2020-2021 学年第二学期《几何与线性代数》期中试卷（A 卷）

参考答案，仅供参考

一、填空（共 18 分，每题 3 分）

1. 23　　2. $t_1=-1,\quad t_2=4$　　3. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{0}$

4. $\begin{bmatrix} 2^{20} & -20\times 2^{19} & -570\times 2^{18} \\ & 2^{20} & 60\times 2^{19} \\ & & 2^{20} \end{bmatrix}$　　5. 8　　6. $AB=BA$

二、选择（共 12 分，每小题 3 分）

1. <u>A</u>　　2. <u>D</u>　　3. <u>B、D</u>　　4. <u>B</u>

三、计算（共 20 分，每小题 8 分）

1. 两直线的方向向量分别为 $v_1=(1,-2,1)$，$v_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

两直线的夹角余弦 $\cos\theta=\dfrac{|v_1\cdot v_2|}{\|v_1\|\|v_2\|}=\dfrac{1}{2}$，夹角为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

2. 所求平面法向量为 $\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$，平面方程为 $x-y+z-2=0$

3. $3A-2B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 5 & 7 & -11 \\ 3 & -13 & 1 \end{bmatrix}$，$AB^T=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$。　4. $2^{2k-1}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

四、（本题 10 分）

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & b \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & b-4 \end{bmatrix}$$

若 $a-3\neq 0$ 即 $a\neq 3$，则原方程有唯一解；
若 $a-3=0$ 且 $b-4\neq 0$ 即 $a=3$ 且 $b\neq 4$，则原方程有唯一解；
若 $a-3=0$ 且 $b-4=0$ 即 $a=3$ 且 $b=4$，则原方程有无穷多解；

五、（本题 10 分）

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&3&4\\1&4&10&16\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&5\\0&0&2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{3}{2}\end{bmatrix}，所以\begin{cases}x_1=-1\\x_2=\frac{1}{2}\\x_3=\frac{3}{2}\end{cases}$$

六、（本题 12 分）

两平面的单位法向量的和差分别为$\vec{n}_1+\vec{n}_2=\dfrac{1}{3}(3,0,-1),\quad \vec{n}_1-\vec{n}_2=\dfrac{1}{3}(1,-4,3)$，

过两平面的平面束方程为$(2x-2y+z-1)+k(x+2y-2z+2)=0$

即$(2+k)x+(2k-2)y+(1-2k)z+2k-1=0$，

$2k-2=0\Rightarrow k=1$，$\dfrac{2+k}{1}=\dfrac{2k-2}{-4}\Rightarrow k=-1$ 带入平面束得：$3x-z+1=0$ 和 $x-4y+3z-3=0$

七、（本题 18 分）

（1）$\left.\begin{array}{l}A\alpha=\vec{b}\\A\beta=\vec{b}\end{array}\right\}\Rightarrow A(\alpha-\beta)=\vec{0}$，所以$\gamma_i^T(\alpha-\beta)=0$ 即 $\gamma_i\bullet(\alpha-\beta)=0$

$(\sum_i^m k_i\gamma_i)\bullet(\alpha-\beta)=\sum_i^m k_i(\gamma_i\bullet(\alpha-\beta))=0$，所以$\sum_i^m k_i\gamma_i\perp(\alpha-\beta)$

（2）$(\alpha)_\beta\dfrac{\beta}{\|\beta\|}=\|\alpha\|\cos(\widehat{\alpha,\beta})\dfrac{\beta}{\|\beta\|}=\dfrac{\|\alpha\|\|\beta\|\cos(\widehat{\alpha,\beta})}{\|\beta\|^2}\beta=\dfrac{\alpha\bullet\beta}{\beta\bullet\beta}\beta$

代入数值得，$(\alpha)_\beta\dfrac{\beta}{\|\beta\|}=\dfrac{1}{9}(-4,2,4)$