南京大学

研 究 生 毕 业 论 文

（申 请 硕 士 学 位）

论文题目：人工神经网络的范畴解释及其应用

作　　者：武伟

专　　业：计算数学

研究方向：范畴理论及其应用

指导教师：丁南庆 教授

二〇一六年五月一日

学　　　　　号:　　　　MG1321022

论文答辩日期:　　　　　　年　　　月　　　日

指　导　教　师:　　　　　　　　　　　　(签字)

目　录

Contents

毕业论文题目：人工神经网络的范畴解释及其应用

计算数学 专业 2013 级硕士生姓名：武伟

指导教师（姓名、职称）：丁南庆教授

本文主要是人工神经网络的范畴解释及其应用......

关键词：人工神经网络，范畴，MLP，CNN，ART1

THESIS:

the categorical explanation and application of artificial neural networks

SPECIALIZATION: computational mathematics

POSTGRADUATE: wei Wu

MENTOR: Professor nanqing Ding

In this thesis, we apply category theory to explain how can neural networks store information......

Key Words: artificial neural network，category，MLP，CNN，ART1

人工神经网络的范畴解释及其应用

§1 人工神经网络

§1.1 神经网络与人工神经网络

生物神经网络主要由神经元为主要单元，神经元是大脑处理信息的重要部分。一个神经元的结构如图1所示，其最主要的部分为末梢作为输入和输出的树突和用于传输信号的轴突。当事件发生时信息以电信号的形式在树突上扩布并被整合，电信号在轴突处加以累计，当超过一定的阈值时突破轴突进入作为输出的树突。数十亿个神经元连接成的复杂网络构成了大脑的神经系统。

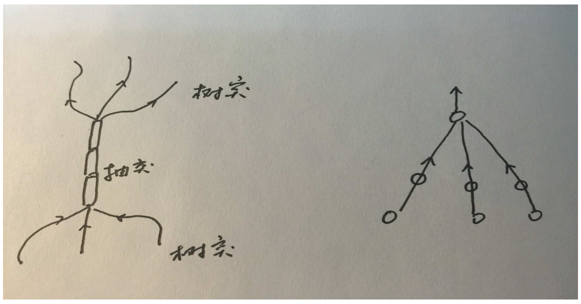

图 1

利用计算机可以模拟这样的神经结构，人工神经网络也由人工神经元（下面简称为神经元）构成，其中最基本的结构如图1所示，以神经元m为研究对象，其中$n_k(k = 1,2,3)$ 为输入端相连的神经元，每个提供的电流为$a_k(k = 1,2,3)$,邻接边上有权重参数$w_k(k = 1,2,3)$，在所有的输入之后有激活函数$\sigma(\cdot)$, 则其输出的生物电流为

$$b = \sigma(\sum_{k=1}^{3} a_k w_k) \tag{1.1}$$

其中的$\sigma(x)$常取作取值在(0,1)之间的sigmoid函数

$$sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \tag{1.2}$$

这样的一个结构叫做感知机，一个人工神经网络通常由若干的感知机构成不同的复杂结构。

§1.2 几种典型的神经网络

§1.2.1 自适应共振网络-ART

[1]是人脑的自适应共振理论的基础工作，它揭示了人脑神经元的一种简化的组织形式。这种神经元模型具有长期记忆和新颖物体学习的平衡性，并且能够在线更新知识体系。ART1是自适应共振理论对应的最简单的网络结构，如图2所示

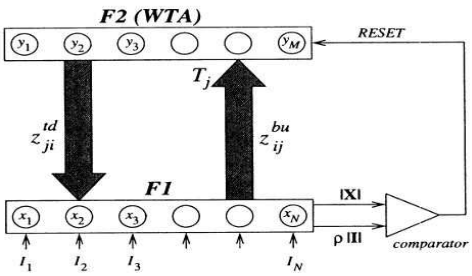

图 2

§1.2.2 MLP

§1.2.3 CNN

$$-\Delta u - k^2 u = f \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{i}ku = g \qquad \text{on } \Gamma, \tag{1.4}$$

$$-\Delta u - k^2 u = f \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{i}ku + \frac{1}{2R}u = g \qquad \text{on } \Gamma, \tag{1.6}$$

方程(1.3)–(1.4)是高波数声波散射问题中常见的方程。边界条件(1.4)是对反射波在无穷远处趋近于零的近似. 方程(1.5)–(1.6)是对反射波在无穷远处趋近于零的更精细的近似。本文对方程(1.5)–(1.6) 进行预渐进误差分析，以减少污染项。

§2 公式和符号

Ω为圆点在$(0,0)$半径为R的圆。Γ 为Ω 的边界，即$\partial\Omega$。$i:=\sqrt{-1}$ 。k为波数。通篇中，C用来标记与h,k,f,g无关的正常数。我们用记号$A\lesssim B$和$B\lesssim A$ 来分别表示$A\le CB$ 和$B\ge CA$. $A\eqsim B$ 是$A\lesssim B$ 和$B\lesssim A$的缩写. 因为考虑的是高波数问题，所以假设$k\gg 1$，且是个定值。$p=O(1)$ 也是个定值。

$(\cdot,\cdot)_\Omega$ 表示Ω上的L^2 内积。$\langle\cdot,\cdot\rangle:=\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$表示$\Gamma$ 上的L^{2}内积。我们用如下缩写：$\|\cdot\|_j:=\|\cdot\|_{H^j(\Omega)}$ 和$|\cdot|_j:=|\cdot|_{H^j(\Omega)}$.

