Основы теории формальных языков и грамматик

Лекция 1

Лекция 1

Основы теории формальных языков и грамматик

<u>1.1 ЯЗЫКИ И ЦЕПОЧКИ СИМВОЛОВ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ЯЗЫКОВ</u>

1.1.1 Цепочки символов. Операции над ними

- **Цепочкой (строкой)** называется последовательность символов записанных один за одним. α β γ ω
- Цепочка – последовательность, в которую могут входить все допустимые символы (не обязательно несущие смысл). abc или call_me_1_02
- Цепочки символов α и β равны ($\alpha = \beta$) тогда и только тогда, когда имеют один и тот же состав символов, и одинаковое их количество и их порядок следования.
- Количество символов в цепочке называется длиной цепочки. $|\alpha|$

  α=abc $|\alpha| = 3$

  $\alpha = \beta$ $|\alpha| = |\beta|$

1.1.1 Цепочки символов. Операции над ними

- Если из цепочки единичной длины $|\alpha|=1$ удаляется этот единственный символ, α по прежнему остается цепочкой, но длина ее равна 0. $|\alpha|=0$
- Цепочку нулевой длины будем обозначать ε.

  $|\varepsilon|=0$

  $\varepsilon d=d\varepsilon$
- Если существует цепочка $\omega = \alpha\beta$, то α – голова цепочки, β – хвост цепочки.
- Причем α – правильная голова, если β – не пустая цепочка. $|\beta| >0$. β –правильный хвост, если α – не пустая цепочка. $|\alpha| > 0$.

  $\alpha = abc$

  ε, a, ab, abc – головы цепочки. ε, a, ab – правильные головы.

1.1.1 Цепочки символов. Операции над ними

- Если α и β - цепочки, то цепочка $\alpha\beta$ называется **конкатенацией** (или сцеплением) цепочек α и β.

  $\alpha = ab$ и $\beta = cd$, $\alpha\beta = abcd$.

  $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$.

- Коммутативность конкатенации $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, ассоциативность $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
- **Обращением (или реверсом)** цепочки α называется цепочка, символы которой записаны в обратном порядке. α^R.

  $\alpha = abcdef$, $\alpha^R = fedcba$.

  $\varepsilon = \varepsilon^R$.

  $(\alpha\beta)^R = \beta^R\alpha^R$

- **Итерация (повторение, степень)** n-ой степенью цепочки α (будем обозначать α^n) называется конкатенация n цепочек α.

  $\alpha^0 = \varepsilon$; $\alpha^n = \alpha\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}\alpha$.

  $\varepsilon^n = \varepsilon$, где $n \in N$, $n >= 0$.

1.1.2 Формальное определение языка. Понятие языка

- **Язык** – это заданный набор символов и правил, устанавливающих способы комбинации этих символов между собой для записи осмысленных предложений.
- **Алфавит** – набор допустимых символов языка. Алфавит – счетное, непустое множество символов.
- Цепочка символов α является цепочкой над алфавитом $\alpha(V)$, если в нее входят только символы, принадлежащие алфавиту V.
- Для любого алфавита V пустая цепочка ε может как являться, так и не являться цепочкой над этим алфавитом.
- Если $|V|=0$ и V – множество, то оно называется пустым множеством и обозначается $.

  $| \varepsilon |=0$

  $| \{\varepsilon\} |=1$

1.1.2 Формальное определение языка. Понятие языка

- V^* множество, содержащее все цепочки в алфавите V, включая пустую цепочку ε.
- V^* - **итерация** множества V или транзитивное замыкание.
- V^+ - множество всех цепочек длиной 1 и более, исключив тем самым цепочку ε.
- V^+ - **усечённая итерация** множества V или усеченное транзитивное замыкание.

$$V^*=V^+ \cup \{\varepsilon\}$$

$$V= \{a,b,c\}$$

$$V^* = \{a, b, c, aa, bb, cc, aab, abc, abbc \ldots \varepsilon\}$$

$$V^+ = \{a, b, c, aa, bb, cc, aab, abc, abbc \ldots\}$$

- **Декартовым произведением** $A \times B$ множеств A и B называется множество $\{ \alpha \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}$.

