Föreläsning 7

Signalbehandling i multimedia - ETI265

Kapitel 5

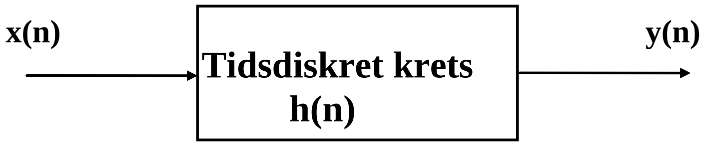
LTI system
Signaler genom linjära system

LTH
2015

Nedelko Grbic
(mtrl. från Bengt Mandersson)

Department of Electrical and Information Technology
Lund University

Kap 3 LTI system



Differensekvation.

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k \; y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Faltning.

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k} \; h(k)x(n-k)$$

Vi har 2 typer av differensekvationer.

FIR: **Alla** $a_k = 0, \; k \neq 0$ **, (ingen återkoppling).**
Här blir impulssvaret $h(n) = \{b_0 \;\; b_1 \;\; ...b_M\}$**, dvs impulssvar och differensekvationens koefficienter är lika.**

IIR: **Något** $a_k \neq 0, \; k \neq 0$ **(Vi har återkoppling).**

Vi utnyttjar z-transformen och fouriertransformen.

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

Differensekvationen

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k \; y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Z-transform:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_N z^{-N} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \ldots + b_M z^{-M} X(z)$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} X(z) = H(z)\, X(z)$$

Utsignalens transform är alltså produkten

$Y(z) = H(z)\, X(z)$ **med**

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

Vi beskriver ofta systemfunktionen $H(z)$ med poler och nollställen och ritar in dem i ett pol-nollställesdiagram

Fouriertransform:

Sedan tidigare; Om båda existerar ($h(n)$) kausal och stabil) får vi sambandet

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

Det ger =>

$$Y(\omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \ldots + b_M e^{-j\omega M}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + \ldots + a_N e^{-j\omega N}} X(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

Utsignalens transform är alltså produkten

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

med

$$H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \ldots + b_M e^{-j\omega M}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + \ldots + a_N e^{-j\omega N}}$$

$H(\omega)$ **kallas frequency response (frekvenssvar). Vi skriver ofta** $H(\omega)$ **i polära koordinater och plottar belopp och fas**

Sinussignaler genom LTI

Vad händer om vi lägger på en sinussignal på filtret. Av erfarenhet vet vi att om vi lägger en ton (sinus) in på vårt filter (förstärkare) får vi ut samma ton men med ändrad amplitud och fas.

Vi tittar på 2 fall:

A: **Vi lägger på insignalen i *t=0*.**
B: **Vi lägger på insignalen i minus oändligheten så att eventuella insvängningsförlopp dött ut.**

Hur ser detta ut i våra formler?

Fall A löser vi med z-transform (och partialbråksuppdelning)

Fall B löser vi med faltning ty insignalen är ej kausal så vi kan inte beräkna dess z-transform

Först ett numeriskt exempel på fall A

Exempel på sinussignaler genom linjär krets, fall A

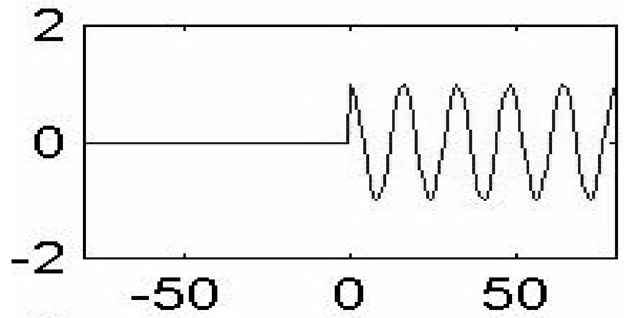
Givet: **Insignalen** $x(n) = \cos(2\pi \frac{1}{16} n)\ \ u(n)$ **och**

systemet $H(z) = \dfrac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.27z^{-1} + 0.81z^{-2}}$ **enligt tidigare ex**