$V_h\ :=\ \left\{v_h\in H^1(\Omega):\ v_h\,|_K\circ F_K\in\mathcal{P}_p(\widehat{K})\ \forall K\in\mathcal{T}_h\right\}$, 即$V_h$是$\Omega$上的$p$阶分片多项式空间，其中，$\mathcal{T}_h$是$\Omega$的一致三角剖分，$h=\max_{K\in\mathcal{T}_h}h_K$. $\widehat{K}$是三角形K的参考单元，F_K是从$\widehat{K}$到K的映射，$\mathcal{P}_p(\widehat{K})$是$\widehat{K}$上的所有次数不超过p的多项式的集合。

$\mathcal{E}_h^I$是T_h的所有的内部边（面）的集合。对于每一个$e=\partial K\cap\partial K'\in\mathcal{E}_h^I$,令$n_e$为指向$e$的单位法向量,定义$v$在$e$上的跳量为$[v]\,|_e:=v|_{K'}-v|_K$.

记$a(u,v):=(\nabla u,\nabla v),\forall u,v\in H^1(\Omega)$. 则问题(1.5)–(1.6)的变分形式为：

$$a(u,v)-k^2(u,v)-ik\langle u,v\rangle+\frac{1}{2R}\langle u,v\rangle=(f,v)+\langle g,v\rangle,\quad\forall v\in V\qquad(2.1)$$

我们定义能量空间V 和在$V\times V$上的双线性形式$a_\gamma(\cdot,\cdot)$如下:

$$V:=H^1(\Omega)\cap\prod_{K\in\mathcal{T}_h}H^{p+1}(K),$$

$$a_\gamma(u,v):=a(u,v)+J(u,v)\qquad\forall\,u,v\in V,\qquad(2.2)$$

$$J(u,v):=\sum_{j=1}^{p}\sum_{e\in\mathcal{E}_h^I}\gamma_{j,e}\,h_e^{2j-1}\left\langle\left[\frac{\partial^j u}{\partial n_e^j}\right],\left[\frac{\partial^j v}{\partial n_e^j}\right]\right\rangle_e,\qquad(2.3)$$

其中$\gamma_{j,e},e\in\mathcal{E}_h^I$ 是拥有非负虚部的惩罚因子。

CIP-FEM 如下定义: 找到$u_h\in V_h$使得

$$a_\gamma(u_h,v_h)-k^2(u_h,v_h)-\mathbf{i}k\langle u_h,v_h\rangle+\frac{1}{2R}\langle u_h,v_h\rangle=(f,v_h)+\langle g,v_h\rangle\qquad\forall v_h\in V_h.\ (2.4)$$

显然如果$u\in H^{p+1}(\Omega)$,$v\in V$ 有$J(u,v)=0$. 因此如果$u\in H^{p+1}(\Omega)$是(1.5)–(1.6) 的解，那么有

$$a_\gamma(u,v_h)-k^2(u,v_h)-\mathbf{i}k\langle u,v_h\rangle+\frac{1}{2R}\langle u,v_h\rangle=(f,v_h)+\langle g,v_h\rangle\qquad\forall v_h\in V_h.$$

我们在V上定义如下范数:

$$|v|_{1,\gamma} := \Big(\|\nabla v\|_0^2 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{e\in\mathcal{E}_h^I} |\gamma_{j,e}| \; h_e^{2j-1} \left\| \left[\frac{\partial^j v}{\partial n_e^j} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \Big)^{1/2}, \tag{2.5}$$

$$\|v\|_{1,\gamma} := \big(|v|_{1,\gamma}^2 + \|v\|_0^2 \big)^{1/2}, \tag{2.6}$$

因为精确解不在V中, 我们定义如下范数来衡量离散误差:

$$E_\gamma(v, v_h) := \Big(\|v - v_h\|_1^2 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{e\in\mathcal{E}_h^I} |\gamma_{j,e}| \; h_e^{2j-1} \left\| \left[\frac{\partial^j v_h}{\partial n_e^j} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \Big)^{1/2}, \tag{2.7}$$

$$\mathbb{E}_\gamma(v, v_h) := \big(E_\gamma(v, v_h)^2 + k^2 \|v - v_h\|_0^2 \big)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in H^1(\Omega), v_h \in V_h. \tag{2.8}$$

以下章节中如果没有明确给出证明也没有给出证明的参考文献的话, 证明细节都见[2].

§3 引理

引理 3.1 令$\alpha(x) := x - x_\Omega$.有

$$d \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2Re(v, \alpha\cdot\nabla v) = \int_{\partial\Omega} \alpha\cdot n\, |v|^2, \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{3.1}$$

$$(d-2) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2Re(\nabla v, \nabla(\alpha\cdot\nabla v)) = \int_{\partial\Omega} \alpha\cdot n\, |\nabla v|^2, \qquad \forall v \in H^2(\Omega) \tag{3.2}$$

上述恒等式也称为$Rellich$恒等式。

证明 证明见*[4]*

引理 3.2 散射问题(1.5)–(1.6)的解满足

$$\|u\|_{H^j(\Omega)} \lesssim k^{j-1}(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}), \qquad j = 0, 1, \tag{3.3}$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \lesssim k(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{3.4}$$

证明 在变分公式(2.1)中令$v = u$,并取实部得:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2R} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\le |(f, u) + \langle g, u\rangle| \\ &\lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|u\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

取虚部得:

$$
\begin{aligned}
k\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|u\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2k}\|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{2}\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2
\end{aligned}
$$

从而

$$
k\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \le 2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{k}\|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \tag{3.5}
$$

于是

$$
\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le 2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{k}\|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \tag{3.6}
$$

