

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Algorytmy Ewolucyjne

Sprawozdanie z projektu 1

Aleksander Samek, Adam Wróblewski

Warszawa
Marzec 2023

Spis treści

1. Wyznaczenie współczynników funkcji	2
2. Opis wykorzystanych algorytmów	2
3. Wyniki i wykresy działania algorytmów	3
3.1. Metoda Nelder Mead'a	3
3.2. Metoda quasi-Newtona	8
3.3. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu	13
3.4. Metoda obszaru zaufania	18
4. Porównanie metod	23

1. Wyznaczenie współczynników funkcji

Po odczytaniu z tablicy wartości współczynników a i b ($a = -1.5, b = 0.5 - nrindeksu : 310269$) otrzymaliśmy końcową postać funkcji Rosenbrock'a:

$$f(x, y) = (x + 0, 5)^2 + 100(y - 0, 5 - (x + 1, 5)^2)^2$$

Z nieujemności sumy kwadratów wyznaczamy analityczne rozwiązanie problemu minimalizacji $(x, y)^* = \arg \min_{x, y} f(x, y)$ poprzez rozwiązanie następującego układu równań:

$$\begin{cases} (x + 0, 5)^2 = 0 \\ 100(y - 0, 5 - (x + 1, 5)^2)^2 = 0 \end{cases} \quad . \quad (1.1)$$

$$(x, y)^* = (-0, 5; 1, 5)$$

2. Opis wykorzystanych algorytmów

1. Metoda Nelder Mead'a (sympleksowa metoda spadku) - algorytm opierający się na wytworzeniu sympleksu, którego wierzchołki iteracyjnie zbiegają do optimum. Jako, że mamy do czynienia z minimalizacją funkcji dwóch zmiennych, naszym sympleksem będzie trójkąt. Nie potrzebna jest znajomość gradientu minimalizowanej funkcji, tak więc metoda może być stosowana przy funkcjach nieróżniczkowalnych. Algorytm cechują wielokrotne ewaluacje wartości funkcji celu w każdej iteracji.
2. Metoda quasi-Newtona - algorytm bazujący na metodzie Newtona, ale nie wymagający znajomości Hessianu minimalizowanej funkcji, tylko aproksymacji jego odwrotności obliczanej na podstawie gradientu w poprzednich iteracjach. Funkcja cechuje się kwadratową zbieżnością i małą odpornością na funkcje wielomodalne.
3. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu - algorytm różni się od powyższej metody jedynie tym, że gradient wykorzystywany do minimalizacji jest obliczany analitycznie przez użytkownika. Sprawia to, że algorytm działa szybciej i dokładniej.
4. Metoda obszaru zaufania - algorytm korzystający z prostej aproksymacji funkcji celu w obszarze rozwiązania, Jeżeli nowo wygenerowany punkt jest lepszy niż dotychczasowy, wtedy zostaje uznany za nowe rozwiązanie, w przeciwnym przypadku obszar jest zawężany, a proces powtarzany. Do aproksymacji algorytm korzysta z hessianu i gradientu.

Analitycznie wyznaczony gradient funkcji wykorzystany w 3 algorytmie:

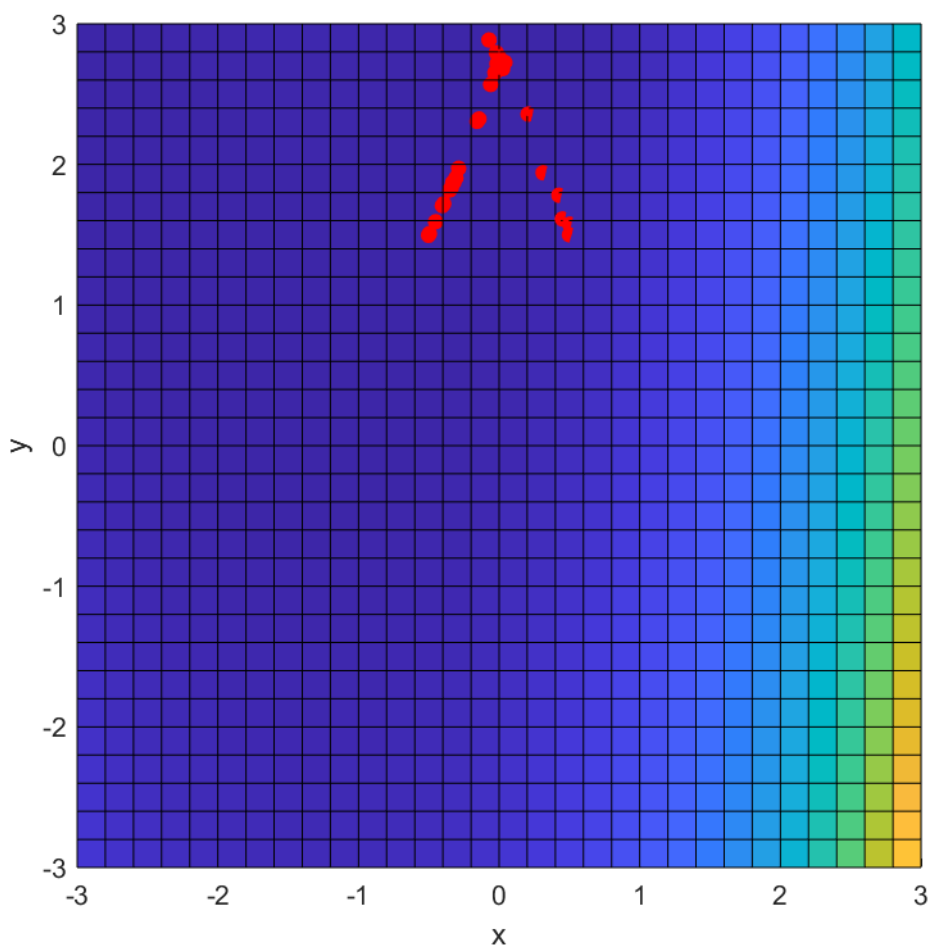
$$\nabla f(x, y) = \left[400(4.1275 + 4.5x^2 + x^3 + x(7.255 - y) - 1.5y), -200x^2 - 600x + 200y - 550 \right]^T$$

3. Wyniki i wykresy działania algorytmów

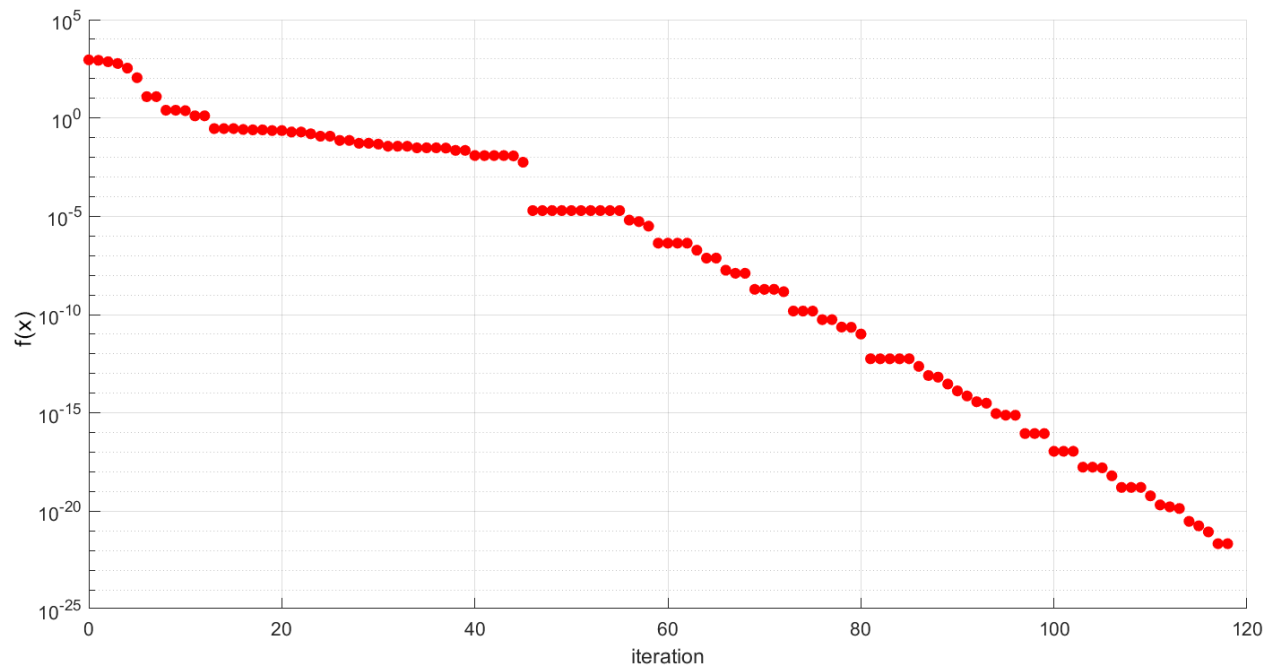
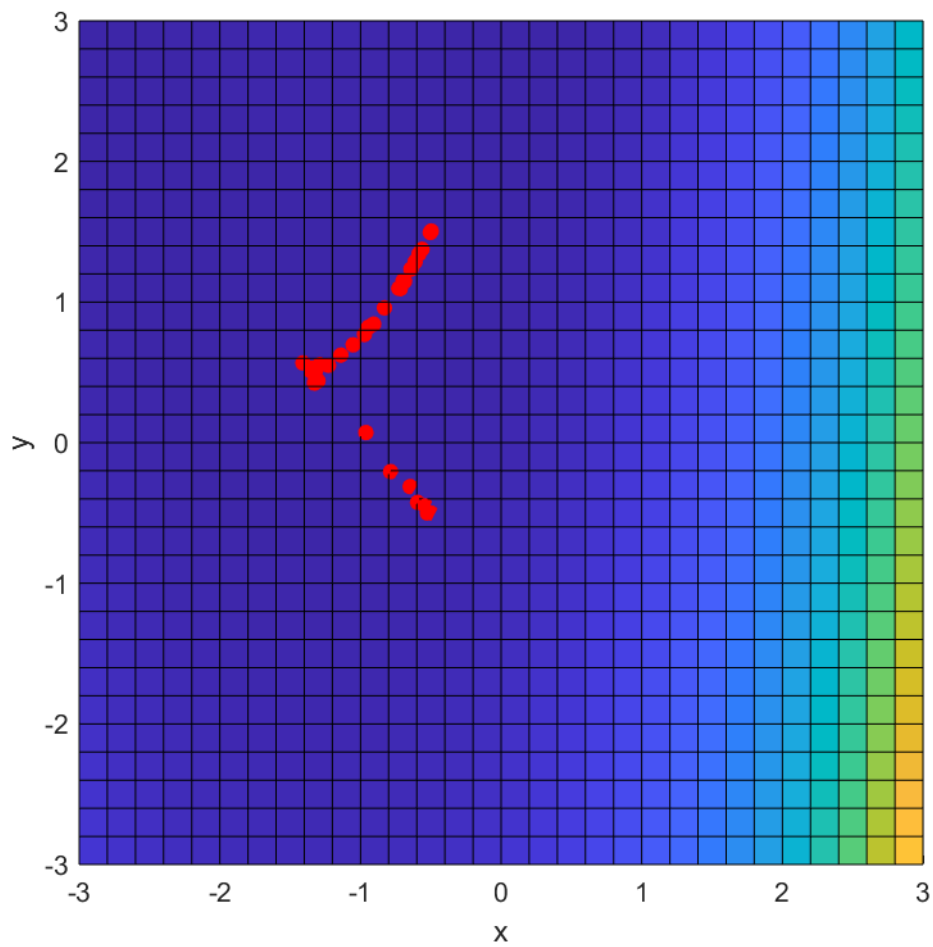
3.1. Metoda Nelder Mead'a