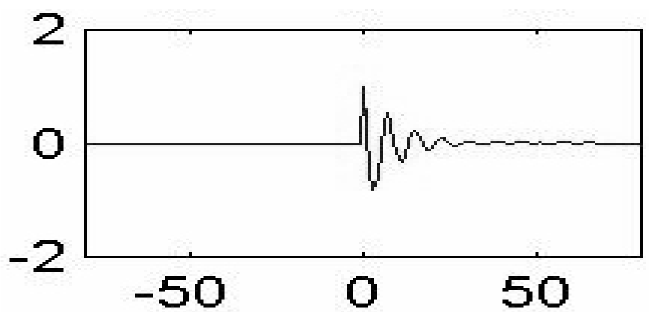
Sök: **Beräkna numeriskt** ***y(n)=x(n)∗h(n)*** **i MATLAB**

Lösning:

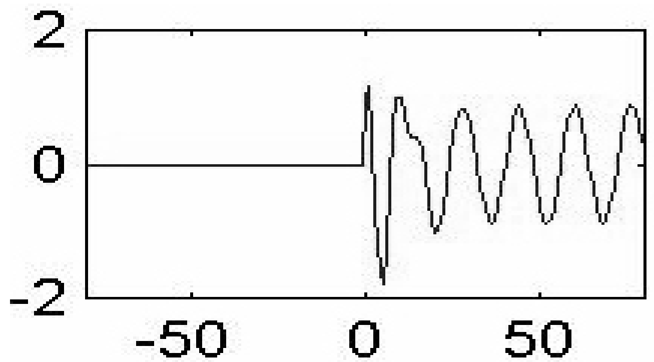
insignal *x(n)*



impulssvar *h(n)*



utsignal *y(n)*



Vi får ***y(n) = transient + stationär lösning***

Fall A: Lösning med z-transformen

Vi lägger på insignalen vid *t=0,* dvs

$$x(n) = \cos(2\pi \frac{1}{16} n)\, u(n)$$

Denna signal är kausal och vi kan bestämma dess z-transformen

(se formelsamling eller övning). Transformerna av *x(n)* och *h(n)* är

$$X(z) = \frac{1 - \cos(2\pi \frac{1}{16})\, z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi \frac{1}{16})\, z^{-1} + z^{-2}} \quad , \quad H(z) = \frac{T(z)}{N(z)} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 - 1.27 z^{-1} + 0.81 z^{-2}}$$

Vi kan nu beräkna utsignalen med hjälp av z-transformen, dvs

$$Y(z) = H(z)\, X(z) = \frac{T(z)}{N(z)} \cdot \frac{1 - \cos(2\pi \frac{1}{16})\, z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi \frac{1}{16})\, z^{-1} + z^{-2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{T_1(z)}{N(z)}}_{transient\, lösning} + \underbrace{\frac{C_0 + C_1 z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi \frac{1}{16})\, z^{-1} + z^{-2}}}_{stationär\ lösning}$$

$$y(n) = transient + \underbrace{A\cos(2\pi \frac{1}{16} n) + B\sin(2\pi \frac{1}{16} n)}_{\sqrt{A^2+B^2}\,\cos(2\pi \frac{1}{16} n - \arctan(B/A)) \qquad A>0}$$

Första termen är en dämpad sinus (nämnare från *H(z)*), en transient. Andra termen är den stationära lösningen (nämnaren från *X(z)*).

Vill vi ha hela lösningen måste vi bestämma partialbråksuppdelningen $T_1(z)$ och $T_2(z) = C_0 + C_1 z^{-1}$ och göra inverstransformeringen. (Numeriska värden på nästa sida)

Fall A: fortsättning (anv. Matlab ”residuez.m”)

Numeriska värden i ovanstående exempel (partialbråksuppdelning)

$$Y(z)=H(z)\,X(z)=\cdot\frac{z^{-1}-z^{-2}}{1-1.27\,z^{-1}+0.81\,z^{-2}}\;\frac{1-\cos(2\,\pi\,\frac{1}{16})\,z^{-1}}{1-2\,\cos(2\,\pi\,\frac{1}{16})\,z^{-1}+z^{-2}}=$$

