Introduction à la théorie de Fourier

Généralités

M. Waharte

Polytech Paris-Saclay

MAT 342 : Théorie de Fourier - 2022

Sommaire

Sommaire

Définition

Défintion

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ intégrable, on note sa transformée de Fourier $\hat{f}$ (ou $\mathcal{F}(f)$) :

$$\hat{f} : \xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} \, \mathrm{d}x$$

Définition

Défintion

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ intégrable, on note sa transformée de Fourier $\hat{f}$ (ou $\mathcal{F}(f)$) :

$$\hat{f} : \xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x$$

- On peut aussi le définir :
  - $\hat{f}(\xi) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x\xi}\,\mathrm{d}x$

Définition

Défintion

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ intégrable, on note sa transformée de Fourier $\hat{f}$ (ou $\mathcal{F}(f)$) :

$$\hat{f} : \xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi} \, \mathrm{d}x$$

- On peut aussi le définir :
  - $\hat{f}(\xi) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x\xi} \, \mathrm{d}x$
  - $\hat{f}(\xi) \mapsto \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x\xi} \, \mathrm{d}x$

(La seule différence sera les coefficient des formules)

Exemple

Exemple

Calculez la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[a,b]}$ et de $x \mapsto e^{-|x|}$.

Exemple

Exemple

Calculez la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[a,b]}$ et de $x \mapsto e^{-|x|}$.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-2i\pi x\xi}\, dx =$$

Exemple

Exemple

Calculez la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[a,b]}$ et de $x \mapsto e^{-|x|}$.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-2i\pi x\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^-} e^{x(1-2i\pi\xi)} dx \; + \int_{\mathbb{R}^+} e^{x(-1-2i\pi\xi)} dx$$

$$= \frac{2}{1+4\pi\xi^2}\,.$$

Sommaire

Propriétés

Soient la translation $\tau_y(f) : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x-y)$ et $\mathscr{C}_{\to 0}$ l'ensemble des fonctions continues convergeant vers 0 en $\pm\infty$.

Propriétés

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $h : x \mapsto e^{2\pi i \lambda x} f(x)$, alors h intégrable et $\hat{h} = \tau_\lambda f$.

Propriétés

Soient la translation $\tau_y(f) : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x-y)$ et $\mathscr{C}_{\to 0}$ l'ensemble des fonctions continues convergeant vers 0 en $\pm\infty$.

Propriétés

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $h : x \mapsto e^{2\pi i \lambda x} f(x)$, alors h intégrable et $\hat{h} = \tau_\lambda f$.
2. $\mathcal{F}(\tau_\lambda f)(\xi) = e^{-2i\pi x\xi} \hat{f}(\xi)$.

Propriétés

Soient la translation $\tau_y(f) : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x-y)$ et $\mathscr{C}_{\to 0}$ l'ensemble des fonctions continues convergeant vers 0 en $\pm\infty$.

Propriétés

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $h : x \mapsto e^{2\pi i \lambda x} f(x)$, alors h intégrable et $\hat{h} = \tau_\lambda f$.
2. $\mathcal{F}(\tau_\lambda f)(\xi) = e^{-2i\pi x\xi} \hat{f}(\xi)$.
3. $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.

Propriétés

Soient la translation $\tau_y(f) : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x-y)$ et $\mathscr{C}_{\to 0}$ l'ensemble des fonctions continues convergeant vers 0 en $\pm\infty$.

Propriétés

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $h : x \mapsto e^{2\pi i \lambda x} f(x)$, alors h intégrable et $\hat{h} = \tau_\lambda f$.
2. $\mathcal{F}(\tau_\lambda f)(\xi) = e^{-2i\pi x\xi} \hat{f}(\xi)$.
3. $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.
4. Si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ |\alpha| \leq k, (x \mapsto x^\alpha f(x)) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathscr{C}^k$ et $\partial^\alpha f = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^\alpha f(x)]$.

