

Chương 1. MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

Bài 1. Cho các ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Tính $2A+5B$, $3A-2B$, AB , BC , $A'B$, $B'C$, ABC .

b. Tính $A^2.C$; $2AC - 3BC$.

Bài 2. Tìm ma trận X thỏa mãn:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3X = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

b) $2X - \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 20 & -27 \\ -11 & 29 & -30 \\ -11 & 19 & -28 \end{pmatrix}$

Bài 3. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 225 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 10 & 18 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix}$ m) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Bài 4. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 10 & -3 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

d. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix};$

e. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bài 5. Tìm ma trận X thỏa mãn

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$

d) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Bài 6. Tìm hạng của các ma trận sau :

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix};$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 9 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Bài 7. Tìm hạng của ma trận theo tham số m

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 7-m & -12 & 6 \\ 10 & -19-m & 10 \\ 12 & -24 & 13-m \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} m & 2 & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & 2 & m \end{bmatrix}$

Chương 2. LÝ THUYẾT HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 1. Giải hệ Cramer bằng phương pháp Cramer và phương pháp ma trận nghịch đảo.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \end{array}$$

Bài 2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases} \end{array}$$

Bài 3. Biện luận nghiệm của hệ phương trình sau theo tham số m.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + mx_3 = 1 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} (1+m)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+m)x_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + (1+m)x_3 = m^2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \end{cases} \end{array}$$

Bài 4. Tìm k để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = k \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 12x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ kx_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \end{array}$$

Bài 5. Hãy xác định giá và lượng cân bằng của thị trường hai hàng hóa, ba hàng hóa, cho biết hàm cung và hàm cầu của mỗi mặt hàng lần lượt như sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad Q_{s_1} = -2 + 4p_1; \quad Q_{d_1} = 18 - 3p_1 + p_2 \text{ và } Q_{s_2} = -2 + 3p_1; \quad Q_{d_2} = 12 + p_1 - 2p_2 \\ \text{b)} \quad Q_{s_1} = -1 + 2p_1; \quad Q_{d_1} = 20 - p_1 + p_2 \text{ và } Q_{s_2} = -10 + 2p_1; \quad Q_{d_2} = 40 + p_1 - 2p_2 \end{array}$$

BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP 2022

c) $Q_{s_1} = 3p_1$; $Q_{d_1} = 120 - p_1 + p_2 + 2p_3$; $Q_{s_2} = -10 + 2p_1$; $Q_{d_2} = 150 + p_1 - 2p_2 + p_3$
và $Q_{s_3} = -20 + 5p_1$; $Q_{d_3} = 250 + 2p_1 + 2p_2 - 3p_3$

Bài 6. Xét mô hình kinh tế vĩ mô trong trường hợp nền kinh tế đóng. Cho biết

$$C = 60 + 0,7Y_d; \quad Y_d = (1-t)Y; \quad I = 90; \quad G = 140 \text{ (triệu USD)}$$

Hãy xác định mức thu nhập quốc dân và mức tiêu dùng cân bằng khi nhà nước không tính thuế thu nhập ($t=0$) và khi nhà nước thu thuế thu nhập theo tỷ lệ 40% ($t=0,4$).

Bài 7. Cho biết các thông tin sau đây về một nền kinh tế đóng, với lãi suất r tính bằng % và các biến còn lại tính bằng triệu USD:

$$C = 0,8Y_d + 15; \quad Y_d = Y - T; \quad T = 0,25Y - 25I = 65 - r; \quad G = 94; \quad L = 5Y - 50r; \quad M_0 = 1500$$

Hãy xác định mức thu nhập cân bằng và lãi suất cân bằng.

Bài 8. Giả sử một nền kinh tế có 4 ngành. Quan hệ sản phẩm giữa các ngành và cầu cuối đối với sản phẩm của mỗi ngành như sau:

Ngành cung cấp sản phẩm (Output)	Ngành sử dụng sản phẩm (Input)				Cầu cuối
	1	2	3	4	
1	80	20	110	230	160
2	200	50	90	120	140
3	220	110	30	40	0
4	60	140	160	240	400

Hãy tính tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành và lập ma trận kỹ thuật (tính xấp xỉ đến 3 chữ số thập phân).

