2020年数学建模模拟题-答案

一、简答题

1. 简述数据拟合的线性最小二乘法。

答：曲线拟合问题是指：已知平面上 n 个点（x_i,y_i），寻求函数 f(x)，使 f(x)在某种准则下与所有数据点最为接近，即曲线拟合最好。

线性最小二乘法是解决曲线拟合最常用的方法，其基本思路是，令

$$f(x)=a_1r_1(x)+a_2r_2(x)+\dots+a_mr_m(x)$$

其中 $r_k(x)$是事先选定的一组函数，a_k是待定系数。寻求 $a_1,a_2,\dots,a_m$ **使这 n 个点（x_i,y_i）与曲线 y=f(x) 的距离δ_i 的平方和最小 即使$J(a_1,\dots,a_m)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2$** 最小，此准则称为最小二乘准则。这种拟合方法称为最小二乘拟合。

2. 设 x(t)表示时刻 t 的人口，试解释阻滞增长(Logistic)模型中涉及的所有变量、参数，并用尽可能简洁的语言表述该模型的建模思想。

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=r(1-\dfrac{x}{x_m})x\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

解： r：表示人口固有增长率

x_m：表示最大人口容量

x_0：表示初始时刻人口数

模型假设：（a）人口增长率 r 为人口 x（t）的减函数，假定 r(x)=r-sx

（b）自然资源和环境条件能容纳的最大人口容量为 x_m

建模：$x=x_m$时，$r(x_m)=0$，得 $r-sx_m=0$，所以 $s=r/x_m$，则 $r(x)=r(1-x/x_m)$

又据马尔萨斯模型，假定 r 与当时的人口成正比，所以

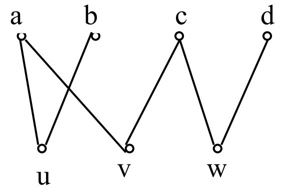
$$\frac{dx}{dt}=r(x)x(t)=r(1-\frac{x}{x_m})x$$

$x(0)=x_0$，是初始时刻的人口数。

3. 写出差分方程 $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ 的通解。

解：$a_n=C_1 2^n+C_2(-1)^n$

4. 写出下图的一个最大匹配，一个最小覆盖。



解：最大匹配有{(a,u),(c,v),(d,w)} （答案不唯一）。

最小覆盖有{u, v, w}。

二、MATLAB 编程

1. 利用 matlab 求解出

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$**的特征值和特征向量。**

解：输入如下

```
A=[-1,1,0;-4,3,0;0,0,2]
[V,D]=eig(A)
```

2. 已知微分方程如下，求其解析解；求其在[1,3]区间的数值解并作图。

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}+4x\\ y(1)=2\end{cases}$$

解：输入如下

解析解： y=dsolve('Dy=-2*y/x+4*x','y(1)=2','x')

数值解：先定义函数 M 文件：

```
function dy=wei(x,y)
    dy=-2*y/x+4*x;
```

命令：[x,y]=ode45('wei',[1,3],2);

plot(x,y)

三、模型表示

1. 某药剂厂生产两种药剂 a 和 b。每生产 1 公斤的 a 需要 3 公斤的原料 c 和 4 公斤原料 d 以及 5 个工时加工，而每生产 1 公斤的 b 需要 2 公斤的原料 d 和 5 公斤的原料 e 以及 7 个工时加工。假设所有产品都可销售完，且 1 公斤 a 的售价为 1000 元、1 公斤 b 的售价为 800 元、购买 1 公斤 c、d 和 e 要分别花 30 元、40

元和 50 元、1 个工人的时薪为 25 元。每周可供应的原料 c、d 和 e 上限分别为 300、400 和 350 公斤，工人加工工时上限为 600 小时。根据以上条件，如何安排生产获得最大利润呢？请用数学模型描述这一规划问题。（线性规划）

解:（确定决策变元）设 x1 和 x2 分别是 a 和 b 的每周产量。

（确定目标函数）本问题的目标是利润最大化，总收益为

Z=x1*(1000-90-160-125)+x2*(800-80-250-175)

