班级___________ 姓名_______ 序号____

作业成绩	

第 1 次作业　函数及其几种特性

本次作业目的

理解函数概念；熟悉函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性；理解反函数和复合函数的概念。

1. 下列各式中的 y 是否为 x 的单值函数，为什么？

(1) $y^3 = x$；(2) $x = \sin y$。

解

2. 下列各对函数是否相同？说明理由。

(1) $f(x) = x\,\mathrm{sgn}\,x,\ g(x) = \sqrt{x^2}$；

(2) $f(x) = \mathrm{e}^{2\ln x},\ g(x) = (\sqrt{x})^4$。

解

3. 设 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} + \lg(x-2)$，求：

(1) $f(\ln x)$ 的定义域；

(2) $f(x+a) + f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域。

解

4. 设 $2f(x) + x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$，求 $f(x)$。

解

5*. 证明 $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ 在 $(0,1)$ 内无界。

证

6*．设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明：$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加。

证

7. 判别 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性。

解

8. 求函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数。

解

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\geq 1, \\ x^2, & |x|<1, \end{cases}$ $g(x)=\lg x$，求 $f\left[g(x)\right]$ 和 $g\left[f(x)\right]$。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 2 次作业　初等函数(反三角函数)　参数方程与极坐标

本次作业目的

熟悉余切 $\cot x$、正割 $\sec x$、余割 $\csc x$、反正弦 $\arcsin x$、反余弦 $\arccos x$、反正切 $\arctan x$、反余切 $\operatorname{arc}\cot x$ 的定义、图形、性质；理解参数方程和极坐标的概念，熟悉用参数方程和极坐标表示的常见图形。

(反)三角函数常用性质、公式与图形

$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$;

$1+\tan^2 x\equiv\sec^2 x$, $1+\cot^2 x\equiv\csc^2 x$;

$y=\arcsin x$, $x\in[-1,1]$, $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$;

$y=\arccos x$, $x\in[-1,1]$, $y\in[0,\pi]$;

$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$y=\operatorname{arc}\cot x, x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(0,\pi)$;

$|\arcsin x|\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le\arccos x\le\pi$,

$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\operatorname{arc}\cot x<\pi$,

$\arcsin x+\arccos x\equiv\dfrac{\pi}{2}$,

$\arctan x+\operatorname{arc}\cot x\equiv\dfrac{\pi}{2}$,

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$,

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$,

$\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$,

$\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$,

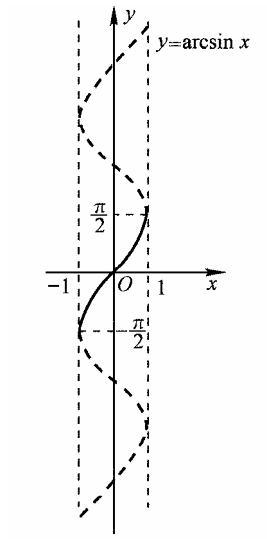
$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

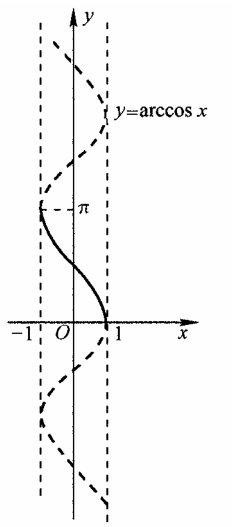
$\sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$,

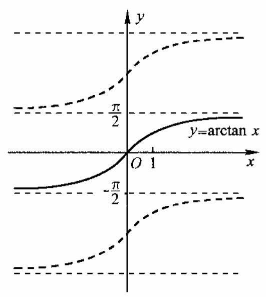
$\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$,

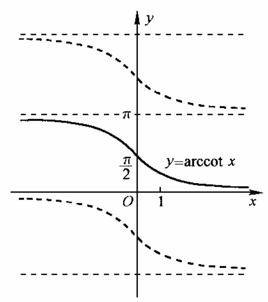
$\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$,

$\cos x\sin y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$.