Bài 9. Mỗi ngành trong nền kinh tế xác định tổng sản phẩm của mình căn cứ vào mức tổng cầu. Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật A và ma trận cầu cuối B:

$$A = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,25 & 0,34 \\ 0,33 & 0,10 & 0,12 \\ 0,19 & 0,38 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

- Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử 0,25 của A và phần tử 900 của B.
- Tính tổng các phần tử của cột thứ hai của ma trận A và giải thích ý nghĩa kinh tế.
- Tính tổng các phần tử của dòng thứ nhất của ma trận A và giải thích ý nghĩa kinh tế.
- Xác định tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành. Tính giá trị gia tăng của mỗi ngành.

Chương 3. HÀM SỐ VÀ GIỚI HẠN

Bài 1: Tìm miền xác định của các hàm số sau:

- 1) $y = \sqrt{2x - x^2}$
- 2) $y = \ln(x^2 - 9)$
- 3) $y = \frac{1}{\sqrt{2x - 5}} + \arcsin \frac{2x + 1}{x - 2}$
- 4) $y = \sqrt{1 - \ln(x^2 - 1)}$
- 5) $y = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$
- 6) $y = \lg \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} + \ln x$

Bài 2: Tính giới hạn

- 1) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - 5x}{2x + 1}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5x + 1}{2x^3 + x^2 - 9}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 3x - 10}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$

Bài 3: Tính các giới hạn sau sử dụng quy tắc thay thế VCB tương đương

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x) \tan 5x}{x \sin x^2}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x^2 \cdot \arctan^2 x}{\ln(1 + x^2)(1 - \cos 2x)}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(e^{4x} - 1)}{\arctan x \cdot \sin x^2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x^2) \arcsin 3x}{(1 - e^{5x})x^2}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)(e^{4x} - 1)}{x^2(x^2 + 1)}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1 - \cos 2x}}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 5x}{1 - 6x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{4x^2})^{\frac{1}{\ln(1 + 2x^2)}}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x^2)^{\frac{1}{\ln(1 + 3x^2)}}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x \sin 3x)^{\frac{1}{9x^2}}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x^2 + 3x^3 - x^4}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{4x + 3\sin^2 x + \cos x - 1}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x^2 - 5x^3)}{\ln(1 + 2x^2 + 3x^3)}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1 + 3x)^2} - 1}{\sin x + 2\sin^2 x}$

Bài 4: Xét sự liên tục của các hàm số sau tại $x=0$ biết

- a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(1 + 3x^2)}{e^{x^3} - 1} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} \frac{(e^{2x} - 1) \sin x^2}{\ln(1 + 2x^3)} & \text{khi } x > 0 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$
- c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 5 & \text{khi } x = 0 \end{cases};$
- d) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x^2}{x \ln(1 + 2x)} & \text{khi } x > 0 \\ 1 - 4x + x^2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$

Bài 5: Tìm a sao cho các hàm số sau liên tục trên \mathbb{R}

- 1) $f(x) = \begin{cases} \frac{(e^x - 1) \sin x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 + a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$
- 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos 3x) \ln(1 + 2x)}{x(e^{x^2} - 1)} & \text{khi } x > 0 \\ 3x^2 + 2^x + a + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$

Chương 4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Bài 1: Tính đạo hàm cấp 1 của các hàm số sau

- | | |
|---|--|
| a. $y = 5x^3\sqrt{x} - x^2\sqrt[3]{x} + 7x^5$ | f. $y = x^3 \arctan x + e^{5x}(\sqrt{2x} - 1)$ |
| b. $y = 3x^4 \ln x - \sin 3x$ | g. $y = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$ |
| c. $y = xe^x(\sin x + \cos x)$ | h. $y = (\tan x)^x$ |
| d. $y = \ln \sqrt{x^4 + 2x^2}$ | i. $y = (\arcsin x)^x$ |
| e. $y = 3x \sin^3 x + 3 \cos x - \cos^3 x$ | |

