|  |
| --- |
| Московский авиационный институт  (Национальный исследовательский университет) |
| Факультет информационных технологий и прикладной математики  Кафедра вычислительной математики и программирования |
| Лабораторные работы по курсу «Численные методы» |
| Студент: Устинов А. Э.  Группа: М8О-304Б-20  Преподаватель: Демидова О. Л.  Оценка |
| Москва 2023 |

* 1. **Формулировка задачи**

Решение СЛАУ, нахождение обратной матрицы и определителя матрицы системы

**Метод**

LU-разложение. Решение систем алгебраических уравнений, вычисление определителя, вычисление обратной матрицы и др.

LU – разложение матрицы A представляет собой разложение матрицы A в произведение нижней и верхней треугольных матриц (A = LU)

Для экономии памяти, будем записывать обе матрицы в одну, подразумевая, что у матрицы L на главной диагонали единицы.

На первом этапе решается СЛАУ Lz = b . Поскольку матрица системы - нижняя треугольная, решение можно записать в явном виде

На втором этапе решается СЛАУ Ux = z с верхней треугольной матрицей. Здесь, как и на предыдущем этапе, решение представляется в явном виде:

Второй этап эквивалентен обратному ходу методу Гаусса, тогда как первый соответствует преобразованию правой части СЛАУ в процессе прямого хода.

**Основные применения**

Метод LU разложения является одним из основных методов численного решения систем линейных уравнений. Его основное применение заключается в нахождении решений систем линейных уравнений, что встречается во многих областях науки и техники, в том числе:

1. Решение систем уравнений в задачах физики и инженерии, таких как механика твёрдого тела, электротехника, гидродинамика, аэродинамика и т.д.
2. Решение задач оптимизации, которые сводятся к решению систем линейных уравнений. Например, задачи минимизации функций или линейного программирования.
3. Анализ данных и статистическое моделирование. Например, метод LU разложения может быть использован для вычисления регрессии и корреляции между наборами данных.

**Особенности метода**

1. Легко вычисляется определитель матрицы:  
   Однажды найдя LU-разложение для матрицы мы можем очень быстро решать системы линейных алгебраических уравнений с различной правой частью.

Пусть ,   
Тогда   
Так как [](http://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=L) — нижнетреугольная матрица, то очень легко находим   
Решаем   
Легко находим , так как U — верхнетреугольная матрица

1. Сложность алгоритма:  
   LU-разложение:

Последующее решение систем:

* 1. **Формулировка задачи**

Решение СЛАУ с трехдиагональной матрицей

**Метод**

Метод прогонки

**Основные применения** Эффективный метод решения СЛАУ с трех - диагональными матрицами, возникающих при конечно-разностной аппроксимации задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений в частных производных второго порядка и является частным случаем метода Гаусса.

Решения ищутся в виде:

Прямой ход предназначен для нахождения прогоночных коэффициентов

Обратный ход предназначен для нахождения вектора

X = () в соответствии с найденными

Для устойчивости метода прогонки (1.4)-(1.7) достаточно выполнение следующих условий:

**Особенности метода**

Методом прогонки можно решать только специфические системы, имеющие не более трех неизвестных в каждой строке.

Сложность O(N)

* 1. **Формулировка задачи**

Решение СЛАУ

**Методы:**

**1.3.1.Метод простых итераций**

За нулевое приближение принимается вектор правых частей. В следующем приближении, для вычисления X подставляются значение вектора X на предыдущем приближении. Итерации повторяются до достижения заданной точности

Метод простых итераций сходится к единственному решению при любом начальном приближении , если какая-либо норма матрицы эквивалентной системы меньше единицы

Для сходимости итерационного процесса необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы α эквивалентной системы лежал внутри круга с радиусом, равным единице.

При выполнении достаточного условия сходимости оценка погрешности решения на k - ой итерации дается выражением:

Процесс итераций останавливается при выполнении условия , где - задаваемая вычислителем точность.

Поскольку является только достаточным (не необходимым) условием сходимости метода простых итераций, то итерационный процесс может сходиться и в случае, если оно не выполнено. Тогда критерием окончания итераций может служить неравенство

**Основные применения**

Для решения СЛАУ с разреженными матрицами.

**Особенности метода**

Удобен при распараллеливании, так как приближения считаются построчно независимо друг от друга.

Можно задать точность приближения

В вычислительном процессе участвуют только произведения матрицы на вектор, что позволяет работать только с ненулевыми элементами матрицы, значительно упрощая процесс хранения и обработки матриц, по сравнению с методом Гаусса

**1.3.2.Метод Зейделя**

Метод простых итераций довольно медленно сходится. Для его ускорения существует метод Зейделя, заключающийся в том, что при вычислении компонента вектора неизвестных на (k+1)-й итерации используются , уже вычисленные на (k+1)-й итерации. Значения остальных компонент берутся из предыдущей итерации. Значение остальных компонент берутся из предыдущей итерации.

Оценка погрешности вычисляется аналогично

Первое приближение – вектор правых частей

**Основные применения**

Метод Зейделя (или метод простой итерации) - это один из методов численного решения систем линейных уравнений. Этот метод часто используется в тех случаях, когда матрица системы уравнений является разреженной или имеет специальную структуру.

Основные применения метода Зейделя включают:

1. Решение систем линейных уравнений. Метод Зейделя является очень эффективным методом решения систем линейных уравнений, особенно в случае, когда матрица системы уравнений разрежена.
2. Решение задач математического программирования. Метод Зейделя может использоваться для решения задач линейного программирования, когда необходимо минимизировать или максимизировать линейную функцию при наличии ограничений.
3. Решение задач оптимизации. Метод Зейделя может использоваться для решения задач оптимизации, которые сводятся к решению систем линейных уравнений.