（确定约束条件）原材料 c: 3*x1≤300

原材料 d：4*x1+2*x2≤400

原材料 e: 5*x2≤350

加工工时：5*x1+7*x2≤600

综上，原问题可表示为一个线性规划问题：

max Z= x1*625+x2*295

s.t. x1≤100

2*x1+x2≤200

x2≤70

5*x1+7*x2≤600

x1≥, x2≥0

2. 某厂向用户提供发动机，合同规定，第一、二、三季度末分别交货 40 台、60 台、80 台. 每季度的生产费用为 $f(x)=ax+bx^2$（元），其中 x 是该季生产的台数. 若交货后有剩余，可用于下季度交货，但需支付存储费，每台每季度 c 元. 已知工厂每季度最大生产能力为 100 台，第一季度开始时无存货，问工厂应如何安排生产计划，才能既满足合同又使总费用最低？（只需给出数学模型，不需求解）

解：设 X_i 表示第 i 季度的产量， i=1,2,3

建立非线性规划模型：

$$\text{Min } f = aX_1+bX_1^2+aX_2+bX_2^2+aX_3+bX_3^2+c(X_1-40)+c(X_1+X_2-100)$$

$X_1 \geq 40;$

$X_1+X_2 \geq 100;$

$X_1+ X_2+X_3=180;$

$X_1 \leq 100;$

$X_2 \leq 100;$

$X_3 \leq 100;$

$X_i \geq 0,\ i=1,2,3$

3. 某架货机有三个货舱：前仓、中仓、后仓。三个货舱所能装载的货物的最大质量和体积都有限制，如下表 1 所示。并且为了保持飞机的平衡，三个货舱中实际装载货物的质量必须与其最大容许质量成比例。现有四类货物供该货机本次飞行装运，其有关信息如下表 2 所示，表中最后一列指装运后所获得的利润。应如何安排装运，使该货机本次飞行获利最大？（只需给出数学模型，不需求解）

表 1： 三个货舱装载货物的最大容许质量和体积

	前仓	中仓	后仓
质量限制（t）	10	16	8
体积限制（m^3）	6800	8700	5300

表 2： 四类装运货物的信息

	质量（t）	体积（m^3/t）	利润（元/t）
货物 1	18	480	3100
货物 2	15	650	3800
货物 3	23	580	3500
货物 4	12	390	2850

解：设 Xij 表示第 i 种货物装入第 j 个货舱的质量，货舱 j=1,2,3，分别表示前仓、中仓、后仓。

建立线性规划模型：

Max f = 3100*(X11+X12+X13)+3800* (X21+X22+X23)+3500* (X31+X32+X33) +2850* (X41+X42+X43)

约束：

（货物的总质量约束） X11+X12+X13≤18
X21+X22+X23≤15
X31+X32+X33≤23
X41+X42+X43≤12

（货舱的质量限制） X11+X21+X31+X41≤10
X12+X22+X32+X42≤16
X13+X23+X33+X43≤8

（货舱的空间限制） 480*X11+650*X21+580*X31+390*X41≤6800
480*X12+650*X22+580*X32+390*X42≤8700
480*X13+650*X23+580*X33+390*X43≤5300

（货舱装入质量的平衡约束）

(X11+X21+X31+X41)/10 = (X12+X22+X32+X42)/16

(X12+X22+X32+X42)/16 = (X13+X23+X33+X43)/8

4. 一位家长要分给三个小孩（小明、小强和小芳）4 件不同的礼物 a、b、c 和 d。为了公平起见，让每个小孩在每回合分别指出一个礼物，如果被指出的礼物各不相同则各人分别拿走自己所指出的那个礼物，否则指出相同礼物的小孩之间就抓阄（每人获胜概率均等）决定谁拿走那个共同指出的礼物。如果还有剩余的礼物则进行下一轮直到所有礼物分完。小明知道小强和小芳一定会严格按照 a-b-c-d 和 a-d-b-c 的顺序指出礼物（对应位置的礼物已被分走则按次序顺延），他对 a、b、c 和 d 分别给予 10、100、60 和 20 的分数（分数越高越想得到），问他如何找到一个指出序列使得按此序列他可以获得的期望分数之和最大？要求用图方法描述该问题并解释其解在图结构中对应的含义（最短路径）

