LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Institutionen för elektro- och informationsteknik

Digital signalbehandling

Övningsuppgifter

med

svar och lösningar

Lund 2015

Department of Electrical and Information Technology, Lund University, Sweden

Chapter 1

Övningsuppgifter

1.2 Bestäm vilka av följande signaler som är periodiska och bestäm periodtiden.
a) $\cos(0.01\pi n)$ b) $\cos(\pi \frac{30}{105} n)$ c) $\cos(3\pi n)$ d) $\sin(3n)$ e) $\sin(\pi \frac{62n}{10})$.

1.5 Den analoga signalen $x_a(t)$ är $x_a(t) = 3\sin(100\pi t)$.

a) Skissa $x_a(t)$ för $0 \leq t \leq 30\ ms$.

b) Sampla med $F_s = 300$ sampel/s. Bestäm $x(n) = x_a(t)|_{t=nT}$, $T = 1/F_s$. Bestäm frekvensen f hos $x(n)$ och visa att $x(n)$ är periodisk.

c) Skissa $x(n)$. Vad är perioden och vad motsvarar det i ms?

d) Bestäm minsta F_s så att $x_a(t)$ samplas så att max av $x(n)$ är 3.

1.7 En analog signal innehåller frekvenser upp till 10 kHz.

a) Vilka sampelfrekvenser kan användas om vi vill kunna rekonstruera signalen exakt?

b) Antag att sampelfrekvensen $F_s = 8$ kHz. Vad händer med frekvenskomponenten $F_1 = 5$ kHz?

c) Antag att sampelfrekvensen $F_s = 8$ kHz. Vad händer med frekvenskomponenten $F_1 = 9$ kHz?

1.8 Ett analogt elektrokardiogram (EKG) innehåller frekvenser upp till 100 Hz.

a) Vad är Nyquist rate för signalen?

b) Vilken är den högsta frekvenskomponent som kan representeras unikt med sampelfrekvensen $F_s = 250$ Hz?

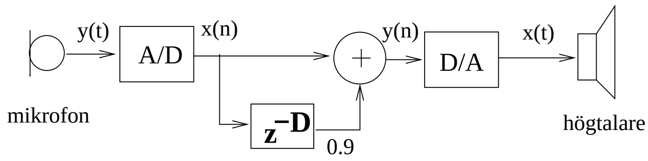
Kommentar: Högsta frekvenskomponenten hos signalen kallas Nyquist frequency och den dubbla frekvensen kallas Nyquist rate. Samplingsfrekvensen måste alltså väljas högre än Nyquist rate för att undvika vikningsdistorsion.

1.11 För att visa effekten av vikning gör vi följande. Vi samplar in signalen $x(t) = 3\cos(100\pi t) + 2\sin(250\pi t)$ med sampeltakten $F_s = 200$ Hz utan att ha något analogt filter före samplingen. Vi lyssnar sedan på signalen med sampeltakten $F_s = 1000$ Hz (ideal rekonstruktion). Hur ser signalen ut efter rekonstruktionen? Matlab: Vid inspelning med ljudkort i PC filtreras den analoga signalen automatiskt med ett analogt filter med brytfrekvens $F_s/2$ före samplingen för att undvika vikningsdistorsion. Vill vi tex illustrera exemplet ovan kan vi tex sampla med $F_s = 1000$ Hz vilket ställer gränsfrekvensen i ljudkortets filter till 500 Hz. Nu behåller vi bara vart femte sampel och har då reducerat sampeltakten till 200 Hz och detta motsvarar att vi samplat med 200 Hz men med det analoga filtret inställt på 500 Hz.

1.13 Den diskreta signalen $x(n) = 6.35\cos((\pi/10)n)$ kvantiseras med upplösningen a) $\Delta = 0.1$ och b) $\Delta = 0.02$. Hur många bitar behövs i A/D-omvandlaren?

1.14 Bestäm bithastighet (bitar/s) och upplösning om en seismisk signal med dynamik 1 volt samplas med $F_s = 20$ Hz med en 8-bitars A/D-omvandlare. Vilken maximal frekvens kan reprensenteras i den digitala signalen?

E1.1 **MATLAB:** För att åstadkomma ekoeffekt använder vi oss av nedanstående koppling (z^{-D} fördröjer signalen D sampel).



Simulera detta i MATLAB och lyssna på effekten.
Exempel på MATLABkod:

```
t=-1:.0001;1;                 %generera 2 s lång tidsvektor, FS=1/10000
x=vco(t,[300,800],10000);     %generera en svept sinussignal mellan 300 och 800 Hz
soundsc(x,10000);             %lyssna
noll=zeros(1,500);            %generera 500 nollor
x1=[x,noll];x2=[noll,0.9*x];
y=x1+x2;                      %generera ekot
soundsc(y,10000);             %lyssna
```

Välj nytt x (samplat tal och lyssna på ekoeffekten).

Impulssvar och faltning, kapitel 2

2.1 En tidsdiskret signal $x(n)$ definieras av

$$x(n) = \begin{cases} 1 + \frac{n}{3}, & -3 \leq n \leq -1 \\ 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & n < -3,\ n > 3 \end{cases}$$

a) Skissa signalen $x(n)$.

b) Skissa signalen för följande alternativ.
i) Vik (spegla i origo) $x(n)$ och fördröj 4 sampel.
ii) Fördröj $x(n)$ 4 sampel och vik (spegla i origo).

c) Skissa $x(-n+4)$.

d) Vilket alternativ i b) svarar mot $x(-n+k)$?

e) Uttryck $x(n)$ i $\delta(n)$ och $u(n)$.

2.7 Avgör om nedanstående system är

1) Statiskt eller dynamiskt.
2) Linjärt eller olinjärt.
3) Tidsinvariant eller tidsvariabelt.
4) Kausalt eller icke-kausalt.
5) Stabilt eller instabilt.

a) $y(n) = \cos(x(n))$.

b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$.

c) $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$.

e) $y(n) = Trun(x(n))$, trunkering till heltal.

h) $y(n) = x(n)u(n)$.

j) $y(n) = x(2n)$.

n) Ideal sampling, $x(n) = x_a(t)_{t=nT},\ -\infty < n < \infty$.

2.13 Visa att ett nödvändigt och tillräckligt villkor för BIBO-stabilitet är
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M_h < \infty$.

2.16 a) Visa att $\sum_n y(n) = \sum_k x(k) \sum_l h(l)$ då $y(n) = x(n) * h(n)$.

b) Beräkna faltningen $y(n) = x(n) * h(n)$ för följande signaler (fetstil anger index 0).
1) $x(n) = \{1, 2, 4\}$ och $h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$.
2) $x(n) = \{1, 2, -1\}$ och $h(n) = x(n)$.
4) $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $h(n) = \{1\}$.
9) $x(n) = \{1, 1, \mathbf{0}, 1, 1\}, och h(n) = \{1, -2, -3, \mathbf{4}\}$.
11) $x(n) = 0.5^n u(n)$ och $h(n) = 0.25^n u(n)$.

2.17 Beräkna faltningen $x(n) * h(n)$ för nedanstående signaler.

a) $x(n) = \{\mathbf{1}111\},\ \ h(n) = \{\mathbf{6}5432100\}$

b) $x(n) = \{\mathbf{1}111\},\ \ h(n) = \{654\mathbf{3}2100\}$

c) $x(n) = \{\mathbf{0}001111\},\ \ h(n) = \{1100\mathbf{0}\}$

d) $x(n) = \{\mathbf{0}01111\},\ \ h(n) = \{11\mathbf{0}\}$

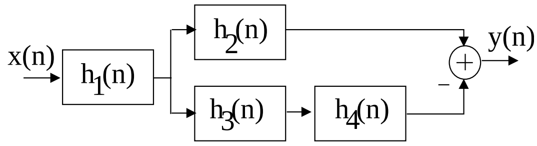
MATLAB: Lös ovanstående faltningar i MATLAB (conv.m).

2.21 Beräkna faltningen $y(n) = x(n) * h(n)$ för nedanstående signaler.

a) $x(n) = a^n u(n),\ \ h(n) = b^n u(n)$ för både $a \neq b$ och $a = b$.

b) $x(n) = \{12\mathbf{1}1\}$ och $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$.

2.35 Bestäm $h(n)$ för systemet nedan då $h_1(n) = \{0.5, 0.25, 0.5\}$, $h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n)$ och $h_4(n) = \delta(n-2)$. Bestäm utsignalen då $x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)$



2.61 Beräkna korrelationsfunktionen $r_{xx}(l)$ och korskorrelationsfunktionen $r_{xy}(l)$ för följande sekvenser.
$x(n) = 1$ för $n_0 - N \leq n \leq n_0 + N$, noll för övrigt och
$y(n) = 1$ för $-N \leq n \leq N$, noll för övrigt.

2.62 Beräkna korrelationsfunktionen $r_{xx}(l)$ för följande sekvenser.

a) $x(n) = \{1, 2, 1, 1\}$.

b) $x(n) = \{1, 1, 2, 1\}$.

Vad är slutsatsen av a) och b) ovan?
MATLAB: Lös a) och b) ovan i MATLAB.

2.64 En ljudsignal från en högtalare reflekteras av två olika väggar med reflexionskoefficienterna r_1 och r_2. Signalen tas upp av en mikrofon nära högtalaren och har utseendet $x(n) = s(n) + r_1 s(n-k_1) + r_2 s(n-k_2)$ där k_1 och k_2 är fördröjningarna hos ekona. Bestäm och skissa autokorrelationsfunktionen $r_{xx}(l)$ för $x(n)$.

Z-transform, kapitel 3

3.1 Bestäm z-transformen för

a) $x(n) = \{3, 0, 0, 0, 0, \mathbf{6}, 1, -4\}$

b) $x(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n \geq 5 \\ 0, & n \leq 4 \end{cases}$

3.2 Bestäm z-transformen för nedanstående signaler och skissa pol-nollställesdiagram.

a) $x(n) = (1+n)u(n)$.

c) $x(n) = (-1)^n\, 2^{-n}\, u(n)$.

f) $x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi)u(n),\ 0 < r < 1$.

h) $x(n) = (\frac{1}{2})^n[u(n) - u(n-10)]$.

3.8 Använd faltning för att bestämma nedanstående transformer.

a) Bestäm $Y(z)$ uttryckt i $X(z)$ för $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$.

b) Bestäm $X(z)$ för $x(n) = (n+1)u(n)$. Tips: Visa att $x(n) = u(n) * u(n)$.

3.9 Z-transformen $X(z)$ av den reella signalen $x(n)$ innehåller ett komplexkonjugerat par av poler och ett komplexkonjugerat par av nollställen. Vad händer med dessa om vi multiplicerar $x(n)$ med $e^{j\omega_0 n}$? Tips: Använd skalningsteoremet för z-transform.

3.14 Bestäm invers z-transform $x(n)$, $x(n)$ kausal, av följande signaler.

a) $X(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$

b) $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$

c) $X(z) = \frac{z^{-6}+z^{-7}}{1-z^{-1}}$

d) $X(z) = \frac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}}$

g) $X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}$

MATLAB: Plotta några av dessa funktioner för $z = e^{j\omega}$ med hjälp av MATLAB.

3.16 Bestäm faltningen mellan $x_1(n)$ och $x_2(n)$ nedan med hjälp av z-transformen.

a) $x_1(n) = (\frac{1}{4})^n u(n-1)$ och $x_2(n) = [1 + (\frac{1}{2})^n]u(n)$.

c) $x_1(n) = 0.5^n u(n)$ och $x_2(n) = \cos(\pi n)u(n)$.

3.35 Bestäm utsignalen $y(n) = x(n) * h(n)$ för

a) $h(n) = (1/3)^n u(n)$, $x(n) = (1/2)^n \ \cos(\pi/3\ n)u(n)$.

d) $y(n) = 0.5x(n) - 0.5x(n-1)$, $x(n) = 10\cos(\pi/2\ n)\ u(n)$.

3.40 In och utsignal för ett LTI-system är givet av
$x(n) = 0.5^n u(n) - 0.25(0.5)^{n-1}u(n-1)$ och $y(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$.

a) Bestäm kretsens impulssvar $h(n)$ och systemfunktion $H(z)$.

b) Bestäm kretsens differensekvation.

c) Bestäm en realisering av minimal ordning.

d) Är systemet stabilt?

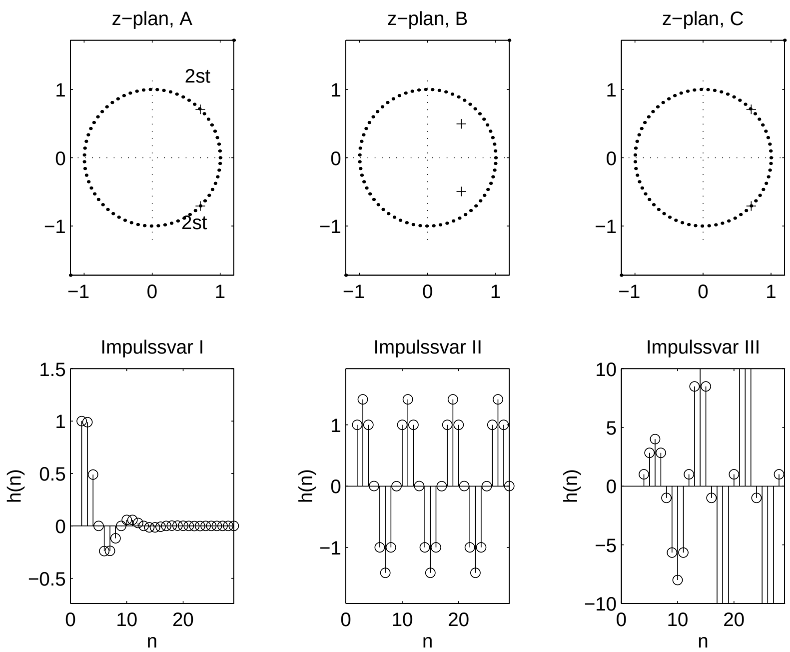
3.49 Använd den enkelsidiga z-transformen för att beräkna $y(n), n \geq 0$ för följande fall.

b) $y(n) - 1.5y(n-1) + 0.5y(n-2) = 0$, $y(-1) = 1$, $y(-2) = 0$.

c) $y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$, $x(n) = (1/3)^n u(n)$, $y(-1) = 1$.

d) $y(n) = 0.25(y(n-2) + x(n)$, $x(n) = u(n)$, $y(-1) = 0$, $y(-2) = 1$.

E3.1 Kombinera varje pol-nollställe-konfiguration med det impulssvar den motsvarar. Hur påverkar polens avstånd till enhetscirkeln impulssvarets utseende ? Hur påverkas impulssvaret av dubbelpoler ?



E3.2 Ett andra ordningens linjärt och tidsinvariant system är definierat av

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

a) Bestäm utsignalen $y(n)$ då insignalen $x(n) = 3\sin(\frac{\pi}{2}\ n)u(n)$
$y(-1) = 1/3,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1/5,\ b_2 = 0$
$a_1 = 1/2,\ a_2 = 0$

b) Låt insignalen till systemet ovan vara $x(n) = \sin(2\pi f_0 n) \ -\infty < n < \infty$.
Koefficienter ställs så att utsignalen $y(n) = 0, \ -\infty < n < \infty$. Detta inträffar då
$b_0 = b_1 = b_2 = 2$
$a_1 = -\sqrt{2}, \ a_2 = 1/4$
Vad är frekvensen f_0 i insignalen?

c) Insignalen till systemet är återigen $x(n) = \sin(2\pi f_0 n), \ -\infty < n < \infty$. Då koefficienterna är
$b_0 = 1, \ b_1 = 1, \ b_2 = 1/4$
$a_1 = -1, \ a_2 = 1$
erhålles utsignalen $y(n) = A_0 \sin(2\pi f_0 n + \theta_0) + A_1 \sin(2\pi f_1 n + \theta_1), \ -\infty < n < \infty$ Vad är frekvensen f_1?

E3.3 En linjär tidsinvariant krets beskrivs med differensekvationen
$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}\ y(n-2) = x(n)$.
Bestäm utsignalen $y(n)$ då $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + \sin\left(2\pi \frac{1}{4}\ n\right), \quad -\infty < n < \infty$.

E3.4 En krets är given av differensekvationen $y(n) - y(n-1) + 0.5y(n-2) = x(n)$. Kretsen har begynnelsevärdena $y(-1) = 0$, $y(-2) = 2$, och insignalen är $x(n) = u(n)$. Bestäm för $n \geq 0$

a) zero-input-lösningen, $y_{zi}(n)$.

b) zero-state-lösningen, $y_{zs}(n)$.

c) transienta lösningen, $y_{trans}(n)$.

d) stationära lösningen, $y_{ss}(n)$.

E3.5 En linjär tidsinvariant krets beskrivs av differensekvationen
$y(n) - \frac{1}{4}\ y(n-1) = x(n)$. Bestäm utsignalen $y(n)$ då $x(n) = \begin{cases} sin\left(2\pi\frac{1}{4}\ n\right) & n < 0 \\ 0 & n \geq 0 \end{cases}$

Fouriertransform, signaler genom LTI-system och sampling, kapitel 4, 5 och 6

4.8 Två diskreta signaler $s_k(n)$ och $s_l(n)$ är ortogonala över ett intevall $[N_1, N_2]$ om
$\sum_{n=N_1}^{N_2} s_k(n) s_l^*(n) = \begin{cases} A_k, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$
Om $A_k = 1$ är signalerna ortonormala.

a) Visa relationen $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{kn}{N}} = \begin{cases} N, & k = 0, \ \pm N, \ \pm 2N ... \\ 0, & annars \end{cases}$

b) Illustrera a) för $N = 6$ genom att för $k = 1,2,3,4,5,6$ rita $s_k(n) = e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$ för $n = 0,1,2,3,4,5$.

c) Visa att harmoniska signaler $s(n) = e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$ är ortogonala över varje intervall av längd N.

