Résolution du problème du flot maximum

Auteurs

Cédric Audie
Marie Dalenc
Julien Lahoz
Adrien Martinelli

Encadrant

Rodolphe Giroudeau

20 mai 2025

Résumé

Le problème du flot maximum est un problème d'optimisation classique en informatique et en recherche opérationnelle. Étant donné un réseau de flot, l'objectif est de déterminer la quantité maximale de flot qui peut être envoyée d'une source à un puits, tout en respectant les contraintes de capacité des arcs et de conservation du flot. Ce problème a de nombreuses applications pratiques, notamment dans la planification logistique, les réseaux de transport et les réseaux de communication.

Dans ce travail, nous comparons différentes méthodes de résolution du problème du flot maximum. Nous étudions les algorithmes classiques tels que Ford-Fulkerson, Edmonds-Karp, Poussage-Réétiquetage et Dinic, ainsi que des approches basées sur la programmation linéaire. Nous mettons en œuvre ces algorithmes et les testons sur un ensemble de graphes générés aléatoirement. Nous analysons les performances de chaque méthode en termes de complexité théorique et de temps d'exécution pratique.

Table des matières

1 Introduction

Le problème du flot maximum est l'un des problèmes fondamentaux en algorithmique et en recherche opérationnelle. Il consiste à trouver, dans un réseau orienté avec des capacités sur les arcs, le flot de valeur maximale entre une source et un puits, tout en respectant les contraintes de capacité et de conservation des flots.

Depuis plusieurs décennies, de nombreux algorithmes ont été développés pour résoudre ce problème, parmi lesquels on compte les méthodes classiques comme Ford-Fulkerson, Edmonds-Karp ou encore Dinic, mais aussi des approches basées sur la programmation linéaire. Ces algorithmes diffèrent à la fois par leur complexité théorique, leur comportement pratique et leur adaptabilité à différents types de graphes.

L'objectif de ce travail est de comparer ces différentes méthodes de résolution, à la fois sur le plan théorique et expérimental. Nous mettrons en œuvre ces algorithmes, puis les testerons sur des jeux d'essais variés pour évaluer leurs performances respectives.

Ce rapport est structuré comme suit : après une présentation des méthodes considérées, nous décrivons notre méthodologie expérimentale, puis nous analysons les résultats obtenus avant de conclure sur les perspectives ouvertes par ce travail.

1.1 Présentation détaillée du problème de flot maximum

Le problème du flot maximum se définit sur un graphe orienté $G = (V, E)$, où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arcs. Chaque arc $(u, v) \in E$ est associé à une capacité $c(u, v) \geq 0$, représentant la quantité maximale de flot qui peut circuler de u vers v. Si $(u, v) \notin E$, on suppose que $c(u, v) = 0$. On désigne par $s \in V$ la source et par $t \in V$ le puits, avec $s \neq t$. Formalisons le problème du flot maximum comme suit :

Définition (Réseau de flot). On appelle *réseau de flot* un quadruplet (G, s, t, c), où :
- $G = (V, E)$ est un graphe orienté,
- $s \in V$ est la source,
- $t \in V$ est le puits ($s \neq t$),
- $c : V^2 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de capacité sur les arcs, et qui est nulle si l'arc n'existe pas.

Définition (Flot). Un *flot* est une fonction $f : V^2 \to \mathbb{R}$ qui satisfait les contraintes suivantes :
- **Capacité** : $\forall (u, v) \in V^2,\ 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$;
- **Anti-symétrie** : $\forall (u, v) \in V^2,\ f(u, v) = -f(v, u)$;
- **Conservation** : $\forall v \in V \setminus \{s, t\}$, $\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,z)\in E} f(v, z)$, c'est-à-dire que tout sommet intermédiaire conserve le flot (pas de perte ni de création de matière) ;
- **Valeur du flot** : la quantité totale envoyée par la source est $|f| = \sum_{v\in V} f(s, v)$

Le problème du flot maximum consiste donc à trouver un flot f dans un réseau de flot, respectant les contraintes ci-dessus et maximisant $|f|$. Dans notre cas particulier, nous allons nous intéresser à des graphes orientés avec un flot entier et des capacités entières.

Applications : Le flot maximum possède de nombreuses applications concrètes : planification logistique, réseaux de transport (par exemple pour maximiser le trafic dans un réseau routier),

routage dans les réseaux de communication, allocation de ressources, et même en algorithmique pour résoudre d'autres problèmes puisque le problème du flot maximum est P-COMPLET. C'est-à-dire qu'il se résout en temps polynomial, et que tout problème polynomial peut s'y réduire par une réduction en espace logarithmique[2].

Durant la guerre froide, le problème de flot maximum a été utilisé par l'US Air Force pour impacter au maximum le réseau ferré soviétique[4].

1.2 Exemple

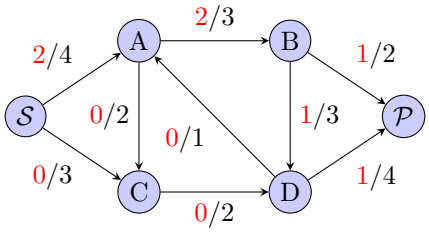


FIGURE 1 – Exemple de réseau de flot, avec en **rouge** un flot et en **noir** la capacité de chaque arc.

Dans cet exemple, le sommet A reçoit deux unités depuis la source et les envoies au sommet B. Le sommet B redistribue ce flot vers les sommets D et P. La valeur du flot est de 2, c'est la somme des flots sortants de la source S (et également la somme des flots entrants dans le puits).

2 Définitions générales

2.1 Réseau résiduel

Définition (Réseau résiduel). Soit G un graphe avec s, p et c respectivement la source, le puits et la fonction de capacité associés au graphe G. Notons $N = (G, s, p, c)$ un réseau de flot dans G avec un flot f.
Le réseau résiduel de N et d'un flot f, noté N_f, est construit de la manière suivante :
Pour chaque arc xy de G :

- Si $f(xy) < c(xy)$, on crée un arc xy dans G' avec la quantité restante disponible de la capacité : $c'(xy) = c(xy) - f(xy)$.
- Si $f(xy) > 0$ avec $x \neq s$ et $y \neq p$, on crée un arc yx dans G' avec la capacité qu'on peut réaiguiller : $c'(yx) = f(xy)$.

