

# 追逃任务中的近临界优势： 基于任务内统计判定的全量实验综合

ChaseCrit Project

2026-02-06

## 摘要

本文研究二维连续追逃任务中，逃跑者集群“更接近临界”是否带来性能增益。与将无外场相变点直接迁移到任务设置不同，本文采用任务内统计判定：在同一任务中，以  $\chi = N_e \cdot \text{Var}_t(P(t))$  及其辅助指标 ( $\chi_{\text{local}}$ 、 $\tau_{P,AR1}$ 、 $\xi_{\text{fluct}}$ ) 定义相对“近临界”区域。论文综合了全部已完成实验批次（含高样本主扫描、压力对比、噪声路线与早期试验批次）。结果表明：在中等追捕压力下 ( $v_p/v_e \approx 1.0 \sim 1.3$ )，生存率与  $\chi$  通常正相关；在高压 ( $v_p/v_e = 1.4$ ) 下该关系显著减弱。噪声路线中， $w_{\text{align}} = 1.0$  的任务扫描给出强正相关（Pearson 0.824, Spearman 0.965），但 phase 识别峰值并不对应任务最优噪声。结论显示，近临界优势具有明确的场景依赖和外场强度边界。

## 1 引言

群体系统在临界附近常表现出高易感性、长相关尺度与较强扰动响应能力，这使“临界性是否提升任务性能”成为跨物理与生物系统的重要问题 [1, 2, 3]。在追逃对抗中，该问题进一步复杂化：逃跑者需要在协同与灵活之间平衡，而追捕者可能利用可预测性进行压制。

本文关注逃跑者集群，检验以下命题：

1. 任务内部更“近临界”的参数区是否对应更高生存率；
2. 该关系是否随追捕压力变化；
3. 无外场 phase 识别得到的“临界点”能否迁移为任务最优点。

为避免跨场景先验引入偏差，本文采用任务内统计判定并对全部实验批次进行统一综合。

## 2 任务与方法

### 2.1 场景、状态变量与边界映射

环境为二维连续空间  $\Omega = [0, L_x) \times [0, L_y)$ ，离散时间步长为  $\Delta t$ 。逃跑者集合记为  $\mathcal{E}$ （规模  $N_e$ ），追捕者集合记为  $\mathcal{P}$ （规模  $N_p$ ），安全区集合记为  $\mathcal{Z}$ （动态规模，最多  $K_{\text{max}}$  个有效区）。状态变量包括：

- 逃跑者位置/速度  $(x_i(t), v_i(t))$ ,  $i \in \mathcal{E}$ ;
- 追捕者位置/速度  $(y_m(t), u_m(t))$ ,  $m \in \mathcal{P}$ ;
- 安全区位置/速度  $(z_k(t), q_k(t))$ 、容量  $C_k$ 、占用  $O_k(t)$ 、有效标记  $a_k(t)$ 。

边界映射记为  $\mathcal{B}(\cdot)$ :

- 周期边界:  $\mathcal{B}(x) = x \bmod (L_x, L_y)$ ;
- 反射边界: 按  $x^* = \bmod(x, 2L)$  折叠到  $[0, L]$ , 若发生折返则对应速度分量取反。

仿真中每一步先更新安全区, 再更新逃跑者与追捕者, 最后执行捕获与入区判定。

## 2.2 逃跑者运动更新

每步仅对仍存活且未入区个体 (记作  $\mathcal{A}(t)$ ) 更新。对  $i \in \mathcal{A}(t)$ , 定义周期最短位移  $\Delta_{ij}(t)$ 、 $\Delta_{im}^{(p)}(t)$ 、 $\Delta_{ik}^{(z)}(t)$ 。单位化算子记为  $\text{unit}(\cdot)$ 。

邻域对齐与排斥项:

$$d_i^{\text{align}} = \text{unit} \left( \sum_{j \neq i, \|\Delta_{ij}\|^2 \leq r_{\text{nbr}}^2} \text{unit}(v_j) \right), \quad (1)$$

$$d_i^{\text{sep}} = s_{\text{sep}} \cdot \text{unit} \left( - \sum_{j \neq i, \|\Delta_{ij}\|^2 \leq r_{\text{sep}}^2} \frac{\Delta_{ij}}{\max(\|\Delta_{ij}\|^2, \varepsilon)} \right). \quad (2)$$

追捕规避项:

$$d_i^{\text{avoid}} = \text{unit} \left( - \sum_{m, \|\Delta_{im}^{(p)}\|^2 \leq r_{\text{pred}}^2} \frac{\Delta_{im}^{(p)}}{\max(\|\Delta_{im}^{(p)}\|^2, \varepsilon)} \right). \quad (3)$$

