《高等数学》 简介

<Higher mathematics>Summarized account

一. 高等数学与初等数学的区别

初等数学研究的对象主要是常量与固定的图形，初等数学是关于常量的数学。而高等数学研究的是变量和变化的图形，高等数学是研究变量的数学。

二. 《高数》课的内容

$$1.\text{数学分析}\begin{cases}\text{微积分}\begin{cases}\text{一元函数微积分}\\ \text{多元函数微积分}\end{cases}\\ \text{级数}\end{cases}$$

2. 常微分方程

3. 向量代数、空间解析几何

三. 学习方法及要求

1. 注意知识的系统性、严密性、抽象性及应用的广泛性。

2. 掌握几个环节：

听讲：全神贯注，听不懂时暂不讨论；补充的内容尽量作笔记。

复习：结合教材按讲课系统看参考书，定义、定理、 理解记住。

习题：大量做、适量做，点的题目必做。

小结：每章结束，自己应做个小结，做每章复习题

四.教学组织

- 以课堂教学为主。
- 注重讲解。
- 抓紧课下的学习、答疑与练习。

.五、考试要求

- 最后成绩=期末成绩 (70%)+平时成绩 (30%)
- 平时成绩标准：

(1)作业是否独立完成 (通过等级和次数来度量).

(2)期中考试成绩.

(3)课堂教学的出勤以及回答问题情况

- 期末考试：全校统考，流水阅卷

第一章　函数、极限与连续

函数——-本课程研究的对象。

极限——-本课程的基本手段，
研究变量的基本方法。

连续——有极限的特例，
函数的一个常见性质。

第一节 函数

一、基本概念

二、函数特性

三、反函数

四、初等函数

五、极坐标

一、 基本概念

1. 集合定义及表示法

定义： 具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**.

通常用大写字母A、B表示. 组成集合的事物称为**元素**.
通常用小写字母a、b表示.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

元素 a 属于集合 M，记作 $a \in M$.

元素 a 不属于集合 M，记作 $a \overline{\in} M$ （或 $a \notin M$ ）.

注： M 为数集，M^+ 表示 M 中除0与负数的集合 .

集合 表示法:

（1）列举法：按某种方式列出集合中的全体元素 .

例：有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

自然数集 $\mathrm{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$

（2）描述法：$M=\{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$

例：整数集合 $\mathrm{Z}=\{x \mid x\in\mathrm{N} \text{ 或} -x\in\mathrm{N}^+\}$

有理数集 $\mathrm{Q}=\left\{\dfrac{p}{q} \,\middle|\, p\in\mathrm{Z}, q\in\mathrm{N}^+, \ p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$

实数集合 $\mathrm{R}=\{x \mid x \text{ 为有理数或无理数}\}$

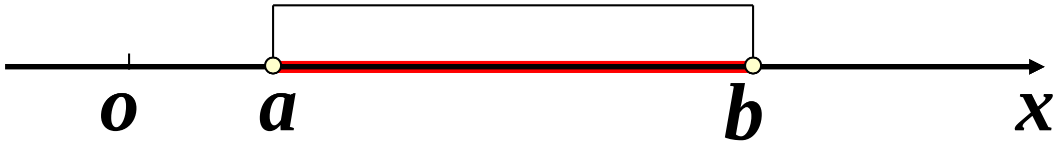
（3）公式法：$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2=R^2\}$

2.常用数集

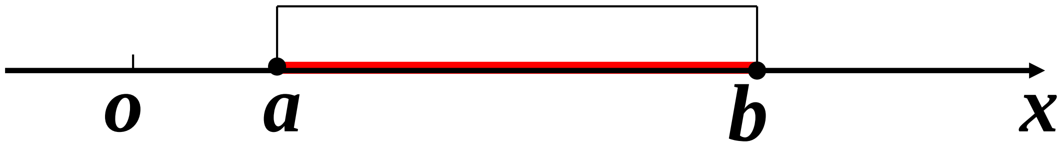
(1)【区间】是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

$\forall a,b \in R$, 且 $a < b$.

开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$



闭区间 $[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\}$



半开半闭区间 $[a,b)=\{x \mid a\le x<b\}$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\le b\}$$

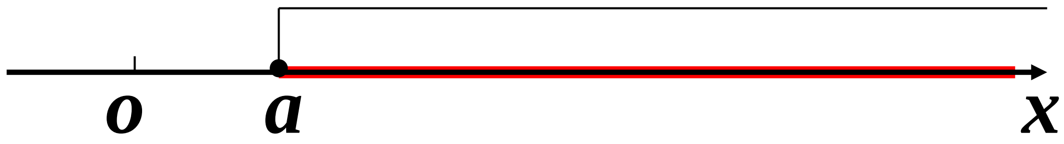
区间长度的定义:

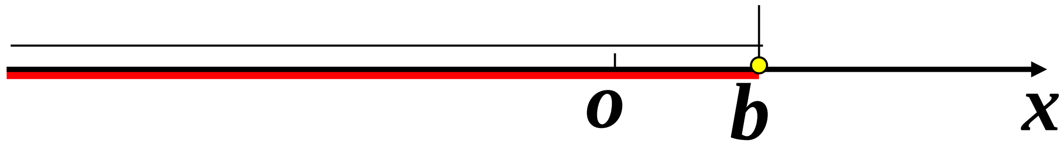
两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度 $|b-a|$

无限区间 $[a,+\infty)=\{x \mid a\le x\}$ $\quad (a,+\infty)$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x\le b\} \qquad (-\infty,b)$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in \mathrm{R}\}$$

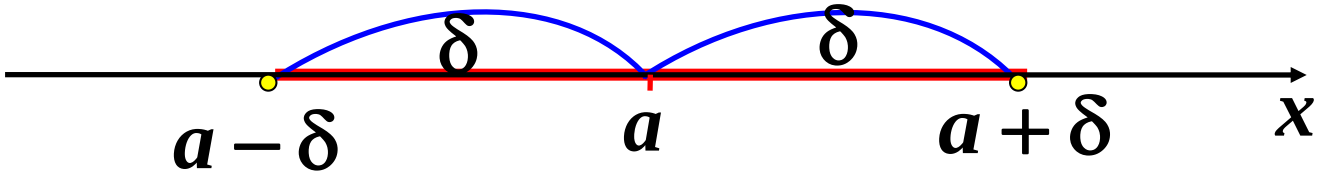




(2). 邻域:

点a的δ邻域：记作 $U(a,\delta)$

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$



点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径.

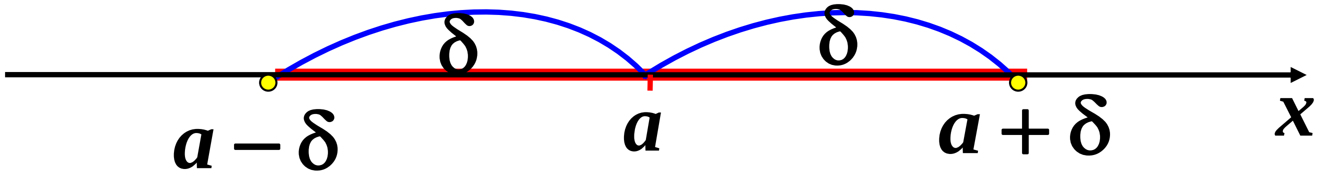
点a的去心的δ邻域：记作$\overset{0}{U}(a,\delta)$

$$\overset{0}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$ 这里$0<|x-a|$就表示$x\neq a$

(2). 邻域:

点a的δ邻域：记作 $U(a,\delta)$

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$



点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径.

点a的去心的δ邻域：记作$\overset{0}{U}(a,\delta)$

$\overset{0}{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$.这里$0<|x-a|$就表示$x \neq a$

两个常用逻辑符号

⑴ 全称量词“$\forall$”“$\forall$”表示“任意的”

例如：“$\forall x \in R$”表示“对于任意的实数 x”。

⑵ 存在量词“$\exists$”“$\exists$”表示“存在”。

例如：“$\forall a,b \in Q, a < b, \exists c \in Q$且$c \in (a,b)$”

表示：任意两个不同的有理数a, b之间

存在着一个有理数c

二、函数概念

1.【函数定义】设有两个数集 D、M，若

$$\forall \ x \in D, \quad x \xrightarrow{f} y \quad \exists \,|\, \ y \in M,$$

则称对应关系 f 为定义在D上的函数，通常简记为:

$$y = f(x) \ , \quad x \in D, y \in M .$$

因变量　函数　自变量　定义域　值域

函数的二要素：定义域，对应法则

例1. 判断下列各对函数是否相同

(1) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$ （1）不相同，因 f 不同

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x}, g(x)=1$ （2）不相同，因 D不同

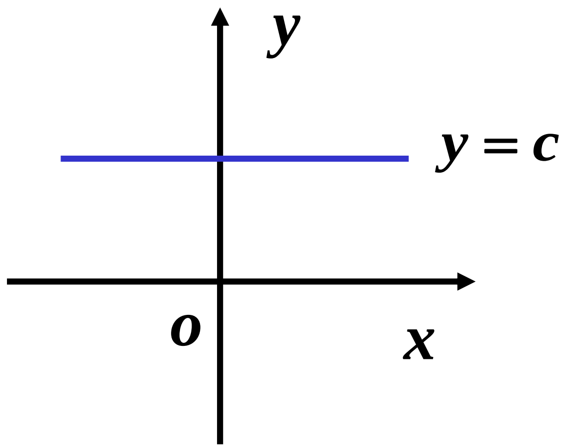
(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, g(x)=1$ （3）相同

2.【几个特殊的函数】

(1)【常数函数】

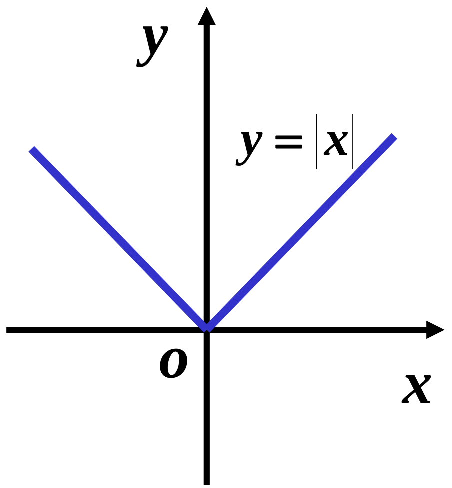
$y = c$　c为常数

图形是一条平行于x轴的直线



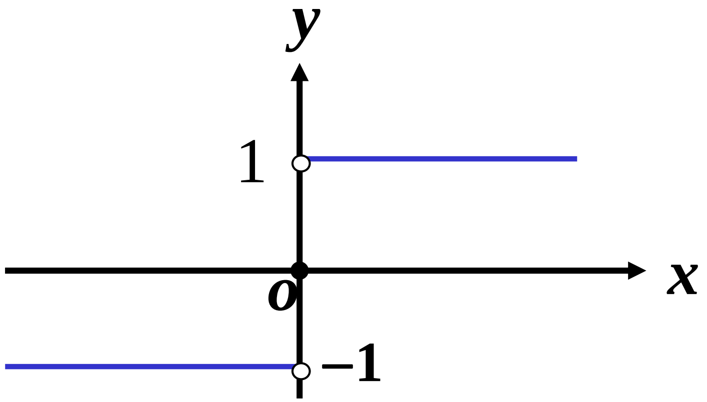
(2)【绝对值函数】

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



(3) 【符号函数】

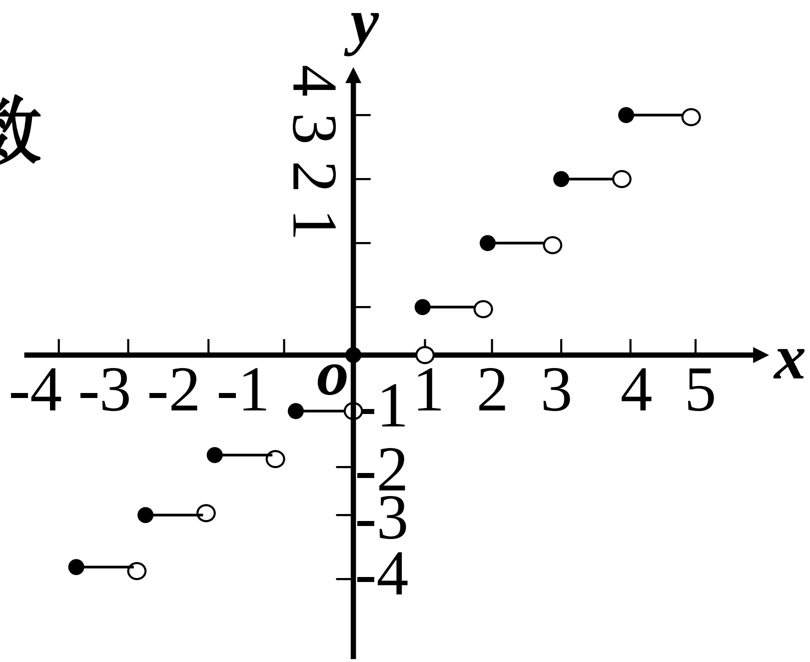
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & 当 x > 0 \\ 0 & 当 x = 0 \\ -1 & 当 x < 0 \end{cases}$$



例：$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$ 或 $|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x$

(4) 【取整函数】 $y=[x]$

$[x]$表示不超过 x 的最大整数



$[3.5]=3$

$[-3.5]=-4$

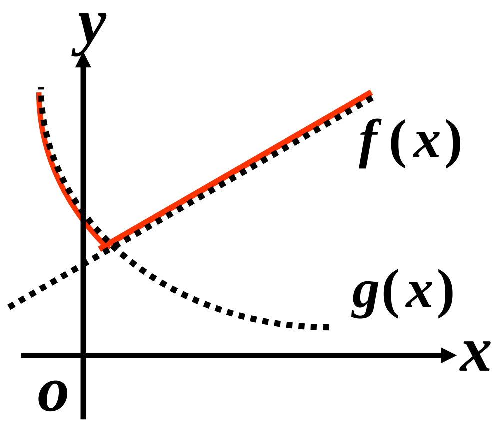
$x\in[1,2),[x]=1.$

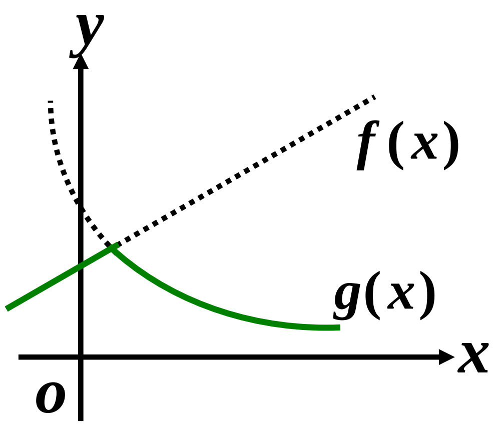
显然，$\forall x\in R$，有

$x-1<[x]\le x$.（求极限时有用）

(5) 【取大（小）函数】

$$y = \max\{f(x), g(x)\} \qquad y = \min\{f(x), g(x)\}$$





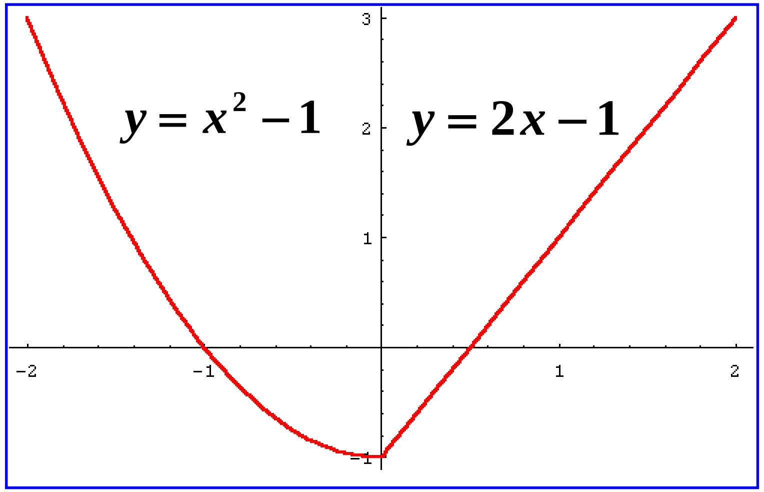
例： $y = \max\{x, x^2\}$ $\quad y = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1, \\ x^2 & x < 0, x > 1. \end{cases}$

注：【分段函数】

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的式子来表示的一个函数，称为分段函数.

