姓名：______ 学号：______ 专业班级：______ 任课教师______ 适用 全校 考场教室______ [该项由出卷人填写]

装 订 线

2020 级高数(上)第 1 章单元测验参考解答与评分标准

1. (1) 取子列 $x_{2n}=(\sqrt{2n})^{(-1)^{2n}}=\sqrt{2n}\to\infty,\ x_{2n-1}=(\sqrt{2n-1})^{(-1)^{2n-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}\to 0\ (n=1,2,\cdots)$，故 x_n 无界，但当 $n\to\infty$ 时不是 ∞.

(2) 由题意，

$$0\neq C=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\cos x^2}-e^x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{e^x\left[e^{x(\cos x^2-1)}-1\right]}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{x(\cos x^2-1)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{x^{n-1}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^{5-n}.$$

显然，只有当 $n=5$ 时，上式才等于非零常数.

(3) $f(x)$ 在 $x=0,1$ 处无定义，故 $x=0,1$ 为间断点.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0,$$

所以 $x=0$ 为无穷间断点，$x=1$ 为跳跃间断点.

(4) 因为 $\dfrac{n(n+1)/2}{n^2+n+n}<\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}<\dfrac{n(n+1)/2}{n^2+n+1}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)/2}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)/2}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

故原式 $=\dfrac{1}{2}$.

(5) $a=f(0)=\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\xlongequal{连续}\lim\limits_{x\to0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

2. (1) 原式 $=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left[1+(\cos 2x-1)\right]^{\frac{1}{2}}-1}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}$ **(3 分)** $=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos 2x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=2$. **(3 分)**

(2) 原式 $\xlongequal{2-x=t}\lim\limits_{t\to0}t\tan\left[\dfrac{\pi}{4}(2-t)\right]$ **(2 分)** $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\tan\left(\frac{\pi}{4}t\right)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{\frac{\pi}{4}t}=\dfrac{4}{\pi}$. **(4 分)**

(3) $\lim\limits_{x\to0}(2^x+x)^{\frac{1}{\arcsin 2x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+(2^x+x-1)\right]^{\frac{1}{\arcsin 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x+x-1}{\arcsin 2x}}$ **(3 分)**

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{2x}+\frac{1}{2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln 2}{2x}+\frac{1}{2}}=\sqrt{2e}$. **(3 分)**

(4) $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{3/x}}+\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2e^{-3/x}+e^{-2/x}}{e^{-3/x}+1}+\dfrac{x}{x}\right)=0+1=1$，**(3 分)**

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{3/x}}+\frac{\arcsin x}{\sqrt{x^2}}\right)=2-1=1,\ \textbf{(3 分)}$$

所以原极限为 1.

3. (1) 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{(x-a)^2}=-2$，知此极限必为 $\dfrac{0}{0}$ 型，得 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]=0$，即 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$. **(2 分)**

又 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，故 $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$. **(2 分)**

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{(x-a)^2}=-2$，根据局部保号性，在 $x=a$ 的某去心邻域内，$\dfrac{f(x)-1}{(x-a)^2}<0$，得 $f(x)-1<0$，所以 $f(x)<1$. **(4 分)**

4. 显然，$0<a_n\leqslant1$，即 $\{a_n\}$ 有界 **(3 分)**. $a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$a_1>a_2$. 设 $a_{n-1}>a_n$，则

$$a_n-a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}}-\sqrt{\frac{a_n}{1+a_n}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}}+\sqrt{\frac{a_n}{1+a_n}}}\cdot\frac{a_{n-1}-a_n}{(1+a_{n-1})(1+a_n)}>0,$$

即 $\{a_n\}$ 单减，从而 $\{a_n\}$ 收敛. **(5 分)**

令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则在 $a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n}{1+a_n}}$ 两边取极限得 $a=\sqrt{\dfrac{a}{1+a}}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **(2 分)**

5. 由题意，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2+bx+c-\cos x}{x^2}=0$，故 $\lim\limits_{x\to0}(ax^2+bx+c-\cos x)=0$，得 $c=1$. **(4 分)**

从而，$0=\lim\limits_{x\to0}\left(a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=a+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{b}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$，得 $b=0,a=-\dfrac{1}{2}$. **(6 分)**

6. $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\arctan x+b\sin 2x}{\ln(1+x)}=3\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\arctan x}{x}+b\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin 2x}{x}=3+2b$，**(3 分)**

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\sqrt[a]{1-x^2}}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\left[1+(-x^2)\right]^{\frac{1}{a}}-1}{x^2}=-\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{1}{a}(-x^2)}{x^2}=\dfrac{1}{a}$. **(3 分)**

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(0+0)=f(0-0)=f(0)=1$，故 $a=1,\ b=-1$. **(3 分)**

7. 显然，$x=k\ (k=-1,-2,\cdots)$ 及 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点. **(2 分)**

$k=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-1}{\pi\cos\pi x}=-\dfrac{2}{\pi}$，故 $x=-1$ 为可去间断点. **(3 分)**

$k=-2,-3,\cdots$ 时，$\lim\limits_{x\to k}f(x)=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\infty$，故 $x=k\ (k=-2,-3,\cdots)$ 为无穷间断点. **(2 分)**

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}\right]$ 不存在也不为 ∞，故 $x=1$ 为第二类(振荡)间断点. **(2 分)**

对于分段点 $x=0$，因为

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2-1}{\pi\cos\pi x}=-\frac{1}{\pi}, \quad \lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\ln(1+x)+\sin\frac{1}{x^2-1}\right]=-\sin1,$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. **(3 分)**

8. (1) 令 $F(x)=f(x)+2x-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1,\ F(1)=2$. **(2 分)**

根据零点定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $F(c)=0$，即 $f(c)=1-2c$. **(3 分)**

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有最大值 M 和最小值 m . 从而

$$m\leqslant f(0), f(1), f(2)\leqslant M,\quad 6m\leqslant 2f(0)+f(1)+3f(2)\leqslant 6M,$$

$$m\leqslant\frac{2f(0)+f(1)+3f(2)}{6}\leqslant M\ . \textbf{(4 分)}$$

由介值定理，存在 $\xi\in[0,2]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{2f(0)+f(1)+3f(2)}{6}$，即 $2f(0)+f(1)+3f(2)=6f(\xi)$. **(3 分)**