 октября 2015 г.) – 2015. – Брест: Изд-во БрГУ. – с.51.
2. Попека, В.Н. О регуляризации некоторых задач в гильбертовом пространстве с неограниченным оператором / В.Н. Попека, В.Ф. Савчук // Сборник материалов Международной научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (Брест, 21 октября 2016 г.) – 2016. – Брест: Изд-во БрГУ. – с.51.
3. Попека, В.Н. Правило останова по невязке для решения некорректных задач итерационным методом / В.Н. Попека, В.Ф. Савчук // Сборник материалов Международной научно-практической конференции, посвященной 40-летию кафедры методики преподавания математики и информатики «Формирование готовности будущего учителя математики к работе с одаренными учащимися» (Брест, 13-14 апреля 2016 г.) – 2016. – Брест: Изд-во БрГУ. – с.233.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лисковец, О. А. Об одном итеративном методе решения уравнений 1-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // В сб,: Вопросы прикладной математики. Иркутск. – 1975. – С. 159-166.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.
3. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений 1 рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестник БГУ им. В. И. Ленина. Сер. 1. – 1973. – №1. – С. 9-15.
4. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, №4. – С. 805-808.
5. Морозов, В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В. А. Морозов. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 320 с.
6. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
7. Лисковец, О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О. А. Лисковец. – Минск : Наука и техника, 1981. – 342 с.
8. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
9. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39, №5. – С. 195-198.
10. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
11. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – №12. – С. 59 – 63.
12. Савчук, В. Ф. Выбор момента останова в методе итераций решения некорректных задач / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Вестник Брестского университета. – 1998. – №2. – С. 9 – 16.
13. Hadamar, J. Le problem de Cauchy et les equations aux derivees partielles line aires hyperboliques / J. Hadamard. – Hermann. Paris, 1932.
14. Hadamard, J. Sur les problemes aux derivees partielies et leur signification physique / J. Hadamard // Bull. Univer. Princeton, 1902. – Vol. 13. – P. 49 – 52.
15. Тихонов, А. Н. О решении некорректных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, №3. – С. 501 – 504.
16. Иванов, В. К. О некорректно поставленных задачах / В. К. Иванов // Мат. сб. – 1963. – Т. 61(103), №2. – С. 211 – 223.
17. Phillips, D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // J. Accoc. Comput. Mach, 1962. – Vol. 9, № 1. – P. 84 – 97.
18. Carleman, T. Les fonctions quasi analitiqyes / T. Carleman. – Paris, 1926.
19. Голузин, Г. М. Обобщение формулы Карлемана и её приложение к аналитическому продолжению функций / Г. М. Голузин, В. И. Крылов // Мат. сб. – 1933. – № 40. – C. 144 – 149.
20. Андреев, Б. А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике / Б. А. Андреев // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. наук. – 1947. – № 1. – С. 79 – 92.
21. Маловичко, А. К. Методы аналитического продолжения аномалий силы и их приложения к задачам гравиразведки / А. К. Маловичко. – М. 1956. – 160 с.
22. Антохин, Ю. Т. О некоторых некорректных задачах теории управления с частными производными / Ю. Т. Антохин // Диф. ур. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 241 – 250.
23. Страхов, В. Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации / В. Н. Страхов // ЖВМ и МФ. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1602 – 1606.
24. Страхов, В. Н. О решении некорректных задач магнито и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свёртки / В. Н. Страхов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1967. – С. 36 – 54.
25. Константинова, Я. В. Градиентный метод с переменным шагом для уравнений 1 рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Известия АН БССР. Сер. физ. – мат. наук. – 1974. – № 2. – С. 45 – 49.
26. Лисковец, О. А. Метод простых итераций с попеременно чередующимся шагом для уравнений 1 рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 1. – С. 9 – 12.
27. Савчук, В. Ф. Некоторые итеративные методы решения уравнений 1-го рода / В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук . – 1976. – № 5. – С. 23 – 27.
28. Савчук, В. Ф. Сходимость одного метода решений линейных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1981. – № 4. – С. 53 – 58.
29. Лисковец, О. А. Правила останова итераций в неявных итеративных методах для уравнений 1 рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1991. – № 2. – С. 9 – 12.
30. Матысик, О. В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С.38 – 43.
31. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 684 с.