**Особенности метода Зейделя**

Сходимость быстрее, чем у метода простых итераций, но невозможно распараллеливаливание.

* 1. **Формулировка задачи**

Нахождение собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы

**Метод**

Метод вращений

**Основные применения**

Нахождение собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы

1. Находим максимальный недиагональный элемент матрицы
2. Находим соответствующую этому элементу матрицу вращения
3. Вычисляем матрицу

В качестве критерия окончания итерационного процесса используется условие малости суммы квадратов внедиагональных элементов:

Если

продолжается. Если , то итерационный процесс останавливается, и в качестве искомых собственных значений принимаются

* 1. **Формулировка задачи**

Нахождение собственных значений

**Методы**

Метод QR разложений

**Основные применения**

Нахождение собственных значений

1. Ищем матрицу Хаусхолдера, соответствующую вектору:

по формуле

1. Проделываем аналогичную процедуру для всех векторов матрицы A
2. На каждой итерации производим умножение
3. R =

После проделывания этой операции, считаем

Повторяем вышеназванную последовательность действий, пока для каждого из диагональных значений матрицы не будет выполнено одно из двух условий:или

Причем, в случае первого условия, проверим диагональную матрицу 2x2, решив квадратное уравнение:

**Особенности метода**

Существенным недостатком рассмотренного выше алгоритма является большое число операций необходимое для - факторизации матрицы на каждой итерации.

Преимущество метода в том, что с помощью него можно находить комплекснозначные собственные значения

# **2.1. Формулировка задачи**

Решение нелинейного уравнения с помощью метода простой итерации.

# **Метод**

Метод простой итерации используется для решения уравнения . При использовании этого метода уравнение заменяется эквивалентным уравнением с выделенным линейным членом . Решение ищется путем построения последовательности , начиная с некоторого заданного значения . Если - непрерывная функция, а - сходящаяся последовательность, то значение является решением уравнения.

Условия сходимости метода и оценка его погрешности определяются теоремой:

Пусть функция определена и дифференцируема на отрезке . Тогда если выполняются условия:

то уравнение имеет и притом единственный на корень ; к этому корню сходится определяемая методом простой итерации последовательность , начинающаяся с любого .

При этом справедливы оценки погрешности: и .

Если непосредственное преобразование уравнения к виду не позволяет получить уравнение, для которого выполняются условия сходимости метода простой итерации, можно преобразовать уравнение к следующему эквивалентному уравнению . Данное уравнение имеет вид с . Здесь - параметр, который подбирается таким образом, чтобы в нужной области выполнялось неравенство .

# **Основные применения**

Метод простой итерации используется для решения нелинейных уравнений с одним неизвестным. Однако его применение ограничено условиями сходимости, которые могут быть не выполнены для некоторых уравнений.

# **Особенности метода**

Одной из особенностей метода простой итерации является то, что он может быть использован для решения уравнений, которые не могут быть преобразованы к виду напрямую. В этом случае уравнение преобразуется к эквивалентному виду , где - параметр, который подбирается таким образом, чтобы в нужной области выполнялось неравенство . Это позволяет использовать метод простой итерации для решения широкого класса нелинейных уравнений.

Также метод простой итерации отличается своей простотой и легкостью реализации. Однако, сходимость этого метода может быть медленной и зависит от выбора функции и начального приближения . Важно правильно выбрать функцию и начальное приближение , чтобы обеспечить сходимость метода.

# **2.2. Формулировка задачи**

Решение нелинейного уравнения с помощью метода Ньютона.

# **Метод**

Метод Ньютона, также известный как метод касательных, является итерационным методом для решения нелинейных уравнений вида . Он использует касательные к графику функции для приближения корня уравнения.

Итерационный процесс определяется формулой , где - производная функции в точке . Для начала вычислений требуется задание начального приближения . На каждой итерации вычисляется новое приближение корня уравнения путем вычитания отношения значения функции в текущей точке к ее производной в этой же точке.

Условия сходимости метода определяются следующей теоремой: Пусть на отрезке функция имеет первую и вторую производные постоянного знака и пусть . Тогда если точка выбрана на так, что , то начатая с нее последовательность , определяемая методом Ньютона, монотонно сходится к корню уравнения. Это означает, что для обеспечения сходимости метода Ньютона необходимо правильно выбрать начальное приближение .

В качестве условия окончания итераций в практических вычислениях часто используется правило , где - заданная точность. Итерации продолжаются до тех пор, пока разница между двумя последовательными приближениями корня не станет меньше заданной точности.

Метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью, что означает, что количество верных цифр в приближении корня удваивается на каждой итерации. Однако, этот метод может быть чувствителен к выбору начального приближения и может не сходиться, если начальное приближение выбрано неправильно. Также этот метод требует вычисления производной функции на каждой итерации.

# **Основные применения**

Метод Ньютона имеет свои ограничения. Он может быть чувствителен к выбору начального приближения и может не сходиться, если начальное приближение выбрано неправильно. Также этот метод требует вычисления производной функции на каждой итерации, что может быть затруднительно для некоторых функций.

# **Особенности метода**

Одной из особенностей метода Ньютона является его квадратичная сходимость. Это означает, что количество верных цифр в приближении корня удваивается на каждой итерации. Итерационный процесс определяется формулой , где - производная функции в точке . Это позволяет достичь высокой точности решения за относительно небольшое количество итераций.

# **2.3 Формулировка задачи**

Решение систем нелинейных уравнений с помощью метода простой итерации.

