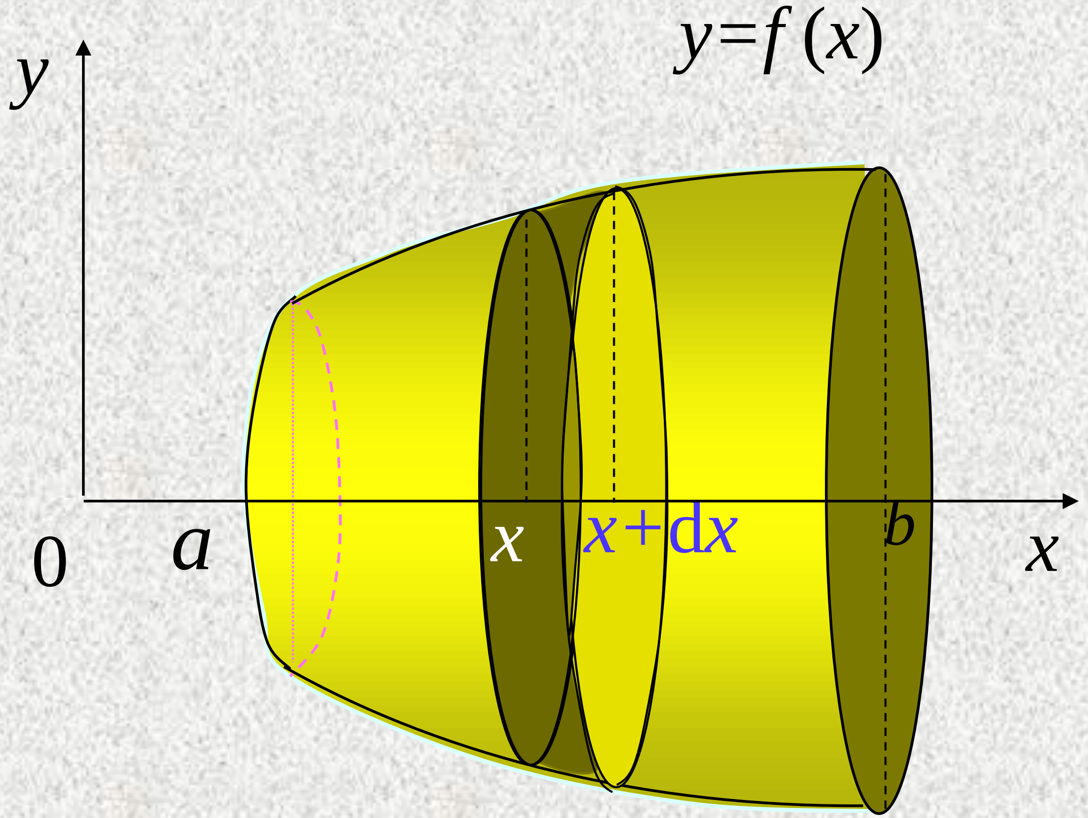
第六章 定积分应用



第一节 定积分的元素法

一、什么问题可以用定积分解决？

1) 所求量 U 与区间[a , b]有关

2)所求量U 对区间 [a , b] 具有可加性

即可通过 “分割, 近似, 求和, 取极限”

表示为 $U=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

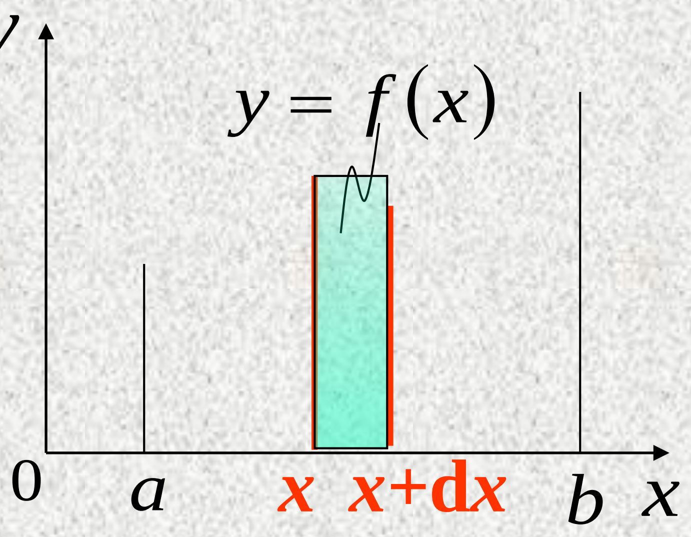
定积分定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

二、用定积分解决问题 的步骤:

(1). 任取一个具有代表性的小区间 $[x, x+dx]$ (dx为区间微元)，作矩形

(2). 计算面积微元（元素）$dA = f(x)dx$

(3) 微元积分得全量 $A = \int_a^b f(x)dx$



这种方法通常称为微元法或元素法

元素的几何形状常取为:

条, 带, 段, 环, 扇, 片, 壳 等

第二节 定积分在几何上的应用

一、平面图形的面积

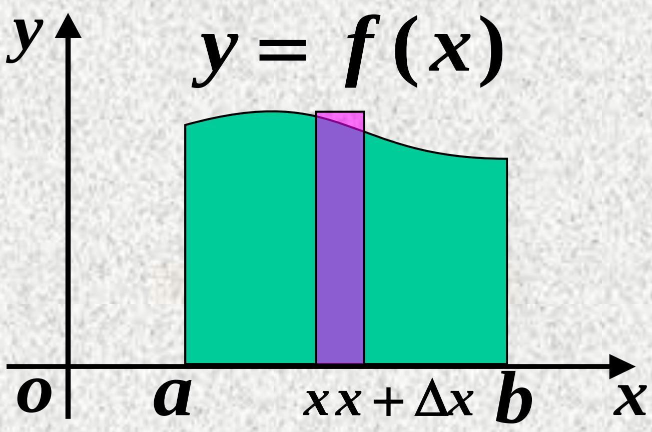
二、体积

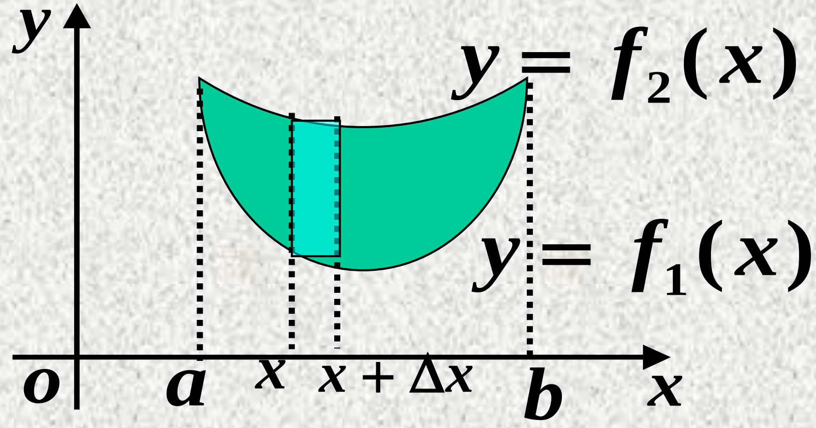
三、平面曲线的弧长

一、平面图形的面积

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{cases} \left(X-\text{型区域}\right)$$

1.直角坐标系情形





曲边梯形的面积

$$dA = f(x)dx$$

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

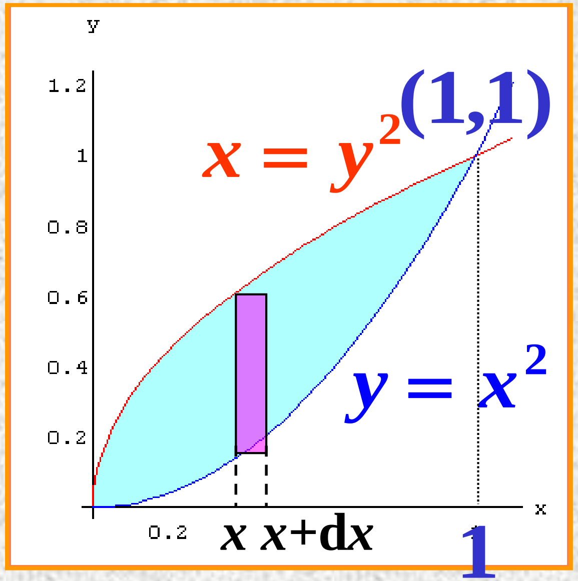
由$y=f_1(x)$和$y=f_2(x)$围成的面积:

$$dA = [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

例 1 计算由两条抛物线$y^2 = x$和$y = x^2$所围成的图形的面积.

解 1) 求交点. $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$ 得交点：(0,0), (1,1)



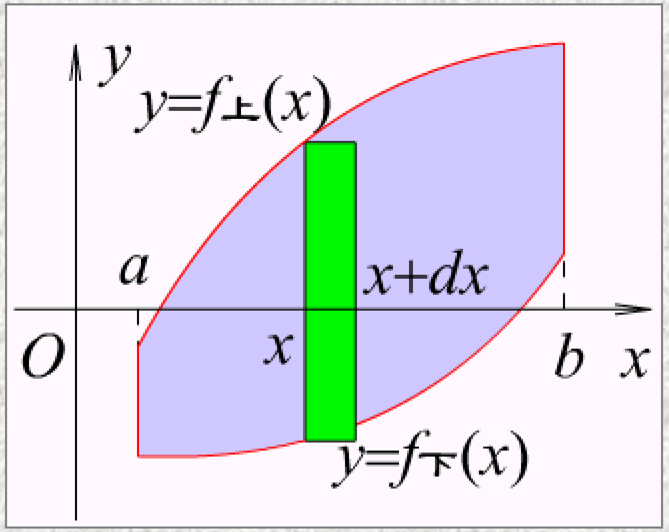
2) 面积元素 $dA = (y_{上} - y_{下})dx$

$$= (\sqrt{x} - x^2)dx$$

3)积分 $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$

$$S=\int_a^b[f_{上}(x)-f_{下}(x)]dx\ .\quad S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy\ .$$

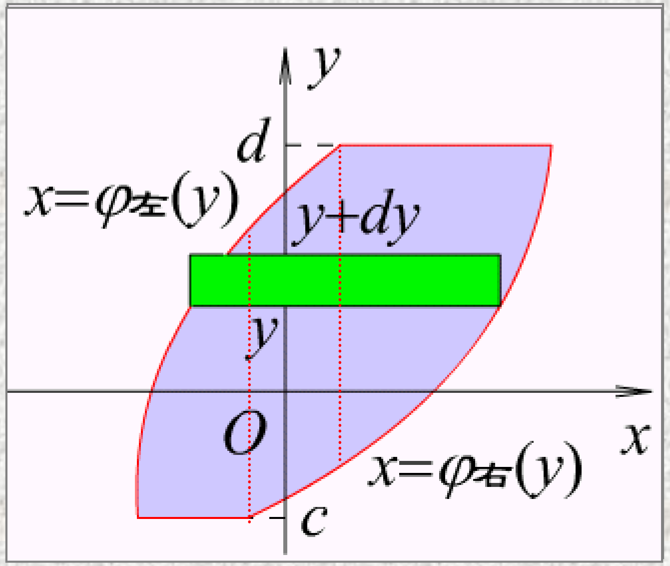
讨论： 由左右两条曲线$x=\varphi_{左}(y)$与$x=\varphi_{右}(y)$及上下两条直线$y=d$与$y=c$所围成的平面图形的面积如何表示为定积分？



提示： 选积分变量,

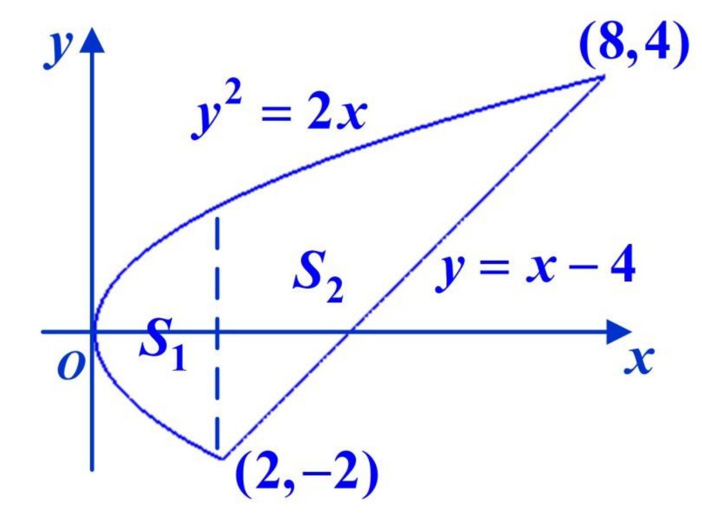
面积元素 $dA=[x_{右}-x_{左}]dy$,

面积为 $S=\int_c^d[\varphi_{右}(y)-\varphi_{左}(y)]dy\ .$



例 2 计算由曲线$y^2=2x$和直线$y=x-4$所围成的图形的面积.

