第三章

微分中值定理与导数的应用

中值定理
- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 泰勒公式 (第三节)
- 柯西中值定理

$\downarrow$

应用
- 研究函数性质及曲线性态
- 利用导数解决实际问题

§1 微分中值定理

一、费马引理 (*Fermat*)

二、罗尔 (*Rolle*) 中值定理

三、拉格朗日 (*Lagrange*) 中值定理

四、柯西 (*Cauchy*) 中值定理

费马(1601 – 1665)

法国数学家, 他是一位律师, 数学只是他的业余爱好. 他兴趣广泛, 博览群书并善于思考, 在数学上有许多重大贡献. 他特别爱好数论, 他提出的费马大定理:

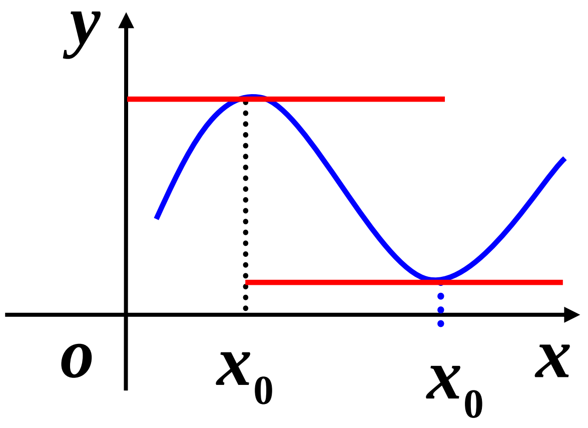
$$"当 n > 2 时, 方程\ x^n + y^n = z^n\ 无整数解"$$

历经358年, 直到1993年才由美国普林斯顿大学的安德鲁.怀尔斯教授经过十年的潜心研究才得到解决 . 费马引理是后人从他研究解决最值的方法中提炼出来的.

一、费马引理(Fermat)

定义1（极值概念）

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义,



如果对 $\forall x \in U(x_0)$，有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \ge f(x_0))$$

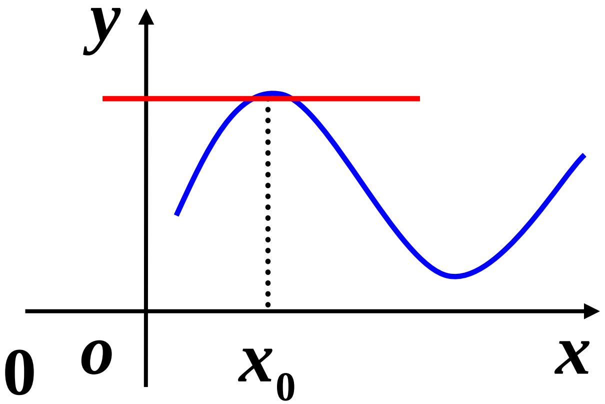
则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点, $f(x_0)$ 为极大值.

(x_0 为 $f(x)$ 的极小值点, $f(x_0)$ 为极小值)

定理1 [Fermat引理]（极值的必要条件）

设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 取得极值，

并且在 x_0 处可导，则 $f'(x_0) = 0$.



证：仅证极大值的情形，即 $f(x) \le f(x_0)$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0$$

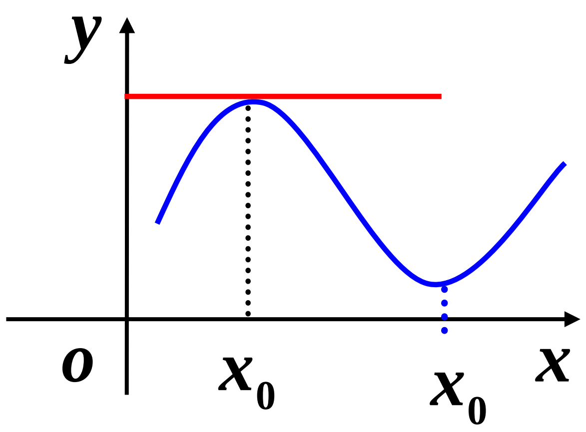
$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$$

所以 $f'(x_0) = 0$　　即：极值+可导 $\Longrightarrow f'(x_0) = 0$

【几何意义】

1. 若曲线在点 x_0处取得极值,

2.曲线在点 x_0处具有切线,



则该切线必是水平的.

【定义】 通常称导数等于零的点为函数的驻点（或稳定点、临界点）

二、罗尔（Rolle）定理

如果 $f(x)$ 满足：[1] $f(x)\in C[a,b]$;

[2] $f(x)\in D(a,b)$;

[3] $f(a)=f(b)$.

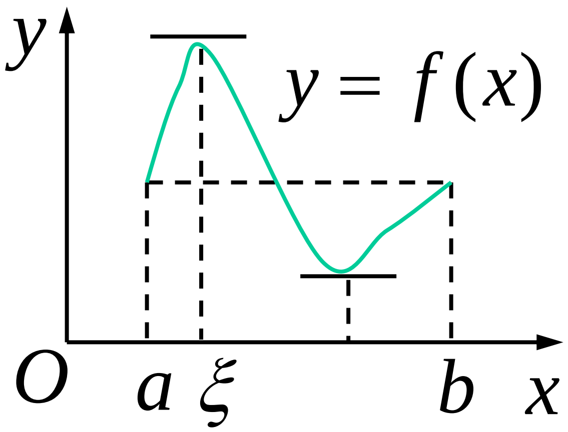
则 至少存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

【几何解释】

[1] $f(x)\in C[a,b]$;

[2] $f(x)\in D(a,b)$;

[3] $f(a)=f(b)$.



则 至少存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

即：在曲线弧AB上至少有一点ξ,在该点处的切线是水平的.

【证】 $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M = m$. 则 $f(x) = M$.

由此得 $f'(x) = 0$. $\forall \xi \in (a,b)$, 都有 $f'(\xi) = 0$.

(2) 若 $M \neq m$. $\because f(a) = f(b)$,

$\therefore$ 最值不可能同时在端点取得. 设 $M \neq f(a)$,

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi) = M$.

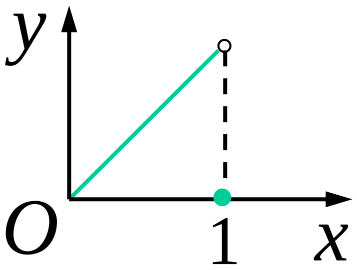
由 $Fermat$ 定理立得 $f'(\xi) = 0$.

注意：本定理仅是充分条件

定理条件不全具备，结论不一定 成立.

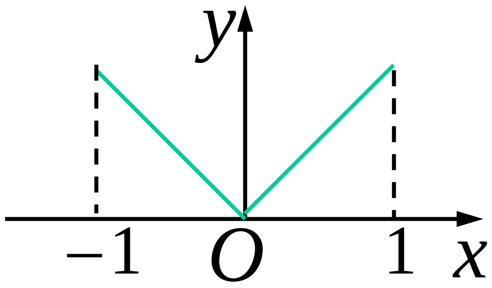
例如,

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$$



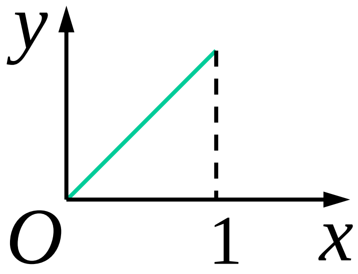
在[0,1]不连续

$$f(x)=|x|$$
$$x\in[-1,1]$$



在(0,1)不可导

$$f(x)=x$$
$$x\in[0,1]$$



$f(0)\neq f(1)$

无水平切线

比较 **Rolle定理** 如果 $f(x)$ 满足： **零点定理**

[1] $f(x)\in C[a,b]$;

[2] $f(x)\in D(a,b)$;

[3] $f(a)=f(b)$.

[1] $f(x)\in C[a,b]$;

[2] $f(a)f(b)<0$.

则 至少存在$\xi\in(a,b)$

使得 $f'(\xi)=0$

使得 $f(\xi)=0$.

［例如］ $f(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

在$[-1,3]$上连续， 在$(-1,3)$上可导， 且 $f(-1)=f(3)\ (=0)$,

$\because f'(x)=2(x-1)$, 取$\xi=1$, $(1\in(-1,3))$ $f'(\xi)=0$.

罗尔定理可以用来找导函数的零点。或方程 $f'(x)=0$的根

例1. 证明方程 $x^5-5x+1=0$ **有且仅有一个小于1 的正实根 .**

证: 1) 存在性 .

设 $f(x)=x^5-5x+1,$ **则** $f(x)$ **在 [0 , 1] 连续 , 且** $f(0)=1, f(1)=-3.$ **由零点定理知存在** $x_0\in(0,1),$ **使** $f(x_0)=0,$ **即方程有小于 1 的正根** x_0 .

2) 唯一性 .

假设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$,使 $f(x_1)=0, \because\ f(x)$ 在以 x_0, x_1 **为端点的区间满足罗尔定理条件 ,** $\therefore$ 在 x_0, x_1 之间**至少存在一点** ξ, 使 $f'(\xi)=0.$

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0,\ x\in(0,1),$ **矛盾, 故假设不真!**

【例2】 设函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$， 试判断方程$f'(x)=0$

有几个实根, 分别在何区间?

【解】因为 $f(1)=f(2)=f(3)$， 且$f(x)$在$[1, 2]$上连续,

在$(1,2)$内可导， 由罗尔定理，$\exists \xi_1 \in (1, 2)$, 使 $f'(\xi_1)=0$;

同理，$\exists \xi_2 \in (2, 3)$，使 $f'(\xi_2) = 0$;

又因$f'(x) = 0$是二次方程，至多两个实根,

故$f'(x) = 0$有两个实根，分别位于$(1,2)$ 和$(2,3)$内.

例3: $f(x)\in C_{[0,1]}, f(x)\in D_{(0,1)}, f(1)=0$

证明：$f(x)+xf'(x)=0$在（0,1）内至少有一根。

例4：$f(x)\in C_{[a,b]}, f(x)\in D_{(a,b)}, f(a)=f(b)=0$

证明：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得$f(\xi)+f'(\xi)=0$。

证：作$F(x)=e^{x}f(x)\in C_{[a,b]}, F(x)\in D_{(a,b)}$

又$F(a)=F(b)=0\ \therefore\exists\xi\in(a,b)$ 使得$F'(\xi)=0$

即：$e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

又$e^{\xi}\neq 0$, 故$f(\xi)+f'(\xi)=0$

例 5 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=g(b)=0$.证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$

证 令 $F(x)=f(x)g(x)$， $x\in[a,b]$，则根据连续函数和导数的性质知，$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$F(a)=F(b)=0$，因此由罗尔中值定理，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即 $[f(x)g(x)]'\big|_{x=\xi}=0$，从而有

$$f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$

拉格朗日 (1736 – 1813)

法国数学家. 他在方程论, 解析函数论, 及数论方面都作出了重要的贡献, 近百余年来, 数学中的许多成就都可直接或间接地追溯到他的工作, 他是对分析数学产生全面影响的数学家之一.

三. Lagrange中值定理

由于罗尔中值定理对函数有很高的要求，特别是要求函数在端点的两个函数值相等，这对于多数函数来说是无法满足，这样就大大限制了罗尔中值定理的应用范围.

如果将这一限制条件取消，我们会得到什么结论?

从图3-1-5上看，我们看到一个不变的规律，就是在(a,b)内的曲线段上至少有一点处的切线与端点的连线平行.

这就是将要介绍的拉格朗日中值定理.

