模拟试卷一　参考答案

一、填空题

1．$\lambda=\frac{2}{5}$；　2．$3(x-1)-(y-1)+(z-1)=0$；　3．72；

4．$A^4=\begin{pmatrix}1&4&6&4\\0&1&4&6\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}$；　5．$t=5$；　6．$t>n$；　7．$A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&0\\-2&1&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$；

二、计算题

1．

$\because \boldsymbol{\tau}=(4,2,1)$，$\boldsymbol{n}=(2,-3,-2)$

$$\because \theta=\arcsin\frac{|\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{\tau}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$$

$$=0$$

2．

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2&2\\2&2&2&\cdots&2&2\\2&2&3&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&2&2&\cdots&n-1&2\\2&2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2&2\\1&0&0&\cdots&0&0\\1&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n-3&0\\1&0&0&\cdots&0&n-2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\1&2&2&\cdots&2&2\\1&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n-3&0\\1&0&0&\cdots&0&n-2\end{vmatrix}$$

$$=-2\,(n-2)!$$

3．

$\because \boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$

$\therefore \boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

$\therefore \boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$

4．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$，

$$\because \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

该向量组的一组极大线性无关组.

三、

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(0.5,-0.5,0.5,-0.5)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\beta_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\gamma_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$$

四、

方法 1：做π_1： $3(x+1)-4y+(z-4)=3x-4y+z-1=0$.

将L：$\begin{cases}x=t-1\\y=t+3\\z=2t\end{cases}$ 代入平面π，得$t=16$.

将$t=16$代入L：$\begin{cases}x=t-1\\y=t+3\\z=2t\end{cases}$，得点$B(15,19,32)$.

利用A,B，所求直线方程为：$\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$

方法 2：作π_1： $3(x+1)-4y+(z-4)=3x-4y+z-1=0$.

作过 L 的平面束方程：$2x-z+2+\lambda(2y-z-6)=0$.

将 A 代入平面束方程得：$\lambda=-\dfrac{2}{5}$，π_2： $10x-4y-3z+22=0$.

所求直线方程为：$\begin{cases}3x-4y+z-1=0\\10x-4y-3z+22=0\end{cases}$

五、$f_A(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda-4)=0$，得

$$\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-4.$$

$\lambda_1=\lambda_2=5$ 时，$5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

正交化、单位化，得 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{-2}{\sqrt5}\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{45}}\\ \frac{2}{\sqrt{45}}\\ \frac{-5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$.

$\lambda_3=-4$ 时，

$$-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-4&1\\4&2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-4&1\\0&2&-1\\0&0&\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，单位化得 $\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$. 取 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{\sqrt{45}}&\frac{2}{3}\\ \frac{-2}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{45}}&\frac{1}{3}\\ 0&\frac{-5}{\sqrt{45}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$.

注：如果取$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{-4}{3\sqrt{2}}\\\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

六、$\because \det(A)=\begin{vmatrix}1&1&k\\-1&k&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=4+3k-k^2=(4-k)(1+k)$

$\therefore$（1）$k\neq 4,k\neq -1$时，有唯一解；

（2）$k=-1$时，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\-1&-1&1&1\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&-2&3&-8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&2&-3&8\\0&0&0&5\end{pmatrix},$$

则$R(\tilde{\boldsymbol{A}})=3>R(\boldsymbol{A})=2$，无解；

（3）$k=4$时，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&4&4\\-1&4&1&16\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&4&4\\0&5&5&20\\0&-2&-2&-8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则$R(\tilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=2<n=3$，有无穷多解；

因此，通解$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$.

七、证明：

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关，则存在不全为零的数$k_1,\cdots,k_m,k_0$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_0\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}.$$

因为$\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\theta}$，并且与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$正交，所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta},\theta)&=(\boldsymbol{\beta},k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k_0\boldsymbol{\beta})\\&=k_1(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_m)+k_0(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\&=0+k_0(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0\end{aligned}$$

得 $k_0=0$. 所以 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关。矛盾！所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

八、证明：已知 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都是正数，并且存在正交矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&&\\&\sqrt{\lambda_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}^2=(\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}})^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}})(\boldsymbol{C}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{C}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}})^{\mathrm{T}}$ 可逆.

已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，并且 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 则二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})$，因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\theta}\Rightarrow\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\theta}$，所以 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x},\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})>0$. 故 f 正定，即 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵。

模拟试卷二　参考答案

一．选择题

1．B　　2．A　　3．D　　4．B　　5．C

二、填空题

1．2　　2．$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$　　3．6　　4．-1　　5．$r(\boldsymbol{A}) = m$

三、计算题

1．$\boldsymbol{s} = (2, 2, 1)$，$\boldsymbol{n} = (3, -2, -1)$，

$\sin\varphi = \left|\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{s}\|\|\boldsymbol{n}\|}\right| = \frac{1}{3\sqrt{14}}$，$\varphi = \arcsin\frac{1}{3\sqrt{14}}$.

2．解法一：$\boldsymbol{n}_1 = (1, 1, -2)$，$\boldsymbol{n}_2 = (1, 2, -3)$，$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (1, 1, 1)$.