例如：符号函数，取整函数

例如：$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>0 \\ x^2-1, & x\le 0 \end{cases}$



三、函数的特性

1.【有界函数】

【定义 1】 $f(x)$ $x \in D$

$\exists K, \forall x \in D$,有 $f(x) \le K$, 称函数 $f(x)$在D上 有上界.

【定义 2】 $f(x)$ 在X上 有界

若$X \subset D, \exists K_1, \forall x \in X$,有 $f(x) \le K_1$

界不唯一

称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界(K_1是其中的一个 上界)

注：界与区间有关

同理可定义有下界、有界

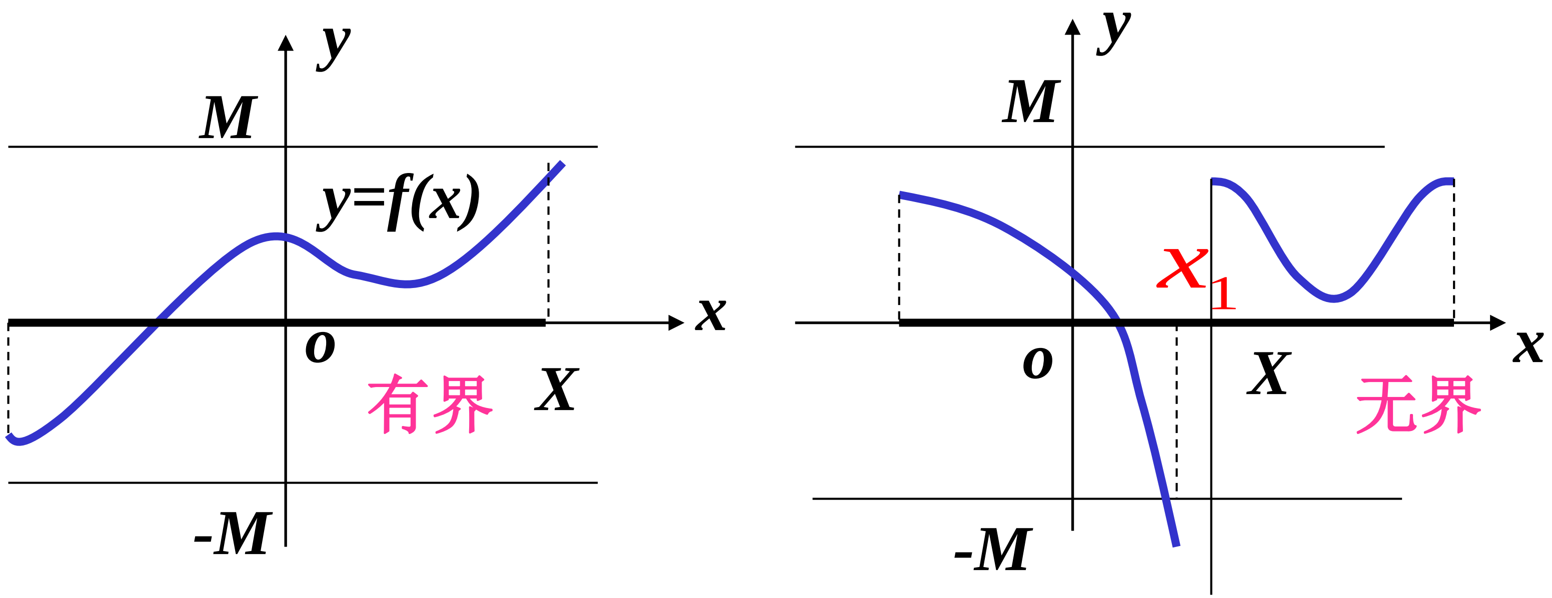
若$\exists K_2$ ，$\forall x \in X$,有 $f(x) \geq K_2$

称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界(K_2是其中的一个下界)

若数集$X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X$,有 $|f(x)| \leq M$

则称函数$f(x)$在X上有界.否则称无界.

即：$f(x)$ 在X上无界 $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_1 \in X$,使得 $|f(x_1)| > M$



【定理】

$$\boxed{f(x)\text{在}X\text{上有界} \Leftrightarrow f(x)\text{在}X\text{上既有上界又有下界}}$$

例2：证明$y = x\cos x, x \in$（-∞,+∞）无界。

证：$\forall M > 0,\ \exists x = (2[M]+1)\pi \in R$

有$|f(x)| = (2[M]+1)\pi > M$

$\therefore f(x)$无界

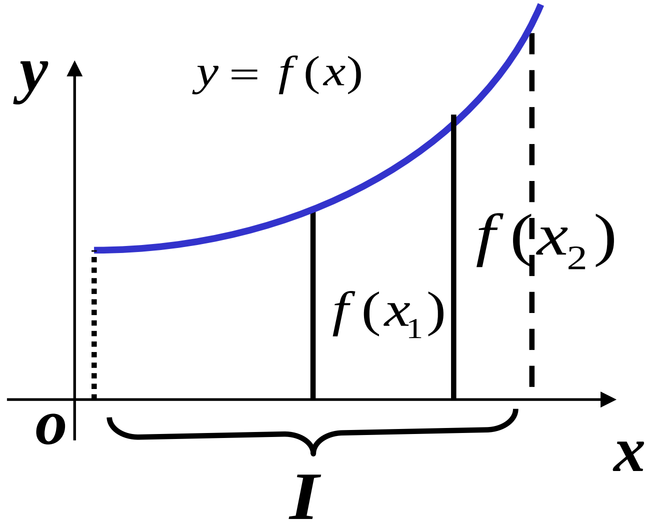
2. 【单调函数】

设函数 $f(x)$的定义域为D, 区间 $I \subset D$,

如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2, 当$x_1 < x_2$时,

恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,

则称函数 $f(x)$在区间I上是单调增加的 .

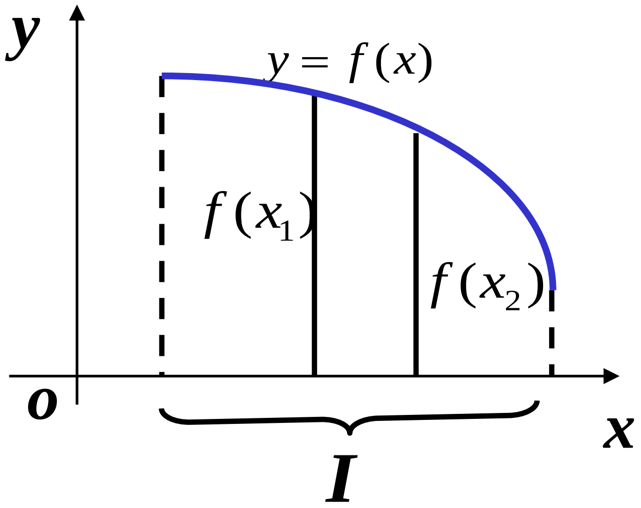


设函数 $f(x)$的定义域为D, 区间$I \subseteq D$,

如果对于区间I 上任意两点x_1及 x_2, 当$x_1 < x_2$时,

恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$,

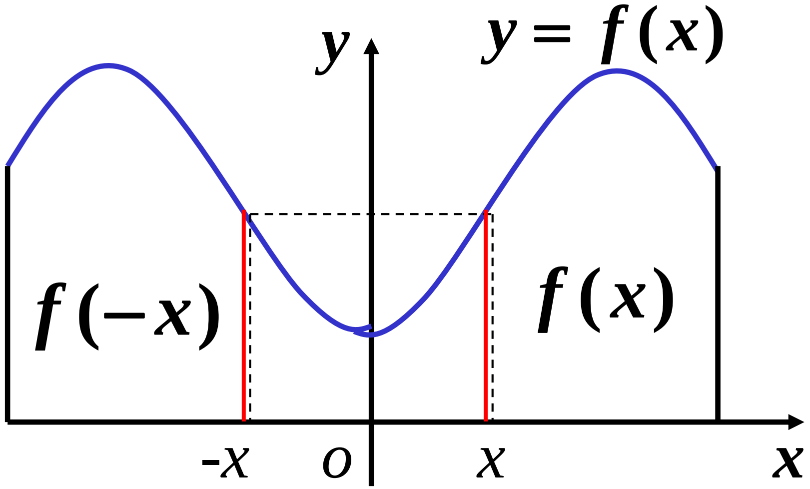
则称函数 $f(x)$在区间I上是单调减少的 .



3.【函数的奇偶性】

设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

$f(-x) = f(x)$　　称 $f(x)$为D上的偶函数



$y = \cos x,$

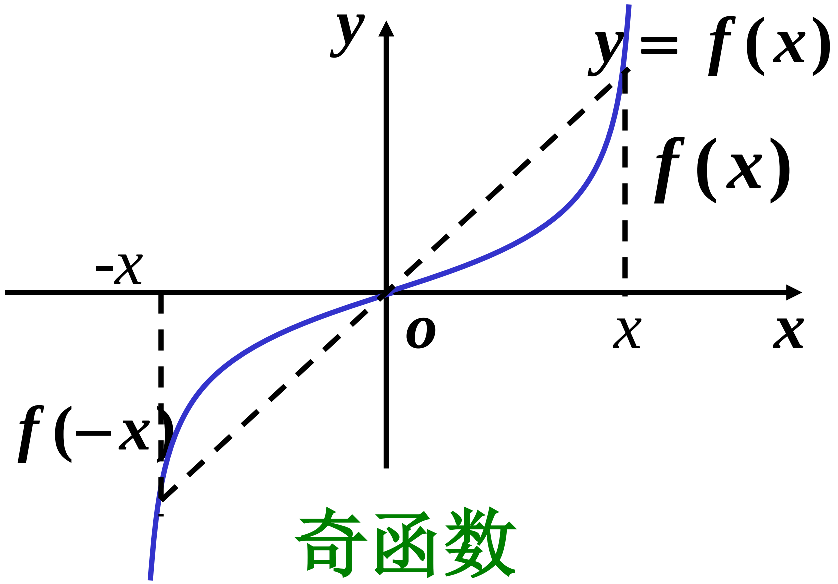
$y = x^2 + 1.$

偶函数

图象关于 y 轴对称

设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

$f(-x) = -f(x)$ 则称函数$f(x)$为D上的奇函数



奇函数

$y = \sin x,$

$y = x^3 + x.$

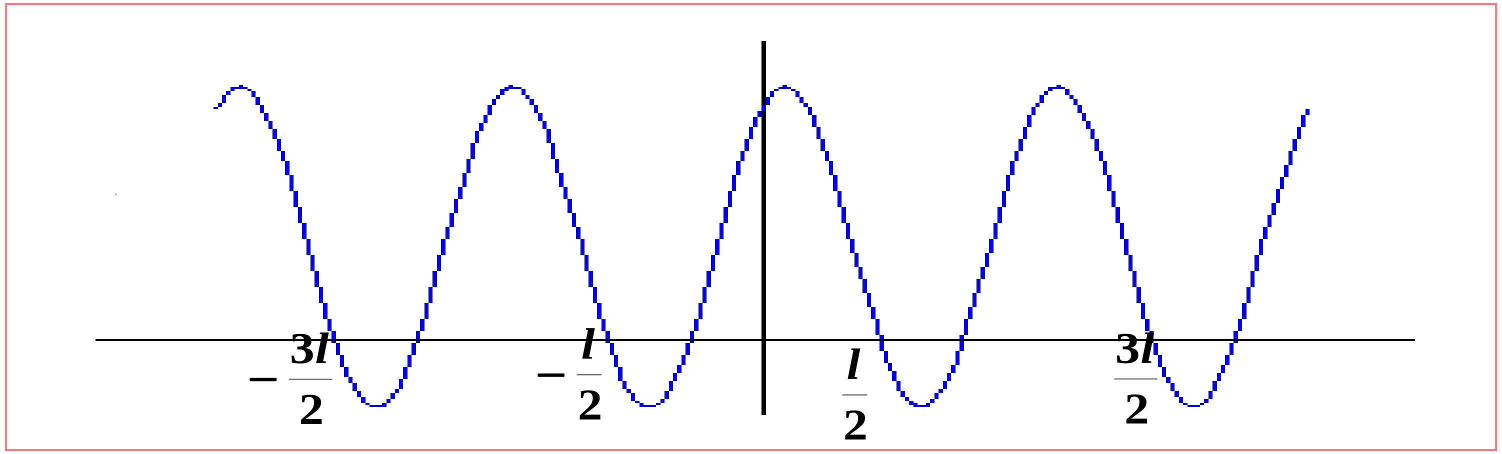
图象关于原点对称

4. 【函数的周期性】

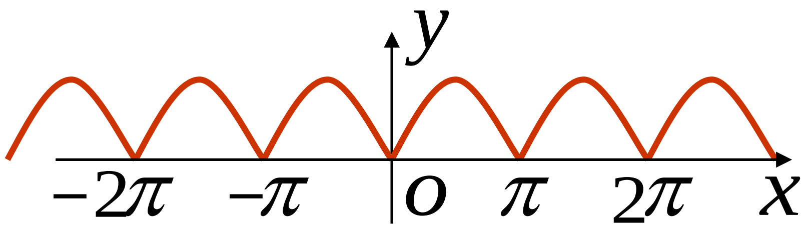
【定义】 $\forall x \in D, \exists l > 0$，且 $x \pm l \in D$，若

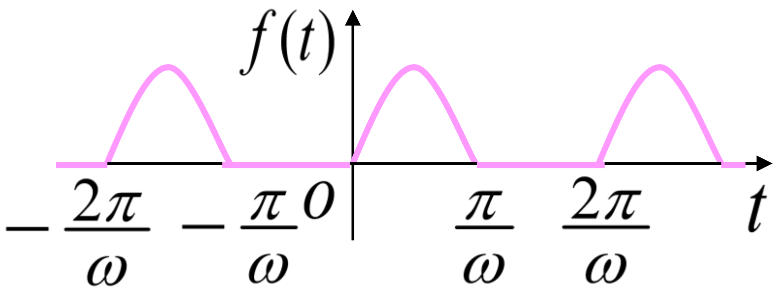
$$f(x \pm l) = f(x)$$

则称 $f(x)$为周期函数，称 l 为周期



（通常说周期函数的周期是指其最小正周期）.