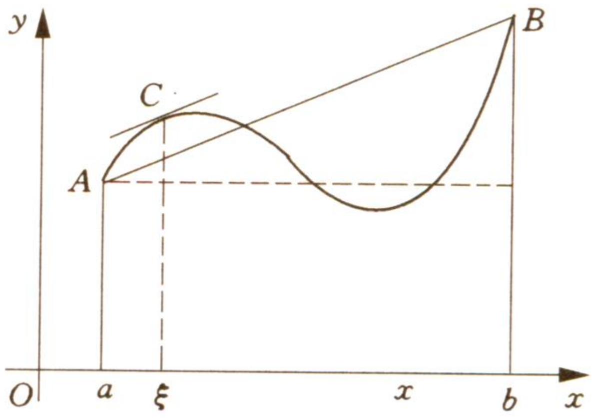


图3-1-5

定理（拉格朗日中值定理） 设函数 $f(x)$ 满足

(1)在 $[a,b]$ 上连续； (2)在 (a,b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

分析 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow f'(x)\big|_{x=\xi}=\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'\Big|_{x=\xi}$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'\Big|_{x=\xi}=0.$$

令 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$, 容易验证 $\varphi(x)$ 满足罗尔中值定理的条件．利用罗尔中值定理即证得拉格朗日中值定理，证明从略．

注 1： $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ （$\xi\in(a,b)$）称为**拉格朗日公式**.

注 2： 当$a>b$时，$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$也成立，此时$\xi\in(b,a)$.

注3： 拉格朗日中值定理是微分学中重要定理之一.

为应用方便，我们常将拉格朗日公式改写成以下形式：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$ ξ介于a,b之间.

注4： 任取两个点 $x, x+\Delta x(\Delta x \neq 0)$，如果 $f(x)$ 在以 x 和 $x+\Delta x$ 为端点的区间 $[x, x+\Delta x]$ 或 $[x+\Delta x, x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则拉格朗日公式又可以写成

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x,$$ 其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间.

如果记 $\dfrac{\xi - x}{\Delta x}=\theta$，则有 $0<\theta<1, \xi = x+\theta\Delta x$，从而

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad (0<\theta<1),$$

即

$$\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad (0<\theta<1).$$

上式也称为有限增量公式,

推论1 如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内为常数.

证 设 x_1,x_2 为 (a,b) 内任意不同的两点，不妨设 $x_1<x_2$，显然，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，因此

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ \xi\in(x_1,x_2).$$

由条件知由条件知 $f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2)=f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意两点处的函数值相等，故 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒为常数.

推论2 设函数$F(x),G(x)$在(a,b)内可导，且$F'(x)=G'(x)$，则在(a,b)内恒有

$$F(x)=G(x)+C\text{（其中}C\text{为常数）}.$$

证 令$f(x)=F(x)-G(x)$，则

$$f'(x)=F'(x)-G'(x)=0.$$

由推论1 得$f(x)=C$，即$F(x)=G(x)+C$.

注: 推论1和推论2中的有限区间(a,b)可推广到无穷区间上去.

推论的应用——证明函数为常数函数

【例6】 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \ (-1 \le x \le 1)$.

【证明】 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x, \quad x \in [-1,1]$

$$\because f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0. \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\therefore f(x) \equiv C, \quad x \in [-1,1]$$

又 $\because f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, 即 $C = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.}$$

同理: $\boxed{\arctan x + arc\cot x = \frac{\pi}{2}.}$

例7 若$f(x)$满足$f'(x)=f(x), f(0)=1$, 证明：$f(x)=e^{x}$.

证：

令$\mathrm{F}(x)=e^{-x}f(x)$,

$$\mathrm{F}'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=0$$

$\therefore \mathrm{F}(x)\equiv c$,

又$f(0)=1$, 得$\mathrm{F}(0)=1$

$\therefore f(x)=e^{x}$

L 定理应用——证明不等式

例8. 证明不等式 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x>0)$.

证: **设** $f(t)=\ln(1+t)$,

则 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日**中值定理条件,**

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0), \quad 0<\xi<x$$

即: $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}, \qquad 0<\xi<x$

因为: $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{x}{1+\xi} < x$

故: $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad (x>0)$

柯西(1789 – 1857)

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面 . 一生发表论文800余篇, 著书 7 本 ,《柯西全集》共有 27 卷.其中最重要的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》,《无穷小分析概论》,《微积分在几何上的应用》 等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远 . 他是经典分析的奠基人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析数学的发展.

四、柯西(Cauchy)中值定理

$f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[\,a,b\,]$ 上连续

(2) 在开区间 $(\,a,b\,)$ 内可导

(3)在开区间 $(\,a,b\,)$ 内 $F'(x)\neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

分析:

问题转化为证 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)-f'(\xi)}=0$

$\varphi'(\xi)$

构造辅助函数 $\Longrightarrow$ $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

证: 作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导, **且**

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,**使** $\varphi'(\xi)=0$,**即**

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

思考: 柯西定理的下述证法对吗 ?

$$\left.\begin{aligned}\because\ f(b)-f(a)&=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)\\ F(b)-F(a)&=F'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)\end{aligned}\right\}\ \text{两个 }\xi\text{ 不一定相同}$$

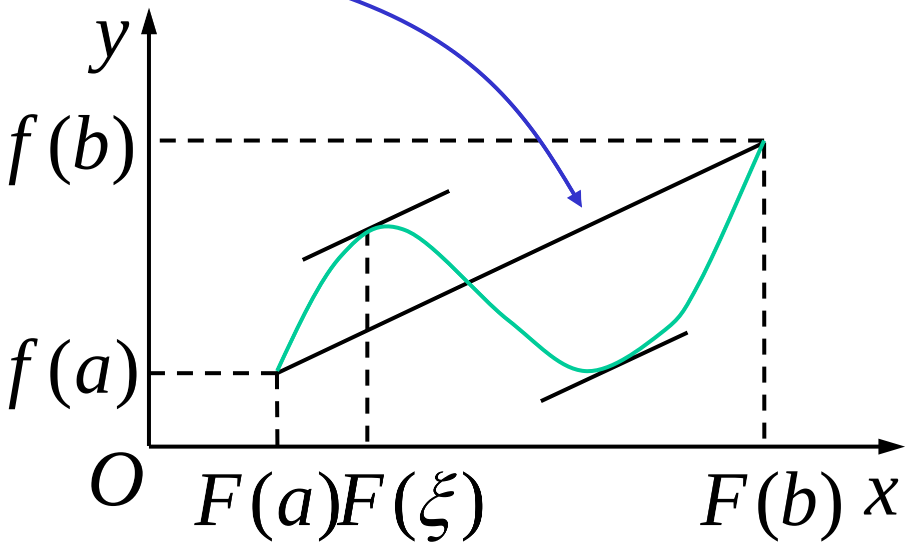
上面两式相比即得结论. 错!

柯西定理的几何意义:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}} = \boxed{\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

弦的斜率　　切线斜率

$$\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$



注意: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{f'(t)}{F'(t)}$

【例9】设函数$f(x)$在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，证明：至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

【分析】结论可变形为 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{f'(\xi)}{2\xi} = \dfrac{f'(x)}{(x^2)'}\Big|_{x=\xi}$.

【证】 设 $F(x) = x^2$,

则 $f(x), F(x)$ 在[0,1]上满足柯西中值定理的条件,

$\therefore$ 在(0,1)内至少存在一点ξ，有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$ 即 $f'(\xi) = 2\xi[f(1) - f(0)]$.

【例10】设函数$f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\in D(a,b)$, 试证:

存在 ξ, $\eta\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

【证】 对 $f(x),g(x)=x^2$ 在区间$[a,b]$上用$Cauchy$中值定理得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

又对$f(x)$在区间$[a,b]$上用$Lagrange$中值定理得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$ 即得 $$f'(\xi)=(a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

例 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]\,(0<a<b)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证 在柯西中值定理中取 $g(x)=\ln x$，故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}，\quad 即 \frac{f(b)-f(a)}{\ln\frac{b}{a}}=\xi f'(\xi)，$$

$a<\xi<b$，所以

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

例　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

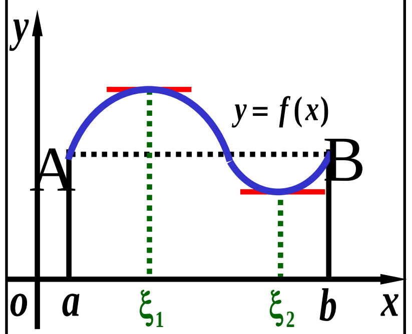
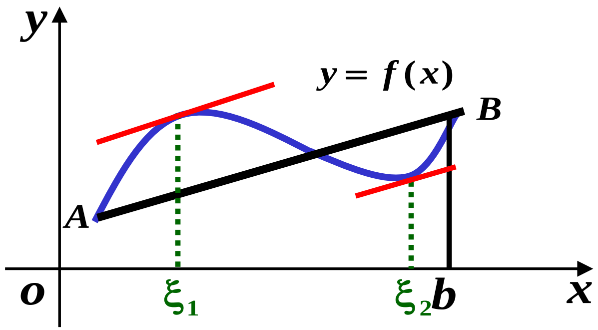
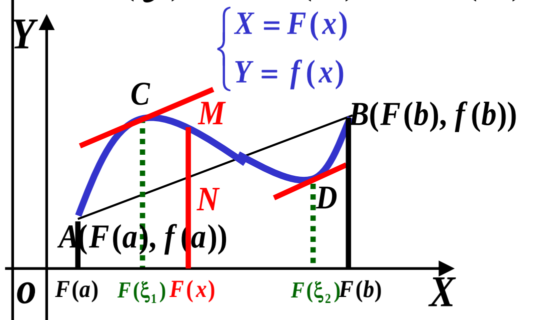
$$e^b f(b)-e^a f(a)=[f(\xi)+f'(\xi)](e^b-e^a).$$

证　在柯西中值定理中取 $F(x)=e^x f(x), G(x)=e^x$，故有

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

即 $$\frac{e^b f(b)+e^a f(a)}{e^b-e^a}=\frac{e^\xi f(\xi)+e^\xi f'(\xi)}{e^\xi}$$

$$\therefore e^b f(b)-e^a f(a)=[f(\xi)+f'(\xi)](e^b-e^a)$$

th	罗尔Rolle	拉格朗日 Lagrange	柯西Cauchy
条件	1.同右 2.同右 3 .f(a)=f(b)	1.f(x)在[a,b]上连续 2.f(x)在(a,b)内可导	1.f(x)、F(x)在[a,b]上连续 2.f(x)、F(x)在(a,b)内可导， 且 $F'(x)\neq 0$
结论	同右 $f'(\xi)=0$	至少存在一点$\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	至少存在一点$\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$
几何意义			
关系	推广	推广 特例 .f(a)=f(b)	特例 F(x)=x

三个中值定理的相互关系

注意定理成立的条件;

【中值定理应用】

1.证明方程根的存在性、唯一性;

2. 证明等式与不等式;

3.证明函数为常数函数。

§2 罗必达(*L'Hospital*)法则

一、“$\frac{0}{0}$”型及“$\frac{\infty}{\infty}$”型

二、$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$

三、小结　思考题

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ （$\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型）

转化

洛必达法则

导数之商的极限 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

洛必达(1661 – 1704)

法国数学家, 他著有《无穷小分析》(1696), 并在该书中提出了求未定式极限的方法, 后人将其命名为“ 洛必达法则 ” 他在15岁时就解决了帕斯卡提出的摆线难题 , 以后又解出了伯努利提出的“ 最速降线 ” 问题 ,在他去世后的1720 年出版了他的关于圆锥曲线的书 .

一、$\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 1.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\overset{\circ}{U}(a)$内可导,且 $F'(x) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ **存在 (或为∞)**

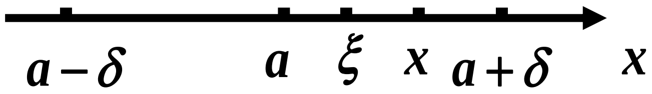
$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

(洛必达法则)

定理条件: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$

2) $f(x)$与$F(x)$在$\mathring{U}(a)$内可导,且$F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ **存在 (或为∞)**



证：不妨假设 $f(a)=F(a)=0$, **在指出的邻域内任取** $x\neq a$, **则** $f(x), F(x)$**在以 x, a 为端点的区间上满足柯西定理条件, 故**

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$ **(ξ在 x , a 之间)**

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\ \overset{3)}{=\!=}\ \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

洛必达法则 $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}}$

注1.　定理 1 中 $x \to a$ **可换为下列任一过程**

$$x \to a^+,\ x \to a^-,\ x \to \infty,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty$$

2. 可连续使用 洛必达法则

例1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{64}-1}{x-1}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{64x^{63}}{1}=64$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sin x-\sin \alpha}{x-\alpha}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to \alpha}\frac{\cos x}{1}=\cos\alpha.$$

例3 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解:

用L'H法则的两个关键步骤

$$\text{原式}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$$

①验证是否为$(\dfrac{0}{0}),(\dfrac{\infty}{\infty})$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{6}{6-2}$$

②验证$\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$是否存在或为∞

$$\cancel{=}\lim_{x\to1}\frac{6}{6}=1$$

注意：洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但与其它求极限方法（化简、变形、无穷小代换等）结合使用，效果更好.

