第五章 定积分

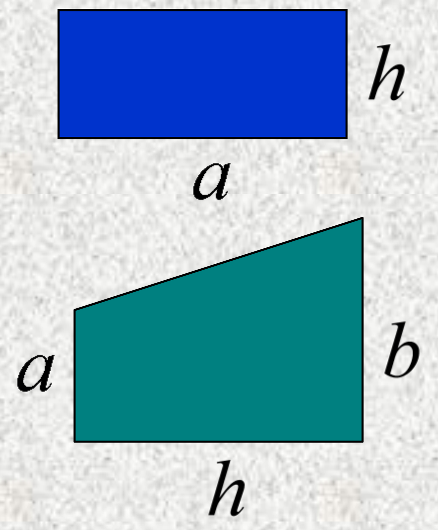
§1 定积分的定义与性质

1. 问题的提出
2. 定积分的定义
3. 定积分的性质

一、定积分问题举例

矩形面积 $= ah$

梯形面积 $= \frac{h}{2}(a+b)$



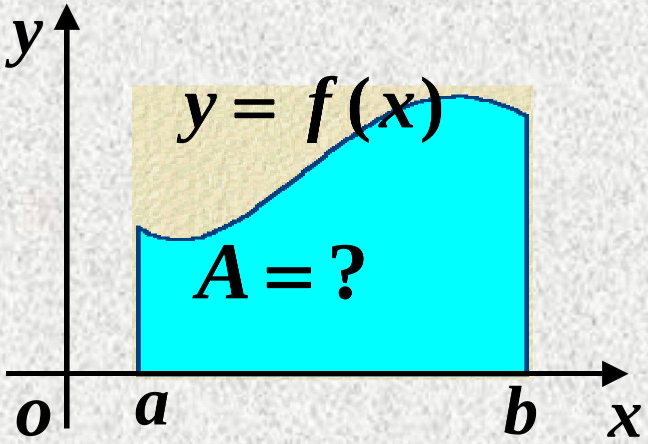
1. 曲边梯形的面积

设曲边梯形是由连续曲线

$y=f(x)\quad (f(x)\geq 0)$ 及 x 轴,

以及两直线 $x=a, x=b$ 所围成 ,

求其面积 A .



解决步骤：

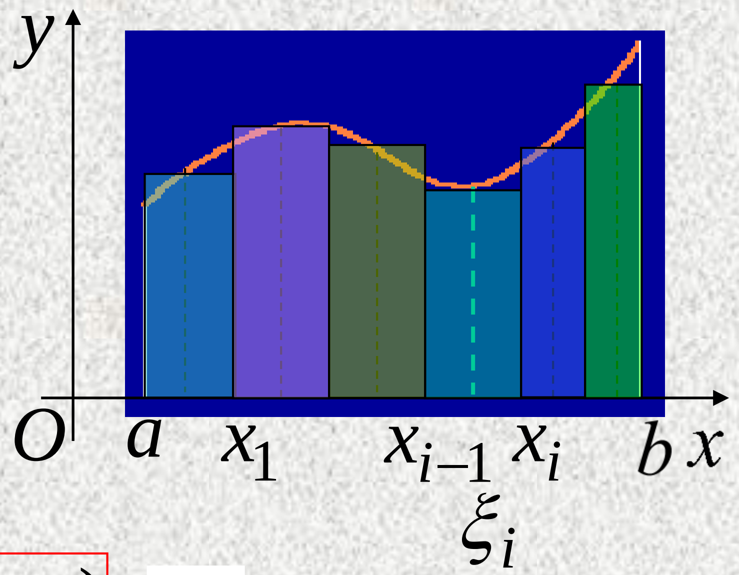
1) 分割. 在区间 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

2) 近似. 在第 i 个窄曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

作以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形，并以此小矩形面积近似代替相应窄曲边梯形面积 ΔA_i，得



$$\boxed{\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})}, \ i = 1, 2, \cdots, n)$$

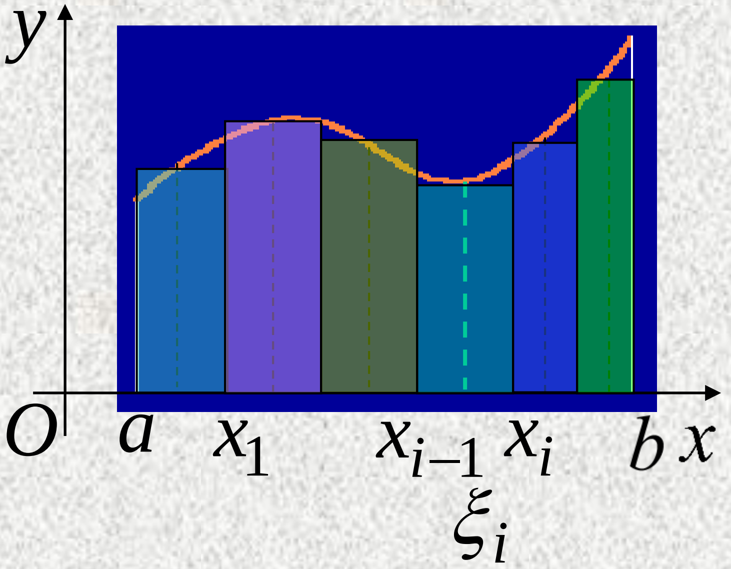
3) 求和.

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

4) 取极限. 令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$,则曲边梯形面积

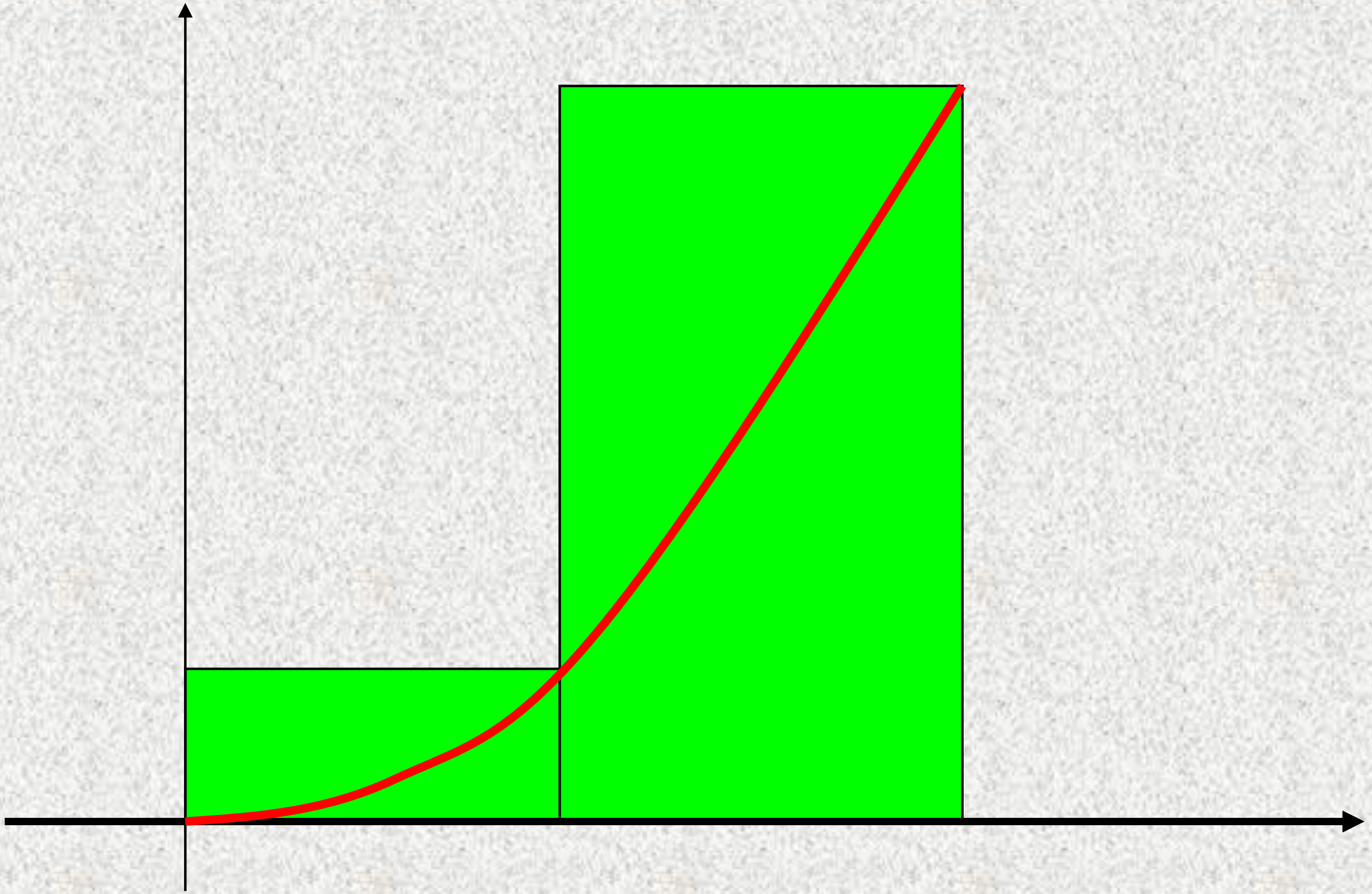
$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

