

南京大學

研究生畢業論文

(申請碩士學位)

南京大學

論文題目: 人工神經網絡的範疇解釋及其應用

作者: 武偉

專業: 計算數學

研究方向: 範疇理論及其應用

指導教師: 丁南慶 教授

二〇一六年五月一日

学 号: MG1321022

论文答辩日期: 年 月 日

指 导 教 师: (签字)

目 录

Contents

中文摘要	1
英文摘要	2
人工神经网络的范畴解释及其应用	3
1 人工神经网络.....	3
1.1 神经网络与人工神经网络	3
1.2 几种典型的神经网络	4
1.2.1 自适应共振网络-ART	4
1.2.2 多层感知机-MLP	5
1.2.3 卷积神经网络-CNN	6
1.3 人工神经网络的可靠性解释.....	7
2 人工神经网络中范畴的构建	8
2.1 知识范畴 $Know$	8
3 公式和符号	9
4 引理	11

5	对高波数散射问题中的不同边界条件的误差分析	14
6	预渐进误差分析	16
6.1	一些引理	16
6.2	L^2 投影算子、椭圆投影算子和离散Sobolev范数	17
6.3	预渐进误差分析	18
7	数值实验	23
8	总结与展望	23
	参考文献	24
	致谢	25

毕业论文题目：人工神经网络的范畴解释及其应用

计算数学 专业 2013 级硕士生姓名：王伟

指导教师（姓名、职称）：丁南庆教授

本文主要是人工神经网络的范畴解释及其应用.....

关键词：人工神经网络，范畴，MLP，CNN，ART1

THESIS:

the categorical explanation and application of artificial neural networks

SPECIALIZATION: computational mathematics

POSTGRADUATE: wei Wu

MENTOR: Professor nanqing Ding

In this thesis, we apply category theory to explain how can neural networks store information.....

Key Words: artificial neural network, category, MLP, CNN, ART1

人工神经网络的范畴解释及其应用

§1 人工神经网络

§1.1 神经网络与人工神经网络

生物神经网络主要由神经元为主要单元，神经元是大脑处理信息的重要部分。一个神经元的结构如图1所示，其最主要的部分为末梢作为输入和输出的树突和用于传输信号的轴突。当事件发生时信息以电信号的形式在树突上扩布并被整合，电信号在轴突处加以累计，当超过一定的阈值时突破轴突进入作为输出的树突。数十亿个神经元连接成的复杂网络构成了大脑的神经系统。

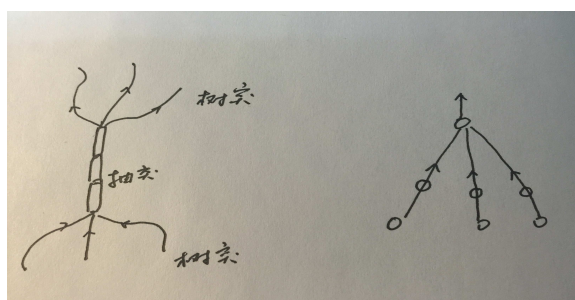


图 1

利用计算机可以模拟这样的神经结构，人工神经网络也由人工神经元（下面简称为神经元）构成，其中最基本的结构如图1所示，以神经元 m 为研究对象，其中 $n_k (k = 1, 2, 3)$ 为输入端相连的神经元，每个提供的电流为 $a_k (k = 1, 2, 3)$ ，邻接边上有权重参数 $w_k (k = 1, 2, 3)$ ，在所有的输入之后有激活函数 $\sigma(\cdot)$ ，则其输出的生物电流为

$$b = \sigma\left(\sum_{k=1}^3 a_k w_k\right) \quad (1.1)$$

其中的 $\sigma(x)$ 常取作取值在 $(0,1)$ 之间的sigmoid函数

$$\text{sigma}(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (1.2)$$

这样的结构叫做感知机，一个人工神经网络通常由若干的感知机构成不同的复杂结构。

§1.2 几种典型的神经网络

人工神经网络的根据不同的任务目标所设计的网络结构种类繁多，下面只介绍本文所需要的三种典型人工神经网络

§1.2.1 自适应共振网络-ART

[4]是人脑的自适应共振理论的基础工作，它揭示了人脑神经元的一种简化的组织形式。这种神经元模型具有长期记忆和新颖物体学习的平衡性，并且能够在线更新知识体系。ART1是自适应共振理论对应的最简单的网络结构，如图2所示

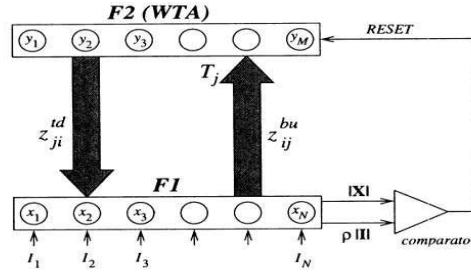


图 2

F_1 称为输入层， F_2 称为隐藏层。连接 x_i 和 y_j 的上行和下行权重分别为 z_{ij}^{bu} 和 z_{ji}^{td} ，它们主要负责存储中期记忆，不同之处在于 z_{ij}^{bu} 取 $[0,1]$ 之间的实值而 z_{ji}^{td} 只在0和1两个值中取。当 F_1 层的0、1二值激活为 $I_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 时， F_2 层的预激活量为

$$T_j = \sum_{i=1}^N z_{ij}^{bu} I_i, j = 1, 2, \dots, M \quad (1.3)$$

F_2 层的激活向量为

$$\begin{cases} y_J = 1 & \text{if } T_J = \max_j T_j \\ y_{j \neq J} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

F_2 层对 F_1 层的回馈量为

$$V_i = \sum_{j=1}^M z_{ji}^{td} y_j = z_{Ji}^{td}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.5)$$

门限系统用于控制系统的重启，它首先计算 F_1 层的匹配向量

$$x_i = V_i I_i \quad \text{or} \quad X = V \cap I = z_J^{td} \cap I \quad (1.6)$$

如果 $\rho|I| \leq |I \cap z_j^{td}|$ 则从 $y_j (j = 1, 2, \dots, M)$ 中重新选择合适的代表元。在上式中 ρ 是预先确定的 $[0,1]$ 之间的阈值，范数取 l_1 范数。整个过程对应的流程图如下图3，其中不加解释地包括了参数 z_j^{td} 和 z_j^{bu} 的更新步骤。ART1网络常用于01序列化特征的聚类。其扩