$y = |\sin x|$

周期为 π

$y = A\sin(\omega t + \varphi)$

周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

【注】 周期函数不一定存在最小正周期 .

【例如】 常量函数 $f(x) = C$

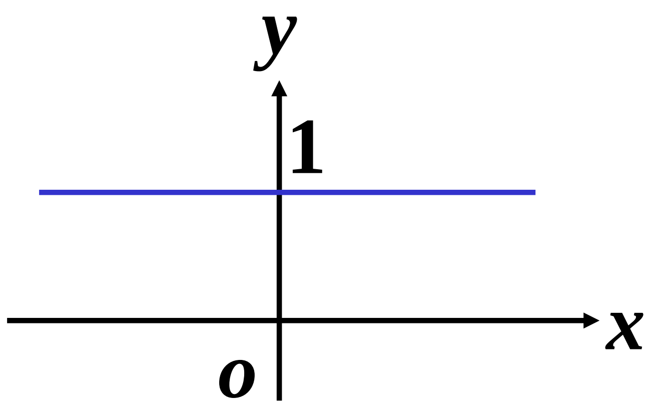
【例3】设 $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in Q^C\end{cases}$,

狄利克雷函数

求$D(-\frac{7}{5}), D(1-\sqrt{2})$.并讨论$D(D(x))$的性质.

【解】$D(-\frac{7}{5})=1,\ \ D(1-\sqrt{2})=0,$

$D(x)=0$或$1\in Q,\quad \therefore D(D(x))\equiv 1,$



有界函数,

偶函数，　不是单调函数,

周期函数(<u>无最小正周期</u>)

特别注意

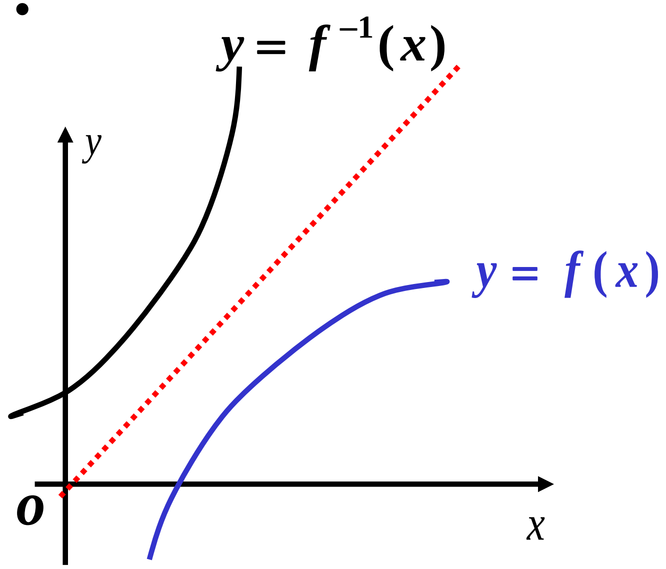
四、反函数

【定义】

若函数 $f: D \to f(D)$ 为一一映射（单射,满射）

则存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$

称此映射 f^{-1}为 f 的反函数.



$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称

五、复合函数

1.【定义】 设有函数链

$y = f(u),\ u \in D_1$ ① $u = g(x),\ x \in D$, 且 $g(D) \subset D_1$ ②

复合得 $y = f[g(x)],\ x \in D$

并称其为由①，②确定的复合函数，u 称为中间变量.

【说明】通常 f 称为外层函数，g 称为内层函数.

【注意】

1）构成复合函数的条件 $g(D)\subset D_1$ 不可少.

例如 $y=\arcsin u,\ u=2+x^2;$ 不能复合

2）复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}},$

由 $y=\sqrt{u},\ u=\cot v,\ v=\dfrac{x}{2}.$ 复合而得。

【例4】 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\ge 1 \end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\ge 0 \end{cases}$，

求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1 \\ \varphi(x), & \varphi(x)\ge 1 \end{cases}$

1^0 当 $\varphi(x)<1$ 时，

且 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，$\Longrightarrow$ $x<-1$；

且 $x\ge 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，$\Longrightarrow$ $0\le x<\sqrt{2}$；

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1 \\ e^{x^2-1}, & 0\le x<\sqrt{2} \end{cases}$$

2^0 当$\varphi(x)\geq 1$时,

且$x<0$, $\varphi(x)=x+2\geq 1$, $\Longrightarrow$ $-1\leq x<0$;

且$x\geq 0$, $\varphi(x)=x^2-1\geq 1$, $\Longrightarrow$ $x\geq\sqrt{2}$;

综上所述

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1 \\ x+2, & -1\leq x<0 \\ e^{x^2-1}, & 0\leq x<\sqrt{2} \\ x^2-1, & x\geq\sqrt{2} \end{cases}.$$

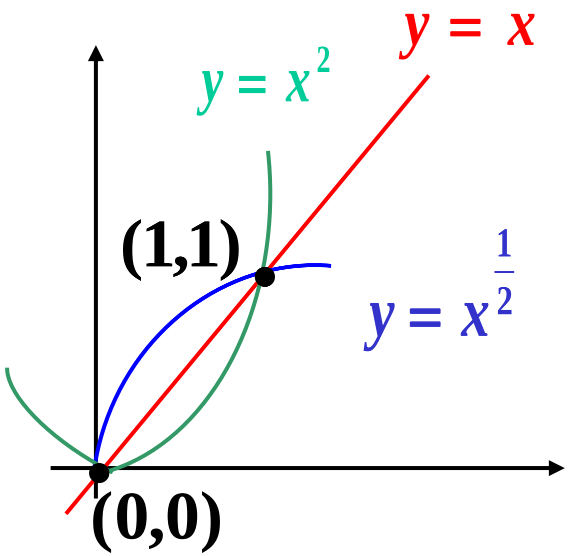
六. 初等函数

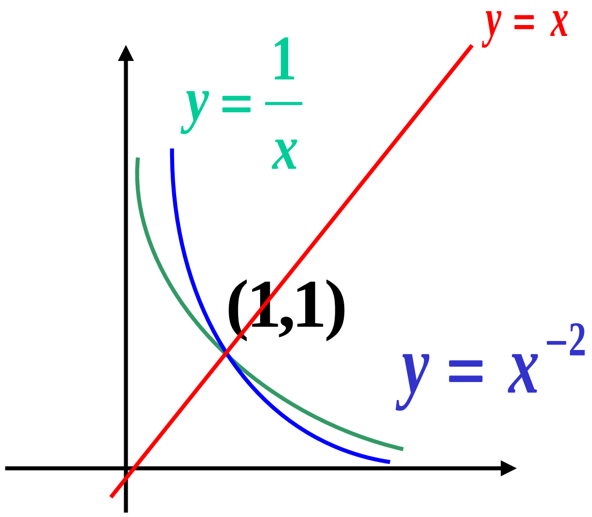
1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数这六种函数, 称为基本初等函数.

(1) 常数函数 $y = c$

(2) 幂函数 $y = x^{\mu}$





当$\mu > 0$时,

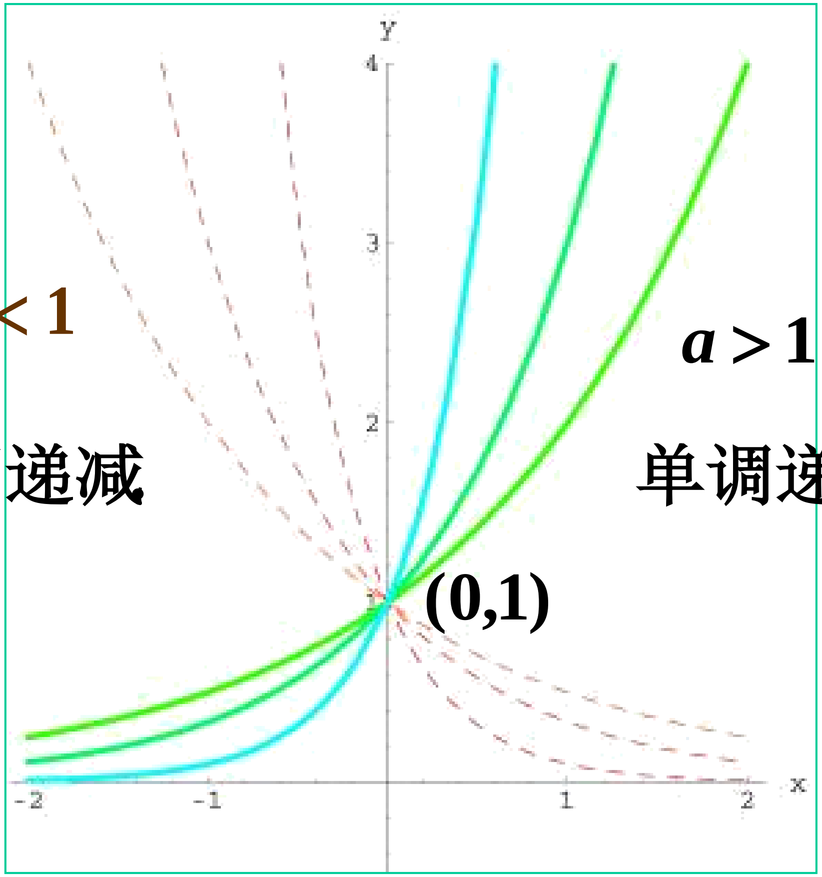
当$x > 0$时, 单调递增

当$\mu < 0$时,

当$x > 0$时, 单调递减

x轴、y轴为其两条渐近线

(3) 指数函数 $y = a^x$



$a < 1$

单调递减

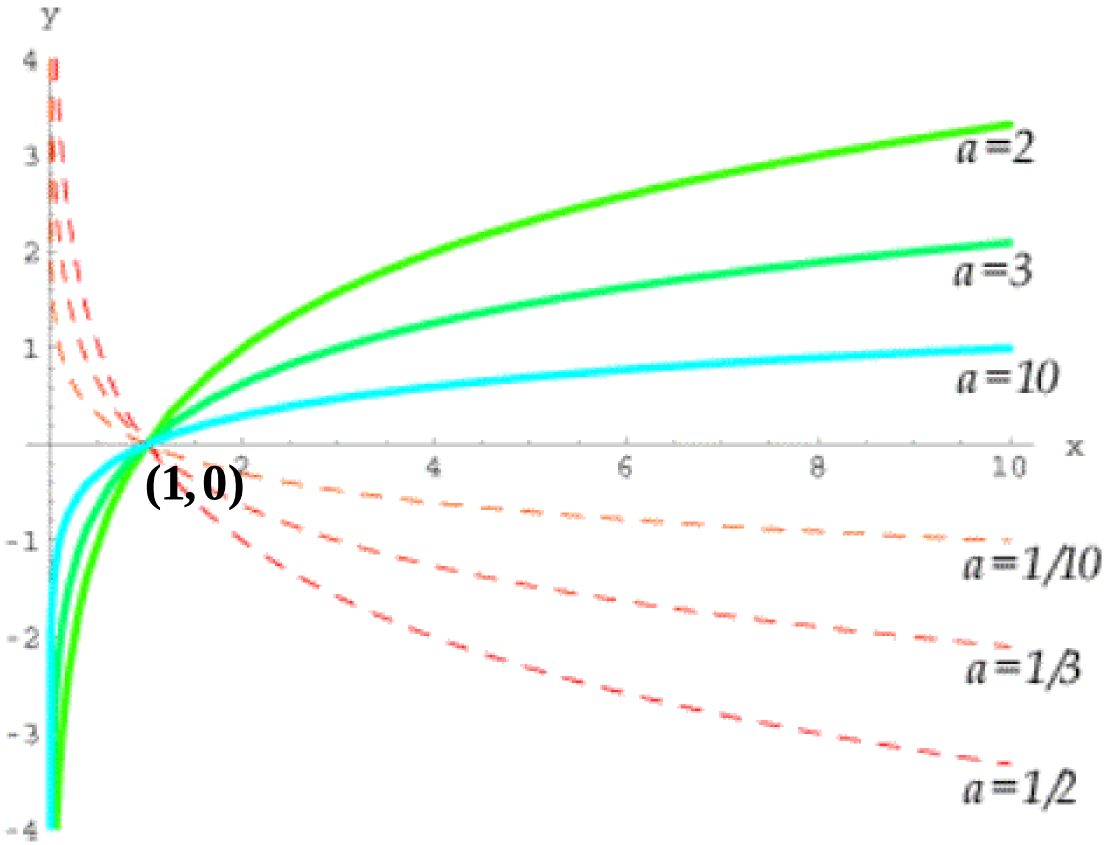
$a > 1$

单调递增

(0,1)