Если $A= \{a,b\}$ и $B=\{c,d\}$, то $A \times B = \{ac, ad, bc, bd\}$

1.1.2 Формальное определение языка. Понятие языка

- **Языком L** над алфавитом V называют некоторое счетное подмножество цепочек конечной длины из множества всех цепочек над алфавитом V. $L(V) \leq V^*$
  - ✓ множество цепочек языка не обязано быть конечным
  - ✓ хотя каждая цепочка в языке обязана быть конечной длины, эта длина формально ничем не ограничена
- **Предложением языка** называется цепочка символов, принадлежащая этому языку.

1.1.2 Формальное определение языка. Понятие языка

- Язык L над алфавитом V включает в себя язык L’ над алфавитом V (L(V) ≤ L’(V)), если справедливо, что любая цепочка α принадлежащая L, принадлежит и L’. α є L(V) и α є L’(V)
- **Два языка** L(V) и L’(V) **равны** или совпадают если справедливо L(V) ≤ L’(V) и L’(V) ≤ L(V).
- **Два языка** L(V) и L’(V) **почти эквиваленты**, если они отличаются на пустую цепочку L(V) =~ L’(V).

$$L(V) \cup \{\varepsilon\} = L'(V) \cup \{\varepsilon\} .$$

<u>*1.1.3 Способы задания языка*</u>

- перечисление всех допустимых цепочек языка
- с помощью указания способа порождения цепочек языка (задать грамматику языка, используемую для порождения языка)

$L(G1)=\{0^n1^n \mid n>0\}$	$L(G1)=\{0^n1^m \mid n>0, m>0\}$
01	01
0011	0000011
000111	00111

- определение метода распознавания цепочек языка

1.1.4 Синтаксис и семантика

- **Лексема** – это языковая конструкция, которая состоит из элементов алфавита языка и не содержит других конструкций.
- **Синтакис** – набор правил, определяющих допустимые конструкции языка. Синтаксис определяет форму языка.
- **Семантика** – это раздел языка, определяющий значения предложений языка (определяющий содержание, смысл языка).

1.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАММАТИКИ

<u>1.2.1 Понятие о грамматике языка</u>

- **Грамматика** – описание способов построения предложений некоторого языка.
- Грамматика — один из основных подходов к описанию бесконечного формального языка конечными средствами.
- **Правило (продукция)** – упорядоченная пара цепочек (α β), которое записывается $\alpha \rightarrow \beta$ (α порождает β).
- L(G) – язык L, заданный грамматикой G.

1.2.1 Понятие о грамматике языка

- Грамматики G1 и G2 называются **эквивалентными**, если L(G1) = L(G2).

G1 = ({0,1}, {A,S}, P1, S)

P1: S -> 0A1

0A -> 00A1

A -> ε

G2 = ({0,1}, {S}, P2, S)

P2: S -> 0S1 | 01

L(G1) = L(G2) = $\{0^n1^n \mid n>0\}$.

- Грамматики G1 и G2 **почти эквивалентны**, если L(G1) ∪ {ε}= L(G2) ∪ {ε}.

G1 = ({0,1}, {A,S}, P1, S)

P1: S -> 0A1

0A -> 00A1

A -> ε

L(G1)=$\{0^n1^n \mid n>0\}$

G2 = ({0,1}, {S}, P2, S)

P2: S -> 0S1 | ε

L(G2)=$\{0^n1^n \mid n>=0\}$

1.2.2 Формальное определение грамматики

По определению Хомского формальная грамматика представляет собой четвёрку:

G={VT, VN, P, S}

- VT, T - множество терминальных символов языка,
- VN, N – множество нетерминальных символов (или понятий языка или синтаксических единиц)

  $V = VN \cup VT$

  $VN \cap VT = \emptyset$

- P – множество правил подстановки (продукций), имеющий вид α ->β, $\alpha \in V^{+}$, $\beta \in V^{*}$.

  Знак -> означает "непосредственно порождает "или "есть по определению".

- S – аксиома грамматики или начальный символ грамматики. $S \in VN$.

