Föreläsning 11

Signalbehandling i multimedia - ETI265

Kapitel 7

Diskreta Fourier Transformen

DFT

fortsättning

LTH
2015

Nedelko Grbic
(mtrl. från Bengt Mandersson)

Institutionen för elektro- och informationsteknik
Lund University

Definition av DFT (från föreläsning 10)

$$X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$x_{DFT}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Både $X[k],\ x[n]$ **periodiska,** **(index beräknas modulo** N)

Effekter:

Cirkulärt shift vid DFT

$$x[n-n_0, \text{ modulo } N] = \qquad e^{-j2\pi \frac{k}{N} n_0} X[k]$$

Cirkulär faltning vid DFT

$$x[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$$
$$= \sum_{l=0}^{N-1} x_1[l]\, x_2[n-l, \text{modulo } N]$$

$$X(k) = X_1(k)\, X_2(k)$$

Exempel på DFT

Vanlig Fouriertransform

a) $x[n] = a^n \quad u(n)$ $\qquad X(f) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}}$

b) $x[n] = a^n \qquad 0 \le n \le N-1$

$$X(f) = \frac{1 - a^N e^{-j2\pi f N}}{1 - ae^{-j2\pi f}}$$

DFT

$$x[n] = a^n \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{1 - a^N \; e^{-j2\pi \frac{k}{N} N}}{1 - a\, e^{-j2\pi \frac{k}{N}}} =$$

$$= \frac{1 - a^N}{1 - a\, e^{-j2\pi \frac{k}{N}}}$$

Digital signalbehandling, Institutionen för elektro- och informationsteknik

Egenskaper hos DFT från läroboken, fortsättning

TABLE 7.2 Properties of the DFT

Property	Time Domain	Frequency Domain
Notation	$x(n), y(n)$	$X(k), Y(k)$
Periodicity	$x(n) = x(n+N)$	$X(k) = X(k+N)$
Linearity	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Time reversal	$x(N-n)$	$X(N-k)$
Circular time shift	$x((n-l))_N$	$X(k)e^{-j2\pi kl/N}$
Circular frequency shift	$x(n)e^{j2\pi ln/N}$	$X((k-l))_N$
Complex conjugate	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
Circular convolution	$x_1(n) \circledR{N} x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
Circular correlation	$x(n) \, Ⓝ \, y^*(-n)$	$X(k)Y^*(k)$
Multiplication of two sequences	$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N}X_1(k) \, Ⓝ \, X_2(k)$
Parseval's theorem	$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$

