南京大学

研 究 生 毕 业 论 文

（申 请 硕 士 学 位）

论文题目：人工神经网络的范畴解释及其应用

作　　者：武伟

专　　业：计算数学

研究方向：范畴理论及其应用

指导教师：丁南庆 教授

二〇一六年五月一日

学　　　　号:　　　MG1321022

论文答辩日期:　　　　年　　月　　日

指 导 教 师:　　　　　　　　　（签字）

目　录

Contents

中文摘要 1

英文摘要 2

带有一阶边界项的Helmholtz方程的稳定性和误差估计 3

1 引论 3

2 公式和符号 3

3 引理 5

4 对高波数散射问题中的不同边界条件的误差分析 8

5 预渐进误差分析 10

5.1 一些引理 10

5.2 L^2投影算子、椭圆投影算子和离散Sobolev范数 11

5.3 预渐进误差分析 12

6 数值实验 17

7 总结与展望 17

参考文献 18

致谢 19

毕业论文题目：人工神经网络的范畴解释及其应用

计算数学 专业 2013 级硕士生姓名：武伟

指导教师（姓名、职称）：丁南庆教授

本文主要是人工神经网络的范畴解释及其应用......

关键词： 人工神经网络，范畴，MLP，CNN，ART1

THESIS:

the categorical explanation and application of artificial neural networks

SPECIALIZATION: computational mathematics

POSTGRADUATE: wei Wu

MENTOR: Professor nanqing Ding

In this thesis, we apply category theory to explain how can neural networks store information......

Key Words: artificial neural network, category, MLP, CNN, ART1

带有一阶边界项的Helmholtz方程的稳定性和误差估计

§1 引论

$$-\Delta u - k^2 u = f \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{i} k u = g \qquad \text{on } \Gamma, \tag{1.2}$$

$$-\Delta u - k^2 u = f \qquad \text{in } \Omega, \tag{1.3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{i} k u + \frac{1}{2R} u = g \qquad \text{on } \Gamma, \tag{1.4}$$

方程(1.1)–(1.2)是高波数声波散射问题中常见的方程。边界条件(1.2)是对反射波在无穷远处趋近于零的近似. 方程(1.3)–(1.4)是对反射波在无穷远处趋近于零的更精细的近似。本文对方程(1.3)–(1.4) 进行预渐进误差分析，以减少污染项。

§2 公式和符号

Ω为圆点在(0, 0)半径为R的圆。Γ 为Ω 的边界，即$\partial\Omega$。$i := \sqrt{-1}$ 。k为波数。通篇中，C用来标记与h, k, f, g无关的正常数。我们用记号$A \lesssim B$和$B \lesssim A$ 来分别表示$A \le CB$ 和$B \ge CA$. $A \eqsim B$ 是$A \lesssim B$ 和$B \lesssim A$的缩写. 因为考虑的是高波数问题，所以假设$k \gg 1$，且是个定值。$p = O(1)$ 也是个定值。

$(\cdot,\cdot)_\Omega$ 表示Ω上的L^2 内积。$\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\Omega}$表示$\Gamma$ 上的L^{2}内积。我们用如下缩写: $\|\cdot\|_j := \|\cdot\|_{H^j(\Omega)}$ 和$|\cdot|_j := |\cdot|_{H^j(\Omega)}$.

$V_h := \left\{ v_h \in H^1(\Omega) :\ v_h\,|_K \circ F_K \in \mathcal{P}_p(\widehat{K})\ \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}$, 即$V_h$是$\Omega$上的$p$阶分片多项式空间，其中，$\mathcal{T}_h$是$\Omega$的一致三角剖分，$h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$. $\widehat{K}$是三角形K的参考单元，F_K是从$\widehat{K}$到K的映射，$\mathcal{P}_p(\widehat{K})$是$\widehat{K}$上的所有次数不超过p的多项式的集合。

$\mathcal{E}_h^I$是T_h的所有的内部边（面）的集合。对于每一个$e=\partial K\cap\partial K'\in\mathcal{E}_h^I$,令$n_e$为指向$e$的单位法向量,定义$v$在$e$上的跳量为$[v]\,|_e := v|_{K'} - v|_K$.

记$a(u,v):=(\nabla u,\nabla v),\forall u,v\in H^1(\Omega)$. 则问题(1.3)–(1.4)的变分形式为:

$$a(u,v)-k^2(u,v)-ik\left\langle u,v\right\rangle+\frac{1}{2R}\left\langle u,v\right\rangle=(f,v)+\left\langle g,v\right\rangle,\quad \forall v\in V \tag{2.1}$$

我们定义能量空间V 和在$V\times V$上的双线性形式$a_\gamma(\cdot,\cdot)$如下:

$$V:=H^1(\Omega)\cap\prod_{K\in\mathcal{T}_h}H^{p+1}(K),$$

$$a_\gamma(u,v):=a(u,v)+J(u,v)\qquad\forall\, u,v\in V, \tag{2.2}$$

$$J(u,v):=\sum_{j=1}^{p}\sum_{e\in\mathcal{E}_h^I}\gamma_{j,e}\,h_e^{2j-1}\left\langle\left[\frac{\partial^j u}{\partial n_e^j}\right],\left[\frac{\partial^j v}{\partial n_e^j}\right]\right\rangle_e, \tag{2.3}$$

