微分与积分是一对互逆的运算

$$积分学\begin{cases}不定积分\\定积分\end{cases}$$

# 第四章 不定积分

## §1 不定积分的定义与性质

1. 问题的提出
2. 定积分的定义
3. 定积分的性质

## 一、原函数存在定理

定义1 若在 $I$ 上恒有 $F'(x)=f(x)$（即$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$），称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个原函数。

例 $\because (\sin x)' = \cos x$ ， $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

$\therefore \sin x$ 是 $\cos x$ 在 $I=(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数。

问题：(1) 满足什么条件的函数有原函数?

(2) 若原函数存在，如何求出?

## 复习：原函数存在定理：

<u>连续函数一定有原函数</u>.

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数 .

例：$(\sin x+1)'=(\sin x+\sqrt{3})'=(\sin x+C)'=\cos x,$

可以看出：原函数$F(x)$不唯一，但只相差一个常数

简言之：原函数之间只相差一个常数。

## 定义2:

函数 $f(x)$在区间 $I$ 上的全体原函数称为 $f(x)$ 在 $I$ 上的不定积分，记为：$\int f(x)dx$

不定积分是全体原函数的集合。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

C不可丢！

积分号

被积函数

被积表达式

积分变量

积分常数

前面两例可写作：

$$\because (\sin x)' = \cos x \ , \qquad \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