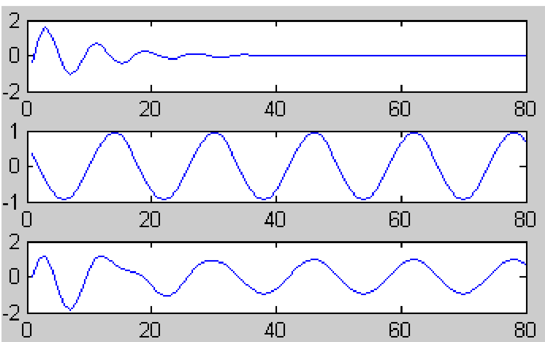
$$=\underbrace{-0.35\frac{1-4.177\,z^{-1}}{1-1.27\,z^{-1}+0.81\,z^{-2}}}_{transient\ lösning}\;+\;0.35\underbrace{\frac{1-1.896\,z^{-1}}{1-2\,\cos(2\,\pi\,\frac{1}{16})\,z^{-1}+z^{-2}}}_{stationär\ lösning}=$$

$$=\;-0.35\frac{1-0.9\cos(\pi/4)\,z^{-1}\;-\;5.5629\cdot 0.9\sin(\pi/4)\;z^{-1}}{1-1.27\,z^{-1}+0.81\,z^{-2}}\;+$$

$$+0.35\underbrace{\frac{1-\cos(\pi/8)\;z^{-1}+(\cos(\pi/8)-1.896)/\sin(2\pi/16)\cdot\sin(2\pi/16)\;z^{-1}}{1-2\,\cos(2\,\pi\,\frac{1}{16})\,z^{-1}+z^{-2}}}_{stationär\ lösning}$$

$$y(n)=-0.35\;\;0.9^{n}\,\cos(2\,\pi\,\frac{1}{8}n\,)\;\;-0.35\cdot 5.562\cdot 0.9^{n}\,\sin(2\,\pi\,\frac{1}{8}n\,)\,+$$

$$+\;\;\underbrace{0.35\;\cos(2\,\pi\,\frac{1}{16}n\,)\;-0.35\cdot 2.5392\;\sin(2\,\pi\,\frac{1}{16}n\,)}_{Stationärlösning\quad 0.95\cos(2\,\pi\,\frac{1}{16}n\;-\;1.19)}\qquad\qquad n\geq 0$$



Överst: Transient. Mitten: Stationär del: Underst: Hela utsignalen

Fall A: fortsättning 2

Vi ser här att för insignalen

$$x(n) = \cos(\omega_0\, n)\, u(n) = \cos(2\pi \frac{1}{16} n) u(n)$$

fick vi den stationära lösningen (efter mycket räknande)

$$y_{stationär}(n) = 0.95 \cos(2\,\pi \frac{1}{16} n\; - 1.19)$$

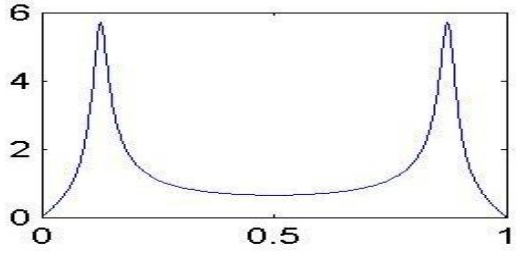
Vi ska snart visa att den stationära lösningen ges av

$$y_{stationär}[n] = |\,H(z)\,|_{z=e^{j\,\omega_0}}\; \cos(\omega_0\; n + \arg(H(z)\,|_{z=e^{j\,\omega_0}}\,)$$

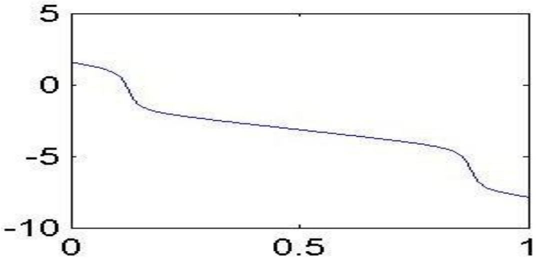
där $$\omega_0 = 2\,\pi \frac{1}{16} \quad \text{är insignalens frekvens}$$

Sinus in ger sinus ut med amplituden ändrad med beloppet av *H(z)* och fasen ändrad med argumentet av *H(z)* för $z = e^{j\omega_0}$

Amplituden är alltså H(z):s värde på enhetscirkeln för insignalens frekvens



Amplitudfunktion



Fasfunktion

I Matlab;

```
[H,w]=freqz([0 1 -1],[1 -1.27 0.81],'whole'); plot(w/2/pi,abs(H));plot(w/2/pi,unwrap(angle(H)))
```

Vi ser att för frekvensen $f = \frac{1}{16}$ **får vi amplitudfunktionen ungefär *1***

Fall B: Sinussignal pålagd i $n = -\infty$

$$x(n) = \cos(2\pi f_0 n) = \frac{1}{2}(\underbrace{e^{j2\pi f_0 n} + e^{-j2\pi f_0 n}}_{två termer}), \quad -\infty < n < \infty$$

Nu har den transienta delen av lösningen dött ut.

