2024 河海大学《几何与线性代数》答案

一. 填空:(**36 分**)

1. $7(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$;　2. $-\dfrac{3}{2}$;　3. 0;　4. $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

5. $-\dfrac{125}{54}$;　6. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$;　7. $a=-2,\ b=2$;　8. $k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(k\neq 0)$

9. $k=2,\lambda=1$;　10. $x=0,y=4$;　11. $1,\ 1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}$;　12. $-\dfrac{4}{5}<t<0$

二、计算

1(6分).设平面为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $V=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}|abc|=\dfrac{1}{6}|abc|=1$,

两平面平行,则$\dfrac{1/a}{6}=\dfrac{1/b}{1}=\dfrac{1/c}{6}$,则$a:b:c=1:6:1$

则 $a=1,b=6,c=1$ 或者 $a=-1,b=-6,c=-1$

平面方程为$6x+y+6z=6$ 或者 $6x+y+6z=-6$

2(6 分). 设公垂线与两直线的交点坐标分别为$P(t_1,2t_1,3t_1),\quad Q(t_2+1,t_2-1,t_2+2)$

$\overrightarrow{PQ}=(t_2-t_1+1,t_2-2t_1-1,t_2-3t_1+2)$,

两直线方向向量外积为$s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,2,-1)$

$$\overrightarrow{PQ}\parallel s_1\times s_2 \Rightarrow \frac{t_2-t_1+1}{-1}=\frac{t_2-2t_1-1}{2}=\frac{t_2-3t_1+2}{-1}$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{1}{2},\ t_2=\frac{1}{3},\quad P(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}),\ Q(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{7}{3})$$

异面直线方程为 $\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-\frac{3}{2}}{1}$

3. （**6 分**）

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & -\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

4.（**6 分**）$B=6(E-A)^{-1}A$　　或者　$6(A^{-1}-E)^{-1}$

代入数值，计算得 $B=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

5.（6 分），三平面联立，构成一个方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$，

由图可知该方程组有无数解，　　　　　　　　　　　**（此处能联想到方程组）**

故系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩且小于未知数个数 $r\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}<3$ ，

三平面不平行、不重合，故 $r\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}>1$ ，故 $r\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}=2$ ，

6.（6 分）

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3$，极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$

7.（9 分）设 $b = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(1)表示方法唯一，则由 Cramer's rule, $|A| = |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = -c-4 \neq 0, \Rightarrow c \neq -4$

(2)当 $c=-4,\ (A,b) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & d \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

则 $c=-4, d\neq 0$ 时无解，不能表出

(3) $c=-4, d=0$ 时，$(A,b) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

等价方程组为 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$，通解为 $x = \begin{pmatrix} t \\ -1-2t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} (t \in R)$，

故 $b = t\alpha_1 - (1+2t)\alpha_2 + \alpha_3 \quad (t \in R)$

8.（9分）

（1） $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\lambda^2 = 0,\ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，

$\lambda_1 = 3$ 时，解方程组 $(3E-A)x = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时， 解方程组 $(0E-A)X=0$ 为等价方程组，特征向量为

$$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\overset{\text{施密特正交化}}{\Rightarrow}\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \eta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

单位化得$\gamma_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\end{pmatrix},\ \gamma_3=\begin{pmatrix}-\sqrt{6}/6\\-\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/3\end{pmatrix}$.

则正交阵$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6\\\sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6\\\sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{6}/3\end{pmatrix}$,

三、证明题

1.（5 分）. 证: A 正定，则对于任给的 $x\neq 0$ 其对应的二次型 $f=x^TAx>0$ 总成立 ，

取$x=e_i=(0,\ \cdots,\ 0,\ 1\ \ 0,\ \cdots,\ 0)^T\neq 0,\ i=1,2,...,n,$

则 $f=e_i^TAe_i^T=a_{ii}>0$ ，$i=1,2,...,n$.

2.(5分)

下 面 证 明 方 程 组 $Ax=0$和 $A^TAx=0$同 解 。
一 方 面 ， 若 ξ是 $Ax=0$的 解 ， 即 $A\xi=0$。 显 然 $A^TA\xi=0$。

另 一 方 面 ， 若 ξ是 $A^TAx=0$的 解 ， 即 $A^TA\xi=0$.则
$\xi^TA^TA\xi=\|A\xi\|^2=0\Rightarrow A\xi=0$.根 据 解 空 间 的 维 数 ， 有
$n-R(A)=n-R(A^TA)$,故 结 论 成 立 。