# 期中考试答案及评分标准

2021－2022 学年第 1 学期　　课号 2110530、2110890

课程名称 **数学建模**（开卷）　适用班级（或年级、专业）3 院 20 级智科

考试时间 90 分钟　　班级________　　学号________　　姓名________

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 成绩 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 满　分 | 20 | 10 | 30 | 20 | 20 | |
| 得　分 | | | | | | |
| 评卷人 | | | | | | |

（所有答案请写在题目后，若空白处不够可自己加页）

## 一、简答题（共 20 分）

1.（8 分）简述数据拟合的线性最小二乘法。

答：曲线拟合问题是指：已知平面上 n 个点（$x_i,y_i$），寻求函数 f(x)，使 f(x)在某种准则下与所有数据点最为接近，即曲线拟合最好。**（2 分）**

线性最小二乘法是解决曲线拟合最常用的方法，其基本思路是，令

$f(x)=a_1r_1(x)+a_2r_2(x)+\ldots+a_mr_m(x)$　**（3 分）**

其中 $r_k(x)$是事先选定的一组函数，$a_k$ 是待定系数。寻求 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 使这 n 个点（$x_i,y_i$）与曲线 y=f(x) 的距离$\delta_i$ 的平方和最小 即使$J(a_1,\ldots,a_m)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2$最小，此准则称为最小二乘准则。这种拟合方法称为最小二乘拟合。**（3 分）**

2.（5 分）写出差分方程 $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$ 的通解。

解：

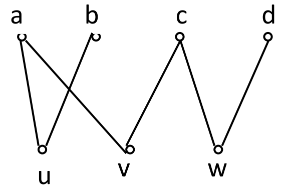
该差分方程的特征方程为：

$x^2-x-2=0$　**（2 分）**

特征根为：$x_1=2$, $x_2=-1$,为互异根，所以通解为：**（1 分）**

$a_n=C_1 2^n+C_2(-1)^n$　**（2 分）**

3.（7 分）写出下图的一个最大匹配，一个最小覆盖。




答：最大匹配有{(a,u),(c,v),(d,w)}　（答案不唯一）。

最小覆盖有{u, v, w}。

## 二、MATLAB 编程（写出求解问题的 MATLAB 代码，共 10 分）

1.（5 分）绘制函数 $Z=(3X-2Y)^2$ 的网格图，其中 $X\in[-3,3]$, $Y\in[1,5]$。

答：

```
x=-3:0.1:3;
y=1:0.1:5;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=(3*X+2*Y).^2;
mesh(X,Y,Z)
```

**（每行 1 分）**

2.（5 分）求以下微分方程组的通解。

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x-3y+6z\\ \frac{dy}{dt}=5x-7y+6z\\ \frac{dz}{dt}=3x-4y+5z\end{cases}$$

解：输入代码

```
[x,y,z]=dsolve('Dx=4*x-3*y+6*z','Dy=5*x-7*y+6*z','Dz=3*x-4*y+5*z','t')
```

**（5 分，若基本思路正确，可以酌情给分）**

## 三、模型表示 （共 30 分）

1.（16 分）甲、乙、丙三个城市每年需要煤炭分别为：320 万吨、250 万吨、350 万吨，由 A、B 两处煤矿负责供应。已知煤炭年供应量分别为：A—400 万吨，B—450 万吨。由煤矿至各城市的单位运价（万元/万吨）如下表。由于需求大于供应，经研究平衡决定，甲城市供应量可减少 0~30 万吨，乙城市需要量应全部满足，丙城市供应量不少于 270 万吨。试求将供应量分配完又使总运费为最低的调运方案。

表：供应点到各城市的单位运价

| | 甲 | 乙 | 丙 |
|---|---|---|---|
| A | 15 | 18 | 22 |
| B | 21 | 25 | 16 |

解：设 XA1, XA2, XA3 表示由煤矿 A 运送到甲、乙、丙城市的煤炭数量，XB1, XB2, XB3 表示由煤矿 B 运送到甲、乙、丙城市的煤炭数量。 **（2 分）**

建立规划模型：

Min f = 15*XA1+18*XA2+22*XA3+21*XB1+25*XB2+16*XB3 **（2分）**

XA1+XA2+XA3=400;

XB1+XB2+XB3=450;

XA1+XB1≥290;

XA1+XB1≤320;

XA2+XB2=250;

XA3+XB3≥270;

XA3+XB3≤350;

XA1≥0, XA2≥0, XA3≥0, XB1≥0, XB2≥0, XB3≥0 **（每个约束1.5分，共12分）**

2.（14 分）有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记为工作 Y1,Y2,Y3,Y4。现有 X1,X2,X3,X4 四人，已知第 i 个人将此中文说明书翻译成第 j 种文字所需时间为 Wij，如下表所示。问如何分配工作，使每人各完成一项任务，且所需总时间最少。**要求用图论方法描述该问题并给出答案。**

