第二章　导数

§1　导数的概念

一、引例

二、导数的定义

三、求导数举例

四、导数的几何意义

五、可导与连续的关系

一、 引例

1. 变速直线运动的速度

设描述质点运动位置的函数为

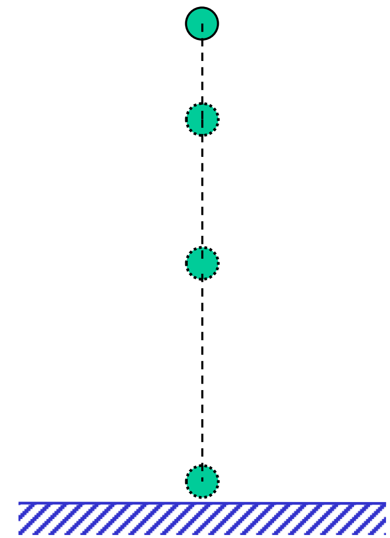
$$s = f(t)$$

则 t_0 到 t 的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

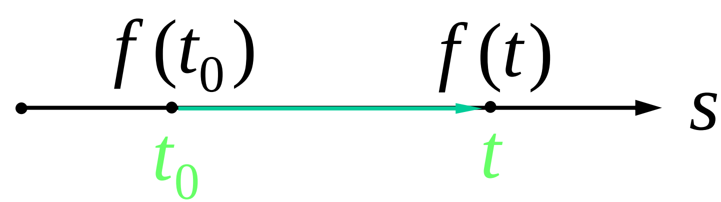
而在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



自由落体运动

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

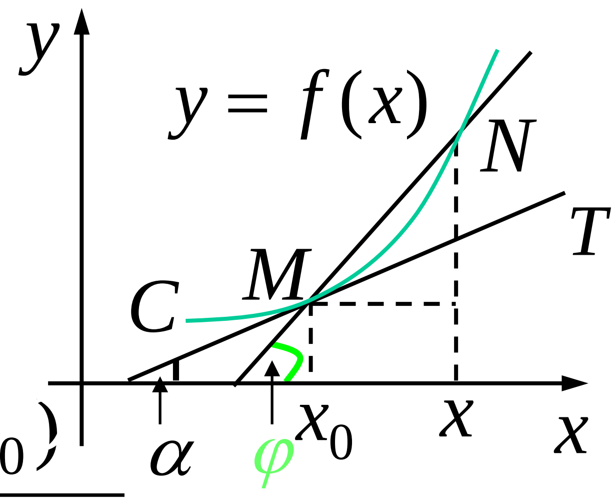


2. 曲线的切线斜率

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线

—— 割线 MN 的极限位置 MT

(当 $\varphi \to \alpha$ 时)

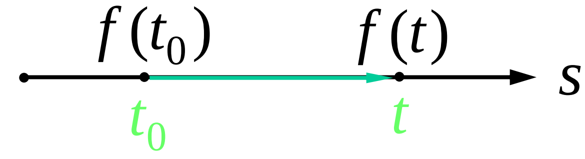


割线 MN 的斜率 $\tan\varphi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

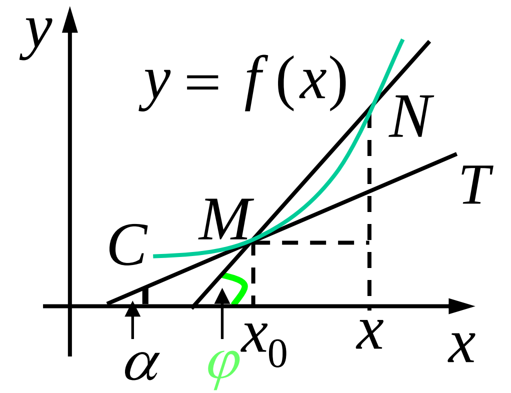
切线 MT 的斜率 $k = \tan\alpha = \lim\limits_{\varphi \to \alpha} \tan\varphi$

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

瞬时速度 $v = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$



切线斜率 $k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



两个问题的**共性:**

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有很多，即是变化率的问题

把这类极限定义为导数。

二、导数的定义

定义 设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义,当自变量x在x_0处有增量Δx(点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时,相应地函数y有增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;如果$\Delta y$与$\Delta x$之比的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称函数$y=f(x)$在点x_0处可导,并称这个极限为函数$y=f(x)$在点x_0处关于x的导数,记为$y'\big|_{x=x_0}$, $f'(x_0)$,

$\dfrac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}$, $\dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}$.

即 $$y'\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

由导数定义

变速直线运动的质点在时刻 t_0 的瞬时速度为 $v=s'(t_0)$

注意 若极限不存在,就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导;

若不可导,且极限为无穷大,为方便起见,记为 $f'(x_0)=\infty$.也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大.

单侧导数

左导数 $$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

右导数 $$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

注意 函数在一点可导的充分必要条件为：

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$$

导函数

（1） 如果函数$y=f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都可导，就称函数$f(x)$在开区间(a,b)内可导.