目标项: 在可检测有效安全区集合  $\mathcal{Z}_i(t) = \{k : a_k(t) = 1, \|\Delta_{ik}^{(z)}\|^2 \leq r_{\text{detect}}^2\}$  中选最近区  $k^*$ 。若  $\mathcal{Z}_i(t) \neq \emptyset$ ,

$$d_i^{\text{goal}} = \text{unit}(\Delta_{ik^*}^{(z)}), \quad I_i^{\text{goal}} = 1; \quad (4)$$

否则  $I_i^{\text{goal}} = 0$ , 探索方向为当前航向 (若速度近零则随机单位向量)  $d_i^{\text{explore}}$ 。

合成方向采用两种控制模式:

- 传统独立权重模式 (legacy):

$$\tilde{d}_i = w_{\text{align}} d_i^{\text{align}} + w_{\text{avoid}} d_i^{\text{avoid}} + w_{\text{goal}} I_i^{\text{goal}} d_i^{\text{goal}} + w_{\text{explore}} (1 - I_i^{\text{goal}}) d_i^{\text{explore}} + d_i^{\text{sep}}. \quad (5)$$

- 单参数占比模式 (share): 令  $\lambda \in [0, 1]$  表示对齐项占比 (实现中  $\lambda = w_{\text{align}}$ ), 先构造非对齐复合方向

$$d_i^{\text{non}} = \text{unit} \left( w_{\text{avoid}} d_i^{\text{avoid}} + w_{\text{goal}} I_i^{\text{goal}} d_i^{\text{goal}} + w_{\text{explore}} (1 - I_i^{\text{goal}}) d_i^{\text{explore}} + d_i^{\text{sep}} \right), \quad (6)$$

再按

$$\tilde{d}_i = \lambda d_i^{\text{align}} + (1 - \lambda) d_i^{\text{non}}. \quad (7)$$

令  $d_i = \text{unit}(\tilde{d}_i)$ , 并施加角噪声  $\theta_i \sim \mathcal{U}[-\eta, \eta]$  ( $\eta = \text{angle\_noise}$ ):

$$d_i^\eta = \text{unit}(R(\theta_i)d_i). \quad (8)$$

速度采用惯性混合更新:

$$v_i(t+1) = (1 - \alpha)v_i(t) + \alpha v_e d_i^\eta, \quad \alpha = \text{inertia}. \quad (9)$$

位置更新为

$$x_i(t+1) = \mathcal{B}(x_i(t) + v_i(t+1)\Delta t). \quad (10)$$

### 2.3 追捕者更新、捕获与入区规则

追捕者速度上限设为  $v_p = \gamma v_e$  ( $\gamma = v_p/v_e$ )。当前策略为最近邻追逐:

$$j^*(m) = \arg \min_{j \in \mathcal{A}(t)} \|\Delta_{mj}^{(e)}(t)\|^2, \quad u_m(t+1) = v_p \cdot \text{unit}\left(\Delta_{mj^*(m)}^{(e)}(t)\right), \quad (11)$$

$$y_m(t+1) = \mathcal{B}(y_m(t) + u_m(t+1)\Delta t). \quad (12)$$

捕获规则为瞬时捕获: 若存在  $m$  使  $\|x_i - y_m\| \leq r_{\text{cap}}$ , 则逃跑者  $i$  在该步记为 captured。

入区规则按安全区逐个处理: 对有效区  $k$ , 找出  $\|x_i - z_k\| \leq r_{\text{safe}}$  的候选并随机打乱; 按顺序填充容量, 若  $O_k(t) \geq C_k$  则该区立即失效 (逻辑消失)。

### 2.4 安全区 G0 缓慢移动与刷新机制

安全区采用 G0 常速随机游走。每隔  $T_{\text{turn}}$  步, 方向旋转角  $\phi \sim \mathcal{U}[-\phi_{\text{max}}, \phi_{\text{max}}]$ , 随后归一化并乘以常速  $v_z$ ; 位置更新:

$$z_k(t+1) = \mathcal{B}(z_k(t) + q_k(t+1)\Delta t). \quad (13)$$

刷新规则:

- 若当前有效区数为 0, 则强制刷新 1 个安全区;
- 若有效区数  $< K_{\text{max}}$ , 以概率  $p_{\text{spawn}}$  触发随机刷新;
- 反射边界下刷新点从边界采样, 周期边界下从域内均匀采样;
- 刷新点需满足与其他安全区、追捕者 (及障碍, 如启用) 的最小距离约束。

