CEATEC

FAC.DE ENGENHARIA CIVIL

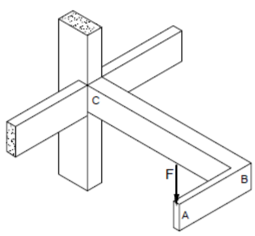
PUC CAMPINAS
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA

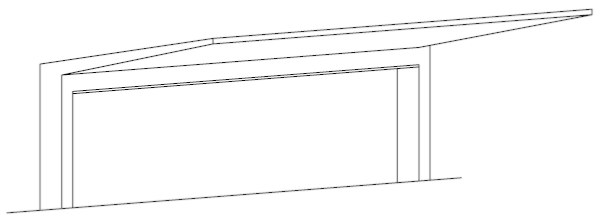
TORÇÃO
Dimensionamento e verificação de elementos lineares - ELU

Prof. Eng. Marco Antonio Carnio
Profa. Eng. Viviane Visnardi Vaz

ELEMENTOS ESTRUTURAIS SUBMETIDOS À TORÇÃO

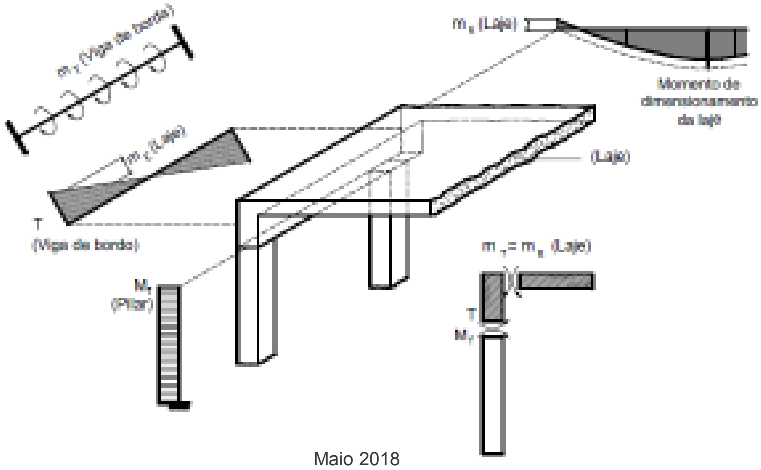
Torção de equilíbrio



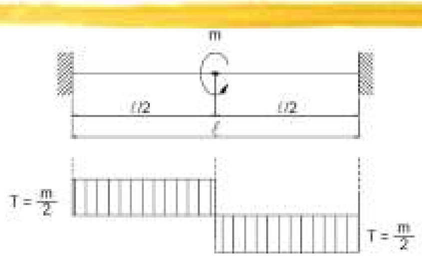


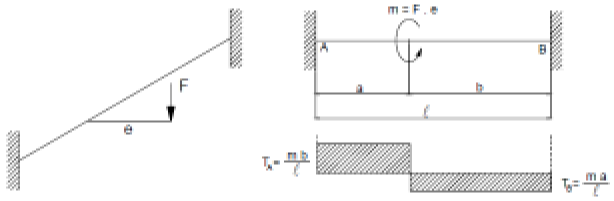
ELEMENTOS ESTRUTURAIS SUBMETIDOS À TORÇÃO

