

# 1. 投資組合

## 目標：

利用 Markowitz 投資組合理論取得整段時間中，年化報酬率與年化波動率的效率前緣曲線，找出其中夏普率最高的投資組合後，每經過一年（約 252 個交易日）進行一次資產再配置，降低風險。

## 資料處理方式：

整段時間取 2007/12/19（第 1 個交易日）至 2018/06/29（第 2651 個交易日），使得資料中所有 23 支 ETF 在起始時間就有數值，而資料中收盤價的遺漏值是以之前最近一個交易日的收盤價補植。

## 策略：

1. 先計算出 23 支 ETF 個別的年化報酬率（ $R$ ）、年化波動率（ $\sigma$ ）以及夏普率（Sharpe ratio），並假設無風險利率（ $R_f$ ）為 1%。選擇前 15 支夏普率最高的 ETF，作為最初的資產選擇。

$S_t^{(i)}$ ：第  $t$  個交易日第  $i$  支 ETF 的已調整收盤價（Adjusted Close），

$t = 1, 2, \dots, T$ ； $i = 1, 2, \dots, 23$ ； $T = 2651$

$R_i$ ：第  $i$  支 ETF 的年化報酬率（Annual Return）， $R_i = \left[ \left( S_T^{(i)} / S_1^{(i)} \right)^{1/(T-1)} - 1 \right] \cdot 252$

$r_i$ ：第  $i$  支 ETF 每日報酬率， $r_i = \begin{bmatrix} (S_2^{(i)} - S_1^{(i)}) / S_1^{(i)} \\ \vdots \\ (S_T^{(i)} - S_{T-1}^{(i)}) / S_{T-1}^{(i)} \end{bmatrix}$

$\sigma_i$ ：第  $i$  支 ETF 的年化波動率（Annual Volatility）， $\sigma_i = \sqrt{\text{Var}(r_i)} \cdot \sqrt{252}$

$$Sharpe\ ratio = \frac{R_i - R_f}{\sigma_i}, \quad R_f = 0.01$$

2. 選取 15 支夏普率最高的 ETF 後，利用 Monte Carlo 的方法隨機模擬大量的 ETF 持有比例 ( $p_j$ ) 並計算出資產權重 ( $w_j$ )，估計出效率前緣曲線，並透過夏普率取得其中最佳的投資組合。

$S_t^{(p)}$ ：第  $t$  個交易日的投資組合已調整收盤價， $S_t^{(p)} = \sum_j p_j \cdot S_t^{(j)}$ ， $j = 1, 2, \dots, 15$

$w_j$ ：第  $j$  個資產 (ETF) 的權重， $w_j = \frac{p_j \cdot S_1^{(j)}}{\sum_j p_j \cdot S_1^{(j)}}$ ， $\sum_j w_j = 1$

$R_p$ ：投資組合的年化報酬率 (Annual Return)， $R_p = \left[ \left( S_T^{(p)} / S_1^{(p)} \right)^{1/(T-1)} - 1 \right] \cdot 252$

$r_p$ ：投資組合的每日報酬率， $r_p = \begin{bmatrix} (S_2^{(p)} - S_1^{(p)}) / S_1^{(p)} \\ \vdots \\ (S_T^{(p)} - S_{T-1}^{(p)}) / S_{T-1}^{(p)} \end{bmatrix}$

$\sigma_p$ ：投資組合的年化波動率 (Annual Volatility)， $\sigma_p = \sqrt{\text{Var}(r_p)} \cdot \sqrt{252}$

$$Sharpe\ ratio = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}, \quad R_f = 0.01$$

3. 透過夏普率取得其中最佳的資產權重後，排除權重小於 3% 的 ETF，再重複進行上一步驟，直到每個資產的權重都大於等於 3% 為止，即可得出最佳的投資組合 ETF 及其權重。
4. 以此投資組合及權重每經 252 個交易日進行一次資產再配置，可以透過此方法降低風險。

原始碼：<https://github.com/WuYiJhen/Portfolio/blob/master/Portfolio.ipynb>

個別 ETF 整段時間之：

ETF	年化波動率	年化報酬率	夏普率
QQQ	0.211	0.127	0.554
MUB	0.054	0.036	0.489
AGG	0.051	0.035	0.489
EMB	0.108	0.054	0.409
TLT	0.149	0.057	0.316

最佳投資組合及權重：

QQQ	MUB	AGG	EMB	TLT
21.1%	32.7%	24.1%	7.7%	14.4%

	年化波動率	年化報酬率	夏普率
整段時間	0.056	0.067	1.021
整段時間(再配置)	0.053	0.067	1.065

年化波動率經資產再配置後有降低，而夏普率也提升並明顯高於上述單支 ETF，