1. 填写下列表格(是、否、单增、单减)，熟悉相应性质：

函数	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\mathrm{arc}\cot x$
有界性							
单调性							
奇偶性							
周期性							

2. 将下列乘积化为和差：

(1) $\sin x \sin 2y$ ；(2) $\sin 2x \cos 3y$。

解

3. 将下列和差化为乘积：

(1) $\sin 4x + \sin 3y$ ；(2) $\cos 2x - \cos 3y$ 。

解

4. (1) 做出曲线$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$的图形；

(2) 将$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$化为参数方程，并做图。

解

5. 将下列方程化为极坐标方程，并做图：

(1) $(x+1)^2 + y^2 = 1$ ；(2) $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 。

解

6. 做出下列曲线的图形：

(1) $r = a(1 - \cos\theta)$ ；(2) $r^2 = 2\sin 2\theta$ 。

解

班级____________　姓名________　序号____

作业成绩	

第 3 次作业　数列极限

本次作业目的

初步了解数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义；会用 $\varepsilon-N$ 定义验证简单数列极限；熟悉收敛数列的性质。

1. 根据数列极限定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n-1}=\dfrac{3}{4}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n=0$。

解

2^*. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明 $x_n\to a\left(n\to\infty\right)$。

班级____________ 姓名________ 序号_____

作业成绩	

第 4 次作业 函数极限

本次作业目的

初步了解函数极限的$\varepsilon-\delta$和$\varepsilon-X$定义；会用定义验证简单函数极限；熟悉左右极限及其性质；特别要注意函数极限的局部保号性。

1. 根据函数极限定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$；(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$。

解

2. 根据图形讨论函数 $f(x)=a^x$ 在(1) $a>1$ 和(2) $0<a<1$ 条件下 $x\to-\infty, x\to+\infty, x\to\infty$ 时的极限。

解

3. 根据图形和左右极限讨论 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$。

解

4. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x^3+a, & x>0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$ 在 $x\to 0$ 时极限存在，求常数 a 的值。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 5 次作业　无穷小与无穷大　极限运算法则

本次作业目的

理解无穷小和无穷大的概念及其两者的关系；熟悉无穷小的性质；熟悉无穷小与极限的关系。

1. 下列函数在什么情况下是无穷小，什么情况下是无穷大？

(1) $\dfrac{x+2}{x^2}$；(2) $2^{\frac{1}{x}}-1$；(3) $\ln(1+x)$；(4) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$。

解

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arc\,cot} x}{x}$；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。

解

3[*]. 证明：函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界，但当 $x\to 0^+$ 时，此函数不是无穷大。

证

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-4x+1}$；(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$；(6) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})\ (|x|<1)$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n+5^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}}$。

解

5. 若 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$，求 α,β。

解

班级__________ 姓名_______ 序号____

作业成绩	

第 6 次作业 极限存在法则 无穷小的比较

本次作业目的

掌握夹逼准则和单调有界准则；熟练应用两个重要极限；理解无穷小的比较及阶的概念；理解并正确应用等价无穷小代换法则；熟记常用等价无穷小代换。

1*. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}$ ；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$ 。

解

2*. 求数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots,$ $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}, \cdots$ 的极限。

解

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^m)}{\sin^n x}$ (m , n 为正整数)；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 5x}$ ；(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\tan 3x}$ ；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$ ；(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt[3]{1+x}-1)}$ ；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\arctan 3x}$ ；(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}$ 。

解

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$ ；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$ 。

解

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$ ，求常数 a 。

解

6. 当 $x\to 0$ 时，求正整数 n ，使 $(1+x^n)^{1/3}-1$ 为 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 的高阶无穷小但为 $x^2\ln(1+x^2)$ 的低阶无穷小。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 7 次作业 函数的连续性 连续函数的性质

本次作业目的

理解连续的概念；熟悉间断点的分类准则；熟悉连续函数的运算性质；熟练掌握闭区间上连续函数的四大性质。

1. 求下列函数的间断点，并指出其类型：

(1) $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$；(2) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}\sin\dfrac{1}{x}$；(4) $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$；

(5) $f(x)=\dfrac{x-2}{\ln|1-x|}$。

解

2. 求 a , b 的值，使下列函数为连续函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x<0\\ a, & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}。$$

解

3[*]. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判断其类型。

解

4. 证明方程 $x^5-3x+1=0$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间。

证

5. 若 $f(x)\in C\left[a,b\right]$ ， $a<x_1<\cdots<x_n<b$ ， 则在 $[x_1,x_n]$ 上必存在 ξ ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}。$$

