Föreläsning 12

Signalbehandling i multimedia - ETI265

Kapitel 9

Strukturer

LTH
2015

Nedelko Grbic
(mtrl. från Bengt Mandersson)

Institutionen för elektro- och informationsteknik
Lund Universitet

Kapitel 9 Strukturer (fortsättning på z-transform)

Differensekvationer

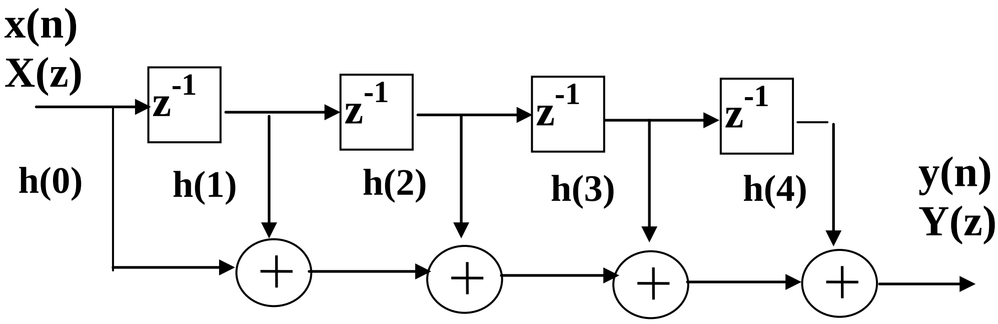
IIR
$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k \, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k)$$

FIR
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k) = \sum_{k=0}^{M} h(k) \, x(n-k)$$

FIR	**Fördelar**	**Alltid stabila**
		kan göras med linjär fas om *h(n)* symmetrisk
	Nackdelar	**M stort (beräkningskrävande)**
		Icke-parametrisk (svårt att beskriva tex resonanstoppar)

IIR	**Fördelar**	**Mindre gradtal (färre beräkningar)**
		Parametriskt (tex poler ger resonanstoppar)
	Nackdelar	**Kan bli instabila, sämre fasgång**

FIR-filter



Detta ritsätt kallas direktform, transversalfilter, tapped delay filter.

Ur figuren får vi direkt

$$y[n] = h[0]\,x[n] + h[1]\,x[n-1] + h[2]\,x[n-2] + h[3]\,x[n-3] + h[4]\,x[n-4] =$$
$$= \sum_{k=0}^{4} h[k]\,x[n-k]$$

och med z-transform

$$Y(z) = h[0]\,X(z) + h[1]\,z^{-1}\,X(z) + h[2]\,z^{-2}\,X(z) + h[3]\,z^{-3}\,X(z) + h[4]\,z^{-4}\,X(z) =$$
$$= H(z)\;X(z)$$

Kommentar:
Vid FIR-filter med linjär fas är impulssvaret symmetriskt.
Detta kan man utnyttja för att reducera antalet multiplikationer, se boken

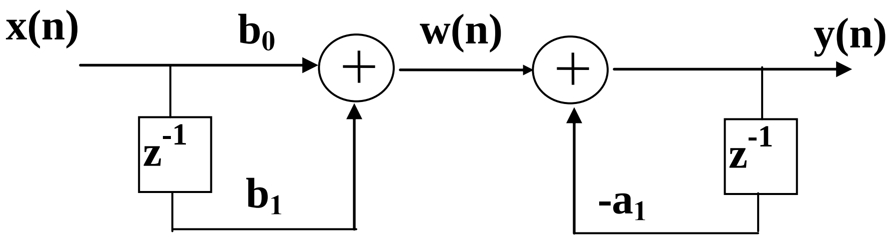
IIR-filter

Direktform I och direktform II (normalform)

