

Föreläsning 2

Signalbehandling i multimedia ETI265

Kapitel 2

**Faltning
Impulssvar
Differensekvationer
Korrelationsfunktioner**

**LTH
2015**

Nedelko Grbic
(mtrl. från Bengt Mandersson)

**Department of Electrical and Information Technology
Lund University**

Kapitel 2 Faltning sid 71-80

Det viktigaste samband mellan insignal och utsignal kallas faltning. Om vi vet en krets impulssvar $h(n)$ kan vi beräkna utsignalen för en godtycklig insignal.

Vi utnyttjar bara linjaritet och tidsinvarians (LTI).

$$\begin{array}{ccc} \text{Insignal} & & \text{Utsignal} \\ x(n) & \Rightarrow & y(n) \end{array}$$

Definition

$$\text{impuls } \delta(n) \Rightarrow \text{impulssvar } h(n)$$

$$\delta(n-k) \Rightarrow h(n-k)$$

$$x(k) \delta(n-k) \Rightarrow x(k) h(n-k)$$

$$\underbrace{\sum_k x(k) \delta(n-k)}_{x(n)} \Rightarrow \underbrace{\sum_k x(k) h(n-k)}_{y(n)}$$

$$y(n) = \sum_k x(k) h(n-k) = \sum_k h(k) x(n-k) = h(n) * x(n)$$

Detta samband kallas faltning och är den mest allmängiltiga formeln i kursen

Exempel på faltning

Givet: Insignal och impulssvar

$$x(n) = \left[\dots \ 0 \ 0 \ \underset{\uparrow}{2} \ 4 \ 6 \ 4 \ 2 \ 0 \ \dots \right] \quad \text{och}$$

$$h(n) = \left[\underset{\uparrow}{3} \ 2 \ 1 \right]$$

Sök: Utsignal (faltning)

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_k h(n-k) x(k) = \sum_k h(k) x(n-k) = \\ &= \underbrace{h(0)}_3 x(n) + \underbrace{h(1)}_2 x(n-1) + \underbrace{h(2)}_1 x(n-2) = \\ &= 3 x(n) + 2 x(n-1) + x(n-2) \end{aligned}$$

Lösning: Vi löser ”grafiskt” genom att skriva enligt

$$\begin{array}{lcl} \text{vikter} & \text{baklänges } h(0-k) & 1 \ 2 \ \underset{\uparrow}{3} \\ & & \\ & x(k) & \dots \ 0 \ 0 \ \underset{\uparrow}{2} \ 4 \ 6 \ 4 \ 2 \ 0 \\ & & \\ \text{ger} & y(n) = & \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \underset{\uparrow}{6} & 16 & 28 & 28 & 20 & 8 \end{array} \right] \end{array}$$

**Multiplitera komponentvis och addera.
Skifta sen impulssvar åt höger**

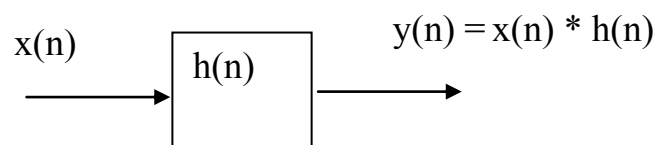
Egenskaper för faltning (vanliga räkneregler gäller) sid 81 (Kommutativ, Associativ och Distributiv)

$$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$$

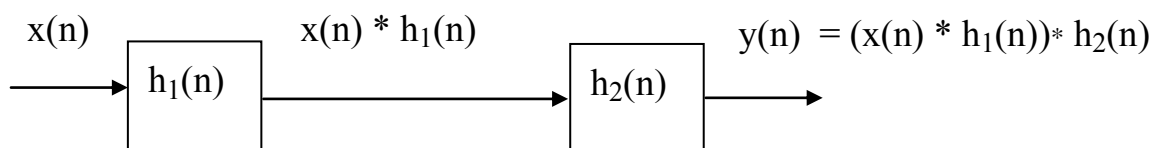
$$(x_1(n) * x_2(n)) * x_3(n) = x_1(n) * (x_2(n) * x_3(n))$$

$$(x_1(n) + x_2(n)) * x_3(n) = x_1(n) * x_3(n) + x_2(n) * x_3(n)$$

Input - output

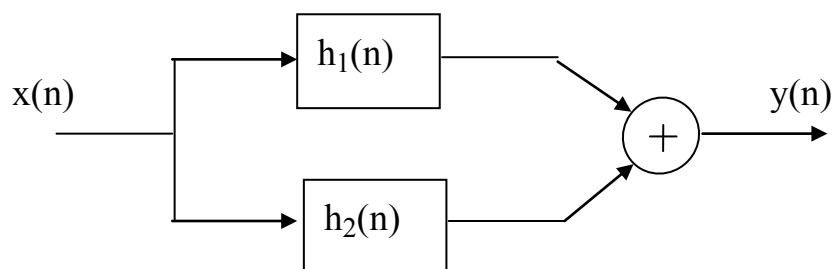


Kaskadkoppling (seriekoppling)



$$\text{dvs } h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

Parallellkoppling



$$\text{dvs } h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

Definition av stabilitet sid 85.