Bài 2: Tính đạo hàm cấp 2 (câu a, b), cấp 3 (câu c, d), cấp 4 (câu e, f) của hàm số

- | | |
|---|------------------------------|
| a. $y = -\frac{1}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$ | d. $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$ |
| b. $y = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$ | e. $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ |
| c. $y = (2x + 3)^2 \sqrt{2x + 3}$ | f. $y = \ln(2x - 1)$ |

Bài 3: Tính vi phân cấp 1 (a, b), cấp 2 (c, d) của các hàm số

- | | |
|---|--|
| a. $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$ | c. $y = x^2 \arctan x + \sin^2 3x$ |
| b. $y = \ln \left(\tan \frac{2x-3}{4} \right)$ | d. $y = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$ |

Bài 4: Chứng minh rằng hàm số

- a. $y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$ thỏa mãn hệ thức $x^2 y'' + xy' + y = 0$
- b. $y = e^x + 2e^{2x}$ thỏa mãn hệ thức $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

Bài 5: Khai triển hàm số

- a. $f(x) = x^5 + x^3 - 3x^2 + 1$ theo lũy thừa của $x-1$.
- b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ theo công thức Mac-laurin đến x^2 , với phần dư dạng Lagrange.
- c. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ theo công thức Taylor tới lũy thừa bậc 5 của $x-1$ với phần dư dạng Peano.

Bài 6:

- a. Xác định khoảng tăng, giảm của các hàm số: $y = 2x^2 - \ln x$; $y = x^2 e^{-x}$
- b. Tìm cực trị của các hàm số: $y = x\sqrt{1-x^2}$; $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

c. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $f(x) = 3x - x^3; x \in [-2; 3];$ $f(x) = x^2 \ln x; x \in [1; e]$

Bài 7: Tính các giới hạn

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\sin 4x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - \cos 2x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + e^x - 2}{\ln(1+3x^2)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin 2x - 3x - 1}{\sin x \cdot \ln(1+2x)}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \sin 2x - \cos x}{1 - \cos 2x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{x \sin x^3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{\ln(1+3x)}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{\arctan 3x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + e^{x-1})^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Bài 8: Cho biết hàm cầu đối với sản phẩm của nhà sản xuất độc quyền, với giá p tính bằng USD: $Q = 500 - 0,2p$. Hãy tính MR tại mức sản lượng $Q = 90$ và giải thích ý nghĩa.

Bài 9: Cho biết tổng doanh thu của một nhà sản xuất độc quyền tại mỗi mức sản lượng Q là $TR = 500Q - 4Q^2$. Hãy tính hệ số co dẫn theo giá của cầu đối với sản phẩm của nhà sản xuất đó tại mức giá $p = 300$ và giải thích ý nghĩa.

Bài 10: Một nhà sản xuất độc quyền bán sản phẩm trên thị trường có hàm cầu ngược $p = 1400 - 7,5Q$. Hãy tính hệ số co dẫn của cầu theo giá ở mỗi mức giá p. Xác định mức sản lượng cho lợi nhuận tối đa, cho biết hàm chi phí cận biên là $MC = 3Q^2 - 12Q + 140$.

Bài 11: Một nhà sản xuất độc quyền tiêu thụ sản phẩm trên thị trường có hàm cầu $D(p) = 750 - p$. Cho biết hàm sx $Q = 6\sqrt{L}$ và giá thuê lao động là \$14. Hãy xác định mức sử dụng lao động cho lợi nhuận tối đa.

Chương 5. HÀM NHIỀU BIẾN

Bài 1: Tìm miền xác định và biểu diễn chúng lên mặt phẳng Oxy.

1. $u = \ln(xy)$

2. $u = \frac{x+y}{\sqrt{x-y}}$

3. $u = \arccos \frac{x^2 + y^2}{4}$

4. $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{4-y^2}$

Bài 2: Cho hàm số $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{3x+4y} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$

Hãy tính các giới hạn: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$; $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$; $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$.