1.1.2 Формальное определение грамматики

Грамматика, определяющая целое число без знака:

$$G=\{VT,VN,P,S\}$$

VN = {A,B}

VT = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

P = {A ->BA, A ->B, B ->0, B ->1, B->9}

S = {A}

A - целое число без знака, B - любая цифра.

1.3 СПОСОБЫ ЗАПИСИ СИНТАКСИСА ЯЗЫКА

Метаязык - язык, предназначенный для описания другого языка

1.3.1 Метаязык Хомского

- -> символ отделяет левую часть правила от правой (читается как "порождает" и "это есть");
- нетерминалы обозначаются буквой А с индексом, указывающим на его номер;
- терминалы - это символы, используемые в описываемом языке;
- Каждое правило определяет порождение одной новой цепочки, причём один и тот же нетерминал может встречаться в нескольких правилах слева.

1.3.1 Метаязык Хомского

1. $A_1 \to A$
2. $A_1 \to B$
3. $A_1 \to C$
4. $A_1 \to D$
5. $A_1 \to E$
6. $A_1 \to F$
7. $A_1 \to G$
8. $A_1 \to H$
9. $A_1 \to I$
10. $A_1 \to J$
11. $A_1 \to K$
12. $A_1 \to L$
13. $A_1 \to M$
14. $A_1 \to N$
15. $A_1 \to O$
16. $A_1 \to P$
17. $A_1 \to Q$
18. $A_1 \to R$
19. $A_1 \to S$
20. $A_1 \to T$
21. $A_1 \to U$
22. $A_1 \to V$
23. $A_1 \to W$
24. $A_1 \to X$
25. $A_1 \to Y$
26. $A_1 \to Z$
27. $A_1 \to a$
28. $A_1 \to b$
29. $A_1 \to c$
30. $A_1 \to d$
31. $A_1 \to e$
32. $A_1 \to f$
33. $A_1 \to g$
34. $A_1 \to h$
35. $A_1 \to i$
36. $A_1 \to j$
37. $A_1 \to k$
38. $A_1 \to l$
39. $A_1 \to m$
40. $A_1 \to n$
41. $A_1 \to o$
42. $A_1 \to p$
43. $A_1 \to q$
44. $A_1 \to r$
45. $A_1 \to s$
46. $A_1 \to t$
47. $A_1 \to u$
48. $A_1 \to v$
49. $A_1 \to w$
50. $A_1 \to x$
51. $A_1 \to y$
52. $A_1 \to z$
53. $A_2 \to 0$
54. $A_2 \to 1$
55. $A_2 \to 2$
56. $A_2 \to 3$
57. $A_2 \to 4$
58. $A_2 \to 5$
59. $A_2 \to 6$
60. $A_2 \to 7$
61. $A_2 \to 8$
62. $A_2 \to 9$
63. $A_3 \to A_1$
64. $A_3 \to A_3 A_1$
65. $A_3 \to A_3\ A_2$

Описание идентификатора на метаязыке Хомского

1.3.2 Бэкуса-Наура формы (БНФ)

- символ "::=" отделяет левую часть правила от правой;
- нетерминалы обозначаются произвольной символьной строкой, заключённой в угловые скобки "<" и ">";
- терминалы – это символы, используемые в описываемом языке;
- каждое правило определяет порождение нескольких альтернативных цепочек, отделяемых друг от друга символом вертикальной черты “|”.