解 由$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点 $(2,-2),(8,4)$,



故 $S=S_1+S_2$

$$=\int_0^2\left[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})\right]dx$$

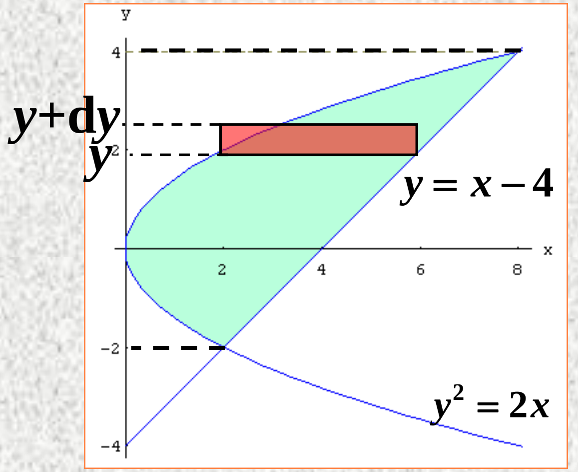
$$+\int_2^8\left[\sqrt{2x}-(x-4)\right]dx$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2}\,x^{3/2}\Big|_0^2+\frac{2}{3}\sqrt{2}\,x^{3/2}\Big|_2^8-\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_2^8 \quad =81$$

例 2 计算由曲线$y^2=2x$和直线$y=x-4$所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases} \Rightarrow (2,-2),\ (8,4).$$

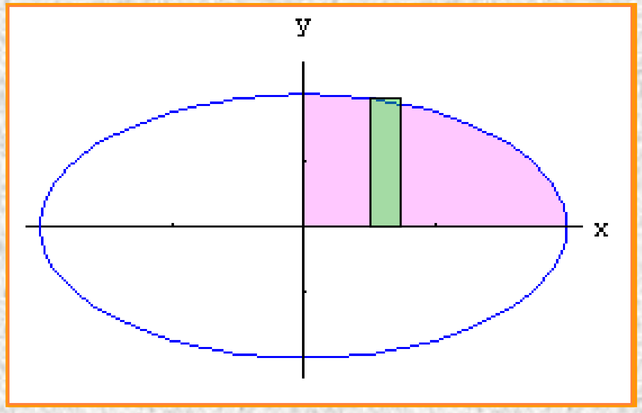


选 y 为积分变量 $y\in[-2,4]$

$$dA=\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy \qquad A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy=18.$$

注：要选取适当的积分变量

例 3 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.



解 椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

由对称性知总面积等于4倍第一象限部分面积.

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,d(a\cos t)$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \pi ab.$$

注：边界为参数方程时，相当于对定积分换元

例4. 求由摆线 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (a > 0)$ 的一拱与 **x** 轴所围平面图形的面积 .

解: $S = \int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t$

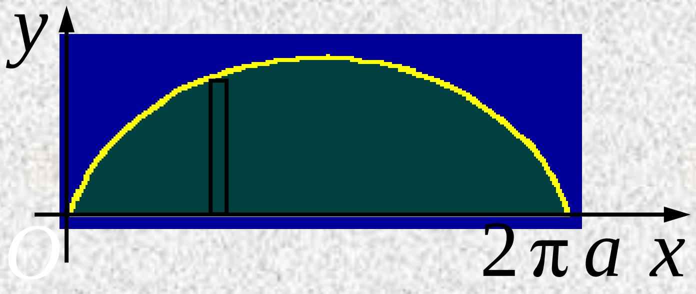
$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\,\mathrm{d}u \qquad (\text{令 } u = \frac{t}{2})$$

$$= 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,\mathrm{d}u$$

$$= 16a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$$



2. 极坐标情形

设 $\varphi(\theta)\in C[\alpha,\beta],\varphi(\theta)\geq 0$，求由曲线 $r=\varphi(\theta)$ 及

射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

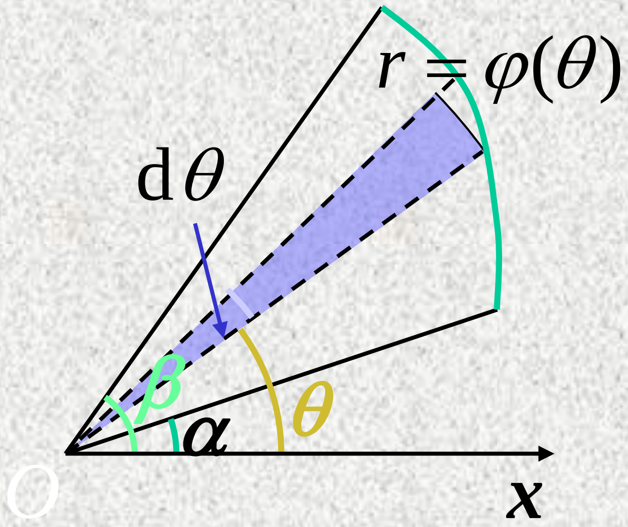
在区间$[\alpha,\beta]$上任取小区间$[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$

所求曲边扇形的面积为

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta}$$

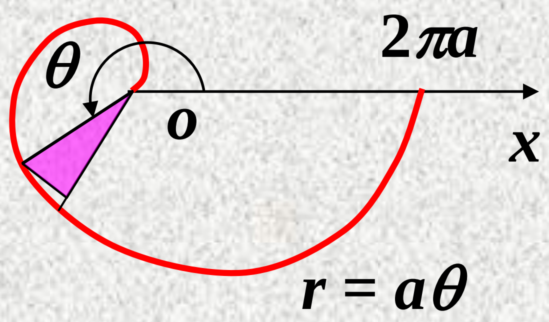


例5: 计算阿基米德螺线 $r = a\theta \quad (a > 0)$

上相应于θ从0 到 2π的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta$$

解：面积元素 $dA = \frac{1}{2}(a\theta)^2 d\theta$

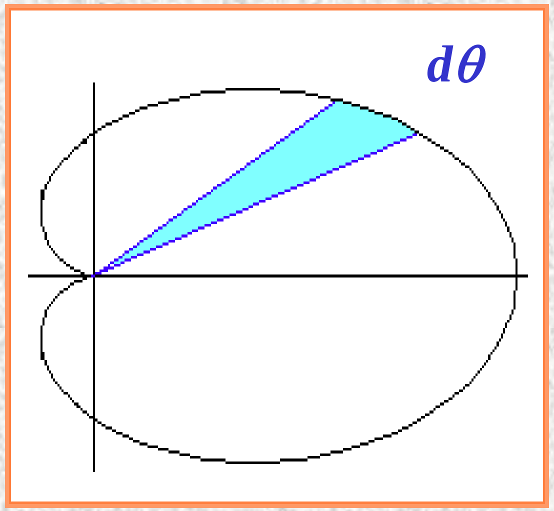


$$A = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\theta^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{3}a^2\pi^3$$

例6 求心形线$r = a(1+\cos\theta)$所围平面图形的面积$(a>0)$.

解 $dA = \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$



利用对称性知

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi} 4\cos^4\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt \quad = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

例7. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 与圆 $r = a$ 所围图形的面积 .

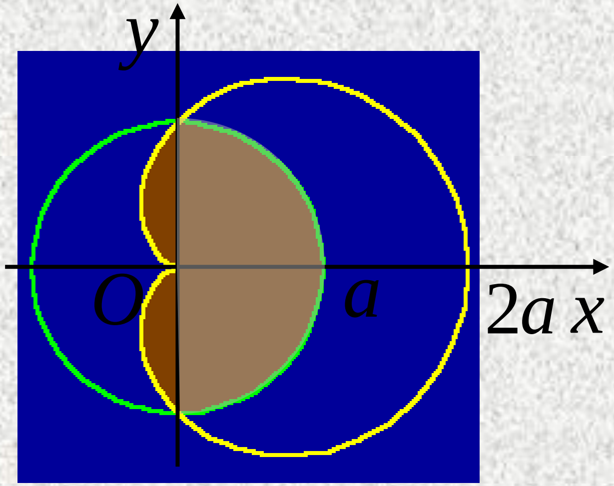
解: 利用对称性，所求面积

$$A = \frac{1}{2}\pi a^2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

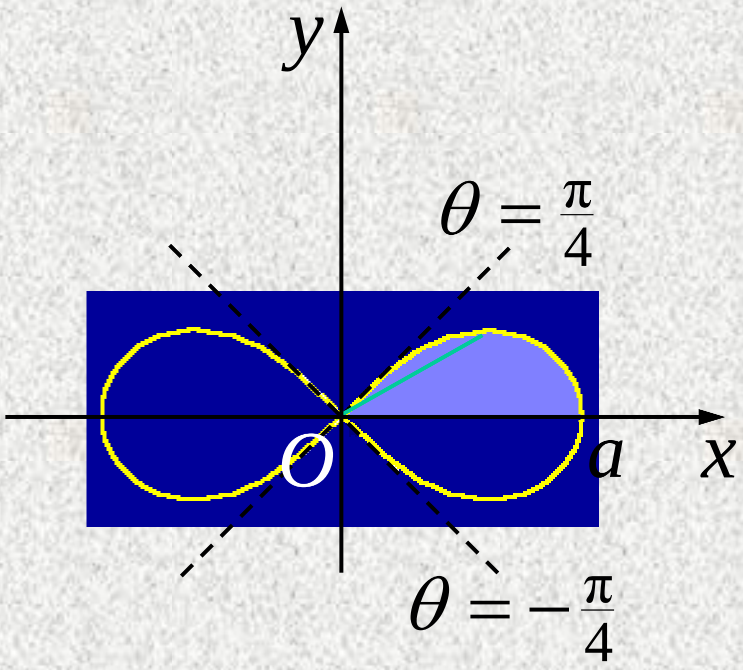
$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2 (\frac{3}{4}\pi - 2)$$

$$= \frac{5}{4}\pi a^2 - 2a^2$$



例8. 求双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围图形面积 .

