第六章 微分方程

§1 微分方程的基本概念

引例. 一曲线通过点(1,2)，在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$，求该曲线的方程.

解：设所求曲线方程为 $y = y(x)$，则有如下关系式：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x & ① \\ y\big|_{x=1} = 2 & ② \end{cases}$$

由 ① 得 $y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$ （C为任意常数）

由 ② 得 $C = 1$，因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

微分方程的基本概念

含未知函数的导数的方程叫做微分方程 .例 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$

分类 $\begin{cases} \text{常微分方程（本章内容）} \\ \text{偏微分方程} \end{cases}$

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的阶.

一般地，n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或 $$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$ （n 阶显式微分方程）

微分方程的解 — 使方程成为恒等式的函数.

$\begin{cases} \text{通解} — \text{解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.} \\ \text{特解} — \text{不含任意常数的解} \end{cases}$

初始条件 — 确定通解中任意常数的条件.

n 阶方程的初始条件(或初值条件):

$$y(x_0) = y_0 ,\ y'(x_0) = y_0' ,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

引例 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 2 \end{cases}$

通解: $y = x^2 + C$

特解: $y = x^2 + 1$

例: $y'' = x$ $\quad y = \dfrac{1}{6}x^3 + cx$ 是解

例 $y' = y$, 通解 $y = Ce^x$;

例: $y'' - y' - 2y = 0$

$y = c_1 e^{2x+c_2}$ 是解, 非通解, 非特解

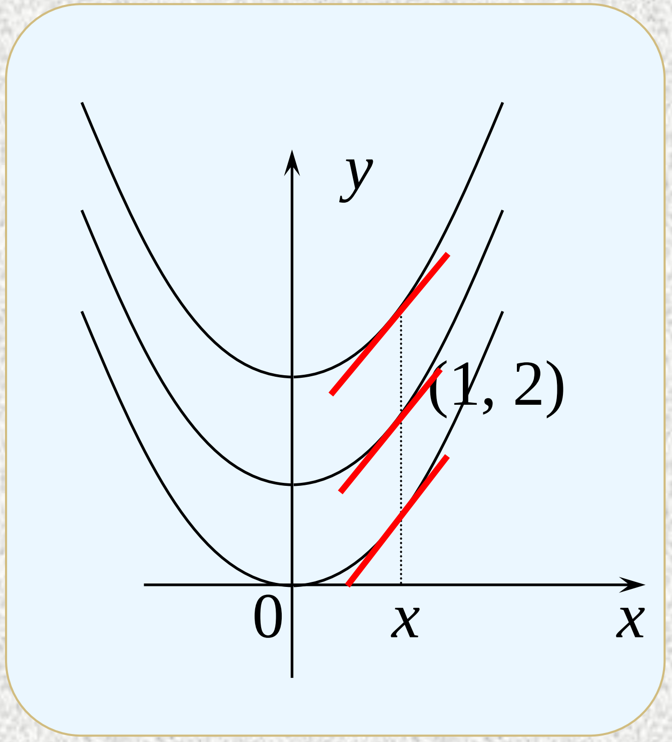
引例：$\frac{dy}{dx}=2x$ 通解：$y=x^2+C$ 特解：$y=x^2+1$

微分方程解的**图形**称为微分方程的**积分曲线**。

通解的图形是**积分曲线族**,

特解的图形是**积分曲线族**

中的一条**积分曲线**。



例. 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ (C_1, C_2为常数)

是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$ 的通解

解： $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -C_1 k^2 \cos kt - C_2 k^2 \sin kt$$

$$= -k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) = -k^2 x$$

$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是方程的解 .

C_1, C_2 是两个独立的任意常数，故它是方程的通解.

微分方程基本问题：求解方程中的函数y

四、小结

本节基本概念：

微分方程；

微分方程的阶；

微分方程的①解；②通解；③特解；

初始条件；

积分曲线.

6.2一阶微分方程的常见类型及解法

一、 变量可分离方程

如果一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$右端的 $f(x,y)$

可以分解为两个一元函数的乘积，即有

$g(y)dy = f(x)dx$ 称此方程为**变量可分离方程.**

解法：两边积分

例1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解：分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

说明：在求解过程中每一步不一定是同解变形,可能增、减解

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

即 $y=\pm\mathrm{e}^{x^3+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^3}$

令 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$

$y=C\mathrm{e}^{x^3}$ （C 为任意常数）

（此式含分离变量时丢失的解 $y=0$）

例1　求方程 $\dfrac{dy}{dx}=(y+1)\cot x$ 的通解.