Vi börjar med en komplex sinussignal för det blir enklare, sid 301-306
Låt

$$x_0(n) = e^{j2\pi f_0 n} = e^{j\omega_0 n} \qquad \textit{för alla } n,$$

$$f_0 = \text{konstant} = \textit{insignalens frekvens}$$

Insignalen är ej kausal så vi använder faltning.

$$y_0(n) = x_0(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x_0(n-k) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega_0(n-k)}}_{\substack{\textit{alla termerna ingår ty vi} \\ \textit{startar i } n=-\infty \\ (\textit{insvängningsförloppdött ut})}} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega_0 k}}_{H(\omega)|_{\omega=\omega_0}} e^{j\omega_0 n} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j2\pi f_0 k}}_{H(f)|_{f=f_0}} e^{j2\pi f_0 n} =$$

$$= \underbrace{H(f)|_{f=f_0}}_{\textit{Komplex förstärkning}} \underbrace{e^{j2\pi f_0 n}}_{\textit{Insignalen}} = \underbrace{|H(f)|_{f=f_0}}_{\substack{\textit{Förstärkning} \\ (\textit{belopp})}} e^{j(2\pi f_0 n + \underbrace{\phi}_{fas})}$$

OBS: Filtret *h(n)* måste vara stabilt

Fall B: fortsättning Sinussignal pålagd i $n = -\infty$

För hela sinussignalen (bägge delarna i eulers formel)

$$x(n) = \cos(2\pi f_0 n) = \frac{1}{2}(\underbrace{e^{j2\pi f_0 n} + e^{-j2\pi f_0 n}}_{två termer}) = \frac{1}{2}(x_0(n) + x^*_0(n))$$

får vi

$$y(n) = \frac{1}{2}\{(H(f)|_{f=f_0}\ e^{j2\pi f_0 n}) + (H(f)|_{f=f_0}\ e^{j2\pi f_0 n})^*\}$$

$$= \ldots = \underbrace{|H(f)|_{f=f_0}}_{förstärkning} \cos(2\pi f_0 n + \underbrace{\arg\{H(f)|_{f=f_0}\}}_{fasändring})$$

Alltså: För $x(n) = \cos(2\pi f_0 n) \quad -\infty < n < \infty$

får vi

$$y(n) = \underbrace{|H(f)|_{f=f_0}}_{förstärkning} \cos(2\pi f_0 n + \underbrace{\arg\{H(f)|_{f=f_0}\}}_{fasändring})$$

Vi kan beräkna och plotta amplitud och fas för $H(f)$ **i tex MATLAB och sen bara läsa av värdet av amplituden och fasen för** $f = f_0$

OBS: **Detta gäller efter det att eventuella insvängningsförlopp dött ut (vid FIR-filter med längd L efter L-1 sampel). Kallas för stationär lösning (steady state)**

OBS: **Detta gäller bara vid sinus samt cosinus signaler (samt summa av dessa genom att behandla varje komponent för sig).**