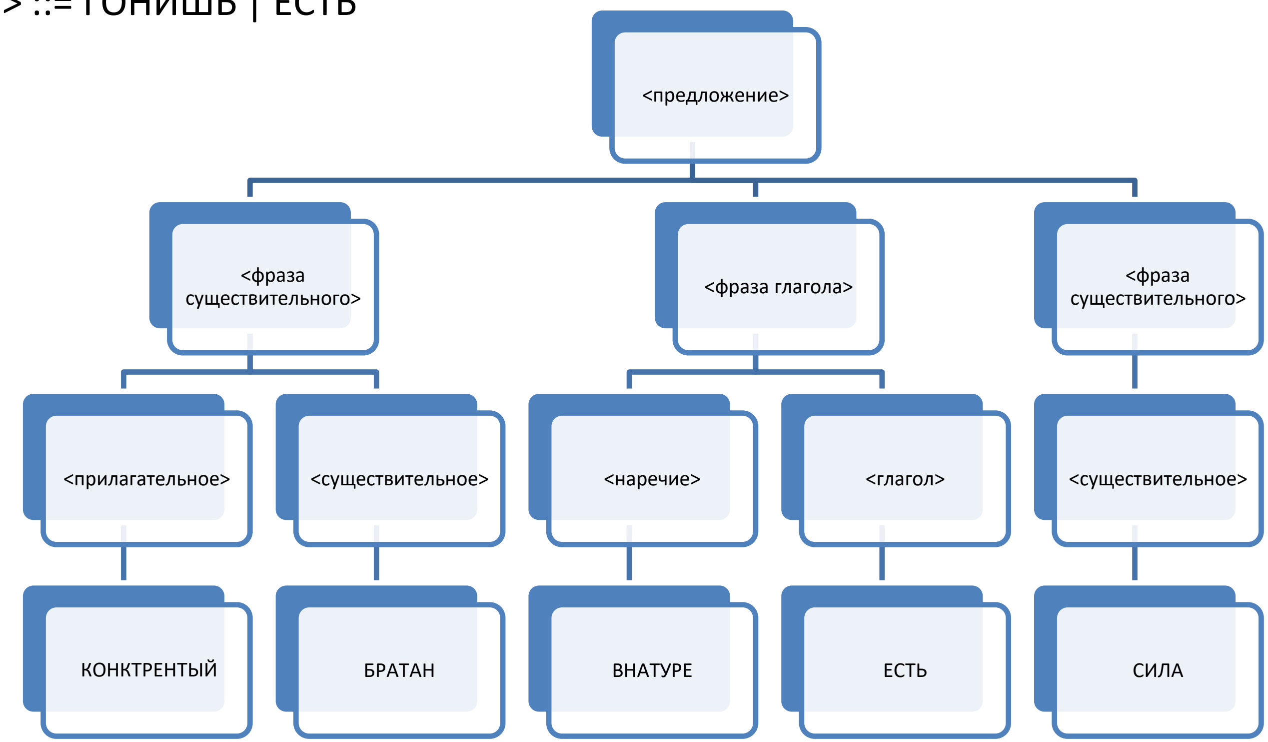
1.3.2 Бэкуса-Наура формы (БНФ)

1. <буква> ::= A | B| C …| Z| a| b| c| …| z
2. <цифра> ::= 0| 1| 2 … |9
3. <идентификатор> ::= <буква> |
   <идентификатор><буква>|
   <идентификатор><цифра>

Пример описания идентификатора с использованием БНФ

1.3.2 Бэкуса-Наура формы (БНФ)

- <предложение> ::= <фраза существительного> <фраза глагола> <фраза существительного>
- < фраза существительного > ::= <прилагательное> <существительное> | <существительное>
- <прилагательное> ::= БЛАТНОЙ| КОНКРЕТНЫЙ
- <существительное> ::= ПАЦАН| БРАТАН| СИЛА
- <фраза глагола> ::= <наречие> <глагол> | <глагол>
- < наречие> ::= ЧИСТО | КОНКРЕТНО| ТИПА| ВНАТУРЕ
- <глагол> ::= ГОНИШЬ | ЕСТЬ



Упрощенная грамматика русского языка в терминах БНФ

1.3.3 РБНФ (расширенная)

- [ ] – синтаксическая конструкция может отсутствовать;
- { } – повторение синтаксической конструкции (возможно 0 раз)
- ( ) – для ограничения альтернативных конструкций
- {\ \} – для обозначения повторения один и более раз.

<u>1.3.3 РБНФ</u>

- <буква> ::= A | B| C …| Z| a| b| c| …| z
- <цифра> ::= 0| 1| 2 … |9
- <идентификатор> ::= <буква> {<буква> | <цифра>}

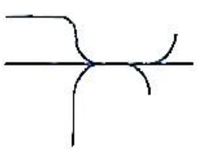
Пример описания идентификатора с использованием РБНФ

1.3.4 Диаграмма Вирта

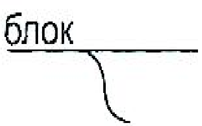
терминальный символ, принадлежащий алфавиту языка

постоянная группа терминальных символов, определяющая название лексемы, ключевое слово и т.д.

