

2022 年数学建模模拟题

一、简答题

1. 简述插值与拟合的异同。
2. 什么是三次样条插值函数？
3. 将室内一支读数为 26 度的温度计放到室外。10 分钟后，温度计的读数为 30 度，又过了 10 分钟，读数为 32 度。利用牛顿的冷却定律，写出有关温度计读数 $T(t)$ (t 是时间) 的微分方程及初始条件。
4. 写出差分方程 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ 的通解。
5. 只由 3 个字母 a,b,c 组成的长度为 n 的一些单词将在通信信道上传输，传输中应满足条件：不得有两个 a 连续出现在任一单词中。设 $f(n)$ 表示可传输的单词的个数，写出 $f(n)$ 的差分方程及初始条件。

二、MATLAB 编程

1. 在同一坐标下做出 $y_1=x^2, y_2=x^3, y_3=x^4, y_4=x^5$ 这四条曲线的图形，其中 $x \in [-1, 1]$ 。

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^3 - 1 & x < 0 \end{cases}$ ，求 $f(2), f(-2)$ 。

3. 求以下微分方程组的通解。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y + 6z \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 7y + 6z \\ \frac{dz}{dt} = 3x - 4y + 5z \end{cases}$$

三、模型表示

1. 某药剂厂生产两种药剂 a 和 b。每生产 1 公斤的 a 需要 3 公斤的原料 c 和 4 公斤原料 d 以及 5 个工时加工，而每生产 1 公斤的 b 需要 2 公斤的原料 d 和 5 公斤的原料 e 以及 7 个工时加工。假设所有产品都可销售完，且 1 公斤 a 的售价为 1000 元、1 公斤 b 的售价为 800 元、购买 1 公斤 c、d 和 e 要分别花 30 元、40 元和 50 元、1 个工人的时薪为 25 元。每周可供应的原料 c、d 和 e 上限分别为 300、400 和 350 公斤，工人加工工时上限为 600 小时。根据以上条件，如何安排生产获得最大利润呢？请用数学模型描述这一规划问题。（线性规划）

2. 某厂向用户提供发动机，合同规定，第一、二、三季度末分别交货 40 台、60 台、80 台。每季度的生产费用为 $f(x) = ax + bx^2$ （元），其中 x 是该季生产的台数。若交货后有剩余，可用于下季度交货，但需支付存储费，每台每季度 c 元。已知工厂每季度最大生产能力为 100 台，第一季度开始时无存货，问工厂应如何安排生产计划，才能既满足合同又使总费用最低？（只需给出数学模型，不求解）

3. 某架货机有三个货舱：前仓、中仓、后仓。三个货舱所能装载的货物的最大质量和体积都有限制，如下表 1 所示。并且为了保持飞机的平衡，三个货舱中实际装载货物的质量必须与其最大容许质量成比例。现有四类货物供该货机本次飞行装运，其有关信息如下表 2 所示，表中最后一列指装运后所获得的利润。应如何安排装运，使该货机本次飞行获利最大？（只需给出数学模型，不求解）

表 1： 三个货舱装载货物的最大容许质量和体积

	前仓	中仓	后仓
质量限制 (t)	10	16	8
体积限制 (m³)	6800	8700	5300

表 2： 四类装运货物的信息

	质量 (t)	体积 (m³/t)	利润 (元/t)
货物 1	18	480	3100
货物 2	15	650	3800
货物 3	23	580	3500
货物 4	12	390	2850

4. (点菜问题) 我们在餐馆中点菜，需要包含某些营养成份，但同时又希望总价格最低。下表是这个餐馆的部分菜单，请你通过数学建模方法，提供合理的选菜方案。（只需给出数学模型，不求解）

序号	菜色	价格	蛋白质	淀粉	维生素	矿物质
1	菜肉蛋卷	28	1	0	1	1
2	炒猪肝	32	0	1	0	1
3	沙拉蔬菜	18	0	0	1	0
4	红烧排骨	48	1	0	0	0
5	咖喱土豆	20	0	1	0	0
6	清汤鸡	68	1	0	0	1

5. 正常人的脉搏平均 72 次/分，某医生测得 10 例慢性中毒患者的脉搏为（单位：次/分）：

54 67 65 68 78 70 66 70 69 67

设患者的脉搏服从正态分布，问患者和正常人的脉搏有无显著差异（ $\alpha=0.05$ ）？

(1) 请写出解题思路，及使用的 Matlab 命令；

(2) 若输出结果如下，请写出检验结论。

$h = 1, \quad sig = 0.0366, \quad ci = [63.1585, 71.6415]$

四、综合题

1. 现有如下关于函数 $y=f(x)$ 的 7 个观测点数据。

(1) 用抛物线插值公式计算 $f(6)$ 的近似值。

(2) 若已知 $y=\ln(a \cdot x^2+b \cdot x+c)$ ，请分别用 `polyfit` 和 `lsqnonlin` 指令进行数据拟合（要求给出相应的 matlab 代码）以确定系数 a 、 b 和 c 的最佳取值。

x	1	2	4	5	7	9	10
y	1.8	2.4	2.9	3.3	3.6	3.9	4.2

2. 某饮料厂年初有资金 500 万元，已知未来四季度的弹性订单分别为饮料 200 吨、500 吨、300 吨和 100 吨（即每季度可以卖出的饮料产品数量上限）。生产饮料的成本为 $1+1/(1+x)$ （ x 为当季生产的饮料吨数）万元/吨。在四个季度中，每卖出一吨饮料可以获得收入分别为 2、 $3-(1/y^2)$ 、2.5 和 $\ln(y)/2$ （注意：这里的 y 指工厂在相应季度卖出的饮料吨数）万元。在每个季度初，当季的生产成本要一次性付清，一季度和二季度的销售所得金额分别在三季度和四季度初才能转到工厂账户上，而三四季度的销售所得都只在 4 季度末到位。问如何制定工厂未来四个季度的生产和销售方案，使得工厂在 4 季度末的资金量最大？要求先给出其数学模型描述，然后写出求解该问题的 matlab 代码。

3.（投资问题）某部门在今后五年内考虑给下列项目投资，已知：项目A，从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115%；项目B，第三年初需要投资，到第五年末能回收本利125%，但规定最大投资额不超过4万元；项目C，第二年初需要投资，到第五年末能回收本利140%，但规定最大投资额不超过3万元；项目D，五年内每年年初可购买公债，于当年末归还，并加利息6%。该部门现有资金10万元，问它应如何确定给这些项目每年的投资额，使到第五年末拥有的资金的本利总额为最大？要求先给出其数学模型描述，然后写出求解该问题的matlab代码。

4. 假设某湖中开始有 10 万条鱼，且鱼的年增长率为 30%，而每年捕鱼量为 2 万条。

- （1）列出每年湖中鱼的数量差分方程，并求解；
- （2）多少年后，湖中的鱼将捕捞完？