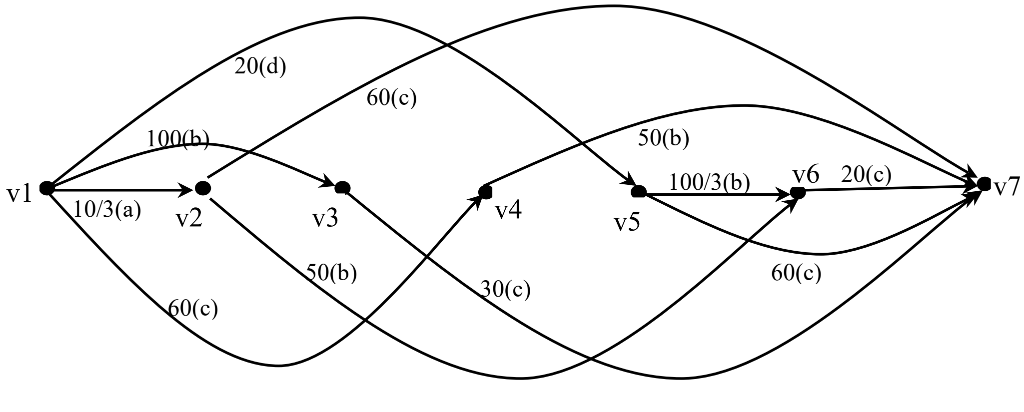
解： 构建图模型如下，图中的每个点代表着一个剩余礼物集合，各含义如下：

v1-{a,b,c,d}，v2-{b,c,d}， v3-{c,d}，v4-{b,d}，v5-{b,c}，v6-{c}， v7-∅。

如果某回合前后的剩余礼物集合分别对应着点 u 和 v，则 u 和 v 之间有边相连，其权值为小明获得的期望分数且该边标记上相应的物品名（在 u 下，如果小明有两种不同的指出方案，但它们都导致 v，则边的权值取最高可获得的期望分数而该边标记上对应的指出物品）。各边的权值如下表(行标为出发点下标，列标对应终止点下标)，权值旁标记了是相应指出物品的名称。(0 表示到点自身无自环，-inf 表示没有边)

0	10/3(a)	100(b)	60(c)	20(d)	-inf	-inf
-inf	0	-inf	-inf	-inf	50(b)	60(c)
-inf	-inf	0	-inf	-inf	-inf	30(c)
-inf	-inf	-inf	0	-inf	-inf	50(b)
-inf	-inf	-inf	-inf	0	100/3(b)	60(c)
-inf	-inf	-inf	-inf	-inf	0	20(c)
-inf	-inf	-inf	-inf	-inf	-inf	0

原问题的解就对应着这个有向图中 v1 到 v7 的一条权值最大的路径。最佳的指出序列就是该路径上各边上的标记所构成的序列。



5.（点菜问题）我们在餐馆中点菜，需要包含某些营养成份，但同时又希望总价格最低。下表是这个餐馆的部分菜单，请你通过数学建模方法，提供合理的选菜方案。（只需给出数学模型，不需求解）

序号	菜色	价格	蛋白质	淀粉	维生素	矿物质
1	菜肉蛋卷	28	1	0	1	1
2	炒猪肝	32	0	1	0	1
3	沙拉蔬菜	18	0	0	1	0
4	红烧排骨	48	1	0	0	0
5	咖喱土豆	20	0	1	0	0
6	清汤鸡	68	1	0	0	1

解:（决策变量）设 xi=0 表示不选择第 i 个菜，xi=1 表示选择第 i 个菜。(i=1,2,3,4,5,6)