证

班级__________ 姓名_______ 序号____

作业成绩	

第 8 次作业 导数的概念

本次作业目的

理解、掌握导数的背景、各种定义形式及几何意义；熟悉左右导数概念；理解可导与连续的关系；要特别注意导数定义的应用及分段点处导数计算。

1. 若 $f'(x_0)$ 存在，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ ；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$， $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在。

解

2. 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$ 。

证

3. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ ，计算 $f'(0)$ 。

解

4. $f(x)=\max\left\{x,x^2\right\},x\in(0,2)$ ，求 $f'(x)$ 。

解

5. 讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

解

6. 讨论 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性、可导性。

解

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 1, \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，求 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。

解

8. 求曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线和法线方程。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 9 次作业　导数运算法则　高阶导数

本次作业目的

掌握导数的四则运算法则、反函数求导法则和复合函数求导法则；熟记基本导数公式；培养运用基本导数公式和法则计算一阶和高阶导数的基本技能。

1. 计算下列导数：

(1) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$；

(2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$；

(3) $y=\dfrac{2\csc x}{1+x^2}$；

(4) $y=\dfrac{\cot x}{1+\sqrt{x}}$；

(5) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$；

(6) $y=\arctan \mathrm{e}^x$；

(7) $y=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$；

(8) $y=f^2(\mathrm{e}^x)$， f 可导。

(9) $y=\ln\sec 3x$；

(10) $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$

(11) $y=\ln\left[\ln\left(\ln x\right)\right]$；

(12) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$；

(13) $y=\arcsin \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ ；

(14) $y=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}$ ；

(15) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$ ；

(16) $y=\ln\tan\frac{x}{2}-\cos\ln\tan x$。

2. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ ；(2) $y=x^2 f(\sin x)$，其中 f 二阶可导。

解

3*. 已知 $y=f(x)$ 的导数 y'，求其反函数的一阶和二阶导数。

解

4. $y=\mathrm{e}^x(x^2+2x+2)$，求 $y^{(20)}$。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 10 次作业 隐函数求导 参变量函数求导

本次作业目的

掌握隐函数求导法、对数求导法和参变量函数求导法 熟练计算隐函数和参变量函数的一阶、二阶导数。

1. 求下列方程所确定的隐函数的导数：

(1) $y = 1 - xe^y$，求 y'；

(2) $e^{xy} + y\ln x = \cos 2x$，求 y'；

(3) $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$，求 $y''(0)$。

解

2. 求曲线 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 在 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 处的切线方程。

解

3. 求下列函数的一阶导数：

(1) $y = x\cdot(\sin x)^{\cos x}$；(2) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2-2}}}$。

解

4. 求曲线$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$在 $t = 2$ 时的切线。

解

5. 求下列参变量函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$：

(1) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2} \\ y = 1 - t \end{cases}$；(2) $\begin{cases} x = 3\mathrm{e}^{-t} \\ y = 2\mathrm{e}^{t} \end{cases}$。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 11 次作业　函数的微分

本次作业目的

理解函数微分的概念、可微的条件和微分的几何意义；掌握微分的基本计算公式和运算法则；了解微分在近似计算中的应用。

1. 已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1,0.1 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$ 值；

解

2. 求下列函数的微分：

(1) $y=\arctan\dfrac{a}{x}+\ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$；

(2) $y=x^{\arcsin x}$；(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$。

解

3. 设球壳的内直径为 D，厚度为 h，求其体积的近似值。

解

4. 设扇形半径 $R=100\mathrm{cm}$，圆心角 $\alpha=60^\circ$。若：(1) 半径增加 $1\mathrm{cm}$, α 不变；(2) α 减少 $30'$，R 不变，问扇形面积各近似改变多少？

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 12 次作业 微分中值定理

本次作业目的

理解 Rolle 定理和 Lagrange 定理；了解 Cauchy 定理；初步掌握用 Rolle 定理和 Lagrange 定理证明根的存在性、等式、不等式、恒等式的方法。

1. 不求 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间。

解

2. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 x_0，证明方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于 x_0 的正根。

证

3. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $a<x_1<x_2<x_3<b$，其中 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$。证明：存在 $\gamma\in(x_1,x_3)$，使得 $f''(\gamma)=0$。