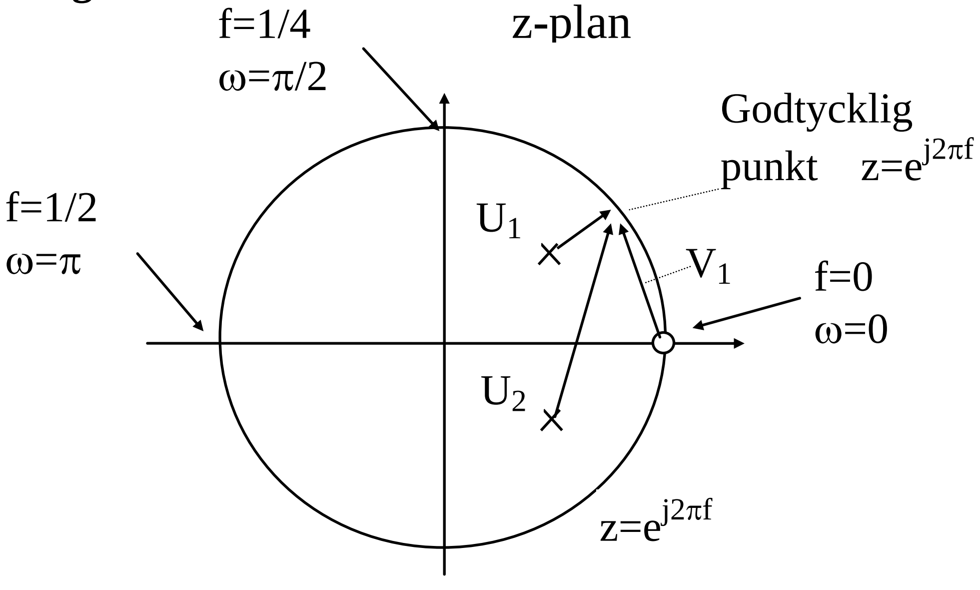
Bestäm *H(ω)* approximativt (sid 315-320)

$$H(z) = \frac{z-1}{(z-0.9\,e^{j\frac{\pi}{4}})(z-0.9\,e^{-j\frac{\pi}{4}})}$$

$$|H(\omega)| = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{|\overbrace{e^{j\omega}-1}^{V_1}|}{\underbrace{|(e^{j\omega}-0.9e^{j\frac{\pi}{4}})|}_{U_1}\cdot\underbrace{|(e^{j\omega}-0.9e^{-j\frac{\pi}{4}})|}_{U_2}}$$

$$|H(\omega)| = |H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{V_1}{U_1 U_2}$$ **värdet på enhetscirklen**

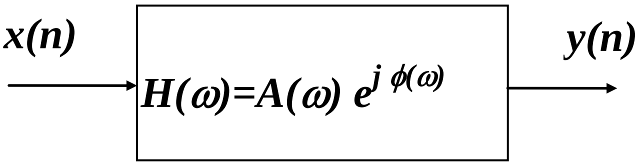
Rita in i en figur



***ω*=0**:	***V*$_1$=0**	**ger |*H(ω)*|=0**
***ω*=*π*/4**:	***U*$_1$=liten**	**ger |*H(ω)*| stort**
***ω*>*π*/4**:	***U*$_1$, *U*$_2$ ökar**	**ger |*H(ω)*| minskar**

Linjär fas

Vi vill ofta ha kretsar med linjär fas. Varför?



$$x[n] = \sin(\omega_0 n)$$

$$y[n] = A(\omega_0)\ \sin(\omega_0 n + \Phi(\omega_0)) = A(\omega_0)\ \sin(\omega_0 (n + \underbrace{\frac{\Phi(\omega_0)}{\omega_0}}_{tid}))$$

Om $\frac{\Phi(\omega_0)}{\omega_0}$ **är konstant för alla** ω_0 **blir**

$\Phi(\omega)$ **en rät linje i** ω **dvs linjär fas**

Filter med linjär fas fördröjer alla frekvenser lika mycket. Bra

$$\tau_g = -\frac{d(\Phi(\omega))}{d\omega}$$ **kallas grupplöptid (group delay)**

Linjär fas fortsättning

Exempel på ett filter med linjär fas

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(\omega)=A(\omega)\, e^{j\,\phi(\omega)}} \longrightarrow y(n)$$

Impulssvar:

$$h(n) = \{1 \;\; 2 \;\; 1\}$$

Fouriertransform (spektrum):

$$\begin{aligned} H(\omega) &= 1 + 2e^{-j\,\omega} + e^{-j\,2\,\omega} = \\ &= (2 + 2\cos(\omega))\; e^{-j\,\omega} = \\ &= |\,2 + 2\cos(\omega)\,| \cdot e^{-j\,\omega \;+\; j\,\pi \;(om\;2+2\cos(\omega)<0)} = \\ &= A(\omega) \cdot e^{-j\,\Phi(\omega)} \end{aligned}$$

Belopp

$$A(\omega) = |\,2 + 2\cos(\omega)\,|$$

Fas

$$\Phi(\omega) = -\omega \;+\; \pi \;(om \quad 2 + 2\cos(\omega) < 0)$$

Linjär funktion (med hopp)