其中$\gamma_{j,e},e\in\mathcal{E}_h^I$ 是拥有非负虚部的惩罚因子。

CIP-FEM 如下定义: 找到$u_h\in V_h$使得

$$a_\gamma(u_h,v_h)-k^2(u_h,v_h)-\mathbf{i}k\left\langle u_h,v_h\right\rangle+\frac{1}{2R}\left\langle u_h,v_h\right\rangle=(f,v_h)+\left\langle g,v_h\right\rangle\qquad\forall v_h\in V_h. \tag{2.4}$$

显然如果$u\in H^{p+1}(\Omega)$,$v\in V$ 有$J(u,v)=0$. 因此如果$u\in H^{p+1}(\Omega)$是(1.3)–(1.4) 的解,那么有

$$a_\gamma(u,v_h)-k^2(u,v_h)-\mathbf{i}k\left\langle u,v_h\right\rangle+\frac{1}{2R}\left\langle u,v_h\right\rangle=(f,v_h)+\left\langle g,v_h\right\rangle\qquad\forall v_h\in V_h.$$

我们在V上定义如下范数:

$$|v|_{1,\gamma}:=\Big(\left\|\nabla v\right\|_0^2+\sum_{j=1}^{p}\sum_{e\in\mathcal{E}_h^I}|\gamma_{j,e}|\;h_e^{2j-1}\left\|\left[\frac{\partial^j v}{\partial n_e^j}\right]\right\|_{L^2(e)}^2\Big)^{1/2}, \tag{2.5}$$

$$\|v\|_{1,\gamma}:=\big(|v|_{1,\gamma}^2+\|v\|_0^2\big)^{1/2}, \tag{2.6}$$

因为精确解不在V中, 我们定义如下范数来衡量离散误差:

$$E_\gamma(v,v_h):=\Big(\left\|v-v_h\right\|_1^2+\sum_{j=1}^{p}\sum_{e\in\mathcal{E}_h^I}|\gamma_{j,e}|\;h_e^{2j-1}\left\|\left[\frac{\partial^j v_h}{\partial n_e^j}\right]\right\|_{L^2(e)}^2\Big)^{1/2}, \tag{2.7}$$

$$\mathbb{E}_\gamma(v,v_h):=\big(E_\gamma(v,v_h)^2+k^2\left\|v-v_h\right\|_0^2\big)^{\frac{1}{2}}\quad\forall v\in H^1(\Omega),v_h\in V_h. \tag{2.8}$$

以下章节中如果没有明确给出证明也没有给出证明的参考文献的话，证明细节都见[1].

§3 引理

引理 3.1 令$\alpha(x) := x - x_\Omega$.有

$$d\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2Re(v, \alpha\cdot\nabla v) = \int_{\partial\Omega} \alpha\cdot n\,|v|^2, \qquad \forall v\in H^1(\Omega), \quad (3.1)$$

$$(d-2)\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2Re(\nabla v, \nabla(\alpha\cdot\nabla v)) = \int_{\partial\Omega} \alpha\cdot n\,|\nabla v|^2, \qquad \forall v\in H^2(\Omega) \quad (3.2)$$

上述恒等式也称为$Rellich$恒等式。

证明 证明见*[3]*

引理 3.2 散射问题(1.3)–(1.4)的解满足

$$\|u\|_{H^j(\Omega)} \lesssim k^{j-1}(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}), \qquad j=0,1, \quad (3.3)$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \lesssim k(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}) + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (3.4)$$

证明 在变分公式(2.1)中令$v=u$,并取实部得:

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - k^2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - k^2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2R}\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &\le |(f,u) + \langle g,u\rangle| \\ &\lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|u\|_{L^2(\Gamma)}.\end{aligned}$$

取虚部得:

$$\begin{aligned}k\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} &\lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\|u\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2k}\|g\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{k}{2}\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}\end{aligned}$$

从而

$$k\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} \le 2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{k}\|g\|^2_{L^2(\Gamma)} \quad (3.5)$$

于是

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - k^2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le 2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{k}\|g\|^2_{L^2(\Gamma)} \quad (3.6)$$

其次，在(2.1)中令$v=\alpha\cdot\nabla u$, 并取实部得

$$2Re(\nabla u, \nabla(\alpha\cdot\nabla u)) - 2k^2Re(u, \alpha\cdot\nabla u) - 2kIm\langle u, \alpha\cdot\nabla u\rangle = 2Re((f, \alpha\cdot\nabla u) + \langle g, \alpha\cdot\nabla u\rangle).$$

由(3.1)和(3.2)及上式可得:

$$\int_\Gamma \alpha\cdot n\,|\nabla u|^2-(d-2)\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}-k^2\int_\Omega \alpha\cdot n\,|u|^2+dk^2\,\|u\|_{L^2(\Omega)}-2kIm\,\langle u,\alpha\cdot\nabla u\rangle$$
$$=2Re((f,\alpha\cdot\nabla u)+\langle g,\alpha\cdot\nabla u\rangle).$$

