Föreläsning 10

Signalbehandling i multimedia - ETI265

Kapitel 7

Diskreta FourierTransformen

DFT

LTH
2015

Nedelko Grbic
(mtrl. från Bengt Mandersson)

Institutionen för elektro- och informationsteknik
Lund University

Kapitel 7 Discrete-Time FourierTransformen DTFT Fouriertransformen av Tidsdiskreta signaler

Definition: **Fouriertransform av tidsdiskret signal DTFT**

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\,2\,\pi\,f\,n}$$

$$x(n) = \int_{f=-0.5}^{0.5} X(f)\; e^{j\,2\,\pi\,f\,n}\, df = \int_{f=0}^{1} X(f)\; e^{j\,2\,\pi\,f\,n}\, df$$

Konvergens: **Om** $x[n]$ **stabil, dvs** $\sum_{n} |\,x[n]\,| < \infty$

Lite svagare konvergens

$$\sum_{n} |\,x[n]\,| \to \infty$$

$$\sum_{n} |\,x[n]\,|^2 < \infty \quad begränsad\ \ energi$$

Definition: **z-transform**

Låt $h[n]$ **vara ett kausalt impulssvar. Kausalt innebär att**

$$h[n] = 0 \quad för \quad n < 0.$$

Vi definierar Z-transformen av impulssvaret som

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]\ z^{-n}$$

där $$z = r\,e^{j\omega}$$

är ett komplext tal som vi oftast skriver som belopp och fas.

H(z) **är en komplex funktion av en komplex variabel.**

Viktigt: Om $h[n]$ **är kausal och stabil får vi**

$$H(\omega) = H(z)\,\big|_{z=e^{j\omega}}$$

Diskreta Fouriertransformen DFT **sid 456**

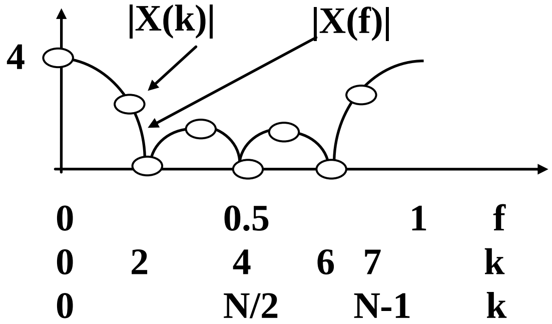
läs sid 449-456 översiktligt

Låt $x[n] = \{ \dots 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \underset{\uparrow}{1} \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \dots \}$

Vanlig Fouriertransform DTFT

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\,2\,\pi\,f\,n}$$

$$x(n) = \int_{f=0}^{1} X(f)\; e^{j\,2\,\pi\,f\,n}\, df$$



Välj längd $N = 8$ **och beräkna** $X(f)$ **i** N **punkter**
$f = 0,\ 1/N,\ 2/N, \dots\ ,(N-1)/N$ **dvs** $f = k/N$

ger den Diskreta Fourier-Transformen (DFT)

$$X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,2\pi \frac{k}{N} n} \qquad k = 0,1,\dots, N-1$$

$$x_{DFT}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\,2\pi \frac{k}{N} n} \qquad n = 0,1,\dots, N-1$$

Periodicitet

Vanlig Fouriertransform DTFT

$X(f)$ **periodisk ty**

$e^{j\,2\,\pi\,f\,n} = e^{j\,2\,\pi\,(f+1)n}$

Diskreta Fouriertransformen DFT

Både $X[k],\ x[n]$ **periodiska,** **(index beräknas modulo** N **)**

ty $n' = n + p\,N,\ k' = k + p\,N,$ p *heltal* ger samma numeriska värden

$$e^{j\,2\pi\frac{k}{N}(n+p\,N)} = e^{j\,2\pi\frac{k}{N}n}\,\underbrace{e^{j\,2\pi k\,p}}_{=1}$$

$$e^{j\,2\pi\frac{(k+p\,N)}{N}n} = e^{j\,2\pi\frac{k}{N}n}\,\underbrace{e^{j\,2\pi n\,p}}_{=1}$$

