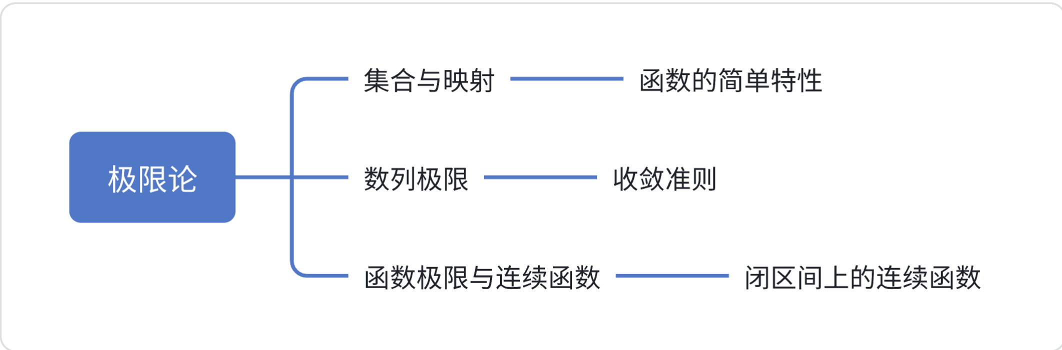
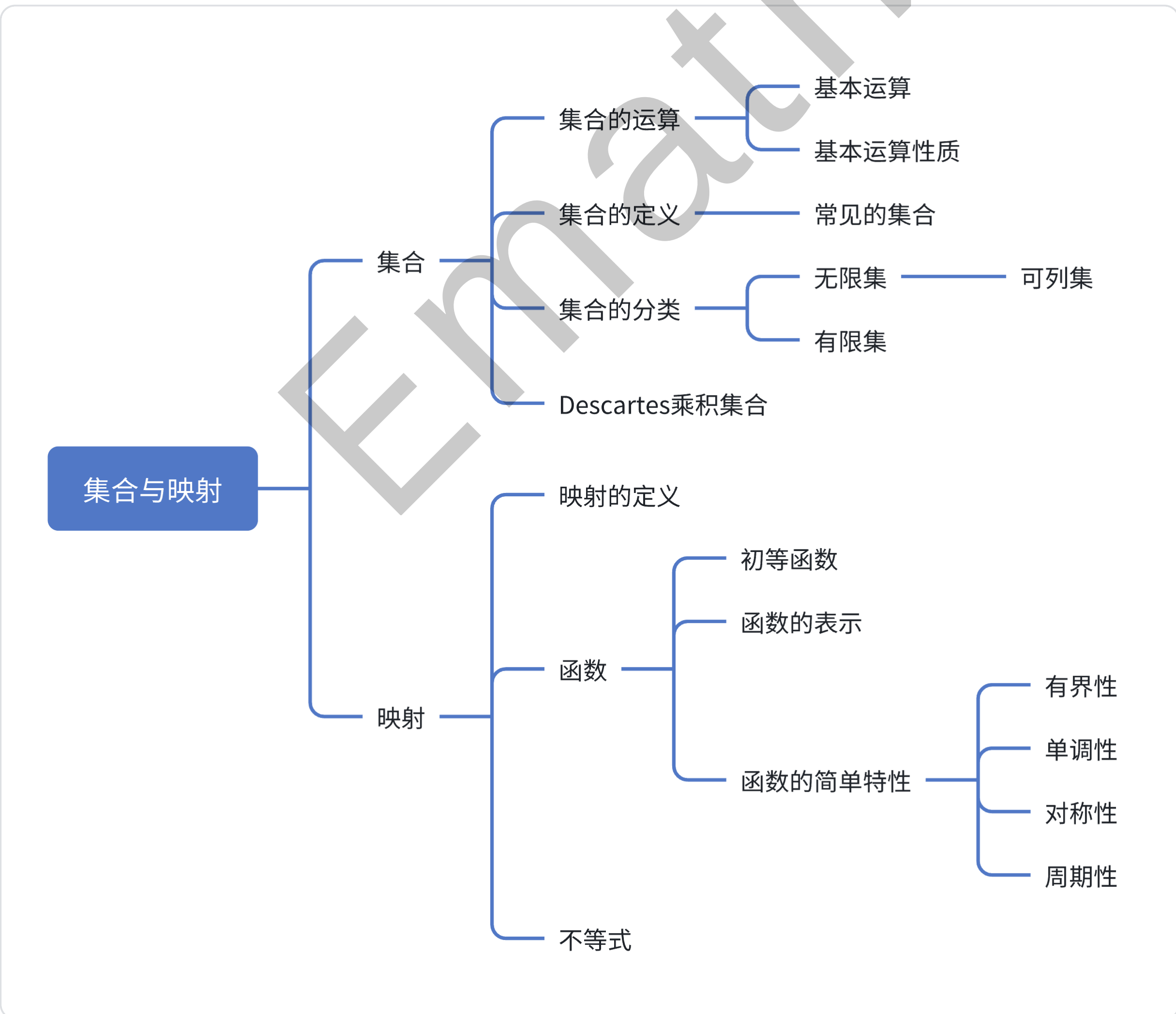
Emath-数学分析-极限论



第一章 集合与映射



集合

此部分内容，在离散数学（数理逻辑）的集合论，点集拓扑的朴素集合论中有更详细的介绍

集合

集合：指**具有某种特定性质**的具体或抽象的对象汇集成的**总体，**通常用大写字母如 A ， B ， S ， T 表示

元素：这些**对象**被称为元素，通常用小写字母如 a ， b ， x ， y 表示

集合的表示方式：

1. 枚举法：将集合的元素逐一列举
2. 描述法：描述集合中的元素公共属性的方式来表示

常见的集合：

集合名称	符号	枚举法	描述法
全体正整数的集合	N^*	$N^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$	$N^* = \{n \mid n为正整数\}$
全体整数的集合	Z	$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$	$Z = \{n \mid n为整数\}$
全体有理数的集合	Q	$Q = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, p/q, \ldots\}, p, q \in Z$	$Q = \{n \mid n为有理数\} = \{p/q \mid q, q \in Z\}$
全体实数的集合	R	此集合不适合枚举（不可数）	$R = \{n \mid n为实数\}$

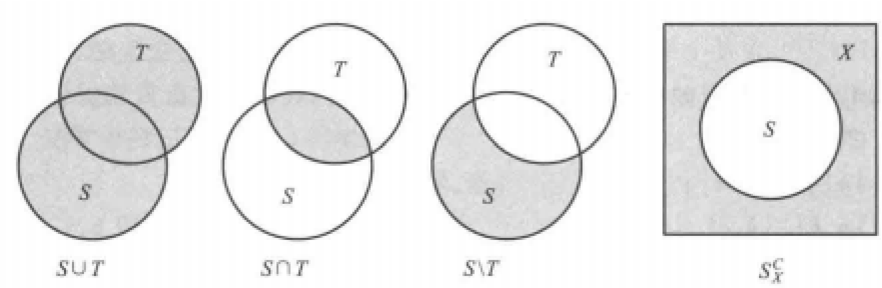
特殊的集合：

集合名称	符号	描述
空集	$\varnothing$	$\varnothing$是不包含任何元素的集合
子集	无	集合A内全元素都在集合B内，A称为B的子集
真子集	无	子集的基础上要求B内还有不在A内的元素

集合运算

基本运算： S 和 T 是两集合

1. **并：** S 和 T 的元素汇集成的集合，记为 $S \cup T$ ，即 $S \cup T = |x|x \in S$ 或者 $x \in T\}$
2. **交：** S 和 T 的公共元素组成的集合，记为 $S \cap T$ ，即 $S \cap T = \{x \mid x \in S$ 并且 $x \in T\}$
3. **差：** 属于 S 但不属于 T 的元素，记为 $S \backslash T$ ，即 $S \backslash T = \{x \mid x \in S$ 并且 $x \notin T\}$
4. **补：** 若 S 为 X 的一子集，则 S 关于 X 的补集 $S_X^c = X \backslash S$



基本运算性质：

1. 并与交
   a. **交换律：** $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
   b. **结合律：** $A \cup (B \cup D) = (A \cup B) \cup D, \quad A \cap (B \cap D) = (A \cap B) \cap D$
   c. **分配律：** $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D), \quad A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$
2. 补
   a. **对偶律：** $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