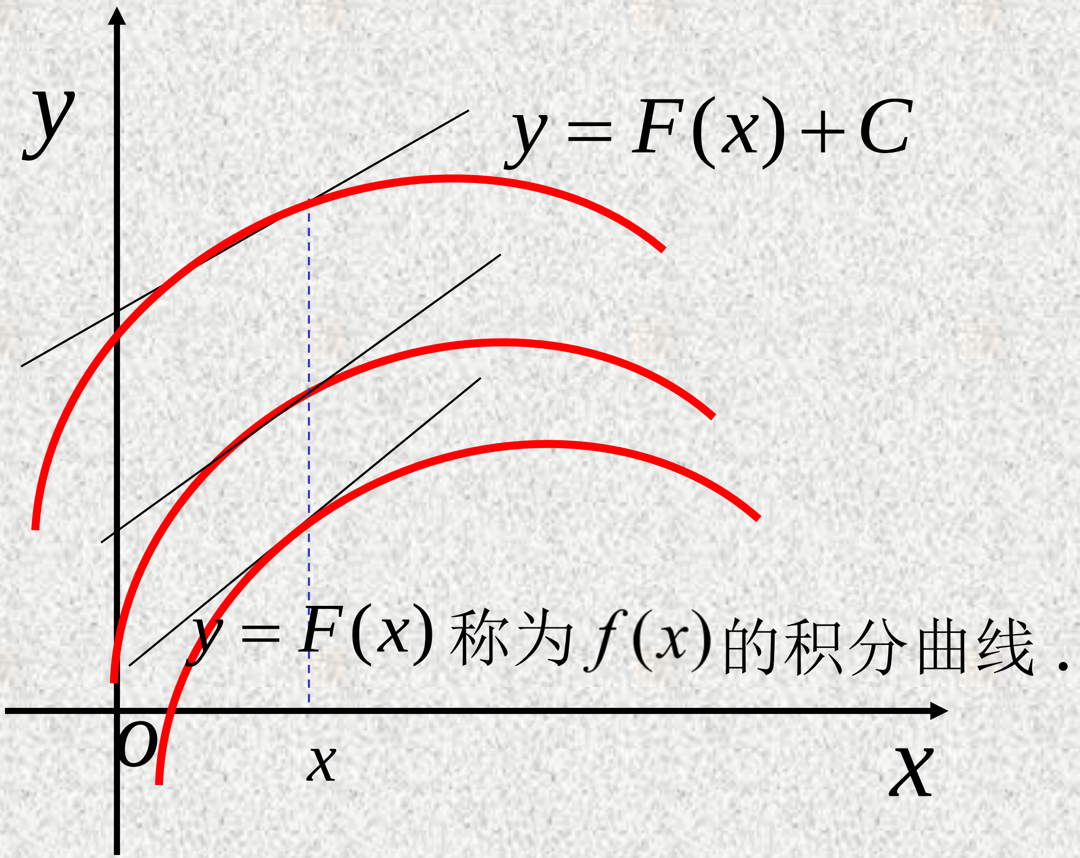
问：不定积分的几何意义？

# 不定积分的几何意义

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

是积分曲线$F(x)$上、下平移所得到一族积分曲线，称为**积分曲线族.**

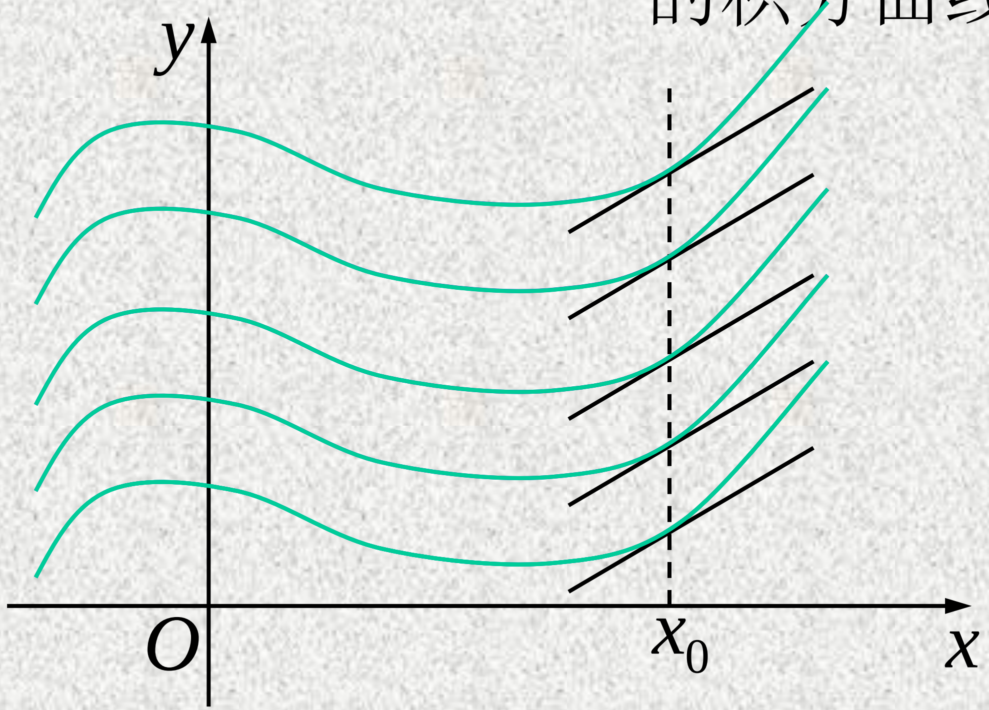
$f(x)$ 在点 $x$ 处有相同的斜率，即这些切线互相平行.



**不定积分的几何意义:**

$f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线 .

$\int f(x)\mathrm{d}x$ 的图形 —— $f(x)$ 的所有积分曲线组成的积分曲线族.




每条积分曲线上，横坐标相同的点处的切线是平行的。

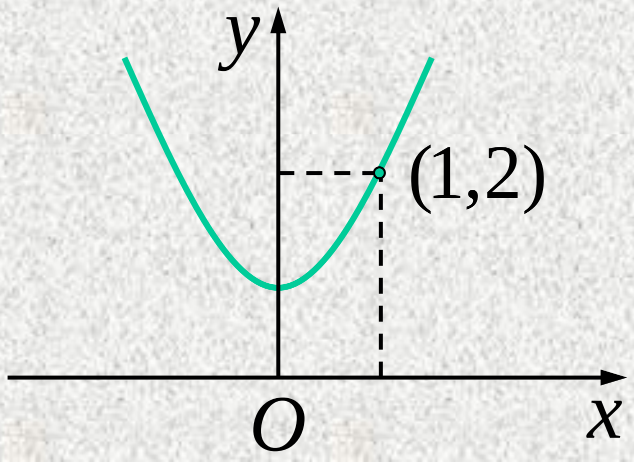
**例1.** 设曲线通过点(1, 2)，且其上任一点处的切线斜率等于该点横坐标的两倍，求此曲线的方程.