Digital signalbehandling, Institutionen för elektro- och informationsteknik

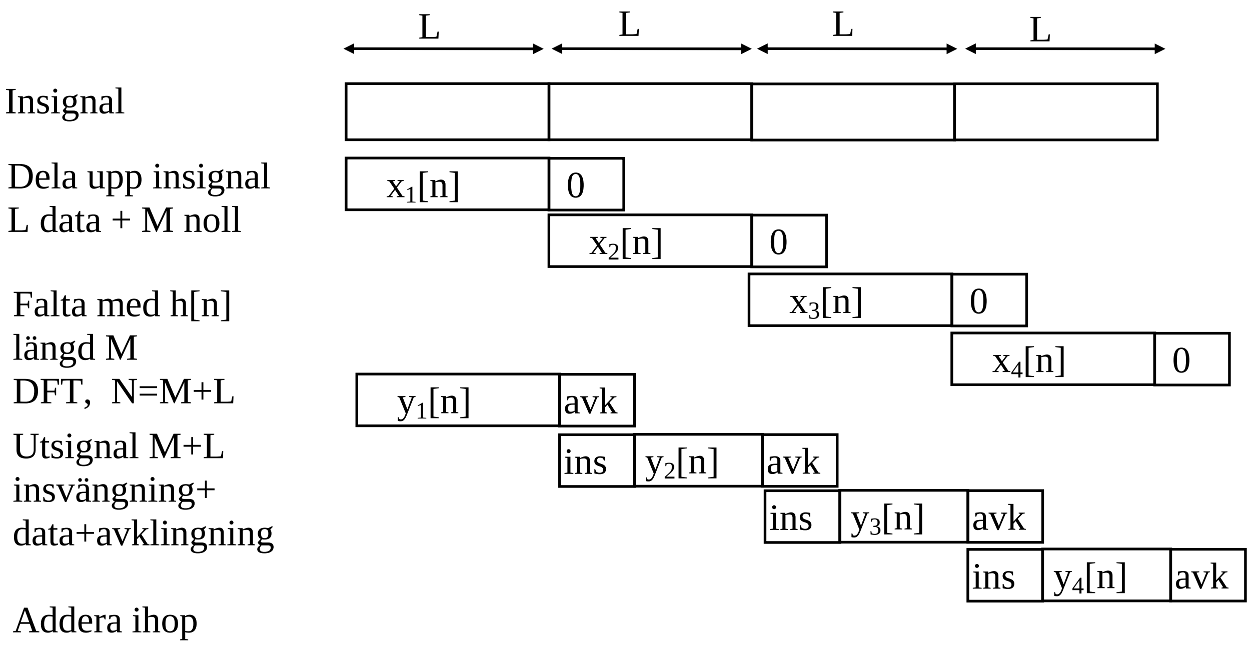
Quiz

Vad händer vid följande Matlab-kod

```
x='insamplat ljud';
soundsc(x,Fs);
y1=real(ifft(fft(x)));          soundsc(y1,Fs);
y2=real(ifft(conj(fft(x))));    soundsc(y2,Fs);
```

Filtrering i realtid med hjälp av DFT, Overlap-Add, (sid 487,488)

Om vi har långa sekvenser eller filtrering i realtid kan vi inte ta DFT på hela insignalen. Men vi kan dela upp insignalen i block av längd L och falta med ett impulssvar av längd M med hjälp av N=M+L punkts DFT.



Exempel på overlap-add med N=8, M=4, L=4

$$h[n] = \{\ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \}$$

$$x[n] = \{\ \underbrace{1\ \ 0\ \ 1\ \ 1}_{x1}\ \ \underbrace{1\ \ 0\ \ 1\ \ 0}_{x2}\ \ \underbrace{0\ \ 1\ \ 0\ \ 1}_{x3}\ \}$$

$$Sök \quad x[n]*\mathrm{h}[n] = x1[n]*\mathrm{h}[n] + x2[n]*\mathrm{h}[n] + x3[n]*\mathrm{h}[n]$$

$$\begin{array}{lccccccccccccccc}
x1[n]*h[n] & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
x2[n]*h[n] & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
x3[n]*h[n] & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
x[n]*\mathrm{h}[n] & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

En annan variant på detta kallas overlap save, se boken (sid 487)

DFT av sinussignal (jämnt antal perioder)

Givet: $x[n] = \cos(2\pi \frac{k_0}{N} n); \quad \frac{k_0}{N} = \textit{frekvensen}, \quad n = 0,1,\ldots N-1$

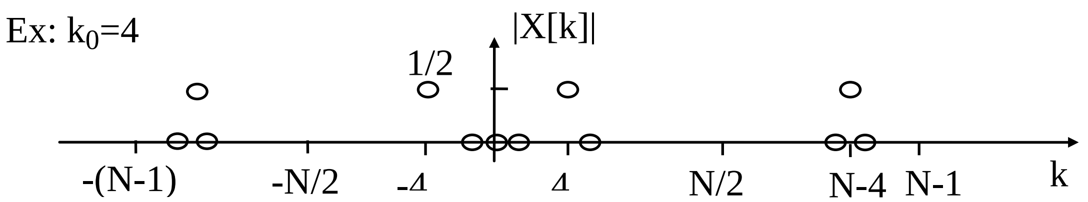
Sök: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \; e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$

Lösning:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \; e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi \frac{k_0}{N} n} + e^{-j2\pi \frac{k_0}{N} n}\right) \; e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} e^{-j2\pi \frac{k-k_0}{N} n} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} e^{-j2\pi \frac{k+k_0}{N} n} =$$

$$= \frac{N}{2}\left[\delta[k-k_0, \text{mod}\,ulo] + \delta[k+k_0, \text{mod}\,ulo]\right]$$