4.9 Bestäm fouriertransformen av följande signaler.

a) $x(n) = u(n) - u(n-6)$.

b) $x(n) = 2^n u(-n)$.

c) $x(n) = (0.25)^n u(n+4)$.

d) $x(n) = (\alpha^n \sin(\omega_0 n))u(n)$, $|\alpha| < 1$.

g) $x(n) = \{-2, -1, \mathbf{0}, 1, 2\}$.

4.10 Bestäm signalen vars fouriertransform är

a) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 1, & \omega_0 < \omega \leq \pi \end{cases}$

b) $X(\omega) = \cos^2 \omega$

4.12 Bestäm signalen vars fouriertransform är

c) $X(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega_c - W/2 \leq \omega \leq \omega_c + W/2 \\ 0, & annars \end{cases}$

4.14 Sekvensen $x(n)$ är given av $x(n) = \{-1, 2, \mathbf{-3}, 2, -1\}$ och dess fouriertransform är $X(\omega)$. Bestäm, utan att explicit bestämma $X(\omega)$, följande

a) $X(0)$

b) $arg(X(\omega))$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega$

d) $X(\pi)$

e) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$

MATLAB: Beräkna $X(\omega)$ och plotta $|X(\omega)|$ och $arg(X(\omega))$

5.2 a) Bestäm och skissa fouriertransformen $W_R(\omega)$ för ett rektangelfönster

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & annars \end{cases}$$

b) Bestäm och skissa fouriertransformen av ett triangelfönster $w_T(n)$

$$w_T(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq M/2 \\ M - n, & M/2 < n \leq M \\ 0, & annars \end{cases}$$

genom att utnyttja faltning av två rektangelfönster enligt a.

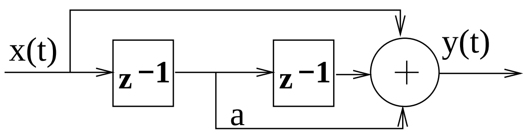
MATLAB: Plotta $W_R(\omega)$ för $M = 2, 4$ och 5.

5.17 En tidsdiskret krets är given av figuren med $a = -2\cos(\omega_0)$

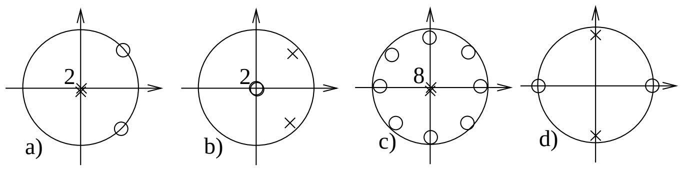
a) Bestäm in-utsignalrelation och impulssvar $h(n)$.

b) Skissa $|H(\omega)|$ och $arg(H(\omega)$

c) Bestäm $y(n)$ då $x(n) = 3\cos(\pi/3\, n + \pi/6) \quad -\infty < n < \infty$ och $\omega_0 = \pi/2$.



5.25 Skissa $|X(f)|$ svarande mot följande pol-nollställeskonfigurationer.



5.26 Bestäm ett filter som helt spärrar frekvensen $\omega_0 = \pi/4$ och beräkna utsignalen då insignalen $x(n) = \sin(\pi/4\, n)u(n)$ för $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

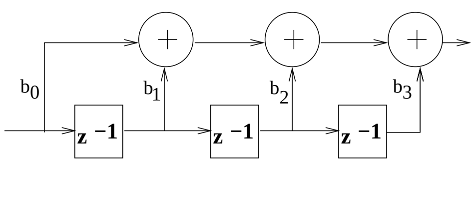
5.35 Ett andra ordningens system har en dubbelpol för $p_{1,2} = 0.5$ och två nollställen $z_{1,2} = e^{\pm j3\pi/4}$. Bestäm förstärkningsfaktorn G så att $|H(0)| = 1$.

5.39 Bestäm 3-dB bandbredden för filtren $(0 < \alpha < 1)$.

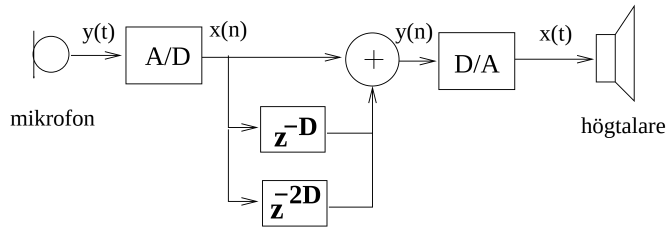
$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} \quad H_2(z) = \frac{1-a}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$

MATLAB: Plotta amplitudfunktionerna i MATLAB och uppskatta därur bandbredderna.

E4.1 Dimensionera nedanstående krets så att likspänningsförstärkningen blir 1 och så att frekvenserna $\omega = \pi/2$ och $\omega = \pi$ spärras. Bestäm också kretsens amplitudfunktion och fasfunktion.



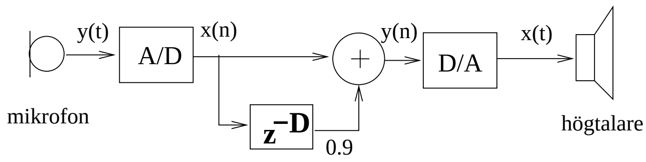
E4.2 Vi vill skapa ekoeffekt och använder oss av nedanstående koppling.



a) Bestäm den digitala kretsens poler och nollställen för $D = 500$.

b) Bestäm och skissa den digitala kretsens amplitudfunktion $|H(f)|$.

E4.3 Vi använder oss av nedanstående koppling för att få en ekoeffekt.

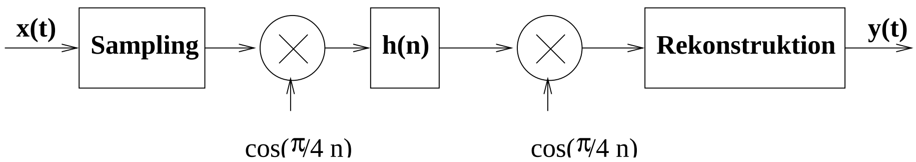


a) Bestäm den digitala kretsens impulssvar.

b) Bestäm den digitala kretsens amplitudfunktion $|H(f)|$.

c) Bestäm den digitala kretsens poler och nollställen för D=500.

E4.4 Insignalen till nedanstående system är $x(t) = \cos(2\pi 1000t) + cos(2\pi 6000t)$. Filtrets impulssvar $h(n) = u(n) - u(n-8)$. Sampeltakten är 8 kHz.



Bestäm utsignalen $y(t)$ då rekonstruktionen är ideal.
MATLAB: Simulera systemet i MATLAB. Välj gärna ljud som insignal.

E4.5 Antag att vi har en tidskontinuerlig signal:

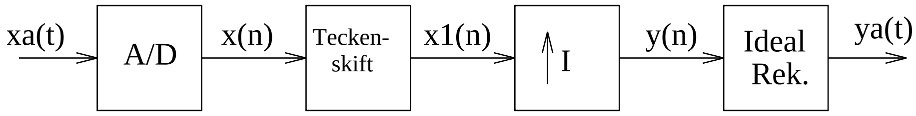
$$x_a(t) = e^{-10\cdot t} \cdot u(t),\ t \text{ i sekunder}$$

a) Bestäm signalens fouriertransform $X_a(F)$ samt $|X_a(F)|^2$.

b) Vi vill sampla signalen med $F_s = 100$Hz. Vi förfiltrerar den därför med ett antivikningsfilter. Detta antas vara ett idealt lågpassfilter med gränsfrekvens $F_s/2 = 50$Hz. Hur stor del av energin i signalen $x_a(t)$ spärras av antivikningsfiltret?

c) Den filtrerade signalen samplas med samplingsfrekvensen F_s. Beräkna beloppet av Fouriertransformen av den samplade signalen $y(n)$. Beräkna också Fouriertransformen av den samplade signalen om antivikningsfiltret tas bort.

E4.6 Bestäm utsignalen från nedanstående krets då insignalen är $x_a(t) = 2\cdot\cos(2\pi\cdot F_0 t)$ då $F_0 = 600$Hz och $F_s = 1000$Hz.



Teckenskiftaren utför operationen

$$x_1(n) = (-1)^n x(n)$$

och uppsamplaren

$$y(n) = \begin{cases} x_1\left(\frac{n}{2}\right) & \text{n jämn} \\ 0 & \text{n udda} \end{cases}$$

Rekonstruktionen är ideal och sker med samplingstakten $2F_s$.

Diskreta fouriertransformen DFT, kapitel 7

7.1 De fem första värdena av en 8-punkters DFT av en reell sekvens ges av $\{0.25, 0.125 - j0.3018, 0, 0.125 - j0.0518, 0\}$. Bestäm de övriga 3 punkterna.
MATLAB: Kolla resultatet i MATLAB.

7.2 Bestäm den cirkulära faltningen mellan följande signaler (N=8)

a) $x_1 = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$, $x_2 = \sin(\frac{2\pi}{8}n)$, $0 \le n \le N-1$.

7.3 Givet N-punkts DFT $X(k),\ \ 0 \le k \le N-1$ av $x(n),\ \ 0 \le n \le N-1$. Definiera

$$X_0(k) = \begin{cases} X(K) & 0 \le k \le K_c,\ \ N - k_c \le k \le N-1 \\ 0 & k_c < k < N - k_c \end{cases}$$

Jämför $x_0(n) = IDFT(X_0(k))$ med $x(n)$. Vad händer?

7.4 Sekvenserna $x_1(n) = \cos\frac{2\pi}{N}n$ och $x_2(n) = \sin\frac{2\pi}{N}n$ är givna för $0 \le n \le N-1$.

a) Bestäm den cirkulära faltningen mellan $x_1(n)$ och $x_2(n)$.

b) Bestäm den cirkulära korrelationen mellan $x_1(n)$ och $x_2(n)$.

c) Bestäm den cirkulära autokorrelationen för $x_1(n)$.

d) Bestäm den cirkulära autokorrelationen för $x_2(n)$.

7.7 Sekvensen $x(n)$, $0 \le n \le N-1$, har DFT:n $X(k)$. Bestäm nu DFT:erna av sekvenserna nedan i termer av $X(k)$

1) $x_c(n) = x(n)\cos\frac{2\pi k}{N}n$.

2) $x_s(n) = x(n)\sin\frac{2\pi k}{N}n$.

7.8 Bestäm den cirkulära faltningen mellan $x_1(n) = \{1, 2, 3, 1\}$ och $x_2(n) = \{4, 3, 2, 2\}$. Jämför med den icke-cirkulära faltningen.

7.9 Bestäm den cirkulära faltningen mellan $x_1(n) = \{1, 2, 3, 1\}$ och $x_2(n) = \{4, 3, 2, 2\}$ genom att använda DFT och IDFT.

7.10 Bestäm energin för sekvensen $x(n) = \cos\frac{2\pi kn}{N}\ \ 0 \le n \le N-1$.
MATLAB: Bestäm energin i MATLAB med hjälp av fft.

7.11 Sekvensen $\{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$, har DFT:n $X(k)$. Bestäm nu DFT:erna av sekvenserna

a) $\{1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1\}$.

b) $\{0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$.

7.18 Insignalen till ett linjärt tidsinvariant system $H(\omega)$ är $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n - kN)$. Antag att vi beräknar N-punkters DFT av utsignalen $y(n)$ för punkterna $0 \le n \le N-1$. Beräkna sambandet mellan $Y(k)$ och $H(\omega)$.

7.23 Beräkna N-punkters DFT av

a) $x(n) = \delta(n)$

b) $x(n) = \delta(n - n_0)$, $0 < n_0 < N$

c) $x(n) = a^n$, $0 \le n \le N-1$

d) $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N/2 - 1 (N\ even) \\ 0, & N/2 \le n \le N-1 \end{cases}$

e) $x(n) = e^{j2\pi/N\ k_0 n}$, $0 \le n \le N-1$

f) $x(n) = \cos(2\pi/N\ k_0\ n)$, $0 \le n \le N-1$

g) $x(n) = \sin(2\pi/N\ k_0\ n)$, $0 \le n \le N-1$

h) $x(n) = \begin{cases} 1, & n\ even \\ 0, & n\ odd\ 0 \le n \le N-1 \end{cases}$

7.24 Givet $x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$. Beräkna 4-punkters DFT ax $x(n)$ genom att lösa 4:e ordningens ekvationssystem för invers DFT.

7.25 a) Bestäm fouriertransformen av $x(n) = \{1, 2, \mathbf{3}, 2, 1, 0\}$.

b) Bestäm 6-punkters DFT av $v(n) = \{3, 2, 1, 0, 1, 2\}$.

c) Jämför $X(k)$ och $V(k)$ i a) och b).

E5.1 Beräkna och skissa $|X(k)|$ där $X(k)$ är 8 punkters DFT av $x(n)$ med $x(n) = \{1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1\}$

E5.2 Låt $X(k)$ vara 8 punkters DFT av $x(n)$ med $x(n) = \{0, 1, 1, 3, 8, 7, 2, 2\}$

a) Beräkna $y(n) = IDFT(X^*(k))$.

b) Beräkna $y(n) = IDFT((-1)^k\, X(k))$.

MATLAB: Kolla räkningarna i MATLAB med fft, ifft. Låt $x(n)$ vara en ljudsignal och lyssna på $y(n)$ i a) respektive b).

E5.3 Insignalen $x(n)$ till systemet $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ $\;0 < a < 1$ är periodisk med perioden N. Bestäm impulssvaret till ett FIR-filter som ger samma stationära lösning som systemet ovan för insignalen $x(n)$.

E5.4 Den signalbehandlingsintresserade eleven Hans hittar en stämgaffel. Tyvärr framgår det ej vilken resonansfrekvens stämgaffeln har. Han kommer då på den lysande idén att utnyttja en spektrumanalysator. Spektrumanalysatorn är digital och gör en DFT av insignalen. Med spektrumanalysatorn inställd på 0 - 200 Hz (sampeltakt 400 Hz) avläser han en topp i spektrum vid frekvensen 138 Hz. Vilka värden på resonansfrekvensen kan stämgaffeln ha? Motivera svaret.

E5.5 Nedan ges fyra sekvenser $x_i(n)$ och åtta sekvenser $X_j(k)$. Välj ut de fyra rätta DFT paren $x(n) \longleftrightarrow X(k)$.

	$x(n)$		$X(k)$
1	$\{1+j,\ 0,\ 0,\ 0\}$	A	$\{1,\ 1,\ 0,\ 0\}$
2	$\{0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ -0.5\}$	B	$\{j,\ 0,\ j,\ 0\}$
3	$\{1+j,\ j,\ 0,\ 1\}$	C	$\{1+j,\ 1+j,\ 1+j,\ 1+j\}$
4	$\{0.75,\ 0.25,\ -0.25,\ 0.25\}$	D	$\{j,\ 0,\ -j,\ 0\}$
		E	$\{1,\ -j,\ j,\ 1\}$
		F	$\{1,\ -j,\ 1,\ j\}$
		G	$\{2+2j,\ 2+2j,\ 0,\ 0\}$
		H	$\{1,\ 1,\ 0,\ 1\}$

MATLAB: Tag eventuellt hjälp av MATLAB för att kolla resultatet.

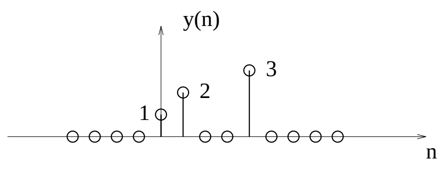
E5.6 Betrakta impulssvaret

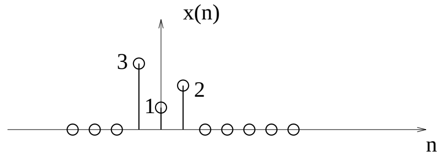
$$h(n) = \frac{1}{4}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{4}\delta(n-2) + \frac{1}{4}\delta(n-3)$$

a) Beräkna Fouriertransformen. Beräkna DFT:n för $N \geq 4$. Samband ?

b) Vad blir $H(k)$, $k = 0 \ldots 3$ för $N = 4$?
Vad blir $h_p(n) = \mathrm{IDFT}(H(k))$?

E5.7 Följande två tidsdiskreta signaler är givna





Signalernas Fouriertransformer samplas i punkterna $f = k/N$, $k = 0 \dots N-1$, för $N = 5$. Hur är $Y(k/N)$ relaterad till $X(k/N)$?

E5.8 Impulssvaret till en kausal tidsdiskret krets är

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2).$$

Insignalen är

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1).$$

a) Beräkna utsignalen med hjälp av faltningsformeln.

b) Beräkna utsignalen med hjälp av Fouriertransformen.

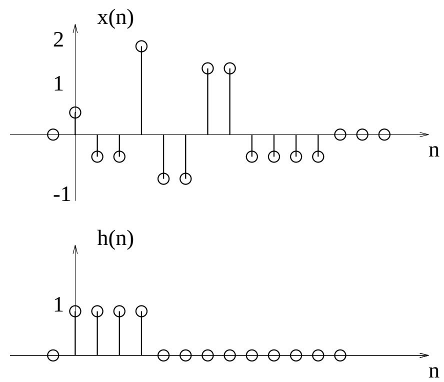
c) Sätt in $f = k/N$, $k = 0 \dots N-1$ i uttrycket för $Y(f)$. Om N är mindre än ett visst tal M uppstår "vikning" i tidsplanet. Slutsats ? Hur stort är M ? Hur stort är M i ett allmänt fall då impulssvaret har längden P och insignalen längden Q ?