例4：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\boxed{\tan x}}$. $(\frac{0}{0})$ （无穷小代换）

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$ $(\tan^2 x+1=\sec^2 x)$

（无穷小代换）

$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\boxed{\tan^2 x}}{x^2}=\dfrac{1}{3}.$

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2.

1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = \lim\limits_{x\to a}|F(x)| = \infty$

2) $f(x)$与$F(x)$ 在$\mathring{U}(a)$内可导, 且 $F'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ **存在 (或为∞)**

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$ **(洛必达法则)**

注：极限过程可换为任一过程。

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$. (设 a、$b>0$)

解

$$\text{原式}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\sin ax}\cdot\cos ax\cdot a}{\dfrac{1}{\sin bx}\cdot\cos bx\cdot b}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\sin bx}{b\sin ax}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos ax}{\cos bx}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\sin bx}{b\sin ax}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\cdot bx}{b\cdot ax}=1$$

例6: 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$.　　**一般地：化切、割为弦**

解: $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\frac{1}{\cancel{3}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot\cancel{3}}{2\cos x\cdot(-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$$

$$\cancel{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6x}{2x}=3.\quad=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cdot(-1)}{2\cdot(-1)}=3.$$

或:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos 3x}{\sin 3x\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

三、未定式：$0\cdot\infty$， $\infty-\infty$，

解决方法：

$$\boxed{\infty-\infty} \xrightarrow[\text{转化}]{\text{通分}} \begin{cases}\dfrac{0}{0}\\[6pt] \dfrac{\infty}{\infty}\end{cases} \xleftarrow[\text{转化}]{\text{取倒数}} \boxed{0\cdot\infty}$$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x \ (n>0)$. $\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-n}} \overset{\text{洛}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^n}{n}\right) = 0$$

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)$ $"\infty\cdot 0"$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$ $"\frac{0}{0}"$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\boxed{\frac{x^2}{1+x^2}}=1$$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}$

练习1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}$ (n 为正整数)？

练习2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^x$.

例9：求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{1-\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{2x}=0.$$

（无穷小代换）

练习：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

四、未定式: $\boxed{0^0, 1^\infty, \infty^0}$ 型 $\boxed{0\cdot\infty} \xleftarrow[\boxed{\text{转化}}]{\text{取对数}}$ $\boxed{0^0}$ $\boxed{1^\infty}$ $\boxed{\infty^0}$

幂指函数$u(x)^{v(x)} = e^{g(x)\ln v(x)}$

例10. 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$. $\boxed{0^0\text{型}}$

解: $\lim\limits_{x\to0^+} x^x = \lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^0 = 1$

练习: $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$

例11：求 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.　(1^{∞})

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} \overset{(\frac{0}{0})}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$.

例12：求 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.　(∞^{0})

解：$(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$

$$\because \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x) \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1, \quad \therefore \text{原式} = e^{-1}.$$

几个注意：

注意1：洛必达法则的使用条件： 1. $"\frac{0}{0}", "\frac{\infty}{\infty}"$ ！

2. $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\exists, \infty$

例： 求 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x}$. $(\frac{\infty}{\infty})$

解： 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\sin x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$.

极限不存在

解法错误！

事实上： 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}\cos x) = 1$.

注: 当 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在且不为∞时,不能用洛必塔法则.

例：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4}$.

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x + x\cos x}{x}\right)\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\right)$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}\right) = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

注意2：洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但与其它求极限方法结合使用，效果更好.

例：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.　　∞^0 型

注意3：用罗比塔法则需化为函数极限！

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$　　$\frac{\infty}{\infty}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$

练习　　1. $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$

分析：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$$\boxed{\sin x \sim x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\cos x=1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$\boxed{1-\cos x\sim\tfrac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \frac{3}{2}$$

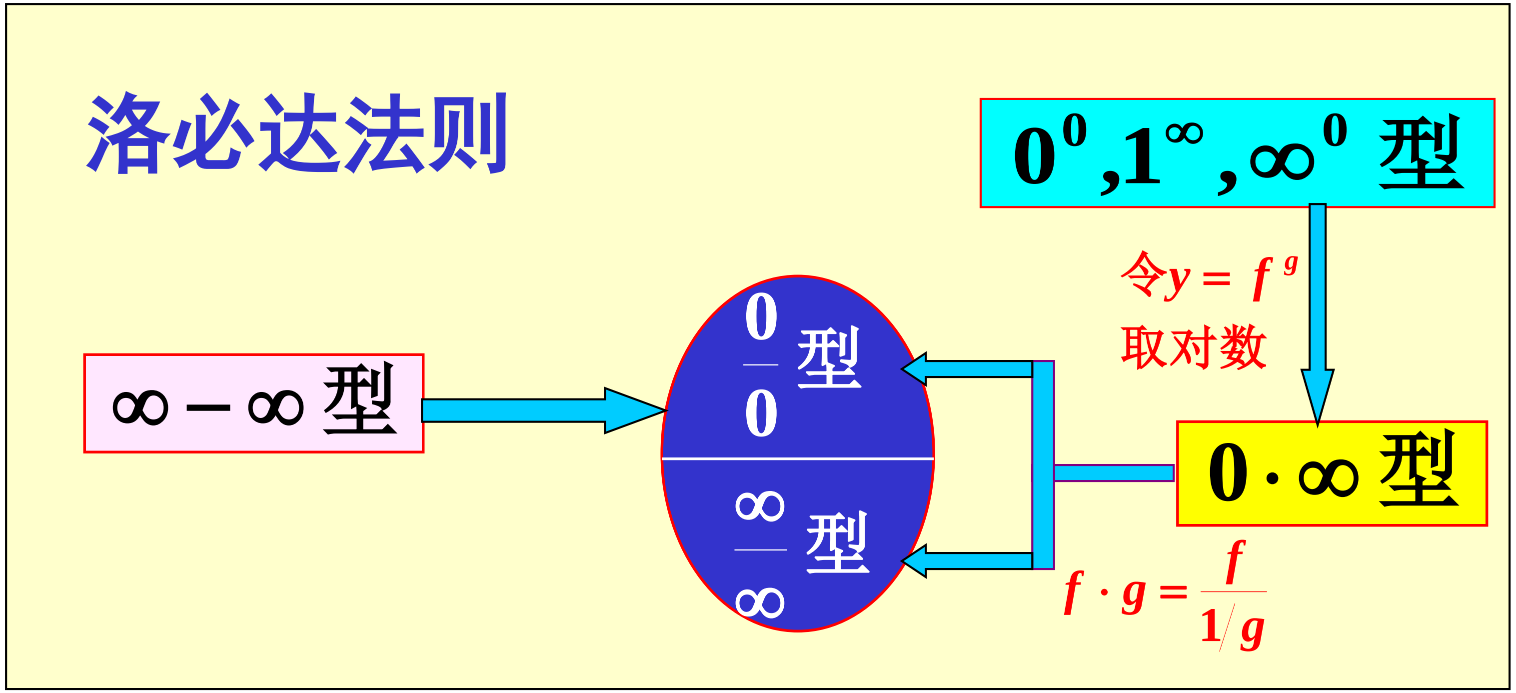
$x \to 0$时，
$\ln(1+x) \sim x$
$1+\cos x \to 2$

原式 $= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}(3+0)$

3 $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + x - 2} = 2 \quad 求 a, b$$

4.. $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2^x + 3^x + 5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$$

三、小结


洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$0 \cdot \infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$\infty - \infty$ 型
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$

第三节　泰勒（*Taylor*）公式

一.泰勒（***Taylor***）中值定理

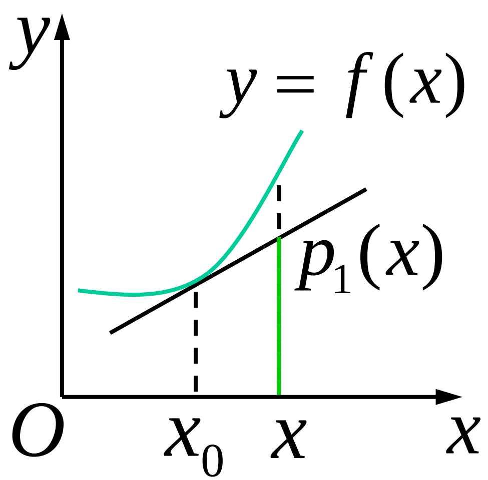
二.泰勒公式

三.简单应用

一、泰勒公式的建立

在微分应用中已知近似公式：

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{P_1(x):\ x\text{ 的一次多项式}}$$



以直代曲

特点： $P_1(x_0) = f(x_0)$

$$P_1'(x_0) = f'(x_0)$$

缺点： $\begin{cases} \text{精确度不高？} \\ \text{误差无法估计？} \end{cases}$

为了解决问题，找一个n次多项式 $P_n(x)$ **:来逼近** $f(x)$

问题的分析：

从几何上看n次多项式 $P_n(x)$ **应满足：**

(1) $P_n(x_0)=f(x_0)$ 即两曲线均过同一点$M_0(x_0,f(x_0))$

（2）$P_n'(x_0)=f'(x_0)$ 即两曲线在M_0点有相同的切线。

（3）$P_n''(x_0)=f''(x_0)$ 即两曲线在M_0点有相同的弯曲方向。

一般地，应有： $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0),\quad k=0,1,2,\cdots$

故 $p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

泰勒(Taylor)中值定理：

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ **阶的导数，则当** $x \in (a,b)$**时，有**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

$f(x)$**在** x_0 **处的** n **阶泰勒公式.**

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

（拉格朗日型余项）.

或 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$**（佩亚诺(Peano) 余项）.**

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

说明：$f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒公式 .

或： 用 x_0 处的相关值去计算 x 处的函数值 $f(x)$

例： 已知 $\ln 2=0.693147$，估计 $\ln 2.01$ （这里 $x=2.01, x_0=2$，）

$$\ln 2.01=\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 0.01=0.698147,\text{而查表得}:\ln 2.01=0.698135$$

$$\ln 2.01=\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 0.01-\frac{1}{2\times 4}\cdot(0.01)^2=0.6981345$$

（泰勒展开式就是要用已知的东西去估计或近似出未知的东西）

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}(\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

特例: $f(x)$**在**x_0**处的** n **阶泰勒公式.**

(1) 当 $n=0$ 时, 泰勒公式变为

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$ **即为拉格朗日中值定理**

(2)当$x_0=0$时,

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$(0<\theta<1)$

或：余项$R_n(x)=o(x^n)$

称为 $f(x)$的n阶麦克劳林(*Maclaurin*)公式

二、几个初等函数的麦克劳林公式

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x$

$\because \quad f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x, \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad (k = 1, 2, \cdots)$

$$\therefore \quad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

或：余项$R_n(x) = o(x^n)$ $\qquad (0 < \theta < 1)$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

