Fiche Mathématiques
PCSI - 1A

Mathieu Waharte

2019 - 2022

PCSI

Bases et Fonctions usuelles

• périodicité : $\forall x \in D_f, x+T \in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$

• f bornée sur $A \Leftrightarrow |f|$ majoré sur A.

•$f \circ f^{-1} = Id_E$ si f strictement monotone alors c'est une bijection

• asymptote oblique si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$

• $(g\circ u)' = u' \times g' \circ u \quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

$(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'\circ f^{-1}} \quad \Big||a|-|b|\Big| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$

une bijection et sa bijection réciproque ont le même sens de variation

$e^x \geq x+1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$; $\forall x>-1, \ln(1+x)\leq x$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$

$\alpha,\beta>0 : \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta}=0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^\beta\big|\ln(x)\big|^\alpha=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|^\beta e^{\alpha x}=0$

$x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$; $(a^x)'=\ln(a)a^x$; $\log_n(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(n)}$

$\mathrm{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; $\mathrm{sh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

sh impaire et $\mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)$; ch paire et $\mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x)$ $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$

$\mathrm{th}(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2 x$; $\sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)$

$\cos a\cos b=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$; $\sin a\sin b=\dfrac{-\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$;

$\sin a\cos b=\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$

$\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$; $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$;

$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$; $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

arcsin défini sur $[-1;1]$, impaire, dérivable sur $]-1;1[$ et $\arcsin'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

arcos défini sur $[-1;1]$, pas paire, dérivable $]-1;1[$ et arcos'$(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

arctan : $\mathbb{R} \to]-\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}[$, impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et arctan'$(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Nombre Complexes

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ et $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$; $|z| = |\bar{z}|$; $z\bar{z} = |z|^2$

si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, z' = \lambda z$ alors $\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$; $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{-\theta+\theta'}{2}}\right)$; $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$; $\arg(z^n) = n\ \arg(z)[2\pi]$

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$; $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$

$e^z = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$; $|e^z| = e^{Re(z)}$; $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \arg(z - z') \in 2\pi\mathbb{Z}$

<u>racines n-ièmes :</u> $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et $\mathbb{U}_n = \{w_k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$

$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$; $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

pour $z^n = Z$: $Z = \mathrm{R}e^{i\theta}$, il y a n racines de Z : $z_k = \sqrt[n]{\mathrm{R}}e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}} \quad \forall k \in [|0; n-1|]$

$z_k = z_0 \times w_k$, z_0 une racine particulière.

Primitives et Equations Différentielles

primitive de exp complexe : $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$ de $f(x) = e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{C}$

$\frac{u'}{u^2} \to -\frac{1}{u} + \ln$; $\frac{1}{a^2+x^2} \to \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + \ln$; $\tan' u = u'(1+\tan^2 u)$ ou $\frac{u'}{\cos^2 u}$

f	F	Condition
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	$u(x) \neq 0$ sur I si $n \in \mathbb{Z}^-$
$\frac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u' \cdot u^\alpha$ $(\alpha \notin \mathbb{Z})$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	rien
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u' \sin u$	$-\cos u$	rien
$u' \cos u$	$\sin u$	rien
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$	$u(x) \in]-1;1[$
$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\mathrm{arcos}(u)$	$u(x) \in]-1;1[$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$	rien

$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

IPP : u et v de classe C^1, $\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$

Changement de variable : φ de classe C^1 sur [a,b] et f C^0 sur $\varphi([a,b])$.

$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$

- Premier odre $[y' + a(x)y = b(x)]$:
  - normaliser (= tout mettre sur le y)
  - équation homogène (on met 0 au lieu de $b(x)$) $S_H = Ce^{-A(x)}$
  - solution particulère (de tête sinon par méthode de variation de la constante)

$y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$ avec $C'(x) = b(x)e^{A(x)}$

- solution finale : $S_E(I) = \{x \in I \mapsto y_H + y_p\}$

Problème de Cauchy (une solution) : $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

- Second ordre $[ay'' + by' + cy = f(x)]$:

  - équation caractéristique ($ar^2 + br + c = 0$)

	S_H avec $a, b, c \in \mathbb{C}, (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$	S_H avec $a, b, c \in \mathbb{R}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
$r_1 \neq r_2$	$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$	• si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$: $y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$ • si $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ ($r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \bar{r_1}$): $y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
$r_1 = r_2$	$y(x) = (C_1x + C_2)e^{rx}$	$y(x) = (C_1x + C_2)e^{rx}$

  - $f(x) = Ae^{\lambda x}$ $(a, b, c, A, \lambda \in \mathbb{C})$:

    - λ non racine de l'équation caractéristique $\rightarrow y_p(x) = Be^{\lambda x}$
    - λ racine simple de l'équation caractéristique $\rightarrow y_p(x) = Bxe^{\lambda x}$
    - λ racine double de l'équation caractéristique $\rightarrow y_p(x) = Bx^2e^{\lambda x}$

  - $f(x) = B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$ $(a, b, c, B, \omega \in \mathbb{R})$:

    - $i\omega$ non racine de l'eq caractéristique $\rightarrow y_p(x) = C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x)$
    - $i\omega$ racine simple de l'eq caractéristique $\rightarrow y_p(x) = x(C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x))$
    - $i\omega$ racine double de l'eq caractéristique $\rightarrow y_p(x) = x^2(C\cos(\omega x) + D\sin(\omega x))$

  - $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$ ($a, b, c \in \mathbb{K}$et P un polynôme de degré n) :

    - λ non racine de l'équation caractéristique $\rightarrow y_p(x) = Q(x)e^{\lambda x}$ $\deg(Q) = n$
    - λ racine simple de l'équation caractéristique $\rightarrow y_p(x) = xQ(x)e^{\lambda x}$
    - λ racine double de l'équation caractéristique $\rightarrow y_p(x) = x^2Q(x)e^{\lambda x}$

- Problème de Cauchy (une solution) : $\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

- Si $f(x)$ ou $b(x) = \sum$ fonctions $\Rightarrow$ Solution$= \sum$ solution chaque fonction $+ S_H$

Ensembles, Applications et Relations d'équivalence

$\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ ssi $\forall x \in \mathrm{E}, x \in \mathrm{F}$; $\mathrm{E} = \mathrm{F} \Leftrightarrow (\mathrm{E} \subset \mathrm{F})$ et $(\mathrm{F} \subset \mathrm{E})$ $P(\mathrm{E})$: ensemble des sous-ensembles de E ; complémentaire d'une partie A de E : $C_{\mathrm{E}}^{\mathrm{A}} = \{x \in \mathrm{E} \mid x \notin \mathrm{A}\}$

produit cartésien : $\mathrm{E}\times\mathrm{F} = \{(a, b) \mid a \in \mathrm{E},\ b \in \mathrm{F}\}$

$\mathcal{F}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ ensemble des applications de E dans F

restriction de f à A : $f_{|\mathrm{A}}$: $\begin{cases} \mathrm{A} \to \mathrm{F} \\ a \mapsto f(a) \end{cases}$

injection : au + un antécédant et $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

surjection : au - un antécédent et $\forall (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}, y = f(x)$ (ou $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$)

bijection : injection et surjection

relation binaire $\mathcal{R}$: vraie pour des (x, y), noté $x\mathcal{R}$, et fausse pour autre, noté $x\mathcal{R}y$

réflexive : $\forall x \in \mathrm{E}, x\mathcal{R}x$

symétrique : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

antisymétrique : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$

transitive : $\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

relation d'équivalence : réflexive, symétrique, transitive

relation d'ordre : réflexive, antisymétrique, transitive

$\mathrm{cl}(x) = \{y \in \mathrm{E}, x\mathcal{R}y\}$

Sommes, Produits, Coefficients binomiaux

<u>télescopage :</u> $\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_m$; $\prod_{k=m}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{u_{n+1}}{u_m}$

(u_n) arithmétique : $\sum_{k=m}^{n}u_k=\frac{u_m+u_n}{2}\times(n-m+1)$

(u_n) géométrique (et $q\neq 1$) : $\sum_{k=m}^{n}u_k=u_m\times\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$

$a^n-b^n=(a-b)\Big(\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k)}\Big)$; $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}a^kb^{n-k}$

$$\binom{p}{n}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n-p}{n}=\binom{p-1}{n-1}+\binom{p}{n-1}\ ;\ p\cdot\binom{p}{n}=n\cdot\binom{p-1}{n-1}$$

$$\sum_{m\leq i,j\leq n}a_{i,j}=\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n}a_{i,j}\ ;\ \sum_{m\leq i\leq j\leq n}a_{i,j}=\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{i,j}=\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j}a_{i,j}$$

$$\sum_{m\leq i,j\leq n}a_{i,j}=\sum_{m\leq i<j\leq n}a_{i,j}+\sum_{m\leq j<i\leq n}a_{i,j}+\sum_{i=m}^{n}a_i\ ;\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Entiers naturels et dénombrement

• $a|b\Rightarrow b=na$ (b multiple de a, a diviseur de b) $a\mathbb{N}$, l'ensemble des multiples de a

$\mathcal{D}(b)$, l'ensemble des diviseurs de b ; division euclidienne : $a=bq+r$ $0\leq r<b$.

$|$ est une relation d'ordre ; $a|b\Leftrightarrow$ pgcd$(a,b)=a$; pgcd$(a,0)=a$; pgcd$(a,1)=1$;

pgcd$(a,b)=1\rightarrow$ premiers entres-eux.

<u>algo d'Euclide :</u> pgcd$(a,b)=$pgcd(a,r)

$d|b$ et $d|a\Leftrightarrow d|$pgcd(a,b) ; ppcm$(ca,cb)=c$ ppcm(a,b) ; pgcd$(a,b)\times$ppcm$(a,b)=a\times b$

<u>décomposition en facteurs premiers :</u> $n=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{\alpha_p}$ α_p : p-valuation de n

$a|b\Leftrightarrow\forall p\in\mathcal{P},\alpha_p\leq\beta_p$; pgcq$(a,b)=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}$; ppcm$(a,b)=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$

• Card(E)$=|$E$|=\#$E ; E injectif dans F $\Leftrightarrow$ Card(E)$\leq$Card(F)

E surjectif à F $\Leftrightarrow$ Card(E)$\geq$Card(F) ; $|$E$|=|$F$|$, f :E$\rightarrow$F, on a : f injective $\Leftrightarrow$ surjective

Card(A$\cup$B) $=$ Card(A) $+$ Card(B)$-$ Card(A$\cap$B) ; Card(B\A)$=$ Card(B)$-$ Card(A$\cap$B)

$\mathrm{Card}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i)$; $\mathrm{Card}(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \mathrm{Card}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Card}(\mathrm{B})$

F^{E}, l'ensemble des applications de E dans F est fini et $\mathrm{Card}\big(\mathrm{F}^{\mathrm{E}}\big) = \big(\mathrm{Card}(\mathrm{F})\big)^{\mathrm{Card(E)}}$

Les $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ de A^p sont les p-listes, il y en a $\mathrm{Card}\big(\mathrm{A}^p\big) = \mathrm{Card}(\mathrm{A})^p$

Si $1 \leq p \leq n$, il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-listes $\neq$ de A = nb d'injections de E dans F $|\mathrm{E}|=p$ et $|\mathrm{F}|=n$

$n!$: nombre de permutations de A (bijections de A dans A) ; $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathrm{A})) = 2^{\mathrm{Card(A)}}$

Si $|\mathrm{E}|=n$, le nb de parties de E à p éléments $(0 \leq p \leq n)$ est : $\dbinom{p}{n} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

	p-uplets	p-uplets sans répétitions	ensemble de E à p éléments ($\lvert\mathrm{E}\rvert=n$)
ordre compte	OUI	OUI	NON
répétition	OUI	NON	NON
cardinal	n^p	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$	$\dbinom{p}{n}$

Système Linéaire

• échelonnée ⇔ si 1 ligne et les $b_{\mathrm{ext}} = 0$, le 1er pivot est à droite de celui de la ligne $k-1$.

