



Capacité d'un ouvert en dimension 3.

Mini-projet du cours *MAP431*

Travail réalisé par Ruikang Liang et Shouda Wang

Période 2, l'année 2019-2020

0 REPARTITION DU TRAVAIL

Au début, la première partie a été faite par Shouda WANG, la deuxième et troisième ainsi que le code par Ruikang LIANG. Ensuite les deux ont échangé leurs avis sur la totalité du mini-projet.

1 RESOLUTION THEORIQUE

Question 1.1

Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}_0 sur \mathbb{R} à support compact, alors

$$\int_0^{+\infty} \phi(r)^2 dr \leq 4 \int_0^{+\infty} r^2 (\phi'(r))^2 dr. \quad (1)$$

Solution En utilisant intégration par partie et l'inégalité de Cauchy on obtient

$$\left(\int_0^{+\infty} \phi(r)^2 dr \right)^2 = \left(- \int_0^{+\infty} 2\phi(r)\phi'(r)r dr \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} (2\phi(r))^2 dr \int_0^{+\infty} (\phi'(r)r)^2 dr. \quad (2)$$

Ceci nous permet de conclure.

Question 1.2

Montrer que pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\phi|_\Omega$ est constante, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \frac{\phi(x)^2}{|x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla \phi(x)|^2 dx \quad (3)$$

Solution En s'appuyant sur la question précédente,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \frac{\phi(x)^2}{|x|^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{|x|^2} dx \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \phi(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta)^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ &\leq 4 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^2 (\nabla \phi \cdot (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta))^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \phi(x) \cdot x/|x|)^2 dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi(x)|^2 dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla \phi(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Question 1.3

On pose

$$W = \left\{ \phi \text{ tel que } \frac{\phi}{|x|} \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}), \phi|_{\partial\Omega} = \text{Cte et } \nabla \phi \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \right\} \quad (5)$$

où la Cte est indéterminée, muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_W = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \frac{\phi(x)\psi(x)}{|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx. \quad (6)$$

Alors W est un espace de Hilbert dans lequel $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap W$ est dense.

Solution Pour démontrer que W est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que toute suite de Cauchy est convergente. Prenons $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans W , alors $\{f_n(x)/|x|\}$ et $\{\nabla f_n\}$ sont deux suites de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$.

$L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ étant complet comme un espace métrique, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\cdot)/|\cdot| = u(\cdot)/|\cdot| \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla f_n = w \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}). \quad (7)$$

Montrons que $\nabla u = w$: on a

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} (f_n(x) \nabla v(x) + \nabla f_n(x) v(x)) dx = 0, \quad (8)$$

pour toute fonction $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$. Pour une telle fonction v , on la fixe et on passe à la limite pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} (u(x) \nabla v(x) + w(x) v(x)) dx = 0. \quad (9)$$

Cela est juste car $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = u$ dans $L^2(\text{supp}(v))$ grâce à formule(7). On en conclut que $\nabla u = w$.

D'ailleurs prenons une boule B qui contient Ω , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = u \quad \text{dans} \quad H^1(B \setminus \bar{\Omega}). \quad (10)$$

On utilise la continuité de l'opérateur trace sur $B \setminus \bar{\Omega}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n|_{\partial(B \setminus \bar{\Omega})} = u|_{\partial(B \setminus \bar{\Omega})} \quad \text{dans} \quad L^2(\partial(B \setminus \bar{\Omega})), \quad (11)$$

ce qui implique que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} \quad \text{dans} \quad L^2(\partial\Omega). \quad (12)$$

Etant la limite d'une suite de fonctions constantes, $u|_{\partial\Omega}$ est elle aussi constante. Cela permet de conclure que toute suite de Cauchy converge et donc que W est un espace de Hilbert.

Pour démontrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap W$ est dense dans W , on montre que $\forall f \in W, \forall \epsilon \geq 0$, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap W$, telle que $\|f - g\|_W \leq \epsilon$. D'abord prenons une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{R})$ qui est décroissante, qui vaut 1 en $(-\infty, 0)$ et 0 en $(1, +\infty)$, et dont la dérivée est bornée par 2. Notons $\rho_R(x) = \rho(\frac{|x| - R}{R})$.

