DGP-Homework5

高悟恒

2020-10-26

一. 问题描述：

对三角网格进行参数化，使得扭曲量尽可能小。

二. 算法：

1.ARAP:

首先将三角网格中的三角面 t 全等映射到平面上，记其在平面上为 $x_t = \{x_t^0, x_t^1, x_t^2\}$。具体为假设空间三角面的三个顶点为 p_0, p_1, p_2，则对应平面三角形为 $x_t^0 = (0,0), x_t^1 = (|p_0p_1|, 0), (|p_0p_2|cos(\theta), |p_0p_2|sin(\theta))$，其中 θ 为 p_1p_2 所对的角。我们的目标是找到平面坐标 $u_t = \{u_t^0, u_t^1, u_t^2\}$，则从 x_t 到 u_t 的映射的雅可比矩阵为 $J_t(u)$。另外对于每个三角形，记 L_t 为一个旋转变换矩阵，则我们希望能量最小化，其中能量为：

$$E(u, L) = \sum_{t=1}^{T} A_t \|J_t(u) - L_t\|_F^2 \tag{1}$$

其中 A_t 为三角形面积，$\|\cdot\|_F$ 为 Frobenius 范数。

初始取 u_t 为 Tutte 参数化的结果，可以通过交替迭代的方式不断降低能量，直至收敛。

local 迭代：

将 SVD 分解应用于"cross-covariance" 矩阵：

$$S_t(u) = \sum_{i=0}^{2} cot(\theta_t^i)(u_t^i - u_t^{i+1})(x_t^i - x_t^{i+1})^T \tag{2}$$

其中 θ_t^i 为边 (x_t^i, x_t^{i+1}) 所对的角，取新的 L_t 为 UV^T。

global 迭代：

固定一个顶点的参数化坐标，解大型稀疏线性方程组：

$$\sum_{j \in N(i)} [cot(\theta_{ij}) + cot(\theta_{ji})](u_i - u_j) = \sum_{j \in N(i)} [cot(\theta_{ij}) L_{t(i,j)} + cot(\theta_{ji}) L_{t(j,i)}](x_i - x_j) \tag{3}$$

其中 $t(i,j)$ 为半边 (i,j) 所对的三角形，θ_{ij} 为半边 (i,j) 在三角形 $t(i,j)$ 中所对的角。

三. 实验结果：

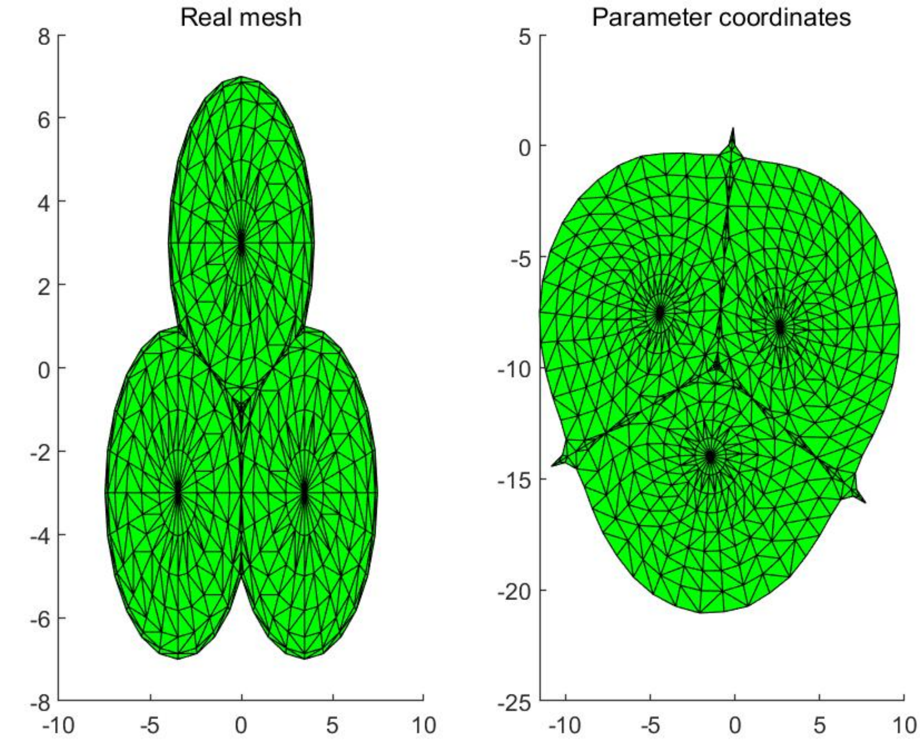

图 1: 三个半球组成的网格及参数化

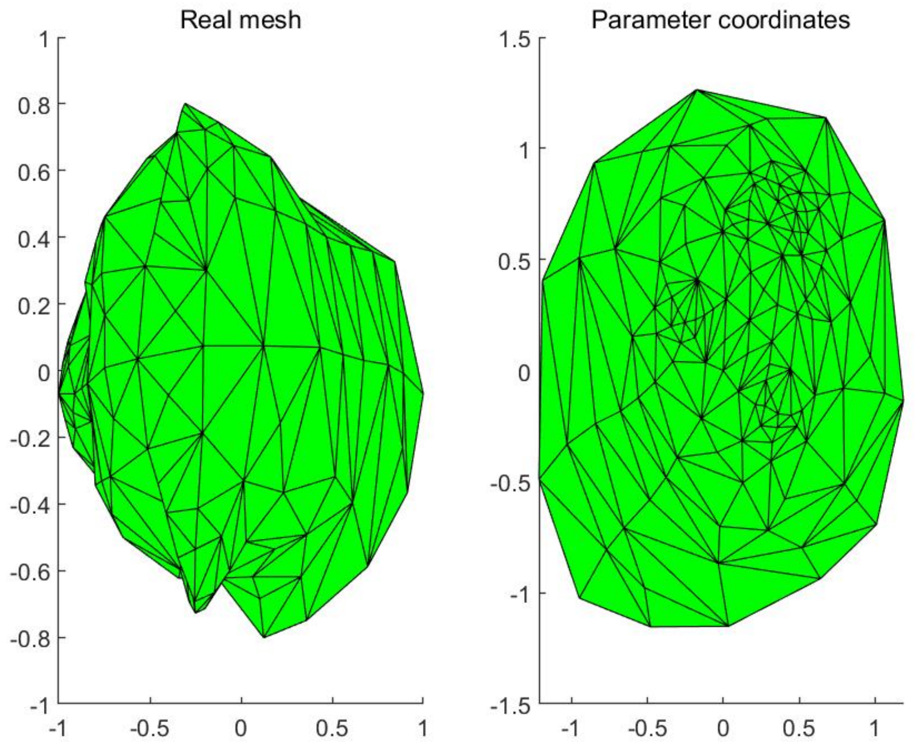

图 2: 猫头网格及参数化