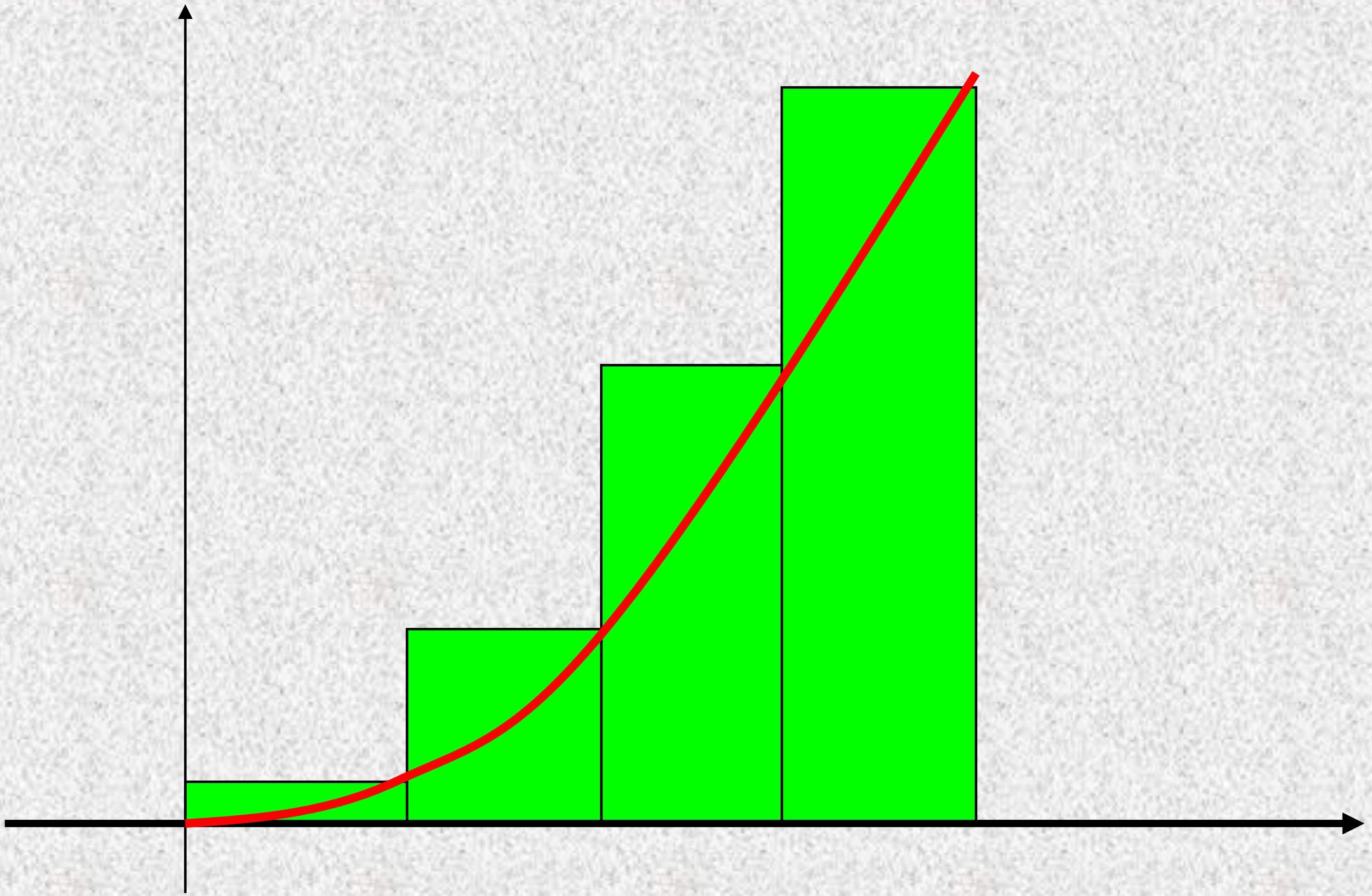
$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