（2）如果$f(x)$在开区间(a,b)内可导，且$f'_+(a)$及$f'_-(b)$都存在，就说$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

对于任一$x \in I$，都对应着$f(x)$的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数$f(x)$的导函数记作y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$或$\frac{df(x)}{dx}$.　即 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

很明显　$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0}$

如：$f'(x_0)$存在，求

$$(1)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, (2)\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$$

例　已知函数 $y = x^2$,求 y'

解　$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

例（1）　已知函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 求导函数 y' 及 $y'\big|_{x=1}$

解　$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x \sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \therefore y'\big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

（2）考虑函数 $f(x) = \begin{cases} e^{2x}\ , & x \le 0 \\ \sin 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$

在点$x=0$处是否可导。

解：$f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} = 2$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 2x + 1 - 1}{x} = 2$$

所以函数在 $x = 0$点可导，$f'(0) = f'_-(0) = f'_+(0) = 2$

（3） $f(x)=\max\{x^2,x\}, x\in(0,2)$, 求 $f'(x)$

解： $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ x^2, & 1<x<2 \end{cases}$

当 $0<x<1$ 时, $f'(x)=1$, 当 $1<x<2$ 时, $f'(x)=2x$

$$\left.\begin{aligned} &\text{当}x=1\text{时}, f_+'(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2 \\ &f_-'(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(1)\text{不}\exists$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ \text{不}\exists, & x=1 \\ 2x, & 1<x<2 \end{cases}$$

按定义求导数

1．常数的导数

设函数 $f(x)=C$（C为常数），则 $\Delta y=0$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=0 \text{ 即 } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

所以 $(C)'=0$. 常数的导数是零.

2．幂函数的导数

设函数 $y=x^n$（n为正整数），由二项式定理有

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)+\cdots+(\Delta x)^{n-1}]$$

$$=nx^{n-1}$$

即 $(x^n)'=nx^{n-1}.$

3 正弦函数和余弦函数的导数

设函数 $y=\sin x$, 则 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\bullet\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

即 $(\sin x)'=\cos x$ 同理 $(\cos x)'=-\sin x$

4．对数函数的导数

设函数$y=\log_a x(a>0$且$a\neq 1)$,则

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a[\lim_{\Delta x\to 0}(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}]$$

$$=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$$

即 $$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

特别地, $a=e$ 时 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

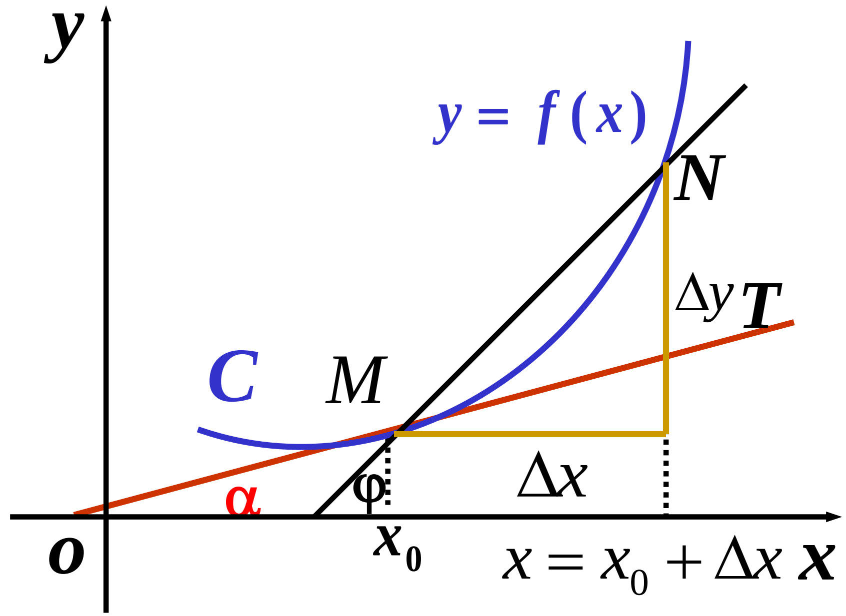
三、导数的几何意义

设 $M(x_0, y_0), N(x, y)$.