其次，在(2.1)中令$v = \alpha \cdot \nabla u$, 并取实部得

$$
2Re(\nabla u, \nabla(\alpha\cdot\nabla u)) - 2k^2 Re(u, \alpha\cdot\nabla u) - 2kIm\langle u, \alpha\cdot\nabla u\rangle = 2Re((f, \alpha\cdot\nabla u) + \langle g, \alpha\cdot\nabla u\rangle).
$$

由(3.1)和(3.2)及上式可得:

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma \alpha\cdot n|\nabla u|^2 - (d-2)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2\int_\Omega \alpha\cdot n|u|^2 + dk^2\|u\|_{L^2(\Omega)} - 2kIm\langle u, \alpha\cdot\nabla u\rangle \\
= 2Re((f, \alpha\cdot\nabla u) + \langle g, \alpha\cdot\nabla u\rangle).
\end{aligned}
$$

从而由(3.5)和(3.6)得:

$$
\begin{aligned}
k^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\int_\Gamma \alpha\cdot n|\nabla u|^2 - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (d-1)(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
&+ k^2\int_\Omega \alpha\cdot n|u|^2 + 2kIm\langle u, \alpha\cdot\nabla u\rangle + 2Re((f, \alpha\cdot\nabla u) + \langle g, \alpha\cdot\nabla u\rangle) \\
&\le -R\int_\Gamma |\nabla u|^2 - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (d-1)(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\
&+ Ck^2\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + Ck\|u\|_{L^2(\Gamma)}\|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)} \\
&+ C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma)}\|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + Ck^2\|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + C\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&\le Ck\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + C\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&\le \frac{k^2}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|g\|_{L^2(\Gamma)}^2
\end{aligned}
$$

故

$$
\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \frac{1}{k}(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}) \tag{3.7}
$$

即引理的结论对$j=0$成立，带入得$j=1$也成立。

最后，由椭圆方程的正则性理论，可得：

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^2(\Omega)} &\lesssim \left\|(1+k^2)u+f\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|g+iku-\frac{u}{2R}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\lesssim k^2\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + k\|u\|_{H^1(\Omega)} \\ &\lesssim k(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\end{aligned}$$

推论 3.1 易得：

$$k^2\|u\|_0 + k\|u\|_1 + \|u\|_2 \lesssim k(\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{3.8}$$

引理 3.3 Ω是个带有解析边界的星形区域，$f\in L^2(\Omega), g\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.则问题(1.3)–(1.4)的解可以写成$u=u_{\mathcal{E}}+u_{\mathcal{A}}$,并有

$$|u_{\mathcal{E}}|_j \lesssim k^{j-2}C_{f,g}, \quad j=0,1,2, \tag{3.9}$$

$$|u_{\mathcal{A}}|_j \lesssim k^{j-1}C_{f,g} \quad \forall j\in\mathbb{N}_0. \tag{3.10}$$

这里，$C_{f,g} := \|f\|_0 + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$.

推论 3.2 对于问题(1.5)–(1.6)也有相同的结论：

证明 将问题(1.5)–(1.6)变为：

$$\begin{aligned}-\Delta u - k^2u &= f \qquad in\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{i}ku &= -\frac{1}{2R}u + g \qquad on\ \Gamma\end{aligned}$$

用上述引理可得：$u=u_{\mathcal{E}}+u_{\mathcal{A}}$，其中$u_{\mathcal{E}}, u_{\mathcal{A}}$满足：

$$|u_{\mathcal{E}}|_j \lesssim k^{j-2}(\|f\|_0 + \left\|g-\frac{u}{2R}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}), \qquad j=0,1,2, \tag{3.11}$$

$$|u_{\mathcal{A}}|_j \lesssim k^{j-1}(\|f\|_0 + \left\|g-\frac{u}{2R}\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)})\forall j\in\mathbb{N}_0. \tag{3.12}$$

由(3.11)以及引理[..]可得：

$$\begin{aligned}|u_{\mathcal{E}}|_j &\lesssim k^{j-2}(\|f\|_0 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Gamma)}) \\ &\lesssim k^{j-2}(\|f\|_0 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \\ &\lesssim k^{j-2}(\|f\|_0 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + (\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)})) \\ &\lesssim k^{j-2}C_{f,g}, \qquad j=0,1,2.\end{aligned}$$

同理可得$u_{\mathcal{A}}$的证明。

引理 3.4 设Ω是带有解析边界的严格星形区域,$s \geq 2$，$f \in H^{s-2}(\Omega)$，$g \in H^{s-3/2}(\Gamma)$. 于是问题(1.5)–(1.6)满足如下的稳定性估计:

$$\|u\|_s \lesssim k^{s-1} C_{s-2,f,g}, \tag{3.13}$$

其中$C_{s-2,f,g} := \|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)} + \sum_{j=0}^{s-2} k^{-(j+1)} \big(\|f\|_j + \|g\|_{H^{j+1/2}(\Gamma)}\big)$.