解：　分离变量得 $\dfrac{dy}{y+1}=\cot x dx$

两边积分　$\displaystyle\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx+C$

如何验证答案正确？

解得　$\ln|y+1|=\ln|\sin x|+C$

故　$\left|\dfrac{y+1}{\sin x}\right|=e^C$,　$\dfrac{y+1}{\sin x}=\boxed{\pm e^C}$　记为C

$\therefore$　原方程的通解为　$y=C\sin x-1.$

例2 解方程 $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x-y}+xe^{-y}$， $y\big|_{x=0}=0.$

解：分离变量得 $e^{y}dy=(e^{2x}+x)dx$

两边积分 $e^{y}=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\dfrac{1}{2}x^{2}+C,$

$\because\ y\big|_{x=0}=0,\quad \therefore\ C=\dfrac{1}{2},$

故所求方程特解为 $e^{y}=\dfrac{1}{2}(e^{2x}+x^{2}+1).$隐式解

或 $y=\ln(e^{2x}+x^{2}+1)-\ln 2.$ 显式解

例3 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{y}$

解 若$y\neq 0$,方程可变形为$\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=dx$

两端积分 $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int dx$, 得$2\sqrt{y}=x+C$

则$y=\dfrac{1}{4}(x+C)^2$为方程的通解.

显然 $y=0$亦为方程的解，但它不含在通解中.

$\therefore$ 方程的解为 $y=\dfrac{1}{4}(x+C)^2$（C为任意常数）

及$y=0$. 说明：通解不一定包含了方程的所有解.

例4. 求下述微分方程的通解： $y' = \sin^2(x-y+1)$

解： 令 $u = x - y + 1,$

则 $u' = 1 - y'$

故有 $1 - u' = \sin^2 u$

即 $\sec^2 u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

解得 $\tan u = x + C$

所求通解： $\tan(x-y+1) = x + C$ 隐式解

二、 齐次方程

1. 定义 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$ 的微分方程称为齐次方程.

x,y次数相同

例如方程: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y/x}{1-y/x}=f(\dfrac{y}{x})$

又如方程: $(x^2+xy)dx+(y^2-xy)dy=0$

实事上, 方程可化为: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+xy}{xy-y^2}=\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=f(\dfrac{y}{x})$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\frac{y}{x})$$

解法：令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，

代入原方程得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$

分离变量：$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分，得 $$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

变量还原 便得原方程的通解.

例1. 求微分方程通解 $(y^2-2xy)\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0.$

解： 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$, 令 $u=\dfrac{y}{x}$,

则有 $$u+xu'=2u-u^2$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 即 $\left(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|$, **即** $\dfrac{x(u-1)}{u}=C$

变量还原得通解 $x(y-x)=Cy$ **(*C* 为任意常数)**

例2 解方程 $(x-y\cos\frac{y}{x})dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0.$

解 原方程变形为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-1}{\cos\frac{y}{x}},$

令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$, 代入原方程得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u\cos u-1}{\cos u}=u-\frac{1}{\cos u},$$

即 $\cos u du=-\frac{dx}{x}$，解得 $\sin u=-\ln|x|+C$

所以原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C.$

例3：求特解：$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 满足$y(1)=2$

解：令$u=\frac{y}{x}$得：$y'=u+x\frac{du}{dx}$

代入原方程并化简得：$udu=\frac{1}{x}dx$

积分得：$u^2=\ln x^2+c$

变量还原得：$(\frac{y}{x})^2=\ln x^2+c$

代入$y(1)=2$得：c=4

特解为：$(\frac{y}{x})^2=\ln x^2+4$

三、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

当$Q(x) \equiv 0$,

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$y' + P(x)y = 0$ 称为一阶线性齐次微分方程;

当$Q(x) \not\equiv 0$,

$y' + P(x)y = Q(x)$ 称为一阶线性非齐次微分方程.

1. 解齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 解非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用常数变易法：作变换 $y(x)=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，则

$$u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)u\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)u\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两端积分得 $$u=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

故原方程的通解 $$\boxed{y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]}$$

即 $$y=\underbrace{C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

例1 求方程 $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

公式法 这里 $P(x)=-\dfrac{2}{x+1}$, $Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$,

所以方程的通解为

$$y=e^{2\int\frac{dx}{x+1}}\left(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot e^{-2\int\frac{dx}{x+1}}dx+C\right)$$

$$=e^{2\ln|x+1|}\left(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot e^{-2\ln|x+1|}dx+C\right)$$

$$=(x+1)^2\left(\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C\right)=(x+1)^2\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right).$$

例2 求方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解 这里 $P(x)=\frac{1}{x}$, $Q(x)=\frac{\sin x}{x}$,

所以方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln|x|}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\ln|x|}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{|x|}\left(\int\sin x\frac{|x|}{x}dx+C\right)=\frac{1}{x}(-\cos x+C).$$

例3 解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2}$.

线性微分方程
常见形式

解 原方程可化为线性方程 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x-y^2}{y}$.