### 2.5 参数固定项与扫描项 (写明 $w_{\text{align}}$ 扫描时其余参数)

表 1 给出本文主结论所用实验族的固定参数与扫描参数。除特别注明外, 未扫描参数均固定为表中数值。

单参数占比路线 (share) 用于后续实验: 固定  $\text{angle\_noise} = 0$ , 扫描  $\lambda = w_{\text{align}} \in [0, 1]$ , 其余权重  $w_{\text{goal}}, w_{\text{avoid}}, w_{\text{explore}}$  固定, 从而避免 “多权重同时竞争” 带来的解释歧义。

表 1: 主要实验族的参数协议（固定项与扫描项）

实验族	固定参数（核心）	扫描参数
E07（任务内 200 seeds）	$N_e = 128, N_p = 2, v_e = 1.0, \text{inertia} = 0.35, r_{\text{nbr}} = 6.0, r_{\text{pred}} = 10.0, r_{\text{detect}} = 4.0, r_{\text{sep}} = 1.25, s_{\text{sep}} = 1.0, w_{\text{goal}} = 1.2, w_{\text{avoid}} = 1.5, w_{\text{explore}} = 0.4, \text{angle\_noise} = 0.12, \text{boundary}=\text{periodic}, K_{\text{max}} = 4, r_{\text{safe}} = 1.0, v_z = 0.1, \text{steps} = 600$	$w_{\text{align}} \in \{0, 0.05, \dots, 1.0\}, v_p/v_e \in \{1.0, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2\}$
E09（压力对比）	与 E07 相同（含 $\text{angle\_noise} = 0.12$ ）	$w_{\text{align}} \in \{0, 0.05, \dots, 1.0\}, v_p/v_e \in \{0.9, 1.3, 1.4\}$
E10/E11（任务噪声）	与 E07 相同, 且 $v_p/v_e = 1.1$ ; E10 固定 $w_{\text{align}} = 0.6$ , E11 固定 $w_{\text{align}} = 1.0$	$\text{angle\_noise} \in \{0, 0.2, \dots, 3.0\}$
E12（phase 噪声识别）	$N_p = 0, K_{\text{max}} = 0, w_{\text{goal}} = w_{\text{avoid}} = w_{\text{explore}} = 0, w_{\text{align}} = 1.0$ , 其余动力学参数同上, $\text{steps} = 1200$	$\text{angle\_noise} \in \{0, 0.2, \dots, 3.0\}$

## 2.6 任务内临界性判定

主判定指标为

$$\chi = N_e \cdot \text{Var}_t(P(t)), \quad (14)$$

其中  $P(t)$  为存活逃跑者速度极化度。辅助指标为  $\chi_{\text{local}} = N_e \cdot \text{Var}(P_{\text{local}})$ 、 $\tau_{P, \text{AR1}} = \frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}$ 、 $\xi_{\text{fluct}}$ （涨落相关长度代理）。本文将“更近临界”定义为同一任务设置内这些统计量的相对升高，而非外部 phase 峰值的直接迁移。

## 2.7 统计协议

每个参数格点采用多随机种子重复，报告均值与 95% CI。相关性分析使用格点均值层面的 Pearson（必要时补充 Spearman）系数。

# 3 实验结果（全量批次综合）

## 3.1 批次总览

为覆盖全部已完成实验，本文将有结构化聚合表（可计算统计量）的批次记为 E 系列，将仅用于烟雾测试或流程验证、未保留完整聚合表的批次记为 P 系列。

表 2: E 系列（可量化）实验批次总览与关键统计

ID	实验类型	seeds/格 点	steps	最优 $sr$	safe	safe- $\chi$ 关系
E01	固定追捕者扫描（初 版）	10	600	$sr$	=	指标版本不含 $\chi$
				1.00, $w$	=	
				0.30,		
				0.3055		
E02	固定追捕者扫描（扩 展）	15	600	$sr$	=	平均相关 0.120
				1.00, $w$	=	
				0.65,		
				0.4214		
E03	固定追捕者扫描（50 seeds）	50	600	$sr$	=	平均相关 0.372
				1.00, $w$	=	
				0.35,		
				0.3966		
E04	固定追捕者扫描（50 seeds, 指标增强）	50	600	$sr$	=	平均相关 0.372
				1.00, $w$	=	
				0.35,		
				0.3966		
E05	固定追捕者扫描（100 seeds, $sr \in \{1.1, 1.2\}$ ）	100	600	$sr$	=	平均相关 0.399
				1.10, $w$	=	
				0.70,		
				0.3725		
E06	任务内 $w_{\text{align}}$ 扫描 （中样本）	80	600	$sr$	=	平均相关 0.401
				1.00, $w$	=	
				0.95,		
				0.3900		
E07	任务内 $w_{\text{align}}$ 扫描 （高样本）	200	600	$sr$	=	平均相关 0.479
				1.00, $w$	=	
				0.35,		
				0.3893		
E08	压力对比 （0.9/1.3/1.4）	120	600	$sr$	=	平均相关 0.193
				0.90, $w$	=	
				0.55,		
				0.4092		