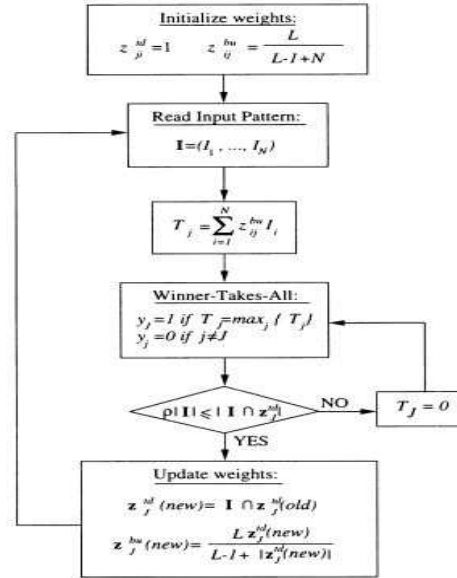


图 3

展的网络Fuzzy ART1可用于分类的任务。

§1.2.2 多层感知机-MLP

多层感知机是感知机的多层复合，以下图4的3-4-3 MLP为例，其中 x_i, y_j, z_k 分别是三层的节点， $w_{ij}^{(1)}, w_{ij}^{(2)}, b^{(1)}, b^{(2)}$ 分别是第一二层和第二三层之间的权重参数。其前

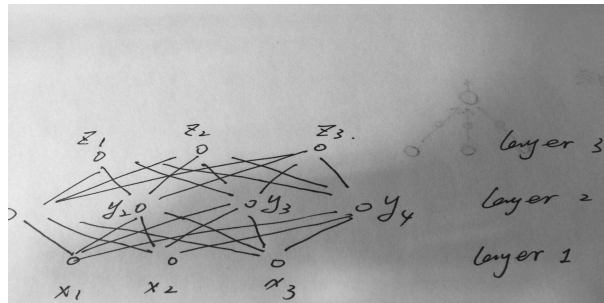


图 4

向传播过程可表示为

$$\begin{cases} y_j = \sigma(\sum_{i=1}^3 w_{ij}^{(1)} x_i + b^{(1)}) & j = 1, 2, 3, 4 \\ z_k = \sigma(\sum_{j=1}^2 w_{kj}^{(2)} y_j + b^{(2)}) & k = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.7)$$

其中的 σ 为sigmoid函数。其参数的训练过程通常采用BP 算法。MLP网络的优势在于网络收敛快速并且可以很容易拓展为深度的网络，其缺点是网络的参数过多很容易造成数据的过拟合。

§1.2.3 卷积神经网络-CNN

在机器视觉领域，一个应用更广泛的网络结构称为卷积神经网络。它由一些卷积层和降采样层组合而成。

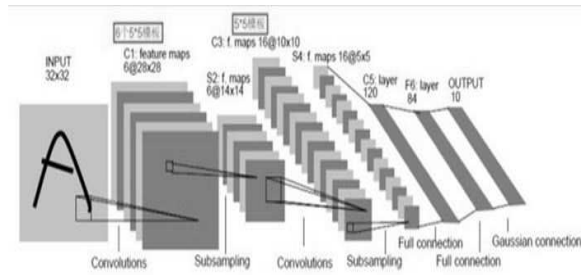


图 5

卷积 (Convolution) 层由每一层的特征图和带参数的卷积核做二维卷积构成。记其中的特征图是 $w \times h$ 尺寸的 $X_{w,h}$ ，卷积核是 $m \times n$ 尺寸的 $K_{m,n}$ 。 $X(w_1 : w_2, h_1 : h_2)$ 是 $X_{w,h}$ 的子矩阵当 $1 \leq w_1 \leq w_2 \leq w$ 且 $1 \leq h_1 \leq h_2 \leq h$ 。当 $X_{m,n}$ 是 $m \times n$ 的特征图时二维卷积可表示为

$$X_{m,n} * K_{m,n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} k_{m-i, n-j} \quad (1.8)$$

更一般的情况下当 $X_{w,h}$ 是 $w \times h$ 的特征图时二维卷积可表示为

$$X_{w,h} * K_{m,n} = \begin{pmatrix} X(1:m, 1:n) * K & \dots & X(w-m+1:m, 1:n) * K \\ \dots & \dots & \dots \\ X(1:m, h-n+1:h) * K & \dots & X(w-m+1:m, h-n+1:h) * K \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

降采样 (pooling) 层在特征图的某一个子矩阵中取平均值或最大值。

一个典型的CNN网络是LeNet5, 其网络结构如下图5所示。可以看出CNN实际上是MLP网络的一种特例, 区别在于: 1、CNN把MLP中每一层一维的特征向量重排成特征图。2、和MLP中每一层的每一个节点都和相邻层的每个节点存在连接不同, CNN中每层的节点只和相邻层中某个领域中的节点存在连接。CNN网络的结构决定了它对图像的处理具有先天的优势, 事实上在多个图像分类检测任务中CNN网络已经超过了人眼的正确率。

§1.3 人工神经网络的可靠性解释

长久以来人工神经网络都缺乏一个很好的理论解释, 它被看做“黑盒”分类器或特征提取工具在工程领域得到了广泛的应用, 却缺乏一个好的理论解释。一种普遍的观点是从数值计算的角度考虑。设 A 是一个人工神经网络的结构, w 是其中的一些权重参数, θ 是另外一些超参数, 则神经网络就是一个由 (A, w, θ) 构成的高度非线性的系统, 其中的参数个数巨大, 在定义了损失函数 $L(A, w, \theta)$, 可以将神经网络的训练问题归结于固定网络结构 A 下的一个非凸优化问题

$$C = \arg \max_{w, \theta} (L(A, w, \theta)) \quad (1.10)$$

通常使用最速下降等一阶算法求解, 这个非凸优化如何得到一个可靠的非局部最优解的问题解决得益于以下两个方面: 1、近几年GPU芯片性能的飞跃和计算机存储数据的累积带来数据量的提升, 使得最速下降法求解时可以采用一个非常小的步长。2、一些由物理学启发的学习率的设定技巧带来了一定的收敛性的可靠结果。

从数值计算的角度, 可以说解决了固定网络结构 A 下的人工神经网络的训练问题。但是, 仍然存在几个重要的问题: 1、人工神经网络为什么会有超越一般算法的效果, 能否从数学的角度解释它的知识存储和传递。2、如何更好地设计神经网络以达到更好地性能, 能否从数学的角度给予解决方案。

在这里我们将利用范畴论的工具来将知识体系范畴和神经网络范畴统一起来, 给出人工神经网络一个范畴论的解释。另外, 将从范畴论的角度指导人工神经网络的改造。最后, 通过几个matlab的仿真实验来证明范畴解释方法的可靠性以及改进后的神经网络的优越性。M.J.Healy在[2][3]中做了很多相关的工作, 这里会在他的基础上: 1、完善人工神经网络范畴解释构造的过程和一些省去的证明。2、增加一些新的理论内

容。3、对CNN和MLP进行范畴论解释下的对比分析。4、增加几个有说服力的仿真实验。

§2 人工神经网络中范畴的构建

在这个部分，首先会构造出知识范畴 $Know$ 和神经网络范畴 $Neur$ 。随后为了解释神经网络对知识的存储的表达能力，定义了这两个范畴之间的函子。最后借用范畴中余极限的概念给出人工神经网络层次结构的理论基础。