证明 我们用诱导公式证明。从推论(3.8)可知，当$s = 2$时结论成立。接下来我们假设下式成立:

$$\|u\|_l \lesssim k^{l-1} C_{l-2,f,g}, \quad 2 \leq l \leq s-1. \tag{3.14}$$

注意到原问题可以写成

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= (k^2+1)u + f \quad && in\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= -\mathbf{i} k u + g && on\ \Gamma. \end{aligned}$$

运用带诺依曼边界条件的泊松方程的正则估计和迹不等式可得:

$$\begin{aligned} \|u\|_s &\lesssim \big\|(k^2+1)u + f\big\|_{s-2} + \Big\|-\mathbf{i} k u - \frac{u}{2R} + g\Big\|_{H^{s-3/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim k^2 \|u\|_{s-2} + \|f\|_{s-2} + k\|u\|_{s-1} + \|g\|_{H^{s-3/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim k^{s-1}\big(\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\big) + \sum_{j=0}^{s-2} k^{s-j-2}\big(\|f\|_j + \|g\|_{H^{j+1/2}(\Gamma)}\big) \\ &\lesssim k^{s-1} C_{s-2,f,g}. \end{aligned}$$

于是结论成立。

§4 对高波数散射问题中的不同边界条件的误差分析

二维的Helmholtz方程的解有如下的渐进展开:

$$u \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i(kr-\pi/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_j(\theta)}{r^j}. \tag{4.1}$$

令$B = \frac{\partial}{\partial r} - ik + \frac{1}{2r}$,则通过简单计算有：

$$|Bu| = O(\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}})$$

记$\|u\|_{(r)}^2 = \int\int_{|y|=r} |u(y)|^2 \, dA_y$.

引理 4.1 对于方程:

$$\Delta w + k^2 w = 0, \qquad in\ \Omega, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} - ikw = h, \qquad on\ \partial\Omega. \tag{4.3}$$

其中Ω是圆心在原点，大小为R的圆。我们有如下的估计：

$$\|w\|_{(r_1)} \leq \frac{\|h\|_{r_1}}{k}.$$

证明 证明见*[3]*

用同样的方法，可得对于方程

$$\Delta w + k^2 w = 0, \qquad in\ \Omega, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} - ikw + \frac{w}{2r} = h, \qquad on\ \partial\Omega. \tag{4.5}$$

也有类似的结论。

推论 4.1 方程

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

当边界条件是$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = h$时，由上述引理可知，解$u$与高波散射问题的真实解$v$的误差$w$满足方程(4.2)–(4.3),故有

$$\|w\|_{(r_1)} = \|u - v\|_{(r_1)} \leq \frac{\|h\|_{(r_1)}}{k} \tag{4.6}$$

由于在二维*Helmholtz*方程中*:*

$$|h| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}}}$$

所以有，

$$\|w\|_{(r_1)} \leq \frac{C}{kr}$$

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial r}\right\|_{(r_1)} \leq k\|w\|_{(r_1)} + \|h\|_{(r_1)} \leq 2\|h\|_{(r_1)} \leq \frac{2C}{r}.$$

同理，当边界条件是$\frac{\partial u}{\partial r} - iku + \frac{u}{2R} = h$时，解$u$与高波散射问题的真实解$v$的误差$w$满足方程(4.4)–(4.5),故有

$$\|w\|_{(r_1)} = \|u - v\|_{(r_1)} \leq \frac{\|h\|_{(r_1)}}{k} \tag{4.7}$$

此时,

$$|h| \leq \frac{C}{r^{\frac{5}{2}}}$$

所以有,

$$\|w\|_{(r_1)} \leq \frac{C}{kr^2}$$

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial r}\right\|_{(r_1)} \leq (k + \frac{1}{2r})\|w\|_{(r_1)} + \|h\|_{(r_1)} \leq (2 + \frac{1}{2kr})\|h\|_{(r_1)} \leq \frac{C}{r^2}(2 + \frac{1}{2kr}).$$

§5 预渐进误差分析

§5.1 一些引理

引理 5.1 令$1 \leq s \leq p+1$. 假设$u \in H^s(\Omega)$. 于是存在$\hat{u}_h \in V_h$ 使得

$$\|u - \hat{u}_h\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u, \hat{u}_h) \lesssim h^s|u|_s. \tag{5.1}$$

引理 5.2 设u 是问题(1.5)–(1.6).假设$f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. 则存在$\hat{u}_h \in V_h$ 使得

$$\|u - \hat{u}_h\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u, \hat{u}_h) \lesssim \big(h^2 + h(kh)^p\big)C_{f,g}, \tag{5.2}$$

其中$C_{f,g} = C(\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Omega)})$.

证明 由引理*3.3*知可将u分解成$u = u_\mathcal{E} + u_\mathcal{A}$ 其中$u_\mathcal{E} \in H^2, u_\mathcal{A} \in H^j$,对于任意$j \geq 0$. 对于$u_\mathcal{E}$由上述引理可知存在$\widehat{u_{\mathcal{E}h}}$使得:

$$\begin{aligned}\|u_\mathcal{E} - \widehat{u_{\mathcal{E}h}}\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u_\mathcal{E}, \widehat{u_{\mathcal{E}h}}) &\lesssim \|u_\mathcal{E} - \widehat{u_{\mathcal{E}h}}\|_0 + hk\|u_\mathcal{E} - \widehat{u_{\mathcal{E}h}}\|_0 + hE_\Gamma(u_\mathcal{E}, \widehat{u_{\mathcal{E}h}}) \\ &\lesssim (1 + hk)(\|u_\mathcal{E} - \widehat{u_{\mathcal{E}h}}\|_0 + hE_\Gamma(u_\mathcal{E}, \widehat{u_{\mathcal{E}h}})) \\ &\lesssim (1 + hk)h^2|u_\mathcal{E}|_2 \lesssim h^2 C_{f,g}\end{aligned}$$