• échelonnée réduite ⇔ nulle OU pivot = 1 et seuls $\neq 0$ sur les colonnes.

pivot = 1er coeff $\neq 0$ de la ligne ; rg(A) = nb de pivots de A

inconnus principales = pivots étant des inconnus.

<u>système de Cramer :</u> ayant autant de lignes, de colonnes et d'inconnus.

Calcul Matriciel

Symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ = ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coeffs dans $\mathbb{K}$.

$0_{n,p}$, matrice nulle, I_n matrice identité (commutent avec toutes matrices)

$A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \Rightarrow AB = (c_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

$A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \Rightarrow {}^t(A \times B) = {}^tA \times {}^tB$

D ou $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ matrice diagonale

$\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ = ensemble des matrices triangulaires supérieures (T_n^- pour les inférieures)

Le produit de 2 matrices diag (trig sup,...) est diag (trig sup,...) et les coeff de la diag se multiplient entres-eux

Si ${}^tA = A \Rightarrow$ matrice symétrique ($S_n(\mathbb{K})$), si ${}^tA = -A$, matrice antisymétrique ($A_n(\mathbb{K})$)

$I_n^k = I_n$ et $0_n^k = 0_n$ et $A^0 = I_n$

Si A et B commutent : $(A \times B)^k = A^k \times B^k$ et $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{k}{p} A^k \times B^{p-k}$

A inversible $\Leftrightarrow \exists! B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = BA = I_n$ leur ensemble est $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$

$(\lambda A \times \mu B)^{-1} = \dfrac{1}{\mu} B^{-1} \times \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Méthode du pivot de Gauss-Jordan : on applique à I_n les opération pour échelonner réduire la matrice, la matrice à partir de I_n et A^{-1}

transposition : $L_i \leftrightarrow L_j$ dilatation : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ transvection : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Nombres Réels

$n = \lfloor x \rfloor$ ou $\mathrm{E}(x) \Leftrightarrow \quad n \leq x < n+1 \ \Leftrightarrow x - 1 < n \leq x$

$a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ (approxi décimale par défaut) et $b_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ (... par excès) ;

$a_n \leq x \leq b_n$

toute partie non et majorée/minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne sup/inf.

Suites Numériques

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ = ensemble des suites réelles

arithmétique :$u_n = u_p + (n-p)r$ et $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1) \times \frac{(u_p + u_n)}{2}$

géométrique : $u_n = u_p \times q^{n-p}$ et $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Méthode (suite arithmético-géométrique de $u_{n+1} = au_n + b$) :

1. on cherche le point fixe $l = al + b$
2. on montre que $v_n = u_n - l$ est géométrique
3. on trouve l'expression générale de v_n
4. on en déduit celle de u_n

Suite récurrente d'ordre 2 :

	complexe ; Δ de $r^2 = ar + b$	réelle ; Δ de $r^2 = ar + b$
$r_1 \neq r_2$	$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$	$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}$ $\underline{\Delta > 0 :}$ $u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$ $\underline{\Delta < 0 (r_{1,2} = r\, e^{\pm i\theta}) :}$ $u_n = r^n[\lambda \cos(\theta n) + \mu \sin(\theta n)]$
$r_1 = r_2$	", $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$	", $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$

- u_n converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$
- u_n converge en $+\infty$ si : $\forall \mathrm{A} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \geq \mathrm{A})$
- u_n converge en $-\infty$ si : $\forall \mathrm{A} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \mathrm{A})$

(u_n) et (v_n), deux suites réelles, sont adjacentes si : $(u_n) \nearrow$; $(v_n) \searrow$; $(u_n - v_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

alors (u_n) et (v_n) convergent vers l et $u_n \leq l \leq v_n$

$(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement $\neq$ est suite extraite (u_n) et converge vers la même limite que (u_n)

<u>Méthode (étude de $u_{n+1} = f(u_n)$) :</u>

1. calcul des 1^{er} termes $\rightarrow$ idées
2. on vérifie que la suite est bien définie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathrm{I}$ (pour calculer $u_{n+1} = f(u_n)$
3. on cherche le sens de varia de $(u_n \Rightarrow$ on étudie le signe $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$
4. si (u_n) est monotone, on prouve qu'elle est majorée ou minorée ($\rightarrow$ converge)
5. si converge vers l, si f continue, $f(l) = l$

• $u_n = o(v_n)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ (transitive et symétrique) non additionnable (ou -)

$u_n\ v_n \leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$

$u_n \to 0 \Rightarrow \ln(1+u_n) \sim u_n$; $e^{u_n} - 1 \sim u_n$; $\sin(u_n) \sim u_n$; $\cos(u_n) - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2}$

Polynômes

$\mathbb{K}[X]$ = ensemble des polynômes à coeff de $\mathbb{K}$.

deg (polunôme nul) $= -\infty$; a_n est le coeff dominant ; si $a_n = 1$, P est unitaire

$\mathbb{K}_n[X] = \{P \,|\, \deg(P) \leq n\}$

$P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ et Q $= \sum\limits_{k=0}^{q} b_k X^k \Rightarrow PQ = \sum\limits_{n\leq 0} c_n X^n$ avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

le binôme de Newton et $\mathrm{P}^n - \mathrm{Q}^n$ s'appliquent aussi

$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$; $\deg(\lambda P) = -\infty$ si $\lambda = 0$; $\deg(PQ) =$deg $P+$deg Q

si deg $P \neq 0$ et deg $Q \leq 1$, $\deg(P \circ Q) =$ deg $P \times$ deg$Q$

$P|Q \Rightarrow P^n|Q^n$ $P|Q$ et $Q|P \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ P = \lambda Q$(même a_n)

$\exists Q \in \mathbb{K}[X], PQ = 1 \Leftrightarrow P \in \mathbb{K}^*$

Méthode (division eucl de A par B si deg $A = ?$ ou très grand et racines de B connues) :

$\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq $A = BQ + R$ avec deg R ¡ deg B

$B = X^2 + X - 2$ de racines 1 et -2

$\Rightarrow$ deg $R \leq 1$ donc $R = aX + b$ $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow A = BQ + aX + b$

Pour $X = 1$: $A(1) = B(1) \times Q(1) + a + b$

$\Leftrightarrow 2 = 0 + a + b$

Pour $X = -2$: $41 = -2a + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = a + b \\ 41 = -2a + b \end{cases} \Leftrightarrow a = -13 \text{ et } b = 15$$

$(X-a)^\alpha \,|\, P$ avec α : multiplicité de la racine a (0 si pas racine) deg $P' =$ deg $P - 1$

$$\Big((X-a)^n\Big)^{(k)} = \begin{cases} (X-a)^{n-k} \times \dfrac{n!}{(n-k)!} \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ si } k \geq n+1 \end{cases}$$

Formules de Taylor :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \ ; \ P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

Si $m =$ multiplicité de la racine a : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

$A|B \Leftrightarrow$ les racines de A sont racines de B de $m_B \geq m_A$

P est irréductible ssi pas factorisable en $\prod$ de 2 polynômes de deg≥ 1

les polynômes complexes irréductibles sont de deg 1 et les réels de deg ≤ 2

P scindé dans $\mathbb{K}[X]$ ssi $\displaystyle\sum_{k=1} m_k =$ deg P (m_k multiplicité de ses racines)

$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ scindé et $x_1, \cdots, x_n$ ses racines :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } \prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^k \frac{a_0}{a_n}$$

Limites, Continuité

- $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$: $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I}\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$

$a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{I}\ x \geq \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$

- $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$: $a \in \mathbb{R}$: $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I}\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$
- $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$: $a \in \mathrm{I}$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I}\ a-\delta \leq x < a \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$

- <u>continuité en a :</u> $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathrm{I}\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$ (limite atteinte)

- <u>prolongement par continuité (unicité) :</u> $a \in \mathrm{I}$, $f : \mathrm{I}\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$

alors un prolongement de f est g : $\begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ l \text{ si } x = a \end{cases} \end{cases}$

- f est k-lipschitzienne si $\exists k \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x,y) \in \mathrm{I}^2\ |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ (donc f est C^0)

Espaces Vectoriels

- <u>EV de réf :</u> $\mathbb{K}^n$; $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$; $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; $\mathbb{K}^{\mathbb{R}} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$
- L'union de SEV est aussi un SEV (pas l'intersection)
- <u>espace engendré :</u> $\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \,|\, \forall i \in [\![1;n]\!], \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$

Si $(e_1,\cdots,e_n) \in E$ alors Vect... est un SEV de E et c'est le plus petit SEV de E à contenir les e_i.

- $F + G = \{f+g \,|\, f \in F \text{ et } g \in G\}$ c'est un SEV de E et le + petit à contenir F et G
- <u>somme directe :</u> $F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$
- F et G supplémentaires de E ssi $E = F \oplus G$
- $(e_1,\cdots,e_n)$ est libre ssi $\forall(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i = 0$
- $(e_1,\cdots,e_n)$ est liée ssi $\exists i \in [\![1;n]\!],\ e_i \in \mathrm{vect}(e_1,\cdots,e_{i-1},e_{i+1},\cdots,e_n)$

- $\mathscr{F} = (P_0, \cdots, P_n)$ est échelonnée ssi $0 \leq d°\mathrm{P}_0 < \cdots < d°\mathrm{P}_n$ et si échellonnée alors libre.
- $(e_1, \cdots, e_n)$ génératrice de $E \Leftrightarrow E = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$
- base = libre + génératrice

  $(1, X, \cdots, X^n)$ base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

  $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$

- $\mathscr{B}$ une base de F (n éléments), $\mathscr{B}'$ une base de G (p éléments), si $E = F \oplus G$

alors $\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E (dite adaptée à la décomposition de $E = F \oplus G$)

Espaces Vectoriels de dimension finie

- E de dimension finie si il y a une partie finie et génératrice
- <u>théo base extraite :</u> $\mathscr{G}$ génératrice de E, alors$\exists \mathscr{B}$ base de E tq $\mathscr{B} \subset \mathscr{G} \;\Rightarrow E$ de dim finie

admet une base

- <u>thé base incomplète :</u> $\mathscr{L}$ libre de E, alors $\exists \mathscr{B}$ base de E tq $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$
- Comme toute les bases ont le même card, alors on dit que $\dim(E) = |\mathscr{B}|$
- $\dim(E) = n$ et $|\mathscr{F}| = n$ alors $\mathscr{F}$ base de $E \Leftrightarrow \mathscr{F}$ génératrice $\Leftrightarrow \mathscr{F}$ libre et

$|\mathscr{L}| \leq |\mathscr{B}| \leq \mathscr{G}$.

