1.1 (1) $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

(1) 当 $n<n_0$ 时 $y(n)=0$

(2) 当 $n_0\le n\le n_0+N$ 时. 若 $\alpha\ne\beta$. 则

$y(n)=\sum_{m=n_0}^{n}x(m)h(n-m)=\sum_{m=n_0}^{n}\beta^{m-n_0}\alpha^{n-m}=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{m=n_0}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m,=\frac{\alpha^{n+1-n_0}-\beta^{n+1-n_0}}{\alpha-\beta}$

若 $\alpha=\beta$. 则 $y(n)=\alpha^{n-n_0}(n+1-n_0)$

(3) 当 $n\ge n_0+N-1$.

若 $\alpha\ne\beta$. 则 $y(n)=\beta^{n+1-N-n_0}\cdot\frac{\alpha^N-\beta^N}{\alpha-\beta}$

若 $\alpha=\beta$. 则 $y(n)=N\alpha^{n-n_0}$

1.5 (1) $y_1(0)=0$.

a) 设 $x_1(n)=\delta(n)$ $y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)$.

① 当 $n>0$ 处递推. 则 $y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)=0$ 得 $y_1(n)=0$, $n\ge 0$.

② 向 $n<0$ 处递推. 则 $y_1(n)=\frac{1}{a}[y_1(n+1)-x_1(n+1)]$. 因而 $y_1(n)=-a^n$

综上 $y_1(n)=-a^n u(-n-1)$

b) 设 $x_2(n)=\delta(n-1)$, $y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)$.

① 向 $n>0$ 处 $y_2(n)=a^{n-1}$

② 向 $n<0$ 处递推. $y_2(n)=\frac{1}{a}[y_2(n+1)-x_2(n+1)]=0$

故 $y_2(n)=a^{n-1}u(n-1)$,

故在 $y(0)=0$ 条件下, 系统是移不变的.

c) 设 $x_3(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$ $y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)$.

① 向 $n>0$ 处递推. $y_3(n)=a^{n-1}$

向 $n<0$ 处递推 $y_3(n)=\frac{1}{a}[y_3(n+1)-x_3(n+1)]=-a^n$ $n\le -1$.

综上 ① ② 得 $y_3(n)=a^{n-1}u(n-1)-a^n u(-n-1)=y_1(n)+y_2(n)$.

所以在 $y=0$ 下是线性系统.

(2) $y(-1)=0$.

a) 向 $x_1(n)=\delta(n)$ $y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)$.

则 $y_1(n)=ay_1(n-1)+x_1(n)=a^n$.

同理 $y_1(n)=a^n u(n)$

b) 令 $x_2(n)=\delta(n-1)$ $y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)$

则 $y_2(n)=ay_2(n-1)+x_2(n)=a^{n-1}$

所以 $y_2(n)=a^{n-1}u(n-1)$

故为移不变系统

(2) 令 $x_3(n)=x_1(n)+x_2(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$ $y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)$

$n<0$ 时 $y_3(n)|_{n\le -1}=0$.

$n\ge 0$ 时 $y_3(n)=ay_3(n-1)+x_3(n)=a^n+a^{n-1}$

综上 $y_3(n)=a^n u(n)+a^{n-1}u(n-1)=y_1(n)+y_2(n)$

故为线性系统

1.8 (1) 当 $n<0$, $h(n)=0$. 故为因果系统.

因为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\frac{1}{0}+\frac{1}{1}+\cdots \Rightarrow \infty$

故系统为不稳定

(2). $n<0$ 时 $h(n)=0$. 故为因果.

因 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}<\cdots=3$.

故为稳定的.

(3) 当 $n<0$ 时 $h(n)=0$. 所以为因果.

因 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=3^0+3^1+\cdots\Rightarrow\infty$. 故不稳定

(4) 当 $n<0$. $h(n)\ne 0$. 故非因果

因为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=3^0+3^{-1}+3^{-2}+\cdots=\frac{3}{2}$. 故稳定.

(5) 当 $n<0$ 时. $h(n)=0$. 故因果.

因为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=0.3^0+0.3^1+\cdots=\frac{10}{7}$. 稳定.

(6) 当 $n<0$. $h(n)\ne 0$. 故因果

因为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=0.3^{-1}+0.3^{-2}+\cdots\Rightarrow\infty$. 故不稳定.

(7) 当 $n<0$. $h(n)\ne 0$. 非因果 . 1

因为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=1$ 故稳定

(8). 当 $n<0$. $h(n)\ne 0$. 非因果

因为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(4-n)=\infty\Rightarrow\infty$ 不稳定

1.11. 由 LSI.

$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=0}^{n}b^m a^{n-m}=a^n\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^m=\begin{cases}(n+1)a^n u(n) & a=b\\ \left(\frac{a}{a-b}a^n+\frac{b}{a-b}b^n\right)u(n) & a\ne b\end{cases}$

1.13. 由梅逊公式 $\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$

可得出, $4y(n)-y(n-1)=4x(n)+4x(n-1)$

$y(n)=\frac{1}{4}y(n-1)+x(n)+x(n-1)$

所以 $y(n)=\frac{1}{4}y(n-1)+x(n)+x(n-1)=[\frac{8}{3}-\frac{5}{3}(\frac{1}{4})^n]u(n)$

1.14.(1) $x(n)=\delta(n)$

因为 $y(n)=h(n)=0$ $n<0$.

所以 $h(0)=1$ $h(n)=(\frac{1}{2})^{n-1}$ $n=1,2.$

即 $h(n)=(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)+\delta(n)$

(2). $y(n)=x(n)*h(n)=[(\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)+\delta(n)]*e^{j\omega n}u(n)$

$=\sum_{m=1}^{n}(\frac{1}{2})^{m-1}e^{j\omega(n-m)}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n)=\frac{e^{j\omega(n-1)}-(\frac{1}{2})^{n}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n)$

$=\frac{e^{j\omega n}-(\frac{1}{2})^{n}}{e^{j\omega}-\frac{1}{2}}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n)$

1.17 (1) $r_{xy}(m)=x(m)*y(-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(-m-n)$ 由对位相乘法

由 $y(n)=\{2,4,6\}$ $y(-m)=\{6,4,2\}$.

```
   5  4  3  2  1
         6  4  2
----------------
   10  8  6  4  2
 20 16 12  8  4
30 24 18 12  6
----------------
30 44 44 32 20 8 2
```

故 $r_{xy}(m)=\{30,44,44,32,20,8,2\}$

(2). 由对位相乘法 $r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n-m)=x(m)*x(-m)$

又有 $x(m)=\{5,4,3,2,1\}$ $x(-m)=\{1,2,3,4,5\}$

故 $r_{xx}(m)=\{5,14,\cancel{}26,40,55,40,26,14,5\}$.

1.19. (1) $x(t)$ 为正弦型信号且 $f_h=125HZ$

$f_s=4f_h=500HZ$ $T=1/f_s=2\times10^{-3}$.

则 $x(n)=x(t)|_{t=nT}=x(nT)=A\cos(\frac{\pi}{2}n)$

(2) $x(t)$ 为正弦式信号且 $f_h=100/2\pi=50/\pi$.

可取抽样频率为 $T=1/f_s=\pi/200$.

则 $x(n)=x(t)|_{t=nT}=x(nT)=A\cos(\frac{\pi}{2}n)$

(3). $f_1=50HZ$ $f_2=80HZ$, $f_3=180HZ$.

取 $f_s=4f_3=720HZ$. $T=1/f_s=\frac{1}{720}$

$x(n)=x(t)|_{t=nT}=x(nT)=\cos(\frac{5\pi n}{36})+\cos(\frac{2\pi n}{9})+\cos(\frac{n\pi}{2})$.

周期 $N=72$.

(4). 由 $f_0=200HZ$. 看 $x(t)|_{t=\frac{\pi}{400}}=0$.

取抽样频率为 $f_s=3f_0=600HZ$, 则 $x(n)=x(t)|_{t=nT}=\frac{15\sin(\frac{2\pi n}{3})}{\pi n}=\frac{10\sin(\frac{2\pi n}{3})}{2\pi\frac{n}{3}}$;

1.21.(1) 由 $|w_2-w_1|=2\pi k$. $|f_2-f_1|=kf$.

$x(n)|_{n=1}=x(1)=0.951=\sin(\frac{2\pi f}{f_s})$

得有 $\frac{f_0}{f_s}=\frac{\arcsin(0.951)}{2\pi}=\frac{1}{5}$

$f_1=f_0+f_s=600HZ$

将 f_0, f_1 两频率代入. $x_1(n)=\sin(\frac{2\pi n f_0}{f_s})=\sin(\frac{2\pi n}{5})=x(n)$

$x_2(n)=\sin(\frac{2\pi f_1}{f_s})=\sin(\frac{12\pi n}{5})=\sin\frac{2\pi n}{5}=x(n)$

(2). $f_{s_2}=\frac{f_0 f_{s_1}}{f_{s_1}+f_0}=\frac{f_0 f_{s_1}}{6f_0}=\frac{f_{s_1}}{6}=\frac{500}{6}HZ$

$x_1(n)=\sin(\frac{2\pi n f_0}{f_{s1}})=\sin(\frac{2\pi n}{5})=x(n)$

$x_2(n)=\sin(\frac{2\pi n f_0}{f_{s2}})=\sin(\frac{12\pi n}{5})=\sin(\frac{2\pi n}{5})=x(n)$

2.1.(1). 由 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{(a^2-1)z}{a(z-\frac{1}{a})(z-a)}$

收敛域 $|az|<1$. 且 $|\frac{a}{z}|<1$ 即 $|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$

极点为 $z=a$, $z=\frac{1}{a}$. 零点为 $z=0$, $z=\infty$

(2). 由 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^n u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^{-n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

收敛域为 $|\frac{1}{2}z^{-1}|<1$ 即 $|z|>\frac{1}{2}$ 极点为 $z=\frac{1}{2}$. 零点为 $z=0$

(3) $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-(\frac{1}{2})^n u(-n-1)z^{-n}=\frac{-2z}{1-2z}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

收敛域 $|2z|<1$. $|z|<\frac{1}{2}$. 极点为 $z=\frac{1}{2}$. 零点为 $z=0$

(4) $X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{-n}$. 则 $X(z)=\ln^{z}-\ln^{(1-z)}=\ln^{(\frac{z}{1-z})}$

又 $X(z)$ 收敛域和 $\frac{dX(z)}{dz}$ 相同. 所以 $X(z)$ 为 $|z|>1$.

极点为 $z=0$, $z=1$. 零点为 $z=\infty$

(5) 设 $y(n)=\sin(w_0 n)\cdot u(n)$.

$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)z^{-n}=\frac{z^{-1}\sin w_0}{1-2z^{-1}\cos w_0+z^{-2}}$ $|z|>1$.

而 $x(n)=n\cdot y(n)$.

所以 $X(z)=-z\frac{d}{dz}Y(z)=\frac{z^{-1}(1-z^{-2})\sin w_0}{(1-2z^{-1}\cos w_0+z^{-2})^2}$ $|z|>1$.

因此. 收敛域 $|z|>1$.

极点为 $z=e^{jw_0}$, $z=e^{-jw_0}$.