ID	实验类型	seeds/格 点	steps	最优 safe	safe- $\chi$ 关系
E09	压力对比（ $sr = 1.4$ 扩样）	120/240	600	$sr = 0.90, w = 0.55, 0.4092$	平均相关 0.225
E10	任务噪声扫描（ $w = 0.6$ ）	100	600	noise=0.00, 0.3567	Pearson 0.814
E11	任务噪声扫描（ $w = 1.0$ ）	100	600	noise=0.20, 0.3387	Pearson 0.824
E12	Phase 噪声识别（无追捕/无安全区）	100	1200	safe 不适用	$\chi$ 峰值在 noise=1.80

表 3: P 系列（流程/烟雾）批次及其作用

ID	批次类型	是否量化汇总	作用
P01	Phase smoke	否	验证 phase-sweep 管线与绘图流程可用。
P02	Phase baseline	否	早期 phase 识别趋势观察。
P03	Phase wide	否	扩大噪声范围后的早期可视化验证。
P04	Phase wider	否（仅图）	后续高样本 phase 扫描前的参数摸底。
P05	Task noise smoke	否	验证任务噪声扫描管线与散点图生成。
P06	Task noise early ( $w = 1.0$ )	否	任务噪声路线早期趋势勘探。

### 3.2 早期到高样本的演化结果（E01–E06）

E01–E05 展示了固定追捕者数量扫描从低样本到高样本、从单指标到多指标的演化过程。E01 中尚未纳入  $\chi$  指标；E02 开始引入  $\chi$ ，并首次在格点均值层面观察到正相关（平均相关 0.120）；E03/E04 在 50 seeds 下将相关提升到 0.372；E05 在 100 seeds、 $v_p/v_e \in \{1.1, 1.2\}$  下维持正相关（0.399）。

E06 作为任务内  $w_{\text{align}}$  路线的中样本版本（80 seeds），与 E07（200 seeds）在趋势方向上保持一致：safe 与  $\chi$  的整体耦合为正，但最优  $w_{\text{align}}$  呈带状而非尖峰点。

### 3.3 $w_{\text{align}}$ 主线与压力对比

E07 与 E09 构成本文主结果骨架。E07（高样本）显示在  $v_p/v_e = 1.0 \sim 1.2$  范围内，safe 与  $\chi$  整体正相关；E09 显示该关系在高压端（ $v_p/v_e = 1.4$ ）显著减弱。