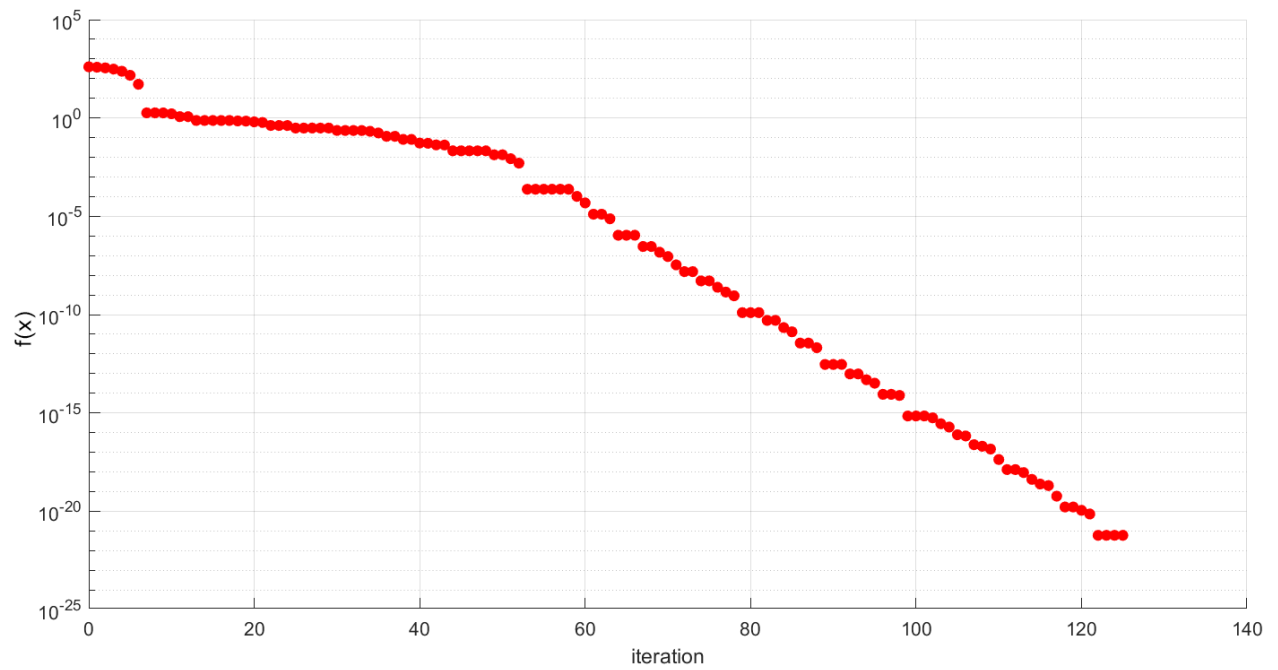
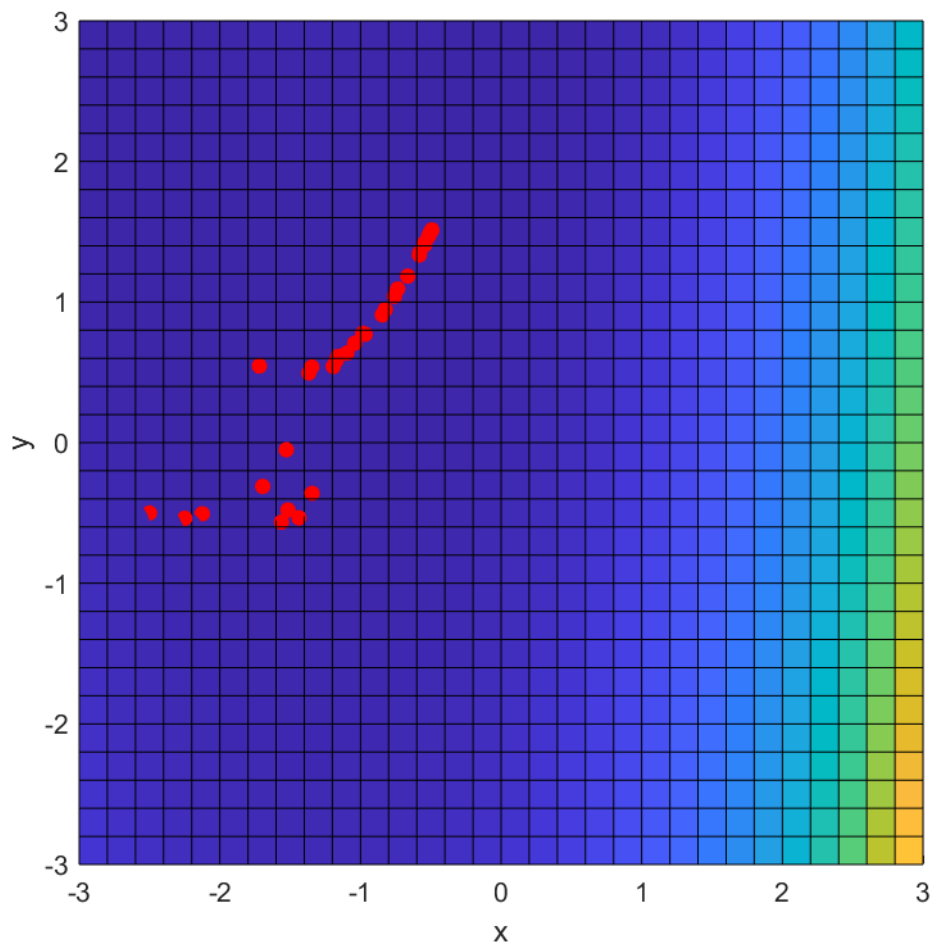
punkt początkowy	l. iteracji	l. wywołań f. celu	rozwiązanie	wartość f. celu
$x = 0.5, y = 1.5$	118	222	$x = -0.5, y = 1.5$	$2.22e-22$
$x = -0.5, y = -0.5$	125	235	$x = -0.5, y = 1.5$	$5.94e-22$
$x = -2.5, y = -0.5$	122	230	$x = -0.5, y = 1.5$	$2.5e-22$
$x = -2.5, y = 1.5$	137	259	$x = -0.5, y = 1.5$	$1.48e-22$

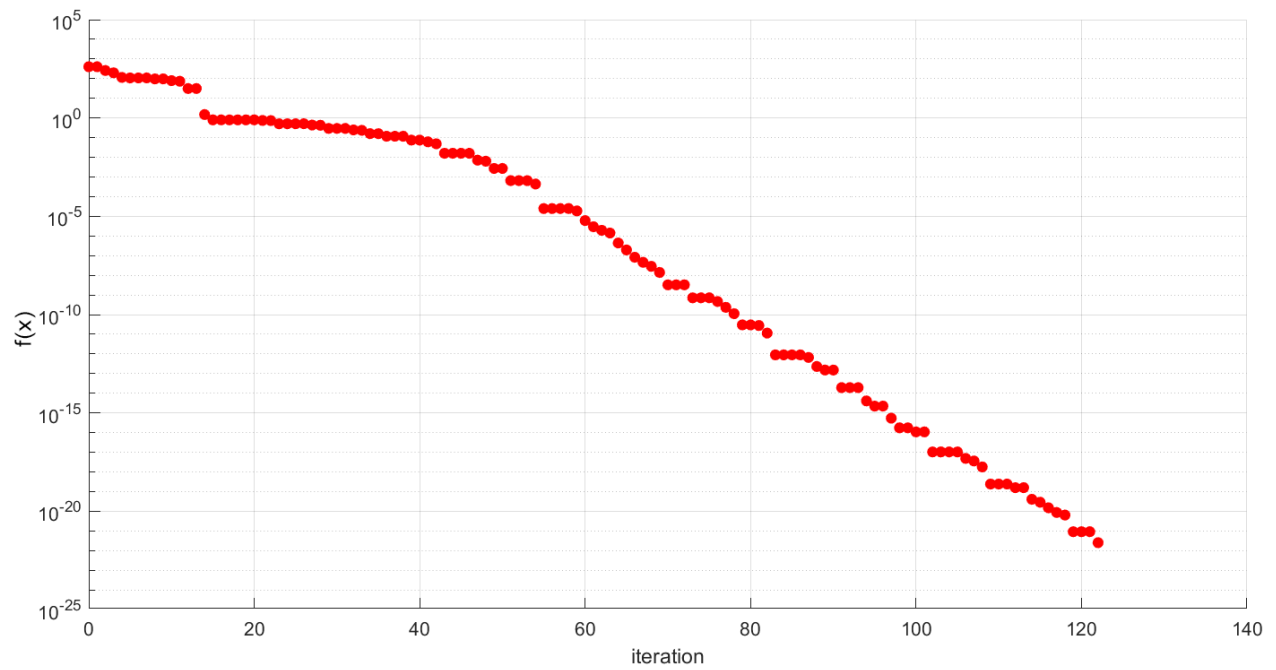
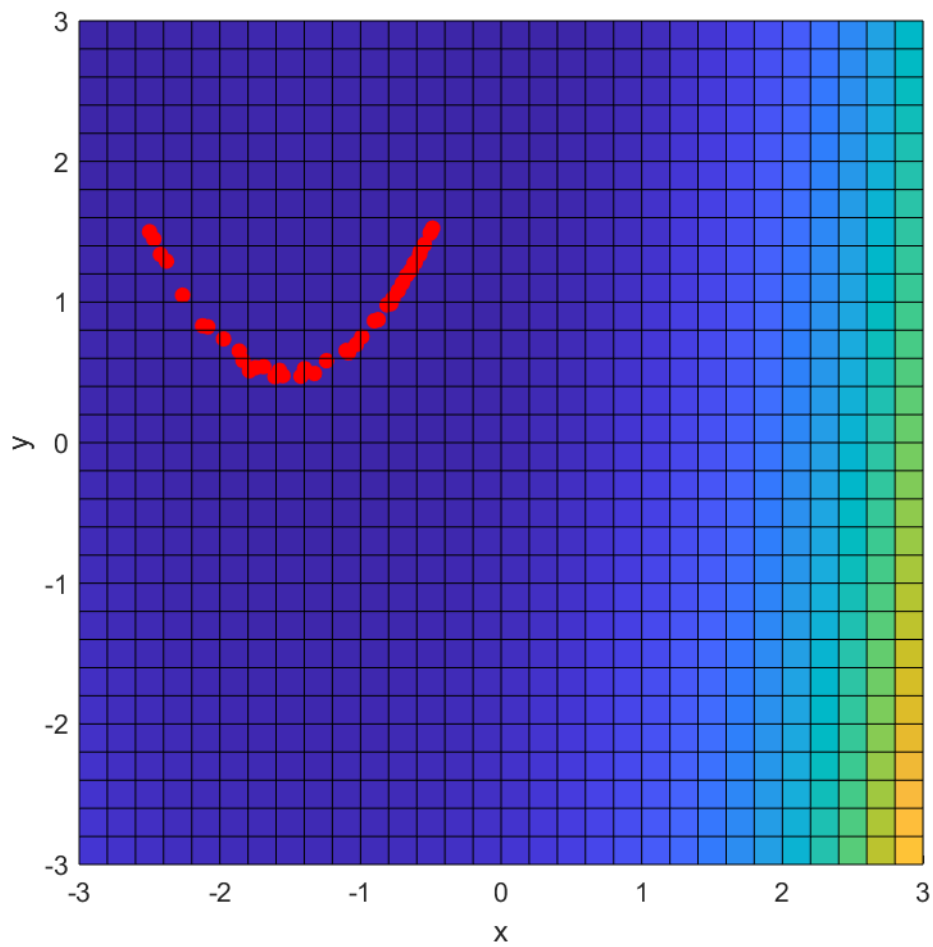
Tab. 3.1. Metoda Nelder Mead'a