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=-y$$ 这里 $P(y)=-\dfrac{2}{y}$, $Q(y)=-y$,

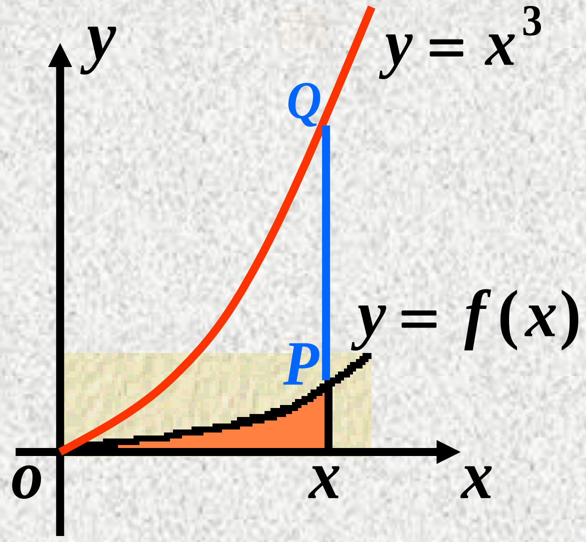
所以方程的通解为

$$x=e^{2\int\frac{dy}{y}}\left(-\int ye^{-2\int\frac{dy}{y}}dy+C\right)$$

$$=e^{2\ln y}\left(-\int ye^{-2\ln y}dy+C\right)$$

$$=y^2\left(-\int\frac{dy}{y}+C\right)=y^2(C-\ln y).$$

例4 如图所示，平行于y 轴的动直线被曲线 $y = f(x)$ 与$y = x^3\ (x \ge 0)$ 截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$.



解 由题意 $\int_0^x f(x)dx = x^3 - f(x)$,

两边求导得 $f(x) = 3x^2 - f'(x)$,

即 $y' + y = 3x^2$,

$$y = e^{-\int dx}\left[\int 3x^2 e^{\int dx}dx + C\right] = e^{-x}\left(\int 3x^2 e^x dx + C\right)$$

$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6$, 由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C = -6$,

故所求曲线方程为 $y = -6e^{-x} + 3x^2 - 6x + 6.$

四、伯努利方程

伯努利(*Bernoulli*)方程. $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

解法: 伯努利方程经过$\boxed{\text{变量代换}}$可化为线性方程.

两端除以y^n，得 $y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

令 $z=y^{1-n}$, 则 $\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$,

代入上式有 $\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

通解: $z=y^{1-n}=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left(\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right)$

例1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解1: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{z}{x}=-a\ln x$

其通解为 $z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

通解：$z = y^{1-n} = e^{-\int (1-n)p(x)dx}\left(\int (1-n)Q(x)e^{\int (1-n)P(x)dx}dx + c\right)$

例1. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{y}{x} = a(\ln x)y^2$ **的通解.**

解2: 公式法：

通解：$y^{1-n} = e^{-\int (1-n)\frac{1}{x}dx}\left(\int (1-n)a\ln x e^{\int (1-n)\frac{1}{x}dx}dx + C\right)$

$$\therefore \ \frac{1}{y} = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(-a\int \ln x e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right)$$

$$= x\left[\, C - \frac{a}{2}(\ln x)^2 \,\right]$$

例2：求方程$(x^2y^3+xy)y'=1$的通解

解：把原方程变形为：$\dfrac{dx}{dy}-yx=y^3x^2$

这里$n=2, p(y)=-y, Q(y)=y^3$

由通解公式得：

$$x^{-1}=e^{-\int(-1)(-y)dy}[\int(-1)y^3e^{\int(-1)(-y)dy}dy+c]$$

$$=e^{-\frac{y^2}{2}}(-\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}dy+c)=ce^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2$$

变量代换法是微分方程求解中十分重要的手段！

例3 用适当的变量代换解下列微分方程：

1. $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x};$$

解 令 $z=xy$, 则 $$\frac{dz}{dx}=y+x\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx}=y+x\left(\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sin^2 z},$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sin^2 z}}$$

$\sin^2 z$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sin^2 z}$$

分离变量法得 $\sin^2 z\,dz = dx$

即 $(1-\cos 2z)dz = 2dx$

积分得 $2z-\sin 2z = 4x + C,$

将 $z = xy$ 代回,

通解： $2xy-\sin(2xy)=4x+C.$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}.$

解：令 $x+y=u$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1,$

代入原式 $\dfrac{du}{dx}-1=\dfrac{1}{u},$

分离变量法得 $\dfrac{u}{u+1}du=dx,$

积分得 $u-\ln|u+1|=x+C,$

将 $u=x+y$ 代回，所求通解为 $y=\ln|x+y+1|+C$

另解：方程变形为 $\dfrac{dx}{dy}=x+y.$ 一阶线性微分方程

一阶微分方程总结

1. 可分离变量方程 $P(x)dx=Q(y)dy$

通解：$\int P(x)dx=\int Q(y)dy+C$ 分离变量、积分

2. 齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$， 变量代换 $\dfrac{y}{x}=u$

3. 一阶线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

通解：$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

4. *Bernoulli* 方程 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ 令 $y^{1-n}=z$

通解：$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left(\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right)$

第三节　高阶线性微分方程

一阶线性齐次微分方程　$y' + P(x)y = 0$

通解: $y = C e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

一阶线性非齐次微分方程　$y' + P(x)y = Q(x)$

公式: $y = e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]$

通解: $y = \underbrace{C e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}Y} + \underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解 } y^*}$

一、二阶线性微分方程

形式：$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

$$\begin{cases} f(x) \not\equiv 0 \text{ 时, 称为非齐次方程;} \\ f(x) \equiv 0 \text{ 时, 称为齐次方程.} \end{cases}$$

***推广：n* 阶线性微分方程**的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

1、二阶线性齐次方程解的结构

定理1. 若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解，$\boxed{\text{则 } y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$ (C_1, C_2为任意常数)

也是该方程的解. (解的叠加原理)

证: 将 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 代入方程左边, 得

$$[C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + P(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]$$

$$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2]$$

$$= 0$$

说明:

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 不一定是通解.