E5.9 Sekvensen $h(n)$ är impulssvar till ett transversalfilter av ordning L med koefficienter b_k, $k = 0 \dots L$. Signalen $x(n)$ är en trunkerad stegfunktion med längden Q, dvs

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \dots Q-1, \quad Q > L+1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Man önskar beräkna utsignalen från transversalfiltret med hjälp av DFT, men gör misstaget att välja DFT-längden $N = Q$ (istället för $N \geq Q + P - 1 = Q + L$, där P betecknar längden av $h(n)$). Beräkna för detta val av N "utsignalen" $y_p(n)$, $n = 0 \dots N-1$.

E5.10 Signalerna $x(n)$ och $h(n)$ enligt figur är insignal respektive impulssvar till en tidsdiskret krets. Man vill beräkna utsignalen $y(n) = h(n) * x(n)$ med hjälp av 8 punkters DFT. Detta kan man göra genom att dela upp insignalen i segment om t.ex. 4 punkter. Gör detta och beräkna respektive utsignal-segment m.h.a. faltningssumman.



E5.11 Man har givet en oändlig sekvens $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$ med Fouriertransformen $X(f)$. Av denna bildar man en ändlig sekvens $y(n)$ sådan att $y(n) = 0$ då $k < 0$ och $k > 9$ genom att beräkna

$$y(n) = \text{IDFT}(Y(k)) \quad n = 0 \dots 9.$$

där

$$Y(k) = X(f)|_{f=\frac{k}{10}} \quad k = 0 \dots 9.$$

Bestäm $y(n)$.

E5.12 Man kan utföra filtrering med hjälp av overlap-save-metoden. Då delas insignalen $x(n)$ upp i segment av längden N

$$x_i(n) = x(n + i(N - M + 1)) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

där M är längden på filtrets impulssvar. För varje segment bildas

$$X_i(k) = \text{DFT}\{x_i(n)\}$$

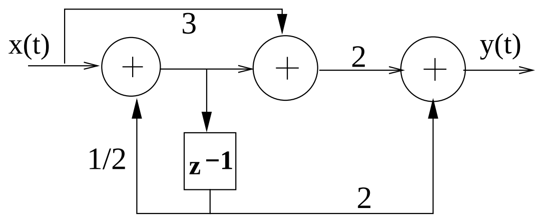
och

$$y_i(n) = \text{IDFT}\{X_i(k)\ H(k)\}$$

där $H(k)$ är DFT$\{h(n)\}$. Bestäm hur $y_i(n)$, $i = 0, 1, 2 \dots$ skall kombineras för att ge $y(n) = x(n) * h(n)$. Illustrera med figur.

Realiseringar, kapitel 9

9.3 Bestäm systemfunktionen och impulssvaret till nedanstående krets.



9.9 Bestäm realisering enligt direktform I, direktform II, kaskadform och parallellform för nedanstående system.

a) $y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$.

f) $y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - x(n-1) + x(n-2)$.

9.15 Bestäm parametrarna $\{K_m\}$ till ett lattice FIR-filter bestämt av ekvationen
$H(z) = A_2(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$
MATLAB: Lös också parametrarna med hjälp av MATLAB.

9.19

a) Bestäm och skissa nollställen till lattice FIR-filtret med parametrarna
$K_1 = \frac{1}{2}$, $;K_2 = -\frac{1}{3}$, $K_3 = 1$

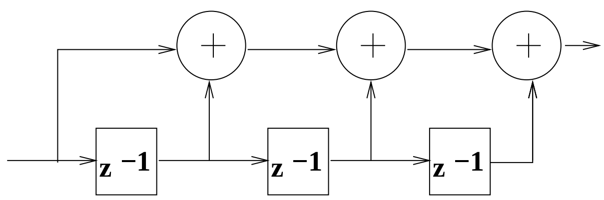
b) Samma som i a) men med $K_3 = -1$

c) I a) ocb b) visar det sig att alla nollställen ligger på enhetscirkeln. Kan detta resultat generaliseras? Och hur?

d) Bestäm fasfunktionen för filtren i a) och b). Slutsats?

Exempel på design av filter

E8.1 Givet nedanstående digitala FIR-filter.



a) Bestäm kretsens poler och nollställen.

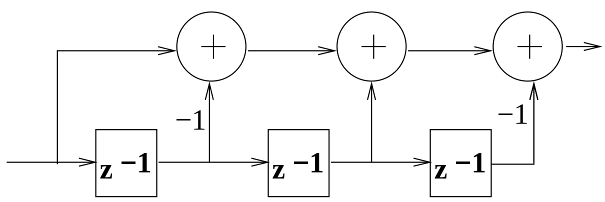
b) Bestäm och rita kretsens amplitudfunktion $|H(f)|$.

c) Bestäm och rita kretsens fasfunktion.

d) Vid vilka frekvenser blir $|H(f)| = 0$?

e) Vilken typ (LP, BP, HP) är det?

E8.2 Givet nedanstående digitala FIR-filter.



a) Bestäm kretsens poler och nollställen.

b) Bestäm och rita kretsens amplitudfunktion $|H(f)|$.

c) Bestäm och rita kretsens fasfunktion.

d) Vid vilka frekvenser blir $|H(f)| = 0$?

e) Vilken typ (LP, BP, HP) är det?

E8.3 Vi vill filtrera en uppmätt signal genom att bilda utsignalen y(n) som medelvärdet av de fem senaste insignalvärdena enligt
$y(n) = \frac{1}{5}\sum x(k) = 0.2(x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n))$

a) Bestäm filtrets impulssvar $h(n)$.

b) Bestäm filtrets amplitudfunktion $|H(f)|$.

c) Skissa $|H(f)|$ för $0 \leq f \leq 1$.

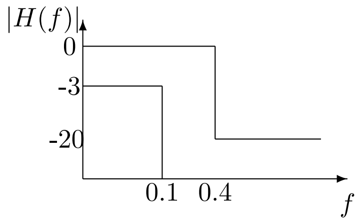
E8.4 Utgående från signalen $x(n) = \sin(\pi/2\ n)$ önskar man åstadkomma signalen $y(n) = \sin(\pi/2\ n + \pi/3)$. Bestäm en krets som gör detta. Försök med ett FIR-filter.

E8.5 Bestäm impulssvaret $h(n)$ till en tidsdiskret krets så att följande krav på $H(f)$ är uppfyllda:

- $|H(0)| = |H(-1/5)| = |H(1/5)| = 1$
- $H(2/5) = H(-2/5) = 0$
- h(n) är reell
- h(n) är kausal
- kretsen har linjär fas

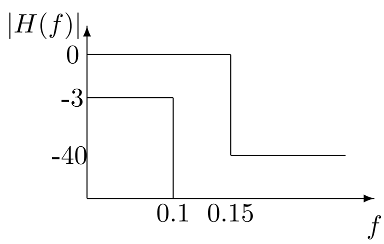
MATLAB: Plotta spektrum i MATLAB och se om det uppfyller kraven.

E8.6 Ett filter $H(z)$ är givet genom N st poler i origo och N st nollställen i $z = -1$. Likspänningsförstärkningen är 1 (0dB). Bestäm för vilka värden på N som dämpningskraven enligt figuren är uppfyllda och bestäm impulssvaret för minimalt värde på N.
MATLAB: Plotta spektrum i MATLAB och se om det uppfyller kraven.



Ett löst exempel på FIR-filter med fönstermetoden:

Bestäm ett FIR-filter som uppfyller dämpningskravet nedan dels med fönstermetoden och dels med ekviripplemetoden.



Först väljer vi fönsterfunktion för FIR-filtret. Hamming har största sidlob
-55dB. Vi väljer därför Hammingfönster. Ett ungefärligt värde på gradtalet M fås ur FS tabell 5.2

$$\frac{1.7}{M} \approx 0.15 - 0.1 \Rightarrow M = 34$$

Observera dock att tabell 5.2 har definierat övergångszonens undre punkt vid -6dB, så det rätta M bör vara något större.

Bättre värde på M fås ur figur FS sid 36. Vid undre gränsen $f = 0.1$, $|H(f)| = -3dB$, erhålles

$$x = -0.4 = (f - f_c) \cdot M = (0.1 - f_c) \cdot M$$

och vid $f = 0.15$, $|H(f)| = -40dB$

$$x = 1.5 = (f - f_c) \cdot M = (0.15 - f_c) \cdot M$$

Löser vi ut f_c och M ur ovanstående ekvationer erhåller vi

$$\begin{aligned} f_c &= 0.110 \\ M &= 38 \end{aligned}$$

Låt oss nu se vilket gradtal ekviripplemetoden ger. Passbandsripplet är

$$\begin{aligned} 20log\,\frac{1+\delta_p}{1-\delta_p} &= 3 \\ \Rightarrow \frac{1+\delta_p}{1-\delta_p} = 10^{0.15} &= 1.41 \\ \Rightarrow \delta_p = \frac{0.41}{2.41} &= 0.17 \end{aligned}$$

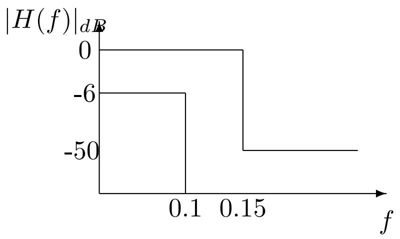
och

$$20log\delta_s = -40 \Rightarrow \delta_s = 0.01$$

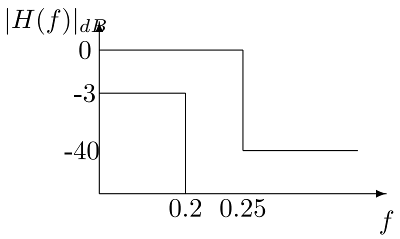
$$\begin{aligned} D_\infty &= \frac{-20log\sqrt{0.17 \cdot 0.01} - 13}{14.6} = 1.0 \\ \Delta f &= 0.15 - 0.1 = 0.05 \\ \Rightarrow N &= \frac{1.0}{0.05} + 1 = 21 \end{aligned}$$

Ekvirippelfiltret ger alltså lägst gradtal men har bestämts så att spärrbandsdämpningen är 40dB i hela spärrbandet medan FIR-filtret med Hammingfönster har största sidloben med dämpningen ca 55dB.

E8.7 Bestäm impulssvaret till ett realiserbart filter som uppfyller kravspecifikationen nedan. Filtret skall ha så låg ordning som möjligt och exakt linjär fas.

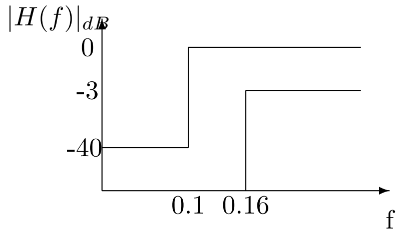


E8.8 Ett FIR-lågpassfilter, som uppfyller de i figuren givna kraven, skall realiseras. Man utgår från ett idealt lågpassfilter $H_d(f)$ med gränsfrekvensen f_c och använder ett Hammingfönster, vilket ger minst en spärrbandsdämpning, på 40dB. Beräkna f_c så att de givna kraven uppfylles för minimalt M (udda). Realisera filtret.

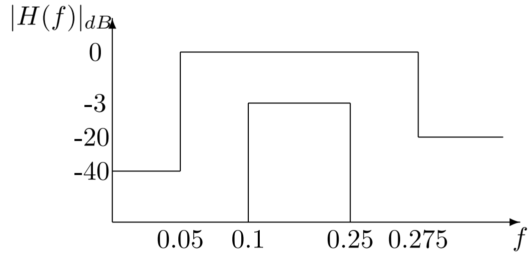


MATLAB: Plotta spektrum i MATLAB och se om det uppfyller kraven.

E8.9 Kravspecifikationen för ett tidsdiskret HP-filter är givet enligt figuren nedan. Vid frekvensen 0.16 **skall** dämpningen vara 3dB. Bestäm pulssvaret till ett FIR-filter av minimal ordning som uppfyller givna krav.



E8.10 Kravspecifikationen för ett tidsdiskret BP-filter är given enligt figuren nedan. Vid frekvenserna 0.1 och 0.25 **skall** dämpningen vara 3dB. Bestäm pulssvaret till ett FIR-filter av minimal ordning som uppfyller givna krav.



MATLAB: Plotta spektrum i MATLAB och se om det uppfyller kraven.

E8.11 Bandbredden för ett BP-filter definieras som skillnaden i frekvens mellan de två punkter där amplituden är $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$. Bestäm bandbredden för ett FIR BP-filter som har impulssvaret

$$\begin{aligned} h(n) &= 0.4933 \frac{\sin(0.2466\pi(n-20))}{(0.2466\pi(n-20))} \cos(\pi 0.4192(n-20)) \\ &\cdot (0.54 + 0.46\cos(\frac{2\pi(n-20)}{40}) \quad 0 \leq n \leq 40 \end{aligned}$$

E8.12 Två FIR-filter kaskadkopplas $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$ där

$$H_1(z) = 1 - 2r\cos(\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}$$

Bestäm $H_2(z)$ så att kaskadkopplingen får linjär fas och likspänningsförstärkningen $|H(0)| = (1 - 2r\cos(\theta) + r^2)^2$. Ange $\arg(H(f))$ för $0 \leq f \leq 1/2$.

E8.13 En bandpass-signal som man önskar studera har komponenter i området 2.5-3 MHz. Signalen samplas med sampelfrekvensen $F_s = 10$ MHz och A/D-omvandlas. Signalen har dock genererat övertoner i området 5-6 MHz och dessutom har till den önskade signalen störningar i området 9-10 MHz adderats. Man vill nu med ett digitalt FIR-filter undertrycka störning och övertoner minst 40 dB. Filtret får påverka den önskade signalen med maximalt 3 dB.

Chapter 1

Lösningar till övningsuppgifter

S 1.2 Periodicitet $\Leftrightarrow \exists N : \cos(\omega(n+N)) = \cos(\omega n)\ \forall n$.
N = fundamental period om $f = \frac{k}{N}$ $(\omega = 2\pi f)$ där k och N är heltal och saknar gemensamma faktorer.

a) $\cos(0.01\pi n) = [\text{t.ex.}] = \cos(0.01\pi(n+200)) \Rightarrow$ periodisk. $\cos(0.01\pi n) = \cos(2\pi 0.005 n) = \cos\left(2\pi \frac{1}{200}\ n\right) \Rightarrow \frac{1}{200} = \frac{k}{N} \Rightarrow N = 200$.

b) Periodisk, N=7.

c) Periodisk, N=2.

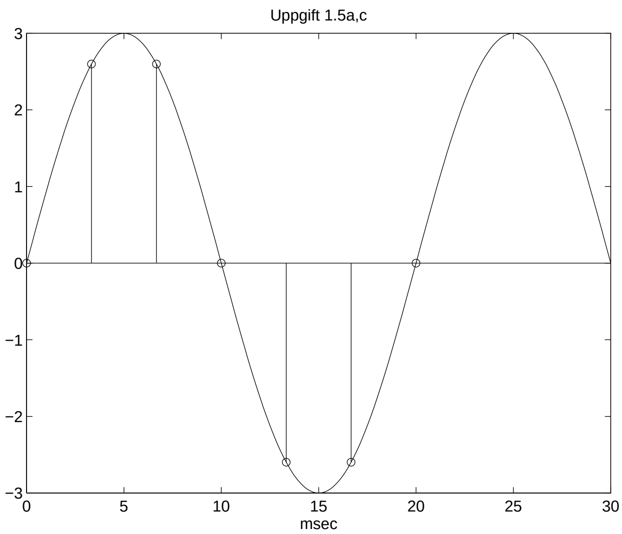
d) Periodisk $\sin(3n) = \sin(3(n+N))$ om $3N = 2\pi p$ och p heltal. Då kan ej N vara heltal $\Rightarrow$ alltså ej periodisk.

e) Periodisk, N=10.

S 1.5 a) Se c).

b) $x(n) = x_a(nT) = 3\sin(2\pi 50 nT) = 3\sin(2\pi \frac{50}{300}\ n) = 3\sin(2\pi \frac{1}{6}\ n)$. Periodisk, $N = 6,\ f = 1/6$.

c) $N = 6,\ T = 1/300 \Rightarrow T_p = NT = 0.02$ s.



d) $x(0) = 0$.
$x(1) = 3 \cdot 1 = 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} \cdot 1) = 3\sin(2\pi \frac{50}{F_s'} \cdot 1) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{100}{F_s'}$
$\Rightarrow F_s' = 200$ Hz.

S 1.7 a) $F_s \geq 2F_{\max} = 2 \cdot 10$ kHz $= 20$ kHz.

b) $x(n) = x_a(nT) = \cos(2\pi \frac{5000}{8000} n) = \cos(2\pi\ \frac{5}{8}\ n) = \left[\frac{5}{8} > \frac{1}{2}\right] = \cos(2\pi(1 - \frac{3}{8})n) = \cos(-2\pi \frac{3}{8} n) = \cos(2\pi \frac{3}{8} n) \Rightarrow x_a(t) = \cos(2\pi 3000 t)$, dvs vikning till 3 kHz.

c) 1 kHz

S 1.8 a) Nyquist rate F_N = lägsta sampelfrekvens så att vikning ej uppstår. $F_N = 2F_{\max} = 2 \cdot 100 = 200$ Hz.

b) $F_s = 250$ Hz $\Rightarrow F_{\max} \leq 125$ Hz.