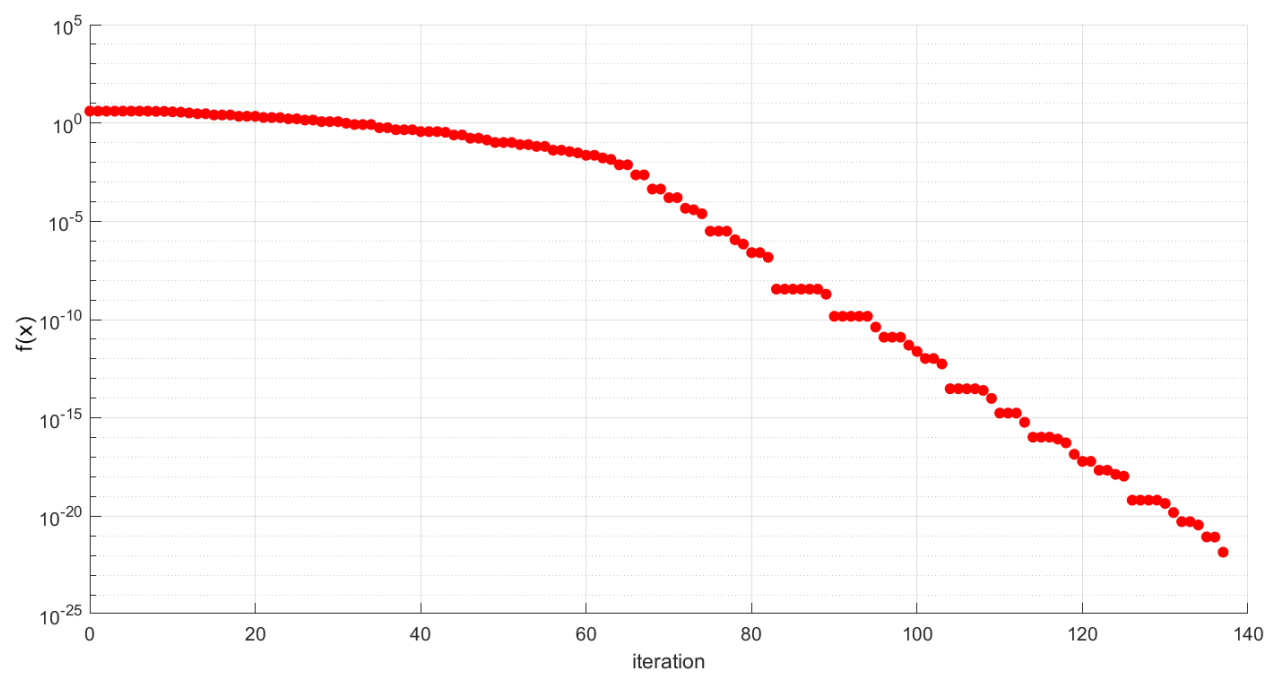


Rys. 3.1. Metoda Nelder Mead'a dla pkt początkowego ($x = 0.5, y = 1.5$)

Rys. 3.2. Metoda Nelder Mead'a dla pkt początkowego ($x = 0.5$, $y = 1.5$)Rys. 3.3. Metoda Nelder Mead'a dla pkt początkowego ($x = -0.5$, $y = -0.5$)

Rys. 3.4. Metoda Nelder Mead'a dla pkt początkowego ($x = -0.5$, $y = -0.5$)Rys. 3.5. Metoda Nelder Mead'a dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = -0.5$)

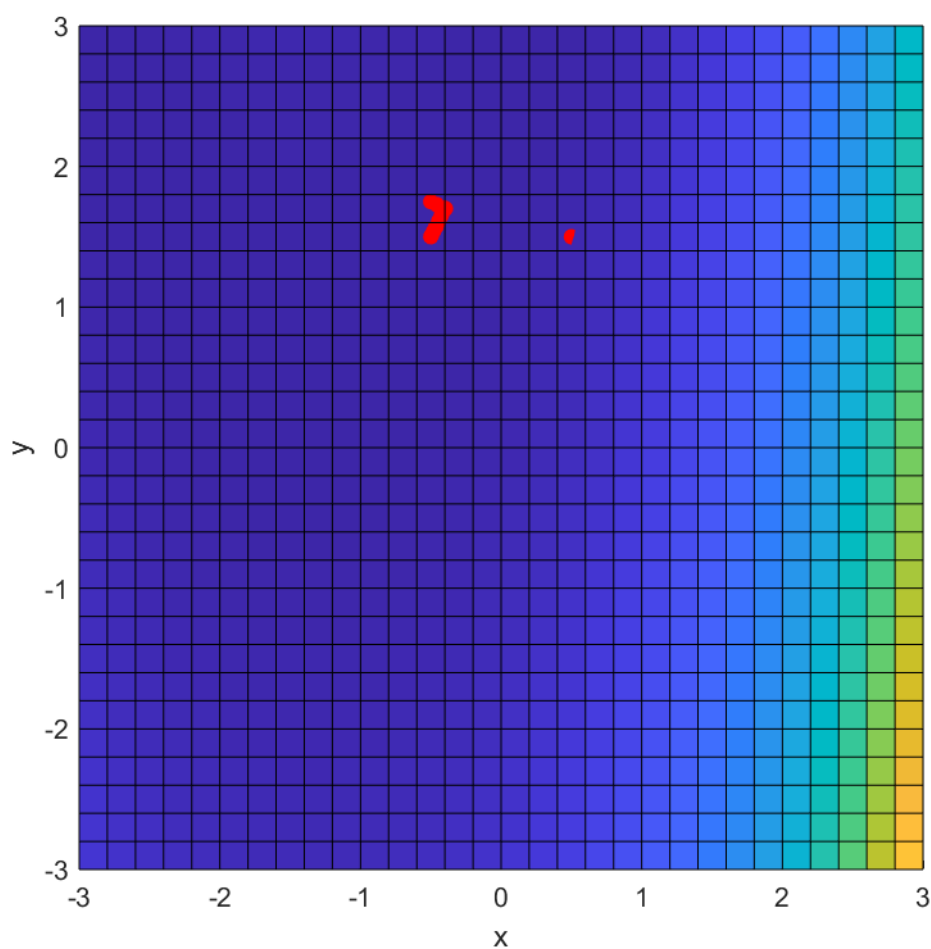
Rys. 3.6. Metoda Nelder Mead'a dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = -0.5$)Rys. 3.7. Metoda Nelder Mead'a dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = 1.5$)

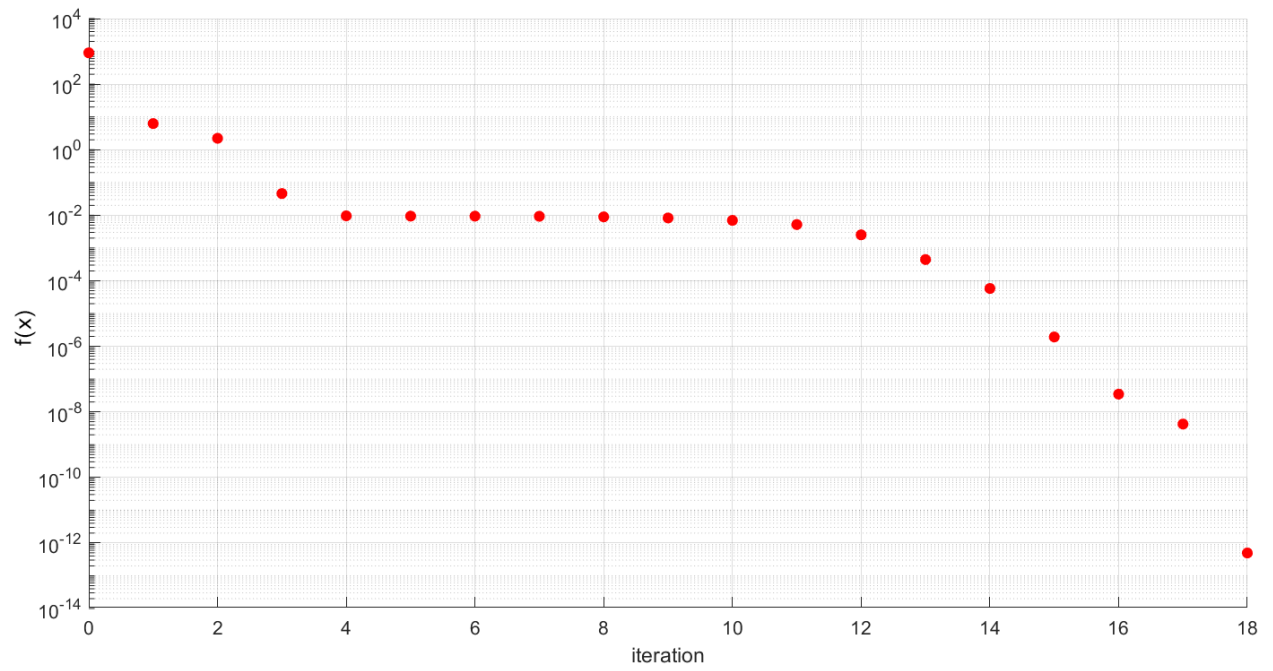
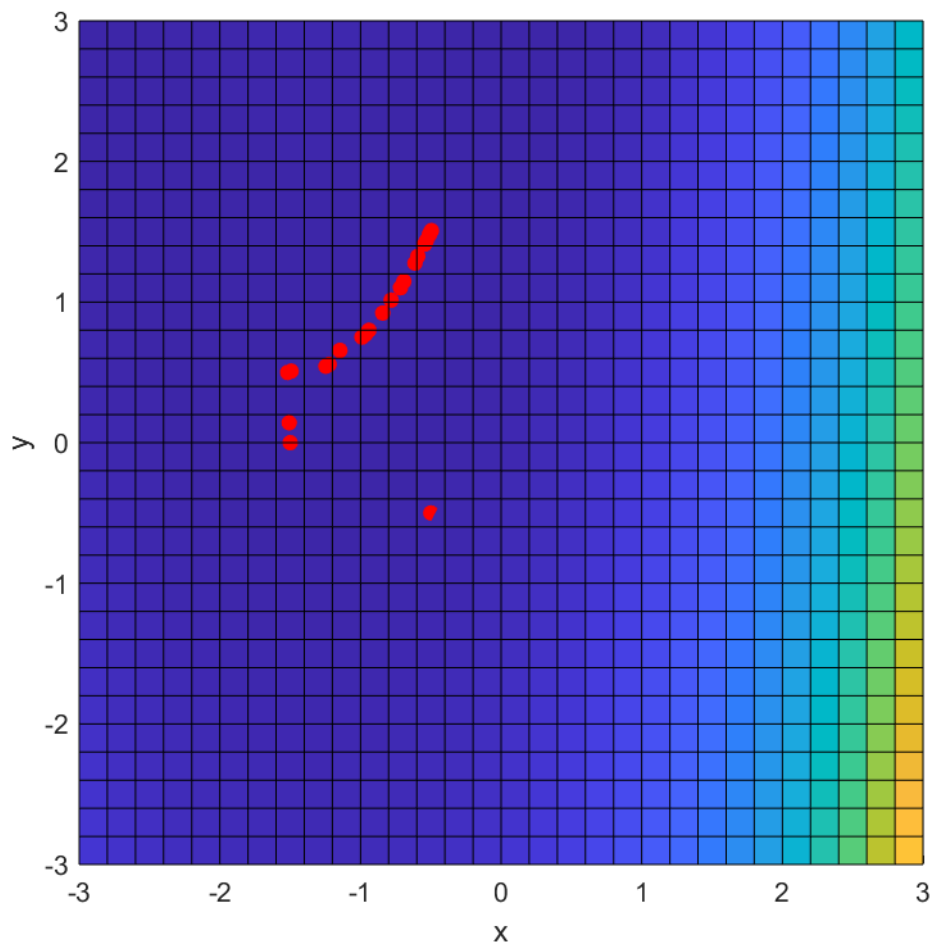
Rys. 3.8. Metoda Nelder Mead'a dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = 1.5$)