割线MN的斜率为

$$\tan\varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



当 $N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M, \Delta x \to 0$ 所以

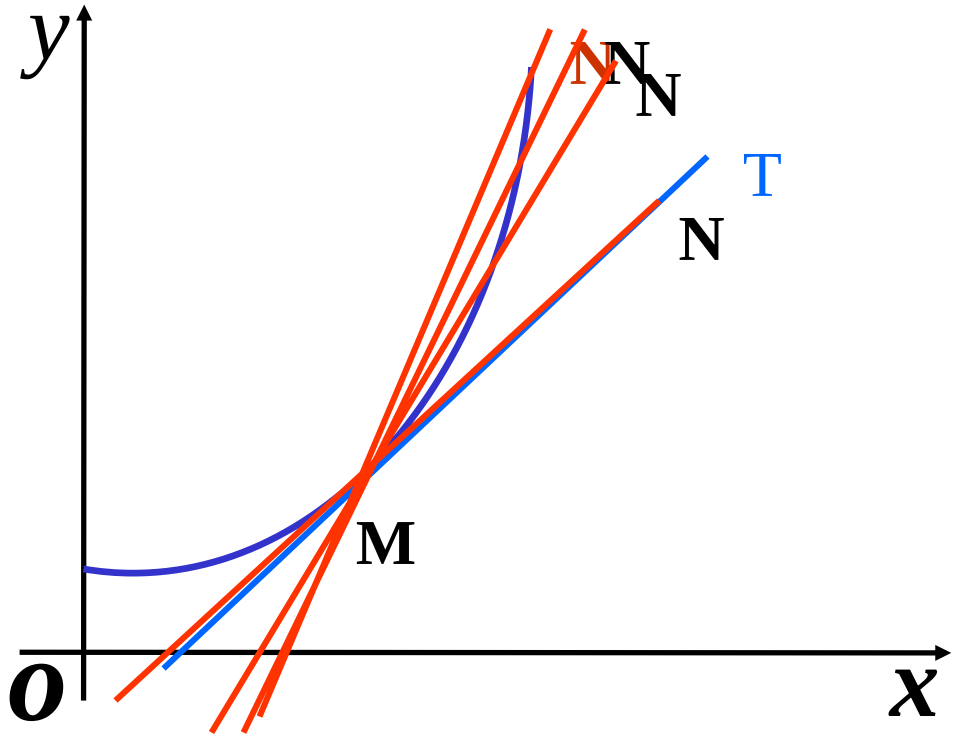
切线MT的斜率为

$$k = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

导数的几何意义

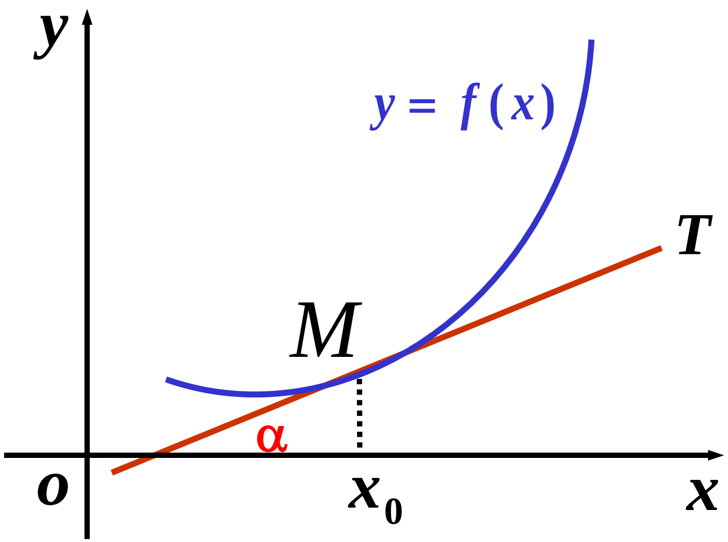
切线：割线的极限

割线MN绕点M旋转而趋向极限位置MT，直线MT就称为曲线在点M处的切线.



所以导数的几何意义为:

$f'(x_0)$表示曲线$y=f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率$\tan\alpha$.



$f'(x_0)=0$

切线：$y=y_0$

法线：$x=x_0$

在$(x_0, f(x_0))$处的

切线方程为 $\boldsymbol{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$.

法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\ \ (f'(x_0)\neq 0)$.

问： 可导是否有切线？

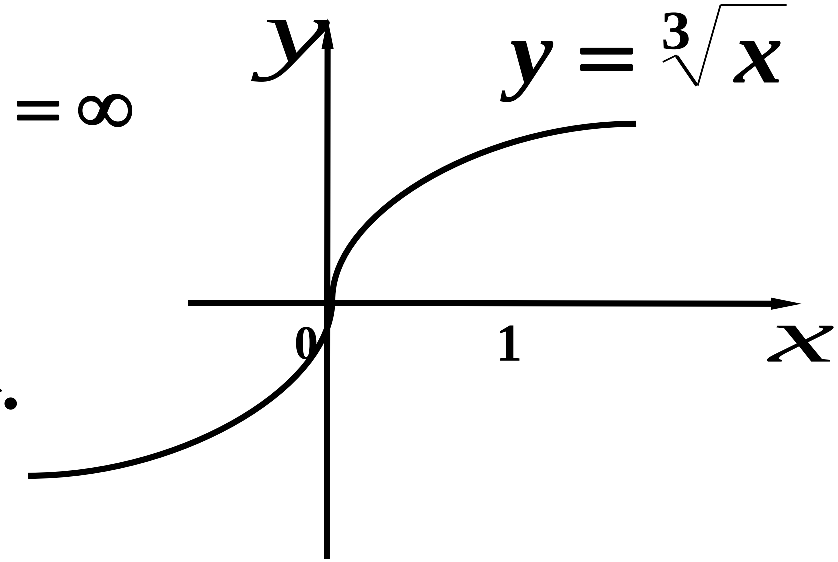
有切线是否可导？

可导 $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ 有切线

例：$y=\sqrt[3]{x}$在 $x=0$处有切线，即为y轴

但：$y'\big|_{x=0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\infty$

故在$x=0$处 $\therefore$ 不可导.



例　求曲线$y=x^2$在点(3,9)处的切线方程和法线方程.

解　由例2-1有，$y'=2x$，$y'\big|_{x=3}=6$

根据导数的几何意义，得切线斜率为 $k=y'\big|_{x=3}=6$

故曲线$y=x^2$在点(3,9)处的切线方程为

$$y-9=6(x-3) \qquad \text{即 } \boldsymbol{y}-6\boldsymbol{x}+9=0$$

法线方程为

$$y-9=-\frac{1}{6}(x-3) \qquad \text{即 } 6y+x-57=0$$

四、可导与连续的关系

可导的函数一定是连续的.

证明 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

由极限与无穷小的关系

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha \quad 即 \quad \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

其中 $\alpha\to 0 \quad (\Delta x\to 0)$

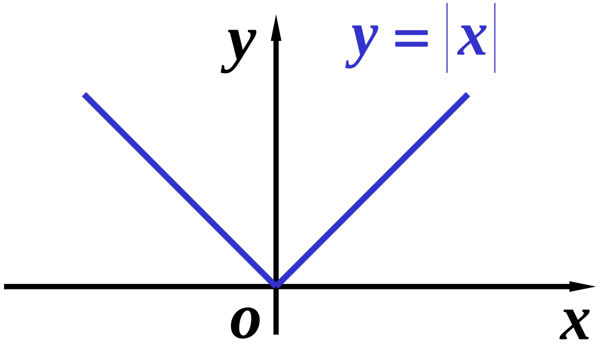
$$\because \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

反之不成立.即连续不一定可导.

比如 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

解 $\because \dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{h}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$



$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$

$\therefore$函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.

例. 讨论函数 $f(x)=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性。

解： $\Delta y=|\sin x|-0\le|x|$，当 $x\to 0$ 时， $\Delta y\to 0$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，但在 $x=0$ 处不可导。

由导数定义可知： 可导 $\Rightarrow$ 连续

例．设 $f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b, & x\geq 0 \\ \sin ax, & x<0 \end{cases}$

问a,b为何值时，$f(x)$可导。

解：$\because f(0^-)=0, f(0^+)=f(0)=1+b, \therefore b=-1$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin ax-(1+b)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin ax}{x}=a,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}+b-(1+b)}{x}=2$$

$$f'_-(0)=f'_+(0), \therefore a=2$$

五、小结

1. 导数的实质：增量比的极限；

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a;$

3. 导数的几何意义：切线的斜率；

4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导；

5. 判断可导性

- 不连续,一定不可导.
- 直接用定义;
- 看左右导数是否存在且相等.