解: 利用对称性，则所求面积为



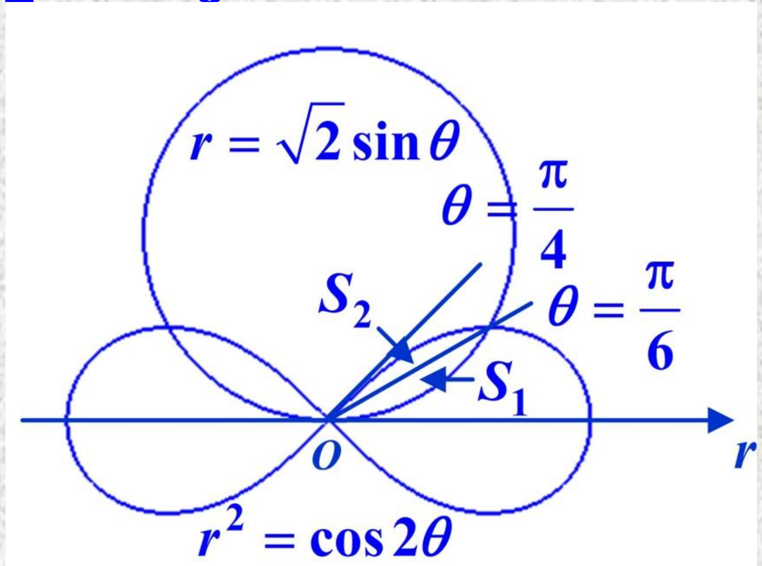
$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \, \mathrm{d}\,\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, \mathrm{d}\,(2\theta)$$

$$= a^2 [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

例9 求 $r=\sqrt{2}\sin\theta,\ r^2=\cos 2\theta$ 所围图形的面积。

解 由 $\begin{cases} r=\sqrt{2}\sin\theta \\ r^2=\cos 2\theta \end{cases}$，得 $\sin\theta=\dfrac{1}{2},\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 。



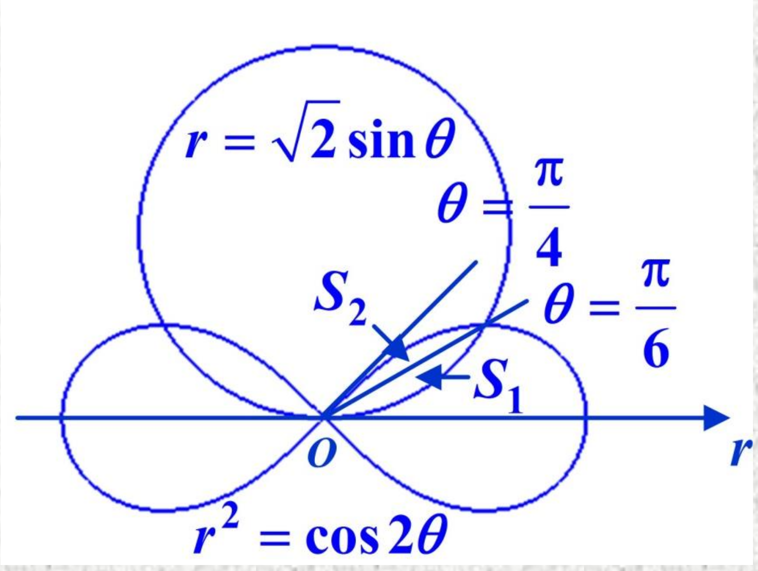
$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^2 d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2\theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$



$$S = 2(S_1 + S_2) = \frac{\pi}{6} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

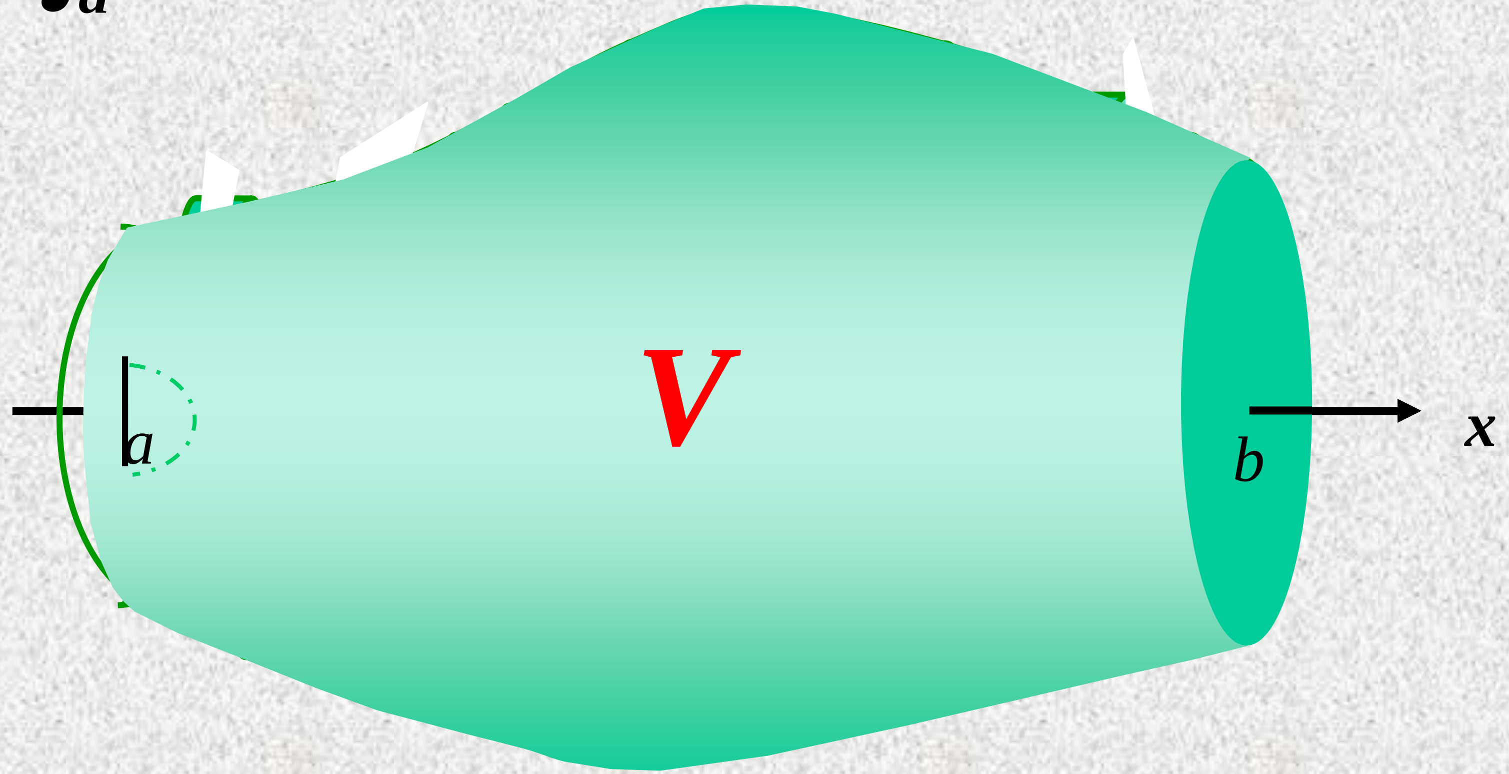
二、立体体积

1. 平行截面面积为已知的立体的体积

已知平行截面面积为 $A(x)$ 的立体

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

$\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$



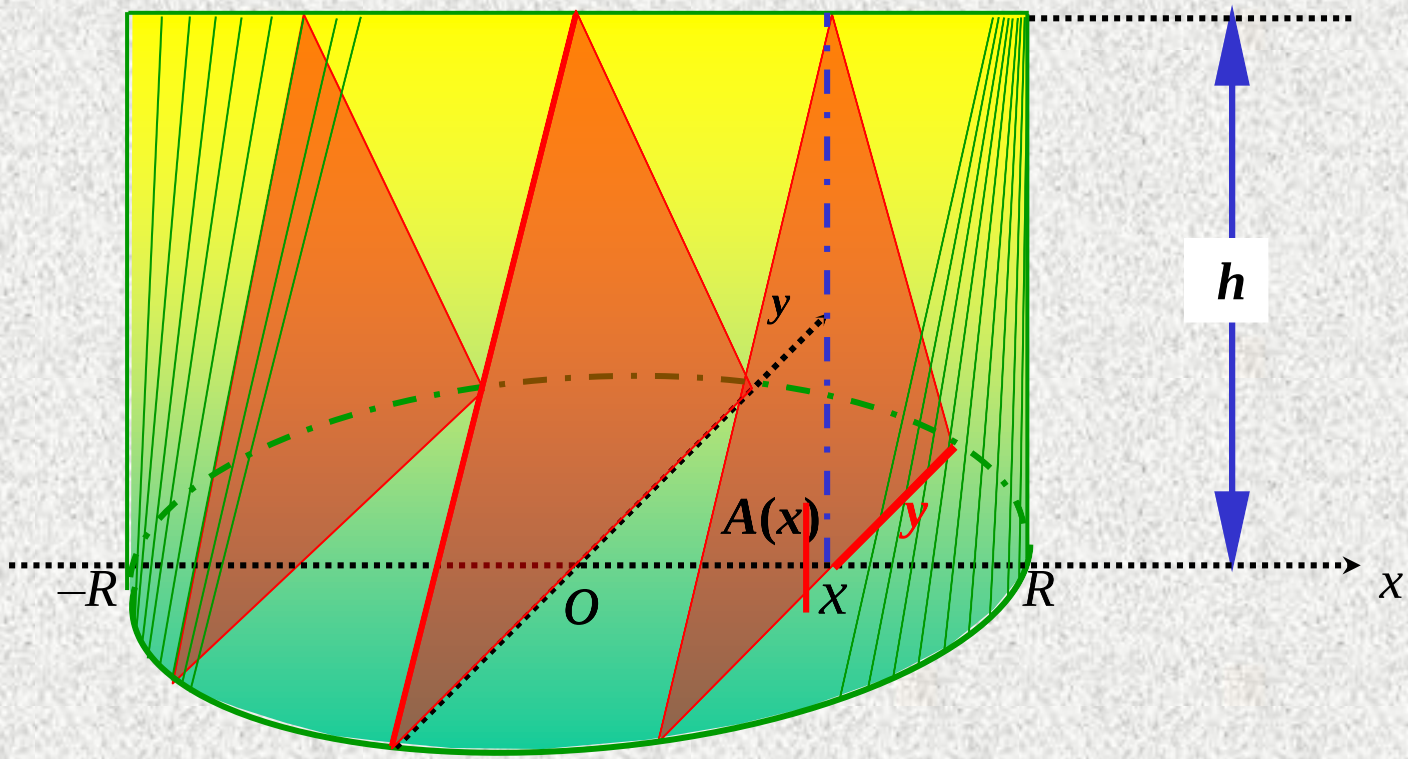
例1：求以半径为*R*的圆为底，平行且等于底圆直径的线段为顶，高为*h*的正劈锥体的体积。

$A(x) = h \cdot y$

$= h\sqrt{R^2 - x^2}$

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = 2h\int_{0}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi R^2 h$$



例2：半径为R的圆柱体被通过其底的直径并与底面成α角的平面所截，得一圆柱楔。求其体积。

截面积

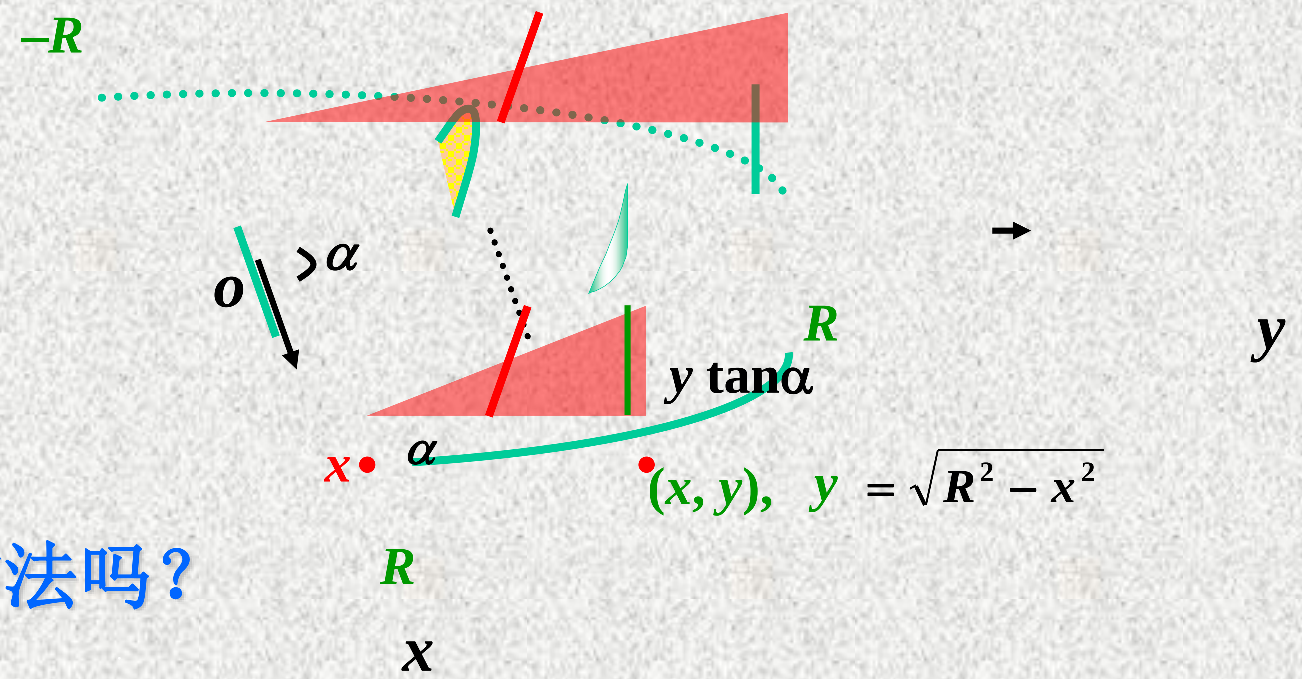
$$A(x)=\frac{1}{2}y^2\tan\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$$