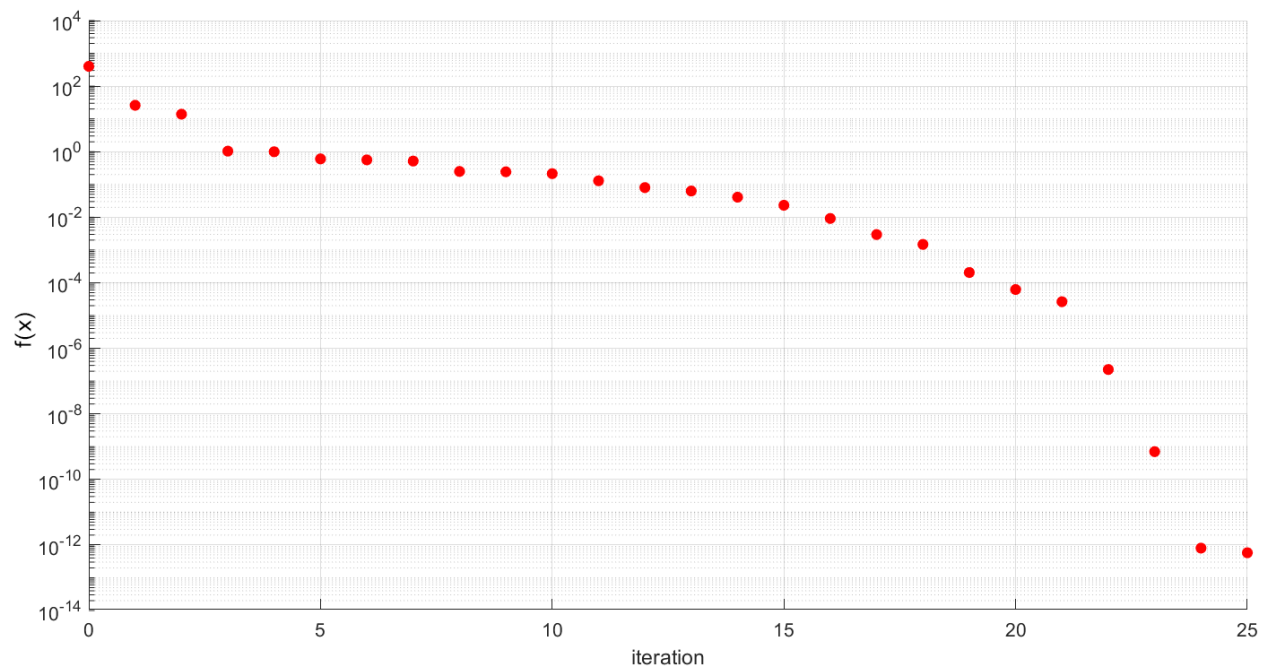
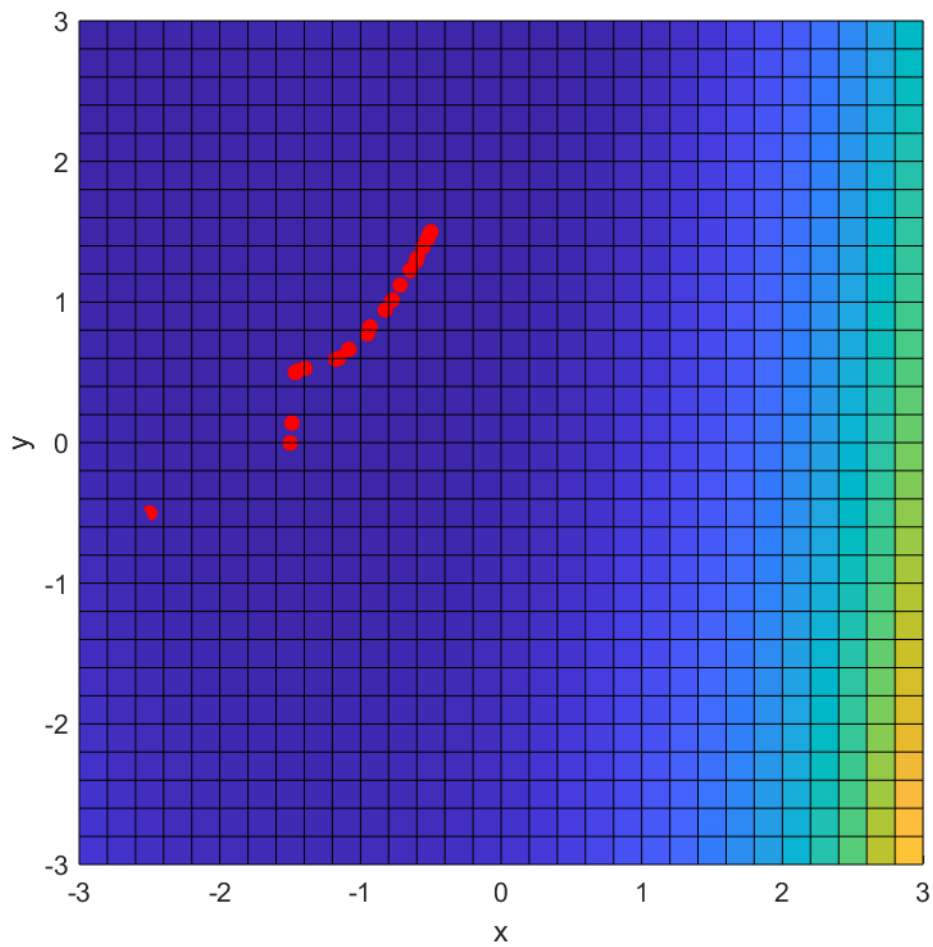
3.2. Metoda quasi-Newtona

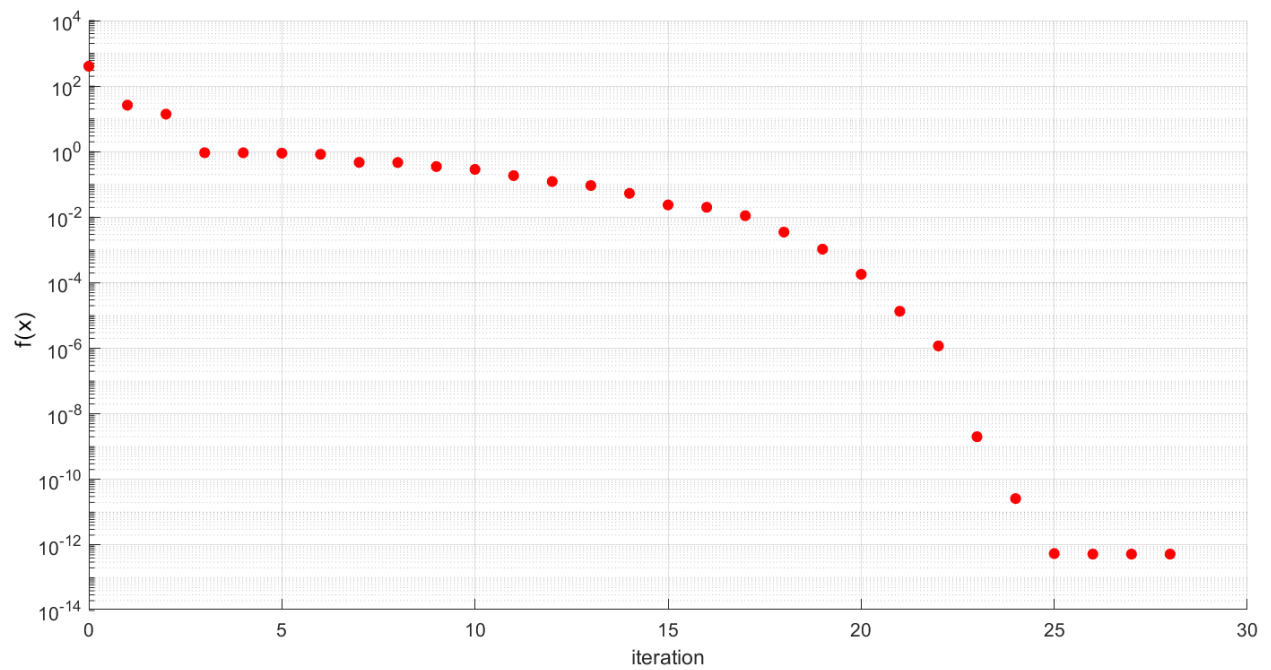
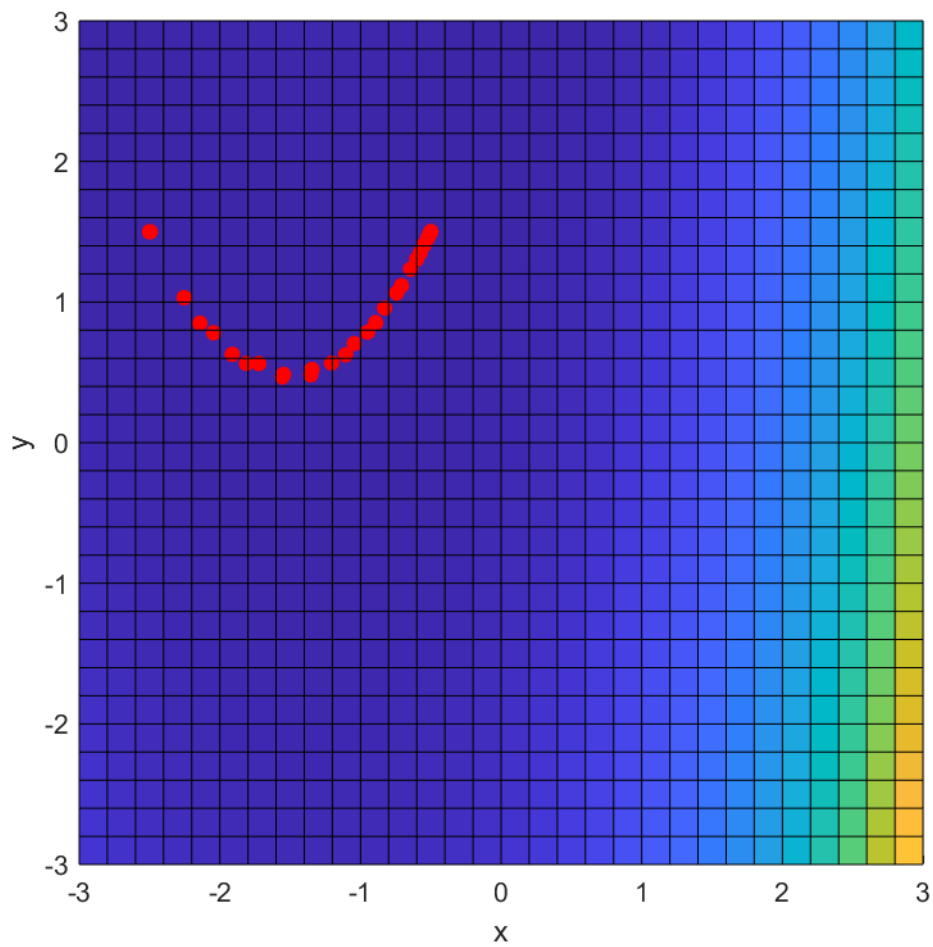
punkt początkowy	l. iteracji	l. wywołań f.celu	rozwiązanie	wartość f. celu
$x = 0.5, y = 1.5$	18	60	$x = -0.5, y = 1.5$	$4.94e-13$
$x = -0.5, y = -0.5$	25	102	$x = -0.5, y = 1.5$	$5.79e-13$
$x = -2.5, y = -0.5$	28	120	$x = -0.5, y = 1.5$	$5.25e-13$
$x = -2.5, y = 1.5$	32	138	$x = -0.5, y = 1.5$	$5.79e-13$

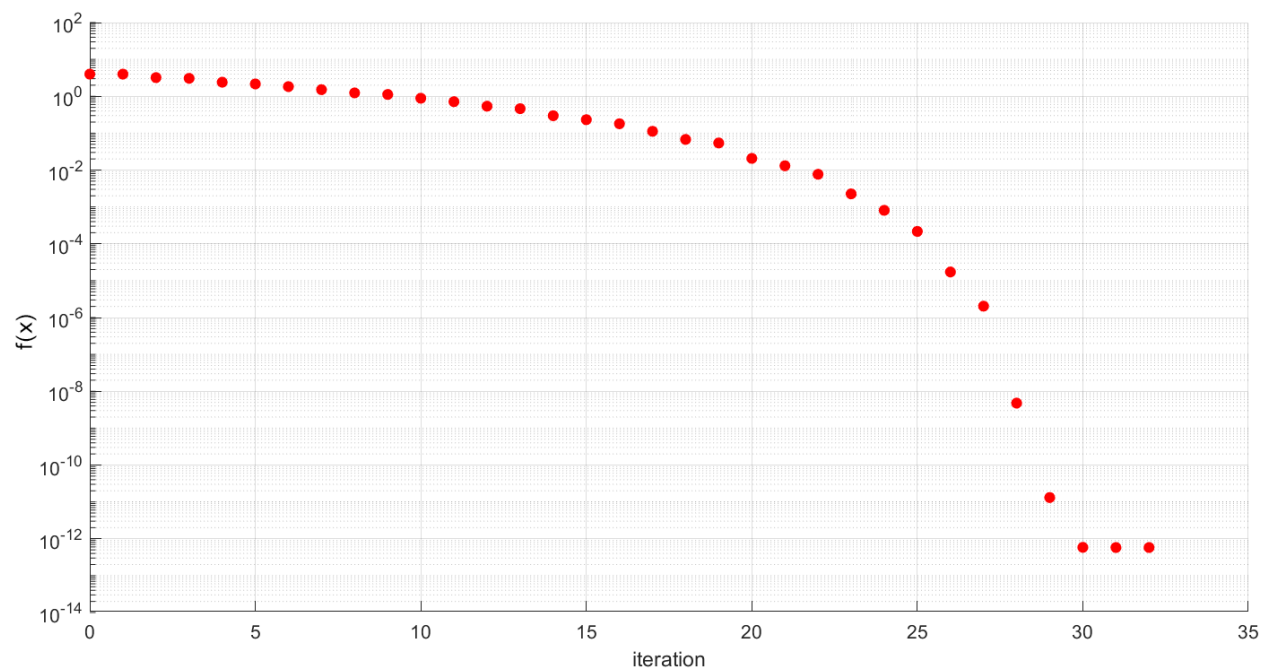
Tab. 3.2. Metoda quasi-Newtona

Rys. 3.9. Metoda quasi-Newtona dla pkt początkowego ($x = 0.5, y = 1.5$)

