# 2019–2020 学年第二学期 《《几何与线性代数》自测题1

(考试对象：工科各专业 2019 级)

学院__________ 专业班级__________学号__________ 姓名 __________ 成绩 __________

## 一、填空题 (每题 3 分，共 30 分)

1. 已知向量 $\alpha$ 和 $\beta$ 的夹角 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $||\alpha|| = 3, ||\beta|| = 4$, 则$(3\alpha - 2\beta)\cdot(\alpha + 2\beta) =$ ________。

   $-61$

2. 点 $M(2,-1,0)$ 到直线 $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ 的距离是________ 。

   $\frac{2\sqrt{133}}{7}, \sqrt{\frac{76}{7}}, \frac{\sqrt{532}}{7}$

3. 设 $\Delta ABC$ 的顶点为 $A(3,0,2), B(5,3,1), C(0,-1,3)$， 求三角形的面积是 ________。

   $\frac{\sqrt{54}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2}$

4. 直线 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ 与平面 $2x + y - z + 4 = 0$ 的夹角为 ____________。

   $60^0, \frac{\pi}{3}$

5. 点 $(1,1,1)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 的投影为 (________,________,________)。

   $\frac{1}{2}(1,0,3), (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$

6. 直线 $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 与平面 $4x - 2y - 2z = 3$ 的关系为 ________________。

   平行

7. 与向量 $\vec{\mathbf{a}} = (2,0,1), \vec{\mathbf{b}} = (1,-1,2)$ 都垂直的单位向量为 $\gamma$,则 $\gamma = \pm\frac{1}{||\gamma||}$(____,____,____)。

   $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,-2)$

8. 如果平面 $ax + 2ay + 10z - 2 = 0$ 与 $x + 2y + 5z = 0$ 平行，则 $a =$________;若垂直，则 $a =$________。

   2,-10

9. 已知 $||\alpha|| = 3, ||\beta|| = 24, ||\alpha\times\beta|| = 78$, 则$\alpha\cdot\beta =$________。

   $\pm 30$

10. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - x - 8$, 令 $f(A) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$, 则 $f_{11} =$ ________, $f_{12} =$ ________, $f_{21} =$ ________, $f_{22} =$ ________.

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

## 二、(10分)

一平面过点 $A(1,0,-1)$ 且平行向量 $\vec{\mathbf{a}} = (2,1,1)$ 和 $\vec{\mathbf{b}} = (1,-1,0)$,试求这平面方程。

解：$\vec{n} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (1,1,-3)$,
则所求平面方程为 $x + y - 3z + d = 0$ 过 $(1,0,-1)$, 则 $d = -4$
所求平面方程为

$$x + y - 3z - 4 = 0.$$

## 三、(12分)

求垂直于平面 $z = 0$，并通过从点 $A(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 的垂直的平面方程。

解：设所求平面方程的法向量为 $\vec{n} = (a,b,c)$,
已知直线$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 的方向向量为 $\vec{s} = (0,1,-1) \times (1,0,0) = (0,-1,-1)$.
设所求平面与已知直线的交点为 $B(0, y_B, y_B + 1)$,
则 $\overrightarrow{AB} = (-1, y_B + 1, y_B)$, 由 $\overrightarrow{AB} \perp \vec{s}$,

$$(-1, y_B + 1, y_B) \cdot (0,-1,-1) = 0, \Rightarrow y_B = -\frac{1}{2}$$

又所求平面垂直于 $z = 0$,

$$\vec{n} \times (0,0,1) = 0, \Rightarrow c = 0.$$

则平面方程过 $A$ 点，则所求方程设为

$$a(x-1) + b(y+1) + 0(z-1) = 0$$

此平面也过 $B(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,

$$a(0-1)+b(-\frac{1}{2}+1)=0 \Rightarrow b=2a,$$

因此平面方程为

$$x-1+2(y+1)=0 \Rightarrow x+2y+1=0.$$

## 四、(12分)

过点 $(-1,0,4)$ 引直线 $L$,使它平行于平面 $\pi: 3x-4y+z-10=0$ 且与直线 $L_1: \frac{x+3}{3}=y-3=\frac{z}{2}$ 相交，求该直线 $L$ 的方程。

解：设直线 $L$ 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$,且过点 $M(-1,0,4)$
已知平面 $\pi$ 的法向量为 $\mathbf{n}=(3,-4,1)$
已知直线 $L_1$ 的方向向量为 $\vec{s}_1=(3,1,2)$,且过点 $M_1(-3,3,0)$
则 $\overrightarrow{MM_1}=(-2,3,-4)$,

$$\vec{s}_1\times\overrightarrow{MM_1}=(10,-8,-11)$$

由题意

$$(\vec{s}_1\times\overrightarrow{MM_1})\cdot\vec{s}=0 \Rightarrow 10m-8n-11p=0$$

又因为 $L\|\pi \Rightarrow \mathbf{n}\vec{s}=0 \Rightarrow 3m-4n+p=0$ 所以

$$\begin{pmatrix} 10 & -8 & -11 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$A=\begin{pmatrix} 10 & -8 & -11 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13/4 \\ 0 & 1 & -43/16 \end{pmatrix}\Rightarrow m=\frac{13}{4}t, n=\frac{43}{16}t, p=t.$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x+1}{52}=\frac{y}{43}=\frac{z-4}{16}$$

## 五、(12分)

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$,求 $A^3, A^4, A^k$ ($k$为正整数)

解:

$$A^3=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}\lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2\\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3\\ 0 & 0 & \lambda^4\end{pmatrix}$$

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}$$

## 六、(12分)

已知空间两条直线 $l_1:\begin{cases}x+y=0\\ z+1=0\end{cases}$, $l_2:\begin{cases}x-y=0\\ z-1=0\end{cases}$

1) 求这两条直线方向向量，及其对称式方程;

2) 求这两条异面直线之间距离。

解

(1) $l_1$: $\vec{s_1}=(1,-1,0)$, 对称式方程 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}$

过 $M_1(-1,1,-1)$

$l_2$: $\vec{s_2}=(-1,-1,0)$, 对称式方程 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{0}$

过 $M_2(1,1,1)$

(2) 两条异面直线之间距离

$$\frac{|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{||\vec{s_1}\times\vec{s_2}||}=2$$

## 七、(12分)

设非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$$

有解，求参数 $a$。

解：

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array}\right)$$

(1)当 $a=1$ 时，

$$\widetilde{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), r(A)=r(\widetilde{A})=2<3$$

方程组有无穷多解。

(2)当 $a\neq 1$ 时，

$$\widetilde{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-2) & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right),$$

当 $a=2$ 时

$$r(A)=r(\widetilde{A})=3$$

此方程组有唯一解。