Universitat de Girona

Optimització

Maximitzar trànsit d'una xarxa de fibra òptica

Ramon Mª Ortiz, u1966653@campus.udg.edu

Sudan Wu, sudan88792@gmail.com

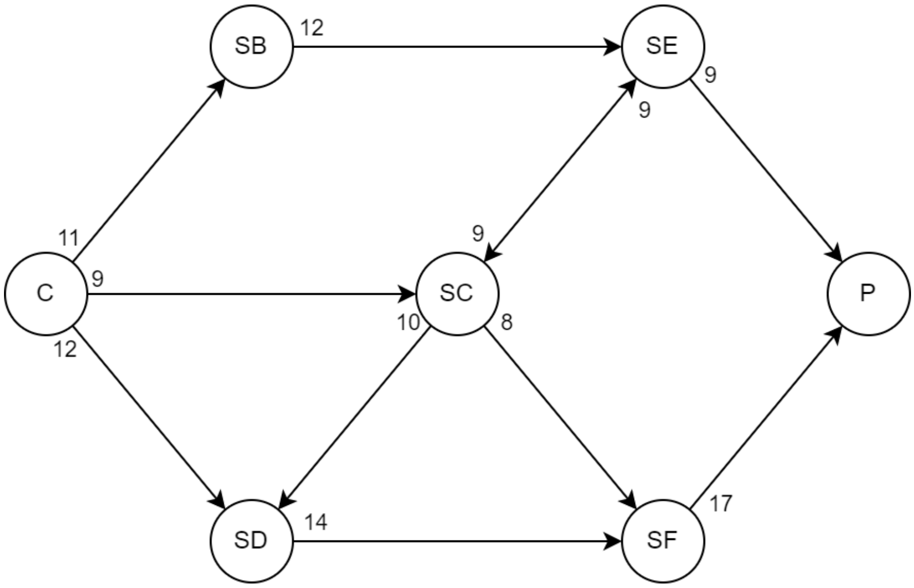
Sergi Navarro, u1966698@campus.udg.edu

22 de gener de 2023

Índex

1 Enunciat del Problema

Una xarxa de fibra òptica està dissenyada per portar la connexió des d'una central distribuïdora CatBit (node C) fins la ciutat de Planes (node P) passant per les estacions intermèdies SB, SC, SD, SE i SF. La figura mostra l'esquema d'aquesta xarxa. Els valors dels arcs (connexions unidireccionals, excepte SC-SE) representen el volum màxim (yobibytes: 1024^8) que es pot transportar per segon. Per exemple, des del node SC al node SD es poden transportar unidireccionalment com a molt 10 yobibytes/s (de SD a SC no hi connexió).



Es demana:

a Analitzeu el PL que permet decidir el flux màxim a transmetre per aquesta xarxa (*cal fer els tres apartats que s'especifica en el document de les instruccions del treball*).

b Reformuleu i trobeu la solució del PL si afegim la condició que si des del node C al node SB es transmeten més de 3 yobibytes/s, aleshores del node SC al SD s'ha de transmetre com a mínim 5 yobibytes/s.

Nota: Tot i que les restriccions de balanç de flux son de tipus "=" es recomana substituir-les per restriccions del tipus "≤" o "≥", segons convingui.

2 Resolució

a. Anàlisi del model PL

Formulació

Per definir el model, utilitzarem la notació estàndard per als problemes de flux màxim en xarxes. Farem servir les variables de decisió següents:

$$X_{ij} = \text{ Quantitat d'informació que es transmet del node "i" al node "j".}$$

$$F = \text{ Informació total que circula per la xarxa.}$$

Per simplificar la notació de les variables, farem una nova assignació de lletres als nodes de la forma següent: $\{C \to A, SB \to B, SC \to C, SD \to D, SE \to E, SF \to G, P \to P\}$. Assignem G a SF, per no confondre amb la variable F. En la figura 1 es pot veure la nova assignació de noms als nodes i com queden els noms de les variables:

