安徽理工大学 2018～2019 学年第一学期 高等数学(上)第 3 章单元测验解答

适用 全校 考场教室 任课教师 专业班级： 学号： 姓名：
[该项由出卷人填写]
装 订 线

1. 由题意，$f(x)$ 在 $[a,c],[c,b]$ 上满足 Lagrange 中值定理条件，故有 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\ f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$ 。**(5 分)**

由于 A,B,C 三点共线，即 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ **(2 分)**。显然，$f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\in(a,b)$ 上满足 Rolle 定理的条件，故有 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$。**(5 分)**

2. 令 $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x(1+x)^2}<0$，$f(x)$ 单减。**(5 分)**

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]=0$，故 $0<x<+\infty$ 时，$f(x)>0$，故得证。**(5 分)**

或 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\ln(1+x)-\ln x=\dfrac{1}{\xi}$，$\xi=x+\theta,\ 0<\theta<1$，故 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x+\theta}>\dfrac{1}{x+1}$。

3. (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^4}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{2x}$ **(5 分)**

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\tan x-\sec^2 x}{x(1+\tan x)}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\tan x)}{x(1+\tan x)}=\dfrac{1}{4}$。**(4 分)**

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sec^2 x}{2x}$ **(3 分)** $=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2 x}{2x}=0$。**(3 分)**

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\sin x\ln x}$ **(3 分)** $=\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}}=1$。**(4 分)**

4. 由 Tayor 公式，$2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+o(x^2)-(ax+bx^2+cx^3)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2-a)x-(2+b)x^2+\left(\frac{8}{3}-c\right)x^3+o(x^2)}{x^3}$ **(6 分)**，得 $\begin{cases}2-a=0,\\2+b=0,\\\frac{8}{3}-c=2,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}a=2,\\b=-2,\\c=\frac{2}{3}.\end{cases}$。**(3 分)**

5. 由保号性，在 $x=a$ 的某邻域内 $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$，即 $f(x)<f(a)$。**(5 分)**

由极值的定义，$f(x)$ 在点 $x=a$ 处取极大值。**(2 分)**

6. (1) $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$，$f(x)$ 的单增区间为 $(-\infty,1),(3,+\infty)$，单减区间为 $(1,3)$；极小值为 $f(3)=\dfrac{27}{4}$。**(7 分)**

(2) $f''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$，$f(x)$ 的凸区间为 $(-\infty,0)$，凹区间为 $(0,1),(1,+\infty)$；(0,0)为拐点。**(7 分)**

(3) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，$x=1$ 为垂直渐近线；$a=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x}=1,b=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{f(x)}{x}-ax\right]=2$，$y=x+2$ 为斜渐近线。**(6 分)**

7. $f(x)=\begin{cases}(x-3)^2\mathrm{e}^{-x}, & -1\leqslant x<0,\\(x-3)^2\mathrm{e}^{x}, & 0\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}(x-3)(5-x)\mathrm{e}^{-x}, & -1<x<0,\\(x-3)(x-1)\mathrm{e}^{x}, & 0<x<4.\end{cases}$ **(3 分)**

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(x-3)^2\mathrm{e}^{-x}-9}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left[2(x-3)-(x-3)^2\right]\mathrm{e}^{-x}=-15$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-3)^2\mathrm{e}^{x}-9}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[2(x-3)+(x-3)^2\right]\mathrm{e}^{x}=3$。**(4 分)**

$(-1,4)$ 内的可疑点为 $x=0$ (不可导点)和 $x=3$ (驻点)，**(1 分)**

$f(-1)=16\mathrm{e},f(0)=9,f(3)=0,f(4)=\mathrm{e}^4$，故 $f(x)$ 的最大值为 $f(4)=\mathrm{e}^4$。**(2 分)**

8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{3t^2-3}{3t^2+3}=1-\dfrac{2}{t^2+1}$，驻点对应的参数为 $t=\pm1$。**(3 分)**

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{3t^2+3}=\dfrac{4t}{3(t^2+1)^3}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\pm1}=\pm\dfrac{1}{6}$。**(4 分)**

$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=|y''|=\dfrac{1}{6}$。**(3 分)**