DGP-Homework7

高悟恒

2020-11-14

一. 问题描述：

对一对连接关系相同的三角网格进行插值，得到一列三角网格。

二. 算法：

1.ARAP:

对每个三角形，设从初始网格到目标网格的仿射变换为 A，对每个时刻 $t \in [0,1]$，将 A 进行 SVD 分解，得到 $A = U\Sigma V^T = UV^T V\Sigma V^T = RS$，对旋转矩阵 R 和标量矩阵 S 分别做插值，得到：

$$A(t) = R(t)((1-t)I + tS) \tag{1}$$

对于整个三角网格，定义能量：

$$E = \sum_{T_i} \|A_{T_i}(t) - B_{T_i}(t)\|^2 \tag{2}$$

其中 $B_{T_i}(t)$ 为实际仿射变换。

$B_{T_i}(t)$ 可以写为顶点位置的线性组合，在 2D 上：

$$\begin{aligned} & B_{T_i}(t)\vec{p} + \vec{l} = \vec{v}(t) \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} p_{1x} & p_{1y} & 1 \\ p_{2x} & p_{2y} & 1 \\ p_{3x} & p_{3y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \\ l_x & l_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} \\ v_{2x} & v_{2y} \\ v_{3x} & v_{3y} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \\ l_x & l_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} \\ v_{2x} & v_{2y} \\ v_{3x} & v_{3y} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

固定 $v_{1x}(t), v_{1y}(t)$，能量可以写成矩阵形式

$$E = u^T \begin{pmatrix} c & G^T \\ G & H \end{pmatrix} u \tag{4}$$

其中 $u = (1, v_{2x}(t), v_{2y}(t), ..., v_{nx}(t), v_{ny}(t))$。

则能量最小时：

$$H \begin{pmatrix} v_{2x}(t) \\ v_{2y}(t) \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = -G \tag{5}$$

注意到可以将 x,y 坐标分开，得到新的 H 对两坐标轴相同。

三. 实验结果：

见 morphing 演示 ppt