Om x(n) bara definierad för *0 ≤n≤N-1* (längd ≤ *N*) får vi

$$X_{DFT}(k) = X(f)\,|_{f=\frac{k}{N}}$$

dvs $X(f)$ **i *N* punkter**

Kommentar: Om N är en jämn 2-potens kan beräkningarna snabbas upp mycket, ~*N log N* istället för ~*N*^{2}. Algoritmen kallas FFT. Algoritmen beskrivs i Proakis. kapitel 8 men ingår inte i grundkursen.

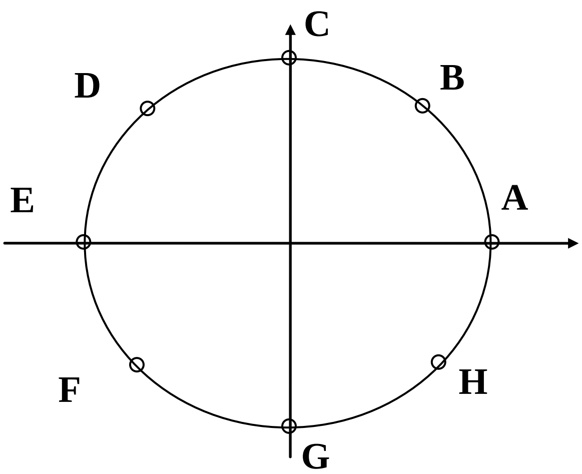
Viktigt samband

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{k}{N}(n-l)} = \begin{cases} N \text{ om } n-l = 0+pN \\ 0 \text{ om } n-l \neq 0+pN \end{cases}$$

$$= N\delta(n-l, \text{modulo}\, N)$$

$$\text{Proakis notation}: N\delta(n-l, \text{modulo}\, N) = N((\delta(n-l)))_N$$

Summan av punkter jämnt fördelade på enhetscirklen = 0



Summan av värdena i punkterna är:

A+A+A+A+A+A+A+A=8
A+B+C+D+E+F+G+H=0
A+C+E+G+A+C+E+G=0
osv

Jämför: **Integralen av cos(Ωt) över ett jämnt antal perioder är noll utom för Ω=0**

Speciella egenskaper för DFT

Både $x[n]$ **och** $X[k]$ **periodiska, detta medför vissa speciella egenskaper, alla index räknas modulo *N***

Tolkning av x[n]

x[n]={ 1 2 3 4 **1 2 3 4** 1 2 3 4 **}**

x[n-1]={4 1 2 3 **4 1 2 3** 4 1 2 3 4 **}**

Cirkulärt shift

$$x[n-n_0,\ \text{modulo}\ N] = \qquad e^{-j2\pi\frac{k}{N}n_0}\ X[k]$$

Exempel på skift vid DFT

x[n]={1 2 3 4}, x[n-1]={4 1 2 3}

Cirkulär faltning vid DFT, längd N, sid 476-477

$$X(k) = X_1(k)\,X_2(k)$$

$$x[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x_1[l]\; x_2[n-l, \text{modulo } N]$$

(alla signaler har samma längd *N*)

Exempel på cirkulär faltning

Givet: **x[n]={1 2 3 4}, h[n]={2 2 1 1}**

Sök cirkulär faltning

$$y[n] = x[n] \otimes h[n]$$

Grafisk lösning

h[0-k]		1 1 2 **2**	
x[n]	{	1 2 3 4 **1 2 3 4** 1 2 3 4	**}**
ger y[n]	**=**	**{15 13 15 17}**	

Problemet uppstår därför att *N=4* men resultatet av faltningen blir av längd *7*. Därför 'trillar' värdena runt.