（目标函数）本问题的目标是总费用 z 最小，

z=28*x1+32*x2+18*x3+48*x4+20*x5+68*x6

(约束条件)约束是所点菜品需包含所有营养成份：

x1+x4+x6≥1

x2+x5≥1;

x1+x3≥1;

x1+x2+x6≥1;

xi=0 或 1

综上，原问题表示为一个整数线性规划问题：

Min z=28*x1+32*x2+18*x3+48*x4+20*x5+68*x6

s.t. x1+x4+x6≥1

x2+x5≥1;

x1+x3≥1;

x1+x2+x6≥1;

xi=0 或 1 （i=1,2,3,4,5,6）

6.（工件加工次序）有五个工件等待在同一台机器上加工，若加工的先后次序可以任意，各工件之间的调整时间如下，请确定最优加工顺序。（给出数学模型及求解方法）

从	到				
	A	B	C	D	E
A	-	15	20	5	10

B	30	-	30	15	20
C	25	25	-	15	20
D	20	35	10	-	25
E	20	15	10	5	-

解：构建有向完备图 D，其中 V={A,B,C,D,E},结点表示各个工件，边<u,v>上的权值表示从工件 u 到工件 v 的调整时间。图的权矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 0 & 15 & 20 & 5 & 10 \\ 30 & 0 & 30 & 15 & 20 \\ 25 & 25 & 0 & 15 & 20 \\ 20 & 35 & 10 & 0 & 25 \\ 20 & 15 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

原问题转化为求图 D 中的一条权值最小的哈密顿通路。

四、综合题

1.现有如下关于函数 y=f(x)的 7 个观测点数据。

（1）用抛物线插值公式计算 f(6)的近似值。

（2）若已知 $y=\ln(a*x^2+b*x+c)$，请分别用 polyfit 和 lsqnonlin 指令进行数据拟合（要求给出相应的 matlab 代码）以确定系数 a、b 和 c 的最佳取值。

x	1	2	4	5	7	9	10
y	1.8	2.4	2.9	3.3	3.6	3.9	4.2

解:（1）选择与 x=6 最接近的三点 $x_0=4, x_1=5, x_2=7$ 为插值结点，根据抛物线插值公式计算：

$$f(6) \approx L_2(6) = y_0 \times \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \times \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \times \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= 2.9 \times \frac{(6-5)(6-7)}{(4-5)(4-7)} + 3.3 \times \frac{(6-4)(6-7)}{(5-4)(5-7)} + 3.6 \times \frac{(6-4)(6-5)}{(7-4)(7-5)}$$

$$= 3.5$$

（2）

（一）先用 lsqnonlin 指令

[1] 编写 M 文件 curve1.m

```
function f=curve1(x)
xdata=[1, 2, 4, 5, 7, 9, 10];
ydata=[1.8, 2.4, 2.9, 3.3, 3.6, 3.9, 4.2];
f= ydata-log(x(1)*xdata.^2+x(2)*xdata+x(3));
```

[2] 主程序 dianya1.m 如下：

```
x0=[1, 2, 3];
```

(注意，这里的 x0 是用户猜测的各参数初始值，取什么值无所谓)

```
xishu=lsqnonlin('curve1',x0)
```

（二）使用 polyfit 指令。由于 y 是关于 x 的非线性函数，所以我们先将其关系公式两边取自然指数得到：

$$e^y=a*x^2+b*x+c$$

令 $u=e^y$。

[1] 主程序 dianya3.m 如下：

```
xdata=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7];
ydata=[1.8, 2.4, 2.9, 3.3, 3.6, 3.9, 4.2];
u=exp(ydata);
xishu=polyfit(xdata, u,2);
```

2. 某饮料厂年初有资金 500 万元，已知未来四季度的弹性订单分别要饮料 200 吨、500 吨、300 吨和 100 吨（即每季度可以卖出的饮料产品数量上限）。生产饮料的成本为 1+1/（1+x）（x 为当季生产的饮料吨数）万元/吨。在四个季度中，每卖出一顿饮料可以获得收入分别为 2、3-（$1/y^2$）、2.5 和 ln(y)/2（注意：这里的 y 指工厂在相应季度卖出的饮料吨数）万元。在每个季度初，当季的生产成本要一次性付清，一季度和二季度的销售所得金额分别在三季度和四季度初才能转到工厂账户上，而三四季度的销售所得都只在 4 季度末到位。问如何制定工厂未来四个季度的生产和销售方案，使得工厂在 4 季度末的资金量最大？要求先给出其数学模型描述，然后写出求解该问题的 matlab 代码。