En krets BIBI-stabil (bounded input-bounded output) om

$$|x(n)| \leq M_x \quad \text{medför} \quad |y(n)| \leq M_y$$

Hur ser det sambandet ut i impulssvaret

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \underbrace{|x(n-k)|}_{\leq M_x} \\ &\leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \end{aligned}$$

Dvs stabilt om

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq \infty$$

Differensekvation sid 93-95.

Allmänt:

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k)$$

Exempel: FIR filter

$$y(n) = 0.5 x(n) + 0.25 x(n-1) + 0.15 x(n-2)$$

ger direkt impulssvaret

$$h(n) = [0.5 \quad 0.25 \quad 0.15]$$

Exempel: Första ordningens IIR

$$y(n) = 0.5 y(n-1) + 2 x(n)$$

Exempel: Andra ordningens IIR

$$y(n) = 0.5 y(n-1) + 0.5 y(n-2) + x(n)$$

För IIR-filter måste vi lösa differensekvationen för att bestämma impulssvaret $h(n)$

Vi löser första ordningens differensekvation sid 94.

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n)$$

Lös iterativt för $n \geq 0$

$$y(0) = -a_1 y(-1) + b_0 x(0)$$

$$y(1) = -a_1 y(0) + b_0 x(1) = (-a_1)^2 y(-1) + b_0 x(1) + b_0 (-a_1) x(0)$$

$$y(2) = -a_1 y(1) + b_0 x(2) = (-a_1)^3 y(-1) + b_0 x(2) + b_0 (-a_1) x(1) + b_0 (-a_1)^2 x(0)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n b_0 (-a_1)^k x(n-k) + \underbrace{(-a_1)^{n+1} y(-1)}_{\substack{\text{oftast } 0 \\ \text{beror av startvärde}}}$$

Impulssvar

Om $x(n) = \delta(n)$ får vi

$$y(n) = h(n) = b_0 (-a_1)^n \quad \text{för } n \geq 0$$

För godtycklig insignal beräknar vi sen utsignalen med faltning

$$y(n) = \sum_k h(k) x(n-k)$$

För lösning av högre ordningens ekv väntar vi tills vi har Z-transformen (kap 3).

Exempel

Givet:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$x(n) = u(n)$$

Sök:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

Lösning: **Faltning ger**

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{h(k)}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ om } k \geq 0} * \underbrace{x(n-k)}_{=1 \text{ om } k \leq n} = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &\quad \text{om } n \geq 0 \end{aligned}$$

Svar:

$$y(n) = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u(n)$$

Korrelationfunktioner deterministiskt sid 118.

Vi avslutar kapitel 2 med att definiera korrelationsfunktioner.

Hur lika är signaler?

Autokorrelationsfunktion

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x(n-l)$$

Korskorrelationsfunktion

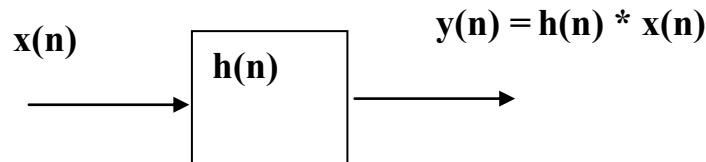
$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) x(n-l)$$

Skriv om som faltning

$$r_{xx}(l) = x(l) * x(-l)$$

$$r_{yx}(l) = y(l) * x(-l)$$

Samband mellan korrelationsfunktioner för input - output



Autokorrelationsfunktion för insignalen

$$r_{xx}(l) = x(l) * x(-l)$$

Autokorrelationsfunktion för utsignalen

$$\begin{aligned} r_{yy}(l) &= y(l) * y(-l) = h(l) * x(l) * h(-l) * x(-l) = \\ &= r_{hh}(l) * r_{xx}(l) \quad [dvs \quad r_{hh}(l) = h(l) * h(-l)] \end{aligned}$$

Korskorrelationsfunktion för utsignalen-insignal

$$\begin{aligned} r_{yx}(l) &= y(l) * x(-l) = h(l) * x(l) * x(-l) = \\ &= h(l) * r_{xx}(l) \end{aligned}$$