MATLAB: **x=[1 2 3 4]; h=[2 2 1 1];**

y=real(ifft(fft(x).*fft(h)))

Vanlig faltning med DFT

x[n]={1 2 3 4}, h{n]={2 2 1 1}

Faltningen mellan x[n] och h[n] ger y(n) av längd 4+4-1

Välj längd hos DFT:n ***N=8***

Grafisk lösning

	h[0-k]	**0 0 0 0 1 1 2 2**
	x[k]	{1 2 3 4 0 0 0 0 **1 2 3 4** 0 0 0 0 1 2 3 4 **}**
ger	**y[n]**	**= {2 6 11 17 13 7 4 0}**

MATLAB: y=real(ifft(fft(x,8).*fft(h,8)))

Jämför med förra sidan $y_{\text{förra}}$**={2+13, 6+7, 11+4, 17+0}**

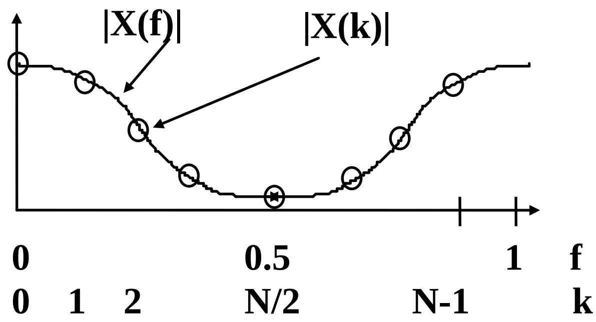
Sampling av spektrum ger periodicitet.

Låt $x(n) = a^n \; u(n) \qquad \Rightarrow \qquad X(f) = \dfrac{1}{1 - a\, e^{-j2\pi f}}$

Avläs $X(f)$ **i N punkter**

och bilda $X(k) = \left. X(f) \right|_{f = \frac{k}{N}}$

Nu är $x(n)$ **är en oändligt lång sekvens men invers DFT av** $X(k)$ **ger en sekvens av längd N.**



Vad blir $x_{DFT}(n) = IDFT(X(k))$

Dvs vad blir resultatet av nedanstående räkning?

$$x(n) = a^n \; u(n) \qquad DTFT \Rightarrow \qquad X(f) = \frac{1}{1 - a\, e^{-j2\pi f}}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{DFT}(n) \; = ? \qquad \Leftarrow \; IDFT \qquad X(k) = \left. X(f) \right|_{f = \frac{k}{N}} = \frac{1}{1 - a\, e^{-j2\pi \frac{k}{N}}}$$

Sampling av spektrum ger periodicitet, fortsättning

Lösning:

$$X_{DFT}(k) = X(f)\Big|_{f=\frac{k}{N}}$$

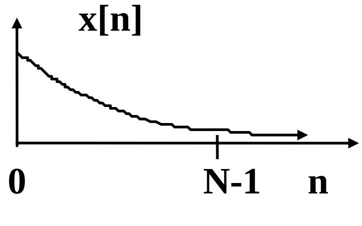
Invers DFT ger

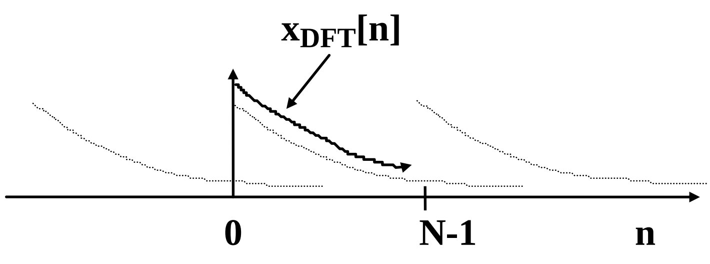
$$x_{DFT}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi\frac{k}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] e^{-j2\pi\frac{k}{N}l}\, e^{j2\pi\frac{k}{N}n} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{k}{N}(n-l)}}_{N\,\delta[n-l,\,\text{modulo}\,N]} = \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-l\,N]}_{x_{periodiserat}[n]}$$

dvs

$$x_{DFT}[n] = \underbrace{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-l\,N]}_{x_{periodiserat}[n]}$$