同理可知，存在$\widehat{u_{\mathcal{A}h}}$使得：

$$\begin{aligned}\|u_{\mathcal{A}}-\widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0+h\mathbb{E}_\gamma(u_{\mathcal{A}},\widehat{u_{\mathcal{A}h}}) &\lesssim \|u_{\mathcal{A}}-\widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0+hk\|u_{\mathcal{A}}-\widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0+hE_\Gamma(u_{\mathcal{A}},\widehat{u_{\mathcal{A}h}})\\ &\lesssim (1+hk)(\|u_{\mathcal{A}}-\widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0+hE_\Gamma(u_{\mathcal{A}},\widehat{u_{\mathcal{A}h}}))\\ &\lesssim (1+hk)h^{p+1}|u_{\mathcal{A}}|_{p+1}\lesssim k^ph^{p+1}C_{f,g}\end{aligned}$$

令$\widehat{u}_h=\widehat{u_{\mathcal{E}h}}+\widehat{u_{\mathcal{A}h}}$于是有

$$\begin{aligned}\|u-\hat{u}_h\|_0+h\mathbb{E}_\gamma(u,\hat{u}_h) &\lesssim (\|u_{\mathcal{E}}-\widehat{ue}_h\|_0+h\mathbb{E}_\gamma(u_{\mathcal{E}},\widehat{u_{\mathcal{E}h}}))+(\|u_{\mathcal{A}}-\widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0+h\mathbb{E}_\gamma(u_{\mathcal{A}},\widehat{u_{\mathcal{A}h}}))\\ &\lesssim h^2C_{f,g}+k^ph^{p+1}C_{f,g}\\ &\lesssim (h^2+h(kh)^p\big)C_{f,g}\end{aligned}$$

引理 5.3 存在常数$\gamma_0<0$ 使得如果$\gamma_0\le\gamma_{j,e}\lesssim 1$, 则对于任意的$1\le j\le p, e\in\mathcal{E}_h^I$, 有

$$a_\gamma(v_h,v_h)^{1/2}\eqsim\|\nabla v_h\|_0,\quad \forall v_h\in V_h. \tag{5.3}$$

推论 5.1 由上述引理可知，如果$|\gamma_{j,e}|\lesssim 1$, 则对于任意的$1\le j\le p, e\in\mathcal{E}_h^I$, 有

$$\|v_h\|_{1,\gamma}\eqsim\|v_h\|_1\quad \forall v_h\in V_h.$$

在下文中我们都假设γ_0保证上述引理成立的，即有$\gamma_0\le\gamma_{j,e}\lesssim 1$ 对于任意的$1\le j\le p, e\in\mathcal{E}_h^I$.

§5.2 L^2投影算子、椭圆投影算子和离散Sobolev范数

定义V_h的L^2投影算子：

$$(Q_h\varphi,v_h)=(\varphi,v_h)\quad \forall v_h\in V_h, \tag{5.4}$$

引理 5.4 对于任意的整数$0\le j\le p+1$,$\varphi\in L^2(\Omega)$,有

$$\|\varphi-Q_h\varphi\|_{-j}\lesssim h^j\inf_{\varphi_h\in V_h}\|\varphi-\varphi_h\|_0.$$

定义如下的椭圆投影算子$P_{h,\gamma}$:

$$a_\gamma(P_h\varphi,v_h)+(P_h\varphi,v_h)=a(\varphi,v_h)+(\varphi,v_h)\quad \forall v_h\in V_h,\varphi\in V, \tag{5.5}$$

则我们有下列在H^1,L^2,以及负范数上的误差估计。

引理 5.5 对于任意的$-1 \le j \le p-1$, $\varphi \in H^1(\Omega)$,有

$$\|\varphi - P_h\varphi\|_{-j} \lesssim h^{j+1} \inf_{\varphi_h \in V_h} E_\gamma(\varphi, \varphi_h).$$

定义离散的soblev算子$A_h : V_h \mapsto V_h$:

$$(A_h v_h, w_h) = a_\gamma(v_h, w_h) + (v_h, w_h) \quad \forall v_h, w_h \in V_h. \tag{5.6}$$

有引理可知A_h是对称和正定的。因此我们可以通过算子的特征值和特征函数来定义算子的大小.A_h的特征值和特征函数分别记为:

$$\lambda_{1h} < \lambda_{2h} < \cdots < \lambda_{\dim(V_h)h}, \tag{5.7}$$

$$\phi_{1h}, \phi_{2h}, \cdots, \phi_{\dim(V_h)h} \tag{5.8}$$

易知这些特征值都是正的，并且特征函数构成了V_h的一组正交基。
对于任意的实数j,我们如下定义A_h^j:
令 $v_h = \sum_{m=1}^{\dim(V_h)} a_m \phi_{mh}$, 则 $A_h^j v_h = \sum_{m=1}^{\dim(V_h)} \lambda_{mh}^j a_m \phi_{mh}$
对于任意整数j,在V_h上我们定义如下的离散H^j范数:

$$\|v_h\|_{j,h} := \left\| A_h^{j/2} v_h \right\|_0 \tag{5.9}$$

易知:

$$\|v_h\|_{0,h} = \|v_h\|_0\,, \|v_h\|_{1,h} = (A_h v_h, v_h)^{1/2} \eqsim \|v_h\|_1 \eqsim \|v_h\|_{1,\gamma}\,, \forall v_h \in V_h. \tag{5.10}$$

引理 5.6 对于任意整数j,有

$$\|v_h\|_{j,h} \lesssim h^{-1} \|v_h\|_{j-1,h} \quad \forall v_h \in V_h.$$

引理 5.7 对于任意整数j, $0 \le j \le p+1$,有

$$\|v_h\|_{-j,h} \lesssim \sum_{m=0}^{j} h^{j-m} \|v_h\|_{-m}\,, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{5.11}$$