有限与无限集

此部分内容，在实变函数中有更为详细的介绍

有限集： 集合 S 由 n 个元素组成，这里 n 是确定的非负整数，则称集合 S 为**有限集**

无限集： 不是有限集的集合

可列集： 无限集，但集合中的所有元素按某种规律可以被无重复也无遗漏的排成一列

常见的有限集，无限集和可列集：

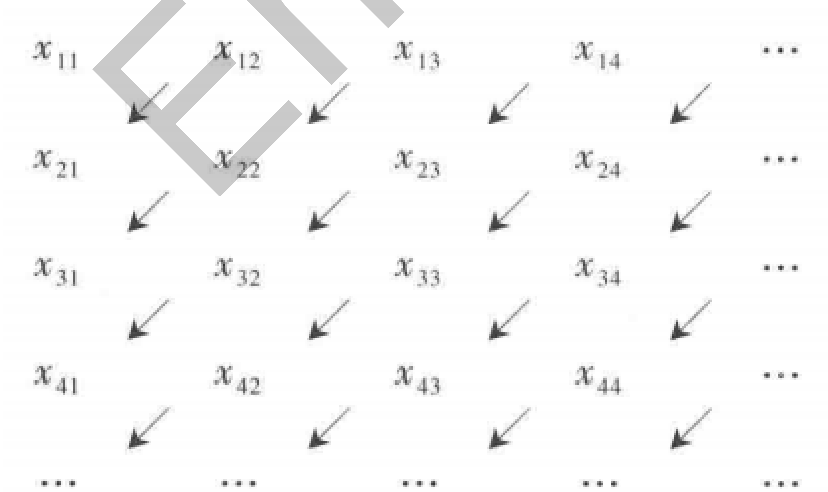
有限集：{1，2，3，4，5}

无限集： N ， Z ， Q ， R

可列集： Z ， Q

$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots\}$

Q =



其中 $x_{ij} = \frac{i}{j}$ ，即可达到不重不漏的数 Q 中的元素

上述关于 Q 的排列计数方法，被称为**对角线法制**，是一种常见的，重要的计数方法，值得关注

Descrates乘积集合

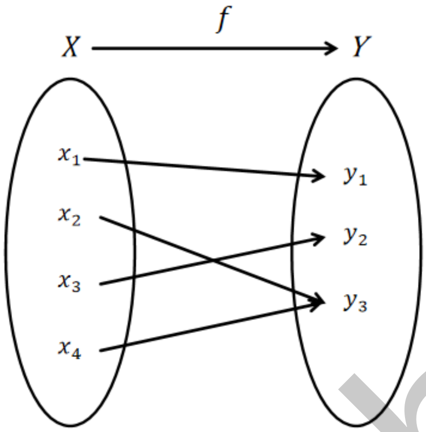
此部分内容，是直积，直和的最一般形式，直积和直和在多个分支有重要作用

Descrateds乘积集合： $A \times B = \{(x,y)|x \in A \text{ 并且 } y \in B\}$

之所以要引入Descrates乘积集合，一部分的原因是：一方面我们能通过先前已有的集合构建更大的集合，另一方面我们能对某些已有的集合进行分解，变成更小的集合

映射与函数

映射



映射：两个集合之间的一种对应关系

设 X ，Y 是两个给定的集合，若按照某种规则 f ，使得对集合X中的每一个元素 x ，都可以找到集合 Y 中**惟一**确定的元素 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是集合 X 到 Y 的一个**映射**，记为

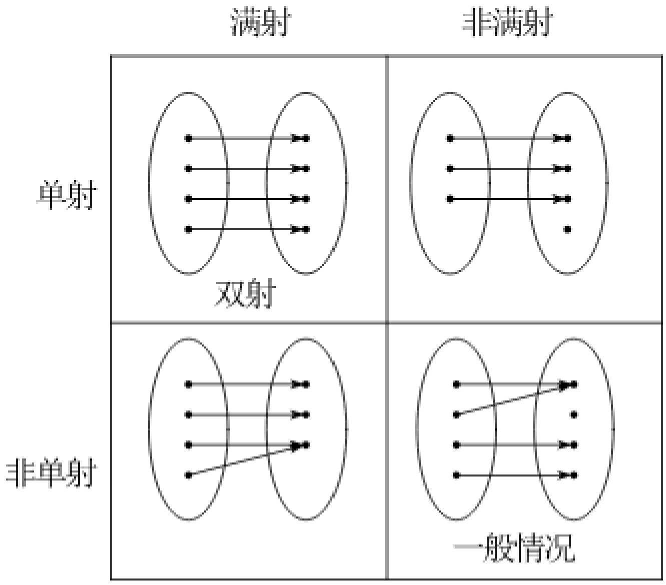
$$\begin{aligned} f: X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

像：其中 y 称为 x 在映射 f 下的**像**

逆像（原像）： x 称为在映射 f 之下 y 的一个**逆像（原像）**

定义域： X

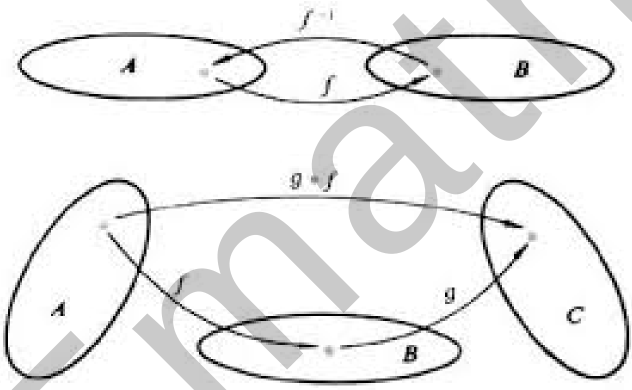
值域： X 中元素 x 的像全体 $R_f = \{y \in Y \mid \exists x \in X, f(x) = y\} \subset Y$



单射：逆像具有惟一性，即若对于 $x_1 \neq x_2, (x_1, x_2 \in X)$ ，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称 f 为**单射**

满射：如果映射 f 的值域等于 Y ，则称 f 为**满射**

双射（一一对应）：既是单射又是满射的映射 f



逆映射、复合映射示意图

逆映射：

设 $f: X \to Y$ 是**单射**，每个 $y \in R_f$ 的逆像 x 是惟一确定的，从而对应关系

$$\begin{aligned} f^{-1}: R_f &\to X \\ y &\mapsto x(f(x) = y) \end{aligned}$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射，称为 f 的**逆映射**

复合映射：

设有如下两个映射

$$\begin{aligned} g: X &\to U_1 \\ x &\mapsto u = g(x) \end{aligned} \quad 和 \quad \begin{aligned} f: U_2 &\to Y \\ u &\mapsto y = f(u) \end{aligned}$$

如果 $R_g \subset U_2 = D_f$ ，即 g **的值域包含于** f **的定义域**，就可以构造 f 和 g 的**复合映射**如下

$$
\begin{aligned}
f\circ g: X &\to Y \\
x &\mapsto y=f(g(x))
\end{aligned}
$$

一元实函数：定义域和值域都是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集的映射。（函数是定义域和值域都为数集的特殊映射）

初等函数

基本初等函数：以下6类函数统称为基本初等函数

1. 常数函数： $y=c$；
2. 幂函数： $y=x^a(a\in\mathbb{R})$；
3. 指数函数： $y=a^x(a>0\text{ 且 }a\neq 1)$；
4. 对数函数： $y=\log_a x(a>0\text{ 且 }a\neq 1)$；
5. 三角函数： 如 $y=\sin x$， $y=\cos x$， $y=\tan x$， $y=\cot x$ 等;
6. 反三角函数：如 $y=\arcsin x$， $y=\arccos x$， $y=\arctan x$ 等.

初等函数：由基本初等函数经过**有限次**四则运算与复合运算所产生的函数

函数的表示

分段表示：将定义域划分为若干（可以是有限，甚至无限）不相交的子集，在每个子集上分别表示，如

设 $A\cap B=\varnothing$， $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是分别定义在 A 和 B 上的函数，则

$$
f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in A\\ \psi(x), & x\in B\end{cases}
$$

是定义在集合 $A\cup B$ 上的函数

显式表示：形如 $y=f(x)$，因变量 y 单独放在等式的一边，另一边只含自变量 x

隐式表示：通过方程 $F(x,y)=0$ 来确定变量 y 与 x 之间函数关系（并非所有这样的方程都能确定函数关系，详见隐函数基本定理），如 $x^2+y^2=1, x\in[-1,1]$

参数表示：通过引入参数 t 建立 t 与 x 、 t 与 y 之间的函数关系以间接地确定 x 与 y 之间的函数关系，即

$$
\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in[a,b]
$$

函数的简单特性

有界性：若存在常数 m 和 M 使函数 f 满足

$\forall x\in D, m\leq f(x)\leq M$ （此条件也可以改为 $|f(x)|\leq M, \forall x\in D$，两种定义等价），

则称 f 在 D 上**有界**， m 称为**下界**而 M 称为**上界**

单调性：对任意 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时成立 $f(x_1)\le f(x_2)$，则称 f 在 D 上**单调增加**（小于等于号改为严格小于号时称为**严格单调增加**）；不等号反向时称 f 在 D 上**（严格）单调减少**