S 1.11

$$x_a(t) = 3cos(2\pi \cdot 50t) + 2sin(2\pi \cdot 125t)$$

$$F_s = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = 200Hz \qquad F_{rek} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} = 1000Hz$$

$$
\begin{aligned}
x(n) &= 3cos\left(2\pi\frac{50}{200}\,n\right) + 2sin\left(2\pi\frac{125}{200}\,n\right) \\
&= 3cos\left(2\pi\frac{1}{4}\,n\right) + 2sin\left(2\pi\frac{5}{8}\,n\right) = \\
&= 3cos\left(2\pi\frac{1}{4}\,n\right) + 2sin\left(-2\pi\frac{3}{8}\,n\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{rek} &= 1kHz \Longrightarrow \\
y_a(t) &= 3cos\left(2\pi\frac{1000}{4}\,t\right) + 2sin\left(-2\pi\,\frac{3\cdot 1000}{8}\,t\right) \\
&= 3cos(2\pi\cdot 250t) - 2sin(2\pi\cdot 375t)
\end{aligned}
$$

MATLABkod som illustrerar exemplet:

```
t=[0:.001:10];
x=3*sin(100*pi*t)+2*sin(250*pi*t);
y=x(1:5:length(x));
soundsc(x,1000);
soundsc(y,1000);
subplot(211),plot(t(1:100),x(1:100));
subplot(212),plot(t(1:100),y(1:100));
```

S 1.13 Antalet nivåer, $L = \frac{x_{\max}-x_{min}}{\Delta} + 1$. Antalet bitar, $b = \log_2 L$.

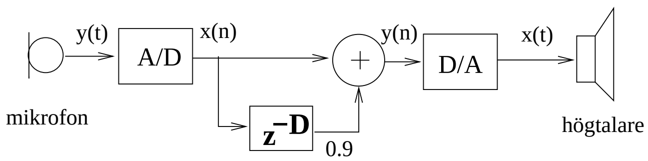
a) b=7

b) b=10

S 1.14 20 Hz · 8 bit = 160 bit/s, F_{max} = 10 Hz, $\Delta = 1/255$ V

S E1.1 Simulering i Matlab.

För att åstadkomma ekoeffekt använder vi oss av nedanstående koppling (z^{-D} fördröjer signalen D sampel).



Simulera detta i MATLAB och lyssna på effekten.

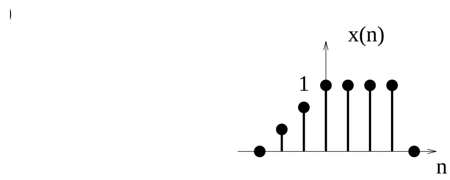
Exempel på MATLABkod:

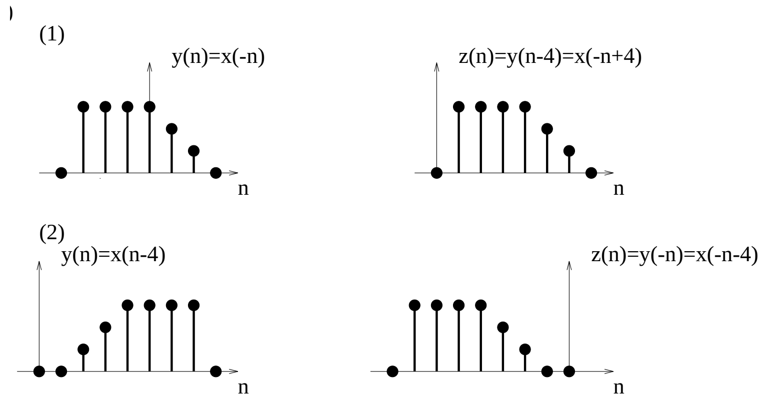
```
t=-1:.0001;1;                  %generera 2 s lång tidsvektor, FS=1/10000
x=vco(t,[300,800],10000);      %generera en svept sinussignal mellan 300 och 800 Hz
soundsc(x,10000);              %lyssna
noll=zeros(1,500);             %generera 500 nollor
x1=[x,noll];x2=[noll,0.9*x];
y=x1+x2;                       %generera ekot
soundsc(y,10000);              %lyssna
```

Välj nytt x (samplat tal och lyssna på ekoeffekten).

Impulssvar och faltning, kapitel 2

S 2.1





c) Alternativ (1) i b).

d) Spegla och fördröj k steg.

e) $x(n) = 1/3\ \delta(n+2) + 2/3\ \delta(n+1) + u(n) - u(n-4)$

S 2.7 Systemen är:

a) Statiskt ty utsignalen beror bara av insignalen vid samma tidpunkt. Icke-linjärt ty Eq.(2.2.26) är ej uppfylld. Tidsinvariant eftersom en fördröjd insignal ger samma utsignal fast fördröjd. Kausalt eftersom utsignalen vid tidpunkten n ej beror av insignaler för tidpunkter > n. Stabilt ty begränsad insignal ger begränsad utsignal.

b) Dynamiskt, linjärt, tidsinvariant, icke-kausalt, instabilt.

c) Statiskt, linjärt, tidsvariant, kausalt, stabilt.

e) Statiskt, icke-linjärt, tidsinvariant, kausalt, stabilt.

h) Statiskt, linjärt, tidsvariant, kausalt, stabilt.

j) Dynamiskt, linjärt, tidsvariant, icke-kausalt, stabilt.

n) Statiskt, linjärt, tidsinvariant, kausalt, stabilt.

S 2.13 (1) (Tillräcklighet.) Antag att $\sum_n |h(n)| = M_h < \infty$, då gäller med begränsad insignal, dvs. $\sup_n |x(n)| \leq M_x < \infty$,

$$|y(k)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|\ |x(k-n)| \leq M_h \cdot M_x < \infty,$$

d v s systemet är $BIBO$-stabilt.

(2) (Nödvändighet.) Antag att $\sum_n |h(n)| = \infty$, bilda insignalen

$$x(n) = \begin{cases} h^*(-n)/|h(-n)|, & h(-n) \neq 0, \\ 0, & h(-n) = 0. \end{cases}$$

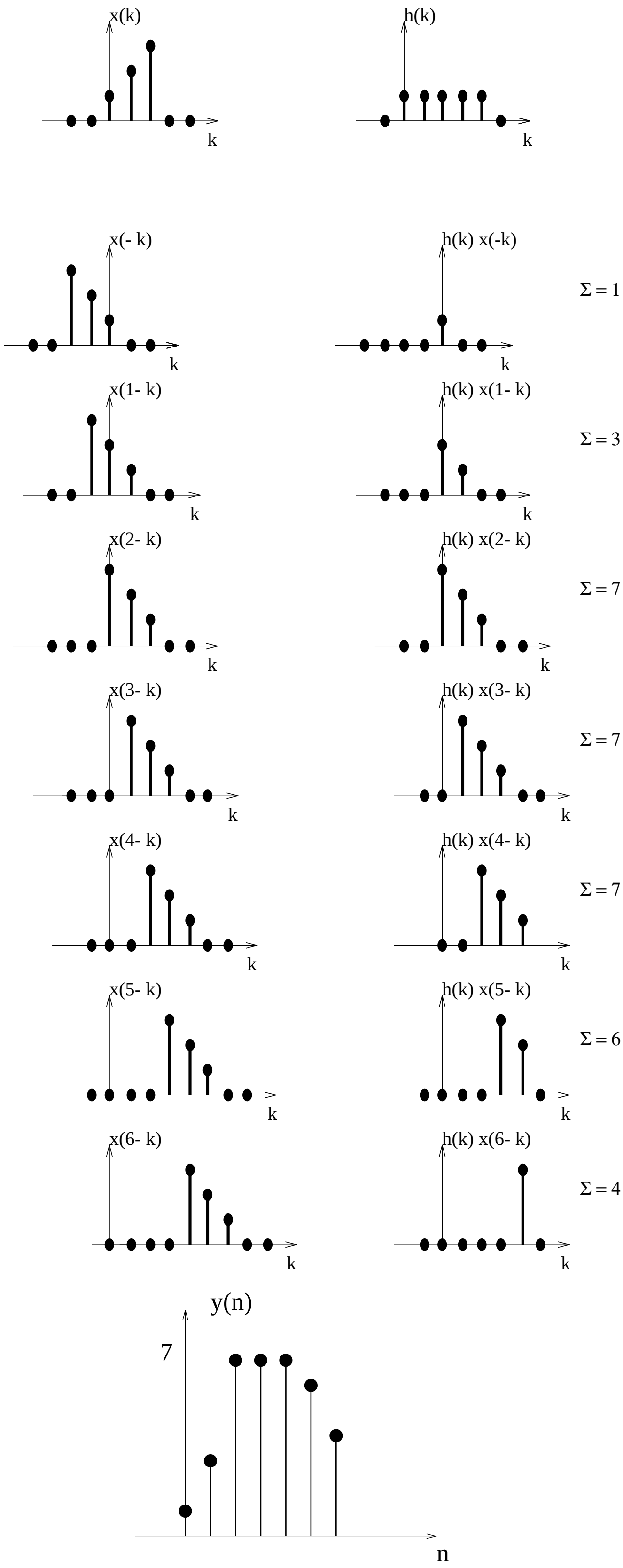
$x(n)$ är begränsad ty $|x(n)| \leq 1$. Vi får

$$y(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h(n)h^*(n)}{|h(n)|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|h(n)|^2}{|h(n)|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty,$$

d v s en begränsad insignal ger en obegränsad utsignal $\Rightarrow$ systemet är inte $BIBO$-stabilt. Alltså måste $\sum_n |h(n)| < \infty$ om systemet är $BIBO$.

S 2.16 a) $\sum_n y(n) = \sum_n \sum_k h(n-k)x(k) = \sum_k x(k) \sum_n h(n-k) = \sum_k x(k) \sum_l h(l)$

b) (1) Grafisk lösning:



$y(n) = \{\underline{1}\ \ 3\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 6\ \ 4\}$,

$\sum_n y(n) = 35 = \sum_k x(k) \sum_l h(l) = 7 \cdot 5$

(2) $y(n) = \{1\ 4\ 2\ -4\ 1\}$

(4) $y(n) = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\}$

(9) Tabell-lösning:

h(n) \ x(n)	1	-2	-3	4 ↓
1	1	-2	-3	4
1	1	-2	-3	4
→ 0	0	0	0	0
1	1	-2	-3	4
1	1	-2	-3	4

Summera antidiagonalerna, kontrollera i vilken summa pilarna korsas, $y(n) = \{1\ \ -1\ \ -5\ \ 2\ \ 3\ \ \underline{-5}\ \ 1\ \ 4\}$,

$\sum_n y(n) = 0 = \sum_k x(k) \sum_l h(l) = 0 \cdot 4$

(11) Formel-lösning:

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^k u(k) (\frac{1}{4})^{n-k} u(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{4})^{n-k} u(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{4})^{n-k} \\
&= (\frac{1}{4})^n \sum_{k=0}^{n} (2)^k \\
&= (\frac{1}{4})^n \frac{1-2^{n+1}}{1-2}, \quad n \geq 0 \\
&= (2(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n) u(n)
\end{aligned}
$$

$\sum_n y(n) = \frac{8}{3} = \sum_k x(k) \sum_l h(l) = 2 \cdot \frac{4}{3}$

S 2.17 a) $y(n) = \{\underline{6}\ \ 11\ \ 15\ \ 18\ \ 14\ \ 10\ \ 6\ \ 3\ \ 1\}$

b) $y(n) = \{6\ \ 11\ \ 15\ \ \underline{18}\ \ 14\ \ 10\ \ 6\ \ 3\ \ 1\}$

c) $y(n) = \{1\ \ \underline{2}\ \ 2\ \ 2\ \ 1\}$

d) $y(n) = \{\underline{1}\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1\}$

S 2.21 a) Om $a \neq b$,
$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^k u(k) a^{n-k} u(n-k)$
$= a^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = a^n \frac{1-(b/a)^{n+1}}{1-b/a} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, \quad n \geq 0.$
Om $a = b$, $y(n) = a^n \sum_{k=0}^{n} 1^k = a^n(n+1), \quad n \geq 0.$

b) $y(n) = \{1\ \ 1\ \ \underline{-1}\ \ 0\ \ 0\ \ 3\ \ 3\ \ 2\ \ 1\}$

S 2.35 a) Parallell- och seriekoppling $\Rightarrow$

$$h(n) = h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n) * h_4(n)]$$

b)

$$
\begin{aligned}
h_3(n) * h_4(n) &= (n-1)u(n-2) \\
h_2(n) - h_3(n) * h_4(n) &= \delta(n) + 2u(n-1) \\
h(n) &= \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{4}\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}u(n-3)
\end{aligned}
$$

c) Falta med en komponent av $x(n)$ i taget $\Rightarrow$

$h(n)*\delta(n+2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\underline{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\ldots$
$h(n)*3\delta(n-1)$	0	0	$\underline{0}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$	6	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\ldots$
$h(n)*(-4\delta(n-3))$	0	0	$\underline{0}$	0	0	-2	-5	-8	-10	-10
$\sum$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\underline{2}$	4	$\frac{25}{4}$	$\frac{13}{2}$	5	2	0	0

Utsignalen blir $y(n) = \{\frac{1}{2}\ \frac{5}{4}\ \underline{2}\ 4\ \frac{25}{4}\ \frac{13}{2}\ 5\ 2\}$

S 2.61

$$\begin{aligned} r_{xx}(\ell) &= \sum_n x(n)x(n-\ell) = \sum_{n=n_0-N+\ell}^{n_0+N} 1 = 2N - \ell + 1; \quad \ell \geq 0 \\ \Rightarrow r_{xx}(\ell) &= 2N - |\ell| + 1 \end{aligned}$$

$r_{xy}(\ell) = \sum_n x(n)y(n-\ell):$ lös grafiskt dvs $r_{xy}(\ell) = r_{xx}(\ell - n_0)$

S 2.62 a)

$$\begin{aligned} x(n) &= \{1\ 2\ 1\ 1\} \\ e_{xx}(\ell) &= \sum x(n)x(n-\ell) = \{1\ 3\ 5\ 7\ 5\ 3\ 1\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y(n) &= \{1\ 1\ 2\ 1\} \\ r_{yy}(\ell) &= \qquad\qquad\qquad = \{1\ 3\ 5\ 7\ 5\ 3\ 1\} \end{aligned}$$

S 2.64

$$\begin{aligned} x(n) &= s(n) + r_1 s(n-k_1) + r_2 s(n-k_2) \\ r_{xx}(\ell) &= \sum_n x(n)x(n-\ell) = \\ &= \sum_n (s(n) + r_1 s(n-k_1) + r_2 s(n-k_2)) \cdot \\ &\quad \cdot (s(n-\ell) + r_1 s(n-k_1-\ell) + r_2 s(n-k_2-\ell)) = \\ &= r_{ss}(\ell) + r_1 r_{ss}(\ell+k_1) + r_2 r_{ss}(\ell+k_2) + \\ &\quad + r_1 r_{ss}(\ell-k_1) + r_1^2 r_{ss}(\ell) + r_1 r_2 r_{ss}(\ell+k_2-k_1) + \\ &\quad + r_2 r_{ss}(\ell-k_2) + r_1 r_2 r_{ss}(\ell+k_1-k_2) + r_2^2 r_{ss}(\ell) \end{aligned}$$

Låt r_1 och $r_2 \ll 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r_{xx}(\ell) &\approx r_{ss}(\ell) + r_1 r_{ss}(\ell+k_1) + r_2 r_{ss}(\ell+k_2) + \\ &\quad + r_1 r_{ss}(\ell-k_1) + r_2 r_{ss}(\ell-k_2) \end{aligned}$$

Z-transform, kapitel 3

S 3.1 a) $X(z) = 3z^5 + 6 + z^{-1} - 4z^{-2}$

b) $X(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{z^{-5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

S 3.2 a) $X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$. Förläng med z^2. Nollställen: $z = 0$ (2st). Poler: $z = 1$ (2st).

c) $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\ z^{-1}}$ Nollställe: $z = 0$. Pol: $z = -\frac{1}{2}$.

f)

$$\begin{aligned} x(n) &= Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi)u(n) = \\ &= Ar^n(\cos(\omega_0 n)\cos\phi - \sin(\omega_0 n)\sin\phi)u(n) \end{aligned}$$

$$X(z) = A\frac{(1 - r\ \cos(\omega_0)z^{-1})\cos\phi - r\ \sin(\omega_0)z^{-1}\sin\phi}{1 - 2r\ \cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

Poler och nollställen ges av

$$X(z) = Az\cos\phi\ \frac{z - \frac{r\cos(\omega_0 - \phi)}{\cos\phi}}{(z - re^{j\omega_0})(z - re^{-j\omega_0})}$$

Nollställen: $z = 0$ och $z = r\ \cos(\omega_0 - \phi)/\cos\phi$. Poler: $z = re^{\pm j\omega_0}$.

h)

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - 1/2\ z^{-1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \frac{z^{-10}}{1 - 1/2\ z^{-1}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} z^{-10}}{1 - 1/2\ z^{-1}} \end{aligned}$$

Poler och nollställen ges av

$$X(z) = \frac{z^{-10}(z^{10} - (1/2)^{10})}{z^{-1}(z - 1/2)} = \frac{z^{10} - (1/2)^{10}}{z^9(z - 1/2)}$$

Nollställen: $z^{10} - (1/2)^{10} = 0 \ \Rightarrow\ z = 1/2\ e^{j2\pi k/10}$, $k = 1 \ldots 9$. Poler: $z = 0$ (9st). OBS! Polen $p = 1/2$ och nollstället $z = 1/2$ släcker ut varandra.