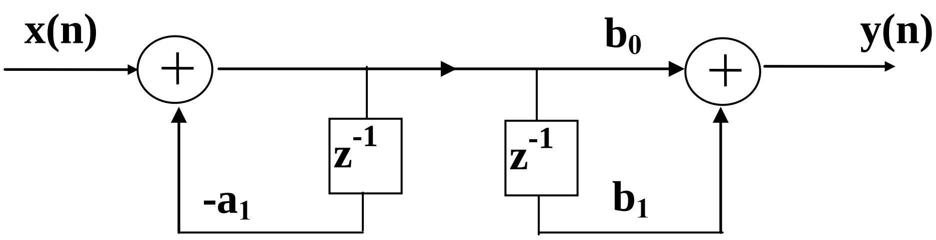
Exempel: Första ordningen

$$y(n) + a_1\, y(n-1) = \underbrace{b_0\, x(n) + b_1\, x(n-1)}_{w(n)}$$

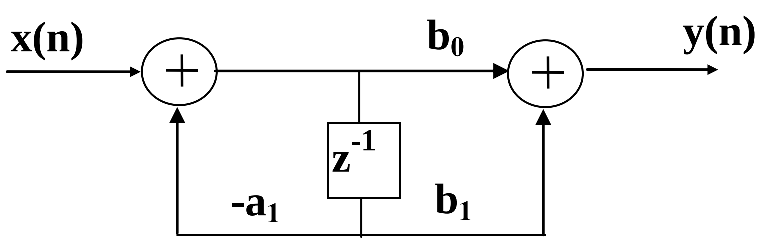
Detta kan vi rita som (direktform I)



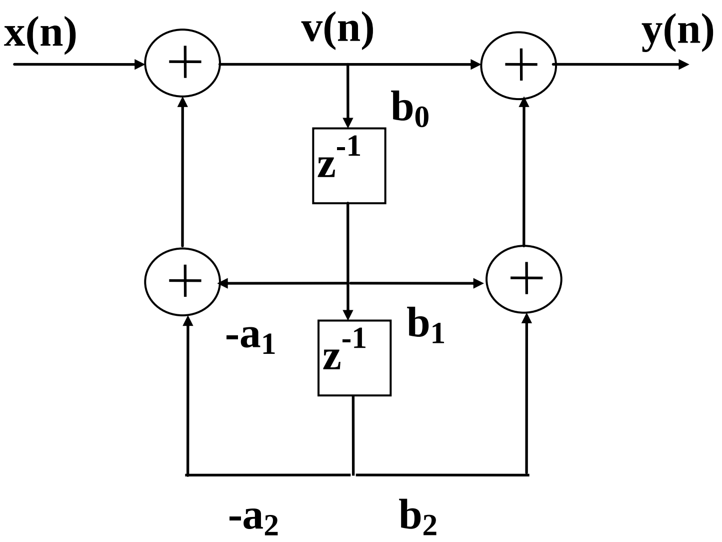
Eftersom det är linjärt kan vi kasta om ordningen på delkretsarna



Vi kan slå ihop fördröjningen och får då direktform II (normalform, kanonisk form)



För en andra ordningens krets får vi



Om ovanstående krets är given och då vi söker in-utsignalsamband måste vi införa en hjälpvariabel, här *v(n)*.

Lös med z-transform

$$V(z) = -z^{-1}a_1V(z) - z^{-2}a_2V(z) + X(z)$$

$$V(z) + z^{-1}a_1V(z) + z^{-2}a_2V(z) = X(z)$$

$$V(z)(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) = X(z)$$

$$V(z) = \frac{X(z)}{(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})}$$

$$Y(z) = b_0\,V(z) + z^{-1}b_1\;V(z) + z^{-2}b_2\;V(z) =>$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2})\;V(z) =>$$

vilket ger

$$Y(z) = \underbrace{\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}}_{H(z)} X(z)$$

Vilket är det samma som (i Z-transform domän)

$$Y(z) + z^{-1} a_1 Y(z) + z^{-2} a_2 Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1} b_1 X(z) + z^{-2} b_2 X(z)$$

Vilket är det samma som (i differansekv.)

