2022年数学建模模拟题

一、简答题

1. 简述插值与拟合的异同。

解：给定一批数据点，需确定满足特定要求的曲线或曲面，如果要求所求的曲线（曲面）通过所给的所有数据点，就是插值问题。如果不要求曲线（曲面）通过所有数据点，而是要求曲线（曲面）函数反映对象整体的变化趋势，就是数据拟合。

插值与拟合的相同点：都是根据一组数据构造一个函数作为近似。

插值与拟合的不同点：近似的要求不同，插值要求函数曲线经过所有数据点，拟合要求函数曲线在某种准则下与所有数据点最为接近。因此，两者使用的数学方法也完全不同。

2. 什么是三次样条插值函数？

解：设在区间[a,b]上给出 n+1 个结点 x(i)：a=x(0)<x(1)< … <x(n)=b，函数 f(x)在这些结点的值 f(x(i))=y(i)，如果分段函数 S(x)满足如下条件：

(1) S(x)在子区间[x(i),x(i+1)]的表达式 Si(x)都是次数不高于 3 的多项式；

(2) Si(x(i))=y(i);

(3) S(x) 在整个区间[a,b]上有连续的二阶导数。

则 S(x)为 f(x)在基点 x(0)，x(1)， … ，x(n)的三次样条插值函数。

3. 将室内一支读数为 26 度的温度计放到室外。10 分钟后，温度计的读数为 12 度，又过了 10 分钟，读数为 10 度。利用牛顿的冷却定律，写出有关温度计读数 T(t)(t 是时间)的微分方程及初始条件。

解：微分方程： $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0)$

初始条件：T(0)=26，T(10)=12，T(20)=10

4. 写出差分方程 $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ 的通解。

解： $a_n=C_1 2^n+C_2(-1)^n$

5. 只由 3 个字母 a,b,c 组成的长度为 n 的一些单词将在通信信道上传输,传输中应满足条件：不得有两个 a 连续出现在任一单词中。设 f(n)表示可传输的单词的个数，写出 f(n)的差分方程及初始条件。

解：差分方差：f(n)=2f(n-1)+2f(n-2)

初始条件： f(1)=3，f(2)=8

二、MATLAB 编程

1．在同一坐标下做出 $y_1=x^2,y_2=x^3,y_3=x^4,y_4=x^5$ 这四条曲线的图形，其中 $x\in[-1,1]$。

解：（答案不唯一）

解法一：输入如下代码：

```
x=linspace(-1,1);
y1=x.^2;
y2=x.^3;
y3=x.^4;
y4=x.^5;
plot(x,y1,x,y2,x,y3,x,y4);
```

解法二：输入代码：

```
fplot('[x.^2,x.^3,x.^4,x.^5]',[-1,1])
```

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 0\\ x^3-1 & x<0\end{cases}$ ，求 $f(2), f(-2)$ 。

解：先定义函数 M 文件

```
function f=fun(x)
  if x>=0
     f=x^2+1
  else
     f=x^3-1
  end
```

命令：fun(2)

```
fun(2)
fun(-2)
```

3．求以下微分方程组的通解。

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-3y+6z\\ \dfrac{dy}{dt}=5x-7y+6z\\ \dfrac{dz}{dt}=3x-4y+5z\end{cases}$$

解：输入代码

```
[x,y,z]=dsolve('Dx=4*x-3*y+6*z','Dy=5*x-7*y+6*z','Dz=3*x-4*y+5*z','t')
```

三、模型表示

1. 某药剂厂生产两种药剂 a 和 b。每生产 1 公斤的 a 需要 3 公斤的原料 c 和 4 公斤原料 d 以及 5 个工时加工，而每生产 1 公斤的 b 需要 2 公斤的原料 d 和 5 公斤的原料 e 以及 7 个工时加工。假设所有产品都可销售完，且 1 公斤 a 的售价为 1000 元、1 公斤 b 的售价为 800 元、购买 1 公斤 c、d 和 e 要分别花 30 元、40 元和 50 元、1 个工人的时薪为 25 元。每周可供应的原料 c、d 和 e 上限分别为 300、400 和 350 公斤，工人加工工时上限为 600 小时。根据以上条件，如何安排生产获得最大利润呢？请用数学模型描述这一规划问题。（线性规划）