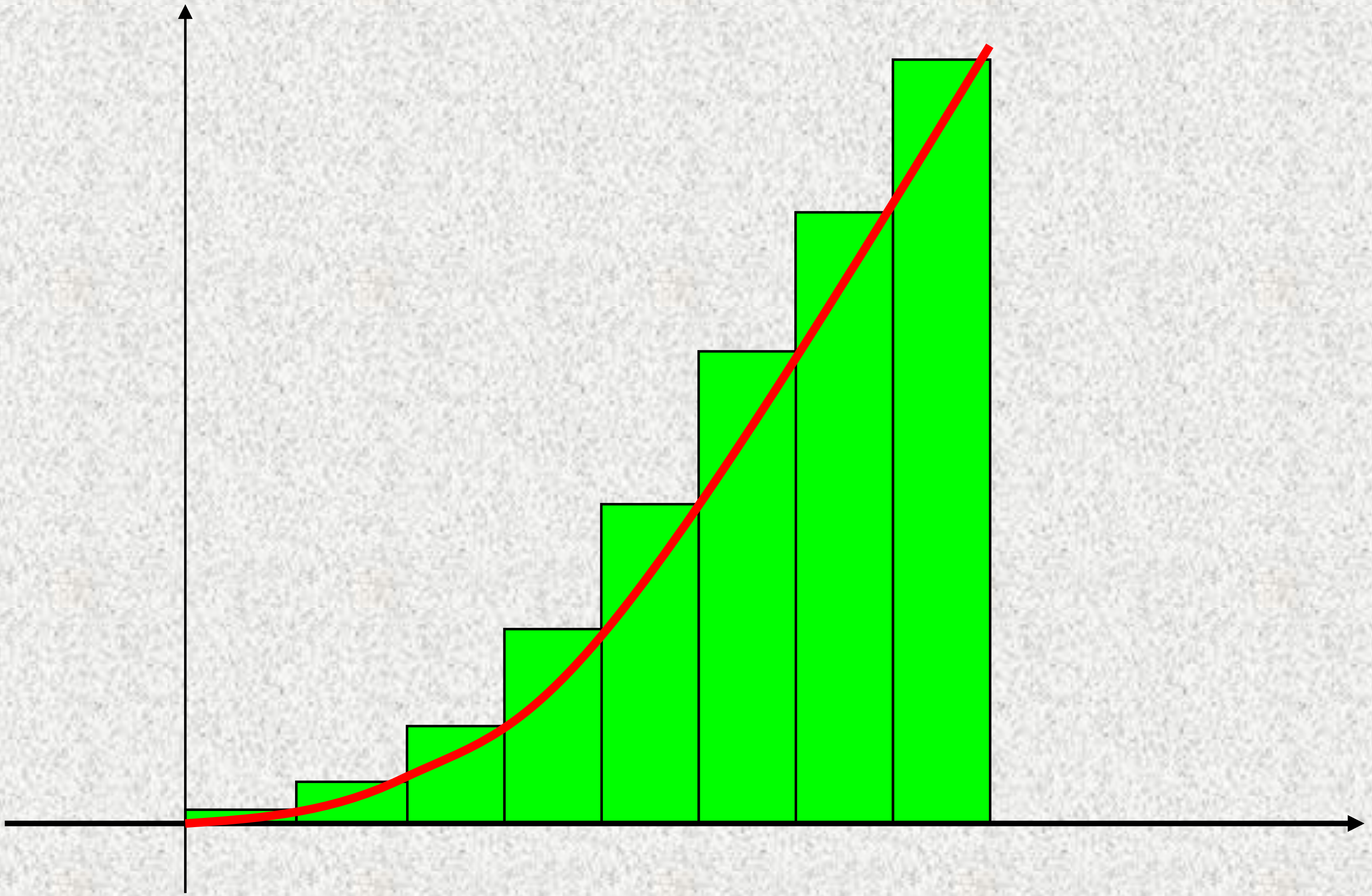


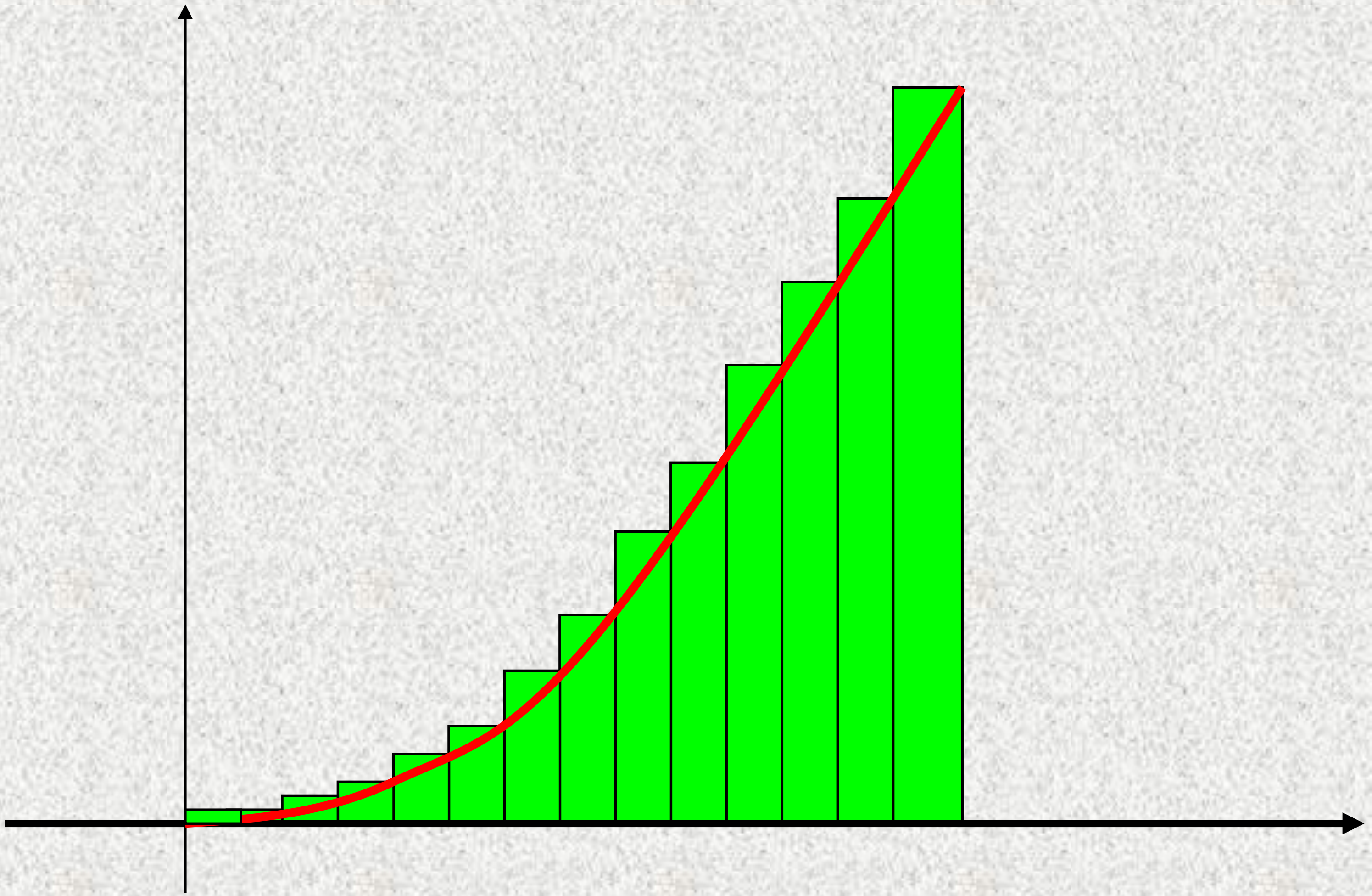
动画演示：

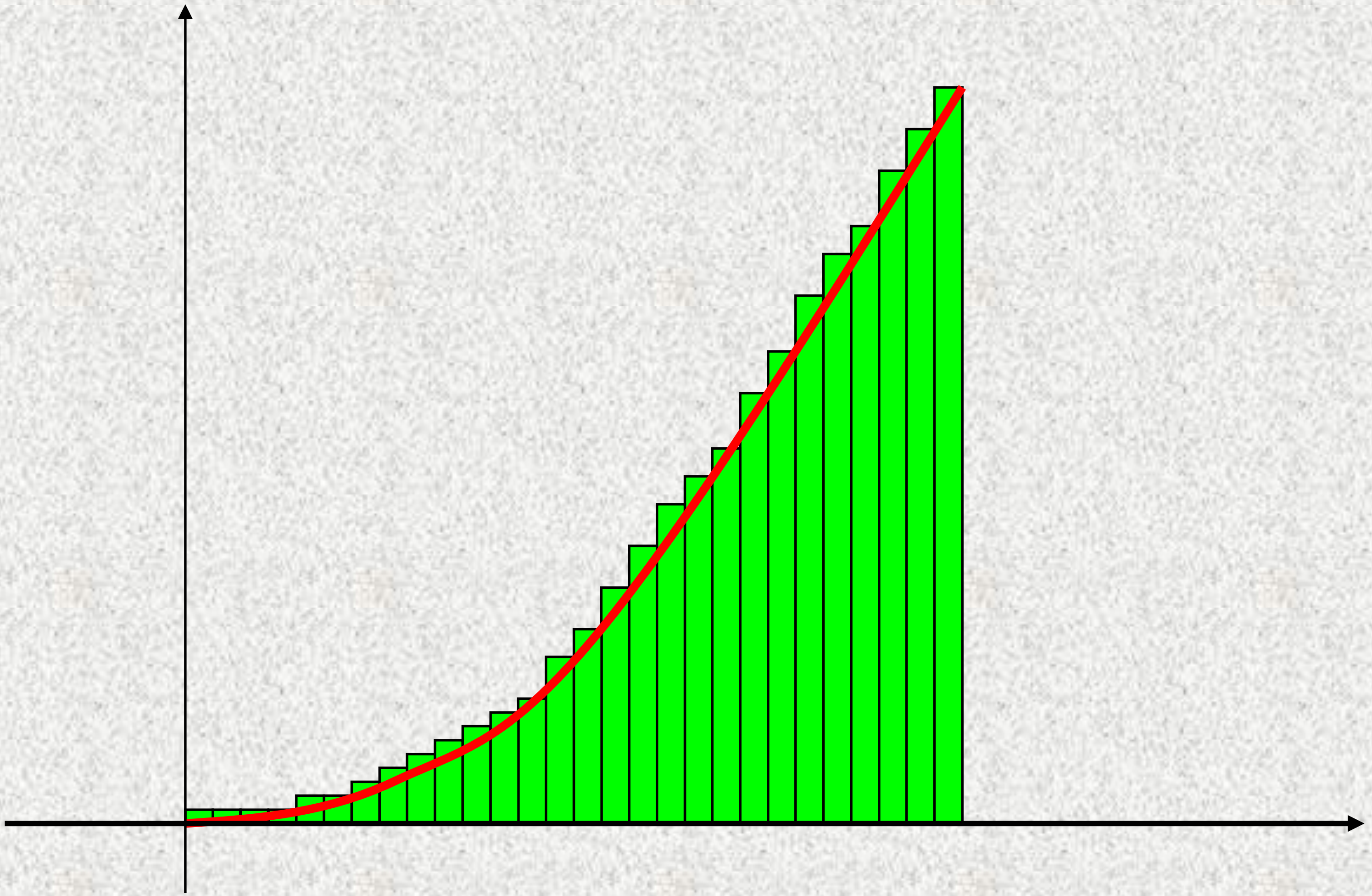
观察当分割加细时，矩形面积和与曲边三角形面积的关系.



