具体地说, 若 $a=b$, 则有

$$H(a)-H(b)=H(a-b)=H(0)=0,\ \text{即} H(a)=H(b)\,.$$

反过来, 若 $H(a)=H(b)$, 则有

$$H(a-b)=H(a)-H(b)=0.$$

由于一定成立 $H(0)=0$, 而 H 是环同构蕴涵 H 是双射, 因此只能是 $a=b$. 因此式 (4.3.2.11) 成立. 基于此, 我们可将式 (4.3.2.10) 等价地改写为

$$\begin{aligned}
H\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left(S_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\right)&=H\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n+\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\right),\\
H\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left(P_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\right)&=H\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\boldsymbol{\cdot}\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\right).
\end{aligned}$$

又由于 $H(a)$, $H(b)\in\varprojlim_n\Re/\boldsymbol{p}^n\Re$ 是可数无穷序列的形式, $H(a)=H(b)$ 相等, 等价于 $H(a)$, $H(b)$ 每个对应分量都相等, 即有 $\forall m\in\mathbb{Z}_{\geq0}$, 成立

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left(S_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n+\boldsymbol{p}^{m+1}\Re&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n+\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\right)+\boldsymbol{p}^{m+1}\Re,\\
\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left(P_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n+\boldsymbol{p}^{m+1}\Re&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\boldsymbol{\cdot}\sum_{n=0}^{\infty}\tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\right)+\boldsymbol{p}^{m+1}\Re.
\end{aligned}$$

再写成便于处理的模理想 $\boldsymbol{p}^{m+1}\Re$ 同余的形式, 并且约去级数中带 $\boldsymbol{p}^{m+1}$, $\boldsymbol{p}^{m+2}$, $\cdots$ 的高阶项, 即可得到 $\forall m\in\mathbb{Z}_{\geq0}$, 成立

$$\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left(S_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\xlongequal{\bmod \boldsymbol{p}^{m+1}\Re}\left(\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n+\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\right)\tag{4.3.2.12a}$$

$$\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left(P_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\xlongequal{\bmod \boldsymbol{p}^{m+1}\Re}\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left({x_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\boldsymbol{\cdot}\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left({y_n}^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n.\tag{4.3.2.12b}$$

注意这里对于式 (4.3.2.12b) 的形式, 我们没有采用更精细的写法

$$\sum_{n=0}^{m}\tau_e\left(P_n(x,y)^{p^{-n}}\right)\boldsymbol{p}^n\equiv\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{i+j=n}\tau_e\left({x_i}^{p^{-i}}\right)\tau_e\left({y_j}^{p^{-j}}\right)\right)\boldsymbol{p}^n\mod\boldsymbol{p}^{m+1}\Re.$$

后面我们会看到, 式 (4.3.2.12b) 的形式经过变形能够和 $\Re$ 上的 Witt 多项式建立联系, 方便我们进一步地思考和证明.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W}(\kappa) \arrow[r, "\text{双射}\varphi"] & \Re \arrow[r, "\text{同构}"] \arrow[dl, "\text{模}\boldsymbol{p}\Re"'] \arrow[d, "\text{模}\boldsymbol{p}^2\Re"'] \arrow[dr, "\text{模}\boldsymbol{p}^3\Re"] \arrow[drr] & \varprojlim_n \Re/\boldsymbol{p}^n\Re & \ni & (x_n)_{n\geq0} \\
\Re/\boldsymbol{p}\Re & \Re/\boldsymbol{p}^2\Re \arrow[l, "\text{满环态射}\lambda_1"'] & \Re/\boldsymbol{p}^3\Re \arrow[l, "\text{满环态射}\lambda_2"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "\text{满环态射}\lambda_3"'] & \\
\ni & \ni & \ni & & \\
x_0 \arrow[r, dash, "\times"] & x_1 \arrow[r, dash, "\times"] & x_2 \arrow[r, dash, "\times"] & \cdots\cdots \arrow[r, dash] & {} \arrow[uuu, "="']
\end{tikzcd}$$