

Föreläsning 5

Signalbehandling i multimedia - ETI265

Kapitel 4

**Fouriertransform av analog signal, FT
Fouriertransform av digital signal, DTFT**

2015

Nedelko Grbic

(mtrl. från Bengt Mandersson)

**Department of Electrical and Information Technology
Lund University**

Transformer i Digital Signalbehandling

Analoga signaler

**Fouriertransform av analog signal, FT
(Laplacetransform)**

Tidsdiskreta signaler (samplade, digitala signaler)

Fouriertransform av digital signal, DTFT, kap 4

Diskreta Fouriertransformen (DFT, FFT), kap 7

Z-transform av digital signal kap 3.

Fourierserieutveckling, (lite grann, senare)

Fourierserieutveckling av periodisk signal

Fourierserieutveckling av periodisk signal

Kapitel 4 Fouriertransform sid 236-238

Definition: **Fouriertransform av analog signal FT**

$$\begin{aligned} X(F) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j 2 \pi F t} dt \\ x(t) &= \int_{F=-\infty}^{\infty} X(F) e^{j 2 \pi F t} dF = \\ &= \frac{1}{2 \pi} \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j \Omega t} d\Omega \\ \Omega &= 2 \pi F \end{aligned}$$

Konvergens: Om $x(t)$ stabil, dvs $\int_t |x(t)| < \infty$
(Se även matte)

Lite svagare konvergens

$$\int_t |x(t)| \rightarrow \infty$$

men

$$\int_t |x(t)|^2 < \infty \quad \text{begränsad energi}$$

Definition: Fouriertransform av tidsdiskret signal DTFT, sid 251

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \omega = 2\pi f$$
$$x(n) = \int_{f=-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Konvergens: Om $x(n)$ stabil, dvs $\sum_n |x(n)| < \infty$

Lite svagare konvergens

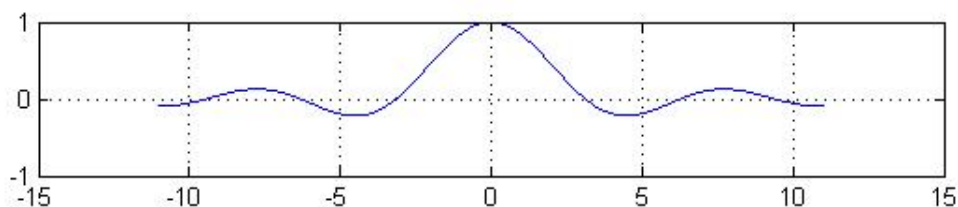
$$\sum_n |x(n)| \rightarrow \infty$$

men

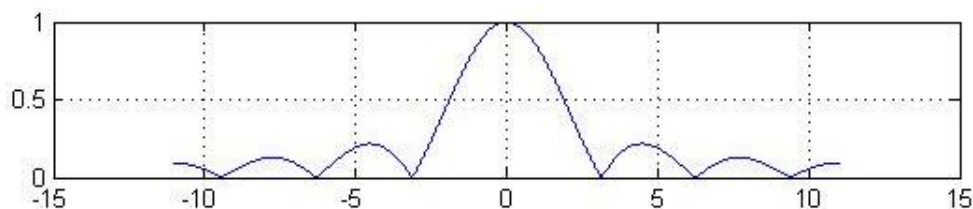
$$\sum_n |x(n)|^2 < \infty \quad \text{begränsad energi}$$

En vanligt förekommande signalform i signalbehandling (och i många andra ämnen)

$$\frac{\sin(x)}{x}$$



$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right|$$



$$\frac{\sin(x)}{x}$$

kallas ofta 'sinc'

Känt gränsvärde

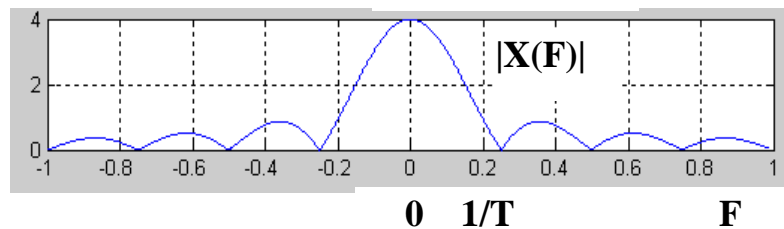
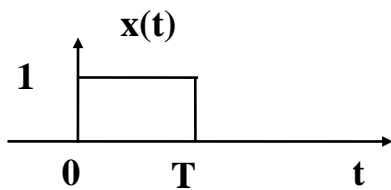
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$$