对称性：设 f 的定义域 D 关于 $x_0\in D$ 对称，那么对任意的 $x\in D$，$2x_0-x$ 和 x 是实数轴上关于 x_0 对称的两个数

1. **中心对称**：若

$$\forall x\in D, f(2x_0-x)=2A-f(x)\,,$$

即关于 x_0 对称的两个位置上 f 的函数值关于 A 对称，此时 f （的图像）关于点 (x_0,A) （中心）**对称**；特别地若 $x_0=0$ 而 $A=0$，关系式成为 $f(-x)=-f(x)$，此时称 f 是**奇函数**

2. **轴对称**：若

$$\forall x\in D, f(2x_0-x)=f(x)\,,$$

即关于 x_0 对称的两个位置上 f 的函数值相等，此时 f （的图像）关于直线 $x=x_0$ （轴）**对称**；特别地若 $x_0=0$，关系式成为 $f(-x)=f(x)$，此时称 f 是**偶函数**

周期性：若存在常数 $T>0$ 使得

$$\forall x\in D, f(x+T)=f(x)\,,$$

则称 f 是**周期函数**而 T 为其**周期**，若 f 的所有周期有最小值，则称此最小值为**最小正周期**

并非所有周期函数都有最小正周期，如以下的重要例子**Dirichlet函数**：

$$D(x)=\begin{cases}0,\ x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\\1,\ x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

它以任何正有理数为周期，故而不存在最小正周期

不等式

此处介绍两个简单但在数学分析及其他分支中有广泛用途的重要不等式：

三角不等式：对于任意实数 a 和 b，都有

$$\big|\,|a|-|b|\,\big|\le|a+b|\le|a|+|b|$$

证明思路：将要证的不等式两边平方，再利用 $-|a||b|\le ab\le|a||b|$ 进行比较

平均值不等式：对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\dots,a_n$，有

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\ge\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

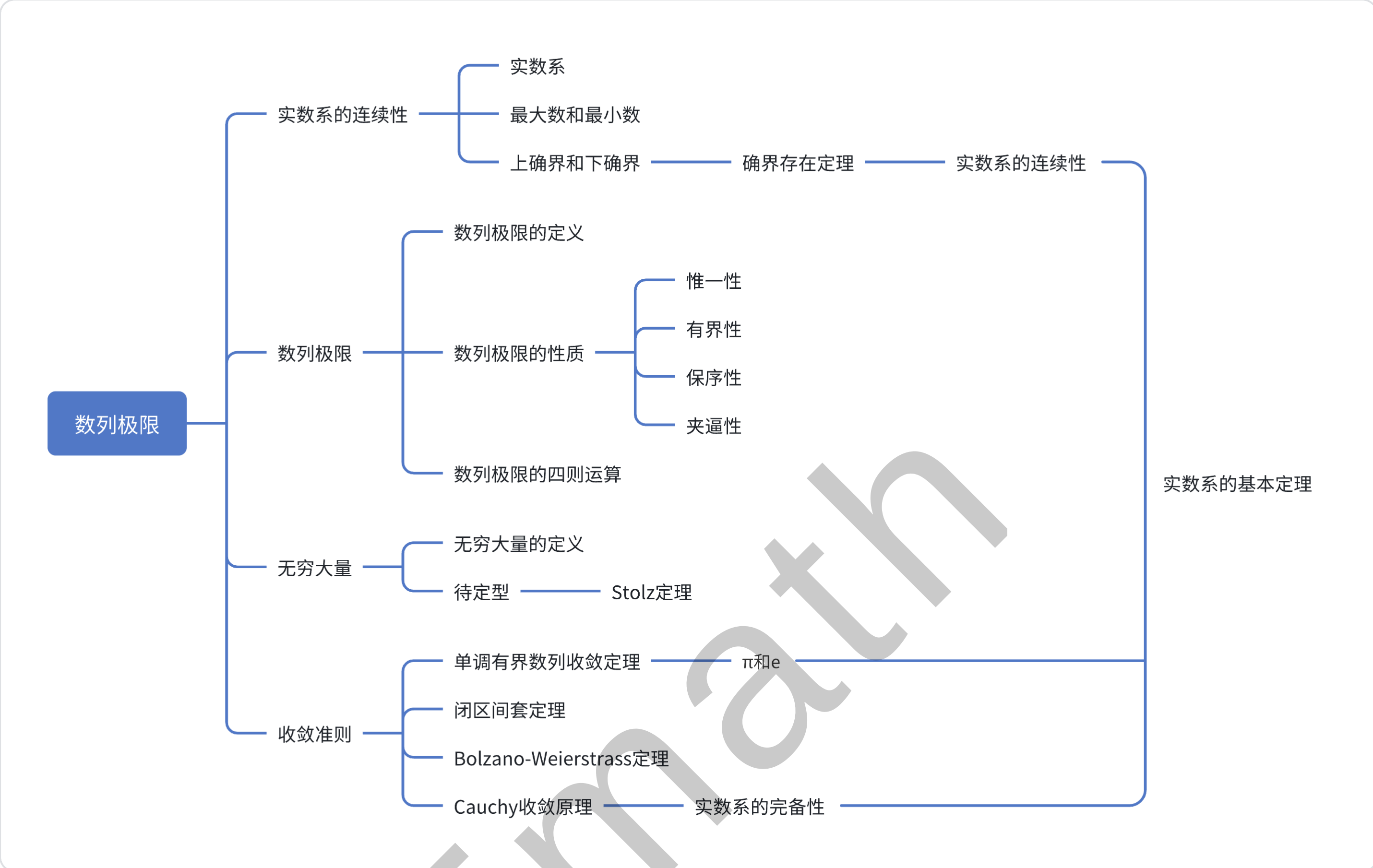
等号成立当且仅当 $a_1,\dots,a_n$ 全部相等，从左至右分别称为 $a_1,\dots,a_n$ 的**算术平均值，几何平均值，调和平均值**

此不等式表明算术平均值大于等于几何平均值，几何平均值大于等于调和平均值

证明思路：只要证第一个不等式，再用 $1/a_i$ 替换 a_i 即得第二个不等式

对于第一个不等式，$n=2^k$ 时是基本不等式 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 的直接推论；$2^{l-1}<n<2^l$ 时，补上 (2^l-n) 个 $\bar{a}=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 再应用前面情形并整理即得结论

第二章 数列极限



实数系的连续性

实数系

实数系具有连续性，这是分析学的基础。正是有了连续性，实数系成为数学分析研究的目标。直观的理解是，实数系在数轴上铺满了，没有空隙，这是有理数集，整数集所不具有的。连续性在分析学中有多种相互等价的表述方式，会在后续更详细的介绍。

最大数与最小数

最大（小）数：设 $S\subset\mathbb{R}$ 是一个数集，如果 $\exists\xi\in S$，使得 $\forall x\in S$，都有 $x\leq\xi$ （或 $x\geq\xi$），则称 ξ 是 S 的**最大数**（或**最小数**）

上确界与下确界

一个数集未必有最大数或最小数，即使这个集合是有界的，如 $(-1,1)$。但如下定义的上（下）确界对于有界集合来说总是存在的：

上确界：设 $S\subset\mathbb{R}$ 是一个非空数集，且有上界，S 的上界全体的最小数称为 S 的**上确界**

下确界：设 $S\subset\mathbb{R}$ 是一个非空数集，且有下界，S 的下界全体的最大数称为 S 的**下确界**

为了说明上述定义是良定义的（即 S 非空有上界时，上界全体总有最小数），需要证明如下的定理

确界存在定理（实数系连续性定理）：非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界，且确界若存在必惟一

证明方法：（1）实数的唯一小数表示；（2）戴德金分割.

可以从几何上来理解确界存在定理，如果实数全体不能布满整条数轴而有“空隙”，那么“空隙”左边的数集就没有上确界，“空隙”右边的数集就没有下确界. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 在这一点上体现出与实数集 $\mathbb{R}$ 完全不同的性质，如 $\{x|x^2<2\}\cap\mathbb{Q}$ 没有有理数上确界，这表明有理数集在数轴上有“空隙”，但这个集合有实数上确界.

