

## 例4：武器目标分配问题

假设有4个目标，目标的价值 $A_k$ 各不相同，如下表所示，现以5枚导弹对目标进行攻击，导弹毁伤目标的概率为 $p_k = 1 - e^{-a_k x_k}$ , ( $k = 1, 2, 3, 4$ )，其中常数因子 $a_k$ 与制导精度、导弹威力、目标性质等有关，其取值见下表， $x_k$ 是向目标发射的导弹数量。试求最佳的火力分配方案，使攻击效果最佳。

目标	1	2	3	4
价值 $A_k$	8	7	6	3
因子 $a_k$	0.2	0.3	0.5	0.9

该问题为非线性整数规划问题，模型如下：

目标函数：

$$V = \max \sum_{k=1}^4 A_k (1 - e^{-a_k x_k})$$

约束条件：

$$\sum_{k=1}^4 x_k = 5$$

$x_1, x_2, x_3, x_4$  为非负整数

## 问题分析:

按照要打击的目标将火力分配划分为4个阶段，令 $s_k$ 为状态变量，表示从第1段到第k阶段分配的导弹数量。 $x_k$ 是第k阶段分配的导弹数量。则递推方程为：

$$f_k(s_k) = \max\{v_k(x_k) + f_{k-1}(s_k - x_k)\} \quad k = 1, 2, 3, 4$$

为便于计算，根据指标函数 $v_k = A_k(1 - e^{-a_k x_k})$ ，首先算出各阶段分配收益值如下：

$v_k(x_k)$ $x_k$ 值	目标1 $v_1(x_1)$	目标2 $v_2(x_2)$	目标3 $v_3(x_3)$	目标4 $v_4(x_4)$
0	0	0	0	0
1	1.45	1.81	2.36	1.79
2	2.64	3.16	3.79	2.51
3	3.61	4.15	4.66	2.81
4	4.41	4.89	5.19	2.93
5	5.06	5.44	5.51	2.97

$k=3$ 时

$$f_3(0) = \max\{v_3(0) + f_2(0)\} = 0$$

$$f_3(1) = \max\{v_3(0) + f_2(1), v_3(1) + f_2(0)\} = 2.36$$

$$f_3(2) = \max\{v_3(0) + f_2(2), v_3(1) + f_2(1), v_3(2) + f_2(0)\} = 4.17$$

$k=4$ 时

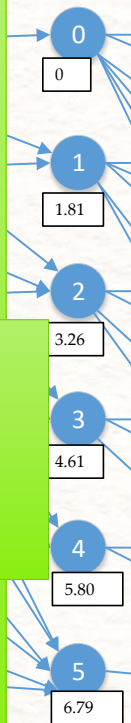
$$f_4(5) = \max\{v_4(0) + f_3(5), v_4(1) + f_3(4), v_4(2) + f_3(3), v_4(3) + f_3(2), v_4(4) + f_3(1), v_4(5) + f_3(0)\} = 8.84$$

$$f_3(5) = \max\{v_3(0) + f_2(5), v_3(1) + f_2(4), v_3(2) + f_2(3), v_3(3) + f_2(2), v_3(4) + f_2(1), v_3(5) + f_2(0)\} = 8.40$$

最优分配策略:

$$p_{1,4} = \{1, 1, 2, 1\}$$

最大战斗力为: 8.84



$k=2$ 时

$$f_2(0) = \max\{v_2(0) + f_1(0)\} = 0$$

$$f_2(1) = \max\{v_2(0) + f_1(1), v_2(1) + f_1(0)\} = 1.81$$

$$f_2(2) = \max\{v_2(0) + f_1(2), v_2(1) + f_1(1), v_2(2) + f_1(0)\} = 3.26$$

$$f_2(3) = \max\{v_2(0) + f_1(3), v_2(1) + f_1(2), v_2(2) + f_1(1), v_2(3) + f_1(0)\} = 4.61$$

$$f_2(4) = \max\{v_2(0) + f_1(4), v_2(1) + f_1(3), v_2(2) + f_1(2), v_2(3) + f_1(1), v_2(4) + f_1(0)\} = 5.80$$

$$f_2(5) = \max\{v_2(0) + f_1(5), v_2(1) + f_1(4), v_2(2) + f_1(3), v_2(3) + f_1(2), v_2(4) + f_1(1), v_2(5) + f_1(0)\} = 6.79$$