例如, $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$$y_2(x)=2\,y_1(x)\text{ 也是齐次方程的解}$$

但是 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=(C_1+2\,C_2)y_1(x)$不是通解

为解决通解的判别问题,

下面引入函数的线性相关与 线性无关概念.

定义 设$y_1(x), y_2(x)$在区间I上有定义，

若在区间I上 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} =$ 常数，则 $y_1(x), y_2(x)$ **线性相关;**

若在区间I上 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，则 $y_1(x), y_2(x)$ **线性无关.**

例： $y_1 = \cos x$， $y_2 = \sin x$， 又 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数,

故：$y_1 = \cos x$， $y_2 = \sin x$， **线性无关.**

定理2(齐次方程通解结构) 如果$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个线性无关的特解,

即$y_1(x)$、$y_2(x)$满足:[1] 是解，[2]线性无关.

那么$y=C_1y_1+C_2y_2$就是方程的通解.其中C_1、C_2为任意常数.

例如：方程$y''-y=0$的两个解为

$$y_1=e^x,\ y_2=e^{-x},\ \text{又}\ \frac{y_2}{y_1}=e^{-2x}\neq\text{常数},$$

$\therefore\quad y=C_1e^x+C_2e^{-x}$是方程的通解.

2、二阶非齐次线性方程的解的结构

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

定理3 设 y^*是二阶非齐次线性方程(2)的一个特解,

Y 是与(2)对应的齐次方程(1)的通解,

那么 $y = Y + y^*$是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

$$\boxed{y(\text{非齐通}) = Y(\text{齐通}) + y^*(\text{非齐特})}$$

例如, 方程 $y'' + y = x$ 有特解 $y^* = x$

对应齐次方程 $y'' + y = 0$

有通解 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

因此该方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$

定理4 （非齐次方程解的叠加原理）

(2) 设 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 分别是线性非齐次方程 [1],[2]的解

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) \quad \cdots[1]$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x) \quad \cdots[2]$$

那么 $y = y_1^*(x) + y_2^*(x)$是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \cdots[3]$$

线性非齐次方程[3]的解。

推论 设 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$ 的两个(特)解,

那么①$y_1^* - y_2^*$ 是方程: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的解,

② $\dfrac{y_1^* + y_2^*}{2}$ 仍是方程: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解。

（记笔记）

例1. 已知微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

有三个特解 $y_1 = x,\ y_2 = \mathrm{e}^x,\ y_3 = \mathrm{e}^{2x}$,

求此方程满足初始条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$ 的特解 .

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而 $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 线性无关,

故原方程通解为 $y = C_1(\mathrm{e}^x - x) + C_2(\mathrm{e}^{2x} - x) + x$

代入初始条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$, 得 $C_1 = -1,\ C_2 = 2$,

故所求特解为 $y = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$.

二、二阶常系数齐次线性方程

1、标准形式 $y'' + py' + qy = 0$

推广：n阶常系数线性齐次微分方程的标准形式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_k \text{ 均为常数})$$

2、二阶常系数齐次线性方程解法

$y'' + py' + qy = 0$ ------特征方程法

从而猜想方程有形如 $y = e^{rx}$ 的解.

设 $y = e^{rx}$， 将其代入上方程, 得

$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$ $\because e^{rx} \neq 0$,

故有 $r^2 + pr + q = 0$ 特征方程

特征根 $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$,

有两个不相等的实根($\Delta > 0$)

特征根为$r_1 = \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$, $r_2 = \dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$,

两个线性无关的特解

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x},$$

得齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

③ 有两个相等的实根 $(\Delta = 0)$

特征根为 $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$， 一特解为 $y_1 = e^{r_1 x}$，

设另一特解为 $y_2 = u(x)e^{r_1 x}$，

将 y_2，y_2'，y_2'' 代入原方程并化简，

$$u'' + \underline{(2r_1 + p)}u' + \underline{(r_1^2 + pr_1 + q)}u = 0,$$

知 $u'' = 0$， 取 $u(x) = x$， 则 $y_2 = xe^{r_1 x}$，

得齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$；

有一对共轭复根 $(\Delta < 0)$

特征根为 $r_1 = \alpha + j\beta,\quad r_2 = \alpha - j\beta,$

得齐次方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

综上所述求二阶常系数齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=0$ 通解的一般步骤:

(1) 写出方程的特征方程; $r^2+pr+q=0$

(2) 求出特征根; r_1,r_2

(3) 根据特征根的不同情况,得到相应的通解.