从而由(3.5)和(3.6)得:

$$\begin{aligned}
k^2\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Gamma \alpha\cdot n\,|\nabla u|^2-\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+(d-1)(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}-k^2\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)})\\
&+k^2\int_\Omega \alpha\cdot n\,|u|^2+2kIm\,\langle u,\alpha\cdot\nabla u\rangle+2Re((f,\alpha\cdot\nabla u)+\langle g,\alpha\cdot\nabla u\rangle)\\
&\le -R\int_\Gamma |\nabla u|^2-\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}+(d-1)(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}-k^2\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)})\\
&+Ck^2\,\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}+Ck\,\|u\|_{L^2(\Gamma)}\,\|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)}\\
&+C\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}+C\,\|g\|_{L^2(\Gamma)}\,\|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)}\\
&\le C\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{L^2(\Omega)}+Ck^2\,\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}+C\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+C\,\|g\|^2_{L^2(\Gamma)}\\
&\le Ck\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{L^2(\Omega)}+C\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+C\,\|g\|^2_{L^2(\Gamma)}\\
&\le \frac{k^2}{2}\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)}+C\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+C\,\|g\|^2_{L^2(\Gamma)}
\end{aligned}$$

故

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\lesssim\frac{1}{k}(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}) \tag{3.7}$$

即引理的结论对$j=0$成立，带入得$j=1$也成立。

最后，由椭圆方程的正则性理论，可得:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2(\Omega)} &\lesssim \left\|(1+k^2)u+f\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|g+iku-\frac{u}{2R}\right\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}\\
&\lesssim k^2\,\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}+k\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\\
&\lesssim k(\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|g\|_{L^2(\Gamma)})+\|g\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

推论 3.1 易得:

$$k^2\,\|u\|_0+k\,\|u\|_1+\|u\|_2\lesssim k(\|f\|_0+\|g\|_{L^2(\Gamma)})+\|g\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}. \tag{3.8}$$

引理 3.3 Ω是个带有解析边界的星形区域，$f \in L^2(\Omega), g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.则问题(1.1)–(1.2)的解可以写成$u = u_{\mathcal{E}} + u_{\mathcal{A}}$,并有

$$|u_{\mathcal{E}}|_j \lesssim k^{j-2} C_{f,g}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{3.9}$$

$$|u_{\mathcal{A}}|_j \lesssim k^{j-1} C_{f,g} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0. \tag{3.10}$$

这里，$C_{f,g} := \|f\|_0 + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$.

推论 3.2 对于问题(1.3)–(1.4)也有相同的结论：

证明 将问题(1.3)–(1.4)变为：

$$\begin{aligned} -\Delta u - k^2 u = f \qquad & in\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \mathbf{i} k u = -\frac{1}{2R} u + g \qquad & on\ \Gamma \end{aligned}$$

用上述引理可得：$u = u_{\mathcal{E}} + u_{\mathcal{A}}$，其中$u_{\mathcal{E}}, u_{\mathcal{A}}$满足：

$$|u_{\mathcal{E}}|_j \lesssim k^{j-2} (\|f\|_0 + \left\| g - \frac{u}{2R} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}), \qquad j = 0, 1, 2, \tag{3.11}$$

$$|u_{\mathcal{A}}|_j \lesssim k^{j-1} (\|f\|_0 + \left\| g - \frac{u}{2R} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}) \forall j \in \mathbb{N}_0. \tag{3.12}$$

由(3.11)以及引理[..]可得：

$$\begin{aligned} |u_{\mathcal{E}}|_j &\lesssim k^{j-2} (\|f\|_0 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Gamma)}) \\ &\lesssim k^{j-2} (\|f\|_0 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \\ &\lesssim k^{j-2} (\|f\|_0 + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + (\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)})) \\ &\lesssim k^{j-2} C_{f,g}, \qquad j = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

同理可得$u_{\mathcal{A}}$的证明。

引理 3.4 设Ω是带有解析边界的严格星形区域,$s \geq 2$，$f \in H^{s-2}(\Omega)$,$g \in H^{s-3/2}(\Gamma)$. 于是问题(1.3)–(1.4)满足如下的稳定性估计：

$$\|u\|_s \lesssim k^{s-1} C_{s-2,f,g}, \tag{3.13}$$

其中$C_{s-2,f,g} := \|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)} + \sum_{j=0}^{s-2} k^{-(j+1)} \big(\|f\|_j + \|g\|_{H^{j+1/2}(\Gamma)} \big)$.

证明 我们用诱导公式证明。从推论(3.8)可知，当$s=2$时结论成立。接下来我们假设下式成立:

$$\|u\|_l \lesssim k^{l-1} C_{l-2,f,g}, \quad 2 \le l \le s-1. \tag{3.14}$$

注意到原问题可以写成

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= (k^2+1)u + f \quad && in\ \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= -\mathbf{i}ku + g && on\ \Gamma. \end{aligned}$$

运用带诺依曼边界条件的泊松方程的正则估计和迹不等式可得:

$$\begin{aligned} \|u\|_s &\lesssim \left\|(k^2+1)u + f\right\|_{s-2} + \left\|-\mathbf{i}ku - \frac{u}{2R} + g\right\|_{H^{s-3/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim k^2 \|u\|_{s-2} + \|f\|_{s-2} + k\|u\|_{s-1} + \|g\|_{H^{s-3/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim k^{s-1}\big(\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\big) + \sum_{j=0}^{s-2} k^{s-j-2}\big(\|f\|_j + \|g\|_{H^{j+1/2}(\Gamma)}\big) \\ &\lesssim k^{s-1} C_{s-2,f,g}. \end{aligned}$$

于是结论成立。

§4 对高波数散射问题中的不同边界条件的误差分析

二维的Helmholtz方程的解有如下的渐进展开:

$$u \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i(kr-\pi/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_j(\theta)}{r^j}. \tag{4.1}$$

令$B = \frac{\partial}{\partial r} - ik + \frac{1}{2r}$,则通过简单计算有:

$$|Bu| = O(\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}})$$

记$\|u\|_{(r)}^2 = \int\int_{|y|=r} |u(y)|^2 \, dA_y$.

