

Notions de base sur les langages

Exercice 1

Sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$, considérons les mots $w_1 = 01$ et $w_2 = 101$. Calculer $w_1 \cdot w_2$, $w_2 \cdot w_1$, w_1^3 , w_2^2 , $\epsilon \cdot w_1$, $|w_1|$.

Exercice 2

Soit $L = \{a, b\}$. Calculer L^n , $n = 2, 3$. Plus généralement, caractériser L^n , pour n quelconque et caractériser également l'union de tout ces langages : $M = \cup_{i \in \mathbb{N}} L^i$. Mais au fait, l'union des puissances, c'est une opération classique que l'on réutilisera souvent, et il existe par conséquent une notation nettement plus simple pour décrire M , quelle est-elle ?

Exercice 3

Considérons les deux langages sur l'alphabet $\{a, b\}$ définis par $L_1 = \{a, ba\}$ et $L_2 = \{\epsilon, b, aa\}$. Calculer $L_1 L_2$, $L_2 L_1$, L_1^2 , L_2^2 , L_1^3 , L_2^3 , L_1^* , L_2^* .

Exercice 4

Soit $L_1 = \{a\}$, et $L_2 = \{a, \epsilon\}$. Calculer L_1^n , L_2^n pour $n = 0, 1, 2, 3, 10$, pour finir, calculer L_1^* , L_2^* .

Exercice 5

Pour un langage L arbitraire, que valent $L \cup \emptyset$, $L \cap \emptyset$ et $L \cdot \emptyset$? Existe-t-il un langage L_0 tel que pour tout L , $L \cdot L_0 = L_0 \cdot L = L$?

Exercice 6

On considère les langages définis sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ par $L_1 = \{a\}^* \cdot \{b\}^*$, $L_2 = (\{a\} \cup \{b\})^*$, $L_3 = \{ab\}^*$, $L_4 = \{a\}^* \cup \{b\}^*$ et $L_5 = (\{ab\} \cup \{a\})^*$.

Les questions 1 et 2 de cet exercice sont étroitement imbriquées, on peut les traiter en même temps pour chacun des langages.

1. Les mots suivants appartiennent-ils à chacun de ces langages : a , b , aa , ab , ba , aab , $abab$?
2. Trouver la forme générale des mots de chacun de ces langages.
3. Comparez ces langages (égalités, inclusions).

Exercice 7

On se donne un ensemble de caractères qui contient au moins les lettres a, b, c, d et un langage L fini sur cet alphabet.

Comment peut-on prétraiter l'information dans le langage L pour écrire une fonction qui teste si le mot $w \in L$ en ne parcourant qu'une seule fois les lettres du mot w ?

On illustrera la méthode sur le langage $L \stackrel{\text{def}}{=} \{aabb, aaa, aaabb, aabc, abcd, baba, bac, bba, bbac\}$.

Exercice 8

Soit L_1 et L_2 deux langages arbitraires. Exprimer les langages suivants d'une autre manière, qui utilise moins d'opérations sur les langages :

1. $(L_1 \cdot L_2) \cup (L_1 \cdot L_3)$ avec deux opérations.
2. $(L_1^*)^*$ avec une opération.
3. $(\{\epsilon\} \cup L_1)^*$ avec une opération.
4. \emptyset^* avec aucune opération.
5. $(L_1^* \cdot L_2^*)^*$ avec deux opérations.