нетерминальный символ определяющий название правила

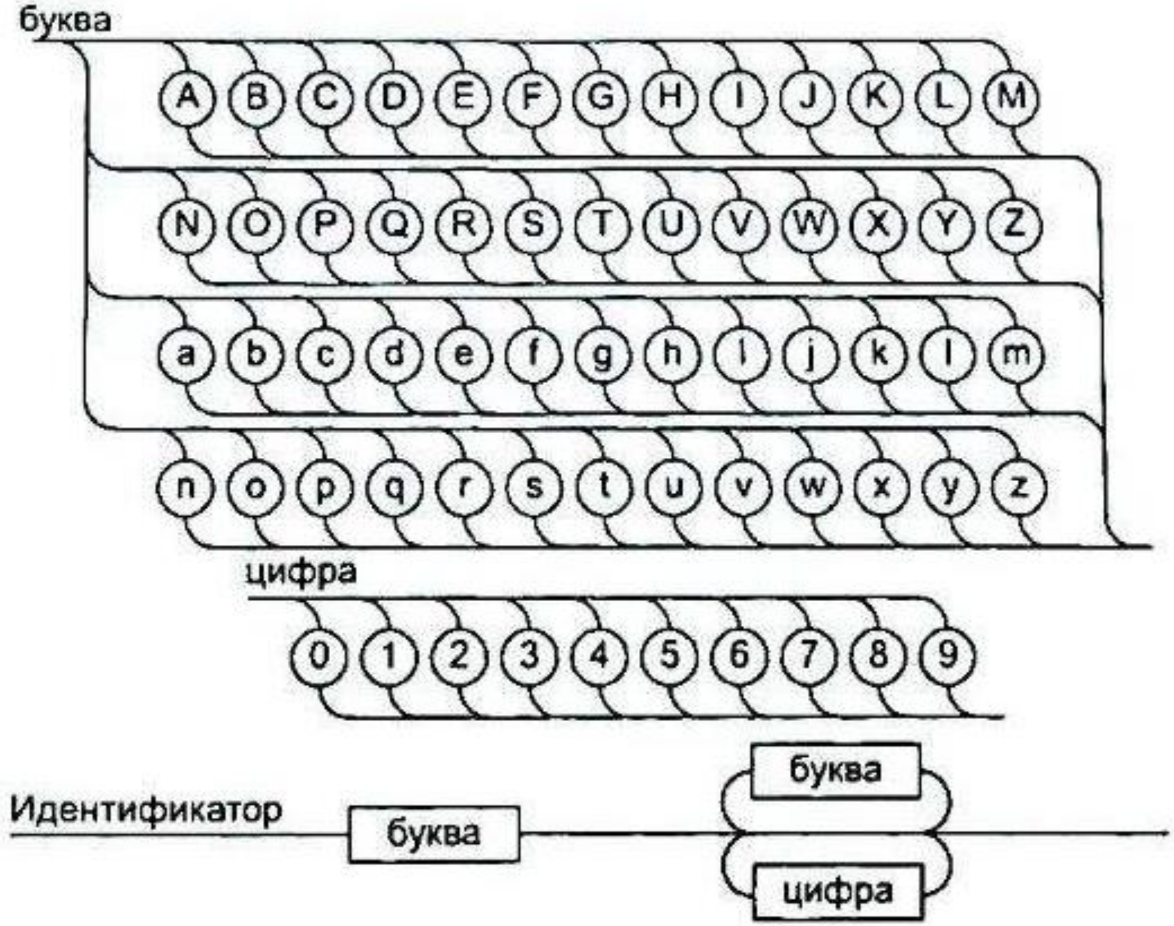


соединительные линии, обеспечивающие связь между терминальными и нетерминальными символами в правилах, заданных диаграммами Вирта