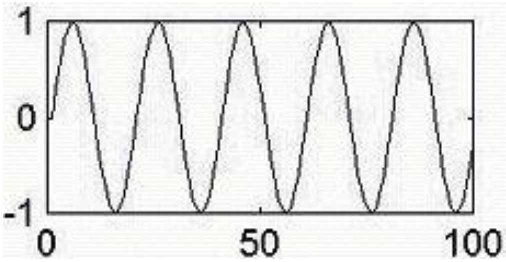
För $x[n] = \sin(2\pi \frac{k_0}{N} n), \quad 0 < k_0 < N/2;$ **fås**

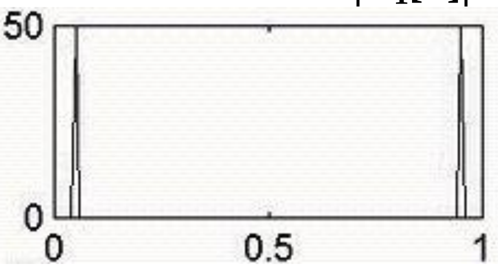
$$X[k] = \frac{N}{2j}[\delta[\underbrace{k-k_0, \text{modulo N}}_{k-k_0}] - \delta[\underbrace{k+k_0, \text{modulo N}}_{N-k_0}]]$$

Exempel på effekt av att *x(n)* periodisk vid DFT

DFT av sinus med jämt antal perioder (MATLAB)

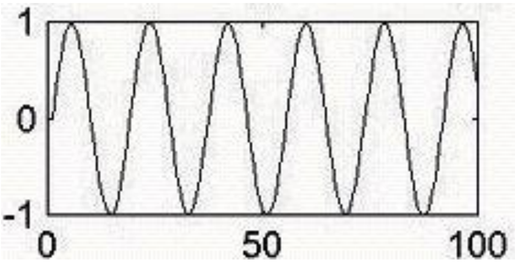
$x_1[n]$, $|X_1[k]|$

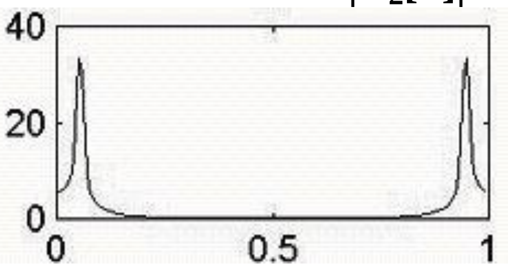




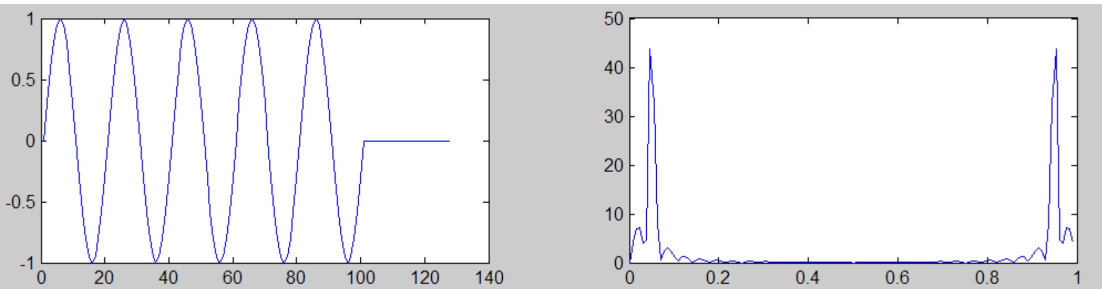
DFT av sinus med icke-jämt antal perioder (MATLAB)

$x_2[n]$, $|X_2[k]|$





DFT av sinus med zero-padding (MATLAB)



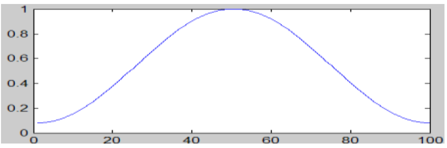
Minska effekten av abrupt trunkering med hjälp av tidsfönster (hammingfönster)