证

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}。$$

证

5. 若 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f(x),\ f(0)=1$，证明：$f(x)=\mathrm{e}^{x}$。

证

6. 证明恒等式：$\arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\dfrac{\pi}{2}$。

证

7. 设 $a>b>0,$ 证明：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$。

证

班级____________ 姓名________ 序号_____

作业成绩	

第 13 次作业 L'Hospital 法则

本次作业目的

掌握 L'Hospital 法则；应用 L'Hospital 法则，结合等价无穷小，熟练计算各类未定式极限。

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}$；

解

(2) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

解

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；

解

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$；

解

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$。

解

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$；

解

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$；

解

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan x}$；

解

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi}{4}x\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$；

解

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$。

解

3. 验证 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则计算。

证

4*. 设 $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导，求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}。$$

解

5. 已知 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，求 a,b。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 14 次作业 Taylor 公式 函数的单调性

本次作业目的

了解 Taylor 公式 知道几个常用 Taylor 公式；会用 Taylor 公式计算极限，证明简单结论；熟悉单调性的判定；掌握用单调性证明不等式和根的唯一性的方法。

1. 当 $x_0 = 4$ 时，求函数 $y = \sqrt{x}$ 的三阶泰勒公式。

解

2. 应用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$；

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \right]$。

解

3. 试确定下列函数的单调区间：

(1) $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$；(2) $y = (x-1)(x+1)^3$。

解

4. 证明下列不等式：

(1) $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}\ \left(x>0\right)$；

(2) $\ln(1+x)\geq\dfrac{\arctan x}{1+x}\ \left(x>0\right)$。

证

5. 证明：方程 $\sin x=x$ 只有一个实数根。

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零，记

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ \left(x>a\right)。$$

证明 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加。

证

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 15 次作业　函数的极值与最值

本次作业目的

理解极值和最值的概念；熟悉极值的必要条件和充分条件；熟练计算各类极值和最值。

1. 求下列函数的极值：

(1) $y=x^2(a-x)^2(a>0)$；(2) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$。

解

2. 证明 $\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$，其中 $0\le x\le 1,$ $p>1$。

证

3. 求下列函数的最大值和最小值：

(1) $y=x^4-2x^2+5,[-2,2]$；

(2) $y=x+2\sqrt{x},[0,4]$。

解

4. 试求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$而面积最大的矩形的边长。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 16 次作业　曲线的凹凸性与拐点　函数图形的描绘

本次作业目的

熟悉凹凸性与拐点；掌握凹凸性与拐点的必要条件和充分条件 熟练计算曲线的各类渐近线；了解曲线绘图的一般步骤。

1. 求下列函数图形的拐点及凹凸区间：

(1) $y=\ln(x^2-1)$；(2) $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$。

解

2. 求曲线 $x=t^2, y=3t+t^3$ 的拐点。

解

3. 利用凹凸性证明不等式

$$\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}>\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}},\ x\neq y。$$

证

4. 求下列曲线的渐近线：

(1) $y=\dfrac{x^2+x}{(x-2)(x+3)}$；(2) $y=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$。

解

5. 讨论函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$ 的形态，并描绘它的图形。

解

班级___________ 姓名_______ 序号____

作业成绩	

第 17 次作业 定积分的概念与性质 微积分基本公式

本次作业目的

理解定积分概念及几何意义；熟悉定积分的性质；熟练掌握变上限积分函数的导数与各类应用；掌握微积分基本公式。

1. 根据定积分的性质，说明下列积分哪一个的值较大：

(1) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$ ；

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$ 。

解

2*. 将极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$$

表示成定积分。

解

3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}\mathrm{d}t$ 。

解

4. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，试用导数定义求 $f'(0)$ 。

解

5. 计算下列各导数：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$ ；(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$ 。

解

6. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{y^2} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_x^0 \cos t^2\mathrm{d}t=0$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解

7. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^{x}t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 18 次作业　不定积分概念　第一类换元积分法

本次作业目的

理解不定积分的概念；熟记不定积分基本公式；熟悉各类凑微分公式。

1. 求下列不定积分：

(1) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$；

(2) $\int\csc x(\csc x-\cot x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int\sin^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$；

(4) $\int\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$。

2. 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(3-2x)^3}$；

(2) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}\mathrm{d}x$；

(4) $\int\cos x\,\sin^3 x\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+5}\mathrm{d}x$；