看图

(2) $f(x)=\sin x$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}$$

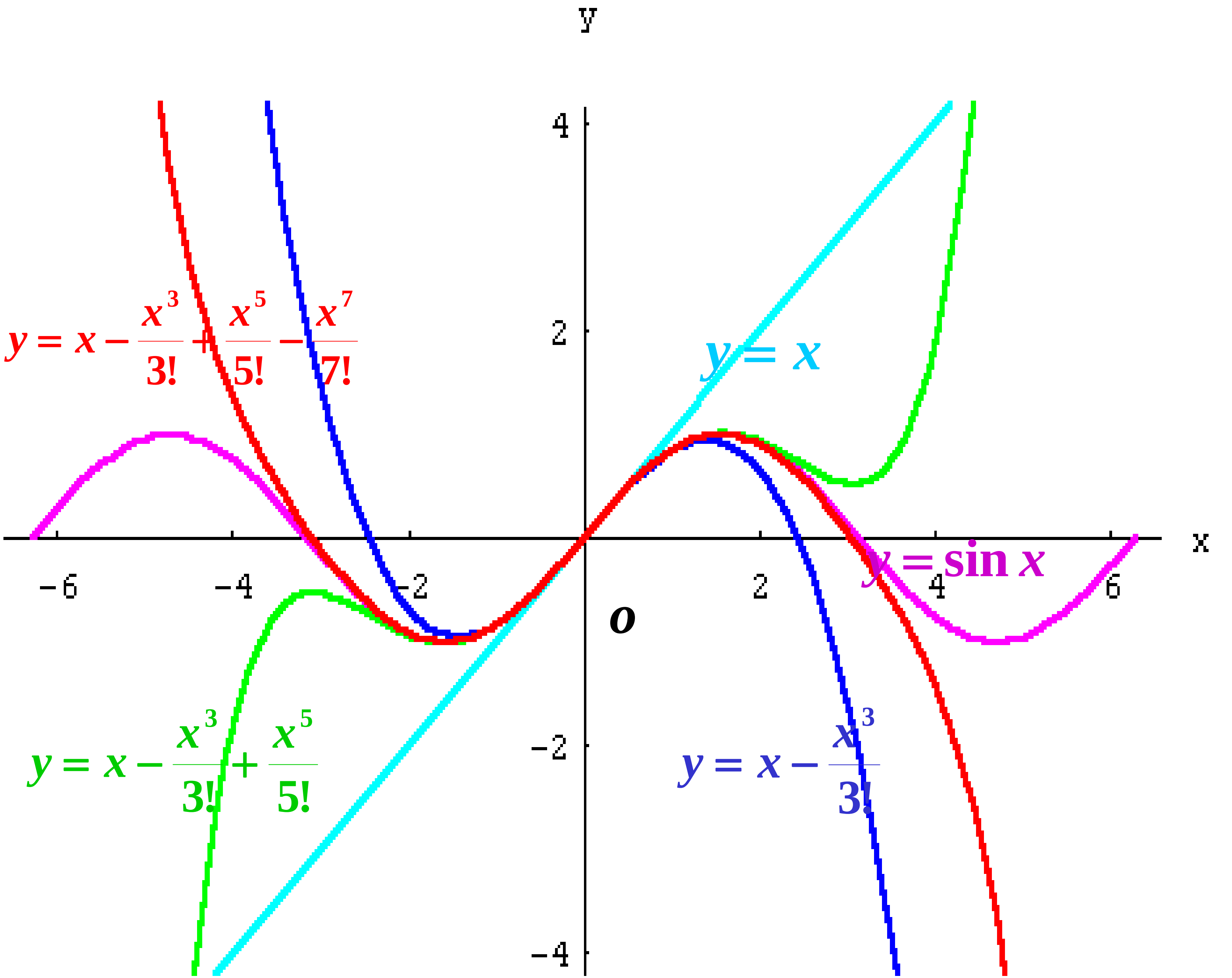
$$\therefore \quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

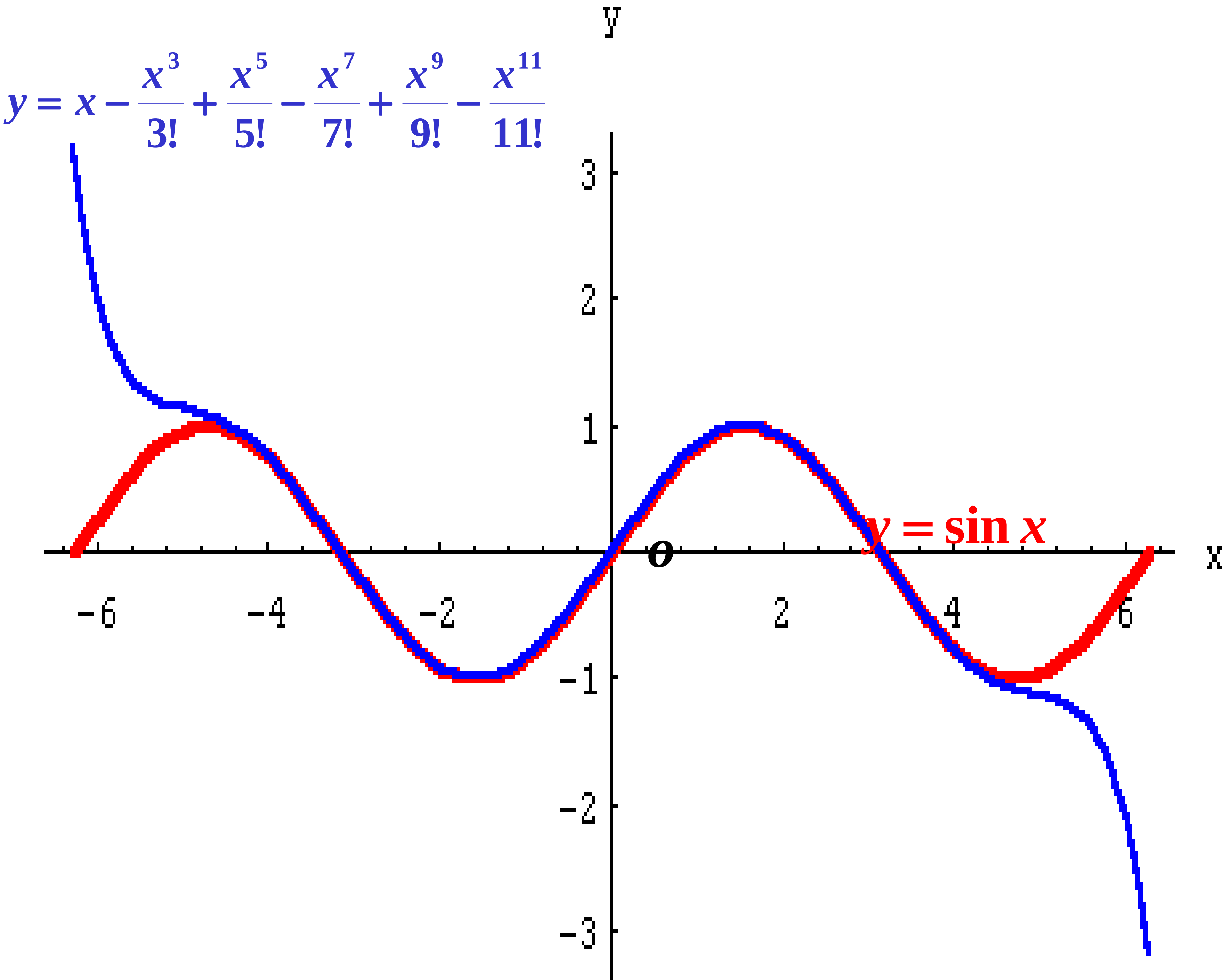
其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (0<\theta<1)$

麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$


y
x
4
2
-2
-4
-6
-4
-2
2
4
6
o
$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$
$y = x$
$y = \sin x$
$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
$y = x - \frac{x^3}{3!}$


$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$
$y = \sin x$
y
x
o
3
2
1
-1
-2
-3
-6
-4
-2
2
4
6

(3) $f(x)=\cos x$

类似可得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!} x^{2m+2} \quad (0<\theta<1)$$

麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha}, \quad (x>-1)$

$\because \quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 余项$R_n(x)=o(x^n)$

麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

(5) $f(x)=\ln(1+x) \quad (x>-1)$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k=1,2,\cdots)$

因此可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中 余项$R_n(x)=o(x^n)$ $\qquad (0<\theta<1)$

麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)$$

常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

三、简单的应用

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad (\xi\text{在 } x\text{、}x_0\text{之间})$$

例1　求$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=-1$处的n阶泰勒公式

解：$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}, f(-1)=-1,\qquad f'(x)=-x^{-2}, f'(-1)=-1,$

$f''(x)=(-1)(-2)x^{-3}, f''(-1)=-2,\qquad \cdots\cdots$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n)x^{-(n+1)}$$

$$=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}\qquad f^{(n)}(-1)=(-1)^n n!(-1)^{-(n+1)}=-n!$$

$$\frac{1}{x}=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\xi^{-(n+2)}(x+1)^{n+1}$$

$(\xi$在-1和x之间$)$

例2：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{(2x)^3}\neq\dfrac{1}{8}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0.$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

等价无穷小代换
不能用于加减！

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x-[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)]}{(2x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{(2x)^3}=\frac{1}{48}$$

$$\text{或:原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{(2x)^3}\overset{L`H}{=}\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{48}$$

也可以用洛必达法则做，但很繁

例 3　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解：$\because\quad e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$\therefore\quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\dfrac{1}{2!}+2\cdot\dfrac{1}{4!})x^4+o(x^4)$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{7}{12}$.

五、小结

- 在 x_0 点的 n 阶可导函数在 x_0 点的n阶近似多项式存在且唯一 ，就是**泰勒多项式**；
- **皮亚诺**型余项（定性的描述）的泰勒公式常用于讨论函数的**局部**性质，如求极限；
- **拉格朗日**型余项（定量的描述）的泰勒公式常用于讨论函数的**整体**性质，如近似计算、误差估计以及建立函数与其高阶导数之间的联系。

第四节

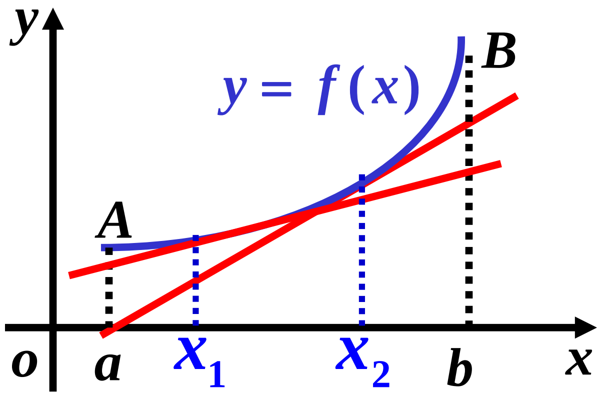
函数的单调性　极值与最值

一、函数的单调性

二、函数的极值

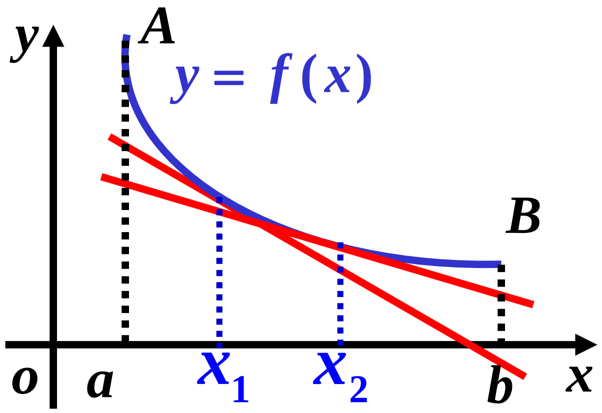
一、函数单调性的判别法

1.函数单调性的判定



$f'(x) \geq 0$

（切线斜率为正）



$f'(x) \leq 0$

（切线斜率 为负）

定理 1. 设函数 $f(x)$ 在开区间 **I** 内可导, 若 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, 则 $f(x)$ 在 **I** 内单调递增**(递减)**.

证: 不妨设 $f'(x)>0,\ x\in I$, 任取 $x_1, x_2\in I\ (x_1<x_2)$ 由拉格朗日中值定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0$$

$$\xi\in(x_1,x_2)\subset I$$

故 $f(x_1)<f(x_2)$. 这说明 $f(x)$ 在 **I** 内单调递增.

证毕

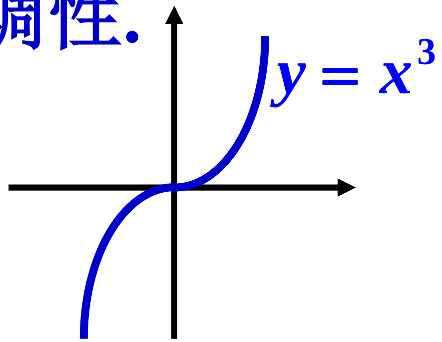
例1 讨论 $y=\arctan x-x$ 的单调性, 并求单调区间.