第二节　　求导的运算法则

一、求导的四则运算法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

一、函数四则运算的求导法则

如果函数$u(x)$, $v(x)$在点x处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导, 并且

$$(1)\ [u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2)\ [u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0).$$

证(1) 设 $f(x)=u(x)+v(x)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]+[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}$$

$$=u'(x)+v'(x)$$

证(3) 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},(v(x)\neq 0),$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

推论

(1) $(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \cdots \pm u_n'$

(2) $(Cu)' = Cu'$ (C为任意常数)

(3) $$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_n'$$

例 已知函数 $y=\sqrt{x}+\sin x-\ln 2$,求 y'

解 $y'=(\sqrt{x}+\sin x-\ln 2)'=(\sqrt{x})'+(\sin x)'-(\ln 2)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\cos x$$

例 已知函数 $y=(x^4+2x^2-10)\ln x$,求 y'

解 $y'=(x^4+2x^2-10)'\ln x+(x^4+2x^2-10)\frac{1}{x}$

$$=[(x^4)'+(2x^2)'-(10)']\ln x+(x^4+2x^2-10)\frac{1}{x}$$

$$=(4x^3+4x)\ln x+x^3+2x-\frac{10}{x}$$

$$=4x(x^2+1)\ln x+x^3+2x-\frac{10}{x}$$

例　已知函数 $y=\tan x$,求 y'

解　$$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

同理可得　$(\cot x)'=-\csc^2 x.$

即　$(\tan x)'=\sec^2 x.$

例　已知函数 $y=\sec x$，求 y'

解　$y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

即　$(\sec x)'=\sec x\tan x$

同理可得　$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

例 已知函数 $y = x^2 \sin x + \dfrac{\ln x}{x}$，求 y'

解 $y' = (x^2 \sin x + \dfrac{\ln x}{x})'$

$$= (x^2 \sin x)' + (\frac{\ln x}{x})'$$

$$= (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' + \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2}$$

$$= 2x \sin x + x^2 \cos x + \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2}$$

$$= 2x \sin x + x^2 \cos x + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

二、反函数的求导法则

定理2. 设 $y = f(x)$ 为 $x = f^{-1}(y)$ 的反函数，$f^{-1}(y)$ 在 y **的某邻域内单调可导，** 且 $[f^{-1}(y)]' \neq 0$ $\Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}}$$

证：在 x 处给增量 $\Delta x \neq 0$，由反函数的单调性知

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \neq 0, \quad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

且由反函数的连续性知 $\Delta x \to 0$ 时必有 $\Delta y \to 0$，

因此 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \dfrac{1}{[f^{-1}(y)]'}$

即：反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

证明 任取$x \in I_x$，给x以增量Δx $(\Delta x \neq 0, x+\Delta x \in I_x)$

由$y=f(x)$的单调性可知 $\Delta y \neq 0,$

于是有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}},$

$\because f(x)$连续，$\therefore \Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$，又知$\varphi'(y) \neq 0$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y \to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

即 $$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

例 求指数函数$y=a^x$的导数.

解 $y=a^x$与$x=\log_a y$互为反函数. $x=\log_a y$在$(0,+\infty)$上单调可导,且

$$(\log_a y)'=\frac{1}{y\ln a}\neq 0$$

所以它的反函数$y=a^x$在$(-\infty,+\infty)$上也可导,且

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=y\ln a=a^x\ln a$$

即 $(a^x)'=a^x\ln a$

特别地,当 $a=e$ 时, $(e^x)'=e^x$

例 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $\because x=\sin y$ 在 $I_y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导,

且 $(\sin y)'=\cos y>0$, $\therefore$ 在 $I_x\in(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

同理可得 $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

初等函数的导数

1.基本初等函数的导数公式

$$(C)'=0 \qquad (x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$$

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$(\sec x)'=\sec x\tan x \qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (e^x)'=e^x$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2.函数的和、差、积、商的求导法则

设$u=u(x), v=v(x)$可导，则

（1）$(u \pm v)' = u' \pm v'$，（2）$(cu)' = cu'$（C 是常数）

（3）$(uv)' = u'v + uv'$，（4）$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

3.复合函数的导数 $y = f(u), u = \varphi(x)$

$f_x'[\varphi(x)] = f'(u)\varphi'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

三、复合函数的求导法则 -- 链式法则

定理 如果函数$u=g(x)$在点x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=g(x_0)$可导，则复合函数$y=f[g(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot g'(x_0).\quad \text{或}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

即： 因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

【推广】 设 $y=f(u),\ u=\varphi(v),\ v=\psi(x)$,

则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

【关键】 搞清复合函数结构, 由外向内逐层求导.

【例】 求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

【解】 $\because y=\ln u, u=\sin x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

【例】　求函数 $y=(x^2+1)^{10}$ 的导数.

【解】 $$\frac{dy}{dx}=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'$$

$$=10(x^2+1)^9\cdot 2x \quad =20x(x^2+1)^9.$$

【例】　求函数 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ 的导数 $(a>0)$

【解】 $$y'=(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})'+(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a})'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$ 注：在求导过程中时刻注意化简

【例】 求函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$ 的导数.

【解】$\because y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{3}\ln(x-2),$

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$$

【例】 求函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数.

【解】 $y'=e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\dfrac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot(\dfrac{1}{x})'$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

例. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$, 求 y'.

