Projet numérique MAP 432
Méthode de Monte-Carlo

Projet facultatif à rendre au professeur de PC.

L'objectif de ce projet est de résoudre numériquement différentes EDP par la méthode de Monte-Carlo. On considère le domaine $\mathbb{D} = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ et φ une fonction régulière définie sur le bord du domaine $\mathbb{D}$.

Partie 1. En discrétisant le domaine $\mathbb{D}$, calculer numériquement une solution approchée de l'équation de Laplace

$$x, y \in \mathbb{D}, \qquad \partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y) = 0 \tag{1}$$

avec conditions aux bords données par la fonction φ. On utilisera la méthode de Monte-Carlo décrite dans le chapitre 2.5.3 du polycopié. On représentera la solution en s'inspirant de la figure 1. On discutera la précision de la méthode en fonction du choix des paramètres.

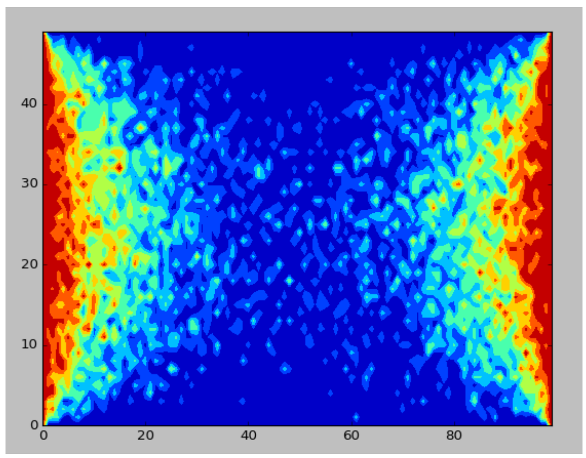

FIGURE 1. Ce graphique représente des lignes de niveau d'une solution approchée de l'équation de Laplace (1). La fonction φ, qui prescrit les conditions aux bords, vaut 1 sur les bords verticaux (on pourra imaginer qu'il s'agit d'une source chaude) et 0 sur les bords horizontaux (pour modéliser une source froide). Après avoir réalisé un maillage du domaine, on lance K marches aléatoires à partir de chaque point dans le domaine et on moyenne les valeurs obtenues pour les différents points atteints sur le bord. Le code couleur correspond à la statistique de ce résultat, il décrit donc les lignes de niveau de la fonction approchée. La zone en rouge correspond à la partie chaude du domaine et celle en bleu à la partie froide. Dans cette simulation K n'est pas très grand et les lignes de niveau sont encore très irrégulières car elles conservent une trace de l'aléa.

Partie 2. On suppose que la fonction φ est positive. En s'inspirant de l'exercice 1 de la PC2, calculer numériquement une solution approchée de l'équation suivante pour une valeur de $\gamma > 0$ fixée

$$x, y \in \mathbb{D}, \qquad \partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y) - \gamma f(x,y) = 0.$$

On justifiera les choix des paramètres en fonction de la taille du maillage. Tracer les lignes de niveau de solutions pour différentes valeurs de γ.

Pour aller plus loin $\star\star$ On suppose que la fonction φ prend ses valeurs dans $[0,1]$. Calculer numériquement une solution approchée de l'équation

$$x, y \in \mathbb{D}, \qquad \partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y) - 2f(x,y) + f(x,y)^2 = 0. \tag{2}$$

On utilisera une marche aléatoire symétrique qui peut, avec une probabilité à définir, disparaître (dans un état $\dagger$ comme dans l'exercice 2 de la PC2) mais aussi se dupliquer en 2 processus indépendants qui suivront ensuite la même dynamique. Le branchement permet de représenter la partie quadratique de l'équation (2).