几何：

1. 2； 2. $2i-2j+k$； 3. −0.5， 6； 4. $\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}-3\boldsymbol{z}+5=0$；5. $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$；

6. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-4}{1}$；7. $\theta=\dfrac{\pi}{3}$；8. $\dfrac{\pi}{4}$；9. $5(x^2+z^2)+3y^2=8$；

10. $y^2+z^2=5x$；11. $y=z^2$ z；12. $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1\\ z=0\end{cases}$；13. $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=\dfrac{25}{16}\\ y=3\end{cases}$

14. $\arccos\dfrac{10}{3\sqrt{14}}$

15. 解 由向量积的定义，可知三角形 $\boldsymbol{ABC}$ 的面积

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.\quad \overrightarrow{AB}=\{-4,6,2\},\overrightarrow{AC}=\{1,6,3\}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-4&6&2\\1&6&3\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-30\boldsymbol{k}.\qquad S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|6\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-30\boldsymbol{k}\right|=2\sqrt{283}..$$

16 由题意，所求平面的法向量可取已知直线的方向向量，即

$$n=s=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=-16i+14j+11k$$

故所求平面方程 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$ 即16x−14y−11z−65=0。

17. 解：设所求平面为 $\dfrac{x}{\lambda}+\dfrac{y}{\lambda}+\dfrac{z}{\lambda}=1$， 平面过点（5，-7，4）， 解得 $\lambda=2$

所求平面为 $x+y+z=2$。

18. 证：l 方向向量为 $\vec{S}=\{1,2,-2\}$，π 法向量为 $\vec{n}=\{1,2,-2\}=\vec{S}$，

于是 l 与 π 垂直。l 参数方程为 $\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=3-2t\end{cases}$ 代入 π 方程，解

得 $t=1$，故 l 与平面 π 交点为（1，1，1）

19. 解 1：先求过点 $\boldsymbol{P}=(-1,1,4)$ 且垂直于直线 $\boldsymbol{L}$ 的平面 Π 的方程．可知平面 Π

的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,1,2\}$，故平面 Π 的方程为 $(x+1)+(y-1)+2(z-4)=0$，

即 $x+y+2z-8=0$． 再求平面Π与直线$\boldsymbol{L}$的交点$\boldsymbol{Q}$，由于$\boldsymbol{L}$的参数式方程为

$\begin{cases} x=2+t, \\ y=3+t, \\ z=4+2t. \end{cases}$ 将上述$\boldsymbol{x,y,z}$代人到平面Π的方程，可得$t=-\dfrac{5}{6}$． 再将$t=-\dfrac{5}{6}$代回直线的参数式方程， 得交点$\boldsymbol{Q}$的坐标为$x=\dfrac{7}{6}, y=\dfrac{13}{6}, z=\dfrac{7}{3}$. 故点$\boldsymbol{P}$到直线$L$的距离为$\boldsymbol{d}=|\boldsymbol{PQ}|=\sqrt{\left(-1-\dfrac{7}{6}\right)^2+\left(1-\dfrac{13}{6}\right)^2+\left(4-\dfrac{7}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{318}}{6}$.

解 2：$\boldsymbol{d}=\dfrac{|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}_0}\times\vec{\boldsymbol{s}}|}{|\vec{\boldsymbol{s}}|}, \boldsymbol{M}_0(2,3,4), \vec{\boldsymbol{s}}=\{1,1,2\}$， $\overrightarrow{\boldsymbol{PM}_0}=\{3,2,0\}, \vec{\boldsymbol{s}}=\{1,1,2\}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{PM}_0}\times\vec{\boldsymbol{s}}=\{4,-6,1\}$， $\boldsymbol{d}=\dfrac{|\overrightarrow{\boldsymbol{PM}_0}\times\vec{\boldsymbol{s}}|}{|\vec{\boldsymbol{s}}|}=\dfrac{\sqrt{318}}{6}$