$\boxed{\text{先化简后求导}}$

解: $\because$ $y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$\therefore$ $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

例. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$, 求 y'.

解: $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$

例 $y = f(\sin^3 2x)$，其中 $f(x)$可导.

$$y' = \left[f(\sin^3 2x) \right]'$$

$$= f'(\sin^3 2x) \cdot 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2$$

$$= 6\sin^2 2x \cos 2x \cdot f'(\sin^3 2x)$$

例　设$f(x)=\ln|x|$，求$f'(x)$

解：$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$

$$x>0,\ f'(x)=\frac{1}{x},\ x<0;\ x<0,\ f'(x)=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ f'(x)=(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

$$\boxed{(\ln|u(x)|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}}$$

例 已知函数$y=x^{\sin x}$,求 y'

解 $y=x^{\sin x}$为幂指函数, 将其化为$y=e^{\sin x\ln x}$,则

$$y'=(e^{\sin x\ln x})'=e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'$$

$$=x^{\sin x}[(\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)']$$

$$=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$$

练：求下列函数导数

1. $y=\sqrt{a^2-x^2}$

2. $y=\sqrt{x^2\pm a^2}$

3. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

4. $y=\ln^2\cos(e^{2x})$

5. $y=2^{3^{\sin^2\frac{1}{x}}}$

练： [1] $f(x)=x(x-1)\cdots(x-2016)$，求 $f'(0)$

[2] $f(3x)=x^3$，求$y'\big|_{x=\sqrt{99}}$

[3] $y=\max\{x,x^2\}$，求y'

第三节　高阶导数

一、高阶导数的定义

二、求法举例

三、小结　思考题

2020/9/22

第三节 高阶导数

一、高阶导数的定义

二、求法举例

三、小结 思考题

2020/9/22

引入：

$y=x^3$的导数$y'=3x^2$， 显然y'也有导数

$(y')'=6x$ 称为y的二阶导数。记为y'' 或$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

可理解为$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})$

同理有$y''',y^{(4)},\cdots y^{(n)}$或$\dfrac{d^3y}{dx^3},\dfrac{d^4y}{dx^4},\cdots\dfrac{d^ny}{dx^n}$

2020/9/22

一、高阶导数

定义：如果函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$在点x处可导,即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称$(f'(x))'$为函数 $f(x)$在点x处的二阶导数.

记作： $f''(x), y'',$ 或 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}, \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}.$

同理：

二阶导数的导数称为三阶导数， $f'''(x),\ y''',\ \dfrac{d^3y}{dx^3}.$

三阶导数的导数称为四阶导数， $f^{(4)}(x),\ y^{(4)},\ \dfrac{d^4y}{dx^4}.$

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n} \text{或} \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

相应地, $f(x)$称为零阶导数; $f'(x)$称为一阶导数.

二、常用的n阶导数公式

例1: $y = a^x$

解: $y' = a^x \ln a$

$$y'' = a^x \ln a \cdot \ln a = a^x (\ln a)^2$$

$$\cdots (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

特别地 $(e^x)^{(n)} = e^x$

例2 设 $y=\ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$. 问 $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

解 $y'=\frac{1}{1+x}$ $\quad$ $y''=-\frac{1}{(1+x)^2}$

$y'''=\frac{2!}{(1+x)^3}$ $\quad$ $y^{(4)}=-\frac{3!}{(1+x)^4}$

……

$$\boxed{y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n\geq 1,\ 0!=1)}$$

例3 设 $y=\sin x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

……

$$\boxed{y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})}$$

同理可得 $\boxed{(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})}$

常用的n阶导数公式

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$(x^n)^{(n)}$ （n为正整数）

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$$

$$(\frac{1}{x+1})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

三. 高阶导数的运算法则:

设函数u和v具有n阶导数, 则

用数学归纳法证明

(1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

(2) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

(3) $(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼兹公式

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$$ 莱布尼兹公式

例4 设 $y=x^2e^{2x}$，求$y^{(20)}$.

解 设 $u=x^2, v=e^{2x}$,则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^k u^{(k)}v^{(20-k)}$$

$$=(e^{2x})^{(20)}\cdot x^2+20(e^{2x})^{(19)}\cdot(x^2)'+\frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)}\cdot(x^2)''$$

$$=2^{20}e^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}e^{2x}\cdot 2x+\frac{20\cdot 19}{2!}2^{18}e^{2x}\cdot 2$$

$$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$$

例 设$y=e^x\cos x$,求$y^{(4)}$

$$y^{(4)}=-4e^x\cos x$$

例 设$y=xshx$,求$y^{(100)}$

$$y^{(100)}=100chx+xshx$$

内容小结

高阶导数的求法

(1) 逐阶求导法

(2) 利用归纳法

(3) 间接法 —— 利用已知的高阶导数公式

如下列公式

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\left(\frac{1}{a+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(a+x)^{n+1}}$$

(4) 利用莱布尼茨公式

思考与练习

1. 如何求下列函数的 *n* 阶导数?

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

解: $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$

$$y^{(n)}=2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

(2) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$

解: $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\,,\quad n\geq 3$$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

提示：令 $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-1}$

$$A=(x-2)\cdot\frac{1}{(x-2)(x-1)}\bigg|_{x=2}=1$$

$$B=(x-1)\cdot\frac{1}{(x-2)(x-1)}\bigg|_{x=1}=-1$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

第四节 隐函数、参数方程确定函数的导数

一、隐函数的导数

二、对数求导法

三、参数方程确定函数的导数

四、小结 思考题

一、隐函数求导

1.隐函数：对于 二元方程 $F(x,y)=0$ ，给定x，

方 程可唯一确定y与之相对应，称y为x的隐函数。

记：$y=y(x)$

例如 $x+y^3-1=0 \Longrightarrow y=\sqrt[3]{1-x}$ （显化）

$y^5+3\sin xy+5x^4=1$ （不能显化）

问题:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

2.求导法 :直接从方程 $F(x,y)=0$ 两边关于x求导，称为隐函数的求导法则.切记y为x的函数

例1 已知函数 y 是由方程 $e^y = xy + e$ 确定的. 求 y' 和 $y'\big|_{x=0}$

解: 方程两边分别关于 x 求导得，

$$e^y y' = y + xy' \quad \text{解得} \quad y' = \frac{y}{e^y - x}$$

当 $x=0$ 时，从原方程解得 $y=1$.