Ceci nous donne $N_f = (G', s, p, c')$.

Exemple. Le réseau résiduel de l'exemple précédent est le suivant :

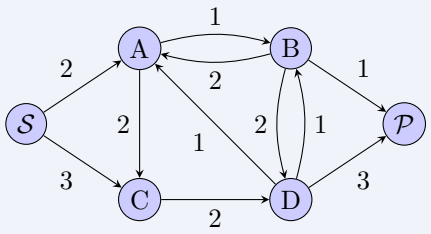


FIGURE 2 – Réseau résiduel de l'exemple précédent.

Comme on peut le voir, le réseau résiduel est un graphe obtenu à partir d'un réseau de flot et d'un flot, et la plupart des algorithmes de flot maximum utilisent le réseau résiduel pour trouver des chemins améliorants.

2.2 Chemin et flot améliorants

Définition (Chemin améliorant).

— Un *chemin améliorant* pour un réseau de flot N muni d'un flot f est un chemin de s à p dans la réseau résiduel N_f.

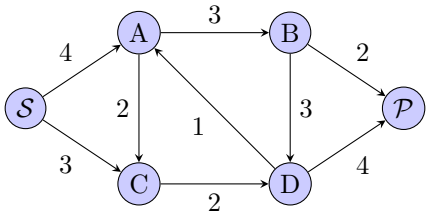
— Soit $C = x_0, x_1, \ldots, x_k$ un chemin améliorant dans N_f, le flot améliorant correspondant est : $f'(xy) = \begin{cases} \gamma & \text{si } xy \text{ est un arc de C} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où $\gamma = \min\{c'(x_i x_{i+1}) : i \in [\![0; k-1]\!]\}$

Concrètement, un chemin améliorant est un chemin dans le réseau résiduel. On le munit d'un flot f' sur ce chemin qui est la quantité maximale de flot qui peut être envoyée le long de ce chemin. Cette quantité est déterminée par la capacité résiduelle minimale le long du chemin.

3 Différents algorithmes et exemples

Nous prendrons l'exemple suivant pour illustrer les différents algorithmes :



3.1 L'algorithme de Ford-Fulkerson

3.1.1 Fonctionnement général

L'algorithme de Ford-Fulkerson est le plus connu parmi tous. Celui-ci consiste à trouver un chemin améliorant entre la source et le puits afin d'augmenter la valeur du flot. Pour cela nous

aurons besoin du graphe résiduel de (G, f) qui nous permettra de savoir les capacités restantes disponibles.

3.1.2 Algorithme

Algorithm 1 Algorithme de flot maximum

Entrée : Un réseau de flot $G = (V, A, c, s, t)$
Sortie : Un flot maximal f

```
1 : for all arc xy de G do
2 :     f(xy) ← 0
3 : end for
4 : while il existe un chemin simple C dans le graphe résiduel N_f do
5 :     Δ← min{c'(u,v) : (u,v) ∈ C}
6 :     for all (u,v) ∈ C do
7 :         if (u,v) ∈ A then
8 :             f(u,v) ← f(u,v) + Δ
9 :         else
10 :            f(u,v) ← f(v,u) − Δ
11 :        end if
12 :    end for
13 : end while
14 : return f
```

3.1.3 Complexité

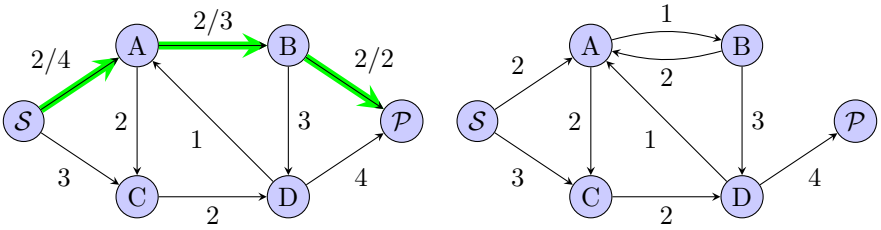
Un chemin améliorant peut être trouvé en $O(|A|)$ avec une recherche en profondeur ou en largeur par exemple, et un tel chemin augmente le flot d'au moins une unité, et d'au plus $|f^\star|$, où $f^\star$ représente un flot maximum. En notant n le nombre de sommets et m le nombre d'arcs, on a donc une complexité de $O(m|f^\star|)$ pour l'algorithme de Ford-Fulkerson [1].

3.1.4 Avantages/inconvénients

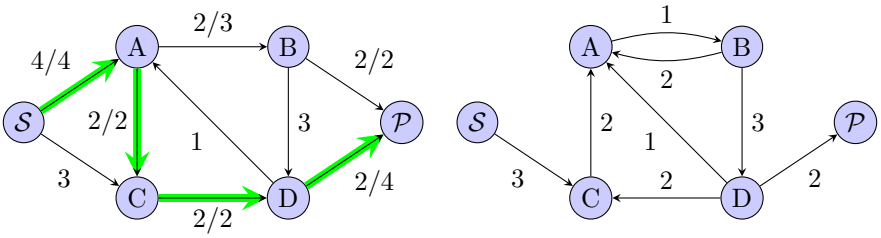
L'algorithme est facile à implémenter mais il n'est pas efficace dans le cas général. En effet, il peut ne pas se terminer si les capacités sont irrationnelles. De plus sa complexité n'est pas optimale et dépend de la valeur du flot maximum, nous verrons plus tard qu'il existe des algorithmes plus efficaces.