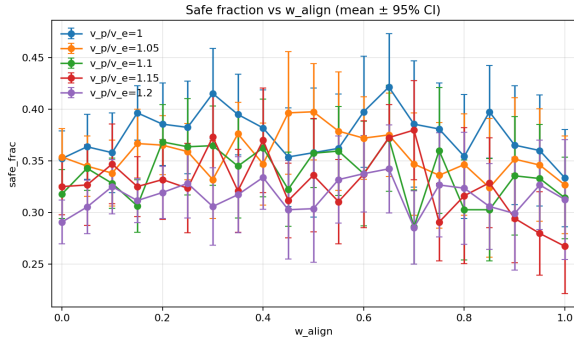
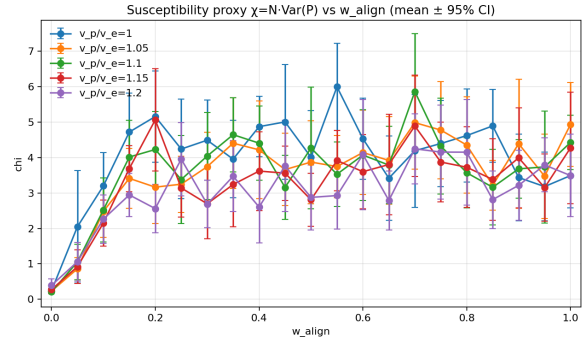
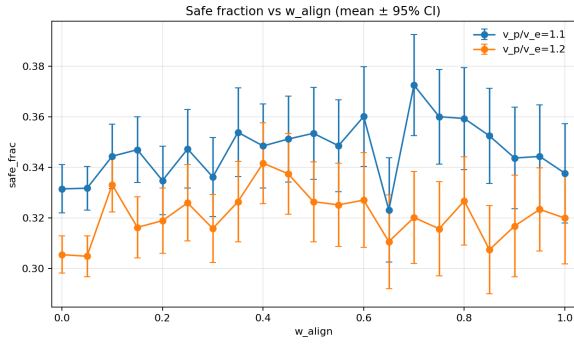
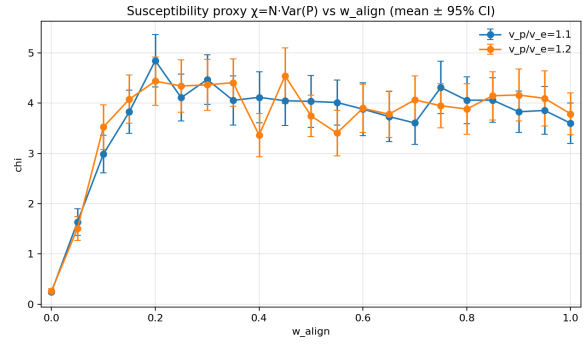
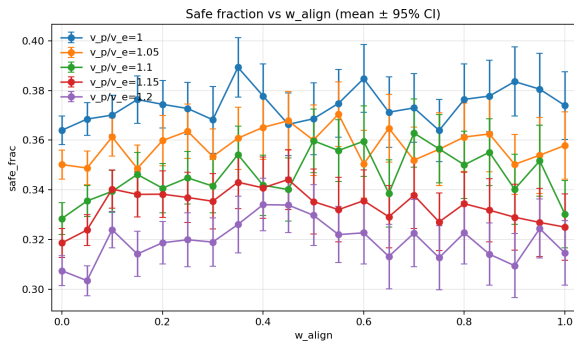
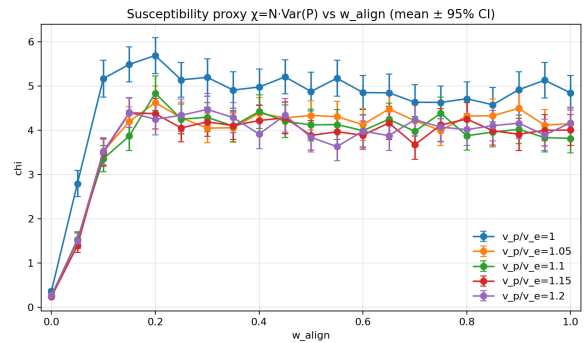
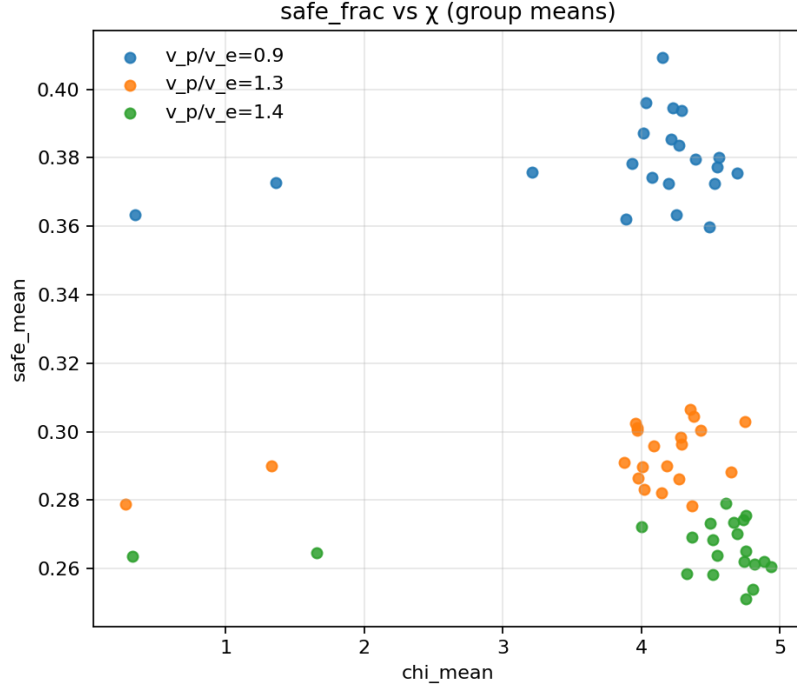
(a) E02: safe vs  $w_{\text{align}}$ (b) E02:  $\chi$  vs  $w_{\text{align}}$ 图 1: 早期固定追捕者扫描中引入  $\chi$  后的趋势(a) E05: safe vs  $w_{\text{align}}$ (b) E05:  $\chi$  vs  $w_{\text{align}}$ 

