

Föreläsning 6

Signalbehandling i multimedia - ETI265

Kapitel 4

**Fouriertransform av analog signal, FT
Fouriertransform av digital signal, DTFT
fortsättning**

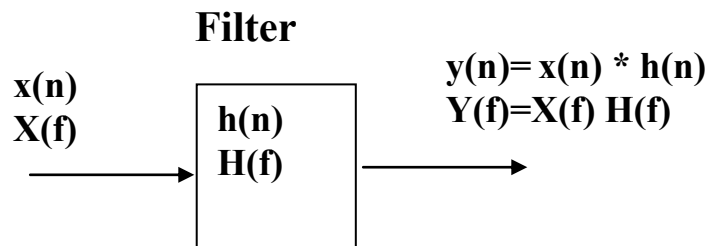
**LTH
2015**

Nedelko Grbic
(mtrl. från Bengt Mandersson)

**Department of Electrical and Information Technology
Lund University**

Filtrering

Input – output relations



Vi har sambandet faltning för att beräkna utsignalen

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_k x(k) h(n - k)$$

Om både fouriertransformen av insignalen och fouriertransformen av impulssvaret existerar kan vi också utnyttja sambandet

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

och sen beräkna invers fouriertransform

Vi klassificerar ofta filter efter karakterstiken av $H(\omega)$, tex ett lågpassfilter som släpper igenom låga frekvenser och spärrar höga, högpassfilter som spärrar låga frekvenser och släpper igenom höga

Relation till z-transform

Vi utgår från ett kausalt impulssvar $h(n)$. Kausalt innebär att

$$h(n) = 0 \quad \text{för } n < 0$$

Fouriertransformen DTFT av impulssvar är då enligt tidigare Definition:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j \omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j 2 \pi f n}$$

Vi definierade Z-transformen av impulsvaret som

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

där $z = r e^{j \omega}$

**är ett komplext tal som vi oftast skriver som belopp och fas.
 $H(z)$ är en komplex funktion av en komplex variabel.**

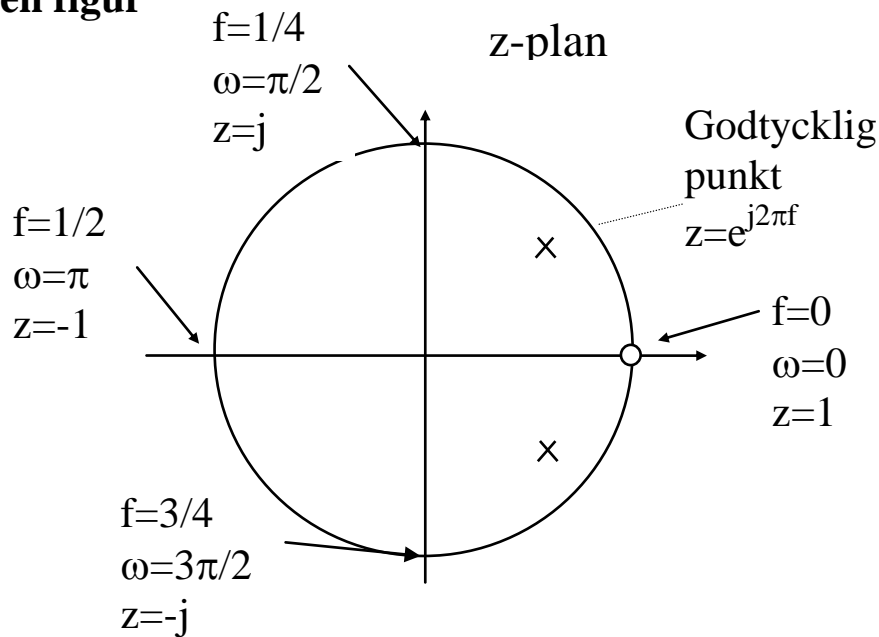
Viktigt: Om $h(n)$ är kausal och stabil får vi

$$H(\omega) = H(z) \big|_{z=e^{j \omega}}$$

Fouriertransformen är z-transformens värde på enhetscirkeln om $h(n)$ stabil och kausal

$$|H(\omega)| = |H(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad \text{värdet på enhetscirkeln}$$