- F un SEV de E, $\dim(F) \leq \dim(E)$ et $E = F \Leftrightarrow \dim(E) = \dim(F)$
- En dim finie, existence des supplémentaires
- <u>formule de Grassmann :</u> $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
- $\mathscr{F}$ une famille, $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F}))$
- $\dim E = n$ et $|\mathscr{F}| = p$ alors :

  - $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leq \min(n, p)$
  - $\mathscr{F}$ génératrice $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = n$
  - $\mathscr{F}$ libre $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = p$

• $\dim(\mathrm{E}\times\mathrm{F}) = \dim(F)+\dim(E)$

Dérivation

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $a < b$ et soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$

• théorème de Rolle : si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a;b[$ et $f(a) = f(b)$ alors $\exists c \in]a:b[$ tq $f'(c) = 0$

• TAF : si f continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ alors $\exists c \in]a:b[$ tq $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

• IAF : si f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et $\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in]a;b[\ |f'(x)| \leq M$ alors f est M-lipschitzienne˙

formule de Leibniz : $k \in \mathbb{N}$, $(f,g) \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})^2$ alors $fg \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$ et $(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{i}{k} f^{(i)} g^{(k-i)}$

Applications Linéaires

f endomorphisme de $E \Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E,E) = \mathscr{L}(E)$

f forme linéaire sur $E \Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$

f un isomorphisme de E dans $F \Leftrightarrow f \in \mathscr{L}(E,F)$ et f bijective

f automorphisme de $E \Leftrightarrow f$ endomorphisme et isomorphisme donc $f \in \mathscr{GL}(E)$, groupe linéaire

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}, f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{n fois}} \in \mathscr{L}(E)$

• $u \in \mathscr{L}(E,F)$, A SEV de E et B de F, $u - A)$ SEV de F et $u^{-1}(B)$ SEV de $E \Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_F\})$ SEV de E et $\mathrm{Im}(u) = u(E)$ SEV de F

• $f \in \mathscr{L}(E,F)$, f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f)$ $\;f$ injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

• Si $F \oplus G = E$, alors $\forall x \in E\, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$

et on a $p_F : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x_F \end{cases}$ projection, sur F parallèlement à G.

- $p_F \in \mathscr{L}(E)$ et $p_F \circ p_F = p_F$; $\mathrm{Ker}(p_F) = G$ et $\mathrm{Im}(p_F) = F$; $p_F \circ p_G = 0_{\mathscr{L}(E)}$

  $\Rightarrow p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et p projection sur $\mathrm{Im}(p)$

- Si $F \oplus G = E$, ... $s_F : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x_F - x_G \end{cases}$
  - $s_F \in \mathscr{L}(E)$ et $s_F \circ s_F = Id_E$; $\mathrm{Ker}(s_F + Id_E) = G$ et $\mathrm{Ker}(s_F - Id_E) = F$
- $s_F = 2p_F - Id_E$; $s_F \circ s_G = -Id_E$

- $u \in \mathscr{L}(E, F)$ injective et $\mathscr{L}$ libre de $E \Rightarrow u(\mathscr{L})$ libre de F
- $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ génératrice de $E \Rightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \cdots, u(e_n))$

  (et si u surjective, $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ génératrice de F)
- $(e_1, \cdots, e_n)$ base de E et $(f_1, \cdots, f_n) \in F^n \Rightarrow$ unicité de $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tq

$\forall i [\![1, n]\!], u(e_i) = f_i$.
- u isomorphisme et $\mathcal{B}$ base de $E \Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ base de F

- $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$ $\mathscr{B}$ base de $E \Rightarrow \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(\mathscr{B}))$ et $\mathrm{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$ et $= \mathrm{rg}(f)$ si g isomorphisme, de même pour f.

- <u>Théorème du rang :</u> $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$
- $\dim E = \dim F \Rightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ biective.

- $(a, b) \in \mathbb{K}^2, b \neq 0, E_{a,b} = \left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\right\}$

et $(E) : x^2 - ax - b = 0$, on a :

- $E_{a,b}$ est un $\mathbb{K}$-EV de dim 2
- (E) a 2 solution $p \neq q \Rightarrow \big((p^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ base de $E_{a,b}$
- (E) a 1 solution double $p \Rightarrow \big((p^n)_{n\in\mathbb{N}}, (np^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ base de $E_{a,b}$

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta_{(E)} < 0\, p = p\, e^{i\theta}$ $p > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = p^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) \text{ avec } \alpha = \Re(A) + \Re(B) \text{ et } \beta = \Im(A) - \Im(B)$$

et $u_n = A\, p^n + B\, q^n$.

Matrice

$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \cdots, f_p)$ base de F

$\mathscr{F} = (u_1, \cdots, u_q) \in E^q$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & \dots & u_j & \dots & u_q \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,q} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_q) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,q} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

• $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$; $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda\, \mathrm{Id}_E) = \lambda I_n$ $\lambda \in \mathbb{K}$

• <u>Si $F \oplus G$ et $\mathscr{B}$ base :</u> $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{cases} \quad \text{isomorphisme donc } \dim(\mathscr{L}(E,F)) = \text{dim E} \times \text{dim F}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

• $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^q) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^q$; f automorphisme $\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ inversible et

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$

• $f_A : X \mapsto AX \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}))$: appli linéaire canonique associé à A

<u>matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$</u> : $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ et $(\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'})^{-1} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$

$A = QA'P^{-1}$ avec $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $A' = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$, $Q = \mathrm{P}_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$ et

$P = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et si $f \in \mathscr{L}(E), Q = P$ et on note $D = A'$, de plus $A^q = PD^qP^{-1}$

$\mathrm{Ker}(A) = \{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,A}(\mathbb{K}) \,|\, \mathrm{AX} = 0\}$; $\mathrm{Im}(A) = \{\mathrm{AX} \,|\, \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$; $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$

$x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow Mat_{\mathscr{B}}(x) \in A$; $y \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow Mat_{\mathscr{C}}(y) \in \mathrm{Im}(y)$; $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$

• $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$; $n = \mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A))$ n, nombre de colonnes de A

$A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p)$; $\mathrm{rg}(AB) \leq \min(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$), $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$ (ou $\mathrm{rg}(B)$)

$A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ alors $\exists (P,Q) \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$, $A = Q \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix} P^{-1} \Leftrightarrow$

$\mathrm{rg}(A) = r$

$\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A)$

• $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, A inversible $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$E_{a,b} \times E_{c,d} = \delta_{b,c} E_{a,d}$

Déterminant

• $\det(I_n) = 1$; det multilinéaire (linéaire par rapport à chaque colonne)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = M$ avec 2 colonnes échangées, on a : $\det(M) = -\det(N)$ (antisymétrie)

• colonne de A nulle $\Rightarrow \det(A) = 0$

2 colonnes de A égales $\Rightarrow \det(A) = 0$

$\det(C_1, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_i + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j C_j, \ldots, C_n)$

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \quad (A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$

• T matrice triangulaire ($\in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) $\Rightarrow$ det(T)$= \prod\limits_{i=1}^{n} t_{i,i}$

$(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$:

- M inversible $\Leftrightarrow \det(M) \neq 0$ donc $\mathrm{rg}(M) < n \Leftrightarrow \det(M) = 0$
- $\det(MN) = \det(M)\ \det(N)$
- $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$ (si M inversible)
- $\det(M^T) = \det(M)$

$\Delta_{i,j}$ (mineur d'indice (i, j)) : det de M où on a enlevé la i-ème ligne et la j-ième colonne

Développement de $\det(M)$:

- suivant la i-ème ligne : $\det(M) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}$ ($m_{i,j}$ coeff de M)
- suivant la j-ième colonne : $\det(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}$

• $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det(Mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$; $= 0 \Leftrightarrow \mathscr{F}$ liée ; $\mathscr{F}$ base de $E \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$

• $f \in \mathscr{L}(E)$, $\det(f) = \det(Mat_{\mathscr{B}}(f))$ ⚠indépendant de $\mathscr{B}$; $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$; f bijective $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$ et donc $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$

Probabilité

• <u>univers (Ω) :</u> ensemble des issues possibles

• <u>éventualité ou issue :</u> tout ω tq $\omega \in \Omega$

• <u>événement :</u> partie de Ω ; se réalise si $\omega \in A$ (lévénement) ; θ : événement impossible

Ω : événement certain ; $\{\omega_i\}$: événement élémentaire

A et B incompatibles $\Leftrightarrow A \cup B = \emptyset$; A implique B si $A \subset B$

• $(A_1, \cdots, A_n)$ système complet d'événements (s.c.e) si :

- $\forall (i,j)\ A_i \cup A_j = \emptyset$ avec $i \neq j$
- $\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

• $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$: espace probabilisé ($\mathscr{P}(\Omega)$ = ensemble des parties de Ω)

est dit finie si on a $(\Omega, \mathbb{P})$ avec Ω fini et $\mathbb{P}$ une proba sur Ω

$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$; si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$

• $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(P \cap A_i)$ avec $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un s.c.e .

la somme de proba = 1 ; probra$\in [0,1]$; $\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \text{tq } \omega_i \in A}} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$

<u>Si équiprobabilité :</u> $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ (proba conditionelle) donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$

• <u>formule proba composés :</u> si $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \neq 0$, on a

$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

• <u>formule proba totales :</u> si $(A_1, \ldots, A_n)$ s.c.e et $\mathbb{P}(A_i) > 0$, on a $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i)$.

• formule de Baye : $(A_1,\dots,A_n)$ s.c.e, $\mathbb{P}(A_i)\neq 0$ et $\mathbb{P}(B)\neq 0$,
$\mathbb{P}(A_i\,|\,B)=\dfrac{\mathbb{P}(B\,|\,A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(B\,|\,A_j)\mathbb{P}(A_j)}$.

• A et B indépendants si $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

• $(A_1,\cdots,A_n)$ mutuellement indé si $\forall I\subset [\![1,n]\!], I\neq\emptyset$ on a $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i\in I}A_i\Big)=\prod\limits_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$.

Variables aléatoires réelles

variable aléatoire réelle : tout $\mathrm{X}:\begin{cases}\Omega\to\mathbb{R}\\ \omega\mapsto \mathrm{X}(\omega)\end{cases}$

$(\mathrm{X}\in B)=\mathrm{X}^{-1}(B)$; $(\mathrm{X}=x)=\mathrm{X}^{-1}(\{x\})$; $(\mathrm{X}<x)=\mathrm{X}^{-1}(]-\infty;x])$

• $\mathrm{X}(\Omega)=\{x_1,\cdots,x_p\}$ alors $(\mathrm{X}=x_i)_{1\leq i\leq p}$ s.c.e et si $B\subset\mathbb{R}$ $\mathbb{P}(\mathrm{X}\in B)=\sum\limits_{x\in B}\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$.

• $f:\mathrm{X}\to\mathbb{R}$,
$\mathrm{Y}(\Omega)=\{f(x_1),...,f(x_p)\},\ \forall y\in\mathrm{Y}(\Omega)\ \mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)=\sum\limits_{\substack{i=1\\ \text{si } f(x_i)=y}}^{p}\mathbb{P}(\mathrm{X}=x_i)=\sum\limits_{x\in f^{-1}(\{y\})}\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$

• $\mathbb{E}(\mathrm{X})=\sum\limits_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}x\,\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$; X centrée si $\mathbb{E}(\mathrm{X})=0$; $\mathbb{E}$ linéaire ; $\mathbb{E}(\lambda)=\lambda$; si $\mathrm{X}\leq\mathrm{Y}$, $\mathbb{E}(\mathrm{X})\leq\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

$f:\mathrm{X}(\Omega)\to\mathbb{R}$, $\mathrm{Y}=f(\mathrm{X})$ donc $\mathbb{E}(\mathrm{Y})=\sum\limits_{x\in\mathrm{X}(\Omega)}f(x)\,\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)$.

• inégalité de Markov : $a>0$ et X positive alors $\mathbb{P}(\mathrm{X}\geq a)\leq\dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{X})}{a}$.