解：（确定决策变元）设 x1 和 x2 分别是 a 和 b 的每周产量。

（确定目标函数）本问题的目标是利润最大化，总收益为

Z=x1*(1000-90-160-125)+x2*(800-80-250-175)

（确定约束条件）

原材料 c: 3*x1≤300

原材料 d：4*x1+2*x2≤400

原材料 e: 5*x2≤350

加工工时：5*x1+7*x2≤600

综上，原问题可表示为一个线性规划问题：

max Z= x1*625+x2*295

s.t. x1≤100

2*x1+x2≤200

x2≤70

5*x1+7*x2≤600

x1≥,x2≥0

2. 某厂向用户提供发动机，合同规定，第一、二、三季度末分别交货 40 台、60 台、80 台．每季度的生产费用为 $f(x)=ax+bx^2$（元），其中 x 是该季生产的台数．若交货后有剩余，可用于下季度交货，但需支付存储费，每台每季度 c 元．已知工厂每季度最大生产能力为 100 台，第一季度开始时无存货，问工厂应如何安排生产计划，才能既满足合同又使总费用最低?（只需给出数学模型，不需求解）

解：设 X_i 表示第 i 季度的产量， i=1,2,3

建立非线性规划模型：

$$\text{Min } f = aX_1+bX_1^2+aX_2+bX_2^2+aX_3+bX_3^2+c(X_1-40)+c(X_1+X_2-100)$$

$X_1\geq 40$;

$X_1+X_2\geq 100$;

$X_1+ X_2+X_3=180$;

$X_1\leq 100$;

$X_2\leq 100$;

$X_3\leq 100$;

$X_i\geq 0$, i=1,2,3

3. 某架货机有三个货舱：前仓、中仓、后仓。三个货舱所能装载的货物的最大质量和体积都有限制，如下表 1 所示。并且为了保持飞机的平衡，三个货舱中实际装载货物的质量必须与其最大容许质量成比例。现有四类货物供该货机本次飞行装运，其有关信息如下表 2 所示，表中最后一列指装运后所获得的利润。应如何安排装运，使该货机本次飞行获利最大？（只需给出数学模型，不需求解）

表 1： 三个货舱装载货物的最大容许质量和体积

	前仓	中仓	后仓
质量限制（t）	10	16	8
体积限制（m^3）	6800	8700	5300

表 2： 四类装运货物的信息

	质量（t）	体积（m^3/t）	利润（元/t）
货物 1	18	480	3100
货物 2	15	650	3800
货物 3	23	580	3500
货物 4	12	390	2850

解：设 Xij 表示第 i 种货物装入第 j 个货舱的质量，货舱 j=1,2,3，分别表示前仓、中仓、后仓。

建立线性规划模型：

Max f = 3100*(X11+X12+X13)+3800* (X21+X22+X23)+3500* (X31+X32+X33)
+2850* (X41+X42+X43)

约束：

（货物的总质量约束） X11+X12+X13≤18

X21+X22+X23≤15

X31+X32+X33≤23

X41+X42+X43≤12

（货舱的质量限制） X11+X21+X31+X41≤10

X12+X22+X32+X42≤16

X13+X23+X33+X43≤8

（货舱的空间限制） 480*X11+650*X21+580*X31+390*X41≤6800

480*X12+650*X22+580*X32+390*X42≤8700

480*X13+650*X23+580*X33+390*X43≤5300

（货舱装入质量的平衡约束）

(X11+X21+X31+X41)/10 = (X12+X22+X32+X42)/16

(X12+X22+X32+X42)/16 = (X13+X23+X33+X43)/8

4.（点菜问题）我们在餐馆中点菜，需要包含某些营养成份，但同时又希望总价格最低。下表是这个餐馆的部分菜单，请你通过数学建模方法，提供合理的选菜方案。（只需给出数学模型，不需求解）

序号	菜色	价格	蛋白质	淀粉	维生素	矿物质
1	菜肉蛋卷	28	1	0	1	1
2	炒猪肝	32	0	1	0	1
3	沙拉蔬菜	18	0	0	1	0
4	红烧排骨	48	1	0	0	0
5	咖喱土豆	20	0	1	0	0
6	清汤鸡	68	1	0	0	1

解：（决策变量）设 xi=0 表示不选择第 i 个菜，xi=1 表示选择第 i 个菜。(i=1,2,3,4,5,6)

