算法 4.3.2.2

- $\forall \widetilde{x} \in \Re$, 记 $x_0 = \phi(\widetilde{x}) \in \kappa$, 则 $\exists \widetilde{x_1} \in \Re$ 使得 $\widetilde{x} = \tau_e\left({x_0}^{p^{-0}}\right) + \boldsymbol{p}\widetilde{x_1}$.
- 记 $x_1 = \phi(\widetilde{x_1})$, 则 $\exists \widetilde{x_2} \in \Re$, 使得 $\widetilde{x_1} = \tau_e\left({x_1}^{p^{-1}}\right) + \boldsymbol{p}\widetilde{x_2}$.
- …….

无穷次执行算法4.3.2.2可以得到一个收敛式

$$\widetilde{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n \tag{4.3.2.7}$$

同命题3.2.15和命题3.2.16的思想, 我们最终便在 Γ_0 的基础上导出了另一种 $\mathcal{W}(\kappa)$ 到 $\Re$ 的双射形式

$$\Gamma_c: \begin{array}{ccc} \mathcal{W}(\kappa) & \xrightarrow{1:1} & \Re \\ x = (x_n)_{n\geq 0} & \to & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n \end{array}. \tag{4.3.2.8}$$

至此, 我们将研究 Γ_0 是否环态射的注意力转移到研究 Γ_c 是否环态射. 而实际上双射 Γ_c 已经被证明确实是 $\mathcal{W}(\kappa)$ 到 $\Re$ 的一个环态射. 参考李文威 [12, § 10.9], 以下我们对此进行一个系统的说明.

第一步转换 首先, 明确我们的目标是证明 $\forall x := (x_n)$, $y := (y_n) \in \mathcal{W}(\kappa)$, 成立

$$\Gamma_c(x \oplus y) = \Gamma_c(x) + \Gamma_c(y), \tag{4.3.2.9a}$$

$$\Gamma_c(x \odot y) = \Gamma_c(x) \odot \Gamma_c(y). \tag{4.3.2.9b}$$

由 § 4.2 节介绍的 Witt 环运算规则, 令

$$S(x,y) := x \oplus y \in \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n, \cdots; y_0, \cdots, y_n, \cdots] \subseteq \mathcal{W}(\kappa),$$

$$P(x,y) := x \odot y \in \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n, \cdots; y_0, \cdots, y_n, \cdots] \subseteq \mathcal{W}(\kappa).$$

则式 (4.3.2.9) 可进一步地改写为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_e\left(S_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n + \sum_{n=0}^{\infty} \tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n, \tag{4.3.2.10a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_e\left(P_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n. \tag{4.3.2.10b}$$

第二步转换 由于存在环同构

$$H: \begin{array}{ccc} \Re & \xrightarrow{1:1} & \varprojlim_n \Re/\boldsymbol{p}^n\Re \\ x & \to & (x + \boldsymbol{p}^n\Re)_{n\geq 0} \end{array}$$

因此 $\Re$ 中 a, b 的相等关系可以等价转换为 a, b 在 $\varprojlim_n \Re/\boldsymbol{p}^n\Re$ 中的像 $H(a)$, $H(b)$ 的等价关系, 即

$$a = b \in \Re. \iff H(a) = H(b) \in \varprojlim_n \Re/\boldsymbol{p}^n\Re. \tag{4.3.2.11}$$