• $\mathbb{V}(\mathrm{X})=\mathbb{E}(\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X}))$ et $\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathbb{V}(\mathrm{X})}$

$(a,b)\in\mathbb{R}^2,\mathbb{V}(a\mathrm{X}+b)=a^2\mathbb{V}(\mathrm{X})$; $\mathbb{V}(\mathrm{X})=\mathrm{a}\Leftrightarrow\mathrm{X}=\mathbb{E}(\mathrm{X})$

Koenig - Huyengs : $\mathbb{V}(\mathrm{X}=\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)-\mathbb{E}(\mathrm{X})^2$

inégalité de Bienaymé - Tchebytchev : $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(\,|\mathrm{X}-\mathbb{E}(\mathrm{X})\,|\,\geq\varepsilon)\leq\dfrac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\varepsilon^2}$.

• $(x,y)\in\mathrm{X}(\Omega)\times\mathrm{Y}(\Omega)$ si $\mathbb{P}\big((\mathrm{X}=x)\cap(\mathrm{Y}=y)\big)=\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y)$ alors X et Y indépendants.

X, Y indépendantes, $f : \mathrm{X}(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{Y}(\Omega) \to \mathbb{R}$ alors $f(\mathrm{X})$ et $g(\mathrm{Y})$ indépendants.

″ $\mathbb{E}(\mathrm{XY}) = \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathbb{V}(\mathrm{X}) + \mathbb{V}(\mathrm{Y})$.

• $(X_1, \dots, X_n)$ mutuellement indépendantes si $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{X}_1(\Omega) \times \cdots \times \mathrm{X}_n(\Omega)$ $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i = x_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = x_i)$ OU si $A_i \in \mathscr{P}(X_i(\Omega))$, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{X} \in A_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X} \in A_i)$

$(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ 2 à 2 indépendantes $\Rightarrow \mathbb{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_i)$

loi conjointe : (X,Y) : $\begin{cases} \mathrm{X}(\Omega) \times \mathrm{Y}(\Omega) \to [0;1] \\ (x,y) \mapsto \mathbb{P}\big((\mathrm{X}=x) \cap (\mathrm{Y}=y)\big) \end{cases}$

1^e^ loi marginale de (X,Y) la loi de X et la 2^nd^ celle de Y

Donc $\forall x \in \mathrm{X}(\Omega)$ $\mathbb{P}(\mathrm{X}=x) = \sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega)} \mathbb{P}\big((\mathrm{X}=x) \cap (\mathrm{Y}=y)\big)$

Loi	Paramètre	$\mathrm{X}(\Omega)$	Loi de proba	$\mathbb{E}(\mathrm{X})$	$\mathbb{V}(\mathrm{X})$
Quasi-certaine	$a \in \mathbb{R}$		$\mathbb{P}(\mathrm{X}=a) = 1$	a	0
Bernoulli	$p \in [0;1]$	{0,1}	$\mathbb{P}(\mathrm{X}=1) = p$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=0) = 1-p$	p	$p\,(1-p)$
Binomiale	$(p,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}^*$	$[\![0,n]\!]$	$k \in [\![0,n]\!]$ $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{k}{n} p^k\,(1-p)^{n-k}$	np	$np\,(1-p)$
Uniforme	n	$[\![1,n]\!]$	$k \in [\![0,n]\!]$ $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \dfrac{1}{\mathrm{Card}([\![0,n]\!])}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Géométrie	$p \in]0;1[$	$\mathbb{N}^*$	$k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = p\,(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\,e^{-k}$	λ	λ

Intégration

inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

• $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$, si f positive sur I et si $\exists x_0 \in I$ tq $f(x_0) > 0$ alors $\int_a^b f > 0$

″ et si $\int_a^b f = 0$ alors f nulle sur I.

• $\sigma = (\sigma_0, \cdots, \sigma_n)$ avec $\sigma_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, si $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$, alors on a les sommes de Riemann : $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i) = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\sigma_i) = \int_a^b f$.

<u>IAF à $f : I \to \mathbb{C}$:</u> f $\mathscr{C}^1$ et M tq $|f'| \leq M$ alors $\forall (x,y) \in [a,b]^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$

<u>formule de Taylor avec reste intégral :</u> $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ alors on a $\forall x \in I$:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\;\mathrm{d}t\ .$$
<u>inégalité de Taylor-Lagrange :</u> $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall t \in I\, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$ on a :
$$\forall x \in I,\ \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\ .$$

PSI

Compléments d'algèbre linéaire

$\det\big(V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\big) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)$

$E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$

• $\underline{H \text{ hyperplan :}}$ H SEV de E et $\dim(H) = \dim(E) - 1$

$\Leftrightarrow \forall x_0 \in E \setminus H, E = \mathrm{Vect}(x_0) \oplus H$

$\Leftrightarrow \exists\, \varphi \in E^*$ tel que Ker $\varphi = H$ et φ non nul

$\varphi, \psi \in E^*$, Ker $\varphi =$ Ker $\psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \psi = \lambda\,\varphi$.

• A et B semblables $\Leftrightarrow \exists P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), A = PBP^{-1} \Leftarrow A$ et B ont même trace, rang, déterminant et polynômes annulateurs

tr $\in E^*$ non nulle ; $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$; $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$P(u) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i u^i \in \mathscr{L}(E)$, leur ensemble est $\mathbb{K}[u]$ $\quad (PQ)(u) = P(u)\circ Q(u) = P(u)\circ Q(u)$

$\forall u \in \mathscr{L}(E)$, E dim finie, $\exists P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0_E$ $\quad A$ et ${}^tA$ ont même poly annulateurs.

• matrices par bloc : $\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n,m} & C \end{array}\right) = \det(A)\times \det(C)$; $\det(M) = \displaystyle\prod_i^n \det(A_{i,i})$ si M triangulaire ou diagonale par blocs.

$\dim\Big(\displaystyle\prod_{i=1}^n E_i\Big) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \dim(E_i)$, le produit est un EV.

$\displaystyle\bigoplus_{i=1}^n E_i \Leftrightarrow \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i,\ \sum_{i=1}^n x_i = 0_E \Rightarrow x_i = 0_{E_i}$

$\Leftrightarrow \dim\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n E_i\Big) = \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$

$\Leftrightarrow \mathscr{B}$ base de $\displaystyle\sum_{i=1}^n E_i$ avec $\mathscr{B}$ concaténation de bases des E_i

• $\displaystyle\sum_{i=1}^n E_i = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ et $\dim\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n E_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$.

• $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \Leftrightarrow \dim(E) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$ ET $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ ET $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ (2 des 3 à vérifier)

$\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ base adapté E_i

$(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel quel $u \circ v \Leftrightarrow v \circ u$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $E, \{0_E\}$, Im(u), Ker(u), Im(v), Ker(v), Im$(P(u))$, Ker$(P(u))$ stables par u $\quad F$ stable par $u \Leftrightarrow u(F) \subset F$.

• $E = \bigoplus_{i=1}^{n}$ et $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ alors, $\forall i \in [\![1, n]\!], E_i$ stable par $u \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_n)$
$A_i \in \mathscr{M}_{d_i}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_i}(u_{E_i}) = A_i$.

Réduction

• $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur prore si $\exists x \in E \setminus \{0_E\}$, $u(x) = \lambda x$.
• $x \in E$ vecteur prore si $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0_E$.
$Sp(u) = \{$ valeurs propres u$\}$ $\quad E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$ $\quad \chi_u = \det(XId_E - u)$, $\chi_u(u) = 0_E$

$\chi_u \in \mathbb{K}[u]$ est unitaire et de degré dim E et $\chi_u(X) = X^n - tr(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$
Si A et B semblables $\chi_A = \chi_B$ et $\chi_A = \chi_{A^T}$ $Sp(u)$ est l'ensemble de ses racines

$\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ $x_i \in \mathbb{C}$ alors $\det(u) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ et $\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\chi_u = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)^{m_i}$ alors $\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{m_i}$ et $\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i$

$\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \quad A = \begin{pmatrix} B & (*) \\ 0 & C \end{pmatrix}$ B, C matrices carrées $\chi_A = \chi_B \cdot \chi_C$

F stable par u alors $\chi_{u_F} | \chi_u$

• $1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m_\lambda \leqslant n \quad (m_\lambda = 1 \Rightarrow \dim(E_\lambda(u)) = 1)$
u automorphisme $\Leftrightarrow 0 \notin Sp(u)$

$$
\begin{aligned}
u \text{ diago } &\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \\
&\Leftrightarrow \dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda(u)) \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } u \\
&\Leftrightarrow \chi_u \text{ scindé ET } \forall \lambda \in Sp(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda \\
&\Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X] \text{ scindé à racines simples tel que } P(u) = 0_E \\
&\Leftrightarrow \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda) \text{ annule } u \\
&\Leftarrow \chi_u \text{ scindé à racines simples}
\end{aligned}
$$

A symétrique réelle $\Rightarrow A$ diagonalisable.

$P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors les valeurs propres de u sont racines de P.
Si F stable par u et u diago alors $u_F \in \mathscr{L}(F)$ diago.
Si u trigo, alors les coefficients diagonaux de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ sont ses valeurs propres comptées avec multiplicité ($\mathscr{B}'$ base de trigo)
u trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé.

Séries

• si $|q| < 1$, $\sum q^n$ CVG et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, sinon $\sum q^n$ DVG grossièrement.
• $\sum u_n$ CVG $\Rightarrow u_n \liminf 0$; par contraposée, $u_n \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n$ DVG grossièrement.
$\sum z_n$ CVG ssi $Im(z_n)$ et $Re(z_n)$ CVG
• $(u_n)_n$ CVG ssi $\sum (u_{n+1} - u_n)$ CVG

• $\sum u_n$ une SATP, $\sum u_n$ DVG $\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$; $\sum u_n$ DVG $\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$
$\sum u_n$ CVG ssi $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}\right)_n$ est majorée.
• Soit f $\mathscr{C}^0$, $\searrow$ et $\geqslant 0$ sur $[0, +\infty[$, $\sum f(n)$ CVG ssi $\displaystyle\left(\int_0^n f\right)_n$ CVG
$\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CVG ssi $\alpha > 1$ $\qquad H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.
•$\sum u_n$ et $\sum v_n$ SATP, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors si $\sum v_n$ CVG $\Rightarrow \sum u_n$ CVG et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{=\infty} v_n$
+ contraposée
• CVA $\Rightarrow$ CVG et $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
• $\sum v_n$ SATP, si $u_n = \mathscr{O}(v_n)$ ou $o(v_n)$ ou $\sim v_n$ alors $\sum u_n$ CVA.
$\sum u_n$ et $\sum v_n$ SATP strictes telles que $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

- $(u_n)_n$ non nulle à partir d'un certain rang, si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \in \mathbb{R}$ alors :
  - $l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ CVA
  - $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ DVG grossièrement

• <u>série de Cauchy :</u> $\sum w_n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ (produit de Cauchy de v_n et u_n)

si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ CVA alors $\sum w_n$ CVA et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

si $((-1)^n u_n)_n$ est de signe constant, alors $(u_n)_n$ est alternée.
<u>CSSA :</u> $(u_n)_n$ alternée tq $(|u_n|)_n$ soit $\searrow$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ CVG et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ et sont de même signe.
si $\alpha > 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CVG mais CVA ssi $\alpha \in]0,1]$.