x轴为其渐近线

(4) 对数函数 $y = \log_a x \ (y = \ln x)$



$a > 1$

单调递增

$a < 1$

单调递减

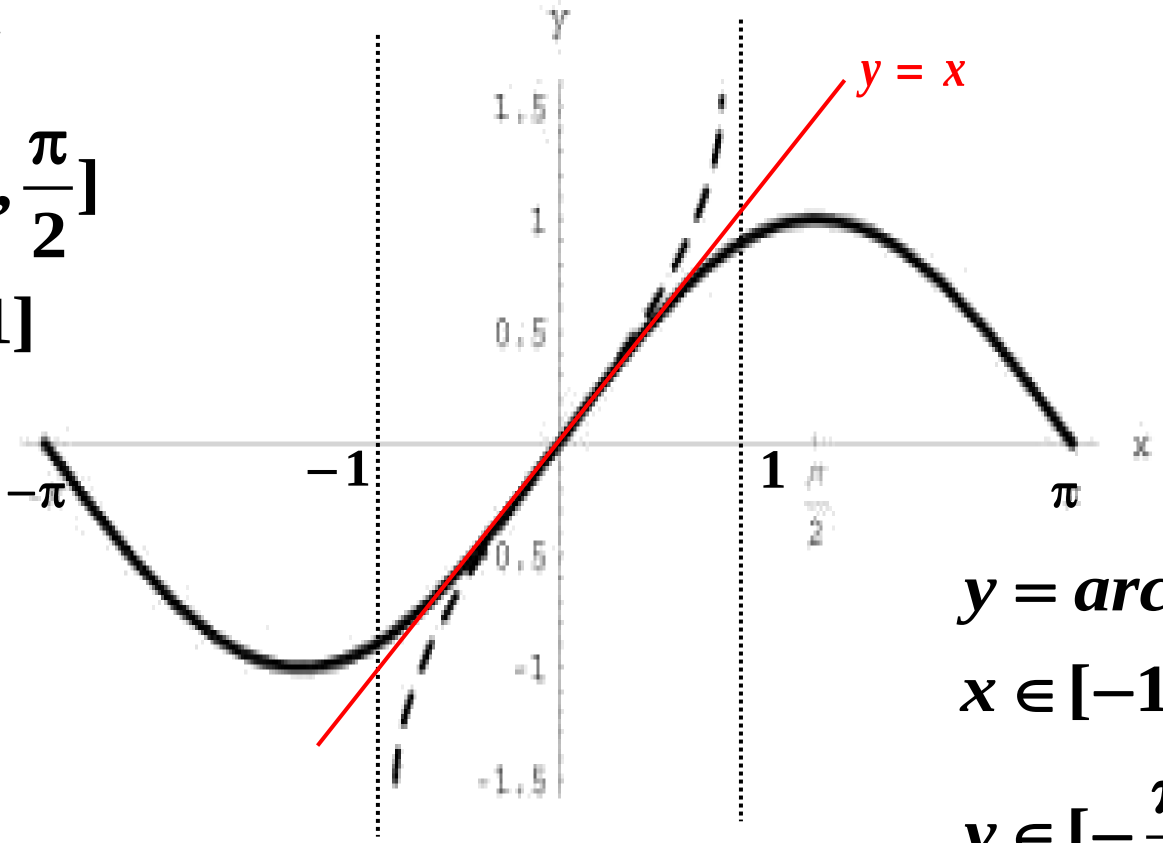
y 轴为其渐近线

(5) 正弦函数与反正弦函数 $y=\sin x,\ y=\arcsin x$

$$y=\sin x$$

$$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

$$y\in[-1,1]$$



$$y=arc\sin x$$

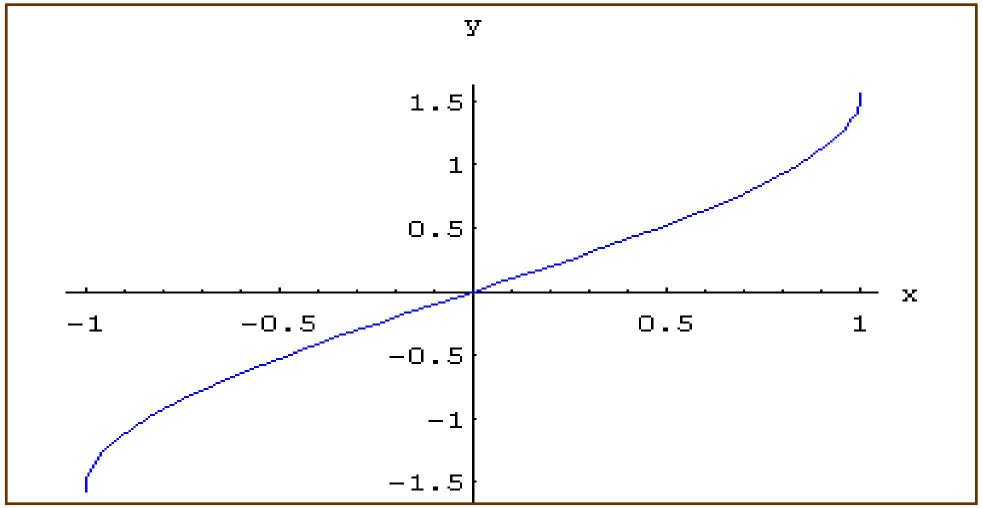
$$x\in[-1,1]$$

$$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

反正弦函数 $y = \arcsin x$

定义域 $[-1,1]$，值域 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$\sin(\arcsin x) = x$.

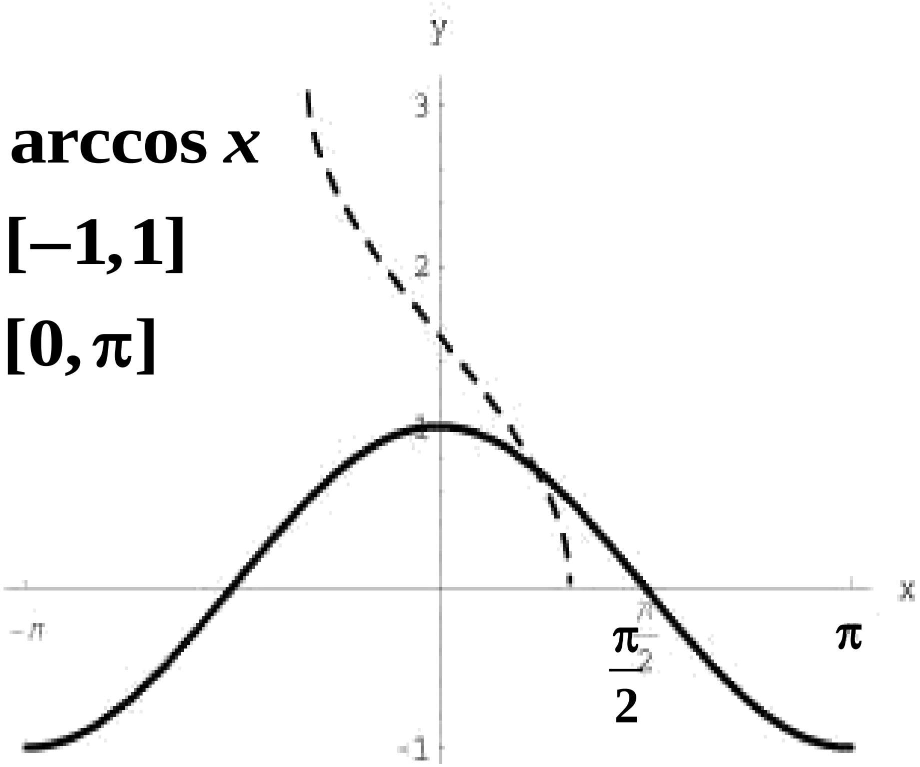


(6) 余弦函数与反余弦函数 $y = \cos x,\ y = \arccos x$

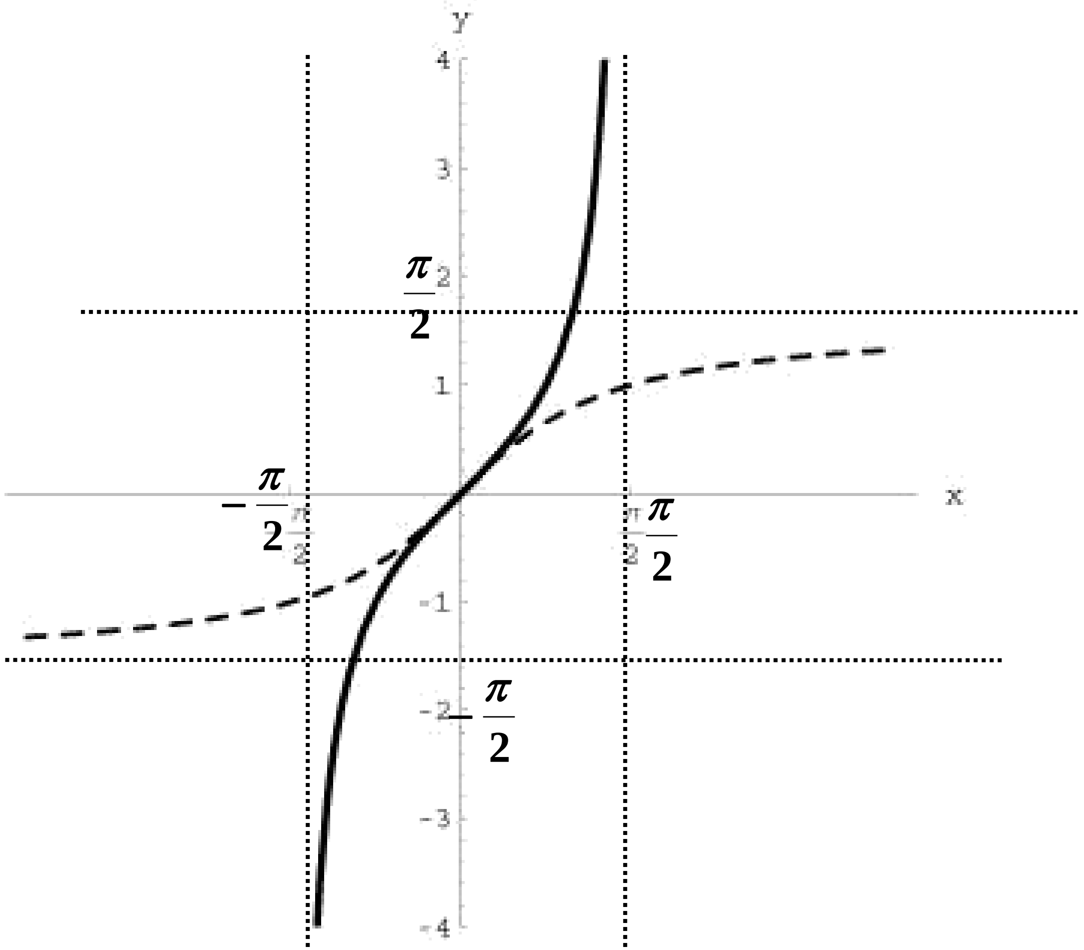
$y = \arccos x$

$x \in [-1, 1]$

$y \in [0, \pi]$



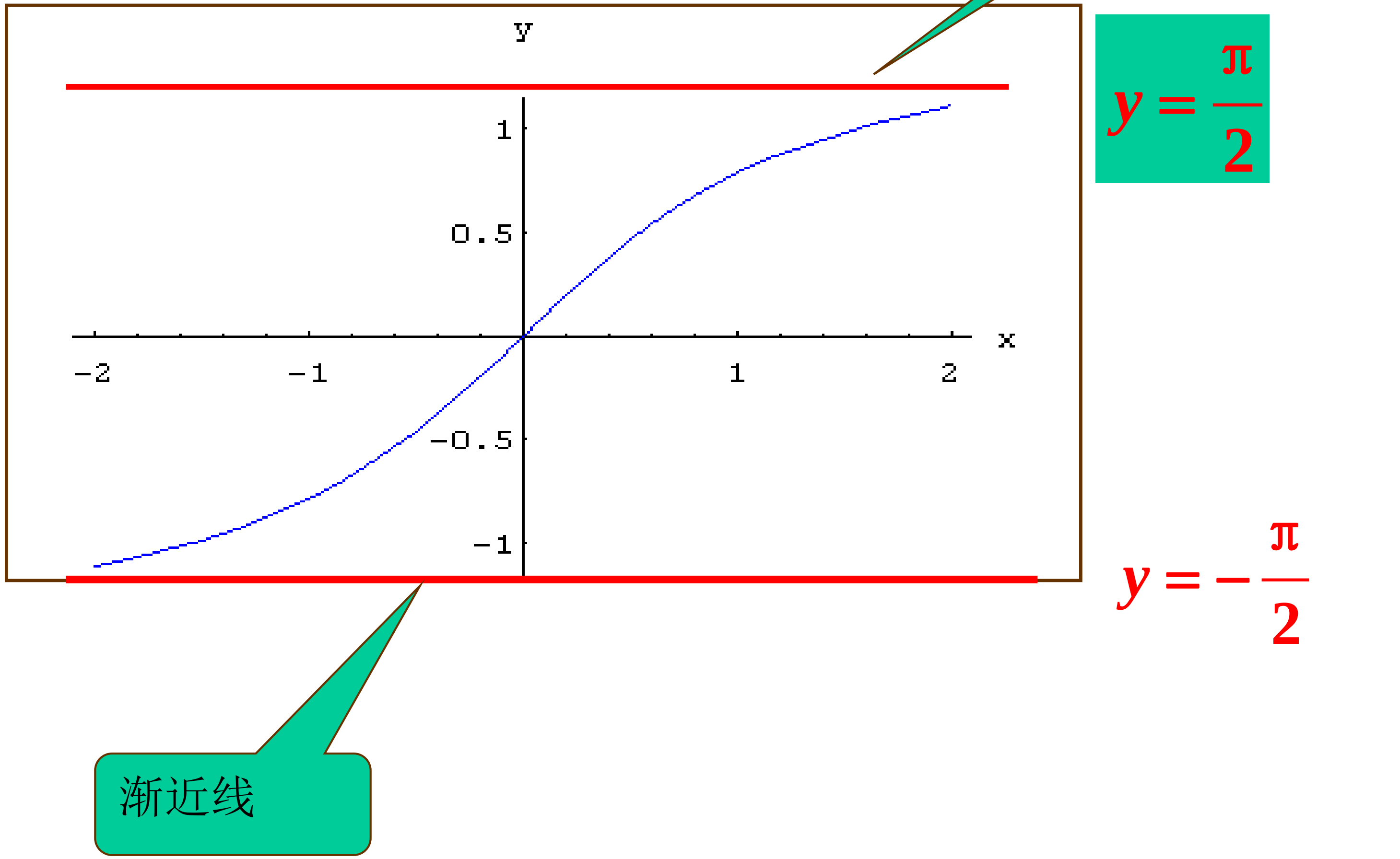
(7) 正切函数与反正切函数 $y=\tan x, y=\arctan x$



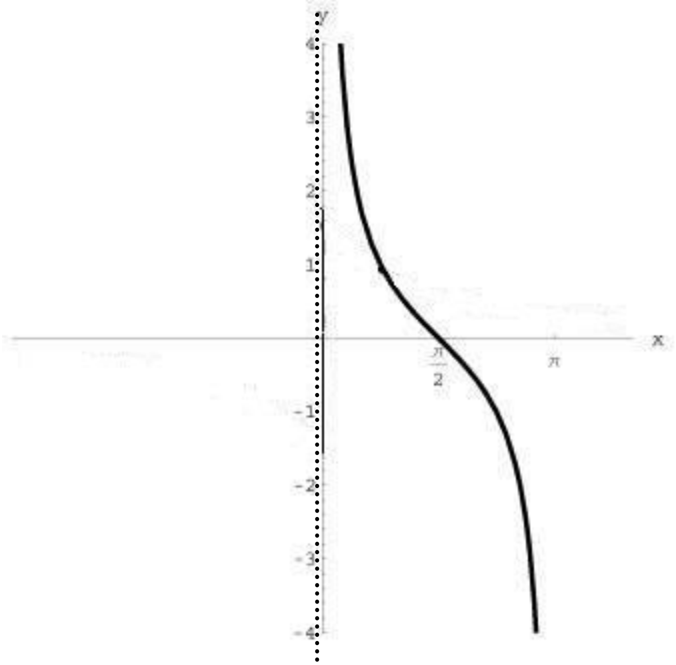
反正切函数 $y = \arctan x$

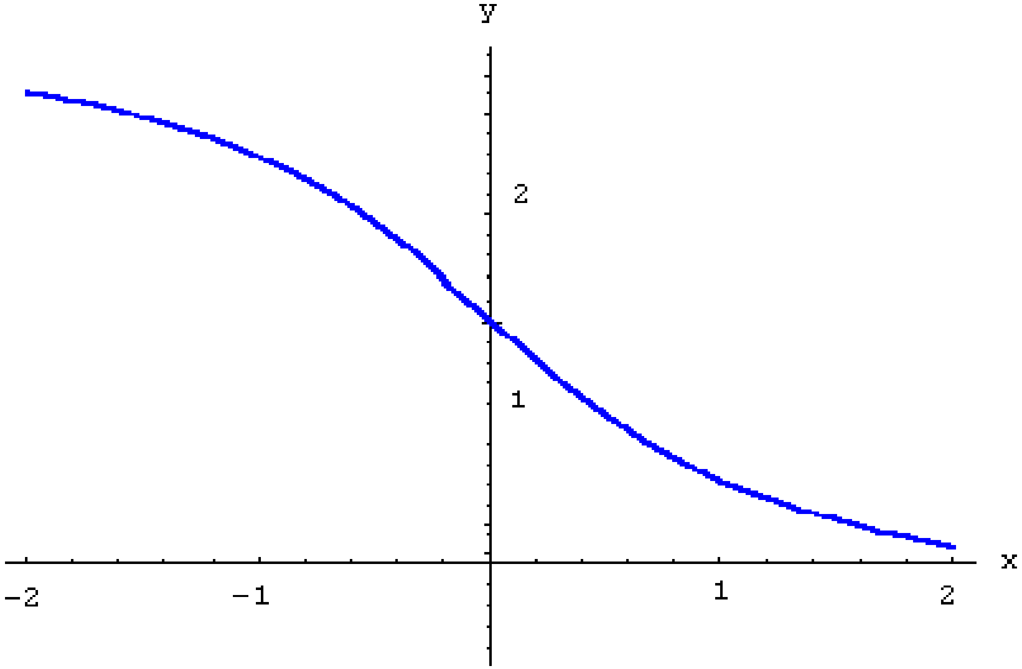
定义域：$(-\infty, +\infty)$，值域 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$，

单增函数， $\tan(\arctan x) = x$.