Rita in i en figur



Viktigt: Enhetscirkeln är vår frekvensaxel i det diskreta fallet

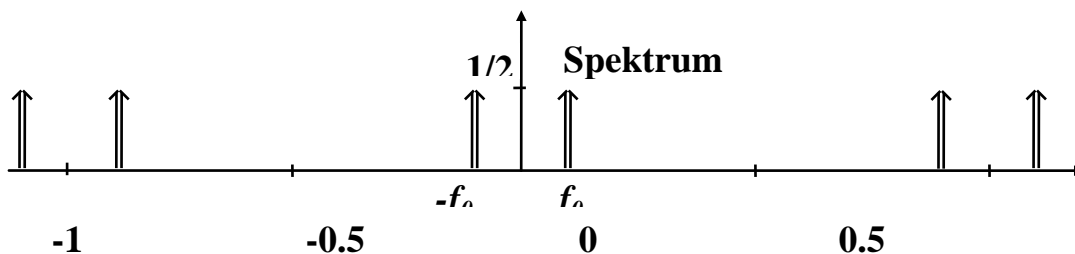
$\omega=0$: $|H(\omega)|=0$
 $\omega=\pi/4$: $|H(\omega)|$ stort
 $\omega>\pi/4$: $|H(\omega)|$ minskar

Utvidgning av Fouriertransformen (se matten)

A: Sinus, cosinus (ej stabila signaler)

$$x[n] = \cos(2\pi f_0 n) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 n} + e^{-j2\pi f_0 n})$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) = \\ &= 2\pi \frac{1}{2}(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$



$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n) = \frac{1}{2j}(e^{j2\pi f_0 n} - e^{-j2\pi f_0 n})$$

$$X(f) = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

B: Steg

$$x(n) = u(n) \quad \text{steg}$$

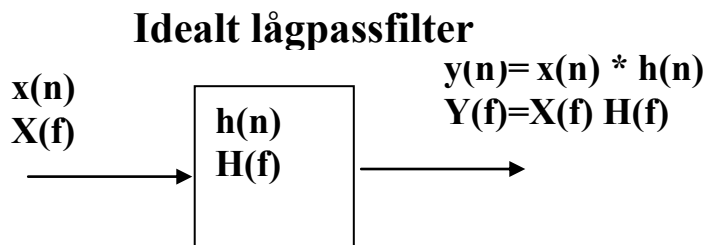
$$X(f) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi f}} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

Obs. I ovanstående uttryck anges $X(f)$ för $0 \leq f \leq 1$.

$X(f)$ måste sedan periodiseras.

Filtrering med idealt lågpasfilter

Vi vill nu göra ett filter som filtrerar bort höga frekvenser och bara behåller låga frekvenser.



Vi har

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_k x(k) h(n-k)$$

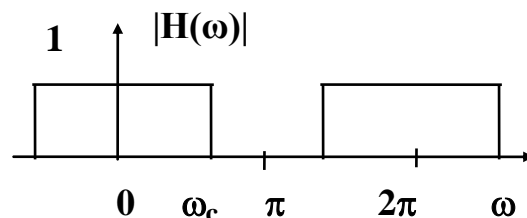
och

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

Hur kan vi definiera ett lågpasfilter?

Ett idealt lågpasfilter (icke-kausalt) definieras av

$$H_{idealt}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c, \quad |f| \leq f_c \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$



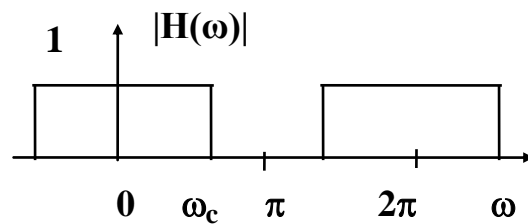
dvs frekvenskomponenter mindre än ω_c , f_c släpps igenom oförändrade medan frekvenser större än ω_c , f_c spärras helt.
Hur ser detta impulssvar ut?