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k \, y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x(n-k)$$

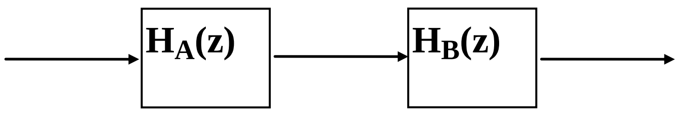
Parallell, kaskad (serie)

Vid implementering är det numeriskt bäst att implementera systemet som kaskad eller seriekoppling av 1:a och 2:a ordningens delsystem.

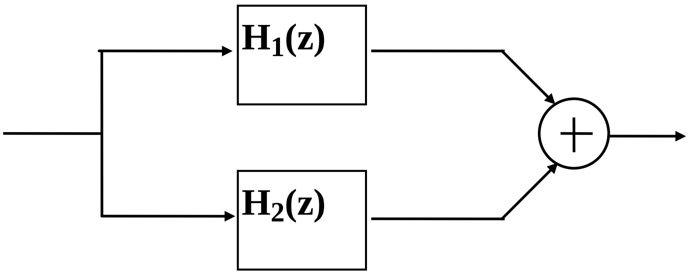
Exempel

$$H(s) = \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}}_{hela} = \begin{bmatrix} poler & p_1 = 0.5 \\ & p_{2,3} = \pm j\,0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{kaskad(serie)} = \underbrace{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{parallell} =$$



Kaskad

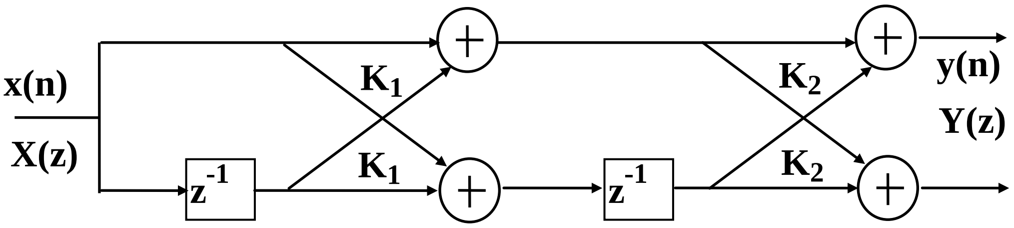


Parallell

Latticefilter

En struktur som är mycket vanlig vid modellering av signaler, speciellt talssignaler är latticefilter. Vi går igenom det med exempel.

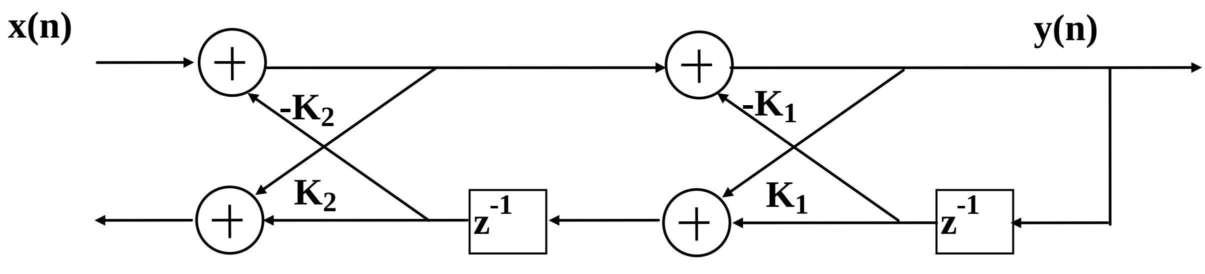
Andra ordningens lattice-FIR $$H(z) = A_2(z)$$



