2019–2020 学年第二学期 《《几何与线性代数》自测题2

(考试对象：工科各专业 2019 级)

学院__________ 专业班级__________学号__________ 姓名 __________ 成绩 __________

一、填空题 (每题 3 分，共 27 分)

1. 已知$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 5 \\ -1 & c_{22} \end{pmatrix}$, 则$c_{11} =$ ________, $c_{22} =$ ________。

   $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$

2. 设 A 为 3 阶方阵,且 $|A| = 4$, $|(\frac{1}{2}A)^2| =$ ________ 。

   1/4;0.25

3. 设 A 为 3 阶方阵， B 为 4 阶方阵，且 $|A| = 1, |B| = -2$, 则 $||B|A| =$ ________。

   $||B|A| = |-2A| = (-2)^3|A| = -8$

4. 设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$, 则$\begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ 2a_{21} - a_{11} & 2a_{22} - a_{12} & 2a_{23} - a_{13} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix} =$ ____________。

   6

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 令 $(A^*)^{-1} = C = (c_{ij})$,则 C 的对角线元素分别为 $c_{11} =$ _____, $c_{22} =$ _____, $c_{33} =$ _____, $c_{44} =$ _____。

   $(A^*)^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}A$

6. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， 令 $A^{-1}=C=(c_{ij})$, 则 $c_{14}=$_____, $c_{23}=$_____, $c_{32}=$_____, $c_{41}=$_____。

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, 则行列式 $\det(AA^T)$ 的值为________________。

1

8. 设 n 阶方阵满足 $A^2+2A+3E=0$,其中 E 是 n 阶单位矩阵，则有 $A^{-1}=$________$A+$________E。

$-\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}E; -\frac{A+2E}{3}$

9. 设 $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, 则代数余子式 $A_{21}+2A_{22}+3A_{23}=$________。

0

二、(12分)

计算行列式: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix}$.

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix}=288$$

三、(12分)

解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0.$

解：

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} \overset{r_i - r_1 (i=2,3,\cdots,n)}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)-x \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n}((i-2)-x)$$

$$x = 0, 或 1, \cdots, 或 n-2$$

四、(12分)

利用增广矩阵的初等行变换计算方程组的解，要求将增广矩阵化为行简化阶梯型。

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ -3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_2 - 12x_3 = -15 \end{cases}$$

解：

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -3 & -7 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -12 & -15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 1$$

五、(12分)

设 A 为 n 阶可逆矩阵，证明 (1)$|A^*| = |A|^{n-1}$, (2) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

解：(1)

$$\because AA^* = |A|E, |A| \neq 0$$

$$\therefore |A||A^*| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$$

(2)

$$\because A^*(A^*)^* = |A^*|E, |A^*| \neq 0$$

$$\therefore (A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\frac{A}{|A|} = |A|^{n-2}A$$

六、(13分)

已知矩阵 A 满足关系式 $A^2 + 2A - 3E = 0$, 求 $(A - 4E)^{-1}$.

解：

$$(A - 4E)(A + 6E) = -21E \Rightarrow (A - 4E)^{-1} = -\frac{A + 6E}{21}$$

七、(12分)

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

且满足 $A^2 - AB = E$, 求 三阶方阵 B.

解：

$$\because A(A - B) = E \Rightarrow A\text{可逆}$$

$$\therefore A - B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$