引理 4.1 对于方程:

$$\Delta w + k^2 w = 0, \qquad in\ \Omega, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} - ikw = h, \qquad on\ \partial\Omega. \tag{4.3}$$

其中Ω是圆心在原点，大小为R的圆。我们有如下的估计：

$$\|w\|_{(r_1)} \leq \frac{\|h\|_{r_1}}{k}.$$

证明 证明见*[2]*

用同样的方法，可得对于方程

$$\Delta w + k^2 w = 0, \qquad in\ \Omega, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} - ikw + \frac{w}{2r} = h, \qquad on\ \partial\Omega. \tag{4.5}$$

也有类似的结论。

推论 4.1 方程

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

当边界条件是$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = h$时，由上述引理可知，解$u$与高波散射问题的真实解$v$的误差$w$满足方程(4.2)–(4.3),故有

$$\|w\|_{(r_1)} = \|u - v\|_{(r_1)} \leq \frac{\|h\|_{(r_1)}}{k} \tag{4.6}$$

由于在二维*Helmholtz*方程中*:*

$$|h| \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}}}$$

所以有，

$$\|w\|_{(r_1)} \leq \frac{C}{kr}$$

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial r}\right\|_{(r_1)} \leq k\|w\|_{(r_1)} + \|h\|_{(r_1)} \leq 2\|h\|_{(r_1)} \leq \frac{2C}{r}.$$

同理，当边界条件是$\frac{\partial u}{\partial r} - iku + \frac{u}{2R} = h$时，解$u$与高波散射问题的真实解$v$的误差$w$满足方程(4.4)–(4.5),故有

$$\|w\|_{(r_1)} = \|u - v\|_{(r_1)} \leq \frac{\|h\|_{(r_1)}}{k} \tag{4.7}$$

此时*,*

$$|h| \leq \frac{C}{r^{\frac{5}{2}}}$$

所以有，

$$\|w\|_{(r_1)} \leq \frac{C}{kr^2}$$

$$\left\|\frac{\partial w}{\partial r}\right\|_{(r_1)} \leq (k + \frac{1}{2r})\|w\|_{(r_1)} + \|h\|_{(r_1)} \leq (2 + \frac{1}{2kr})\|h\|_{(r_1)} \leq \frac{C}{r^2}(2 + \frac{1}{2kr}).$$

§5 预渐进误差分析

§5.1 一些引理

引理 5.1 令$1 \le s \le p+1$. 假设$u \in H^s(\Omega)$. 于是存在$\hat{u}_h \in V_h$ 使得

$$\|u - \hat{u}_h\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u, \hat{u}_h) \lesssim h^s |u|_s. \tag{5.1}$$

引理 5.2 设u 是问题(1.3)–(1.4).假设$f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. 则存在$\hat{u}_h \in V_h$ 使得

$$\|u - \hat{u}_h\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u, \hat{u}_h) \lesssim \big(h^2 + h(kh)^p\big) C_{f,g}, \tag{5.2}$$

其中$C_{f,g} = C(\|f\|_0 + \|g\|_{L^2(\Omega)})$.

证明 由引理*3.3*知可将u分解成$u = u_{\mathcal{E}} + u_{\mathcal{A}}$ 其中$u_{\mathcal{E}} \in H^2, u_{\mathcal{A}} \in H^j$,对于任意$j \ge 0$. 对于$u_{\mathcal{E}}$由上述引理可知存在$\widehat{u_{\mathcal{E}h}}$使得:

$$\begin{aligned}
\|u_{\mathcal{E}} - \widehat{u_{\mathcal{E}h}}\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u_{\mathcal{E}}, \widehat{u_{\mathcal{E}h}}) &\lesssim \|u_{\mathcal{E}} - \widehat{u_{\mathcal{E}h}}\|_0 + hk \|u_{\mathcal{E}} - \widehat{u_{\mathcal{E}h}}\|_0 + hE_\Gamma(u_{\mathcal{E}}, \widehat{u_{\mathcal{E}h}}) \\
&\lesssim (1+hk)(\|u_{\mathcal{E}} - \widehat{u_{\mathcal{E}h}}\|_0 + hE_\Gamma(u_{\mathcal{E}}, \widehat{u_{\mathcal{E}h}})) \\
&\lesssim (1+hk)h^2 |u_{\mathcal{E}}|_2 \lesssim h^2 C_{f,g}
\end{aligned}$$

同理可知，存在$\widehat{u_{\mathcal{A}h}}$使得:

$$\begin{aligned}
\|u_{\mathcal{A}} - \widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u_{\mathcal{A}}, \widehat{u_{\mathcal{A}h}}) &\lesssim \|u_{\mathcal{A}} - \widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0 + hk \|u_{\mathcal{A}} - \widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0 + hE_\Gamma(u_{\mathcal{A}}, \widehat{u_{\mathcal{A}h}}) \\
&\lesssim (1+hk)(\|u_{\mathcal{A}} - \widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0 + hE_\Gamma(u_{\mathcal{A}}, \widehat{u_{\mathcal{A}h}})) \\
&\lesssim (1+hk)h^{p+1} |u_{\mathcal{A}}|_{p+1} \lesssim k^p h^{p+1} C_{f,g}
\end{aligned}$$

