Metoda elementów skończonych wibracje akustyczne warstwy materiału

Wojciech Pawlina
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Styczeń, 2025

Wyprowadzenie sformułowania słabego

Założenia:

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \ u(x) = \sin x$$

$$u(0) = 1$$

$$\frac{du(2)}{dx} + u(2) = 4$$

$$u : [0, 2] \ni x \to u(x) \in R$$

$$V = \{ f \in H^1 : f(0) = 1 \}$$

$$w, v \in V$$

Wyprowadzenie sformułowania słabego zaczynam od przemnożenia równania przez funkcję testującą v i scałkowania po dziedzinie:

$$-\int_0^2 u''vdx \ -\int_0^2 uvdx \ = \ \int_0^2 \mathrm{sinxdx}$$

Całkuję przez części:

$$-[u'v]\,_0^2 \ + \ \int_0^2 u'v'dx - \int_0^2 uvdx = \int_0^2 \mathrm{sinxdx}$$

Wiemy, że na lewym brzegu mamy warunek Dirichleta, więc $v(0) = 0$:

$$u'(0)v(0)=0$$

Następnie korzystam z warunku Cauchego:

$$u'(2)=4+u(2)$$

$$-u'(2)v(2)=-u(2)v(2)$$

$$-(4+u(2))v(2) + \int_0^2 u'v'dx - \int_0^2 uvdx = \int_0^2 \sin x dx$$

Żeby funkcja spełniała warunki dirichleta podstawiam $u = \bar{u} + w$:

$$\bar{u} = e_0$$

$$-w(2)v(2) + \int_0^2 w'\, v'dx - \int_0^2 wvdx = \int_0^2 \sin x dx - \int_0^2 \bar{u}'v'dx + \int_0^2 \bar{u}vdx + 4v(2)$$

$$B(w, v) = L(v)$$

Dyskretyzacja problemu

Przestrzeń w której będę poszukiwał rozwiązania równania zdefiniowałem następująco:

$$V_h =< e_0, e_1, ..., e_{n-1} >$$

Gdzie N jest liczbą podziałów daną na wejściu algorytmu.
Funkcje testowe tworzące bazę V_h definiuję jako:

$$e_i = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 & \text{dla } x \in [h(i-1), hi] \\ -\frac{x}{h} + i + 1 & \text{dla } x \in [hi, h(i+1)] \end{cases}$$

gdzie $h = \frac{2}{N}$ oznacza długość przedziału.

Postać macierzowa

Równanie liniowe, do którego sprowadza sie odnalezienie w, możemy zapisać w postaci:

$$w_1 B(e_1, e_1) + ...w_n B(e_n, e_1) = L(e_1)$$

$$w_1 B(e_1, e_2) + ...w_n B(e_n, e_2) = L(e_1)$$

$$\vdots$$

$$w_1 B(e_1, e_n) + ...w_n B(e_n, e_n) = L(e_{n-1})$$

Co możemy zapisać macierzowo:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & \dots & B(e_n, e_1) \\ \vdots & & & \\ B(e_1, e_n) & B(e_2, e_n) & \dots & B(e_n, e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Otrzymanie rozwiązania

Żeby otrzymać wynikową funkcje u musimy pamiętać o przesunięciu $u = \bar{u} + w$, więc do każdego punktu z w dodajemy $\bar{u} = \mathsf{e}_0(w)$ i otrzymamy wartości funkcji u.