Torção de compatibilidade

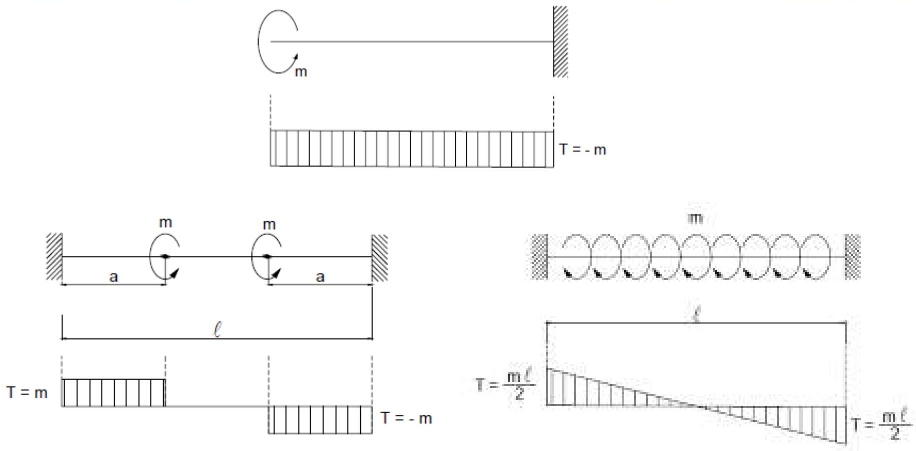


ELEMENTOS ESTRUTURAIS SUBMETIDOS À TORÇÃO



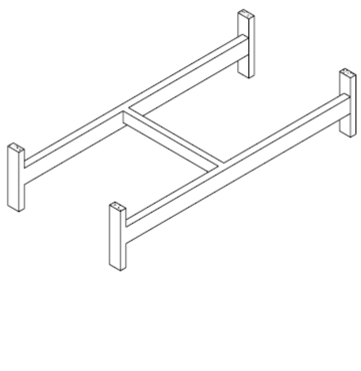


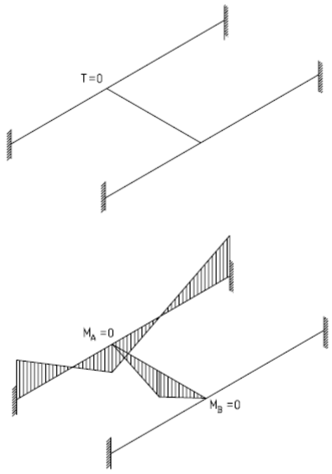
ELEMENTOS ESTRUTURAIS SUBMETIDOS À TORÇÃO



ELEMENTOS ESTRUTURAIS SUBMETIDOS À TORÇÃO

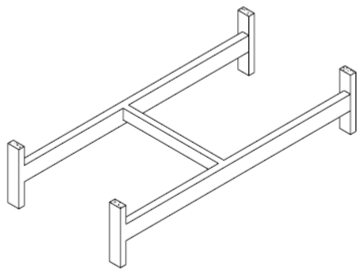
Torção de compatibilidade

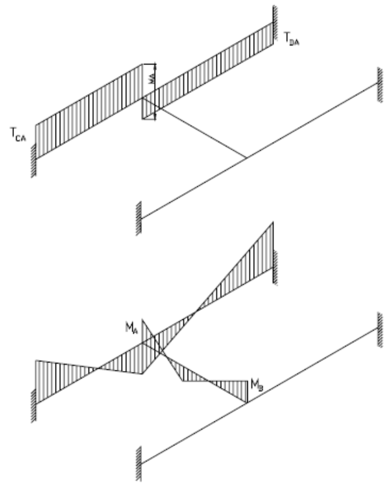




ELEMENTOS ESTRUTURAIS SUBMETIDOS À TORÇÃO

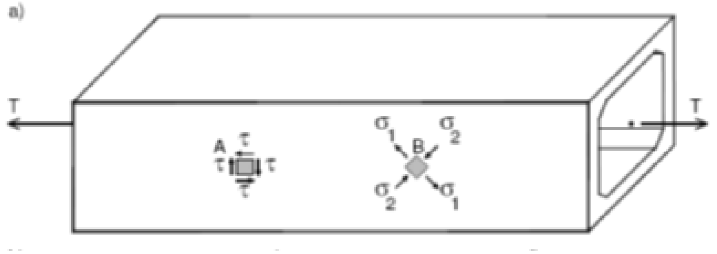
Torção de equilíbrio





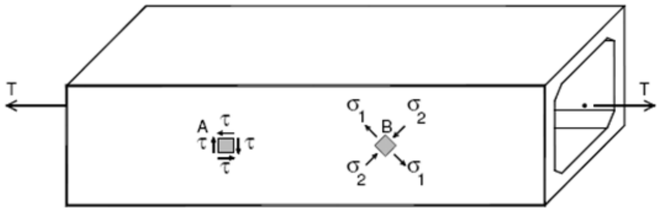
TENSÕES PRINCIPAIS

Considere uma viga tubular (viga de seção vazada), de parede fina, sujeita apenas a um momento torsor T.