（目标函数）本问题的目标是总费用 z 最小，

z=28*x1+32*x2+18*x3+48*x4+20*x5+68*x6

(约束条件)约束是所点菜品需包含所有营养成份：

x1+x4+x6≥1

x2+x5≥1;

x1+x3≥1;

x1+x2+x6≥1;

xi=0 或 1

综上，原问题表示为一个整数线性规划问题：

Min z=28*x1+32*x2+18*x3+48*x4+20*x5+68*x6

s.t. x1+x4+x6≥1

x2+x5≥1;

x1+x3≥1;

x1+x2+x6≥1;

xi=0 或 1 （i=1,2,3,4,5,6）

5. 正常人的脉搏平均 72 次/分，某医生测得 10 例慢性中毒患者的脉搏为（单位：次/分）：

54 67 65 68 78 70 66 70 69 67

设患者的脉搏服从正态分布，问患者和正常人的脉搏有无显著差异（a=0.05）？

（1）请写出解题思路，及使用的 Matlab 命令；

（2）若输出结果如下，请写出检验结论。

h = 1， sig =0.0366， ci = [63.1585,71.6415]

解：(1）因为总体服从正态分布，总体方差未知，现为检验总体均值，则使用 t-检验法，Matlab 命令：[h,sig,ci]=ttest(x,m,alpha,tail)。

其中 x=[54 67 65 68 78 70 66 70 69 67]，m=72， alpha=0.05，tail 为 0 或缺省。

（2）h = 1，表示拒绝原假设，即认为患者与正常人的脉搏有显著差异；

sig =0.0366，sig 为显著性概率，小于显著性水平 0.05，结论也是拒绝原假设；

ci = [63.1585,71.6415]，表示患者脉搏的 95%的置信区间，它不包括 72，所以也不能接受原假设，即认为患者平均脉搏不是 72。

四、综合题

1.现有如下关于函数 y=f(x)的 7 个观测点数据。

（1）用抛物线插值公式计算 f(6)的近似值。

（2）若已知 $y=\ln(a*x^2+b*x+c)$，请分别用 polyfit 和 lsqnonlin 指令进行数据拟合（要求给出相应的 matlab 代码）以确定系数 a、b 和 c 的最佳取值。

x	1	2	4	5	7	9	10
y	1.8	2.4	2.9	3.3	3.6	3.9	4.2

解：(1）选择与 x=6 最接近的三点 $x_0=4,x_1=5,x_2=7$ 为插值结点，根据抛物线插值公式计算：

$$f(6) \approx L_2(6) = y_0 \times \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \times \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \times \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= 2.9 \times \frac{(6-5)(6-7)}{(4-5)(4-7)} + 3.3 \times \frac{(6-4)(6-7)}{(5-4)(5-7)} + 3.6 \times \frac{(6-4)(6-5)}{(7-4)(7-5)}$$

= 3.5

（2）

（一）先用 lsqnonlin 指令

[1] 编写 M 文件 curve1.m

```
function f=curve1(x)
xdata=[1, 2, 4, 5, 7, 9, 10];
ydata=[1.8, 2.4, 2.9, 3.3, 3.6, 3.9, 4.2];
f= ydata-log(x(1)*xdata.^2+x(2)*xdata+x(3));
```

[2] 主程序 dianya1.m 如下：

```
x0=[1, 2, 3];
```

(注意，这里的 x0 是用户猜测的各参数初始值，取什么值无所谓)

```
xishu=lsqnonlin('curve1',x0)
```

（二）使用 polyfit 指令。由于 y 是关于 x 的非线性函数，所以我们先将其关系公式两边取自然指数得到：

$$e^y=a*x^2+b*x+c$$

令 u= e^y。

[1] 主程序 dianya3.m 如下：

```
xdata=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7];
ydata=[1.8, 2.4, 2.9, 3.3, 3.6, 3.9, 4.2];
u=exp(ydata);
xishu=polyfit(xdata, u,2);
```