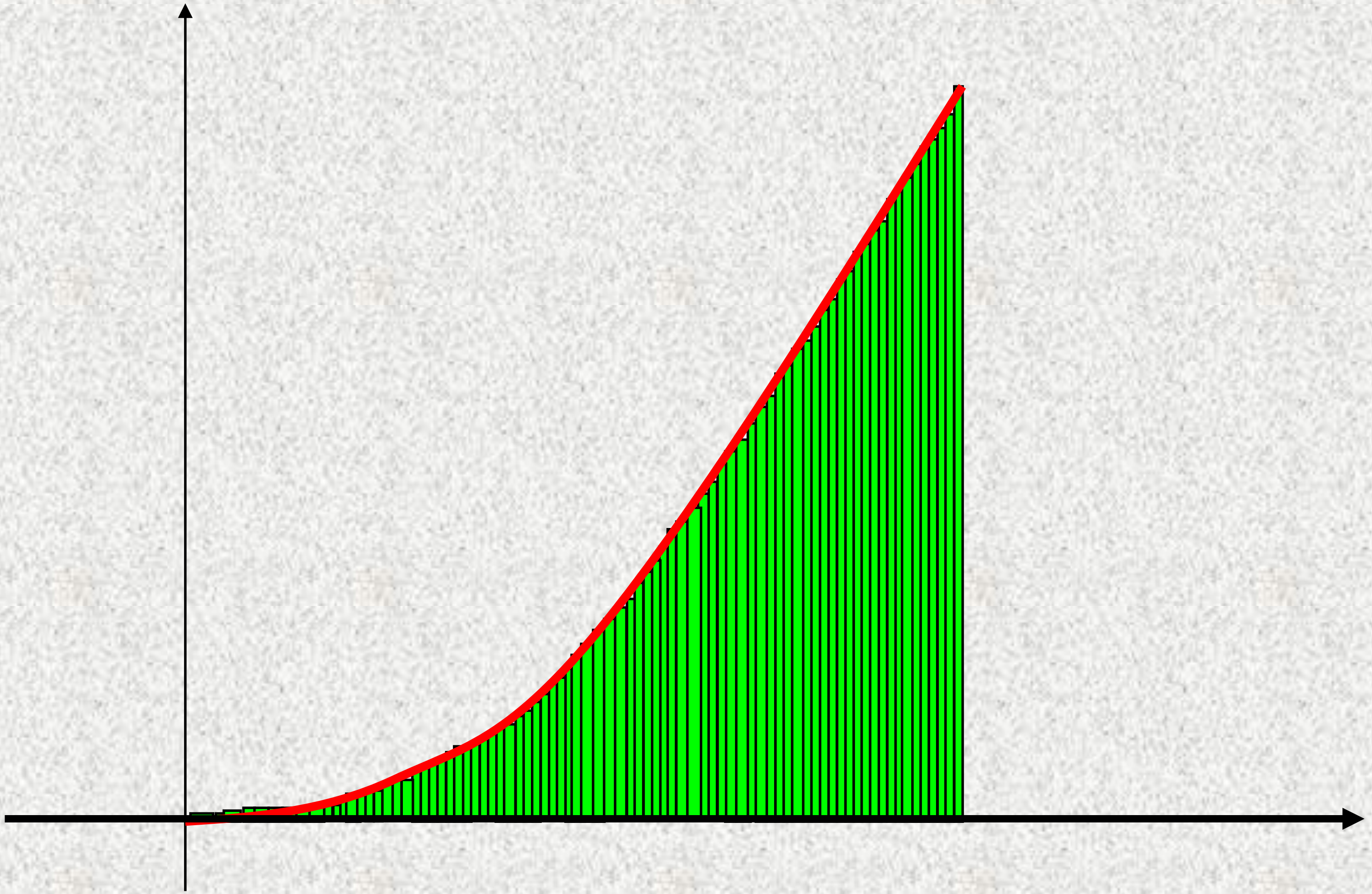








结论：曲边三角形的总面积$A = \lim \sum_{i=1}^{n} 小矩形_i$



实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作变速直线运动. 已知速度$V = V(t)$是时间间隔$[T_1, T_2]$上 t 的连续函数. 计算在这段时间内物体所经过的路程 S.

（1）分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

（2）近似 在每个子区间$[t_{i-1}, t_i]$上任取一点τ_i

部分路程值 $\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$

某时刻的速度

（3）求和 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（4）取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $\boxed{s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i}$

上面两例：

$$\left.\begin{aligned} A &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\ s &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i \end{aligned}\right\}\text{定义为定积分}$$

可以看出：　两个不同问题所求的量，

采用了同样的计算方法，

最终都得到具有相同结构的和式极限。

二、定积分定义

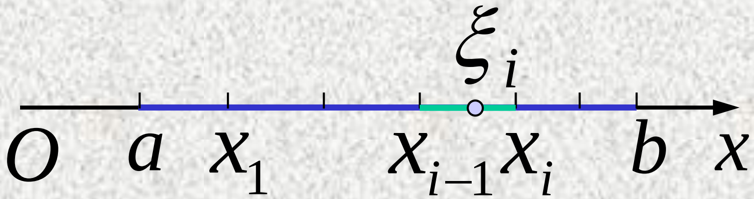
设函数 $f(x)$定义在$[a,b]$上, 若对$[a,b]$的任一种分法

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 任取

$\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$, 只要 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$时 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

总趋于确定的极限 I ,则称此极限 I 为函数 $f(x)$在区间

$[a,b]$上的定积分, 记作$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

积分上限　　$[a,b]$ 叫做积分区间

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

由定积分定义，例1，例2分别为：

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx, \quad s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i = \int_{T0}^{T1} v(t)dt$$

注意:

（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

（2）定义中区间的分法和ξ_i 的取法是任意的.

（3）当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，

称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

问：何时可积？

三、可积的充分条件

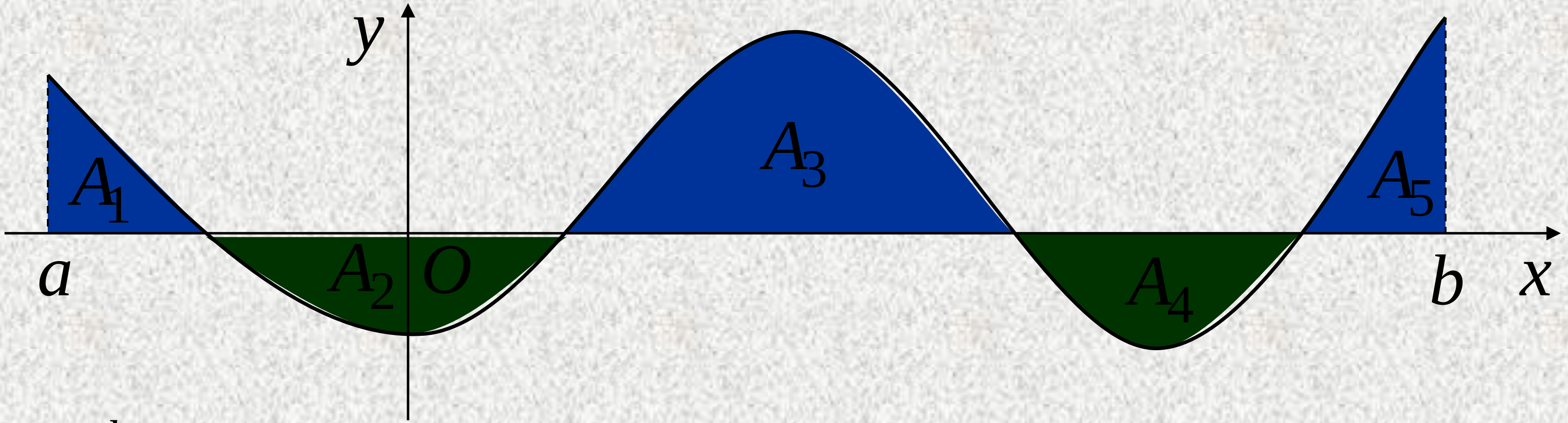
定理1: 设$f(x)$在区间$[a, b]$上连续, 则$f(x)$在$[a, b]$可积。

定理2: 设$f(x)$在区间$[a, b]$上有界, 且只有限个第一类间断点, 则$f(x)$在$[a, b]$上可积.