Les résultats précédents restent vrais quelque soit le rang n_0 à partir duquel les conditions sont vérifiées.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

$N : E \to \mathbb{R}$ norme si :
• $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ (positivité)
• $\forall (x,\lambda) \in E \times \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénité)
• $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (séparation)
• $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

si $<,>$ produit scalaire sur E alors $x \mapsto \sqrt{<x,x>}$ norme associée sur E
• pour $p \geqslant 1$, $x \mapsto ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ norme sur $\mathbb{K}^n$, idem sur $\mathbb{K}[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
• $x \mapsto ||x||_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$ norme sur $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
• $f \mapsto ||f||_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $f \mapsto ||f||_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$ norme sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$

$\forall (x_1,\ldots,x_p) \in E^p$, $|N(x_1) - N(x_2)| \leqslant N(x_1 - x_2)$ et $N\Big(\sum_{i=1}^{p} x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} N(x_i)$

<u>Inégalité de Bessel :</u> $(e_1,\ldots,e_p)$ bon de F, $\forall x \in E$, $\sum_{i=1}^{p} |<e_i,x>|^2 \leqslant ||x||^2$.

• $d : (x,y) \mapsto N(x-y)$
$d(x,y) \leqslant 0$; $d(x,y) = d(y,x)$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

•$B_F(a,r) = \{x \in E \,|\, d(a,x) \leqslant r\}$; $<$ pour $B(a,r)$; $=$ pour $S(a,r)$
<u>boule unité :</u> $B_F(0_E,1)$ (ou $B(0_E,1)$)
• A convexe si $\forall (x,y,t) \in A^2 \times [0,1]$, $tx + (1-t)y \in A$ (B et B_F le sont mais pas S si $\dim(E) \geqslant 1$)

• A borné s $\exists M > 0, \forall x \in A,\ N(x) \leqslant M$.

$(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$ si $N(u_n - l) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$; l est unique et indépendante du choix de N en dimension finie ; mêmes opérations que limites sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
$(u_n)_n$ est bornée si $\exists M,\ \forall n \in \mathbb{N}\ N(u_n) \leqslant M$

Toute suite convergente est bornée.

$(u_n)_n$ converge vers l alors, $\forall \varphi : N \to \mathbb{N}$ strictement $\nearrow$, $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers l (suite extraite)

• O ouvert si $\forall x \in O\, \exists r > 0,\ B(x,r) \subset O$ O ouvert ssi $E \backslash O$ fermé
E ; $\emptyset$; $\bigcup_{i \in I} O_i$ si I fini ou infini ; $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$; $B(a,r)$ $a \in E$ sont des ouverts.
•<u>intérieur de A :</u> $\mathrm{Int}(A) = \overset{o}{A} = \{x \in E \mid \exists r > 0\, B(x,r) \subset A\}$
• F fermé si $E \backslash F$ un ouvert $\Rightarrow$ on peut être ni ouvert ni fermé ⚠
E ; $\emptyset$; les B_F ; $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$; $\bigcap_{i \in I} F_i$ I fini ou infini sont des fermés.
•<u>adhérence :</u> $\overline{A} = \{x \in E \,|\, \exists r > 0\, B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$

<u>caractérisation séquentielle de l'adhérence :</u> $\overline{A} = \{x \in E \,|\, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} x\}$

<u>caractérisation séquentielle des fermés :</u> Soit $A \subset E$, A fermé ssi $\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ converge vers l, on a $l \in A$.

<u>frontière :</u> $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \overset{o}{A}$.

Continuité des fonctions vectorielles

$a \in \overline{A}$, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ si $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0, \forall x \in A\ \ ||x - a||_E \leqslant \delta \Rightarrow ||f(x) - l||_F \leqslant \varepsilon$
Si E et F sont de dim finie, c'est indépendant de la norme.
Propriétés sur opérations de limites et défnition de continuité sont identiques au cas $E = F = \mathbb{K}$.

<u>caractérisation séquentielle de la continuité :</u>
<u>f continue en $a \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f(a)$</u>

• F de dim finie de base $(e_1, \ldots, e_p)$, $\forall x \in A\ \exists (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{K}^p$, $\ f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\, e_k$
et $\exists (l_1, \ldots, l_p) \in \mathbb{K}^p$, $\ l = \sum_{k=1}^{p} l_k\, e_k$.
$f(x) \underset{x \to a \in \overline{A}}{\longrightarrow} l$ ssi $\forall k\ f_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_k$ (de même pour la continuité)

• E de dim finie, K un compact de E et $f \in \mathscr{C}^0(K, \mathbb{R})$ alors $f(K)$ est borné et $\exists(\alpha, \beta) \in K^2,\ \forall x \in K\ f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$.

• Soit $f \in \mathscr{C}^0(E, \mathbb{R})$, $f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}(\mathbb{R})$ sont des fermés et $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ est un ouvert (image réciproque d'un fermé/ouvert par une fonction continue est un fermé/ouvert)

$f \in \mathscr{L}(E, F)$ (pas besoin de dim finie) :
$f \in \mathscr{C}^0(E, F)$ ssi f continue en 0_E ssi $\exists k > 0,\ \forall x \in E\ \ ||f(x)||_F \leqslant k\,||x||_E$ ssi f lipschitzienne

- si E de dim finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors f lipschitzienne (donc C^0)

$(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^*, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$ est monomiale (déf)
$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est polynomiale si combinaison lin de fonctions monomiales, f est $\mathscr{C}^0$

• $f : E^p \to E$ multilinéaire, si E de dim finie, f est $\mathscr{C}^0$. (det l'est)
$\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ ouvert

Probabilités à support fini

schéma de Bernoulli : $\Omega = \{0,1\}^n,\ X(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i,\ P(\{w\}) = p^{X(\omega)}(1-p)^{n-X(\omega)} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
au plus dénombrable = fini ou $\cong \mathbb{N}$.
$(A_i)_{i \in I}$ s.c.e si $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

tribu ou σ-algèbre : tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tq $\Omega \in A,\ \forall B \in A, \overline{B} \in A$ et $\forall (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n=0}^{+\infty} a_n \in B.$
$A = \{\emptyset, \Omega\}$ tribu grossière, $A = \mathscr{P}(\Omega)$ tribu pleine, $\mathscr{B} = \{A, \overline{A}, \emptyset, \Omega\}$ tribu engendrée
Si Ω au plus dénombrable, on prend $\mathscr{P}(\Omega)$ comme tribu.

• $P : A \to \{0,1\}$ probabilité si $P(\Omega) = 1$ et $\forall (A_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ incompatibles 2 à 2, $P(A_n)$ cvg et $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_i\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$, σ-additivité.
$(p_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ probabilité sur Ω au plus dénombrable ssi les $p_k > 0$ et $\sum_n P(\{p_n\})$ cvg et $= 1.$

$\forall (A_i)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathcal{A}^n,\ P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$

<u>théorème de la limite monotone :</u>

- $(A_n) \nearrow$ alors $P(A_n)$ cvg et $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.
- // $\searrow$ // // $\bigcap$ // .

<u>formule des probas composées :</u> $P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) = P(A_k)\, P(_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_n)$.

<u>formules des probabes totales :</u>$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B)$ (A_i) un s.c.e

A, B indépendantes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et indé conditionnelle C ssi $P_C(A \cap B) = P_C(A)P_C(B)$.
$(A_n)_n$ famille d'événements indépendants si $\forall J(\text{fini}) \subset I$, $P\Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

• $X : \Omega \to \mathbb{R}$ variable aléatoire discrète ssi $X(\Omega)$ au plus dénombrable et $\forall x \in X(\Omega)$, $(X = x) \in \mathcal{A}$ stable par max/min. $(X \in U) = X^{-1}(U)$

<u>loi de probabilité X :</u> $P_X : B \in X(\Omega) \mapsto \mathbb{P}(X \in B)$.
<u>fonction de répartion de X :</u> $F_X : t \mapsto P(X \leqslant t) t \in \mathbb{R}$, $F_X \nearrow$, continue à droite, $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$, $a < b \Rightarrow P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$, $P(x = a) = F_X(a) - \lim_{t\to a^-} F_X(t)$, 2 VA ont même loi ssi même F_X
loi uniforme, binomiale, géométrique, de Poisson : voir PCSI.
$\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{\lambda}{n}\Big)$ cvg en $+\infty$ vers $\mathcal{P}(\lambda)$

$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ (doit CVA) et $E\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$

<u>théorème de transfert :</u> $E(\phi(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(x_n) P(X = x_n)$.

<u>moment d'ordre k :</u> $E(X^k) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k P(X = x_n)$.
n VA : $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \dots \times P(X_n = x_n)$
$(X + Y = z) = \bigcup_{x\in X(\Omega)} (X = x; Y = z - x) = \bigcup_{y\in Y(\Omega)} (X = z - y; Y = y)$ (stable par P)

$E(XY) = E(X)E(Y)$ si X, Y indé, $|E(XY)| \leqslant \sqrt{E^2(X)E^2(Y)}$ si X, Y moments d'ordre 2 et $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + Cov(XY)$
$Cov(X, Y) = E((X - E(X)(Y - E(Y))$ X, Y non corrélés si $= 0$ (symétrique, bilinéaire, défnie positive $\Rightarrow$ PS)
coefficient de corrélation linéaire : $\rho(X, Y) = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

produit scalaire : symétrique, bilinéaire, défnie positive.

usuel sur $\mathbb{R}^n$: $(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sur $\mathbb{R}[X]$: $(P,Q) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_b$

sur $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$: $(f,g) \mapsto \int_I fg$ sur $\mathbb{C}$: $(z,z') \mapsto Re(z\overline{z'})$

sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $(A,B) \mapsto tr(AB^T) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}b_{i,j}$

$\| \, \| : x \mapsto \sqrt{<x,x>}$ norme associée au produit scalaire.

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 <x,y> + \|y\|^2$ et $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} <x_i,x_j>$

Cauchy-Schwartz : $<x,y>^2 \leqslant <x,x> \times <y,y>$ et $|<x,y>| \leqslant \|x\| \times \|y\|$ égalité ssi (x,y) liée.

x et y orthogonaux ssi $<x,y>=0$ $F \perp G$ ssi $\forall (f,g) \in F\times G$ $<f,g>=0$
$F^\perp = \{x \in E \,|\, \forall f \in F, <x,f>=0\}$

Thèoreme de Pythagore : $(x_1,\dots,x_p)$ orthogonale finie $\Rightarrow \left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$.

Si $\mathscr{F}$ famille orthogonale finie sans le vecteur nul alors $\mathscr{F}$ libre.
$F^\perp$ SEV, $F \oplus F^\perp$, $F \subset (F^\perp)^\perp$, $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$, $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$, $E^\perp = \{0_E\}$, $\{0_E\}^\perp = E$
$(x_1,\dots,x_p)$ orthonormale ssi $<x_i,x_j>=\delta_{i,j}$.

Gram-Schmidt : $\mathscr{B} = (f_1,\dots,f_p)$

$(g_1,\dots,g_p)$ bon tq $Vect(f_1,\dots,f_p) = Vect(g_1,\dots,g_p)$ $g_j = \dfrac{f_j - \sum_{i=1}^{j-1} <f_i,g_i> g_i}{\| // \|}$

F SEV de dim finie, $E = F \oplus F^\perp \Rightarrow p_F : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} <x_i,g_i> g_i$

$(g_1,\dots,g_p)$ bon et projection // à $F^\perp$.
$p_F(x)$ unique vecteur tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$ et tel que $\forall i \in [\![1,p]\!]$ $<x-p_F(x), f_i> = 0$ $((f_i)$ base de E et dim finie)
$d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \inf_{f\in F} \|x-f\|$ si F de dim finie, p_F est alors unique.

