

基于动态力学特性的平板参数识别算法研究

杨家友, 丁艳平, 余富勇, 郑伟, 杨静, 常兴, 赵晨
深蓝汽车科技有限公司

【摘要】 本文以矩形平板动态力学特性为已知量, 以材料参数及结构参数为未知量, 并通过最小二乘法建立关于未知量的非线性方程组, 进行了矩形平板参数识别研究。在仿真软件中建立矩形平板有限元模型并计算模态频率, 通过模态频率和所设计的识别算法对矩形平板的杨氏模量进行了参数识别。然后计算平板上任意两点间的频率响应曲线, 通过频率响应曲线的峰值频率和所设计的识别算法同时对矩形平板的厚度和杨氏模量进行了参数识别。研究表明, 辨识结果与真实值基本一致, 且算法收敛速度快。在直接测量条件不允许的情况下, 该参数识别算法可以代替直接测量进行参数获取。

【关键词】 参数识别, 最小二乘法

Research on Plate Parameter Identification Algorithm Based on Dynamic Mechanical Properties

Yang Jiayou, Ding Yanping, Yu Fuyong, Zheng Wei, Yang Jing, Chang Xing, Zhao Chen
Deepal Automobile Technology Co., Ltd.

Abstract: Taking the dynamic mechanical properties of the rectangular plate as the known quantity and the material parameters and structural parameters as the unknown quantity, the nonlinear equations about the unknown quantity are established by the least square method, and the parameter identification of the rectangular plate is studied. In the simulation software, the finite element model of rectangular plate is established and the modal frequency is calculated. Through the modal frequency and the designed identification algorithm, the parameters of Young's modulus of rectangular plate are identified. Then the frequency response curve between any two points on the flat plate is calculated, and the parameters of the thickness and Young's modulus of the rectangular flat plate are identified simultaneously through the peak frequency of the frequency response curve and the identification algorithm designed. The research results show that the identification results are basically consistent with the real values, and the algorithm converges quickly. When the direct measurement condition does not allow, the parameter identification algorithm can replace the direct measurement for parameter acquisition.

Key words: parameter identification, least square method

引言

准确的参数是进行仿真分析和优化设计的重要基础。但是, 工程上由于错综复杂的原因, 经常会遇到无法获得准确仿真参数的情况。例如, 进行噪声、振动和声振粗糙度(NVH)异响仿真分析时, 经常遇到供应商能力不足, 无法提供内饰塑料件的材料参数, 导致仿真工程师前期工作开展困难; 再例如, 新能源汽车电驱动系统中的电机定子属于复合结构, 它由很多薄壁板件叠压而成, 由于各供应商使用的材料不同, 加工工艺差别较大, 往往难以给出通用的材料参数; 又例如, 做某些竞争产品的对标分析时, 由于焊接关系或结构本身比较复杂, 导致某些部件的长度、厚度等结构尺寸无法直接测量。当然, 即使上述参数能够通过试验直接测量, 也同样面临诸多问题, 因为通过物理试验等传统方法获取材料参数往往存在试验技术不足、周期长、费用高、测量数据不准确等局限性。然而, 随着计算机技术和数值方法的发展, 数值模拟计算成为研究结构性能的重要手段^[1-4]。融合试验测量技术、数值计算方法和优化技术的参数识别方法是参数测试研究的重要方向之一^[5-9]。计算反求技术可通过有限的试验数据, 结合数值模型来识别材料或结构的某些特

性参数, 大大降低了试验成本。因此, 该技术能为材料及结构参数的准确获取提供快捷可靠的间接途径^[10-16]。

本文以矩形平板为例, 详细推导了一种理论识别算法, 根据试验获得的低阶模态频率或者频响曲线峰值频率, 确定材料的某些参数和结构的尺寸参数。

1 物理参数的识别问题

工程应用实例中, 一般是由已知的材料性能参数及结构参数, 通过建立求解方程, 得到结构的动力学特性, 而识别问题是由果求因的反求问题。现在的问题是通过结构动力学特性, 如实测的低阶模态频率、频响曲线对应的峰值频率、半功率带宽或振动幅值等特征参数, 反求出其材料的物性参数或结构尺寸参数。