Dans la suite L^2 sans se referer au domaine est toujours supposé d'être sur $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$.
Pour de R suffisamment grand, on voit facilement

$$\|\rho_R \cdot f - f\|_W^2 = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \frac{(\rho_R(x)f(x) - f(x))^2}{|x|^2} dx + \|\nabla(\rho_R f - f)\|_{L^2}^2. \quad (13)$$

Le premier terme est borné par

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,R)} \frac{f(x)^2}{|x|^2} dx, \quad (14)$$

qui tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini puisque $f \in W$.

Pour le deuxième terme,

$$\|\nabla(\rho_R f - f)\|_{L^2} \leq \|\nabla f(1 - \rho_R)\|_{L^2} + \|\nabla \rho_R f\|_{L^2} \leq \|\nabla f(1 - \rho_R)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(0,R))} + \|\nabla \rho_R f\|_{L^2}. \quad (15)$$

Mais on a,

$$\begin{aligned} \|\nabla \rho_R f\|_{L^2}^2 &= \int_{B(0,2R) \setminus B(0,R)} (\nabla \rho_R(x))^2 f(x)^2 dx \\ &\leq \int_{B(0,2R) \setminus B(0,R)} (2/R)^2 f(x)^2 dx \\ &\leq \int_{B(0,2R) \setminus B(0,R)} (2 \cdot 2/|x|)^2 f(x)^2 dx \\ &\leq 16 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,R)} f(x)^2 / |x|^2 dx, \end{aligned} \quad (16)$$

donc $\|\nabla \rho_R f\|_{L^2}^2$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. Cela avec l'équation (15) montrent que $\|\nabla(\rho_R f - f)\|_{L^2}$ tend vers 0 et que finalement $\rho_R \cdot f$ tend vers f dans W . On prend un R tel que

$$\|\rho_R f - f\|_W \leq \epsilon/2. \quad (17)$$

Il est évident que $\rho_R f \in H^1(B(0, 2R+1) \setminus \bar{\Omega})$ et que $(\rho_R f)|_{\partial\Omega} = \text{Cte}$. Donc on a $\rho_R(f - \text{Cte}) \in H_0^1(B(0, 2R+1) \setminus \bar{\Omega})$, par conséquent on peut prendre une fonction $g \in \mathcal{C}_0^\infty(B(0, 2R+1) \setminus \Omega)$ telle que l'inégalité suivante soit satisfaite,

$$\|\rho_R(f - \text{Cte}) - g\|_{H^1(B(0, 2R+1) \setminus \bar{\Omega})} \leq \frac{1}{2} \min\{1, \inf_{x \in \partial\Omega} |x|\} \epsilon, \quad (18)$$

ce qui implique que

$$\|\rho_R(f - \text{Cte}) - g\|_W \leq \frac{\|\rho_R(f - \text{Cte}) - g\|_{H^1(B(0, 2R+1) \setminus \bar{\Omega})}}{\min\{1, \inf_{x \in \partial\Omega} |x|\}} \leq \frac{1}{2} \epsilon. \quad (19)$$

Cette estimation et (17) montrent $\|f - (g + \text{Cte} \cdot \rho_R)\|_W \leq \epsilon$. $g + \text{Cte} \cdot \rho_R$ étant dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap W$ on conclut que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) \cap W$ est dans W .

Question 1.4

W muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx, \quad (20)$$

est aussi un espace de Hilbert. Et que les deux normes sont équivalentes.

Solution Cette forme bilinéaire est bien symétrique et définie positive donc est un produit scalaire. Il suffit de montrer que W est complet sous ce produit scalaire.