# **Метод**

Метод простой итерации (МПИ) - это численный метод решения систем нелинейных уравнений. Он основан на идее о поиске неподвижной точки функции отображения, которое можно использовать для решения системы уравнений. Метод основан на представлении системы нелинейных уравнений в виде набора нелинейных уравнений первого порядка.

Предположим, что у нас есть система нелинейных уравнений вида:

Метод простой итерации начинается с преобразования системы уравнений в эквивалентную форму, в которой каждое уравнение содержит только одну неизвестную переменную. Для этого используются нелинейные уравнения первого порядка:

Затем метод осуществляет итеративный процесс, начиная с какого-либо начального приближения и продолжая до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

На каждой итерации МПИ вычисляет новое приближение , используя предыдущее приближение и функцию отображения , которая задана системой уравнений первого порядка. Формула для вычисления нового приближения выглядит следующим образом:

Процесс продолжается до тех пор, пока разность между текущим и предыдущим приближением не будет меньше заданной точности:

где - заданная точность.

Метод простой итерации сходится, если функция отображения удовлетворяет условию сжимающего отображения. То есть, если существует число такое, что для любых двух точек и выполняется неравенство:

где - это норма вектора.

Если это условие выполняется, то МПИ сходится к единственному решению системы уравнений. Кроме того, можно доказать, что сходимость метода простой итерации является локальной, то есть сходится только к решению, которое находится вблизи начального приближения . Если начальное приближение выбрано неправильно или если функция отображения не удовлетворяет условию сжимающего отображения, метод может расходиться.

Для применения метода простой итерации необходимо выбрать функцию отображения , которая позволяет быстро сходиться к решению. Существует несколько способов выбора функции отображения, например:

- Метод Якоби: каждое уравнение решается относительно одной переменной, а остальные переменные считаются по предыдущему приближению.

- Метод Гаусса-Зейделя: каждое уравнение решается относительно одной переменной, но в отличие от метода Якоби, остальные переменные уже вычислены по новому приближению. Это позволяет ускорить сходимость метода.

- Метод простой итерации с использованием векторной функции: в этом методе каждое уравнение представляется в виде векторной функции , а функция отображения определяется как , где - коэффициент, выбираемый для ускорения сходимости.

# **Основные применения**

Применение метода ограничено условиями сходимости, которые могут быть не выполнены для некоторых уравнений. В этом случае может потребоваться использование других методов решения нелинейных уравнений.

Также метод простой итерации может быть использован для оптимизации функций и нахождения экстремумов. Однако, как и в случае решения уравнений, сходимость этого метода может быть медленной и зависит от выбора функции и начального приближения .

# **Особенности метода**

* Сходимость метода зависит от выбора функции и начального приближения . Важно правильно выбрать эти параметры, чтобы обеспечить сходимость метода.
* Скорость сходимости метода может быть медленной. В этом случае может потребоваться большое количество итераций для достижения требуемой точности.
* Метод простой итерации является простым в реализации и не требует вычисления производных функций.
* Метод простой итерации может быть использован для решения систем нелинейных уравнений с разреженными матрицами Якоби.

# **2.4 Формулировка задачи**

Решение систем нелинейных уравнений с помощью метода Ньютона.

# **Метод**

Метод Ньютона применяется для решения системы нелинейных уравнений. Если известно начальное приближение, то итерационный процесс нахождения решения методом Ньютона может быть представлен следующим образом:

где значения приращений определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений. В векторно-матричной форме расчетные формулы имеют вид

где вектор приращений находится из решения уравнения . Здесь - матрица Якоби первых производных вектор-функции . Использование метода Ньютона предполагает дифференцируемость функций и невырожденность матрицы Якоби. Если начальное приближение выбрано в достаточно малой окрестности искомого корня, то итерации сходятся к точному решению, причем сходимость квадратичная.

В практических вычислениях обычно используется критерий окончания итераций в виде

При использовании метода простой итерации система уравнений приводится к эквивалентной системе специального вида

или в векторной форме

# **Основные применения**

Основное применение метода Ньютона - это нахождение решения системы нелинейных уравнений. Он используется в тех случаях, когда метод последовательного исключения неизвестных не позволяет свести решение исходной задачи к решению одного нелинейного уравнения с одним неизвестным. Метод Ньютона предполагает дифференцируемость функций и невырожденность матрицы Якоби. Если начальное приближение выбрано в достаточно малой окрестности искомого корня, итерации сходятся к точному решению с квадратичной сходимостью.

# **Особенности метода**

Для практических вычислений, как правило, используется критерий окончания итераций в виде:

где - заданная точность.

# **Формулировка задачи**

Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона

# **Метод**

Методы Лагранжа и Ньютона являются одними из наиболее распространенных методов интерполяции, позволяющими приближенно определить значения функции на некотором отрезке по известным значениям функции в некоторых точках этого отрезка.

Метод Лагранжа основан на интерполяционном полиноме Лагранжа, который выглядит следующим образом:

где - интерполируемая функция, - известные точки, в которых известны значения функции. Этот полином имеет степень и проходит через все известные точки.

Метод Ньютона основан на интерполяционном полиноме Ньютона, который можно записать в виде:

где - разделенная разность -го порядка функции , определенная рекурсивно следующим образом:

Этот полином также проходит через все известные точки и имеет степень . Отличие от полинома Лагранжа заключается в том, что в формуле Ньютона используются разделенные разности, что может сильно упростить вычисления в некоторых случаях.

В обоих методах полиномы строятся на основе известных значений функции, поэтому они являются методами интерполяции. Однако, при недостаточном количестве точек или наличии большой погрешности в известных значениях функции, могут возникнуть проблемы с точностью аппроксимации.

# **Основные применения**

Основное применение методов Лагранжа и Ньютона - это аппроксимация (приближенное вычисление) значений функции в некоторых точках на основе известных значений функции в других точках.