§2.1 知识范畴 $Know$

定义 2.1 一个符号系统由下面几部分组成：

1. 一个符号的集合 S
2. 运算的三元组 $O = \langle C, F, P \rangle$ ，其中
 C 是常数符号的集合
 F 是函数的集合
 P 是预测符号的集合（一般为布尔值）

定义 2.2 一个符号系统映射从一个符号系统映到另一个符号系统，把符号集合映到符号集合，把运算映到运算。

定义 2.3 以符号系统为对象，以符号系统映射作为态射构成符号系统范畴 $Sign$ ，其中态射的合成是两个映射的合成。

定义 2.4 一个声明由以下两部分组成：

1. 一个符号系统 $Sig = \langle S, O \rangle$
2. 一个符号系统 Sig 上的公理集合 Ax

定义 2.5 给定两个声明 $\langle Sig1, Ax1 \rangle$ 和 $\langle Sig2, Ax2 \rangle$ ，则两个符号系统 $Sig1$ 和 $Sig2$ 之间的映射称为声明映射当且仅当：

$$\forall a \in Ax1, (Ax2 \vdash M(a)) \quad (2.1)$$

即每一个 $Ax1$ 中的公理，通过 M 的翻译之后都可以证明服从 $Ax2$ 中的公理，可以看出 $Ax2$ 是更强的公理。

定义 2.6 以声明为对象, 以声明映射作为态射构成知识范畴 \mathbf{Know} , 其中态射的合成是两个声明映射的合成。

$$-\Delta u - k^2 u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - iku = g \quad \text{on } \Gamma, \quad (2.3)$$

$$-\Delta u - k^2 u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - iku + \frac{1}{2R}u = g \quad \text{on } \Gamma, \quad (2.5)$$

方程(2.2)–(2.3)是高波数声波散射问题中常见的方程。边界条件(2.3)是对反射波在无穷远处趋近于零的近似。方程(2.4)–(2.5)是对反射波在无穷远处趋近于零的更精细的近似。本文对方程(2.4)–(2.5) 进行预渐进误差分析, 以减少污染项。

§3 公式和符号

Ω 为圆点在 $(0, 0)$ 半径为 R 的圆。 Γ 为 Ω 的边界, 即 $\partial\Omega$ 。 $i := \sqrt{-1}$ 。 k 为波数。通篇中, C 用来标记与 h, k, f, g 无关的正常数。我们用记号 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$ 来分别表示 $A \leq CB$ 和 $B \geq CA$ 。 $A \approx B$ 是 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$ 的缩写。因为考虑的是高波数问题, 所以假设 $k \gg 1$, 且是个定值。 $p = O(1)$ 也是个定值。

$(\cdot, \cdot)_\Omega$ 表示 Ω 上的 L^2 内积。 $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ 表示 Γ 上的 L^2 内积。我们用如下缩写: $\|\cdot\|_j := \|\cdot\|_{H^j(\Omega)}$ 和 $|\cdot|_j := |\cdot|_{H^j(\Omega)}$ 。

$V_h := \left\{ v_h \in H^1(\Omega) : v_h|_K \circ F_K \in \mathcal{P}_p(\hat{K}) \ \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$, 即 V_h 是 Ω 上的 p 阶分片多项式空间, 其中, \mathcal{T}_h 是 Ω 的一致三角剖分, $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ 。 \hat{K} 是三角形 K 的参考单元, F_K 是从 \hat{K} 到 K 的映射, $\mathcal{P}_p(\hat{K})$ 是 \hat{K} 上的所有次数不超过 p 的多项式的集合。

\mathcal{E}_h^I 是 \mathcal{T}_h 的所有的内部边(面)的集合。对于每一个 $e = \partial K \cap \partial K' \in \mathcal{E}_h^I$, 令 n_e 为指向 e 的单位法向量, 定义 v 在 e 上的跳量为 $[v]|_e := v|_{K'} - v|_K$ 。

记 $a(u, v) := (\nabla u, \nabla v), \forall u, v \in H^1(\Omega)$ 。则问题(2.4)–(2.5)的变分形式为:

$$a(u, v) - k^2(u, v) - ik \langle u, v \rangle + \frac{1}{2R} \langle u, v \rangle = (f, v) + \langle g, v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (3.1)$$

我们定义能量空间 V 和在 $V \times V$ 上的双线性形式 $a_\gamma(\cdot, \cdot)$ 如下:

$$V := H^1(\Omega) \cap \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H^{p+1}(K),$$

$$a_\gamma(u, v) := a(u, v) + J(u, v) \quad \forall u, v \in V, \quad (3.2)$$

$$J(u, v) := \sum_{j=1}^p \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I} \gamma_{j,e} h_e^{2j-1} \left\langle \left[\frac{\partial^j u}{\partial n_e^j} \right], \left[\frac{\partial^j v}{\partial n_e^j} \right] \right\rangle_e, \quad (3.3)$$

其中 $\gamma_{j,e}, e \in \mathcal{E}_h^I$ 是拥有非负虚部的惩罚因子。

CIP-FEM 如下定义: 找到 $u_h \in V_h$ 使得

$$a_\gamma(u_h, v_h) - k^2(u_h, v_h) - \mathbf{i}k \langle u_h, v_h \rangle + \frac{1}{2R} \langle u_h, v_h \rangle = (f, v_h) + \langle g, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.4)$$

显然如果 $u \in H^{p+1}(\Omega), v \in V$ 有 $J(u, v) = 0$. 因此如果 $u \in H^{p+1}(\Omega)$ 是(2.4)–(2.5) 的解, 那么有

$$a_\gamma(u, v_h) - k^2(u, v_h) - \mathbf{i}k \langle u, v_h \rangle + \frac{1}{2R} \langle u, v_h \rangle = (f, v_h) + \langle g, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

我们在 V 上定义如下范数:

$$|v|_{1,\gamma} := \left(\|\nabla v\|_0^2 + \sum_{j=1}^p \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I} |\gamma_{j,e}| h_e^{2j-1} \left\| \left[\frac{\partial^j v}{\partial n_e^j} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.5)$$

$$\|v\|_{1,\gamma} := (|v|_{1,\gamma}^2 + \|v\|_0^2)^{1/2}, \quad (3.6)$$

因为精确解不在 V 中, 我们定义如下范数来衡量离散误差:

$$E_\gamma(v, v_h) := \left(\|v - v_h\|_1^2 + \sum_{j=1}^p \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I} |\gamma_{j,e}| h_e^{2j-1} \left\| \left[\frac{\partial^j v_h}{\partial n_e^j} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.7)$$

$$\mathbb{E}_\gamma(v, v_h) := (E_\gamma(v, v_h)^2 + k^2 \|v - v_h\|_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H^1(\Omega), v_h \in V_h. \quad (3.8)$$

以下章节中如果没有明确给出证明也没有给出证明的参考文献的话, 证明细节都见[5].