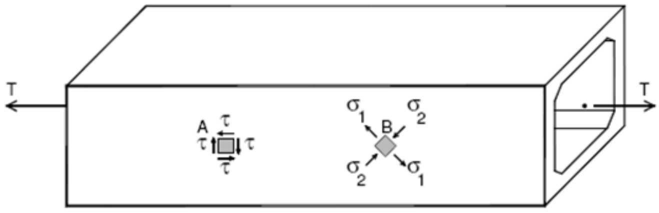
TENSÕES PRINCIPAIS

Num elemento quadrado de viga, localizado em qualquer ponto A de sua parede, com faces orientadas paralelamente à seção transversal da viga, atuam apenas as tensões de cisalhamento τ produzidas pelo momento torsor T.



TENSÕES PRINCIPAIS

Em todos os pontos da parede da viga as tensões principais, σ_1 e σ_2 , são numericamente iguais à τ, uma de tração e outra de compressão, com direções inclinadas de 45º em relação às geratrizes da viga, como se mostra no ponto B figura abaixo.



TENSÕES PRINCIPAIS

Quando as tensões principais de tração ultrapassam a resistência do concreto à tração, o concreto fissura e para resistir os esforços de tração que o concreto deixa de resistir é necessário colocar na viga uma armadura adequada (formada por uma malha com barras longitudinais e transversais (estribos)). Quanto às tensões principais de compressão, estas devem ser suportadas pelo próprio concreto.

TENSÕES DE CISALHAMENTO

As tensões de cisalhamento produzidas pelo momento torsor, num ponto qualquer da seção transversal da viga, podem ser consideradas uniformemente distribuídas na espessura da parede da viga (Fig. 1) e são dadas pela fórmula de Bredt, a saber:

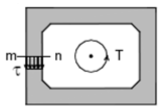


Fig. 1

$$\tau = \frac{T}{2.A_e.h_e}$$

Eq. 1

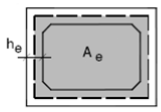


Fig. 2

onde A_e é a área limitada pelo contorno médio da seção e h_e é a espessura da parede da viga no ponto considerado (Fig. 2).

TENSÕES DE CISALHAMENTO

Nas vigas tubulares o fluxo ($\tau.h_e$) das tensões é constante ao longo do contorno da seção. Assim, a resultante Q_1 das tensões de cisalhamento, que atuam na seção, num trecho de comprimento u_1 (Fig. 3) de contorno, é dada por:

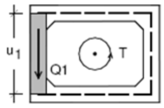


Fig. 3

$$Q_1 = (\tau.h_e).u_1$$

Eq. 2

Substituindo ($\tau.h_e$) dado pela equação (1) na (2) resulta:

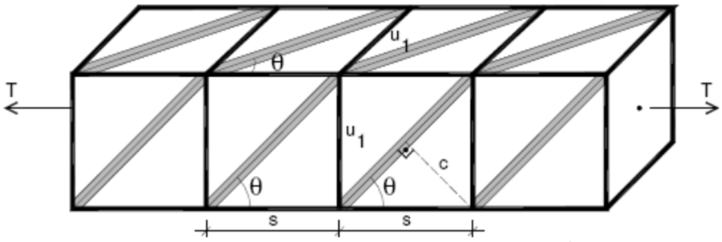
$$Q_1 = \frac{T}{2.A_e} u_1$$

MODELO DE CÁLCULO

Para verificar as tensões principais de compressão no concreto e para calcular a armadura das vigas torcidas de concreto armado usa-se um esquema de cálculo que consiste numa treliça espacial imaginada dentro da viga tubular de concreto armado (conforme figura a seguir).