Например, эти методы могут использоваться для построения графиков функций, когда точные значения функции неизвестны, но известны её значения в некоторых точках. Также методы могут применяться в численных методах решения уравнений, дифференциальных уравнений и интегралов, когда нужно приближенно определить значения функции в некоторых точках для последующего использования в других вычислениях.

# **Особенности метода**

Особенности методов Лагранжа и Ньютона заключаются в их удобстве использования и точности при аппроксимации функций.

Преимущества метода Лагранжа:

* Простота формулы интерполяционного полинома, что позволяет быстро и легко вычислить значения функции в заданных точках.
* Единственность интерполяционного полинома, который проходит через все заданные точки.
* Устойчивость метода при малых изменениях значений функции в заданных точках.

Однако, недостатком метода Лагранжа является то, что для каждой дополнительной точки интерполяции необходимо пересчитывать весь интерполяционный полином, что может быть очень затратным по времени.

Преимущества метода Ньютона:

* Использование разделенных разностей позволяет значительно сократить вычислительную нагрузку при добавлении новых точек интерполяции.
* Не требуется пересчета всего интерполяционного полинома при добавлении новой точки, только необходимо пересчитать разделенные разности.
* Удобство использования при интерполяции функций, заданных таблично.

Однако, недостатком метода Ньютона является то, что при большом количестве точек интерполяции может произойти ошибка округления, что приведет к погрешности в вычислении интерполяционного полинома.

Также стоит отметить, что оба метода требуют достаточно плотного расположения точек интерполяции на отрезке, чтобы обеспечить достаточную точность аппроксимации.

Таким образом, выбор метода интерполяции зависит от конкретной задачи и количества точек интерполяции. Если точек интерполяции мало, то следует использовать метод Лагранжа, а при большом количестве точек - метод Ньютона.

# **Формулировка задачи**

Сплайн-интерполяция

# **Метод**

Метод сплайн-интерполяции - это метод аппроксимации функции с использованием полиномов малой степени на каждом отрезке интервала интерполирования. Он применяется в тех случаях, когда известны значения функции только в конечном числе точек, и требуется получить непрерывную функцию, проходящую через эти точки.

Предположим, что имеются точек , через которые требуется построить интерполяционную функцию . Метод сплайн-интерполяции заключается в разбиении отрезка на частей и построении на каждом отрезке интерполяционного полинома степени не выше . Кроме того, на каждом отрезке производная интерполяционной функции должна быть непрерывной. Эти условия позволяют построить непрерывную и гладкую функцию , проходящую через заданные точки.

Полиномы определяются из следующих условий:

1. , - полином должен проходить через концы отрезка . 2. , , - значения функции, первой и второй производной интерполяционной функции должны быть непрерывны в точках соединения полиномов. 3. - граничные условия, которые гарантируют гладкость интерполяционной функции на всем отрезке .

Таким образом, для каждого отрезка необходимо решить систему уравнений относительно коэффициентов полинома . Полученные таким образом полиномы сшиваются в единую функцию .

Формулы для коэффициентов полинома выглядят следующим образом:

где , а - коэффициенты, которые необходимо найти решением системы уравнений, удовлетворяющей условиям 2 и 3 выше. Эти коэффициенты можно выразить через значения функции и ее производных в узлах интерполяции, решив систему уравнений.

Например, если используется кубический сплайн, то система уравнений для нахождения коэффициентов выглядит следующим образом:

для , с граничными условиями .

Таким образом, метод сплайн-интерполяции позволяет получить непрерывную и гладкую функцию, проходящую через заданные точки. Он широко используется в различных областях, таких как математика, физика, инженерия и т.д.

# **Основные применения**

Метод сплайн-интерполяции имеет несколько особенностей, которые необходимо учитывать при его применении.

Необходимость выбора количества интерполяционных точек и типа сплайна. Количество интерполяционных точек должно быть достаточным для достижения требуемой точности, но не слишком большим, чтобы избежать переобучения. Тип сплайна также должен быть выбран в зависимости от свойств интерполируемой функции.

Решение системы уравнений. Для нахождения коэффициентов сплайна необходимо решить систему уравнений, что может потребовать значительных вычислительных ресурсов. Кроме того, система может быть неустойчивой, если количество интерполяционных точек слишком велико или расположение точек неоптимально.

Локальная природа интерполяции. Метод сплайн-интерполяции обеспечивает непрерывность и гладкость интерполянта, но он не гарантирует его поведение между узлами интерполяции. Таким образом, сплайн может иметь локальные осцилляции или выпуклости, которые не отображают истинного поведения интерполируемой функции.

Возможность экстраполяции. Метод сплайн-интерполяции может использоваться для экстраполяции интерполянта за пределы интервала интерполяции, но это может привести к неопределенности или неточности.

В целом, метод сплайн-интерполяции является эффективным инструментом для интерполяции гладких функций, но его применение должно быть осуществлено с осторожностью и с учетом особенностей интерполируемой функции и данных.

# **Особенности метода**

Метод сплайн-интерполяции - это метод численной интерполяции, который используется для нахождения аппроксимирующей функции, которая проходит через заданные точки. Основными особенностями метода сплайн-интерполяции являются:

Интерполяция кусочно-полиномиальной функцией: метод сплайн-интерполяции основан на интерполяции функции не одним, а несколькими полиномами, каждый из которых определен на отдельном участке интервала и является непрерывным. Таким образом, сплайн-интерполяция позволяет аппроксимировать функцию с большей точностью, чем интерполяция одним полиномом.