2. 某饮料厂年初有资金 500 万元，已知未来四季度的弹性订单分别为饮料 200 吨、500 吨、300 吨和 100 吨（即每季度可以卖出的饮料产品数量上限）。生产饮料的成本为 1+1/(1+x)（x 为当季生产的饮料吨数）万元/吨。在四个季度中，每卖出一吨饮料可以获得收入分别为 2、$3-(1/y^2)$、2.5 和 ln(y)/2（注意：这里的 y 指工厂在相应季度卖出的饮料吨数）万元。在每个季度初，当季的生产成本要一次性付清，一季度和二季度的销售所得金额分别在三季度和四季度初才能转到工厂账户上，而三四季度的销售所得都只在 4 季度末到位。问如何制定工厂未来四个季度的生产和销售方案，使得工厂在 4 季度末的资金量最大？要求先给出其数学模型描述，然后写出求解该问题的 matlab 代码。

解：设一至四季度的饮料产量分别为 x1,x2,x3,x4 吨，而一至四季度的销售供货量分别为 y1,y2,y3,y4 吨。接着确定约束条件：

每季度的产量大于等于 0：xi≥0,(i=1,2,3,4)

每季度销量介于 0 和弹性需求量之间：

0≤y1≤200, 0≤y2≤500, 0≤y3≤300, 0≤y4≤100

每季度的生产成本不得超过当时的资金量：

第一季度： (1+1/(1+x1))*x1≤500

第二季度： (1+1/(1+x1))*x1+(1+1/(1+x2))*x2≤500

第三季度： (1+1/(1+x1))*x1+(1+1/(1+x2))*x2+(1+1/(1+x3))*x3≤500+2*y1

第四季度：(1+1/(1+x1))*x1+(1+1/(1+x2))*x2+(1+1/(1+x3))*x3

+(1+1/(1+x4))*x4 ≤ 500+2*y1+(3 -1/(y2)^2)*y2

历史销量不超过历史产量：

第一季度：y1≤x1

第二季度：y1+y2≤x1+x2

第三季度：y1+y2+y3≤x1+x2+x3

第四季度：y1+y2+y3+y4≤x1+x2+x3+x4

最后确定目标函数：本问题的目标是年末资金最多即

Max Z=500-(1+1/(1+x1))*x1-(1+1/(1+x2))*x2-(1+1/(1+x3))*x3

-(1+1/(1+x4))*x4+2*y1+(3-1/(y2)^2)*y2+2.5*y3+0.5*y4*ln(y4)

以下是相应的 matlab 求解代码：

(1)先建立 M 文件 fun.m 定义目标函数：（这里 x(1)至 x(4)对应上面的 x1 至 x4，x(5)至 x(8)对应上面的 y1 至 y4）

```
function f=fun(x)
f=-500+(1+1/(1+x(1)))*x(1)+(1+1/(1+x(2)))*x(2)+(1+1/(1+x(3)))*x(3)
  +(1+1/(1+x(4)))*x(4)-2*x(5)-(3-1/(x(6))^2)*x(6)-2.5*x(7)-0.5*x(8)*ln(x(8));
```

（这里必须要对应原目标函数的 Min 形式！）

(2)再建立 M 文件 mycon.m 定义非线性约束**（对应于上面每季度的生产成本不得超过当时的资金量的四条约束）**

```
function [g,ceq]=mycon(x)
g=[ (1+1/(1+x(1)))*x(1)-500;
  (1+1/(1+x(1)))*x(1)+(1+1/(1+x(2)))*x(2) -500;
 (1+1/(1+x(1)))*x(1)+(1+1/(1+x(2)))*x(2)+(1+1/(1+x(3)))*x(3) -2*x(5) -500;
 (1+1/(1+x(1)))*x(1)+(1+1/(1+x(2)))*x(2)+(1+1/(1+x(3)))*x(3)
        +(1+1/(1+x(4)))*x(4) -2*x(5)-(3 -1/(x(6))^2)*x(6) – 500];
    ceq=[];
```

(3)主程序 scap.m:

```
    x0=[0,0,0,100,0,0,0,100];
    A=[-1,0,0,0,1,0,0,0;
    -1,-1,0,0,1,1,0,0;
    -1,-1,-1,0,1,1,1,0;
    -1,-1,-1,-1,1,1,1,1];
  b=zeros(4,1);（A 和 b 对应前面历史销量不超过历史产量的约束）
  vlb=zeros(8,1);（各变元取值下界全为 0）
  vub=[inf;inf;inf;inf;200;500;300;100]; （各变元取值上界，对应弹性需求）
 [x,fval]=fmincon('fun', x0, A, b, [], [], vlb, vub, 'mycon');
```

```
fval=-fval;
```