Dans question 1.2 on a en fait montré que pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\phi|_\Omega$ est constante, on a $\|\phi\|_W \leq \sqrt{5}\|\phi\|_{\dot{H}^1}$. La question précédente nous assure que, en passant par la limite, cette inégalité reste vraie pour toute fonction dans W ,

$$\|f\|_{\dot{H}^1} \leq \|f\|_W \leq \sqrt{5}\|f\|_{\dot{H}^1} \quad \forall f \in W. \quad (21)$$

Les deux normes sont bien équivalentes.

La complétude de W sous norme $\|\cdot\|_W$ implique celle de W sous norme $\|\cdot\|_{\dot{H}^1}$. Donc W muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\dot{H}^1}$ est aussi un espace de Hilbert.

Question 1.5

Notons la fermeture de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ dans W comme W_0 , alors $W_0 \neq H_0^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$.

Solution Il suffit de se donner une fonction qui appartient à W_0 mais n'appartient pas à $H_0^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$.

Supposons que Ω soit inclus dans une boule $B(0, R)$. Prenons une fonction $\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est glisse et décroissante, qui vaut 0 en $(0, R)$ et 1 en $(R+1, +\infty)$, dont la dérivée est bornée par 2. Posons $f(x) = \Phi(|x|)/|x|$. f est de même ordre que $\frac{1}{|x|}$, donc $f \notin L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$. Cependant, $f/|\cdot| \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$. En outre,

$$\nabla f(x) = \frac{\Phi'(|x|)|x| - \Phi(|x|)}{|x|^3}x, \quad (22)$$

ce qui implique que $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$. On conclut que $f \in W_0$ et $f \notin H_0^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$.

Question 1.6

On pose maintenant W_1 l'espace affine

$$W_1 = \{\phi \in W \text{ tel que } \phi|_{\partial\Omega} = 1\}. \quad (23)$$

Alors la formulation variationnelle du problème

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ \phi = 1 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \phi \text{ raisonnablement intégrable en } +\infty, \end{cases} \quad (24)$$

est

$$\text{Trouver } \phi \in W_1, \text{ tel que } \forall \psi \in W_0, \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \nabla\phi \cdot \nabla\psi dx = 0. \quad (25)$$

Cette formulation variationnelle a une solution unique qui est aussi la solution du problème de minimisation

$$C(\Omega) = \min_{\phi \in W_1} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla \phi|^2 dx. \quad (26)$$

Solution Nous prenons une fonction de test ψ qui s'annule sur le bord, alors puisque ϕ est raisonnablement intégrable,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \psi \Delta \phi = - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \nabla \phi \cdot \nabla \psi dx. \quad (27)$$

La condition au bord est du type Dirichlet, donc elle rentre dans le domaine de fonction : on cherche ϕ dans l'espace W_1 . Nous concluons que la formulation variationnelle est :

$$\text{Trouver } \phi \in W_1, \text{ tel que } \forall \psi \in W_0, \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \nabla \phi \cdot \nabla \psi dx = 0. \quad (28)$$

Confirmons maintenant que ce problème admet une unique solution. Prenons une fonction $\phi_1 \in W_1$ quelconque, la formulation (28) est équivalente à

$$\text{Trouver } \phi \in W_0, \text{ tel que } \forall \psi \in W_0, (\phi, \psi)_{\dot{H}^1} = - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \psi dx. \quad (29)$$

Vérifions les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. La forme bilinéaire étant le produit scalaire, elle est bien bornée et coercive. Et la forme $\psi \rightarrow - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \psi dx$ est évidemment continue. On en conclut l'existence et l'unicité de la solution ϕ^* .

Calculons que pour tout $\phi \in W_1$, puisque $\phi - \phi^* \in W_0$ on a,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla \phi|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla(\phi - \phi^*) + \nabla \phi^*|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla(\phi - \phi^*)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla \phi^*|^2 dx. \quad (30)$$

Cela montre que ϕ^* est l'unique solution du problème de minimisation (26).