(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$；

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$;

(8) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$;

(11) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$;

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$;

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\tan x}$;

(14) $\int \frac{3^x 5^x}{25^x-9^x}\mathrm{d}x$ 。

班级____________ 姓名________ 序号_____

作业成绩	

第 19 次作业　第二类换元积分法　分部积分法

本次作业目的

熟悉三角代换；了解倒代换；掌握各类典型的分部积分。

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

(3) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$；

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$；

(6) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\mathrm{d}x$。

2. 求下列不定积分：

(1) $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ ；

(2) $\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$ ；

(3) $\int (x^2+3x)\sin x\mathrm{d}x$ ；

(4) $\int \arctan x\mathrm{d}x$ ；

(5) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$ ；

(6) $\int (\ln x)^2\mathrm{d}x$ ；

(7) $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 。

班级___________ 姓名_______ 序号____

作业成绩	

第 20 次作业　定积分的换元积分法和分部积分法

本次作业目的

掌握定积分的换元积分法和分部积分法；会用定积分的换元积分法和分部积分法证明简单命题和结论。

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x+2} \mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；

(4) $\int_1^4 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})} \mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} \mathrm{d}x$；

(6) $\int_0^1 \arccos\theta \mathrm{d}\theta$；

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x$；

(8) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x$；

(9) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x) \mathrm{d}x$；

(10) $\int_{-2}^{2}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$。

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$$ 。

证

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，证明：

$$\int_0^{2a} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a [f(x)+f(2a-x)]\mathrm{d}x$$ 。

证

4. 已知 $f(2)=\frac{1}{2}, f'(2)=0, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$ ，求

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$$ 。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 21 次作业　有理函数的积分

本次作业目的

熟悉有理函数、三角函数有理式、简单无理函数的积分方法。

求下列不定积分：

(1) $\int \frac{3x+1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$；

(4) $\int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$；

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$。

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 22 次作业　广义积分

本次作业目的

了解两类广义积分的概念；会处理简单的广义积分。

1. 计算下列反常积分：

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}$；(2) $\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$。

解

2. 判断下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{3x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$；(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 23 次作业 定积分的元素法 平面图形的面积

本次作业目的

理解定积分的元素法；掌握各类平面图形面积的计算。

1. 求曲线 $y=\ln x,\ y=0$ 及 $x=\frac{1}{\mathrm{e}},\ x=\mathrm{e}$ 所围平面图形的面积。

解

2. 求由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=x, y=2$ 所围成平面图形的面积。.

解

3. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成图形的面积。

解

4. 求 $r=3\cos\theta$ 及 $r=1+\cos\theta$ 所围成图形的公共部分的面积。

解

5. 求 $r=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $r^2=\cos 2\theta$ 所围成图形的公共部分的面积。

解

6. 在抛物线 $y=-x^2+1$ 上找一点 $P(x_1,y_1)$，要求该点不在 y 轴上，过该点作抛物线的切线，使此切线与抛物线及两个坐标轴所围成的平面图形的面积最小。

解

班级___________　　姓名_______　　序号____

作业成绩	

第 24 次作业　立体的体积　平面曲线的弧长 曲率

本次作业目的

掌握各类立体的体积和平面曲线的弧长的计算；理解曲率和曲率圆的概念；熟记曲率计算公式。

1. 对摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ 的一拱与横轴所围成的平面图形，分别求：

(1) 该图形的面积；(2) 该图形绕直线 $y=\quad 2a$ 旋转所成旋转体的体积。

解

2. 求由正弦曲线 $y=\sin x\ (0\le x\le \pi)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。

解

3. 过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求该切线与抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积。

解

4. 已知星形线方程 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ 分别计算：

(1) 它的弧长；(2) 它所围的面积。

解

5. 计算曲线 $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ 上对应 $1\leq x\leq 3$ 的一段弧长。

解

6. 求曲线 $r=a(1-\cos\theta)$ 的全长。

解

7. 求曲线 $y=\sin x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的曲率半径。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 25 次作业　定积分的物理应用