§4 引理

引理 4.1 令 $\alpha(x) := x - x_\Omega$. 有

$$d \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\operatorname{Re}(v, \alpha \cdot \nabla v) = \int_{\partial\Omega} \alpha \cdot n |v|^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (4.1)$$

$$(d-2) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\operatorname{Re}(\nabla v, \nabla(\alpha \cdot \nabla v)) = \int_{\partial\Omega} \alpha \cdot n |\nabla v|^2, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \quad (4.2)$$

上述恒等式也称为 *Rellich* 恒等式。

证明 证明见 [7]

引理 4.2 散射问题 (2.4)–(2.5) 的解满足

$$\|u\|_{H^j(\Omega)} \lesssim k^{j-1} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}), \quad j = 0, 1, \quad (4.3)$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \lesssim k (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (4.4)$$

证明 在变分公式 (3.1) 中令 $v = u$, 并取实部得:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2R} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\leq |(f, u) + \langle g, u \rangle| \\ &\lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|u\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

取虚部得:

$$\begin{aligned} k \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|u\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2k} \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

从而

$$k \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{k} \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (4.5)$$

于是

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{k} \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (4.6)$$

其次, 在 (3.1) 中令 $v = \alpha \cdot \nabla u$, 并取实部得

$$2\operatorname{Re}(\nabla u, \nabla(\alpha \cdot \nabla u)) - 2k^2 \operatorname{Re}(u, \alpha \cdot \nabla u) - 2k \operatorname{Im} \langle u, \alpha \cdot \nabla u \rangle = 2\operatorname{Re}((f, \alpha \cdot \nabla u) + \langle g, \alpha \cdot \nabla u \rangle).$$

由(4.1)和(4.2)及上式可得:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \alpha \cdot n |\nabla u|^2 - (d-2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2 \int_{\Omega} \alpha \cdot n |u|^2 + dk^2 \|u\|_{L^2(\Omega)} - 2k \operatorname{Im} \langle u, \alpha \cdot \nabla u \rangle \\ = 2\operatorname{Re}((f, \alpha \cdot \nabla u) + \langle g, \alpha \cdot \nabla u \rangle). \end{aligned}$$

从而由(4.5)和(4.6)得:

$$\begin{aligned} k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= - \int_{\Gamma} \alpha \cdot n |\nabla u|^2 - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (d-1)(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\quad + k^2 \int_{\Omega} \alpha \cdot n |u|^2 + 2k \operatorname{Im} \langle u, \alpha \cdot \nabla u \rangle + 2\operatorname{Re}((f, \alpha \cdot \nabla u) + \langle g, \alpha \cdot \nabla u \rangle) \\ &\leq -R \int_{\Gamma} |\nabla u|^2 - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (d-1)(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\quad + Ck^2 \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + Ck \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + Ck^2 \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\leq Ck \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\leq \frac{k^2}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

故

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \frac{1}{k} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}) \quad (4.7)$$

即引理的结论对 $j=0$ 成立, 带入得 $j=1$ 也成立。

最后, 由椭圆方程的正则性理论, 可得:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega)} &\lesssim \|(1+k^2)u + f\|_{L^2(\Omega)} + \left\| g + iku - \frac{u}{2R} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\lesssim k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + k \|u\|_{H^1(\Omega)} \\ &\lesssim k(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \end{aligned}$$

推论 4.1 易得:

$$k^2 \|u\|_0 + k \|u\|_1 + \|u\|_2 \lesssim k(\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (4.8)$$

引理 4.3 Ω 是个带有解析边界的星形区域, $f \in L^2(\Omega), g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. 则问题(2.2)–(2.3)的解可以写成 $u = u_{\mathcal{E}} + u_{\mathcal{A}}$, 并有

$$|u_{\mathcal{E}}|_j \lesssim k^{j-2} C_{f,g}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (4.9)$$

$$|u_{\mathcal{A}}|_j \lesssim k^{j-1} C_{f,g} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0. \quad (4.10)$$

这里, $C_{f,g} := \|f\|_0 + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$.

推论 4.2 对于问题(2.4)–(2.5)也有相同的结论:

证明 将问题(2.4)–(2.5)变为:

$$\begin{aligned} -\Delta u - k^2 u &= f && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{i}ku &= -\frac{1}{2R}u + g && \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

用上述引理可得: $u = u_{\mathcal{E}} + u_{\mathcal{A}}$, 其中 $u_{\mathcal{E}}, u_{\mathcal{A}}$ 满足:

$$|u_{\mathcal{E}}|_j \lesssim k^{j-2} (\|f\|_0 + \left\| g - \frac{u}{2R} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}), \quad j = 0, 1, 2, \quad (4.11)$$

$$|u_{\mathcal{A}}|_j \lesssim k^{j-1} (\|f\|_0 + \left\| g - \frac{u}{2R} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0. \quad (4.12)$$

由(4.11)以及引理[.]可得:

$$\begin{aligned} |u_{\mathcal{E}}|_j &\lesssim k^{j-2} (\|f\|_0 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Gamma)}) \\ &\lesssim k^{j-2} (\|f\|_0 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \\ &\lesssim k^{j-2} (\|f\|_0 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + (\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)})) \\ &\lesssim k^{j-2} C_{f,g}, \quad j = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

同理可得 $u_{\mathcal{A}}$ 的证明。

引理 4.4 设 Ω 是带有解析边界的严格星形区域, $s \geq 2$, $f \in H^{s-2}(\Omega)$, $g \in H^{s-3/2}(\Gamma)$. 于是问题(2.4)–(2.5)满足如下的稳定性估计:

$$\|u\|_s \lesssim k^{s-1} C_{s-2,f,g}, \quad (4.13)$$

其中 $C_{s-2,f,g} := \|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)} + \sum_{j=0}^{s-2} k^{-(j+1)} (\|f\|_j + \|g\|_{H^{j+1/2}(\Gamma)})$.

证明 我们用诱导公式证明。从推论(4.8)可知, 当 $s = 2$ 时结论成立。接下来我们假设下式成立:

$$\|u\|_l \lesssim k^{l-1} C_{l-2,f,g}, \quad 2 \leq l \leq s-1. \quad (4.14)$$

注意到原问题可以写成

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= (k^2 + 1)u + f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= -iku + g \quad \text{on } \Gamma. \end{aligned}$$

运用带诺依曼边界条件的泊松方程的正则估计和迹不等式可得:

$$\begin{aligned} \|u\|_s &\lesssim \|(k^2 + 1)u + f\|_{s-2} + \left\| -iku - \frac{u}{2R} + g \right\|_{H^{s-3/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim k^2 \|u\|_{s-2} + \|f\|_{s-2} + k \|u\|_{s-1} + \|g\|_{H^{s-3/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim k^{s-1} (\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) + \sum_{j=0}^{s-2} k^{s-j-2} (\|f\|_j + \|g\|_{H^{j+1/2}(\Gamma)}) \\ &\lesssim k^{s-1} C_{s-2,f,g}. \end{aligned}$$

于是结论成立。

§5 对高波数散射问题中的不同边界条件的误差分析

二维的Helmholtz方程的解有如下的渐进展开:

$$u \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i(kr - \pi/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_j(\theta)}{r^j}. \quad (5.1)$$

令 $B = \frac{\partial}{\partial r} - ik + \frac{1}{2r}$, 则通过简单计算有:

$$|Bu| = O\left(\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}\right)$$

记 $\|u\|_{(r)}^2 = \int \int_{|y|=r} |u(y)|^2 dA_y$.