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)dx=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha dx$$

$$=2\int_{0}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha dx$$

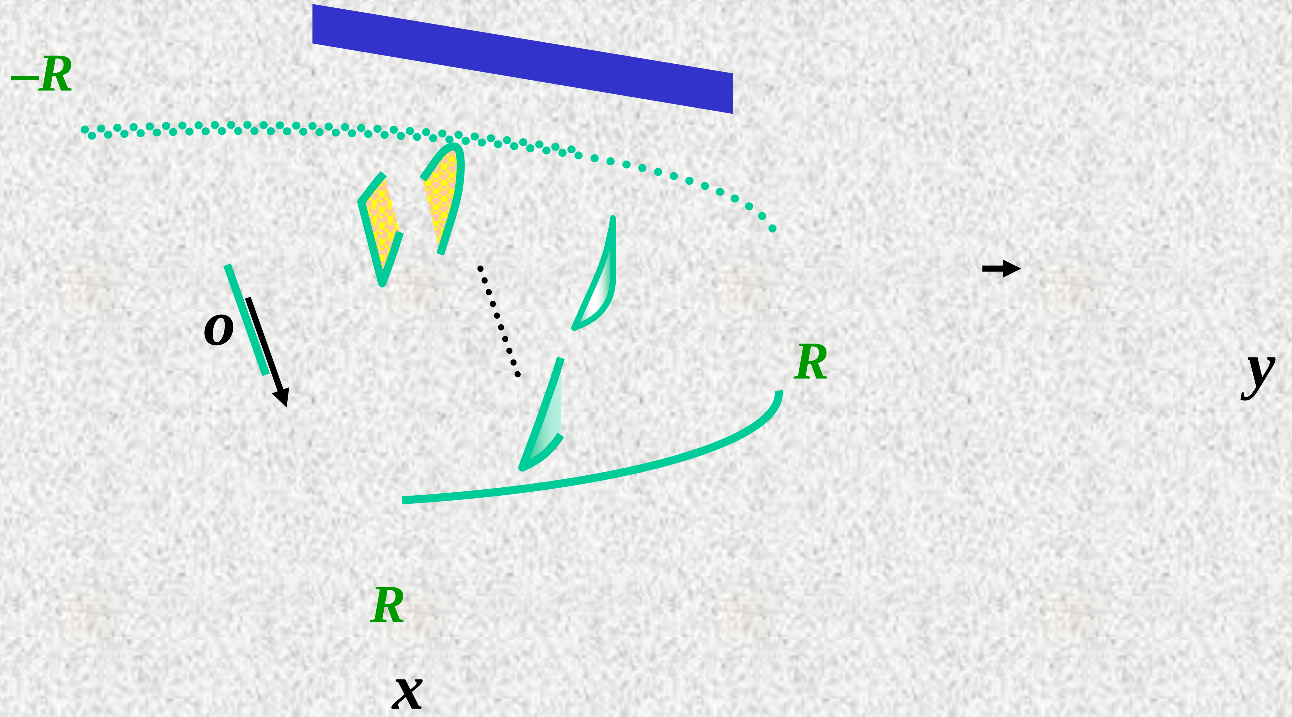
$$=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$



问题：
还有别的方法吗？

半径为R的正圆柱体被通过其底的直径并与底面成α角的平面所截，得一圆柱楔。求其体积。

方法2



半径为R的正圆柱体被通过其底的直径并与底面成α角的平面所截，得一圆柱楔。求其体积。

方法2 $DC=2x=2\sqrt{R^2-y^2}$

$BC=y\tan\alpha$

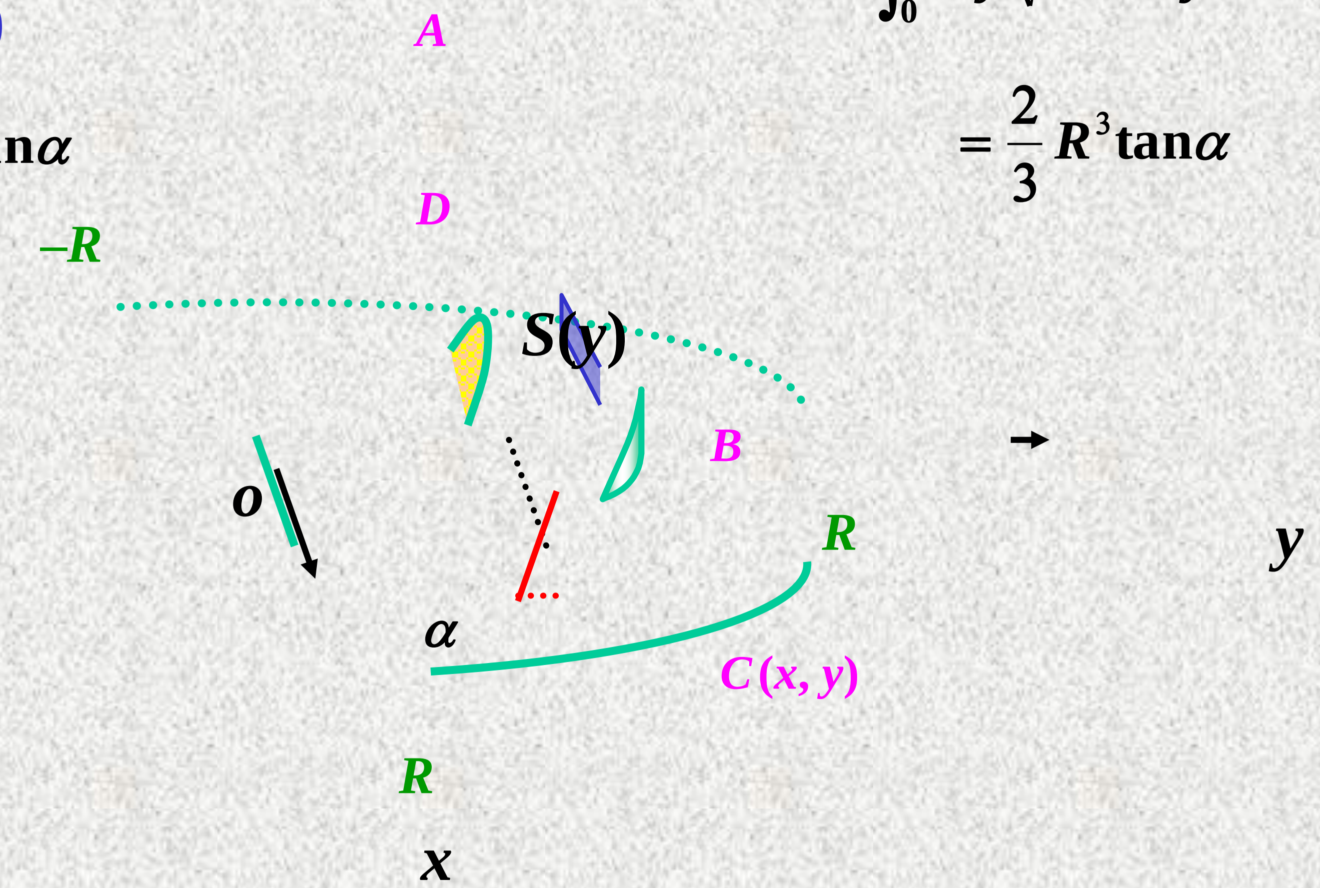
截面积 $S(y)$

$=2y\sqrt{R^2-y^2}\tan\alpha$

$$V=\int_0^R S(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^R 2y\sqrt{R^2-y^2}\tan\alpha\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

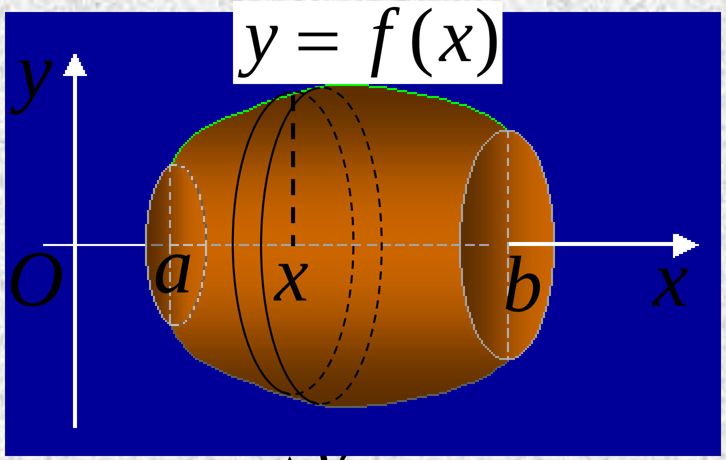


2、旋转体的体积

1）连续曲线段 $y = f(x)\ (a \le x \le b)$ 绕 x 轴

轴旋转一周围成的立体体积时，有

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$



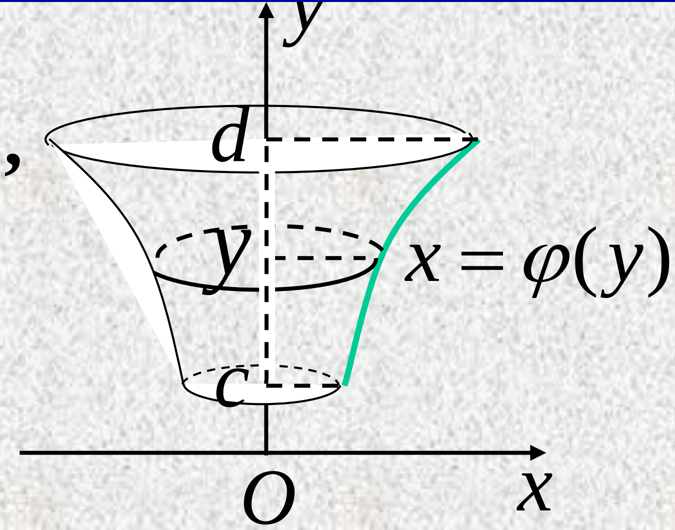
2）当考虑连续曲线段

$x = \varphi(y)\ (c \le y \le d)$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时，

有

$$V = \int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 \mathrm{d}y$$

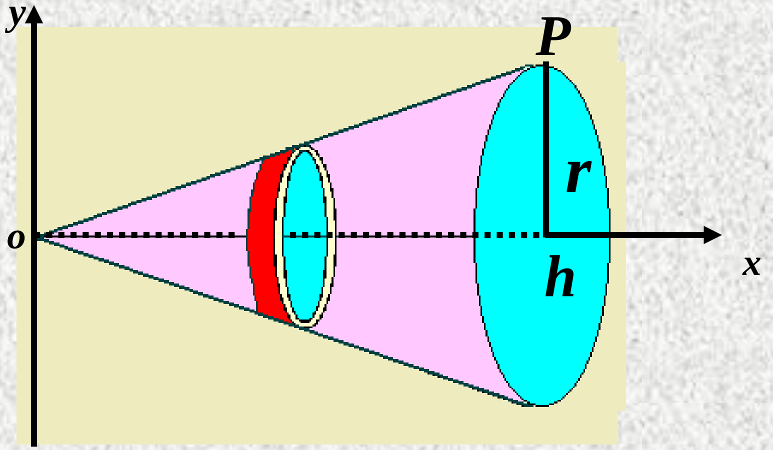


注 上述两种直接可用公式计算的均属于标准情况，即旋转轴是曲边梯形的一个边，且与曲边相对。对于非标准情况，通常可以将其转换为标准情况。

例 3 连接坐标原点O及点$P(h,r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形. 将它绕x轴旋转构成一个底半径为r、高为h的圆锥体，计算圆锥体的体积.