多元函数微分

1. $\dfrac{\pi}{4}$； 2. $y\ge x \quad ,x>0 \quad ,x^2+y^2<1$； 3. $k^2\cdot f(x,y)$； 4. 1；

5. $(3x^2y^2-2x)\,\mathrm{d}x+(2x^3y-e^y)\,\mathrm{d}y$； 6. $\{2\ ,4\ ,-4\}$； 7. $\{2,1,3\}$

8. $\{5,2,1\}$；9. $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$； 10. $\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y+\dfrac{1}{2}\mathrm{d}z$； 11. $\dfrac{\cos x}{1+e^z}$； 12. （1, 0）；

13. 2； 14. $2f_x(a,b)$

15. 证明：$u_x=\dfrac{x}{u}, \qquad u_{xx}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{x^2}{u^3} \qquad u_y=\dfrac{y}{u}, \qquad u_{yy}=\dfrac{1}{w}-\dfrac{y^2}{u^3}$

$u_z=\dfrac{z}{u}, \qquad u_{zz}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{z^2}{u^3}$ 则：$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\dfrac{3}{u}-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{u^3}=\dfrac{2}{u}$

16. $z_x=y^x\ln y\cdot\ln xy+\dfrac{1}{x}y^x$， $z_y=xy^{x-1}\ln(xy)+\dfrac{1}{y}y^x$

17. $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,1)}=-\dfrac{y}{x^2}\Big|_{(2,1)}=-\dfrac{1}{4}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(2,1)}=\dfrac{1}{x}\Big|_{(2,1)}=\dfrac{1}{2}$， $\mathrm{d}z\big|_{(2,1)}=-\dfrac{1}{4}dx+\dfrac{1}{2}dy$

$\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{4}(0.1)+\dfrac{1}{2}(-0.2)=-0.125$

18. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1y+f_2 2x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}= f_1+y[f_{11}x+2yf_{12}]+2x[f_{21}x+2yf_{22}]= f_1+xyf_{11}+(2y^2+2x^2)f_{12}+4xyf_{22}$$

19. $l=\{4,3,12\}$， $\cos\alpha=\frac{4}{13},\cos\beta=\frac{3}{13},\cos\gamma=\frac{12}{13}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,2,1)}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma$$

$$=\left.(y^3z\cdot\cos\alpha+3xy^2z\cdot\cos\beta+xy^3\cdot\cos\gamma)\right|_{(5,1,2)}=\frac{158}{13}$$

20. 解： $\nabla u(1,1,1)=\left.\{y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2\}\right|_{(1,1,1)}=\{1,2,3\}$，

$$\max\frac{\partial u}{\partial l}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14},\min\frac{\partial u}{\partial l}=-\sqrt{1^2+2^2+3^2}=-\sqrt{14}$$

21. 解：法向量 $\vec{n}=\left.\{z_x,z_y,-1\}\right|_{(-1,\frac{1}{2},\frac{5}{2})}=\{-4,2,-1\}$=-$\{4,-2,1\}$

切平面方程 $4(x+1)-2(y-\frac{1}{2})+(z-\frac{5}{2})=0$ 即 $4x-2y+z+\frac{5}{2}=0$

法线方程 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-\frac{1}{2}}{-2}=z-\frac{5}{2}$

22. 解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$

法向量 $\vec{n}=\{2,-2,-4\}=2\{1,-1-2\}$

切平面方程 $(x-1)-(y+1)-2(z-1)=0$ 或 $x-y-2z=0$

法线方程 $x-1=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{-2}$

23. 解 1：由 $\begin{cases}1-y'-z'=0\\3x^2-2yy'-3z^2z'=0\end{cases}$ 代入 $P(1,1,-1)$ 解得

$y'|_P=0$ ，$z'|_P=1$ 方向向量 $\bar{\tau}=\{1,0,1\}$

切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{1}$ 或 $\begin{cases}x-z=2\\y=1\end{cases}$