входная дуга с именем правила, определяющая его начало

1.3.4 Диаграмма Вирта



Пример описания идентификатора с использованием диаграмм Вирта

1.4 КЛАССИФИКАЦИЯ ЯЗЫКОВ И ГРАММАТИК

1.4.1 Классификация грамматик

Тип	Название	Ограничение на правила
0	Грамматики с фразовой структурой (грамматики без ограничений)	$\alpha \to \beta$, где $\alpha \in V^+$, $\beta \in V^*$
1	Контекстно-зависимые неукорачивающие	$\xi_1 A \xi_2 \to \xi_1 \gamma \xi_2$, где $A \in VN$; $\gamma \in V^+$; $\xi_1, \xi_2 \in V^*$. $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in V^+$ и $\mid \alpha \mid <= \mid \beta \mid$

1.4.1 Классификация грамматик

Тип	Название	Ограничение на правила
2	Контекстно-свободные: неукорачивающие укорачивающие	 $A \to \beta$, где $A \in VN$, $\beta \in V^+$ $A \to \beta$, где $A \in VN$, $\beta \in V^*$
3	Регулярные: леволинейные праволинейные Подкласс регулярных – автоматные: леволинейные праволинейные	 $A \to B\gamma \mid \gamma$, где $A, B \in VN$, $\gamma \in VT^*$ $A \to \gamma B \mid \gamma$, где $A, B \in VN$, $\gamma \in VT^*$ $A \to Bt \mid t$, где $A, B \in VN$, $t \in VT$ $A \to tB \mid t$, где $A, B \in VN$, $t \in VT$

1.4.1 Классификация грамматик

- Эта иерархия грамматик – включающая.
- Грамматика 2 включает 3, но не наоборот.
- Любая грамматика относится к типу 0.
- Существуют такие УКС грамматики, которые не относятся к КЗ и неукорачивающим, а относятся к типу без ограничений.
- Сложность грамматики обратно пропорциональна тому максимально возможному номеру типа к которому может быть отнесена грамматика.

1.4.2 Классификация языков

Языки классифицируются в соответствие с типами грамматик с помощью которых они заданы. Поскольку один и тот же язык в общем случае может быть задан сколь угодным количеством грамматик, которые могут относится к разным типам, то для классификации языка всегда выбирается грамматика с максимальным классификационным типом.

1.4.2 Классификация языков

Грамматика 0 $G1 = (\{0,1\}, \{A,S\}, P1, S)$ и

$$
\begin{aligned}
P1: \quad & S \to 0A1 \\
& 0A \to 00A1 \\
& A \to \varepsilon
\end{aligned}
$$

КС-грамматика $G2 = (\{0,1\}, \{S\}, P2, S)$, где

$$P2: \quad S \to 0S1 \mid 01$$

описывают один и тот же язык

$$L = L(G1) = L(G2) = \{ 0^n 1^n \mid n>0 \}$$

1.4.2 Классификация языков

- Сложность языка убывает с возрастанием классификационного типа языка.
- Тип 0. Язык с фразовой структурой (естественные языки).
- Тип 1. Язык контекстно-зависимый.

  В общем случае время на распознавание предложения этого языка экспоненциально зависит от длины входящей цепочки.
- Тип 2. Контекстно-свободный язык.

  Время распознавания предложений КС-языка полиномиально зависит от длины входящей цепочки.
- Тип 3. Регулярные.

  Время распознавания предложений языка линейно зависит от длины входящей цепочки.

1.4.3 Примеры классификации языков и грамматик

- Язык типа 2: $L(G3) = \{(ac)^n\ (cb)^n \mid n > 0\}$

G3: S -> aQb | accb

Q -> cSc

- Язык типа 3: $L(G4) = \{\omega \perp \mid \omega \in \{a,b\}^+$, где нет двух рядом стоящих a$\}$

G4: S -> A⊥ | B⊥

A -> a | Ba

B -> b | Bb | Ab

1.4.3 Примеры классификации языков и грамматик

- Язык типа 0:

L(G1) = $\{a^2 b^{n^2-1} \mid n >= 1\}$

G1: S -> aaCFD

F -> AFB | AB

AB -> bBA

Ab -> bA

AD -> D

Cb -> bC

CB -> C

bCD -> ε

Язык типа 1:

L(G2) = { $a^n b^n c^n$, n >= 1}

G2: S -> aSBC | abC

CB -> BC

bB -> bb

bC -> bc

cC -> cc

1.5 ЦЕПОЧКИ ВЫВОДА. СЕНТЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА

1.5.1 Вывод. Цепочка вывода.