令$\widehat{u}_h = \widehat{u_{\mathcal{E}h}} + \widehat{u_{\mathcal{A}h}}$于是有

$$\begin{aligned}
\|u - \hat{u}_h\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u, \hat{u}_h) &\lesssim (\|u_{\mathcal{E}} - \widehat{ue}_h\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u_{\mathcal{E}}, \widehat{u_{\mathcal{E}h}})) + (\|u_{\mathcal{A}} - \widehat{u_{\mathcal{A}h}}\|_0 + h\mathbb{E}_\gamma(u_{\mathcal{A}}, \widehat{u_{\mathcal{A}h}})) \\
&\lesssim h^2 C_{f,g} + k^p h^{p+1} C_{f,g} \\
&\lesssim \big(h^2 + h(kh)^p\big) C_{f,g}
\end{aligned}$$

引理 5.3 存在常数$\gamma_0 < 0$ 使得如果$\gamma_0 \le \gamma_{j,e} \lesssim 1$, 则对于任意的$1 \le j \le p, e \in \mathcal{E}_h^I$, 有

$$a_\gamma(v_h, v_h)^{1/2} \eqsim \|\nabla v_h\|_0, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{5.3}$$

推论 5.1 由上述引理可知，如果$|\gamma_{j,e}| \lesssim 1$, 则对于任意的$1 \le j \le p, e \in \mathcal{E}_h^I$, 有

$$\|v_h\|_{1,\gamma} \approx \|v_h\|_1 \quad \forall v_h \in V_h.$$

在下文中我们都假设γ_0保证上述引理成立的，即有$\gamma_0 \le \gamma_{j,e} \lesssim 1$ 对于任意的$1 \le j \le p, e \in \mathcal{E}_h^I$.

§5.2 L^2投影算子、椭圆投影算子和离散Sobolev范数

定义V_h的L^2投影算子:

$$(Q_h\varphi, v_h) = (\varphi, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \tag{5.4}$$

引理 5.4 对于任意的整数$0 \le j \le p+1$,$\varphi \in L^2(\Omega)$,有

$$\|\varphi - Q_h\varphi\|_{-j} \lesssim h^j \inf_{\varphi_h \in V_h} \|\varphi - \varphi_h\|_0 .$$

定义如下的椭圆投影算子$P_{h,\gamma}$:

$$a_\gamma(P_h\varphi, v_h) + (P_h\varphi, v_h) = a(\varphi, v_h) + (\varphi, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \varphi \in V, \tag{5.5}$$

则我们有下列在H^1, L^2,以及负范数上的误差估计。

引理 5.5 对于任意的$-1 \le j \le p-1$, $\varphi \in H^1(\Omega)$,有

$$\|\varphi - P_h\varphi\|_{-j} \lesssim h^{j+1} \inf_{\varphi_h \in V_h} E_\gamma(\varphi, \varphi_h).$$

定义离散的soblev算子$A_h : V_h \mapsto V_h$:

$$(A_hv_h, w_h) = a_\gamma(v_h, w_h) + (v_h, w_h) \quad \forall v_h, w_h \in V_h. \tag{5.6}$$

有引理可知A_h是对称和正定的。因此我们可以通过算子的特征值和特征函数来定义算子的大小.A_h的特征值和特征函数分别记为:

$$\lambda_{1h} < \lambda_{2h} < \cdots < \lambda_{\dim(V_h)h}, \tag{5.7}$$

$$\phi_{1h}, \phi_{2h}, \cdots, \phi_{\dim(V_h)h} \tag{5.8}$$

易知这些特征值都是正的，并且特征函数构成了V_h的一组正交基。
对于任意的实数j,我们如下定义A_h^j:

令 $\quad v_h=\sum_{m=1}^{\dim(V_h)}a_m\phi_{mh}, \qquad$ 则 $\quad A_h^j v_h=\sum_{m=1}^{\dim(V_h)}\lambda_{mh}^j a_m\phi_{mh}$
对于任意整数j,在V_h上我们定义如下的离散H^j范数:

$$\|v_h\|_{j,h}:=\left\|A_h^{j/2}v_h\right\|_0 \tag{5.9}$$

易知:

$$\|v_h\|_{0,h}=\|v_h\|_0\,,\ \|v_h\|_{1,h}=(A_hv_h,v_h)^{1/2}\eqsim\|v_h\|_1\eqsim\|v_h\|_{1,\gamma}\,,\ \forall v_h\in V_h. \tag{5.10}$$

引理 5.6 对于任意整数j,有

$$\|v_h\|_{j,h}\lesssim h^{-1}\|v_h\|_{j-1,h}\quad \forall v_h\in V_h.$$

引理 5.7 对于任意整数j, $0\le j\le p+1$,有

$$\|v_h\|_{-j,h}\lesssim\sum_{m=0}^{j}h^{j-m}\|v_h\|_{-m}\,,\quad \forall v_h\in V_h. \tag{5.11}$$

§5.3 预渐进误差分析

下面的定理给出CIP-FEM的预渐进误差分析。

定理 5.1 设u 和uh分别是(1.3)–(1.4)和(2.4)的解, 则存在与k,h无关的常数C_0使得如果

$$k(kh)^{2p}\le C_0, \tag{5.12}$$

则有如下的误差估计:

$$\mathbb{E}_\gamma(u,u_h)\lesssim\big(1+k(kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h), \tag{5.13}$$

$$\|u-u_h\|_0\lesssim\big(h+(kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h). \tag{5.14}$$