法平面方程为 $(x-1)+(z+1)=0$ 或 $x+z=0$

解 2： 令 $\begin{cases}F(x,y,z)=x-y-z-1\\G(x,y,z)=x^3-y^2-z^3-1\end{cases}$

$$\vec{\tau}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}_{(1,1,-1)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -3\end{vmatrix}=\{1,0,1\}$$

切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+1}{1}$ 法平面方程 $(x-1)+(z+1)=0$

24．**解** 令 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2-3y=0, \\ f_y(x,y)=3y^2-3x=0, \end{cases}$ 解之，得驻点 $P_1(0,0),P_2(1,1)$.

又 $f_{xx}=6x, f_{xy}=-3, f_{yy}=6y.$

在点 $P_1(0,0)$ 处，$A=0,B=-3,C=0.$ 由于 $AC-B^2=-9<0$，所以点 $P_1(0,0)$ 不是极值点.

在点 $P_2(1,1)$ 处，$A=6,B=-3,C=6.$ 由于 $AC-B^2=27>0$，且 $A=6>0$，故函数在点 $P_2(1,1)$ 处取得极小值 $f(1,1)=-1$.

25．解：设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z，墙壁每单位造价为 k

则总造价为 $C=2kxy+2kxz+2kyz$；且 $xyz=V$

令 $L=2kxy+2kxz+2kyz+\lambda(xyz-V)$

$$\begin{cases} L_x=2ky+2kz+\lambda yz=0 \\ L_y=2kx+2kz+\lambda xz=0 \\ L_z=2kx+2ky+\lambda xy=0 \\ L_\lambda=xyz-V=0 \end{cases} \quad 得 \quad x=y=z=\sqrt[3]{V}$$

由于实际问题的最小值必定存在，因此当厂房的长、宽、高取相同值 $\sqrt[3]{V}$ 时，其造价最低。

重积分

1．$6\pi\le I\le 24\pi$ ；2． 0； 3．$\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$； 4．$\int_1^2 dy\int_0^{1-x} f(x,y)dx$；

5．$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{2\sec\theta} f(r)rdr$； 6． $I_1>I_2>I_3$；

7． 解 $\iint\limits_D |x|dxdy=2\int_0^a xdx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy=2\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx=\dfrac{2}{3}a^3$.

8. 解：　$I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr=\pi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}\pi$

9. $I=\iint\limits_D(3x+2y)d\sigma=\iint\limits_D 3xd\sigma+\iint\limits_D 2yd\sigma=0+\iint\limits_D 2yd\sigma=4\iint\limits_{D_1}yd\sigma$.

$=4\int_0^1dx\int_{2x^2}^{x^2+1}ydy=2\int_0^1(1+2x^2-3x^4)dx=2(x+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{5}x^5)_0^1=\frac{32}{15}$。

10. 交换积分次序　$\int_0^1dy\int_y^1e^{x^2}dx=\int_0^1dx\int_0^xe^{x^2}dy=\int_0^1xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$.

11. $\mathrm{I}=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho}^1(\rho^2+z)dz=\frac{5}{12}$

12. $\iiint\limits_{\Omega}z^2dv=\int_1^2z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_1^2z^2\cdot\pi z^2dz=\frac{1}{5}\pi z^5\Big|_1^2=\frac{31}{5}\pi$。

13. $\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=\int_0^1xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=\int_0^1xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$

$=\int_0^1[-\frac{1}{2}x(1-x-y)^2]_0^{1-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1x(1-x)^2dx=\frac{1}{24}$。

14. $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2d\rho\int_{\rho^2}^{\rho}dz=2\pi\int_0^1\rho^2(\rho-\rho^2)d\rho$

$=2\pi[\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{5}\rho^5]_0^1=\frac{\pi}{10}$。

15. $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1r^4dr$

$=2\pi\cdot2\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\pi$

16. $V=\iint\limits_D4d\sigma-\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma=4\times D$的面积$-\iint\limits_D\rho^2\rho d\rho d\sigma$