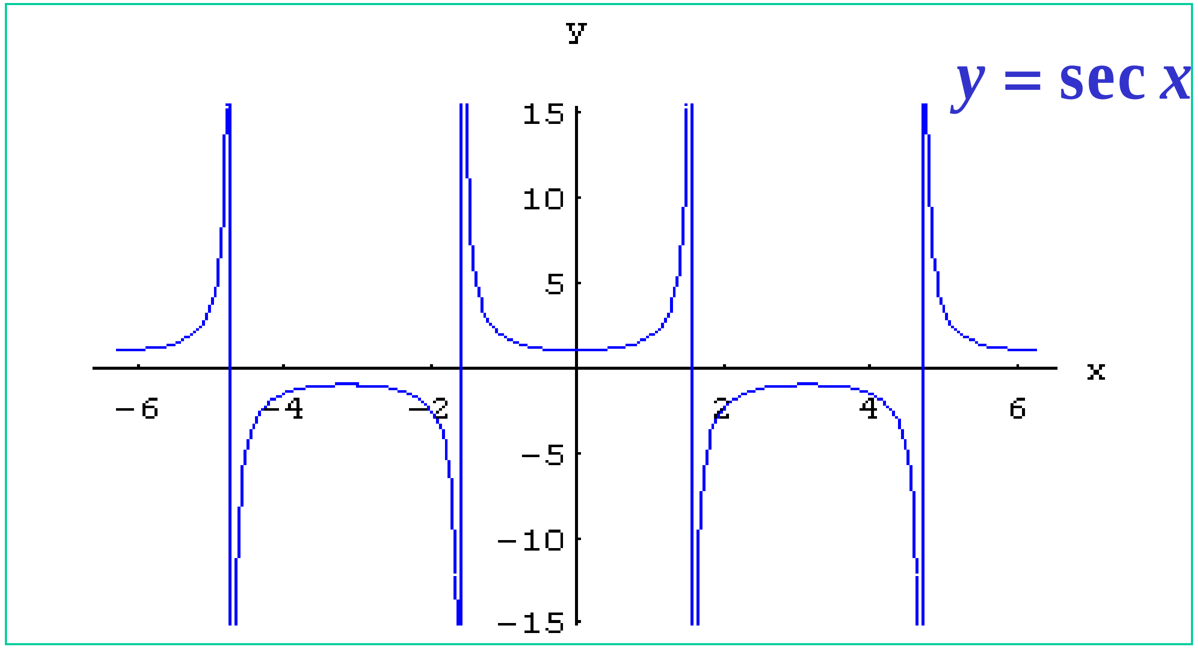


(8) 余切函数与反余切函数 $y = \cot x \ , y = arc\cot x$



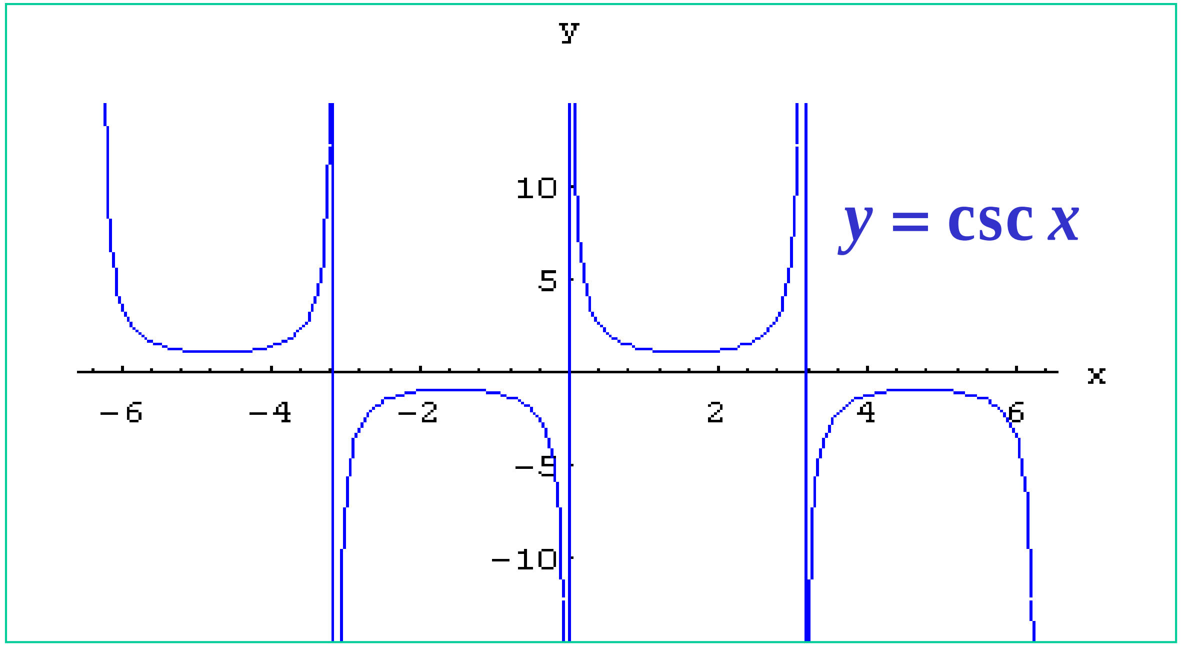


（9）正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$



定义域 $\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$　值域 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

（10）余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$



定义域 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$　　值域（$-\infty$，$-1] \cup [1, +\infty)$

常用三角函数公式教材

1. 倍角公式

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \ \ = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},} \qquad \boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

2. 和差化积

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

3. 积化和差

$$\sin x\cos y=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2},$$

$$\cos x\cos y=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2},$$

$$\sin x\sin y=-\frac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{2}$$

几个常用的不等式：

1. $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$时， $\sin x < x < \tan x$

2. $|\sin x| \le |x|$

3. $\ln x < x$

4. $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad (\forall a_i > 0)$

2. 初等函数

【定义】 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合运算所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

否则称为分段函数.

注：分段函数一般不是初等函数

双曲函数与反双曲函数

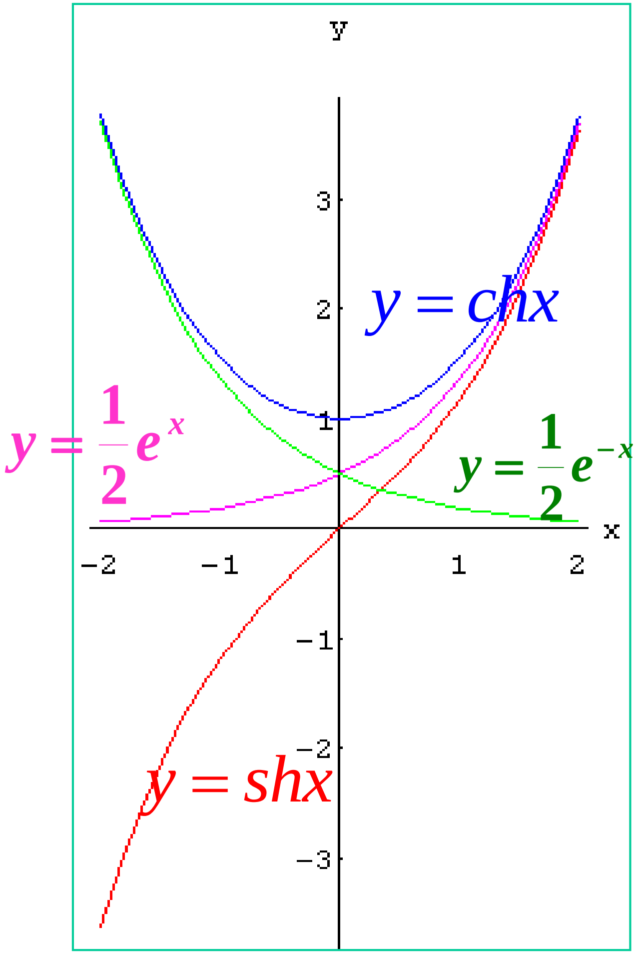
1.双曲函数

双曲正弦 y=shx=$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$, 奇函数.

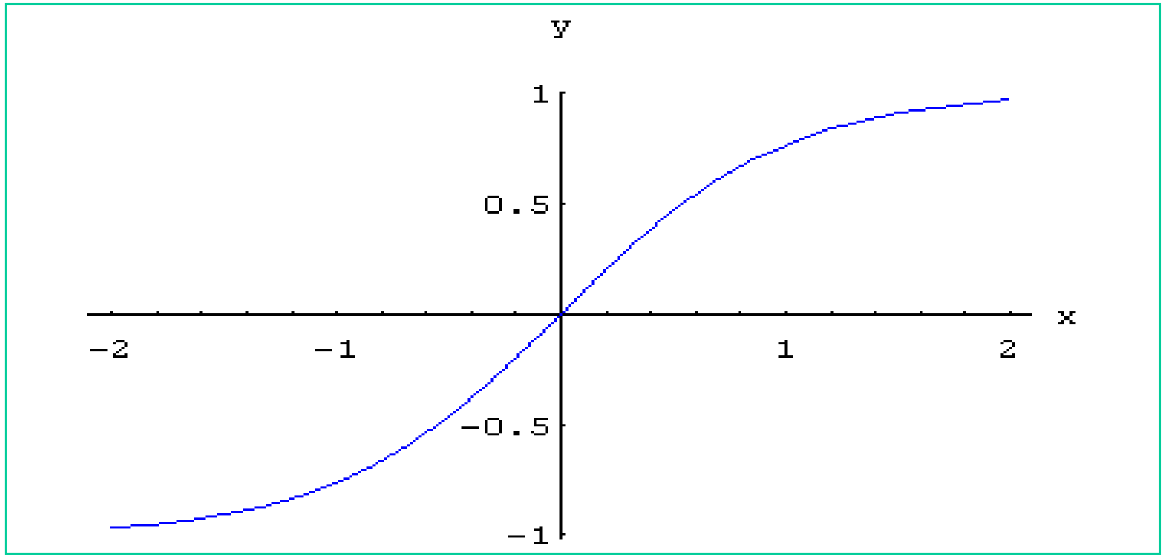
双曲余弦 y=chx=$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$, 偶函数.



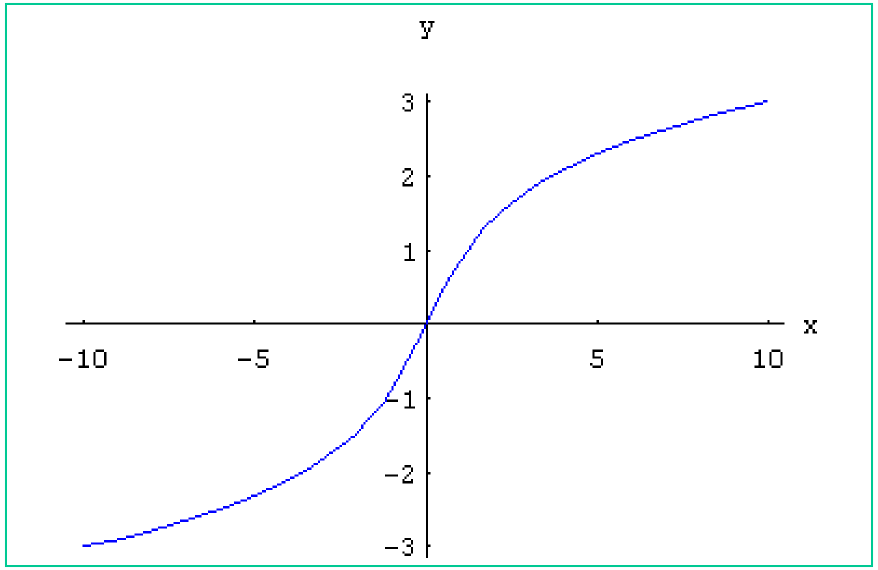
双曲正切 $y=\text{th}x=\dfrac{shx}{chx}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\boldsymbol{D:(-\infty,+\infty)}$ 值域$(-1,+1)$ 奇函数 有界函数,



2.反双曲函数

反双曲正弦　$y=\text{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$



$D:(-\infty,+\infty)$

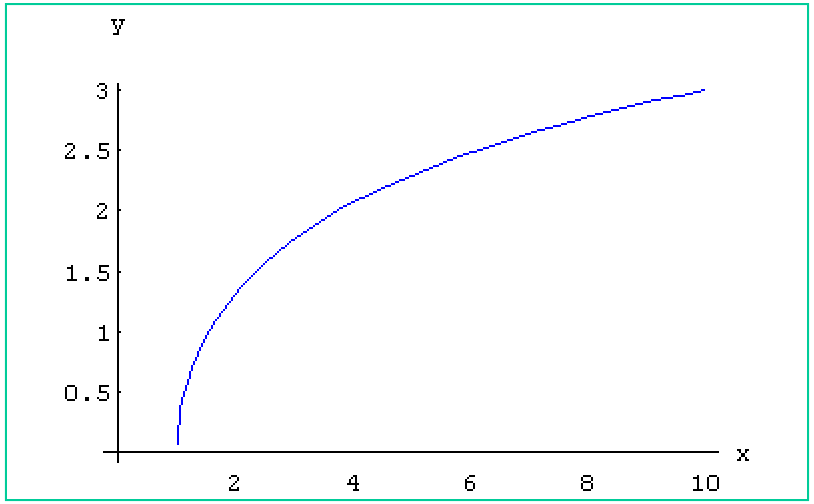
值域$(-\infty, +\infty)$

奇函数,

在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

反双曲余弦　$y=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$\boldsymbol{D:[1,+\infty)}$



值域$[0,+\infty)$

在$[1,+\infty)$内单调增加.