引理 5.1 对于方程:

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} - ikw = h, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (5.3)$$

其中 Ω 是圆心在原点, 大小为 R 的圆。我们有如下的估计:

$$\|w\|_{(r_1)} \leq \frac{\|h\|_{r_1}}{k}.$$

证明 证明见[6]

用同样的方法, 可得对于方程

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} - ikw + \frac{w}{2r} = h, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (5.5)$$

也有类似的结论。

推论 5.1 方程

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

当边界条件是 $\frac{\partial u}{\partial r} - iku = h$ 时, 由上述引理可知, 解 u 与高波散射问题的真实解 v 的误差 w 满足方程(5.2)–(5.3), 故有

$$\|w\|_{(r_1)} = \|u - v\|_{(r_1)} \leq \frac{\|h\|_{(r_1)}}{k} \quad (5.6)$$

由于在二维Helmholtz方程中:

$$|h| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}}}$$

所以有,

$$\begin{aligned} \|w\|_{(r_1)} &\leq \frac{C}{kr} \\ \left\| \frac{\partial w}{\partial r} \right\|_{(r_1)} &\leq k \|w\|_{(r_1)} + \|h\|_{(r_1)} \leq 2 \|h\|_{(r_1)} \leq \frac{2C}{r}. \end{aligned}$$

同理, 当边界条件是 $\frac{\partial u}{\partial r} - iku + \frac{u}{2R} = h$ 时, 解 u 与高波散射问题的真实解 v 的误差 w 满足方程(5.4)–(5.5), 故有

$$\|w\|_{(r_1)} = \|u - v\|_{(r_1)} \leq \frac{\|h\|_{(r_1)}}{k} \quad (5.7)$$

此时,

$$|h| \leq \frac{C}{r^{\frac{5}{2}}}$$

所以有,

$$\begin{aligned} \|w\|_{(r_1)} &\leq \frac{C}{kr^2} \\ \left\| \frac{\partial w}{\partial r} \right\|_{(r_1)} &\leq \left(k + \frac{1}{2r}\right) \|w\|_{(r_1)} + \|h\|_{(r_1)} \leq \left(2 + \frac{1}{2kr}\right) \|h\|_{(r_1)} \leq \frac{C}{r^2} \left(2 + \frac{1}{2kr}\right). \end{aligned}$$

§6 预渐进误差分析

§6.1 一些引理

引理 6.1 令 $1 \leq s \leq p+1$. 假设 $u \in H^s(\Omega)$. 于是存在 $\hat{u}_h \in V_h$ 使得

$$\|u - \hat{u}_h\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u, \hat{u}_h) \lesssim h^s |u|_s. \quad (6.1)$$

引理 6.2 设 u 是问题(2.4)–(2.5). 假设 $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. 则存在 $\hat{u}_h \in V_h$ 使得

$$\|u - \hat{u}_h\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u, \hat{u}_h) \lesssim (h^2 + h(kh)^p) C_{f,g}, \quad (6.2)$$

其中 $C_{f,g} = C(\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Omega)})$.

证明 由引理 4.3 知可将 u 分解成 $u = u_\mathcal{E} + u_\mathcal{A}$ 其中 $u_\mathcal{E} \in H^2$, $u_\mathcal{A} \in H^j$, 对于任意 $j \geq 0$. 对于 $u_\mathcal{E}$ 由上述引理可知存在 $\widehat{u}_{\mathcal{E}h}$ 使得:

$$\begin{aligned} \|u_\mathcal{E} - \widehat{u}_{\mathcal{E}h}\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u_\mathcal{E}, \widehat{u}_{\mathcal{E}h}) &\lesssim \|u_\mathcal{E} - \widehat{u}_{\mathcal{E}h}\|_0 + hk \|u_\mathcal{E} - \widehat{u}_{\mathcal{E}h}\|_0 + hE_\Gamma(u_\mathcal{E}, \widehat{u}_{\mathcal{E}h}) \\ &\lesssim (1 + hk)(\|u_\mathcal{E} - \widehat{u}_{\mathcal{E}h}\|_0 + hE_\Gamma(u_\mathcal{E}, \widehat{u}_{\mathcal{E}h})) \\ &\lesssim (1 + hk)h^2 |u_\mathcal{E}|_2 \lesssim h^2 C_{f,g} \end{aligned}$$

同理可知, 存在 $\widehat{u}_{\mathcal{A}h}$ 使得:

$$\begin{aligned} \|u_\mathcal{A} - \widehat{u}_{\mathcal{A}h}\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u_\mathcal{A}, \widehat{u}_{\mathcal{A}h}) &\lesssim \|u_\mathcal{A} - \widehat{u}_{\mathcal{A}h}\|_0 + hk \|u_\mathcal{A} - \widehat{u}_{\mathcal{A}h}\|_0 + hE_\Gamma(u_\mathcal{A}, \widehat{u}_{\mathcal{A}h}) \\ &\lesssim (1 + hk)(\|u_\mathcal{A} - \widehat{u}_{\mathcal{A}h}\|_0 + hE_\Gamma(u_\mathcal{A}, \widehat{u}_{\mathcal{A}h})) \\ &\lesssim (1 + hk)h^{p+1} |u_\mathcal{A}|_{p+1} \lesssim k^p h^{p+1} C_{f,g} \end{aligned}$$

令 $\hat{u}_h = \widehat{u}_{\mathcal{E}h} + \widehat{u}_{\mathcal{A}h}$ 于是有

$$\begin{aligned} \|u - \hat{u}_h\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u, \hat{u}_h) &\lesssim (\|u_\mathcal{E} - \widehat{u}_{\mathcal{E}h}\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u_\mathcal{E}, \widehat{u}_{\mathcal{E}h})) + (\|u_\mathcal{A} - \widehat{u}_{\mathcal{A}h}\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u_\mathcal{A}, \widehat{u}_{\mathcal{A}h})) \\ &\lesssim h^2 C_{f,g} + k^p h^{p+1} C_{f,g} \\ &\lesssim (h^2 + h(kh)^p) C_{f,g} \end{aligned}$$

引理 6.3 存在常数 $\gamma_0 < 0$ 使得如果 $\gamma_0 \leq \gamma_{j,e} \lesssim 1$, 则对于任意的 $1 \leq j \leq p$, $e \in \mathcal{E}_h^I$, 有

$$a_\gamma(v_h, v_h)^{1/2} \approx \|\nabla v_h\|_0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6.3)$$

推论 6.1 由上述引理可知, 如果 $|\gamma_{j,e}| \lesssim 1$, 则对于任意的 $1 \leq j \leq p, e \in \mathcal{E}_h^I$, 有

$$\|v_h\|_{1,\gamma} \approx \|v_h\|_1 \quad \forall v_h \in V_h.$$

在下文中我们都假设 γ_0 保证上述引理成立的, 即有 $\gamma_0 \leq \gamma_{j,e} \lesssim 1$ 对于任意的 $1 \leq j \leq p, e \in \mathcal{E}_h^I$.