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
实根 $r=r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

[例1] 求方程$y''+3y'-10y=0$的通解

[解]　写出特征方程

$$r^2+3r-10=0$$

$$\longrightarrow (r-2)(r+5)=0$$

$$\longrightarrow r_1=2,\quad r_2=-5$$

通解　$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}$

例2 求方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

解： 特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$,

解得 $r_1 = r_2 = -2$,

故所求通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

例3 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2+2r+5=0$,

解得 $r_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}, =-1\pm 2i$,

故所求通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

3、*n*阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

特征方程为 $r^n + P_1 r^{n-1} + \cdots + P_{n-1} r + P_n = 0$

特征方程的根	通解中的对应项
若是k重根r	$(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha \pm j\beta$	$[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) \cos\beta x$ $+ (D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1} x^{k-1}) \sin\beta x] e^{\alpha x}$

[例4] 求方程$y''' - y' = 0$的通解

[解]　写出特征方程　$r^3 - r = 0$

$$\longrightarrow \quad r(r-1)(r+1) = 0$$

$$\longrightarrow \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = -1$$

通解　$y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$

[例5] 求方程$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$的通解

[解]　写出特征方程

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$

$$\longrightarrow \quad (r-1)^3 = 0$$

$$\longrightarrow \quad r = 1 \quad (\text{三重根})$$

通解　$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x$

[例6] 求方程 $y^{(4)}+2y''+y=0$ 的通解

[解] 写出特征方程 $r^4+2r^2+1=0$

$\longrightarrow$ $(r^2+1)^2=0$

$\longrightarrow$ $r_{1,2}=\pm i$ (二重根)

通解 $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$

例7 求方程

$y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$的通解.

解 特征方程为 $\boxed{r^5+r^4}+\boxed{2r^3+2r^2}+\boxed{r+1}=0,$

$$(r+1)(r^2+1)^2=0,$$

特征根为 $r_1=-1,\quad r_{2,3}=\pm i$ (二重根)

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

例8：$y''' - y' = 0$的那一条积分曲线在原点处有拐点，

且以$y = 2x$为它的切线？

解：由题知$y(0) = 0,\quad y'(0) = 2,\quad y''(0) = 0$

又 $y''' - y' = 0$得：$r^3 - r = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 1,\ r_3 = -1$

通解$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

$$\Rightarrow y' = c_2 e^x - c_3 e^{-x} \Rightarrow y'' = c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

代入初始条件得：$c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = -1$

所求的积分曲线为$y = e^x + e^{-x}$

例9：4阶常系数齐次线性微分方程的两个特解：

$y_1 = xe^x$， $y_2 = \sin x$,求此微分方程。

解：$\because y_1 = xe^x$是解， $\therefore r = 1$至少为二重根。

又$\because y = \sin x$是解，$\therefore r_{3,4} = \pm i$至少为一对共轭复根

而4阶微分方程的特征方程只有4个根

故特征方程为：$(r-1)^2(r+i)(r-i) = 0$

即：$r^4 - 2r^3 + 2r^2 + 2r + 1 = 0$

所求方程：$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$

三、二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \qquad ①$$

根据解的结构定理，其通通解为

$$y = \underbrace{Y}_{\text{齐次方程通解}} + \underbrace{y^*}_{\text{非齐次方程特解}}$$

求特解的方法 — **待定系数法**

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式,

1、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型　　$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$,

由方程的特点可以猜想方程有形如

$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 的特解， 其中 $Q(x)$ 为待定多项式．

将 y^* 代入方程　$y^{*\prime}=Q'(x)e^{\lambda x}+\lambda Q(x)e^{\lambda x}$,

$$y^{*\prime\prime}=Q''(x)e^{\lambda x}+2\lambda Q'(x)e^{\lambda x}+\lambda^2 Q(x)e^{\lambda x},$$

$$Q''(x)\cancel{e^{\lambda x}}+2\lambda Q'(x)\cancel{e^{\lambda x}}+\lambda^2 Q(x)\cancel{e^{\lambda x}}+p(Q'(x)\cancel{e^{\lambda x}}+\lambda Q(x)\cancel{e^{\lambda x}})$$

$$+qQ(x)\cancel{e^{\lambda x}}=\cancel{e^{\lambda x}}P_m(x)$$

$$\boxed{Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)\quad(*)}$$

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x) \quad (*)$$

特征方程求导

特征方程

(1) 若λ不是特征方程的根, $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0,$

可设 $Q(x)=Q_m(x)$，此时特解$y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$

$$Q_m(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

其中$Q_m(x)$的系数a_k待定.

注：将$Q_m(x)$代入（*）式，求待定系数a_k

$$Q''(x)+\underbrace{(2\lambda+p)}_{\neq 0}Q'(x)+\underbrace{(\lambda^2+p\lambda+q)}_{=0}Q(x)=P_m(x)\quad (*)$$

(2) 若 λ 是特征方程的单根，$\lambda^2+p\lambda+q=0,\ 2\lambda+p\neq 0,$

$$(*)\Rightarrow Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=P_m(x)\qquad (**)$$

故 $Q(x)$ 应 $m+1$ 次多项式，可设 $Q(x)=xQ_m(x)$，

$\therefore\ y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$； $Q_m(x)$的系数待定.

$$Q''(x)+\underline{(2\lambda+p)}Q'(x)+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}Q(x)=P_m(x) \quad (*)$$

(3) 若 λ 是特征方程的二重根，$\lambda^2+p\lambda+q=0,\ 2\lambda+p=0,$

$$\Rightarrow Q''(x)=P_m(x) \qquad (***)$$

故 $Q(x)$ 应是 $m+2$ 次多项式，可设 $Q(x)=x^2Q_m(x)$，

$y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$； $Q_m(x)$的系数待定.

