适用 全校 考场教室 [该项由出卷人填写]

任课教师________ 专业班级：________ 学号：________ 姓名：________

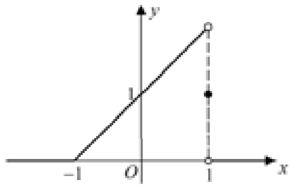
装 订 线

**1.** (1) 取点列 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\ y_n=\dfrac{1}{2n\pi}\ (n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to 0,\ y_n\to 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\sin\frac{1}{x_n}=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}\sin\frac{1}{y_n}=0,$$

故原极限不存在但不是 $\infty$.

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ +\infty, & |x|>1,\end{cases}$ 得 $f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x=-1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$




故 $f(x)$ 有(跳跃)间断点 $x=1$，见右图.

(3) 因为 $\mathrm{e}<\pi<\dfrac{22}{7}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\mathrm{e}^n+\pi^n+\left(\dfrac{22}{7}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=\dfrac{22}{7}$.

(4) 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+x\arcsin(ax)}-1\sim\dfrac{1}{3}x\arcsin(ax)\sim\dfrac{1}{3}ax^2$，$2^{x^2}-1\sim x^2\ln 2$，故 $a=3\ln 2$.

**2.** (1) 原式 $\xlongequal{2-x=t}\lim\limits_{t\to 0}t\tan\left[\dfrac{\pi}{4}(2-t)\right]$ **(3 分)** $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan\left(\frac{\pi}{4}t\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{\pi}{4}t}=\dfrac{4}{\pi}$. **(4 分)**

(2) $\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$，**(4 分)**

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}}=\dfrac{1}{2}$，故原式 $=\dfrac{1}{2}$. **(3 分)**

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-\sin x^2)]^{\frac{1}{x\ln(1+2x)}}$ **(3 分)** $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x^2}{x\ln(1+2x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{x\cdot 2x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. **(3 分)**

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ **(4 分)**

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. **(4 分)**

**3.** 由 $0<a_1<2$，设 $0<a_n<2$，则 $0\le a_{n+1}=\sqrt{a_n(2-a_n)}\le\dfrac{a_n+(2-a_n)}{2}=1$，$\{a_n\}$ 有界. **(4 分)**

又 $a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n(2-a_n)}-a_n=\dfrac{2a_n(1-a_n)}{\sqrt{a_n(2-a_n)}+a_n}\ge 0$，即 $\{a_n\}$ 单增，故 $\{a_n\}$ 有极限 $a$. **(4 分)**

在 $a_{n+1}=\sqrt{a_n(2-a_n)}$ 两边取极限，解得 $a=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. **(2 分)**

**4.** 由题意，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+c-\cos x}{x^2}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}(ax^2+bx+c-\cos x)=0$，得 $c=1$. **(4 分)**

从而，$0=\lim\limits_{x\to 0}\left(a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=a+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$，得 $b=0, a=-\dfrac{1}{2}$. **(6 分)**

**5.** (1) 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{|x|}=1$，知此极限必为 $\dfrac{0}{0}$ 型，得 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-2]=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$. **(3 分)**

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$. **(2 分)**

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{|x|}=1$，根据局部保号性，在 $x=0$ 的某去心邻域内，$\dfrac{f(x)-2}{|x|}>0$，得 $f(x)-2>0$，所以 $f(x)>2=f(0)$. **(5 分)**

**6.** $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{\arctan x}+a\right]=1+a$，**(3 分)**

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\mathrm{e}^{2x}-1}-b\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{2x}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}-b\right]=\dfrac{1}{2}-b$. **(4 分)**

由题意，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，即 $1+a=\dfrac{1}{2}-b=0$，故 $a=-1,\ b=\dfrac{1}{2}$. **(3 分)**

**7.** $f(x)$ 的间断点显然为 $x=0,1$. **(2 分)**

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-\frac{x}{1-x}}=-1$，$x=0$ 为第一类可去间断点. **(4 分)**

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=0$，$x=1$ 为第一类跳跃间断点. **(4 分)**

**8.** 因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有最大值 $M$ 和最小值 $m$. **(3 分)**

从而，$m\le f(0), f(1), f(2)\le M$，$6m\le f(0)+2f(1)+3f(2)\le 6M$，得 $m\le 1\le M$. **(3 分)**

由介值定理，存在 $c\in[0,2]$，使得 $f(c)=1$. **(4 分)**