四、定积分的几何意义:

$f(x) > 0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形面积

$f(x) < 0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形面积的负值



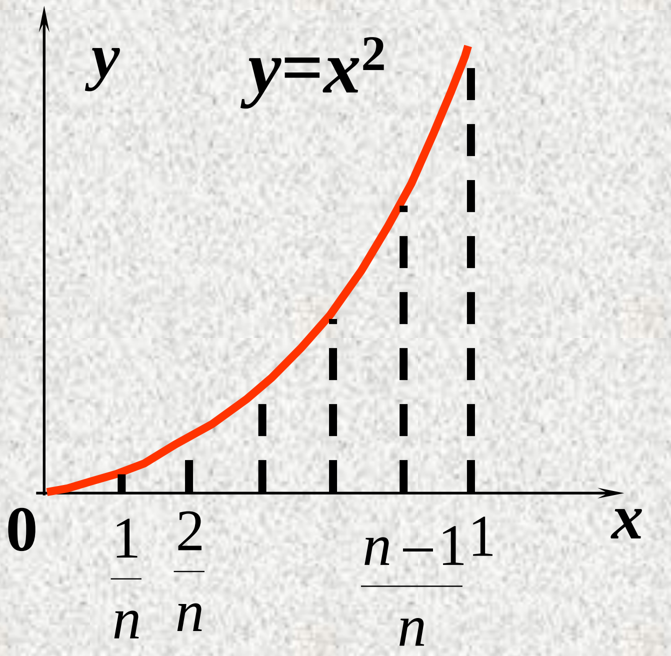
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

例1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2dx$

解: 因为$y=x^2$在$[0, 1]$上连续, 定积分存在,



将区间$[0, 1]$ n等分, 分点为

$$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$$

$$\Delta x_i=\frac{1}{n},\quad 取\ \xi_i=\frac{i}{n}\,(i=1,2,\cdots,n)$$

于是 $$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

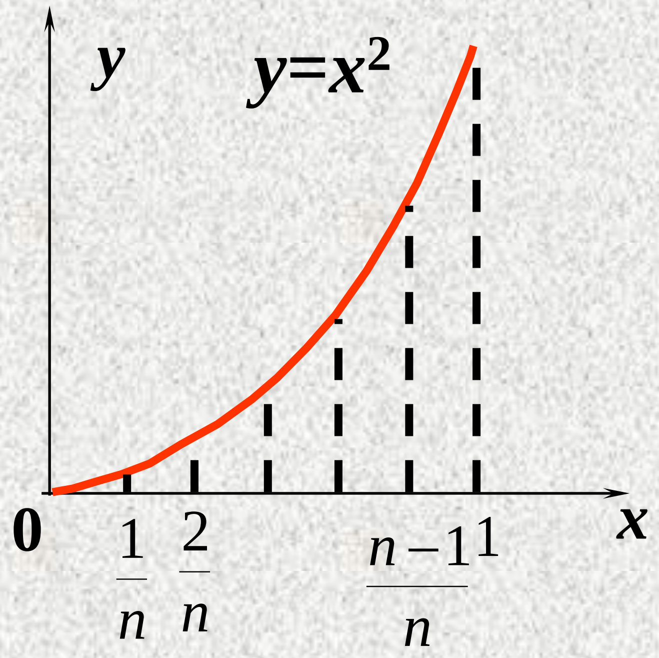
$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n \cdot (n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}$$



例2. 用定积分表示下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

解: (1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\boxed{\frac{i}{n}}}\cdot\boxed{\frac{1}{n}}$$

Δx_i

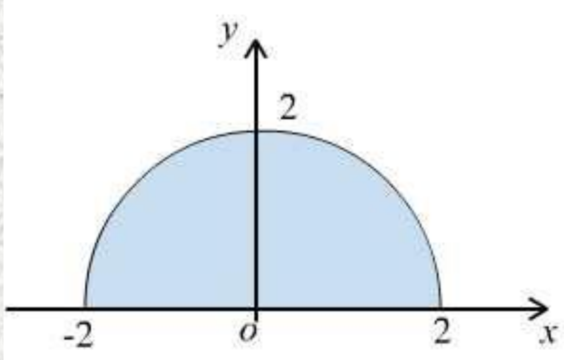
ξ_i

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 x^p\,dx$$

例3、 由几何意义计算定积分 $y=\sqrt{4-x^2}$

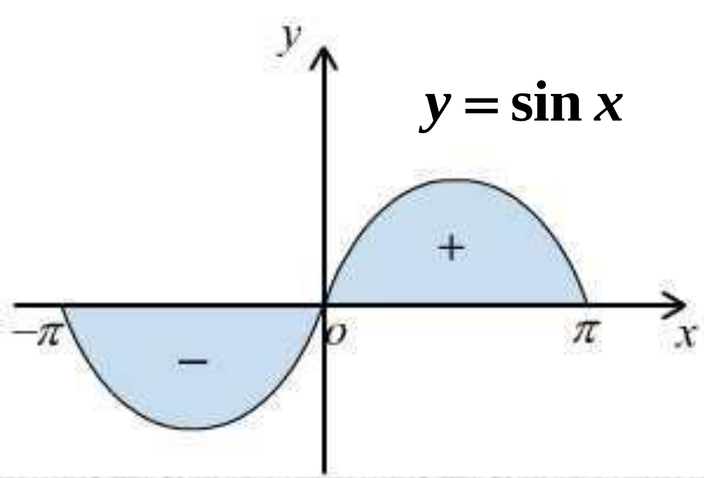


1 计算: $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

解： 由几何意义

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=S=\frac{1}{2}\pi\times 2^2$$

2 计算: $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$



解：如图 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx=0$

五、定积分的性质

对定积分的**补充规定**:

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

（2）当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

说明　在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上下限的大小.

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

性质2 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (k$ 为常数).

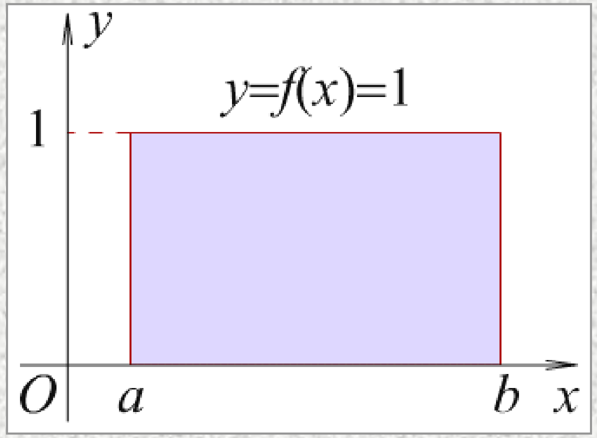
性质3（定积分的区间可加性）

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

补充：不论 a,b,c 的相对位置如何，上式总成立.

减性质：$\int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$

性质4 $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a.$



性质5 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$,

则$\int_a^b f(x)dx\geq 0.$ $(a<b)$

推论：不等式性

（1）如果在区间$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$,

则$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$ $\boxed{(a<b)}$

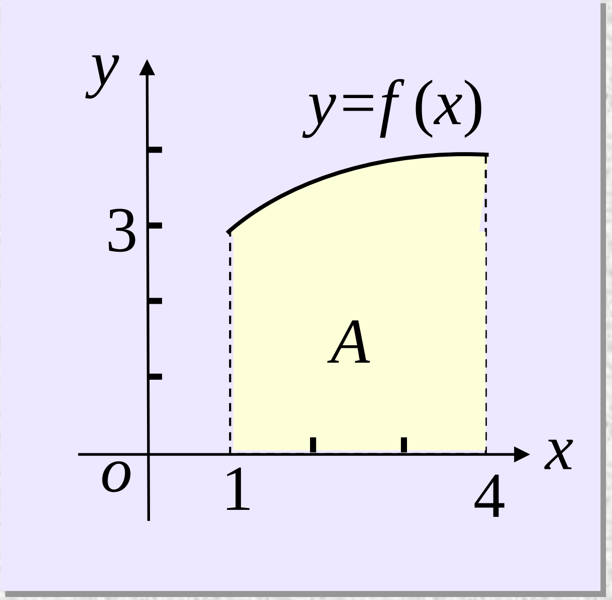
（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq \int_a^b |f(x)|dx.$ $\boxed{(a<b)}$

绝对值性质

（估值性质）

性质6 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，

则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.