综上所述我们有以下结论:

非齐次方程$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$有特解:

$Q_m(x)$是与$P_m(x)$同次的多项式，系数待定.

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}, \quad k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases},$$

$$= Q(x)e^{\lambda x}$$

注：将$Q(x)$代入下式，求待定系数较简

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x) \quad (*)$$

方程 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$ 有形如 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$

例1 下列方程具有怎样形式的特解？并求出特解

(1) $y''+y=\boxed{e^{5x};}$

解 (1) 特征方程为 $r^2+1=0$, 特征根为 $r_{1,2}=\pm i$,

$\because\ \lambda=5$ 不是特征根, 设 $y^*=x^0Ae^{5x}$

将 y^* 代入原方程:

$$25A\cancel{e^{5x}}+A\cancel{e^{5x}}=\cancel{e^{5x}}\quad 得\quad A=\frac{1}{26}$$

特解为: $y^*=\dfrac{1}{26}e^{5x}$

例1　下列方程具有怎样形式的特解？

(2) $y'' - y = \boxed{xe^{-x}}$;　　　$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$

(3) $y'' - 2y' + y = (3x^2 - 2)e^x$.

解：(2) 特征方程为 $r^2 - 1 = 0$，　特征根为 $r_{1,2} = \pm 1$,

$\because\ \lambda = -1$ 是单特征根，　设 $y^* = x(Ax + B)e^{-x}$

(3) 特征方程为 $r^2 - 2r + 1 = 0$，　特征根为 $r_{1,2} = 1$,

$\because\ \lambda = 1$ 是二重特征根，设 $y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C)e^x$

例2　求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解: 特征方程 $r^2-3r+2=0$, 特征根 $r_1=1,\ r_2=2$,

所以对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$,

又 $\because \lambda=2$ 是单特征根, $\therefore$ 设 $y^*=x(Ax+B)e^{2x}$,

$y^*=(Ax^2+Bx)e^{2x}$, 用待定系数法确定A、B

$$y^{*\prime}=(2Ax+B)e^{2x}+2(Ax^2+Bx)e^{2x},$$

$$y^{*\prime\prime}=2Ae^{2x}+4(2Ax+B)e^{2x}+4(Ax^2+Bx)e^{2x},$$

例2 求方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的通解.

齐次通解：

$y^* = x(Ax+B)e^{2x}, = Q(x)e^{2x}$ $\quad P_m(x)$ $\quad Y = C_1e^x + C_2e^{2x},$

$$y^{*\prime} = (2Ax+B)e^{2x} + 2(Ax^2+Bx)e^{2x},$$

$$y^{*\prime\prime} = 2Ae^{2x} + 4(2Ax+B)e^{2x} + 4(Ax^2+Bx)e^{2x},$$

代入方程, 得 $2Ax + B + 2A \equiv x$ 解得 $A = \frac{1}{2}, B = -1,$

于是 $y^* = x(\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$

故原方程通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}.$

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x) \quad (*)$$

例3: 求$2y''+5y'=(5x^2-2x-1)e^{-\frac{5}{2}x}$满足$y'(0)=1, y(0)=0$的特解

解：特征方程：$2r^2+5r=0,\ r_1=0, r_2=-\frac{5}{2}$

齐次通解：$y=c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}x}$

设非齐次特解$y^*=x(ax^2+bx+c)e^{-\frac{5}{2}x}=Q(x)e^{-\frac{5}{2}x}$

将$Q(x)=ax^3+bx^2+cx$代入$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=5x^2-2x-1$

得：$a=-\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{5},\ c=\frac{1}{25}$

原方程通解$y=c_1+c_2e^{-\frac{5}{2}x}+x(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{25})e^{-\frac{5}{2}x}$

代入$y'(0)=1, y(0)=0$得$c_1=-\frac{2}{125},\ c_2=\frac{2}{125}$

所求特解$y=-\frac{2}{125}+\frac{2}{125}e^{-\frac{5}{2}x}+x(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{25})e^{-\frac{5}{2}x}$

例4：求$y''-4y'+4y=6x^2+8e^{2x}$的一个特解形式（系数不求）

解：特征方程：$r^2-4r+4=0,\ r_1=r_2=2$

$\therefore y''-4y'+4y=6x^2$ 特解形式$y_1^*=ax^2+bx+c$

$\therefore y''-4y'+4y=8e^{2x}$ 特解形式$y_2^*=dx^2e^{2x}$

故所求特解形式 $y^*=y_1^*+y_2^*=$

2. $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

对非齐次方程

$$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

则可设特解: $y^*=x^k\,\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m\cos\omega x+\tilde{R}_m\sin\omega x]$

其中 $\boldsymbol{k}=\begin{cases}\mathbf{0} & \lambda\pm j\omega\text{不是根}\\ \mathbf{1} & \lambda\pm j\omega\text{是单根}\end{cases}$, $\quad m=\max\{n,l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例5. 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解 .