证明 假设$kh\lesssim 1$. 令P_hu 为u的椭圆投影算子。令

$$e_h:=u-u_h=(u-P_hu)+(P_hu-u_h):=\rho+\theta_h.$$

从引理5.5可得:

$$\|\rho\|_{-j}\lesssim h^{j+1}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h),\quad 0\le j\le p-1. \tag{5.15}$$

剩下来就只需要估计θ_h了.由等式(2.1)和(2.4)我们有如下的$Galerkin$正交性:

$$a(e_h, v_h) - k^2(e_h, v_h) - \mathbf{i}k\langle e_h, v_h\rangle + \frac{1}{2R}\langle e_h, v_h\rangle = J(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

由P_h的定义可得:

$$a_\gamma(\theta_h, v_h) - k^2(\theta_h, v_h) - \mathbf{i}k\langle \theta_h, v_h\rangle + \frac{1}{2R}\langle \theta_h, v_h\rangle = (k^2+1)(\rho, v_h) + \mathbf{i}k\langle \rho, v_h\rangle - \frac{1}{2R}\langle \rho, v_h\rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{5.16}$$

Step 1. 这一步我们用θ_h的$(p-1)$阶的离散范数来估计$\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}$。令$v_h = \theta_h$ 代入上式并取虚部可得:

$$\begin{aligned} k\|\theta_h\|^2_{L^2(\Gamma)} &= -\operatorname{Im}\big((k^2+1)(Q_h\rho, \theta_h)\big) - \operatorname{Re}\big(k\langle \rho, \theta_h\rangle\big) + \frac{1}{2R}Im\langle \rho, \theta_h\rangle \\ &\le (k^2+1)\|Q_h\rho\|_{1-p,h}\|\theta_h\|_{p-1,h} + k\|\rho\|_{L^2(\Gamma)}\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

引理5.5中取$\varphi_h = P_h u$, 我们有

$$\|Q_h\rho\|_{1-p,h} = \|Q_h u - P_h u\|_{1-p,h} = \|Q_h u - u + u - P_h u\|_{1-p,h} \lesssim h^p \inf_{z_h \in V_h} \mathbb{E}_\gamma(u, z_h).$$

同时注意到$\|\rho\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\rho\|_0^{1/2}\|\rho\|_1^{1/2} \lesssim h^{1/2}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h)$, 于是

$$k\|\rho\|_{L^2(\Gamma)}\|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)} \le \frac{k}{2}\|\rho\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{k}{2}\|\theta_h\|^2_{L^2(\Gamma)} \le Ckh\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h)^2 + \frac{k}{2}\|\theta_h\|^2_{L^2(\Gamma)}.$$

组合上述三个估计可得:

$$\|\theta_h\|^2_{L^2(\Gamma)} \lesssim kh^p\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h)\|\theta_h\|_{p-1,h} + h\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h)^2 \lesssim k^2h^{2p-1}\|\theta_h\|^2_{p-1,h} + h\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u, z_h)^2. \tag{5.17}$$

Step 2. 这一步中我们用θ_h的L^2范数来估计它的高阶离散范数。由A_h的定义可知, (5.16)可被写成

$$\begin{aligned} (A_h\theta_h, v_h) = (k^2+1)(\theta_h, v_h) + (k^2+1)(Q_h\rho, v_h) + \mathbf{i}k\langle \theta_h, v_h\rangle \\ - \frac{1}{2R}\langle \theta_h, v_h\rangle + \mathbf{i}k\langle \rho, v_h\rangle - \frac{1}{2R}\langle \rho, v_h\rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

任给整数$1 \le m \le p$, 在上式中取$v_h = A_h^{m-1}\theta_h$ 可得

$$\begin{aligned} \|\theta_h\|^2_{m,h} = (k^2+1)\|\theta_h\|^2_{m-1,h} + (k^2+1)(A_h^{(m-1)/2}Q_h\rho, A_h^{(m-1)/2}\theta_h) + \mathbf{i}k\langle \theta_h, A_h^{m-1}\theta_h\rangle \\ - \frac{1}{2R}\langle \theta_h, A_h^{m-1}\theta_h\rangle + \mathbf{i}k\langle \rho, A_h^{m-1}\theta_h\rangle - \frac{1}{2R}\langle \rho, A_h^{m-1}\theta_h\rangle. \end{aligned}$$

由迹不等式和逆不等式可得:

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle\theta_h, A_h^{m-1}\theta_h\right\rangle\right| &\lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}\left\|A_h^{m-1}\theta_h\right\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)} h^{-1/2}\|\theta_h\|_{2m-2,h} \\
&\lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)} h^{-m+1/2}\|\theta_h\|_{m-1,h} \\
&\lesssim \left(kh^{p-m}\|\theta_h\|_{p-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\right)\|\theta_h\|_{m-1,h} \\
&\lesssim \left(k\|\theta_h\|_{m-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\right)\|\theta_h\|_{m-1,h}, \\
\left|\left\langle\rho, A_h^{m-1}\theta_h\right\rangle\right| &\lesssim \|\rho\|_{L^2(\Gamma)}\left\|A_h^{m-1}\theta_h\right\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^{1/2}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)h^{-m+1/2}\|\theta_h\|_{m-1,h} \\
&\lesssim h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\|\theta_h\|_{m-1,h}.
\end{aligned}
$$