解 $\because$ 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty), y'=\dfrac{1}{1+x^2}-1=-\dfrac{x^2}{1+x^2}\le 0,$

仅在 $x=0$ 一点处, $y'=0$

$\therefore$ 在（$-\infty,+\infty$）内，$y\downarrow$.

注意:区间内有限个点导数为零,而其它点处的导数保号，不影响函数在该区间内的单调性.



又如, $y=x^3$, $y'=3x^2$, $y'\big|_{x=0}=0,$

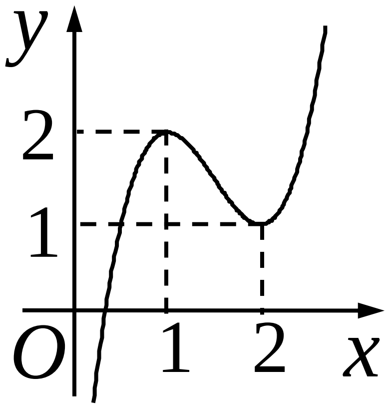
但在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

例2. 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ **的单调区间.**

解: $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1, x=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$



故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1]$, $[2,+\infty)$.

$f(x)$ 的单调减区间为 $[1,2]$,

用导数等于零的点（驻点）分割单调区间

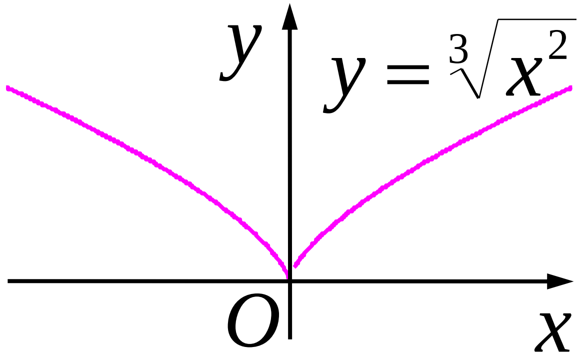
说明:

1) 单调区间的分界点除驻点外,也可是导数不存在的点.

例如, $y=\sqrt[3]{x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y'\big|_{x=0}=\infty$$



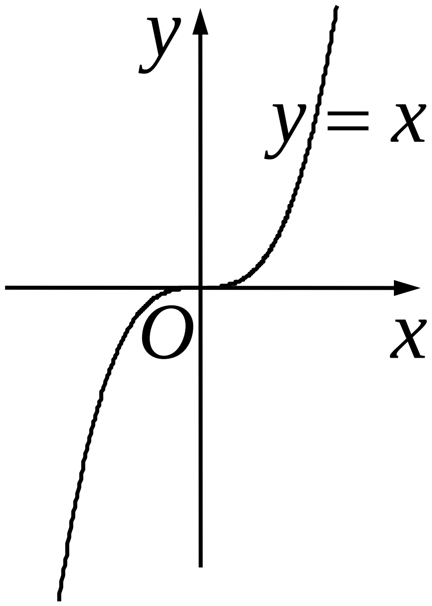
2) 如果函数在某驻点两边导数同号,

则不改变函数的单调性 .

例如, $y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$

$$y'=3x^2$$

$$y'\big|_{x=0}=0$$



2、 利用函数的单调性证明不等式

例4 试证：当$x>1$时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

证 设 $f(x)=2\sqrt{x}-3+\dfrac{1}{x} \overset{?}{>} 0$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x^{\frac{3}{2}}-1)>0 \quad (x>1)$$

$\therefore\ f(x)$在$[1,\infty)$上递增.

则对$\forall x>1$，有 $f(x)>f(1)$.

即 $f(x)=2\sqrt{x}-3+\dfrac{1}{x}>0=f(1)$

例5. 证明 $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ 时, 成立不等式 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$.

证: 令 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, 且

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\underline{(x - \tan x) < 0}$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 单调递减, 注: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\sin x < x$;

$\tan x > x$;

$\arctan x < x$;

$\ln(1 + x) < x$

因此 $f(x) \ge f(\frac{\pi}{2}) = 0$

从而 $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

例6 证明$0 < x < \frac{\pi}{2}$时, $\sin x + \tan x > 2x$

证 记 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$

则 $f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2$

$$= \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

$$> \cos x + \frac{1}{\cos x} - 2 \quad \geq 0$$

练：$x>0$时，证明:$\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$

证明：令$f(x)=\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2}$

则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}<0$

故$f(x)$在（0,+∞）单减,

又$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \therefore\ f(x)>0 \quad (x>0)$

即:$\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$

利用单调性证明不等式的步骤：

①将要证的不等式作 恒等变形（通常是移项，去分母）使一端为0另一端即为所作的辅助函数$f(x)$

②求 $f'(x)$或$f''(x)$ ，验证$f(x)$在指定区间上的单调性

③与区间端点处的函数值或极限值作比较即得证

3、 利用单调性证明方程仅有一根

例 6 证明方程 $x - a\sin x = 1, (0 < a < 1)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内，

有且仅有一个实根。

证：设 $f(x) = x - a\sin x - 1$, $f'(x) = 1 - a\cos x \geq 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增，至多有一个根.

$f(x) \in C[0, \pi]$, 又 $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi - 1 > 0$,

$\therefore$ 由零点定理， $f(x) = 0$ 在区间 $(0, \pi)$ 内至少有一个实根

综上可知，方程 $f(x)=0$ 即

$x - a\sin x = 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有一个实根.

二、函数的极值及其求法

1.定义: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，$x_0 \in (a,b)$,

若存在 x_0 的一个邻域，在其中当 $x \neq x_0$ 时,

(1) $f(x) < f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点，

称 $f(x_0)$ 为函数的极大值；

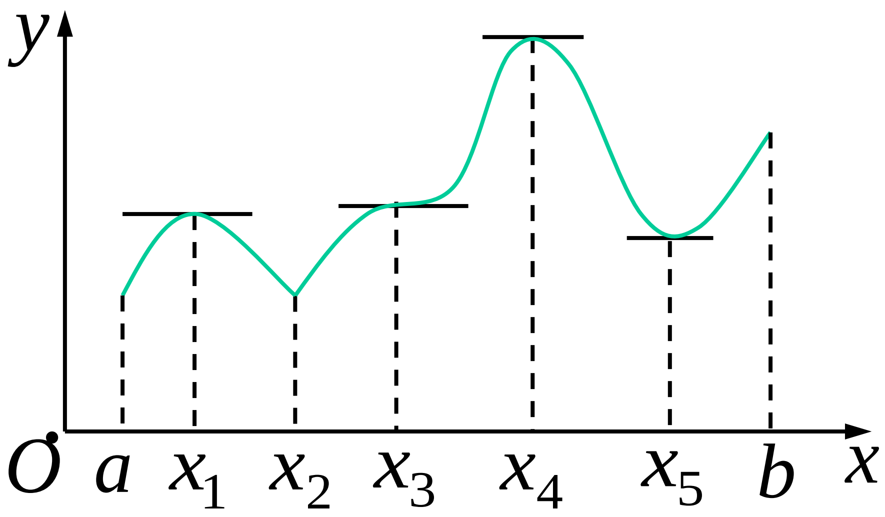
(2) $f(x) > f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点，

称 $f(x_0)$ 为函数的极小值 .

极大值点与极小值点统称为极值点 .

注意：1)极值是函数局部性质，极值点只能在区间内部取得，不包括端点，最值是全局性概念，最值点可以在端点取得。

2) 对常见函数, 极值可能出现在导数为 0 或不存在的点.



x_1, x_4 为极大值点

x_2, x_5 为极小值点

x_3不是极值点

2函数取得极值的必要条件

定理2（必要条件） 设 $f(x)$在点x_0处具有导数，且在x_0处取得极值，那末必定$f'(x_0)=0$.

定义 使导数为零的点(即方程 $f'(x)=0$的实根)叫做函数 $f(x)$的驻点或稳定点

问：驻点与极值点关系？

注意： 可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点，

但函数的驻点却不一定是极值点.

例如，$y = x^3$，$y'\big|_{x=0} = 0$， 但 $x = 0$ 不是极值点.

问：极值点怎样找？

可疑极值点：驻点、不可导点

3.函数取得极值的充分条件

定理 3 **(极值第一充分条件)**

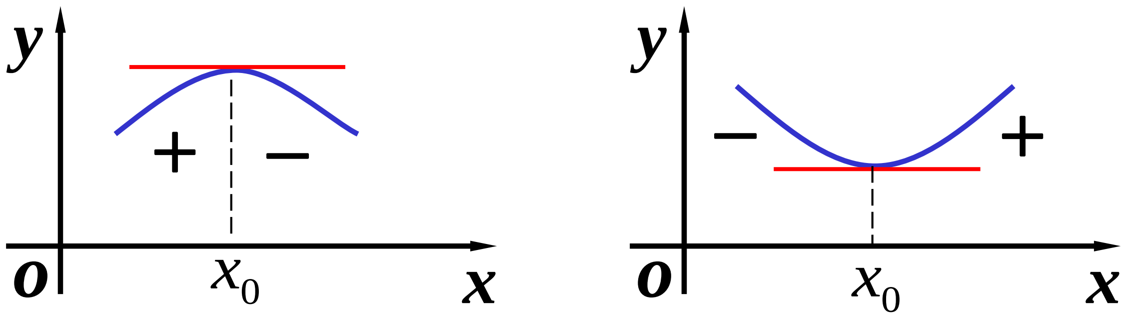
设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续,

且在**空心邻域**内**有导数**, 当x由小到大通过 x_0 时,

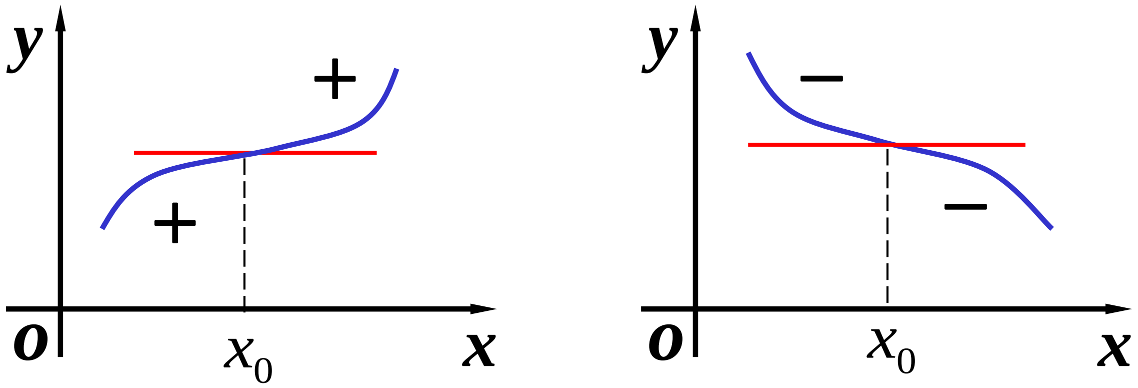
(1) $f'(x)$ “左正右负” , 则 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) $f'(x)$ “左负右正” , 则 $f(x)$ 在 x_0 取极小值;

（**3**）$f'(x)$ “左右不变号”， 则 $f(x)$在x_0不取得极值。



(两侧导函数异号是极值点情形)



(两侧导函数不变号不是极值点情形)

例1. 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值 .

解: 1) 求导数 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$

2) 求极值可疑点

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{2}{5}$; 又 $x_2=0$ 导数不存在

3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-0.33	$\nearrow$

$\therefore x=0$ 是极大值点，其极大值为 $f(0)=0$

$x=\frac{2}{5}$ 是极小值点，其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-0.33$

定理4(第二充分条件) 设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那末

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

证 (1) $\because f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0,$

由函数极限的局部保号性，在 x_0 的足够小的去心邻域内，$\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$

$\therefore x<x_0$ 时，有 $f'(x)>f'(x_0)=0$

$x>x_0$ 时，有 $f'(x)<f'(x_0)=0$

所以，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值．同理可证(2).