Question 1.7

Montrer que

$$C(\lambda\Omega) = \lambda C(\Omega). \quad (31)$$

Solution W_1 dépend de Ω , pour la clarté on l'écrit explicitement comme $W_1(\Omega)$. Nous avons une bijection entre $W_1(\Omega)$ et $W_1(\lambda\Omega)$,

$$\phi \mapsto \phi_\lambda, \quad \phi_\lambda(x) = \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (32)$$

Maintenant faisons un argument de scaling,

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \lambda\bar{\Omega}} |\nabla \phi_\lambda(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \lambda\bar{\Omega}} |\nabla \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla \phi(z) \frac{1}{\lambda}|^2 \lambda^3 dz = \lambda \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |\nabla \phi|^2 dx. \quad (33)$$

Par la définition de capacité on a $C(\lambda\Omega) = \lambda C(\Omega)$.

2. TRONCATURE SPATIQUE

Question 2.1

Donner la formulation variationnelle du problème

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \text{ dans } B \setminus \Omega \\ \phi = 1 \text{ sur } \partial\Omega \\ \phi = 0 \text{ sur } \partial B. \end{cases} \quad (34)$$

Montrer que cette formulation a une unique solution.

Solution Notons

$$H_{0,1}^1(B \setminus \Omega) = \{\phi \in H^1(B \setminus \Omega) \text{ telle que } \phi|_{\partial B} = 0, \phi|_{\partial\Omega} = 1\}. \quad (35)$$

La formulation variationnelle s'écrit alors

$$\text{Trouver } \phi \in H_{0,1}^1(B \setminus \Omega), \quad \forall \psi \in H_0^1(B \setminus \Omega), \quad \int_{B \setminus \Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi = 0. \quad (36)$$

Prenons un élément ϕ_0 quelconque de $H_{0,1}^1(B \setminus \Omega)$, la formulation est équivalente à

$$\text{Trouver } \phi \in H_0^1(B \setminus \Omega), \quad \forall \psi \in H_0^1(B \setminus \Omega), \quad \int_{B \setminus \Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi = - \int_{B \setminus \Omega} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \phi. \quad (37)$$

Le théorème de Lax-Milgram implique l'existence et l'unicité de la solution du problème.

Question 2.2

On considère un maillage de B par des triangles de telle sorte que ce maillage respecte la frontière de Ω , et une approximation du problème par des éléments finis \mathbb{P}_1 . On note V_h l'espace des fonctions de $H_1(B)$, linéaires sur chaque triangle du maillage, et continues sur B . Ecrire la formulation variationnelle discrète associée au problème continu de la question 2.1. Montrer que celle-ci admet une unique solution.

Solution Notons

$$\begin{aligned} V_{h,0,1}(B \setminus \Omega) &= \{\phi \in V_h(B \setminus \Omega) \text{ telle que } \phi|_{\partial B} = 0, \phi|_{\partial\Omega} = 1\}, \\ V_{h,0}(B \setminus \Omega) &= \{\phi \in V_h(B \setminus \Omega) \text{ telle que } \phi|_{\partial B} = 0, \phi|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned} \quad (38)$$

La formulation variationnelle discrète s'écrit alors

$$\text{Trouver } \phi \in V_{h,0,1}(B \setminus \Omega), \quad \forall \psi \in V_{h,0}(B \setminus \Omega), \quad \int_{B \setminus \Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi = 0. \quad (39)$$

Prenons un élément ϕ_0 quelconque de $V_{h,0,1}(B \setminus \Omega)$, la formulation est équivalente à

$$\text{Trouver } \phi \in V_{h,0}(B \setminus \Omega), \quad \forall \psi \in V_{h,0}(B \setminus \Omega), \quad \int_{B \setminus \Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi = - \int_{B \setminus \Omega} \nabla \psi_0 \cdot \nabla \phi. \quad (40)$$

$V_{h,0}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H_0^1 , donc un espace d'Hilbert. La continuité et la coercivité dans H_0^1 garantissent que Lax-Milgram s'applique sur cet espace pour la même forme linéaire et forme bilinéaire. Donc il existe une unique solution de la formulation variationnelle.