Fouriertransform av rektangelpuls sid 257-258

Tidsplanet

Frekvensplanet

Analog rektangelpuls (rektangulärt tidsfönster) $T=4$ i figuren

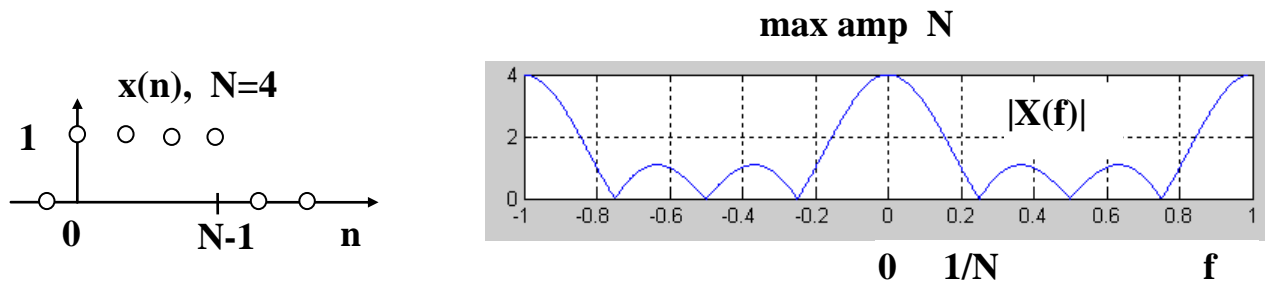


$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases} \quad X(F) = T \frac{\sin(2\pi F \frac{T}{2})}{2\pi F \frac{T}{2}} e^{-j 2\pi F T/2}$$

Beräkning av $X(F)$

$$\begin{aligned} X(F) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j 2\pi F t} dt = \int_{t=0}^T \underbrace{x(t)}_{=1} e^{-j 2\pi F t} dt = \\ &= \frac{e^{-j 2\pi F T} - 1}{-j 2\pi F} = \frac{e^{-j 2\pi F T/2} (e^{j 2\pi F T/2} - e^{-j 2\pi F T/2})}{j 2\pi F} = \\ &= T \frac{\sin(2\pi F \frac{T}{2})}{2\pi F \frac{T}{2}} e^{-j 2\pi F T/2} \end{aligned}$$

Tidsdiskret rektangelpuls (rektangulärt tidsfönster)



$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases} \quad X(f) = N \frac{\sin(2\pi f \frac{N}{2})}{N \sin(2\pi f \frac{1}{2})} e^{-j 2\pi f \frac{N-1}{2}}$$

OBS. $X(f)$ är periodiskt med perioden $f = 1$, $\omega = 2\pi$

Beräkning av $X(f)$

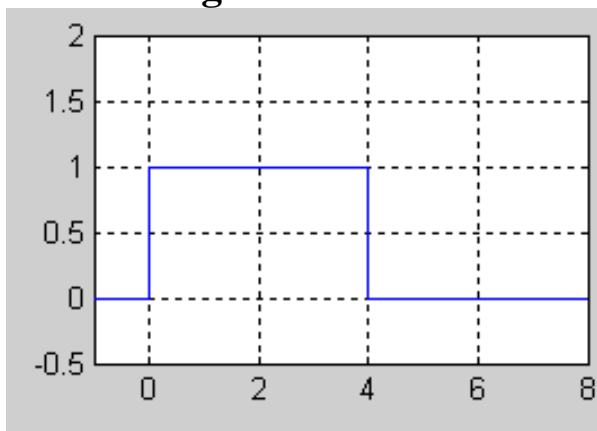
$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j 2\pi f n} = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{x(n)}_{=1} e^{-j 2\pi f n} = \\ &= \frac{1 - e^{-j 2\pi f N}}{1 - e^{-j 2\pi f}} = \frac{e^{-j 2\pi f N/2} (e^{j 2\pi f N/2} - e^{-j 2\pi f N/2})}{e^{-j 2\pi f 1/2} (e^{j 2\pi f 1/2} - e^{-j 2\pi f 1/2})} = \\ &= N \frac{\sin(2\pi f \frac{N}{2})}{N \sin(2\pi f \frac{1}{2})} e^{-j 2\pi f \frac{N-1}{2}} \end{aligned}$$

Plot i MATLAB av Fouriertransform av rektangelpuls

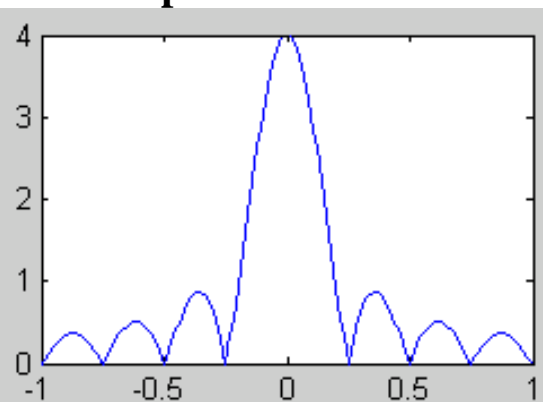
Analog rektangelpuls (rektangulärt tidsfönster) $T=4$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases} \quad X(F) = T \frac{\sin(2\pi F \frac{T}{2})}{2\pi F \frac{T}{2}} e^{-j2\pi F \frac{T}{2}}$$