所以 $$y'\big|_{x=0} = \left.\frac{y}{e^y - x}\right|_{\substack{x=0\\ y=1}} = e^{-1}$$

例2. 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程.

解：椭圆方程两边对 *x* 求导

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$$

$$\therefore\ y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{9}{16}\frac{x}{y}\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{3}{2}\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

故切线方程为 $y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$

即：$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$

例3. 设 $x+y-\frac{1}{2}\sin y=0$, **求** y''

解：方程两边同时对x求导,得

$$1+y'-\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0 \quad (1)$$

对（1）式两边对 x 再求导

$$0+y''-\frac{1}{2}[(-\sin y)y'^2+\cos y\bullet y'']=0$$

$$\therefore \quad y''=\frac{4\sin y}{(\cos y-2)^3}$$

解2 $\quad y'=\frac{2}{\cos y-2}$ **或对 y' 再求导**

注：求隐函数在一点的二阶导数值，边做边带，无需化简

例4 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求y''在点(0,1)处的值.

解: 方程两边对x求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0 \qquad (1)$$

代入 $x=0,\ y=1$得 $\quad y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \dfrac{1}{4};$

将方程(1)两边再对x求导得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 0$$

代入 $x=0,\ y=1,\ y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \dfrac{1}{4}$ 得 $\quad y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\dfrac{1}{16}.$

例5：已知$y=\tan(x+y)$　　求y''

解：$y'=\sec^2(x+y)\cdot(1+y')$

$$\therefore y'=\frac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=-(1+\frac{1}{y^2})$$

$$\therefore y''=\frac{1}{y^4}\cdot 2y\cdot y'=\frac{2y'}{y^3}=-\frac{2}{y^5}(1+y^2)$$

注：做二阶导函数，必须对一阶导数化简

二、对数求导法

例6：$y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$　求y'.

解： 等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\underbrace{\boxed{\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}}}_{y}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

例7 已知函数 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)}}$,求 y'

解：两边取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{3}[\ln(x-1)+\ln(x+2)-\ln(x-3)-\ln(x+4)]$$

两边对 X 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+4})$$

所以：$y'=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)}}(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4})$

例8. 求 $y=x^{\sin x}\ (x>0)$ 的导数 .

解: 两边取对数 , 化为隐式 $\ln y=\sin x\cdot\ln x$

两边对 x 求导 $\dfrac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x}$

$\therefore \qquad y'=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\dfrac{\sin x}{x})$

或: $\quad y=e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\sin x\ln x}$

$$y'==e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$$

对数求导法的适用范围

1.由积、商、幂、方根组成的函数

2.幂指函数$u(x)^{v(x)}$

借助第三变量描写函数 $y(x)$

三、由参数方程所确定的函数的导数

由 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所确定的 y 和 x 的函数关系，称为参数方程。

例如 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{x}{2}$ 消去参数 t

$$\therefore y = t^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \qquad \therefore y' = \frac{1}{2}x$$

问题： 消参数困难或无法消参数如何求导?

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

t 为中间变量的复合函数

$y = \psi[t],\ t = \varphi^{-1}(x)$

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$; $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

即：分子分母各自求导

例9：求摆线$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{2}$处的切线方程

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a-a\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1.$$ 当$t=\dfrac{\pi}{2}$时，对应点：$\begin{cases} x = a(\frac{\pi}{2}-1) \\ y = a \end{cases}$

所求切线方程为 $y-a=x-a(\dfrac{\pi}{2}-1)$

即 $y=x+a(2-\dfrac{\pi}{2})$

例10： 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解： $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

注意：$\dfrac{d^2y}{dx^2} \cancel{=} (-\tan t)'$ 对谁求导?

四.极坐标方程

曲线*r*=*r*(*θ*),怎样求曲线在点(*r*,*θ*)处切线方程?

解法:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \xrightarrow{\text{化为参数方程}} \begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

例 11 求对数螺旋线$r=e^{\theta}$ 在$(r,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$处的切线方程。

解：由题意得，参数方程为 $\begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta \\ y=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，对应点 $x=0, y=e^{\frac{\pi}{2}}$

斜率：$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$

切线：$y-e^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0)$ 即 $x+y-e^{\frac{\pi}{2}}=0$

内容小结

1. 隐函数求导法则 —— 直接对方程两边求导

2. 对数求导法： $\left\{ \begin{array}{l} \text{由积、商、幂、方根组成的函数} \\ \text{幂指函数} u(x)^{v(x)} \end{array} \right.$