§5.3 预渐进误差分析

下面的定理给出CIP-FEM的预渐进误差分析。

定理 5.1 设u 和uh分别是(1.5)–(1.6)和(2.4)的解，则存在与k,h无关的常数C_0使得如果

$$k(kh)^{2p} \le C_0, \tag{5.12}$$

则有如下的误差估计：

$$\mathbb{E}_\gamma(u,u_h) \lesssim \big(1+k(kh)^p\big) \inf_{z_h\in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u,z_h), \tag{5.13}$$

$$\|u-u_h\|_0 \lesssim \big(h+(kh)^p\big) \inf_{z_h\in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u,z_h). \tag{5.14}$$

证明 假设$kh \lesssim 1$. 令$P_h u$ 为u的椭圆投影算子。令

$$e_h := u-u_h = (u-P_h u) + (P_h u - u_h) := \rho + \theta_h.$$

从引理5.5可得：

$$\|\rho\|_{-j} \lesssim h^{j+1} \inf_{z_h\in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u,z_h), \quad 0\le j\le p-1. \tag{5.15}$$

剩下来就只需要估计θ_h了.由等式(2.1)和(2.4)我们有如下的$Galerkin$正交性：

$$a(e_h,v_h) - k^2(e_h,v_h) - \mathbf{i}k\left\langle e_h,v_h\right\rangle + \frac{1}{2R}\left\langle e_h,v_h\right\rangle = J(u_h,v_h), \quad \forall v_h\in V_h.$$

由P_h的定义可得：

$$a_\gamma(\theta_h,v_h) - k^2(\theta_h,v_h) - \mathbf{i}k\left\langle \theta_h,v_h\right\rangle + \frac{1}{2R}\left\langle \theta_h,v_h\right\rangle = (k^2+1)(\rho,v_h) + \mathbf{i}k\left\langle \rho,v_h\right\rangle - \frac{1}{2R}\left\langle \rho,v_h\right\rangle, \quad \forall v_h\in V_h. \tag{5.16}$$

Step 1. 这一步我们用θ_h的$(p-1)$阶的离散范数来估计$\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}$。令$v_h=\theta_h$ 代入上式并取虚部可得：

$$\begin{aligned} k\left\|\theta_h\right\|^2_{L^2(\Gamma)} &= -\operatorname{Im}\big((k^2+1)(Q_h\rho,\theta_h)\big) - \operatorname{Re}\big(k\left\langle \rho,\theta_h\right\rangle\big) + \frac{1}{2R} Im\left\langle \rho,\theta_h\right\rangle \\ &\le (k^2+1)\left\|Q_h\rho\right\|_{1-p,h}\left\|\theta_h\right\|_{p-1,h} + k\left\|\rho\right\|_{L^2(\Gamma)}\left\|\theta_h\right\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

引理5.5中取$\varphi_h = P_h u$, 我们有

$$\left\|Q_h\rho\right\|_{1-p,h} = \left\|Q_h u - P_h u\right\|_{1-p,h} = \left\|Q_h u - u + u - P_h u\right\|_{1-p,h} \lesssim h^p \inf_{z_h\in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u,z_h).$$

同时注意到$\|\rho\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\rho\|_0^{1/2}\|\rho\|_1^{1/2} \lesssim h^{1/2}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)$, 于是

$$k\|\rho\|_{L^2(\Gamma)}\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{k}{2}\|\rho\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k}{2}\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq Ckh\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)^2 + \frac{k}{2}\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

组合上述三个估计可得:

$$\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \lesssim kh^p\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\|\theta_h\|_{p-1,h} + h\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)^2 \lesssim k^2h^{2p-1}\|\theta_h\|_{p-1,h}^2 + h\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)^2. \tag{5.17}$$

Step 2. 这一步中我们用θ_h的L^2范数来估计它的高阶离散范数。由A_h的定义可知, (5.16)可被写成

$$\begin{aligned}(A_h\theta_h,v_h) = (k^2+1)(\theta_h,v_h) + (k^2+1)(Q_h\rho,v_h) + \mathbf{i}k\langle\theta_h,v_h\rangle \\ - \frac{1}{2R}\langle\theta_h,v_h\rangle + \mathbf{i}k\langle\rho,v_h\rangle - \frac{1}{2R}\langle\rho,v_h\rangle, \quad \forall v_h\in V_h.\end{aligned}$$

任给整数$1\leq m\leq p$, 在上式中取$v_h = A_h^{m-1}\theta_h$ 可得

$$\begin{aligned}\|\theta_h\|_{m,h}^2 = (k^2+1)\|\theta_h\|_{m-1,h}^2 + (k^2+1)(A_h^{(m-1)/2}Q_h\rho, A_h^{(m-1)/2}\theta_h) + \mathbf{i}k\left\langle\theta_h, A_h^{m-1}\theta_h\right\rangle \\ - \frac{1}{2R}\left\langle\theta_h, A_h^{m-1}\theta_h\right\rangle + \mathbf{i}k\left\langle\rho, A_h^{m-1}\theta_h\right\rangle - \frac{1}{2R}\left\langle\rho, A_h^{m-1}\theta_h\right\rangle.\end{aligned}$$