解: 设一至四季度的饮料产量分别为 x1, x2, x3, x4 吨，而一至四季度的销售供货量分别为 y1, y2, y3, y4 吨。接着确定约束条件：

每季度的产量大于等于 0：$x_i\geq 0$, (i=1, 2, 3, 4)

每季度销量介于 0 和弹性需求量之间：

$0\leq y1\leq 200$, $0\leq y2\leq 500$, $0\leq y3\leq 300$, $0\leq y4\leq 100$

每季度的生产成本不得超过当时的资金量：

第一季度： $1+1/(1+x1)\leq 500$

第二季度： $1+1/(1+x1)+1+1/(1+x2)\leq 500$

第三季度 $1+1/(1+x3)\leq 498-1/(1+x1)-1/(1+x2)+2*y1$

第四季度：

$1+1/(1+x4)\le 497-1/(1+x1)-1/(1+x2)-1/(1+x3)+2*y1+(3-1/(y2)^2)*y2$

历史销量不超过历史产量：

第一季度：$y1\le x1$

第二季度：$y1+y2\le x1+x2$

第三季度：$y1+y2+y3\le x1+x2+x3$

第四季度：$y1+y2+y3+y4\le x1+x2+x3+x4$

最后确定目标函数：本问题的目标是年末资金最多即

$$MaxZ=496-1/(1+x1)-1/(1+x2)-1/(1+x3)-1/(1+x4)+2*y1+(3-1/(y2)^2)*y2+2.5*y3+0.5*y4*\ln(y4)$$

（也可以写成相应求最小值 Min 的形式）

（注意在目标函数中，常数不重要，因此也可以把 496 直接去掉）

以下是相应的 matlab 求解代码：

(1)先建立 M 文件 fun.m 定义目标函数:（这里 x(1)至 x(4)对应上面的 x1 至 x4，x(5)至 x(8)对应上面的 y1 至 y4）

```
function f=fun(x)
    f= 1/（1+x(1)））+1/（1+x(2)））+1/（1+x(3)））+1/（1+x(4)）
    -2*x(5)-3*x(6)+1/x(6)-2.5*x(7)-0.5*x(8)*log(x(8));
```

（这里必须要对应原目标函数的 Min 形式!-496 可保留或不保留，这里不保留）

(2)再建立 M 文件 mycon.m 定义非线性约束**（对应于上面每季度的生产成本不得超过当时的资金量的四条约束）**

```
function [g,ceq]=mycon(x)
g=[ 1/(1+x(1))-499;
  1/(1+x(1))+1/(1+x(2))-498;
  1/(1+x(3))-497+1/(1+x(1))+1/(1+x(2))-2*x(5);
  1/(1+x(4))-496+x(1) + 1/(1+x(1))+1/(1+x(2))+1/(1+x(3))
-2*x(5)-3*x(6)+1/x(6)];
ceq=[];
```

(注意原来的各不等式在这里必须写为？？？≤0 的形式)

1） 主程序 scap.m:

x0=[0,0,0,100,0,0,0,100];**(初始赋值任意给定就好)**

```
A=[-1,0,0,0,1,0,0,0;
-1,-1,0,0,1,1,0,0;
-1,-1,-1,0,1,1,1,0;
-1,-1,-1,-1,1,1,1,1];
```

```
b=zeros(4,1);（A和b对应前面历史销量不超过历史产量的约束）
vlb=zeros(8,1);各变元取值下界全为0
vub=[inf;inf;inf;inf;200;500;300;100]; 各变元取值上界，对应弹性需求
[x,fval]=fmincon(‘fun’, x0, A, b, [], [], vlb, vub, ‘mycon’);
fval=-fval;
```

3.（投资问题）某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，已知：项目A，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115%；项目B，第三年初需要投资，到第五年未能回收本利125%，但规定最大投资额不超过4万元；项目C，第二年初需要投资，到第五年未能回收本利140%，但规定最大投资额不超过3万元；项目D，五年内每年初可购买公债，于当年末归还，并加利息6%。该部门现有资金10万元，问它应如何确定给这些项目每年的投资额，使到第五年末拥有的资金的本利总额为最大？要求先给出其数学模型描述，然后写出求解该问题的matlab代码。