反双曲正切

$$y = arthx$$

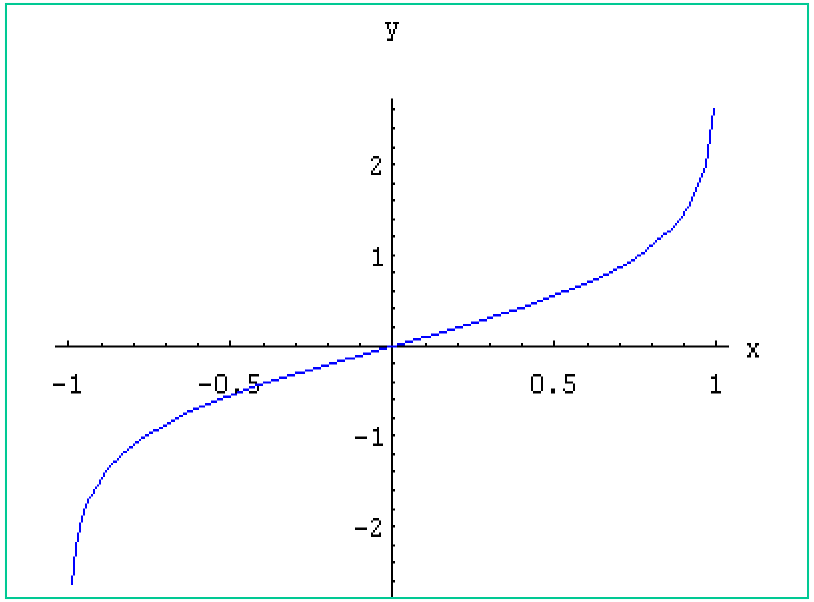
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$D:(-1,1)$

值域 $(-\infty, +\infty)$

奇函数,

在 $(-1,1)$ 内单调增加.



七. 平面曲线的其他表示方法

一般用直角坐标表示， 它的方程为函数$\boldsymbol{y = f(x)}$,

另还有:

1. 隐函数形式: 由二元方程$F(x,y)=0$确定的函数$y=f(x)$

例如: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = R^2}\ (y>0)$

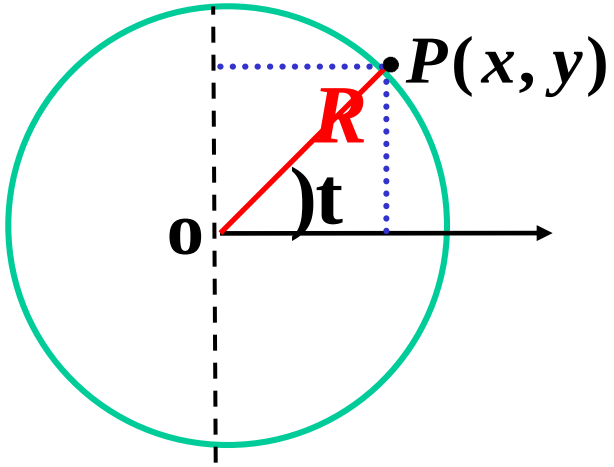
$$\downarrow$$

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$ (隐函数的显化）

2. 参数方程形式

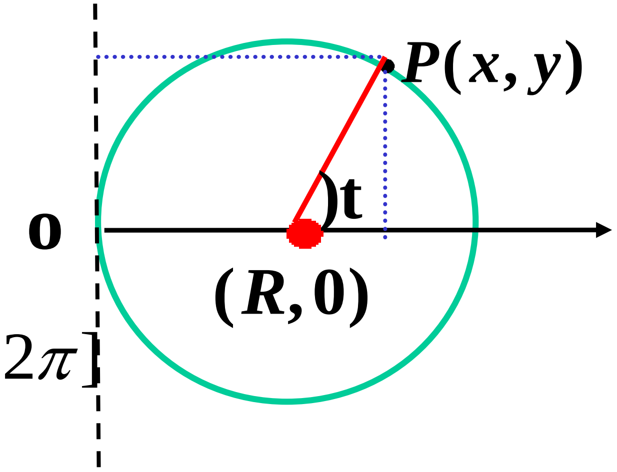
(1) 圆 $x^2+y^2=R^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},0 \le t \le 2\pi$$



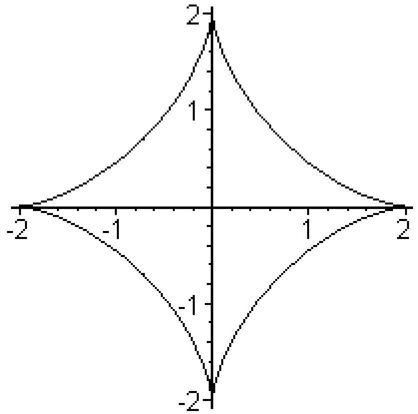
(2) 圆 $x^2+y^2=2Rx$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = R + R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$$

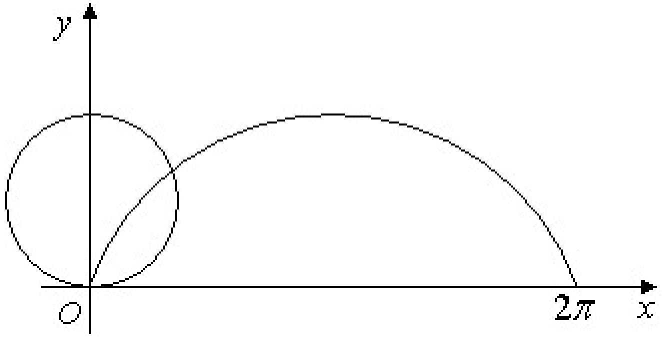


(3)椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}\quad t \in [0, 2\pi]$

(4)



(5)



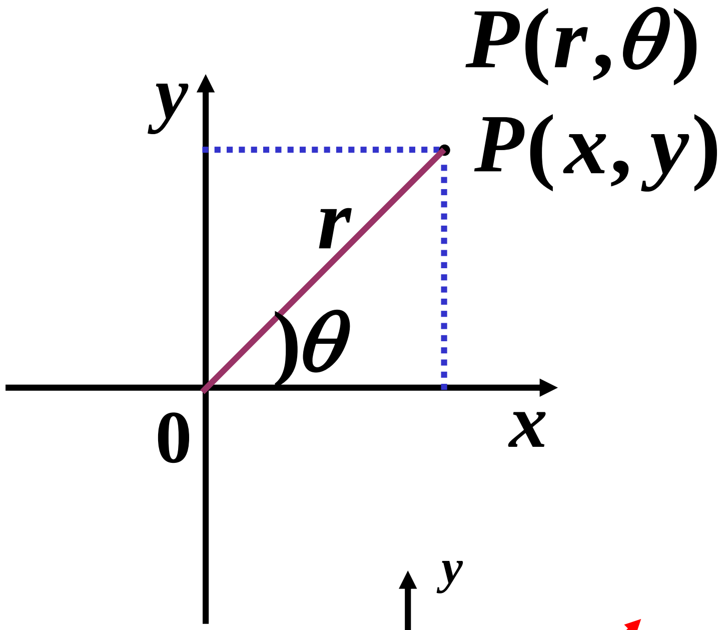
星形线:$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

摆线:$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

3. 极坐标形式下曲线方程

（1）极坐标系

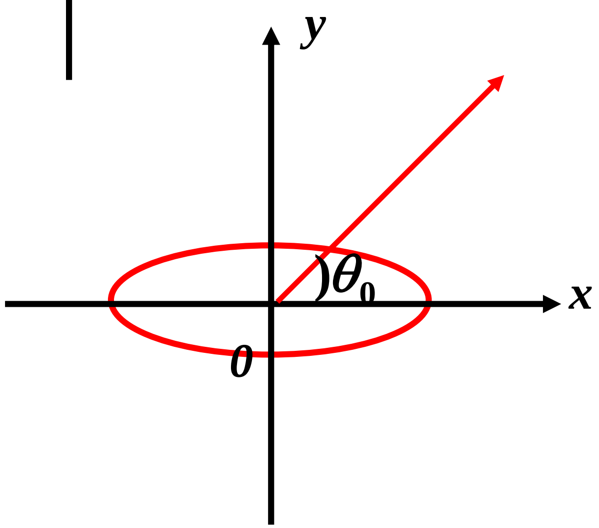


1. x,y 与 r,θ 的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi$$

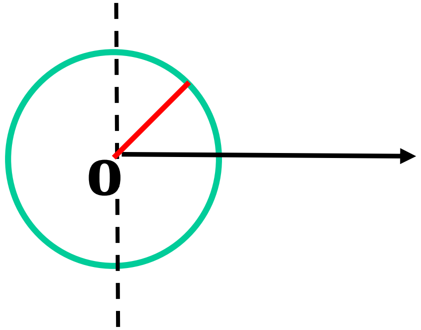
$\downarrow$ 极径　　$\downarrow$ 极角（规定）



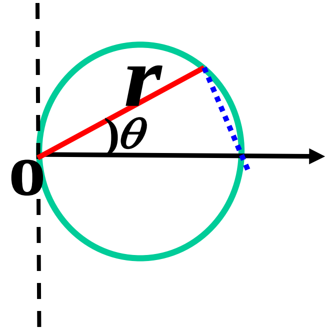
2. $r = C$

3. $\theta = \theta_0$

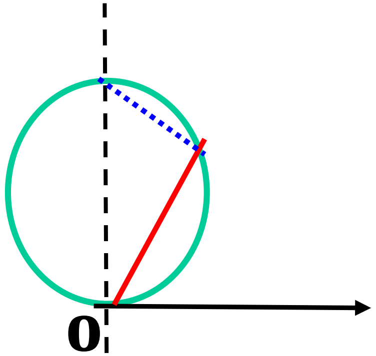
（2） 极坐标形式下曲线方程



- 圆 $x^2+y^2=R^2, \quad \Leftrightarrow r=R$



- 圆 $x^2+y^2=2Rx, \quad \Leftrightarrow r=2R\cos\theta$
- 圆 $x^2+y^2=2Ry, \quad \Leftrightarrow r=2R\sin\theta$



几个重要曲线附录2.ppt

心形线

$r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$（见图 1-5-6）；

$r = a(1-\cos\theta)\ (a>0)$（见图 1-5-7）.

图 1-1-20

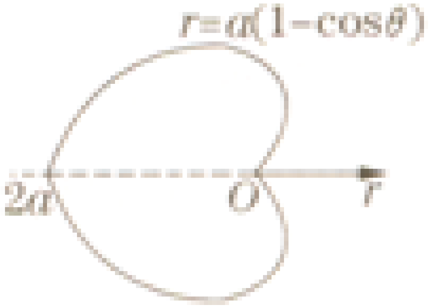
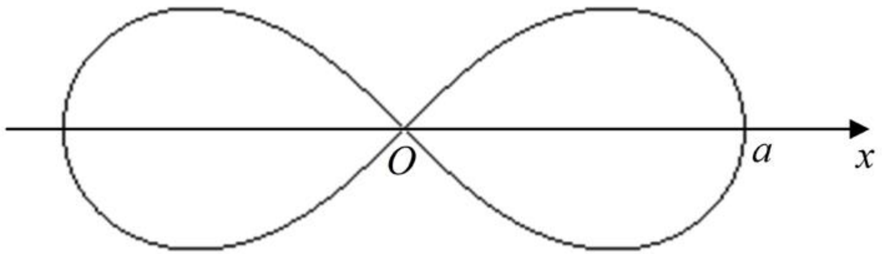


图 1-1-21



双紐线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta (a > 0)$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

阿基米德(Archimedes)螺旋线

$r = a\theta\ (a > 0)$.（图 1-5-5）

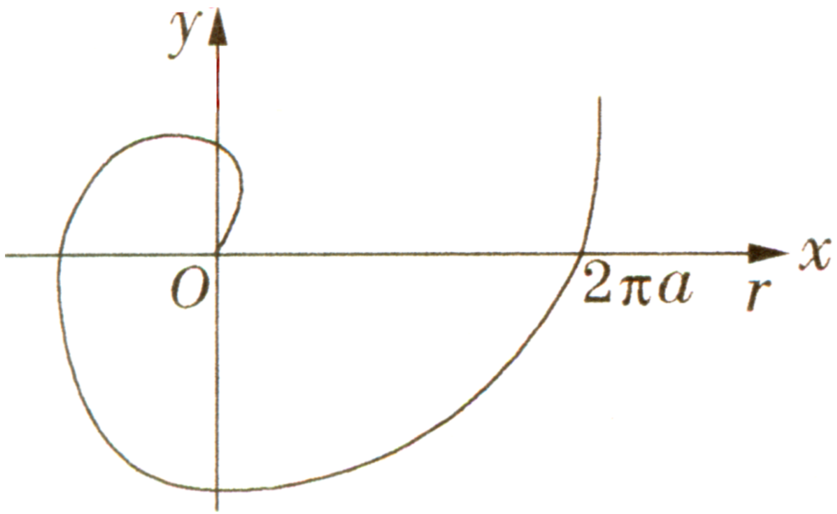


图 1-1-19

§1.2 数列的极限

1. 数列

数列常表示为$\{x_n\}$: $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$

其中x_n称为数列的通项。

单调数列：若$\forall n, x_n \le x_{n+1}$则称$\{x_n\}$为单调增数列，

若$\forall n, x_n \ge x_{n+1}$则称$\{x_n\}$为单调减数列，

有界数列：若$\exists M > 0$,使得$\forall n$,有$|x_n| < M$

2. 数列的极限

如果当n无限增大时, x_n 无限地接近于常数a , 那末称 a 为数列$\{x_n\}$的极限， 记作:$\lim_{n\to\infty} x_n = a$

定义：设一数列$\{x_n\}$和一个常数 a ,如果对于任意给定的正数 ε（不管多么小）, 总存在正整数 N，使得对于满足 n >N 的一切 x_n 都有$|x_n - a| < ε$ 成立，那末称数 a 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$ 时的极限。

记作:$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a\,(n\to\infty)$

这即为数列极限的 “ ε–N ”定义，可简写为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当} n > N \text{时，有} |x_n - a| < \varepsilon$$

注：1. ε具有任意性.

2. N具有存在性，其是依据ε而存在， N= N(ε).

3. 用“ ε–N ”语言叙述 x_n 不以 a 为极限：

$$\forall N > 0, \exists \varepsilon_0 > 0,\ 当 n > N 时，有 |x_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

4. 要证明一个数列以 a 为极限，关键在于求N，通过解不等式求N，一般采取“放大法”.