§6.2 L^2 投影算子、椭圆投影算子和离散Sobolev范数

定义 V_h 的 L^2 投影算子:

$$(Q_h \varphi, v_h) = (\varphi, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (6.4)$$

引理 6.4 对于任意的整数 $0 \leq j \leq p+1$, $\varphi \in L^2(\Omega)$, 有

$$\|\varphi - Q_h \varphi\|_{-j} \lesssim h^j \inf_{\varphi_h \in V_h} \|\varphi - \varphi_h\|_0.$$

定义如下的椭圆投影算子 $P_{h,\gamma}$:

$$a_\gamma(P_h \varphi, v_h) + (P_h \varphi, v_h) = a(\varphi, v_h) + (\varphi, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \varphi \in V, \quad (6.5)$$

则我们有下列在 H^1, L^2 , 以及负范数上的误差估计。

引理 6.5 对于任意的 $-1 \leq j \leq p-1$, $\varphi \in H^1(\Omega)$, 有

$$\|\varphi - P_h \varphi\|_{-j} \lesssim h^{j+1} \inf_{\varphi_h \in V_h} E_\gamma(\varphi, \varphi_h).$$

定义离散的soblev算子 $A_h : V_h \mapsto V_h$:

$$(A_h v_h, w_h) = a_\gamma(v_h, w_h) + (v_h, w_h) \quad \forall v_h, w_h \in V_h. \quad (6.6)$$

有引理可知 A_h 是对称和正定的。因此我们可以通过算子的特征值和特征函数来定义算子的大小。 A_h 的特征值和特征函数分别记为:

$$\lambda_{1h} < \lambda_{2h} < \cdots < \lambda_{\dim(V_h)h}, \quad (6.7)$$

$$\phi_{1h}, \phi_{2h}, \cdots, \phi_{\dim(V_h)h} \quad (6.8)$$

易知这些特征值都是正的, 并且特征函数构成了 V_h 的一组正交基。

对于任意的实数 j , 我们如下定义 A_h^j :

令 $v_h = \sum_{m=1}^{\dim(V_h)} a_m \phi_{mh}$, 则 $A_h^j v_h = \sum_{m=1}^{\dim(V_h)} \lambda_{mh}^j a_m \phi_{mh}$

对于任意整数 j , 在 V_h 上我们定义如下的离散 H^j 范数:

$$\|v_h\|_{j,h} := \|A_h^{j/2} v_h\|_0 \quad (6.9)$$

易知:

$$\|v_h\|_{0,h} = \|v_h\|_0, \|v_h\|_{1,h} = (A_h v_h, v_h)^{1/2} \approx \|v_h\|_1 \approx \|v_h\|_{1,\gamma}, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6.10)$$

引理 6.6 对于任意整数 j , 有

$$\|v_h\|_{j,h} \lesssim h^{-1} \|v_h\|_{j-1,h} \quad \forall v_h \in V_h.$$

引理 6.7 对于任意整数 j , $0 \leq j \leq p+1$, 有

$$\|v_h\|_{-j,h} \lesssim \sum_{m=0}^j h^{j-m} \|v_h\|_{-m}, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6.11)$$

§6.3 预渐进误差分析

下面的定理给出 CIP-FEM 的预渐进误差分析。

定理 6.1 设 u 和 u_h 分别是 (2.4)–(2.5) 和 (3.4) 的解, 则存在与 k, h 无关的常数 C_0 使得如果

$$k(kh)^{2p} \leq C_0, \quad (6.12)$$

则有如下的误差估计:

$$\mathbb{E}_\gamma(u, u_h) \lesssim (1 + k(kh)^p) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h), \quad (6.13)$$

$$\|u - u_h\|_0 \lesssim (h + (kh)^p) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h). \quad (6.14)$$

证明 假设 $kh \lesssim 1$. 令 $P_h u$ 为 u 的椭圆投影算子。令

$$e_h := u - u_h = (u - P_h u) + (P_h u - u_h) := \rho + \theta_h.$$

从引理 6.5 可得:

$$\|\rho\|_{-j} \lesssim h^{j+1} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h), \quad 0 \leq j \leq p-1. \quad (6.15)$$

剩下来就只需要估计 θ_h 了.由等式(3.1)和(3.4)我们有如下的 *Galerkin* 正交性:

$$a(e_h, v_h) - k^2(e_h, v_h) - \mathbf{i}k \langle e_h, v_h \rangle + \frac{1}{2R} \langle e_h, v_h \rangle = J(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

由 P_h 的定义可得:

$$a_\gamma(\theta_h, v_h) - k^2(\theta_h, v_h) - \mathbf{i}k \langle \theta_h, v_h \rangle + \frac{1}{2R} \langle \theta_h, v_h \rangle = (k^2 + 1)(\rho, v_h) + \mathbf{i}k \langle \rho, v_h \rangle - \frac{1}{2R} \langle \rho, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6.16)$$

Step 1. 这一步我们用 θ_h 的 $(p-1)$ 阶的离散范数来估计 $\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}$. 令 $v_h = \theta_h$ 代入上式并取虚部可得:

$$\begin{aligned} k \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= -\operatorname{Im}((k^2 + 1)(Q_h \rho, \theta_h)) - \operatorname{Re}(k \langle \rho, \theta_h \rangle) + \frac{1}{2R} \operatorname{Im} \langle \rho, \theta_h \rangle \\ &\leq (k^2 + 1) \|Q_h \rho\|_{1-p, h} \|\theta_h\|_{p-1, h} + k \|\rho\|_{L^2(\Gamma)} \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

引理6.5中取 $\varphi_h = P_h u$, 我们有

$$\|Q_h \rho\|_{1-p, h} = \|Q_h u - P_h u\|_{1-p, h} = \|Q_h u - u + u - P_h u\|_{1-p, h} \lesssim h^p \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h).$$

同时注意到 $\|\rho\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\rho\|_0^{1/2} \|\rho\|_1^{1/2} \lesssim h^{1/2} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)$, 于是

$$k \|\rho\|_{L^2(\Gamma)} \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{k}{2} \|\rho\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{2} \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq Ckh \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)^2 + \frac{k}{2} \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