假设 x_i 表示材料或结构固有属性的参数, 如杨氏模量 E 、密度 ρ 、厚度 t 等。 y_i 表示结构的特征参数, 如模态频率 ω 、半功率带宽 $\Delta\omega$ 或振动幅值 A 等。则结构特征参数 y_i 和结构固有属性参数 x_i 的关系可由如下方程组表示:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

式中, f_1, f_2, f_m 均为 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的多元函数。实际结构中, 多数情况下, $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 都是自变量 $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 的非线性函数, 所以方程组 (1) 为非线性方程组。若用向量记号记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_m)^T, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$, 则方程组 (1) 可以写成

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

对于参数识别问题, 通常 \mathbf{y} 是一些比较容易直接测量得到的特征值, \mathbf{x} 是不容易直接测量的材料或结构参数。假设已经得到一组测量值, 用 \mathbf{y}^* 表示, 下面介绍如何通过逆向求解方程组 (2), 得到需要辨识的 \mathbf{x}^* 值的方法。

假设 $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)^T$ 为一组实际测量得到的特征值, 根据最小二乘法建立目标函数。如果记单个数据误差 $r_i(x)$ 为

$$r_i(\mathbf{x}) = y_i - y_i^* \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

总体误差 $r(\mathbf{x})$ 为

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - \mathbf{y}^* = [r_1(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x}), \dots, r_m(\mathbf{x})]^T$$

则目标函数 $S(\mathbf{x})$ (即误差的平方和) 可以表示为

$$S(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2 = \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

辨识算法的目的是要找到一组最优解 \mathbf{x} , 使得目标函数 $S(\mathbf{x})$ 最小。

非线性方程组的求解问题无论是在理论上或实际解法上均比线性方程组求解更加复杂和困难。它可能实际无解, 也有可能有一个解或多个解。另外, 非线性问题一般不存在直接的求解公式, 故没有直接方法求得精确解, 主要采用迭代法求近似解。通常采用 Gauss-Newton 迭代法求解上述最小二乘问题, 其基本思想是将非线性问题逐步线性化。迭代法要求首先给出真实根 \mathbf{x}^* 的一个近似解 \mathbf{x}^0 , 然后通过迭代去逼近真实解 \mathbf{x}^* 。

假设从 \mathbf{x}^0 开始, 经过迭代已求得 \mathbf{x}^k , 现考虑 \mathbf{x}^{k+1} 的求解方法。

$$\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$$

式中, k 为迭代次数, $\Delta \mathbf{x}^k$ 为迭代矢量。

假设方程组 (1) 可导, 把 $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 的第 i 个分量 $r_i(\mathbf{x})$ 在点 \mathbf{x}^k 处用泰勒级数展开, 且忽略二阶以上高阶项, 得

$$r_i(\mathbf{x}) = r_i(\mathbf{x}^k) + r_i'(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad i=1, 2, \dots, m$$

式中,

$$r_i'(\mathbf{x}^k) = \frac{\partial r_i(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial r_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_1}, \frac{\partial r_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r_i(\mathbf{x}^k)}{\partial x_n} \right)$$

则

$$\mathbf{r}'(\mathbf{x}^k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1(\mathbf{x}^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial r_1(\mathbf{x}^k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial r_1(\mathbf{x}^k)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial r_2(\mathbf{x}^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2(\mathbf{x}^k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial r_2(\mathbf{x}^k)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_m(\mathbf{x}^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial r_m(\mathbf{x}^k)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial r_m(\mathbf{x}^k)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

向量函数 $\mathbf{r}'(\mathbf{x}^k)$ 称为 $\mathbf{r}(\mathbf{x}^k)$ 的雅可比矩阵。后续为了书写方便, 记 $\mathbf{r}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{r}, \mathbf{r}'(\mathbf{x}^k) = \mathbf{r}'$ 。则目标函数 $S(\mathbf{x})$ 可写改写为