数列极限

数列与数列极限

极限的朴素概念：随着某种过程（如数列下标 n 增大），某个与这个过程相关的量（如数列的第 n 项）与某个常数之间的“差距”越来越小，如古人为了求圆周率 π，采用单位圆的内接正 n 边形的半周长去逼近，只要 n 足够大，半周长与圆周率之间的误差就可以足够小

极限的严格定义：

> 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是一个实数，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，成立

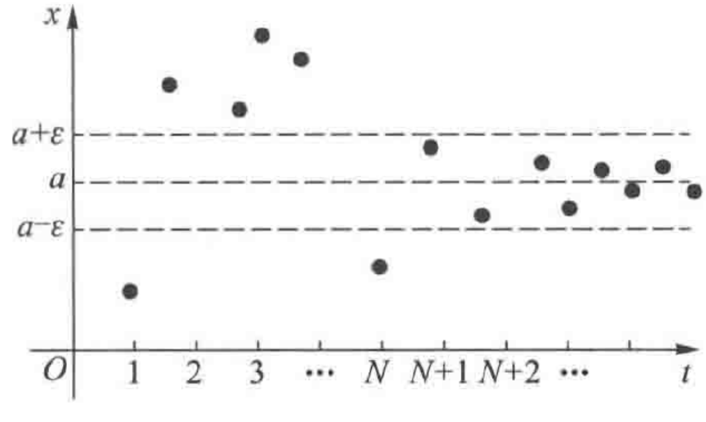
$$|x_n-a|<\varepsilon\,,$$

则称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 a （或 a 是 $\{x_n\}$ 的**极限**），记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\,(\text{或 }x_n\to a(n\to\infty)\,).$$

如果这样的 $a\in\mathbb{R}$ 不存在，则称 $\{x_n\}$ **发散**

如果把数列 $\{x_n\}$ 看成正整数集 $\mathbb{N}^+$ 上的函数 $x=f(t),t\in\mathbb{N}^+$，$\{x_n\}$ 收敛到 a 实际上就是说，无论下图中的上下两条横线如何收缩，数列一定会从某一项开始全部落在这两条线之间.



从定义可以看出数列极限是否存在与数列的前面有限项是无关的，在考虑极限行为时可以不考虑前面有限项.

无穷小量：极限为0的数列（无穷小量是一个变量而非常量，不能把无穷小量认为是很小的量或者是0）

一些重要极限：

1. 当 $0<|q|<1$ 时，$\{q^n\}$ 是无穷小量；
2. 对 $a>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$；
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1(k\in\mathbb{N}^+)$；
4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a$.

数列极限的性质

1. **惟一性**：极限存在则必惟一；
2. **有界性**：收敛数列必有界；
3. **保序性**：设 $x_n\to a, y_n\to b(n\to\infty)$ 且 $a<b$，则存在 N 使 $n>N$ 时成立 $x_n<y_n$；
4. **夹逼性**：若三个数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 从某项开始满足 $x_n\le y_n\le z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

夹逼法可以用于求数列的极限，如

- 设 $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，则 $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}<x_n<\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$，又 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}},\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\to 0(n\to\infty)$，可知 $x_n\to 0(n\to\infty)$.
- 设 $a_1,\ldots,a_p\ge 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+\cdots+a_p^n)^{\frac{1}{n}}=\max\limits_{1\le i\le p}\{a_i\}$，这是因为（下设 a_1 是最大的那一个）
$$a_1=(a_1^n+0+\cdots+0)^{\frac{1}{n}}\le(a_1^n+\cdots+a_p^n)^{\frac{1}{n}}\le(pa_1^n)^{\frac{1}{n}}=a_1\sqrt[n]{p},$$

而 $\sqrt[n]{p}\to 1(n\to\infty)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+\cdots+a_p^n)^{\frac{1}{n}}=a_1=\max\limits_{1\le i\le p}\{a_i\}$

数列极限的四则运算

极限可以进行四则运算，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha a+\beta b$ （α,β 为常数）；
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$；
3. 当 $b\ne 0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=\dfrac{a}{b}$ （$b\ne 0$ 表明 $\{y_n\}$ 只有有限项不为0，故 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 只有有限项无定义，不影响极限行为）

无穷大量

发散的数列中有一类是通项（或其相反数、绝对值）“无限”增大的，如 $\{n^2\},\{(-2)^n\},\{-10^n\}$，这一类数列与 $\{(-1)^n\}$ 这种发散的数列有根本区别，本节单独讨论这种数列.

无穷大量

无穷大量：若对于任意给定的 $G>0$，可以找到正整数 N，使得当 $n>N$ 时成立 $|x_n|>G$，则称数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$。符号表述法为：$\forall G>0, \exists N, \forall n>N: |x_n|>G$

正（负）无穷大量：无穷大量 $\{x_n\}$ 从某一项开始都是正的（或负的），则称其为**正无穷大量（或负无穷大量）**，统称为**定号无穷大量**，分别记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$（或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$）

无穷大量与无穷小量的关系：设 $x_n\neq 0$，则 $\{x_n\}$ 是无穷大量的充分必要条件是 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小量

无穷大量的运算：

1. 加减：
   a. 同号无穷大量之和仍然是该符号的无穷大量，即
   $$(+\infty)+(+\infty)=+\infty,(-\infty)+(-\infty)=-\infty$$
   b. 异号无穷大量之差是无穷大量，其符号与被减无穷大量的符号相同，即
   $$(+\infty)-(-\infty)=+\infty,(-\infty)-(+\infty)=-\infty$$
   c. 无穷大量与有界量的和与差都仍然是无穷大量
2. 乘除：
   a. 同号无穷大量之积为正无穷大量，异号无穷大量之积为负无穷大量，即
   $$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty,(-\infty)\cdot(-\infty)=-\infty,(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$$
   b. $\{x_n\}$ 是无穷大量，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b\neq 0$，则 $\{x_n y_n\}$ 与 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 都是无穷大量

待定型

上面的无穷大量的运算中似乎还有一部分情况未被考虑，这部分情况便是待定型

待定型：形如 $\infty\pm\infty,(+\infty)+(-\infty),(+\infty)-(+\infty),0\cdot\infty,\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},1^{\infty}$ 等的极限，其结果可以是收敛，也可以是无穷大量，也可以发散且不是无穷大量，下面介绍的**Stolz定理**为处理某些类型的待定型提供了很大的方便

Stolz定理：设 $\{y_n\}$ 是**严格单调增加**的正**无穷大量**，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a\quad(a\text{ 可以是有限量，}+\infty\text{ 或 }-\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$$

Stolz定理可以看作离散版本的洛必达法则（详见第五章），即若差商的极限存在，那么商的极限等于差商的极限，使用时要注意以下几点：

1. **分母必须是单调的**（可以改成单调减少的负无穷大量，添上一个负号即可），严格单调性是为了保证不会出现无限次 $y_n - y_{n-1} = 0$ 的情形，若没有严格单调性可能会导致数列 $\left\{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ 有无限多项无定义，无法谈极限行为，因此严格单调性实际上可以减弱为单调且只有有限项 $y_n = y_{n-1}$
2. **定理的逆定理不成立**，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = a$ 无法推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$，如 $x_n = (-1)^n, y_n = n$，$\dfrac{x_n}{y_n} \to 0$ 但 $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 2\cdot(-1)^n$ 极限不存在
3. **即使差商的极限不存在（且不是正负无穷），也不能说明商的极限不存在**，反例同上
4. **定理中的 a 不可以是不定号无穷大**，如 $x_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^n n, y_n = n$，$\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = (-1)^n n \to \infty$，但实际上 $x_n = \begin{cases} -k, n = 2k \\ k, n = 2k-1 \end{cases}$，$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 的奇数项收敛到 $\dfrac{1}{2}$ 而偶数项收敛到 $-\dfrac{1}{2}$，因而 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 发散

收敛准则

这一节我们将详细探讨数列有界性与收敛性的关系。收敛极限必有界，有界数列不一定收敛，那么：

1. 对有界数列加上什么条件，可以保证它必定收敛？(单调有界数列收敛定理)
2. 若不对有界数列加上什么条件，则能得到怎么样的结论？(Bolzano-Weierstrass定理)

单调有界数列收敛定理

对于第一个问题，我们给出这样的答案：

单调有界数列收敛定理：单调有界数列必定收敛

证明思路：直接利用确界存在定理，单调增有上界的数列必有上确界，再由上确界定义即得该数列收敛到其上确界

因此有界性+单调性我们即可得到收敛性，这样我们可以从数列本身内在的性质去研究收敛性（这对于一些难以计算判断的数列来说是一个途径），从而得以进一步利用极限运算的性质得到其相应的极限

下面介绍一些单调有界数列收敛定理的应用：

利用单调有界数列必定收敛的性质，可以通过数列极限导出**两个重要的无理数 π 和 e**

1. 设单位圆内接正 n 边形的半周长为 L_n，则 $L_n = n\sin\dfrac{180^\circ}{n}$，且 L_n 应该收敛于单位圆的半周长（用折线逼近曲线长度前提是曲线可求长，此处只是直观理解，但 L_n 确实是收敛的），实际上由 L_n 单调增加有上界就可以严格地证明 $\{L_n\}$ 是收敛的，收敛的极限就定义为 π，即

$$\pi := \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180^\circ}{n}$$

2. 数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增加，而 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减少（给 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 乘一个1，再利用几何平均小于等于算术平均），又由于总有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ，可知前者有上界而后者有下界，故二者都收敛，再由二者对应项比值为 $1+\frac{1}{n} \to 1$ ，由极限的四则运算可知二者收敛于同一极限，定义此极限为 e ，即