组合上述三个估计可得:

$$\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \lesssim kh^p \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) \|\theta_h\|_{p-1, h} + h \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)^2 \lesssim k^2 h^{2p-1} \|\theta_h\|_{p-1, h}^2 + h \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)^2. \quad (6.17)$$

Step 2. 这一步中我们用 θ_h 的 L^2 范数来估计它的高阶离散范数. 由 A_h 的定义可知, (6.16)可被写成

$$\begin{aligned} (A_h \theta_h, v_h) &= (k^2 + 1)(\theta_h, v_h) + (k^2 + 1)(Q_h \rho, v_h) + \mathbf{i}k \langle \theta_h, v_h \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2R} \langle \theta_h, v_h \rangle + \mathbf{i}k \langle \rho, v_h \rangle - \frac{1}{2R} \langle \rho, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

任给整数 $1 \leq m \leq p$, 在上式中取 $v_h = A_h^{m-1} \theta_h$ 可得

$$\begin{aligned} \|\theta_h\|_{m, h}^2 &= (k^2 + 1) \|\theta_h\|_{m-1, h}^2 + (k^2 + 1)(A_h^{(m-1)/2} Q_h \rho, A_h^{(m-1)/2} \theta_h) + \mathbf{i}k \langle \theta_h, A_h^{m-1} \theta_h \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2R} \langle \theta_h, A_h^{m-1} \theta_h \rangle + \mathbf{i}k \langle \rho, A_h^{m-1} \theta_h \rangle - \frac{1}{2R} \langle \rho, A_h^{m-1} \theta_h \rangle. \end{aligned}$$

由迹不等式和逆不等式可得:

$$\begin{aligned}
 |\langle \theta_h, A_h^{m-1} \theta_h \rangle| &\lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)} \|A_h^{m-1} \theta_h\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)} h^{-1/2} \|\theta_h\|_{2m-2,h} \\
 &\lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)} h^{-m+1/2} \|\theta_h\|_{m-1,h} \\
 &\lesssim (k h^{p-m} \|\theta_h\|_{p-1,h} + h^{1-m} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)) \|\theta_h\|_{m-1,h} \\
 &\lesssim (k \|\theta_h\|_{m-1,h} + h^{1-m} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)) \|\theta_h\|_{m-1,h}, \\
 |\langle \rho, A_h^{m-1} \theta_h \rangle| &\lesssim \|\rho\|_{L^2(\Gamma)} \|A_h^{m-1} \theta_h\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^{1/2} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) h^{-m+1/2} \|\theta_h\|_{m-1,h} \\
 &\lesssim h^{1-m} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) \|\theta_h\|_{m-1,h}.
 \end{aligned}$$

因此有 $1 \leq m \leq p$,

$$\begin{aligned}
 \|\theta_h\|_{m,h}^2 &\lesssim k^2 \|\theta_h\|_{m-1,h}^2 + k^2 \|Q_h \rho\|_{m-1,h} \|\theta_h\|_{m-1,h} \\
 &\quad + (k \|\theta_h\|_{m-1,h} + h^{1-m} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)) k \|\theta_h\|_{m-1,h},
 \end{aligned}$$

进一步由 *young* 不等式可得:

$$\|\theta_h\|_{m,h} \lesssim k \|\theta_h\|_{m-1,h} + k \|Q_h \rho\|_{m-1,h} + h^{1-m} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h).$$

由于 $k \|Q_h \rho\|_{m-1,h} \lesssim k h^{1-m} \|Q_h \rho\|_{0,h} \lesssim k h^{2-m} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) \lesssim h^{1-m} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)$,
所以

$$\|\theta_h\|_{m,h} \lesssim k \|\theta_h\|_{m-1,h} + h^{1-m} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h), \quad 1 \leq m \leq p. \quad (6.18)$$

递归的使用上述不等式可得任意整数 $0 \leq m \leq p$, 有

$$\|\theta_h\|_{m,h} \lesssim k^m \|\theta_h\|_0 + \sum_{n=0}^{m-1} k^n h^{1-m+n} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) \lesssim k^m \|\theta_h\|_0 + h^{1-m} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h). \quad (6.19)$$

Step 3. 这一步中我们用 θ_h 的 $(p-1)$ 离散范数来估计它的 L^2 范数。考虑对偶问题:

$$\begin{aligned}
 -\Delta w - k^2 w &= \theta_h \quad \text{in } \Omega, \\
 \frac{\partial w}{\partial n} + \mathbf{i} k w + \frac{w}{2R} &= 0 \quad \text{on } \Gamma.
 \end{aligned}$$

用 $e_h = \rho + \theta_h$ 和上式做内积运算, 令 $v_h = P_h w$ 可得:

$$\begin{aligned}
 (\rho + \theta_h, \theta_h) &= a(e_h, w) - k^2(e_h, w) - \mathbf{i}k \langle e_h, w \rangle + \frac{1}{2R} \langle e_h, w \rangle \\
 &= a(e_h, w - P_h w) - \mathbf{i}k \langle e_h, w - P_h w \rangle - k^2(e_h, w - P_h w) \\
 &\quad + \frac{1}{2R} \langle e_h, w - P_h w \rangle + J(u_h, P_h w) \\
 &= a(\rho, w - P_h w) + (\rho, w - P_h w) - (k^2 + 1)(\rho + \theta_h, w - P_h w) \\
 &\quad - \mathbf{i}k \langle \rho + \theta_h, w - P_h w \rangle + \frac{1}{2R} \langle \rho + \theta_h, w - P_h w \rangle + J(P_h u, P_h w).
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \|\theta_h\|_0^2 &= a(\rho, w - P_h w) - k^2(\rho, w - P_h w) - \mathbf{i}k \langle \rho, w - P_h w \rangle + \frac{1}{2R} \langle \rho, w - P_h w \rangle + J(P_h u, P_h w) \\
 &\quad - (k^2 + 1)(\theta_h, w - P_h w) - \mathbf{i}k \langle \theta_h, w - P_h w \rangle + \frac{1}{2R} \langle \theta_h, w - P_h w \rangle - (\rho, \theta_h) \\
 &\leq \mathbb{E}_\gamma(u, P_h u) \mathbb{E}_\gamma(w, P_h w) + (k^2 + 1) |(\theta_h, w - P_h w)| + k |\langle \theta_h, w - P_h w \rangle| + \|\rho\|_0 \|\theta_h\|_0 \\
 &\leq \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(w, z_h) + (k^2 + 1) |(\theta_h, w - P_h w)| + k |\langle \theta_h, w - P_h w \rangle| + \|\rho\|_0 \|\theta_h\|_0,
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