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{r} + \mathbf{r}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k))^T(\mathbf{r} + \mathbf{r}'(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)) \\ &= (\mathbf{r}'\mathbf{x} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k))^T(\mathbf{r}'\mathbf{x} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)) \\ &= (\mathbf{x}^T \mathbf{r}'^T + (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)^T)(\mathbf{r}'\mathbf{x} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{r}'^T \mathbf{r}' \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{r}'^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k) + \dots \\ &\quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)^T \mathbf{r}' \mathbf{x} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k) \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{x}^T \mathbf{r}'^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)$ 是一个数, 而一个数的转置是它本身, 所以有

$$\mathbf{x}^T \mathbf{r}'^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k) = [\mathbf{x}^T \mathbf{r}'^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)]^T = (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)^T \mathbf{r}' \mathbf{x}$$

于是 $S(\mathbf{x})$ 可以简化为

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{r}'^T \mathbf{r}' \mathbf{x} + 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)^T \mathbf{r}' \mathbf{x} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)$$

该误差函数 $S(\mathbf{x})$ 是关于 \mathbf{x} 的多元二次函数方程, 要求取最小值, 则要求其一阶导数等于 0, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{r}'^T \mathbf{r}' \mathbf{x} + 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k)^T \mathbf{r}' \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \mathbf{r}'^T \mathbf{r}' \mathbf{x} + (\mathbf{r}'^T \mathbf{r}')^T \mathbf{x} + 2\mathbf{r}'^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k) \\ &= 2\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' \mathbf{x} + 2\mathbf{r}'^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' \mathbf{x} + \mathbf{r}'^T (\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{x}^k) = 0$$

上式通过矩阵变换可得,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^k - (\mathbf{r}'^T \mathbf{r}')^{-1} \mathbf{r}'^T \mathbf{r}$$

将 $\mathbf{r}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{y}^k - \mathbf{y}^*$ 代入上式, 得

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^k + (\mathbf{r}'^T \mathbf{r}')^{-1} \mathbf{r}'^T (\mathbf{y}^* - \mathbf{y}^k)$$

上式为求 \mathbf{x}^{k+1} 的公式, 即求解真实值 \mathbf{x}^* 的迭代公式为

$$\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + (\mathbf{r}'^T \mathbf{r}')^{-1} \mathbf{r}'^T (\mathbf{y}^* - \mathbf{y}^k)$$

2 参数识别算法验证

2.1 矩形平板的材料参数辨识

以某矩形平板的杨氏模量辨识过程为例, 验证参数识别算法的可行性。为便于分析和提升迭代效率, 本文以 Matlab 自带的某平板模态计算程序为基础, 嵌套参数识别迭代程序, 形成一个完整闭环的自动更新材料参数, 然后计算平板模态, 直至收敛得到材料参数的计算程序。矩形平板几何模型及有限元网格如图 1 所示, 约束 F1~F4 四个面 Z 方向位移。为便于理论分析, 本文采用有限元仿真分析结果代替实验测试值。假定其真实材料参数为杨氏模量 $E = 2.0 \times 10^5 \text{MPa}$, 经有限元模型计算, 得到前十阶柔体模态频率见表 1, 各阶振型如图 2 所示。

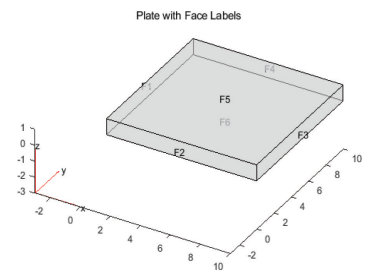


图 1 矩形平板几何模型及有限元网格

现假设其杨氏模量 E 未知, 根据上述已知的十阶固有频率, 通过程序进行材料参数辨识。首先, 任意给定一个杨

氏模量初始值 $E_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，收敛条件为前十阶模态频率最大误差不超过 0.01 Hz 。经过 6 次迭代，模态频率收敛，