图 2: 高样本固定追捕者扫描下的主趋势延续

(a) E07: safe vs  $w_{\text{align}}$ (b) E07:  $\chi$  vs  $w_{\text{align}}$ 图 3: 高样本任务内  $w_{\text{align}}$  扫描结果

图 4: E09: 压力对比中的 safe- $\chi$  关系

### 3.4 E09 离散度诊断

在 E09 合并散点中,  $\chi \approx 4.5$  区域存在明显纵向离散。按压力分层后可见该离散主要来自  $v_p/v_e$  层间基线差异: 相同  $\chi$  水平下,  $v_p/v_e = 0.9$  的 safe 系统性高于 1.3 与 1.4。在  $\chi \in [4.2, 4.8]$  区间, safe 方差约 96.7% 可由层间差异解释, 说明该现象主要是条件混合效应而非单一指标噪声。

若不做任何聚合、直接在单次运行层面考察  $(\chi, \text{safe\_frac})$ , 相关性较弱: E09 全部原始点的 Pearson 相关约为  $-0.016$ , 且各压力层分别约为  $-0.025$  ( $v_p/v_e = 0.9$ )、 $0.051$  (1.3) 与  $0.018$  (1.4)。因此, 本文对“近临界优势”的讨论以参数格点统计量 (多 seed 汇总) 为主, 并将原始点云解释为高随机性背景下的微观离散。

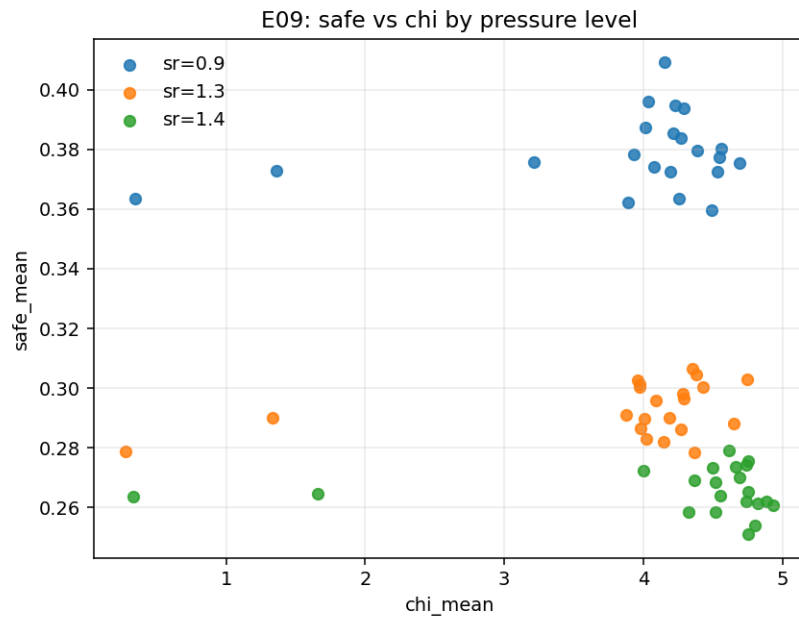
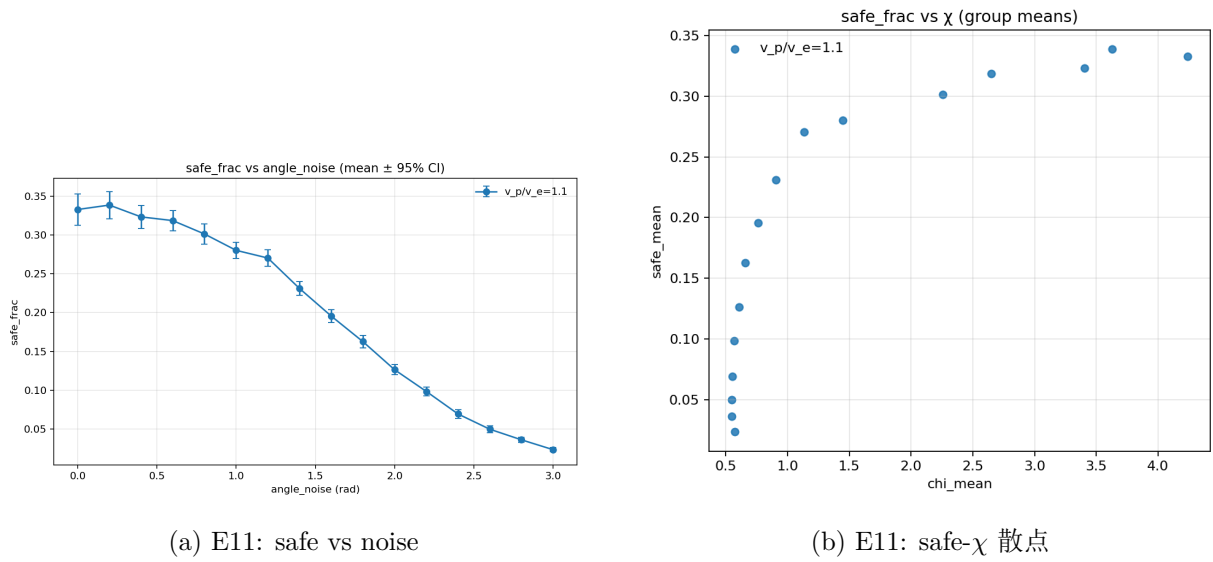
### 3.5 噪声路线全量结果（关键对照）