零点为 $z=1$, $z=-1$, $z=0$, $z=\infty$

$\therefore$ v. $\sum_{}^{\infty} n x(n)\, n^{-j\omega n} = \sum x(n) = 6.$

(6). 设 $y(n) = \cos(\omega_0 n+\varphi)\cdot u(n) = \cos\varphi\cdot\cos\omega_0 n\cdot u(n) - \sin\varphi\,\sin\omega_0 n\cdot u(n)$

则 $Y(z) = \cos\varphi\cdot\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}} - \sin\varphi\,\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}} = \frac{\cos\varphi - z^{-1}\cos(\varphi-\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}\quad |z|>1.$

所以 $Y(z)$ 收敛域为 $|z|>1$.

而 $x(n) = A\cdot r^n\cdot y(n)$

(7) 设 $y(n) = u(n)$.

则 $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)\cdot z^{-n} = \frac{z}{z-1}\qquad |z|>1$

而 $x(n) = (n^2+n-1)y(n) = n^2 y(n) + n y(n) + y(n)$

所以、$X(z) = z^2\frac{d^2}{dz^2}Y(z) + z\frac{d}{dz}Y(z) - z\frac{d}{dz}Y(z) + Y(z) = \frac{z(z^2+1)}{(z-1)^3}\qquad |z|>1$

故收敛域为 $|z|>1$. 极点为 $z=1$ ，零点为 $z=\pm j$, $z=0$

(8). 由 $X(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$.

上面两边对 z 求导.可得

$X'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{(n-1)!}z^{-n-1} = -z^{-2}X(z)$

即. $z^2X'(z) + X(z) = 0.\qquad |z|\geq 1.$

解得 $X(z) = e^{1-z}\qquad |z|\geq 1.$

故收敛域为 $|z|\geq 1$. 极点为 $z=0$、无零点.

(9) $x(n) = a^n = a^n u(n) + a^n u(-n-1)$

令 $x_1(n) = a^n u(n)$ ，$x_2(n) = a^n u(-n-1)$. 是 $X(z) = X_1(z) + X_2(z)$,

$X_2(z) = \frac{z}{a-z}\qquad |z|<|a|$

2.3. (1) $X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$.

是 $X(z) = 1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n\cdot z^{-n}$.

所以 $x(n) = (-\frac{1}{2})^n\cdot u(n)$

(2). 由 $X(z) = 8+28z+112z^2+\cdots = 8+\sum_{n=1}^{\infty}7\cdot 4^n\cdot z^n = 8+\sum_{n=-\infty}^{-1}7\cdot 4^{-n}\cdot z^{-n}$

所以 $x(n) = 8\cdot\delta(n) + 7\cdot(\frac{1}{4})^n\cdot u(-n-1)$

(3) 由 $X(z) = -a+(1-a)z+a(1-a^2)z^{-2}+\cdots$

所以 $x(n) = -a\delta(n)+(1-a^2)a^{n-1}u(n-1)$

(4) 由 $X(z)=\dfrac{1-\frac{4}{3}z^{-1}}{1-\frac{8}{15}z^{-1}+\frac{1}{15}z^{-2}}=\dfrac{\frac{5}{8}}{1-3z^{-1}}+\dfrac{\frac{3}{8}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}$

即 $X_1(z)=-\frac{5}{8}(3z+9z^2+27z^3+\cdots)=-\frac{5}{8}\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot z^n=-\frac{5}{8}\sum_{n=-\infty}^{-1}3^{-n}\cdot z^{-n}$

所以 ~~$X_1(z)=-\frac{5}{8}$~~ $x_1(n)=-\frac{5}{8}\cdot 3^{-n}u(-n-1)$

由 $X_2(z)=\frac{3}{8}(1+\frac{1}{5}z^{-1}+\frac{1}{5^2}z^{-2}+\frac{1}{5^3}z^{-3}+\cdots)=\frac{3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}5^{-n}\cdot z^{-n}$

所以 $x_2(n)=\frac{3}{8}\cdot 5^{-n}u(n)$

$x(n)=x_1(n)+x_2(n)=\frac{1}{8}[3\cdot 5^{-n}u(n)-5\cdot 3^{-n}u(-n-1)]$.

2.5. (1) 由 $x_1(n)=x^*(n)$

由序列共轭性 $X_1(z)=X^*(z^*)=\dfrac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}$ $|z|>|r|$

(2) 由 $\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}]$, $x(n)=\frac{1}{2}[r^n\cdot e^{j\omega_0 n}u(n)+r^n e^{-j\omega_0 n}u(n)]$

由线性性质有.

$X(z)=\frac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}+\dfrac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}\right]=\dfrac{1-rz^{-1}\cos\omega_0}{1-2rz^{-1}\cos\omega_0+r^2z^{-2}}$

(3) 由 $\sin\omega_0 n=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 n}-e^{-j\omega_0 n}]$, $x(n)=\frac{1}{2j}[r^n e^{j\omega_0 n}u(n)-r^n e^{-j\omega_0 n}u(n)]$

有 $X(z)=\dfrac{rz^{-1}\sin\omega_0}{1-2rz^{-1}\cos\omega_0+r^2z^{-2}}$ $|z|>|r|$

2.7. (1) 由初值定理 $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\dfrac{1-2z^{-1}-z^{-2}}{(1-3z^{-1})(1-2z^{-1})}=1$.

$\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{1-2z^{-1}-z^{-2}}{z(1-3z^{-1})(1-2z^{-1})}=\dfrac{A}{z}+\dfrac{B}{z-3}+\dfrac{C}{z-2}$

$A=\dfrac{X(z)}{z}\cdot z\Big|_{z=0}=-\frac{1}{6}$ $\quad B=\dfrac{X(z)}{z}(z-3)\Big|_{z=3}=\dfrac{z^2-2z-1}{z(z-2)}=\frac{2}{3}$

$C=\dfrac{X(z)}{z}\cdot(z-2)\Big|_{z=2}=\dfrac{z^2-2z-1}{z(z-3)}\Big|_{z=2}=\frac{1}{2}$

故 $X(z)=-\frac{1}{6}+\dfrac{\frac{2}{3}}{z-3}\cdot z+\dfrac{\frac{1}{2}}{z-2}z$

$x(n)=-\frac{1}{6}\delta(n)+\frac{2}{3}\cdot 3^n u(n)+\frac{1}{2}2^n\cdot u(n)$.

(2). 由初值定理. $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\dfrac{2z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.56z^{-2}}=0$

$(1-0.7z^{-1})(1-0.8z^{-1})=0$

$1-1.5z^{-1}+0.56z^{-2}=0$

极点为 $z=0.7$ $z=0.8$

$x(\infty)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]=0$.

2.11. (1) $X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j0n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 6.$

(2). $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j0} d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$

(3) 由帕塞瓦公式 $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})| d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = 28\pi.$

2.12 (4). 由 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}.$

$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-jn) x(n) e^{-j\omega n}.$

即 $DTFT[(-jn)x(n)] = \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

$\int_{-\pi}^{\pi} |\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}|^2 d\omega = 316\pi.$

2.13. $h_e(n) = IDTFT\{Re[H(e^{j\omega})]\} = \frac{\sin \pi n}{n\pi} + \frac{\sin[\pi(n-2)]}{2\pi(n-2)} + \frac{\sin[\pi(n+2)]}{2\pi(n+2)}$

即 $h_e(0) = 1 \quad h_e(2) = \frac{1}{2} \quad h_e(-2) = \frac{1}{2}.$

又因为 $h(n) = \begin{cases} 2h_e(n) & n>0 \\ h_e(n) & n=0 \\ 0. & n<0. \end{cases}$

由此可求出 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0} h(n) e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j2\omega}$

2.14 设 $h_o(n)$ 为 $h(n)$ 对应奇序列.

$h_o(n) = IDTFT\{jIm[H(e^{j\omega})]\} = IDTFT[-j\sin 2\omega] = \frac{\sin[\pi(n-2)]}{2\pi(n-2)}$

即 $h_o(2) = \frac{1}{2}. \quad h_o(-2) = -\frac{1}{2} \quad h_o(n) = 0, \ (n \neq \pm 2)$

又因为 $h(n) = \begin{cases} 2h_o(n) & n>0 \\ h(0) & n=0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$

所以 $h(0) = 1. \quad h(2) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad h(n) = \{1, 0, 1\}$

因此 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0} h(n) e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j2\omega}$

2.16. (1) $Y(z) = 0.6 z^{-1} Y(z) + 0.3 z^{-2} Y(z) + \mathcal{F}(\delta(n))$

$Y(z) = \frac{1}{1 - 0.6z^{-1} - 0.3z^{-2}}$

$Y(z) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{39}}{13}) \cdot \frac{z}{z - (0.3 - \sqrt{0.39})} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{39}}{13}) \cdot \frac{z}{z - (0.3 + \sqrt{0.39})}$

$y(n) = [\frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{39}}{13})(0.3 - \sqrt{0.39})^n + \frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{39}}{13})(0.3 + \sqrt{39})^n] u(n)$

(2). 对给定取Z变换. $Y(z) = \frac{0.6}{(1 - 0.3z^{-1})(1 - z^{-1})}$

$Y(z) = \frac{-9/35}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{\frac{6}{7}}{1 - z^{-1}}$

取Z反变换. $y(n) = \frac{6}{7}(1 - 0.3^{n+1}) u(n)$

2.17 (1) 根据 $\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT) = 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(\frac{2\pi}{5}n)\,\delta(t-2\times10^{-4}n)$

$x(n)=x_a(t)|_{t=nT}=3\cos(\frac{2\pi}{5}n)$.

(2) $\hat{X}_a(s)=\mathcal{L}[\hat{x}_a(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}3\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(\frac{2\pi}{5}n)\cdot\delta(t-nT)\,e^{-st}dt = 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(\frac{2\pi}{5}n)\cdot e^{-snT}$

对序列 $x(n)u(n)$ 取Z变换 $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}3\cos(\frac{2\pi}{5}n)z^{-n}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-e^{j\frac{2\pi}{5}}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{5}}z^{-1}}\right)$

由Z变换与离散傅里叶变换关系得

$$DTFT[x(n)]=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{5})}}+\frac{1}{1-e^{-j(\omega+\frac{2\pi}{5})}}\right]=\frac{3-3\cos(\frac{2\pi}{5})e^{-j\omega}}{1-2\cos(\frac{2\pi}{5})e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}$$

2.19 (1) $W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c Y(v)X(\frac{z}{v})v^{-1}dv=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(1-a^2)z}{(v-a)(1-av)(z-v)}dv$

其中 $|a|<|v|<|a^{-1}|$ $\quad |\frac{z}{v}|>1$. 即 $|v|<|z|$

所以v对应其公共收敛域 $\{|a|,\ \min(|a^{-1}|,|z|)\}$.

C内只有 $v=a$ 一个极点

因此 $W(z)=Res\left[\frac{(1-a^2)z}{(v-a)(1-av)(z-v)}\right]_{v=a}=\frac{(1-a^2)z}{(1-av)(z-v)}\Big|_{v=a}=\frac{(1-a^2)z}{(1-a^2)(z-a)}=\frac{z}{z-a}\quad |z|>|a|$

再求Z反变换 得 $w(n)=\mathcal{Z}^{-1}[\frac{z}{z-a}]=a^n u(n)$

(2) $x(n)=u(n)$

$y(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{(1-a^2)z^n}{(z-a)(1-az)}dz$. 由于 $Y(z)$ 收敛域 $|a|<|z|<|a^{-1}|$ 为环状区域.