3 APPROXIMATION NUMÉRIQUE

Question 3.1

Afin de simplifier l'étude, on supposera que les domaines considérés sont tous à symétrie cylindrique d'axe vertical Oz et on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , où les coordonnées cartésiennes sont données par

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Solution Comme le domaine considéré ainsi que les conditions au bord sont à symétrie cylindrique d'axe vertical Oz , la formulation variationnelle a une invariance rotationnelle autour de l'axe Oz . Or il existe une unique solution pour la formulation variationnelle, la solution a aussi une invariance rotationnelle autour de l'axe Oz , donc la solution est indépendante de θ

On définit ϕ' la fonction après le changement de variables

$$\phi' : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (r, \theta, z) \mapsto \phi(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z). \quad (41)$$

On définit que

$$\Omega' = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}, \text{ tel que } (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \Omega\}. \quad (42)$$

Par la symétrie, on obtient une condition au bord supplémentaire

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi' = 0 \text{ sur } \{r = 0\} \setminus \partial\Omega' \quad (43)$$

Le problème devient donc,

$$\begin{cases} \Delta_{cyl} \phi' = 0 \text{ dans } (\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}) \setminus \Omega' \\ \phi' = 1 \text{ sur } \partial\Omega' \setminus \{r = 0\} \\ \frac{\partial}{\partial r} \phi' = 0 \text{ sur } Oz \setminus \partial\Omega' \\ \phi' \text{ raisonnablement intégrable en } \infty \end{cases} \quad (44)$$

Vu la symétrie du problème, on réduira (44) à un problème en dimension 2. En notant

$$\tilde{\Omega} = \{(r, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \text{ tel que } (r, 0, z) \in \Omega'\}, \quad (45)$$

on a

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \text{ dans } (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\Omega} \\ \psi = 1 \text{ sur } \partial\tilde{\Omega} \setminus Oz \\ \frac{\partial}{\partial r} \psi = 0 \text{ sur } Oz \setminus \partial\tilde{\Omega} \\ \psi \text{ raisonnablement intégrable en } \infty. \end{cases} \quad (46)$$

Pour formuler ce problème on définit,

$$\tilde{W}_1 = \{\psi \text{ tel que } \frac{r\psi}{\sqrt{r^2 + z^2}} \in L^2((\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\Omega}), \psi|_{\partial\tilde{\Omega} \setminus Oz} = 1, \text{ et } \nabla \psi \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\Omega}'\}, \quad (47)$$

$$\tilde{W}_0 = \{\psi \text{ tel que } \frac{r\psi}{\sqrt{r^2 + z^2}} \in L^2((\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\Omega}), \psi|_{\partial\tilde{\Omega} \setminus Oz} = 0, \text{ et } \nabla\psi \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\Omega}'\}. \quad (48)$$

Soit ϕ la solution du problème, alors on calcule formellement :

$$0 = \int_{(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\Omega}} (\psi \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} \phi) + r\psi \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \phi) dz dr = - \int_{(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\Omega}} (r \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + r \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z}) dz dr. \quad (49)$$

La formulation variationnelle s'écrit alors :

$$\text{Trouver } \phi \in \tilde{W}_1, \text{ tel que } \forall \psi \in \tilde{W}_0, \quad \int_{(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\Omega}} (r \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + r \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z}) dz dr = 0. \quad (50)$$

Question 3.2

Prendre pour boîte englobante un cylindre centré en 0

$$B = \{(r, \theta, z) \text{ tel que } r \in]0, R], \theta \in [0, 2\pi], z \in [-R, R]\}, \quad (51)$$

où R est choisi assez grand pour que $\Omega \subset B$ et réécrire de même la formulation variationnelle tronquée dans la boîte B .