• Si E euclidien, $\exists$ une bon ; $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ bon et $u \in \mathscr{L}(E)$,
$x = \sum_{i=1}^{n} <x_i,e_i> e_i$ $<x,y> = \sum_{i=1}^{n} <x,e_i><y,e_i> = X^TY$.
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = (<u(e_j),e_i>)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
$\dim F^\perp = \dim E - \dim F \Rightarrow F = (F^\perp)^\perp$ et $F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp$.
$H = Vect(a)^\perp$ hyperplan, $a \neq 0_E$ $\forall x \in E$ $d(x,H) = \dfrac{|<x,a>|}{\|a\|}$.

Intégrabilité

• $\mathscr{C}^{pm}(I,\mathbb{K})$, $f|_{]\sigma_i;\sigma_{i+1}[}$ bornée sur I, $\displaystyle\int_I f$ indépendant de $f(\sigma_i)$ $(\sigma_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ subdivision de f sur I .
• $f \in \mathscr{C}^{pm}(I,\mathbb{K})$, si $f \geqslant 0$ sur I et $\displaystyle\int_I f = 0$ alors f nulle sur I sauf en un nombre fini de points (les σ_i).
• $f \in \mathscr{C}^{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ si $f(x) \xrightarrow[a\to b^-]{} l \in \mathbb{K}$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ CVG.
exp: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ CVG ssi $a > 0$
Riemann : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ CVG ssi $\alpha > 1$ vers $\dfrac{1}{\alpha-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ CVG ssi $\alpha < 1$ vers $\dfrac{1}{1-\alpha}$.

f $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, F primitive de f, alors $\displaystyle\int_a^b f$ cvg ssi F a une limite en b^-.

<u>IPP :</u> $(f,g) \in \mathscr{C}^1(]a,b[,\mathbb{K})$ si fg a des limites finies en b^- et a^+, $\displaystyle\int_a^b fg'$ et $\displaystyle\int_a^b g'f$ ont même nature et IPP si cvg.

Gamma : $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ et $\Gamma(n) = (n-1)!$ $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Changement de variable :</u> f cpmx, $\varphi \in \mathscr{C}^1(]\alpha,\beta[,\mathbb{K})$ $\lim\limits_{\alpha}\varphi = a$ et $\lim\limits_{\beta}\varphi = b$ alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'$ et $\displaystyle\int_a^b f$ ont même nature.

$f \in \mathscr{C}^0([a,b[,\mathbb{R}^+) \geqslant 0$ et F primitive, $\displaystyle\int_a^b f$ cvg si F bornée sur $[a,b[$.

f,g cpmx $\geqslant 0$ et $f \leqslant g$, $\displaystyle\int_I g$ cvg $\Rightarrow \displaystyle\int_I f$ cvg.

<u>comparaison série-intégrale :</u> $f \in \mathscr{C}^{pm}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+) \searrow$, $\sum f(n)$ cvg ssi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ cvg.

f cpmx <u>intégrable</u> sur I si $\displaystyle\int_I |f|$ cvg ; f intégrable $\Rightarrow \displaystyle\int_I f$ cvg et I.T. ; leur ensemble est un EV ($\mathscr{L}^1$).
$I = [a,b[$, f,g cpmx et g intégrable, $f \underset{b}{=} \mathscr{O}(g), \sim g, o(g) \Rightarrow f$ intégrable.
$f,g \geqslant 0$ et $f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow \displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ de même nature.

f cpmx de <u>carré intégrable</u> si $\displaystyle\int_I |f|^2$ intégrable, EV stable par plus ($\mathscr{L}^2$).
f,g carré intégrable, alors fg intégrable (pas réciproque) ; Cauchy-Schwartz (= si positi liée).

Séries de fonctions

• <u>CVS :</u> si $\forall t \in I, f_n(t) \underset{+\infty}{\longrightarrow} f$ (unicité limite ; équivalents interdits)
conserve positivité et $\nearrow$ ou $\searrow$ mais PAS $\mathscr{C}^0$ et $\int$.

$\sum f_n$ CVS sur $I \Leftrightarrow \sum f_n(t)$ CVS $\forall t \in I$ alors $\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.

$\sum f_n$ CVS $\Rightarrow S = S_n + R_n$ et $R_n \overset{\text{CVS}}{\to} \tilde{0}$.

• <u>CVU :</u> $f_n \overset{\text{CVU}}{\to} f$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ n \geqslant N \Rightarrow \forall t \in I\ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$, N indépendant de t.
CVU $\Rightarrow$ CVS, on cherche tout de même la limite simple en premier.
$(f_n) \overset{\text{CVU}}{\to} f \Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow f_n - f$ borné et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ (on peut chercher (α_n) tq $\alpha_n \to 0$ et $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \alpha_n$)
$\sum f_n$ CVU $\Leftrightarrow \sum f_n$ CVS et $R_n \overset{\text{CVU}}{\to} \tilde{0}$ pour la CVU de R_n on peut : trouver $\alpha_n, |R_n(t)| \leqslant \alpha_n\ \forall t \in I$ OU $\|R_n\|_\infty \to 0$.
En pratique on l'obtient pas : CVN OU $\|R_n\|_\infty \to 0$ par CSSA ou autre majoration.

• <u>CVN :</u> si f_n sont bornées et $\sum \|f_n\|_\infty$ cvg. CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS.
Pour montrer la CVN, il suffit d'avoir (α_n) tq $\forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant \alpha_n$ et $\sum \alpha_n$ cvg.

• Si $f_n \overset{\text{CVU}}{\to} f$ et les f_n $\mathscr{C}^0$ alors f $\mathscr{C}^0$ (de même avec CVU sur tout segment et $\sum f_n$).
(CVU $\Rightarrow$) CVU sur tout segment $\Rightarrow$ CVS sur I.
<u>théorème de la double limite :</u> si $f_n \overset{\text{CVU}}{\to} f$ et chaque $f_n \underset{a}{\to} l_n$ alors $f(t) \underset{a}{\to} \lim\limits_{n\to+\infty} l_n$, i.e. $\lim\limits_{t\to a}\big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\big) = \lim\limits_{n\to+\infty}\big(\lim\limits_{t\to a} f_n(t)\big)$ (de même pour $\sum f_n$, théorème de la limite terme à terme) $\Rightarrow$ si $\neq$, on a pas la CVU.

<u>permutation limite-intégrale :</u> $f_n \underset{[a,b]}{\overset{\text{CVU}}{\to}} f$ et chaque f_n $\mathscr{C}^0 \Rightarrow f$ $\mathscr{C}^0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.
(de même pour $\sum f_n$, intégration terme à terme sur un segment).
<u>théorème de convergence dominée :</u> les f_n cpmx, $f_n \overset{\text{CVS}}{\to} f$ cpmx et $\exists \varphi$ intégrable tq $\forall n \in \mathbb{N}\, |f_n| \leqslant \varphi$ (indé de n) $\Rightarrow$ les f_n et f intégrables et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$ (de même pour $\sum f_n$, théorème d'intégration terme à terme).

<u>théorème d'intervesion limite-dérivée :</u> les f_n $\mathscr{C}^1$, f_n CVS et f_n' CVU sur tout segment $\Rightarrow f$ $\mathscr{C}^1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n' = f'$ donc $\big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\big)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$ et f_n CVU sur tout segment (de même pour $\sum f_n$, théorème dérivation terme à terme).
• f_n $\mathscr{C}^p$, les $f_n, \dots, f_n^{(p-1)}$ CVS, $f_n^{(p)}$ CVU sur tout segment alors f $\mathscr{C}^p$ et $\forall k \in [\![1,p]\!],\ f^{(k)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$ (de même pour $\sum f_n$).

Séries entières

série entière : $\sum a_n z^n$ $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
lemne d'Abel : $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $(a_n z_0^n)$ bornée alors $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant |z_0|$ $\sum a_n z^n$ CVA.
rayon de convergence : $R = \sup\{r \geqslant 0 \,|\, (a_n r^n)$ bornée $\}$
- $|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ CVA.
- $|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ dvg grossièrement.
- $|z| = R$: on ne sait rien !

Une série entière CVN donc CVU sur tout $[-r; r],\ r < R$ mais pas CVN sur tout $D(0, R)$.
• $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\mathscr{C}^0$ sur $]-R; R[$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ $\mathscr{C}^0$ sur $D(0, R)$.
règle d'Alembert : si $\left|\dfrac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \to l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ existence limite !
- $l < 1$: $\sum a_n z^n$ CVA.
- $l > 1$: $\sum a_n z^n$ dvg grossièrement.

$a_n = \mathscr{O}(b_n)$ ou $o(b_n)$ ou $|a_n| \leqslant |b_n| \Rightarrow R_a \geqslant R_b$ $\quad a_n \sim b_n \Rightarrow R_a = R_b$.
$\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même RdC.
RdC de $\sum (a_n + b_n) z^n \geqslant \min(R_a, R_b)$ et $=$ si $R_a \neq R_b$.
RdC de $\sum c_n z^n \geqslant \min(R_a, R_b)$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ produit de Cauchy.

série entière primitive : $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ de même RdC que $\sum a_n x^n$; $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ primitive $= 0$ en 0 de S.
série entière dérivée : $\sum n a_n x^{n-1}$ de même RdC que série normale ; $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ dérivée continue de S.
$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et $S^{(p)} : x \mapsto \sum_{n=p}^{+\infty} \dfrac{n!}{p!} a_n x^{n-p}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$ donc si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même somme au voisinage de 0 alors, $a_n = b_n$.

• f DSE si $\exists \sum a_n x^n$ tq $\forall x \in]-r, r[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (donc cvg) $\Rightarrow f$ $\mathscr{C}^0$ et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
série de Taylor : $\sum \dfrac{f^{(n}(0)}{n!} x^n$ f $\mathscr{C}^\infty$, seule série associée à f et $f \notin \mathscr{C}^\infty \Rightarrow f$ non DSE.
$\{f$ DSE $\}$ est un EV ; f DSE $\Rightarrow \bar{f}$, les $f^{(k)}$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
f DSE alors ses primitives sont $F : x \mapsto F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$ $\alpha \in \mathbb{R}$ et $R = 1$.

Intégrales à paramètres

$g : x \mapsto \int_J f$, $g : I \to \mathbb{K}$ et $f : (x,t) \in I \times J$ $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalles non vides.
• théorème de continuité : $t \mapsto f(x,t)$ cpmx sur J, $x \mapsto f(x,t)\, \mathscr{C}^0$ sur I, $\exists \varphi$ cpmx et intégrable sur J, $\forall (x,t) \in I \times J$ $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (domination globale) OU pour x dans un segment de I (domination locale) $\Rightarrow g$ définie et $\mathscr{C}^0$ sur I.

limites de g : si a extrémité de I dans $\lim_{x \to a} g(x)$ on peut remplacer $x \to a$ par $x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$.
Si on a utilisé la domination locale, il faut raisonner par comparaison de limite.
théorème de dérivation d'ordre p : $(x,t) \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}$ $i \in [\![1;p]\!]$, $\forall t \in J$ $x \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\, \mathscr{C}^0$ sur I, $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$ $\forall x \in I$ $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ cpmx et intégrable sur J, domination globale ou locale sur $\frac{\partial^p f}{\partial x^p} \Rightarrow g\ \mathscr{C}^p$ et $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $g^{(k)} : x \mapsto \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

Isométries vectorielles

isométrie vectorielle : $u \in \mathscr{L}(E)$, $\forall x \in E$ $\|u(x)\| = \|x\|$; $Sp(u) \subset \{-1; 1\}$; c'est donc un automorphisme. ($\Leftrightarrow$ endo orthogonal, conserve PS)
$(O(E), \circ)$ groupe orthogonal.
u isométrie vectorielle $\Leftrightarrow \mathscr{B}$ bon, $u(\mathscr{B})$ bon $\forall \mathscr{B}$ bon $\Leftrightarrow \exists \mathscr{B}$ bon, $u(\mathscr{B})$ bon.