解: $\because \quad y' = 2x$

$\therefore \quad y = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$

所求曲线过点 $(1, 2)$，

故有 $2 = 1^2 + C \quad \therefore \quad C = 1$




因此所求曲线为 $y = x^2 + 1$

## 二. 不定积分的性质

微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int F'(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$

### 线性性质

(1) $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx;$

(2) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx.$ （$k$ 是常数，$k\neq 0$)

# 基本积分表

$$(1)\quad \int k dx = kx + C \qquad (k\text{是常数});$$

$$\int 0 dx = C \qquad \int 1 dx = x + C$$

$$(2)\quad \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \qquad (\mu \neq -1);$$

$$(3)\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

(4) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C;$

(5) $\int e^x dx = e^x + C;$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

（8） $\int \sec^2 x dx = \tan x + C;$

（9） $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$

$$(10)\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \quad = -\arccos x + C$$

$$(11)\quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C \quad = -arc\cot x + C$$

$$(12)\quad \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(13)\quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

注：检验积分结果正确与否的方法是

积分结果求导 = 被积函数。

求不定积分的基本思想是化繁为简——将所求积分化为基本积分表中的积分。

例2 求 $\int x^2\sqrt{x}dx$.

解：$\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx$

根据幂函数的积分公式 $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C.$$

（恒等变形法）

例3. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}}$ .

解: 原式 $= \int x^{-\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C$

$= -3x^{-\frac{1}{3}} + C$

例4. 求 $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ .

解: 原式= $\int \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x + C$

例5 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{x}dx = \arctan x + \ln x + C.$$

例6 $\int \frac{1}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2 x dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$$

例7 $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx$

$$= \int \csc^2 x dx - \int dx = -\cot x - x + C.$$

例8 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx$

$$= \int [\frac{x^4 - 1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}] dx = \int [x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}] dx = \cdots$$

例9 $\int \frac{5^x + 3e^x}{2^{x+1}} dx \quad = \int [\frac{1}{2}(\frac{5}{2})^x + (\frac{3}{2})(\frac{e}{2})^x] dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\frac{5}{2})^x dx + (\frac{3}{2})\int (\frac{e}{2})^x dx$$

$$= \frac{1}{2(\ln 5 - \ln 2)}(\frac{5}{2})^x + \frac{3}{2(1-\ln 2)}(\frac{e}{2})^x + C.$$

例10 $\int \frac{(x-\sqrt{x})(3x+\sqrt[3]{x})}{2\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$

$$= \frac{1}{2}\int (3x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{7}{12}} - 3x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{12}}) dx = \cdots$$

例 11 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx$$

**例12**若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$,

则 $f(x)$ 的一个原函数 是 ( $B$ ).

$(A)$ $1+\sin x$;  $(B)$ $1-\sin x$;

$(C)$ $1+\cos x$;  $(D)$ $1-\cos x$.

**提示:** 已知 $f'(x)=\sin x$

$f(x)=-\cos x+C_1$,其原函数为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\sin x+C_1x+C_2$$

# §2-4　不定积分的计算

1. 第一换元法（凑微分法）

2. 第二换元法

3.分部积分法

4.几种特殊的可积分类型

## 一、第一类换元法（凑微分法）

**问题的提出** $\int e^x dx = e^x + C$

但是 $\int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$

因为 $(e^{2x} + C)' \neq e^{2x}$

解决方法 利用复合函数，设置中间变量.

$$\int e^{2x} dx \overset{凑}{=} \frac{1}{2}\int e^{2x} \cdot (2x)' dx \overset{凑}{=} \frac{1}{2}\int e^{2x} d2x \overset{换\ u=2x}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u du \overset{积}{=} \frac{1}{2}e^u + C \overset{代}{=} \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

# 一. 第一换元法（凑微分法）

定理1 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{x}}dx = d(2\sqrt{x})$

凑

$$\overset{换\ \varphi(x)=u}{===}\int f(u)du \overset{积分}{=====} F(u)+c \overset{回代}{======} F[\varphi(x)]+c$$

