CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC
BÀI 1: MA TRẬN VÀ CÁC PHÉP TOÁN

Lê Thị Ngọc Quỳnh

Ngày 1-4-2022

Nội dung

1. Khái niệm ma trận
2. Một số ma trận đặc biệt
3. Phép toán trên ma trận

Nội dung trình bày

1. Khái niệm ma trận
2. Một số ma trận đặc biệt
3. Phép toán trên ma trận

1. Khái niệm ma trận

Định nghĩa 1.1

Cho trước hai số nguyên dương m, n. Ma trận cỡ $m \times n$ là một bảng số gồm m hàng, n cột với các hệ số a_{ij} $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ trên trường $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$), được ký hiệu bởi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad \text{hoặc viết tắt } A = (a_{ij})_{m\times n}$$

a_{ij} là phần tử nằm ở dòng thứ i và cột thứ j của ma trận A.
Ma trận đối của ma trận A là ma trận có dạng $(-a_{ij})_{m\times n}$ và ký hiệu là $-A$.

Ví dụ 1,2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

là ma trận cỡ 3×4. Nhận thấy: $a_{12} = 0, a_{22} = 2, a_{32} = -4$.

Ví dụ 1.3

Một công ty có 2 cửa hàng , bán 4 mặt hàng là $M1, M2, M3, M4$. Để thống kê doanh số tháng 1 năm 2021, họ dùng ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 60 & 45 & 70 \\ 100 & 70 & 80 & 90 \end{bmatrix}_{2\times 4},$$

trong đó vị trí a_{ij} biểu diễn doanh số mặt hàng j ($j \in \{1; 2; 3; 4\}$) của cửa hàng i ($i \in \{1; 2\}$). Qua ma trận A ta có thể thấy trong tháng 1, cửa hàng 1 bán được 60 mặt hàng 2.

Nếu $m = n$, ta có ma trận vuông cấp n. Khi đó các phần tử a_{ii} với $i = 1, 2 \ldots, n$ được gọi là các phần tử trên đường chéo chính của ma trận.
Ví dụ

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Ma trận hàng: là ma trận có 1 dòng và n cột: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$

Ma trận cột: là ma trận có n dòng và 1 cột: $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$

Định nghĩa 1.4

Ma trận bằng nhau: Hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ được gọi là bằng nhau nếu $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2 \ldots, n$.

Nội dung trình bày

1. Khái niệm ma trận
2. Một số ma trận đặc biệt
3. Phép toán trên ma trận

2. Một số ma trận đặc biệt

Ma trận không: Là ma trận mà tất cả các phần tử của ma trận đều bằng 0, ký hiệu là (O).

Ví dụ 2.1

Ma trận $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận 0 cỡ 2×3.

Ma trận đường chéo: Là ma trận vuông mà tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0, ta viết:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2.2

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

là ma trận đường chéo cấp 4.

Ma trận đơn vị: Là ma trận đường chéo mà các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1. Ký hiệu là I_n.

Ví dụ 2.3

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

là ma trận đơn vị cấp 2.

Ma trận tam giác trên: Là ma trận vuông mà các phần tử nằm phía dưới đường chéo chính đều bằng 0, có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2.4

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ma trận tam giác dưới: Là ma trận vuông mà các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0, có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2.5

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ma trận chuyển vị: Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Ma trận chuyển vị của A được ký hiệu là $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$, là ma trận có các hàng (cột) tương ứng là các cột (hàng) của A, ký hiệu là:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Chú ý 2.6

$(A^T)^T = A.$

Ví dụ 2.7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 4} \quad \text{thì} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{4\times 3}.$$

Ma trận đối xứng: Ma trận vuông cấp n có dạng $A = (a_{ij})_{n \times n}$ được gọi là đối xứng nếu $A^T = A$, hay $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Ma trận đối xứng có biểu diễn:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2.8

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ là ma trận đối xứng cấp 3.

Ma trận bậc thang: thỏa mãn 2 điều kiện: nếu có các hàng bằng 0 thì hàng đó phải ở dưới cùng và phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới lệch sang phải so với phần tử khác 0 đầu tiên của hàng trên nó.