如图 4 和图 5 所示。

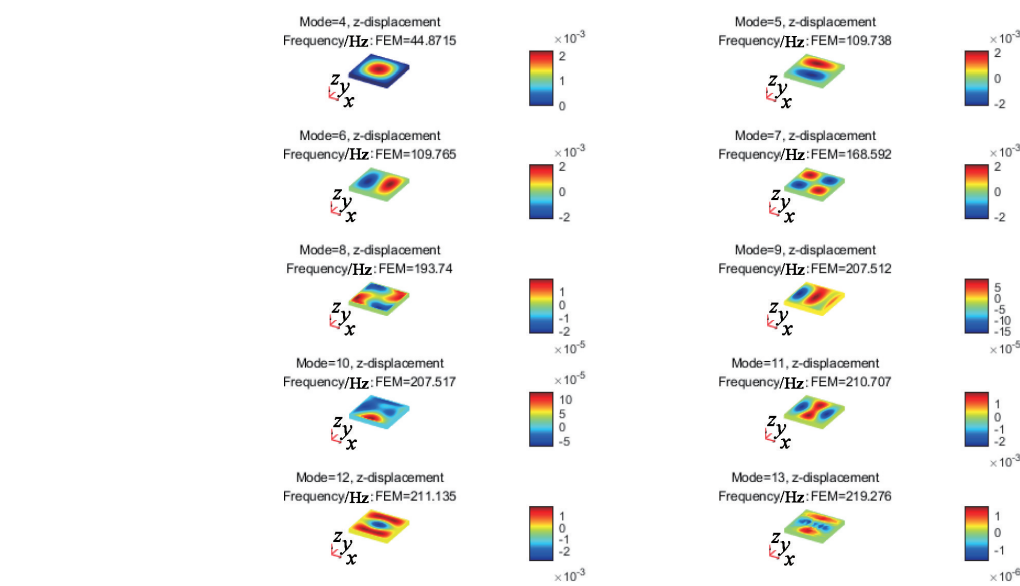


图 2 矩形平板前十阶柔体模态频率及阵型

表 1 前十阶模态频率

模态阶数	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶	7 阶	8 阶	9 阶	10 阶
固有频率/Hz	44. 87	109. 74	109. 77	168. 59	193. 74	207. 51	207. 52	210. 71	211. 14	219. 28

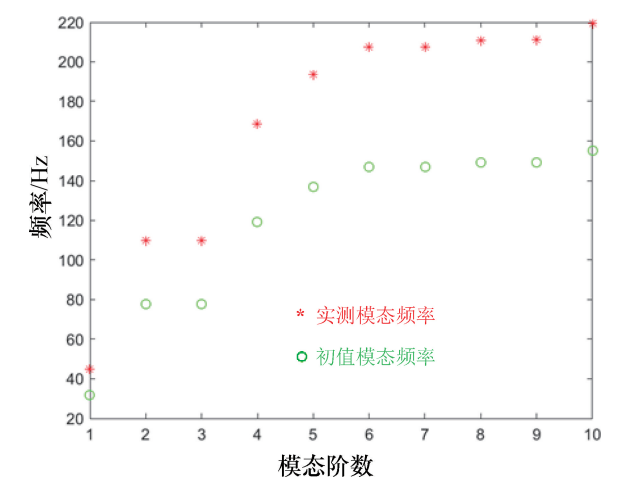


图 3 初值条件下前十阶模态频率对比

最终得到杨氏模量 $E_6 = 2.0000358 \times 10^5 \text{ MPa}$ （误差小于 0.002% ），和真实杨氏模量基本一致，参数辨识结果见表 1。

表 2 杨氏模量辨识结果

迭代次数	E_1	E_2	E_3
E/MPa	216957. 98	203670. 15	200683. 97
迭代次数	E_4	E_5	E_6
E/MPa	200122. 42	200021. 54	200003. 58

2.2 矩形平板的材料参数和结构尺寸参数辨识

本节将介绍两个未知量的参数识别过程，包括了材料参数（杨氏模量 E ）和结构尺寸参数（厚度 T ）。仍然以矩形平板为例，在有限元软件中建立平板模型，长度 $L = 400 \text{ mm}$ ，宽度 $W = 350 \text{ mm}$ ，厚度 $T = 2.6 \text{ mm}$ ，材料的杨氏模量 $E = 2.1 \times 10^2 \text{ GPa}$ 。选择平板上的任意两个点（图 5 所示的点 A 和点 B），计算传递函数（FRF）曲线，得到前三阶频率峰值为： 61.88 Hz 、 84.53 Hz 、 119.232 Hz ，如图 6 所示。