解： 确定决策变量，设x1a,x2a,x3a,x4a表示第一年到第四年每年初项目A的投资额，x3b表示第三年初项目B的投资额，x2d表示第二年初项目C的投资额，x1d,x2d,x3d,x4d,x5d表示第一年到第五年每年初项目D的投资额。

目标是到第五年末的资金总额z最大，

z=1.15*X4a+1.25*X3b+1.40*X2c+1.06*X5d

约束条件：

所有决策变量非负： xi≥0;

第一年初投资资金10万元且全部投入项目A与项目D： x1a+x1d=100000;

第二年初回收项目D，投资项目A,C,D： x2a+x2c+x2d=1.06*x1d;

第三年初回收项目A,D,投资项目A,B,D： x3a+x3b+x3d=1.15*x1a+1.06*x2d;

第四年初回收项目A,D,投资项目A,D： x4a+x4d=1.15*x2a+1.06*x3d;

第五年初回收项目A,D，投资项目D： x5d=1.15*x3a+1.06*x4d;

项目B投资限额： x3b≤40000;

项目C投资限额： x2c≤30000;

得线性规划模型：

Max z=1.15*X4a+1.25*X3b+1.40*X2c+1.06*X5d

s.t. x1a+x1d=100000

x2a+x2c+x2d-1.06*x1d=0

x3a+x3b+x3d-1.15*x1a-1.06*x2d=0

x4a+x4d-1.15*x2a-1.06*x3d=0

x5d-1.15*x3a-1.06*x4d=0

x3b≤40000

x2c≤30000

x1a≥0, x2a≥0,x3a≥0,x4a≥0, x3b≥0, x2c≥0,

x1d≥0,x2d≥0,x3d≥0,x4d≥0,x5d≥0

matlab求解代码：

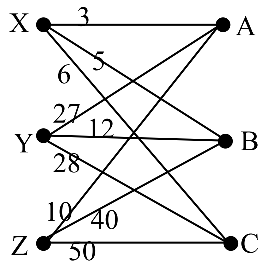
其中 x(1)=x1a,x(2)=x2a,x(3)=x3a,x(4)=x4a,x(5)=x3b,x(6)=x2c,

x(7)=x1d, x(8)=x2d, x(9)=x3d, x(10)=x4d, x(11)=x5d

```
 c=[0 0 0 -1.15 -1.25 -1.40 0 0 0 0 -1.06];
 A=[];
 b=[];
 Aeq=[1  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0
      0  1  0  0  0  1 -1.06 1 0  0  0
   -1.15 0  1  0  1  0  0 -1.06 1 0  0
     0 -1.15 0 1  0  0  0  0 -1.06 1 0
     0 0 -1.15 0 1  0  0  0  0 -1.06 1 ];
beq=[100000;0;0;0;0];
vlb=zeros(11,1);
vub=[inf;inf;inf;inf;40000;30000;inf;inf;inf;inf;inf];
[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
z=-fval
```

4.在遥远的地方有一位酋长，他想把三个女儿嫁出去。假定三个女儿为 A,B,C，三位求婚者为 X,Y,Z。每位求婚者对 A,B,C 愿意出的财礼数视其对她们的喜欢程度而定，其中求婚者 X 愿出的财礼（牛）数分别为 3,5,6，求婚者 Y 愿出的财礼数分别是 27,12,28，求婚者 Z 愿出的财礼数分别是 10,40,50，问酋长应如何嫁女，才能获得最多的财礼。

解：用三个点 A,B,C 表示酋长的三个女儿，另三个点 X,Y,Z 表示三个求婚者，在有可能结婚的两人之间连一条边，边上的权值表示求婚者愿出的财礼数，得图如下，问题为求图中的一个最大权和的匹配。易知酋长的女儿共有 6 种嫁法，比较所有方案，得最大权和匹配{(A,Y),(B,X),(C,Z)}，即 A 嫁 Y，B 嫁 X，C 嫁 Z，酋长得到最多的财礼 82 头牛。



5. 某人打算购买一辆新轿车，轿车的售价是 12 万元人民币。轿车购买后，每年的各种保险费、养护费等费用如表 1 所示。如果在 5 年内将轿车售出，并再购买新车，5 年之内的二手车销售价由表 2 所示。请设计一种购买轿车的方案，使 5 年内用车的总费用最少。