因此 $y(n)$ 为双边序列

当 $n\ge0$ 时,在C内只有 $z=a$ 一个极点

$y(n)=Res\left[\frac{(1-a^2)z^n}{(z-a)(1-az)}\right]_{z=a}=a^n$

即 $y(n)=a^n u(n)\quad,\ n\ge0$.

当 $n<0$ 时. 在C内有 $z=0$ 这个n阶极点. 但在C外只有 $z=a^{-1}$ 一个极点.

$y(n)=-Res\left[\frac{(1-a^2)z^n}{(z-a)(1-az)}\right]_{z=a^{-1}}=-Res\left[\frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}\right]_{z=a^{-1}}$

$\quad=-\frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)}\Big|_{z=a^{-1}}=a^{-n}$.

即 $y(n)=a^{-n}u(-n-1)\quad n<0$

所以 $y(n)=a^n u(n)-a^{-n}u(-n-1)$.

$w(n)=x(n)\cdot y(n)=u(n)\cdot[a^n u(n)-a^{-n}u(-n-1)]=a^n u(n)$.

$x_a \cdots \cos(600t) + \frac{1}{2}\cdots$

此 2.21. (1) 当 $T=0.1ms$ 时 $f_s=\frac{1}{T}=1000Hz > 2f$

由抽样后得到序列为 $x(n)=x_a(t)|_{t=nT}=\sin(0.1\pi n)$

(2) 当 $T=1ms$ 时. $f_s=1000Hz=2f$.

$x(n)=x_a(t)|_{t=nT}=\sin(\pi n)=0$. 所以 $x(n)$ 为零序列. 其频谱不存在.

(3) 当 $T=0.01s$. $f_s=100Hz<2f$

抽样后得到序列为 $x(n)=x_a(t)|_{t=nT}=\sin(10\pi n)=0$. $x(n)$ 为零序列. 频谱不存在.

2.27. (1) 由 $H(z)=A\frac{(z-e_0)(z-e_1)}{(z-z_0)(z-z_1)}$.

其中 e_i 为零点. z_i 为极数. A 为待定系数

$e_0=e_1=0$ $\quad z_0=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$ $\quad z_1=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$

所以 $H(z)=\frac{Az^2}{(z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}})(z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}})}=\frac{Az^2}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}$

又因为 $H(z)|_{z=1}=4$. 即 $\frac{A}{1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}=4$.

故 $A=3$.

因此 $H(z)=\frac{3z^2}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}z}{z-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}}+\frac{\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}z}{z-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}}$

$h(n)=H(z)\cdot u(n) = \sqrt{3}(\frac{1}{2})^{n-1}\cos(\frac{\pi n}{3}-\frac{\pi}{6})u(n)$.

(2) 由 $x(n)=u(n)$ $\quad X(z)=\frac{z}{z-1}$ $\quad |z|>1$.

$Y(z)=H(z)\cdot X(z)=\frac{3z}{z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{3z}{(z-1)(z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{4})}$

$y(n)=Res[Y(z)\cdot z^{n-1}]_{z=1}+Res[Y(z)\cdot z^{n-1}]_{z=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}}+Res[Y(z)\cdot z^{n-1}]_{z=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}}$

故 $y(n)=[4-(\frac{1}{2})^{n-1}\cos[\frac{\pi}{3}(n+1)]]u(n)$

(3) $X(z)=\frac{10z}{z-1}+\frac{5z^2}{z^2+1}$.

$Y(z)=H(z)\cdot X(z)=Y_1(z)+Y_2(z)$

故 $y(n)=y_1(n)+y_2(n)=\{40-20(\frac{1}{2})^n\cos[\frac{\pi}{3}(n+1)]+\frac{60}{13}[3\cos\frac{\pi}{2}n+2\sin\frac{\pi}{2}n]+\frac{15}{39}(\frac{1}{2})^n[3\cos\frac{\pi n}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}n]\}u(n)$

2.31 (1) $\mathcal{F}[\nabla x(n)]=\mathcal{F}[x(n)]-\mathcal{F}[x(n-1)]=X(z)-z^{-1}X(z)=(1-z^{-1})X(z)$

(2) $\mathcal{F}[x_2(n)]=\sum_{n=2m}X(\frac{n}{2})z^{-n}$.

令 $m=\frac{n}{2}$ $\quad \mathcal{F}[x_2(n)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-2m}=X(z^2)$

(3) 令 $m=2n$，则 $Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n) z^{-n}=\sum_{m=2n} x(m) z^{-\frac{m}{2}}$

由此 $x(m)=\frac{1}{2}[1+(-1)^m]x(m)$

可得 $Y(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}[1+(-1)^m]x(m)\cdot z^{-\frac{m}{2}}=\frac{1}{2}[X(z^{\frac{1}{2}})+X(-z^{\frac{1}{2}})]$

2.32. (1) 设 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ $\quad H_{g_1}(e^{j\omega})=\frac{G_1(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$

其中 $G_1(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_1(n)e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[1+(-1)^n]x(n)e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}X(e^{j\omega})+\frac{1}{2}X(-e^{j\omega})$

此即 $x(n)$ 经抽样器输出 $g_1(n)$ 傅里叶变换

(2). $H_{g_2}(e^{j\omega})=\frac{G_2(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$

其中 $G_2(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}g_2(n)e^{-j\omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(2n)\cdot e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[1+(-1)^k]x(k)e^{-j\frac{\omega}{2}k}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\frac{\omega}{2}n}+\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(e^{-j\frac{\omega}{2}})^{n}=\frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega}{2}})+\frac{1}{2}X(-e^{j\omega})$

此即为 $x(n)$ 经抽取器输出 $g_2(n)$ 傅里叶变换

(3) $H_a(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$X_a(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X(e^{j\omega})+\frac{1}{2}X(-e^{j\omega})$

$Y_a(e^{j\omega})=X_a(e^{j\omega})\cdot H_a(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}X_a(e^{j\omega})$

$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2}Y_a(e^{j\frac{\omega}{2}})+\frac{1}{2}Y_a(e^{-j\frac{\omega}{2}})$

$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[X_a(e^{j\omega})H_a(e^{j\frac{\omega}{2}})]+\frac{1}{2}[X_a(-e^{j\omega})H_a(e^{-\frac{j\omega}{2}})]$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-a^2e^{-j\omega}}[X(e^{j\frac{\omega}{2}})+X(-e^{\frac{j\omega}{2}})]$

$h_b(n)=IDTFT[H_b(e^{j\omega})]=IDTFT[\frac{1}{1-a^2e^{-j\omega}}]=a^{2n}u(n)$

2.36. (1) $H(e^{j\omega})=H(z)\,|_{z=e^{j\omega}}=\frac{e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{1-0.9e^{-j\omega}+0.81e^{-j2\omega}}$

(2). 由差分方程和Z变换可得.

$y(n)-0.9y(n-1)+0.81y(n-2)=x(n-1)+x(n-2)$

即 $y(n)=x(n-1)+x(n-2)+0.9y(n-1)-0.81y(n-2)$

(3) $H_1(z)=z^{-1}\frac{1+z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$ 对 $H_1(z)=\frac{0.5-0.9302j}{1-(0.45+0.7794j)z^{-1}}+\frac{0.5+0.9302j}{1-(0.45-0.7794j)z^{-1}}$

可得 $h(n)=h_1(n-1)=[(0.5-0.9302j)(0.45+0.7794j)^{n-1}+(0.5+0.9302j)(0.45-0.7794j)^{n-1}]u(n-1)$

2.38. (1) 由因果系统. $Y(z)=H(z)X(z)$;

由 $Y(z)=\frac{z+1}{z-0.6}X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}X(z)$

差分方程为 $y(n)=x(n)+x(n-1)+0.6y(n-1)=2\cos\frac{\pi}{5}n+2\cos(\frac{\pi}{5}n-\frac{\pi}{5})+0.6y(n-1)$

零点为 $z=-1$. 极点为 $z=0.6$

(2). $z_1=-0.25\pm0.25\sqrt{5}$ $|z_1|<1$. 稳定因果系统

$y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)-0.5y(n-1)+0.25y(n-2)=2[\cos(\frac{\pi}{5}n)+\cos(\frac{\pi}{5}n-\frac{\pi}{5})+\cos(\frac{\pi}{5}n-\frac{2\pi}{5})]$

$y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)-0.5y(n-1)+0.25y(n-2)$

零点为 $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}j$ 极点为 $z=-0.25\pm0.25\sqrt{5}$

(3) 系统函数可表为 $H(z)=\frac{z^2-1}{z^2-6z+9}=\frac{1-z^{-2}}{1-6z^{-1}+9z^{-2}}$

$y(n)=x(n)-x(n-2)+6y(n-1)-9y(n-2)$, 零点为 $z=\pm1$. 极点为 3

3.1. $\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)W_6^{nk}=14+12e^{-j\frac{2\pi}{6}k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}2k}+8e^{-j\frac{2\pi}{6}3k}+6e^{-j\frac{2\pi}{6}4k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}$

$\tilde{X}(0)=60$ $\tilde{X}(1)=9-j3\sqrt{3}$ $\tilde{X}(2)=3+j\sqrt{3}$

$\tilde{X}(3)=0$. $\tilde{X}(4)=3-j\sqrt{3}$. $\tilde{X}(5)=9+j3\sqrt{3}$

3.6 (1) $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{4}x(n)e^{-j\omega n}=2+e^{-j\omega}+4e^{-j2\omega}+2e^{-j3\omega}+3e^{-j4\omega}$

$X(k)=\sum_{n=0}^{4}x(n)W_5^{nk}=2+e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+4e^{-j\frac{4\pi}{5}k}+2e^{-j\frac{6\pi}{5}k}$

可得这两者关系 $X(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{5}k}$.

(2). $X_0(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}x_0(n)e^{-j\omega n}=X(e^{j\omega})=2+e^{-j\omega}+4e^{-j2\omega}+2e^{-j3\omega}+3e^{-j4\omega}$

$X_0(k)=\sum_{n=0}^{7}x_0(n)W_8^{nk}=2+e^{-j\frac{\pi}{4}k}+4e^{-j\frac{\pi}{2}k}+2e^{-j\frac{3\pi}{4}k}+3e^{-j\pi k}$

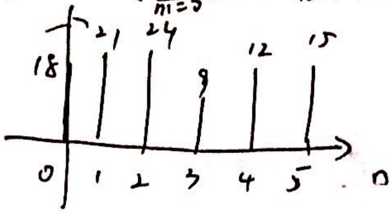
3.7. $\tilde{X}_1(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}+\sum_{n=N}^{2N-1}x(n)W_{2N}^{nk}$

$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{n\frac{k}{2}}+\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n-N)W_{2N}^{(n+N)k}$

$=X(\frac{k}{2})+W_{2N}^{-Nk}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n\frac{k}{2}}$

$=\tilde{X}(\frac{k}{2})+\cos(\pi k)\tilde{X}(\frac{k}{2})=\begin{cases}2X(\frac{k}{2}) & k为偶数\\ 0 & k为奇数\end{cases}$

3.9. $y(n)=\left[\sum_{m=0}^{5}x_1(m)x_2((n-m))_6\right]R_6(n)$



3.11. (1) $T_1=2\pi/(\frac{\pi}{6})=12$.