Rys. 3.10. Metoda quasi-Newтона dla pkt początkowego ($x = 0.5, y = 1.5$)Rys. 3.11. Metoda quasi-Newтона dla pkt początkowego ($x = -0.5, y = -0.5$)

Rys. 3.12. Metoda quasi-Newtona dla pkt początkowego ($x = -0.5$, $y = -0.5$)Rys. 3.13. Metoda quasi-Newtona dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = -0.5$)

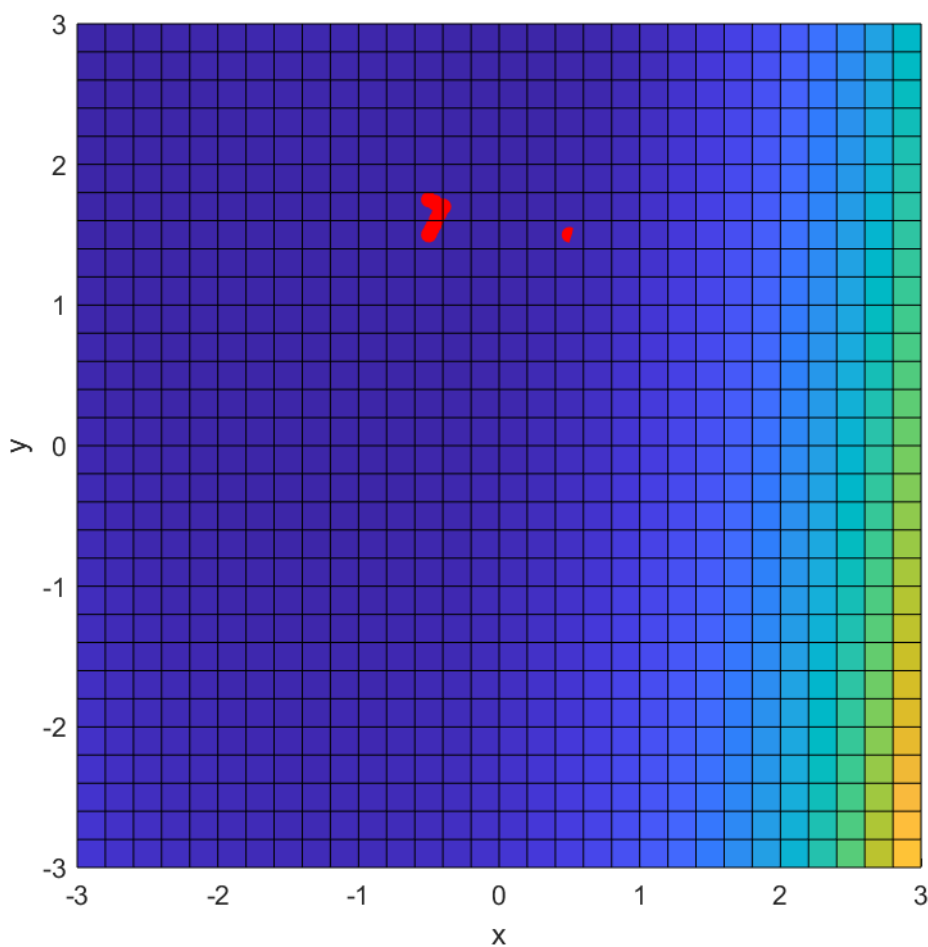
Rys. 3.14. Metoda quasi-Newtona dla pkt początkowego $(x = -2.5, y = -0.5)$ Rys. 3.15. Metoda quasi-Newtona dla pkt początkowego $(x = -2.5, y = 1.5)$

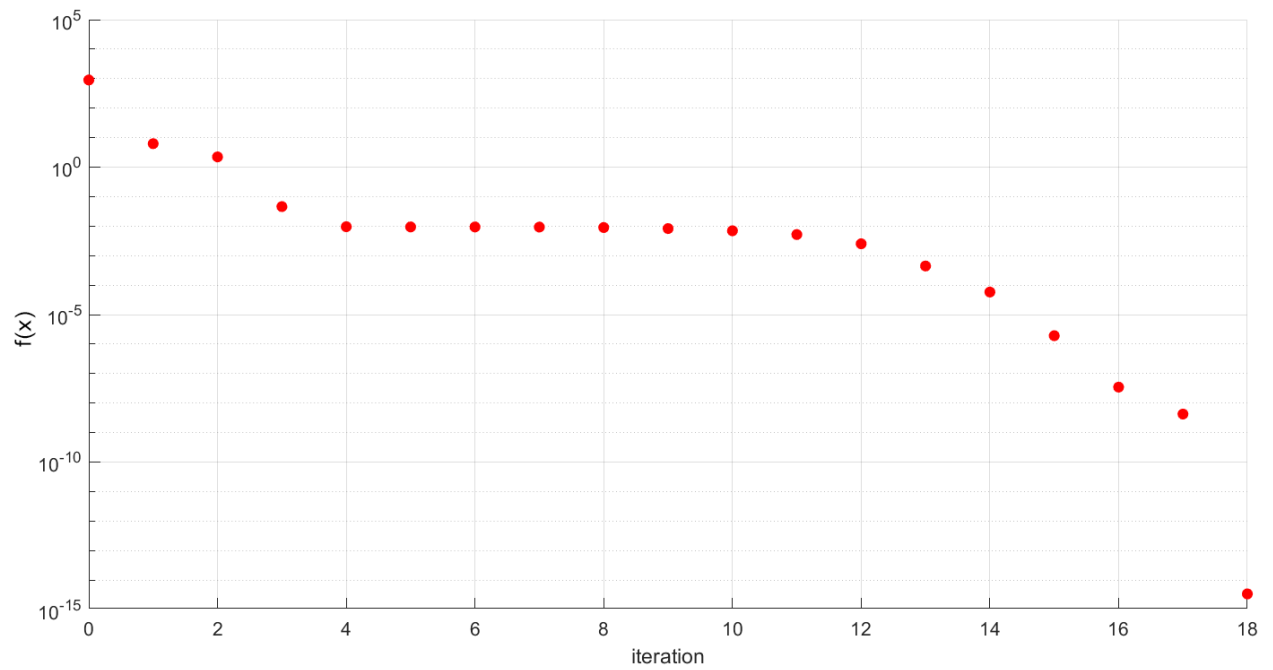
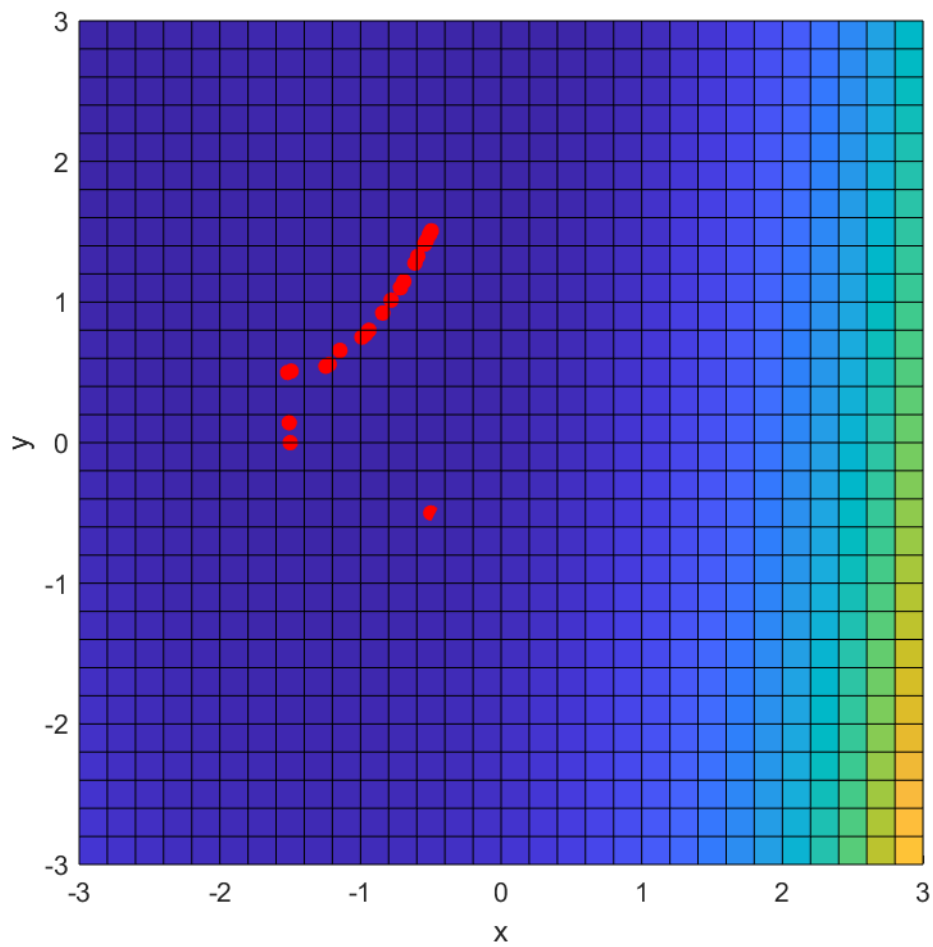
Rys. 3.16. Metoda quasi-Newtona dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = 1.5$)

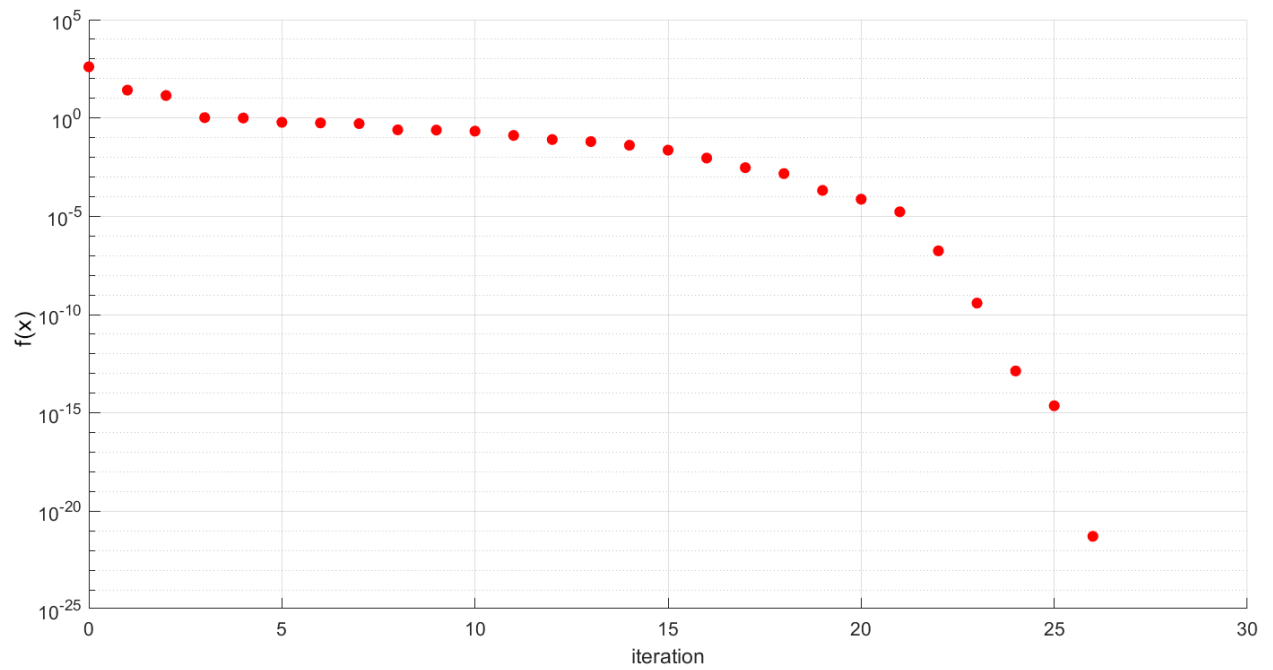
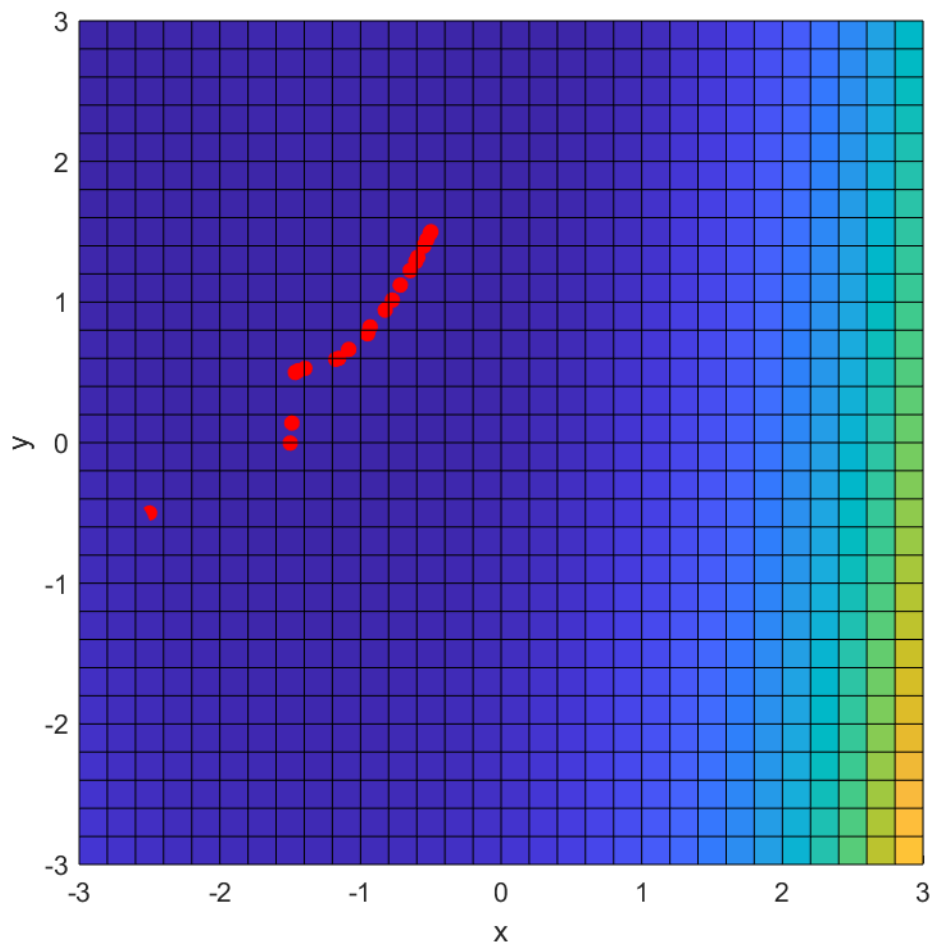
3.3. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu

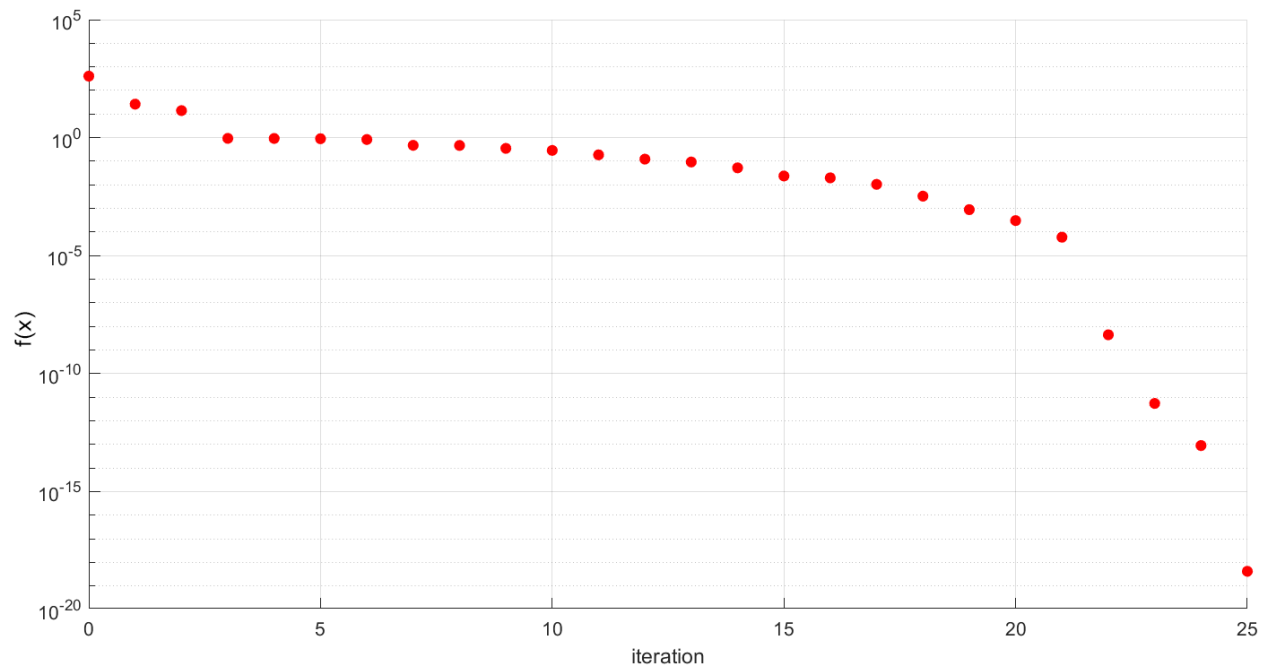
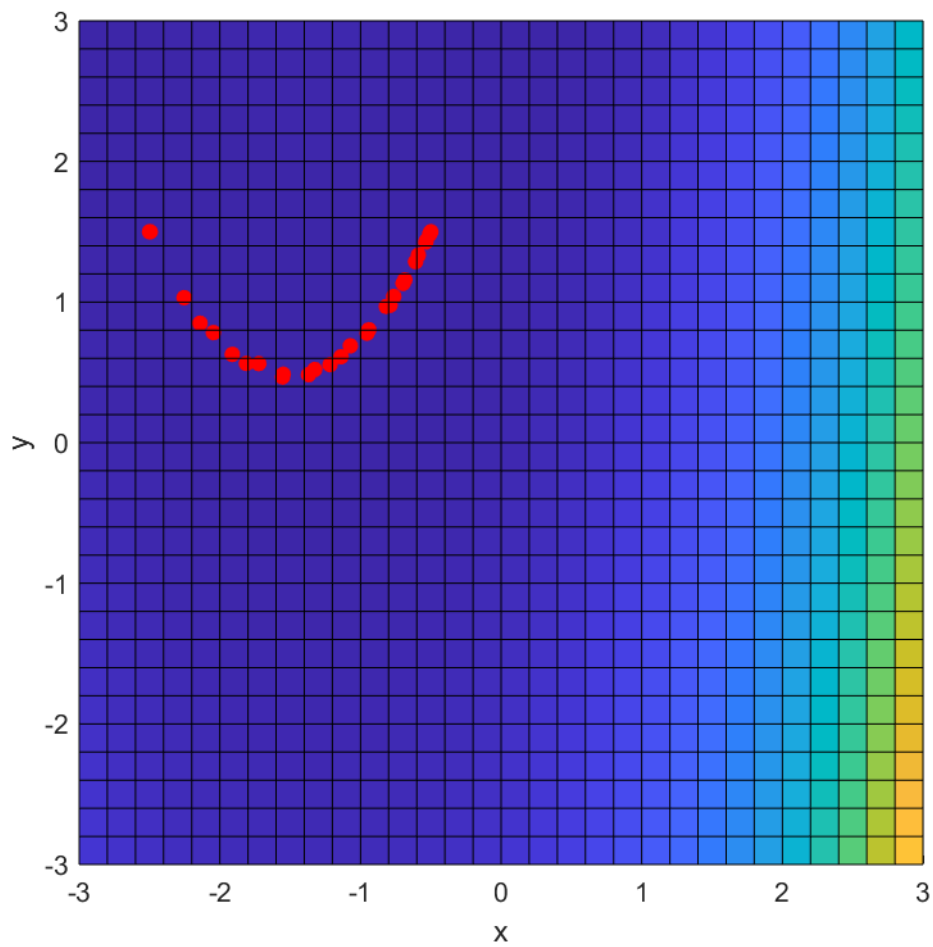
punkt początkowy	l. iteracji	l. wywołań f.celu	rozwiązanie	wartość f. celu
$x = 0.5, y = 1.5$	18	20	$x = -0.5, y = 1.5$	$3.39\text{e-}15$
$x = -0.5, y = -0.5$	26	35	$x = -0.5, y = 1.5$	$5.29\text{e-}22$
$x = -2.5, y = -0.5$	25	31	$x = -0.5, y = 1.5$	$4.17\text{e-}19$
$x = -2.5, y = 1.5$	32	45	$x = -0.5, y = 1.5$	$7.34\text{e-}24$

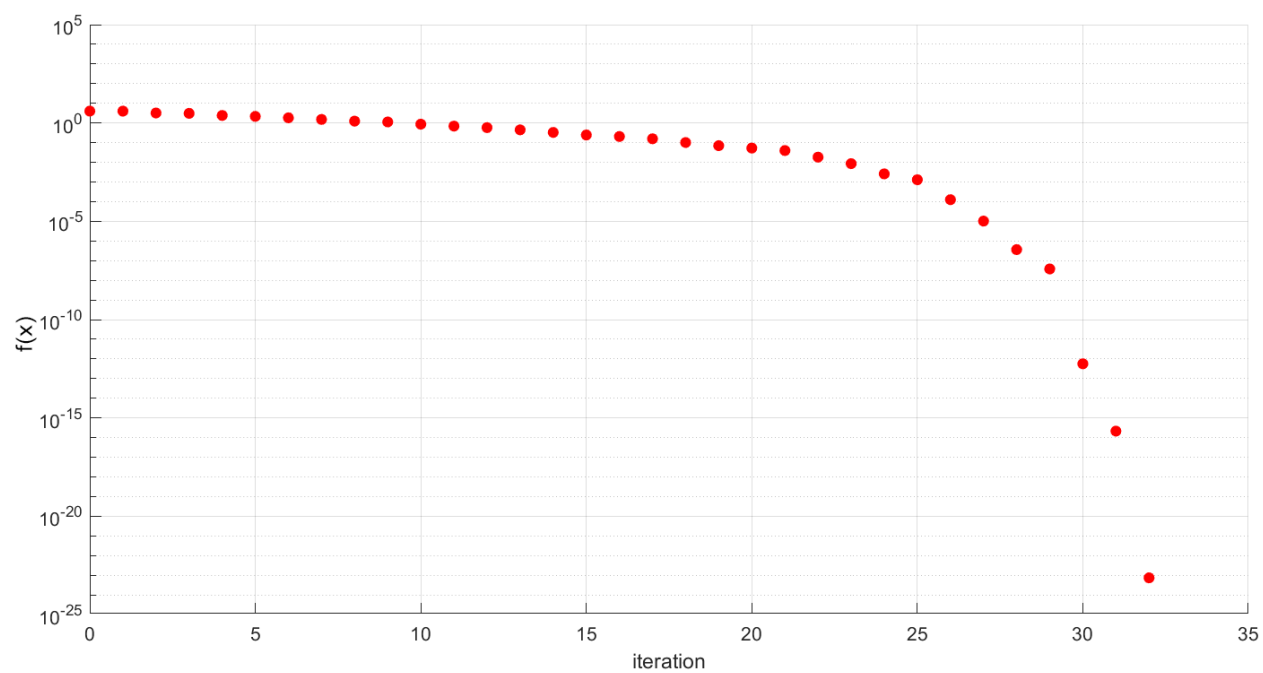
Tab. 3.3. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu

Rys. 3.17. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu dla pkt początkowego ($x = 0.5, y = 1.5$)

Rys. 3.18. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu dla pkt początkowego ($x = 0.5$, $y = 1.5$)Rys. 3.19. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu dla pkt początkowego ($x = -0.5$, $y = -0.5$)

Rys. 3.20. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu dla pkt początkowego ($x = -0.5$, $y = -0.5$)Rys. 3.21. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = -0.5$)

Rys. 3.22. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = -0.5$)Rys. 3.23. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = 1.5$)