E10 与 E11 均显示任务噪声扫描中 safe- $\chi$  强正相关。尤其 E11 ( $w_{\text{align}} = 1.0$ ) 给出 Pearson 0.824、Spearman 0.965。E12 则表明无外场 phase 设置中  $\chi$  峰值位于 noise=1.80, 与任务最优噪声不一致。

表 4: 噪声路线关键统计（修正后的峰值位置与数值）

ID	设置	seeds	noise@safe <sub>max</sub>	safe <sub>max</sub>	noise@ $\chi_{\text{max}}$	$\chi_{\text{max}}$	corr(safe, $\chi$ )
E10	Task, $w = 0.6$	100	0.00	0.3567	0.00	4.2812	0.814
E11	Task, $w = 1.0$	100	0.20	0.3387	0.00	4.2378	0.824
E12	Phase	100	—	—	1.80	13.2085	—



图 5: E09: 按压力分层后的 safe- $\chi$  散点

(a) E11: safe vs noise

(b) E11: safe- $\chi$  散点图 6: E11 ( $w = 1.0$ ) 中观察到的强正相关

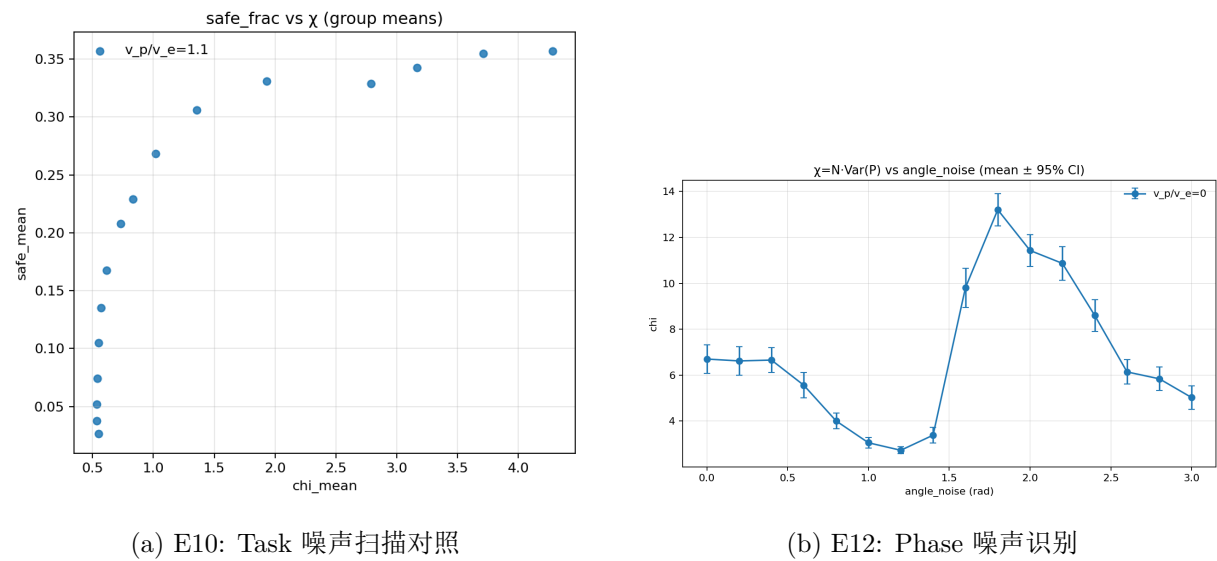


图 7: 任务噪声与 phase 噪声结果的并列比较

### 3.6 全量批次图表索引

为确保正文覆盖全部批次，表 5 给出 E/P 系列对应的代表性图表类别。E 系列均对应完整趋势图与散点图；P 系列用于流程与绘图链路验证，其图表仅用于方法学完备性说明，不参与主要定量结论。