对 $\cos(\frac{\pi}{3}n)$ $T_2=2\pi/\frac{\pi}{3}=6$. 对 $\sin(\frac{\pi}{7}n)$ $T_3=2\pi/\frac{\pi}{7}=14$.

因此其的周期为公倍数 $T=84$.

(2) 由 $f=\omega f_s/2\pi$. 可得 $x(n)$三个正弦信号为 51.4 HZ, 60HZ, 120HZ

当 $k=4$, 即 $f_4=4f_s/72=40HZ$ 处有值.

当 $k=5$, 即 $f_5=5f_s/72=50HZ$ 处有值, 而 $\sin(\frac{\pi}{7}n)$频率为 51.4HZ

当 $k=6$. 即 $f_6=6f_s/72=60HZ$ 有值、对之 $\cos\frac{\pi}{6}n$ 分量

当 $k=12$, 即 $f_{12}=12f_s/72=120HZ$ 有值 对之 $\cos(\frac{\pi}{3}n)$分量

所以说 72点DFT出现了频谱泄漏

3.15 (1) $X(0)=\sum_{n=0}^{5}x(n)W_6^{n\cdot 0}=\sum_{n=0}^{5}x(n)=1+2+3+0+5=15$

(2) $X(3)=\sum_{n=0}^{5}x(n)W_6^{3n}=1\cdot W_6^0+2W_6^3+4W_6^0+3W_6^9+5W_6^{15}=-5$

(3) 由$x(n)$为实序列. $X(k)=X^*(N-k)$

所以 $X(5)=X^*(1)$, $X(4)=X^*(2)$

因此 $X(1)+X(5)=X(1)+X^*(1)=\sum_{n=0}^{5}x(n)W_6^n+\sum_{n=0}^{5}x(n)W_6^{-n}$

$=2[x(0)+x(1)\cos\frac{\pi}{3}+x(2)\cos\frac{2\pi}{3}+x(3)\cos\pi+x(4)\cos\frac{4\pi}{3}+x(5)\cos\frac{5\pi}{3}]$

$=-1$

$X(2)+X(4)=X(2)+X^*(2)=-3$.

所以 $\sum_{k=0}^{5}X(k)=X(0)+X(1)+X(2)+X(3)+X(4)+X(5)=15-1-3-5=6$

(4). 由DFT形式下帕塞瓦尔定理. 有 $\sum_{k=0}^{5}|X(k)|^2=6\sum_{n=0}^{5}|x(n)|^2=6\times 55=330$

3.20 (1) 原时域模拟信号可表示为

$x_a(t)=\cos(2\pi\times 600t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi\times 500t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi\times 700t)$

因此信号中含有3个频率分量，分别是

$f_1=600HZ$, $f_2=500HZ$. $f_3=700HZ$

$f_s=3f_3=2100HZ$.

(2) $T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{2100}s$

(3) 在 $f_s=2100HZ$ 时，抽样所得离散序列为

$x(n)=x_a(t)|_{t=nT}=\cos(\frac{4\pi}{7}n)+\frac{1}{2}\cos(\frac{10}{21}\pi n)+\frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi}{3}n)$.

这里有3个频率分量，且 $\frac{2\pi}{w_1}=2\pi\times\frac{7}{4\pi}=\frac{7}{2}$

$\frac{2\pi}{w_2}=2\pi\times\frac{21}{10\pi}=\frac{21}{5}$

$\frac{2\pi}{w_3}=2\pi\times\frac{3}{2\pi}=3$.

可知其公倍数为 $N=21$. 故 $x(n)$ 周期 $N=21$.

$T_0=\frac{1}{F_0}=10^{-2}s$ 即 $N=21$

3.24 (1) $X_1(e^{jw})=\sum_{n=0}^{4}x(n)e^{-jwn}=\frac{1-e^{-j5w}}{1-e^{-jw}}=e^{-j2w}\frac{\sin(\frac{5}{2}w)}{\sin\frac{w}{2}}$

(2). 由DFT与DTFT关系得

$X_1(k)=X_1(e^{jw})|_{w=\frac{2\pi}{5}k}=e^{-j\frac{4\pi}{5}k}\cdot\frac{\sin(\pi k)}{\sin\frac{\pi}{5}k}=5\delta(k)$

即 $X_1(k)=\{5,0,0,0,0\}$

(3). $X_2(e^{jw})=\sum_{n=0}^{9}[x(n)]_{10}R_{10}(n)]e^{-jwn}=e^{-j2w}\frac{\sin(\frac{5}{2}w)}{\sin(\frac{w}{2})}$

由此可知. $X_2(k)=X_2(e^{jw})|_{w=\frac{2\pi}{10}k}=e^{-j\frac{2\pi}{5}k}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{10}k)}=\begin{cases}5\\0\end{cases}$

即 $X_2(k)=\{5,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$

(4). $X_3(e^{jw})=\sum_{n=0}^{9}(-1)^n x_1((n))_{10}R_{10}(n)e^{-jwn}=\frac{1-e^{-j5w}}{1+e^{-jw}}=e^{-j2w}\cdot\frac{j\sin\frac{5}{2}w}{\cos\frac{w}{2}}$

故 $X_3(k)=X_3(e^{jw})|_{w=\frac{2\pi}{10}k}=\begin{cases}5 & k=5\\0 & k\neq 5\end{cases}$

$X_3(k)=\{0,0,0,0,0,5,0,0,0,0\}$

(5) $X_{2ep}(k)=\frac{1}{2}[X_2(k)+X_2(10-k)]$

由此 $X_4(n)=IDFT[X_{2ep}(k)]=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}X_{2ep}(k)W_{10}^{nk}$ $x_4(n)=\{0.5,\ldots 0.5\}$

(6) 由 $Im[X_2(k)]=0$

所以 $x_5(n)=IDFT[Im[X_2(k)]]=0$.

(7) $x_6(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[X_2(N-1-k)_N R_N(k)]W_N^{-nk}=\frac{1}{10}5\cdot W_{10}^{-9n}=0.5e^{-\frac{9}{5}\pi}$.

(8) $x_7(n)=\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}[W_{10}^{k}X_2(k)]^2\cdot W_{10}^{-nk}$.

由于 $X_2(k)=\begin{cases}5 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$

因此 $x_7(n)=\frac{1}{10}[W_{10}^{0}X_2(0)]^2W_{10}^{0n}=2.5$

即 $x_7(n)=\{2.5,\ 2.5,\ 2.5\ \ldots\ 2.5\}$.

3.31. $N_1=50$, $N_2=15$. $y_l(n)=x_1(n)*x_2(n)$ 长度为

$M=N_1+N_2-1=64$.

由对应的 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ $0\le n\le 49$ $5\le n\le 19$

所以线性卷积和 $y_l(n)$ 有值区域为 $5\le n\le 68$.

$L=50$. 显然有 $L<M$

因此 $y(n)$ 中只有部分能代表线性卷积 $y_l(n)$

对圆周卷积 $y(n)$ 其有值区域为 $0\le n\le 49$

所以在 $y(n)$ 中对应的 $y_l(n)=x_1(n)*x_2(n)$ 的 n 值范围是 $19\le n\le 49$

3.35. 由 $x_1(n)=\{1,1,1,0,0,0,0,1\}$.

$x_2(n)=\begin{cases}\cos\frac{2\pi n}{4} & 0\le n\le 5\\ 0 & 6\le n\le 7\end{cases}$

即 $x_2(n)=\{1,\frac{\sqrt2}{2},0,-\frac{\sqrt2}{2},-1,-\frac{\sqrt2}{2},0,0\}$.

$y(n)=x_1(n)$ ⑧ $x_2(n)=\sum_{m=0}^{7}x_1(m)x_2(n-m)_8R_8(n)$.

所以 $y_l=\{-0.7071,1.7071\ldots\ \ -1.7071\}$.

即 $\begin{cases}y(0)=y_l(0)+y_l(8)\\ y(n)=y_l(n) & 1\le n\le 7\end{cases}$

3.45. $X(z)=\sum_{n=0}^{7}x(n)z^{-n}$.

$X(k)=X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{8}}}=\sum_{n=0}^{7}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$.

$X(z)|_{z=0.5e^{j[2\pi k/8+\frac{\pi}{8}]}}=\sum_{n=0}^{7}x(n)[0.5e^{j[2\pi k/8+\frac{\pi}{8}]}]^{-n}$.

$=\sum_{n=0}^{7}[x(n)2^{n}\cdot e^{-j\pi n/8}]e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}=\sum_{n=0}^{7}x_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$.

$DFT[x_1(n)]=\sum_{n=0}^{7}x_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{7}x_1(n)z^{-n}|_{z=e^{j2\pi k/8}}$

4.1. (1) $T_1=40\times10^{-9}\times N^2=0.01049s$

$T_2=5\times10^{-9}\times N\times(N-1)=0.00131s$

所以、$T=T_1+T_2=0.01180s$

(2) 用FFT计算

$T_1=40\times10^{-9}\times\frac{N}{2}\log_2^N=0.00009216s$

$T_2=5\times10^{-9}\times N\log_2^N=5\times10^{-9}\times512\log_2^{512}=0.00002304s$

$T=T_1+T_2=0.0001152s$

4.2. $\frac{N}{2}\log_2^N=\frac{16}{2}\log_2^{16}=32$.

由于$W_{16}^{0}=1$. $W_{16}^{8}=-1$. $W_{16}^{\pm4}=\pm j$. 不需要乘法

故. W_{16}^{0}个数为 $1+2+4+8=15$

有W_{16}^{4}个数为 $1+2+4=7$.

总乘个数为 ~~1~~ $32-15-7=10$(个).

复数加法$=N\log_2^N=16\log_2^{16}=64$(个)

4.6 (1) 整个流程图需计算的蝶形总数为$\frac{N}{2}\cdot\log_2^N$

所以总共需要乘法次数为 $2\cdot\frac{N}{2}\log_2^N=N\cdot\log_2^N$

(2) $W_{\frac{N}{2^{m-1}}}^{r}=W_N^{r\cdot2^{m-1}}$

所以第$m-1$列是到第m列的W_N幂是 $r\cdot2^{m-1}$ $r=0,1,\cdots(\frac{N}{2^m}-1)$

(3) $\frac{N}{2^m}$

(4) $\frac{N}{2^{m-1}}$

4.9.(1) 由 $H(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z_k^{-n}$.

其中 $z_k = A\cdot W^{-k} = A_0\cdot W_0^{-k}\cdot e^{j(\theta_0+k\varphi_0)}$

所以 $A_0=1$, $W_0=a^{-1}$. $\theta_0=0$, $\varphi=0$.

此时 $H(z_k)=a^{-\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1} g(n)\, p(k-n)$

式中，$g(n)=h(n)a^{-\frac{n^2}{2}}$.

$p(n)=\begin{cases} a^{\frac{n^2}{2}} \\ a^{(n+N-1+M)^2/2} \end{cases}$

由IFFT计算 $L=2^J \geq N+M-1$.