S 3.8 a)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)u(n-k) = x(n) * u(n)$$

$$\Rightarrow\ Y(z) = X(z) \cdot U(z) = X(z) \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

b)

$$u(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)u(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)u(n)$$

$$\Rightarrow\ X(z) = U(z) \cdot U(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2}$$

S 3.9 Skalning i z-planet $a^n x(n) \longleftrightarrow X(a^{-1}z)$. Om vi har en pol (nollställe) $z = re^{j\omega_c}$ $\Rightarrow$ efter multiplikation i tidsplanet att

$$e^{-j\omega_0} z = re^{j\omega_c} \Leftrightarrow$$

ny pol (nollställe) $z = e^{j(\omega_c + \omega_0)}$ likaså

$$e^{-j\omega_0} z = re^{-j\omega_c} \ \Rightarrow\ z = e^{-j(\omega_c - \omega_0)}$$

Polerna (nollställena) är inte längre komplexkonjugerade.

S 3.14 a) $x(n) = 2(-1)^n u(n) - (-2)^n u(n)$

b) $x(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cos\ \frac{\pi}{4}\ (n-1)u(n-1) + \delta(n)$

c) $x(n) = u(n-6) + u(n-7)$

d)

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}} = 1 + \frac{z^{-2}}{1+z^{-2}} = 1 + \frac{z^{-2}}{(1+jz^{-1})(1-jz^{-1})} = \\
&= 1 + z^{-2}\left(\frac{A}{1+jz^{-1}} + \frac{B}{1-jz^{-1}}\right), \ A = \frac{1}{2}, \ B = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{Z^{-1}}{\rightarrow} x(n) &= \delta(n) + \frac{1}{2}\,(-j)^{n-2}u(n-2) + \frac{1}{2}\,(j)^{n-2}u(n-2) \\
&= \delta(n) - \left(\frac{1}{2}\,e^{-j\ \pi/2\ n} + \frac{1}{2}\,e^{j\ \pi/2\ n}\right)u(n-2) \\
&= \delta(n) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\ n\right)u(n-2)
\end{aligned}$$

Alt. identifiering via FS

$$\Rightarrow \ \alpha^n \sin\beta n\ u(n) \overset{Z}{\rightarrow} \frac{z^{-1}\alpha\sin\beta}{1 - z^{-1}2\alpha\cos\beta + \alpha^2 z^{-2}}$$

$$\alpha = 1, \ \beta = \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow$$

$$\sin\ \frac{\pi}{2}\ n\ u(n) \overset{Z}{\rightarrow} \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}}$$

$$\Rightarrow x(n) = \delta(n) + \sin\ \frac{\pi}{2}\ (n-1)u(n-1)$$

De båda svaren är samma signal, kolla gärna genom att sätta in $n = 0, 1, 2 \ldots$

g)

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{4} + \frac{z^{-1} + \frac{3}{4}}{4z^{-2} + 4z^{-1} + 1} = \frac{1}{4} + X_1(z) \\
X_1(z) &= \frac{z^{-1}}{(1+2z^{-1})^2} + \frac{3/4}{(1+2z^{-1})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{Z^{-1}}{\rightarrow} x(n) &= \frac{1}{4}\ \delta(n) + (n+1-1)(-2)^{n-1}u(n-1) \\
&\quad + \frac{3}{4}\ (n+1)(-2)^n u(n) = \\
&= \delta(n) - \left[\frac{1}{2}\ (n-1)(-2)^{n-1} + 2(-2)^{n-1}\right]u(n-1)
\end{aligned}$$

S 3.16 a)

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-1) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1) \overset{Z}{\rightarrow} \frac{1}{4}\ \frac{z^{-1}}{1 - 1/4\ z^{-1}}$$

$$x_2(n) = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n) \overset{Z}{\rightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1 - 1/2\ z^{-1}}$$

$$x_1 * x_2 \overset{Z}{\rightarrow} X_1 \cdot X_2$$

$$\begin{aligned}
X_1 \cdot X_2 &= z^{-1}\left[\frac{1/4}{(1-1/4\ z^{-1})\,(1-z^{-1})} + \frac{1/4}{(1-1/4\ z^{-1})\,(1-1/2\ z^{-1})}\right] = \\
&= z^{-1}\left[\frac{A}{1-1/4\ z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}} + \frac{C}{1-1/2\ z^{-1}}\right]
\end{aligned}$$

Handpåläggning:
$A = \frac{1}{4}\ \left[\frac{1}{1-4} + \frac{1}{1-2}\right] = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{4}\ \left[\frac{1}{1-1/4}\right] = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{4}\ \left[\frac{1}{1-1/2}\right] = \frac{1}{2}$

$$X_1 \cdot X_2 \quad = \quad \frac{1}{3}\ \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{1}{3}\ \frac{z^{-1}}{1-1/4\ z^{-1}} + \frac{1}{2}\ \frac{z^{-1}}{1-1/2\ z^{-1}} \overset{Z^{-1}}{\rightarrow}$$

$$x_1 * x_2 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] u(n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

c)

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \overset{Z}{\rightarrow} \frac{1}{1-1/2\ z^{-1}}$$

$$x_2(n) = \cos(\pi n) u(n) \overset{Z}{\rightarrow} \frac{1+z^{-1}}{1+2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$x_1 * x_2 \overset{Z}{\rightarrow} X_1 \cdot X_2$$

$$X_1 X_2 = \frac{1}{(1-1/2\ z^{-1})(1+z^{-1})} = \frac{A}{1-1/2\ z^{-1}} + \frac{B}{1+z^{-1}}$$

H.p.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \\ B &= \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}\ \frac{1}{1-1/2\ z^{-1}} + \frac{2}{3}\ \frac{1}{1+z^{-1}} \overset{Z^{-1}}{\rightarrow} \\ x_1 * x_2 &= \left[\frac{1}{3}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}(-1)^n\right] u(n) = \\ &= \left[\frac{1}{3}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\ \cos \pi n\right] u(n) \end{aligned}$$

S 3.38 a) $y_{zs}(n) = h * x(n)$ då systemet är i vila dvs

$$y(-\ell) = 0 \quad \ell = 1 \dots N$$

$$Y_{zs}(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1-1/3\ z^{-1}} \cdot \frac{1-1/4\ z^{-1}}{1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2}} =$$

$$= \left[\frac{A}{1-1/3\ z^{-1}} + \frac{B+Cz^{-1}}{1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2}}\right] =$$

$$= \frac{A - 1/2\ Az^{-1} + 1/4\ Az^{-2} + B + Cz^{-1} - 1/3\ Bz^{-1} - 1/3\ Cz^{-2}}{(1-1/3\ z^{-1})(1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2})} =$$

Id.koeff.

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{3}B + C &= -\tfrac{1}{4} \\ \tfrac{1}{4}A - \tfrac{1}{3}C &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \tfrac{1}{7} \\ B &= \tfrac{6}{7} \\ C &= \tfrac{3}{28} \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{1/7}{1-1/3\ z^{-1}} + \frac{6/7 + 3/28\ z^{-1}}{(1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2})} = \frac{1/7}{1-1/3\ z^{-1}} +$$

$$\frac{6}{7}\ \frac{1+1/8\ z^{-1}}{1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2}} = \frac{1}{7}\ \frac{1}{1-1/3\ z^{-1}} + \frac{6}{7}\ \frac{1-1/4\ z^{-1}}{1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2}}$$

$$+\frac{3\sqrt{3}}{7}\ \frac{\sqrt{3}/4\ z^{-1}}{1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2}} \overset{Z^{-1}}{\rightarrow}$$

$$y_{zs}(n) = \left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}\ n\right) + \frac{3\sqrt{3}}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{3}\ n\right)\right] u(n)$$

d)

$$\left.\begin{array}{rcl} y(n) & = & \frac{1}{2}\ x(n) - \frac{1}{2}\ x(n-1) \\ x(n) & = & 10\cos\ \left(\frac{\pi}{2}\ n\right) u(n) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y_{zs}(n) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\ n\right) u(n) - 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\ (n-1)\right) u(n-1)$$

S 3.40 Kausalt LTI

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

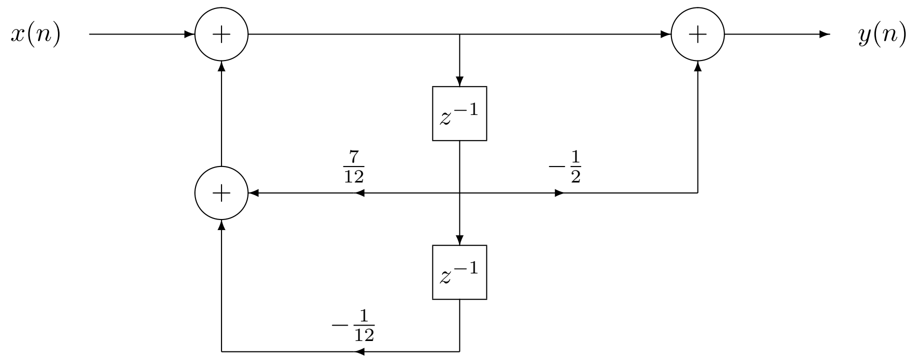
$$\Rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

a) Kausal in, kausal ut $\Rightarrow$ beg.villkor $= 0$.

$$\begin{array}{rcl} X(z) & = & \frac{1}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}} - \frac{\frac{1}{4}\ z^{-1}}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{4}\ z^{-1}}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}} \\ Y(z) & = & \frac{1}{1-\frac{1}{3}\ z^{-1}} \\ H(z) & = & \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}\ z^{-1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}}{1-\frac{1}{4}\ z^{-1}} = \\ & = & \frac{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}}{1-\frac{7}{12}\ z^{-1}+\frac{1}{12}\ z^{-2}} = \frac{A=-2}{1-\frac{1}{3}\ z^{-1}} + \frac{B=3}{1-\frac{1}{4}\ z^{-1}} \\ h(n) & = & \left(-2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) u(n) \end{array}$$

b) $y(n) - \frac{7}{12}\ y(n-1) + \frac{1}{12}\ y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}\ x(n-1)$

c)



d)

$$\left.\begin{array}{l} |\text{poler}| < 1 \\ h(n)\ \text{kausal} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \text{stabil}$$

S 3.49 b)

$$Y^+(z) - 1.5(z^{-1}Y^+(z) + 1) + 0.5(z^{-2}Y^+(z) + z^{-1}) = 0$$

$$Y^+(z) - 1.5z^{-1}Y^+(z) + 0.5z^{-2}Y^+(z) = 1.5 - 0.5z^{-1}$$

$$Y^+(z) = \frac{1.5 - 0.5z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{2}{1 - z^{-1}} + \frac{-1/2}{1 - 1/2\ z^{-1}}$$

$$\stackrel{Z^{-1}}{\rightarrow} y_{zi}(n) = \left(2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u(n)$$

c)

$$Y^+(z) = \frac{1}{2}\ Y^+(z)z^{-1} + \frac{1}{2}\ y(-1) + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{2}\ z^{-1}Y^+(z) + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}\ z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\ z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1} + 2}{2\left(1 - \frac{1}{2}\ z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{7/2}{1 - \frac{1}{2}\ z^{-1}} + \frac{-2}{1 - \frac{1}{3}\ z^{-1}}$$

$$\stackrel{Z^{-1}}{\rightarrow} y(n) = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

d)

$$Y^+(z) = \frac{1}{4}\ Y^+(z)z^{-2} + \frac{1}{4}\ z^{-1}y(-1) + \frac{1}{4}\ y(-2) + \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{4}\ z^{-2}Y^+(z) + \frac{1}{4} + \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{4\left(1 - \frac{1}{4}\ z^{-2}\right)} + \frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\ z^{-2}\right)}$$

$$= \frac{1 - z^{-1} + 4}{4\left(1 - \frac{1}{4}\ z^{-2}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} = \frac{-3/8}{1 - \frac{1}{2}\ z^{-1}} + \frac{7/24}{1 + \frac{1}{2}\ z^{-1}} + \frac{4/3}{1 - z^{-1}}$$

$$\stackrel{Z^{-1}}{\rightarrow} y(n) = -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{7}{24}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{4}{3}\ u(n)$$

S E3.1 A-III. B-I. C-II.

Ju längre avstånd från poler till enhetscirkeln, desto mer dämpat impuls-svar. Dubbelpol på enhetscirkeln beskriver ett instabilt system (detta är anledningen att systemets poler aldrig bör ligga på enhetscirkeln, även om systemet inte är instabilt, jfr B-I. En insignalpol på samma ställe ger obegränsad utsignal, jfr A-III.)

S E3.2 a)

$$\begin{aligned}
x(n) &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\ n\right) u(n) \rightarrow X(z) = 3\ \frac{z^{-1}}{1 + z^{-2}} \\
y(n) &= -\frac{1}{2}\ y(n-1) + \frac{1}{5}\ x(n-1)\ ;\ y(-1) = \frac{1}{3} \\
Y^+(z) &= -\frac{1}{2}\ z^{-1}\{Y^+(z) + y(-1)\cdot z\} + \frac{1}{5}\ z^{-1}X(z) \\
Y^+(z) &= \frac{-\frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{2}\ z^{-1}} + \frac{\frac{3}{5}\ z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\ z^{-1}\right)\left(1 + z^{-2}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{2}\ z^{-1}} + \frac{3}{5}\ z^{-1}\left\{\frac{2}{5}\ \frac{1+2z^{-1}}{1+z^{-2}} - \frac{2}{5}\ \frac{1}{1+\frac{1}{2}\ z^{-1}}\right\} \\
y(n) &= -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) \\
&\quad + \frac{6}{25}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ (n-1)\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\ (n-1)\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} u(n-1)
\end{aligned}
$$

b) $y(n) = 0$ dvs nollställe vid $\omega_0 = 2\pi f_0$

$$T(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = 2(1 + z^{-1} + z^{-2}) = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} = e^{\pm j2\pi\ 1/3} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{3}$$

c) Pol på enhetscirkeln vid f_1

$$N(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 1 - z^{-1} + z^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2} = e^{\pm j2\pi\ 1/6} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{6}$$

S E3.3

$$
\begin{aligned}
y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}\ y(n-2) &= x(n) \\
Y(z)\left(1 - z^{-1} + \frac{3}{16}\ z^{-2}\right) &= X(z) \\
Y(z) &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\ z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}\ z^{-1}\right)}\ X(z)
\end{aligned}
$$

Poler

$$p_{1,2} = \begin{cases} 1/4 \\ 3/4 \end{cases}$$

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\ z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}\ z^{-1}\right)}\ X(z)$$

Låt

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

där

$$
\begin{aligned}
x_1(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \\
x_2(n) &= \sin\left(2\pi\frac{1}{4}\ n\right) \forall n
\end{aligned}
$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}} \Rightarrow Y_1(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\ z^{-1}} + \frac{\frac{9}{2}}{1-\frac{3}{4}\ z^{-1}} - \frac{4}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}}$$

$$x_2(n) = \sin\left(2\pi\frac{1}{4}\ n\right) \forall n$$

$$H\left(w = 2\pi\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1 - e^{-j2\pi\frac{1}{4}} + \frac{3}{16}\ e^{-j2\frac{\pi}{4}\ 2}} = \frac{1}{\frac{13}{16}+j} = 0.776e^{-j0.888}$$

$$\Rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u(n) + 0.776\sin\left(2\pi\frac{1}{4}\ n - 0.888\right)$$

S E3.4

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

Poler: $p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

a)

$$y_{zi}(n) = -(\frac{1}{\sqrt{2}})^n [\cos(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{\pi}{4}n)]u(n).$$

b)

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= Z^{-1}[H(z)X(z)] \\ &= Z^{-1}[\frac{0.5z^{-1} - (1 - 0.5z^{-1})}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}] \\ &= (\frac{1}{\sqrt{2}})^n (\sin\frac{\pi}{4}n - \cos\frac{\pi}{4}n)u(n) + 2u(n). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y_{trans} &= (\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} \cos(\frac{\pi}{4}n + \frac{3\pi}{4}) + (\frac{1}{\sqrt{2}})^n (\sin\frac{\pi}{4}n - \cos\frac{\pi}{4}n) \\ &= -(\frac{1}{\sqrt{2}})^n 2\cos\frac{\pi}{4}n,\ n \geq 0. \end{aligned}$$

d) $y_{ss} = 2u(n)$.