证 $\because\ m \le f(x) \le M,$

$$\therefore \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

性质7(定积分中值定理)

若 $f(x)\in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,

使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$

证: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值分别为 m, M,

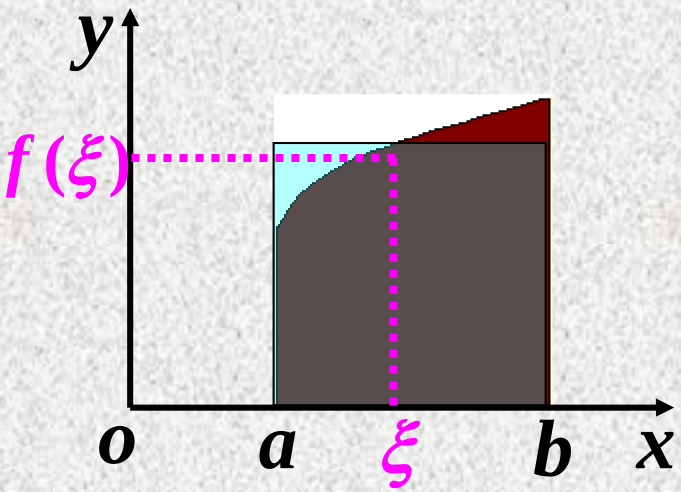
$$\because\ m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$\therefore\ m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$ 由介值定理得,

在 $[a,b]$ 上至少存在一点 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$ 即 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

积分中值公式的几何解释：



即 $\overline{y} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值

例 1　比较积分值 $\int_0^{-2} e^x dx$ 和 $\int_0^{-2} x dx$ 的大小.

解　对 $\forall x \in [-2, 0]$，有 $e^x > x$，

$\therefore \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx$，于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx$.

练：比较 $\int_1^2 \ln x dx$ 与 $\int_1^2 \ln^2 x dx$ 的大小

例 2 估计积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$的值.

解 $f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

$f(x)$在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上单调下降, 故$x=\frac{\pi}{4}$为极大点，$x=\frac{\pi}{2}$为极小点,

$$M=f(\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{2}}{\pi},\quad m=f(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi},\quad \because\ b-a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4},\quad \therefore\ \frac{1}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 3 设 $f(x)$可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt.$

解　由积分中值定理知有 $\xi\in[x, x+2]$,

使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt = \xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)(x+2-x)$,

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt = 2\lim\limits_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)$

$= 2\lim\limits_{\xi\to+\infty} 3f(\xi) = 6.$

六、小结

1．定积分的实质：特殊和式的极限.

2．定积分的思想和方法：

分割 →	化整为零	
近似值 →	近似代替	以直(常)代曲(变)
求和 →	积零为整	
取极限 →	精确值—定积分	

第二节　微积分基本定理与不定积分

一、问题的提出

二、变上限函数及其导数

三、牛顿——莱布尼兹公式

四、不定积分

一、积分上限函数及其导数

1.定义：设 $f(x)\in C[a,b]$ 则对 $\forall x\in[a,b]$

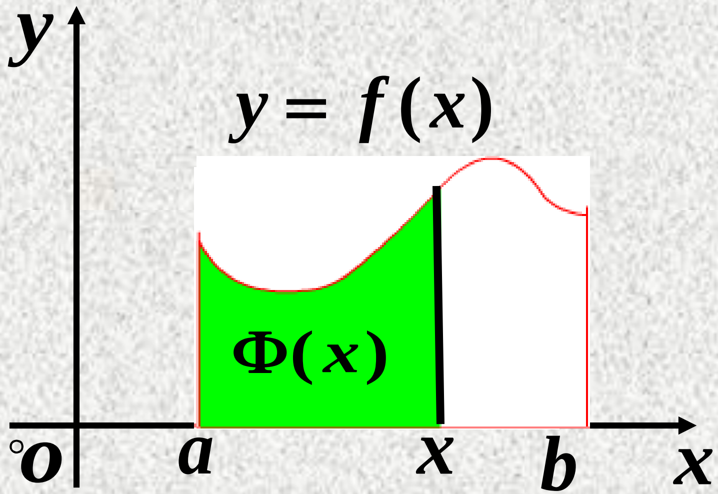
$\int_a^x f(x)dx$ 是 x 的函数 记为 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$

称为变上限函数。它是积分上限x的函数

2.几何意义：

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 表示右边线x

在[a,b]上移动的曲边梯形的面积函数。



一、积分上限函数及其导数

3.性质：

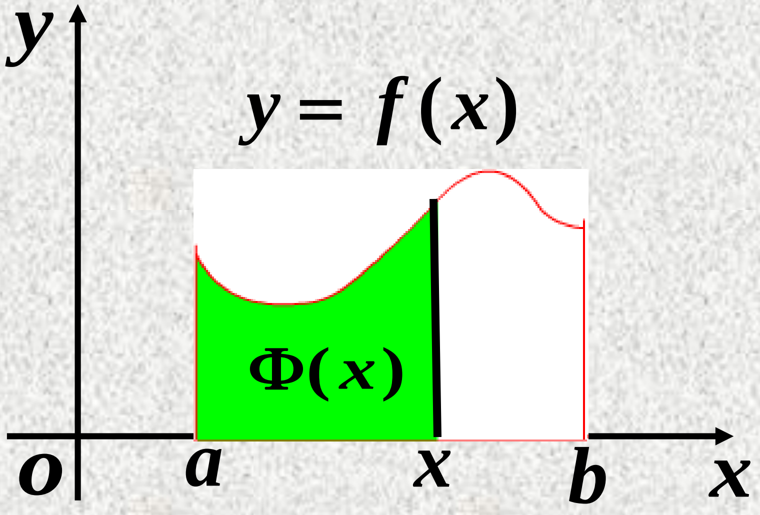
定理1: $f(x)$在$[a, b]$上可积,

则$\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上连续

定理2. 若 $f(x)\in C[a,b]$,

则变上限函数可导

且 $\dfrac{d\phi(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x).$



推论1（原函数存在定理）

若 $f(x)\in C[a,b]$，则变上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数 .

例1 求函数 $G(x)=\int_0^x te^t dt$ 在 $x=1$ 处的导数.

解：由定理得：$G'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x te^t dt = xe^x$

所以 $\boldsymbol{G'(1)=e}$

推论2 $f(x)\in C[a,b]$, $\dfrac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x)$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例2 求函数 $y=\int_{x^3}^{1}\dfrac{t-1}{2+\sqrt[3]{t}}dt$的导数.

解: $y=-\int_1^{x^3}\dfrac{t-1}{2+\sqrt[3]{t}}dt$ $\quad y'=\dfrac{3x^2(1-x^3)}{2+x}$

例3: $$\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{\ln x}\arctan 4x dx$$

$$=\frac{1}{x}\arctan(4\ln x)-3x^2\cdot\arctan(4x^3)$$

例4: $$\frac{d}{dx}\int_1^x x^2\sin t dt=\frac{d}{dx}\left[x^2\int_1^x \sin t dt\right]$$

$$=2x\int_1^x \sin t dt+x^2\sin x$$

例5： $\frac{d}{dx}\int_1^x (x-t)f(t)dt$

$$=\frac{d}{dx}\int_1^x xf(t)dt-\frac{d}{dx}\int_1^x tf(t)dt$$

$$=\frac{d}{dx}\left[x\int_1^x f(t)dt\right]-\frac{d}{dx}\int_1^x tf(t)dt$$

$$=\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_1^x f(t)dt$$

变上限函数和普通函数一样可以求极限、导数、讨论单调性、凹凸性、极值等。

例6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$ $\quad (\dfrac{0}{0})$

由L'H

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2e}$$

例7 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$

$$\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\ \cdot\cancel{e^{x^2}}}{e^{\cancel{2}x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$$

$$\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x^2}}{2x\,e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

例8：设$x-\int_1^{y-x} e^{-u^2}du=0$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

例 9 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)<1$. 证明

$$2x-\int_0^x f(t)dt=1 \text{在}[0,1]\text{上有且只有一个解.}$$

证：令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$,

$\because f(x)<1$, $\therefore F'(x)=2-f(x)>0$,

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为单调增加函数. 至多一个零点

$F(0)=-1<0$, $F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1[1-f(t)]dt>0$

由零点定理，至少一解

所以 $F(x)=0$ 即原方程在 $[0,1]$ 上只有一个解.

二、牛顿 – 莱布尼茨公式

定理3. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$ (牛顿 - 莱布尼茨公式)

证：根据定理 1, $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数， 故

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + C$$ 令 $x = a$, 得 $C = F(a)$,

因此 $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$ 再令 $x = b$,

得 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \xlongequal{\text{记作}} [F(x)]_a^b \overset{\text{或}}{=} F(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

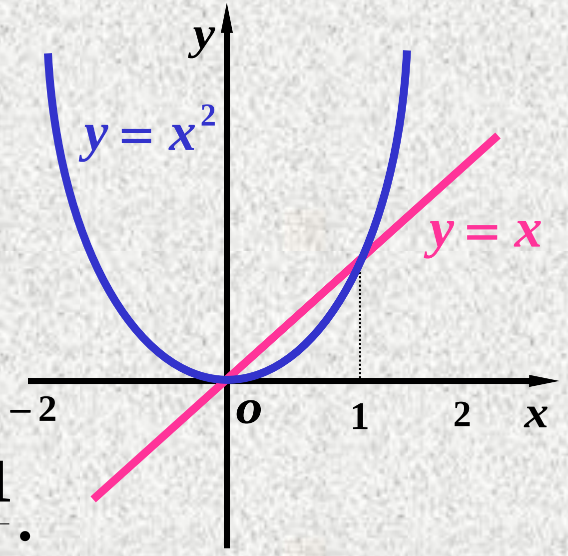
注 微积分基本公式表明：

(1) 一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它在该区间上的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

（2）求定积分问题转化为求原函数的问题.