Bài 3: Xét tính liên tục của hàm số $f(x, y)$ tại điểm $(0, 0)$ biết

a. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$

b. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$

Bài 4: Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của các hàm số sau theo các biến:

a. $u = x^3 y - y^3 x + 3x - 5y$

b. $u = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2 + 5y$

c. $u = \frac{x-y}{x+y}$

d. $u = (5x^2 y - y^2 + 7x)^3$

e. $u = (x^2 + y^2) \arctan(xy)$

f. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$

g. $u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z$

h. $u = \ln(x^3 + y^2)$

i. $u = xy + yz + zx$

j. $u = e^{x^2 + y^2 + z^2}$

k. $u = \sin(xy/z)$

Bài 5: Chứng minh rằng hàm số $u = \ln \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Bài 5: Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau:

1. $z = \sin(x^2 + y^2)$

3. $z = e^x (\cos y + x \sin y)$

2. $z = \ln(\sin xy)$

4. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$

Chương 6. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

Bài 1: Tìm cực trị tự do của hàm hai biến

$$1. z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$$

$$2. z = 11x^2 + 7y^2 + 12xy - 8x - 18y + 36$$

$$3. z = 4xy - x^2 - 7y^2 + 36y$$

$$4. z = 2x^2 - 4xy + y^3 + y$$

$$5. z = 18xy - 8x^3 - 27y^3$$

$$6. z = -x^3 + 2y^4 + 6x^2 - 9x + 8y$$

$$7. z = x^3 + y^3 - 9xy + 20$$

$$8. z = x^2 + 8x + y^3 + 13y - 8xy + 9$$

$$9. z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

$$10. z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$$

$$11. z = -x^4 - y^4 + x^2 - 2xy + y^2 - 2$$

$$12. z = x^2 y^3 (6 - x - y); (x > 0, y > 0)$$

Bài 2: Tìm cực trị có điều kiện của các hàm sau

$$1. f = x^2 + 2y, \quad x - y = 5$$

$$2. f = x^2 + y^2, \quad 3x + 2y = 6$$

$$3. f = xy + 2x, \quad 2x + y = 30$$

$$4. f = 6 - 4x - 3y, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$5. f = 2x + 9y + 1; \quad x^2 + 3y^2 = 31$$

$$6. u = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y + 50; \quad x + y = 79$$

$$7. u = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 20; \quad x + y = 15$$

$$8. u = 2x^{0.9}y^{0.6}; \quad 3x + 5y = 600$$

$$9. u = x^{0.3}y^{0.7}; \quad 5x + 4y = 200$$

$$10. u = x^{0.4}y^{0.9}; \quad 8x + 3y = 260$$

Bài 3: Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng: $U = (x_1 + 3)x_2$, trong đó x_1 là lượng hàng hóa A, x_2 là lượng hàng hóa B. Hãy chọn túi hàng lợi ích tối đa trong điều kiện giá

hàng hóa A là \$5, giá hàng hóa B là \$20, ngân sách tiêu dùng là \$185.

Bài 4: Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng: $U = x_1x_2 + x_1 + 2x_2$, trong điều kiện hàng hóa thứ nhất được bán với giá \$2, hàng hóa thứ 2 được bán với giá \$5 và thu nhập cho tiêu dùng là \$51, hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng tối đa lợi ích của mình.

Bài 5: Một doanh nghiệp cạnh tranh thuần túy sản xuất kết hợp 2 loại sản phẩm với hàm chi phí như sau (Q_i là lượng sản phẩm i): $TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 10$. Hãy chọn mức sản lượng kết hợp (Q_1, Q_2) để doanh nghiệp có được lợi nhuận tối đa khi giá sản phẩm 1 là \$160 và giá sản phẩm 2 là \$120.

Bài 6: Một doanh nghiệp cạnh tranh thuần túy sản xuất kết hợp 2 loại sản phẩm với hàm chi phí như sau (Q_i là lượng sản phẩm i): $TC = Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 7$. Hãy chọn mức sản lượng kết hợp (Q_1, Q_2) để doanh nghiệp có được lợi nhuận tối đa khi giá sản phẩm 1 là \$32 và giá sản phẩm 2 là \$16.