则 $H(z_k)=a^{-\frac{k^2}{2}}\cdot y(k)$ $\quad 0\leq k\leq N-1$

4.12.由题知. $X_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_0^{\infty} e^{-0.3t-j\Omega t}dt$

$=\frac{1}{0.3+j\Omega}$

$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-e^{-0.3T-j\omega}}$

当 $T=0.5$ 时. $X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-0.15-j\omega}}$

$T=0.05$ 时 $X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-0.015-j\omega}}$

4.15. $\omega_1=2\pi f_1/f_s=2\pi\times 300/2000=0.3\pi$

$\omega_2=2\pi f_2/f_s=0.45\pi$

$\omega_3=2\pi f_3/f_s=1.2\pi$

$\omega_4=2\pi f_4/f_s=2.5\pi$

理由 $\quad \omega_{LP}=2\pi f_{LP}/f_s=2\pi\times 800/2000=0.8\pi$

$\omega_3'=\omega_3-2\pi=-0.8\pi$

$\omega_4'=\omega_4-2\pi=0.5\pi$

$f_1=\frac{\omega_1 f_s}{2\pi}=300HZ$. $\qquad f_2=\frac{\omega_2 f_s}{2\pi}=450HZ$

$f_3=\frac{\omega_3' f_s}{2\pi}=450HZ$ $\qquad f_4=\frac{\omega_4' f_s}{2\pi}=500HZ$

所以重构信号 $y_a(t)$ 包含的频率分量有 300HZ, 450HZ, 500HZ 和 800HZ

4.17 (1) $y(n)=x(n)*h(n)=[1,4,7,9,9,7,4,1]$

(2) $x(n)=[1,2,1,2,1]$ 长度 $N_1=5$，$h(n)=[1,2,2,1]$ 长度 $N_2=4$

$x_N(n)=[1,2,1,2,1,0,0,0]$

$h_N(n)=[1,2,2,1,0,0,0,0]$.

取 $N=8$，旋转因子 $W_8^0=1$ $W_8^4=-1$ $W_8^2=-j$

于是可写出 $H(k)=[6,\ (1+\frac{1}{\sqrt2})-(2+\frac{2}{\sqrt2})j,\ -(1+j),\ (1-\frac{1}{\sqrt2})+(2-\frac{2}{\sqrt2})j,\ 0,\ (1-\frac{1}{\sqrt2})-(2-\frac{2}{\sqrt2})j,$

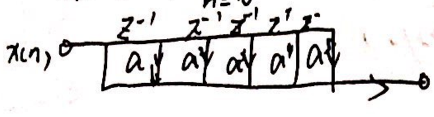
$-(1-j),\ (1+\frac{1}{\sqrt2})+(2+\frac{2}{\sqrt2})j]$

$X(k)=[7,\ -(2\sqrt2+1)j,\ 1,\ -(2\sqrt2-1)j,\ -1,\ (2\sqrt2-1)j,\ 1,\ (2\sqrt2+1)j]$

利用公式 $y(n)=\frac{1}{N}\text{IDFT}[Y(k)]$.

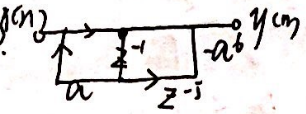
即 $Ny(n)=\text{IDFT}[Y(k)]$ 有 $y(n)=\{1,4,7,9,9,7,4,1\}$.

5.1 (1) $H(z)=\sum_{n=0}^{5}a^n z^{-n}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+a^4z^{-4}+a^5z^{-5}$ $0<a<1$



(2) 可将 $H(z)$ 改写成 $H(z)=\frac{1-a^6z^{-6}}{1-az^{-1}}=\frac{1}{1-az^{-1}}(1-a^6z^{-6})$ $0<a<1$

(3)



5.2 根据 $H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$ 可得

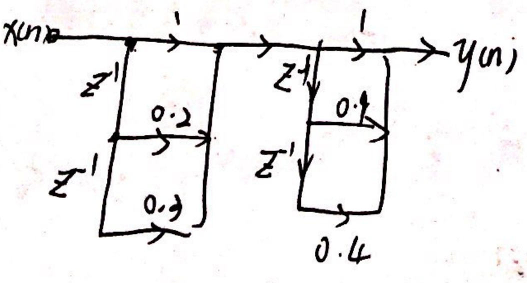
$H(z)=1+0.3z^{-1}+0.72z^{-2}+0.11z^{-3}+0.12z^{-4}$

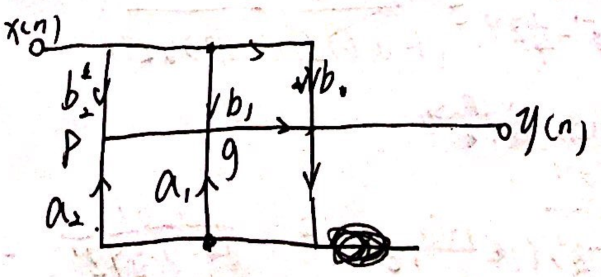
$=(1+0.2z^{-1}+0.3z^{-2})(1+0.1z^{-1}+0.4z^{-2})$

而FIR级联型公式为 $H(z)=\prod_{k=1}^{[\frac{N}{2}]}(\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})$

对照上式得 $\beta_{01}=1$ $\beta_{11}=0.2$ $\beta_{21}=0.3$

$\beta_{12}=1$ $\beta_{12}=0.1$ $\beta_{22}=0.4$





5.3 (1) $\begin{cases} p(n) = b_2 x(n) + a_2 y(n) \\ g(n) = b_1 x(n) + p(n-1) + a_1 y(n) \\ y(n) = b_0 x(n) + g(n-1) \end{cases}$

写成z变换形式. $\begin{cases} P(z) = b_2 X(z) + a_2 Y(z) \\ G(z) = b_1 X(z) + z^{-1} P(z) + a_1 Y(z) \\ Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1} G(z) \end{cases}$

解此方程组得 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$.

(2) (a). $H(z) = \frac{1 + 1.8z^{-1} - 0.8z^{-2}}{1 - 1.4z^{-1} + 0.64z^{-2}}$. 写成零极点形式. 则有

$H(z) = \frac{(z + 0.9 + \sqrt{1.61})(z + 0.9 - \sqrt{1.61})}{(z - 0.7 - j\sqrt{0.15})(z - 0.7 + j\sqrt{0.15})}$

零点为 $z = -0.9 \pm \sqrt{1.61}$　　极点为 $z = 0.7 \pm j\sqrt{0.15}$.

(b). 由题得系统函数为 $H(z) = \frac{1 + 1.7z^{-1} + 2 \cdot z^{-2}}{1 - 2.4z^{-1} + 1.44z^{-2}}$.

写成零极点的形式. 则有 $H(z) = \frac{(z + 0.85 + j\sqrt{1.2775})(z + 0.85 - j\sqrt{1.2775})}{(z - 1.2)^2}$

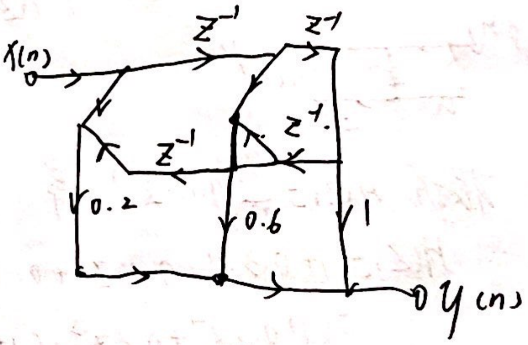
零点为 $z = -0.85 \pm j\sqrt{1.2275}$　　极点为 $z = 1.2$ (二阶).

5.5. $h(n) = \frac{1}{5}\delta(n) + \frac{3}{5}\delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{3}{5}\delta(n-3) + \frac{1}{5}\delta(n-4)$.

则 $h(0) = h(4) = \frac{1}{5} = 0.2$.　　$h(1) = h(3) = \frac{3}{5} = 0.6$

$h(2) = 1$.

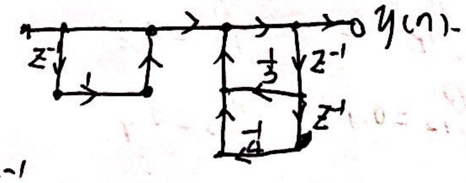
则 $h(n)$ 为偶对称, 对称中心在 $n = \frac{N-1}{2} = 2$ 处, N 为奇数



5.6 (1) 根据 $y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$ 可得

$a_1 = \frac{1}{3}$.　　$a_2 = \frac{1}{4}$　　$b_0 = 1$　　$b_1 = 1$.

直接Ⅰ型结构及典范型结构为



一阶 $H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.69z^{-1})(1 + 0.36z^{-1})}$

一阶并联型的 $H(z)$ 可得为

$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1})(1 - \frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1})} = \frac{1.61}{1 - 0.69z^{-1}} - \frac{0.61}{1 + 0.36z^{-1}}$

5 (2) 由题意 $H(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}$.

可推出 $H(e^{j\omega})=\dfrac{1+e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}-\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}=\dfrac{(1+\cos\omega)-j\sin\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos 2\omega+j[\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin 2\omega]}$

幅度为 $|H(e^{j\omega})|=\dfrac{\sqrt{(1+\cos\omega)^2+\sin^2\omega}}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos 2\omega)^2+(\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin 2\omega)^2}}$.

相位为 $\arg[H(e^{j\omega})]=-\arctan\left(\dfrac{\sin\omega}{1+\cos\omega}\right)-\arctan\left[\dfrac{\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin 2\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos 2\omega}\right]$

(3) 输入正弦波为 $x(t)=5\sin(2\pi t\cdot 10^3)$;

由 $\Omega T_1=2\pi\times 10^3 T_1=2\pi$. 可得周期 $T_1=\frac{1}{1000}=10^{-3}=1ms$

在 $x(t)$ 一个周期里.

$x(n)=5\cdot\sin(2\pi\times 10^3\times nT)=5\sin(10^3 2\pi\times 10^{-4} n)=5\sin\frac{1}{5}n\pi$

由此看出, $\omega_0=0.2\pi$.

$y(n)=5|H(e^{j\omega_0})|\sin[\omega_0 n+\arg(H(e^{j\omega_0}))]=12.13\sin(0.2\pi n-0.90)$

5.8 (1) $h(n)$ 为实序列. 满足 $H(k)=H^*(N-k)$

已给出 $H(k)$, $k=0,1,2,3,4$ 的值.

$H(5)=1.5-j(\sqrt{2}-1.5)$

$H(6)=H^*(8-6)=H^*(2)=0$ $\qquad H(7)=H^*(8-7)=H^*(1)=1.5-j(\sqrt{2}+1.5)$

(2) 根据频率抽样公式

$H(z)=\dfrac{1-z^{-8}}{8}\sum_{k=0}^{7}\dfrac{H(k)}{1-W_8^{-k}z^{-1}}=\frac{1}{8}(1-z^{-8})\left[\dfrac{19}{1-z^{-1}}+\dfrac{5}{1+z^{-1}}+\dfrac{3-(3\sqrt{2}+2)z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}+\dfrac{3+3\sqrt{2}+2z^{-1}}{1+\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}\right]$

(3) 由单位冲激表达式可知. $h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}H(k)e^{j\frac{\pi}{4}nk}$.