（3）当$a > b$时，$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$仍成立.

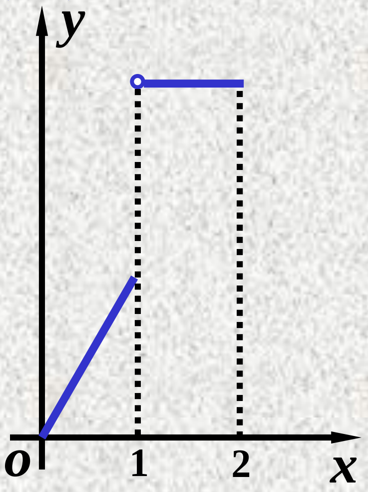
例13 求 $\int_{-2}^{2}\max\{x, x^2\}dx.$



解： 由图形可知

$$\therefore \text{原式} = \int_{-2}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} x dx + \int_{1}^{2} x^2 dx = \frac{11}{2}.$$

例14 设 $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 5 & 1 < x \le 2 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx$.



解：$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

$$\text{原式} = \int_0^1 2x dx + \int_1^2 5 dx = 6$$

第三节　定积分计算

一、换元积分法

二、分部积分法

一、换元公式

定理1 设 $f(x)\in C[a,b]$， $x=\varphi(t)$

若 $1^0.\ \varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$

$2^0.\ \varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$)上有连续的导数

且其值域 $\subset[a,b]$

则 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]d\varphi(t)$

注意 （1）当 $\alpha>\beta$ 时，换元公式仍成立.

（2）换元必换限.

例1　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx.$

解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d\cos x$

$$= -\left[\frac{\cos^6 x}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.$$

注：换元必换限, 不换元则不换限.

例2 $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$

$$\underline{\underline{x=2\tan t}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{4+4\tan^2 t}} d\,2\tan t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec t} \sec^2 t dt$$

$$=[\ln|\sec t+\tan t|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln(\sqrt{2}+1)$$

注：定积分换元, 不要代回原积分变量.

例3 $\displaystyle\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\boxed{dx}$

$2x+1=t^2$

$x=\frac{1}{2}(t^2-1)$

$\sqrt{2x+1}=t$ $\displaystyle\int_1^3 \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)+2}{t}\,d\frac{1}{2}(t^2-1)$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)dt=\frac{1}{2}[\frac{1}{3}t^3+3t]_1^3=\frac{22}{3}$$

练:1. $\int_1^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

2. $\int_0^1 x(1-x)^{100}dx$

3. $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2} & x\geq 0 \\ \frac{1}{1+\cos x} & -1<x<0 \end{cases}$ 计算$\int_1^4 f(x-2)dx$

4. $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$

练3：设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2} & x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x} & -1<x<0 \end{cases}$ 求 $\int_1^4 f(x-2)dx$

解 $\int_1^4 f(x-2)dx \;\underline{\underline{x-2=t}}\; \int_{-1}^{2} f(t)d(t+2)$

$$=\int_{-1}^{2} f(t)dt=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+\cos x}dx+\int_0^2 xe^{-x^2}dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int_0^2 xe^{-x^2}dx=\int_{-1}^{0}\sec^2\frac{x}{2}d\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x^2}d(-x^2)$$

$$=[\tan\frac{x}{2}]_{-1}^{0}-\frac{1}{2}[e^{-x^2}]_0^2=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$$

练4　计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$.

解：$\because\ f(x)=\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{3}{2}}d\sin x$$

$$=\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}.$$

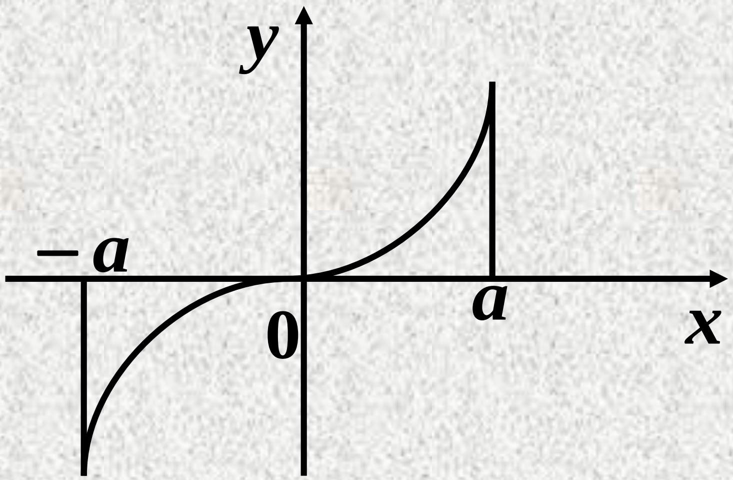
奇偶函数的定积分性质：

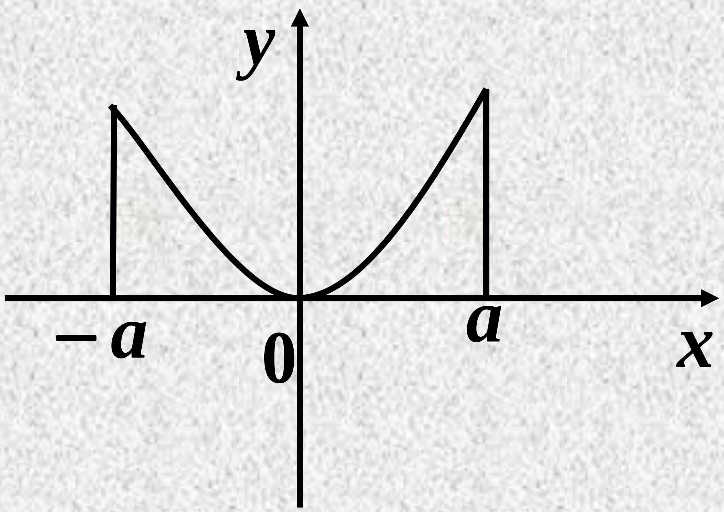
例4　证明：若 $f(x)\in C[-a,a]$

1^0. $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$

偶倍奇零

2^0. $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$





重要结论，熟练记住

证 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$$= \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx$$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \overset{x=-t}{=\!=\!=} \int_{a}^{0} f(-t)d(-t) = \int_{0}^{a} f(-t)dt$$

例5 计算$\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 原式$=\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx+\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}}dx$

偶函数　　　奇函数

$$=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4\int_{0}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})dx=4-\boxed{4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx}$$

单位圆的面积

$$=4-\pi.$$

Ex 用奇、偶函数的性质计算

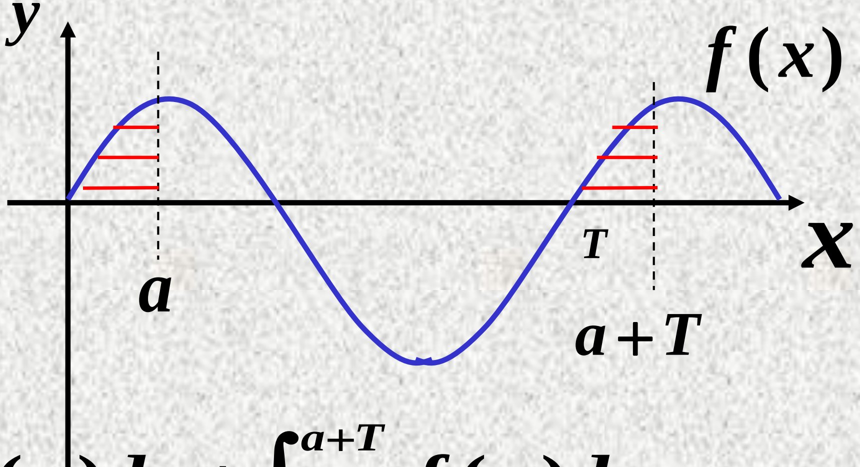
1. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2 dx$.