3. 参数方程求导法: 分子分母各自求导

求高阶导数时,从低到高每次都用参数方程求导公式

转化

4.极坐标方程求导

第五节　函数的微分

一、微分的定义

二、微分的几何意义

三、基本初等函数的微分公式

与微分运算法则

四、小结　思考题

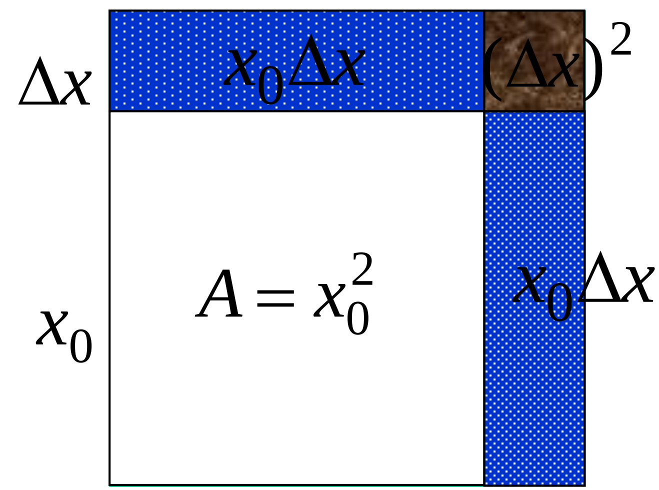
一、微分的概念

引例：一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片面积改变了多少？

面积的增量为：

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0{}^2$$

$$=\underbrace{2x_0\Delta x}_{\text{关于}\Delta x\text{ 的线性主部}}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\Delta x\to 0\text{时为高阶无穷小}}$$



故 $\Delta A\approx 2x_0\Delta x$

$2x_0\Delta x$ 称为函数在 x_0 的微分

定义: 若函数 $y=f(x)$ **在点** x_0 **的增量可表示为**

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

(*A* 为不依赖于△*x* 的常数)

则称函数 $y=f(x)$ **在点** x_0 **可微,**

而 $A\Delta x$ **称为** $f(x)$ 在点 x_0**的微分,记作** $\mathrm{d}y$ **或** $\mathrm{d}f$,

即 $\mathrm{d}y = A\Delta x$

(问：上式中 *A的值是多少？*)

定理：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A=f'(x_0)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

证：“必要性”

已知 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

故 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=A$

定理：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **可微的充要条件是**

$y=f(x)$ **在点** x_0 **处可导，且** $A=f'(x_0)$，**即**

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

"充分性" 已知 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0) \qquad \therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha \quad (\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0)$$

故 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x=\underbrace{f'(x_0)\Delta x}+o(\Delta x)$

$f'(x_0)\neq 0$ 时
此项为Δy的
线性主部

即 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$

注1. 通常把自变量x的增量Δx称为自变量的微分,

记作dx，即$dx = \Delta x$.　　且 $dy = f'(x_0)dx$

2.函数在任一点x微分 $dy = f'(x)dx \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = f'(x).$

3.导数符号 $\dfrac{dy}{dx}$ 视为函数微分与自变量微分的商,

故 导数也叫"微商".

例1　设 $y = x^3$，　**求** dy，　$dy\big|_{x=2}$，　$dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=-0.1}}$，　$\Delta y\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=-0.1}}$.

解：　$dy = (x^3)'dx \ = 3x^2 dx$

$$\therefore dy\big|_{x=2} = 3x^2 dx\big|_{x=2} = 12dx.$$

$$\therefore dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=-0.1}} = 3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=-0.2}} = 12\times(-0.1) = -1.2$$

$$\therefore \Delta y\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=-0.1}} = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