Vi kan lätt mäta upp ett okänt system $h(n)$ genom att använda en insignal $x(n)$

(dvs om $x(n)$ är vald till vitt brus, tex `randn(.)` i Matlab)

med

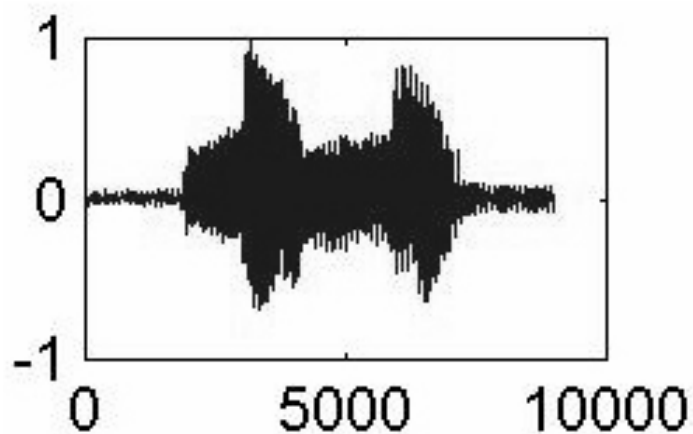
$$r_{xx}(l) = \delta(l)$$

Vi får då

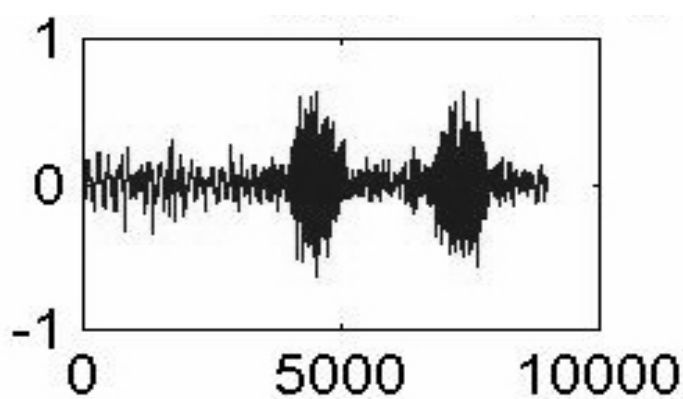
$$h(l) = r_{yx}(l)$$

Exempel på korrelation, fördröjning i GSM;-överföring

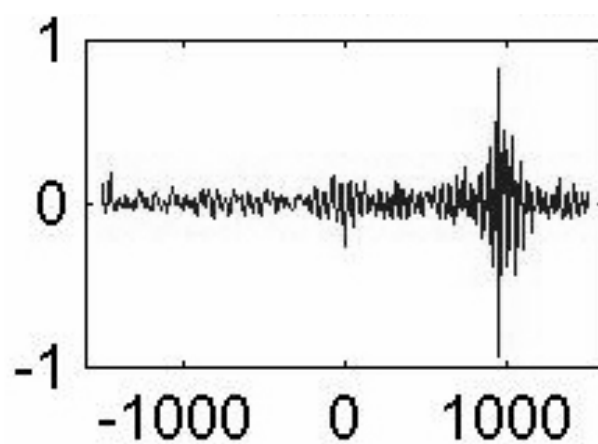
Signal före GSM



Signal efter GSM



Korskorrelation



Exempel på IIR-filter (Infinitive Impulse Response)

Exempel: Beräkning behållning på bankkonto (beräkning av ränta på ränta)

Givet: $y(n)$ Behållning på kontot år n
 $x(n)=100$ Insättning 100 kr en gång per år
 5 % årlig ränta (beräknas en gång per år)

Sök. Vad är saldot efter 1, 2, 5, 20 år

Lösning: Aktuellt saldo=gammalt saldo*1.05 + insättning

$$y(n)=1.05*y(n-1) + x(n)$$

Vi har ett återkopplat system, nya saldot beror på såväl ingående saldo (gammal utsignal) som på insättning (insignal) (IIR-filter)

Iterativ lösning ger:

$$y(0) = 1.05 \cdot \underbrace{y(-1)}_{\substack{=0 \text{ när vi börjar} \\ \text{para Initialrest condition} \\ \text{(kretsivila)}}} + \underbrace{x(0)}_{100} = 100$$

$$y(1) = 1.05 \cdot y(0) + x(1) = 1.05 \cdot 100 + 100$$

$$y(2) = 1.05 \cdot y(1) + x(2) = 1.05 \cdot (1.05 \cdot 100 + 100) + 100$$

OSV

Med hjälp av z-transform kan vi få en formel för $y(n)$ (kommer senare)