解: 本题 $\lambda=0,\ \omega=2,\ P_l(x)=x,\ \tilde{P}_n(x)=0,$

特征方程 $r^2+1=0 \Rightarrow r=\pm i$

$\lambda\pm \mathrm{i}\omega=\pm 2\mathrm{i}$ 不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

比较系数, 得 $\begin{cases}-3a=1\\ -3b+4c=0\\ -3c=0\\ -3d+4a=0\end{cases}$ $\therefore\ a=\frac{-1}{3},\ d=\frac{4}{9}$

$b=c=0$

于是求得一个特解 $y^*=\frac{-1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$.

例6　求方程 $y''+y=4\sin x$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，

故对应齐次方程通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x,$

$\because\ \lambda+i\omega=i$ 是单根, 故 $y^*=x(A\cos x+B\sin x),$

$$\therefore\ y^{*\prime}=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x)$$

$$=(Bx+A)\cos x-(Ax-B)\sin x,$$

$$y^{*\prime\prime}=B\cos x-(Bx+A)\sin x-A\sin x-(Ax-B)\cos x$$

$$=-(Ax-2B)\cos x-(Bx+2A)\sin x$$

代入原方程得 $2B\cos x-2A\sin x\equiv 4\sin x,$

$$\therefore\ A=-2,\ B=0,$$

所求非齐次方程特解为 $y^*=-2x\cos x,$

原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x.$

例6 解方程 $y'' - y = 2\cos 2x + 3e^{x} + x$.

解 特征方程为 $r^2 - 1 = 0$，特征根为 $r_{1,2} = \pm 1$,

故对应齐次方程通解为 $Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$,

$f_1(x) = 2\cos 2x$, $\because$ $2i$ 不是特征根,

$\therefore$ $y_1^* = A\cos 2x + B\sin 2x$,

$f_2(x) = 3e^{x}$, $\because$ 1是单特征根, $\therefore$ $y_2^* = Cxe^{x}$,

$f_3(x) = x$, $\because$ 0不是特征根, $\therefore$ $y_3^* = Dx + E$,

从而方程有形如 $y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^*$

$= A\cos 2x + B\sin 2x + Cxe^{x} + Dx + E$ 的特解,

例6　解方程　$y'' - y = 2\cos 2x + 3e^{x} + x.$

齐次方程通解为 $Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$,

有 $y^{*} = A\cos 2x + B\sin 2x + Cxe^{x} + Dx + E$ 的特解,

代入原方程解得

$$A = -\frac{2}{5}, B = 0, C = \frac{3}{2}, D = -1, E = 0.$$

所以原方程通解为

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{2}{5}\cos 2x + \frac{3}{2} xe^{x} - x.$$

例9　解方程　$y'' + y = \cos^2 x.$

解: $r^2 + 1 = 0,\ \Rightarrow r_{1,2} = \pm i.$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

设 $y^* = a + (b\cos 2x + c\sin 2x)$

得　$y^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$

方程通解为：　$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x + C_1\cos x + C_2\sin x.$

结：设特解方法：方程 $y''+py'+qy=f(x)$

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ $y^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x), k=0,1,2.$

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$

$y^*=x^k e^{\lambda x}(R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x), k=0,1.$

3. $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ $y^*=y_1^*+y_2^*.$

综合举例

例1 设 $\varphi(x)$ 有二阶连续导数且满足，

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x (t-x)\varphi(t)dt \text{，求 } \varphi(x).$$

解： $$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x\int_0^x \varphi(t)dt$$

$$\varphi'(x) = e^x + x\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)dt - x\varphi(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t)dt$$

$$\varphi''(x) = e^x - \varphi(x) \qquad y'' + y = e^x$$

$$\therefore \varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$$

又 $\because \varphi(0) = 1,\ \ \varphi'(0) = 1, \therefore C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}e^x$$

第四节 可降阶微分方程

高阶微分方程通过变量换，逐次降阶，化为阶方程

一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程

其特点为： 方程中不显含未知函数y

及其各阶导数 $y', y'', \cdots, y^{(n-1)}$.

解法：

只要在方程两端连续积分n次，便可得方程的通解.

例1 解方程 $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\ln 2$, $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=1.$

解 方程两端积分一次

$$\int y''dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+C_1 \quad =\int\sec^2 x dx+C_1$$

得 $y'=\tan x+C_1$, 由 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=1$ 得 $C_1=0$

$\therefore \quad y'=\tan x$

上式两端再积分一次得 $y=-\ln|\cos x|+C_2$

由 $y\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\ln 2$ 得 $C_2=0$

故所求特解为: $y=-\ln|\cos x|.$

例2. 求解 $y''' = \mathrm{e}^{2x} - \cos x$.

解: $y'' = \int \left(\mathrm{e}^{2x} - \cos x\right)\mathrm{d}x + C_1'$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \cos x + C_1'x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

（此处 $C_1 = \frac{1}{2}C_1'$）

二、$y'' = f(x, y')$ 型微分方程 $y'' = f(x, \boxed{y,} y')$

其特点为： 二阶方程中不显含未知函数 y.