例1. 用极限 “ε –N”定义验证

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$

解：从不等式$\left|\dfrac{2}{n}-0\right|<\varepsilon$中解出$n>\dfrac{2}{\varepsilon}$

取 $N=[\dfrac{2}{\varepsilon}]$ 所以

$\forall\varepsilon>0,$取$N=[\dfrac{2}{\varepsilon}]$当$n>N$时，有$\left|\dfrac{2}{n}-0\right|<\varepsilon$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ |q|<1$ （**）$\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0, |q|<1$

解：从不等式$\left|q^n - 0\right| = |q|^n < \varepsilon$中解出$n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$

取$N = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$ 所以

$\forall\varepsilon > 0$,取$N = N = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，当$n > N$时，有$\left|q^n - 0\right| < \varepsilon$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ |q|<1.$

如:$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{3})^n = 0, \lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{4}{5})^n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} 8\ (\dfrac{4}{9})^n = 0$

例2.用“ε–N”语言验证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\left(a>1\right) \qquad \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\left(a>0\right)\right)$$

证法：解不等式$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$

$$\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon, n>\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$$

$\forall\varepsilon>0,$取$N=[\dfrac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}]$，当$n>N$时,$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\left(a>1\right)$

例3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$， 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$，

举例说明反之不成立。

证：$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，

有 $|x_n - a| < \varepsilon$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$，取上述 N，当 $n > N$ 时，

有 $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

反例：$x_n = (-1)^n$

例4. 设数列$\{x_n\}$有界，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

证：设 $\exists M > 0, |x_n| < M$ 。$\because \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$, 对于$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M}$, $\exists N$, 当$n > N$时, $|y_n| < \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{M}$

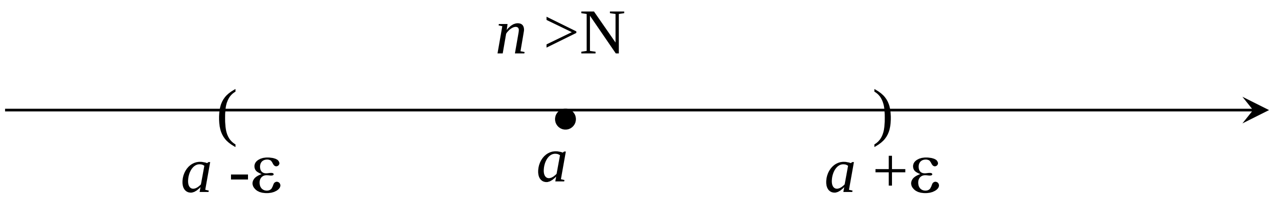
$\forall \varepsilon > 0$, 取上述N, 当$n > N$时, $|x_n y_n| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

数列极限的几何解释

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$



表示 n 很大时， x_n 几乎都凝聚在点 a 的近旁。

有极限的数列称为收敛数列，反之称为发散数列。

3. 收敛数列的性质

定理1（唯一性）若数列$\{x_n\}$收敛，则其极限值唯一。

证：用反证法, 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$（1), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B(2)$,

由（1）知，对于$\varepsilon_0 = \dfrac{|B-A|}{2}$, $\exists N_1$, 当$n > N_1$时，有$|x_n - A| < \dfrac{|B-A|}{2}$

由（2）知，对于$\varepsilon_0 = \dfrac{|B-A|}{2}$, $\exists N_2$, 当$n > N_2$时，有$|x_n - \mathrm{B}| < \dfrac{|B-A|}{2}$

$\therefore$对$\varepsilon = \dfrac{|\mathrm{B-A}|}{2}$，取$N = \max\{N_1, N_2\}$，当$n > N$时，

有$|\mathrm{A-B}| = |x_n - \mathrm{A} + x_n - \mathrm{B}| \le |x_n - \mathrm{A}| + |x_n - \mathrm{B}| < \dfrac{|\mathrm{B-A}|}{2} + \dfrac{|\mathrm{B-A}|}{2} = |\mathrm{A-B}|$

矛盾, 所以极限唯一。

定理2（有界性）收敛数列必有界

证：设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 对于$\varepsilon_0 = 1, \exists N$, 当$n > N$时,

$$|x_n - a| < \varepsilon_0 = 1, \therefore |x_n| - |a| \le |x_n - a| < 1 \therefore |x_n| < |a| + 1$$

取$M = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\right\}$, 则$|x_n| < M$

子数列：　从$\{x_n\}$中任选无限多项，按下标从小到大排成一列，记作$\{x_{n_k}\}$,称为$\{x_n\}$的子数列。

奇子数列：　$x_1,\quad x_3,\ \cdots x_{2n-1}\ ,\cdots$

偶子数列：　$x_2,\quad x_4,\ \cdots x_{2n},\cdots$

定理:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$

定理:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \left\{x_n\right\}$的所有子列都收敛于$a$.

§1.3　函数的极限

1.　当$x \to \infty$时函数的极限

定义1. 设有一函数 $f(x)$，对于绝对值无限大的 x 是有定义的，A为一常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 X ，使得当$|x|>X$时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称A为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限

记作:$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$或 $f(x)\to A(x\to\infty)$

“ε–X”定义可简记为:

$\forall\varepsilon>0, \exists X>0,$当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$

注：1. ε具有任意性.

2. N具有存在性，其是依据ε而存在， N= N(ε).

3. 要证明$f(x)$当$x\to\infty$时， 以A为极限,
关键在于求X， 通过解不等式求X，一般采取
“放大法”.

4. $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$

记作：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$

记作：$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

定理1：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 。

推论：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$至少有一个不存在，

或者都存在但不等，则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$一定不存在。

无极限举例：

$$\lim_{x\to\infty}\arctan x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\arctan x \text{ 不存在}$$

例1. 用“ε–X”定义验证

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

解：从不等式 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 中解出 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 证毕。

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

解：放大不等式 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$ 解出 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$ 证毕。

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

解：从不等式$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ 中解出 $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ 取$X = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$

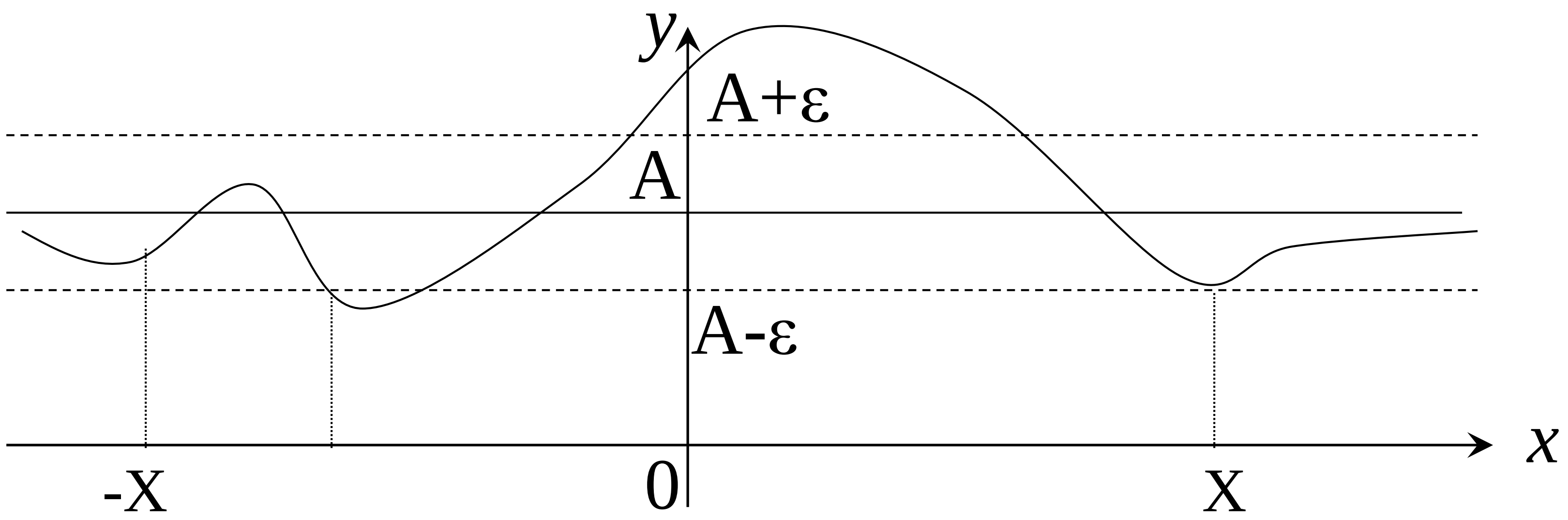
$\forall \varepsilon > 0$,取$X = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$,当$|x| > X$时，有$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0\right| < \varepsilon$成立.

$\therefore \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$

几何意义

作直线 y =A–ε，y =A+ε 总存在一个X > 0,
当 | x |>X时，函数位于这两条直线之间。



2. 当 $x \to x_0$ 时函数的极限。

定义2. 设 $f(x)$在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，且 A为一常数，如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为函数 $f(x)$当 $x \to x_0$时的极限.

记作：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0)$

“ε –δ”定义可简记为：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$

注：1. ε具有任意性.

2. N具有存在性，其是依据ε而存在， N= N(ε).

3. 要证明 $f(x)$当$x \to x_0$时， 以A为极限

关键在于求δ，通过解不等式求δ。

4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$x_0 - \delta < x < x_0$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$

称A为$f(x)$的左极限，记作：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$x_0 < x < x_0 + \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$

称A为$f(x)$的右极限，记作：$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

定理1: $\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 。

推论：若 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$至少有一个不存在，

或都存在但不等，则$\lim_{x\to x_0} f(x)$一定不存在。

（分段函数分段点处极限情况）

无极限举例：

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}, \qquad f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 1 \\ \sqrt{x}, & x>1 \end{cases}$$

例2. 用“$\varepsilon-\delta$”定义验证：$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{2(x+2)}=-2$

解：从不等式$\left|\dfrac{x^2-4}{2(x+2)}-(-2)\right|=\dfrac{|x+2|}{2}<\varepsilon$中解出

$|x-(-2)|<2\varepsilon$ 取$\delta=2\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=2\varepsilon$ 当$0<|x-(-2)|<\delta$时，

有$\left|\dfrac{x^2-4}{2(x+2)}-(-2)\right|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{2(x+2)}=-2$

例3. 用“$\varepsilon-\delta$”定义验证：$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

解：$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\dfrac{x-x_0}{2}\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right|$

怎么办?

$$\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<\varepsilon$$

解出 $|x-x_0|<\varepsilon$　取 $\delta=\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$$

$$\therefore\ \lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$$

例4. 用“$\varepsilon-\delta$”定义验证：$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

解：$\left|x^2-4\right| = \left|(x-2)(x+2)\right|$

增加限制条件$|x-2|<1, 1<x<3$

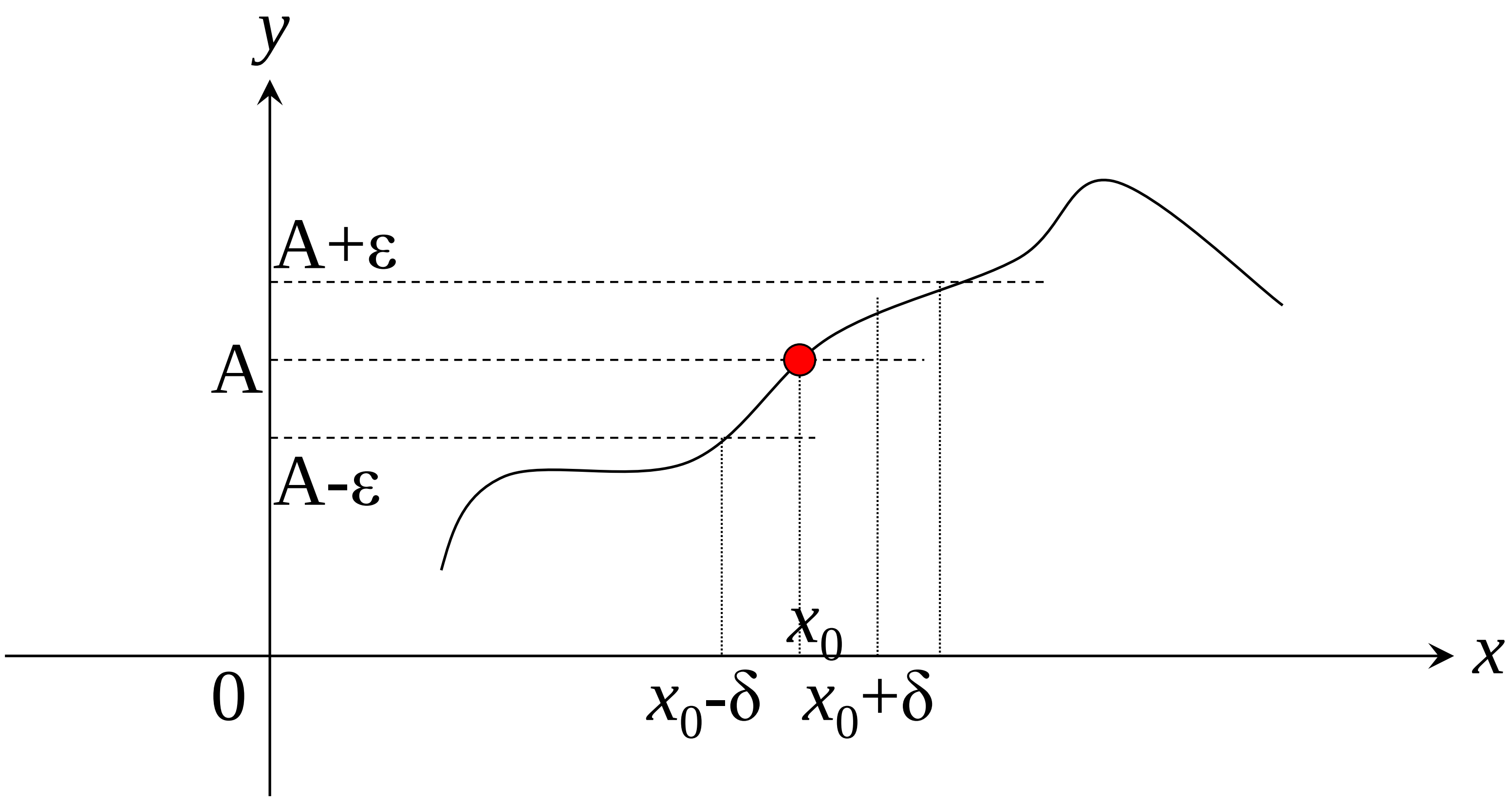
$\left|x^2-4\right| < 5\left|x-2\right| < \varepsilon$，解得$\left|x-2\right| < \dfrac{\varepsilon}{5}$

$\forall \varepsilon > 0$，取$\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$，当$0 < \left|x-2\right| < \delta$时，

$\left|x^2-4\right| < \varepsilon \qquad \therefore \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$

几何解释

作直线 $y = A - \varepsilon$，$y = A + \varepsilon$ 总存在一个 $\delta > 0$,
当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，函数位于两直线之间。



函数极限的性质：

定理1.3.3: （唯一性）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则极限唯一.

定理1.3.4: （局部有界性）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则存在 $\overset{0}{U}(x_0)$，

使得 $f(x)$ 在 $\overset{0}{U}(x_0)$ 有界.