S E3.5

$$y(n) - \frac{1}{4}\ y(n-1) = x(n)$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{4}\ z^{-1}\right) = X(z) \quad p = \frac{1}{4}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\ z^{-1}}\ ; \quad H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\ e^{-j\omega}}$$

$$n < 0 \quad H\left(2\pi\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\ e^{-j2\pi\frac{1}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\ j} = \frac{4}{\sqrt{17}} e^{-jarctan\frac{1}{4}} = 0.97e^{-j0.24}$$

$$y(-1) = -\frac{4}{\sqrt{17}}\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{16}{17} = 0.94$$

$$\Rightarrow \quad y(n) = 0.97\sin\left(2\pi\frac{1}{4}\ n - 0.24\right)$$

$$n \geq 0 \quad Y^{+}(n) = \frac{1}{1 - 1/4z^{-1}}\ \frac{1}{4}y(-1) = -\frac{1}{4}\frac{1}{1 - 1/4z^{-1}}$$

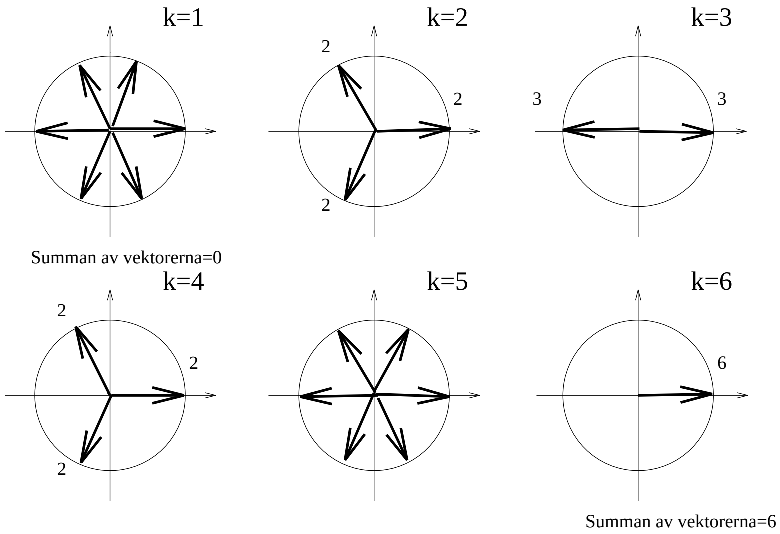
$$\Rightarrow \quad y(n) = -\frac{4}{17}\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n)$$

Fouriertransform, signaler genom LTI-system och sampling, kapitel 4, 5 och 6

S 4.8 a)

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\pi kn/N} = \begin{cases} \frac{1 - e^{j\pi\ k/N\ N}}{1 - e^{j\pi\ k/N}} = 0 & \text{för} \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\pi \ell N n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N & \text{för} \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots = \ell N,\ \ell \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

b)



c)

$$\sum_{n=N_1}^{N_1+N-1} e^{j(2\pi/N)kn} e^{-j(2\pi/N)\ell n} =$$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_1+N-1} e^{j(2\pi/N)(k-\ell)n} = \begin{cases} N & k-\ell = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N_1}^{N_1+N-1} e^{j(2\pi/N)(k-\ell)n} = \begin{cases} N & k = \ell \text{ (ty } s_k(n) = s_{k+N}(n)) \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

S 4.9 a)

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u(n) - u(n-6)) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{5} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega 6}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin(3\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\ e^{-j\ \frac{5\omega}{2}} \end{aligned}$$

b) $X(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\ e^{j\omega}}$

c) $X(\omega) = \frac{256 e^{j4\omega}}{1-\frac{1}{4}\ e^{-j\omega}}$

d)

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha^n \sin \omega_0 n) u(n) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{j\omega_0 n} - \alpha^n e^{-j\omega_0 n}}{2j}\ e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2j(1-\alpha e^{j\omega_0} e^{-j\omega})} - \frac{1}{2j(1-\alpha e^{-j\omega_0 e^{-j\omega}})} \\ &= \frac{1-\alpha e^{-j\omega_0} e^{-j\omega} - 1 + \alpha e^{j\omega_0} e^{-j\omega}}{2j(1-\alpha e^{-j\omega_0} e^{-j\omega} - \alpha e^{j\omega_0} e^{-j\omega} + \alpha^2 e^{-j2\omega})} \\ &= \frac{\alpha \sin \omega_0 e^{-j\omega}}{1 - 2\alpha \cos \omega_0 e^{-j\omega} + \alpha^2 e^{-j2\omega}} \end{aligned}$$

g)

$$X(\omega) = -2j(\sin\omega + 2\sin 2\omega)$$

S 4.10 a)

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\cos(\omega n) + jX(\omega)\sin(\omega n)d\omega \\ &= \left[j\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\sin(\omega n)d\omega = 0 \text{ ty } X(\omega) \text{ jämn \& } \sin(\omega n) \text{ udda} \right] = \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_{\omega_0}^{\pi} 1\cdot\cos(\omega n)d\omega = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega n)}{n}\right]_{\omega_0}^{\pi} = \\ &= \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi n} = \delta(n) - \frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi n} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \cos^2\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j\omega 2} + \frac{1}{4}e^{-j\omega 2} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \text{ endast term med } n = 0, -2, 2 \text{ finns} \Rightarrow \\ x(n) &= \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n+2) + \frac{1}{4}\delta(n-2) \end{aligned}$$

S 4.12 c) Multiplikation med $e^{j\omega_c n}$ i tidsplanet $\Rightarrow$ skift ω_c åt höger i frekvensplanet.
Låt $X_L(\omega)$ vara ett idealt lågpassfilter med gränsfrekvens $W/2$ och höjden 2.

$$\left.\begin{array}{l} x_L(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W/2}^{W/2} 2e^{j\omega n}d\omega = 2\,\frac{\sin(\frac{W}{2}n)}{\pi n} \\ \\ 2\cos\omega_c n = e^{j\omega_c n} + e^{-j\omega_c n} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\{x_L(n)\cdot 2\cos\omega_c n\} = X(\omega)$$

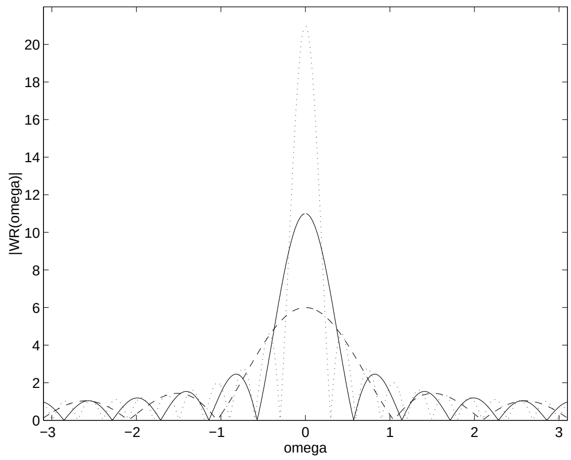
Det vill säga

$$x(n) = 4\,\frac{\sin(\frac{W}{2}n)}{\pi n}\,\cos\omega_c n$$

S 4.14
a) $X(0) = -1$
b) $\angle X(\omega) = \pi$ ($X(\omega)$ reell och negativ för alla ω)
c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)d\omega = -6\pi$
d) $X(\pi) = -9$
e) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega = 38\pi$

S 5.2 a)

$$\begin{aligned} W_R(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n)e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=0}^{M} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{-j\omega\ (M+1)/2}}{e^{-j\omega\ 1/2}}\ \frac{\left(e^{j\omega\ (M+1)/2} - e^{-j\omega\ (M+1)/2}\right)}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \\ &= e^{-j\omega\ M/2}\ \frac{\sin\omega\ \frac{(M+1)}{2}}{\sin\ \frac{\omega}{2}} \end{aligned}$$



(dotted line: M=20, full line: M=10, dashed line: M=5)

b)

$$w_T(n) = w_R(n) * w_R(n-1)$$

där

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \ldots \frac{M}{2} - 1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

$$W_T(\omega) = W_R(\omega) \cdot W_R(\omega)\ e^{-j\omega} = e^{-j\omega \frac{M}{2}}\ \frac{\sin^2 \omega\ \frac{M}{4}}{\sin^2\ \frac{\omega}{2}}$$

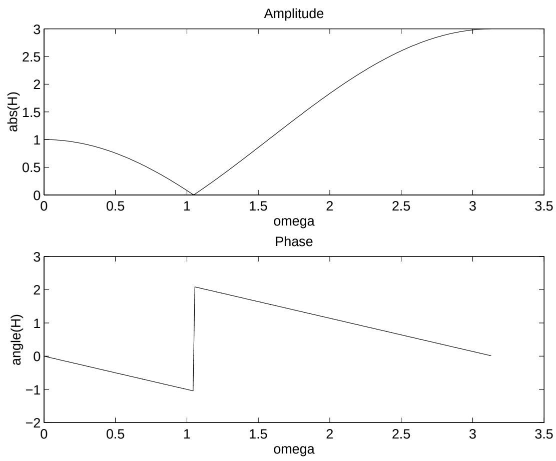
S 5.17 a) T.ex. ur FS

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) - 2\cos\omega_0 x(n-1) + x(n-2) \Rightarrow \\ h(n) &= \delta(n) - 2\cos\omega_0 \delta(n-1) + \delta(n-2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} H(\omega) &= 1 - 2\cos\omega_0 e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega} - 2\cos\omega_0 e^{j\omega} + 1\right) = \\ &= \frac{(e^{j\omega} - e^{j\omega_0})(e^{j\omega} - e^{-j\omega_0})}{e^{j2\omega}} \\ |H(\omega)| &= \left|e^{j\omega} - e^{j\omega_0}\right| \left|e^{j\omega} - e^{-j\omega_0}\right| = V_1(\omega)V_2(\omega) \end{aligned}$$

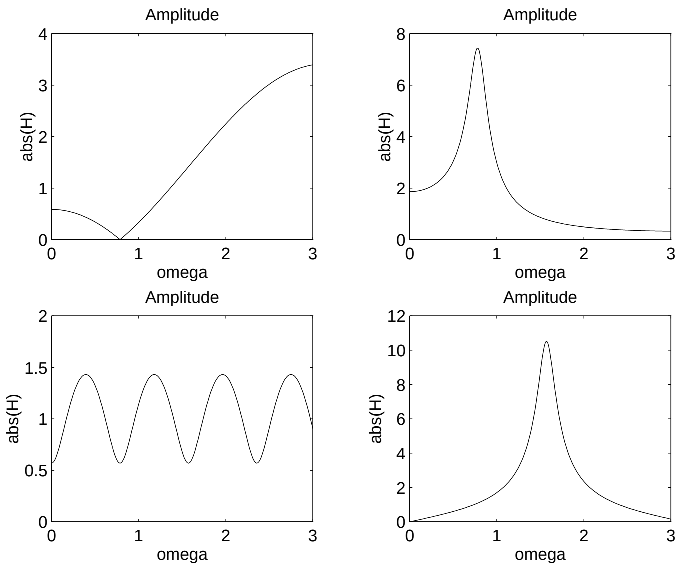
$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \arg[1 - 2\cos\omega_0 e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}] = \\ &= \arg[2e^{-j\omega}(\cos\omega - \cos\omega_0)] = \begin{cases} -\omega & \omega < \omega_0 \\ -\omega - \pi & \omega > \omega_0 \end{cases} \end{aligned}$$



c)

$$
\begin{aligned}
x(n) &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\,n+\frac{\pi}{6}\right) \quad -\infty<n<\infty \Rightarrow \\
y(n) &= 3\left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|\cos\left(\frac{\pi}{3}\,n+\frac{\pi}{6}+\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad -\infty<n<\infty \\
\omega_0 &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|1+e^{j2\ \pi/3}\right| \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\
\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \\
y(n) &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\,n-\frac{\pi}{6}\right) \quad -\infty<n<\infty
\end{aligned}
$$

S 5.25 Plotta $|X(f)|$ med hjälp av MATLAB.



S 5.26 Välj $\omega_0=\frac{\pi}{4} \Rightarrow h(n)=\{1\ \ -\sqrt{2}\ \ 1\}$
$x(n)=\left\{0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 1\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ \ldots\right\}$
T.ex. Grafisk faltning $\Rightarrow y(n)=\left\{0\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0\ 0\ 0\ \ldots\right\}$ P.g.a. att insignalen startar vid $n=0$ syns en transient i utsignalen.

S 5.35

$$
\begin{aligned}
|H(0)| &= \frac{V_1V_2}{U_1U_2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)^2}{\frac{1}{4}} = 4(\sqrt{2}+2) \Rightarrow \\
G(0) &= \frac{1}{|H(0)|}
\end{aligned}
$$

S 5.39

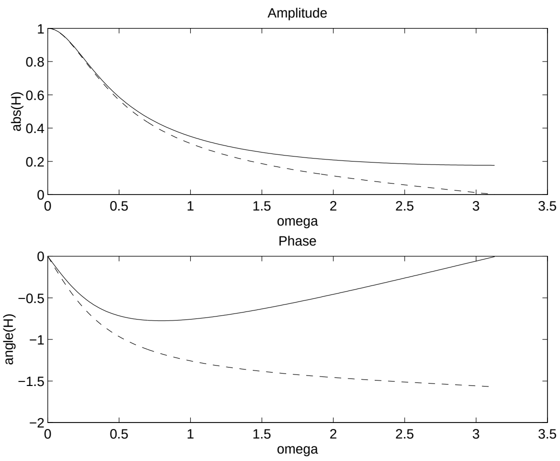
$$
\begin{aligned}
H_1(\omega) &= \frac{1-a}{1-ae^{-j\omega}} \quad |H_1(0)| = \frac{1-a}{1-a} = 1 \\
|H_1(\omega_{3dB})| &= |H(0)|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Rightarrow |H_1(\omega_{3dB})|^2 &= \frac{(1-a)^2}{|1-a\cos\omega_{3dB}+ja\sin\omega_{3dB}|^2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \omega_{3dB} = \arccos \frac{4a - a^2 - 1}{2a}$$

$$H_2(\omega) = \frac{1-a}{2} \frac{1+e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}} \quad |H_2(0)| = \frac{1-a}{2} \frac{2}{1-a} = 1$$

$$\Rightarrow |H_2(\omega)|^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \frac{|1+\cos\omega - j\sin\omega|^2}{|1-a\cos\omega + aj\sin\omega|^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = \arccos \frac{2a}{1+a^2}$$



H_2 är bäst ty nollställe i $z = -1$.

S E4.1 Välj nollställe $z = j,\ z = -j,\ z = -1$. Detta ger $H(z) = b_0(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$. DC-nivå =1 ger $b_0 = 1/4$ och $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0.25$. Och $|H(\omega)| = 1/4\,|\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}| = 1/2\,|cos(3\omega/2) + \cos(\omega/2)|$, $arg(H(\omega)) = -3\omega/2 + \pi$ $(om\ \pi/2 < \omega < \pi)$ (Och $H(\omega)$ periodisk).

S E4.2 $H(z) = 1 + z^{-D} + z^{-2D} = \frac{z^{2D}+z^D+1}{z^{2D}}$ $|H(\omega)| = |1 + e^{-j\omega D} + e^{-j\omega 2D}| = |1 + 2\cos\omega D|$. poler: $D = 1000$ i origo, nollställen: $z^{2D} + z^D + 1 = 0$, $z^D = 0.5(-1 \pm j\sqrt{3}) = e^{j\pm\frac{2\pi}{3}}\ e^{j2\pi k}$, $k = 0, 1, ...D-1$, och slutligen $z_k = e^{\pm j\frac{2\pi}{3D}}\ e^{j2\pi/D\ k}$

S E4.3 a) $y(n) = x(n) + 0.9x(n-D)$, $h(n) = \delta(n) + 0.9\delta(n-D)$
b) $H(z) = 1 + 0.9Z^{-D} = \frac{z^D+0.9}{Z^D}$, $D = 500$, poler 500 i origo, nollställen $z^{500} = -0.9 = 0.9e^{j2\pi\ k + j\pi}$, $z_k = 0.9^{1/500}e^{j2\pi k/500 + j\pi/500}$, $k = 0, 1, 2, ..., 499$ (ligger på en cirkel).

S E4.4 $|H(f)| = |\frac{\sin 4\omega}{\sin \omega/2}|$, mult med $\cos(2\pi/8\ n)$ flyttar spektrum $\pm 1/8$, $H(f)$ spärrar alla frekvenser utom $f = 0$ (rita spektra). Ger $y(t) = 4\cos(2\pi\ 1000t)$

S E4.5 a)

$$x_a(t) = e^{-10t}u(t) \Rightarrow X_a(F) = \int_0^\infty e^{-(10+j2\pi F)t}dt = \left[\frac{e^{-(10+j2\pi F)t}}{-(10+j2\pi F)}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{10+j2\pi F} \quad \Rightarrow \quad |X_a(F)|^2 = \frac{1}{10^2 + (2\pi F)^2}$$

b) Spärrad energi:

$$E_s = \int_{-\infty}^{-50} |X_a(F)|^2 dF + \int_{50}^\infty |X_a(F)|^2 dF = 2\int_{50}^\infty \frac{1}{10^2 + (2\pi F)^2} dF$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{10 \cdot 2\pi} \left[\arctan 2\pi \frac{F}{10}\right]_{50}^\infty =$$

$$= \frac{1}{10\pi}\left[\frac{\pi}{2} - 1.539\right]$$

Hela energin:

$$E_{tot} = \frac{1}{10\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{spärrad andel: } \frac{\frac{\pi}{2} - 1.539}{\frac{\pi}{2}} \approx 2\%$$

c) Utan filter:

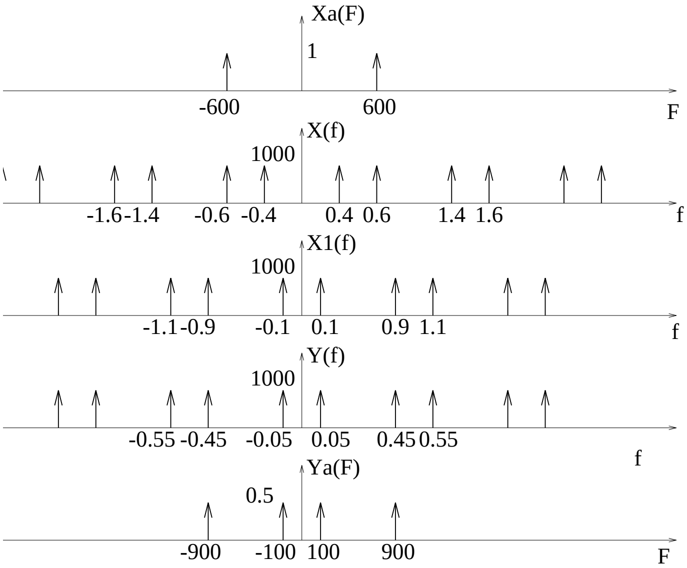
$$|Y(f)| = |\sum_{n=0}^{\infty} e^{-10n/100} e^{-j2\pi fn}| = \left| \frac{1}{1 - e^{-0.1} e^{-j2\pi f}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1.8187 - 1.8096 \cos 2\pi f}}$$

Med filter:

$$|\tilde{Y}(f)| = F_s |X_a(F)| = F_s \cdot \frac{1}{\sqrt{100 + (2\pi f F_s)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.01 + (2\pi f)^2}}.$$

	$\lvert\tilde{Y}(f)\rvert$	$\lvert Y(f)\rvert$
f=0	10	10.5
f=0.25	0.64	0.74
f=0.5	0.32	0.53

S E4.6



$y_a(t) = \cos(2\pi 100t) + \cos(2\pi 900t)$

Diskreta fouriertransformen DFT, kapitel 7

S 7.1 Om $x(n)$ reell så är $|X(\omega)|$ en jämn funktion, och $\arg(X(\omega))$ en udda funktion. $X(\omega)$ är alltid en periodisk funktion med perioden 2π. Dessa samband gäller även då $X(\omega)$ samplats till $X(k)$. Det betyder att då

$X(0) = 0.25$
$X(1) = 0.125 - j0.3018$
$X(2) = 0$
$X(3) = 0.125 - j0.0518$
$X(4) = 0$
så är
$X(5) = X^*(3) = 0.125 + j0.0518$
$X(6) = X^*(2) = 0$
$X(7) = X^*(1) = 0.125 + j0.3018.$

S 7.2 a) $y(n) = \{1.25,\ 2.55,\ 2.55,\ 1.25,\ 0.25,\ -1.06,\ -1.06,\ 0.25\}.$

S 7.3 $x(n)$ blir lågpassfiltrerad då vissa värden i $X(k)$ nollställs, ty k-värdena mellan k_c och $N-k_c$ representerar höga frekvenser från $\omega=\pi$ (högsta frekvensen) och neråt till $2\pi k_c/N$. Frekvenserna $\omega=\pi$ och upp till $2\pi(N-k_c)/N$ representerar periodiceringen.