所求直线为：$x - 3 = y - 4 = z - 5$.

解法二：易知已知直线上的两点为$(0, -1, 0)$和$(1, 0, 1)$，$\boldsymbol{s} = (1, 1, 1)$，所求直线为：$x - 3 = y - 4 = z - 5$.

3. $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})$. 又$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})$可逆，得

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4．$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\,000$

5．$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r = 3$.

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$或$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$为原向量组的极大无关组.

$\boldsymbol{\alpha}_3 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$.

四、

（1）由题意可得，$\boldsymbol{AX}=0$ 有非零解，从而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

于是 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=1$ 时，因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解，舍去.

当 $\lambda=-1$ 时，$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & \vdots & a\\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 1\\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a+2\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$.

因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解，所以 $a=-2$.

（2）当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

其中 k 为任意常数.

五、$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-3)$，所以特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$.

由 $\lambda_1=\lambda_2=0$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；由 $\lambda_3=3$，得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

正交化，得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\xi_2-\frac{(\xi_2,\boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

单位化，得 $\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}==\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6}\\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$.

最后令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$， $\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

四、证明题

1．设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}$（式①）

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘两边，并由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，得 $-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}$（式②）

①−②得：$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\theta}$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于不同特征值的特征向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，从而 $k_1=k_3=0$.

代入①得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\theta}$，又 $\boldsymbol{\theta}_2\neq\boldsymbol{\theta}$，所以 $k_2=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

2． $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}>0$，$(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{\theta})$.

模拟试卷三　参考答案

一、选择题

1．A　　2．B　　3．D　　4．C

二、填空题

1．$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$　　2．$\arcsin\dfrac{7\sqrt{6}}{18}$　　3．5 400；

4．2 或−1　　5．0, 4　　6．2　　7．$-3<a<1$

三、

1.解：设平面为 $Ax+By+cz+D=0$ ，平面过原点，则 $D=0$.

平面过 $(6,-3,2)$ ，则 $6A-3B+2C=0$.

法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)\perp(4,-1,2)$ ，则 $4A-B+2C=0$.

得出 $A=B=-\dfrac{2}{3}C$.

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$.

2．解：过 M 与已知直线垂直的平面 Π 为：

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与平面的交点 N.

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=-z=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1, \\ y=2t+1, \\ z=-t, \end{cases}$ 代入平面方程得 $t=\dfrac{3}{7}$ ，交点为 $N(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7})$ ，

所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{12}{7},\dfrac{6}{7},-\dfrac{24}{7}\right)$.

所求直线方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

3．$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$ ，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|\neq 0$ ，则 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4．解：摆成列向量作初等行变换：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A})=3$，极大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

5．解：（1）$|\boldsymbol{A}|=1-a^4=(1+a^2)(1-a^2)$.

（2）由$|\boldsymbol{A}|=0$知， $a=1$或$a=-1$.

当$a=1$时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

因为$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\neq\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，所以$(1,0,1)$方程无解， $a=1$舍去.

当$a=-1$时， $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

所以通解为$\boldsymbol{X}=k(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}+(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

6．解：$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$，得

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4.$$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，解方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，解得属于 1 的两个线性无关的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

正交化，令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=-\dfrac{1}{2}(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

单位化：取$\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$.

当 $\lambda_3=4$ 时，解方程 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，解得属于 4 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

单位化，取 $\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 则正交阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，对角阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}.$$

四、

1．证明：用反证法，假设 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性相关，由于基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是线性无关的可知，$\boldsymbol{\eta}$ 可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，这与条件矛盾，所以 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

2．证明：因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于 0，$\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n$.

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的 n 个特征值 $1+\lambda_i>1, i=1,2,\cdots,n$.

$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)>1$.

模拟试卷四　参考答案

一、填空题

1．$\frac{1}{2}$　　2．-4　　3．$1,-2$　　4．$1,-1$　　5．$\boldsymbol{E}$

二、选择题

1．D　　2．A　　3．C　　4．C　　5．D

三、计算题

1．解：$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\1&-2&-2&-5\\2&-1&-3&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{4}{3}&-\frac{5}{3}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

2．解：所求平面法向量可取$\vec{\boldsymbol{n}}=(1,0,0)\times(5,1,-3)=(0,3,1)$

由于平面过原点，故平面方程为

$0\cdot(x-0)+3(y-0)+1\cdot(z-0)=0\Rightarrow 3y+z=0$

3．解：$(\overline{BA},\overline{BC},\overline{BD})=\begin{vmatrix}7&-1&-2\\-4&1&1\\-7&-5&1\end{vmatrix}=-15$

$V_{ABCD}=15/6$

4．解：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&1&2\\2&\mathrm{x}&y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\2&\mathrm{x}&y\end{vmatrix}=\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{13}=1$

5．解：将向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}$ 排出一个4×5的矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3\\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0\end{array}\right)$$

（1）$a\neq -1$时有唯一的表达时，

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{\mathrm{b}}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3 .$$

（2）$a\neq -1$，$b\neq 0$时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出.