Непрерывность и гладкость: при использовании метода сплайн-интерполяции каждый полином должен быть непрерывным и иметь определенную степень гладкости, чтобы избежать резких изменений функции между отдельными полиномами. Это обеспечивает более естественное поведение аппроксимирующей функции.

Интерполяция с краевыми условиями: метод сплайн-интерполяции позволяет задавать краевые условия, такие как значения функции и ее производных в начальной и конечной точках интервала. Это позволяет более точно определять поведение функции на краях интервала и уменьшать ошибки аппроксимации.

# **Формулировка задачи**

Метод наименьших квадратов

# **Метод**

Метод наименьших квадратов для интерполяции - это один из методов, который используется для приближения функции по набору данных. Данный метод основывается на минимизации суммы квадратов отклонений между значением функции и значениями, полученными приближением функции на данных точках.

Пусть даны набор точек , где - различные значения аргумента, а - соответствующие значения функции. Требуется найти многочлен степени , такой что , .

Метод наименьших квадратов заключается в нахождении многочлена , который минимизирует сумму квадратов отклонений между и . То есть нужно решить следующую задачу минимизации:

Решением этой задачи является многочлен , который имеет следующий вид:

где - многочлены Лагранжа, определяемые следующим образом:

Таким образом, метод наименьших квадратов позволяет найти многочлен, который наилучшим образом аппроксимирует функцию по заданным точкам.

# **Основные применения**

Метод наименьших квадратов является одним из наиболее распространенных методов численного анализа и находит широкое применение в различных областях, включая науку, технику, экономику и другие.

Основные применения метода наименьших квадратов:

Аппроксимация функций: метод наименьших квадратов используется для аппроксимации функций по экспериментальным данным. Например, для нахождения зависимости между температурой и давлением, электрическим током и напряжением и т.д.

Регрессионный анализ: метод наименьших квадратов используется для анализа зависимостей между двумя или более переменными. Этот метод позволяет определить линейную или нелинейную зависимость между переменными и построить уравнение регрессии, которое позволяет прогнозировать значения одной переменной по значениям другой переменной.

Обработка сигналов: метод наименьших квадратов используется для обработки сигналов, таких как звуковые и видео сигналы. Например, для определения параметров сигнала, таких как амплитуда, частота, фаза и т.д.

# **Особенности метода**

Метод наименьших квадратов (МНК) имеет несколько особенностей, которые необходимо учитывать при его применении.

1. Зависимость от выбора модели. МНК требует выбора модели, которая описывает связь между зависимой и независимыми переменными. Неправильный выбор модели может привести к неправильным результатам.

2. Чувствительность к выбросам. МНК чувствителен к наличию выбросов в данных. Один выброс может сильно повлиять на результаты регрессионного анализа.

3. Мультиколлинеарность. Если независимые переменные в модели сильно коррелируют друг с другом, МНК может привести к неустойчивым и неточным результатам.

4. Необходимость проверки гипотез. При использовании МНК необходимо проверять гипотезы о значимости коэффициентов модели и о соответствии модели данным.

5. Оценка качества модели. МНК позволяет оценить качество модели с помощью коэффициента детерминации, но он не всегда является достаточно информативным для оценки качества модели.

6. Регуляризация. В случае переобучения модели может использоваться регуляризация, которая штрафует модель за слишком большие коэффициенты.

В целом, МНК является мощным инструментом для анализа зависимостей между переменными, но его применение должно быть осуществлено с осторожностью и с учетом особенностей данных и модели.

# **Формулировка задачи**

Численное дифференцирование

# **Метод**

Изучение численного дифференцирования является важной частью численного анализа. Оно используется для вычисления значения производной функции в заданных точках, когда аналитическое выражение для производной неизвестно или неудобно использовать.

Одним из наиболее простых методов численного дифференцирования является метод конечной разности первого порядка. Для функции значение ее производной в точке может быть вычислено следующим образом:

где - малая константа, определяющая шаг приближения. Чем меньше значение , тем точнее будет результат вычисления производной.

Метод конечной разности второго порядка дает более точное значение производной функции. Для этого используется следующая формула:

Также существует метод конечной разности третьего порядка, который основан на следующей формуле:

Однако этот метод требует большего количества вычислений, чем методы первого и второго порядка.

Существуют также другие методы численного дифференцирования, например, методы с использованием квадратурных формул и интерполяционных полиномов. Однако выбор метода зависит от конкретной задачи и доступных вычислительных ресурсов.

Важно отметить, что при использовании численного дифференцирования возможны ошибки округления и погрешности вычислений. Поэтому необходимо учитывать эти факторы и проводить оценку точности полученных результатов.

# **Основные применения**

Численное дифференцирование используется во многих областях, включая физику, инженерное дело, экономику, математику и технические науки. Некоторые из основных применений численного дифференцирования включают:

Расчет скорости и ускорения в физических системах, таких как движение тел и взаимодействие частиц.

Анализ экономических данных, включая прогнозирование экономических тенденций и оценку рисков.

Разработка математических моделей, используемых в инженерии для проектирования и оптимизации систем.

Исследование поведения функций и функциональных зависимостей в математическом анализе и статистике.

Обработка сигналов и обработка изображений, используемые в области обработки данных.

# **Особенности метода**

Особенности метода численного дифференцирования зависят от выбранного метода и задачи, которую необходимо решить. Однако есть несколько общих особенностей, которые следует учитывать при использовании численного дифференцирования:

Выбор шага. Шаг приближения должен быть достаточно малым, чтобы обеспечить достаточную точность вычислений, но не слишком малым, чтобы избежать ошибок округления.

Выбор метода. Различные методы численного дифференцирования могут давать различные результаты, и выбор метода зависит от конкретной задачи и доступных ресурсов.