凑微分：$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$ $\qquad xdx = \frac{1}{2}dx^2$

记住

$\frac{1}{x^2}dx = -d(\frac{1}{x})$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}}dx = d(2\sqrt{x})$

$$1.\ \boxed{\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C}$$

例1 求$\int \frac{1}{3+2x}dx.$

解 $\int \frac{1}{3+2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\cdot d(3+2x)$ 令$u=3+2x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$=\frac{1}{2}\ln|u|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C.$$

例2: $\int e^{-\frac{2}{3}x+1}dx$

$$=-\frac{3}{2}\int e^{-\frac{2}{3}x+1}d(-\frac{2}{3}x+1)$$

$$\xlongequal{u=-\frac{2}{3}x+1}-\frac{3}{2}\int e^{u}du$$

熟悉后可不设u

可省略这两步

$$=-\frac{3}{2}e^{u}+c$$

$$\xlongequal{\text{回代}}-\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x+1}+c$$

例 3 求 $\int \sin 2x dx.$

解（一）$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C;$

解（二）$\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx$

$= 2\int \sin x d(\sin x) = (\sin x)^2 + C;$

解（三）$\int \sin 2x dx = 2\int \sin x \cos x dx$

$= -2\int \cos x d(\cos x) = -(\cos x)^2 + C.$

注：原函数的形式可以不同。

例4 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx.$

想到公式

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan u + C$$

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}dx$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

课本205页公式（20）

例5 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \qquad (a>0).$

想到

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$$

解 $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}d\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

课本205页公式（22）

练习：**1.** $\int (ax+b)^m \mathrm{d}x \quad (m \neq -1).$

**2.** $\int \frac{1}{3+2x} dx.$

3.$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{5x-2}}$

4.$\int \sec^2(2x+3)dx$

5.$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

## 2、被积函数中一部分是另一部分的导数 直接凑微分

例6 求 $\int 2xe^{x^2}dx.$

解 $\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}dx^2 = e^{x^2} + C;$

例7 求 $\int \tan x dx.$

解 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$

$= -\ln|\cos x| + C$ 课本205页公式（16）

例8　求$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx.$

解　$$\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx = \int \frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right| + C.$$

例9　求 $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

解 $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^{3\sqrt{x}}d\sqrt{x}$

$= \frac{2}{3}\int e^{3\sqrt{x}}d(3\sqrt{x}) = \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}} + C$

常用的几种凑微分形式:

1) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)$

2) $\int f(x^n)\,x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\,\mathrm{d}x^n$

3) $\int f(x^n)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\,\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x^n$

$\left.\begin{matrix}2)\\3)\end{matrix}\right\}$ 万能凑幂法

4) $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x$

5) $\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\,\mathrm{d}\cos x$

6) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\,\mathrm{d}\tan x$

7) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

8) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\,\mathrm{d}\ln x$

练1. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$　　2. $\int \frac{x}{3x^2+5}dx$

3. $\int x^4 e^{x^5}\,dx$　　4. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$

5. $\int \frac{10^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

## 3、被积函数含有三角函数 的积分

（1） $\int \sin^m x\cos^n xdx$ $m, n$至少有一个是奇数

例10 求 $\int \sin^2 x\cdot\cos^5 xdx.$

解 $\int \sin^2 x\cdot\cos^5 xdx=\int \sin^2 x\cdot\cos^4 xd(\sin x)$

$$=\int \sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$=\int (\sin^2 x-2\sin^4 x+\sin^6 x)d(\sin x)$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$$

说明

当被积函数是三角函数相乘时，拆开奇次项去凑微分.

（2）$\int \sin^m x \cos^n x dx$ $m, n$都是偶数 偶次幂一般降幂

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

例9 求 $\int \sin^2 x dx$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

解: $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx - \frac{1}{2}\int cox 2x d(2x)\right)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(3) $\int \sin ax \sin bx dx$或$\int \cos ax \cos bx dx$

或$\int \sin ax \cos bx dx$或$\int \cos ax \sin bx dx$

用积化和差公式!