Invers fouriertransform av rektangelpuls

Idealt lågpasfilter

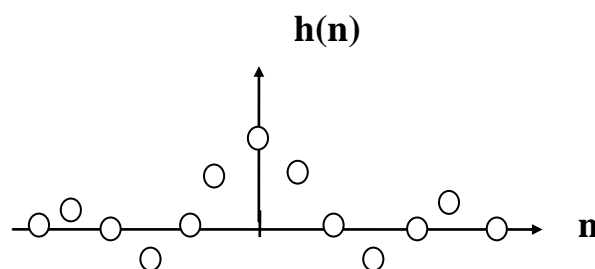
Ett idealt lågpasfilter (icke-kausalt) definieras av

$$H_{ideal}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c, \quad |f| \leq f_c \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$



Dess impulssvar blir då

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}}{jn} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} = 2f_c \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n} \end{aligned}$$

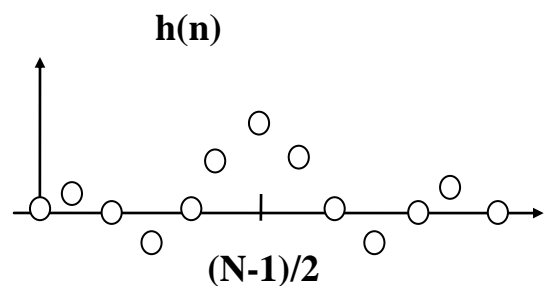


Detta impulssvar är både icke-kausalt och oändligt långt. Vi måste trunkera det och göra det kausalt.

Trunkering av idealt lågpassfilter

Ett kausalt lågpass FIR-filter kan vi få genom att välja ut N värden kring origo och sen fördröja impulssvaret $(N-1)/2$ (N udda)

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c (n - \frac{N-1}{2})}{\omega_c (n - \frac{N-1}{2})}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$



Detta är en mycket vanlig metod för att göra FIR-filter. Men hur bra blir det? Och kan vi förbättra det.

Vi provar i Matlab.

Trunkering av idealt lågpasfilter

Hur bra blir filtret?

$$h(n) = h_{\text{idealt}}(n) \cdot \text{tidsfönster}$$

Impulssvar

Spektrum

Överst

$$h_{\text{idealt}}(n)$$

$$|H_{\text{idealt}}(f)|$$

Mitten

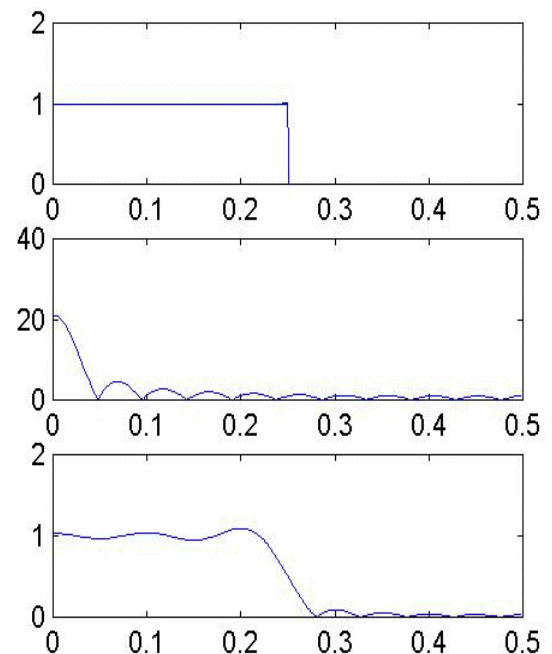
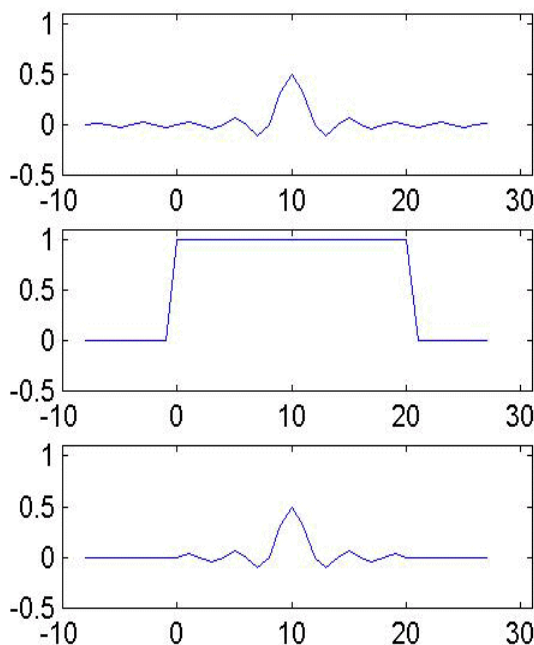
$$w_{\text{rect}}(n)$$