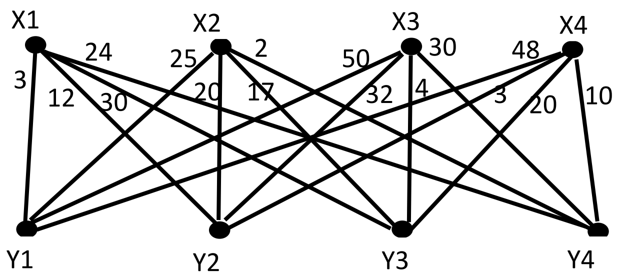
表：每人完成工作所需时间

| Wij | Y1 | Y2 | Y3 | Y4 |
|---|---|---|---|---|
| X1 | 3 | 12 | 30 | 24 |
| X2 | 25 | 20 | 17 | 2 |
| X3 | 50 | 32 | 4 | 30 |
| X4 | 48 | 3 | 20 | 10 |

解：构建图模型G如下，其中V={ X1,X2,X3,X4, Y1,Y2,Y3,Y4}，人和工作都用结点表示，边(Xi,Yj)上的权值表示表示第i个人做j项工作所需时间Wij 。 **（3分）**

原问题转化为求图中的最小权和的匹配。 **（3分）**

从图中可找到最佳匹配{(X1,Y1), (X2,Y4), (X3,Y3), (X4,Y2)}，按此匹配分配工作，则所需时间最少，共12。 **（4分）**




（4 分）

**四、（20 分）**现有如下关于函数 y=f(x)的 7 个观测点数据。

（1）用抛物线插值公式计算 f(6)的近似值。

（2）若已知 $y=\ln(a*x^2+b*x+c)$，请用 lsqnonlin 指令进行数据拟合（要求给出相应的 matlab 代码）以确定系数 a、b 和 c 的最佳取值。

| x | 1 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1.8 | 2.4 | 2.9 | 3.3 | 3.6 | 3.9 | 4.2 |

**解:**（1）选择与 x=6 最接近的三点 $x_0=4, x_1=5, x_2=7$ 为插值结点，根据抛物线插值公式计算：

（2 分）

$$f(6)\approx L_2(6)=y_0\times\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\times\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\times\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$ （3 分）

$$=2.9\times\frac{(6-5)(6-7)}{(4-5)(4-7)}+3.3\times\frac{(6-4)(6-7)}{(5-4)(5-7)}+3.6\times\frac{(6-4)(6-5)}{(7-4)(7-5)}$$ （3 分）

$$=3.5$$ （2 分）

**（2）**

用 lsqnonlin 指令

[1] 编写 M 文件 curve1.m **（1 分）**

```
function f=curve1(x)
```

xdata=[1, 2, 4, 5, 7, 9, 10];

ydata=[1.8, 2.4, 2.9, 3.3, 3.6, 3.9, 4.2];

f= ydata-log(x(1)*xdata.^2+x(2)*xdata+x(3)); （**每行 1.5 分，共 6 分**）

[2] 主程序 dianya1.m 如下：

x0=[1, 2, 3]; （**1 分**）

**(注意，这里的 x0 是用户猜测的各参数初始值，取什么值无所谓)**

xishu=lsqnonlin('curve1',x0) （**2 分**）

**五、（20 分）**某厂生产一种产品，现有库存 5 吨，该产品在未来 3 个月的合同订购量分别为 40 吨、60 吨、35 吨。三个月的生产费用及最大生产能力如下表所示。若当月末交货后有剩余，可用于下月交货，但需支付存储费，每吨每个月的库存费为 2 万元。且该厂希望在第三月末交货后还能有产品储备 6 吨。问工厂应如何安排这三个月的生产计划，才能既满足合同需求又使总费用最低？**要求先给出其数学模型描述，然后写出求解该问题的 matlab 代码。**

| 月份 | 最大生产能力（吨） | 生产费用（万元，其中 x 为当月产量） |
|---|---|---|
| 1 | 60 | $0.2x^2+10x+6$ |
| 2 | 50 | $12x+3$ |
| 3 | 40 | （10000/x）+10 |

**解：**确定决策变量：设x1, x2, x3分别表示第1，2，3月份的产量 （2分）

目标是总费用f最低，总费用包括生成费用和库存费用：

$f=0.2*x1^2+10*x1+6+12*x2+3+(10000/x3)+10+2*5+2*(5+x1-40)+2*(5+x1+x2-100)$

（3分）

约束条件：

所有决策变量非负： xi≥0； （1分）

每月生成能力限制： x1≤60, x2≤50, x3≤40, （3分）

每月需完成合同订货量：5+x1≥40, 5+x1+x2≥100, 5+x1+x2+x3=135+6, （3分）

得非线性规划模型：

min $f=0.2*x1^2+14*x1+14*x2+(10000/x3)-231$

s. t. x1≤60；

x2≤50；

x3≤40；

x1≥35；

x1+x2≥95；

x1+x2+x3=136；

x1≥0, x2≥0, x3≥0

matlab求解代码：

(1)先建立 M 文件 fun.m 定义目标函数：（这里 x(1)至 x(3)对应上面的 x1 至 x3）

```
function f=fun(x)
```

```
f=0.2*x(1)^2+14*x(1)+14*x(2)+(10000/x(3))-231;
```

（3 分）

(2)主程序:

```
x0=[50,50,36];
A=[-1,0,0;-1,-1,0];
b=[-35;-95];
aeq=[1 1 1];
beq=[136];
vlb=zeros(3,1);
vub=[ 60;50;40];
```

（3 分）

```
[x,fval]=fmincon('fun', x0, A, b, aeq, beq, vlb, vub)
```

（2 分）

（答案不唯一）