3.1.5 Application sur l'exemple

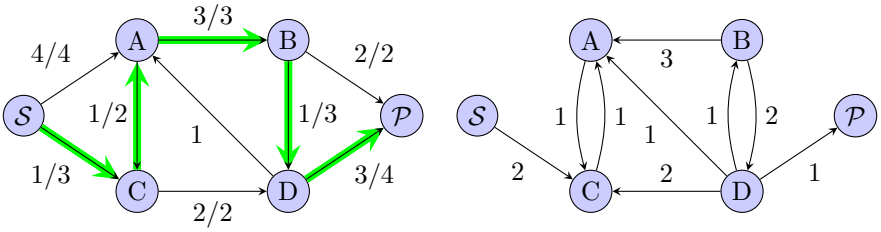
Tout d'abord, on a le chemin améliorant : $SABP$ avec une valeur de flot améliorant égal à 2. On obtient donc à droite le réseau résiduel N_f :



On voit qu'il y a le chemin améliorant $SACDP$ avec un flot améliorant égal à 2.
On obtient à droite le nouveau réseau résiduel N_f :



On voit qu'il y a le chemin améliorant $SCABDP$ avec un flot améliorant égal à 1.
On obtient à droite le nouveau réseau résiduel N_f :



Dans ce dernier réseau résiduel, si nous partons de la source S nous ne pouvons atteindre que les sommets A et C. Comme nous ne pouvons plus atteindre le puits P, cela signifie que le flot obtenu est maximal.

Finalement la coupe minimale de ce réseau est l'ensemble $\{S, A, C\}$ et son flot maximal est de valeur 5.

3.2 L'algorithme d'Edmonds-Karp

3.2.1 Fonctionnement général

L'algorithme d'Edmonds-Karp est une spécificité de celui de Ford-Fulkerson. Celui-ci consiste à trouver le plus court chemin améliorant entre la source et le puits afin d'augmenter la valeur du flot. Pour le trouver, il suffit d'utiliser un parcours en largeur.

3.2.2 Algorithme

L'algorithme d'Edmonds-Karp est une variante de l'algorithme de Ford-Fulkerson. Il utilise un parcours en largeur pour trouver le plus court chemin améliorant dans le réseau résiduel, là où l'algorithme de Ford-Fulkerson peut utiliser n'importe quel chemin améliorant.

3.2.3 Complexité

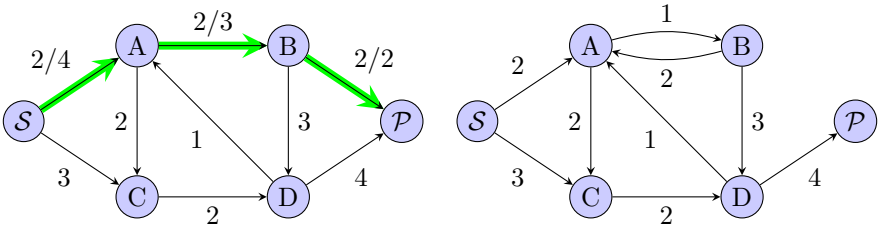
La complexité de l'algorithme d'Edmonds-Karp est de $O(|A|^2|V|)$[1].

3.2.4 Avantages/inconvénients

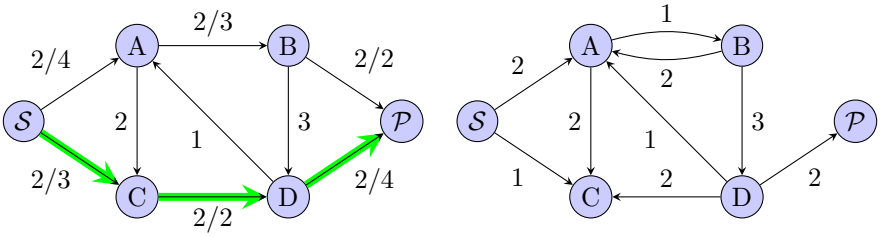
La complexité de l'algorithme d'Edmonds-Karp ne dépend plus de la valeur du flot maximum, mais du nombre d'arcs et de sommets. De plus cet algorithme est sûr de se terminer, même si les capacités sont irrationnelles, mais sa complexité n'est toujours pas optimale.

3.2.5 Application sur l'exemple

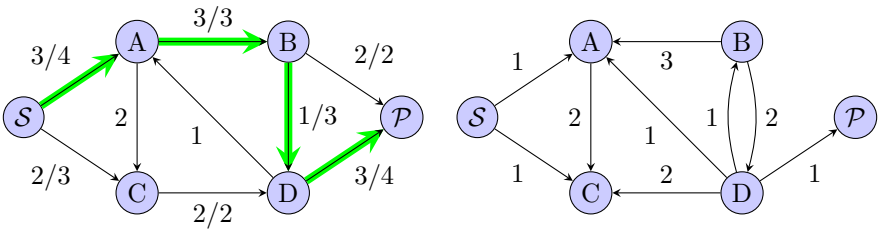
Tout d'abord, on a le chemin améliorant : $SABP$ de taille 3 avec une valeur de flot améliorant égal à 2.
On obtient donc à droite le réseau résiduel N_f :



On voit qu'il y a le chemin améliorant $SACDP$ de taille 4 avec un flot améliorant égal à 2. Regardons si on trouve un chemin améliorant plus petit, le chemin $SCDP$ est un autre chemin améliorant de taille 3 avec un flot améliorant égal à 2. C'est ce chemin que nous choisissons.
On obtient à droite le nouveau réseau résiduel N_f :



Il n'y a plus de chemin améliorant de taille 3 allant de S à P. On va choisir un chemin améliorant de taille 4 : $SABDP$ avec un flot améliorant égal à 1.
Nous obtenons à droite le nouveau réseau résiduel N_f :



Dans ce dernier réseau résiduel, si nous partons de la source S nous ne pouvons atteindre que les sommets A et C. Comme nous ne pouvons plus atteindre le puits P, cela signifie que le flot obtenu est maximal.

Finalement la coupe minimale de ce réseau est l'ensemble $\{S, A, C\}$ et son flot maximal est de valeur 5.

3.3 L'algorithme de Dinic

3.3.1 Fonctionnement général

L'algorithme de Dinic est semblable à celui d'Edmonds-Karp. Comme lui, il utilise des plus courts chemins améliorants entre la source et le puits afin d'augmenter la valeur du flot.
Pour les trouver, il faudra étiqueter les sommets en fonction de leur distance par rapport à la source et garder les arcs qui relient un sommet à un sommet de distance immédiatement supérieure. Ceci nous donnera le réseau de niveau N_L obtenu à partir du réseau résiduel N_f.
Nous aurons également besoin du flot bloquant.