Solution Notons

$$\tilde{B} = \{(r, z) \text{ tel que } r \in]0, R], z \in [-R, R]\}, \quad (52)$$

$$\tilde{H}_1 = \{\phi \in H^1(\tilde{B} \setminus \tilde{\Omega}) \text{ tel que } \phi|_{\partial\tilde{B} \setminus Oz} = 0, \phi'|_{\partial\Omega' \setminus Oz} = 1\}, \quad (53)$$

$$\tilde{H}_0 = \{\phi \in H^1(\tilde{B} \setminus \tilde{\Omega}) \text{ tel que } \phi|_{\partial\tilde{B} \setminus Oz} = 0, \phi'|_{\partial\Omega' \setminus Oz} = 0\}.$$

La formulation variationnelle s'écrit alors

$$\text{Trouver } \phi \in H'_1, \quad \forall \psi \in H'_0, \quad \int_{\tilde{B} \setminus \tilde{\Omega}} r \cdot (\frac{\partial}{\partial r} \psi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \phi + \frac{\partial}{\partial z} \psi \cdot \frac{\partial}{\partial z} \phi) dz dr = 0. \quad (54)$$

Question 3.3

Ecrire un programme FREEFEM++ qui résout le problème de façon bidimensionnelle en (r, z) uniquement, et calculer la capacité approchée, en prenant pour Ω des ellipsoïdes de révolution de demi grand axe vertical 1 et de demi grand axe horizontal r_0 pour $1 \leq r_0 \leq 2$. On prendra pour la boîte englobante $R = 5$, et on détaillera la condition (au bord) que l'on imposera sur l'axe de révolution.

Solution Veuillez voir notre code FREEFEM++ ci-joint.

Question 3.4

Tracer les isovaleurs de la solution du problème obtenue dans les cas $r_0 = \frac{1}{2}, 1, 2$

Solution

Veuillez voir les figures 1, 2, 3

Pour $r_0 = 0.5, 1.0, 2.0$ la valeur de cette quantité vaut 9.29295, 9.56938 et 11.7289

Question 3.5

Tracer une courbe en fonction de r_0 de la quantité $\frac{C(\Omega)}{Vol(\Omega)^{\frac{1}{3}}}$ où $Vol(\Omega)$ est le volume de l'ellipsoïde Ω . On fera le calcul avec d'autres valeurs que $r_0 = \frac{1}{2}, 1, 2$. Commenter les résultats

obtenus.

Solution

On trace la courbe de ce rapport avec python avec $R = 5$ pour la boîte englobante. Comme dans la figure (4).

On se constate que le rapport $\frac{C(\Omega)}{Vol(C)^{\frac{1}{3}}}$ décroît lorsque r_0 augmente dans l'intervalle $r_0 \in (0, 1)$ et le rapport augmente lorsque r_0 augmente dans l'intervalle $r_0 \in (1, +\infty)$. Cela correspond bien à l'intuition que la capacité d'un conducteur est par définition la charge qu'il peut stockée en gardant potentiel électrique = 1 au bord. Imaginons des conducteurs qui prennent de différentes formes et dont les potentiels électrique sont égaux à 1, la charge minimale doit être atteinte pour le conducteur le plus symétrique.