解法： 令 $p = y'$，则 $y'' = \dfrac{dp}{dx}$,

原方程可化为一阶方程

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

例3　解方程 $xy''+y'-x^2=0.$

解 $\because$ 此二阶方程不显含未知函数 y,

一阶线性非齐次微分方程

$\therefore$ 令 $y'=p$，则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$,

原方程可化为 $x\dfrac{dp}{dx}+p-x^2=0$, 即 $\dfrac{dp}{dx}+\dfrac{p}{x}=x$,

从而 $$p=y'=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(\int xe^{\int\frac{dx}{x}}dx+C_1\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int x^2dx+C_1\right)=\frac{1}{3}x^2+\frac{C_1}{x}$$

故原方程的通解为: $y=\dfrac{1}{9}x^3+C_1\ln|x|+C_2.$

例4. 求解 $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy' \\ y\big|_{x=0}=1, \quad y'\big|_{x=0}=3\end{cases}$

解: 设 $y'=p(x)$, 则 $y''=p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p'=2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln|C_1|$, 即 $p=C_1(1+x^2)$

由 $y'\big|_{x=0}=3$, 得 $C_1=3$, 故 $y'=3(1+x^2)$

积分得 $y=x^3+3x+C_2$

又 $y\big|_{x=0}=1$, 得 $C_2=1$, 因此所求特解为 $y=x^3+3x+1$

例5 求方程 $xy^{(5)}-y^{(4)}=0$ 的通解.

解 设 $y^{(4)}=p(x)$, 则 $y^{(5)}=p'(x)$

原方程化为 $xp'-p=0$, $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dx}{x}$, 分离变量方程

解方程, 得 $p=C_1x$, 即 $y^{(4)}=C_1x$,

两端积分, 得 $y'''=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$, $\cdots\ \cdots$,

$$y=\frac{C_1}{120}x^5+\frac{C_2}{6}x^3+\frac{C_3}{2}x^2+C_4x+C_5,$$

所以原方程通解为

$$y=C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5.$$

有缺项的 n 阶方程

对于 $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$ 型方程，

也可令 $\underline{p = y^{(n-1)}}$， 则 $y^{(n)} = \dfrac{dp}{dx}$，

原方程可化为一阶方程 $\dfrac{dp}{dx} = f(x, p).$

三、$y'' = f(y, y')$ 型微分方程 $y'' = f(\boxed{x,} y, y')$

其特点为： 二阶方程中不显含自变量 x.

解法： 令 $p = y'$，则 $y'' = \dfrac{dp}{dx}$

原方程可化为一阶方程 $\dfrac{dp}{dx} = f(y, p)$

出现两个函数 : $y = y(x), p = p(x)$ 均为 x 的函数

能不能使 x 不出现!

三、$y'' = f(y, y')$ 型微分方程　$y'' = f(\boxed{x,}y, y')$

其特点为： 二阶方程中不显含自变量 x.

解法： 令 $p = y'$，$\boxed{y''} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} \boxed{= p\dfrac{dp}{dy},}$

记住！

原方程可化为一阶方程　$p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$

p 为函数，y为自变量！

例6. 求通解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$$\therefore \quad y' = C_1 y$$

故所求通解为 $y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}$

边解边定常数计算简便.

例7 求方程$yy''=2(y'^2-y')$, 满足$y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=2$ 的特解。

解 令 $p=y'$, 则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$

原方程可化为 $yp\dfrac{dp}{dy}=2p(p-1)$,

1^0 当$p\neq 0$时, $y\dfrac{dp}{dy}=2(p-1)$,

$\because\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=2$

$$\frac{dp}{p-1}=\frac{2dy}{y},\qquad \Rightarrow p=Cy^2+1 \quad \Rightarrow p=y^2+1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y^2+1 \Rightarrow y=\tan(x+C) \Rightarrow y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$$

2^0 $p=0$, $y=c$ 与 $y'\big|_{x=0}=2$矛盾!

$\therefore$ 方程特解为: $y=\tan(x+\dfrac{\pi}{4})$。

例8. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, 代入方程得

$$p\,dp = e^{2y}dy$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$,

得 $\dfrac{\mathbf{d}y}{dx} = p = e^y$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$ 开平方时, 要根据题意确定正负号.

例9　求方程 $y''=(y')^3+y'$，的通解. 方程既缺 x 又缺 y

解1　令　$p=y'$，看成缺 x 则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$

$$p\frac{dp}{dy}=p^3+p,$$

1^0 当 $p\neq 0$ 时，　$\dfrac{dp}{dy}=p^2+1,$

$\Rightarrow \arctan p=y+C \qquad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=p=\tan(y+C)$

方程的通解为: $\ln\left|\sin(y+c_1)\right|=x+c_2$

2^0 $p=0$，$y=c$　称为方程的奇解。

内容小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$ 逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$ 令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$ 令 $y' = p(y)$,则 $y'' = p\,\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

注： 1 一般地 , 求特解时边解边定常数计算简便.

2 遇到开平方时, 要根据题意确定正负号.