例2：$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的极值

解：$f'(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$得：$x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in Z)$

$$f''(x)=-\sin x-\sqrt{3}\cos x=-2\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

$$\therefore\ f''(k\pi+\frac{\pi}{6})=\begin{cases}-2 & k=2n\ \ (n\in Z)\\ 2 & k=2n+1\ \ (n\in Z)\end{cases}$$

从而$f_{极大}(2k\pi+\dfrac{\pi}{6})=2$；　　$f_{极小}(2k\pi+\dfrac{7\pi}{6})=-2$

三、函数的**最大值与最小值**

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, **则其最值只能在极值点或端点处达到 .**

求函数最值的方法:

(1) **求** $f(x)$ **在** (a,b) **内的极值可疑点** $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_m$

(2) **最大值**

$$M=\max\{f(x_1),\ f(x_2),\cdots,f(x_m),\boxed{f(a)},\boxed{f(b)}\}$$

最小值

$$m=\min\{f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,f(x_m),\boxed{f(a)},\ \boxed{f(b)}\}$$

特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内只有一个极值可疑点时,
  若在此点取极大 (小) 值 , 则也是最大(小)值 .
- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调时, 最值必在端点处达到.
- 对应用问题 , 有时可根据实际意义判别求出的可疑点
  是否为最大 值点或最小值点 .

例6　　求 $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 的在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值.

解 $\because f(x)\in C_{[-1,1]}$， $\therefore f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有最大、小值

又 $\because f'(x)=\dfrac{5x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$ 在 $(-1,1)$ 的零点为 $\dfrac{2}{5}$，不存在的点为 0，

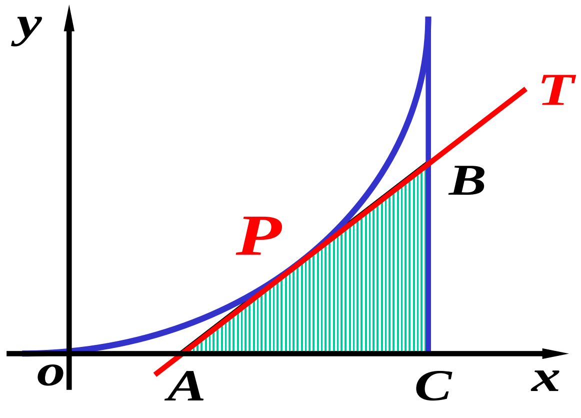
$$\therefore \max_{x\in[-1,1]} f(x)=\max\{f(-1), f(1), f(0), f(\tfrac{2}{5})\}$$

$$=\max\{-2,0,0,-\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\}=0 \quad (=f(1)=f(0));$$

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x)=\min\{f(-1), f(1), f(0), f(\tfrac{2}{5})\}$$

$$=-2 \quad (=f(-1)).$$

例7 在曲线 $y=x^2$ 上求一点，使曲线在该点处的切线与直线 $y=0$ 及 $x=8$ 所围成的三角形面积最大.



解 如图: 设所求切点为 $P(x,y)$,

则切线PT为 $Y-y=2x(X-x)$,

$\therefore A(\frac{1}{2}x,\ 0)$, $B(8,\ 16x-x^2)$, $C(8,\ 0)$,

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(8-\frac{1}{2}x)(16x-x^2)=\frac{1}{4}x(16-x)^2 \quad (0\le x\le 8)$$

令 $S'=\frac{1}{4}[(16-x)^2+x\cdot 2(16-x)(-1)]=\frac{1}{4}(16-x)(16-3x)=0$,

解得 $x=\frac{16}{3}$, $x=16$ (舍去). 故 $x=\frac{16}{3}$ 时三角形的面积最大.

特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内只有一个极值可疑点时，
  若在此点取极大 (小) 值，则也是最大(小)值 .
- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调时，最值必在端点处达到.
- 对应用问题，如果驻点唯一，且最值一定存在，
  则该驻点一定为最值点，无需判定 .

内容小结

1. 连续函数的极值

(1) 极值可疑点 **:** 使导数为**0** 或不存在的点

(2) 第一充分条件

$f'(x)$ 过 x_0 由正变负 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极大值

$f'(x)$ 过 x_0 由负变正 $\Longrightarrow$ $f(x_0)$ 为极小值

(3) 第二充分条件

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极大值 $-$

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$ 为极小值 $+$

2. 连续函数的最值

最值点应在极值点和边界点上找；

应用题可根据问题的实际意义判别 .

思考与练习

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 a 处(**B**).

(A) $f(x)$ 的导数存在 , 且 $f'(a)\neq 0$;

(B) $f(x)$ 取得极大值 ;

(C) $f(x)$ 取得极小值;

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

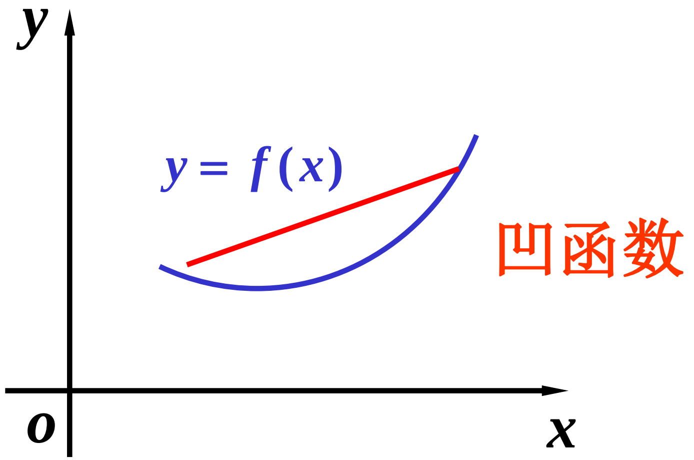
提示:

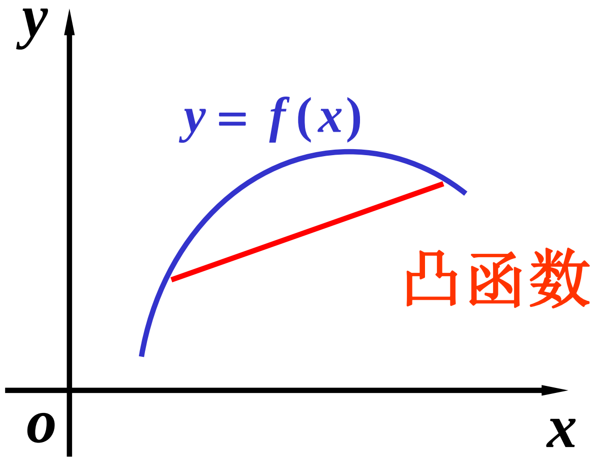
利用极限的保号性

§5 函数的凸性与拐点

一、函数凹凸的定义

问题:如何研究曲线的弯曲方向?





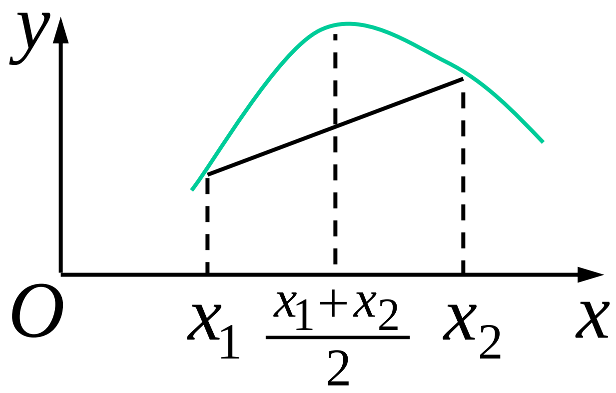
任意弧段位于所张弦的下方，任意点的切线在曲线下方

任意弧段位于所张弦的上方,任意点的切线在曲线上方

定义1 . 设函数$f(x)$在区间 I 上连续 ,$\forall x_1, x_2 \in I$,

(1) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$的图形是凹的;

(2) 若恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$的图形是凸的 .



定理1.(凹凸判定法) **设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数**

(1) 在 I 内 $f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凹的 ; +

(2) 在 I 内 $f''(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 I 内图形是凸的 . −

证: $\forall x_1, x_2 \in I$, 记 $\xi = \frac{x_1+x_2}{2}$, **利用一阶泰勒公式可得**

$$f(x_1) = f(\xi) + \boxed{\cancel{f'(\xi)(x_1-\xi)}} + \boxed{\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-\xi)^2}$$

$$f(x_2) = f(\xi) + \boxed{\cancel{f'(\xi)(x_2-\xi)}} + \boxed{\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-\xi)^2}$$

↓ 两式相加

$$f(x_1)+f(x_2) = 2f(\xi) + \underline{\frac{1}{2!}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 [f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]}$$

当 $f''(x)>0$时, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f(\xi)$, **说明 (1) 成立;**

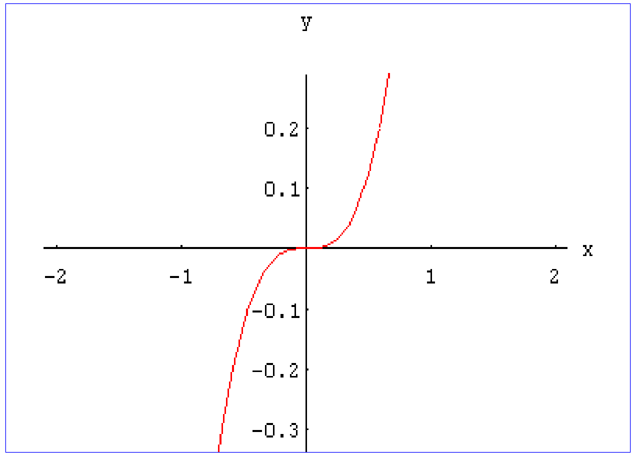
$<$ $<$ **(2)** 证毕

例1 判断函数 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 $\because y' = 3x^2, \quad y'' = 6x,$

当$x < 0$时， $y'' < 0,$

$\therefore$ 函数在$(-\infty, 0]$为凸的;



当$x > 0$时， $y'' > 0,$ $\therefore$ 函数在$(0, +\infty)$为凹的

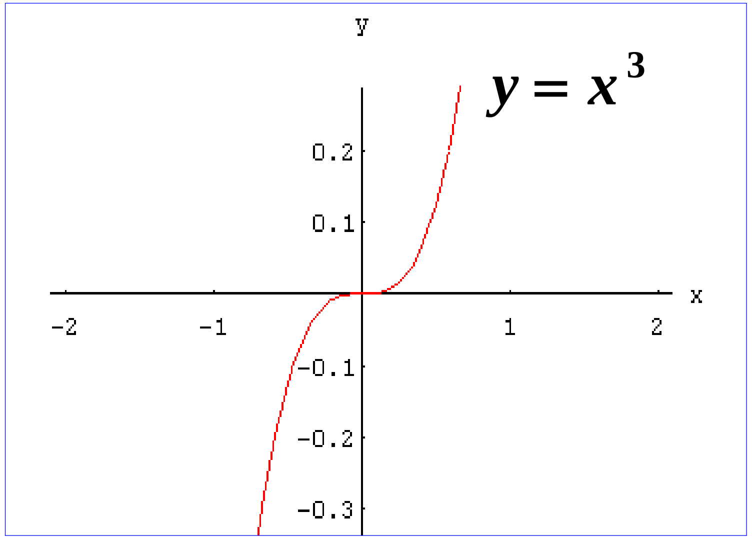
注意到，点(0,0)是函数由凹变凸的分界点.

二、曲线的拐点

定义2：曲线凹、凸区间的分界点 (x, y) 称为**拐点**.

例如 $y = x^3$

$$y'' = 6x = \begin{cases} > 0, & x > 0 \ \cup \\ < 0, & x < 0 \ \cap \end{cases}$$



(0,0) 拐点

定理 2　如果 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内存在二阶导数，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点的<u>必要条件</u>是 $f''(x_0)=0$.