Genom att multiplicera signalen med ett tidsfönster som dämpar siganlen för små och stora värden på n miskas effekten av trunkeringen. Bilda

$$x_h[n]=x[n]\cdot hammingfönster$$

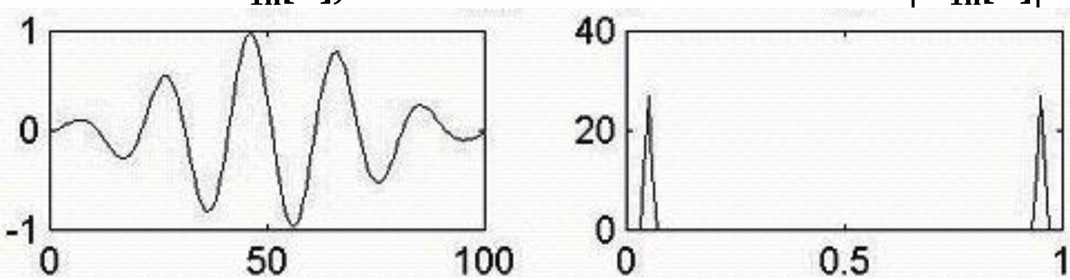
där hammingfönstret definieras av (N udda)

$$w_{hamming}(n)=0.54+0.46*\cos(2\pi\frac{1}{N-1}(n-\frac{N-1}{2}))$$



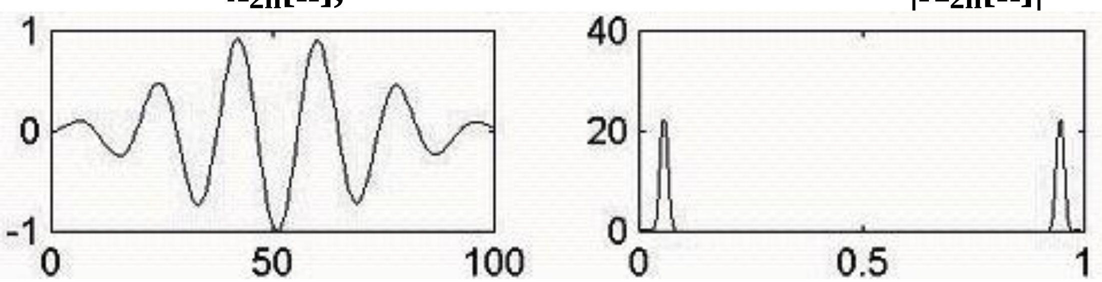
$$x_{1h}[n]=x_1[n]\cdot hammingfönster$$