MODELO DE CÁLCULO

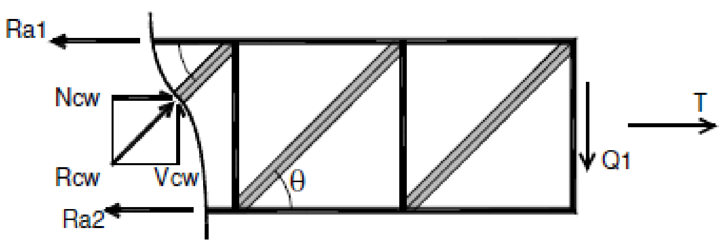
Na direção das tensões principais de compressão são imaginadas bielas de concreto, comprimidas, inclinadas de 45º em relação às geratrizes da viga. Para interligar estas bielas de concreto são usados tirantes, tracionados, formados por barras de aço, dispostos nas direções longitudinal e transversal da viga.



MODELO DE CÁLCULO

Compressão na biela de concreto

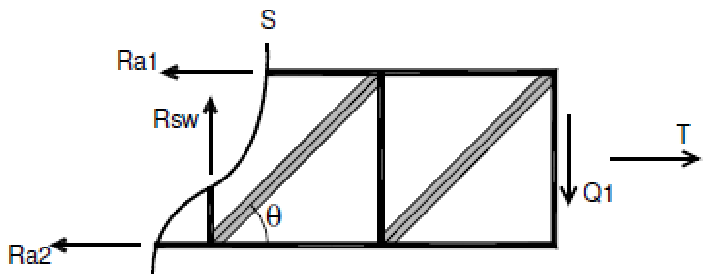
Painel frontal da treliça espacial



MODELO DE CÁLCULO

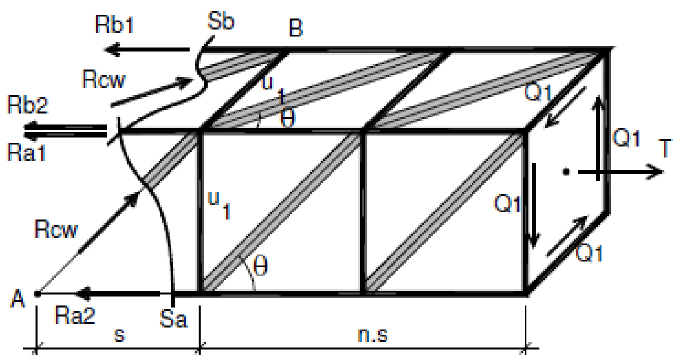
Tração na armadura transversal

Painel frontal da treliça espacial



MODELO DE CÁLCULO

Tração na armadura longitudinal



DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

TORÇÃO UNIFORME

1) Resistência do elemento estrutural – Torção pura

Admite-se satisfeita a resistência à torção do elemento estrutural, numa dada seção, quando se verificarem simultaneamente as seguintes condições:

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,2}$$
$$T_{Sd} \leq T_{Rd,3}$$
$$T_{Sd} \leq T_{Rd,4}$$

$T_{Rd,2}$ representa o limite dado pela resistência das diagonais comprimidas de concreto;

$T_{Rd,3}$ representa o limite dado pela parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural;

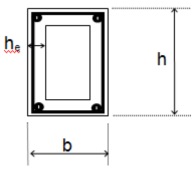
$T_{Rd,4}$ representa o limite dado pela parcela resistida pelas barras longitudinais.