因此有$1\le m\le p$,

$$
\begin{aligned}
\|\theta_h\|_{m,h}^2 \lesssim& k^2\|\theta_h\|_{m-1,h}^2 + k^2\|Q_h\rho\|_{m-1,h}\|\theta_h\|_{m-1,h} \\
&+ \left(k\|\theta_h\|_{m-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\right)k\|\theta_h\|_{m-1,h},
\end{aligned}
$$

进一步由$young$不等式可得:

$$
\|\theta_h\|_{m,h} \lesssim k\|\theta_h\|_{m-1,h} + k\|Q_h\rho\|_{m-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h).
$$

由于$k\|Q_h\rho\|_{m-1,h} \lesssim kh^{1-m}\|Q_h\rho\|_{0,h} \lesssim kh^{2-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h) \lesssim h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)$,所以

$$
\|\theta_h\|_{m,h} \lesssim k\|\theta_h\|_{m-1,h} + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h), \quad 1\le m\le p. \tag{5.18}
$$

递归的使用上述不等式可得任意整数$0\le m\le p$,有

$$
\|\theta_h\|_{m,h} \lesssim k^m\|\theta_h\|_0 + \sum_{n=0}^{m-1}k^n h^{1-m+n}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h) \lesssim k^m\|\theta_h\|_0 + h^{1-m}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h). \tag{5.19}
$$

Step 3. 这一步中我们用θ_h的$(p-1)$离散范数来估计它的L^2范数。考虑对偶问题:

$$
\begin{aligned}
-\triangle w - k^2 w = \theta_h \quad &\text{in} \quad \Omega, \\
\frac{\partial w}{\partial n} + \mathbf{i}kw + \frac{w}{2R} = 0 \quad &\text{on} \quad \Gamma.
\end{aligned}
$$

用$e_h=\rho+\theta_h$和上式做内积运算, 令$v_h=P_hw$可得:

$$
\begin{aligned}
(\rho+\theta_h,\theta_h) &= a(e_h,w)-k^2(e_h,w)-\mathbf{i}k\left\langle e_h,w\right\rangle+\frac{1}{2R}\left\langle e_h,w\right\rangle \\
&= a(e_h,w-P_hw)-\mathbf{i}k\left\langle e_h,w-P_hw\right\rangle-k^2(e_h,w-P_hw) \\
&\quad+\frac{1}{2R}\left\langle e_h,w-P_hw\right\rangle+J(u_h,P_hw) \\
&= a(\rho,w-P_hw)+(\rho,w-P_hw)-(k^2+1)(\rho+\theta_h,w-P_hw) \\
&\quad-\mathbf{i}k\left\langle \rho+\theta_h,w-P_hw\right\rangle+\frac{1}{2R}\left\langle \rho+\theta_h,w-P_hw\right\rangle+J(P_hu,P_hw).
\end{aligned}
$$

于是,

$$
\begin{aligned}
\|\theta_h\|_0^2 &= a(\rho,w-P_hw)-k^2(\rho,w-P_hw)-\mathbf{i}k\left\langle \rho,w-P_hw\right\rangle+\frac{1}{2R}\left\langle \rho,w-P_hw\right\rangle+J(P_hu,P_hw) \\
&\quad-(k^2+1)(\theta_h,w-P_hw)-\mathbf{i}k\left\langle \theta_h,w-P_hw\right\rangle+\frac{1}{2R}\left\langle \theta_h,w-P_hw\right\rangle-(\rho,\theta_h) \\
&\le \mathbb{E}_\gamma(u,P_hu)\mathbb{E}_\gamma(w,P_hw)+(k^2+1)\left|(\theta_h,w-P_hw)\right|+k\left|\left\langle \theta_h,w-P_hw\right\rangle\right|+\|\rho\|_0\|\theta_h\|_0 \\
&\le \inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(w,z_h)+(k^2+1)\left|(\theta_h,w-P_hw)\right|+k\left|\left\langle \theta_h,w-P_hw\right\rangle\right|+\|\rho\|_0\|\theta_h\|_0,
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

我们还可以证明:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\gamma(w,P_hw) &\lesssim \mathbb{E}_\gamma(w_{\mathcal{E}},w_{h,\mathcal{E}})+\mathbb{E}_\gamma(w_{\mathcal{A}},w_{h,\mathcal{A}}) \\
&\lesssim h\left|w_{\mathcal{E}}\right|+h^p\left|w_{\mathcal{A}}\right|_{p+1}\lesssim h\|\theta_h\|_0+(hk)^p\|\theta_h\|_0\lesssim (h+(hk)^p)\|\theta_h\|_0.
\end{aligned}
$$

$$
\|w-P_hw\|_0\lesssim h\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(w,z_h)\lesssim h(h+(kh)^p)\|\theta_h\|_0. \tag{5.21}
$$