Définition. Un flot f est dit *bloquant* si pour tout chemin C entre la source s et le puits t, il existe xy un arc dans C où $f(xy) = c(xy)$.

Autrement dit, un flot est bloquant si tout (s,t)-chemin contient un arc où le flot est égal à la capacité.

3.3.2 Algorithme

Pour tout arc xy du graphe G : on initialise la valeur du flot de xy à 0.
Tant qu'il existe un plus court chemin améliorant C dans le graphe résiduel de G et f :

— On détermine le réseau de niveau N_L de N_f.
— Calculer le flot bloquant f' correspondant.
— Augmenter f par f'

Retourner f.

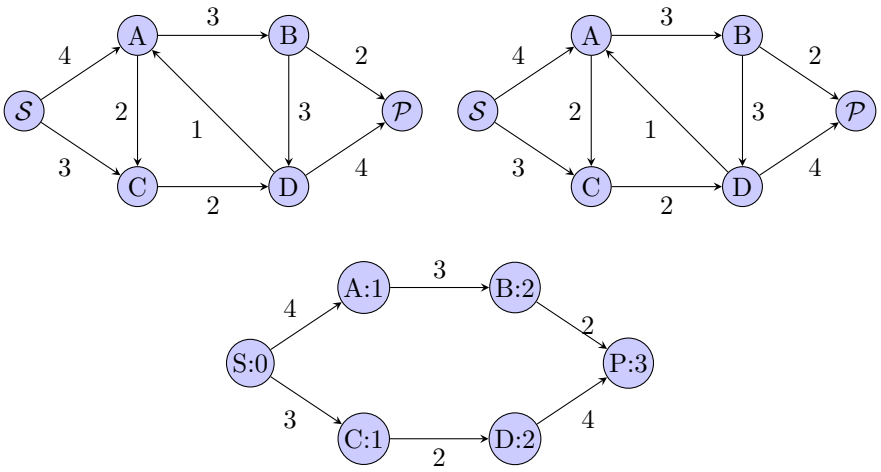
3.3.3 Complexité

3.3.4 Avantages/inconvénients

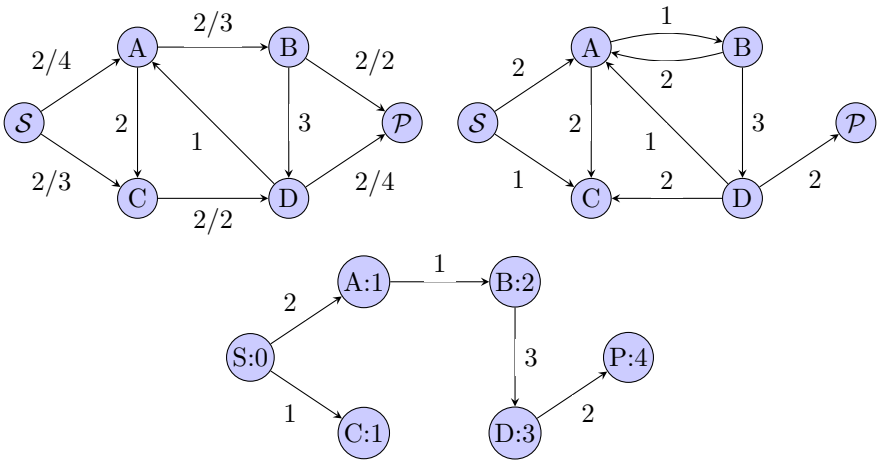
3.3.5 Application sur l'exemple

Au début le flot est nul, le réseau résiduel N_f à droite est donc le même que le réseau de flot N.

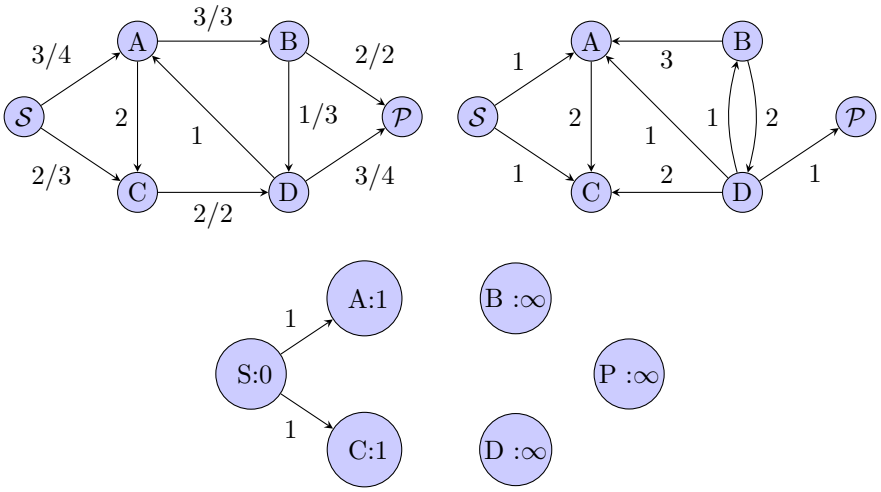
Nous avons aussi en dessous, le réseau de niveau N_L :



On a donc un chemin améliorant $SABP$ de valeur 2 ainsi qu'un chemin améliorant $SCDP$ de valeur 2.



Nous avons un chemin améliorant $SABDP$ de valeur 1.



Le puits P n'est plus atteignable, l'algorithme se termine.

Finalement la coupe minimale de ce réseau est l'ensemble $\{S, A, C\}$ et son flot maximal est de valeur 5.