所以 $h(0)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}H(k)=\frac{15}{4}$

$h(1)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}H(k)e^{j\frac{\pi}{4}k}=\frac{1}{8}[19+1.5e^{j\frac{\pi}{4}}+(1.5+\sqrt{2})e^{j\frac{3\pi}{4}}+1.5e^{j\frac{5\pi}{4}}+(\sqrt{2}-1.5)e^{j\frac{7\pi}{4}}-5]$

$=\frac{5}{4}$

$h(2)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}H(k)e^{j\frac{\pi}{2}k}=\frac{1}{8}[H(0)+jH(1)-jH(3)+H(4)+jH(5)-jH(7)]$

$=\frac{9}{4}$

$h(3)=\frac{1}{8}\sum_{k}H(k)e^{j\frac{3\pi}{4}k}=\frac{1}{8}[H(0)+H(1)e^{j\frac{3\pi}{4}}+H(3)e^{j\frac{9\pi}{4}}+H(4)e^{j3\pi}+H(5)e^{j\frac{15\pi}{4}}+H(7)e^{j\frac{21\pi}{4}}$

$=\frac{5}{4}$

$h(4)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}H(k)e^{j\pi k}=\frac{1}{8}[H(0)-H(1)-H(3)+H(4)-H(5)-H(7)]=\frac{9}{4}$

$h(5)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}H(k)e^{j\frac{5\pi}{4}k}=\frac{9}{4}$

$h(6)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}H(k)e^{j\frac{3\pi}{2}k}=\frac{15}{4}$

$h(7)=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}H(k)e^{j\frac{7\pi}{4}k}=\frac{9}{4}$

所以 $h(n)=\{\frac{15}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4},\frac{9}{4},\frac{15}{4},\frac{9}{4}\}$

5.13 $k_1=0.4$, $k_2=0.3$, $k_3=0.2$.

可得 $b_3^{(3)}=k_3=0.2$. $\quad b_1^{(1)}=\frac{1}{1-k_2^2}[b_1^{(2)}-k_2b_1^{(2)}]=k_1$

所以 $b_1^{(2)}=k_1(1+k_2)=0.4\times(1+0.3)=0.52$.

$b_1^{(3)}=b_1^{(2)}+k_3b_2^{(2)}=b_1^{(2)}+k_2k_3=0.52+0.3\times0.2=0.58$

$b_2^{(3)}=b_2^{(2)}+k_3b_1^{(2)}=k_2+k_3b_1^{(2)}=0.3+0.2\times0.52=0.404$

$$H_1(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{F_3(z)}{X(z)}=1+\sum_{i=1}^{3}b_i^{(3)}z^{-i}=1+0.58z^{-1}+0.404z^{-2}+0.2z^{-3}$$

$$H_2(z)=\frac{G(z)}{X(z)}=\frac{G_3(z)}{X(z)}=z^{-3}(1+\sum_{i=1}^{3}b_i^{(3)}z^{i})=z^{-3}+0.58z^{-2}+0.404z^{-1}+0.2$$

5.14
$$\begin{cases}X_1(z)=X(z)+0.2z^{-1}X_5(z)\\X_2(z)=X_1(z)-0.5z^{-1}X_6(z)\\X_3(z)=X_2(z)-0.7z^{-1}X_3(z)\\X_4(z)=-0.2X_1(z)+z^{-1}X_5(z)\\X_5(z)=0.5X_2(z)+z^{-1}X_6(z)\\X_6(z)=0.7X_3(z)+z^{-1}X_3(z)\end{cases}$$

可求得 $X_3(z)=\frac{1}{1+0.95z^{-1}+0.29z^{-2}-0.2z^{-3}}X(z)$

$$X_4(z)=\frac{-0.2+0.29z^{-1}+0.95z^{-2}+z^{-3}}{1+0.95z^{-1}+0.29z^{-2}-0.2z^{-3}}X(z)$$

$$X_5(z)=\frac{0.5+1.05z^{-1}+z^{-2}}{1+0.95z^{-1}+0.29z^{-2}-0.2z^{-3}}X(z)$$

从而可知 $\frac{Y(z)}{X(z)}=[0.6X_4(z)+0.4X_5(z)+0.3X_6(z)+0.8X_3(z)]/X(z)$

$$=\frac{1.09+0.874z^{-1}+0.97z^{-2}+0.6z^{-3}}{1+0.95z^{-1}+0.29z^{-2}-0.2z^{-3}}$$

5.15. $k_1=-0.7251$. $k_2=0.8142$. $k_3=-0.6382$.

根据零极点格型结构与直接型关系.

$a_3=a_3^{(3)}=k_3=-0.6382$.

$a_1^{(1)}=\frac{1}{1-k_2^2}[a_1^{(2)}-k_2a_1^{(2)}]=k_1$

$a_1^{(2)}=k_1(1+k_2)=-1.3155$

$a_1=a_1^{(3)}=a_1^{(2)}+k_3a_2^{(2)}=-1.8514$

$a_2=a_2^{(3)}=a_2^{(2)}+k_3a_1^{(2)}=k_2+k_3a_1^{(2)}=1.6801$

根据. $b_3=b_3^{(3)}=c_3=-0.692$

$b_2=b_2^{(3)}=c_2+c_3a_1^{(3)}=-0.8688$

$b_1=0.9373$

$b_0=0.4875$

5.17. 由图 $k_1=-0.56$. $k_2=\frac{2}{3}$, $k_3=\frac{1}{2}$.

$a_3^{(3)}=k_3=\frac{1}{2}$

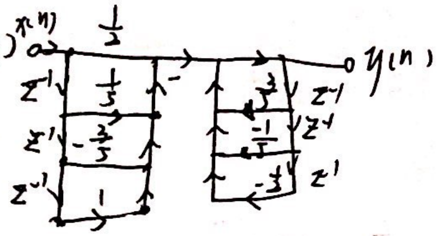
$a_1^{(1)}=\frac{1}{1-k_2^2}[a_1^{(2)}-k_2a_1^{(2)}]=k_1$

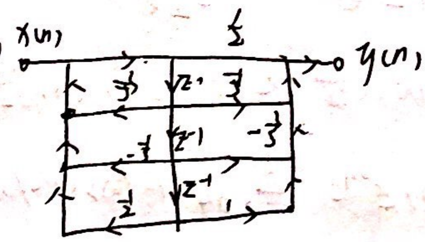
$a_1^{(2)}=k_1(1+k_2)=(-0.56)\times(1+\frac{2}{3})=-\frac{14}{15}$

$a_1^{(3)}=a_1^{(2)}+k_3a_2^{(2)}=a_1^{(2)}+k_2k_3=-\frac{3}{5}$

$a_2^{(3)}=a_2^{(2)}+k_3a_1^{(2)}=k_2+k_3a_1^{(2)}=\frac{1}{5}$

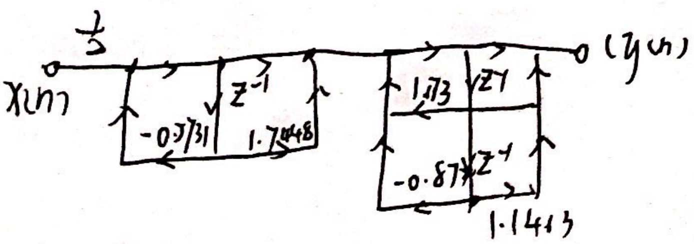
$$H(z)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}z^{-1}-\frac{3}{5}z^{-2}+z^{-3}}{1-\frac{3}{5}z^{-1}+\frac{1}{5}z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}}$$

(1) 

(2) 

(3) $H(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+1.7448z^{-1}}{1+0.5731z^{-1}}\cdot\frac{1-1.3448z^{-1}+1.1463z^{-2}}{1-1.1732z^{-1}+0.5724z^{-2}}$

(4) $H(z)=2+\frac{-1.2232}{1+0.5731z^{-1}}+\frac{-0.2748+0.1201z^{-1}}{1-1.1731z^{-1}+0.5724z^{-2}}$



5.22 将$H(z)=\dfrac{1}{1-0.8z^{-1}+0.75z^{-2}-0.3z^{-3}}=\dfrac{1}{1+a_1^{(3)}z^{-1}+a_2^{(3)}z^{-2}+a_3^{(3)}z^{-3}}$

将$H(z)$表示成$H(z)=\dfrac{1}{A_3(z)}$

于是有$a_1^{(3)}=-0.8$　$a_2^{(3)}=0.75$　$a_3^{(3)}=-0.3$.

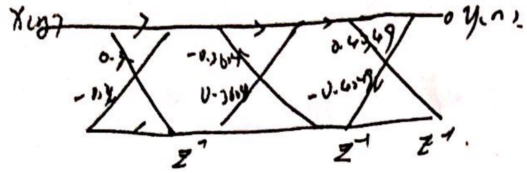
故$k_3=a_3^{(3)}=-0.3$.

$a_1^{(2)}=\dfrac{1}{1-k_3^2}(a_1^{(3)}-k_3a_2^{(3)})=\dfrac{1}{0.91}[-0.8+0.3\times0.75]=\dfrac{-0.575}{0.91}=-0.6319$.

$a_2^{(2)}=\dfrac{1}{1-k_3^2}[a_2^{(3)}-k_3a_1^{(3)}]=\dfrac{1}{0.91}[0.75-0.3\times0.8]=\dfrac{0.51}{0.91}=0.5604$

故有$k_2=a_2^{(2)}=0.5604$

$a_1^{(1)}=\dfrac{1}{1-k_2^2}[a_1^{(2)}-k_2a_1^{(2)}]=\dfrac{1}{0.6860}[-0.6319(1-0.5604)]=\dfrac{-0.2778}{0.686}=-0.4049$.



5.23解: $h(n)=IDFT[H(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}]$

$=\frac{1}{64}\sum_{k=0}^{63}H(k)e^{j2\pi nk/64}=\frac{1}{64}\sum_{k=0}^{63}|H(k)|e^{-j\pi k}e^{\frac{j\pi nk}{32}}$

$=\frac{1}{64}\sum_{k=0}^{63}|H(k)|e^{j(n-32)\pi k/32}$

$=\frac{1}{64}[1+\frac{1}{2}e^{j(n-32)\pi/32}+\frac{1}{2}e^{j(n-32)\pi\cdot63/32}]$

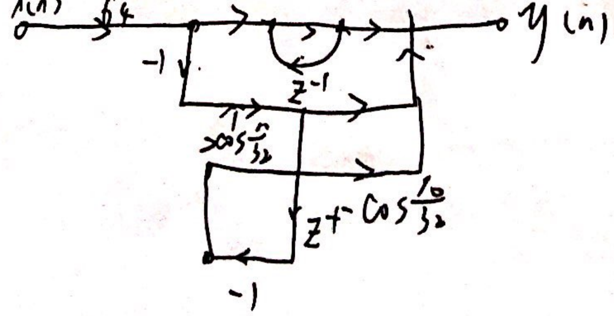
$=\frac{1}{64}[1+\frac{1}{2}e^{j(n-32)\pi/32}+\frac{1}{2}e^{-j(n-32)\pi/32}]$

$=\frac{1}{64}[1+\cos(\frac{n\pi}{32}-\pi)]=\frac{1}{64}[1-\cos\frac{n\pi}{32}]$

则有$H(z)=\sum_{n=0}^{63}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{63}\frac{1}{64}(1-\cos(n\pi/32))z^{-n}$

$=\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{63}(1-\frac{1}{2}e^{j\pi n/32}-\frac{1}{2}e^{-j\pi n/32})z^{-n}-\frac{1}{64}[\frac{1-z^{-64}}{1-z^{-1}}-\frac{1}{2}]$

$=\frac{1}{64}(1-z^{-64})[\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1-z^{-1}\cos\frac{\pi}{32}}{1-2z^{-1}\cos(\frac{\pi}{32})+z^{-2}}]$