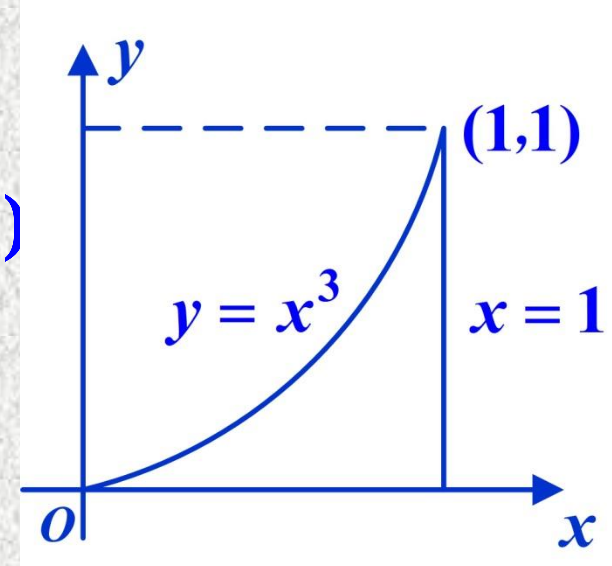
解 直线OP方程为

$$y=\frac{r}{h}x$$



$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi h r^2}{3}.$$

例4：求由$y=x^3, x=1$以及x轴围成的平面图形分别绕x轴，y轴旋转一周所形成的立体的体积。



解 由$\begin{cases} y=x^3 \\ x=1 \end{cases}$ 得交点 $(0,0),(1,1)$

$$V_x=\pi\int_0^1 x^6 dx=\frac{\pi}{7}$$

$$V_y=\pi\cdot 1^2\cdot 1-\pi\int_0^1 x^2 dy$$

$$=\pi-\pi\int_0^1 y^{\frac{2}{3}} dy=\pi-\frac{3}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi$$

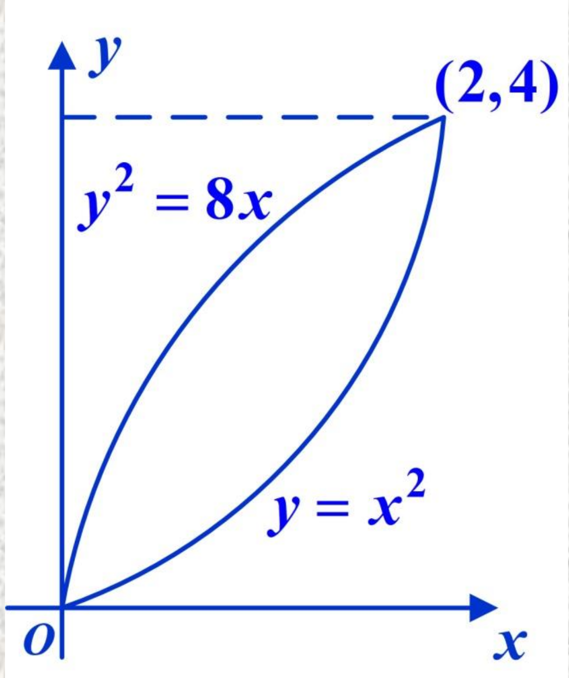
例5 求 $y=x^2$，$y^2=8x$ 所围图形分别绕 **x,y** 轴旋转而成的旋转体的体积。

解 由 $\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=8x \end{cases}$ 得交点(0,0),(2,4).

$$V_y=V_1-V_2$$

$$=\pi\int_0^4 x_1^2dy-\pi\int_0^4 x_2^2dy$$

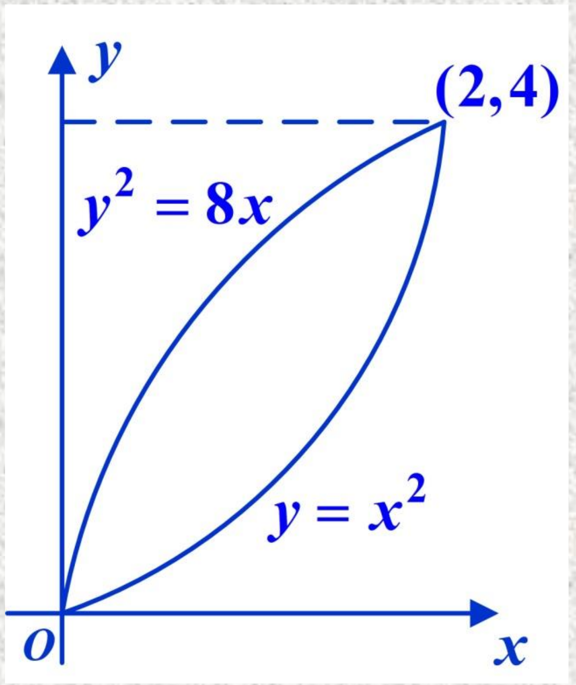
$$=\pi\int_0^4 ydy-\pi\int_0^4\left(\frac{y^2}{8}\right)^2dy=\frac{24}{5}\pi$$



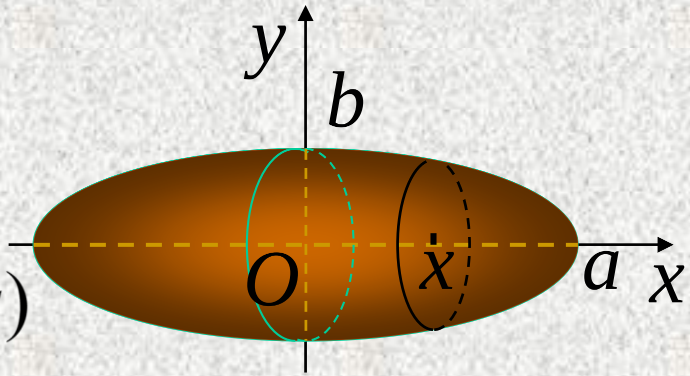
$$V_x = V_1 - V_2$$

$$= \pi\int_0^2 y_1^2 dx - \pi\int_0^2 y_2^2 dx$$

$$= \pi\int_0^2 8x dx - \pi\int_0^2 \left(x^2\right)^2 dx$$



例6. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ **所围图形绕 x 轴旋转而转而成的椭球体的体积.**



解: 方法1 利用直角坐标方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\qquad(-a\le x\le a)$$

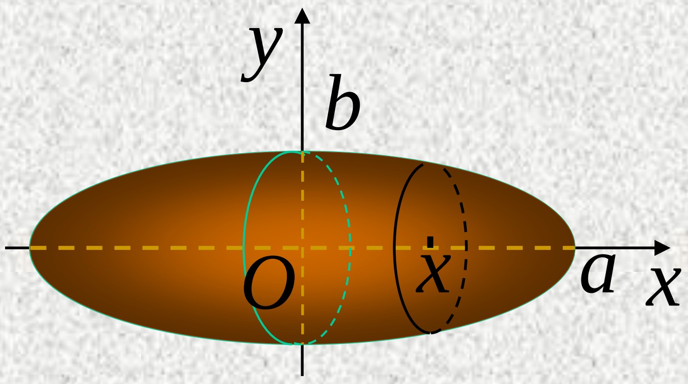
则 $$V=2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x$$

(利用对称性)

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

方法2 利用椭圆参数方程



$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

则 $V = 2\int_0^a \pi y^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab^2 \sin^3 t \, \mathrm{d}t$

$$= 2\pi ab^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

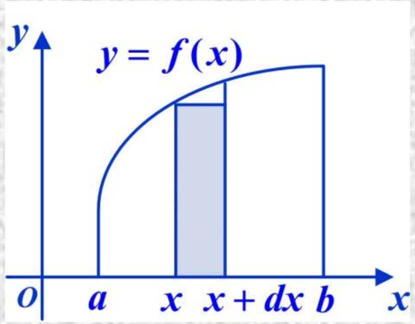
$$= \frac{4}{3}\pi ab^2$$

特别当$b = a$ 时, 就得半径为a 的球体的体积 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

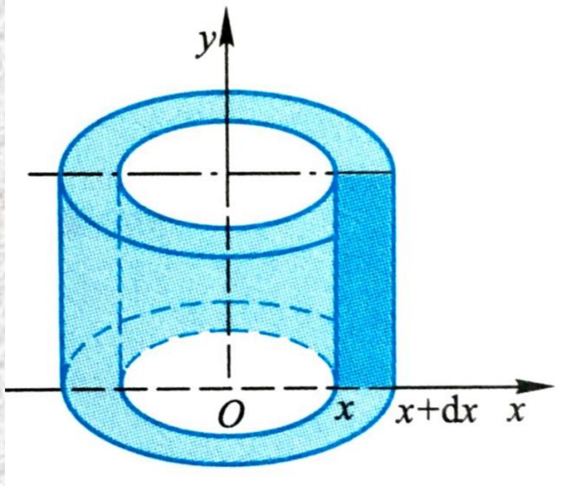
例7 证明由平面图形 $0 \le a \le b, 0 \le y \le f(x)$

（$f(x)$ 连续）绕 y 轴旋转而成的立体的体积为

$$\boxed{V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx}$$ 公式



证 $\forall [x, x+dx] \subset [a,b]$

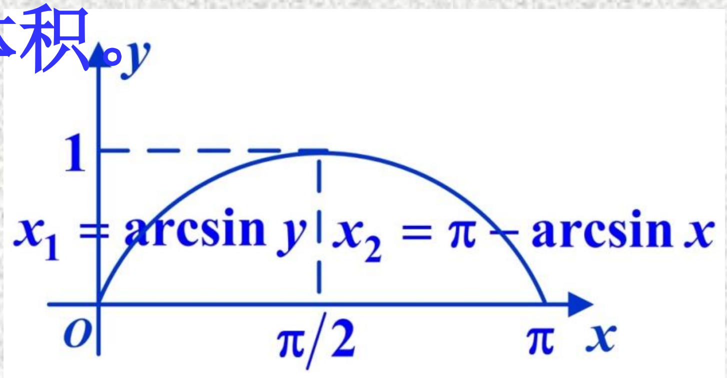


$$\Rightarrow dV = 2\pi xf(x)dx$$

$$\Rightarrow V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

——柱壳法

例8　求 $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$ 与 x轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。



$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

$$=2\pi\int_0^{\pi} x\sin x dx=-2\pi\int_0^{\pi} xd\cos x$$

$$=-2\pi\left(x\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos xdx\right)$$

$$=-2\pi\left(-\pi-\sin x\Big|_0^{\pi}\right)=2\pi^2$$

三、平面曲线的弧长

1 直角坐标情形:

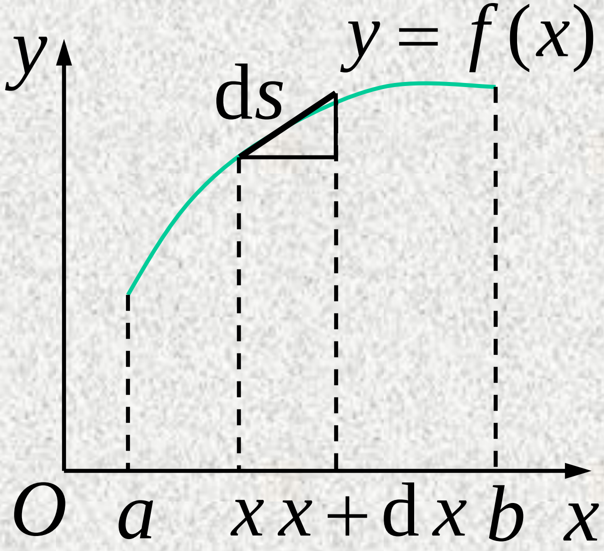
$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

