Équivalents

Exercice 1. (*Voir corrigé*) (★)

Trouvez des équivalents des suites et fonctions suivantes :

1) $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$ en $+\infty$
2) $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ en $+\infty$
3) $w_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ en $+\infty$
4) $\ln(\cos x)$ en 0
5) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ en 0
6) $\cos(\sin x)$ en 0

Exercice 2. (*Voir corrigé*) (★)

Comparez les fonctions suivantes :
1) $x \ln x$ et $\ln(1+2x)$ au voisinage de 0
2) $x \ln x$ et $\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x$ au voisinage de $+\infty$

Développements limités

Exercice 3 (*Voir énoncé*) (★)

1)

Équivalents

Exercice 1. (*Voir corrigé*) (★)

1) On met sur le même dénominateur.

2) On utilise la quantité conjugée : $v_n = \dfrac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1+\sqrt{n-1}}} = \cdots = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$.

Aussi, on a $\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$, ces deux quantités tendant vers 1, on a un équivalent (avec les 0.5). Ainsi $v_n \underset{+\infty}{\sim} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

3) $w_n = \sqrt{n\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\Big(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\Big) \underset{+\infty}{\sim}$

4) $\ln(\cos x) = \ln(1-(1-\cos x)) \underset{0}{\sim} -(1-\cos x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

5) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x - x}{x \sin x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{-x^3}{3!}}{x^2} = -\dfrac{x}{6}$ (DL ordre 4 de sin en haut et ordre 2 en bas).

6) Par composition, $\cos(\sin x) \to 1$ en 0 et donc $\cos(\sin x) \underset{0}{\sim} 1$.

Exercice 2. (*Voir énoncé*) (★)

1) $\dfrac{\ln(1+2x)}{x\ln x} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{\ln x} \longrightarrow 0$.

2) Pour x assez grand, $\sqrt{x^2+3x} \leqslant 2x$ (passer au carré pour s'en convaincre) et on a aussi $\ln(x^2) = 2\ln x$ et $|\sin x| \leqslant 1$.

Donc $|\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x| \leqslant 4x\ln x$ et ainsi $\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x \underset{+\infty}{=} O(x\ln x)$.

Dévelopments limités

Exercice 3 (*Voir énoncé*) (★)

1)