

1. 对于下列各组函数 $f(n)$ 和 $g(n)$, 确定 $f(n)=O(g(n))$ 或 $f(n)=\Omega(g(n))$ 或 $f(n)=\theta(g(n))$, 并阐述理由。

(1) $f(n)=\log_2 n^2, g(n) = \log_2(n+5)$

(2) $f(n) = \log_2 n^2, g(n) = \sqrt{n}$

(3) $f(n) = n, g(n) = \log_2 n$

(4) $f(n) = n \log_2 n + n, g(n) = \log_2 n$

(5) $f(n) = 2^n, g(n) = 100n^2$

(6) $f(n) = 2^n, g(n) = 3^n$

2. 用数学归纳法证明, 当 $n \geq 1$ 时, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$ 。

3. 解递归方程 $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

4. 算法分析在用分治法求两个 n 位大整数 u 和 v 的乘积时, 将 u 和 v 都分割为长度为 $n/3$ 位的 3 段。证明可以用法 5 次 $n/3$ 位整数的乘法求得 $u \cdot v$ 的值。按此思想设计一个求两个大整数乘积的分治算法, 并分析算法的计算复杂性。

5. 问题描述: n 个元素 $\{1, 2, \dots, n\}$ 有 $n!$ 个不同的排列。将这 $n!$ 个排列按字典顺序排列, 并编号为 $0, 1, \dots, n!-1$ 。每个排列顺序的编号为其字典序值。例如, 当 $n=3$ 时, 6 个不同排列的字典序值:

字典序值	0	1	2	3	4	5
------	---	---	---	---	---	---

排列	123	132	213	231	312	321
----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

算法设计: 给定 n 以及 n 个元素 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个排列, 计算出这个排列的字典序值, 以及按字典序值排列的下一个排列。