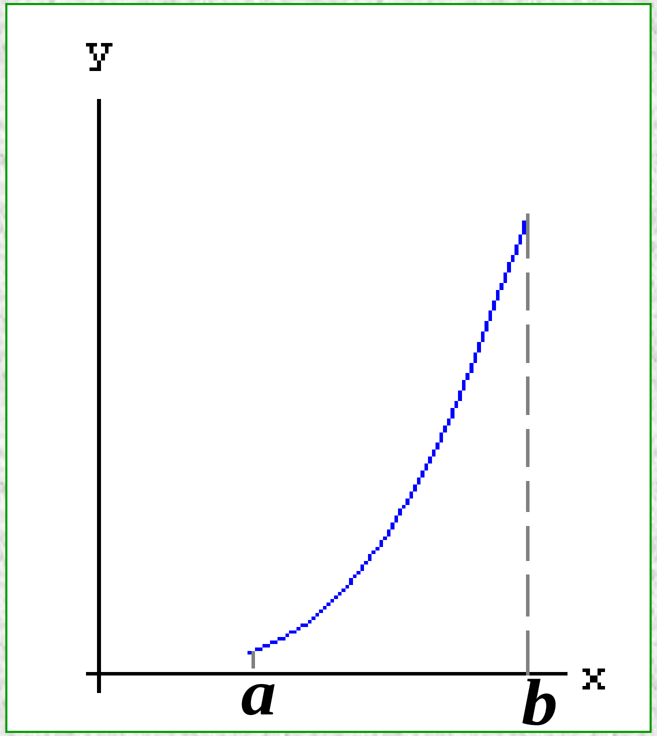
因此所求弧长

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$



$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$$

例 1 计算曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上相应于$x$从$a$到$b$的一段弧的长度.



解 $\because y'=x^{\frac{1}{2}}$,

$$\therefore ds=\sqrt{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}dx=\sqrt{1+x}dx,$$

所求弧长为

$$s=\int_a^b \sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}].$$

例2. 求连续曲线段 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}\,t$ **的弧长.**

解: $\because$ 此题 $\cos x\ge 0$, $\therefore\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4$$

2 参数方程情形:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

弧长元素(弧微分) :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

$$= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

因此所求弧长

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^{2}(t)+\psi'^{2}(t)}dt$$

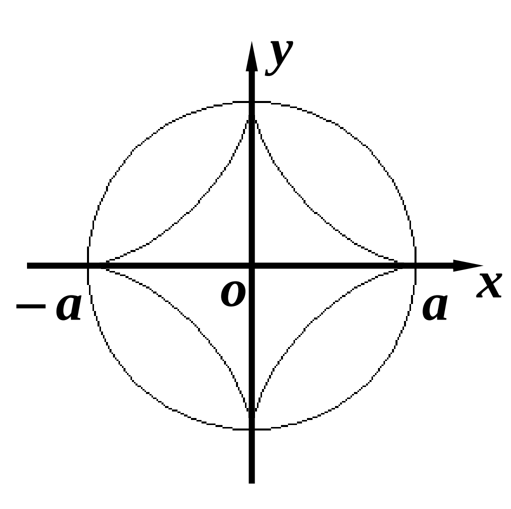
例 3 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的全长.

解 星形线的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos^{3}t \\ y=a\sin^{3}t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

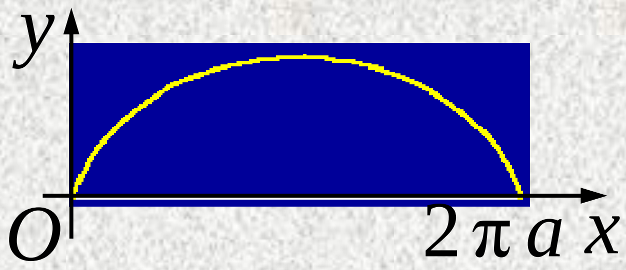
根据对称性 $s=4s_1$ 第一象限部分的弧长

$$s=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^{2}+(y')^{2}}dt=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t dt$$

$$=6a.$$



例4. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长 .



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t$

$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

3 极坐标情形:

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

令 $x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta$，**则得**

弧长元素(弧微分)：

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

因此所求弧长

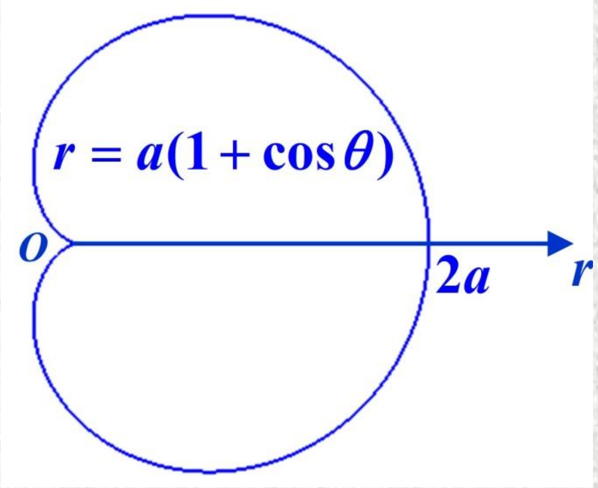
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

例5：求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长。

解 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}$

$=\sqrt{[a(1+\cos\theta)]^2+(-a\sin\theta)^2}$

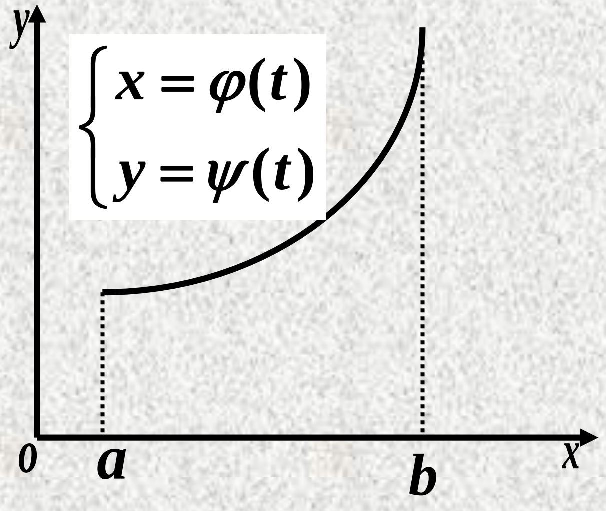
$=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}=2a\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$



故 $s=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$

$=4a\int_0^{\pi}\cos\dfrac{\theta}{2}d\theta=8a\sin\dfrac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a$

求弧长的公式小结：



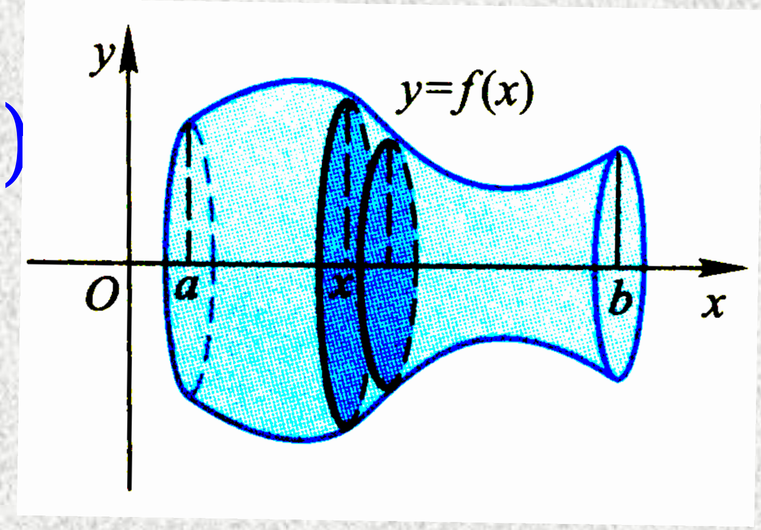
直角坐标系下 $s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$

参数方程情形下 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

极坐标系下 $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

四、旋转体的侧面积

设函数 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 在区间[a,b]上导数连续，则曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,\ x=b,\ x$ 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的侧面积为



$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

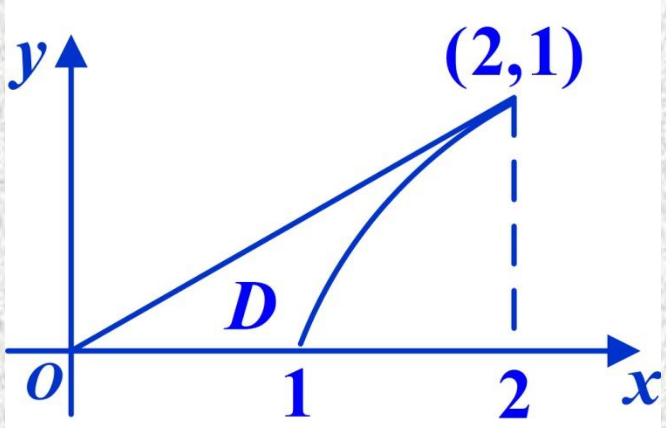
底面周长:$2\pi f(x)$　　高:$ds=\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

$$dS=2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx;\quad S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

例6：求由直线 $y=\frac{1}{2}x$，曲线 $y=\sqrt{x-1}$

及 x 轴所围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积。 $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

解 $y=\sqrt{x-1}\ (0\leqslant x\leqslant 2)$



绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积为

$$S_1=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)^2}dx$$

$$=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

由 $y=\frac{1}{2}x(0\leqslant x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转

一周所得旋转体的表面积为

$$S_2=2\pi\int_0^2\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^2 xdx=\sqrt{5}\pi$$

故所求表面积为 $S_1+S_2=\frac{\pi}{6}\left(11\sqrt{5}-1\right).$

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

第三节 定积分的物理应用

一、变力、变距离作功

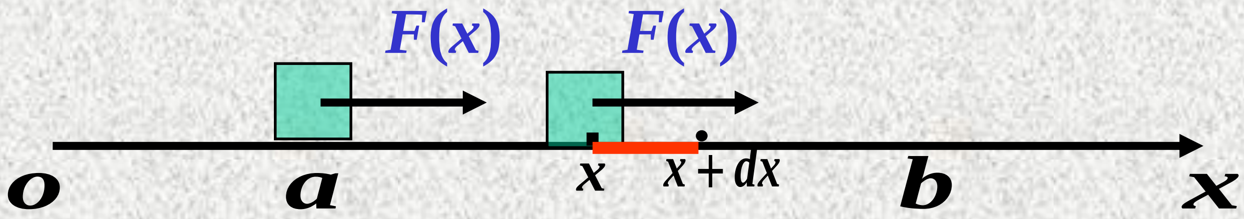
二、水压力

三、引力

四、小结

一、变力沿直线做功问题

问题：物体在变力$F(x)$的作用下，从x轴上a点移动到b点，求变力所做的功。



用微元法

1）在$[a,b]$上考虑小区间$[x, x+\Delta x]$，在此小区间上

$$\Delta W \approx dW = F(x)dx$$

2）将dW从a到b求定积分，就得到所求的功

$$W = \int_a^b dw = \int_a^b F(x)dx$$

例1: 已知弹簧每伸长 $0.02\ m$ 要用 $9.8\ N$ 的力，求把弹簧拉长 $0.1\ m$ 需作多少功

解 由题设 $9.8=0.02k$ $k=490$ $F=490x$

$$\forall[x, x+dx]\subset[0,0.1]$$

$$dW = F(x)dx = 490xdx$$

$$W = \int_0^{0.1} 490xdx = 2.45 \quad (J)$$

例2. 一蓄满水的圆柱形水桶高为 **5 m**, 底圆半径为**3m**, 试问要把桶中的水全部吸出需作多少功 ?