表 5: 全量批次代表性图表索引（按实验编号）

实验编号	主要图表类别	在本文中的作用
E01–E05	$w_{\text{align}}$ 趋势图与热图	固定追捕者扫描基线与扩样
E06–E07	任务内 $w_{\text{align}}$ 趋势与散点	近临界主线证据（中样本/高样本）
E08–E09	压力分层趋势与散点	外场强度对耦合关系的调制
E10–E11	噪声趋势与 safe- $\chi$ 散点	任务噪声路线与强正相关检验
E12	phase 噪声趋势图	任务判定与 phase 判定分离
P01–P06	简化趋势图（烟雾/流程）	管线连通性与早期参数摸底

## 4 讨论

### 4.1 近临界优势的条件性

E07/E09/E10/E11/E12 的综合结果支持一个一致结论：近临界优势并非在所有外场强度下成立。中等压力下， $\chi$  增大通常伴随更高生存率；高压下（E09 的  $v_p/v_e = 1.4$ ）该耦合显著弱化。

## 4.2 任务内判定与 phase 判定的分离

E12 的峰值噪声 (1.80) 并未在 E10/E11 中转化为任务最优噪声。该现象说明“无外场相变识别”与“有外场任务最优”是两个不同层次的问题，应避免直接等同。

## 4.3 关于“低噪声高 $\chi$ ”的解释一致性

在 E10/E11 中，低噪声区域同时呈现更高  $\chi$  与更高生存率。若判定标准限定为任务内统计表现，则该区域可被解释为“更接近任务内近临界区”，并不与本文框架矛盾。本文强调的限制仅在于：该“任务内近临界”不应被误读为“无外场 phase 临界点已迁移为任务最优点”。

## 4.4 E09 中高 $\chi$ 区域离散度的来源

E09 的 safe- $\chi$  散点在  $\chi \approx 4.5$  附近出现较大纵向离散。补充分层分析显示，该离散主要由不同压力层 ( $v_p/v_e = 0.9, 1.3, 1.4$ ) 混合造成：在  $\chi \in [4.2, 4.8]$  区间内，safe 方差中约 96.7% 来自压力层间差异。相应地，固定压力层后离散明显收敛。

基于原始运行数据的分层 bootstrap 进一步表明，这一现象并非“样本量不足”的主要结果： $v_p/v_e = 0.9$  与 1.3 下  $\text{corr}(\text{safe}, \chi)$  的 95% 区间保持正值，而  $v_p/v_e = 1.4$  下相关接近零且区间跨零。这支持“高压力下  $\chi$  与任务绩效解耦”的机制解释。与此同时，单次运行层面的原始散点相关接近零，提示该任务中存在较强轨迹级随机性；参数层结论应依赖多 seed 聚合统计而非单点云线性拟合。

## 4.5 跨批次一致性

从 E01 到 E11，随着样本量上升和指标增强，核心趋势保持一致：中间参数带通常优于极端参数带；高涨落代理对性能的解释力随场景压力变化而变化。

## 4.6 局限

现有追捕策略主要是近邻追逐，尚未系统引入预测拦截与协作分工；此外，障碍与反射边界下的高样本复验仍需补齐。

# 5 结论

本文以任务内统计判定为核心，综合了全部已完成实验批次并给出统一结论：

1. 近临界与性能提升之间存在可重复的正耦合，但具有明确条件性；
2. 该耦合在中等追捕压力下更明显，在高压力下可能失效；
3. 无外场 phase 峰值不能直接迁移为任务最优参数。

下一步工作包括：细化  $v_p/v_e = 1.3 \sim 1.5$  阈值区间、引入预测拦截/协作追捕策略、并在反射边界与障碍场景进行高样本稳健性复验。

## 复现说明

本文所有结论均来自统一代码库下的批处理实验。正文通过实验编号（E/P）给出完整批次覆盖，并在表 2 与表 3 中明确各批次样本规模、目的与关键统计。读者可直接根据实验编号复核对应图表与统计结论。

## 参考文献

- [1] Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, Cohen I, Shochet O. Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226–1229.
- [2] Chaté H, Ginelli F, Grégoire G, Raynaud F. Collective motion of self-propelled particles interacting without cohesion. *Physical Review E*, 2008, 77: 046113.
- [3] Mora T, Bialek W. Are Biological Systems Poised at Criticality? *Journal of Statistical Physics*, 2011, 144: 268–302.
- [4] Sumpter D J T. *Collective Animal Behavior*. Princeton University Press, 2010.