Оценка точности. При использовании численного дифференцирования необходимо оценить точность полученных результатов, учитывая ошибки округления и погрешности вычислений.

Сходимость. Некоторые методы численного дифференцирования могут сходиться к неправильному решению, если функция имеет особые точки, такие как разрывы или точки разрыва производной.

# **3.5 Формулировка задачи**

Численное интегрирование

# **Метод**

Численное интегрирование - это метод приближенного вычисления определенного интеграла от функции. Оно используется в тех случаях, когда аналитический метод интегрирования не может быть применен или неэффективен.

Существует множество методов численного интегрирования, одним из которых является метод прямоугольников. Он основан на приближении функции на каждом интервале интегрирования прямоугольником, площадь которого вычисляется как произведение длины интервала и значения функции в середине интервала. При этом точность вычислений зависит от количества интервалов, на которые разбивается область интегрирования.

Формула для вычисления интеграла методом прямоугольников имеет вид:

где и - границы интервала интегрирования, - количество интервалов разбиения, - правые границы интервалов.

Еще одним методом численного интегрирования является метод тrapезoидoв. Он основан на приближении функции на каждом интервале интегрирования трапецией, площадь которой вычисляется как среднее арифметическое площадей двух прямоугольников, образованных соответствующими значениями функции на концах интервала. При этом точность вычислений также зависит от количества интервалов разбиения.

Формула для вычисления интеграла методом трапеций имеет вид:

где и - границы интервала интегрирования, - количество интервалов разбиения, - правые границы интервалов, - шаг разбиения.

Метод Симпсона - это еще один метод численного интегрирования. Он основан на приближении функции на каждом интервале интегрирования параболой, площадь которой вычисляется как произведение шага разбиения и значения функции в трех точках: на концах интервала и в середине интервала. При использовании этого метода, точность вычислений может быть достигнута при меньшем количестве интервалов разбиения, чем при использовании методов прямоугольников и трапеций.

Формула для вычисления интеграла методом Симпсона имеет вид:

где и - границы интервала интегрирования, - количество интервалов разбиения, - правые границы интервалов, - шаг разбиения.

В общем случае, для выбора оптимального метода численного интегрирования необходимо учитывать специфику функции, которую необходимо проинтегрировать, а также требуемую точность вычислений. В некоторых случаях может потребоваться комбинирование различных методов численного интегрирования для достижения требуемой точности.

Одним из примеров применения численного интегрирования является вычисление площади фигуры, заданной графически. Для этого необходимо разбить область фигуры на более мелкие части и вычислить сумму площадей этих частей с помощью методов численного интегрирования.

Таким образом, численное интегрирование является важным инструментом математического анализа, позволяющим приближенно вычислять значения определенных интегралов от функций в различных областях применения.

# **Основные применения**

Численное интегрирование имеет широкое применение в различных областях, включая:

1. Математическое моделирование: методы численного интегрирования используются для решения математических моделей в физике, экономике, биологии и других науках. Они позволяют приближенно вычислить значения определенных интегралов, которые являются частями уравнений моделей.

2. Финансы: методы численного интегрирования используются в финансовых расчетах, например, для оценки стоимости опционов или для вычисления доходности инвестиций. Они также могут использоваться для определения вероятности различных событий на финансовых рынках.

# **Особенности метода**

Методы численного интегрирования имеют ряд особенностей, которые следует учитывать при их применении:

Точность: точность вычислений методами численного интегрирования зависит от количества интервалов разбиения и выбранного метода. Чем больше интервалов разбиения и чем более точный метод, тем выше точность вычислений.

Сходимость: сходимость методов численного интегрирования означает, что при увеличении количества интервалов разбиения вычисленное значение интеграла приближается к его точному значению. Некоторые методы могут сходиться быстрее, чем другие, в зависимости от функции, которую необходимо проинтегрировать.

Вычислительная сложность: некоторые методы численного интегрирования могут быть более сложными в вычислительном отношении, чем другие. Например, метод Симпсона требует вычисления значений функции в серединах интервалов, что может быть более затратным по времени, чем метод прямоугольников.

Адаптивность: некоторые методы численного интегрирования могут быть адаптивными, то есть позволять уменьшать размер интервалов разбиения в областях, где функция имеет большую изменчивость. Это может увеличить точность вычислений при меньшем количестве интервалов разбиения.

* 1. **Формулировка задачи**

Реализовать метод Эйлера в виде программы, задавая в качестве входных данных шаг сетки h.

С использованием разработанного программного обеспечения решить задачу Коши для ОДУ 2-го порядка на указанном отрезке.

**Метод**

Одним из наиболее простых численных методов для решения задачи Коши является метод Эйлера. Этот метод основывается на локальном приближении функции y(x) линейной функцией. Метод Эйлера широко используется в различных областях науки, в том числе в физике, математике и инженерии.

Предположим, что задана функция y'(x) = f(x, y) и начальные условия y() = , где и известны. Требуется найти значение функции y(x) в точке = +h, где h - шаг метода.

Метод Эйлера заключается в следующих шагах:

1. Вычислить значение производной в начальной точке: = f(, ).

2. Вычислить значение функции в следующей точке с использованием значения производной, полученного на предыдущем шаге: = + .

3. Повторять шаги 1 и 2 для каждой следующей точки, используя новое значение функции и производной, вычисленные на предыдущем шаге.

Таким образом, значение функции в каждой следующей точке вычисляется на основе значения функции и производной в предыдущей точке. Этот процесс может быть продолжен до достижения желаемой точности или до заданного значения x.

Формула метода Эйлера имеет вид:

= + hf(, )

где - значение функции в предыдущей точке, - значение функции в следующей точке, f(, ) - значение производной в предыдущей точке и h - шаг метода.