例12 求 $\int \cos 3x \cos 2x dx.$

解 $\int \cos 3x \cos 2x dx = \dfrac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos x) dx$

$$= \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C.$$

# 4、被积函数变形后，有因式可凑微分

例13 求 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx.$

解：原式$= \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$

$$= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{1}{x-a} d(x-a) - \int \frac{1}{x+a} d(x+a) \right)$$

$$= \frac{1}{2a} \left( \ln|x-a| - \ln|x+a| \right) + C \quad = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

例14 求 $\int \sec x dx.$

解 $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

$$= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$

类似可得：$\int \csc x dx = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$

课本205页公式（18）（19））

**例15** 求$\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx.$

**解** $$\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} d\frac{x}{2} = \int \sec^2 \frac{x}{2} d\frac{x}{2} = \tan\frac{x}{2} + C.$$

**例16** 求 $\int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

**解** $\because \left(x+\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2},$

$$\therefore \int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx = \int e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x}) = e^{x+\frac{1}{x}} + C.$$

注：“积不出来”的积分，如：

$$\int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int e^{x^2}dx,\quad \int \sin x^2 dx \quad \text{等}$$

练习 (1) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx.$

解 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}dx$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C.$$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx.$

解 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}dx$

$$=\int \frac{1}{\arcsin\frac{x}{2}}d(\arcsin\frac{x}{2}) = \ln\left|\arcsin\frac{x}{2}\right| + C.$$

（3） 求 $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$

解 $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx = \int \frac{d(x+\sin x)}{x+\sin x} = \ln|x+\sin x| + c$

（4） 求 $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^4 x}dx$

解 $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^4 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin^2 x)}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + c$

小结：常用简化技巧：

(1) 分项积分：利用积化和差；分式分项；

$$1=\sin^2 x+\cos^2 x \text{等}$$

(2) 降低幂次：利用倍角公式，如

$$\cos^2 x=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,;\qquad \sin^2 x=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\,;$$

$$\text{万能凑幂法}\begin{cases}\int f(x^n)x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\,\mathrm{d}\,x^n\\ \int f(x^n)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}\,x^n\end{cases}$$

(3) 统一函数：利用三角公式；配元方法

(4) 巧妙换元或配元

掌握典型例题，多做多总结。

第一类换元法是通过变量替换 $u=\varphi(x)$ 将积分

$$\int f[\varphi(x)]\varphi(x)dx \text{化为积分} \int f(u)du$$

下面介绍的第二类换元法是通过变量换 $x=\psi(t)$ 将积分

$$\int f(x)dx \overset{x=\psi(t)}{=\!=} \int \underbrace{f[\psi(t)]\psi'(t)}_{\text{易积分}}dt$$

## 二、第二类换元法

**定理2** 设$x=\psi(t)$是单调的、可导的函数，

并且$\psi'(t)\neq 0$，又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数$\Phi(t)$

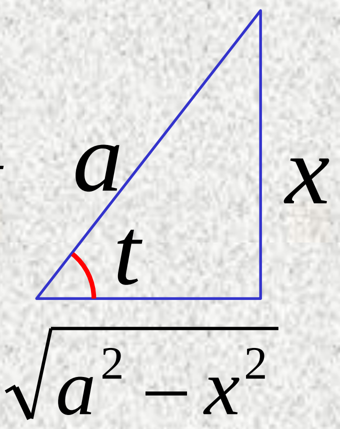
则有**换元公式**

$$\int f(x)dx \overset{x=\psi(t)}{=\!=\!=} \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt \overset{\text{积分}}{=} \Phi(t)+C$$

$$\overset{\text{回代}}{=\!=\!=} \Phi\left[\psi^{-1}(x)\right]+C.$$

**1.三角代换** 例1. 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \ \ (a > 0)$.

解: 令 $x = a\sin t,\ \ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$




$\therefore$ 原式 $= \int a\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$

$$= a^2 \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \ = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

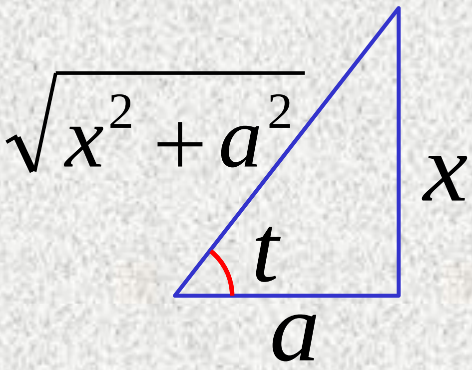
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a>0).$ 公式!