$x_{1h}[n]$, $|X_{1h}[k]|$



$$x_{2h}[n]=x_2[n]\cdot hammingfönster$$

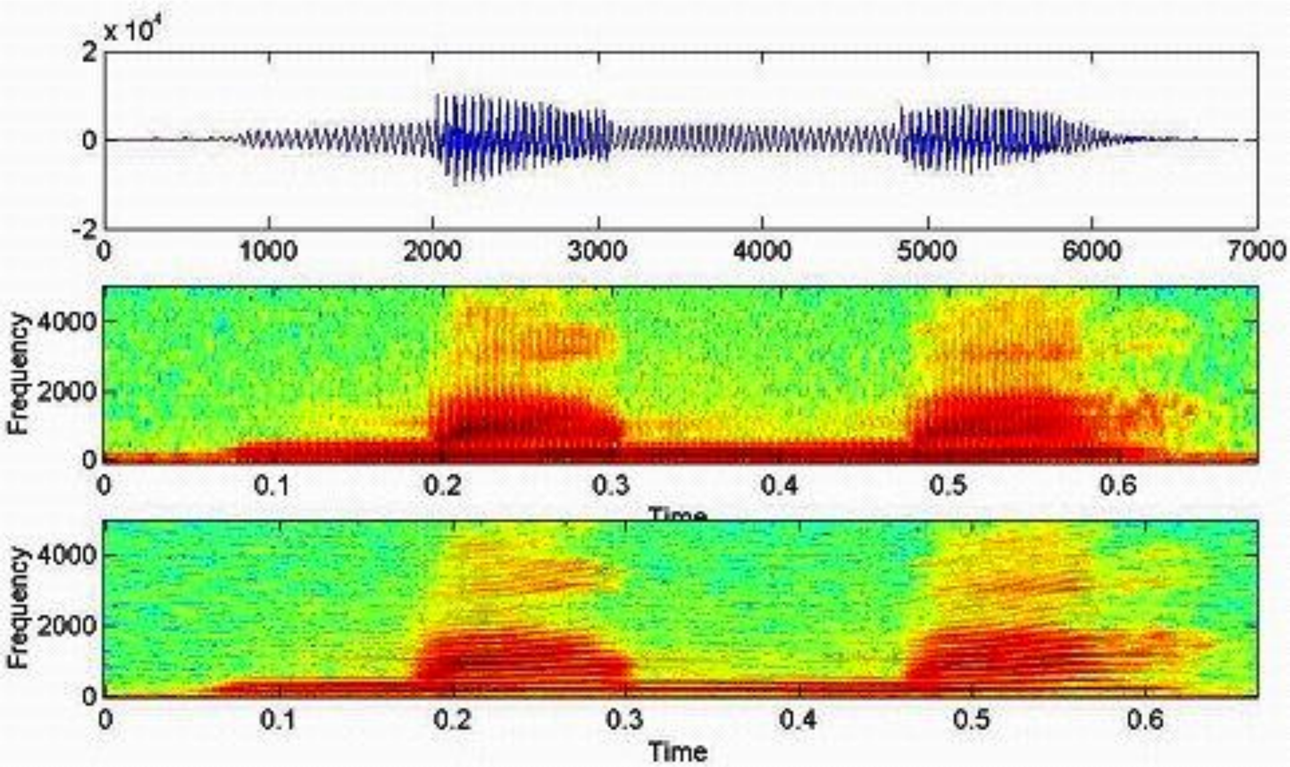
$x_{2h}[n]$, $|X_{2h}[k]|$



Spektrogram,   spektrum som funktion av tiden

Välj ut *N* sampel från en lång signal *x[n]* med ett glidande ”fönster” och gör *N*-punkts DFT av signalen.

Plotta resultatet 3-dimensionellt



Överst: **Vågform av ordet ”mamma”**
Mitten: **Spektrogram med kort tidsfönster (litet N)**
Nederst: **Spektrogram med långt tidsfönster (stort N)**

Mitten: Lodräta linjer i spektrat markerar att endast en puls (en stämbandspuls) ryms inom fönstrets längd.

Nederst: Vågräta linjer i spektrat markerar att många pulser (stämbandspulser) ryms inom fönstrets längd.

Diskreta cosinustransformen DCT (för kännedom)
avsnitt 7.5 DCT ingår ej

Diskreta cosinustransformen DCT används speciellt vid komprimering av bilder, tex JPEG

Nedanstående definition är hämtad från MATLAB

$$y(k) = w(k) \sum_{n=1}^{N} x(n) \cos \frac{\pi(2n-1)(k-1)}{2N}, \qquad k = 1, \ldots, N$$

med

$$w(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}}, & k = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}}, & 2 \le k \le N \end{cases}$$

Fördelen med DCT är att den ger reella värden.

Appendix: Relation DFT till Fouriertransform, sid 463

Givet *x(n)* för *0≤n≤N-1* och motsvarande *X(k)*   (DFT)
Sök *X(f)* (eller *X(k)* med bättre upplösning)

Matematiskt: **FT** $$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi f n}$$

IDFT $$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)\, e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\; e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi\frac{kn}{N}} e^{-j2\pi f n} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi(f-\frac{k}{N})n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1-e^{-j2\pi(f-\frac{k}{N})N}}{1-e^{-j2\pi(f-\frac{k}{N})}}$$

Definiera $$P(f) = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j2\pi f N}}{1-e^{-j2\pi f}} = \frac{\sin 2\pi f \frac{N}{2}}{N \sin 2\pi f \frac{1}{2}} e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}}$$

***P(f)* ‘periodisk sinc’   *p(n)* rektangelfönster**

ger $$X(f) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) P(f - \frac{k}{N})$$

Står faltning mellan X(k) och P(f)

Öka upplösningen numeriskt:

1: x(n) i N punkter   N-punkters DFT   X(k) i N-punkter
2: addera N noller i slutet   2N-punkters DFT   X(k) i 2N-punkter
MATLAB   X=fft(x,2*N);