于是,

$$
\begin{aligned}
\left|(\theta_h,w-P_hw)\right| &= \left|(\theta_h,Q_hw-P_hw)\right| \\
&\le \|\theta_h\|_{p-1,h}\|Q_hw-w+w-P_hw\|_{1-p,h} \\
&\lesssim \|\theta_h\|_{p-1,h}h^p\big(h+(kh)^p\big)\|\theta_h\|_0.
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\left\langle \theta_h,w-P_hw\right\rangle\right| &\lesssim \|\theta_h\|_{L^2(\Gamma)}\|w-P_hw\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\lesssim \big(kh^{p-1/2}\|\theta_h\|_{p-1,h}+h^{1/2}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\big)h^{1/2}\mathbb{E}_\gamma(w,P_hw) \\
&\lesssim \big(kh^{p-1/2}\|\theta_h\|_{p-1,h}+h^{1/2}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\big)h^{1/2}\big(h+(kh)^p\big)\|\theta_h\|_0 \\
&\lesssim \big(kh^p\|\theta_h\|_{p-1,h}+h\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\big)\big(h+(kh)^p\big)\|\theta_h\|_0.
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

最后把(5.15)和(5.21)–(5.23)代入(5.20)我们可得

$$\|\theta_h\|_0 \lesssim \big(h+(kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)+h^p\big(h+(kh)^p\big)k^2\|\theta_h\|_{p-1,h}\,. \tag{5.24}$$

Step 4. 组合(5.24)和(5.19)，并令$m=p-1$,有

$$\begin{aligned}\|\theta_h\|_0 &\lesssim \big(h+(kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)+h^p\big(h+(kh)^p\big)\big(k^{p+1}\|\theta_h\|_0+k^2h^{2-p}\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\big)\\ &\lesssim \big(h+(kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)+\big((kh)^{p+1}+k(kh)^{2p}\big)\|\theta_h\|_0\,.\end{aligned}$$

因此存在常数C_0使得如果$k(kh)^{2p}\le C_0$, 有

$$\|\theta_h\|_0 \lesssim \big(h+(kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h).$$

进一步有

$$\|\theta_h\|_1 \lesssim k\|\theta_h\|_0+\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)\lesssim \big(1+k(kh)^p\big)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h).$$

于是定理得证。

由定理5.1和上面的引理,对于H^{p+1}正则解我们有如下的估计。

推论 5.2 设u和u_h分别是(1.3)–(1.4)和(2.4)的解。假设$C_{p-1,f,g}\lesssim 1$。于是存在和h,k无关的C_0,C_1,C_2 使得如果$k(kh)^{2p}\le C_0$, 则有如下的估计成立:

$$\|u-u_h\|_1 \le C_1(kh)^p+C_2k(kh)^{2p}, \tag{5.25}$$

$$k\|u-u_h\|_0 \le C_1(kh)^{p+1}+C_2k(kh)^{2p}. \tag{5.26}$$

由引理5.1, 5.2和定理5.1，我们可以得到如下的CIP-FEM 的稳定性估计。

推论 5.3 假设问题(1.3)–(1.4)的解$u\in H^2(\Omega)$. 则在定理*5.1*的条件下我们有如下估计*:*

$$\|\nabla u_h\|_0+k\|u_h\|_0\lesssim C_{f,g},$$

即*CIP-FEM* 是适定的。

证明

$$\begin{aligned}\|\nabla u_h\|_0+k\|u_h\|_0 &\lesssim \|\nabla(u-u_h)\|+\|\nabla u\|+k\|u-u_h\|_0+k\|u\|_0+\left|J^{\frac12}(u_h,u_h)\right|\\ &\lesssim \mathbb{E}_\gamma(u,u_h)+\|\nabla u\|+k\|u\|_0\\ &\lesssim (1+k(kh)^p)\inf_{z_h\in V_h}\mathbb{E}_\gamma(u,z_h)+C_{f,g}\\ &\lesssim (1+k(kh)^p)(h+(kh)^p)C_{f,g}+C_{f,g}\lesssim C_{f,g}\end{aligned}$$

§6 数值实验

§7 总结与展望

参考文献

[1] Yu Du and Haijun Wu, *Preasymptotic error analysis of higher order FEM and CIP-FEM for Helmholtz equation with high wave number*. SIAM J. Numer. Anal., **53**(2015), pp. 782 – 804

[2] Bayliss, A., Gunzburger, M., and Turkel, E. 1982. *Boundary conditionsfor the numerical solution of elliptic equations in exterior regions.SIAM Journal of Applied Mathematics* , **42**: 430 – 451.

[3] 武海军, 偏微分方程数值解法*II*,pp.61-73

[4] Zhiming Chen and Haijun Wu, *Selected Topics in Finite Element Methods*, Science Press Beijing, 2010.

[5] G.J Lord and A.M Stuart, *Discrete Gevrey regularity attractors and upperssemicontinuity for a finite difference approximation to the Ginzburg – Landau equation*, Numer. funct. anal. and optim., **16** (1995), pp. 1003 – 1047.

致 谢

经过长时间的努力，终于完成了这篇论文，在本文的写作过程当中，得到了许多老师和同学的热心帮助，在此向他们表示感谢。

首先要感谢我的导师武海军老师，他对学术的专注和对学生的关怀，让我深受感动，也为我将来工作和生活树立了榜样。武老师对我的毕业论文的构思、选题都悉心指导，并且在论文的写作当中，给予了我很多建设性意见，对此我表示衷心的感谢！

同时，我还要感谢三年来给予我帮助的所有老师和同学，他们给我带来了丰富的概率统计的基础知识和深入研究问题的方法，使我受益匪浅。感谢我的同门师兄妹，大家互助友爱，共同学习，一起营造了一个良好的学术氛围。

最后，感谢我的家人一直以来对我的关心和支持。