$$= (2-0.1)^3 - 2^3 = 6.859 - 8 = -1.141$$

二、微分的几何意义：切线纵坐标的增量

函数在x_0点的微分$dy = f'(x_0)\Delta x = \tan\alpha \, \Delta x$

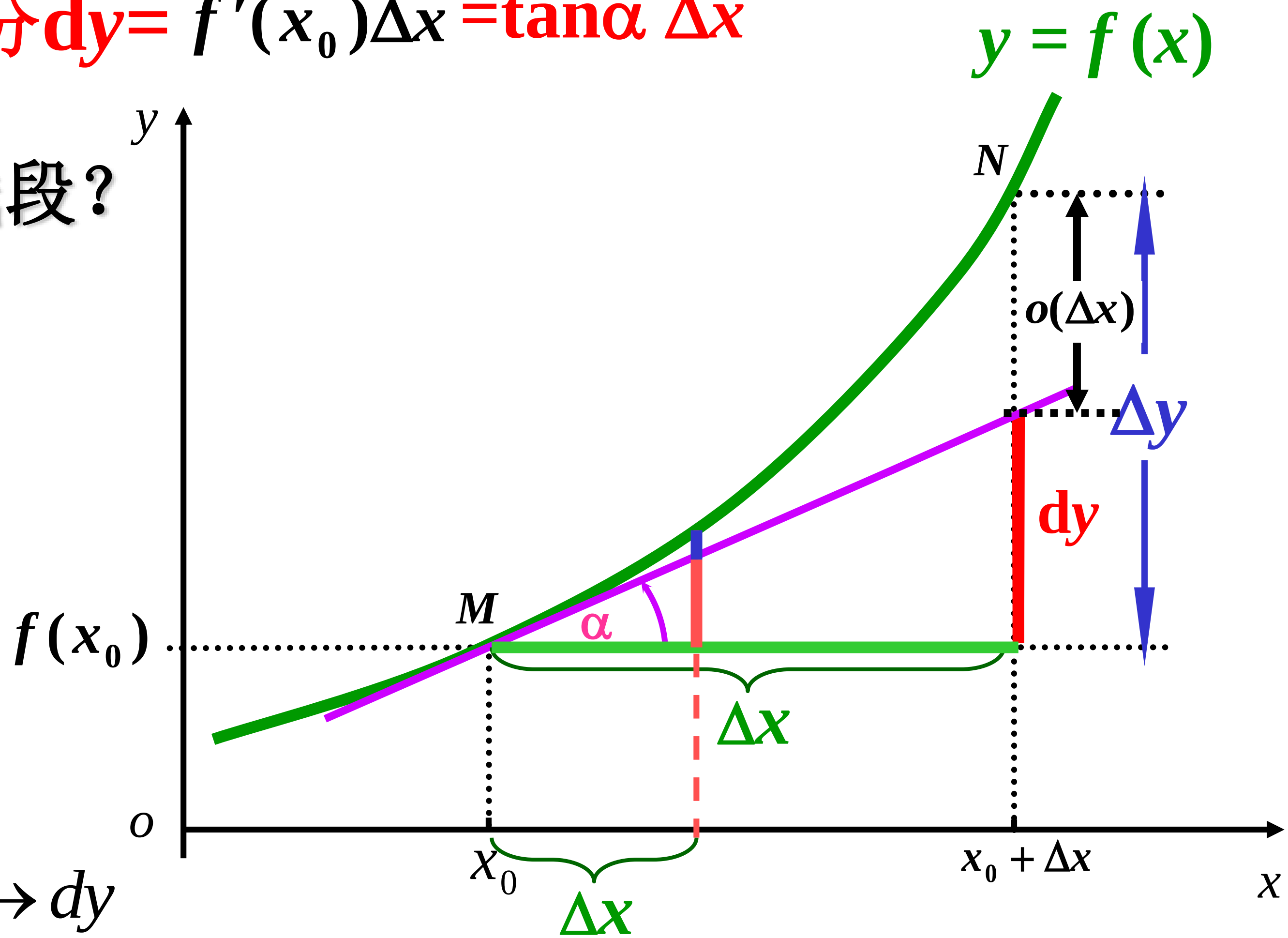
dy是图中哪条线段？

$\Delta y = dy + o(\Delta x)$

当Δx很小时

$\Delta y \approx dy$

当$\Delta x \to 0$时，$\Delta y \to dy$



三、微分的计算法

$$dy = f'(x)dx$$

1.基本初等函数的微分公式　（书本80页）

$$d(C)=0 \qquad d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(\sin x)=\cos x dx \qquad d(\cos x)=-\sin x dx$$

$$d(\tan x)=\sec^2 x dx \qquad d(\cot x)=-\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x)=\sec x\tan x dx \qquad d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$$

$$d(a^x)=a^x\ln a dx \qquad d(e^x)=e^x dx$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx \qquad d(\ln x)=\frac{dx}{x}$$

$$d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad d(\arccos x)=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$d(\arctan x)=\frac{dx}{1+x^2} \qquad d(arc\cot x)=-\frac{dx}{1+x^2}$$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u+v) = (u+v)'dx = (u'+v')dx = du + dv$$

$$d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

例1 若 $y = x^2 \ln x$, 求微分 dy.

解法1（求导法）

$$dy = (x^2 \ln x)' dx = (2x \ln x + x) dx$$

解法2（微分法） $d(uv) = vdu + udv$

$$dy = x^2 d \ln x + \ln x dx^2$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{x} dx + \ln x \cdot 2x dx = (2x \ln x + x) dx$$

例2：在括号内填入适当的函数

(1) $d(\quad) = \cos\omega t\, dt$; **(2)** $d(\sin x^2) = (\quad) d(\sqrt{x})$.

(3) $d(\quad) = 3^x dx$ (4) $d(\quad) = x^3 dx$

3. 复合函数的微分法与微分形式不变性

设函数 $y = f(x)$ 有导数 $f'(x)$,

(1) 若 x 是自变量时, $dy = f'(x)dx;$

(2) 若 x 是中间变量 即是另一变量的可微函数

$x = \varphi(t)$, 则 $y = f(\varphi(t))$　　$dy = y'dt = f'(x)\varphi'(t)dt$

$\because \varphi'(t)dt = dx,$　　$\therefore dy = f'(x)dx.$

结论: 无论 x 是自变量还是中间变量, 函数

$y = f(x)$ 的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

微分形式的不变性

例3：设 $e^y = xy$, 求y'.

解：对方程两边求微分

$$e^y dy = y dx + x dy$$

$$(e^y - x)dy = y dx$$

$$故 y' = \frac{y}{e^y - x}$$

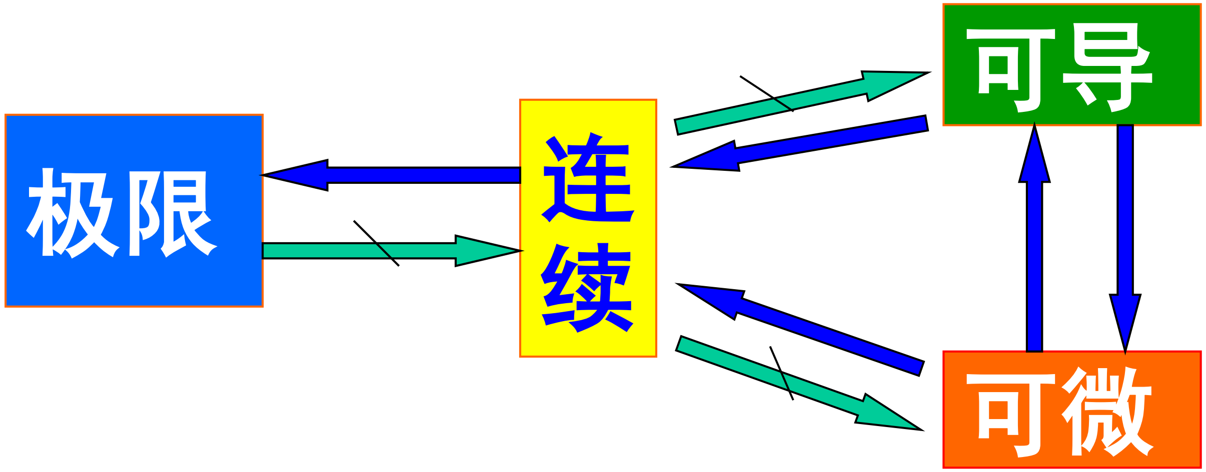
五、小结

★ 微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$$

求导数与微分的方法,叫做<u>微分法.</u>

★ 导数与微分的联系: 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.



可导：$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

可微：$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

连续：$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

极限：$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$