3.4 Récapitulatif des algorithmes et leur complexité

Algorithme	Complexité	Complexité en fonction de $n = \|V\|$
Ford-Fulkerson	$O(\|E\|f_{max})$	$O(n^2 f_{max})$
Edmonds-Karp	$O(\|V\|\|E\|^2)$	$O(n^5)$
Dinic	$O(\|V\|^2\|E\|)$	$O(n^4)$
Poussage-Réétiquetage	$O(\|V\|^2\|E\|)$	$O(n^4)$

TABLE 1 – Récapitulatif des algorithmes de flot maximum

4 Programmation linéaire

4.1 Introduction à la programmation linéaire

La programmation linéaire est un outil mathématique qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation où l'objectif et les contraintes sont exprimés par des fonctions linéaires. Elle est utilisée dans de nombreux domaines tels que l'économie, la logistique, la gestion des ressources, etc.

D'une manière générale, un problème de programmation linéaire peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & c^T x \\ \text{Sous les contraintes} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

où :
— c est un vecteur de coefficients de la fonction objectif,
— x est le vecteur des variables de décision,
— A est une matrice de coefficients des contraintes,
— b est un vecteur de contraintes.

Exemple.

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & z(x) = 2x_1 + 1x_2 \\ \text{Sous les contraintes} \quad & 2x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solution optimale de ce problème est $x_1 = \frac{10}{3}$ et $x_2 = 0$ avec une valeur de $z(x) = \frac{20}{3}$.
Nous avons $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Dans cet exemple, les variables x_1 et x_2 sont réelles, c'est-à-dire que leur valeur peut être n'importe quel nombre réel positif. Cependant, dans de nombreux problèmes pratiques, les variables de décision doivent être des entiers (par exemple, le nombre d'objets à produire ou à transporter). Dans ce cas, on parle de *programmation linéaire en nombres entiers*. La programmation linéaire en nombres entiers est un cas particulier de la programmation linéaire où toutes les variables sont contraintes à prendre des valeurs entières. Si certaines variables sont continues et d'autres entières, on parle de *programmation linéaire mixte*.

Dans ces deux cas, la résolution du problème devient plus complexe et d'une manière générale, la programmation linéaire en nombres entiers et la programmation linéaire mixte sont NP-COMPLET. Cela signifie qu'il n'existe pas d'algorithme polynomial connu pour résoudre tous les problèmes de ce type.

Nous pouvons proposer une preuve concise de la NP-complétude de la programmation linéaire en nombres entiers.

Théorème. La programmation linéaire en nombres entiers est NP-COMPLET.

Preuve. La preuve est une réduction depuis le problème du vertex cover minimum.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Nous définissons un programme linéaire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser} \quad & \sum_{v \in V} y_v \\ \text{Sous les contraintes} \quad & y_v + y_u \geq 1 && \forall (u, v) \in E \\ & y_v \in \mathbb{N} && \forall v \in V \end{aligned}$$

Étant donné que la contrainte limite y_v à 0 ou 1, toute solution faisable de ce programme linéaire en nombres entiers est un sous ensemble de sommets de G. La première contrainte implique qu'au moins un sommet de chaque arête doit être choisi dans le sous-ensemble. De plus, la solution est un vertex cover de G. Réciproquement, si C est un vertex cover de G, alors y_v peut être mis à 1 pour chaque sommet de C et à 0 pour les autres sommets. Cela nous donne une solution faisable du programme linéaire. Nous pouvons conclure que si l'on minimise la somme des y_v, on obtient un vertex cover de taille minimale. Comme le problème du vertex cover est NP-complet, la programmation linéaire en nombres entiers est également NP-complet. □

Dans le cas de la programmation linéaire, il existe des algorithmes efficaces pour résoudre le problème, tels que l'algorithme du simplexe ou l'algorithme des points intérieurs. Bien que l'algorithme du simplexe soit de complexité exponentielle dans le pire des cas, il est très efficace en pratique et résout souvent des problèmes de grande taille en un temps raisonnable. L'algorithme des points intérieurs a une complexité polynomiale, mais il est souvent moins efficace que le simplexe.

4.2 Problème de flot maximum

Nous avons également comparé nos algorithmes avec les meilleurs solveurs de programmation linéaire. Pour cela nous avons utilisé la modélisation standard du problème de flot maximum :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser} \quad & \sum_{v:(s,v) \in E} f(s, v) \\ \text{Sous les contraintes} \quad & \begin{cases} \displaystyle\sum_{u:(u,v) \in E} f(u, v) - \sum_{w:(v,w) \in E} f(v, w) = 0 & \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\ f(u, v) \leq c(u, v) & \forall (u, v) \in E \\ f(u, v) \geq 0 & \forall (u, v) \in E \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction à maximiser est la somme des flots sortants du sommet source s, par conservation du flot, c'est aussi égal à la somme des flots entrants dans le sommet puits. La première contrainte assure la conservation du flot pour chaque sommet, sauf pour la source et le puits. La deuxième contrainte assure que le flot sur chaque arête ne dépasse pas sa capacité et la dernière contrainte assure que le flot est positif ou nul.

Remarque. Une remarque importante est que les variables de flot $f(u, v)$ sont continues, donc a priori, rien n'assure que la solution optimale soit entière.

4.3 Matrices totalement unimodulaires

Définition (Matrice totalement unimodulaire)**.** Soit M une matrice, on dit qu'elle est *totalement unimodulaire* si pour toute sous-matrice carrée N de M, le déterminant de N est égal à 0, 1 ou -1.

Exemple.

$A = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{-1} & -1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{1} & 0 & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice totalement unimodulaire.

Par exemple, prenons la sous-matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenue à partir des coefficients **noirs** de A.

N est une sous-matrice carrée de A et son déterminant est égal à 1. Pour prouver que A est totalement unimodulaire, il faut montrer que pour toute sous-matrice carrée de A, le déterminant est égal à 0, 1 ou -1.

Remarque. Une matrice totalement unimodulaire ne peut contenir que des 0, 1 et -1 (car sinon elle aurait une sous matrice 1×1 avec un déterminant différent de 0, 1 ou -1).

Théorème (Hoffman & Kruskal, 1956 [3])**.** Une matrice entière est totalement unimodulaire si et seulement si le polyhèdre défini par $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ est un polyèdre entier pour tout vecteur b entier.

Ce que nous apprend ce théorème, c'est que tout problème linéaire dont la matrice de contraintes est totalement unimodulaire et dont le vecteur de contraintes est entier, a une solution entière.