(x(n), x_{DFT}(n) ritat heldraget för enkelhets skull)

Visa periodicitet i tid med numeriskt exempel

DTFT och DFT av fyrkantpuls

$$X(f) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)\, e^{-j2\pi f n} = \frac{\sin(2\pi f \frac{L}{2})}{\sin(2\pi f \frac{1}{2})}\, e^{-j2\pi f \frac{L-1}{2}}$$

$x[n] = \left[\underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ ....\ 1}_{L\ st} \right]$ **ger**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)\, e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} = \frac{\sin(2\pi k \frac{L}{2N})}{\sin(2\pi k \frac{1}{2N})}\, e^{-j2\pi k \frac{L-1}{2N}}$$

Exempel:

Låt nu $$Y_1(k) = X(k) = \frac{\sin(2\pi k \frac{L}{2N})}{\sin(2\pi k \frac{1}{2N})}\, e^{-j2\pi k \frac{L-1}{2N}}$$

och bestäm $y_1[n] = IDFT(Y_1[k])$

samt $$Y_2(k) = (X(k))^2 = \left(\frac{\sin(2\pi k \frac{L}{2N})}{\sin(2\pi k \frac{1}{2N})}\, e^{-j2\pi k \frac{L-1}{2N}} \right)^2$$

och bestäm $y_2(n) = IDFT(Y_2(k))$

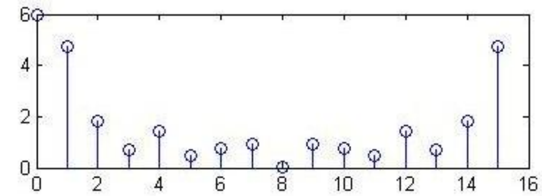
Matlabkod: N=16, L=6 och L=10

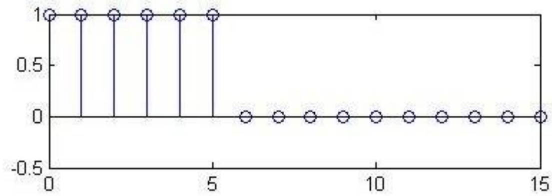
```
k=0:N-1;    k=k+.00000001;

Y1=sin(2*pi*L*k/(2*N))./sin(2*pi*k/(2*N)).*exp(-j*2*pi*(L-1)*k/(2*N));
y1=real(ifft(Y1));

Y2=Y1.*Y1;
y2=real(ifft(Y2));
```

Hur ser y1[n] och y2[n] ut? Svar nästa sida.

Fortsättning: **Matlabexempel på periodicitet i tid, Matlabplot**

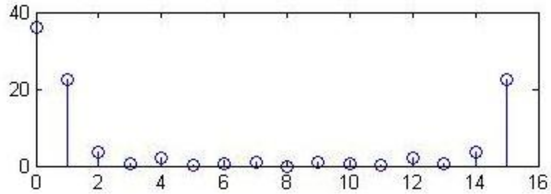
N=16, L=6,

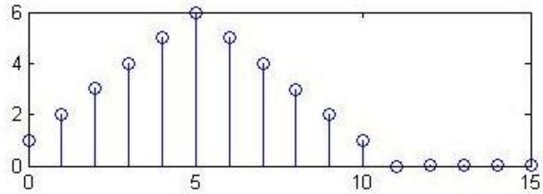




$$Y_1(k) = \frac{\sin(2\pi k \frac{L}{2N})}{\sin(2\pi k \frac{1}{2N})} \; e^{-j2\pi k \frac{L-1}{2N}}$$