$=4\times\pi\times2^2-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^3d\rho=16\pi-2\pi\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2=8\pi$。

$A=A_1+A_2=\iint\limits_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}d\sigma+4\pi$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho\sqrt{1+4\rho^2}d\rho+4\pi=\frac{\pi}{3}(17\sqrt{17}-1)+4\pi$

17. 解：由对称性可知$\bar{x}=\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{M_z}{M}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}\mu z dv}{\iiint\limits_{\Omega}\mu dv}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 zdz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1 dz}=\frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}$$

故所求物体的质心坐标为$(0,0,\frac{1}{4})$。

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x^2+y^2)dv=\mu\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\rho^2 d\rho\int_\rho^1 dz=\frac{\pi\mu}{10}$$

曲线积分与曲面积分

1. $2\pi R^{2n+1}$；2. $P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$， 所作的功； 3. $\frac{1}{2}\pi a^4$； 4. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$；

5. 解：由于 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+a^2}dt=a\sqrt{2}dt$，

$$\int_L\frac{z^2}{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}\frac{a^2t^2}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}a\sqrt{2}dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{2}t^2dt=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi^3 a.$$

6. $\oint_L(x+y)ds=\int_{\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}}(x+y)ds=\int_0^1 xdx+\int_0^1\sqrt{2}dx+\int_0^1 ydy=1+\sqrt{2}$.

7. 解 L的参数方程为： $y=x^2$， $0\le x\le 1$， $ds=\sqrt{1+(2x)^2}dx$，

原式$=\int_0^1\left(x+\sqrt{x^2}\right)\sqrt{1+(2x)^2}dx=\int_0^1 2x\sqrt{1+(2x)^2}dx=\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

8. 解 L： $y=x^2$， x从0变到1，

$$\int_L 2xydx+x^2dy=\int_0^1(2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x)dx=x^4\Big|_0^1=1;$$

9. 解 Γ的参数方程为$x=1+t$， $y=1+2t$， $z=1+3t$， t从0变到1，所以有

$$\int_\Gamma xdx+ydy+zdz=\int_0^1[(1+t)+(1+2t)\cdot 2+(1+3t)\cdot 3]dt=\int_0^1(6+14t)dt=13。$$

10. 解 选x作参数， $x:-1\to 1$，

$$\int_L(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy=\int_{-1}^1[(x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x^2\cdot x)$$

$=\int_0^1 (x^2 \quad -2x^3 \quad +2x^5 \quad -4x^4 \quad) - \frac{14}{15}$

11. 解　要使曲线积分与路径无关，必须满足 $\frac{\partial(xy^\lambda)}{\partial y} = \frac{\partial(x^\lambda y)}{\partial x}$，即 $\lambda xy^{\lambda-1} = \lambda x^{\lambda-1}y$，

解得 $\lambda = 2$。从而　$I = \int_{(1,1)}^{(0,2)} xy^2dx + x^2ydy = \frac{1}{2}(xy)^2\Big|_{(1,1)}^{(0,2)} = -\frac{1}{2}$。

12. 解　用格林公式　$\oint_L (x+2y)dx + (x-2y)dy = \iint_D (1-2)dxdy$

$= -\iint_D dxdy = -(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$。

13. 解　因为，$P = 2x + y^3$，$Q = 3xy^2 + 4$，且 $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xoy 面内处处成立，故 $Pdx + Qdy$ 是某个函数的全微分。令原点 $O(0,0)$ 为积分起点，有

$$u(x,y) = \int_0^x 2xdx + \int_0^y (3xy^2+4)dy = x^2 + xy^3 + 4y \text{。}$$

14. 因为Σ：$z = \sqrt{x^2+y^2}$，所以 $dS = \sqrt{2}dxdy$

$\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\cdot\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\cdot rdr = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