Théorème. La matrice du problème de flot maximum est totalement unimodulaire.

Et comme le vecteur de contraintes est entier (car les capacités sont entières), la solution optimale est entière.

L'intérêt de ce théorème est que, bien que la programmation linéaire en nombres entiers soit NP-complet, dans le cas du flot maximum, on peut utiliser un solveur de programmation linéaire classique pour obtenir une solution entière en temps polynomial.

4.4 Solveurs de programmation linéaire

Nous avons utilisé deux solveurs de programmation linéaire : `Gurobi` et `SCIP`, ces deux solveurs sont très performants et permettent de résoudre des problèmes de grande taille rapidement. `Gurobi` est un solveur commercial, réputé pour être l'un des plus rapides du marché, tandis que `SCIP` est un solveur open-source qui est probablement le meilleur dans sa catégorie.

5 Création des instances

Afin de pouvoir tester et comparer nos algorithmes, nous avons eu besoins d'instances de graphe de tailles et de formes differentes afin de pouvoir comparer comment se comportent nos

algorithmes. Comme nous n'avons pas trouvé d'instances de graphes suffisamment grandes en ligne, nous avons décidé de créer nos propres instances. Cette partie détaille ce processus de création et présente les differentes instances que nous avons pu créer ainsi que les choix que nous avons faits.

5.1 La classe RandomFlowNetwork

Afin de créer un grand nombre d'instances, nous avons du commencé par générer des graphes de manière aléatoire. Pour cela nous avons créé une classe `RandomFlowNetwork`.

Cette classe permet de générer un réseau de flot orienté en plusieurs étapes :

1. Elle crée un graphe vide et commence par lui ajouter l'ensemble de ses sommets, chacun identifié par un nom ou un numéro. Le nombre de sommet n crée est controlé à l'avance.
2. Ensuite, elle établit des arêtes orientées entre ces sommets. Ces connexions sont ajoutées de manière aléatoire, tout en respectant certaines contraintes :
   — Soit on fixe à l'avance un nombre précis de connexions.
   — Soit on utilise une densité, c'est-à-dire une proportion du nombre maximal de connexions possibles.
   Ici dans le cas de nos instances, cette derniere méthode est utilisée. Pour expliquer plus clairement comment cela fonctionne, pour un graphe $G = (E, V)$ on pose $d \in [0, 1]$ la densité, et ensuite $\forall x, y \in V$ la probabilité d'apparition de l'arête xy est d. On essaie donc de créer le graphe complet avec une probabilité d d'apparition sur chaque arêtes.
   Nous avons ainsi pu faire varier la densité de nos graphes entre 0.1 et 0.9.
   Chaque arête reçoit finalement une capacité aléatoire, c'est-à-dire une valeur représentant sa « capacité » ou « poids ».
3. Une fois les arêtes ajoutées, deux sommets distincts sont choisis au hasard : un sommet source (point de départ) et un sommet puits (point d'arrivée).
4. Les arêtes qui partent directement de la source et celles qui arrivent directement au puits sont récupérée et stockées à part.
5. Finalement, le graphe est retourné avec :
   — Le sommet source ;
   — Le sommet puits ;
   — Les arêtes entre les sommets.

En résumé, cette classe construit un graphe orienté aléatoire, puis désigne deux extrémités pour simuler un réseau de flot. Le problème est le suivant : comment construire des graphes pertinents afin de tester les algorithmes ?

5.2 Tests sur les graphes générés

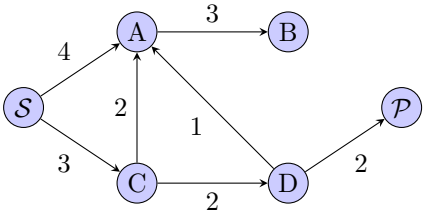
Les graphes étant générés aléatoirement, on peut obtenir des graphes non connexes, des sommets non reliés à la source ou au puits, etc. Tout cela fausseraient les instances. En effet, si le graphe n'est pas connexe, cela pourrait fausser les résultats : un graphe de taille 1000 pourrait se résumer à un de taille 100, ce que l'on ne souhaite pas. On pourrait même tomber sur des graphes où nos algorithmes ne convergeraient pas, par exemple si la source et le puits ne sont pas reliés.

On va donc devoir créer un ensemble de tests sur nos graphes afin de s'assurer qu'ils soient bien formés et propices à être utilisées comme instances. Cela pourra prendre du temps car nous

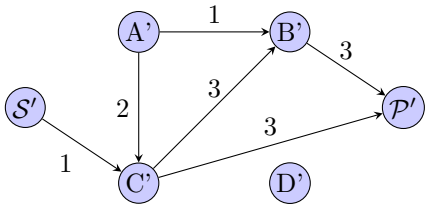
générons les graphes aléatoirement et n'en conservons qu'une petite partie, mais ce n'est pas très grave, car le jeu d'instances n'a besoin d'être créé qu'une seule fois. Il n'est pas nécessaire que le code qui permet sa création soit bien optimisé : on le lance un soir et on récupère les instances le lendemain dans le pire des cas. Nous avons donc implémenté une fonction `IsConnected` qui permet de vérifier les trois critères suivants sur le graphe :

1. Depuis la source, on peut atteindre n'importe quel sommet du graphe.
2. Depuis n'importe quel sommet du graphe, on peut atteindre le puits.
3. Le graphe est connexe.

Cela nous permet de nous assurer que le graphe que nous avons généré est bien formé. En effet, l'algorithme convergera car le premier point nous assure qu'on peut créer un flot sur ce graphe (la source est bien connectée au puits). Les points 2 et 3 nous permettent d'être sûrs que sur un graphe de taille n, chaque sommet aura bien son importance et sera bien pris en compte par le calcul. Le graphe ne peut donc pas se résumer à une version plus petite de lui-même.