定理1.3.5：（局部保号性）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{A} > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\overset{0}{U}(x_0)$

使得 $\forall x \in \overset{0}{U}(x_0)$，有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

定理1.3.6: 若在 $\overset{0}{U}(x_0)$ 内 $f(x) \geq 0$（或 $f(x) \leq 0$），且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，

则 $\mathrm{A} \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

§1.4. 无穷小和无穷大

1. 无穷小

定义：极限为零的数列和函数称为无穷小。

“0”是作为无穷小的唯一的常数。

如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$，则称数列$\{x_n\}$为无穷小。

如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$，则称函数$f(x)$为$x\to\infty$时的无穷小。

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$，则称函数 $f(x)$为$x\to x_0$时的无穷小。

为了讨论方便，记无穷 小α为$\lim \alpha = 0$。

无穷小的性质：

1. 在自变量的同一变化过程中，有限个无穷小的和差，积仍为无穷小。

2. 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小。

推论1. 常数乘以无穷小仍是无穷小。

推论2. 若α为无穷小, $\lim u = A$, 则αu也为无穷小

若α为无穷小, $\lim u = A(A \neq 0)$, 则$\dfrac{\alpha}{u}$也为无穷小

如： $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)\cos x$

定理 (极限与无穷小的关系)

$\lim f(x)=A$的充要条件是$f(x)=A+\alpha$其中$\lim\alpha=0$。

例1. 验证数列$\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$当$n\to\infty$时为无穷小。

例2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$

例3. 判别数列$\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})$当$n\to\infty$时是否为无穷小？

$$\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(2\pi(\sqrt{n^2+1}-n))$$

$$=\sin\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

2. 无穷大

定义：绝对值无限增大的数列或函数称为无穷大。

函数 $f(x)$当$x \to \infty$时为无穷大的严格定义 为：

$$\forall G > 0, \exists X > 0, 当|x| > X，有|f(x)| > G$$

注意：无穷大与无界的区别。

如：$0,1,0,\ 2,\cdots,0,\ n\cdots$为无界，但不是无穷大

定理：若$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小，

若α为无穷小且$\alpha \neq 0$，则$\dfrac{1}{\alpha}$为无穷大。

§1.5 极限的运算法则

定理：（极限的四则运算法则）设在自变量的同一变化过程中，

$$\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B,$$

则（1）$\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B,$

（2）$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\times\lim g(x)=\mathrm{AB}$

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$（$\mathrm{B}\neq 0$）

推论1：$\lim f(x)$存在，k为常数，则$\lim \mathrm{k}f(x)=\mathrm{k}\lim f(x)$

推论2：$\lim f(x)$存在，n为正整数，则$\lim\left[f(x)\right]^n=\left[\lim f(x)\right]^n$

注：函数的四则运算法则可推广到数列上

定理（复合函数的极限运算性质）：$y=f(g(x))$ 在$\overset{0}{U}(x_0)$内有定义，

如果$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$而$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$, 且当$x\in\overset{0}{U}(x_0, \delta)$时，

有$g(x)\neq u_0$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(u_0)=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

例.(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ $=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ $=\dfrac{2}{3}$

（3）$\lim\limits_{x\to x_0} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim\limits_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$

$\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 + 2x + 1 = 6$

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=\dfrac{5}{2}, \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+2}{x-1}=\infty, \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=2$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}, & Q(x_0)\neq 0\\ \infty, & P(x_0)\neq 0, Q(x_0)=0\\ \text{化简后求，} & P(x_0)=0, Q(x_0)=0\end{cases}$$

（5）$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2}{2x^2+1}=\frac{1}{2},\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2}{3x^3-1}=0,\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+\cdots a_1 x+a_0}{b_m x^m+\cdots b_1 x+\mathrm{b}_0}=\begin{cases}\infty, & n>m\\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m\\ 0, & n<m\end{cases}$$

如：$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta=0$,求$\alpha$，$\beta$

（6）$\lim_{x\to 2}e^{x+3}=\lim_{u\to 5}e^{u}=e^5$

（7）$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})(|x|<1)=\frac{1}{1-x}$

（8）$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+5^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}}=\frac{1}{5}$

1.6 极限存在准则和两个重要极限

准则I（夹逼准则）：设在自变量的同一变化过程中，

$f(x), g(x), h(x)$ 都有定义，且满足：

$$(1) g(x) \le f(x) \le h(x), \qquad (2) \lim g(x) = \lim h(x) = A$$

则：$\lim f(x) = A$

注：夹逼准则对数列也成立

若数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足

$$(1) \exists N, n > N, y_n \le x_n \le z_n, \qquad (2) \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A$$

则 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$

准则II.单调有界数列必有极限。

注：（1）有界是数列收敛的必要条件，
单调有界是数列收敛的充分条件。

（2）若$\{x_n\}\uparrow$，考虑$\{x_n\}$有上界便可，
若$\{x_n\}\downarrow$，考虑$\{x_n\}$有下界便可

例. 证明数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$的极限存在。

证：设$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$\therefore x_n < x_{n+1}$，$\{x_n\}$单调增加。

又 $x_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$

$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3$，$\therefore \{x_n\}$有上界，所以$\{x_n\}$有极限。

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2{,}7182818\cdots$$

例1. 求下列极限

(1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$$

解：(1) 由于 $\frac{k}{n^2+n+n}\le\frac{k}{n^2+n+k}\le\frac{k}{n^2+n+1}$

所以 $\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\frac{1}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots a_k^n}\,(a_1,a_2,\cdots a_k>0)$

证：不妨设 $A=\max\{a_1,\cdots,a_k\}$,则

$A\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\le\sqrt[n]{kA^n}=\sqrt[n]{k}A$

又$\because\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1\therefore$由夹逼准则得

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=A$.

如：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+7^n}=7$.

例2.（1）设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ $(n = 1, 2, \cdots)$

证明：$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求之。

证：$\because x_1 > 0$，显然 $x_n > 0$ 且 $x_{n+1} \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} = 1$

所以 $\{x_n\}$ 有下界。

又 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x_n^2}) \leq 1$，$\therefore x_{n+1} \leq x_n$，所以 $\{x_n\}$ 单调减少。

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，令 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

由 $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) \Rightarrow a = 1$（$-1$ 舍去）

（2）. 设 $x_1=1$, $x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(n=2,3,\cdots)$

证明：数列$\{x_n\}$有极限。

证：$\because x_1=1$，显然$x_n\geq 1$且$x_n<2$，所以$\{x_n\}$有界。

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n}{1+x_n}-\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

$\therefore x_{n+1}-x_n$与x_n-x_{n-1}同号，而$x_2>x_1$，$\therefore x_{n+1}>x_n$

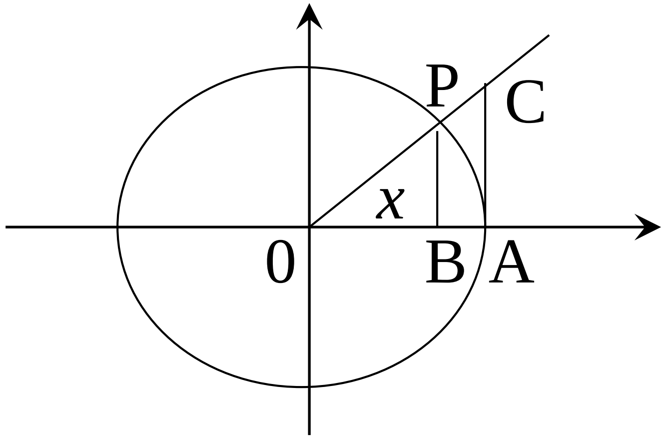
所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

两个重要极限

定理1（函数的夹逼定理）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, 且在点$x_0$的某个去心邻域内，有$h(x)\le f(x)\le g(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



证：先讨论 $x>0$, 作单位圆

$$S_{\Delta OAP}<S_{扇形OAP}<S_{\Delta OAC}$$

$$\therefore \sin x < x < \tan x$$

$$\therefore \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \because \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \qquad \therefore \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$当 x < 0 时, 令 x = -t, 则 \quad \therefore \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \ , \qquad \lim_{f(x)\to 0} \frac{f(x)}{\sin f(x)} = 1 (f(x) \neq 0)$$

例3.（1）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{2}{\cos 2x}=2$

（2）. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

（3）. 求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

解：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a$$

（4）. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\sin x}{x}$，　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$

第二个重要极限（1^{∞}型）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=e\ \ (\lim f(x)=0,\ f(x)\neq 0)$$

例4：求（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x+3}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}\cdot(1+\frac{2}{x})^{3}=e^{2}$

设 $\lim f(x)=1$，且 $\lim g(x)=\infty$，则

$$\lim\left(f(x)\right)^{g(x)}=\lim\left(1+(f(x)-1)\right)^{g(x)}=e^{\lim\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)}$$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+1})^{x}$ $=e^{-1}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

（4）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

解：令 $e^x-1=t$，则 $x=\ln(1+t)$，

当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$$

（6） $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{\sin x}}=e^{-6}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=e^{2a}$

1.7 无穷小的比较

两个无穷小的代数和、积仍为无穷小，
那么两个无穷小的商会是什么样呢？

例如：当$x\to 0$时，$x, \sin x, 1-\cos x, \sqrt[3]{x}$

等都是无穷小。

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\infty$

两个无穷小的商实际反映了在变化过程中
趋于零的速度快慢程度。为此引入定义

定义1. 设$\lim\alpha=0,\lim\beta=0$

（1）如$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$则称$\beta$为$\alpha$的高阶无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$

或称α为β的低阶无穷小。

（2）如$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq0)$则称$\beta$为$\alpha$的同阶无穷小，

记作$\beta=O(\alpha)$

特别当$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$则称$\beta$为$\alpha$的等价无穷小，记作$\beta\sim\alpha$。

如$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c(c\neq0)$称$\beta$为$\alpha$的$k$阶无穷小。

例.问当$n\to\infty$时　1) $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n^2}$，　　2) $\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})$

是$\frac{1}{n}$的几阶无穷小？

定义2. 给定无穷小β，若存在无穷小α，使得$(\beta-\alpha)$为α的高阶无穷小，即$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=0$或$\beta-\alpha=o(\alpha)$，则称$\alpha$为$\beta$的主部，此时$\beta=\alpha+o(\alpha)$。

定理.: $\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta=\alpha+o(\alpha)$

等阶无穷小的代换定理

定理. 如果α、β、α'、β' 均为无穷小，$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$

且$\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$。

定理. 如果α、β 为无穷小, 且$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0,$

则$\alpha + \beta \sim \alpha$。

当 $x \to 0$ 时，常见的等价无穷小

$$\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

积，商中的等价无穷小可代换，加减中的不可以。

例.（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ $\boxed{=1}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^{2x}-1)\ln(1+\tan x)}$ $\boxed{=\dfrac{1}{4}}$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^m)}{\sin^n x}$ $(m,n$为正 $\boxed{=\begin{cases}0, & m>n\\ 1, & m=n\\ \infty, & m<n\end{cases}}$

$$(4)\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}$$

例：若 $\lim_{x\to 2}\frac{ax+b-4}{x-2}=4$, 试确定$a,b$.

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-4 \end{cases}$$

例:若$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3}{x-1}+ax+b\right)=2$, 试确定$a$, b的值

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=-2 \end{cases}$$

§ 1.8 函数的连续性

1. 函数的连续性

定义1　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量增量 Δx 趋于零时，对应的函数增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，那末称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

连续的等价定义：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

连续的三个要素：

$f(x)$ 在 x_0 点处有定义、有极限、极限值等于函数值。

注：1.左、右连续

左连续：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

即 $f(x_0-0)=f(x_0)$ 或 $f(x_0^-)=f(x_0)$

右连续：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

即 $f(x_0+0)=f(x_0)$ 或 $f(x_0^+)=f(x_0)$

定理． 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是：

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续。

例1. 试证 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处连续。

即证：$\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$

例2. 求a, b的值， 使下列函数在$x=0$ 处连续

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin x, & x<0 \\ a, & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0 \end{cases}$$

2.如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意一点连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，或称 $f(x)$ 为 (a,b) 上的连续函数。如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

例3. 证明函数 $f(x)=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续。

即证： $\forall x_0 \in (-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

例4.（1）讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$的连续性.

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数，求$a$, b.

2 . 函数的间断点

如果函数连续的三个要素中有一个不满足，那末称 $f(x)$ 在 x_0 处间断，x_0 称为函数的间断点。

间断点的常见类型

$$f(x)=\frac{1}{x-1}$$ 在$x=1$处　　无穷间断点

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$ 在$x=0$处　　震荡间断点

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\quad 在x=0处$$ 跳跃间断点

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad 在x=0处$$ 可去间断点

左、右极限均存在的间断点,称为第一类间断点,其余的间断点,称为第二类间断点。

例5．（1）设 $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$

问 $x=0, x=-1, x=1$ 是否为间断点？若是，确定其类型。

（2）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0\quad, & x=0\end{cases}$

问 $x=0$ 是否为间断点？若是，确定其类型。

例6．求下列函数的间断点，并指出类型

（1）$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}\sin\dfrac{1}{x}$，　（2）$f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$

§ 1.9. 连续函数的运算及初等函数的连续性

定理. 如果函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处均连续, 那么

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}(\text{此时设}g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0 处也连续。

定理. 如果函数 $u=\phi(x)$ 在点 x_0 处连续, $y=f(u)$ 在 $u_0(u_0=\phi(x_0))$ 处连续，那么复合函数 $y=f(\phi(x))$ 在点 x_0 处连续。

定理. 如果函数 $y = f(x)$ 在某个区间上严格单调增(或降)且连续，那末它的反函数 $x = \varphi(y)$ 在对应的区间上也严格单调增(或降) 且连续。

结论：一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

如： (1) $\lim_{x\to 3}=\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$, (2) $\lim_{x\to 0}=\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=0$

§ 1.10. 闭区间连续函数的性质

定理：　(最大值、最小值定理)

闭区间上连续的函数，一定有最大值和最小值。

推论：闭区间上的连续函数是有界函数。

定理： (介值定理)

闭区间上的连续函数可取得介于端点值之间的任意值。

推论 1： (零值定理) 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 那末在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f(\xi)=0 \quad (a<\xi<b)$

推论 2： 闭区间上连续函数必可取得介于最大值最小值之间的任何值

例7.（1）证明方程 $4x=2^x$ 在区间 $(0,\frac{1}{2})$ 内至少有一根。

（2）证明方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根

例8. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，

证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。

证：$\because \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ $\therefore$ 对于 $\varepsilon_0=1$, $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时，

$$|f(x)-A|<\varepsilon_0=1, |f(x)|-|A|\le|f(x)-A|<1$$

$$\therefore |f(x)|<|A|+1$$

而函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-X,X]$ 上连续，所以 $\exists M_1>0$,

当 $|x|\le X$ 时, $|f(x)|<M_1$

取 $M=\max\{|A|+1, M_1\}$, 则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $|f(x)|<M$

例9. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$。

证明：对于任意一个实数 $l\,(0<l<1)$ 必存在实数 ξ

$(0\le\xi<1)$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+l)$。

证：作函数 $F(x)=f(x)-f(x+l)$

$$F(0)=f(0)-f(l)=-f(l)\le 0$$

$$F(1-l)=f(1-l)-f(1)=f(1-l)\ge 0$$

若 $f(l)=0$, 则取 $\xi=0$; 若 $f(1-l)=0$, 则取 $\xi=1-l$。

若 $f(l)>0,\ f(1-l)>0$。则由介值定理知:

$\exists\xi, 0<\xi<1-l<1, F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+l)$

例10. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $a<c<d<b$,

证明: 存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$.

复习题

1. 用定义证明下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n^2+n+1}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-4)=2$

2. 求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}{x^2+x-2}$

(2) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$　　(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3}\sin\frac{3}{n}$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\tan x}$　　(5) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2x}$

(6) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+2x)}$

3. 确定常数 k 使 $f(x)$ 连续

(1) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{2x}, & x\neq 0 \\ x+k, & x=0 \end{cases}$

$$(2)\ f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{k}{x}}, & x\neq 0\\ e^{3}, & x=0\end{cases}\qquad (3)\ f(x)=\begin{cases}e^{x}, & x<0\\ x+k, & x\geq 0\end{cases}$$

4. 证明题

(1)证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

(2)证明方程$x^3+x-3=0$在开区间$(1,2)$内至少有一个根。

(3) 设数列$\{x_n\}$由下式给出：

$$x_1=2,x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}(n=1,2,\cdots)$$

证明：数列$\{x_n\}$有极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.