Om alla $|K_i| < 1$ **är alla rötterna (nollställena) innanför enhetscirklen**

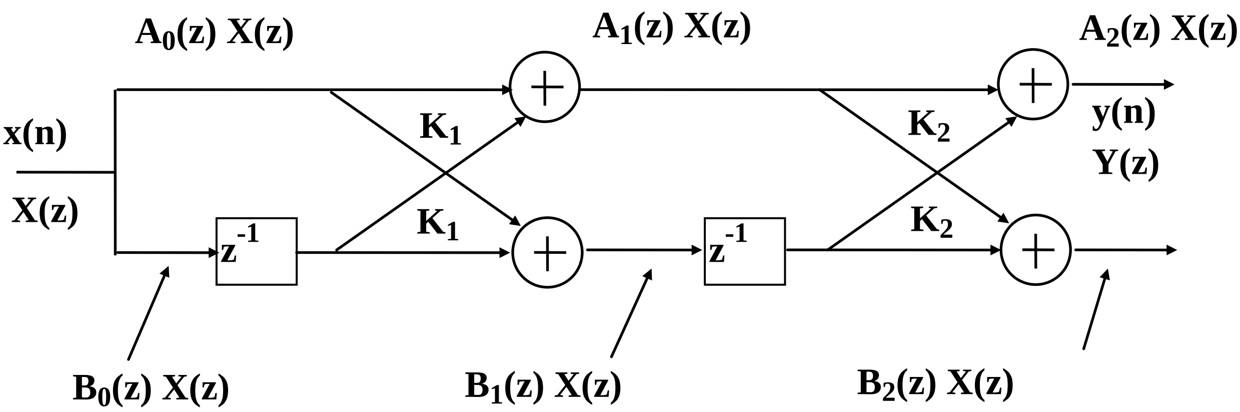
Andra ordningens lattice all-pole IIR (används i talsyntes och i GSM)

IIR: $$H(z) = \frac{1}{A_2(z)} \qquad all \quad pole \quad filter$$



Om alla $|K_i| < 1$ **är alla rötterna (polerna) innanför enhetscirklen**

Analys av lattice FIR



Analys steg för steg

Steg 0:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1$$

Steg 1:

$$A_1(z) = 1 + K_1\, z^{-1}$$

$$B_1(z) = K_1 + z^{-1}$$

Steg 2:

$$A_2(z) = A_1(z) \quad + K_2\, z^{-1}\, B_1(z) = 1 + (K_1 + K_1 K_2)z^{-1} + K_2\, z^{-2}$$

$$B_2(z) = K_2\, A_1(z) + \quad z^{-1}\, B_1(z) = K_2 + (K_1 + K_1 K_2)z^{-1} + z^{-2}$$

Slutsats: ***$B_2(z)$*** **kan fås ur** ***$A_2(z)$*** **med koeff i omvänd ordning.**

$K_2 = \alpha_2(2)$

Allmänt

Steg m:

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) \qquad + K_m\, z^{-1}\, B_{m-1}(z)$$

$$B_m(z) = K_m\, A_{m-1}(z) + \qquad z^{-1}\, B_{m-1}(z)$$

I matrisform:

$$\begin{pmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1}\, B_{m-1}(z) \end{pmatrix}$$

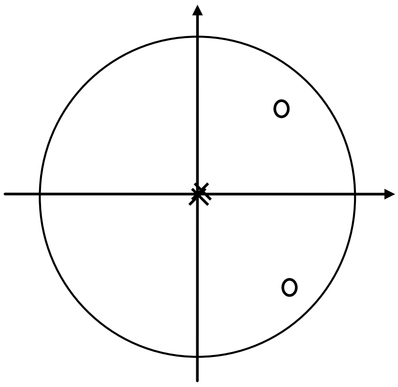
och baklänges

$$A_{m-1}(z) = \frac{1}{1-K_m^2}\left(A_m(z) - K_m\, B_m(z)\right)$$

Om alla $|K_i| < 1$ **är alla rötterna innanför enhetscirklen**

Exempel

Givet:



$$H(z) = 1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm j \frac{\pi}{4}}$$

Sökt: Beräkna Lattice-FIR (dvs parametrarna K_i)