解：建立坐标系如图. 在任一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的一薄层水的重力为

$$g \cdot \rho \cdot \pi 3^2 \,\mathrm{d}x \quad \textbf{(KN)}$$

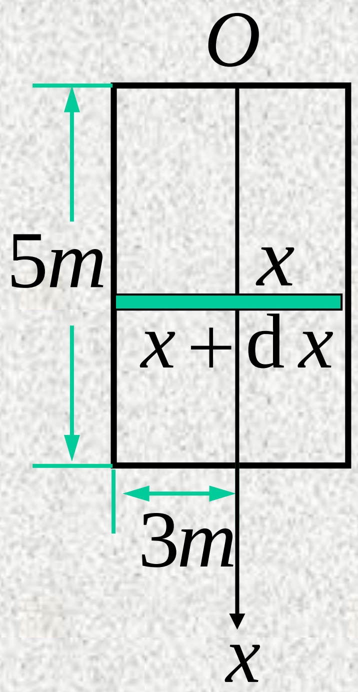
这薄层水吸出桶外所作的功(功元素)为

$$\mathrm{d}W = 9\pi g \rho x \,\mathrm{d}x$$

故所求功为

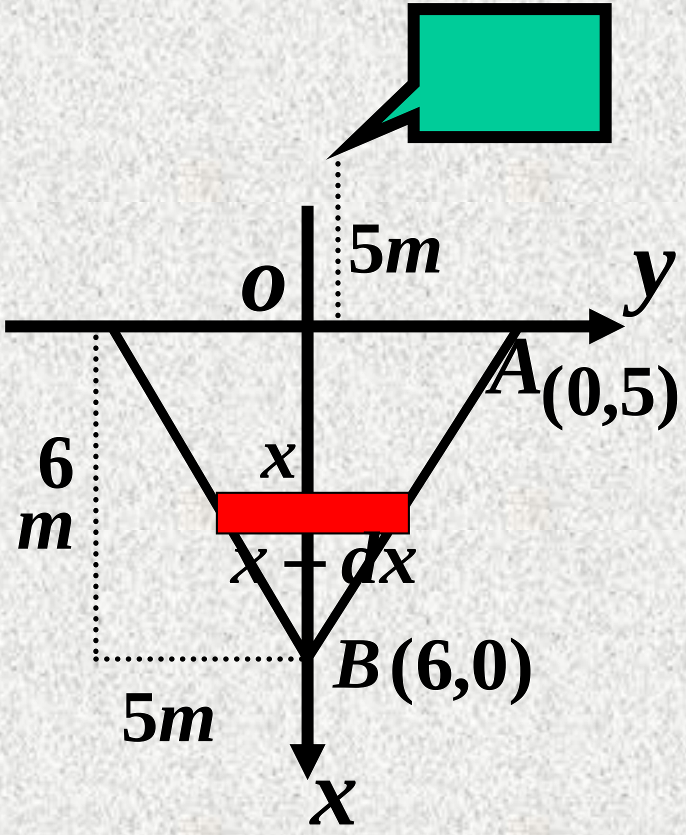
$$W = \int_0^5 9\pi g \rho x \,\mathrm{d}x = 9\pi g \rho \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5$$

$$= 112.5\pi g \rho \quad \textbf{(KJ)}$$



设水的密度为 ρ

例　一圆锥形容器尺寸如图，若将容器中的水抽到上方5米高的水箱中，求所作的功？水密度为1



解：建立坐标系如图

需计算薄片的宽度

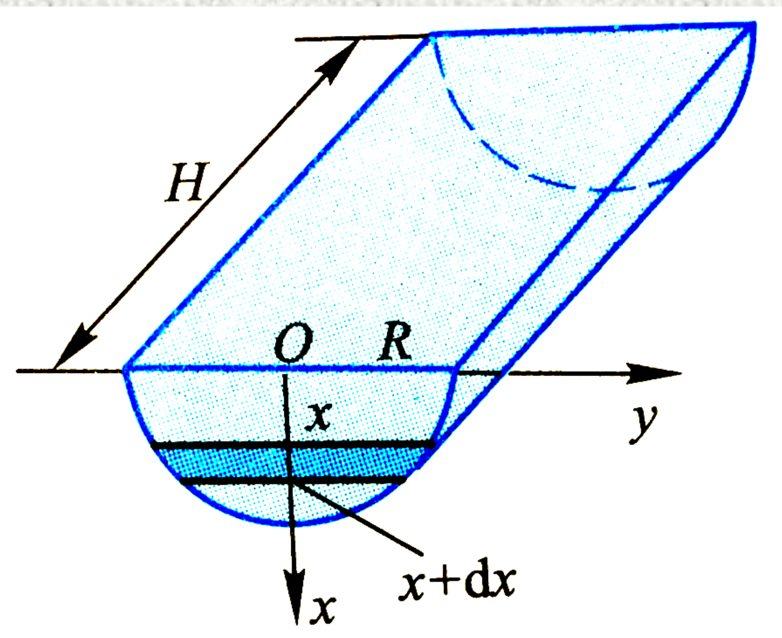
AB直线方程: $\frac{x}{6}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow y=\frac{5}{6}(6-x)$

$$dW = \pi g y^2 (x+5)dx$$

$$= \frac{25}{36}\pi g(6-x)^2(x+5)dx$$

$$W = \frac{25}{36}\pi g\int_0^6 (6-x)^2(x+5)dx$$

例3 如图，一半圆柱形水槽的长为H，截面半径为R。若水槽盛满了水，求把水全部抽尽需做的功W。(水的密度为ρ)



解 如图，在水槽截面上，

圆周的方程为 $x^2+y^2=R^2(x\geqslant 0)$

任取 $[x,x+dx]$ 薄水层

$$dW=2\rho gHx\sqrt{R^2-x^2}dx$$

$$W=2\rho gH\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{2}{3}\rho gHR^3$$

例4：用铁锤把钉子钉入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板的深度成正比，铁锤在第一次锤击时将铁钉击入1厘米，若每次锤击所作的功相等，问第n次锤击时又将铁钉击入多少？

解 设木板对铁钉的阻力为 $f(x)=kx,$

第一次锤击时所作的功为

$$w_1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 kxdx=\frac{k}{2},$$

设n次击入的总深度为 h厘米

n次锤击所作的总功为 $w_h=\int_0^h f(x)dx=\int_0^h kxdx=\frac{1}{2}kh^2$

$$W_1 = \frac{k}{2}, \qquad W_h = \frac{kh^2}{2},$$

依题意知，每次锤击所作的功相等.

$$w_h = nw_1 \Rightarrow \frac{kh^2}{2} = n \cdot \frac{k}{2},$$

n次击入的总深度为 $h = \sqrt{n},$

第n次击入的深度为 $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$

二、水压力

理论根据：**水的比重为，在深度为h处的压强为**: $p = h\gamma$

压力= 压强×面积

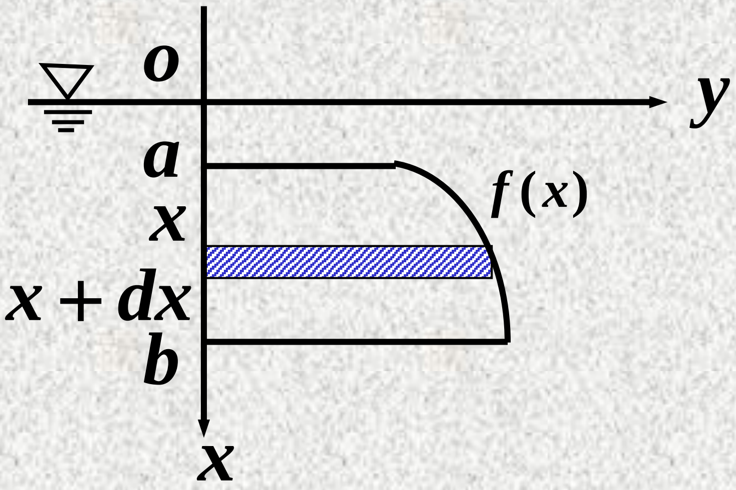
如果有一面积为A 的平板水平地放置在水深为h处，

那么，平板一侧所受的水压力为： $P = p\cdot A$

如果这个平板铅直放置在水中,平板一侧所受的水压力?

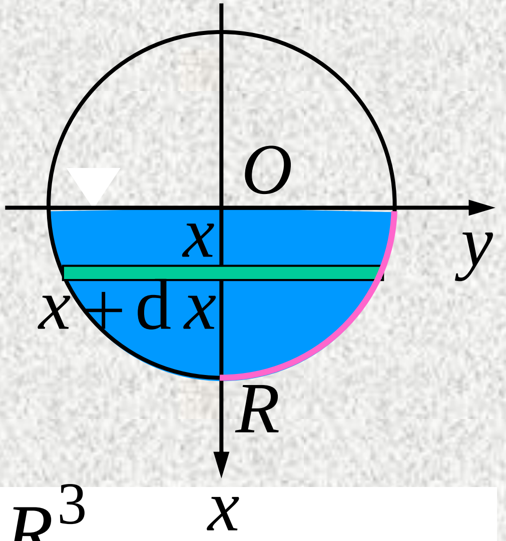
$$P = \int_a^b dP$$

$$= \int_a^b \gamma x f(x)dx \quad (\gamma \text{ 为比重})$$



例5. 一水平横放的半径为$\boldsymbol{R}$ 的圆桶,内盛半桶密度为ρ 的液体，求桶的一个端面所受的侧压力.

解: 建立坐标系如图. 所论端面的边际方程为 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}\ (0\le x\le R)$



利用对称性，侧压力元素

$$\mathrm{d}F = 2g\,\rho\,x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

端面所受侧压力为

$$F=\int_0^R 2g\,\rho\,x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2g\,\rho}{3}R^3$$

问：盛满液体呢？

说明：当桶内充满液体时，小窄条上的

侧压力元素 $\mathrm{d}P = 2g\rho(R+x)\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$,

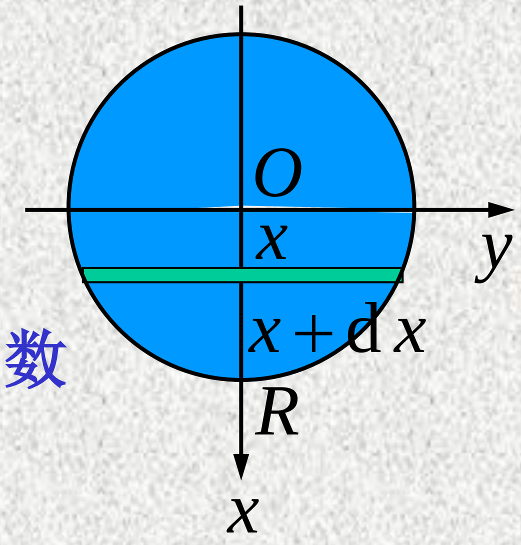
故端面所受侧压力为

$$P = \int_{-R}^{R} 2g\rho(R+\underline{x})\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

奇函数

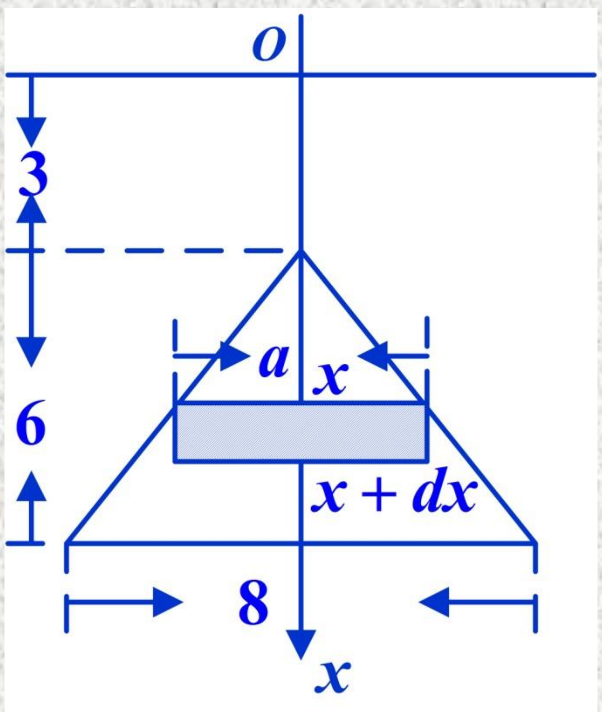
$$= 4Rg\rho\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi g\rho R^3$$



