一、选择题 （每题 3 分，共 18 分）

1. B　　2. C　　3. A　　4. A　　5. C　　6. B

二、填空题 （每题 3 分，共 24 分）

1．10

2．$2\sqrt{6}$

3．$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

4．$\begin{pmatrix} 2 & -8 & -4 & -3 \\ 3 & 17 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

5．$-\frac{1}{2}(A-E)$

6．$\begin{pmatrix} 1 & -11 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}$

7．　2 或 3

8．　3

三、计算题（共 48 分）

1. （6 分）

（1）方向向量$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(3,-3,3)$，可简化为$\vec{s}=(1,-1,1)$

直线上的点（0，-1/3，1），对应的方程为 $x=-(y+\frac{1}{3})=z-1$

（直线上的其他点：(-1，-2/3，0)、(-1/3，0，2/3) 等）

(2) 设经过直线 l 的平面束方程为 $2x+3y+z+\lambda(x-z+1)=0$，法向量 $\overrightarrow{n_1}=(2+\lambda,3,1-\lambda)$，与平面 π 的法向量$\overrightarrow{n_2}=(1,1,3)$垂直，解得λ=4

因此投影直线方程为：$\begin{cases} 6x+3y-3z+4=0 \\ x+y+3z-4=0 \end{cases}$

2. （6 分）

$$-A_{12}+2A_{22}+A_{32}+2A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=D$$

化为上三角型行列式 $\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -7 & 2\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -7 & 2\end{vmatrix} \to$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5.5\end{vmatrix} = 11$$

3. （6 分）

将行列式的第 2，3，4 列都加到第一列（3 分），得

$$D_4 = 2(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1 & a & b & c\\ 1 & b+c+d+2a & d & b\\ 1 & a & a+c+d+2b & d\\ 1 & a & b & a+b+d+2c\end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1 & a & b & c\\ 0 & b+c+d+a & d-b & b-c\\ 0 & 0 & a+c+d+b & d-c\\ 0 & 0 & 0 & a+b+d+c\end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c+d)^4$$

4. （6 分）原式 $= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ 0 & 0 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -9\end{pmatrix}$$

5. （8 分）写出增广矩阵为 $(A,b) = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$，

通过初等行变换得到行阶梯型矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

行简化阶梯型矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

则 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

令 $x_3 = \mathrm{t}$，则 $\begin{cases} x_1 = 1 - \mathrm{t} \\ x_2 = -1 + \mathrm{t} \\ x_3 = t \end{cases}$

写成列向量的形式，则 $x=\begin{pmatrix}1-t\\-1+t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

6.（8 分）

解： 由 $AX=A-2X$，得$(\mathrm{A}+2\mathrm{E})\mathrm{X}=\mathrm{A}$. 由于$|A + 2E|\neq 0$，所以 $A+2E$ 可逆，又

$$(A+2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

故 $X=(A+2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}$

7. （8 分）

由 A 的伴随矩阵的秩与 A 的秩之间的关系，可知 R(A)=2,

由$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2=0$

则 $a+2b=0$ 或 $a=b$,

但 $a=b$ 时，A 的秩小于 2，

因此，$a+2b=0$ 且 $a\neq b$

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1.证：

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，因$A^*= A^T$，故

$$a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n).$$

因 $A\neq 0$，不妨设$a_{11}\neq 0$. 于是

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2>0.$$

故 A 可逆.

2. 证： 由于 $2B^{-1}A=A-4E$， 方程两边同时左乘 B, 有

$2A=BA-4B$, $BA-4B-2A+8E=8E$, $(B-2E)(A-4E)=8E$

故 $B-2E$ 可逆，逆矩阵为：

$$(B-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(A-4E).$$