• $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale si l'endo cannoniquement associé à A est une isométrie vectorielle.
A orthogonale $\Leftrightarrow {}^tAA = I_n \Leftrightarrow A{}^tA = I_n \Leftrightarrow A$ inversible et $A^{-1} = {}^tA \Leftrightarrow (C_1, \ldots, C_n)$ bon de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow (L_1, \ldots, L_n)$ bon de $\mathbb{R}^n$.
$\mathscr{B}$ bon, $\mathscr{B}'$ bon ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ orthogonale et si oui $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = {}^tP$.
$\Rightarrow$ si $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ bon et $u \in \mathscr{L}(E)$, $A' = {}^tPAP$, A et A' orthogonalement semblables.

$(O_n(\mathbb{R}), \times)$ sous-groupe de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ (on a que $O_n(\mathbb{R})$ compact)
$A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\det A = \pm 1$ ($\Leftarrow$ faux !!)
$(SO_n(\mathbb{R}), \times)$ groupe spécial orthogonal, sous groupe de $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, ensemble des matrices de $O_n((\mathbb{R})$ de det> 0.
réflexion : symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan ($\in O_n^-(\mathbb{R})$).

E euclidien, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ bon alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \pm 1$, $\mathscr{B}'$ direct si $+$, indirecte si $-$.
$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ indépendant de $\mathscr{B}$ avec $\mathscr{B}$ bon directe et $n = \dim E$.
produit mixte : $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ ou $[x_1, \ldots, x_n]$.

- $\underline{\mathbb{R}^3 :}$

$\exists! w \in E,\ \forall x \in E,\ [u,v,x] = < w, x >$, w est le produit vectoriel $u \wedge v$.
$\wedge$ est bilinéaire, antisymétrique ; $< u \wedge v, u > = < u \wedge v, x > = 0$; (u,v) libre ssi $u \wedge v \neq 0$; $i,j,k)$ bon directe $\Rightarrow i \wedge j = k$.

- $\underline{E \text{ de dim } 2 :}$

isométrie directe : $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi[\right\}$
$R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta') \times R(\theta)$.
isométrie indirecte : $O_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \right.$ $S(\theta)^2 = I_2 \ \Rightarrow O_2(R) \backslash SO_2(\mathbb{R}) = O_2^-(\mathbb{R})$.

- $\underline{E \text{ de dim } 3 :}$

$u \in O_2(\mathbb{R}),\ \exists$ bon tq u diagonale par bloc : $\underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right)}_{\text{isométrie direct, } E_1(u)}$ ou $\underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right)}_{//\ \text{indirect, } E_{-1}(u)}$,

rotations d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et angle $\pm\theta$, $\mathrm{Rot}_{u,\pm\theta}$.

$Sp_{\mathbb{R}}(u)$	Sous-espace propre	nature de u	$\det(u)$
$\{1\}$	$E_1 = E$	Id_E ($\theta \cong 0[2\pi]$)	1
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$	$-Id_E$ ($\theta \cong \pi[2\pi]$)	1
$\{-1,1\}$	$E_{-1},\ E_1$ droites orthogonales	symétrie orthogonale par rapport à E_1	-1

<u>dim 2</u>

1) Calcul du det 2) det$= 1$ (rotation), tr $= 0$ / det $= -1$ (symétrie $\perp$), $E_1(A)$ axe de symétrie.

$Sp_{\mathbb{R}}(u)$	Sous-espace propre	nature de u	$\det(u)$
-1 ou $\{1\}$	$E_{-1} = E$ ou $E_1 = E$	Id_E ou $-Id_E$	1 ou -1
$\{1\}$	E_1 droite	rotation d'axe E_1	1
$\{-1\}$	E_{-1} droite	rotation d'axe $E_{-1} \circ$ réflexion selon $E_{-1}^{\perp}$	-1
$\{-1,1\}$	E_{-1} droite et $E_1 = E_{-1}^{\perp}$	réflexion selon E_1	-1
$\{-1,1\}$	E_1 droite et $E_{-1} = E_1^{\perp}$	demi-tour d'axe E_1 (réflexion)	-1

<u>dim 3</u>

1) Calcul du det 2) Si A symétrique, c'est un demi-tour (symétrie orthogonale), $E_1(A)$ donne les invariances. Si rotation, tr $= \pm\theta$, le produit mixte donne le signe de θ.

- <u>endomorphisme symétrique :</u> $\forall (x,y) \in E^2, < u(x), y > = < x, u(y) >$, donc $u \in S(E)$; $S(E)$ SEV de $\mathscr{L}(E)$ de dim $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
$u \in S(E) \Rightarrow Im(u) = \big(Ker(u)\big)^{\perp}$.
$u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ bon, $u \in S(E)$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ symétrique.
- <u>théorème spectrale :</u> tout $u \in S(E)$, E euclidien admet une bon de vecteurs propres.

OU toute matrice symétrqiue réelle est diagonalisable dans une bon et $A = PD^tP$.

$\forall M = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix}$, on trouve c tq $M - cI_n = \big((b)\big)$, puis $\text{Ker}(M - cI_n)$ =$\text{Ker}\big((b)\big) = n - 1$ (théo rang) $\Rightarrow$ tout les $\vec{\text{vp}}$ avec multiplicité via tr $= \sum_{\lambda \in Sp(M)} \lambda$.

Variable aléatoire discrète

loi de X : $P_X : U \mapsto P(x \in U)$ complétement déterminée par $\big(P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$.
X positive si $P(X \geqslant 0) = 1$
fonction de répartition : $F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto P(X \leqslant x)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1)$
loi géométrique : répétition infini de Bernoulli + temps d'attente ; seule loi sans mémoire i.e. $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X \geqslant n + k \mid X > n) = P(X > k)$

Poisson = loi binomiale, approximation valide ssi $p << 1$.
X VAD $\Rightarrow f(X)$ VAD $Z = (X, Y)$ vecteur aléatoire discret, $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$
loi conjointe : $P(X = x, Y = y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ $\rightarrow$ lois marginales (pas réciproque).
lois marginales : $P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$ même pour Y.
L'ensemble des VAD est un $\mathbb{R}$-EV.
X_i mutuellement indépendantes si $\forall (x_i) \in \prod_i X_i(\Omega)$ les $(X_i = x_i)$ sont indé $\Rightarrow$ loi de $(X_1, \ldots, X_n)$ et la loi produit des X_i.
lemne des coalitions généralisé : $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ mutuellement indé, $q \in [\![1, n-1]\!]$ alors $f(X_1, \ldots, X_q)$ et $g(X_{q+1}, \ldots, X_n)$ indépendantes.
X admet une espérance ssi $\sum P(x \geqslant n)$ cvg.
formule de transfert : X à valeurs dnas $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ dénombrable, x_n 2 à 2 distincts, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ alors $f(X)$ d'espérance finie ssi $\sum f(x_n)P(X = x_n)$ CVA et donc $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$.
L'éspérance conserve l'ordre, est linéaire ; $P(X \geqslant 0) = 1) \Rightarrow X$ espérance finie et $E(X) \geqslant 0$; $P(X = a) = 1 \Rightarrow E(X) = a$.
X, Y indé $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$ réciproque fausse. X^2 admet une espérance $\Rightarrow X$ admet une espérance.
$\mathbb{V}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E\big((X - E(X))^2\big) \geqslant 0$ $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(X + b) = \mathbb{V}(X)$
$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

- inégalité de Markov : X positive, $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(X)}{a}$.
- inégalité de Bienaymé-Tchebytchev : $\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

Cauchy-Schwartz : X, Y sur un même espace, $E(Y)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2) \ = \ \text{si } \exists(\alpha,\beta)\mathbb{R}^2\backslash\{0,0\},\ P(\alpha X+\beta Y=0)=1$.

$Cov(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(y))\big) = E(XY)-E(XE(Y) \quad = 0$ si X, Y indépendantes (réciproque faux)

$$\mathbb{V}(X_1,\dots,X_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} Cov(X_i,X_j).$$

fonction génératrice : X à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^X P(X=n) \ = E(t^X)$.

de RdC $\geqslant 1$, $\forall t\in[-1,1]$ $G_X(t)\leqslant 1$ et $G_X(t)=1$, $\mathscr{C}^0$ sur $[-1,1]$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ au moins ; polynôme si $X(\Omega)$ fini.

$n\in\mathbb{N}$ $P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$; $E(X)=G'_X(1)$ et $\mathbb{V}(X) = G''_X(1)+G'_X(1)-G'_X(1)^2$

X, Y indé $\forall t\in[-1,1]$ $G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t)$

loi faible des grands nombres : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indés, de même loi, X_n^2 admet une espérance, $\sigma = \sigma(X_n)=\sigma(X_1),\ m=E(X_1)$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - n\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

Méthode : regarder si support fini, si oui et exp type O/N : Bernoulli/Binomiale.
Préciser $X(\Omega)$ à chaque fois.
Pour $E(X)$, prouver la CVa puis calculer par S_n !!
$\dfrac{k^2}{(k+1)!} = \dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{(k+1)!}$!
Toujours se ramener à X_1 quand n VAD de même loi !!

Systèmes d'équations différentielles linéaires

On trouve les coeffs des y_p du 2nd ordre en remettant y_p dans (E).
Structure d'EV, S_H SEV de $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K}^n)$ de dim n.

$X' = AX+B,\ B$ simple ou nul et A constante et diago/trigo.

On trouve $Sp(A)$ puis les $E_{\lambda_i} \Rightarrow \vec{\text{vp}} \Rightarrow X_H = \sum_{i=1}^{n} c_i V_i e^{\lambda_i}t \quad V_i$ $\vec{\text{vp}}$, puis repasser dans $\mathbb{R}$ si besoin, + X_p.

Méthode : On résoud $Y' = DY$ avec $D = P^{-1}AP$ et $Y = P^{-1}X$ puis on repasse à X et A + base de $\vec{\text{vp}}$

signe solution dépend du côté de $a(x)$! pas oublier 2nd membre + ds la normalisation !!
recollement et superposition ! $\quad$ ($i\omega$ solution, pas ω)

Calcul différentiel

Passage polaire !
$f : U \to \mathbb{R}\ \mathscr{C}^1$ si f admet toute ses ∂_i sont $\mathscr{C}^0$.
<u>différentielle :</u> $\mathrm{d}f(a) : h \mapsto \partial_1 f(a)h_1 + \cdots + \partial_p f(a)h_p \ \ \to$ si $f\ \mathscr{C}^1$, $f(a+h) \underset{\|h\|\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a)h + o(\|h\|)$
$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_p f(a)) \quad \mathrm{d}f(a).h =< \partial f(a), h >$
<u>Règle de la chaîne :</u> $f\ \mathscr{C}^1$, les $t \mapsto x_i(t)\ \mathscr{C}^1$, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t)) \in U$.
Alors $g = f \circ \gamma$ existe et $\mathscr{C}^1$ et $g'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i(t)\partial_i f \circ \gamma(t)$.
$\to$ ex : $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \times \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \times \dfrac{\partial y}{\partial u}$

- $f : U \to \mathbb{R}\ \mathscr{C}^1$, U convexe de $\mathbb{R}^d$, si $\partial_i = 0$ alors f indé de sa i-ème variable.
- a point critique ssi $\nabla f(a) = (0, \ldots, 0)$; si U convexe, {extremums}$\subset${points critiques}

<u>Théorème de Schwarz :</u> $f\ \mathscr{C}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \ \Rightarrow$ contraposée pour montrer pas $\mathscr{C}^2$.