本次作业目的

掌握用定积分计算变力所做的功和静态水压力的方法与步骤。

1. 60 牛顿的力使一根弹簧从 10 厘米拉伸到 15 厘米，问需要多少功能使它从 15 厘米拉伸到 18 厘米？

解

2. 已盛满了水的半球形蓄水池，其半径为 10 米，计算抽完池中的水所做的功。

解

3. 闸门为矩形，宽 L，高 H，垂直置于水中，它的上沿与水面相齐，求水对闸门的压力。

解

4. 一个等腰三角形闸门垂直立于水中，顶在上，底在下，顶离水面 3 米，底边长为 8 米，底边上的高为 6 米，求闸门一侧所受的压力。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 26 次作业　微分方程基本概念 一阶微分方程(1)

本次作业目的

熟悉常微分方程的基本概念；掌握可分离变量方程、齐次方程、一阶线性方程的解法。

1. 求下列方程的通解：

(1) $(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\mathrm{d}y=0$ ；

解

(2) $xy'+1=\mathrm{e}^y$ ；

解

(3) $y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ；

解

(4) $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$ ；

解

(5) $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ ；

(6) $x^2y'+3xy=\sin 2x$ 。

2. 求下列微分方程的特解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{xy}{x^2-y^2}, y\big|_{x=0}=1$；

解

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x-y^2}, y\big|_{x=1}=1$。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 27 次作业　一阶微分方程(2)

本次作业目的

掌握贝努里方程解法；会用适当的变换求解一阶微分方程 ;知晓一阶常微分方程的典型应用。

1. 求下列方程的通解：

(1) $y' + \frac{y}{x} = 2x^2 y^2$ ；

解

(2) $y' = \frac{1}{xy + x^2 y^3}$ 。

解

2. 用适当的变换，求下列方程的通解：

(1) $y' = \cos(x - y)$ ；

解

(2) $xy' + y = y\ln(xy)$ 。

解

3. 求满足 $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$ 的连续函数 $f(x)$ 。

解

班级____________ 姓名________ 序号_____

作业成绩	

第 28 次作业 高阶线性微分方程 高阶常系数齐次线性微分方程

本次作业目的

熟知二阶线性常微分方程解的结构；掌握求二阶常系数齐次线性微分方程通解的方法。

1. 设 $y_1^* = \mathrm{e}^x, y_2^* = x\mathrm{e}^x, y_1^* = \mathrm{e}^{-x}$ 为方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的三个特解，求该方程的通解。

解

2. 求下列微分方程的通解：

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ ；

解

(2) $y'' - 4y' + 5y = 0$ ；

解

(3) $y'' - 8y' + 16y = 0$ ；

解

(4) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$ ；

解

(5) $y^{(6)} - 2y^{(4)} - y'' + 2y = 0$。

解

3. 求下列微分方程满足初始条件的特解：

(1) $y'' + 2y' + 5y = 0, y\big|_{x=0} = 0, y'\big|_{x=0} = 1$ ；

解

(2) $4y'' + 4y' + y = 0, y\big|_{x=0} = 2, y'\big|_{x=0} = 0$。

解

班级____________ 姓名________ 序号____

作业成绩	

第 29 次作业　二阶常系数非齐次线性微分方程

本次作业目的

熟知两种特定类型二阶常系数非齐次线性微分方程的通解形式；掌握上述两种方程通解的求法。

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''+3y'+2y=3x\mathrm{e}^{-x}$；

解

(2) $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^{x}\sin 2x$；

解

(3) $y''+y=x+\cos x$；

解

(4) $y''+y'=x^2+\mathrm{e}^{-x}$。

解

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解：

(1) $y''+y+\sin 2x=0, y\big|_{x=\pi}=1, y'\big|_{x=\pi}=1$；

解

(2) $y''-y=4xe^{x}$，$y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=1$。

解

班级____________ 姓名________ 序号_____

作业成绩	

第 30 次作业　可降阶的高阶微分方程 欧拉方程

本次作业目的

熟练掌握几种可降阶二阶常微分方程的解法；了解 Euler 方程及解法。

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y'' = y' + x$；

解

(2) $xy'' + y' = 0$；

解

(3) $yy'' - y'^2 = 0$；

解

(4) $yy'' - y'^2 = yy'$。

解

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解：

(1) $(1+x^2)y''=2xy', y|_{x=0}=1, y'_{x=0}=3$ ；

解

(2) $y''-2yy'=0, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$。

解

3. 求 Euler 方程 $x^3y'''+3x^2y''-3xy'=\ln x$ 的通解。

解