- **Выводом** называется процесс порождения предложений языка на основе правил, определяющих язык.
- Цепочка $\beta \in (VT \cup VN)^*$ **непосредственно выводима** из цепочки $\alpha \in (VT \cup VN)^+$ в грамматике G = (VT, VN, P, S) (обозначим $\alpha \Rightarrow \beta$), если $\alpha = \xi_1\gamma\xi_2$, $\beta = \xi_1\delta\xi_2$, где ξ_1, ξ_2, $\delta \in (VT \cup VN)^*$, $\gamma \in (VT \cup VN)^+$ и правило вывода γ -> δ содержится в P.

1.5.1 Вывод. Цепочка вывода.

- Цепочка $\beta \in V^*$ выводима из цепочки $\alpha \in V^+$ в грамматике $G = (VT, VN, P, S)$ (обозначим $\alpha \Rightarrow^* \beta$), если:
  - β непосредственно выводима из α ($\alpha \Rightarrow \beta$)
  - существует такая цепочка γ, что β непосредственно выводима из γ ($\gamma \Rightarrow \beta$), а γ выводима из α ($\alpha \Rightarrow^* \gamma$)
- **β выводима из α** если β непосредственно выводима из α или если можно построить цепочку непосредственных выводов $\alpha \Rightarrow \gamma 0 \Rightarrow \gamma 1 \Rightarrow ... \Rightarrow \gamma n \Rightarrow \beta$.
- Такая последовательность непосредственно выводимых цепочек называется **цепочкой вывода**.
- Каждый переход от одной цепочки к другой называется **шагом вывода**.

1.5.1 Вывод. Цепочка вывода.

- Если цепочка вывода от α к β содержит одну и более промежуточных цепочек, то такая цепочка обозначается $\alpha \Rightarrow^+ \beta$ (**β нетривиально выводима из α**).
- Если количество шагов вывода известно, то его можно указать непосредственно над знаком вывода.

    Если $\alpha \Rightarrow \beta$, то один шаг вывода.

    Если $\alpha \Rightarrow^4 \beta$, то β выводима из α за 4 шага.

    Если $\alpha \Rightarrow^0 \beta$, то $\alpha = \beta$.

1.5.1 Вывод. Цепочка вывода.

$G=(\{A, S) \{0, 1\}, P, S)$

P: S -> 0A1

0A -> 00A1

A -> ε

Приведем вывод для цепочки 0011 є L(G):

- $S \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 0011$;
- $S \Rightarrow + 0A1$; $S \Rightarrow + 00A11$; $S \Rightarrow + 0011$;
- $S \Rightarrow^* S$; $S \Rightarrow^m 0A1$; $S \Rightarrow^* 00A11$; $S \Rightarrow^3 0011$;

1.5.2 Сентенциальная форма грамматики. Основа

- Вывод называется законченным, если на основе цепочки β, полученной в результате вывода нельзя сделать ни одного шага вывода, т.е. цепочка β состоит из терминальных символов.
- Цепочка β, полученная в результате законченного вывода называется **конечной цепочкой** вывода.
- Цепочка $\alpha \in (VT \cup VN)^*$, для которой $S \Rightarrow^* \alpha$ (если α выводима из начального символа грамматики), называется **сентенциальной формой** в грамматике $G = (VT, VN, P, S)$.
- Если $\alpha \in VT^*$, то α называется **конечной сентенциальной формой** или предложением языка.