Метод Эйлера имеет первый порядок точности, что означает, что ошибка метода пропорциональна квадрату шага. Таким образом, для достижения высокой точности необходимо использовать очень маленький шаг, что может привести к вычислительным затратам.

**Основные применения**

Метод Эйлера широко используется в различных областях науки и техники для численного решения задачи Коши. Некоторые из основных применений метода Эйлера включают:

1. Механика: метод Эйлера может быть использован для решения уравнений движения, моделирования физических процессов и траекторий тел.
2. Математика: метод Эйлера может быть использован для решения дифференциальных уравнений, аппроксимации функций и моделирования сложных математических систем.
3. Финансы: метод Эйлера может быть использован для моделирования финансовых процессов, таких как изменение цен на акции и индексы фондового рынка.

Таким образом, метод Эйлера является полезным инструментом для численного решения задачи Коши в различных областях науки и техники. Он позволяет быстро и просто получить приближенное решение.

**Особенности метода**

1. Линейность: метод Эйлера является линейным методом, что означает, что он использует линейную аппроксимацию для решения уравнения. Это делает метод простым в использовании и понимании.
2. Шаг по времени: метод Эйлера использует фиксированный шаг по времени для вычисления решения на каждом временном шаге. Чем меньше шаг по времени, тем более точным будет решение.
3. Ордер аппроксимации: метод Эйлера является методом первого порядка аппроксимации, что означает, что его точность решения ограничена. Однако этот метод можно улучшить, используя более высокоуровневые методы.
4. Подверженность ошибкам: метод Эйлера имеет ошибку аппроксимации, которая возрастает по мере продвижения во времени. Это означает, что на более длинных временных интервалах решение будет менее точным.
5. Надежность: метод Эйлера является одним из самых надежных численных методов для решения задачи Коши, поскольку он прост в использовании и не требует большого объема вычислительных ресурсов.
6. Границы применения: метод Эйлера подходит для решения только обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для более сложных уравнений метод Эйлера может быть недостаточно точным.
   1. **Формулировка задачи**

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

**Метод**

Методы Рунге-Кутты - это класс численных методов для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Они являются более точными, чем метод Эйлера, и могут использоваться для решения различных типов дифференциальных уравнений Формула метода Рунге-Кутты четвертого порядка имеет следующий вид:

Здесь:

где - текущее время, - значение функции на текущем временном шаге, h - шаг по времени

Методы Рунге-Кутты имеют множество вариаций и модификаций, включая методы с переменным порядком, методы с адаптивным шагом, методы для жестких систем и т.д. Эти методы позволяют решать широкий класс дифференциальных уравнений с различными требованиями к точности и эффективности.

Одним из недостатков методов Рунге-Кутты является то, что они не всегда могут сохранять некоторые инварианты системы, такие как энергия или момент импульса. Это может приводить к неточностям и ошибкам в длительных вычислениях.

Тем не менее, методы Рунге-Кутты остаются одними из наиболее популярных и эффективных численных методов для решения дифференциальных уравнений, благодаря своей точности, быстроте сходимости и широкому спектру применения.

**Основные применения**

Методы Рунге-Кутты широко используются для решения дифференциальных уравнений в различных областях науки и техники. Некоторые из основных применений методов Рунге-Кутты включают:

1. Коэффициенты: методы Рунге-Кутты используют определенные коэффициенты для вычисления решения на каждом временном шаге. Эти коэффициенты определяют точность метода и могут быть различными для разных порядков метода.

2. Порядок метода: методы Рунге-Кутты имеют различные порядки точности, которые определяются числом используемых коэффициентов. Чем выше порядок метода, тем более точным будет решение.

3. Расчет шага по времени: методы Рунге-Кутты используют адаптивный шаг по времени, который позволяет вычислять решение с различной точностью на разных временных интервалах. Это позволяет ускорить вычисления и улучшить точность решения.

4. Сходимость: методы Рунге-Кутты сходятся быстрее, чем метод Эйлера, что означает, что для достижения определенной точности метод Рунге-Кутты может использовать меньше шагов по времени.

5. Надежность: методы Рунге-Кутты являются надежными и широко используются в различных областях науки и техники, включая астрономию, физику, биологию и инженерию.

6. Использование памяти: методы Рунге-Кутты используют больше памяти, чем метод Эйлера, для хранения коэффициентов и промежуточных значений. Это может быть проблемой для больших систем уравнений или при использовании ограниченных ресурсов.

7. Сложность реализации: методы Рунге-Кутты более сложны в реализации, чем метод Эйлера, и требуют более высокого уровня математического понимания.

**Особенности метода**

1. Высокая точность - методы Рунге-Кутты обеспечивают высокую точность решения дифференциальных уравнений в сравнении с другими методами.
2. Устойчивость - методы Рунге-Кутты обладают свойством устойчивости, которое гарантирует, что при малых изменениях начальных условий решение не будет сильно меняться. Это свойство является важным при решении задач, где малые изменения могут приводить к значительным изменениям решения.
3. Простота реализации - методы Рунге-Кутты относительно просты в реализации и не требуют большого количества вычислительных ресурсов. Это делает их хорошим выбором для решения дифференциальных уравнений на компьютере.
4. Адаптивность - методы Рунге-Кутты могут быть адаптированы к различным задачам путем изменения шага интегрирования. Это позволяет более эффективно решать дифференциальные уравнения, где требуется высокая точность в некоторых областях.
5. Гибкость - методы Рунге-Кутты могут быть изменены или дополнены для решения специфических задач. Например, методы Рунге-Кутты могут быть расширены для решения систем дифференциальных уравнений или для решения нелинейных задач.