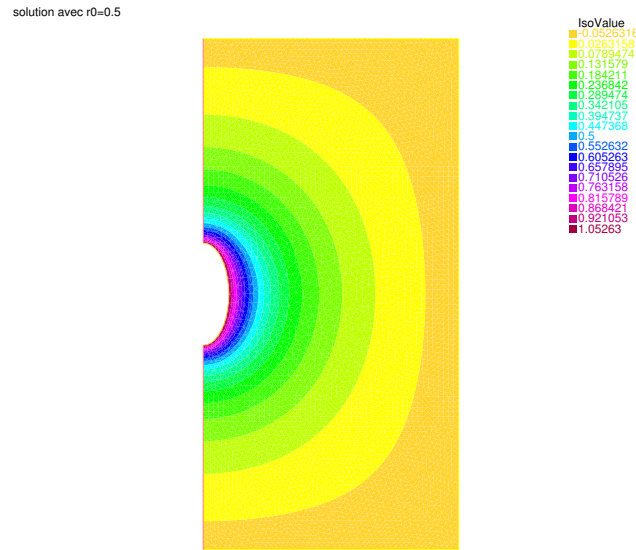


FIGURE 1 – Solution avec $r_0 = 0.5, R = 5$

solution avec r0=1

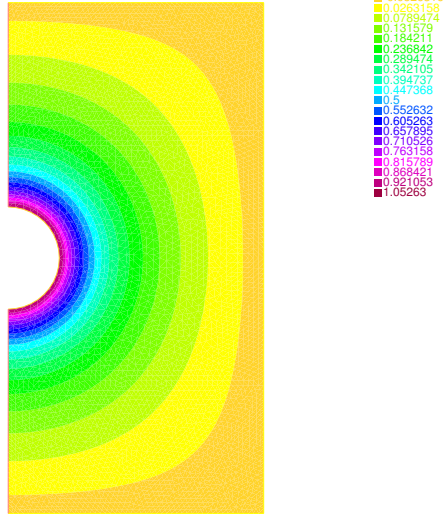


FIGURE 2 – Solution avec $r_0 = 1.0$, $R = 5$

solution avec r0=2

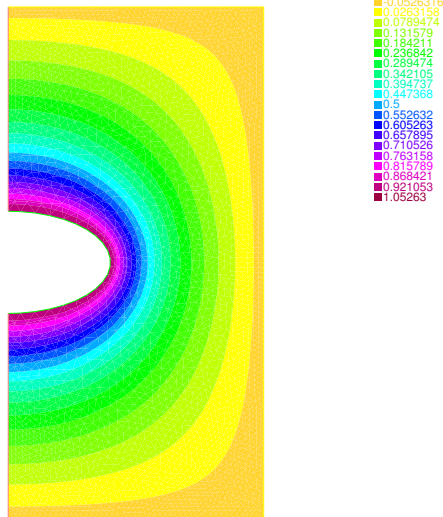


FIGURE 3 – Solution avec $r_0 = 2.0$, $R = 5$

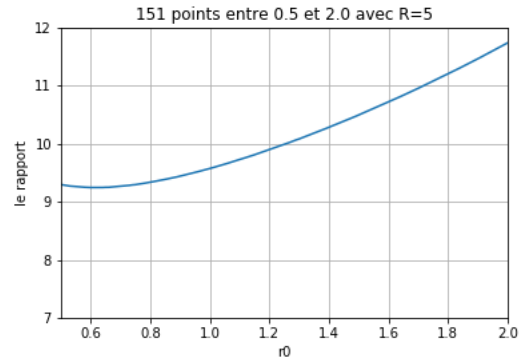


FIGURE 4 – R=5

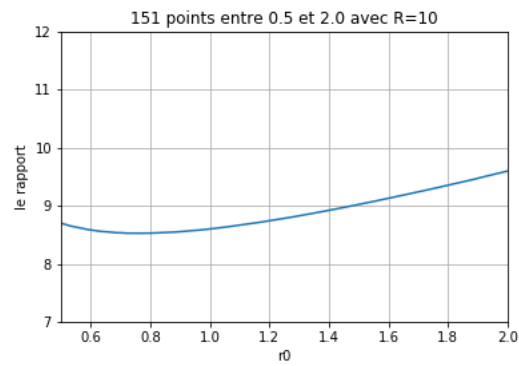


FIGURE 5 – R=10

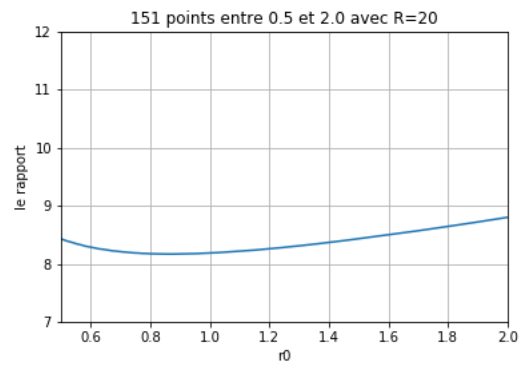


FIGURE 6 – R=20