Matlab-1

高悟恒

2020-09-17

一. 算法：设有给定插值条件：起点 $x_i(p_i), i = 1, ..., n$ 和终点 $q_i, i = 1, .., n$。

1.IDW：

取形式为 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f_i(x)$ 的函数作为插值函数。

其中 $f_i(x) = q_i + D_i(x - p_i)$, 根据论文这里选取 D_i 为线性变换。

因此 D_i 为一个二阶方阵，记为 $(d_{i,kl}), k, l = 1, 2$。

由 D 导致的误差函数为:$E_i(D) = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \omega_{ij} \parallel q_i + D(x_j - x_i) - q_j \parallel^2 = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \omega_{ij}((d_{11}(p_{j,1} - p_{i,1}) + d_{12}(p_{j,2} - p_{i,2}) + q_{i,1} - q_{j,1})^2 + (d_{21}(p_{j,1} - p_{i,1}) + d_{22}(p_{j,2} - p_{i,2}) + q_{i,2} - q_{j,2})^2$。

其中系数 ω_{ij} 应当由 x_i 和 x_j 的距离决定，一种简单有效的选择是 $\omega_{ij} = \sigma_i(x_j), \sigma_i(x) = \frac{1}{(d_i(x))^\mu}$。

求误差函数最小值是一个极小二乘问题，只需对 d_{kl} 求偏导取零即可。

权重函数 ω_i 需满足条件 $\omega_i(x) \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) = 1, \omega_i(x_j) = \delta_{ij}$。

论文中选取了 $\omega_i(x) = \frac{\sigma_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} \sigma_j(x)}, \sigma_i(x) = \frac{1}{(d_i(x))^\mu}, \mu > 0$，这里为了便于计算通常选取 $\mu = 2$。

2.RBF：

取形式为 $T(x) = A(x) + R(x)$ 的函数作为插值函数。

其中 $A(x) = Mx + b$ 为仿射变换，可以根据初始设定计算，这里我们选取其为恒等变换。

而 $R(x)$ 为径向基函数，$R(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(x - x_i)$，这里选取 $g(d) = (d^2 + r^2)^{\mu/2}, \mu = -1$，其中 $r_i = \min\{i \neq j\} d(x_i, x_j)$。

最后参数 a_i 可以由给定的插值条件求解方程组得到。

二. 实验结果：

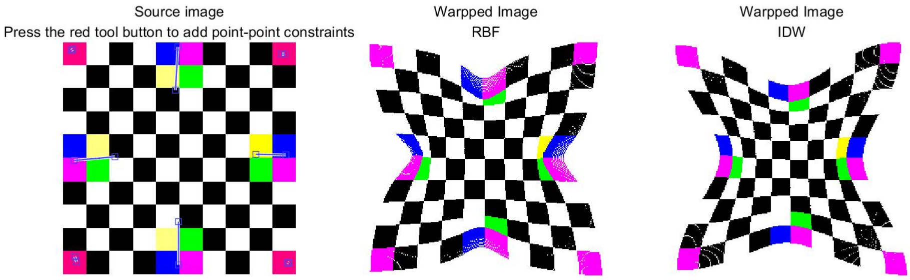

图 1: 变形效果（压缩）

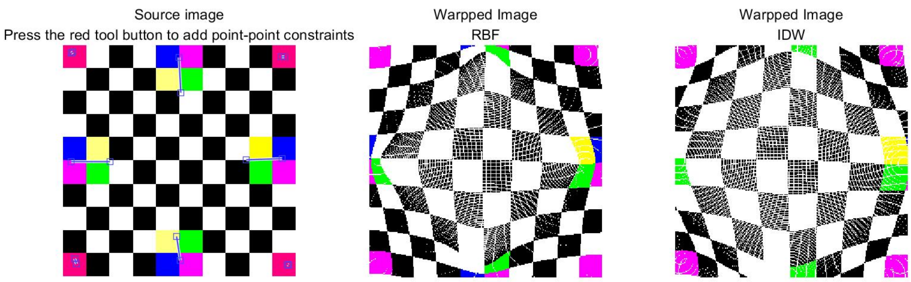

图 2: 变形效果（拉伸）

这里我们首先固定住四个角，再分别压缩或拉伸四条边的中点处，可以看到两种方法的计算效果都较好，但是值得注意的是变换后的图片中有一些白缝。

三. 白缝：这两种方法都是寻找一种连续的插值函数对图像进行变换，但是图像本身是离散的，这就导致我们只能计算原有图像上的点对应的点，而为了得到新的图像就需要对计算出来的点进行取整。又由于函数必然不是线性的，因此就会出现原来密集的点映射到相对较分散的区域的情况，这就产生了白缝。

****