振动和波

一、谐振动

1. 位移 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 导

速度 $v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$ 导

加速度 $a=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$

2. 微分方程描述

$$a=-\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

3. 矢量图示、

4. A和φ的求解

给 x_0, v_0 $A=\sqrt{x_0^2+(\frac{v_0}{\omega})^2}$ $\tan\varphi=\frac{-v_0}{\omega x_0}$

5. ω的求解

①弹簧振子 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

②扭摆 $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{k}{J}\theta$ $\omega=\sqrt{\frac{k}{J}}$

稳定位置附近

③单摆 $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta$ $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

④复摆 $\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{mgl}{J}\theta$ $\omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}$

6. 能量 $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

$E=\frac{1}{2}kA^2$

二、振动的合成

1. 同方向同频率谐振动

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

$\varphi=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$

2. 同方向、不同频率谐振动

$A=\sqrt{A_1+A_2^2+2A_1A_2\cos(\omega_2-\omega_1)t}$

当 $A_1=A_2$ 时，$A=2A_1\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$

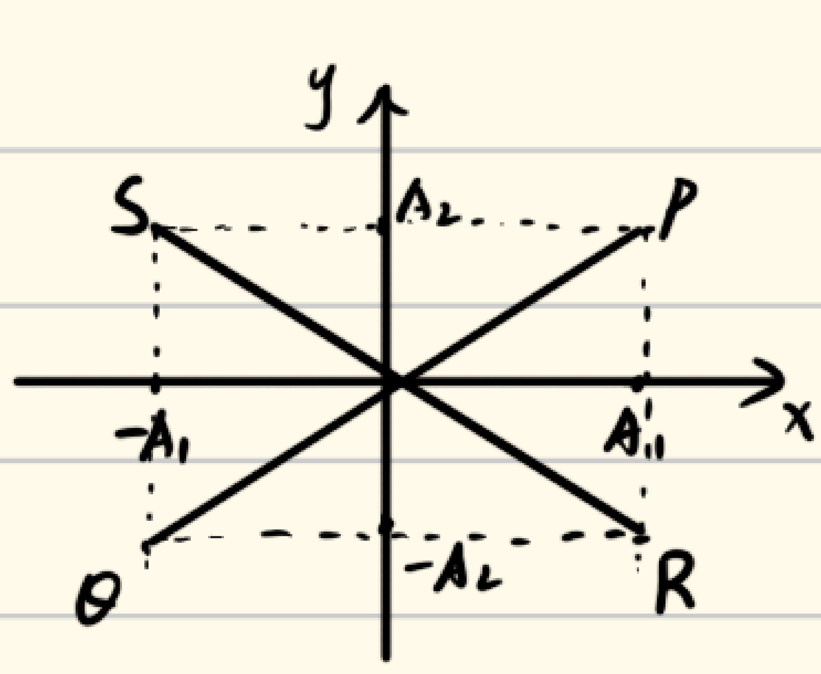
合振动在x轴投影为 $x=2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2})t$

当 $\omega_2-\omega_1 \ll \omega_1+\omega_2$，$\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t=\pm1$