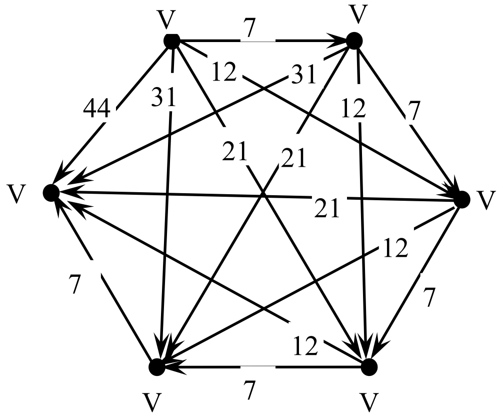
表 1 轿车的维护费

车龄/年	0	1	2	3	4
费用/万元	2	4	5	9	12

表 2 二手车的售价

车辆/年	1	2	3	4	5
售价/万元	7	6	2	1	0

解：构建图模型如下，其中结点集合 V={V1,V2,V3,V4,V5,V6}，其中 Vi（i=1,2,3,4,5）表示第 i 年初购买新车的决策，V6 表示第五年底。边(Vi,Vj)表示第 i 年初购买新车一直使用到第 j 年初再处理旧车购进新车，其边权 Wij 表示第 i 年初到第 j 年初的总费用。原问题转化为求图中从 V1 到V6 的最短路问题。



求得最短路有三条：V1V2V4V6;V1V3V4V6;V1V3V5V6。对应的有三种购车方案如下，总费用为 31 万。

方案一：分别于第 1 年、第 2 年、第 4 年购买新车；

方案二：分别于第 1 年、第 3 年、第 4 年购买新车；

方案三：分别于第 1 年、第 3 年、第 5 年购买新车。

6. 假设某湖中开始有 10 万条鱼，且鱼的年增长率为 30%，而每年捕鱼量为 2 万条。

（1）列出每年湖中鱼的条数的差分方程，并求解；

（2）多少年后，湖中的鱼将捕捞完？

解：设第 k 年湖中鱼的数量为 f(k)，则

$$f(k)=f(k-1)*(1+0.3)-2, \quad f(0)=10$$

f(k)=f(k-1)*(1+0.3)-2

= (f(k-2)*(1+0.3)-2)*(1+0.3)-2

=……

=f(0)*$(1+0.3)^k$-2*($(1+0.3)^{k-1}$+……+(1+0.3)+1)

=10*1.3^k-2*($(1.3)^k$-1)/0.3

=10*1.3^k/3+20/3

所以，f（k）=10*1.3^k/3+20/3

令 f（k）=10*1.3^k/3+20/3=0，求得 k 即为鱼捕捞完的年份。显然，f（k）=10*1.3^k/3+20/3>0，所以湖中的鱼是永远捕捞不完的。

7. 只由 3 个字母 a, b, c 组成的长度为 n 的一些单词将在通信信道上传输，传输中应满足条件：不得有两个 a 连续出现在任一单词中。确定通信信道允许传输的单词的个数。

解：设 f(n)表示可传输的 n 位长的单词个数。

分析：n 位长单词的第 n 位若为 b 或 c，则 n 位长的单词有 2f(n-1)个；n 位长单词的第 n 位若为 a，则第（n-1）位只能为 b 或 c，这样的 n 位长的单词有 2f(n-2)个，所以有差分方程

f(n)=2f(n-1)+2f(n-2)，且初始条件 f(1)=3，f(2)=8

其特征方程为 x^2-2x-2=0, 得特征根 $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ ， $x_2 = 1 - \sqrt{3}$

所以差分方程的通解 $\mathrm{f(n)} = c_1(1+\sqrt{3})^{\mathrm{n}} + c_2 x(1-\sqrt{3})^n$

由初始条件得方程组 $\begin{cases} c_1\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + c_2 x\left(1-\sqrt{3}\right)^2 = 8 \\ c_1(1+\sqrt{3)} + c_2\left(1-\sqrt{3}\right) = 3 \end{cases}$

解得 $c_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$ ， $c_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$

所以 $f(n) = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n$