我们还可以证明:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_\gamma(w, P_h w) &\lesssim \mathbb{E}_\gamma(w_\mathcal{E}, w_{h,\mathcal{E}}) + \mathbb{E}_\gamma(w_\mathcal{A}, w_{h,\mathcal{A}}) \\
 &\lesssim h |w_\mathcal{E}| + h^p |w_\mathcal{A}|_{p+1} \lesssim h \|\theta_h\|_0 + (hk)^p \|\theta_h\|_0 \lesssim (h + (hk)^p) \|\theta_h\|_0. \\
 \|w - P_h w\|_0 &\lesssim h \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(w, z_h) \lesssim h(h + (kh)^p) \|\theta_h\|_0.
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 |(\theta_h, w - P_h w)| &= |(\theta_h, Q_h w - P_h w)| \\
 &\leq \|\theta_h\|_{p-1,h} \|Q_h w - w + w - P_h w\|_{1-p,h} \\
 &\lesssim \|\theta_h\|_{p-1,h} h^p (h + (kh)^p) \|\theta_h\|_0.
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}
 |\langle \theta_h, w - P_h w \rangle| &\lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)} \|w - P_h w\|_{L^2(\Gamma)} \\
 &\lesssim (kh^{p-1/2} \|\theta_h\|_{p-1,h} + h^{1/2} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)) h^{1/2} \mathbb{E}_\gamma(w, P_h w) \\
 &\lesssim (kh^{p-1/2} \|\theta_h\|_{p-1,h} + h^{1/2} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)) h^{1/2} (h + (kh)^p) \|\theta_h\|_0 \\
 &\lesssim (kh^p \|\theta_h\|_{p-1,h} + h \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)) (h + (kh)^p) \|\theta_h\|_0.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

最后把(6.15)和(6.21)–(6.23)代入(6.20) 我们可得

$$\|\theta_h\|_0 \lesssim (h + (kh)^p) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) + h^p (h + (kh)^p) k^2 \|\theta_h\|_{p-1, h}. \quad (6.24)$$

Step 4. 组合(6.24)和(6.19), 并令 $m = p - 1$, 有

$$\begin{aligned} \|\theta_h\|_0 &\lesssim (h + (kh)^p) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) + h^p (h + (kh)^p) (k^{p+1} \|\theta_h\|_0 + k^2 h^{2-p} \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h)) \\ &\lesssim (h + (kh)^p) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) + ((kh)^{p+1} + k(kh)^{2p}) \|\theta_h\|_0. \end{aligned}$$

因此存在常数 C_0 使得如果 $k(kh)^{2p} \leq C_0$, 有

$$\|\theta_h\|_0 \lesssim (h + (kh)^p) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h).$$

进一步有

$$\|\theta_h\|_1 \lesssim k \|\theta_h\|_0 + \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) \lesssim (1 + k(kh)^p) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h).$$

于是定理得证。

由定理6.1和上面的引理, 对于 H^{p+1} 正则解我们有如下的估计。

推论 6.2 设 u 和 u_h 分别是(2.4)–(2.5)和(3.4)的解。假设 $C_{p-1, f, g} \lesssim 1$ 。于是存在和 h, k 无关的 C_0, C_1, C_2 使得如果 $k(kh)^{2p} \leq C_0$, 则有如下的估计成立:

$$\|u - u_h\|_1 \leq C_1 (kh)^p + C_2 k (kh)^{2p}, \quad (6.25)$$

$$k \|u - u_h\|_0 \leq C_1 (kh)^{p+1} + C_2 k (kh)^{2p}. \quad (6.26)$$

由引理6.1, 6.2和定理6.1, 我们可以得到如下的CIP-FEM 的稳定性估计。

推论 6.3 假设问题(2.4)–(2.5)的解 $u \in H^2(\Omega)$ 。则在定理6.1的条件下我们有如下估计:

$$\|\nabla u_h\|_0 + k \|u_h\|_0 \lesssim C_{f, g},$$

即 CIP-FEM 是适定的。

证明

$$\begin{aligned} \|\nabla u_h\|_0 + k \|u_h\|_0 &\lesssim \|\nabla(u - u_h)\| + \|\nabla u\| + k \|u - u_h\|_0 + k \|u\|_0 + \left| J^{\frac{1}{2}}(u_h, u_h) \right| \\ &\lesssim \mathbb{E}_\gamma(u, u_h) + \|\nabla u\| + k \|u\|_0 \\ &\lesssim (1 + k(kh)^p) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h) + C_{f, g} \\ &\lesssim (1 + k(kh)^p) (h + (kh)^p) C_{f, g} + C_{f, g} \lesssim C_{f, g} \end{aligned}$$

§7 数值实验

§8 总结与展望

参考文献

- [1] Stephen Grossberg, *Adaptive Resonance Theory:How a brain learns to consciously attend,learn,and recognize a changing world*. Neural Networks, **37**(2013),pp.1-47.
- [2] M.J.Healy,Thomas P.Caudell, *A categorical semantic analysis of ART architectures*.IJCNN, 2011.
- [3] Modification of the ART-1 architecture based on category theoretic design principles.IJCNN,2005.
- [4] Stephen Grossberg, *Adaptive Resonance Theory:How a brain learns to consciously attend,learn,and recognize a changing world*. Neural Networks, **37**(2013),pp.1-47.
- [5] Yu Du and Haijun Wu, *Preasymptotic error analysis of higher order FEM and CIP-FEM for Helmholtz equation with high wave number*. SIAM J. Numer. Anal., **53**(2015), pp. 782 - 804
- [6] Bayliss, A., Gunzburger, M., and Turkel, E. 1982. *Boundary conditionsfor the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*.SIAM Journal of Applied Mathematics , **42**: 430 - 451.
- [7] 武海军, 偏微分方程数值解法II,pp.61-73
- [8] Zhiming Chen and Haijun Wu, *Selected Topics in Finite Element Methods*, Science Press Beijing, 2010.
- [9] G.J Lord and A.M Stuart, *Discrete Gevrey regularity attractors and upperssemicontinuity for a finite difference approximation to the Ginzburg - Landau equation*, Numer. funct. anal. and optim., **16** (1995), pp. 1003 - 1047.

致 谢

经过长时间的努力，终于完成了这篇论文，在本文的写作过程当中，得到了许多老师和同学的热心帮助，在此向他们表示感谢。

首先要感谢我的导师武海军老师，他对学术的专注和对学生的关怀，让我深受感动，也为我将来工作和生活树立了榜样。武老师对我的毕业论文的构思、选题都悉心指导，并且在论文的写作当中，给予了我很多建设性意见，对此我表示衷心的感谢！

同时，我还要感谢三年来给予我帮助的所有老师和同学，他们给我带来了丰富的概率统计的基础知识和深入研究问题的方法，使我受益匪浅。感谢我的同门师兄妹，大家互助友爱，共同学习，一起营造了一个良好的学术氛围。

最后，感谢我的家人一直以来对我的关心和支持。