现假设杨氏模量 E 和材料厚度 T 未知，利用前文所述的方法进行参数辨识。给定杨氏模量初始值 $E_0 = 1.9 \times 10^2 \text{ GPa}$ ，材料厚度初始值 $T_0 = 2.4 \text{ mm}$ ，通过有限元计算得到

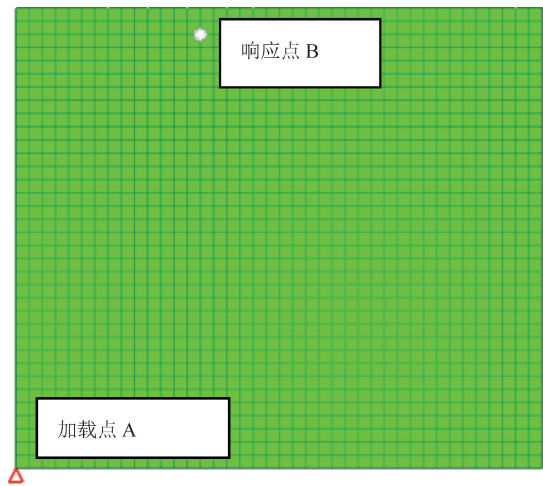


图 5 矩形平板有限元模型

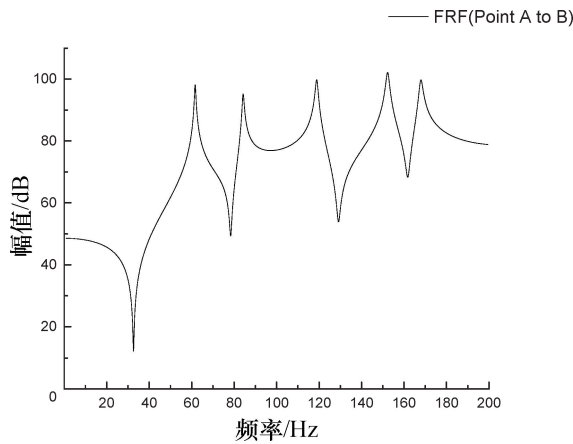


图 6 FRF 曲线

FRF 曲线前三阶峰值频率分别为 57.212 Hz、81.032 Hz、106.214Hz。设定扰动量为初始值的 1%，分别计算 FRF 曲线，得 $\Delta E=0.019 \times 10^2 \text{ GPa}$ ，对应的 FRF 曲线前三阶峰值频率为 57.502Hz、81.436Hz、106.744Hz； $\Delta T=0.024 \text{ mm}$ ，对应的 FRF 曲线前三阶峰值频率为 57.788Hz、81.842Hz、107.276Hz。则对应的偏导数矩阵 r' 为

$$r'_0 = \begin{pmatrix} 15.26315789 & 24 \\ 21.26315789 & 33.75 \\ 27.89473684 & 44.25 \end{pmatrix}$$

代入 MATLAB 程序中计算，可得更新后的材料参数值：

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.123768624 \\ 2.468883665 \end{pmatrix}$$

重复上述步骤，计算可得

$$r'_1 = \begin{pmatrix} 13.84331592 & 23.89744031 \\ 18.92861564 & 32.64633371 \\ 26.65073745 & 46.0937069 \end{pmatrix}$$

代入 MATLAB 程序中计算，可得更新后的材料参数值：

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.12804992178337 \\ 2.59341810836906 \end{pmatrix}$$

继续重复上述步骤，计算可得

$$r'_2 = \begin{pmatrix} 14.56732743 & 23.90667351 \\ 19.92434462 & 32.6981599 \\ 28.10084453 & 46.19386269 \end{pmatrix}$$

代入 MATLAB 程序中计算，可得更新后的材料参数值：

$$\begin{pmatrix} E_3 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.12296266387336 \\ 2.58588251378599 \end{pmatrix}$$