解: 令 $x = a\tan t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t + a^2} = a\sec t \qquad \mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \text{原式} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$




$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

$$= \ln\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right] + C_1$$

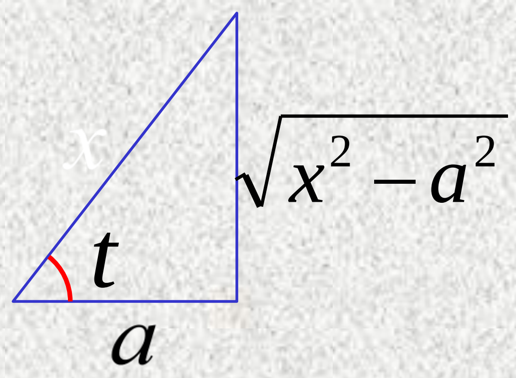
$$= \ln\left[x + \sqrt{x^2+a^2}\right] + C \qquad (C = C_1 - \ln a)$$

**例3.** 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0).$ 公式！

**解:** 令 $x = a\sec t,\ t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\tan t \qquad \mathrm{d}x = a\sec t\tan t\,\mathrm{d}\,t$$

$$\therefore\ 原式 = \int \frac{a\sec t\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}\,t = \int \sec t\,\mathrm{d}\,t$$




$$= \ln\left|\sec t + \tan t\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C \quad (C = C_1 - \ln a)$$

**说明(1)** 以上几例所使用的均为三角代换

三角代换的目的是化掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令弦代换 $x=a\sin t;$ $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令切代换 $x=a\tan t;$ $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令割代换 $x=a\sec t.$ $t\in(0,\frac{\pi}{2})$

**说明（2）** 积分中为了化掉根式是否一定采用三角代换并不是绝对的，需根据被积函数的情况来定.

**例** 求 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$ （三角代换很繁琐）

**解：** 令 $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1, \quad xdx=tdt,$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int \frac{(t^2-1)^2}{t}tdt=\int (t^4-2t^2+1)dt$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

**2. 当分母的阶较高时，可采用倒代换** $x=\dfrac{1}{u}$

例4 求 $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

解 令 $x=\dfrac{1}{u}\Rightarrow dx=-\dfrac{1}{u^2}du$

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$=-\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arccos u+C$$

$$=\arccos\frac{1}{x}+C$$

3.无理代换 当根号下是单调函数时，可令整个根式为t.

例5 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

解 令 $t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x=t^2-1,$

$$x=\ln(t^2-1),\quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int \frac{2}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-x+C.$$

例6： $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

## 4. 根幂代换

当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时，可采用令 $x=t^n$（其中 $n$ 为各根指数的最小公倍数）

例7 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx.$

解 令 $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx=\int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt=\int \frac{6t^2}{1+t^2}dt$$

$$=6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6[t-\arctan t]+C$$

$$=6[\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}]+C.$$

# 三、小结

**两类积分换元法：**

（一） **凑微分**

（二） **三角代换、倒代换、无理代换、根幂代换**

**基本积分表(2)课本205页**

# 三、分部积分法

由导数公式 $(uv)' = u'v + uv'$

积分得: $uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

或 $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

分部积分公式

待积分难　　　　补积分易

**适用于：两类简单的函数乘积的积分**

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

幂: 幂函数

三: 三角函数

留幂

例1 求 $\int x\cos x dx.$

尝试 $\int x\cos x dx = \int \cos x d\frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}\cos x - \int \frac{x^2}{2}(-\sin x dx)$$

显然， $u,v$ 选择不当，积分越积越复杂!