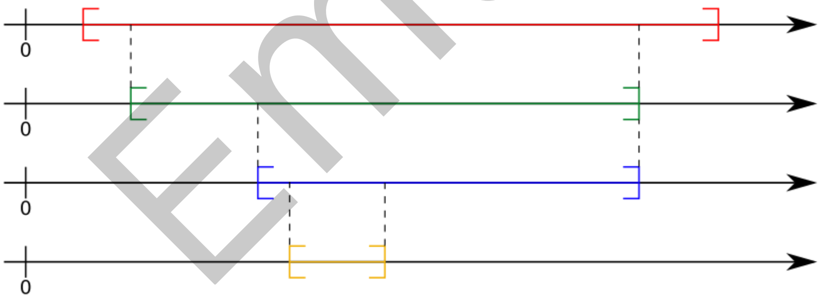
$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

用单调有界数列收敛定理还可以导出**一些重要数列结果**：

- $a_n = 1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$ ，则 $\{a_n\}$ 在 $p>1$ 时收敛，在 $p\le 1$ 时发散到 $+\infty$
- $b_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ ，则 $\{b_n\}$ 收敛，极限称为Euler常数，这表明调和级数 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 增长的速度和 $\ln n$ 差不多
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2$ （上一条的直接推论）

闭区间套定理

闭区间套：如果一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足条件（1） $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n], n=1,2,3,\cdots$ ；（2） $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ ，则称这列闭区间形成一个闭区间套.



闭区间套定理：如果 $\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则存在惟一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n,b_n]$ ，且 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

证明思路：利用 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是单调有界数列，因此收敛，再利用极限的运算得到两数列的收敛极限（ξ 的存在性），最后利用极限的夹逼性即得 ξ 的唯一性

Bolzano-Weierstrass定理

子列：设 $\{x_n\}$ 是一个数列，而

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

是一列**严格单调增加**的正整数，则

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

也形成一个数列，称为数列 $\{x_n\}$ 的**子列**，记为 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$

由子列的定义可以很容易看出，一个收敛数列的任意子列都收敛，且极限与原数列相同，从而要判断一个数列发散，只需要找一个子列极限不存在，或者是两个子列收敛到不同的极限即可

下面回答一开始提出的第二个问题：如果一个数列仅仅只是有界，能得到什么结论？

Bolzano-Weierstrass定理（致密性定理）：有界数列必有收敛子列

证明思路：利用闭区间套定理，对于一个有界数列 $\{x_n\}$，可以用二分法构造一个闭区间套，使得此闭区间套的所有闭区间都包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，再利用闭区间套定理得到此闭区间套的极限 ξ，再从闭区间套的每个闭区间取出 $\{x_n\}$ 的一项构成一个子列（因为每个闭区间有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，总可以取到下标递增的子列），这个取出的子列自然收敛到 ξ

当数列无界时，也有相应结论：设 $\{x_n\}$ 是一个无界数列，则必存在无穷大量子列（用无界数列的定义，大于1的有无穷多项，大于2的有无穷多项，...，再从中取子列即可）

Cauchy收敛原理

此部分内容，在泛函分析中距离空间的完备性有更详细介绍

单调收敛数列收敛定理只给出了收敛性的一个充分而非必要的条件，我们希望能找到收敛的充要条件

基本数列：如果数列 $\{x_n\}$ 具有以下特性: 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N 使得当 $n,m>N$ 时成立

$|x_n-x_m|<\varepsilon$，则称数列 $\{x_n\}$ 是一个基本数列

基本数列的有界性：基本数列必定有界

证明思路：由于存在正整数 N 使得当 $n,m>N$ 时成立 $|x_n-x_m|<\varepsilon$，因此可以得到 $\forall n>N$，$|x_n-x_{N+1}|<1$，即后面无限项的大小可由 $N+1$ 项的大小控制，再取前 $N+1$ 项的最大值，即得整个基本数列的最大值

Cauchy收敛原理：数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是：$\{x_n\}$ 是基本数列

证明思路：必要性：利用基本数列的定义结合三角不等式放缩即得；充分性：基本数列必定有界，由Bolzano-Weierstrass定理，可知基本数列 $\{x_n\}$ 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$。再由基本数列 $|x_n-x_m|<\varepsilon$，替换 $\{x_m\}$ 为 $\{x_{n_k}\}$，即得 $\{x_n\}$ 收敛

实数系的完备性：Cauchy收敛原理表明，实数构成的基本数列必存在实数极限，这被称为实数系的完备性

实数系具有完备性，这说明了实数系本身的良好性质，这对于研究极限行为非常有好处（这点会在泛函分析中的进一步介绍）。完备性的一个常见的应用是：不动点定理（压缩映像原理）

不动点定理：$T(x_n)=x_{n+1}$，数列 $\{x_n\}$ 满足：$|x_{n+1}-x_n|=|T(x_n)-T(x_{n-1})|\leqslant k\,|x_n-x_{n-1}|\,,0<k<1,n=2,3,\cdots$，则存在唯一的 $\xi\in\{x_n\}$，T（ξ）$=\xi$，即 $\{x_n\}$ 收敛至 ξ

证明思路：利用三角不等式，证明 $|x_n-x_m|$ 是基本数列，从而收敛

实数系的基本定理

本节中我们通过之前的实数系**连续性**定理——确界存在定理，逐步证明了单调有界数列收敛定理，闭区间套定理，Bolzano-Weierstrass定理以及实数的**完备性**定理——Cauchy收敛原理

确界存在定理

$\Downarrow$

单调有界数列收敛定理

$\Downarrow$

闭区间套定理

$\Downarrow$

Bolzano-Weierstrass 定理

$\Downarrow$

Cauchy 收敛原理

也就是说，实数系的连续性可以推出实数系的完备性，下面我们证明实数系的完备性也可以推出连续性，从而**在实数系中，连续性与完备性是等价的**

证明思路：Cauchy收敛原理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理 $\Rightarrow$ 确界存在定理

1. Cauchy收敛原理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 为闭区间套，则对 $m > n$ ，有 $a_m - a_n < b_m - a_n < b_n - a_n \to 0$ ，从而闭区间套的左端点 $\{a_n\}$ 是基本数列（右端点 $\{b_n\}$ 同理），故二者均收敛，又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ，可知二者极限相等，记为 ξ ，由极限的保序性可知 $a_n \le \xi \le b_n, \forall n$ ，从而 ξ 落在所有的闭区间中，惟一性易证