1A

Équations différentielles ordinaires

simplement connexe : $\forall (x,y) \in \Omega^2$, il existe un chemin entre x et y.
Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit $f \in \mathscr{C}^1(]t_1, t_2[, \Omega)$, Ω ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$, alors il existent une unique solution maximale à un système de Cauchy.
Version globale : Si $f :]t_1, t_2[\times \Omega \to \mathbb{R}^d$ est globalement lipschitzienne en la deuxième variable et $\mathscr{C}^0$ des deux, alors il existe une unique solution globale. (globale $\Rightarrow$ maximale)
Egalité de Duhamel : φ_{t_0,y_0} vérifie $\varphi(t) = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(u, \varphi(u))\, du$.
Théorème des bouts : Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ $\mathscr{C}^1$, alors soit $]t1, t_2[= \mathscr{D}_\varphi$, φ solution maximale alors φ "explose" en ses bords.
$\Rightarrow$ Pour $\Omega = \mathbb{R}^d$, toute solution bornée est globale (corrolaire).

sous-solution : u sous-solution si $u' \leqslant f(t,u)$ et $u(0) = y_0$.
équilibre : soluution stationnaire.
stable : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \|y - y_0\| < \eta$ et $\forall t\ \|y(t) - y_0\| < \varepsilon$.
asymptotiquement stable : $\exists \eta > 0\ \forall y_0 \in B(y_e, \eta),\ \mathscr{D}_y \supset [t_0, +\infty[$ et $y(t) \lim\limits_{n \to +\infty} y_e$.

linéaire autonome : $\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ $\qquad S = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{At}) + y_p$.
y_e équilibre si solution de $Ay_e = b,\ y_e = A^{-1}b$ si $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Rightarrow y : t \mapsto e^{At}(y_0 - y_e) + y_e$
y_e stable ssi $\exists M,\ \|e^{At}\| \leqslant M\, \forall t \geqslant 0$ ou ssi $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$ si A diago (si $\mathbb{R}^*_+$, asymptotiquement stable)
y_e aysmptotiquement stable si $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ ou $Sp\big(Jac(f(y_{eq}))\big) \subset \mathbb{R}^*_- + i\mathbb{R}$.

Méthode : on applique Cauchy-Lipschitz, on trouve les solu stationaire $t \mapsto c$, c tq $f(t,c) = 0\ \forall t$, on applique le corrolaire des bouts avec les sur/sous solutions.

Schémas numériques

erreur globale : $e_i = y(t_i) - u_i \Rightarrow$ schéma convergent ssi sup $|e_i| \underset{\Delta x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
$e_i = \varepsilon_i + E_i,\ \varepsilon_i = y(t_{i+1}) - u_i$ et E_i amplification de e_{i+1} par le schéma $\Rightarrow$ CVG ssi $\sum |\varepsilon_i| \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et E_i indépendant de Δx.

<u>consistance :</u> $\sum |\varepsilon_i| \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$.
<u>ordre k (min) :</u> $\exists C,\ \forall i\ |\varepsilon_i| \leqslant C h_{i-1}^{k+1} \ \Rightarrow$ consistant et $\exists C, \sum |C_i| \leqslant C \Delta x^k$.
Tout schéma stable et constant est convergent. Si il est d'ordre au moins $l \geqslant 1$ et stable, il est convergent et $\exists C > 0, \forall i\ |e_i| \leqslant C \Delta x^l$
<u>stabilité :</u> $F : (t,x,h) \mapsto F(t,x,h)$ est lipschitzienne en x.
<u>critère d'ordre :</u> $f\ \mathscr{C}^p$ en t et x et $F\ \mathscr{C}^p$ en h $\Rightarrow$ schéma d'ordre $\geqslant p$ ssi
$\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \dfrac{\partial^k F}{\partial h^k}(t,x,0) = \dfrac{f^{[k]}(t,x)}{k+1}$. $\qquad (f^{[k+1]} = \partial_t f^{[k]} + f \partial_x f^{[k]}$ et $f^{[0]} = f)$

<u>Euler explicite :</u> $F(t,x,h) = f(t,x) \qquad u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t, u_n) \qquad$ ordre 1 si $f\ \mathscr{C}^1$
<u>point milieu :</u> $F(t,x,h) = f(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t,x)) \qquad$ ordre 2 si $f\ \mathscr{C}^2$
<u>Hun :</u> $F(t,x,h) = \frac{1}{2}(f(t,x) + f(t+h, x + hf(t,x)) \qquad //$

<u>Euler implicite :</u> $u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_{n+1}, u_{n+1}) \qquad //$ si eq bien résolue
<u>Crank-Nicholson :</u> $u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})) \qquad //$

Transformé de Fourier

$\hat{f} = \mathscr{F}(f)(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\xi x}\, \mathrm{d}x \quad \check{f} = \mathscr{F}^{-1}(f) = \hat{f}(-x)$ et $\mathscr{F} \qquad \mathscr{D}^\alpha \overset{\mathscr{F}}{\Leftrightarrow} (2i\pi\xi)^\alpha$
<u>Théorème de Riemann-Lebesgue :</u> $\mathscr{F}(L^1) \subset L^\infty \cap \mathscr{C}_{\to 0}$
<u>Théorème :</u> $f\ L^1$ tq $\hat{f}\ L^1$ alors $\mathscr{F}^{-1}(f)$ existe, est continue et $\|f - \mathscr{F}^{-1}(f)\|_1 = 0$.
Et si $f\ \mathscr{C}^0$, $\mathscr{F}$ isomorphisme.
$f\ L^1 \Rightarrow \hat{f}\ \mathscr{C}_{\to 0}$ ainsi $\mathscr{F}$ injective.

$\mathcal{S}$, <u>espace de Schwart :</u> ensemble des fcts infiniment dérivables tel que $\forall k\, \forall l,\ x^l f^{(k}(x) \underset{\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.
$\mathscr{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ ($\Rightarrow \mathcal{F}$ isomorphisme) ; $(\mathcal{S}, +, \dot{)}$ EV et $(\mathcal{S}, +, \times)$ anneau.
<u>Plancheret-Parseval :</u> $f \in L^1 \cap L^2$ (ou $\mathcal{S}$) alors $\hat{f}\ L^2$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

EDP

<u>Définition :</u> équation sur $D_\alpha^\beta\ f$ (α, β multi-indices) avec des conditions aux bords de D_{f_α} si borné.

<u>Equation de la chaleur</u>
$$\begin{cases} \partial_t u - \mathcal{K} \Delta u = f \quad t \geq 0 \\ u(t=0, .) = u_0 \end{cases}$$

Variables aléatoires et Statistique

• discrète : $X \sim \mathbb{U}(S)$, $P(X = x) = \dfrac{\mathbb{1}_S}{Card(S)}$ $\quad X \sim \mathcal{B}(p)$, $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$ $\quad X \sim Bin(n,p)$, $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ $\quad$ (n $\mathcal{B}$ indé $E = p$, $\mathbb{V} = np$)
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $\big($linéaire ; $E, \mathbb{V} = \lambda$ obtenu par $E(X(X-1)) = \lambda^2$ et lin $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda\big)$ $\quad X \sim \mathcal{G}(p)$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

• densité : Si $\mathscr{C}^0$ alors $P(X \in A) = \displaystyle\int_A f$ $\quad X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, linéaire $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
$m = 0$, centrée et si $\sigma^2 = 1$, réduite ; $\dfrac{\mathcal{N}(m,\sigma^2) - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ $E = m$, $\mathbb{V} = \sigma^2$
$X \sim$Exp(λ), $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ $\quad X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $f(x) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

fonction de répartition : F_X croissante, $\mathscr{C}^0$ à droite, $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1 \Leftrightarrow F_X$ fct de répartition. $\quad X \sim \mathcal{B}(p)$, $F_X = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1-p \text{ si } x \in]0;1[\\ p \text{ sinon} \end{cases}$ $\quad X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$
Φ symétrique et $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ $\quad X \sim$Exp(λ), $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$
$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$ $\quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X$ ou $P(X \leq x)$ $\quad$ médiane : résoudre $F_X(m) = \dfrac{1}{2}$ dans la bonne zone.

espérance et variance : $E(\varphi(x)) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x)\,dx$ linéairé et croissante $\quad \mathbb{V}(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$ $\quad \mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$ $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$
Markov : $X \geq 0$, $a > 0$ $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$ $\quad$ Bienaymé-Tchebytchev : X d'espérance finie, $a > 0$ $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$ $\quad$ espérance totale : A, B s.c.e $E(X) = E(X\mathbb{1}_A) + E(X\mathbb{1}_B)$ puis indé de $\mathbb{1}_A$ et X ⚠ $E(\mathbb{1}_B) \neq 0$ généralement

convergence en loi : X_n cvg vers Y ssi $\forall t$ F_Y continue en t, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(t_n) = F_Y(t)$

convergence en probabilité : $Z_1, \ldots$ cvg en proba vers x, noté $Z_n \xrightarrow{P} x$ si $\forall \varepsilon > 0$, $P(|Z_n - x| > \varepsilon) \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
X, Y indé alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ $\quad$ indé $\Rightarrow \mathbb{V}\Big(\sum\Big) = \sum \mathbb{V}$
n-échantillon : $X_1, \ldots, X_n$ indé de même loi (iid).
Théorème (loi faible des grands nombres) : $X_1, \ldots, X_n$ iid avec $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$ alors, $\forall a > 0$ $P\Big(\Big|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i - m\Big| > a\Big) \leq \dfrac{\sigma^2}{na^2}$ (on a aussi $E(\frac{1}{n}\sum X_i) = m$, moyenne empirique).

<u>Théorème (loi forte des grands nombres) :</u>$X_1, \dots, X_n$ iid, E et $\mathbb{V}$ alors $\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i) \xrightarrow{P} E(X_1)$.

<u>Théorème central limite :</u>$X_1, \dots, X_n$ iid espérance m et variance $\sigma^2 < \infty$, alors $\forall a \in \mathbb{R}$ $P\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\Big) \underset{+\infty}{\longrightarrow} \Phi(a)$.

<u>Approximation d'une binomiale :</u> • n grand (> 30) et np petit (< 5) : loi de Poisson, $\lambda = np$. (Stein)

• n grand (> 10) et np, $n(1-p)$ assez grand (> 10) : $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. (Moivre-Laplace)

<u>Test :</u> on choisit $\begin{cases} H_0 \text{ si } X > s \\ H_1 \text{ sinon} \end{cases}$ avec s seuil à déterminer. H_0 est l'hypothèse nulle et H_1 l'alternative.

1. On choisit un modèle.
2. Formuler H_0 et H_1.
3. Déterminer une statistique de test (ex : moyenne empirique de mesures indé).
4. Trouver une règle de rejet de H_0 i.e. on prend H_0 si $X < s$ par ex, région de rejet.
5. Calcul du seuil s (ex: test de niveau $\alpha = 5\% \Rightarrow \forall m \leqslant 80 P(\hat{X} > s) \leqslant \alpha$, erreur de type 1).
6. Règle de décision, A.N. + décision (ex : $\mathbb{1}_{\hat{X} > 80,025}$ test de niveau 5% de H_0 et H_1 puis $\hat{X}_{\text{obs}} = 80,1 > s \Rightarrow$ décision)