$$|W_{\text{rect}}(f)|$$

Nederst

$$h(n) = h_{\text{idealt}}(n) \cdot w_{\text{rect}}(n)$$

$$|H(f)| = |H_{\text{idealt}}(f)| \cdot |W_{\text{rect}}(f)|$$



Brytfrekvens
OBS
maxvärdet)

fc=0.25, längd M=21, gradtal N=M-1=20

Amplitud vid brytfrekvens är alltid -6 dB (1/2 av

$$h[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c (n - \frac{N-1}{2})}{\omega_c (n - \frac{N-1}{2})} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Matlab: **h=fir1(20,2*.25,boxcar(21));**

Trunkering av idealt lågpasfilter med Hammingfönster.

Ett hammingfönster definieras av

$$w_{\text{hamming}}[n] = \left(0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi(n - \frac{M-1}{2})}{M-1}\right) \quad 0 \leq n \leq M-1$$

Hammingfönstret används väldigt ofta i praktiken vid trunkering av signaler, speciellt vid frekvensanalys. I Matlab är detta ofta default.

$$h[n] = h_{\text{idealt}}[n] \cdot \text{tidsfönster}$$

Impulssvar

Spektrum

Överst

$h_{\text{idealt}}(n)$

$|H_{\text{idealt}}(f)|$

Mitten

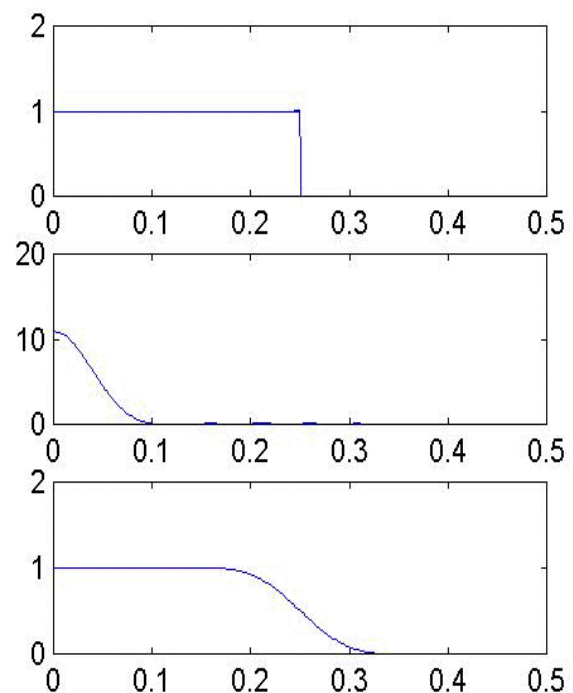
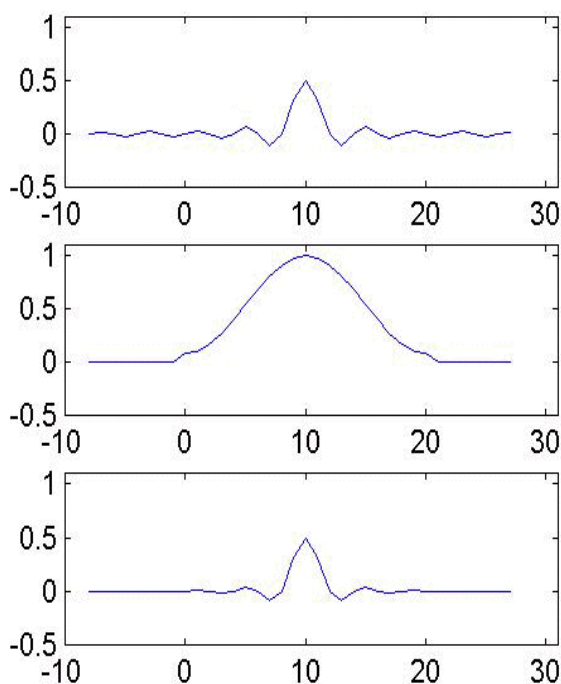
$w_{\text{hamming}}(n)$

$|W_{\text{hamming}}(f)|$

Nederst

$h(n) = h_{\text{idealt}}(n) \cdot w_{\text{hamming}}(n)$

$|H(f)| = |H_d(f)| \cdot |W_{\text{hamming}}(f)|$



$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(n - \frac{M-1}{2})}{\omega_c(n - \frac{M-1}{2})} \left(0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi(n - \frac{M-1}{2})}{M-1}\right) \quad 0 \leq n \leq M-1$$

Vi ser att dämpningen för höga frekvenser är klart bättre än för rektangelfönstret. Matlab: `h=fir1(20,2*.25,hamming(21))`

Varför fick vi problem vid trunkeringen.