В целом, методы Рунге-Кутты представляют собой мощный инструмент для решения

* 1. **Формулировка задачи**

Метод Адамса 4-го порядка в виде программ

**Метод**

Метод Адамса 4-го порядка - это явный метод численного интегрирования, используемый для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Он основан на использовании значения функции и ее производной на нескольких предыдущих шагах для вычисления значения на следующем шаге. Преимуществом метода Адамса является то, что он не требует пересчета всех предыдущих шагов при каждом новом шаге, что сокращает количество вычислений и делает метод более эффективным.

Метод Адамса 4-го порядка выглядит следующим образом:

где - приближенное значение функции на i-ом шаге, - значение производной функции на i-ом шаге, а h - шаг интегрирования. Для начальных шагов, метод Адамса 4-го порядка использует метод Рунге-Кутты 4-го порядка для вычисления первых значений функции.

**Основные применения**

Метод Адамса 4-го порядка широко используется для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений в научных и инженерных приложениях. Он может использоваться для моделирования различных физических процессов, таких как динамика механических систем, электродинамика, астрофизика и многие другие.

Одним из примеров применения метода Адамса 4-го порядка является моделирование динамики системы, описываемой дифференциальным уравнением, которое не может быть решено аналитически. Также метод может использоваться для решения задач оптимального управления, включая задачи с запаздыванием, где точные аналитические решения неизвестны или трудно получить.

**Особенности метода**

Метод Адамса 4-го порядка является явным методом, который основан на формуле Ньютона-Лейбница для интегрирования функции. Особенности этого метода :

1. Явный характер: метод Адамса 4-го порядка является явным методом, что означает, что значение функции на следующем шаге времени вычисляется только на основе значений функции на предыдущих шагах времени.
2. Порядок точности: метод Адамса 4-го порядка имеет порядок точности 4, что означает, что ошибка вычисления метода пропорциональна шагу по времени в четвертой степени.
3. Использование предыдущих значений: для вычисления значения функции на следующем шаге времени метод Адамса 4-го порядка использует значения функции на нескольких предыдущих шагах времени. Количество предыдущих значений зависит от порядка метода.
4. Необходимость начальных значений: метод Адамса 4-го порядка требует начальных значений функции на нескольких шагах времени для вычисления значений на следующих шагах времени. Обычно эти начальные значения вычисляются с использованием метода Рунге-Кутты.
5. Ограничения на шаг по времени: метод Адамса 4-го порядка имеет ограничения на шаг по времени, чтобы обеспечить стабильность и точность вычислений. Шаг по времени должен быть достаточно малым, чтобы обеспечить точность решения, но не слишком малым, чтобы вычисления не занимали слишком много времени.
   1. **Формулировка задачи**

Метод стрельбы решения краевой задачи для ОДУ

**Метод**

Метод стрельбы - это метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, который заключается в превращении задачи в задачу о начальном значении путем выбора начальных условий и последующего численного интегрирования. Затем проверяется соответствие полученных значений функции и ее производной на конечном интервале граничным условиям. Если они не соответствуют заданным граничным условиям, то начальные условия изменяются и процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто соответствие.

**Основные применения**

Некоторые из основных областей применения метода стрельбы включают:

1. Механика: решение краевых задач для механических систем, таких как колебания, свободные и вынужденные колебания упругих систем, динамика твердого тела и другие.
2. Физика: решение краевых задач для уравнения теплопроводности, уравнения Шредингера для квантовой механики, уравнения Максвелла для электромагнетизма и другие.
3. Инженерия: решение краевых задач для уравнений движения структурных элементов, моделирование динамики транспортных средств, моделирование теплопереноса и другие.
4. Экономика: решение краевых задач для динамических моделей экономических систем, таких как модели экономического роста, модели популяции и другие.

Метод стрельбы может использоваться для решения краевых задач, которые не могут быть решены аналитически, а также для оценки влияния различных параметров на решение краевых задач.

**Особенности метода**

Метод стрельбы имеет несколько особенностей:

1. Необходимость выбора начального значения: в методе стрельбы требуется выбрать начальное значение, которое будет использоваться в качестве "начального удара" для решения дифференциального уравнения. Выбор правильного начального значения может оказаться сложной задачей и может потребовать дополнительных вычислений.
2. Множественность решений: в некоторых случаях краевые задачи могут иметь несколько решений, и метод стрельбы может найти только одно из них. Это может быть проблемой, если необходимо найти все решения задачи.
3. Неустойчивость к ошибкам: метод стрельбы может быть чувствителен к ошибкам в начальном значении и других параметрах. Это может привести к неточному решению или даже к сходимости к неправильному решению.
4. Вычислительная сложность: метод стрельбы может потребовать многократного решения дифференциального уравнения с разными начальными значениями, что может привести к большой вычислительной сложности и затратам времени.

**4.4. Формулировка задачи**

Конечно-разностный метод решения краевой задачи для ОДУ

**Метод**

Конечно-разностный метод - это численный метод для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Он основан на замене производных разностными операторами на сетке, что позволяет получить конечномерную систему алгебраических уравнений, которую можно решить численно.

Для решения краевой задачи второго порядка с граничными условиями вида u(a)= и u(b)=метод конечных разностей приводит к системе алгебраических уравнений:

**Основные применения**

1. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Решение краевых задач для уравнений в частных производных.
3. Моделирование физических процессов, таких как теплопроводность или распространение звука.

**Особенности метода**

1. Конечно-разностный оператор вводит дискретизацию и потерю точности в решении.
2. Для достижения высокой точности может потребоваться использовать большое число узлов на сетке.
3. Вычислительная сложность может быть высокой при большом числе узлов на сетке.