Bài 7: Một công ty độc quyền sản xuất kết hợp 2 loại sản phẩm với hàm chi phí như sau (Q_i là lượng sản phẩm i): $TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 55$. Hãy chọn mức sản lượng kết hợp (Q_1, Q_2) và giá bán các sản phẩm để công ty có được lợi nhuận tối đa, khi cầu của thị trường đối với các sản phẩm của công ty như sau: Sản phẩm 1: $Q_1 = 50 - 0,5p_1$ và giá sản phẩm 2: $Q_2 = 30 - p_2$.

Bài 8: Một doanh nghiệp có hàm sản xuất: $Q = 2K^{0,3}L^{0,5}$. Giả sử giá tư bản là \$6, giá thuê lao động là \$2 và doanh nghiệp tiến hành sản xuất ngân sách cố định \$4800. Hãy cho biết DN đó sử dụng bao nhiêu đơn vị tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động thì thu được sản lượng tối đa.

Chương 7. PHÉP TOÁN TÍCH PHÂN

Bài 1: Tính các tích phân bằng cách sử dụng tích phân cơ bản và phương pháp khai triển

- | | | |
|---|---------------------------------|---|
| 1) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$ | 4) $\int (2x - 1)^9 dx$ | 8) $\int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} dx$ |
| 2) $\int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} dx$ | 5) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$ | 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$ |
| 3) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$ | 6) $\int x(x^2 + 1)^9 dx$ | 10) $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 + \ln x}}$ |
| | 7) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$ | |

Bài 2: Sử dụng phương pháp đổi biến tính các tích phân sau:

- | | | |
|---|--|---|
| 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ | 3) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{1+x}}$ | 5) $\int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}$ |
| 2) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$ | 4) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$ | 6) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |

Bài 3: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân sau:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\int x \sin 3x dx$ | 4) $\int (x^2 + 1)e^{3x} dx$ | 8) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$ |
| 2) $\int x^2 \cos 2x dx$ | 5) $\int (x+3) \ln 2x dx$ | 9) $\int \cos(\ln x) dx$ |
| 3) $\int (x+3)e^{-2x} dx$ | 6) $\int x \ln^2 x dx$ | 10) $\int e^{2x} \cos x dx$ |
| | 7) $\int x^2 \arctan x dx$ | |

Bài 4: Tính các tích phân sau:

- | | | |
|-----------------------------------|---|--------------------------------------|
| 1. $\int \frac{x^3}{2x+1} dx$ | 4. $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx$ | 7. $\int \sin 4x \cdot \cos x dx$ |
| 2. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ | 5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ | 8. $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$ |
| | | 9. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ |

$$3. \int \frac{2x+1}{x^2-4x+3} dx$$

$$6. \int \sin^5 x \cos x dx$$

Bài 5: Tính các tích phân xác định sau:

$$1. \int_0^1 x^2 (2+3x^3)^{10} dx$$

$$4. \int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx$$

$$7. \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

$$5. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$$

$$8. \int_0^{\pi} x \cos x dx$$

$$3. \int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9} dx$$

$$6. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$9. \int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx$$

$$10. \int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x dx$$

Bài 6: Tính các tích phân suy rộng

$$1. \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$$

$$4. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x^2-9)}$$

$$7. \int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$$

$$2. \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$$

$$5. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$8. \int_3^7 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(4+x^2)}$$

$$6. \int_0^1 x \ln x dx$$

$$9. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Bài 7: Cho biết hàm đầu tư $I = 60\sqrt[3]{t}$ và quỹ vốn tại thời điểm $t=1$ là 85. Hãy xác định hàm quỹ vốn $K(t)$.

Bài 8: Cho biết chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q : $MC = 32 - 18Q + 12Q^2$ và chi phí cố định: $FC=43$. Hãy tìm hàm tổng chi phí và hàm chi phí khả biến.

Bài 9: Cho biết hàm doanh thu cận biên $MR = 84 - 4Q - Q^2$. Hãy tìm hàm tổng doanh thu $TR(Q)$ và xác định cầu đối với sản phẩm của nhà sản xuất.

Bài 10: Cho biết hàm cầu ngược $p = 42 - 5Q - Q^2$. Giả sử sản phẩm được bán trên thị trường với giá $p_0 = 6$. Hãy tính thặng dư của người tiêu dùng.