Konvergensproblem för $\sin(x)/x$.

Impulssvaret för ett idealt lågpassfilter är alltså av typ

$$\sin(x)/x$$

och som vi måste trunkera för att få ett kausalt filter.

Detta ger vissa effekter (biverkningar vid trunkeringen) som kallas Gibbs fenomen.

Villkoren för konvergens av Fouriertransformen var:

Konvergens:

Om $x(n)$ stabil, dvs
$$\sum_n |x(n)| < \infty$$

Lite svagare konvergens

Om
$$\sum_n |x(n)| \rightarrow \infty \text{ men } \sum_n |x(n)|^2 < \infty$$

För $\sin(x)/x$ har vi:

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} |\sin(x)/x| = \infty \text{ men}$$
$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} |\sin(x)/x|^2 = konst < \infty$$

Alltså har vi här den svagare typen av konvergens. Effekten av den svagare typen av konvergens yppar sig när vi trunkerar signalen.

Appendix

Fourierserieutveckling av periodisk signal (för kännedom).

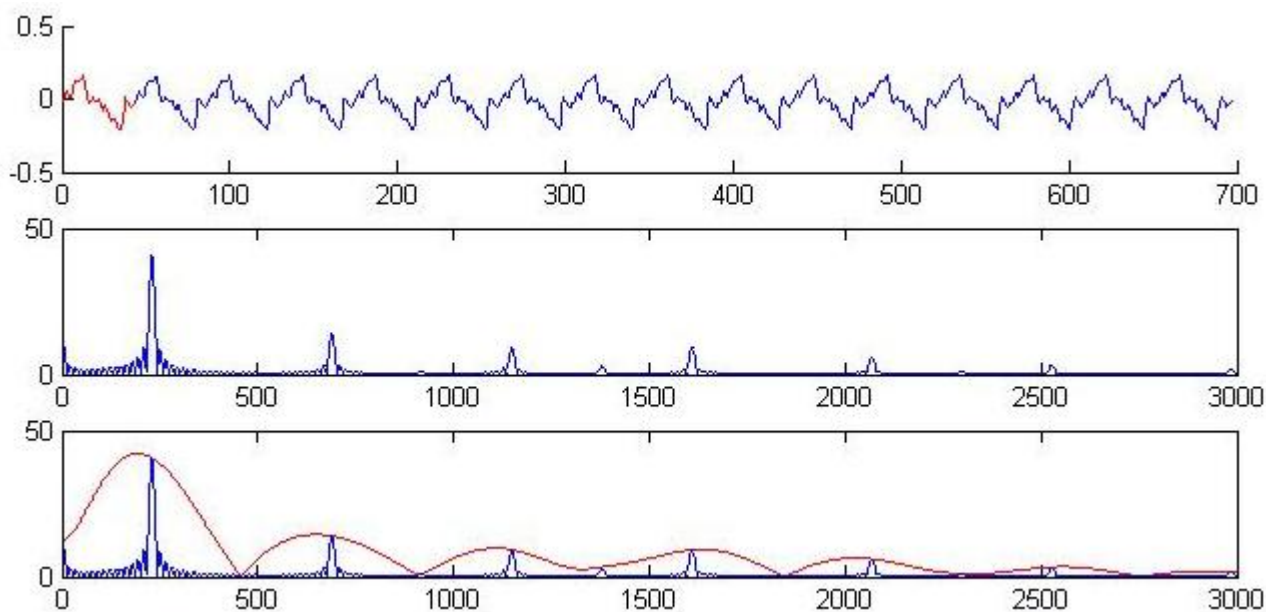
Exempel från föreläsning 1.

Spektrum från klarinett.