$$y_1(n) = IDFT(Y_1)$$

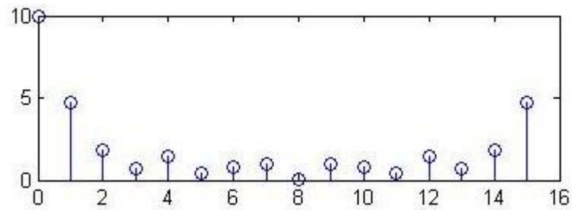




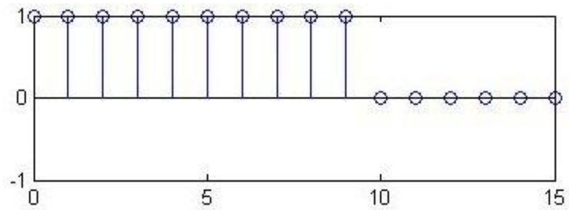
$$Y_2(k) = \left(\frac{\sin(2\pi k \frac{L}{2N})}{\sin(2\pi k \frac{1}{2N})} \; e^{-j2\pi k \frac{L-1}{2N}} \right)^2$$

$$y_2(n) = IDFT(Y_2)$$

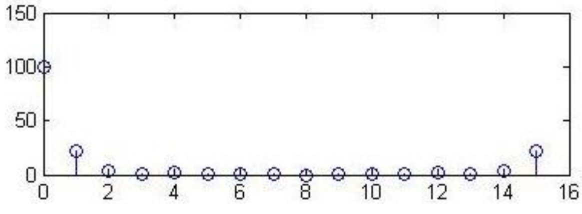
N=16, L=10,



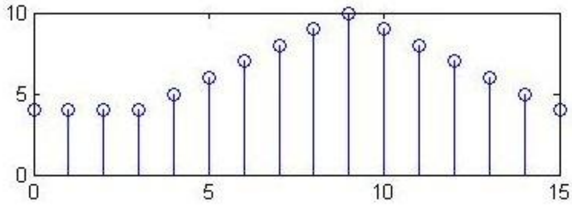
$Y_1(k)$



$y_1(n) = IDFT(Y_1)$



$Y_2(k)$



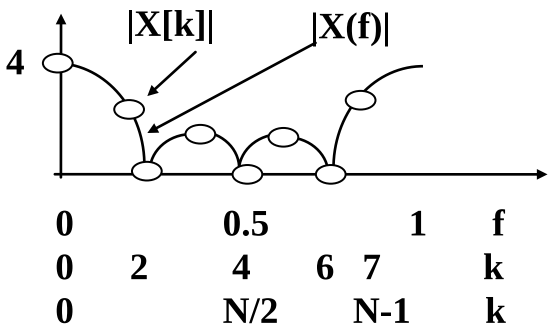
$y_2(n) = IDFT(Y_2)$

En praktisk tillämpning

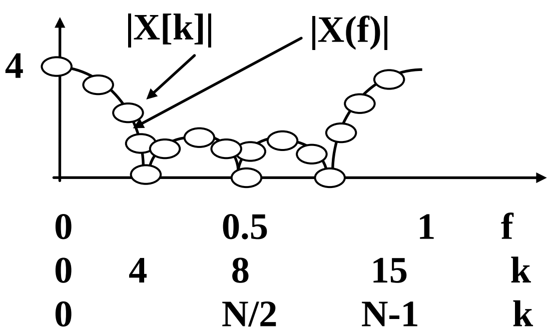
Öka upplösning i frekvens med hjälp av ”zero padding” el. ”trailing zeroes”

Låt **x[n]={… 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 …}**

Tag N=8 punkters DFT av x[n]



Tag N=16 punkters DFT av x[n]



DFT i matrisform sid 459-460 (för kännedom)

Definiera $$W_N = e^{-j\,2\,\pi\,\frac{1}{N}} = W$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k0}^{N-1} X(k) W^{-kn} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

Låt $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \\ x(N-1) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^{N-1} \\ & & & \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Medför att vi kan skriva

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\,\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}$$ **eller** $$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{D}^*\mathbf{X}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{D}^* \qquad \mathbf{D}\,\mathbf{D}^* = N\ \mathbf{I}$$