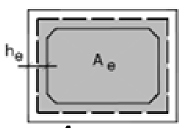
DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

2) Geometria da seção resistente

2.1) Seções poligonais convexas cheias

As seções cheias serão calculadas como seções vazadas, com parede fictícia de espessura h_e. Para seção retangular com: h > b:





$$A = b \cdot h$$
$$u = 2(b + h)$$

$$h_e \leq \frac{A}{u} \qquad h_e \geq 2\,c_1$$
$$A_e = (b - h_e)(h - h_e)$$
$$u_e = 2\,(b + h - 2h_e)$$

A → área da seção cheia
u → perímetro da seção cheia
A_e → área equivalente
u_e → perímetro de A_e
c_1 → distância entre o eixo da barra longitudinal do canto e a face lateral do elemento estrutural
(c_1 = c + $Ø_t$ + $Ø_l$/2) com $Ø_t$ e $Ø_l$ estimados.

DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

2) Geometria da seção resistente

2.2) Seção composta de retângulos

O momento de torção deve ser distribuído entre os retângulos conforme sua rigidez elástica linear. Cada retângulo deve ser verificado isoladamente com a seção vazada equivalente definida no item a). Assim, o momento de torção que cabe ao retângulo i (T_{sdi}) é dado por:

$$T_{sdi} = T_{sd} \frac{a_i^3 b_i}{\sum a_i^3 b_i}$$

Onde:
a é o menor lado do retângulo;
b é o maior lado do retângulo.

DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

2) Geometria da seção resistente

2.3) Seções Vazadas

Deve ser considerada a menor espessura de parede entre:

- a espessura real da parede;
- a espessura equivalente calculada supondo a seção cheia do mesmo contorno externo da seção vazada.

DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

3) Verificação da compressão diagonal do concreto

A resistência decorrente das diagonais comprimidas de concreto dever ser obtida por:

$$T_{Rd,2} = 0{,}50 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot sen2\theta$$

DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

4) Cálculo das armaduras

Devem ser consideradas efetivas armaduras contidas na área correspondente à parede equivalente quando:

4.1) A resistência decorrente dos estribos normais ao eixo do elemento estrutural atende à expressão:

$$T_{Rd,3} = \left(\frac{A_{90}}{s} \right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot cotg\theta$$

$f_{ywd} \leq$ 435 MPa (CA-50)
A_{90} : área da seção transversal de 1 ramo do estribo
A_e : área limitada pela linha média da parede
s : espaçamento dos estribos

DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

4) Cálculo das armaduras

4.2) A resistência decorrente das armaduras longitudinais atende à expressão:

$$T_{Rd,4} = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot tg\theta$$

$f_{ywd} \leq 435$ MPa (CA-50)
A_{sl} : soma das áreas das seções das barras longitudinais
A_e : área limitada pela linha média da parede
u_e : perímetro de A_e

DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

4) Cálculo das armaduras

4.3) Taxas mínimas de armadura de torção

$$\rho_{sw,min} = \rho_{sl,min} = 0,2 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}}$$

$$\left(\frac{A_{90}}{s}\right) mín = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right) mín = \rho_{sw,min} \cdot h_e$$

DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

SOLICITAÇÕES COMBINADAS

1) Flexão e Torção

Nos elementos estruturais submetidos a torção e a flexão simples ou composta, as verificações podem ser efetuadas separadamente para torção e para as solicitações normais. Assim, determinam-se separadamente as armaduras e depois devem ser somadas as áreas de aço referente à torção às armaduras longitudinal e transversal calculadas para combater a flexão.

DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO SEGUNDO A NBR 6118

SOLICITAÇÕES COMBINADAS

2) Torção e força cortante

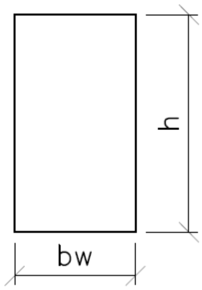
A resistência à compressão diagonal do concreto deve ser satisfeita atendendo à expressão:

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \leq 1$$

A armadura pode ser calculada separadamente e posteriormente somada.