拍频为 $\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t$ 振动频率的2倍

即 $\nu_{拍}=\frac{\omega_2}{2\pi}-\frac{\omega_1}{2\pi}=\nu_2-\nu_1$

3. 相互垂直的谐振动



$$\begin{cases} x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

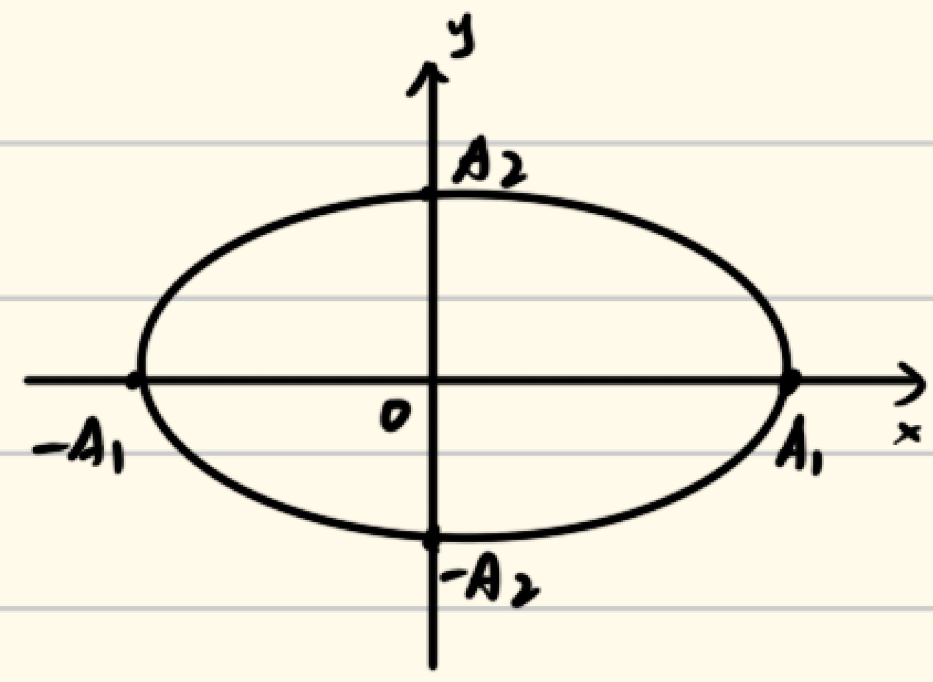
① $\varphi_1=\varphi_2$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos\omega t$

$y=\frac{A_2}{A_1}x$ (PQ)

② $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi$

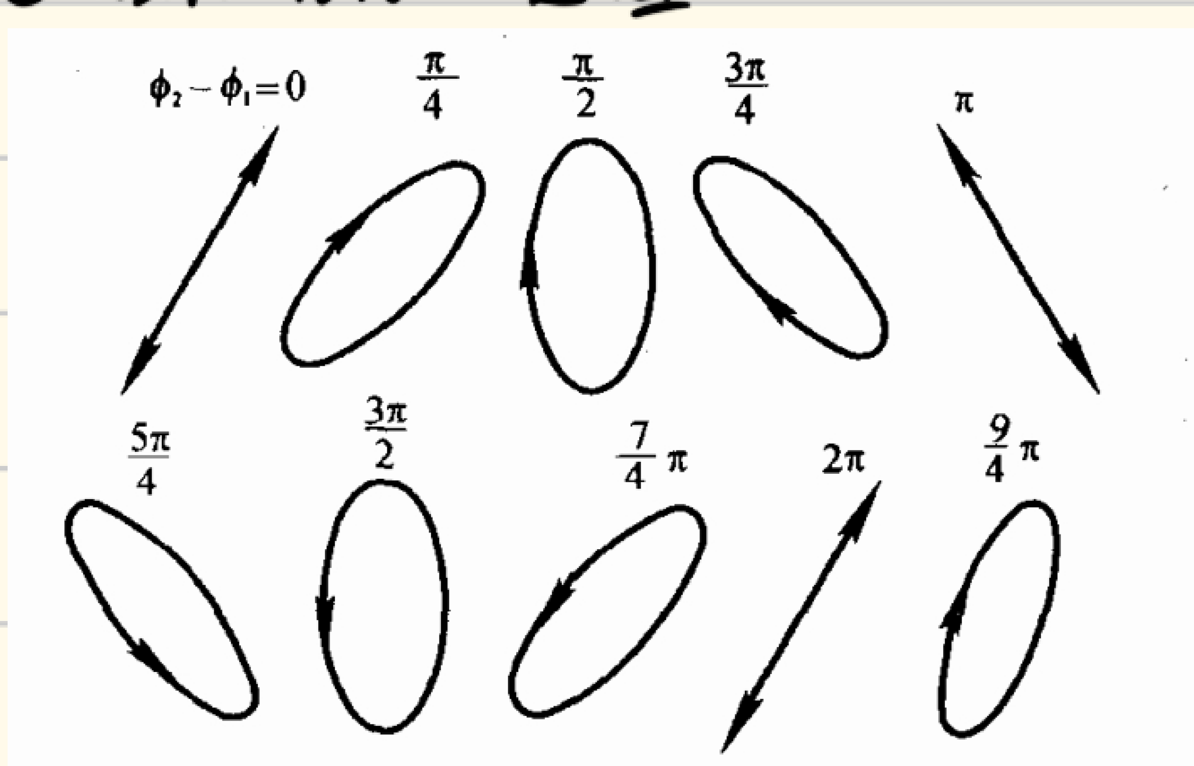
$y=-\frac{A_2}{A_1}x$ (SR)