15. 解　Σ在 xoy 面上的投影区域是由 x 轴，y 轴和直线 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 围成的三角形闭区域；被积函数 $f(x,y,z) = z + 2x + \frac{4}{3}y$，把Σ的方程代入，

$f(x,y,z) = z + 2x + \frac{4}{3}y = 4$；

Σ的方程为 $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$，$dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$。

于是　$\iint_\Sigma (z + 2x + \frac{4}{3}y)dS = \iint_D 4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy = \frac{4}{3}\sqrt{61}\times D$ 的面积

$= \frac{4}{3}\sqrt{61}\times\frac{1}{2}\times 2\times 3 = 4\sqrt{61}$。

16. 解　$P = (y-z)x$，$Q = 0$，$R = x - y$。有 $\frac{\partial P}{\partial x} = y - z$，$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$，$\frac{\partial R}{\partial z} = 0$。

$$\oiint_\Sigma (x-y)dxdy + (y-z)xdydz = \iiint_\Omega (y-z)dxdydz = 0 - \iiint_\Omega zdxdydz$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,d r\,\Big|_0^3 =-2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=-\frac{9}{2}\pi .$$

17. 解 $\oiint\limits_{\Sigma} x(y^2+z^2)dydz+x^2zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2+x^2)dv$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}r^2(r^2\sin\varphi)dr=2\pi\times2\times\frac{1}{5}a^5=\frac{4\pi}{5}a^5 .$$

18. . 解 已知，$P=x^3$，$Q=y^3$，$R=z^3$，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2)$，

由高斯公式，

$$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dv=\iiint\limits_{\Omega}3r^2\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{R}r^4dr=3\cdot2\pi\cdot2\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{12}{5}\pi R^5$$ 。

19. $div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial(x^3-x)}{\partial x}+\frac{\partial(y^3-y)}{\partial y}+\frac{\partial(z-xy)}{\partial z}=3x^2+3y^2-1$

无穷级数

1. 必要； 2. 发散.； 3. 发散； 4. $p>1$；

5. 解： 级数的通项为： $u_n=\frac{n}{3n-1}$， $\because\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq0$，

$\therefore$该级数发散.

6. 解：用比较审敛法的极限形式 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1$， 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，所以

原级数收敛.

7. 解：此级数为正项级数. $\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{(2n-1)2^n}{1}$，

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}<1，\quad\therefore\text{该级数收敛.}$$

8. 解： 因为 $u_n=\frac{n!}{10^n}$ ， 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$ ，

由比值审敛法可知级数发散.

9. 解： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}<1$，

故所给级数收敛.

10. 解 ：该级数所对应的正项级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，它是 p-级数，且 $p=\frac{1}{2}<1$，故发散. 但是，该级数是交错级数，且满足 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=u_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，

及 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，于是由交错级数审敛法，知该级数收敛.

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$为条件收敛.

11. 解 $\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\right|$ 发散 ， 而交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 满足 $u_{n+1}\le u_n$，

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$收敛， 所以级数是条件收敛的.

12. 解： $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，有 $R=\frac{1}{\rho}=1$， 当 $x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n}$发散，当 $x=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛， 所以收敛域为$(-1,1]$.

13. 解：因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}20^{2n}(x-\frac{3}{2})^{2n-1}$，

且$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{10^{2n+2}(2x-3)^{2n+1}}{10^{2n}(2x-3)^{2n-1}}\right|=20^2(x-\frac{3}{2})^2$，

所以，当$20^2(x-\frac{3}{2})^2<1$，即$\left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{20}$时，级数绝对收敛；

当$\left|x-\frac{3}{2}\right|>\frac{1}{20}$时，级数发散. 又当$\left|x-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{20}$时，原级数的一般项分别是$u_n=-10$和$u_n=10$，所以发散.

因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$的收敛域为$(\frac{29}{20},\frac{31}{20})$.