正解 $\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

**例2:** 求$\int x^2e^x dx.$

幂: 幂函数
指: 指数函数

$\left.\begin{matrix}\text{幂: 幂函数}\\ \text{指: 指数函数}\end{matrix}\right\}$ 留幂

**解:** $\int x^2\underline{e^x dx} = \int x^2 de^x$

$= x^2e^x - 2\int x\underline{e^x dx}$

$= x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x dx)$

$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$

有时需要多次使用分部积分，使积分逐步简化。

例3. 求$\int x\ln x\,dx$.

幂: 幂函数

对: 对数函数

留对

解: 原式 = $\frac{1}{2}\int \ln x dx^2$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 d\ln x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

例4 $\int \underline{x}\arctan x \underline{dx}$

幂: 幂函数
反: 反三角函数
留反

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} d(\arctan x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C.$$

常可用分部积分消去反三角函数和对数函数。

**解题技巧:** 选取 $u$ 及 $v'$ 的一般方法 :

**按 "反对幂指三" 的 顺序, 前 $u$ 后 $v'$**

**反:** 反三角函数
**对:** 对数函数
**幂:** 幂函数
**指:** 指数函数
**三:** 三角函数

**例5. 求** $\int \arccos x \, \mathrm{d}x$.

**解: 原式** $= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

**例7** 求 $\int e^x \sin x dx.$

**解** $\boxed{\int e^x \sin x dx} = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d\cos x)$

$= e^x (\sin x - \cos x) - \boxed{\int e^x \sin x dx}$ 注意循环形式

$\therefore \int e^x \sin x dx = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

注：两次所设类型必须一致

**例8.** 求 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

**解:** 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$

**原式** $=2\int t\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$

令 $u=t$, $v'=\mathrm{e}^{t}$

$=2\left(t\,\mathrm{e}^{t}-\int \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t\right)$

$=2(t\,\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{t})+C$

$=2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$

例 9 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

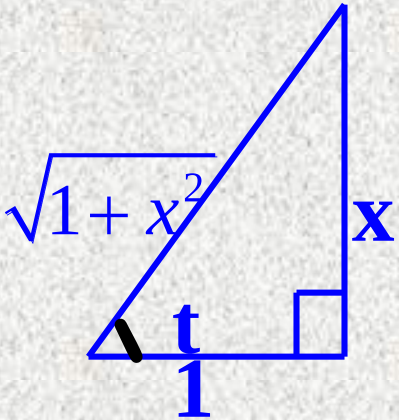
**解1 第二换元法的标准类型** 令x=tant, t $\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{\tan^3 t}{\sec t}\cdot \sec^2 t dt = \int \tan^2 t d(\sec t)$$

$$= \int (\sec^2 t - 1) d(\sec t)$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 t - \sec t + c$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + c$$



解2（凑微法）

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1+x^2}+c$$

解3（分部积分）

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int x^2 d(\sqrt{1+x^2})$$

$$=x^2\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}d(x^2+1)$$

$$=x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

注：解2、解3两结果相差一个常数。

**例10.** 已知$f(x)$的一个原函数是$\dfrac{\cos x}{x}$，求$\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

**解:** $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}f(x)$

$$= x f(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}}$$

$$= x\left(\frac{\cos x}{x}\right)' - \frac{\cos x}{x} + C$$

$$= -\sin x - 2\frac{\cos x}{x} + C$$

# 内容小结

分部积分公式 $\int u v' \mathrm{d}x = u v - \int u' v \mathrm{d}x$

**1. 使用原则：$v$易求出,$\int u' v \mathrm{d}x$易积分**

**2. 使用经验："反对幂指三"，前 $u$ 后 $v'$**

**3. 题目类型：**

**一次或多次分部积分；**

**循环解出;**

## 四、几种特殊类型函数的积分

### 1、 有理函数的积分

有理函数: $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$

$m\le n$时, $R(x)$为假分式; $m>n$时, $R(x)$为真分式

有理函数 $\xlongequal[\text{短除}]{}$ 多项式 + $\boxed{\text{真分式}}$

$$\boxed{\text{真分式}}\ \xrightarrow{\text{分解}}\ \boxed{\text{若干部分分式之和}}$$

其中部分分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\qquad (k\in \mathbf{N}^+,\ p^2-4q<0)$$

## 有理函数分解为部分分式之和的一般规律：

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是常数.