EXEMPLO 1

Dada a seção transversal abaixo, dimensioná-la à torção sabendo-se:



b_w = 40 cm
h = 60 cm
T_k = 80 kN.m
Aço: CA-50
Concreto: C30
h-d = 5 cm
Cobrimento da armadura = 3 cm

Adotar:
γ_f =1,4
γ_c =1,4
γ_s=1,15
$\varnothing_t$ = 10 mm
$\varnothing_l$ = 20 mm

EXEMPLO 1

1) <u>Geometria da seção resistente</u>
Seção poligonal convexa cheia

$$c_1 = c + \phi_t + \frac{\phi_l}{2} = 3 + 1 + \frac{2}{2} = 5\ cm \qquad h_e \le \frac{A}{u} \quad \text{e} \quad h_e \ge 2 \cdot c_1$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2 \cdot (b+h) = 2 \cdot (40+60) = 200\ cm \\ A = b \cdot h = 40 \cdot 60 = 2400\ cm^2 \end{array}\right\} \frac{A}{u} = \frac{2400}{200} \Rightarrow \frac{A}{u} = 12\ cm \quad \text{e} \quad 2 \cdot c_1 = 2 \cdot 5 = 10\,cm$$

$$\therefore 10\,cm \le h_e \le 12\ cm$$

Admite-se, portanto, adotar para h_e qualquer valor entre 10 e 12 cm. Recomenda-se adotar primeiro o limite inferior (h_e=10 cm), que resultará em um dimensionamento mais econômico (menor área de aço). Se a verificação do concreto não for satisfeita, recalcular adotando o limite superior (h_e=12 cm). Se ainda assim a verificação do concreto não for satisfeita deve-se alterar a seção transversal, aumentando de 5 em 5 cm a altura da seção.

$$A_e = (b - h_e) \cdot (h - h_e) = (40-10) \cdot (60-10) = 1500\ cm^2$$

$$u_e = 2 \cdot (b + h - 2 \cdot h_e) = 2 \cdot (40 + 60 - 2 \cdot 10) \Rightarrow u_e = 160\ cm$$

EXEMPLO 1

2) Verificação da compressão diagonal do concreto

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,2}$$

$$T_{Sd} = \gamma_f \cdot T_k = 1{,}4 \cdot 8000 \Rightarrow T_{Sd} = 11200 \quad kN.cm$$

$$T_{Rd,2} = 0{,}50 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot sen2\theta$$

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{30}{250}\right) = 0{,}88$$

$$T_{Rd,2} = 0{,}50 \cdot 0{,}88 \cdot \frac{3}{1{,}4} \cdot 1500 \cdot 10 \cdot sen(2 \cdot 45)$$

$$T_{Rd,2} = 14142{,}86\ kN.cm$$

T_{Sd} = 11200 kN.cm < $T_{Rd,2}$ = 14142,86 kN.cm → Portanto: não haverá esmagamento da biela comprimida.

EXEMPLO 1

3) Cálculo das armaduras

3.1) Armadura transversal (estribos)

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,3} \Rightarrow T_{Sd} = T_{Rd,3}$$

$$T_{Sd} = T_{Rd,3} = \left(\frac{A_{90}}{s}\right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \cot g\theta \Rightarrow 11200 = \left(\frac{A_{90}}{s}\right) \cdot \frac{50}{1{,}15} \cdot 2 \cdot 1500 \cdot \cot g45$$

$$\left(\frac{A_{90}}{s}\right) = 0{,}0859\ cm^2/cm$$

3.2) Armadura longitudinal

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,4} \Rightarrow T_{Sd} = T_{Rd,4}$$

$$T_{Sd} = T_{Rd,4} = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot tg\theta \Rightarrow 11200 = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right) \cdot \frac{50}{1{,}15} \cdot 2 \cdot 1500 \cdot tg45 = 0{,}0859\ cm^2/cm$$

u_e = 160 cm $\Rightarrow A_{sl} = 0{,}0859 \cdot 160 \Rightarrow A_{sl} = 13{,}74\ cm^2$