14. 解： 令$t=x+1$，于是该幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\cdot n}$，

因为$\rho=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{2^n\cdot n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$，

当$t=-2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛；当$t=2$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

因此，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\cdot n}$的收敛域为$[-2,2)$，

由于$t=x+1$，于是$-2\le x+1<2$，即$-3\le x<1$，

故所给幂级数的收敛域为$[-3,1)$.

15. 解：$\because\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$ $\therefore$收敛半径为 R = 1，收敛区间为（—1，1）.

和函数为 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$.

16. 解：$\because\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，$\therefore$收敛半径为 R = 1，

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，两边对 x 求导，

$s'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n})'=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1\text{-}x}$

两边积分$\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx$，即$s(x)\big|_0^x=-\ln(1-x)\big|_0^x$，

即$s(x)-s(0)=-\ln(1-x)+\ln(1-0)$

$\therefore s(x)=-\ln(1-x)$， $x\in(-1,1)$.

17. 解：$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3+x})$， $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$，$|x|<1$，

$$\frac{1}{3+x}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-(-\frac{x}{3})}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{3})^n\text{，}\quad\left|\frac{x}{3}\right|<1\text{，}$$

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{3})^n\text{，}|x|<1.$$

18. 解：已知 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\ (x\in(-\infty,+\infty))$，

所以 $xe^x=e[(x-1)e^{x-1}+e^{x-1}]\ =e\left[(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n\right]$

$$=e\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)(x-1)^n\right].\qquad(x\in(-\infty,+\infty))$$

19. 因为 $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1})$

$$=\frac{1}{2}[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{4}}\text{，}$$

由于 $\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}=1+\frac{x+1}{2}+(\frac{x+1}{2})^2+\cdots+(\frac{x+1}{2})^n+\cdots\quad(|\frac{x+1}{2}|<1)$，

且 $\frac{1}{1-\frac{x+1}{4}}=1+\frac{x+1}{4}+(\frac{x+1}{4})^2+\cdots+(\frac{x+1}{4})^n+\cdots\quad(|\frac{x+1}{4}|<1)$，

因此，得 $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$ 的幂级数展开式为

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(x+1)^n\text{，}$$

由 $|\frac{x+1}{2}|<1$，得 $-3<x<1$；由 $|\frac{x+1}{4}|<1$，得 $-5<x<3$，
其交集为 $-3<x<1$，

20. 解：将 $f(t)=\begin{cases}0 & -\pi\le t<0\\ 1 & 0\le t<\pi\end{cases}$ 代入傅里叶系数公式，得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}0dt+\int_{0}^{\pi}1dt]=1\text{，}$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos ntdt=0\text{，}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin ntdt=-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$=-\frac{1}{n\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0 & n=2,4,6,\cdots\\ \frac{2}{n\pi} & n=1,3,5\cdots\end{cases},$$

所以函数在 $t\neq n\pi, t\neq 0(n\in Z)$ 处的展开式为

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\cdots),\quad (-\infty<t<+\infty, t\neq k\pi, k\in z),$$

因 $f(-\pi+0)\neq f(\pi-0)$，所以傅里叶级数在 $(-\pi,\pi)$ 内收敛于和 $f(t)$，

在端点不连续，收敛于 $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

21. 解：正弦级数　　将 $f(x)$ 进行奇式延拓.于是，有

$$a_n=0,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n},\quad n=1,2,\cdots,$$

所以，函数 $f(x)=x$ 展开成正弦级数为

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx\quad (0\leq x\leq\pi).$$

余弦级数　　将 $f(x)$ 进行偶式延拓，于是，有

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0 & n=2,4,\cdots\\ -\frac{4}{n^2\pi} & n=1,3,\cdots\end{cases},$$

所以，函数 $f(x)=x$ 展开成余弦级数为

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x \quad (0\le x\le\pi .$$

22. $S(\pi)=$（ $-\frac{\pi}{2}$ ），$S(1)=$（ -1 ）