Lösning: Starta med

$$A_2(z) = H(z) = 1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} \quad ger \;\; k_2 = \frac{1}{2}$$

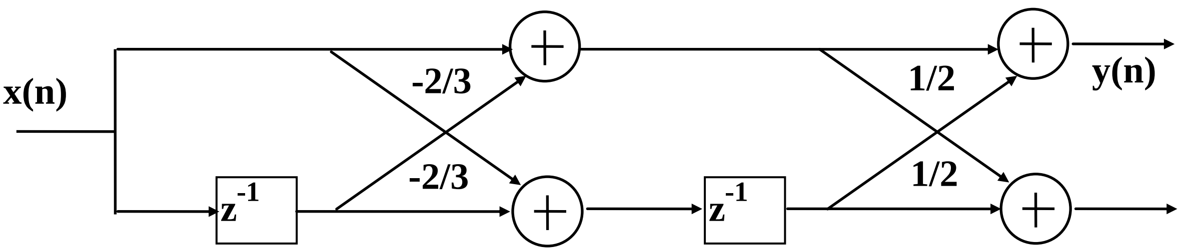
$$B_2(z) = \frac{1}{2} - z^{-1} + z^{-2}$$

Beräkna sedan (baklänges)

$$A_1(z) = \frac{1}{1 - K_2^2} (A_2(z) - K_2 \, B_2(z)) =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} (1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} - \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - z^{-1} + z^{-2})) =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} z^{-1} \qquad ger \quad K_1 = -\frac{2}{3}$$



Algoritmer:

Framlänges: Givet K_m

$$A_0(z) = 1 \quad B_0(z) = 1$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z)$$
$$B_m(z) = ur A_m(z) \; med \; koeff \; i \; omvänd \; ordning$$
$$m = 1,2,\ldots M-1 \;\; FIR \;\; längd \; M, \;\; gradtal \; M-1$$

Slutligen $H(z) = A_{M-1}(z)$

Baklänges: Givet *H(z)*

$$A_{M-1}(z) = H(z)$$

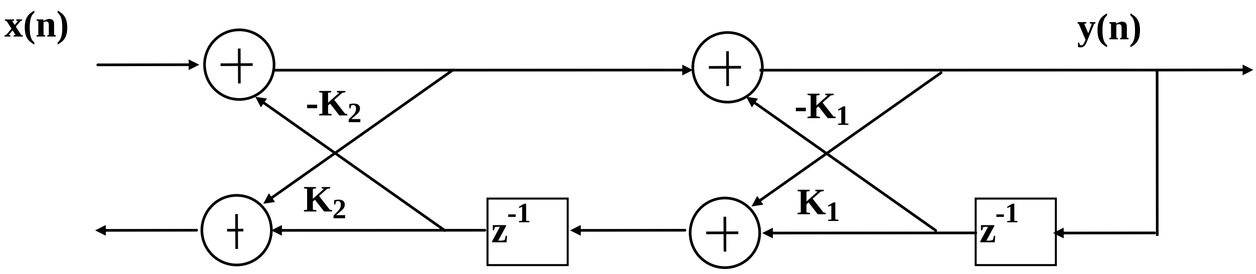
$$K_m = \alpha_m(m)$$
$$A_{m-1}(z) = \frac{1}{1-K_m^2}\left(A_m(z) - K_m B_m(z)\right)$$
$$B_{m-1}(z) \;\; ur \;\; A_{m-1}(z)$$

ger K_m ***m=M-1,M-2,…,1***

För kännedom: Lattice all-pole IIR (används i GSM)

Vi rita om kretsen enligt nedan. Analyserar vi nu kretsen finner vi att vi får samma ekvationer som tidigare men polynomet A(z) är nu nämnarpolynomet (testa gärna själv).

IIR:
$$H(z) = \frac{1}{A(z)} \, (all\ pole)$$



Samma ekvationer som för lattice-FIR