Tidssignal



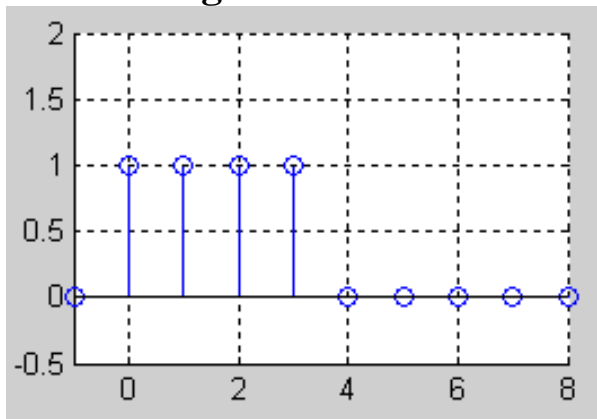
Spektrum



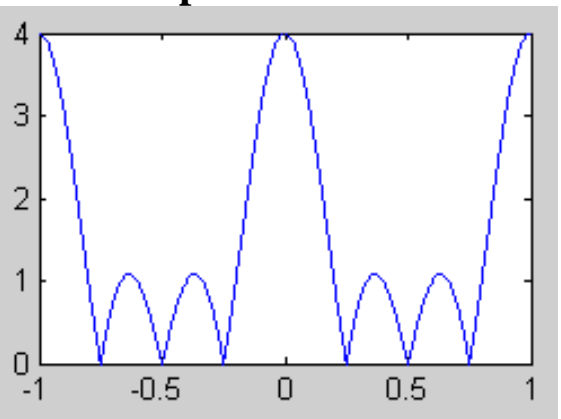
Tidsdiskret rektangelpuls (rektangulärt tidsfönster) $N=4$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases} \quad X(f) = N \frac{\sin(2\pi f \frac{N}{2})}{N \sin(2\pi f \frac{1}{2})} e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}}$$

Tidssignal



Spektrum



Exempel på transformer DTFT.

Tidsfunktion

Fouriertransform

Definition: Fouriertransform av tidsdiskret signal DTFT

$$x(n) = \int_{f=-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df, \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi f n}$$

$$x(n) = \{3 \ 2 \ 1\} \quad X(f) = 3 + 2e^{-j2\pi f} + e^{-j2\pi 2f} = \\ = 3 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$

deltafunktion

$$x(n) = \delta(n) = \{1\} \quad X(f) = 1$$

skift

$$x(n) = \delta(n-1) = \{0 \ 1\} \quad X(f) = e^{-j2\pi f} = e^{-j\omega} \\ x(n) = \delta(n-n_0) \quad X(f) = e^{-j2\pi f n_0} = e^{-j\omega n_0} \\ y(n) = x(n-n_0) \quad Y(\omega) = e^{-j\omega n_0} X(\omega)$$

faltning

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

(se bevis nästa sida)

Se även formelsamlingen och läroboken

Faltning övergår i produkt vid transformering

Givet

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_l x(l) h(n-l)$$

Sök

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \sum_n y(n) e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_n \sum_l x(l) h(n-l) \underbrace{e^{-j\omega n}}_{e^{-j\omega(n-l)} \cdot e^{-j\omega l}} = \\ &= \sum_l x(l) e^{-j\omega l} \sum_n h(n-l) e^{-j\omega(n-l)} = \\ &= X(\omega) H(\omega) \end{aligned}$$

Appendix: Visa Fouriertransformen

Definition: Fouriertransform av tidsdiskret signal DTFT,

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \omega = 2\pi f$$

$$x(n) = \int_{f=-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\pi}^{\pi} X(f) e^{j\omega n} d\omega$$

Visa invers fouriertransform.

$$x_{invers}(n) = \int_{f=-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df = \int_{f=-1/2}^{1/2} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi f k}}_{X(f)} e^{j2\pi f n} df =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \int_{f=-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi f k} e^{j2\pi f n} df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \underbrace{\int_{f=-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi f (k-n)} df}_{\begin{cases} 0 & \text{om } k-n \neq 0 \\ 1 & \text{om } k-n = 0 \end{cases} = \delta(n-k)}$$

$$= x(n)$$

Quiz

Visa att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\pi}^{\pi} \frac{2e^{j\omega}}{1-0.5e^{-j\omega}} d\omega = \int_{f=-1/2}^{1/2} \frac{2e^{j2\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}} df = 1$$

I Matlab (numerisk integration, dvs approximation);

$$\int_{f=-1/2}^{1/2} \frac{2e^{j2\pi f}}{1-0.5e^{-j2\pi f}} df$$

```
i=sqrt(-1);  
z=2*exp(i*2*pi*(-0.5:0.01:0.5))./(1-0.5*exp(-i*2*pi*(-0.5:0.01:0.5)));  
ct = cumtrapz(z*0.01);ct(end)
```

ans =

1.0000 + 0.0000i