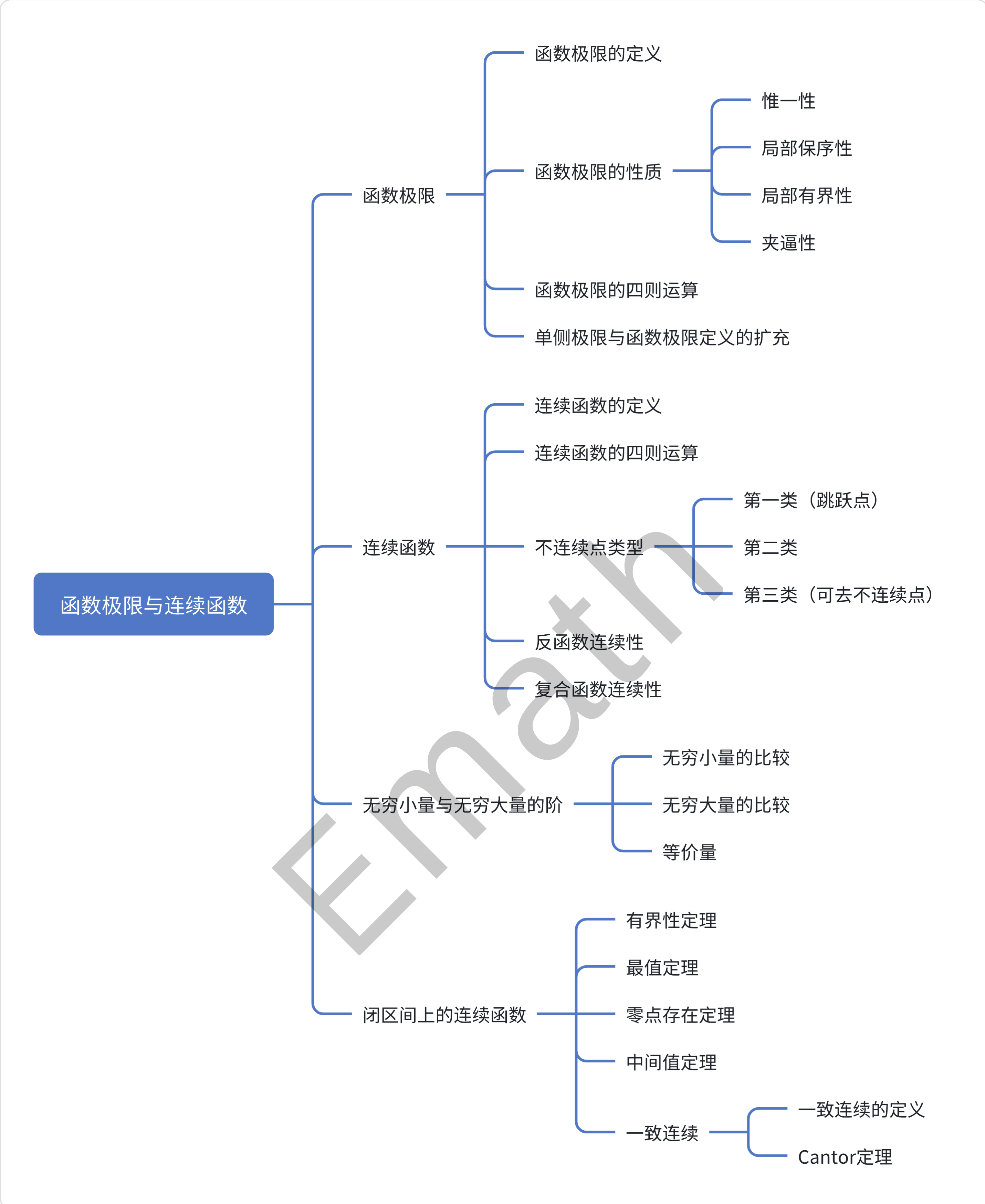
2. 闭区间套定理 $\Rightarrow$ 确界存在定理

设 S 非空有上界，而 T 为其上界全体，任取 $a_1 \in S, b_1 \in T$ ，对 $[a_1, b_1]$ 使用二分法，得到一个左端点始终在 S 中而右端点始终在 T 中的闭区间套（以区间中点是否落在 T 中进行分类讨论），再利用闭区间套定理得到 ξ 落于所有的闭区间中，根据定义很快就可以导出 ξ 是 S 的上确界

至此我们证明了上述五个定理是等价的，它们都可以称作**实数系的基本定理，**是本章最重要的内容

五个定理等价，是实数系特有的，揭示了实数系的良好条件，也因此成为研究极限行为的良好对象。实际上其他空间也会存在着这些定理，还有连续性和完备性，但不一定等价，这在泛函分析中会有进一步的介绍

第三章 函数极限与连续函数



本章中规定记号如下：

以 x_0 为心， r 为半径的**邻域**

$$O(x_0, r) := (x_0 - r, x_0 + r)\ ,$$

去心邻域

$$O(x_0,r)\backslash\{x_0\} := (x_0-r,x_0)\cup(x_0,x_0+r)$$

函数极限

函数极限的定义

在数列极限的定义中，数列的下标 n 是“离散”地增大的（每次增加1），去看数列的行为。相比之下，本节要讨论的函数极限则是让函数的自变量 x “连续”地变化，再看函数值的行为，下面给出严格定义

函数极限：设函数 f 在点 x_0 的某个**去心邻域**中有定义，如果存在 $A\in\mathbb{R}$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立

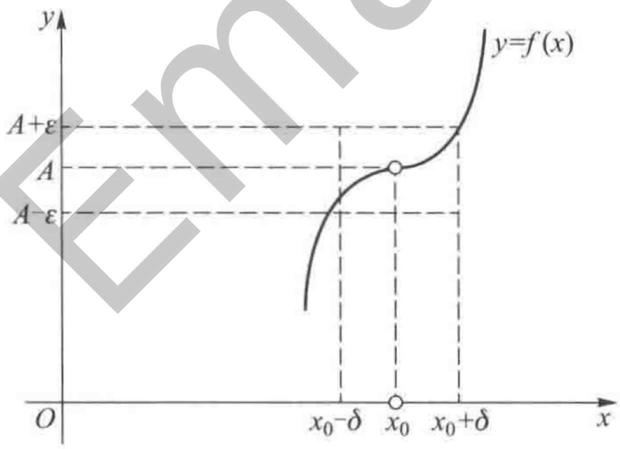
$$|f(x)-A|<\varepsilon\,,$$

则称 A 是函数 f 在点 x_0 的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\,，\text{或} f(x)\to A(x\to x_0)$$

需要注意的是：函数极限的定义中只需要 f 在 x_0 的去心邻域中有定义，故函数 f 在 x_0 处的极限情况（是否有极限，或者极限值是多少）与 f 在 x_0 的取值、甚至 f 在 x_0 处是否有定义都无关！

如下图，函数 f 在 x_0 以 A 为极限说的就是，在 y 轴上任取 A 的 ε 邻域 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$，在 x 轴上总能找到 x_0 的去心邻域 $O(x_0,r)\backslash\{x_0\}$，在这个去心邻域的函数值总落在 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 中，也就是说，无论 A 的 ε 邻域如何收缩，只要离 x_0 “足够近”，函数值就能落在 A 的 ε 邻域中



函数极限的性质

函数极限的性质与数列极限类似，因为函数极限是逐点定义的，所以只能得到函数局部（在某个去心邻域）的性质

1. **惟一性**：函数极限若存在必惟一
2. **局部有界性**：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 $\delta>0$， f 在 $O(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}$ 中有界
3. **局部保序性**：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A>B$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立 $f(x)>g(x)$

4. **夹逼性**：若存在 $r>0$，使得当 $0<|x-x_0|<r$ 时，成立 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

用夹逼性可以导出如下的重要极限（$\sin x<x<\tan x,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$）：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

函数极限的四则运算

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha A+\beta B$（$\alpha,\beta$ 是常数）
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{A}{B}$（$B\neq 0$）

函数极限与数列极限的关系

函数极限的定义中，自变量与因变量的变化是“连续”的，能否将其离散化？下面介绍的**Heine定理**搭建了二者之间的桥梁

Heine定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于任意满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，且 $x_n\neq x_0,\forall n$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

Heine定理表明函数在 x_0 点有极限 A 当且仅当自变量“以任何方式”趋于 x_0 时，函数值都趋于 A，这一性质常用于证明函数极限不存在，只需要找到两列点，它们对应的函数值序列收敛到不同值即可，如 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没有极限，只需要取 $\{x_n^{(1)}\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ 与 $\{x_n^{(2)}\}=\left\{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ 即可

单侧极限

需要分别研究函数在某点单侧的性质时，就需要引入单侧极限的概念

左（右）极限：设 f 在 $(x_0-\rho,x_0)$（或 $(x_0,x_0+\rho)$）上有定义（$\rho>0$）. 若存在 $A\in\mathbb{R}$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $-\delta<x-x_0<0$（或 $0<x-x_0<\delta$）时，成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 是函数 f 在点 x_0 的**左极限**（或**右极限**），记为

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0-)=A,\ \text{或}\ f(x)\to A(x\to x_0-)$$

$$(\text{或}\lim_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0+)=A,\ \text{或}\ f(x)\to A(x\to x_0+))$$

函数极限定义的扩充

本节中函数极限是对 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 定义的，实际上自变量的极限过程有六种情况：$x\to x_0$ 、$x\to x_0-$ 、$x\to x_0+$ 、$x\to\infty$ 、$x\to-\infty$ 、$x\to+\infty$ ，函数值的极限有四种情况：$f(x)\to A$ 、$f(x)\to\infty$ 、$f(x)\to+\infty$ 、$f(x)\to-\infty$ ，回顾 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 定义的 $\varepsilon-\delta$ 语言：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta):|f(x)-A|<\varepsilon$$

可以看出 $\forall\varepsilon>0,\ldots:|f(x)-A|<\varepsilon$ 是描述函数值的极限 $f(x)\to A$ 的，而 $\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$ 是描述自变量的极限过程 $x\to x_0$ 的，对于上述所提到的情况，分别有相应的表述方式：

$$\begin{aligned}
&f(x)\to A: &&\forall\varepsilon>0,\ldots:|f(x)-A|<\varepsilon\\
&f(x)\to\infty: &&\forall G>0,\ldots:|f(x)|>G\\
&f(x)\to+\infty: &&\forall G>0,\ldots:f(x)>G\\
&f(x)\to-\infty: &&\forall G>0,\ldots:f(x)<-G
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&x\to x_0: &&\ldots,\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta),\ldots\\
&x\to x_0-: &&\ldots,\exists\delta>0,\forall x(-\delta<x-x_0<0),\ldots\\
&x\to x_0+: &&\ldots,\exists\delta>0,\forall x(0<x-x_0<\delta),\ldots\\
&x\to\infty: &&\ldots,\exists X>0,\forall x(|x|>X),\ldots\\
&x\to-\infty: &&\ldots,\exists X>0,\forall x(x<-X),\ldots\\
&x\to+\infty: &&\ldots,\exists X>0,\forall x(x>X),\ldots
\end{aligned}$$