1.5.2 Сентенциальная форма грамматики. Основа

- Пусть G=(VN, VT, P, S) грамматика и цепочка $w = \gamma_1 \beta \gamma_2$ сентенциальная форма $\gamma_1, \gamma_2 \in V^*$, $\beta \in V^+$, тогда β называют **фразой сентенциальной формы** w для нетерминала B, если существуют выводы $S \Rightarrow * \gamma_1 B \gamma_2$, $B \Rightarrow^+ \beta$.
- β называется **простой фразой**, если существуют выводы $S \Rightarrow * \gamma_1 B \gamma_2$, $B \Rightarrow \beta$.
- Основой всякой сентенциальной формы называется самая левая простая фраза.

  если $\gamma_1 = \varepsilon$, то B - голова.

  если $\gamma_2 = \varepsilon$, то B - хвост.
- Язык L заданный грамматикой G - это множество всех конечных сентенциальных форм грамматики G.

1.5.3 Левосторонний и правосторонний вывод

- Вывод цепочки $\beta \in (VT)^*$ из $S \in VN$ в КС-грамматике $G = (VT, VN, P, S)$, называется левым (левосторонним), если в этом выводе каждая очередная сентенциальная форма получается из предыдущей заменой самого левого нетерминала.
- Вывод цепочки $\beta \in (VT)^*$ из $S \in VN$ в КС-грамматике $G = (VT, VN, P, S)$, называется правым (правосторонним), если в этом выводе каждая очередная сентенциальная форма получается из предыдущей заменой самого правого нетерминала.

1.5.3 Левосторонний и правосторонний вывод

Например, для цепочки a+b+a в грамматике

G = ({a,b,+}, {S,T}, {S -> T | T+S; T -> a | b}, S)

можно построить выводы:

(1) $S \Rightarrow T+S \Rightarrow T+T+S \Rightarrow T+T+T \Rightarrow a+T+T \Rightarrow a+b+T \Rightarrow a+b+a$

(2) $S \Rightarrow T+S \Rightarrow a+S \Rightarrow a+T+S \Rightarrow a+b+S \Rightarrow a+b+T \Rightarrow a+b+a$

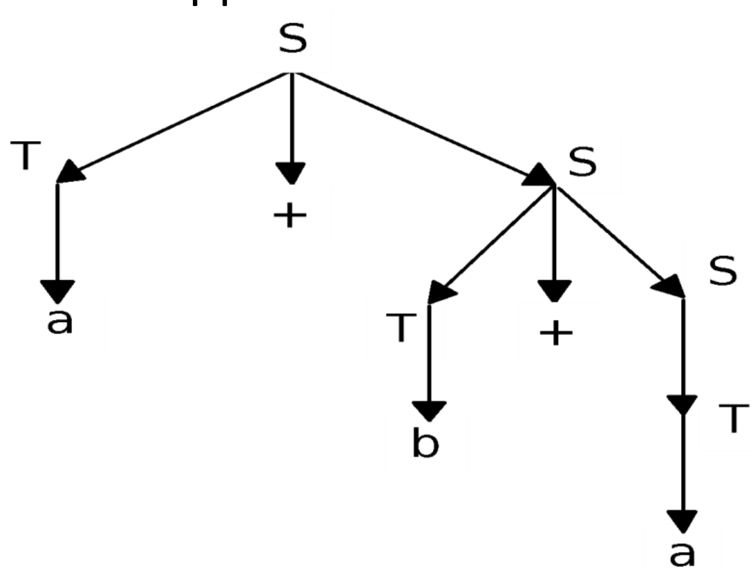
(3) $S \Rightarrow T+S \Rightarrow T+T+S \Rightarrow T+T+T \Rightarrow T+T+a \Rightarrow T+b+a \Rightarrow a+b+a$

Для грамматик типов 2,3 для любой сентенциальной формы можно построить левый и правый вывод.

Для грамматик типов 0,1 – не всегда.

1.5.4 Дерево вывода

- Цепочку вывода можно представить графически в форме дерева (графа).
- Корнем дерева является вершина, обозначенная начальным символом грамматики.
- В узлах дерева находятся нетерминальные символы, в листьях – терминалы.
- Каждая связь соответствует одному шагу вывода.



Процесс распознавания цепочки символов – можно ли построить для данной цепочки дерево назовем синтаксическим анализом, а само дерево – синтаксическим.