S 7.4 a) $\frac{N}{2}\ sin\ \frac{2\pi}{N}\ n$

b) $-\frac{N}{2}\ sin\ \frac{2\pi}{N}\ \ell$

c) $\frac{N}{2}\ cos\ \frac{2\pi}{N}\ \ell$

d) $\frac{N}{2}\ cos\ \frac{2\pi}{N}\ \ell$

S 7.7
$$X_c(\ell)=\tfrac{1}{2}[X((\ell-k))_N+X((\ell+k))_N]$$
$$X_s(\ell)=\tfrac{1}{2j}[X((\ell-k))_N-X((\ell+k))_N]$$

S 7.8 Cirkulär faltning $\Leftrightarrow$ periodisera den ena signalen och falta som vanligt.

$$\begin{aligned} x_1 &= \{\ldots 1231\ 1231\ 1231\ldots\} \\ x_2 &= \{4322\} \end{aligned}$$

$y=x_1\odot x_2$

$$\begin{aligned} y(0) &= 4\cdot1+3\cdot1+2\cdot3+2\cdot2=17 \\ y(1) &= 4\cdot2+3\cdot1+2\cdot1+2\cdot3=19 \\ y(2) &= 4\cdot3+3\cdot2+2\cdot1+2\cdot1=22 \\ y(3) &= 4\cdot1+3\cdot3+2\cdot2+2\cdot1=19 \end{aligned}$$

S 7.9

$$\begin{aligned} x_3(n) &= x_1(n)\odot x_2(n) \\ x_1(n) &= \{1,2,3,1\} \\ x_2(n) &= \{4,3,2,2\} \\ X(k) &= DFT(x_n)=\sum_{n=0}^{3}x_ne^{-j2\pi nk/4}\quad k=0\ldots3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} X_1(0)=7 & X_2(0)=11 \\ X_1(1)=-2-j & X_2(1)=2-j \\ X_1(2)=1 & X_2(2)=1 \\ X_1(3)=X_1^*(1)=-2+j & X_2(3)=X_2^*(1)=2+j \end{array}$$

$$X_3(k)=X_1(k)X_2(k)\Rightarrow \begin{array}{l} X_3(0)=77 \\ X_3(1)=-5 \\ X_3(2)=1 \\ X_3(3)=-5 \end{array}$$

$$x(n)=IDFT(X(k))=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)e^{j2\pi nk/4}\quad n=0\ldots3$$

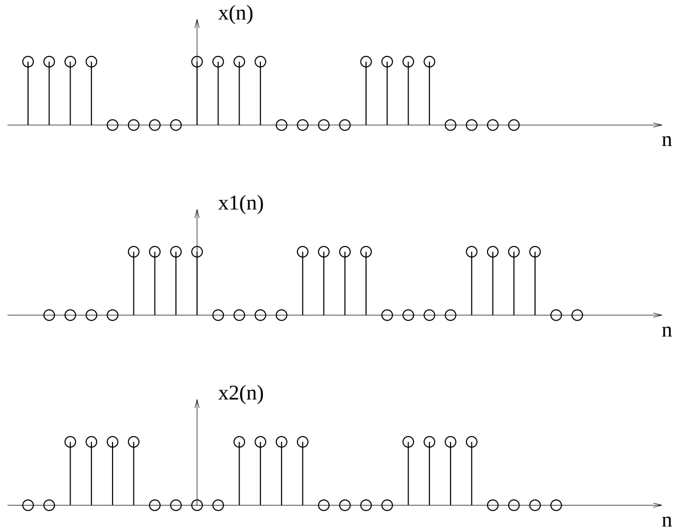
$$\begin{array}{l} x_3(0)=17 \\ x_3(1)=19 \\ x_3(2)=22 \\ x_3(3)=19 \end{array}$$

S 7.10

$$\begin{aligned} x(n) &= \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\qquad 0\le n\le N-1 \\ E_x &= \sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2\left(\frac{2\pi k}{N}\ n\right)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1+\cos\left(\frac{4\pi k}{N}\ n\right)}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& k = 0,\ k = \frac{N}{2} \\
E_x &= N \\
& k \neq 0,\ \frac{N}{2} \\
E_x &= \frac{N}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\underbrace{\frac{1 - e^{j\ 4\pi k/N \cdot N}}{1 - e^{j\ 4\pi k/N}}}_{=0} + \underbrace{\frac{1 - e^{-j\ 4\pi k/N \cdot N}}{1 - e^{-j\ 4\pi k/N}}}_{=0} \right) = \frac{N}{2}
\end{aligned}
$$

S 7.11 $X(k) \quad k = 0 \ldots 7$ given.
DFT periodiserar $x(n)$



$$
\left.\begin{aligned} x_1(n) = x((n-5))_8 \\ x_2(n) = x((n-2))_8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
X_1(k) &= X(k) e^{-j2\pi\ \frac{k}{8}\ 5} \\
X_2(k) &= X(k) e^{-j2\pi\ \frac{k}{8}\ 2}
\end{aligned}
$$

S 7.18 $Y(k) = H(f)|_{f=\frac{k}{N}}$

S 7.23 a) $X(k) = 1$

b) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-n_0) e^{-j2\pi kn/N} = e^{-j2\pi k n_0/N}, \quad k = 0, \ldots, N-1$

c) $X(k) = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j2\pi k/N}}$

d)

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0 & \frac{N}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad N \text{ jämnt} \\
X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} e^{-j2\pi kn/N} = \{k \neq 0\} \\
&= \frac{1 - e^{-j2\pi k\ N/2 \cdot N}}{1 - e^{-j2\pi k/N}} = \frac{1 - e^{-j2\pi k/2}}{1 - e^{-j2\pi k/N}} = \\
&= \frac{1 - (-1)^k}{1 - e^{-j2\pi k/N}} \quad k = 1, \ldots, N-1 \\
X(0) &= \frac{N}{2}
\end{aligned}
$$

e) $x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$ (obs fel i boken) $\Rightarrow$ $X(k) = N \cdot \delta(k - k_0)$

f) $X(k) = \frac{N}{2}\left(\delta(k-k_0) + \delta(k-(N-k_0))\right)$

g) $X(k) = \frac{N}{2j}\left(\delta(k-k_0) - \delta(k-(N-k_0))\right)$

h) Förutsätt att N är jämnt

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ jämnt} \\ 0 & n \text{ udda} \end{cases}$$

$$X(k) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(1+(-1)^n)e^{-j2\pi kn/N} = \frac{N}{2}\left(\delta(k) + \delta\left(k - \frac{N}{2}\right)\right)$$

S 7.24 $X(k) = 1 + 2e^{-j\ \pi k/2} + 3e^{-j\pi k} + e^{-j\ 3\pi k/2} = \{7, -2-j, 1, -2+j\}$

S 7.25 a) $x(n) = \{1\ 2\ \mathbf{3}\ 2\ 1\ 0\}$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = \\ &= 3 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega \end{aligned}$$

b) $v(n) = \{3\ 2\ 1\ 0\ 1\ 2\}$

$$\begin{aligned} V_{DFT}(k) &= \sum_{n=0}^{5} v(n)e^{-j2\pi\frac{k}{6}\ n}, \\ &= 3 + 2e^{-j\frac{\pi}{3}\ k} + e^{-j\frac{2\pi}{3}\ k} + e^{-j\frac{4\pi}{3}\ k} + 2e^{-j\frac{5\pi}{3}\ k} \end{aligned}$$

c) $V_{DFT}(k) = 3 + 4\cos\frac{\pi}{3}\ k + 2\cos\frac{2\pi}{3}\ k \quad k = 0\ldots5$ Det vill säga $V_{DFT}(k) = X(\omega_k)$, $\omega_k = 2\pi\frac{k}{6}$, $k = 0\ldots5$

S E5.1 Låt $x_1(n) = \{1,1,1,1,0,0,0,0\}$. $x(n)$ är cirkulärt skift av $x_1(n)$, skift påverkar endast fasen. Således $|X(k)| = |X_1(k)| = |\frac{\sin 2\pi\frac{k}{4}}{\sin 2\pi\frac{k}{16}}|$

S E5.2 a) $y(n) = x(-n) = \{0,2,2,7,8,3,1,1,\}$.
b) $y(n) = x(n-4, modulo\ 8) = \{8,7,2,2,0,1,1,3\}$.

S E5.3

$$\begin{aligned} H_{FIR}(f) &= H_{IIR}(f) \text{ för } f = k\cdot\frac{1}{N} \text{ ty insignalen periodisk} \\ h_{FIR}(n) &= IDFT\left(H_{FIR}\left(\frac{k}{N}\right)\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_{FIR}\left(\frac{k}{N}\right)\ e^{j2\pi\ kn/N} \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} H_{FIR}\left(\frac{k}{N}\right) &= H_{IIR}\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} h_{IIR}(m)e^{-j2\pi\ km/N} \\ h_{FIR}(n) &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{\infty} h_{IIR}(m)\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\ k/N\ (n-m)} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_{IIR}(n-\ell N) \end{aligned}$$

Jämför vikning

$$h_{FIR}(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{0} a^{n-\ell N} = a^n\frac{1}{1-a^N}\ u(n)$$

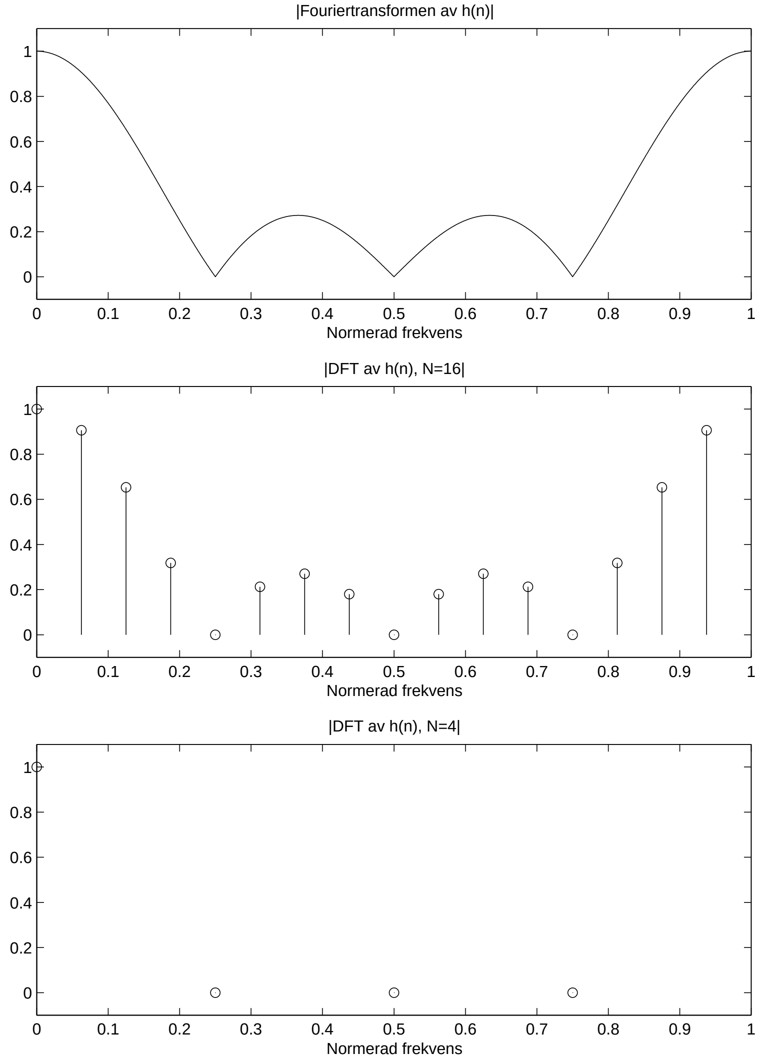
S E5.4 $f_0 = \pm 138 + n\cdot 400 = \{138, 262, \ldots\}$.

S E5.5 1C, 2F, 3G, 4H.

S E5.6 a) $H(f) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi f} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 2f} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 3f}$

$H(k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi k/N} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 2k/N} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 3k/N} + 0 + 0 + \ldots + 0$ för $k = 0 \ldots N-1$. $H(k)$ är sampel av $H(f)$ i punkterna $f = \frac{k}{N}$, $k = 0 \ldots N-1$.

b) $H(0) = 1$, $H(1) = 0$, $H(2) = 0$, $H(3) = 0$. $h_p(n) = \frac{1}{4}$ för alla värden på n.



S E5.7 $Y(k/N) = X(k/N)$

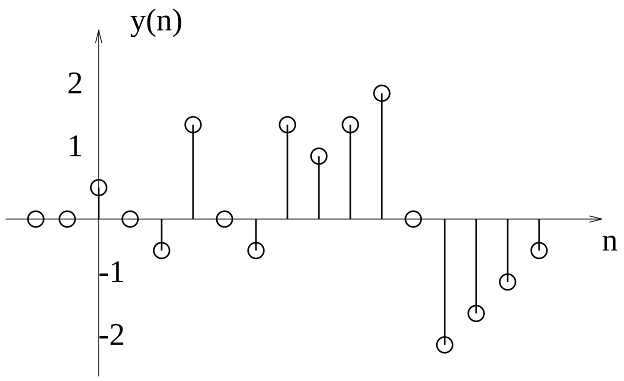
S E5.8 a) $y(n) = \delta(n) + 2\,\delta(n-1) + 1.5\,\delta(n-2) + 0.5\,\delta(n-3)$

b) Se ovan.

c) M=4; allmänt är $M = P + Q - 1$ där P är impulssvarslängden och Q är insignallängden.

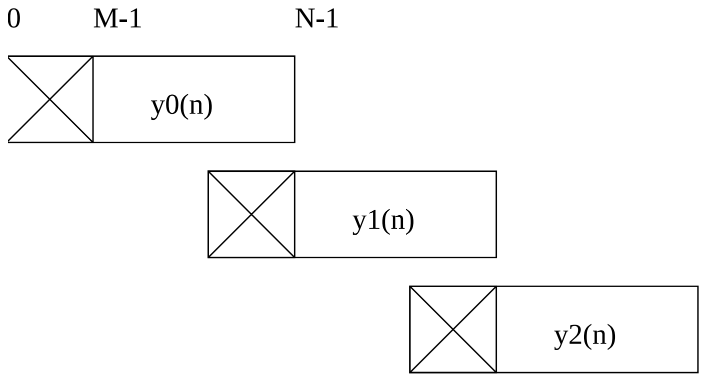
S E5.9 $y_p(n) = \sum_{l=0}^{L} b_l \quad n = 0 \ldots N-1$.

S E5.10 Metoden kallas overlap-add om beräkningen av utsignalen görs med DFT.



S E5.11 $y(n) = \begin{cases} \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{10}}(\frac{1}{2})^n & 0 \le n \le 9 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$

S E5.12 Figuren illustrerar hur uppdelningen görs.



Realiseringar, kapitel 9

S 9.3 Välj tillståndsvariabeln $v(n)$ efter fördröjningselementet, vilket ger

$$\begin{aligned} v(n+1) &= \frac{1}{2}\, v(n) + x(n) \\ y(n) &= 2[v(n+1) + 3x(n)] + 2v(n) = \\ &= v(n) + 2x(n) + 6x(n) + 2v(n) = \\ &= 3v(n) + 8x(n) \end{aligned}$$

och tillståndsmatriserna $F = \frac{1}{2} \quad q = 1 \quad g^T = 3 \quad d = 8$. Impulssvaret blir

$$\begin{aligned} h(n) &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + 8\delta(n) \xrightarrow{Z} \\ H(z) &= \frac{3z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}\, z^{-1}} + 8 = \frac{8 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}\, z^{-1}} \end{aligned}$$

S 9.9 a) $y(n) = \frac{3}{4}\, y(n-1) - \frac{1}{8}\, y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3}\, x(n-1)$
Direkt I: ur differensekvationen
Direkt II: ur F.S. + diff.ekv.