（3）$a=-1$，$b=0$时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出，但不唯一，即

$$\boldsymbol{\beta}=(-2k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(1+k_1-2k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+k_1\boldsymbol{\alpha}_3+k_2\boldsymbol{\alpha}_4 .$$

6．解：作矩阵$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$, 因为向量组$\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$线性无关，所以$\boldsymbol{P}$可逆，且有

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$$

$$=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\boldsymbol{PB}$$

其中$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似有相同的特征值，由

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\lambda(\lambda-1)(\lambda+3)$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值为$0, 1, -3$

7．

解：根据$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$有$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

（1）由已知$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_{\mathrm{n}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^2\begin{pmatrix}F_{n-1}\\ F_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}F_1\\ F_0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

为了算$\boldsymbol{A}^n$，将$\boldsymbol{A}$相似对角化

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-\lambda-1,\Rightarrow\lambda_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\lambda_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\left(1,-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$；

$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$的一个基础解系为$\boldsymbol{\xi}_2=\left(1,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$；

令$\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2)$,则$\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} & -1\\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$

由递推关系：$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

四、证明题

1．证明：因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵

所以对于任意的非零向量 $\boldsymbol{X} \neq 0$，都有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} > 0$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} > 0$

则对于任意非零向量 X，都有

$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + 4\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X} > 0$

故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵，得证.

2．证明：若有常数 k_1，k_2 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，则 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2) = 0$，即

$\lambda_1 k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$

以上两式消去 $\boldsymbol{\alpha}_1$，有 $(\lambda_2 - \lambda_1)k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$，

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 $k_2 = 0$；同理 $k_1 = 0$.

故得证.

模拟试卷五　参考答案

一、填空题

1．$2x+y-3z+12=0$　　2．4　　3．0　　4．$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$　　5．有解

二、选择题

1．D　　2．A　　3．B　　4．D　　5．B

三、计算题

1．解：三个平面的方程组成的三元一次线性方程组的系数矩阵 A，

增广矩阵 $\tilde{A}$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{R}(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，

因此方程组无解.从而三个平面没有公共点.

由于 Π_1 与 Π_2 的一次项不成比例，因此 Π_1 与 Π_2 相交；

由于 Π_1 与 Π_3 的一次项成比例，但常数项不与它们成比例，因此 Π_1 与 Π_3 平行.

2．解：设所对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)$，由 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)=0$ 得 $\mathrm{x}_1+x_2-x_3=0$.

此方程组对应得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，所以属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的所有特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1$，$k_2$ 不全为 0.

3．解：

$$D=\begin{vmatrix}0 & -3 & -10 & 13\\ 1 & -2 & -3 & 4\\ 0 & 7 & 13 & -3\\ 0 & 0 & -5 & 10\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3 & -10 & 13\\ 7 & 13 & -3\\ 0 & -5 & 10\end{vmatrix},$$

$$=-\begin{vmatrix}-3 & -10 & -7\\ 7 & 13 & 23\\ 0 & -5 & 0\end{vmatrix}=-(-5)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-3 & -7\\ 7 & 23\end{vmatrix}=100$$

4．解：

$\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$|\boldsymbol{A}|=-(a+4)$.

（1）当 $a\neq-4$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一表示.

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{3b}{a+4}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{a+10b+4ab+4}{a+4}\boldsymbol{\alpha}_2+(5b+1)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

（2）当 $a=-4$ 时，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&\mathrm{b}\\0&0&1&1+2b\\0&0&0&-3b\end{array}\right)$.

（i）当 $a=-4$，$b=0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示，但不唯一；$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1/2&0&-1/2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，

其对应得非齐次方程组的通解为 $c(-1/2,1,0)^{\mathrm{T}}+(-1/2,0,1)$.

$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{-1-c}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\mathrm{c}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

（ii）当 $a=-4$，$b\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示.

5．解：矩阵方程两边同时右乘 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}+k\boldsymbol{A}$. 从而 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=k\boldsymbol{A}$.

已知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，因此 $\boldsymbol{X}=k(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

6．解：二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$$

则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, 5.

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0$.

$\boldsymbol{A}$ 有特征值 1, 1，$-6+9-a^2=4-a^2=0\Rightarrow a=2\ (a>0)$。

当 $\lambda_1=1$ 时，$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 得 1 个线性无关的特征向量

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=2$ 时，$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 得 1 个线性无关的特征向量

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，单位化 $\boldsymbol{\gamma}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=5$ 时，$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 得 1 个线性无关的特征向量

$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化 $\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

故 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$.

四、证明题

1．证明：

$$\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}\right|=(-1)\left|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\right|=-\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|$$

故 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=0$，得证.

2．证明：设存在常数 k_1，k_2，k_3 使得 $k_1(3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(4\boldsymbol{\alpha}_3-7\boldsymbol{\alpha}_1)=0$，则 $(3k_1-7k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-k_1+5k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(2k_2+4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}3k_1-7k_3=0\\-k_1+5k_2=0\\2k_2+4k_3=0\end{cases}$$

这个齐次线性方程组的系数行列式为 $74\neq0$，因此 $k_1=k_2=k_3=0$.故向量组 $3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$4\boldsymbol{\alpha}_3-7\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.