3.（投资问题）某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，已知：项目A，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115%；项目B，第三年初需要投资，到第五年末能回收本利125%，但规定最大投资额不超过4万元；项目C，第二年初需要投资，到第五年末能回收本利140%，但规定最大投资额不超过3万元；项目D，五年内每年初可购买公债，于当年末归还，并加利息6%。该部门现有资金10万元，问它应如何确定给这些项目每年的投资额，使到第五年末拥有的资金的本利总额为最大？要求先给出其数学模型描述，然后写出求解该问题的matlab代码。

解：确定决策变量，设x1a,x2a,x3a,x4a表示第一年到第四年每年初项目A的投资额，x3b表示第三年初项目B的投资额，x2c表示第二年初项目C的投资额，x1d,x2d,x3d,x4d,x5d表示第一年到第五年每年初项目D的投资额。

目标是到第五年末的资金总额z最大，

z=1.15*X4a+1.25*X3b+1.40*X2c+1.06*X5d

约束条件：

所有决策变量非负： xi≥0；

第一年初投资资金10万元且全部投入项目A与项目D： x1a+x1d=100000;

第二年初回收项目D，投资项目A,C,D： x2a+x2c+x2d=1.06*x1d;

第三年初回收项目A,D,投资项目A,B,D： x3a+x3b+x3d=1.15*x1a+1.06*x2d;

第四年初回收项目A,D,投资项目A,D： x4a+x4d=1.15*x2a+1.06*x3d;

第五年初回收项目A,D，投资项目D： x5d=1.15*x3a+1.06*x4d;

项目B投资限额： x3b≤40000;

项目C投资限额： x2c≤30000;

得线性规划模型：

Max z=1.15*X4a+1.25*X3b+1.40*X2c+1.06*X5d

s.t. x1a+x1d=100000

x2a+x2c+x2d-1.06*x1d=0

x3a+x3b+x3d-1.15*x1a-1.06*x2d=0

x4a+x4d-1.15*x2a-1.06*x3d=0

x5d-1.15*x3a-1.06*x4d=0

x3b≤40000

x2c≤30000

x1a≥0, x2a≥0,x3a≥0,x4a≥0, x3b≥0, x2c≥0,

x1d≥0,x2d≥0,x3d≥0,x4d≥0,x5d≥0

matlab求解代码：

其中 x(1)=x1a,x(2)=x2a,x(3)=x3a,x(4)=x4a,x(5)=x3b,x(6)=x2c,

x(7)=x1d, x(8)=x2d, x(9)=x3d, x(10)=x4d, x(11)=x5d

```
c=[0 0 0 -1.15 -1.25 -1.40 0 0 0 0 -1.06];
```

```
A=[];
b=[];
Aeq=[1   0   0   0   0   0   1   0   0   0   0
       0   1   0   0   0   1 -1.06 1 0   0   0
    -1.15 0   1   0   1   0   0 -1.06 1 0   0
       0 -1.15 0 1   0   0   0   0 -1.06 1 0
       0 0 -1.15 0 1   0   0   0   0 -1.06 1 ];
beq=[100000;0;0;0;0];
vlb=zeros(11,1);
vub=[inf;inf;inf;inf;40000;30000;inf;inf;inf;inf;inf];
[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
z=-fval
```

4. 假设某湖中开始有 10 万条鱼，且鱼的年增长率为 30%，而每年捕鱼量为 2 万条。

（1）列出每年湖中鱼的数量的差分方程，并求解；

（2）多少年后，湖中的鱼将捕捞完？

解：设第 k 年湖中鱼的数量为 f(k)，则

$$f(k)=f(k-1)*(1+0.3)-2, \quad f(0)=10$$

$f(k)=f(k-1)*(1+0.3)-2$

$= (f(k-2)*(1+0.3)-2)*(1+0.3)-2$

$=\ldots\ldots$

$=f(0)*(1+0.3)^k-2*((1+0.3)^{k-1}+\ldots\ldots+(1+0.3)+1)$

$=10*1.3^k-2*((1.3)^k-1)/0.3$

$=10*1.3^k/3+20/3$

所以，f（k）$=10*1.3^k/3+20/3$

令 f（k）$=10*1.3^k/3+20/3=0$，求得 k 即为鱼捕捞完的年份。显然，f（k）$=10*1.3^k/3+20/3>0$，所以湖中的鱼是永远捕捞不完的。