Kaskad: z-trans av diff.ekv. $H(z) = \frac{1+\frac{1}{3}\, z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}\, z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\, z^{-1}\right)}$

Parallell: $H(z) = \frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{1}{2}\, z^{-1}} - \frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{4}\, z^{-1}}$

f) $y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}\, y(n-2) + x(n) - x(n-1) + x(n-2)$ Systemet innehåller komplexa poler $\Rightarrow$ D.F.II, kaskad och parallell är ekvivalenta.

S 9.15

$$OBS! \qquad Fel\ i\ Proakisupplaga 3: \quad a_2(2) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= A_2(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{3}\, z^{-2} \\ B_2(z) &= \frac{1}{3} + 2z^{-1} + z^{-2} \qquad ger\ \ K_2 = \alpha_2(2) = \frac{1}{3} \\ A_1(z) &= \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = \frac{1 + 2z^{-1} + \frac{1}{3}\, z^{-2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + 2z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{4/3}{8/9}\, z^{-1} = 1 + \frac{3}{2}\, z^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1(z) &= \frac{3}{2} + z^{-1} \quad ger \;\; K_1 = \alpha_1(1) = \frac{3}{2} \\
A_0(z) &= \frac{1+\frac{3}{2}\,z^{-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+z^{-1}\right)}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5/4}{5/4} = 1 \\
K_2 &= \frac{1}{3},\; K_1 = \frac{3}{2}\;(K_0 = 1)
\end{aligned}$$

S 9.19 a)

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{2}\;,\; K_2 = -\frac{1}{3}\;,\; K_3 = 1 \\
A_0(z) &= B_0(z) = 1 \\
A_1(z) &= A_0(z) + K_1(z)\cdot z^{-1}\cdot B_0(z) = 1 + \frac{1}{2}\,z^{-1}\cdot 1 = 1 + \frac{1}{2}\,z^{-1} \\
B_1(z) &= \frac{1}{2} + z^{-1}
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned}
A_2(z) &= A_1(z) + K_2(z)\cdot z^{-1}\cdot B_1(z) = \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}\,z^{-1} - \tfrac{1}{3}\,z^{-1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+z^{-1}\right) = 1 + \tfrac{1}{3}\,z^{-1} - \tfrac{1}{3}\,z^{-2} \\
B_2(z) &= -\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\,z^{-1} + z^{-2}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
A_3(z) &= 1 + \tfrac{1}{3}\,z^{-1} - \tfrac{1}{3}\cdot z^{-2} + 1\cdot z^{-1}\cdot\left(-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\,z^{-1}+z^{-2}\right) = 1 + z^{-3} \\
B_3(z) &= 1 + z^{-3}
\end{aligned}\right.$$

Nollställen

$$\begin{aligned}
1 + z^{-3} &= 0 \\
z^{-3} &= e^{-j\pi(2k+1)} \\
z &= e^{j\pi(2k+1)/3} \quad k = 0,1,2 \quad \left(z = e^{\pm j\cdot\pi/3},\; z = -1\right)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
A_3(z) &= 1 + \frac{1}{3}\,z^{-1} - \frac{1}{3}\,z^{-2} + (-1)\cdot z^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,z^{-1}+z^{-2}\right) = \\
&= 1 + \frac{2}{3}\,z^{-1} - \frac{2}{3}\,z^{-2} - z^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3(z) &= -1 - \frac{2}{3}\,z^{-1} + \frac{2}{3}\,z^{-2} + 1 \\
A_3(z) &= (1 - z^{-1})\left(1 + \frac{5}{3}\,z^{-1} + z^{-2}\right) \\
&\quad -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - 1} = \frac{-5 \pm j\cdot\sqrt{11}}{6} \text{ (Belopp ett)}
\end{aligned}$$

c) Om sista reflektionskoefficientens belopp är lika med ett ligger alla nollställen på enhetscirkeln.

d) a)

$$\begin{aligned}
H(z) &= 1 + z^{-3} \\
H(\omega) &= 1 + e^{-j\cdot 3\omega} = e^{-j\cdot 3\omega/2}\left(e^{j\cdot 3\omega/2} + e^{-j\cdot 3\omega/2}\right) = \\
&= 2\cdot cos\left(\frac{3\omega}{2}\right)\cdot e^{-j\;3\omega/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \le \omega < \frac{\pi}{3} &\;:\; \theta(\omega) = -\frac{3\omega}{2} \\
\frac{\pi}{3} < \omega \le \pi &\;:\; \theta(\omega) = \pi - \frac{3\omega}{2} \text{ Linjär fas (symmetriskt FIR)}
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
H(z) &= 1+\frac{2}{3}\,z^{-1}-\frac{2}{3}\,z^{-2}-z^{-3} \\
H(\omega) &= 1+\frac{2}{3}\cdot e^{-j\omega}-\frac{2}{3}\cdot e^{-j2\omega}-e^{-j3\omega}= \\
&= e^{-j\left(\frac{3\omega}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\,2\left(sin\left(\frac{3}{2}\,\omega\right)+\frac{2}{3}\,sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Alla nollställen på enhetscirkeln $\Rightarrow$ Linjär fas.

Exempel på design av filter

S E8.1 a) $p_{1,2,3}=0,\ n_{1,2}=\pm j,\ n_3=-1$
b) $|H(\omega)|=2|\cos(3\omega/2)+\cos(\omega/2)|$
c) $arg(H(\omega))=-3\omega/2+(fashopp\ med\ \pi)$
d) $\omega=\pm\pi/2,\ \omega=\pi$
e) Lågpassfilter

S E8.2 a) $p_{1,2,3}=0,\ n_{1,2}=\pm j,\ n_3=1$
b) $|H(\omega)|=2|\sin(3\omega/2)-\sin(\omega/2)|$
c) $arg(H(\omega))=\pi/2-3\omega/2+(fashopp\ med\ \pi)$
d) $\omega=\pm\pi/2,\ \omega=0$
e) Högpassfilter

S E8.3

a) $h(n)=1/5\ \{1,1,1,1,1\}=1/5(\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\delta(n-4))$

b) $H(z)=1/5\ \sum_{n=0}^{4}z^{-n}=0.2\ \frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$

c) $H(f)$ periodisk sinc, $|H(f)|=0$ för $f=0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8$

S E8.4 Prova med 1:a ordn, $H(z)=b_0+b_1z^{-1}$. $H(\omega)|_{\omega=\pi/2}=e^{j\pi/3}$ ger $b_0=1/2,\ b_1=-\sqrt{3}/2$

S E8.5 $H(2/5)=H(-2/5)=0\ \rightarrow$ nollställen i $z_{1,2}=e^{\pm j4\pi/5}$. $|H(1/5)|=|H(-1/5)|=1\ \rightarrow$ troligen två nollställen till. linjär fas $\rightarrow$ symmetriskt eller antisymmetriskt impulssvar. En test ger att 2 eller 3 nollställen inte räcker.

$$h(n)=-0.1232\delta(n)+0.3232\delta(n-1)+0.6\delta(n-2)+0.3232\delta(n-3)-0.-0.1232\delta(n-4)$$

$$(h(n)=0.5236\delta(n)+0.0764\delta(n-1)-0.2\delta(n-2)+0.0764\delta(n-3)+0.5236\delta(n-4))$$

S E8.6

$$
\begin{aligned}
H(z) &= k\cdot\frac{(z+1)^N}{z^N} \\
H(\omega) &= k\cdot\frac{(e^{j\omega}+1)^N}{e^{j\omega N}}=k\cdot e^{-j\omega\ N/2}\left(e^{j\ \omega/2}+e^{-j\ \omega/2}\right)^N \\
&= k\cdot e^{-j\omega\ N/2}\cdot 2^N\left(\cos\ \frac{\omega}{2}\right)^N
\end{aligned}
$$

$$H(0)=1\Rightarrow k=2^{-N}$$

dvs

$$|H(\omega)|=\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^N$$

Vid $\omega=2\pi\cdot 0.1$ ska

$$H(\omega)|_{\omega\,=\,2\pi\,\cdot\,0.1}=\left(\cos\ \frac{2\pi\cdot 0.1}{2}\right)^N>\frac{1}{\sqrt{2}}\ (-3\text{dB})$$

$$\Rightarrow N < 6.9$$

Vid $\omega = 2\pi \cdot 0.4$

$$\left(\cos \frac{2\pi \cdot 0.4}{2}\right)^N < 0.1 \Rightarrow N > 1.96$$

dvs $2 \leq N < 6$.
Minimalt: $N = 2$

$$\Rightarrow H(z) = 2^{-2}\left(\frac{z+1}{z}\right)^2 = \frac{1}{4}\,(1 + 2z^{-1} + z^{-2})$$

$$\Rightarrow h(n) = \left\{\underline{\frac{1}{4}}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\right\}$$

S E8.7 FIR-filter, 50dB $\Rightarrow$ Hammingfönster
-6dB vid $f = f_1 = 0.1$
vilket ger att vid -50dB, $f = 0.15$ erhålles $(0.15 - 0.1) \cdot M = 1.62$

$$\Rightarrow M = \frac{1.62}{0.05} = 32.4 \text{ dvs } M = 33$$

$$h(n) = \begin{cases} 2 \cdot f_1 \mathrm{sinc}(2f_1(n-16)) \cdot \\ \quad \cdot \left[0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(n-16)}{32}\right] & 0 \leq n \leq 32 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

S E8.8

$$\left.\begin{array}{lll} H_{dB}(0.2) = -3\text{dB} & \text{ger} & (0.2 - f_c) \cdot M = -0.40 \\ H_{dB}(0.25) = -40\text{dB} & \text{ger} & (0.25 - f_c) \cdot M = 1.49 \end{array}\right\} *$$

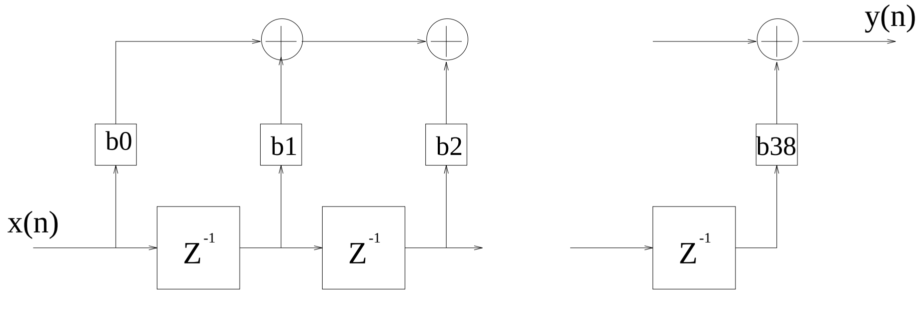
$$\begin{aligned} M &= \frac{1.49 + 0.40}{0.25 - 0.20} = 37.8 \\ M &= 39 \text{ (udda)} \end{aligned}$$

$$* \text{ ger} \begin{cases} f_c = 0.2 + \frac{0.40}{39} = 0.2103 \\ f_c = 0.25 - \frac{1.49}{39} = 0.2118 \end{cases}$$

Välj $f_c = 0.2103 \quad (0.2103 \leq f_c \leq 0.2118$ duger$)$

$$\begin{aligned} b_n &= (h(n) = \hat{h}(n-19) = h_d(n-19)w_H(n-19) =) \\ &= \frac{\sin\{2\pi \cdot 0.2103(n-19)\}}{\pi(n-19)}\left(0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(n-19)}{38}\right) \end{aligned}$$

för $n = 0\ \ldots\ 38$.



S E8.9 Ur diagram för Hammingfönster:

$$\begin{aligned} -0.4 &= -(0.16 - f_c)M \\ 1.49 &= -(0.10 - f_c)M \end{aligned} \Rightarrow M = 33\ ;\ f_c = 0.1479$$

$$w_H(n) = 0.54 + 0.46\ \cos\ \frac{2\pi n}{32}\ ;\ h_d(n) = \delta(n) - 2f_c\text{sinc}(2f_c n)$$

$$\hat{h}(n) = h_d(n-16)\ w_H(n-16)\ \ 0 \le n \le 32$$

S E8.10 Utgå från ett idealt BP-filter:

$$h_d(n) = 4f_c\text{sinc}(2f_c n) \cdot \cos 2\pi f_0 n, \quad \forall n,$$

Trunkera $h_d(n)$ m.h.a. $w_H(n)$.
(Hammingfönster tillräckligt ty max 40dB dämpning.)

$$w_H(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1} & , \quad -\frac{M-1}{2} \le n \le \frac{M-1}{2} \\ 0 & , \quad \text{f.ö.} \end{cases}$$

dvs bilda

$$\hat{h}(n) = h_d(n) \cdot w_H(n)$$

Förskjut sedan $\hat{h}(n)$ tills det blir kausalt, dvs

$$h(n) = \hat{h}\left(n - \frac{M-1}{2}\right)$$

Det som behövs bestämmas är alltså M, f_0 och f_1. Vi tittar först på den vänstra övergångszonen: Formelsamlingen ger

$$\begin{cases} -(0.05 - (f_0 - f_1))M = 1.49 \ldots (1) & (-40\text{dB}) \\ -(0.10 - (f_0 - f_1))M = -0.4 \ldots (2) & (-3\text{dB}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.05 \cdot M = 1.89 \Rightarrow M = 37.8$$

Sedan tittar vi på den högra övergångszonen:

$$\begin{cases} (0.25 - (f_0 + f_1))M = -0.4 \ldots (3) & (-3\text{dB}) \\ (0.275 - (f_0 + f_1))M = 0.91 \ldots (4) & (-20\text{dB}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.025 \cdot M = 1.31 \Rightarrow M = 52.4$$

För att uppfylla kraven vid **båda** övergångszonerna **krävs**

$$M > \max(37.8,\ 52.4)$$

$$\Rightarrow \text{Välj } M = 53$$

Vi hade dessutom kravet att vid frekvenserna 0.10 och 0.25 **skall** dämpningen vara 3dB, vilket innebär att när vi löser ut f_0 och f_1 så **måste** vi använda ekv. (2) och (3). Det M-värde som sättes in är nu $M = 53$, i **både** ekv. (2) och (3).

$$\begin{aligned} (2) \quad &\Rightarrow \quad (0.10 - (f_0 - f_1)) \cdot 53 = 0.4 \\ (3) \quad &\Rightarrow \quad (0.25 - (f_0 + f_1)) \cdot 53 = -0.4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_0 = 0.175 \\ f_1 = 0.0825 \end{cases}$$

Alltså:

$$h_d(n) = 0.3302 \cdot \text{sinc}(0.1652n) \cdot \cos(2\pi \cdot 0.175n)$$

$$w_H(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\ \frac{2\pi n}{52} & , \quad -26 \le n \le 26 \\ 0 & , \quad \text{f.ö.} \end{cases}$$

och

$$h(n) = h_d(n-26)\cdot w_H(n-26) =$$

$$= \begin{cases} [0.3302\cdot \mathrm{sinc}(0.1652(n-26))\cdot \cos(2\pi\cdot 0.175(n-26))]\times & \\ \left[0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(n-26)}{52}\right] & , \quad 0 \le n \le 52 \\ 0 & , \quad \text{f.ö.} \end{cases}$$

S E8.11 Centerfrekvensen är $f_0 = 0.2096$, $f_c = 0.1233$ och $M = 41$ (ges ur uttrycket). Detta insättes i

$$(f_1 - (f_0 + f_c))M = -0.4(-3\text{dB}) \rightarrow f_1 = 0.3231$$

för högra sidan (lågpass) och i

$$-(f_2 - (f_0 - f_c))M = -0.4(-3\text{dB}) \rightarrow f_2 = 0.0960$$

för vänstra sidan (högpass). Bandbredden, $\Delta f = f_1 - f_2 = 0.2270$.

S E8.12 $H(z)$ skall ha linjär fas. Sätt $H_2(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2}$ ty första ordningen räcker ej. Genom att beräkna $H(f)$ ser vi att linjär fas fås om

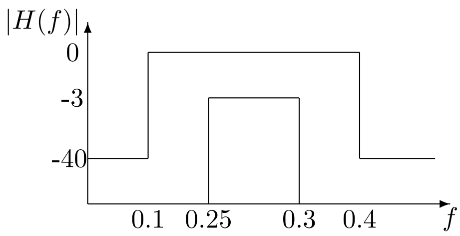
$$\begin{aligned} a &= cr^2 \\ b - 2ar\cos(\theta) &= br^2 - 2cr\cos(\theta) \end{aligned}$$

Tillsammans med kravet på likspänningsförstärkningen ger detta

$$H_2(z) = r^2 - 2r\cos(\theta)z^{-1} + z^{-2}$$

$H(z)$ är av ordning 4 och har symmetriskt impulssvar. Detta ger $\arg(H(f)) = -4\pi f$.

S E8.13 Sampling med 10 MHz ger vikning. Övertonerna viks till frekvensområdet 4-5 MHz och störningarna viks till 0-1 MHz. Detta ger ett bandpassfilter med följande krav.



Ett Hammingfönster ger $L = 19$, $f_0 = 0.275$ och $f_1 = 0.0461$. Impulssvaret blir

$$h(n) = (0.54 + 0.46\cos(\frac{2\pi(n-9)}{18})\cdot 4f_1 \mathrm{sinc}(2f_1(n-9))\cos(2\pi f_0(n-9))$$

$$0 \le n \le 18$$