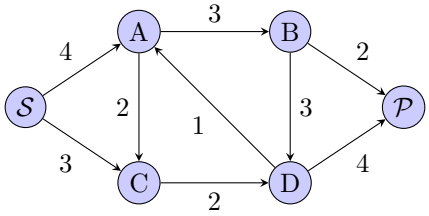


Graphe G



Graphe G'

Ainsi le graphe G ne sera pas pris car on ne peux pas accéder au puit depuis les sommets A et B. Le graphe G' quand à lui ne sera pas pris car il n'est pas connexe (le sommet D' est isolé), aussi on ne peux pas accéder au sommet A' depuis la source S'. En revanche, le graphe suivant est tout à fait valide :



Nous avons ainsi pu créer un jeu d'instances complet. Afin de généraliser davantage et de mieux comparer les résultats, plusieurs instances similaires (ayant la même taille et la même densité) sont créées. Pour connaître l'efficacité d'un algorithme sur une instance de ce type, on peut ainsi faire la moyenne des performances sur l'ensemble des instances de même taille et même densité.

5.3 Représentation des instances

Nous avons décidé de représenter les instances sous forme de fichiers texte. Chaque instance est représentée par un fichier contenant les informations suivantes :

— Le numéro de la source ;
— Le numéro du puits ;
— La liste des arcs du graphe, sous la forme : x y $c(xy)$ où x et y sont les numéros des sommets de l'arc, et $c(xy)$ est la capacité de l'arc.

Le nombre de sommets ainsi que la densité du graphe sont indiqués dans le nom du fichier. Par exemple, voici les premières lignes du fichier `inst30_0,1_1`, où 30 représente le nombre de sommets, 0,1 la densité, et 1 le numéro de l'instance (car plusieurs instances sont créées pour un même nombre de sommets et une même densité).

```
22
4
17 21 9
24 25 8
12 27 55
...
```

5.4 Les instances choisies

Nous avons créé des instances pour toutes les tailles multiples de 10 entre 30 et 200. Pour chaque taille, nous avons utilisé trois densités : 0,1, 0,5 et 0,9. Pour chaque densité, trois instances différentes ont été générées. Cela représente au total plus de 150 instances pour tester nos programmes. Nous avons choisi de rester sur des tailles raisonnables afin que tous les algorithmes, même les moins efficaces, puissent toujours converger et ainsi être comparés. En effet, pour un graphe de taille de 200 sommets et une densité de 0,9, on obtient en moyenne :

$$\frac{200\times(200-1)}{2} \times 2 \times 0{,}9 = 35820 \text{ arêtes}$$

Le $\frac{200\times(200-1)}{2} \times 2$ correspondant à toutes les arêtes possibles. En effet $\frac{n\times(n-1)}{2}$ pour le graphe complet, $\times 2$ car les arêtes sont orientés. On multiplie par la densité pour savoir le nombre d'arête en moyenne, dans notre exemple la densité est de $0,9$.

6 Développement Logiciel

6.1 Organisation du projet

6.2 Présentation des classes

Dans cette section, nous présentons les différentes classes développées dans le cadre de ce projet, ainsi que leur rôle et leurs interactions.

Les classes principales que nous avons implémentées sont les suivantes :

- Vertex
- Graph
- FlowNetwork
- FileFlowNetwork
- RandomFlowNetwork
- PL
- Curve
- Program

Nous détaillons maintenant chacune de ces classes en exposant leur conception, leurs fonctionnalités principales, ainsi que leur rôle dans le fonctionnement global du projet.

6.2.1 Vertex

La classe Vertex représente un sommet dans un graphe. Chaque sommet est identifié par un nom ou une étiquette, généralement une chaîne de caractères. Cette classe permet d'identifier et de manipuler les nœuds du graphe. Deux sommets sont considérés comme égaux s'ils portent le même nom, ce qui autorise leur utilisation comme clés dans des dictionnaires, notamment pour stocker les arêtes, les capacités ou les flots.

6.2.2 Graph

La classe Graph représente un graphe orienté pondéré, outils de base pour tous nos algorithmes. En effet la classe FlowNetwork, qui représente un réseau le réseau de flot qu'on va utiliser, hérite de la classe Graph. Un objet de Graph est défini par deux dictionnaires : AdjVertices, qui associe chaque sommet à l'ensemble de ses successeurs, et Edges, qui stocke les arêtes du graphe avec leur capacité sous forme de couple de sommets. Quelques fonctions de bases sont codées, comme par exemple NeighborsLeft où NeighborsRight, qui retournent respectivement les voisins entrants et sortants d'un sommet donné, une fonction Clone qui clone le graphe et d'autres fonctionnalités classiques.

6.2.3 FlowNetwork

La classe FlowNetwork est au cœur de la bibliothèque de calcul de flot maximal. Elle étend la structure de base Graph en introduisant plusieurs notions fondamentales. C'est depuis cette classe que l'on va gérer tout les algorithmes de calcul de flot maximum qui consituent le coeur de ce projet. Nous nous proposons donc naturellement de détailler cette classe, qui est la plus importante.

En plus de l'héritage de la classe Graph, la classe FlowNetwork introduit les attributs Source et Puits, qui représentent respectivement le sommet source et le sommet puits du réseau. Ces attributs sont essentiels pour les algorithmes de flot maximal, car ils définissent les points d'entrée et de sortie du réseau.

Cette classe concentrant tout les algorithmes de calcul sur un réseau de flot, elle contient évidement tout les algorithmes de de calcul de flot maximum que nous avons implémentés. Nous en redonnons ici une liste non exhaustive :

- FordFulkerson
- EdmondsKarp
- Dinic
- PushRelabel

La résolution via la programmation linéaire fait l'objet d'une classe séparée, PL, car cette méthode ne constitue pas réellement en elle même un algorithmes sur les réseaux de flot.

Plusieurs fontions essentielles aux fonctionnement de ces algorithmes où à d'autres taches telles que la constructions d'instances on également été implémentées. En voici les plus importantes :

- DFS_GetPathInLevelGraph : implémente une recherche en profondeur (DFS) pour trouver un chemin augmentant dans un graphe résiduel (typiquement dans l'algorithme de FordFulkerson ou de Dinic).
- BFS_GetLevels : utilise une recherche en largeur (BFS) pour attribuer à chaque sommet son niveau (distance minimale en nombre d'arêtes depuis la source) dans un graphe.

