同理也有

$$\tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right) \equiv \tau_e\left(\left(\left(y_n\right)^{p^{-n}}\right)^{p^{-(m-n)}}\right)^{p^{m-n}} \mod \boldsymbol{p}^{m-n+1}\Re.$$

$$\Longleftrightarrow \tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n \equiv \tau_e\left({y_n}^{p^{-m}}\right)^{p^{m-n}}\boldsymbol{p}^n \mod \boldsymbol{p}^{m+1}\Re,\ \forall 0 \leq n \leq m.$$

至此, 我们可以再将式 (4.3.2.12) 等价改写为

$$\begin{tikzcd}
W_m^{(\Re)}\left(\tau_e\left(S(x,y)^{p^{-m}}\right)\right) \arrow[rr, "\equiv", "\mathrm{mod}\ \boldsymbol{p}^{m+1}\Re"'] & & W_m^{(\Re)}\left(\left\{\tau_e\left({x_n}^{p^{-m}}\right)\right\}\right) + W_m^{(\Re)}\left(\left\{\tau_e\left({y_n}^{p^{-m}}\right)\right\}\right) \\
\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left(S_n(x,y)^{p^{-m}}\right)^{p^{m-n}}\boldsymbol{p}^n \arrow[u, "="] \arrow[rr, "\equiv"] & & \sum_{n=0}^{m}\tau_e\left({x_n}^{p^{-m}}\right)^{p^{m-n}}\boldsymbol{p}^n + \sum_{n=0}^{m}\tau_e\left({y_n}^{p^{-m}}\right)^{p^{m-n}}\boldsymbol{p}^n \arrow[u, "="'] \\
\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left(S_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n \arrow[u, "\tau_e\text{是乘性提升}", "\text{指数运算可交换}"'] \arrow[urr, "\equiv", "\mathrm{mod}\ \boldsymbol{p}^{m+1}\Re"'] & &
\end{tikzcd} \tag{4.3.2.14}$$

$$\begin{tikzcd}
W_m^{(\Re)}\left(\tau_e\left(P(x,y)^{p^{-m}}\right)\right) \arrow[rr, "\equiv", "\mathrm{mod}\ \boldsymbol{p}^{m+1}\Re"'] & & W_m^{(\Re)}\left(\left\{\tau_e\left({x_n}^{p^{-m}}\right)\right\}\right) \bullet W_m^{(\Re)}\left(\left\{\tau_e\left({y_n}^{p^{-m}}\right)\right\}\right) \\
\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left(P_n(x,y)^{p^{-m}}\right)^{p^{m-n}}\boldsymbol{p}^n \arrow[u, "="] \arrow[rr, "\equiv"] & & \sum_{n=0}^{m}\tau_e\left({x_n}^{p^{-m}}\right)^{p^{m-n}}\boldsymbol{p}^n \bullet \sum_{n=0}^{m}\tau_e\left({y_n}^{p^{-m}}\right)^{p^{m-n}}\boldsymbol{p}^n \arrow[u, "="'] \\
\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left(P_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n \arrow[u, "\tau_e\text{是乘性提升}", "\text{指数运算可交换}"'] \arrow[urr, "\equiv", "\mathrm{mod}\ \boldsymbol{p}^{m+1}\Re"'] & &
\end{tikzcd} \tag{4.3.2.15}$$

其中

$$W_m^{(\Re)}\left(\left\{\tau_e\left({x_n}^{p^{-m}}\right)\right\}\right),\ W_m^{(\Re)}\left(\left\{\tau_e\left({y_n}^{p^{-m}}\right)\right\}\right),$$
$$W_m^{(\Re)}\left(\tau_e\left(S(x,y)^{p^{-m}}\right)\right),\ W_m^{(\Re)}\left(\tau_e\left(P(x,y)^{p^{-m}}\right)\right)$$

分别表示由 $\Re$ 上序列

$$\left\{\tau_e\left({x_n}^{p^{-m}}\right)\right\}_{n\geq 0},\ \left\{\tau_e\left({y_n}^{p^{-m}}\right)\right\}_{n\geq 0},$$
$$\left\{\tau_e\left(S_n(x,y)^{p^{-m}}\right)\right\}_{n\geq 0},\ \left\{\tau_e\left(P_n(x,y)^{p^{-m}}\right)\right\}_{n\geq 0}$$

导出的第 $m+1$ 个 Witt 多项式, $\forall m \geq 0$.

态射性证明 至此, 参考李文威 [12, 定理 10.9.11], 我们来证明 Γ_c 确实是一个环态射.

命题 4.3.2.5 式 *(4.3.2.14)*, 式 *(4.3.2.15)* 是成立的.

证明 我们只对式 *(4.3.2.14)* 作讨论. 式 *(4.3.2.15)* 的情况同理可证. 这里我们需要考虑 $\prod_{n\geq 0}\Re$ 上的 *Witt* 环结构 $\mathcal{W}(\Re)$.