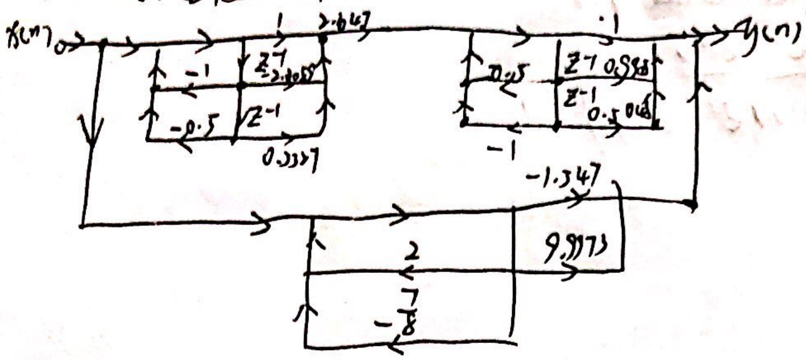
5.24.(1) 由给定的系统函数可得

$$H(z)=\frac{0.5(1+z^{-1})^{6}}{(1-2z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-2})(1-0.5z^{-1}+z^{-2})(1+z^{-1}+0.3z^{-2})}$$

$$=1.429+\frac{-1.547+9.9973z^{-1}}{1-2z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-2}}+\frac{0.9232-3.6034z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+z^{-2}}+\frac{-0.21-0.01335z^{-1}}{1+z^{-1}+0.3z^{-2}}$$

$$=\frac{-1.547+9.9973z^{-1}}{1-2z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-2}}+2.047\cdot\frac{1-2.0389z^{-1}+0.5327z^{-2}}{1+z^{-1}+0.3z^{-2}}\cdot\frac{1+0.9983z^{-1}+0.30848z^{-2}}{1-0.5z^{-1}+z^{-2}}$$

由以上系统函数表达式可得.



6.2. 由于要求滤除 $f_h=50\times4=200Hz$.

取抽样频率为 $f_s=500Hz>2f_h=400Hz$

各陷波频率转换成数字频率.

$$\omega_1=2\pi\times50\times\frac{1}{500}=0.2\pi$$

$$\omega_2=2\pi\times50\times2\times\frac{1}{500}=0.4\pi$$

$$\omega_3=2\pi\times50\times3\times\frac{1}{500}=0.6\pi$$

$$\omega_4=2\pi\times50\times4\times\frac{1}{500}=0.8\pi$$

根据数字陷波器特点，其归一化函数为

$$H(z)=\frac{1+r^{N}}{2}\cdot\frac{1-z^{-N}}{1-r^{N}z^{-N}}\qquad 0\le r<1$$

系统零点为 $z_{0i}=e^{j2\pi i/N}$ $\quad i=0,1,\cdots N-1$

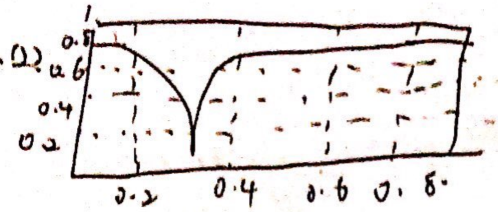
$$H(z)=\frac{1+0.98^{10}}{2}\cdot\frac{(1-0.98z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+z^{-5}+z^{-6}+z^{-7}+z^{-8}+z^{-9})}{(1-0.98^{10}z^{-10})}$$

6.3. (1) 由系统函数可以看出，系统零点为

$z_0 = e^{\pm j\pi/3}$

系统极点为 $z_p = 0.9e^{\pm j\pi/3}$

(2)



(3) 按 $|H(e^{j0})|=1$ 来求解系数 b_0，代入系统函数可得

$$|H(e^{j0})| = b_0\left|\frac{(1-e^{j\pi/3}e^{-j0})(1-e^{-j\pi/3}e^{-j0})}{(1-0.9e^{j\pi/3}e^{-j0})(1-0.9e^{-j\pi/3}e^{-j0})}\right| = 1$$

由此求出，$b_0 = 0.91$.

(4) $\Delta\omega_B = 2(1-r)$

代入 $r=0.9$ 可得 $\Delta\omega_B = 2(1-0.9) = 0.2$

6.4 解: $H(z) = H_0(z)+1$.

(1) 当 $H_0(e^{j\omega})$ 是截止频率为 ω_c 的理想低通滤波器时

$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0\le|\omega|\le\omega_c \\ 0 & \pi>|\omega|>\omega_c \end{cases}$$

且有 $h_0(n) = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_c n)$

因此可求得 $H(e^{j\omega})$ 为 $H(e^{j\omega}) = H_0(e^{j\omega})+1 = \begin{cases} 2 & 0\le|\omega|\le\omega_c \\ 1 & \pi>|\omega|>\omega_c \end{cases}$

其单位冲激响应为 $h(n) = h_0(n) + \delta(n) + \frac{\omega_c}{\pi}\sin(\omega_c n)$

(2).
$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & 0\le|\omega|\le\omega_c \\ 1 & \pi>|\omega|>\omega_c \end{cases}$$

$h_0(n) = -\frac{\omega_c}{\pi}\sin c(\omega_c n)$

因此可求得 $H(e^{j\omega})$ 为 $H(e^{j\omega}) = H_0(e^{j\omega})+1 = \begin{cases} 1 & 0\le|\omega|\le\omega_c \\ 2 & \pi>|\omega|>\omega_c. \end{cases}$

6.6. 由题得 $H(z)=\frac{-1-bz^{-1}}{1-az^{-1}}$

如果 $b=0$，则 $H(z)=\frac{-1}{1-az^{-1}}$，要成全通系统，必有 $a=0$. 但 $b\neq a$.

由系统函数可知，系统零点为 $z_0=-b$.

极点为 $z_p=a$

根据全通系统零、极点关于单位圆镜像对称分布

$$z_0=-b=\frac{1}{z_p}=\frac{1}{a}$$

所以 $b=-\frac{1}{a}$

6.7. 解：$H_1(z)=\frac{(z^{-1}-a)(z^{-1}-b)}{(1-0.425e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.425e^{-j\pi/4}z^{-1})}$

$$H_2(z)=\frac{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}{(1-0.425e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.425e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

$$H_3(z)=\frac{(1-az^{-1})(z^{-1}-b)}{(1-0.425e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-0.425e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})}$$

由系统函数知，三个系统有相同极点分布，极点为

$z_p=0.425e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$ 位于单位圆内

系统 $H_1(z)$ 的零点为 $z_{10}=\frac{1}{a}$ $z_{11}=\frac{1}{b}$

由于 $a=-0.5$ $b=0.7$.

所以 $|z_{10}|=\frac{1}{0.5}=2>1$.

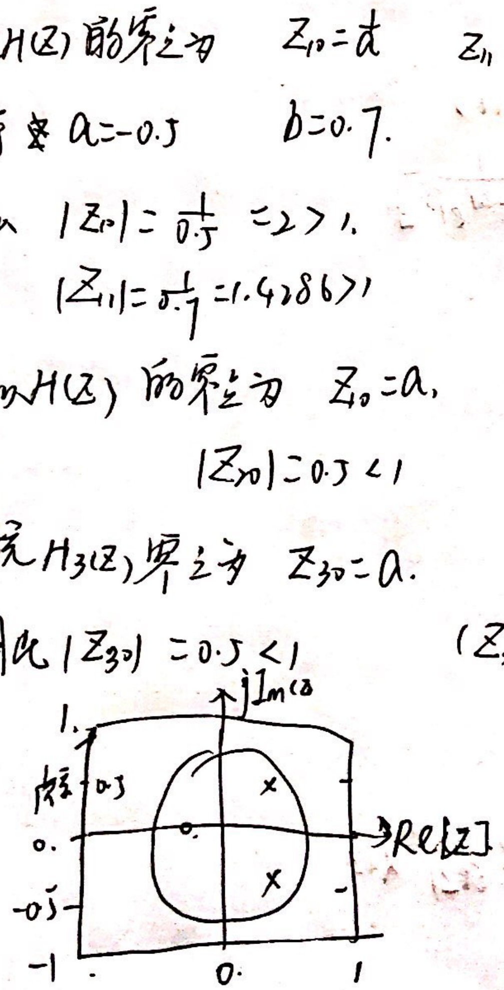
$|z_{11}|=\frac{1}{0.7}=1.4286>1$

所以 $H_2(z)$ 的零点为 $z_{20}=a$, $z_{21}=b$

$|z_{20}|=0.5<1$ $|z_{21}|=0.7<1$.

系统 $H_3(z)$ 零点为 $z_{30}=a$. $z_{31}=\frac{1}{b}$

因此 $|z_{30}|=0.5<1$ $|z_{31}|=\frac{1}{0.7}=1.4386>1$.



6.11. $H_{min}(z)=K\prod_{n=1}^{N-1}(1-a_n z^{-1})$,

其中 $a_n\,(n=1,2,\cdots,N-1)$ 为 $H_{min}(z)$ 的 $N-1$ 个零点.

$|a_n|<1$.

相应的最大相位延时系统函数为

$$H_{max}(z)=H_{min}(z)\prod_{n=1}^{N-1}\frac{z^{-1}-a_n^*}{1-a_n z^{-1}}=K\prod_{n=1}^{N-1}(z^{-1}-a_n^*)$$

$$=K\prod_{n=1}^{N-1}[z^{-1}(1-a_n^* z)]=z^{-(N-1)}K\prod_{n=1}^{N-1}(1-a_n^* z)$$

$$z^{(N-1)}H_{min}(z^{-1})=Kz^{-(N-1)}\prod_{n=1}^{N-1}(1-a_n z)$$

则有 $a_n^*=a_n$.

所以有 $H_{max}(z)=z^{-(N-1)}H_{min}(z^{-1})$,

由上式可知 $\sum_{n=0}^{N-1}h_{max}(n)z^{-n}=z^{-(N-1)}\sum_{n=0}^{N-1}h_m(n)z^{n}=\sum_{m}h_m(N-1-m)z^{-m}$

所以 $h_{max}(n)=h_{min}(N-1-n)$, $n=0,1,\cdots N-1$

7.1. 由 $H_a(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+a+jb}+\frac{1}{s+a-jb}\right]$

得出 $h_a(t)=\frac{1}{2}[e^{-(a+jb)t}+e^{-(a-jb)t}]u(t)$

由冲激响应不变法可得.

$$h(n)=Th_a(nT)=\frac{T}{2}[e^{-(a+jb)nT}+e^{-(a-jb)t}]u(t)$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}=\frac{T}{2}\left[\frac{1}{1-e^{-aT}e^{-jbT}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-aT}e^{jbT}z^{-1}}\right]$$

$$=T\cdot\frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos(bT)}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos bT+\cos^{-2aT}z^{-2}}$$

(2) 先用拉氏变换的性质,

可得. $H_a(s)=\frac{A}{(s-s_0)^n}\Rightarrow h_a(t)=\frac{Ae^{s_0t}t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$

$$h(k)=Th_a(Tk)=T\cdot\frac{Ae^{s_0kT}(kT)^{n-1}}{(n-1)!}u(k)$$

据 $a^k u(k)\xleftrightarrow{z}\frac{1}{1-az^{-1}}$

且 $kx(k)\xleftrightarrow{z}-z\frac{dX(z)}{dz}$ $\qquad k^m x(k)\xleftrightarrow{z}(-z\frac{d}{dz})^m X(z)$