（2）分母中若有因式$(x^2+px+q)^k$，其中

$p^2-4q<0$ 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中$M_i,N_i$都是常数$(i=1,2,\cdots,k)$.

注：分母是k次方，就分解成k项，
分子的次数比分母低一次。

四种典型部分分式的积分:

1. $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$

$\boxed{\begin{aligned}&(x^2+px+q)' \\ &= 2x+p\end{aligned}}$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

$\left.\begin{array}{l} 3. \\ 4. \end{array}\right\}$ 变分子为

$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$

再分项积分

$(p^2 - 4q < 0\,, n \neq 1)$

例 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-1},$

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1) \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 $A,B,C$

取 $x=0,\ \Rightarrow A=1$ 取 $x=1,\Rightarrow B=1$

取 $x=2,$ 并将 $A,B$ 值代入(1) $\Rightarrow C=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

例1　求积分 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx.$

解：$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}\right]dx$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + C$$

**例2：** 求 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$ .

**解：** $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}dx = \int (\frac{6}{x-3} - \frac{5}{x-2})dx$

$$= \int \frac{6}{x-3}d(x-3) - \int \frac{5}{x-2}d(x-2)$$

$$= 6\ln|x-3| - 5\ln|x-2| + C$$

**提示：** $\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x+(-2A-3B)}{(x-2)(x-3)}$ ,

$A+B=1,\ -2A-3B=3,\ A=6,\ B=-5.$

例3 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx.$

解：$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2},$

$$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+2x),$$

整理得 $1 = (A+2B)x^2 + (B+2C)x + C + A,$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A = \frac{4}{5}, B = -\frac{2}{5}, C = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

求积分$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx.$

$$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

## •假分式的不定积分

例4：求$\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$

分项

解 $\frac{x^3}{1+x^2} = \frac{x(x^2+1)-x}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int (x - \frac{x}{1+x^2})dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

说明：将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，一般是对分子用凑、拆、加零项等造出分母中的因式

例5. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} \mathrm{d}x$ .

解：原式 $= \int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} - \int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$= \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C$$

例6：$\int \frac{x}{(x+1)^4}dx$

解：原式=$\int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^4}dx$

$$=\int (x+1)^{-3}dx-\int (x+1)^{-4}dx$$

$$=-\frac{1}{2}(x+1)^{-2}-\frac{1}{3}(x+1)^{-3}+C$$

## 2、三角函数有理式的积分

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数．三角函数有理式可记为 $R(\sin x, \cos x)$

例如：$R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}$

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{令} t=\tan\frac{x}{2}} \boxed{t\text{ 的有理函数的积分}}$$

万能代换
(参考下页例7)

**例7. 求** $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$ .

**解: 令**$t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

注（1）万能代换一定能将三角有理式化为有理函数；

（2）万能代换对sinx,cosx的一次幂比较有效；否则可能比较繁琐。

例8 $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x d \sin x = \cdots$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int (\frac{1}{2}\sin 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \cdots$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \sec^2 \frac{x}{2} dx = \cdots$$

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \int \frac{1}{1+\sin x} d(1+\sin x) = \ln(1+\sin x) + C$$

**3. 简单无理函数的积分**

被积函数为简单根式的有理式, 可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \qquad 令\ t=\sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \qquad 令\ t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$

令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$, $p$ 为 $m,n$ 的最小公倍数.

**例10.** 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

**解：** 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=u^3-2$, $\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式}=\int\frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u=3\int\frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=3\int(u-1+\frac{1}{1+u})\,\mathrm{d}u$$

$$=3[\,\tfrac{1}{2}u^2-u+\ln|1+u|\,]+C$$

$$=\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

**例11.** 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$ .

**解:** 令$t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$ , 则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

原式$=\int (t^2-1)\cdot t\cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$

$$=-2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \quad =-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+2\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})+C$$