由迹不等式和逆不等式可得:

$$\begin{aligned}\left|\left\langle\theta_h, A_h^{m-1}\theta_h\right\rangle\right| &\lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}\left\|A_h^{m-1}\theta_h\right\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}h^{-1/2}\|\theta_h\|_{2m-2,h} \\ &\lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}h^{-m+1/2}\|\theta_h\|_{m-1,h} \\ &\lesssim \left(kh^{p-m}\|\theta_h\|_{p-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\right)\|\theta_h\|_{m-1,h} \\ &\lesssim \left(k\|\theta_h\|_{m-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\right)\|\theta_h\|_{m-1,h}, \\ \left|\left\langle\rho, A_h^{m-1}\theta_h\right\rangle\right| &\lesssim \|\rho\|_{L^2(\Gamma)}\left\|A_h^{m-1}\theta_h\right\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^{1/2}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)h^{-m+1/2}\|\theta_h\|_{m-1,h} \\ &\lesssim h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\|\theta_h\|_{m-1,h}.\end{aligned}$$

因此有$1\leq m\leq p$,

$$\begin{aligned}\|\theta_h\|_{m,h}^2 \lesssim& k^2\|\theta_h\|_{m-1,h}^2 + k^2\|Q_h\rho\|_{m-1,h}\|\theta_h\|_{m-1,h} \\ &+ \left(k\|\theta_h\|_{m-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\right)k\|\theta_h\|_{m-1,h},\end{aligned}$$

进一步由$young$不等式可得:

$$\|\theta_h\|_{m,h} \lesssim k\|\theta_h\|_{m-1,h} + k\|Q_h\rho\|_{m-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h).$$

由于$k\|Q_h\rho\|_{m-1,h} \lesssim kh^{1-m}\|Q_h\rho\|_{0,h} \lesssim kh^{2-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h) \lesssim h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)$,所以

$$\|\theta_h\|_{m,h} \lesssim k\|\theta_h\|_{m-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h), \quad 1\le m\le p. \tag{5.18}$$

递归的使用上述不等式可得任意整数$0\le m\le p$,有

$$\|\theta_h\|_{m,h} \lesssim k^m\|\theta_h\|_0 + \sum_{n=0}^{m-1}k^n h^{1-m+n}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h) \lesssim k^m\|\theta_h\|_0 + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h). \tag{5.19}$$

Step 3. 这一步中我们用θ_h的$(p-1)$离散范数来估计它的L^2范数。考虑对偶问题:

$$\begin{aligned} -\triangle w - k^2 w &= \theta_h \quad \text{in} \ \ \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} + \mathbf{i}kw + \frac{w}{2R} &= 0 \quad \text{on} \ \ \Gamma. \end{aligned}$$

用$e_h=\rho+\theta_h$和上式做内积运算,令$v_h=P_hw$可得:

$$\begin{aligned} (\rho+\theta_h,\theta_h) &= a(e_h,w) - k^2(e_h,w) - \mathbf{i}k\langle e_h,w\rangle + \frac{1}{2R}\langle e_h,w\rangle \\ &= a(e_h,w-P_hw) - \mathbf{i}k\langle e_h,w-P_hw\rangle - k^2(e_h,w-P_hw) \\ &\quad + \frac{1}{2R}\langle e_h,w-P_hw\rangle + J(u_h,P_hw) \\ &= a(\rho,w-P_hw) + (\rho,w-P_hw) - (k^2+1)(\rho+\theta_h,w-P_hw) \\ &\quad - \mathbf{i}k\langle \rho+\theta_h,w-P_hw\rangle + \frac{1}{2R}\langle\rho+\theta_h,w-P_hw\rangle + J(P_hu,P_hw). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \|\theta_h\|_0^2 &= a(\rho,w-P_hw) - k^2(\rho,w-P_hw) - \mathbf{i}k\langle\rho,w-P_hw\rangle + \frac{1}{2R}\langle\rho,w-P_hw\rangle + J(P_hu,P_hw) \\ &\quad - (k^2+1)(\theta_h,w-P_hw) - \mathbf{i}k\langle\theta_h,w-P_hw\rangle + \frac{1}{2R}\langle\theta_h,w-P_hw\rangle - (\rho,\theta_h) \\ &\le \mathbb{E}_\gamma(u,P_hu)\mathbb{E}_\gamma(w,P_hw) + (k^2+1)\left|(\theta_h,w-P_hw)\right| + k\left|\langle\theta_h,w-P_hw\rangle\right| + \|\rho\|_0\|\theta_h\|_0 \\ &\le \inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(w,z_h) + (k^2+1)\left|(\theta_h,w-P_hw)\right| + k\left|\langle\theta_h,w-P_hw\rangle\right| + \|\rho\|_0\|\theta_h\|_0, \end{aligned} \tag{5.20}$$

我们还可以证明：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\gamma(w, P_h w) &\lesssim \mathbb{E}_\gamma(w_\mathcal{E}, w_{h,\mathcal{E}}) + \mathbb{E}_\gamma(w_\mathcal{A}, w_{h,\mathcal{A}}) \\ &\lesssim h\,|w_\mathcal{E}| + h^p\,|w_\mathcal{A}|_{p+1} \lesssim h\,\|\theta_h\|_0 + (hk)^p\,\|\theta_h\|_0 \lesssim (h + (hk)^p)\,\|\theta_h\|_0 .\end{aligned}$$

$$\|w - P_h w\|_0 \lesssim h \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(w, z_h) \lesssim h(h + (kh)^p)\,\|\theta_h\|_0 . \tag{5.21}$$

