CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC
BÀI 2: ĐỊNH THỨC

Lê Thị Ngọc Quỳnh

Ngày 1-4-2022

Nội dung

Nội dung trình bày

1. Định thức của ma trận vuông

Định nghĩa 1.1

Xét ma trận vuông cấp n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chú ý phần tử a_{ij}, nếu ta bỏ đi hàng i, cột j của ma trận A, ta thu được một ma trận vuông cấp $n-1$, gọi là ma trận con tương ứng phần tử a_{ij}.
Kí hiệu: M_{ij}.
Phần bù đại số tương ứng với phần tử a_{ij} là

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Ví dụ 1.2

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Khi đó $M_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Hãy xác định M_{12}, M_{13}, M_{22}.

b) Tính A_{12}, A_{23}.

Định nghĩa 1.3

Định thức của ma trận vuông A, kí hiệu là $\det A$ (hoặc $|A|$) được định nghĩa như sau

- **A là ma trận vuông cấp 1**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \text{ thì } \det A = a_{11}.$$

- **A là ma trận vuông cấp 2**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Khi đó $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

- **A là ma trận vuông cấp n**

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Ngoài ra chúng ta còn sử dụng kí hiệu định thức như sau

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ví dụ 1.4

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 3.2 = -1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1.(-5) - 2.(-7) + 3.3 = 18.$$

Ví dụ 1.5

Tính các định thức sau

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Ví dụ 1.6

Giải phương trình sau theo x

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nội dung trình bày

2. Tính chất của định thức

Tính chất 2.1

Với mọi ma trận A vuông, ta có

$$\det A = \det A^T.$$

Từ tính chất trên, ta suy ra vai trò của dòng và cột là như nhau, do đó tất cả các tính chất của định thức đã đúng với cột thì cũng đúng với dòng.

Tính chất 2.2

Nếu đổi chỗ 2 dòng (2 cột) của một định thức, ta thu được định thức mới nhưng đổi dấu.

Ví dụ 2.3

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Hệ quả 2.4

Một định thức có 2 dòng (2 cột) bằng nhau thì định thức bằng 0.

Ví dụ 2.5

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Tính chất 2.6

Với A là ma trận vuông cấp n, ta có

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Công thức trên được gọi là khai triển Laplace định thức của ma trận A theo dòng i.
Tương tự ta có

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Công thức trên được gọi là khai triển Laplace định thức của ma trận A theo cột j.

Ví dụ 2.7

Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

bằng cách khai triển Laplace định thức theo dòng 2 và theo cột 3.

Ví dụ 2.8

Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả 2.9

Định thức của ma trận có một dòng (một cột) toàn số 0 thì định thức bằng 0.

Tính chất 2.10

Khi nhân các phần tử của một dòng (một cột) của ma trận với cùng một số k thì ta được một đinh thức mới bằng định thức cũ đã cho nhân với k. Nói cách khác, khi các phần tử của một dòng (hay một cột) có thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

Ví dụ 2.11

$$\begin{vmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

Hệ quả 2.12

Cho $k \in \mathbb{R}$, A là ma trận vuông cấp n. Khi đó

$$\det(kA) = k^n \det A.$$

Hệ quả 2.13

Một định thức có 2 dòng (2 cột) tỉ lệ thì định thức bằng 0.

Tính chất 2.14

Khi các phần tử của một dòng (một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Hệ quả 2.15

Nếu ma trận có một dòng (cột) bằng tổ hợp tuyến tính của các dòng (cột) còn lại thì định thức của ma trận đó bằng 0.

Tính chất 2.16

Nếu ta cộng vào một dòng của định thức tích của một dòng khác với một số k tùy ý thì định thức không thay đổi.

Ví dụ 2.17

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

do hai dòng thứ 2 và 3 tỉ lệ với nhau.

Nội dung trình bày

3. Phương pháp tính định thức

Định lý 3.1

Định thức của ma trận tam giác bằng tích của các phần tử trên đường chéo, tức là

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Ví dụ 3.2

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

Để tính định thức của một ma trận, ta có thể áp dụng các tính chất của định thức để đưa về dạng đơn giản hơn. Ta có thể làm như sau:

B1: Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp để đưa định thức đã cho về dạng tam giác hoặc ma trận chứa nhiều số 0.

B2: Tính giá trị của định thức dạng tam giác bằng công thức hoặc tính theo cột (hoặc hàng) mà chứa nhiều số 0.

Ví dụ 3.3

Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Ví dụ 3.4

Tính định thức

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -7 & -5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$

Ví dụ 3.5

Tính định thức

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$