Propriétés

Soient la translation $\tau_y(f) : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x-y)$ et $\mathscr{C}_{\to 0}$ l'ensemble des fonctions continues convergeant vers 0 en $\pm\infty$.

Propriétés

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $h : x \mapsto e^{2\pi i\lambda x} f(x)$, alors h intégrable et $\hat{h} = \tau_\lambda f$.
2. $\mathcal{F}(\tau_\lambda f)(\xi) = e^{-2i\pi x\xi} \hat{f}(\xi)$.
3. $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.
4. Si $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ |\alpha| \leq k, (x \mapsto x^\alpha f(x)) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathscr{C}^k$ et $\partial^\alpha f = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^\alpha f(x)]$.
5. Si $f \in \mathscr{C}^k$ et $\forall |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha f \in L^1$ et $\in \mathscr{C}_{\to 0}$ avec $k-1$, alors $\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (2i\pi\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

Remarque

Une fonction est dite à décroisssance rapide si $\forall n, \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n f(x) = 0$; la transformée de Fourier d'une telle fonction sera $\mathscr{C}^\infty$ et réciproquement.

Remarque

Une fonction est dite à décroisssance rapide si $\forall n, \lim_{x \to \pm\infty} x^n f(x) = 0$; la transformée de Fourier d'une telle fonction sera $\mathscr{C}^\infty$ et réciproquement.

Théorème de Riemann-Lebesgue

$\mathcal{F}(L^1) \subset L^\infty \cap \mathscr{C}_{\to 0}$.
i.e. pour $f \in L^1$, $\hat{f}$ est continue, bornée et converge vers 0 en $\pm\infty$ (la TF est régulière).

Sommaire

Définition

Définition (Transformée inverse)

Soit $g \in L^1$,

$$\mathcal{F}^{-1}(g) = \check{g} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi \ (= \hat{(}g)(-x)$$

.

Définition

Définition (Transformée inverse)

Soit $g \in L^1$,

$$\mathcal{F}^{-1}(g) = \check{g} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi \ (= \hat{(}g)(-x)$$

.

Théorème d'inversion : Soit $f \in L^1$ telle que $\hat{f}$ intégrable alors, $\hat{f}$ est continue et $||f - \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})||_1 = 0$.

Définition

Définition (Transformée inverse)

Soit $g \in L^1$,

$$\mathcal{F}^{-1}(g) = \check{g} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi \ (= \hat{(}g)(-x)$$

.

<u>Théorème d'inversion :</u> Soit $f \in L^1$ telle que $\hat{f}$ intégrable alors, $\hat{f}$ est continue et $||f - \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})||_1 = 0$.
De plus, si f continue, $f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$.
$\implies$ $\mathcal{F}$ est injective sur L^1.

Espace de Schwarz

Définition (Espace de Schwarz)

On note $\mathcal{S}$, espace de Schwarz, l'ensemble des fonctions infiniment dérivables telles que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \lim_{|x| \to \infty} x^\alpha \partial^\beta = 0$$

.

Espace de Schwarz

Définition (Espace de Schwarz)

On note $\mathcal{S}$, espace de Schwarz, l'ensemble des fonctions infiniment dérivables telles que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \lim_{|x| \to \infty} x^\alpha \partial^\beta = 0$$

.

On y retrouve notamment $x \mapsto e^{-|x|^2}$ et les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.

Espace de Schwarz

Définition (Espace de Schwarz)

On note $\mathcal{S}$, espace de Schwarz, l'ensemble des fonctions infiniment dérivables telles que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \lim_{|x| \to \infty} x^\alpha \partial^\beta = 0$$

.

On y retrouve notamment $x \mapsto e^{-|x|^2}$ et les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.

$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

Plancheret-Parseval

Théorème de Plancheret-Parseval (simplifié)

Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f} \in L^2$ et $||f||_2 = ||\hat{f}||_2$.