Överst: Vågform (70 ms, 16 perioder)

Mitten: Fouriertransform av hela signalen

Nederst: Fouriertransform från en period (röd kurva, omskalad 16 ggr)



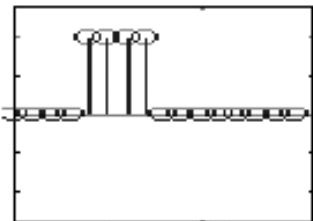
Detta leder oss till Fourierserieutveckling

Från matten har vi lärt oss att en periodisk signal kan skrivas som en summa av harmoniska deltoner enligt

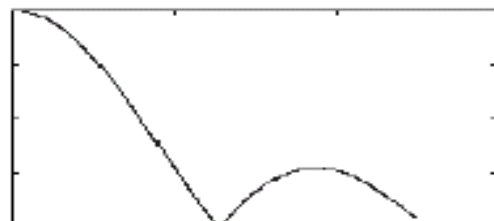
$$x_{\text{harmonisk}}(n) = A_0 + A_1 \cos(2\pi F_0 n + \Phi_1) + A_2 \cos(2\pi 2F_0 n + \Phi_2) + \dots$$

Hur hänger detta ihop med Fouriertransformen?

Vi har sedan tidigare Fouriertransformen av en puls (fyrkantspuls)



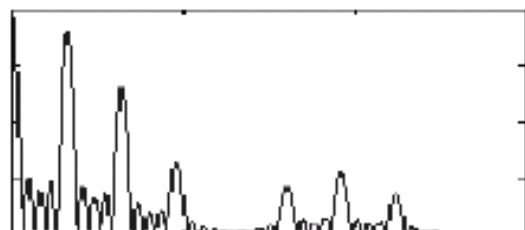
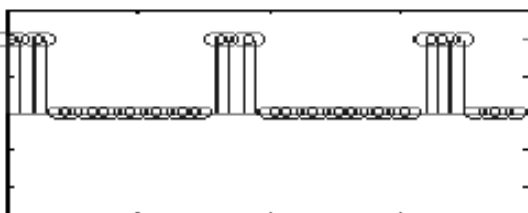
Fyrkantspuls



Fouriertransform (spektrum)

Vi bildar nu en periodisk signal (harmonisk signal) genom att upprepa fyrkantspulsen

Fouriertransform av upprepade fyrkantspulser (del av fyrkantssignal)



Gör vi nu fyrkantsignalen oänligt lång blir signalens energi oändlig och vi kan nu inte beräkna fouriertransformen men väl skriva signalen som summa av harmoniska deltoner enligt ovan där

$A_0, A_1, \Phi_1, A_2, \Phi_2, A_3, \Phi_3, \dots$ relateras direkt till Fouriertransformen av en puls enligt figuren ovan.

Fourierserieutveckling av periodisk signal, fortsättning 2 sid 229

En analog signal som är periodisk med periodtiden T_p , dvs

$$x(t) = x(t - T_p) \quad \text{med} \quad F_0 = \frac{1}{T_p}$$

kan skrivas som en summa av sinussignaler (harmoniska deltoner) enligt

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{X_1(k F_0)}_{\text{komplexamplitud}} e^{j 2 \pi k F_0 t} = \\ &= \frac{1}{T_p} \underbrace{X_1(0)}_{\text{DC-nivå}} + \frac{2}{T_p} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{|X_1(k F_0)|}_{\text{amplitud}} \cos(2 \pi k F_0 t + \underbrace{\arg\{X_1(k F_0)\}}_{\text{fas}}) \end{aligned}$$

där $X_1(F)$ är Fouriertransformen av en period av signalen

$$X_1(F) = \int_{T=-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j 2 \pi F t} dt$$

Fourierserieutveckling av periodisk signal, fortsättning 3 sid 242

En tidsdiskret signal som är periodisk med periodtiden N, dvs

$$x(n) = x(n - N) \quad \text{med} \quad f_0 = \frac{1}{N}$$

kan skrivas som en summa av komplexa sinussignaler (harmoniska deltoner) enligt

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1(k f_0) e^{j 2 \pi k f_0 n}$$

där $X_1(f)$ är Fouriertransformen av en period av signalen

$$X_1(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j 2 \pi f n}$$

[Tid-Frekvens Relationer \(Fig 4.3.1, Sid 270, 4:e upplagan\)](#)