EXEMPLO 1

3) Cálculo das armaduras

3.3) Armadura mínima

$$\rho_{sw,\min} = \rho_{sl,\min} = 0{,}2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} = 0{,}2 \cdot \frac{0{,}289}{50} = 0{,}001156$$

$$f_{ct,m} = 0{,}3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0{,}3 \cdot \sqrt[3]{30^2} = 2{,}89\ MPa = 0{,}289\ kN/cm^2$$

$$\left(\frac{A_{90}}{s}\right)\min = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right)\min = \rho_{sw,\min} \cdot h_e = 0{,}001156 \cdot 10$$

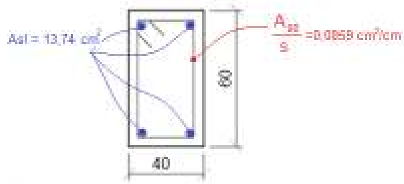
$$\left(\frac{A_{90}}{s}\right)\min = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right)\min = 0{,}01156\ cm^2/cm$$

3.4) Armadura adotada

$$\left(\frac{A_{90}}{s}\right) = 0{,}0859\ cm^2/cm$$

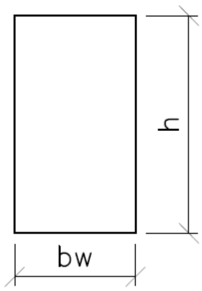
$$A_{sl} = 13{,}74\ cm^2$$

4) Croqui



EXEMPLO 2

Dada a seção transversal abaixo, dimensioná-la à torção sabendo-se:



b_w = 40 cm
h = 50 cm
T_k = 21 kN.m
V_k = 100 kN
Aço: CA-50
Concreto: C20
h-d = 5 cm
Cobrimento da armadura = 2,5 cm

Adotar:
γ_f =1,4
γ_c =1,4
γ_s=1,15
$Ø_t$ = 10 mm
$Ø_l$ = 20 mm

EXEMPLO 2

1) Geometria da seção resistente

Seção poligonal convexa cheia

$$c_1 = c + \phi_t + \frac{\phi_l}{2} = 2{,}5 + 1 + \frac{2}{2} = 4{,}5\ cm \qquad h_e \le \frac{A}{u} \quad \text{e} \quad h_e \ge 2 \cdot c_1$$

$$\left.\begin{aligned} u &= 2 \cdot (b + h) = 2 \cdot (40 + 50) = 180\ cm \\ A &= b \cdot h = 40 \cdot 50 = 2000\ cm^2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{A}{u} = \frac{2000}{180} \Rightarrow \frac{A}{u} = 11{,}11\ cm \quad \text{e} \quad 2 \cdot c_1 = 2 \cdot 4{,}5 = 9\ cm$$

$$\therefore 9\ cm \le h_e \le 11{,}1\ cm$$

Admite-se, portanto, adotar para h_e qualquer valor entre 9 e 11,1 cm. Recomenda-se adotar primeiro o limite inferior (h_e= 9 cm), que resultará em um dimensionamento mais econômico (menor área de aço). Se a verificação do concreto não for satisfeita, recalcular adotando o limite superior (h_e=11,1 cm). Se ainda assim a verificação do concreto não for satisfeita deve-se alterar a seção transversal, aumentando de 5 em 5 cm a altura da seção.

$$A_e = (b - h_e) \cdot (h - h_e) = (40 - 9) \cdot (50 - 9) = 1271\ cm^2$$

$$u_e = 2 \cdot (b + h - 2 \cdot h_e) = 2 \cdot (40 + 50 - 2 \cdot 9) \Rightarrow u_e = 144\ cm$$