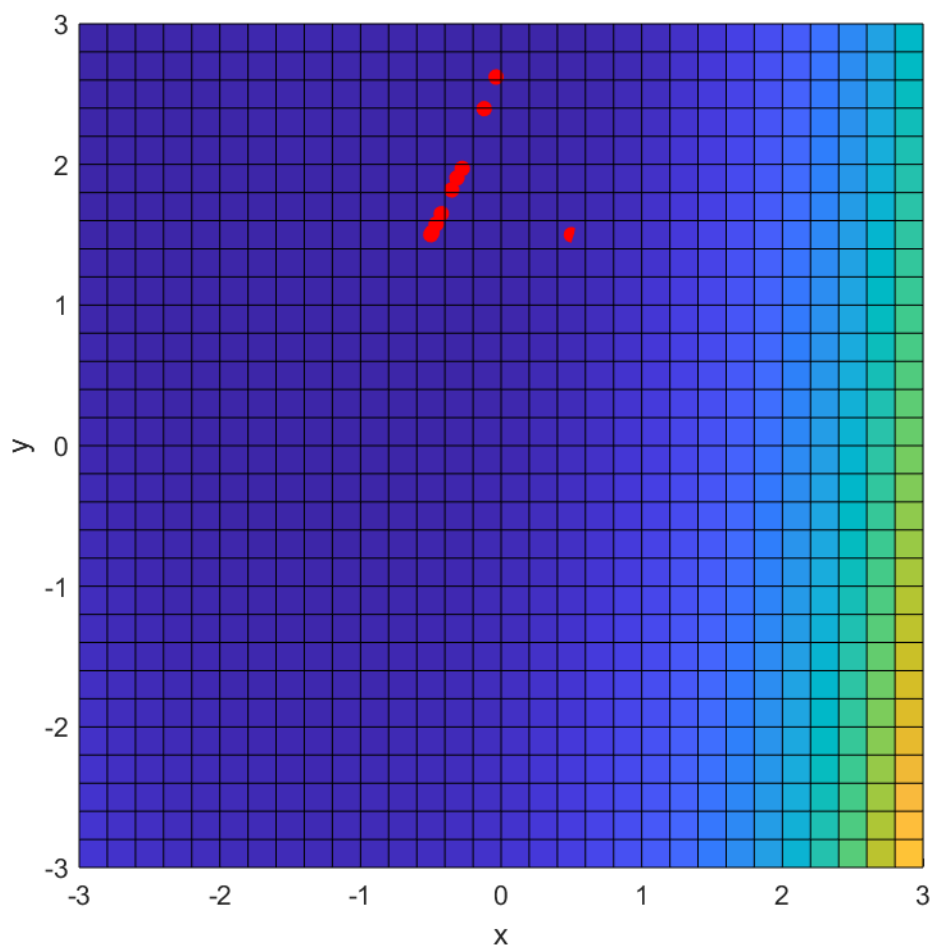


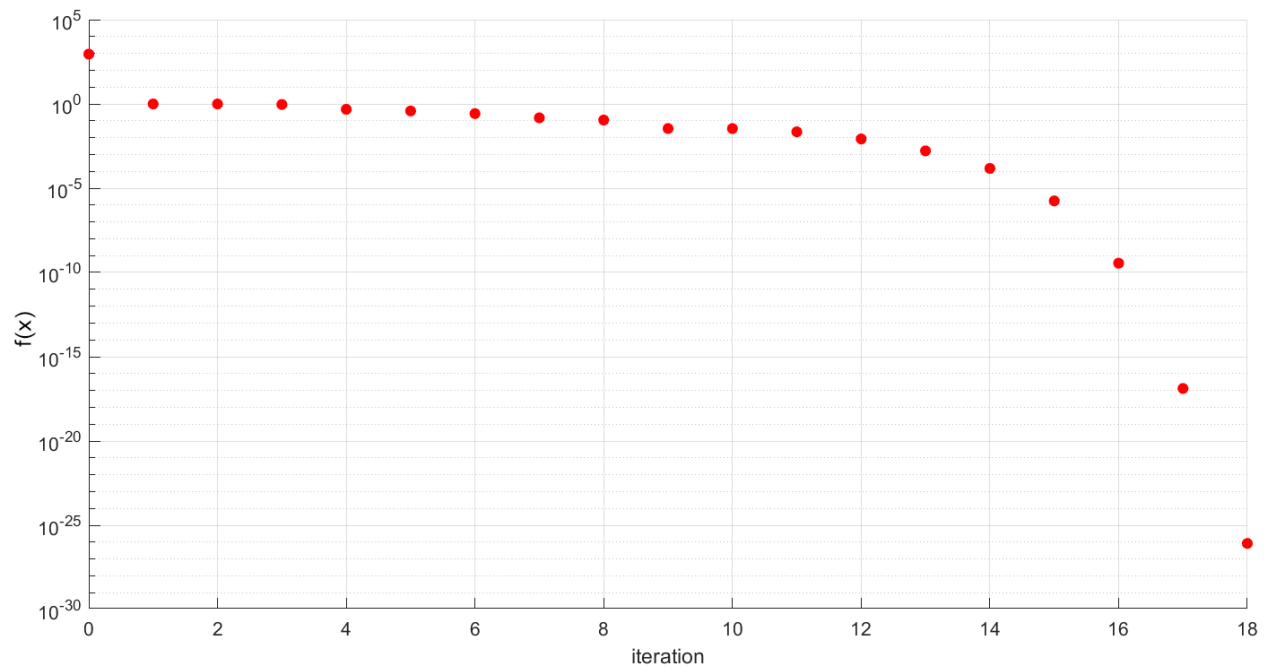
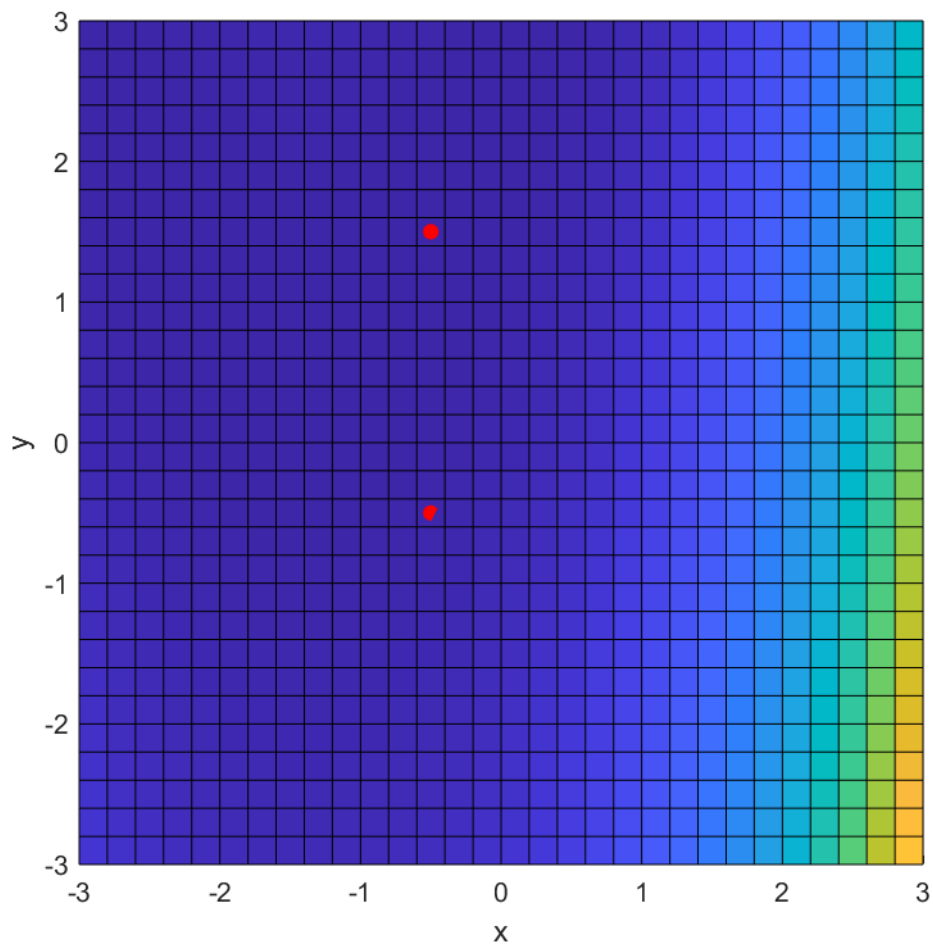
Rys. 3.24. Metoda quasi-Newtona z podaniem gradientu dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = 1.5$)

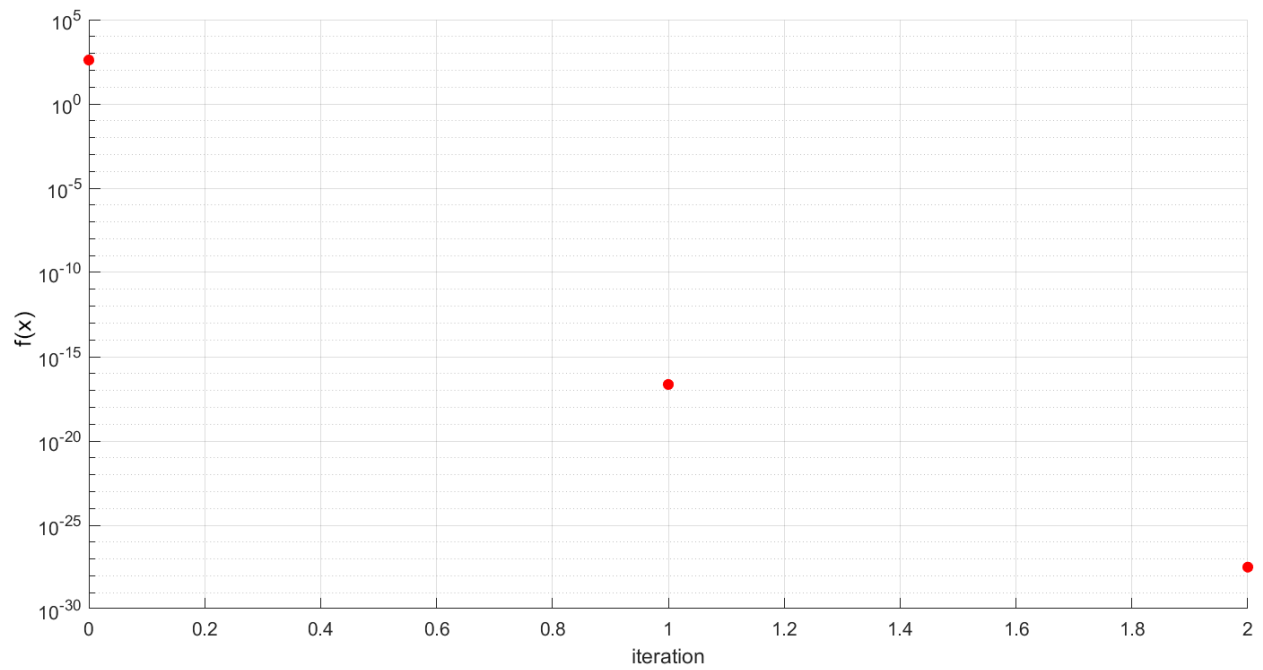
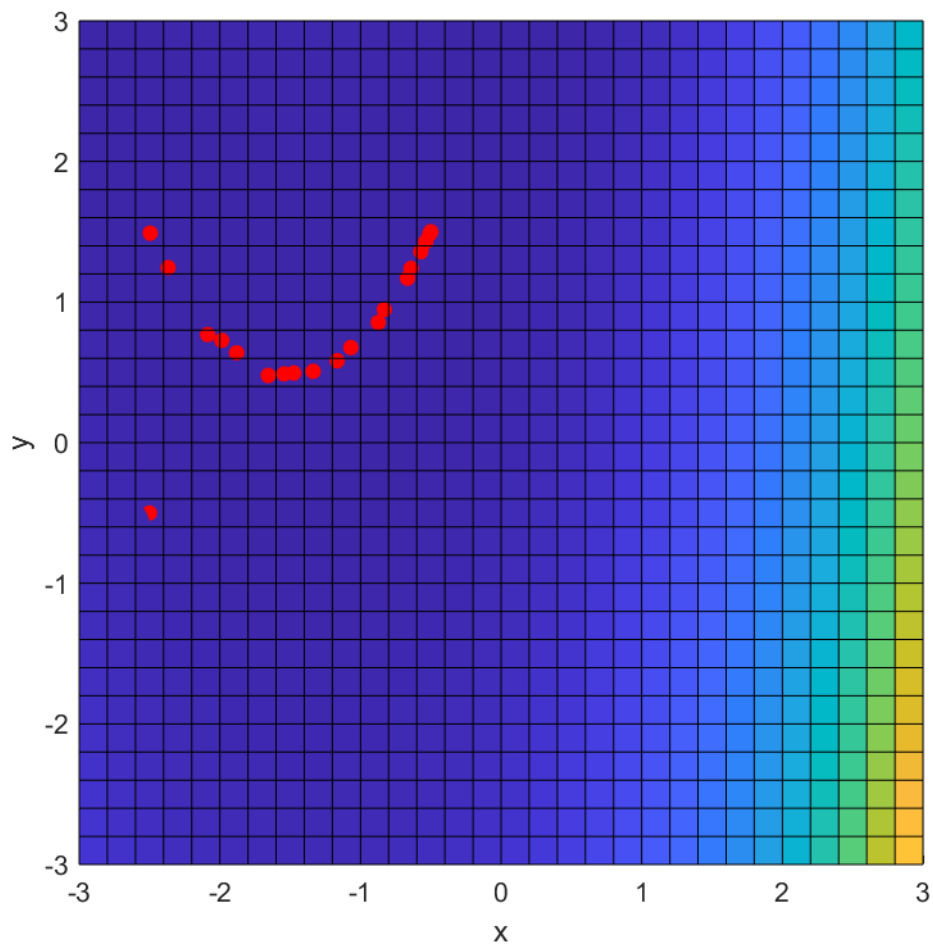
3.4. Metoda obszaru zaufania