2. $\int_{-1}^{1}(x^2\sin x+\sqrt{1-x^2})dx$.

周期函数的定积分性质：

例6：若 $f(x)$为周期函数，即$f(x+T)=f(x)$

证明：$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx.$



证明：

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx.$$

其中：$\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$

$$\int_T^{a+T} f(x)dx=-\int_a^0 f(x)dx$$

例7：计算 $\int_{100}^{100+\pi} \sin^2 2x(\tan x+1)dx$

解：原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x(\tan x+1)dx$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{\pi}{2}$$

例8：设 $f(x)\in C[0,1]$,试证：

$$1.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$2.\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\boxed{dx}$

$$\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=\!=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f[\sin(\frac{\pi}{2}-t)]\, d(\frac{\pi}{2}-t)$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$2.\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

证 $\int_0^{\pi} \boxed{xf(\sin x)dx}$

$$\underline{\underline{x=\pi-t}}\ \int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]d(\pi-t)$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt-\int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx-\int_0^{\pi} \boxed{xf(\sin x)dx}$$

$$\therefore\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

二、定积分的分部积分法

不定积分的分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

定积分的分部积分公式：$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

例1 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx$.

解 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx = [x\arcsin x]\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + [\sqrt{1-x^2}]\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

练：$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$

例2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x}$.

解 $\because 1+\cos 2x = 2\cos^2 x,$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} xd(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

例3　证明定积分公式（书194页公式）

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇数}\end{cases}$$

证　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d\cos x$$

$$=\underbrace{\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 xdx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 xdx = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 xdx = \frac{32}{35}.$$

$$\int_0^{\pi} \sin^4 xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 xdx = \frac{3\pi}{8}$$

内容小结

基本积分法 $\begin{cases} \text{换元积分法} \\ \text{分部积分法} \end{cases}$

换元必换限
配元不换限
边积边代限

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

第四节　反常积分

正常积分 $\begin{cases} \text{积分限有限} \\ \text{被积函数有界} \end{cases}$

$\Big\downarrow$ 推广

反常（广义）积分

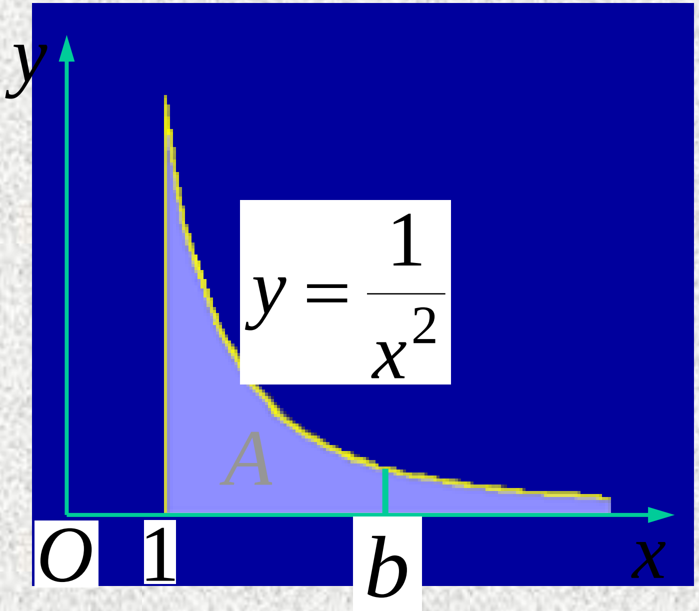
一、无穷限的广义积分

二、无界函数的广义积分

一、无穷限的广义积分

引例. 曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积 可记作

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

定义1. 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 取 $b>a$,

若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在 ,

则称此极限为 $f(x)$ 的无穷限广义积分,

记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

这时称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 ;

如果上述极限不存在，就称广义积分 发散 .

类似地 , 若 $f(x)\in C(-\infty,b]$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, 则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c 为任意取定的常数)

只要有一个极限不存在 , 就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$**发散 .**

若$F(x)$是$f(x)$的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x);\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛–莱公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

例1 计算广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. $=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

定义

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\arctan x]_a^0+\lim_{b\to+\infty}[\arctan x]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例2 计算广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx.$

解 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1.$$

例3. 证明第一类 p 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$

当 $p>1$ 时收敛；$p\le 1$ 时发散．

证:当 $p=1$ 时有 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left[\ln|x|\right]_a^{+\infty}=+\infty$

当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 广义积分收敛 , 其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p\le 1$ 时, 广义积分发散 .

课本P199记住结论

例4. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\ (p>0)$.

解: 原式 $= -\dfrac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \dfrac{1}{p}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$

$$= -\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{p^2}$$

思考: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=0$ 对吗?

分析: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散!

注意: 对反常积分, 只有在收敛的条件下才能使用

“偶倍奇零” 的性质, 否则会出现错误 .

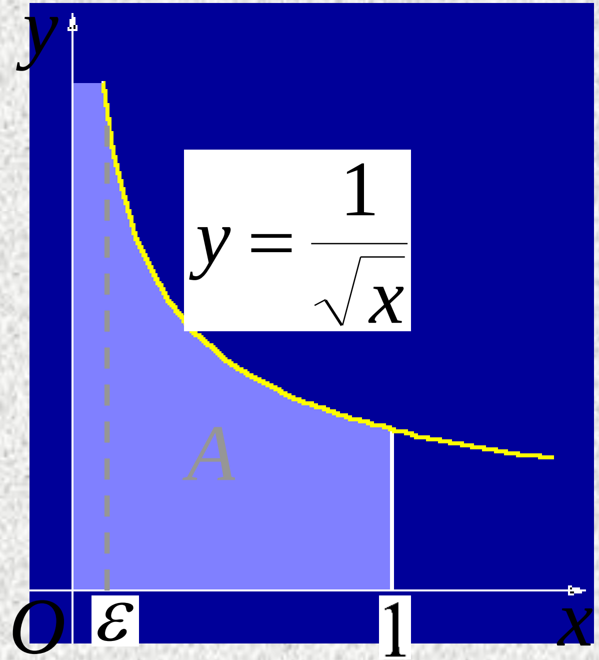
练习:1. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx;$ 2. $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx;$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$

二、无界函数的广义（瑕）积分

引例:曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积



可记作 $A=\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

定义2. 设 $f(x)\in C(a,b]$, 而在点 $\boldsymbol{a}$ 的右邻域内无界, 取 $\varepsilon>0$, 若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在 , 则称此极限为函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ 上的广义积分, 记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

这时称广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 ; 如果上述极限不存在, 就称广义积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

类似地 , 若 $f(x)\in C[a,b)$, 而在 $\boldsymbol{b}$ 的左邻域内无界, 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续, **而在点 c 的邻域内无界 , 则定义**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

无界函数的积分又称作第二类广义积分,

无界点常称为瑕点(奇点) .

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则也有类似牛 – 莱公式的计算表达式：

若 $\boldsymbol{b}$ 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 $\boldsymbol{a}$ 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

例5. 计算广义积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解: 显然瑕点为 a, 所以

$$原式 = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

例6. 讨论广义积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

解: $$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0^-} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{1} = \infty$$

所以反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例 7 证明广义积分$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$当 $q<1$时收敛，当 $q\geq 1$时发散.

证 (1) $q=1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \left[\ln x\right]_0^1 = +\infty$,

(2) $q\neq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx = \left[\frac{x^{1-q}}{1-q}\right]_0^1 = \begin{cases} +\infty, & q>1 \\ \frac{1}{1-q}, & q<1 \end{cases}$

因此当$q<1$时广义积分收敛，其值为$\frac{1}{1-q}$；

当$q\geq 1$时广义积分发散. 课本P202记住结论

例11 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

$x=1$为$f(x)$的瑕点无穷限

原式 $\underset{x=t^2+1}{\overset{\sqrt{x-1}=t}{=\!=}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t^2+1)t}2tdt.$

$$=2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\pi.$$

说明: (1) 有时通过换元 , 反常积分和常义积分可以

互相转化 .

例如 , $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t$ （令 $x = \sin t$）

(2) 当一题同时含两类反常积分时, 应划分积分区间,

分别讨论每一区间上的反常积分.

内容小结

1. 广义积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{积分区间无限}\\ \text{被积函数无界}\end{array}\right\}$ —— 常义积分的极限

2. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^q}dx=\begin{cases}+\infty, & q\ge 1\\ \dfrac{1}{1-q} & q<1\end{cases}$$