EXEMPLO 2

2) Verificação da compressão diagonal do concreto

$$T_{Sd} \le T_{Rd,2}$$

$$T_{Sd} = \gamma_f \cdot T_k = 1{,}4 \cdot 2100 \Rightarrow T_{Sd} = 2940 \quad kN.cm$$

$$T_{Rd,2} = 0{,}50 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot sen 2\theta$$

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{20}{250}\right) = 0{,}92$$

$$T_{Rd,2} = 0{,}50 \cdot 0{,}92 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 1271 \cdot 9 \cdot sen(2 \cdot 45)$$

$$T_{Rd,2} = 7517{,}06\ kN.cm$$

T_{Sd} = 2940 kN.cm < $T_{Rd,2}$ = 7517,06 kN.cm → Portanto: não haverá esmagamento da biela comprimida.

EXEMPLO 2

3) Solicitações combinadas – Torção e força cortante

$V_{sd} = \gamma_f \cdot V_k \rightarrow V_{sd} = 1{,}4 \cdot 100 \rightarrow V_{sd} = 140\ kN$

$V_{Rd2} = 0{,}27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d$

$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} = 1 - \frac{20}{250} \rightarrow \alpha_{v2} = 0{,}92$

$V_{Rd2} = 0{,}27 \cdot 0{,}92 \cdot \frac{2}{1{,}4} \cdot 40 \cdot 45 \Rightarrow V_{Rd2} = 638{,}74\ kN$

$T_{Sd} = \gamma_f \cdot T_k = 1{,}4 \cdot 2100 \Rightarrow T_{Sd} = 2940\ kN.cm$

$T_{Rd,2} = 7517{,}06\ kN.cm$

$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} + \frac{T_{Sd}}{T_{Rd2}} \leq 1 \Rightarrow \frac{140}{638{,}74} + \frac{2940}{7517{,}06} = 0{,}61 < 1 \therefore OK$

EXEMPLO 2

4) Cálculo das armaduras

4.1) Armadura transversal (estribos)

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,3} \Rightarrow T_{Sd} = T_{Rd,3}$$

$$T_{Sd} = T_{Rd,3} = \left(\frac{A_{90}}{s}\right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \cot g\theta \Rightarrow 2940 = \left(\frac{A_{90}}{s}\right) \cdot \frac{50}{1{,}15} \cdot 2 \cdot 1271 \cdot \cot g45$$

$$\left(\frac{A_{90}}{s}\right) = 0{,}0266\ cm^2/cm$$

4.2) Armadura longitudinal

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,4} \Rightarrow T_{Sd} = T_{Rd,4}$$

$$T_{Sd} = T_{Rd,4} = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right) \cdot f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot tg\theta \Rightarrow 2940 = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right) \cdot \frac{50}{1{,}15} \cdot 2 \cdot 1271 \cdot tg45 = 0{,}0266\ cm^2/cm$$

u_e = 144 cm $\Rightarrow A_{sl} = 0{,}0266 \cdot 144 \Rightarrow A_{sl} = 3{,}83\ cm^2$

EXEMPLO 2

4) Cálculo das armaduras

4.3) Armadura mínima

$$\rho_{sw,\min} = \rho_{sl,\min} = 0{,}2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} = 0{,}2 \cdot \frac{0{,}221}{50} = 0{,}000884$$

$$f_{ct,m} = 0{,}3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0{,}3 \cdot \sqrt[3]{20^2} = 2{,}21\,MPa = 0{,}221\,kN/cm^2$$

$$\left(\frac{A_{90}}{s}\right)\min = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right)\min = \rho_{sw,\min} \cdot h_e = 0{,}000884 \cdot 10$$

$$\left(\frac{A_{90}}{s}\right)\min = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right)\min = 0{,}0088\ cm^2/cm$$

4.4) Armadura adotada

$$\left(\frac{A_{90}}{s}\right) = 0{,}0266\ cm^2/cm$$

$$A_{sl} = 3{,}83\ cm^2$$

5) Croqui