证 $\because f(x)$ 二阶可导, $\therefore f'(x)$ 存在且连续,

又 $\because (x_0, f(x_0))$ 是拐点,

则 $f''(x)=[f'(x)]'$ 在 x_0 两边变号,

$\therefore f'(x)$ 在 x_0 取得极值,由可导函数取得极值的条件,

$\therefore f''(x_0)=0.$

注: $f''(x)$ 连续, $(x_0, f(x_0))$ 是拐点 $\underset{y=x}{\overset{\text{Th2}}{\Longrightarrow}}$ $f''(x_0)=0.$

拐点的可能点: $f''(x_0)=0$ 的点或 $f''(x)\nexists$ 的点

定理3（拐点的第一充分条件）

设 $f(x)$在 $U(x_0)$内二阶可导，$f''(x_0)=0$,

(1) 若在 x_0 两侧 $f''(x)$异号，则$(x_0, f(x_0))$为 $f(x)$ 拐点;

(2) 若在 x_0 两侧 $f''(x)$同号，则$(x_0, f(x_0))$不是 $f(x)$ 拐点;

*定理4（拐点的第二充分条件）

设 $f(x)$在 $U(x_0)$内三阶可导，$f''(x_0)=0$,

且 $f'''(x_0)\neq 0$,则(x_0, y_0)为 $f(x)$的拐点。

凹凸与拐点的判定步骤

(1) 求 $f''(x)$ 的零点以及 $f''(x)$ 不存在的点；

(2) 用上述点将 $f(x)$ 的定义区间分割为子区间；

(3) 确定 $f''(x)$ 在各子区间上的符号以确定凹凸与拐点。

(2)、(3) 两步可用列表方式完成

例2 讨论 $y=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸性与拐点.

解 定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

$y''=\dfrac{2(5x+1)}{9x^{4/3}}$，零点为 $-\dfrac{1}{5}$，不存在的点为 0. 列表：

x	$(-\infty,-\frac{1}{5})$	$-\frac{1}{5}$	$(-\frac{1}{5},0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	不存在	$+$
$f(x)$	$\cap$	拐点	$\cup$	非拐点	$\cup$

$\therefore f(x)$ 在（$-\infty$，$-\dfrac{1}{5}$]是凸的；$f(x)$ 在 $[-\dfrac{1}{5},0]$，$[0,+\infty]$ 是凹的

拐点是（$-\dfrac{1}{5}$，$-\dfrac{6}{5}\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$）

三、利用函数的凹凸性证明不等式

定义 设 $f(x) \in C(I)$, **若对** $\forall x_1$、$x_2 \in I$,**有**

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$<$ 凹

则称 $f(x)$ **在** I **上的图形是(向上)凸的**

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

例3： 证明不等式 $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}},(x\neq y).$

证：令 $f(t)=e^t$ 则 $f'(t)=f''(t)=e^t>0$

$\therefore f(t)=e^t$ 在 (x,y) 或 (y,x) 是凹的.

于是 $\dfrac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f(\dfrac{x+y}{2})$

即 $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$

第六节 函数图形的描绘

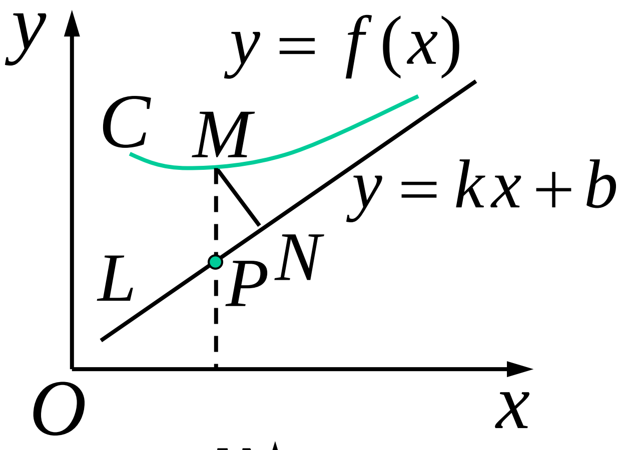
一、 曲线的渐近线

二、 函数图形的描绘

一、 曲线的渐近线

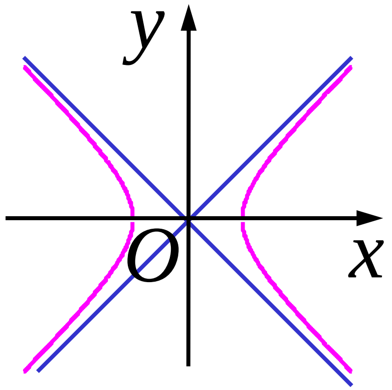
定义 . 若曲线 **C**上的点**M** 沿着曲线无限地远离原点时，点 **M** 与某一直线 **L** 的距离趋于 **0**，则称直线 **L** 为曲线**C** 的渐近线 .

或为“纵坐标差”



例如, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$



但抛物线 $y=x^2$无渐近线 .

1. 水平与铅直渐近线

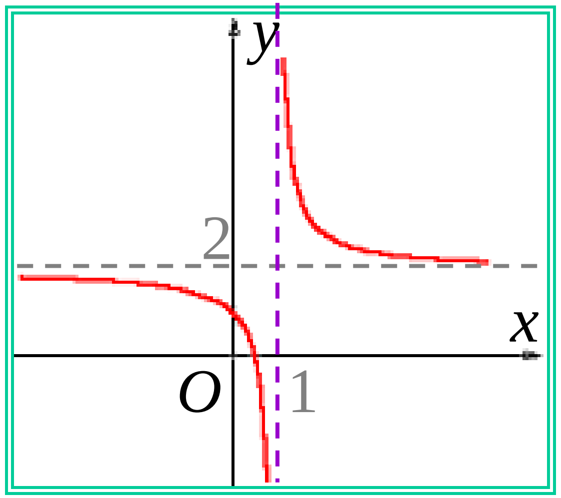
若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$,则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

(或$x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$ 有铅直渐近线 $x=x_0$.

(或$x\to x_0^-$)

例1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线 .



解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x-1}+2)=2$

$\therefore\ y=2$ 为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}+2)=\infty$, $\therefore\ x=1$为铅直渐近线.

求垂直渐近线，一般关注分式中分母为0的点。

2. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

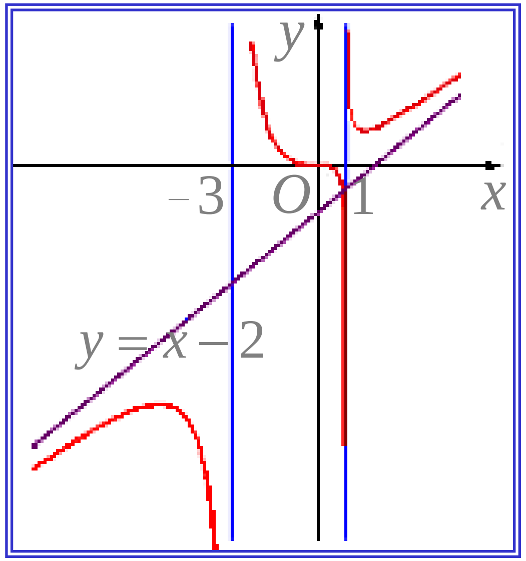
$$\Downarrow$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right]$$

$$\therefore\quad \boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-kx]}$$

例2. 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ **的渐近线.**



解: $\because\ y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)},\ \lim\limits_{\substack{x\to-3 \\ (\text{或}x\to1)}} y=\infty,$

故铅直渐近线: $x=-3$ 及 $x=1$

又因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$$

$\therefore\quad y=x-2$ 为曲线的斜渐近线 .

二、函数图形的描绘

步骤：

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$，并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点；

3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；

4. 求渐近线；

5. 确定某些特殊点，描绘函数图形 .

例3 作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

解 $D_f: x\neq 0,$ （非奇非偶函数, 且无对称性）

$f'(x)=-\dfrac{4(x+2)}{x^3}$ 的零点（及不存在的点）为 $-2,$

$f''(x)=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$ 的零点（及不存在的点）为 $-3.$

列表：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		拐点 $(-3,-\frac{26}{9})$		极值点 -3		

作函数 $f(x)=\frac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

渐近线：

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=+\infty,$$

得铅直渐近线 $x=0$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^3}-\frac{2}{x}\right]=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2,$$

得水平渐近线 $y=-2$;

（描点）作图 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{26}{9}$	↘	-3	↗	↘

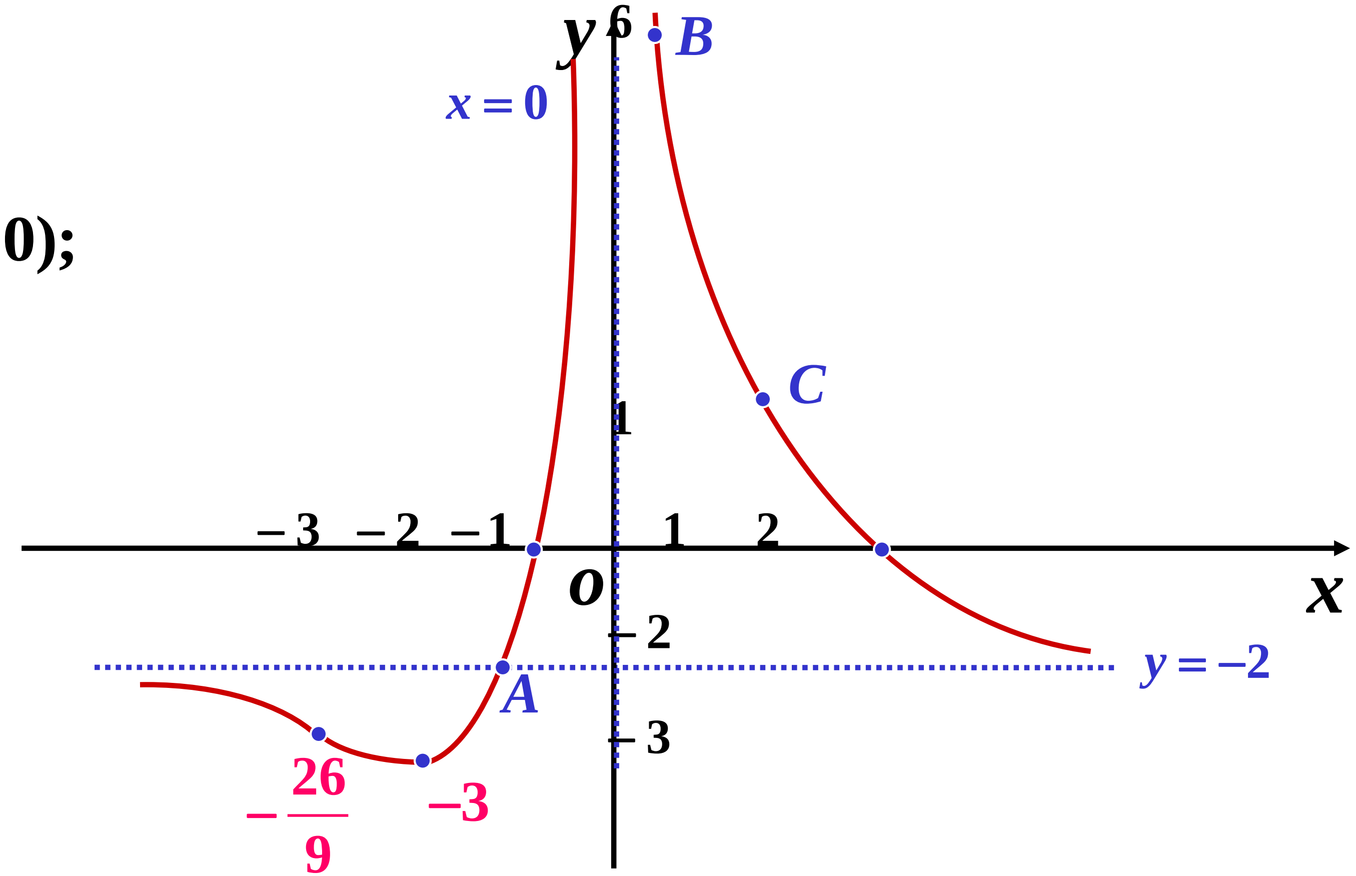
补充点：

$(1-\sqrt{3},0),(1+\sqrt{3},0)$;

$A(-1,-2)$,

$B(1,6)$,

$C(2,1)$.