例5 一底为8m，高为6m的等腰三角形片，垂直沉没在水中，顶在上,底在下且与水面平行，而顶离水面3m,求它每面所受压力。(水密度为ρ)

解如图：片边际方程：$y=\frac{2}{3}(x-3)$



小窄条所受的水压力元素为

$$dF=\rho g x\cdot\frac{4}{3}(x-3)dx$$

故所求水压力为

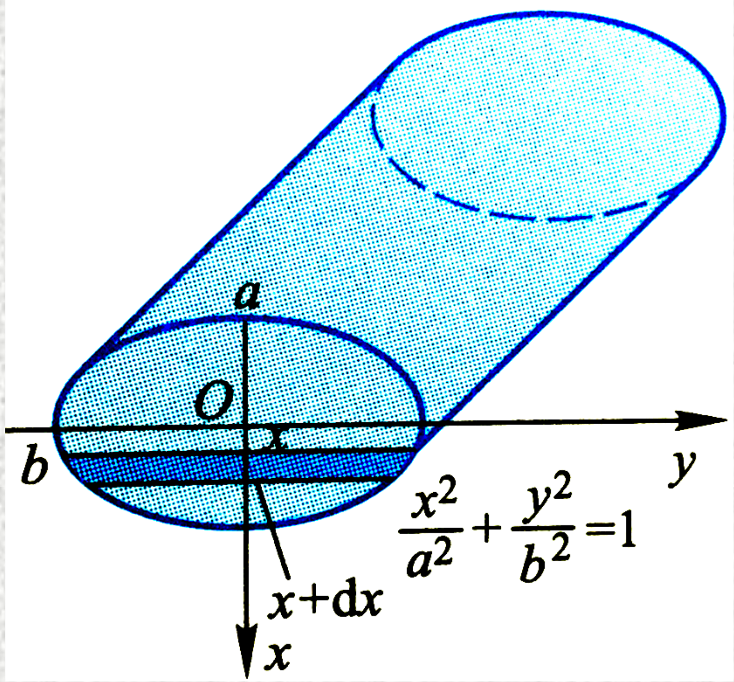
$$F=\frac{4}{3}\rho g\int_3^9\left(x^2-3x\right)dx=168\rho g(\mathrm{N})$$

例6 洒水车的水箱是一个横放的椭圆柱体，其顶头面的长、短轴分别为bm和am。当水箱是装满水时，求顶头面所受的压力。(水密度为ρ)

解 如图窄条所受压力

$$dF = \frac{2b\rho g(a+x)}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

所求压力为



$$F = \frac{2b\rho g}{a}\int_{-a}^{a}(a+x)\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

$$= 4b\rho g\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = 4b\rho g \cdot \frac{1}{4}\pi a^2 = \pi a^2 b\rho g(\mathrm{N})$$

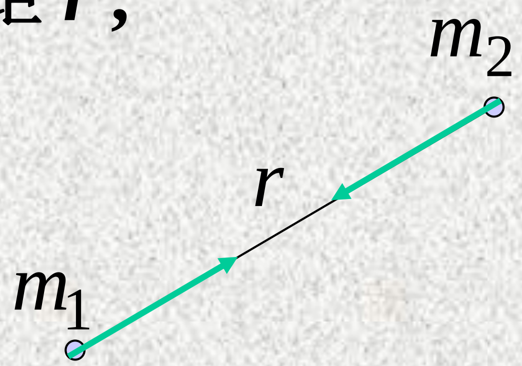
三、 引力问题

质量分别为 m_1 , m_2的质点 , 相距 $\boldsymbol{r}$,

二者间的引力 :

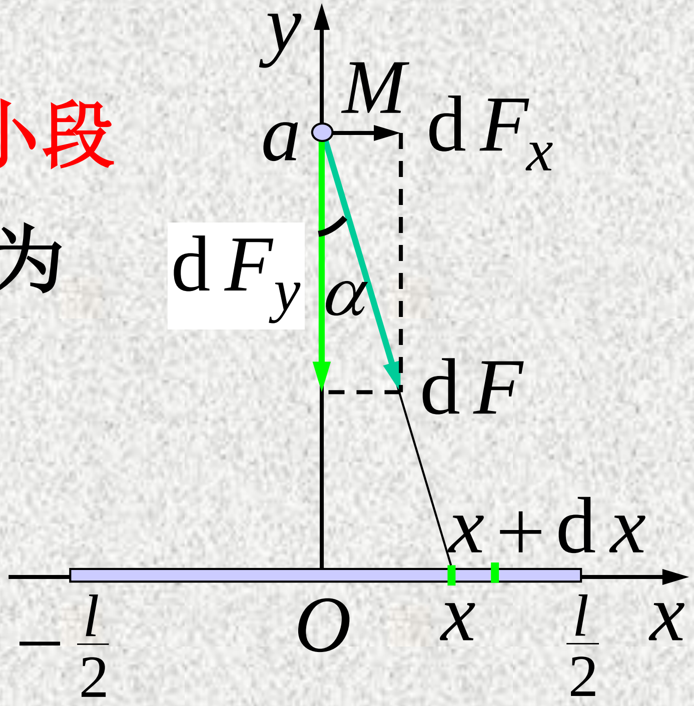
大小: $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

方向：沿两质点的连线



若考虑物体对质点的引力, 则需用积分解决 .

例7. 设有一长度为 **l**, 线密度为μ 的均匀细直棒, 在其中垂线上距 **a** 单位处有一质量为 **m** 的质点 **M**, 试计算 该棒对质点的引力.



解: 建立坐标系如图. 细棒上小段 $[x, x+\mathrm{d}x]$对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F = k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

故铅直分力元素为

$$\mathrm{d}F_y = -\mathrm{d}F\cdot\cos\alpha$$

$$= -k\frac{m\mu\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} = -km\mu a\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

棒对质点的引力的铅直分力为

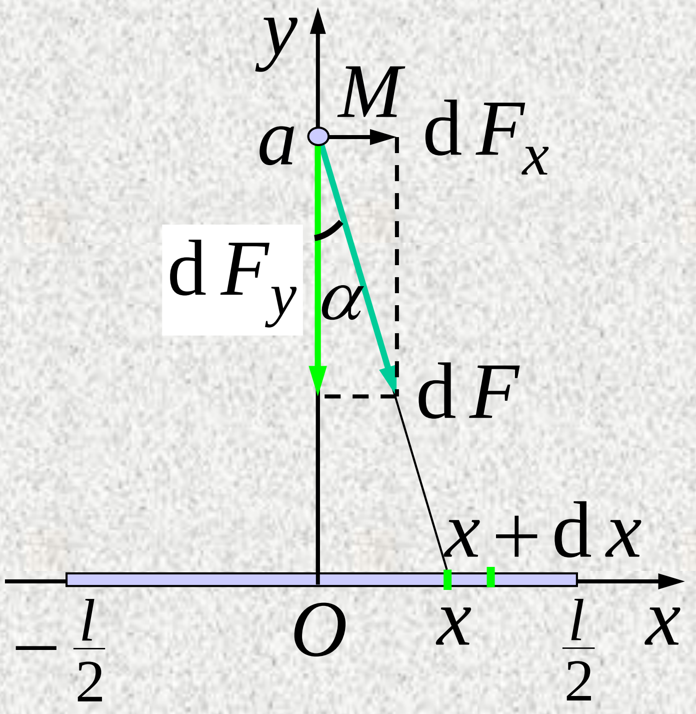
$$F_y = -2km\mu a\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= -2km\mu a\left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$= -\frac{2km\mu l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$

棒对质点引力的水平分力 $F_x = 0$.

故棒对质点的引力大小为 $\vec{F} = \{0, F_y\}$



利用对称性

说明:

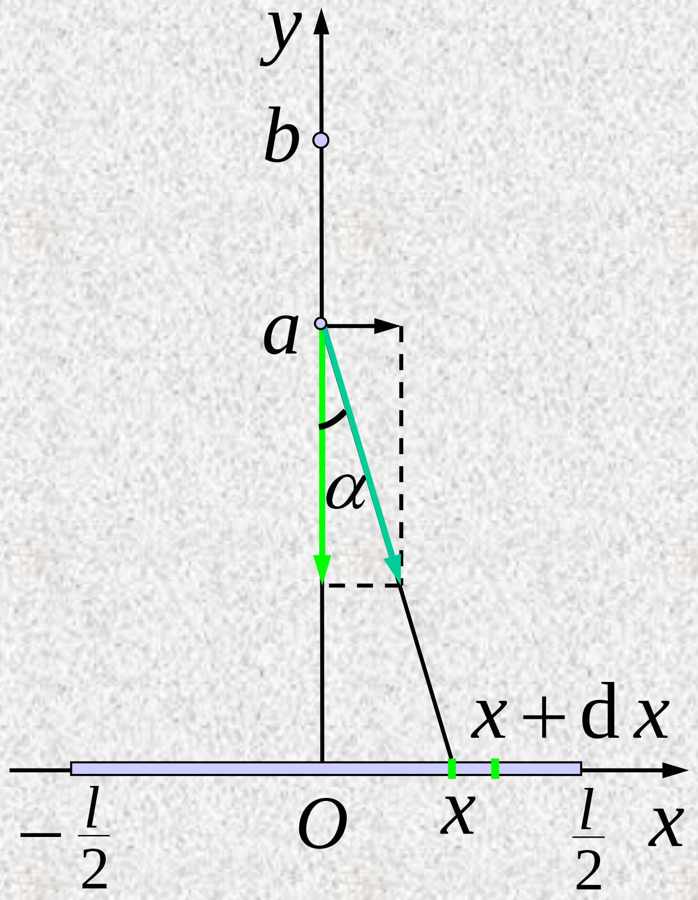
当细棒很长时,可视 l 为无穷大 ,

此时引力大小为 $\dfrac{2km\mu}{a}$

方向与细棒垂直且指向细棒 .

$$\boxed{F = \frac{2km\mu l}{a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}}$$

$\mathrm{d}y$



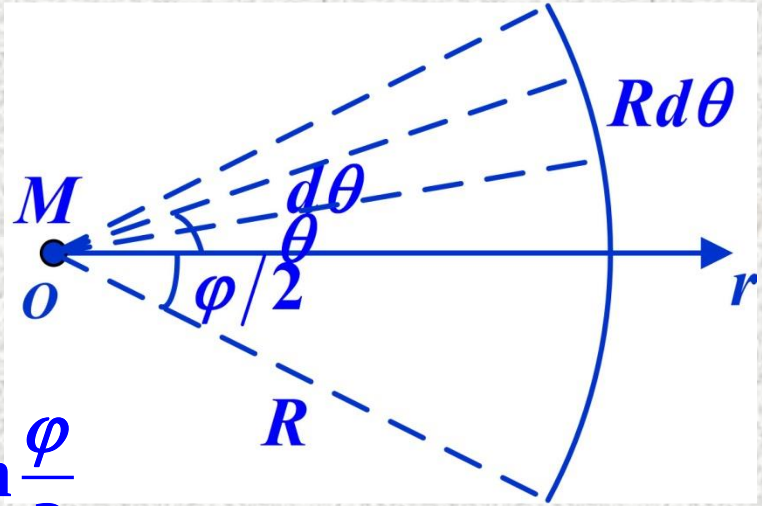
例 8 设有一半径为 R，中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为ρ。在圆心处有一质量为m的质点M，求细棒对质点 M 的引力。

解 如图，建立极坐标系。由对称性，圆弧对质点的引力在方向上的分力 $F_y = 0$。

任取弧棒**ds=** $Rd\theta$

$$dF = k\frac{m\cdot R\rho d\theta}{R^2}$$

$$dF_x = dF\cdot\cos\theta$$



$$F_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{km\rho}{R}\cos\theta\, d\theta = \frac{2km\rho}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\vec{F} = \{F_x, 0\}$$