由此就可以举一反三对任意一种函数极限写出相应的定义

在使用扩充后的函数极限定义时，要注意以下几点：

1. 由于不定号无穷大 ∞ 无法与任何有限数比大小，所以函数极限的局部保序性与夹逼性无法适用，但对于 $+\infty$ 和 $-\infty$ ，承认 $-\infty<A<+\infty$ 后，性质仍然适用；而局部有界性只对于极限是有限数的情形成立
2. 函数极限的运算涉及待定型时需要具体问题具体讨论，不能直接进行运算，只要不是待定型都可以直接进行四则运算
3. 对不同的函数极限，分别有相应的Heine定理，叙述都是类似的

与数列极限类似，函数极限也有相应的Cauchy收敛原理，下面仅举一例给出定理：

Cauchy收敛原理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得对一切 $x',x''\in O(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}$ ，成立

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

证明思路：必要性由三角不等式，充分性用相应的Heine定理

最后给出两个重要的极限结果：

1. 多项式之商的极限（趋于无穷时看最高次项，趋于0时看最低次项）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{b_k}, & k=j,\\ 0, & k>j,\\ \infty, & k<j.\end{cases}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ （利用 $[x]\leq x<[x]+1$ 与夹逼性，从数列极限导出函数极限，其中 $[x]$ 表示对 x 向下取整）

连续函数

本节讨论函数的连续性，其概念源于对函数图像的直观分析，即图像上各点相互“连接”而不出现“间断”，形成了曲线“连续”的外观. 用分析的观点来看，函数 f 在 x_0 处是否具有“连续”特性，就是指当 x 在 x_0 附近作微小变化时，函数值 $f(x)$ 是否也在 $f(x_0)$ 附近作微小变化，借助函数极限的定义就可以给出函数连续性的定义

连续函数的定义

此处连续性的定义与点集拓扑学中的连续映射定义有较大区别，但本质上是等价的

连续：设 f 在 x_0 的某个邻域中有定义，且成立 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 f 在 x_0 **连续**，x_0 称为 f 的**连续点**

连续是一个局部概念，如果 f 在一个开区间 I 逐点连续，则称 f 在 I 上连续. 对于一般的区间，引入**单侧连续**的概念后，就可以类似地定义函数在区间上的连续性（若端点是闭的，则加上单侧连续性即可）

左（右）连续：$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$ （或 $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)$）

若 f 在 (a,b) 连续，而在 a 右连续，在 b 左连续，则称 f 在 $[a,b]$ 上连续

连续函数的四则运算

由函数极限的四则运算可以直接导出连续函数的四则运算：

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$，则

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)$ （α,β 是常数）
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=f(x_0)g(x_0)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ （$g(x_0)\neq 0$）

不连续点类型

由连续性定义可知，函数在一点连续当且仅当函数在这一点的两个单侧极限都存在且等于该点的函数值，对于不符合这一条件的点（也称**不连续点**或**间断点**），可以根据单侧极限的情况进行分类：

1. 第一类不连续点（**跳跃点**）：左、右极限都存在，但不相等. 体现在函数图像上就是图像发生了“跳跃”，如符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 有第一类不连续点0
2. 第二类不连续点：左、右极限至少有一个不存在（“极限”是无穷也算不存在），如 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，$f(0-)=0$ 而 $f(0+)=+\infty$，故0是 f 的第二类不连续点
3. 第三类不连续点（**可去不连续点**）：左、右极限存在且相等，但不等于该点函数（或函数在这一点没有定义），此时可以通过修改该点函数值的方法使之在该点连续，故称为可去不连续点，如 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在0点左、右极限都是0，故0点是其可去不连续点

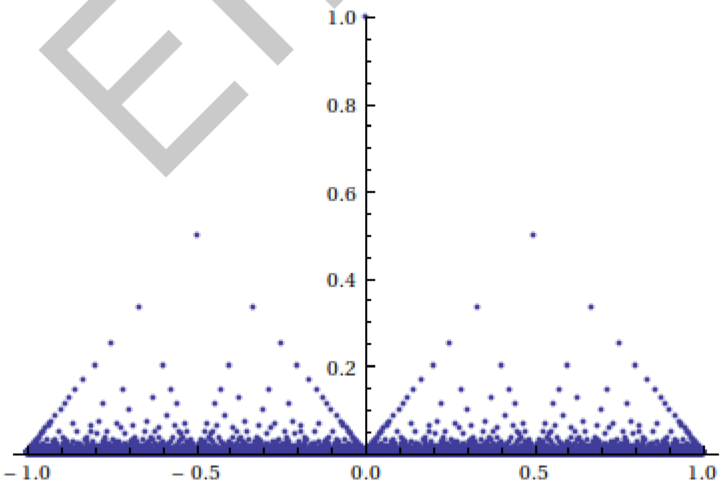
由确界存在定理可以得到如下的结论：

单调函数在每一点的左、右极限都存在，从而**单调函数的不连续点只可能是跳跃点**

下面再介绍一个重要函数——**Riemann函数**，定义如下：

$$R(x):=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}(p\in\mathbb{N}^{+},q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},p,q\text{互素}),\\ 1, & x=0,\\ 0, & x\text{是无理数},\end{cases}$$

Riemann函数在任意点的极限都是0，也就是说所有的无理点都是它的连续点，而所有的有理点都是它的可去不连续点



反函数连续性定理

反函数何时存在？如果原函数连续，反函数是否具有连续性？下面的定理给出了答案

反函数存在性定理：若 f 在 D 上严格单调，则其反函数 f^{-1} 存在，且 f^{-1} 也是严格单调的，单调性与 f 一致

反函数连续性定理：若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且严格单调增加，则其反函数 f^{-1} 在 $[f(a),f(b)]$ 上连续且严格单调增加

复合函数的连续性

因为函数的极限在经过复合之后不一定有与外层函数相同的极限行为，即使 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$ ，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ ，也不能推出 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$ ，反例容易举出，如

$$f(u)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x\neq 0,\end{cases}\quad g(x)=x\sin\frac{1}{x},$$

可知 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ ，$\lim\limits_{u\to 0} f(u)=0$ ，但 $f\left(g\left(\frac{1}{n\pi}\right)\right)=1$ ，且 $f(g(x))$ 在其余点（不包括0）都取0，显然 $f\circ g$ 在0点没有极限

（实际上，出问题的地方在于上述的内层函数 g 在 $x_0=0$ 点的任意邻域内都能取到 $u_0=0$ ，即 $g\left(\frac{1}{n\pi}\right)=0$ ，而外层函数在 u_0 不连续！故如果外层函数在 u_0 不连续，只要保证内层函数 g 不会在 x_0 的任意邻域内都能取到 u_0 ，就可以保证复合后极限存在且为 A ）

如果外层函数在 u_0 连续，那么只要内层函数有极限 u_0 ，复合极限总是成立的，也就是说

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$ ，且 $f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，那么复合函数 $f(g(x))$ 在 $x=x_0$ 处连续，特别地，**两个连续函数复合后还是连续函数**（只要保证内层函数的值域落在外层函数的定义域中即可）

在讨论了连续函数的四则运算、反函数的连续性、复合函数的连续性以后，通过证明一些简单的基本初等函数的连续性，我们就可以得到结论：**一切初等函数在其定义区间上连续**

无穷小量与无穷大量的阶

本节中涉及的计算大部分可以通过Taylor公式解决，详见第五章

与数列极限类似，在函数极限中同样也有无穷小量和无穷大量的概念

无穷小量的比较

无穷小量：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ ，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是**无穷小量**

设 $u(x),v(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是无穷小量，为了比较两者趋于零的“速度快慢”，对 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 的极限情况进行分类讨论：

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=0$ ，称 $x\to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是**高阶无穷小量**，记为

$$u(x)=o(v(x))\qquad (x\to x_0)$$

（要注意的是，上式虽然写的是等号，但实际上 $o(v(x))$ 不是一个函数，而是一个函数类，表示 $v(x)$ 的所有高阶无穷小量，故等号实际上应该是 $\in$ 符号，记成等号是为了后续的计算表示简洁）