Bài 11: Cho biết hàm cung và hàm cầu đối với một sản phẩm

$$Q_d = \sqrt{13-p}; \quad Q_s = \sqrt{p-1}$$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Chương 8. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ SAI PHÂN

Bài 1: Giải các PTVP tuyến tính cấp 1 sử dụng công thức $y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right]$

- | | | |
|-------------------------------|--|---|
| 1. $y' + 3x^2y = 0; y(0) = 5$ | 5. $xy' = x + y; y(1) = 2$ | 8. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ |
| 2. $y' - 3xy = 5$ | 6. $y' - 2xy = xe^{x^2}$ | 9. $y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x^2}$ |
| 3. $y' + y = x + 1$ | 7. $y' - \frac{1}{x} \cdot y = x(x+1)$ | 10. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ |
| 4. $y' - 2xy = x; y(0) = 0$ | | |

Bài 2: Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 bằng phương pháp biến thiên hằng số

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| 1. $xy' - 2y = 2x^4$ | 3. $x(y' - y) = e^x$ | 5. $y' = 2x(x^2 + y)$ |
| 2. $(2x+1)y' = 4x + 2y$ | 4. $x^2y' + xy + 1 = 0$ | 6. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$ |

Bài 3: Giải các phương trình Bernoulli:

- | | |
|-------------------------|--|
| 1. $y' + 2xy = 2x^3y^3$ | 3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$ |
| 2. $y' - y = xy^2$ | 4. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$ |

Bài 4: Giải các phương trình có biến số phân ly

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. $xydx + (x+1)dy = 0$ | 5. $y' = e^{x+y}$ |
| 2. $\sqrt{1+y^2}dx = xydy$ | 6. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0; y(0) = 1$ |
| 3. $2x^2yy' + y^2 = 2$ | 7. $y' \cot x + y = 2; y(0) = -1$ |
| 4. $y' - xy^2 = 2xy$ | 8. $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0; y(1) = 1$ |

Bài 5: Giải các phương trình vi phân thuần nhất

- | | |
|-----------------------------|------------------------------------|
| 1. $y' = \frac{x-y}{x-2y}$ | 3. $(x+2y)dx - xdy = 0$ |
| 2. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$ | 4. $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ |

Bài 6: Giải các phương trình vi phân toàn phần

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$ | 3. $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$ |
| 2. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$ | 4. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ |

Bài 7: Giải các phương trình sau bằng cách tìm thừa số tích phân một biến

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. $(x+y^2)dx - 2xydy = 0$ | 3. $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$ |
| 2. $y(1+xy)dx - xdy = 0$ | 4. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$ |

Bài 8: Giải phương trình vi phân cấp hai hệ số hằng số

- | | | |
|--------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $y'' + 4y' + 3y = 0$ | 5. $y'' - y = x^2 - x + 1$ | 9. $y'' + 4y = \sin 2x$ |
| 2. $y'' - 7y' + 10y = 0$ | 6. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$ | 10. $y'' - y' + y = -\cos 3x$ |
| 3. $y'' + 4y' + 4y = 0$ | 7. $y'' + y = (x + 1)e^x$ | 11. $y'' - 2y' + 2y = e^x(x \sin x)$ |
| 4. $y'' + 4y' + 8y = 0$ | 8. $y'' - 2y' + y = e^x$ | 12. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$ |
| | | 13. $y'' + y = e^x + \cos x$ |

Bài 9: Giải phương trình sau bằng phương pháp biến thiên hằng số

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ | 3. $y'' + y = \tan x$ |
| 2. $y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$ | 4. $y'' - y' = \frac{2 - x}{x^3} e^x$ |

Bài 10: Giải phương trình sai phân cấp 1

- | | | |
|-------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $y_{t+1} - 2y_t = 5$ | 3. $y_{t+1} + 2y_t = 9; y_0 = 4$ | 5. $y_{t+1} - \frac{2}{t+1} y_t = 0$ |
| 2. $y_{t+1} - y_t = 9$ | 4. $y_{t+1} - y_t = 3; y_0 = 5$ | 6. $y_{t+1} - 5y_t = t$ |

