第三次转换 接下来我们进行最后一次等价转换. 这个过程需要依托下面的引理.

引理 4.3.2.3 任取完全环 κ 中的一个元素 x, 记 $x^{p^{-m}}\in\kappa$ 关于模去理想 $\boldsymbol{p}\Re$ 映射 ϕ 的任意一个原像是 $\left[x^{p^{-m}}\right]_\forall$, 则恒成立同余式

$$\tau_e\left(x\right)\equiv\left[x^{p^{-m}}\right]_\forall^{p^m}\mod\boldsymbol{p}^{m+1}\Re,\ \forall 0\le m<\infty.$$

证明 任取一个 $x\in\kappa$. $\forall n\ge 0$, 记 x 的 p^n-次根 $x^{p^{-n}}$ 关于 ϕ 的任一个原像为 $\left[x^{p^{-n}}\right]_1$. 然后再规定 $0\le m\le n$. 由于

$$\phi\left(\left[x^{p^{-n}}\right]_1^{p^{n-m}}\right)=\phi\left(\left[x^{p^{-n}}\right]_1\right)^{p^{n-m}}=\left(x^{p^{-n}}\right)^{p^{n-m}}=x^{p^{-m}}.$$

因此 $\left[x^{p^{-n}}\right]_1^{p^{n-m}}$ 是 $x^{p^{-m}}$ 的一个原像. 任取 $x^{p^{-m}}$ 的一个原像 $\left[x^{p^{-m}}\right]_2$, 由于

$$\phi\left(\left[x^{p^{-m}}\right]_2\right)=x^{p^{-m}}=\phi\left(\left[x^{p^{-n}}\right]_1^{p^{n-m}}\right),$$

因此成立同余式

$$\left[x^{p^{-n}}\right]_1^{p^{n-m}}\equiv\left[x^{p^{-m}}\right]_2\mod\boldsymbol{p}\Re.$$

再根据引理*4.3.1*, 成立

$$\left(\left[x^{p^{-n}}\right]_1^{p^{n-m}}\right)^{p^m}\equiv\left[x^{p^{-m}}\right]_2^{p^m}\mod\boldsymbol{p}^{m+1}\Re,$$

也就是

$$\left[x^{p^{-n}}\right]_1^{p^n}\equiv\left[x^{p^{-m}}\right]_2^{p^m}\mod\boldsymbol{p}^{m+1}\Re,\ \forall n\ge m\ge 0.\tag{4.3.2.13}$$

令式 *(4.3.2.13)* 中的 $n\to\infty$, 即可得

$$\tau_e\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\left[x^{p^{-n}}\right]_1^{p^n}\equiv\left[x^{p^{-m}}\right]_2^{p^m}\mod\boldsymbol{p}^{m+1}\Re,\ \forall 0\le m<\infty.$$

至此, 明所欲证. □

推论 4.3.2.4 任取完全环 κ 中的一个元素 x, 则恒成立同余式

$$\tau_e\left(x\right)\equiv\tau_e\left(x^{p^{-m}}\right)^{p^m}\mod\boldsymbol{p}^{m+1}\Re.$$

证明 取引理*4.3.2.3*中的 $[\cdots]_\forall$ 为 $\tau_e\left(\cdots\right)$ 即可. □

依托推论4.3.2.4, 我们可以直接得到与式 (4.3.2.12a), 式 (4.3.2.12b) 中同余号右边式子的项相关的同余式

$$\begin{aligned}&\tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\equiv\tau_e\left(\left(\left(x_n\right)^{p^{-n}}\right)^{p^{-(m-n)}}\right)^{p^{m-n}}\mod\boldsymbol{p}^{m-n+1}\Re.\\ \Longleftrightarrow\ &\tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\equiv\tau_e\left({x_n}^{p^{-m}}\right)^{p^{m-n}}\mod\boldsymbol{p}^{m-n+1}\Re.\\ \Longleftrightarrow\ &\tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\equiv\tau_e\left({x_n}^{p^{-m}}\right)^{p^{m-n}}\boldsymbol{p}^n\mod\boldsymbol{p}^{m+1}\Re,\ \forall 0\le n\le m.\end{aligned}$$