于是，

$$\begin{aligned}|(\theta_h, w - P_h w)| &= |(\theta_h, Q_h w - P_h w)| \\ &\le \|\theta_h\|_{p-1,h}\,\|Q_h w - w + w - P_h w\|_{1-p,h} \\ &\lesssim \|\theta_h\|_{p-1,h}\,h^p\big(h + (kh)^p\big)\,\|\theta_h\|_0 .\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}|\langle\theta_h, w - P_h w\rangle| &\lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}\,\|w - P_h w\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\lesssim \big(kh^{p-1/2}\,\|\theta_h\|_{p-1,h} + h^{1/2}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h)\big)h^{1/2}\mathbb{E}_\gamma(w, P_h w) \\ &\lesssim \big(kh^{p-1/2}\,\|\theta_h\|_{p-1,h} + h^{1/2}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h)\big)h^{1/2}\big(h + (kh)^p\big)\,\|\theta_h\|_0 \\ &\lesssim \big(kh^{p}\,\|\theta_h\|_{p-1,h} + h\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h)\big)\big(h + (kh)^p\big)\,\|\theta_h\|_0 .\end{aligned} \tag{5.23}$$

最后把(5.15)和(5.21)–(5.23)代入(5.20)我们可得

$$\|\theta_h\|_0 \lesssim \big(h + (kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h) + h^p\big(h + (kh)^p\big)k^2\,\|\theta_h\|_{p-1,h} . \tag{5.24}$$

Step 4. 组合(5.24)和(5.19)，并令$m = p - 1$,有

$$\begin{aligned}\|\theta_h\|_0 &\lesssim \big(h + (kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h) + h^p\big(h + (kh)^p\big)\big(k^{p+1}\,\|\theta_h\|_0 + k^2h^{2-p}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h)\big) \\ &\lesssim \big(h + (kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h) + \big((kh)^{p+1} + k(kh)^{2p}\big)\,\|\theta_h\|_0 .\end{aligned}$$

因此存在常数C_0使得如果$k(kh)^{2p} \le C_0$, 有

$$\|\theta_h\|_0 \lesssim \big(h + (kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h).$$

进一步有

$$\|\theta_h\|_1 \lesssim k\,\|\theta_h\|_0 + \inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h) \lesssim \big(1 + k(kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h).$$

于是定理得证。

由定理5.1和上面的引理,对于H^{p+1}正则解我们有如下的估计。

推论 5.2 设u和u_h分别是(1.5)–(1.6)和(2.4)的解。假设$C_{p-1,f,g} \lesssim 1$。于是存在和h,k无关的C_0, C_1, C_2 使得如果$k(kh)^{2p} \leq C_0$, 则有如下的估计成立:

$$\|u - u_h\|_1 \leq C_1(kh)^p + C_2 k(kh)^{2p}, \tag{5.25}$$

$$k\|u - u_h\|_0 \leq C_1(kh)^{p+1} + C_2 k(kh)^{2p}. \tag{5.26}$$

由引理5.1, 5.2和定理5.1，我们可以得到如下的CIP-FEM 的稳定性估计。

推论 5.3 假设问题(1.5)–(1.6)的解$u \in H^2(\Omega)$. 则在定理*5.1*的条件下我们有如下估计*:*

$$\|\nabla u_h\|_0 + k\|u_h\|_0 \lesssim C_{f,g},$$

即*CIP-FEM* 是适定的。

证明

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_h\|_0 + k\|u_h\|_0 &\lesssim \|\nabla(u-u_h)\| + \|\nabla u\| + k\|u-u_h\|_0 + k\|u\|_0 + \left|J^{\frac{1}{2}}(u_h,u_h)\right| \\
&\lesssim \mathbb{E}_\gamma(u,u_h) + \|\nabla u\| + k\|u\|_0 \\
&\lesssim (1 + k(kh)^p) \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u,z_h) + C_{f,g} \\
&\lesssim (1 + k(kh)^p)(h + (kh)^p)C_{f,g} + C_{f,g} \lesssim C_{f,g}
\end{aligned}$$

§6 数值实验

§7 总结与展望

参考文献

[1] Stephen Grossberg, *Adaptive Resonance Theory:How a brain learns to consciously attend,learn,and recognize a changing world*. Neural Networks, **37**(2013),pp.1-47.

[2] Yu Du and Haijun Wu, *Preasymptotic error analysis of higher order FEM and CIP-FEM for Helmholtz equation with high wave number*. SIAM J. Numer. Anal., **53**(2015), pp. 782 – 804

[3] Bayliss, A., Gunzburger, M., and Turkel, E. 1982. *Boundary conditionsfor the numerical solution of elliptic equations in exterior regions.SIAM Journal of Applied Mathematics* , **42**: 430 – 451.

[4] 武海军, 偏微分方程数值解法*II*,pp.61-73

[5] Zhiming Chen and Haijun Wu, *Selected Topics in Finite Element Methods*, Science Press Beijing, 2010.

[6] G.J Lord and A.M Stuart, *Discrete Gevrey regularity attractors and upperssemicontinuity for a finite difference approximation to the Ginzburg – Landau equation*, Numer. funct. anal. and optim., **16** (1995), pp. 1003 – 1047.

致 谢

经过长时间的努力，终于完成了这篇论文，在本文的写作过程当中，得到了许多老师和同学的热心帮助，在此向他们表示感谢。

首先要感谢我的导师武海军老师，他对学术的专注和对学生的关怀，让我深受感动，也为我将来工作和生活树立了榜样。武老师对我的毕业论文的构思、选题都悉心指导，并且在论文的写作当中，给予了我很多建设性意见，对此我表示衷心的感谢！

同时，我还要感谢三年来给予我帮助的所有老师和同学，他们给我带来了丰富的概率统计的基础知识和深入研究问题的方法，使我受益匪浅。感谢我的同门师兄妹，大家互助友爱，共同学习，一起营造了一个良好的学术氛围。

最后，感谢我的家人一直以来对我的关心和支持。