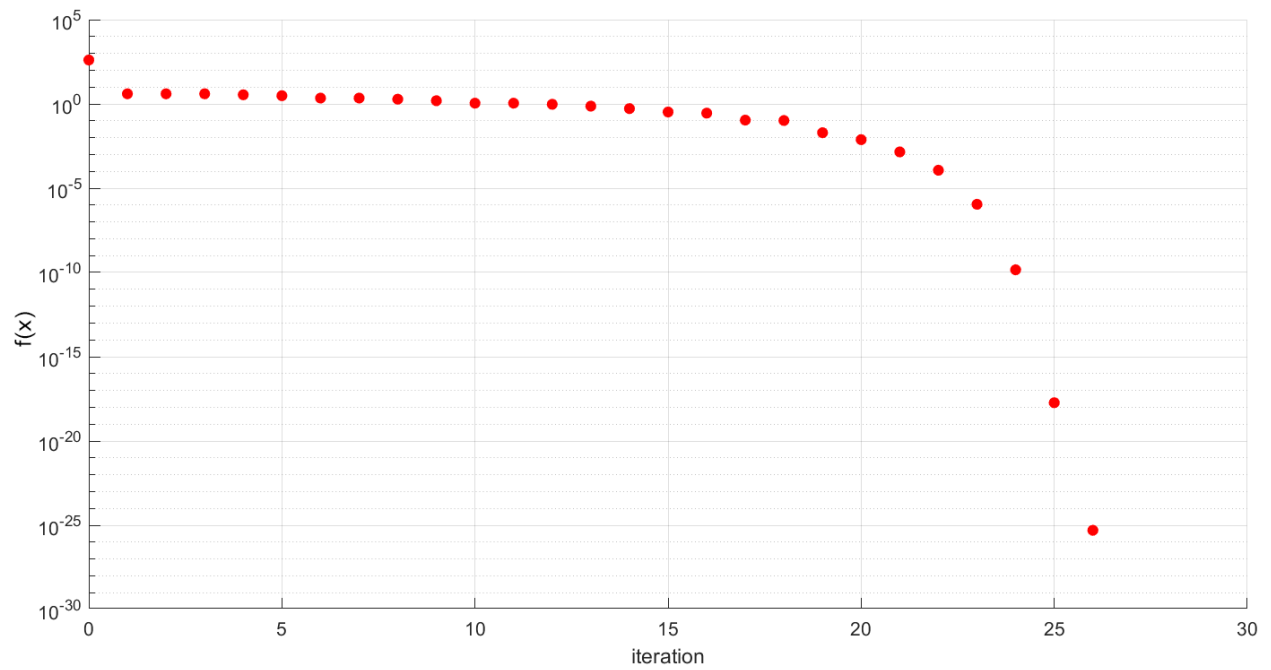
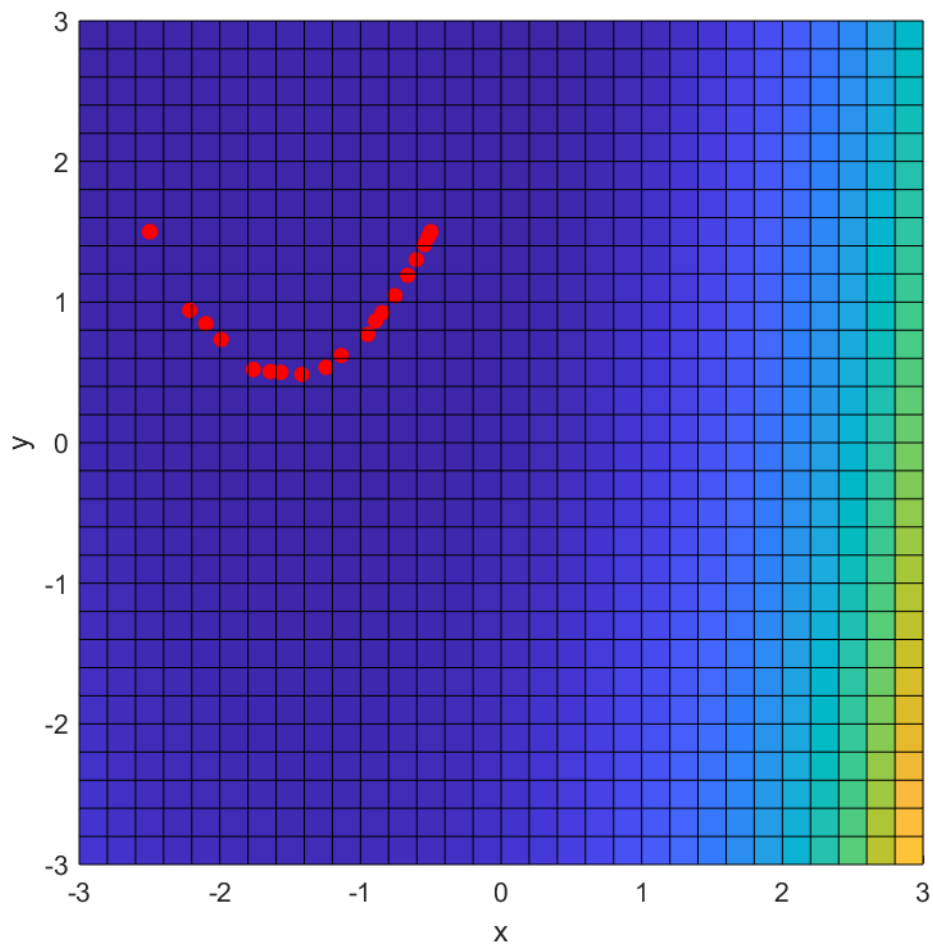
punkt początkowy	l. iteracji	l. wywołań f.celu	rozwiązanie	wartość f. celu
$x = 0.5, y = 1.5$	18	19	$x = -0.5, y = 1.5$	$8.36e-27$
$x = -0.5, y = -0.5$	3	2	$x = -0.5, y = 1.5$	$3.27e-28$
$x = -2.5, y = -0.5$	26	27	$x = -0.5, y = 1.5$	$5.00e-26$
$x = -2.5, y = 1.5$	27	28	$x = -0.5, y = 1.5$	$8.26e-25$

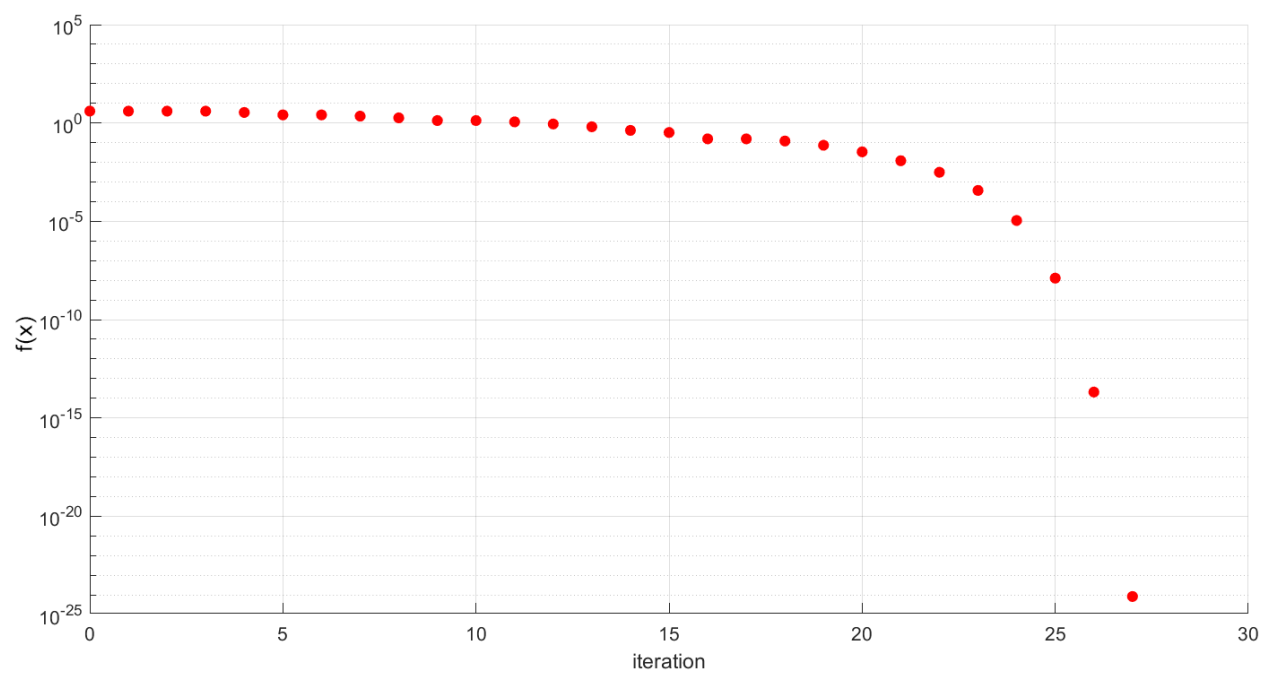
Tab. 3.4. Metoda obszaru zaufania

Rys. 3.25. Metoda obszaru zaufania dla pkt początkowego ($x = 0.5, y = 1.5$)

Rys. 3.26. Metoda obszaru zaufania dla pkt początkowego $(x = 0.5, y = 1.5)$ Rys. 3.27. Metoda obszaru zaufania dla pkt początkowego $(x = -0.5, y = -0.5)$

Rys. 3.28. Metoda obszaru zaufania dla pkt początkowego ($x = -0.5$, $y = -0.5$)Rys. 3.29. Metoda obszaru zaufania dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = -0.5$)

Rys. 3.30. Metoda obszaru zaufania dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = -0.5$)Rys. 3.31. Metoda obszaru zaufania dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = 1.5$)

Rys. 3.32. Metoda obszaru zaufania dla pkt początkowego ($x = -2.5$, $y = 1.5$)

4. Porównanie metod

Wszystkie wykorzystane metody doprowadziły punkt początkowy do rozwiązania optymalnego, co nie powinno dziwić gdyż funkcja Rosenbrock'a posiada jedno minimum. Najwolniejszą z metod jest algorytm Nelder Mead'a, który bardzo wolno zbiega w płaskich obszarach funkcji. Problemem również jest duża ilość wywołań funkcji celu w każdej iteracji (ok. 1,9 na iterację).

Obie metody quasi-Newtonowskie zbiegają do rozwiązania w bardzo podobnej liczbie iteracji, natomiast algorytm, w którym dostarczyliśmy ręcznie obliczony gradient dawał dokładniejsze rozwiązanie przy mniejszej ilości wywołań funkcji celu. Dla powyższego problemu najskuteczniejsza wydaje się być metoda obszaru zaufania, która dla punktów bliskich rozwiązaniu optymalnemu zbiega bardzo szybko z bardzo dużą dokładnością. Natomiast dla punktów bardziej odległych wymaga więcej iteracji niż metoda quasi-Newtona z podanym gradientem. Jej główną zaletą jest mała ilość wywołań funkcji celu na iterację.