— GetResidualGraph : permet de récupérer le graphe résiduel du réseau de flot.
— GetMaxFlow : permet de récupérer la valeur du flot maximum. L'interêt et les propriétés d'un tel graphes sont détaillés dans la section sur les algorithmes de flot maximum.
— IsConnected : cette méthode n'est pas utilisée dans les algorithmes de flot maximum, mais elle a été très utile lors de la création des instances. En effet, elle permet de vérifier plusieurs propriétés sur le graphe qui sont essentielles pour s'assurer que le graphe est « bien formé ». Comme détaillé dans la partie sur les instances, elle vérifie que tout sommet est accessible depuis la source et que tout sommet admet un chemin jusqu'au puits. Elle décide donc si un graphe est gardé comme instance ou jeté.
— CreateGraphFile : permet de créer un fichier texte contenant la représentation du graphe. Cette méthode est utilisée lors de la création des instances, afin de pouvoir les sauvegarder et les réutiliser plus tard.

Pour plus de precisions sur le fonctionnement des méthodes relatives aux algorithmes de flot maximum, nous vous renvoyons à la section sur les algorithmes de flot maximum.

6.2.4 FileFlowNetwork

La classe FileFlowNetwork a pour rôle de générer dynamiquement un réseau de flot (FlowNetwork) à partir d'un fichier texte structuré. Elle lit dans ce fichier les informations nécessaires à la construction du graphe : l'identifiant du sommet source, celui du puits, puis une liste d'arêtes définies par deux sommets et une capacité. Le fichier est lu ligne par ligne, chaque sommet étant instancié sous forme d'objet Vertex, et les arêtes ajoutées avec leur poids dans un objet Graph. À la fin de la lecture, la méthode Generate de la classe construit et retourne une instance de FlowNetwork contenant la topologie complète du graphe, prête à être utilisée dans les algorithmes de flot maximum.

6.2.5 RandomFlowNetwork

La classe RandomFlowNetwork est responsable de la génération aléatoire de graphes orientés, qui sont ensuite utilisés comme instances pour les algorithmes de flot maximum. Elle crée un graphe orienté en ajoutant des sommets et des arêtes de manière aléatoire, tout en respectant une densité spécifiée. La classe permet également de définir une source et un puits, ainsi que d'assigner des capacités aux arêtes. Sa méthode Generate retourne un objet FlowNetwork représentant le réseau de flot. La methode de génération de graphes aléatoires est détaillée dans la section sur la création des instances.

6.2.6 PL

La classe PL (Programmation Linéaire) a pour rôle de modéliser le problème du calcul du flot maximum sur un graphe donné sous la forme d'un système linéaire, puis de le résoudre à l'aide de solveurs spécialisés tels que Google OR-Tools ou Gurobi. Elle construit un modèle dans lequel chaque variable représente le flot sur une arête, les contraintes traduisent les capacités maximales des arêtes et les lois de conservation du flot en chaque sommet intermédiaire (autres que la source et le puits), et la fonction objectif vise à maximiser le flot total sortant de la source. La méthode SolveWithOrTools implémente cette logique avec OR-Tools, tandis que SolveWithGurobi l'implémente via l'API Gurobi. Une méthode AfficherSysteme est également disponible pour visualiser les variables, les contraintes et la fonction objectif du système linéaire généré. Pour plus de détails nous vous renvoyons à la section sur la programmation linéaire.

6.2.7 Curve

La classe Curve est chargée de mesurer les performances temporelles de différents algorithmes de calcul du flot maximum sur un ensemble d'instances de graphes, puis de générer automatiquement des courbes de benchmark. Pour une densité donnée, la méthode CreateCurves parcourt tous les fichiers de graphes correspondants dans un dossier, instancie le réseau de flot associé, et exécute chaque algorithme de calcul fourni tout en mesurant le temps d'exécution. Ces temps sont ensuite agrégés en fonction du nombre de sommets du graphe, permettant ainsi de tracer des courbes de performance (temps en fonction du nombre de sommets) pour chaque méthode. La bibliothèque ScottPlot est utilisée pour la génération des graphiques, qui sont ensuite enregistrés au format PNG. Cette classe permet donc de produire les courbes qui nous permettent de visualiser la complexité pratique des algorithmes de flot maximum en fonction de la taille du graphe.

6.2.8 Program

Cette Program classe principale constitue le point d'entrée du programme. C'est depuis ce fichier que l'on appelle les différentes classes développées dans le projet pour effectuer les diverses actions nécessaires : génération des instances aléatoires, résolution du problème de flot maximum à l'aide de plusieurs algorithmes, et création des courbes de performances. Elle orchestre ainsi l'ensemble du processus expérimental, de la construction des graphes jusqu'à l'analyse des résultats.

6.3 Langage et classes

6.4 Tests

7 Méthodologie Expérimentale

8 Résultats et Discussion

9 Revue de la Littérature

10 Conclusion et Perspectives

Références

[1] Thomas H. Cormen et al. « Introduction to Algorithms ». In : 3e éd. Chapitre sur les flots maximum. Cambridge, MA : MIT Press, 2009. Chap. 26, p. 708-766. ISBN : 978-0-262-03384-8.

[2] Leslie M. Goldschlager, Ralph A. Shaw et John Staples. « The maximum flow problem is log space complete for P ». In : *Theoretical Computer Science* 21.1 (1982), p. 105-111. ISSN : 0304-3975. DOI : https://doi.org/10.1016/0304-3975(82)90092-5. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304397582900925.

[3] A. J. Hoffman et J. B. Kruskal. *13. Integral Boundary Points of Convex Polyhedra*. Déc. 1957, p. 223-246. DOI : 10.1515/9781400881987-014. URL : https://doi.org/10.1515/9781400881987-014.

[4] Lex Schrijver. « On the History of the Transportation and Maximum Flow Problems ». In : *Mathematical Programming* 91.3 (2002), p. 437-445. DOI : 10.1007/s101070100259. URL : https://homepages.cwi.nl/~lex/files/histtrpclean.pdf.