Ví dụ 2.9

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 6}.$$

Nội dung trình bày

1 Khái niệm ma trận

2 Một số ma trận đặc biệt

3 Phép toán trên ma trận

Phép toán trên ma trận

Định nghĩa 3.1

Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times n$: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Ta định nghĩa tổng $A + B$ như sau:

$$(a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}$$

Nghĩa là muốn cộng hoặc trừ hai ma trận cùng cỡ, ta sẽ cộng hoặc trừ các phần tử cùng vị trí.

Ví dụ 3.2

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 3+1 & -4-3 \\ 2+3 & -1-1 & 3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 5 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3.3

Thực hiện phép tính

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$.

Tính chất 3.4

Cho A, B, C là các ma trận cùng cấp. Ta có các tính chất sau:

i) $A + B = B + A$.

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

iii) $A + O = O + A = A$.

iv) $A + (-A) = (-A) + A = O$.

v) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Định nghĩa 3.5

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và một số $k \in \mathbb{K}$ thì $kA = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$.
Như vậy, muốn nhân một ma trận với một số ta nhân tất cả các phần tử của ma trận với số đó.

Chú ý 3.6

$(kA)^T = kA^T$.

Ví dụ 3.7

$$-3\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \\ -12 & 6 & -9 \\ -9 & -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa 3.8

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{jk})_{n\times p}$, trong đó số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B. Ta định nghĩa tích của hai ma trận A và B như sau:

$$(a_{ij})_{m\times n} \times (b_{jk})_{n\times p} = (c_{ik})_{m\times p}$$

c_{ik} là tích của hàng thứ i trong ma trận A với cột thứ k trong ma trận B, tức là:

$$c_{ik} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3.9

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} =$

$\begin{bmatrix} 1.4+1.2 & 1.4+1.2+1.41.2 & \\ 2.5+1.2 & 2.5+1.2 & 2.5+1.2 \\ 3.1+6.2 & 3.1+6.2 & 3.1+6.2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 12 & 12 & 12 \\ 15 & 15 & 15 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} =$

$\begin{bmatrix} 1.1+1.2+1.3 & 1.4+1.5+1.6 \\ 2.1+2.2+2.3 & 2.4+2.5+2.6 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 12 & 30 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$

Ví dụ 3.10

Tính tích của hai ma trận

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} 2 \times 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$.

Ứng dụng của phép toán ma trận trong kinh tế

Một công ty có 2 cửa hàng , bán 4 mặt hàng là $M1, M2, M3, M4$ với mức giá lần lượt là $10000, 20000, 30000, 10000$ (VNĐ). Doanh số của hai cửa hàng trong tháng 1 và tháng 2 năm 2021 được thống kê lần lượt bởi các ma trận A và B như sau

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 60 & 45 & 70 \\ 100 & 70 & 80 & 90 \end{bmatrix}_{2\times 4},$$

$$B = \begin{bmatrix} 50 & 40 & 60 & 60 \\ 80 & 70 & 60 & 70 \end{bmatrix}_{2\times 4}.$$

Tổng doanh số của 2 cửa hàng trong tháng 1 và tháng 2 đối với từng mặt hàng được thống kê bằng ma trận sau

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 50+50 & 60+40 & 45+65 & 70+60 \\ 100+80 & 70+70 & 80+60 & 90+70 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$
$$= \begin{bmatrix} 100 & 100 & 105 & 130 \\ 180 & 140 & 140 & 160 \end{bmatrix}_{2\times 4}.$$

Doanh thu của từng cửa hàng trong tháng 1 được thống kê bằng ma trận sau

$$D = A.\begin{bmatrix} 10000 \\ 20000 \\ 30000 \\ 10000 \end{bmatrix}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 50.10000 + 60.20000 + 45.30000 + 70.10000 \\ 100.10000 + 70.20000 + 80.30000 + 90.10000 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$
$$= \begin{bmatrix} 3750000 \\ 5700000 \end{bmatrix}_{2\times 1}.$$