例4. 描绘函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解: 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 图形对称于 y 轴.

2) 求关键点

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\qquad y''=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$

令 $y'=0$ 得 $x=0$; 令 $y''=0$ 得 $x=\pm1$

3) 判别曲线形态

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}$	

(极大) (拐点)

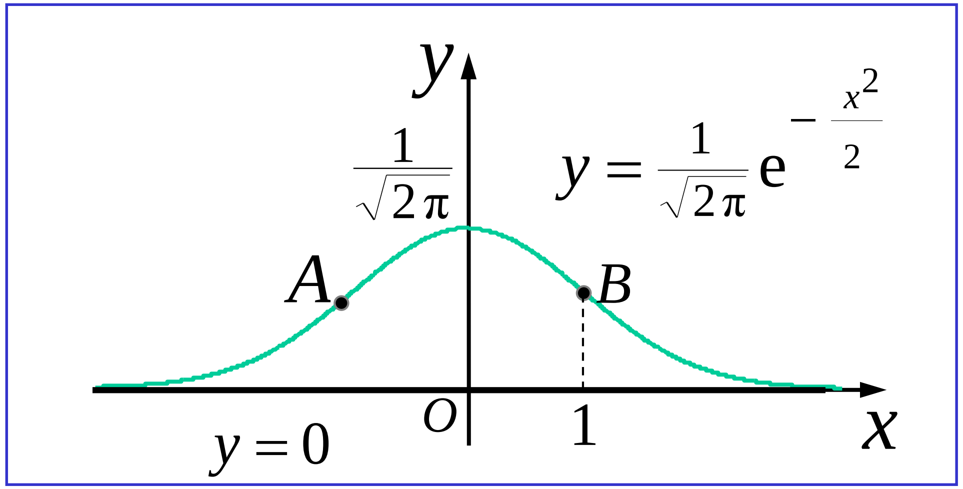
x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	
	(极大)		**(拐点)**	

4) 求渐近线

$$\lim_{x\to\infty} y = 0$$

$\therefore y=0$ **为水平渐近线**

5) 作图



例5 作函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解 $f\in C^2_{(-\infty,+\infty)}$, （无奇偶性及周期性）

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$, 零点为 $\dfrac{-1}{3}$ 和 1,

$f''(x)=2(3x-1)$ 的零点为 $\dfrac{1}{3}$.

列表:

x	$(-\infty,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		极大值 $\frac{32}{27}$		拐点 $(\frac{1}{3},\frac{16}{27})$		极小值 0	

$f(x)=x^3-x^2-x+1$ $\quad (-\infty,-\frac{1}{3})$ $\quad (-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ $\quad (\frac{1}{3},1)$ $\quad (1,+\infty)$

无渐近线.

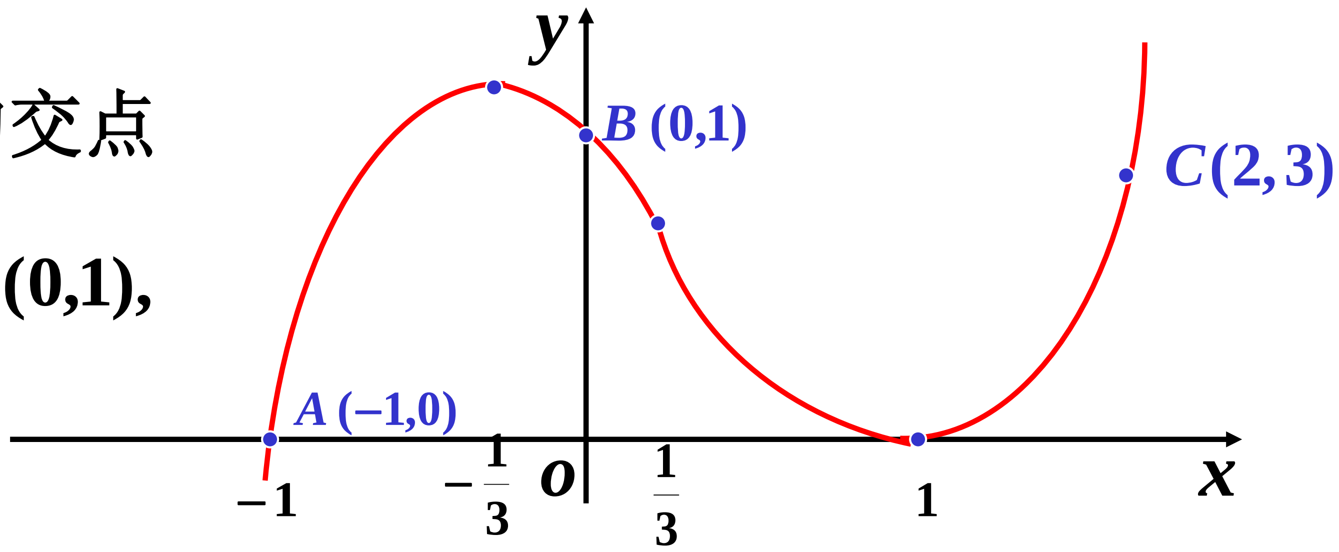
$$f(-\frac{1}{3})=\frac{32}{27},\ f(\frac{1}{3})=\frac{16}{27},\ f(1)=0.$$

（描点）作图

补充点:
与坐标轴的交点

$A(-1,0)$, $\quad B(0,1)$,

$C(2,3)$.



第七节 平面曲线的曲率

第三章

一、 弧微分

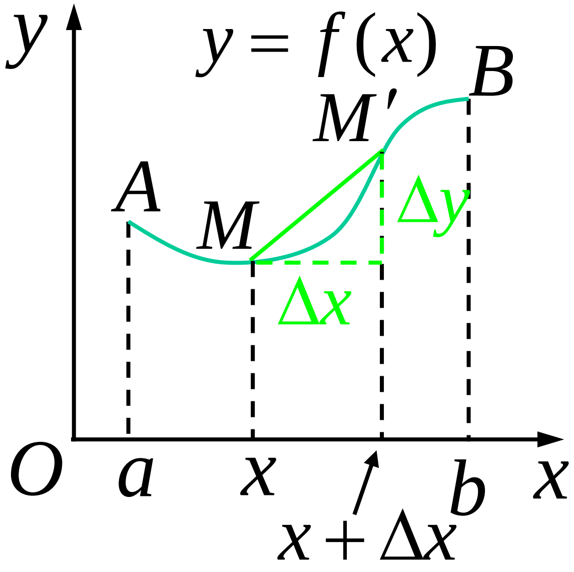
二、 曲率及其计算公式

三、 曲率圆与曲率半径

一、 弧微分

设 $y=f(x)$ 在(a,b)内有连续导数, 其图形为 $\overset{\frown}{AB}$,

弧长 $s=\overset{\frown}{AM}=s(x)$



$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\cdot\frac{|MM'|}{\Delta x}$$

$$=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}$$

$$=\pm\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

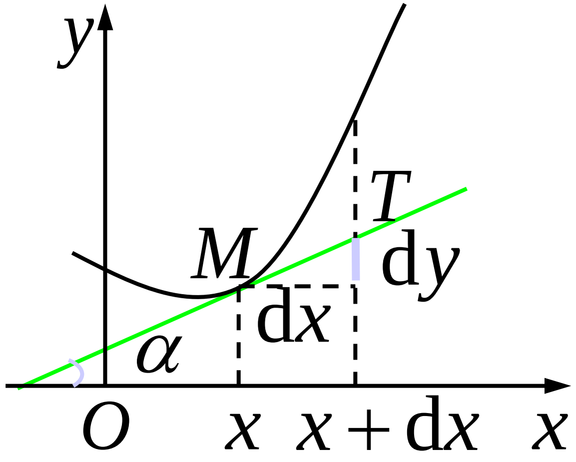
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{|MM'|}=\pm 1$$

$$\therefore\ s'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+(y')^2}$$

$$s'(x)=\sqrt{1+(y')^2}$$

$$\boxed{\therefore\quad \mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x}\quad \text{或}\quad \mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

若曲线由参数方程表示: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$



则弧长微分公式为

$$\boxed{\mathrm{d}s=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t}$$

$\dot{x}$ 表示对参数 t 的导数

曲率　曲线弯曲的程度

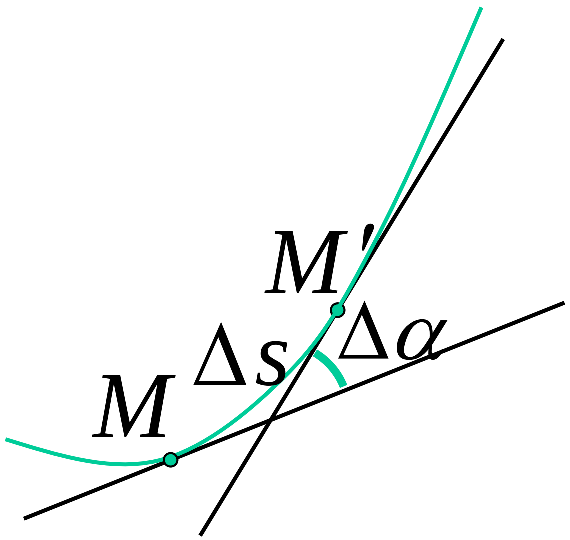
例如，铁轨的曲率就是个关键问题：

二、曲率及其计算公式

在光滑弧上自点 M 开始取弧段, 其长为Δs , 对应切线转角为 $\Delta\alpha$,

定义 弧段Δs上的平均曲率

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$



点 M 处的曲率

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

曲率$\boldsymbol{K}$的计算公式

$$K = \left| \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \right|$$

设曲线弧 $y = f(x)$ 二阶可导, 则由

$$\tan\alpha = y' \quad (设 -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

得 $\alpha = \arctan y'$

$$\mathrm{d}\alpha = (\arctan y')' \,\mathrm{d}x = \frac{y''}{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

又 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

故曲率计算公式为 $$\boxed{K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}}$$

例 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点的曲率最大?

解 $y' = 2ax + b, \qquad y'' = 2a,$

$$\therefore k = \frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

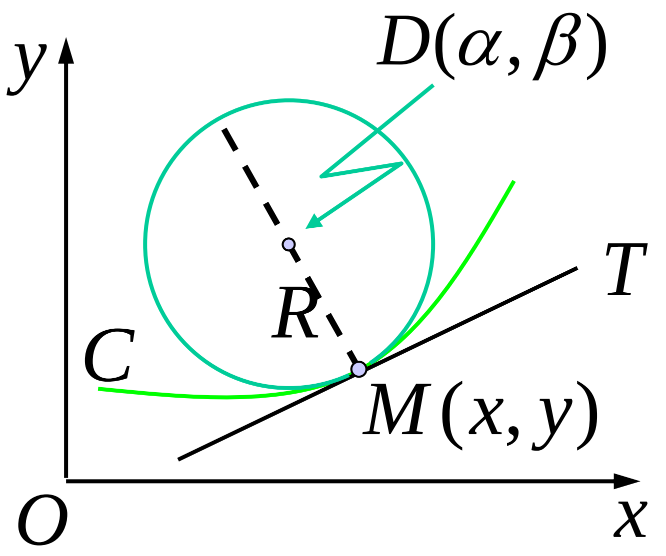
显然, 当$x = -\dfrac{b}{2a}$时, k最大.

又 $\because (-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a})$为抛物线的顶点,

$\therefore$ 抛物线在顶点处的曲率最大.

三、 曲率圆与曲率半径

设 M 为曲线 C 上任一点，在点 M 处作曲线的切线和法线，在曲线的凹向一侧法线上取点 D 使



$$|DM| = R = \frac{1}{K}$$

把以 D 为中心，R 为半径的圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆（密切圆），R 叫做曲率半径，D 叫做曲率中心.

在点 M 处曲率圆与曲线有下列密切关系：

(1) 有相同公切线；(2) 有相同凹向；(3) 有相同曲率 .

内容小结

1. 弧长微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

2. 曲率公式 $K=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

3. 曲率圆

曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$