③ $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3}{2}\pi$

$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2+\left(\frac{y}{A_2}\right)^2=1$

④ 相位差为任意值



三、简谐波

1、波函数

$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

$x=0$ 时 $y(0,t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

$\Leftrightarrow y(x,t)=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi)$

$\Downarrow$ K: 角波数

$\Leftrightarrow y(x,t)=A\cos(\omega t-Kx+\varphi)$

2、波动微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

适用于任何一维行波的波函数

$\Downarrow$ 推广得

3、绳中横波传播速度 $u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

4、棒中纵波传播速度 $u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ → 杨氏模量

四、波的能量

1、线能量密度

$\frac{\Delta E}{\Delta x}=\mu A^2\omega^2[\sin\omega(t-\frac{x}{u})]^2$

$\overline{\left(\frac{\Delta E}{\Delta x}\right)}=\frac{1}{2}\mu A^2\omega^2$

2、(体)能量密度

$w=\frac{\Delta E}{\Delta V}=\rho A^2\omega^2[\sin\omega(t-\frac{x}{u})]^2$

$\bar{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

3、能流密度(波的强度)

$I=\bar{w}u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

4、球面波强度

$I=\frac{P_0}{4\pi r^2}$

五、波的干涉

1、干涉波

$y_1 = A_1\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r_1 + \varphi_1)$

$y_2 = A_2\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r_2 + \varphi_2)$

$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$

$\Delta\varphi = \underbrace{(\varphi_2 - \varphi_1)}_{\text{初相差}} - \underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)}_{\text{波程不同产生相位差}}$

① $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - k(r_2 - r_1) = \pm 2k\pi$

干涉相长 $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$

② $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1) - k(r_2 - r_1) = \pm(2k+1)\pi$

干涉相消 $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

2、驻波

$y_1 = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$

$y_2 = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$

$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\ \cos\omega t$

振幅 $|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x|$ 沿x轴分布

谐振动 $|\cos\omega t|$

$x = k\frac{\lambda}{2}$ 波腹 $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$ 波节

3、半波损失

例 6.5 有一平面简谐波

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

向右传播，在距坐标原点 o 为 $x_0 = 4\lambda$ 处被墙壁反射，反射面可看作固定端。试求：(1) 反射波的波函数；(2) 驻波的波函数；(3) o 与 x_0 处之间各个波节和波腹的位置。

解 (1) 要写出反射波的波函数，先要写出反射波在原点的振动表达式。由题给条件，入射波在原点的振动表达式为

$$y_{10} = A\cos\omega t$$

而反射波是入射波传到 x_0 处经反射再传回到原点 o 的。再考虑在固定端反射的半波损失，所以，在原点反射波的相位较入射波共落后

$$2kx_0 + \pi = 2\frac{2\pi}{\lambda}4\lambda + \pi = 17\pi$$

由此得反射波在原点的振动表达式为

$$y_{20} = A\cos(\omega t - 17\pi)$$

因此，反射波的波函数为

$$y_2 = A\cos(\omega t + kx - \pi))$$

六、多普勒效应

波源频率 ν_S，媒质中波速为 u

1、观察者以 V_R 向波源运动

$\nu_R = \frac{u + V_R}{\lambda} = \left(\frac{u + V_R}{u}\right)\nu_S$

2. 波源以 V_S 向观察者运动

$\lambda' = \lambda - V_S T_S = (u - V_S) T_S$

$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u - V_S} \nu_S$

3. 同时运动

$\nu_R = \frac{u + V_R}{u - V_S} \nu_S$