可得 $H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)z^{-k}=TA\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}k^{n-1}(z^{-1}e^{s_0T})^k$

8. $=\frac{AT^n}{(n-1)!}\left(-z\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{1-e^{s_0T}z^{-1}}\right)$

可以推导求得 $H(z)=\begin{cases}\frac{AT}{1-e^{s_0T}z^{-1}} & n=1\\ \frac{ATe^{s_0T}z^{-1}}{(1-e^{s_0T}z^{-1})^n} & n=2,3\ldots\end{cases}$

7.2. 已知 $\Omega_p=2\pi\times20\,rad/s$ $\Omega_{s}=2\pi\times40\,rad/s$ $R_p=2dB$ $A_s=20dB$

(1) 拟合定阶参数

其 $N\geq\lg\left(\frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1R_p}-1}\right)/\left[2\lg\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)\right]=\lg\left(\frac{10^2-1}{10^{0.2}-1}\right)/\left[2\lg\frac{4}{2}\right]=3.7016$

(2). $\Omega_c=\Omega_p/\sqrt[2N]{10^{0.1R_p}-1}=40\pi/\sqrt[8]{10^{0.2}-1}=\frac{40\pi}{0.9352}=134.4\,(rad/s)$

(3) $N=4$ 时,归一化巴

$H_{an}(s)=\frac{1}{s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1}$

(4) 去归一化,求得所需的 $H_a(s)$ 为

$H_a(s)=H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)=\frac{\Omega_c^4}{s^4+2.6131\Omega_c s^3+3.4142\Omega_c^2s^2+2.6131\Omega_c^3s+\Omega_c^4}$

$=\frac{3.2628\times10^8}{s^4+351.2s^3+6.1672\times10^4s^2+6.3439\times10^6s+3.2628\times10^8}$

7.3 (1) 由归一化低通滤波器阶次 N 为

$N\geq\lg\left(\frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1R_p}-1}\right)/\left[2\lg\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right]=\lg\left(\frac{10^{2.5}-1}{10^{0.1}-1}\right)/2\lg\frac{5}{2}=6.9539$

取 $N=7$.

$H_a(s)=\frac{1}{s^7+4.4940s^6+10.0978s^5+14.5918s^4+14.5918s^3+10.0978s^2+0.4940s+1}$

可求得截止频率 Ω_c 为

$\Omega_c=\Omega_p/\sqrt[2N]{10^{0.1R_p}-1}=1/\sqrt[14]{10^{0.1R_p}-1}=1.1013$

去归一化求得 $H_a(s)$，由

$$H_a(s)=H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)=\frac{\Omega_c^7}{s^7+4.4940\Omega_c s^6+10.0978\Omega_c^2 s^5+\cdots+14.5918\Omega_c^5 s^2+\cdots+\Omega_c^7}$$

(2). 切比雪夫 I 型滤波器

$$N\geq\frac{\operatorname{arcch}\left[\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}\Big/\sqrt{10^{0.1\alpha_p}-1}\right]}{\operatorname{arcch}(\Omega_{st}/\Omega_p)}=\frac{\operatorname{arcch}(34.8919)}{\operatorname{arcch}(\frac{5}{3})}=3.8641$$

7.4. $$H(s)=\frac{5.361\times10^{-23}s^8}{s^{16}+a_1s^{15}+a_2s^{14}+\cdots+a_{16}}$$

其中. $[1,a_1,a_2,\cdots,a_{16}]=a$

7.5. (1) 由题意得

$$H_a(s)H_a(-s)=|H_a(j\Omega)|^2_{\Omega=s/j}=\frac{\Omega^2+\frac{1}{4}}{\Omega^4+16\Omega^2+256}\Big|_{\Omega=s/j}=\frac{\frac{1}{4}-s^2}{s^4-16s^2+256}=\frac{(\frac{1}{2}-s)(\frac{1}{2}+s)}{(s+4e^{j\frac{\pi}{6}})(s+4e^{-j\frac{\pi}{6}})(s-4e^{j\frac{\pi}{6}})\cdots}$$

$$H_a(s)=\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+4e^{j\frac{\pi}{6}})(s+4e^{-j\frac{\pi}{6}})}=\frac{s+\frac{1}{2}}{s^2+4\sqrt{3}s+16}$$

(2) $$H_a(s)=\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+4e^{j\frac{\pi}{6}})(s+4e^{-j\frac{\pi}{6}})}=\frac{\frac{1}{2}-j(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8})}{s+4e^{j\frac{\pi}{6}}}+\frac{\frac{1}{2}+j(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8})}{s+4e^{-j\frac{\pi}{6}}}$$

因此 $A_1=\frac{1}{2}-j(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8})$　$A_2=\frac{1}{2}+j(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8})$

$s_1=-4e^{j\frac{\pi}{6}}$　$s_2=-4e^{-j\frac{\pi}{6}}$

$$H(z)=\sum_{p=1}^{N}\frac{A_pT}{1-e^{s_pT}z^{-1}}=\frac{\frac{1}{2}-j(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8})}{1-z^{-1}e^{-4Te^{j\pi/6}}}T+\frac{\frac{1}{2}+j(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8})}{1-z^{-1}e^{-4Te^{-j\pi/6}}}T$$

$$=\frac{1-z^{-1}[\cos(2T)+(\sqrt{3}-\frac{1}{4})\sin(2T)]e^{-2\sqrt{3}T}}{1-2z^{-1}\cos(2T)\cdot e^{-2\sqrt{3}T}+z^{-2}e^{-4\sqrt{3}T}}$$

7.6 $$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.7429z^{-1}+0.1509z^{-2}}\cdot\frac{1+2.0044z^{-1}+1.0045z^{-2}}{1-0.8383z^{-1}+0.2986z^{-2}}$$

$$\cdot\frac{1+1.9956z^{-1}+0.9956z^{-2}}{1-1.0779z^{-1}+0.6695z^{-2}}$$

8.1 由题目有 $\omega_p=0.2\pi$ $\omega_{st}=0.4\pi$. $A_s=45dB$.

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\tau} & 0\le|\omega|\le\omega_c \\ 0 & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

$$h_d(n)=\begin{cases}\frac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)} & n\ne\tau \\ \omega_c/\pi & n=\tau \ (\tau=整数)\end{cases}$$

其中 $\tau=(N-1)/2$ $\omega_c=0.5(\omega_p+\omega_{st})=0.3\pi$

由过渡 $\Delta\omega=\omega_{st}-\omega_p=0.4\pi-0.2\pi=0.2\pi$. $\Delta\omega=6.6\pi/N$.

故有 $N=6.6\pi/\Delta\omega=6.6\pi/0.2\pi=33$

则 $\tau=\frac{N-1}{2}=16$.

于是 $w(n)=[0.54-0.46\cos(\frac{2\pi n}{N-1})]R_N(n)=[0.54-0.46\cos(\frac{\pi n}{16})]R_{33}(n)$

由此可得线性相位FIR低通滤波器 $h(n)$ 为

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases}\frac{\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}[0.54-0.46\cos(\frac{\pi n}{16})]R_{33}(n) \\ 0.3\end{cases}$$

8.2 $\omega_p=0.7\pi$, $\omega_{st}=0.5\pi$ $A_t=55dB$

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\tau} & \omega_c\le|\omega|\le\pi \\ 0 & 0\le|\omega|<\omega_c.\end{cases}$$

$$h_d(n)=\begin{cases}\frac{-\sin[(n-\tau)\omega_c]}{\pi(n-\tau)} & n\ne\tau. \\ 1-\omega_c/\pi & n=\tau \ (\tau=整数)\end{cases}$$

其中 $\tau=(N-1)/2$ $\omega_c=0.5(\omega_p+\omega_c)=0.6\pi$.

$A_s=55dB$. $\Delta\omega=\omega_p-\omega_c=0.2\pi$. $\Delta\omega=11\pi/N$.

$N=11\pi/\Delta\omega=11\pi/0.2\pi=55$

则 $\tau=\frac{N-1}{2}=27$.

于是 $w(n)=[0.42-0.5\cos(\frac{n\pi}{27})+0.08\cos(\frac{2\pi n}{27})]R_{55}(n)$

由此可得线性相位FIR高通滤波器h(n)为

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases}\dfrac{-\sin(0.4\pi(n-27))}{\pi(n-27)}\left[0.42-0.5\cos(\frac{\pi n}{27})+0.08\cos(\frac{2\pi n}{27})\right]R_{55}(n) & n\neq 27\\ 0.4 & n=27\end{cases}$$

8.5 (1) 由题意 $A_s=23dB$. $\Delta w=2\pi\cdot\frac{2\times10^3}{18\times10^3}=\frac{2}{9}\pi$.

由阻带 $A_s=23dB$ 可知 $N=6.1\pi/\Delta w=6.1\times\frac{9}{2}=27.45$.

若为低通，可选 $N=28$. 若为带阻高通，则N=奇数，可选 $N=29$

(2) $A_s=30dB$ $\Delta w=2\pi\cdot\frac{4\times10^3}{16\times10^3}=0.5\pi$.

可选海明窗 $N=11\pi/\Delta w=11\times2=22$.

对低通带通型，可选 $N=22$. 对带通高通可选 $N=23$

(3) $A_s=20dB$ $\Delta w=\frac{2\pi\times10^3}{10\times10^3}=0.2\pi$

$A_s=20dB$ $N=1.8\pi/\Delta w=1.8\times5=9$.

(4) $A_s=60dB$ $\Delta w=\frac{2\pi\cdot400}{2000}=0.4\pi$.

$N=11\pi/\Delta w=11/0.4=0.4\pi$.

8.12 (1) 由题意 $h_2(n)_8=h_1((n-4))_8$.

则 $H_2(k)=\sum_{n=0}^{7}h_1((n-4))_8W_8^{nk}R_8(n)\xlongequal{i=n-4}\sum_{i=-4}^{3}\tilde{h}_1(i)W_8^{ik}W_8^{4k}=H_1(k)W_8^{4k}$

由上式 $|H_2(k)|=|H_1(k)|$ $\theta_2(k)=\theta_1(k)-\frac{2\pi}{8}\cdot4\pi=\theta_1(k)-k\pi$

(2) $\tau=\frac{N-1}{2}=\frac{7}{2}=3.5$

(3) 由于 $h_2(n)=h_1((n-4))_8R_8(n)$ 故 $H_2(k)=e^{-j\frac{2\pi k}{8}\cdot4}H_1(k)=e^{-jk\pi}H_1(k)=(-1)^kH_1(k)$

$|H_1(k)|=|H_2(k)|$，$\theta_2(k)=\theta_1(k)-k\pi$

延迟为 $\tau=(N-1)/2$.

$$H(w)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos[(\tfrac{N-1}{2}-n)w]=2[h(3)\cos\tfrac{w}{2}+h(2)\cos\tfrac{3w}{2}+h(1)\cos\tfrac{5w}{2}+h(0)\cos\tfrac{7w}{2}]$$

故 $H_1(w)=2[4\cos(\frac{w}{2})+3\cos(\frac{3w}{2})+2\cos(\frac{5w}{2})+\cos(\frac{7w}{2})]$

$H_2(w)=2[\cos(\frac{w}{2})+2\cos(\frac{3w}{2})+3\cos(\frac{5w}{2})+4\cos(\frac{7w}{2})]$.