相对误差为

$$ERROR(E) = \left| \frac{E_3 - E}{E} \right| \times 100\% = 1.09\%$$

$$ERROR(T) = \left| \frac{T_3 - T}{T} \right| \times 100\% = 0.54\%$$

经过三次迭代后，杨氏模量约为 $2.12 \times 10^2 \text{ GPa}$ ，材料厚度约为 2.59mm，精度都达到 1% 左右，满足工程要求。

3 结论

本文提出了一个完整的参数识别问题的反分析迭代计算方法。以结构的动力学特性为特征值，材料参数和结构尺寸参数为未知量，根据最小二乘法建立非线性方程组，推导了参数识别的计算公式，并进行了未知量识别。该方法克服了特征值与待辨识参数之间的复杂性，因此对解决参数识别问题具有较好的通用性。

为了充分验证计算方法的有效性，本文选择了矩形平板为具体算例。首先以矩形平板的低阶模态参数为特征值，辨识得到了其材料的杨氏模量。其次，以矩形平板的频响曲线峰值频率为特征向量，辨识得到了材料杨氏模量和板件厚度。计算结果表明，本文提出的参数识别问题的识别方法可行，收敛速度快，精度高，通用性强，适用范围广。在直接测量条件不允许的情况下，材料参数和结构尺寸参数可以用此间接测量方法代替直接测量。

参 考 文 献

[1] 徐强, 刘博, 陈建云, 等. 基于加权最小二乘的结构模态参数与损伤识别 [J]. 水利学报, 2020, 51 (1): 23-32.

[2] 于钟博, 刘杰, 陈睿, 等. 基于改进同伦算法的材料特性参数识别 [J]. 中国科技论文. 2016. 11 (10): 1160-1163.

[3] 朱四荣, 李卓秋. 复合材料层合板的参数识别 [J]. 强度与环境-增刊. 2000 (1): 237-240.

[4] 王晓纯, 沈新普, 李从珠, 等. 复合材料参数识别问题的计算方法 [J]. 中国有色金属学报. 1997, 7 (2): 72-77.

[5] 刘迪辉, 汪晨, 李光耀. 薄壁钢管材料参数反求 [J]. 机械工程学报, 2008, 19 (6): 688-690.

[6] 陈睿, 材料特性参量识别的混合反演方法及应用研究 [D]. 长沙: 湖南大学, 2014.

[7] 罗均, 刘刚, 黄宗明. 基于约束最小二乘的剪切型框架结构损伤识别新方法 [J]. 振动与冲击, 2016, 35 (20): 119-124.

[8] 周思达, 曹博远, 周小陈. 结构应变模态参数辨识的最小二乘复频域方法 [J]. 振动工程学报, 2007, 20 (4): 401-406.

[9] 严华雯, 吴健平. 加权最小二乘法改进遗传克里金插值方法研究 [J]. 计算机技术与发展, 2012 22 (3): 92-95.

[10] LIU G R, HAN X. Computational Inverse Techniques in Non-destructive Evaluation [M]. Florida: CRC Press, 2003.

[11] JADAMBA B, KHAN A A, SAMA M. Inverse Problems of Parameter Identification in Partial Differential Equations [J]. Mathematics in Science and Technology, 2011: 228-258.

[12] GELIN J C, GHOUATI O. An inverse Method for Material Parameters Estimation in the Inelastic Range [J]. Computational Mechanics, 1995, 16 (3): 143-150.

[13] YABE H, TAKAHASHI T, Factorized quasi-newton methods for nonlinear least squares problems [J]. Mathematical Programming, 1991, 51 (1): 75-100.

[14] FURUAWA A, OTSUKA H, KIYONO J. Structural Damage Detection Method Using Uncertain Frequency Response Functions [J]. Computer-aided Civil & Infrastructure Engineering, 2010, 21 (4): 292-305.

[15] LU S G, YANG L, FAN C L, et al. A Modified Levenberg-Marquardt Algorithm for Relevant Parameter Identification of Defect with Infrared Inspection [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2013, 30 (2): 214-220.

[16] CHAMEKH A, BELHADJSALAH H, HAMBLI R, et al. Inverse Identification Using the Bulge Test and Artificial Neural Networks [J]. Journal of Materials Processing Technology, 2006, 177 (1/3): 307-310.