2. 若存在 $A>0$ 使得当 x 在 x_0 的某个去心邻域中，成立 $\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right| \le A$，则称 $x \to x_0$ 时 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量，记为

$$u(x)=O(v(x)) \qquad (x \to x_0)$$

3. 若存在 $a, A>0$ 使得当 x 在 x_0 的某个去心邻域中，成立 $a \le \left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right| \le A$，则称 $x \to x_0$ 时 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是**同阶无穷小量**（显然当 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = c \neq 0$ 时二者是同阶无穷小量）
4. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1$，称 $x \to x_0$ 时 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是**等价无穷小量**，记为

$$u(x) \sim (v(x)) \qquad (x \to x_0)，或\ u(x) = (v(x)) + o(v(x)) \qquad (x \to x_0)，$$

也即等价无穷小量之间只相差一个高阶无穷小量

我们往往选取 $v(x)=(x-x_0)^k$ 作为比较的标准（$x \to \infty$ 时选取 $v(x)=\dfrac{1}{x^k}$），便于得出 $u(x)$ 作为无穷小量的确切阶数

无穷大量的比较

无穷大量：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$（或 $\pm\infty$），则称 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 是**无穷大量**（或**正、负无穷大量**）

与无穷小量相同，我们同样可以比较两个无穷大量趋于无穷大的速度，同样对 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 的极限情况进行分类讨论：

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \infty$，称 $x \to x_0$ 时 $u(x)$ 关于 $v(x)$ 是**高阶无穷大量**
2. 若存在 $A>0$ 使得当 x 在 x_0 的某个去心邻域中，成立 $\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right| \le A$，则称 $x \to x_0$ 时 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 是有界量，记为

$$u(x)=O(v(x)) \qquad (x \to x_0)$$

3. 若存在 $a, A>0$ 使得当 x 在 x_0 的某个去心邻域中，成立 $a \le \left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right| \le A$，则称 $x \to x_0$ 时 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是**同阶无穷大量**（显然当 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = c \neq 0$ 时二者是同阶无穷小量）
4. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 1$，称 $x \to x_0$ 时 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是**等价无穷大量**，记为

$$u(x) \sim (v(x)) \qquad (x \to x_0)$$

需要注意的是：在进行无穷大量阶的比较时，习惯不使用记号"o"，但仍使用记号"O"和"$\sim$"

等价量

等价量：指等价无穷小量或等价无穷大量

一些重要的等价量：

- $ln(1+x) \sim x \qquad (x \to 0)$
- $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x \qquad (x \to 0)$
- $sinx \sim x \qquad (x \to 0)$
- $1 - cosx \sim \dfrac{x^2}{2} \qquad (x \to 0)$

一个常用的结论：设一个变量是由几个相互不同阶的成分相加而成的，则当它是无穷大量时，它与阶数

最高的那个无穷大量成分等价；当它是无穷小量时，它与阶数最低的那个无穷小量成分等价

等价量在极限计算中起着举重若轻的作用，因为它可以把一些复杂函数转换为简单常见的函数，便于分析和计算。这由此**定理**给出：

设 $u(x)$ ， $v(x)$ 和 $w(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 U 上有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{v(x)}{w(x)} = 1$ （即 $v(x) \sim w(x)$ $(x \to x_0)$ ），那么：(1) 当 $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)w(x) = A$ 时， $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)v(x) = A$ （2）当 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{w(x)} = A$ 时， $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = A$

定理中的极限过程 $x \to x_0$ 可以相应地改变为 $x \to x_0+$ 、 $x_0-, \infty, +\infty, -\infty$ 等情况

需要注意的是：**等价量不是等于，而是忽略了一部分后得到的等价关系。**这一点，在计算中出现无穷小量（或无穷大量）相加或相减的时候，需要特别注意，不能不加考虑的使用等价量直接进行代换。

例如在求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 时候，直接使用等价量代换，得到 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = 0$ ，然而实际上 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$ ， $\tan x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2}$ 。然而如果我们用 $\tan x = x + o(x)$ 和 $\sin x = x + o(x)$ 进行代换，得到 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{o(x)}{x^3}$ ，虽然不能据此判断极限是否存在，但至少可以避免上面这样的错误。

闭区间上的连续函数

闭区间上的连续函数具有一些重要性质，是开区间不具有的。**本节所提到的五个闭区间上连续函数的定理在点集拓扑学中有更为一般的版本，有界性定理、最值定理、Cantor定理本质是紧集上连续函数的性质，介值性本质是连通集上函数的性质，而零点存在定理是其推论。**

有界性定理

有界性定理：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上有界

证明思路：反证无界，使用二分法，可得到一闭区间套，使得其在其中任意闭区间上都是无界的。但由闭区间套定理可知其收敛于一实数 ξ ，再由 $f(x)$ 的连续性和函数极限的局部有界性可得矛盾

最值定理

最值定理： 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上必能取到最大值与最小值，即存在 ξ 和 $\eta \in [a,b]$，对于一切 $x \in [a,b]$ 成立 $f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant f(\eta)$.

证明思路：由有界性定理可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，因此必有上下确界。再证 $f(x)$ 可以取到下确界（上确界同理）：构造函数序列逼近下确界，再利用Bolzano-Weierstrass定理和夹逼性即可证得

零点存在定理

零点存在定理： 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则一定存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

证明思路：构造集合 $V=\{x \mid f(x)<0, x\in[a,b]\}$，证明其上确界 ξ 可以在 (a,b) 中得到。首先根据 $f(x)$ 的连续性和局部保序性可以得到上确界 ξ 应在 (a,b) 中得到，再构造函数序列逼近上确界，利用函数的连续性和局部保序性反证，即可得上确界 ξ 确实能取得

中间值定理

中间值定理（介值定理）： 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则它一定能取到最大值 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ 和最小值 $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ 之间的任何一个值

证明思路：对任意的 $m<C<M$，构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-C$ 再利用零点存在定理

推论：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则它的值域是闭区间 $[m,M]$

一致连续概念

如果函数 f 在区间 X 上连续，即在 X 上每一点都连续，回顾函数 f 在 x_0 连续的定义：

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x(0<|x-x_0|<\delta): |f(x)-A|<\varepsilon\,,$$

可以发现，对于给定的 $\varepsilon>0$，每一点 $x_0\in X$ 都可以找到一个 δ，即 δ 与 x_0 和 ε 都有关，能否找到一个与 x_0 无关，对整个区间 X 都适用的 δ，使得对 $x',x''\in X$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$？这样的概念显然比在 X 上连续更强，涉及函数在 X 上的**整体性质**（逐点连续只能说明每一点的局部性质），将这一概念严格叙述如下：

一致连续：设 f 是定义在区间 X 上的函数，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 $x',x''\in X$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，则称 f 在 X 上**一致连续**

一致连续的概念比连续更强，如 $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且一致连续，因为

$$|\sin x'-\sin x''|=2\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\leq|x'-x''| \quad (|\sin x|\leq|x|)$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ 即可

一个连续但非一致连续的例子是 $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$，可以通过如下的**定理**说明：

设 f 是定义在区间 X 上的函数，则 f 在 X 上一致连续的充分必要条件是：对任何点列 $\{x_n'\},\{x_n''\}(x_n',x_n''\in X)$，只要它们满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，就成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$

定理表明 f 在 X 上一致连续当且仅当任取两列 X 中越来越接近的点，对应的函数值也越来越接近，对于 $f(x)=\frac{1}{x},x\in(0,1)$ ，取 $x_n'=\frac{1}{n},x_n''=\frac{1}{2n}$ ，两列点距离越来越近，但对应函数值之差 $f(x_n'')-f(x_n')=n$ 并非越来越近

对一般的区间，函数连续未必一致连续，但对于闭区间，有如下定理：

Cantor定理：若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上一致连续

证明思路：根据上面提到的一直连续的充分必要条件，用反证法得到两列越来越近的点，他们的函数值之差总是大于等于一个正常数 ε_0 ，又由于这两列点落于 $[a,b]$ ，有界，再利用Bolzano-Weierstrass定理得到一个收敛子列，最后用函数的连续性就可以得到矛盾

开区间 (a,b) 上的连续函数未必一致连续，加上什么条件可以得到一致连续性？关于这个问题有如下**定理**：

设 f 在开区间 (a,b) 上连续，则 f 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是：$f(a+)$ 与 $f(b-)$ 存在

证明思路：充分性通过补充定义 f 在区间端点取值，再利用Cantor定理得到；必要性由一致连续的定义与函数极限存在的Cauchy收敛原理可得

至此我们已经给出了闭区间上的连续函数的5个定理：有界性定理、最值定理、零点存在定理、中间值定理、Cantor定理，是**闭区间上连续函数最重要的分析性质**