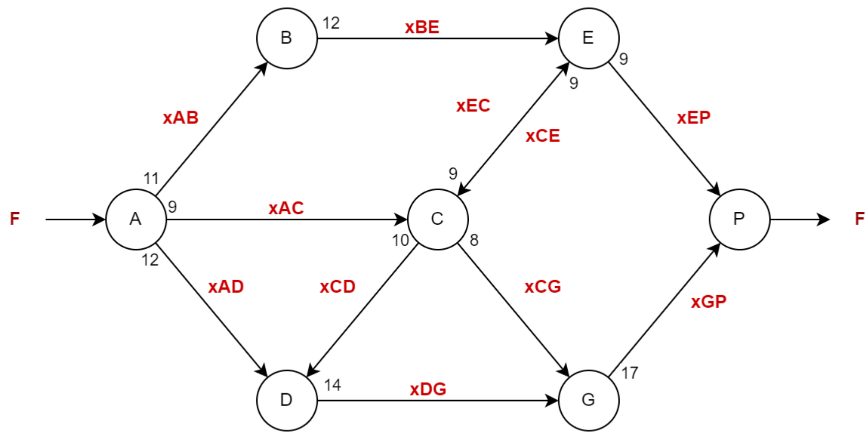


Figura 1: Nova assignació de noms dels nodes i representació de les variables X_{ij}

Donat que el flux que passa per un determinat enllaç no pot ser negatiu, podem assumir que la restricció de signe per totes les variables serà $X_{ij} \geq 0$.

Com que cada línia té un transit màxim que pot transportar, podem definir una restricció per cada variable que en limiti el valor:

$$X_{AB} \leq 11;\ X_{AC} \leq 9;\ X_{AD} \leq 12;\ X_{BE} \leq 12;\ X_{CD} \leq 10$$
$$X_{CE} \leq 9;\ X_{CG} \leq 8;\ X_{DG} \leq 14;\ X_{EC} \leq 9;\ X_{EP} \leq 9;\ X_{GP} \leq 17$$

A aquestes caldria afegir les restriccions de balanç de flux, que per definició haurien de ser "=" (la suma dels fluxos d'entrada en un node ha de ser igual a la suma dels fluxos de sortida), però per simplicitat farem que siguin "$\leq$":

A) $F \leq X_{AB} + X_{AC} + X_{AD} \to F - X_{AB} - X_{AC} - X_{AD} \leq 0$

B) $X_{AB} \leq X_{BE} \to X_{AB} - X_{BE} \leq 0$

C) $X_{AC} + X_{EC} \leq X_{CD} + X_{CE} + X_{CG} \to X_{AC} - X_{CD} - X_{CE} - X_{CG} + X_{EC} \leq 0$

D) $X_{AD} + X_{CD} \leq X_{DG} \to X_{AD} + X_{CD} - X_{DG} \leq 0$

E) $X_{BE} + X_{CE} \leq X_{EC} + X_{EP} \to X_{BE} + X_{CE} - X_{EC} - X_{EP} \leq 0$

G) $X_{CG} + X_{DG} \leq X_{GP} \to X_{CG} + X_{DG} - X_{GP} \leq 0$

P) $X_{EP} + X_{GP} \leq F \to X_{EP} + X_{GP} - F \leq 0$

La funció objectiu del model PL que ens demanen solucionar ha de maximitzar el flux màxim a transmetre per la xarxa. Per tant, ha de maximitzar el que entra i el que surt, que seran el mateix, F. La funció objectiu serà:

$$\text{MAX } Z = F$$

En ajuntar-ho tot ens queda el model:

$$
\begin{aligned}
& \text{MAX } Z = F \\
\text{subjecte a:} & \\
& X_{AB} \leq 11 \\
& X_{AC} \leq 9 \\
& X_{AD} \leq 12 \\
& X_{BE} \leq 12 \\
& X_{CD} \leq 10 \\
& X_{CE} \leq 9 \\
& X_{CG} \leq 8 \\
& X_{DG} \leq 14 \\
& X_{EC} \leq 9 \\
& X_{EP} \leq 9 \\
& X_{GP} \leq 17 \\
& F - X_{AB} - X_{AC} - X_{AD} \leq 0 \\
& X_{AB} - X_{BE} \leq 0 \\
& X_{AC} - X_{CD} - X_{CE} - X_{CG} + X_{EC} \leq 0 \\
& X_{AD} + X_{CD} - X_{DG} \leq 0 \\
& X_{BE} + X_{CE} - X_{EC} - X_{EP} \leq 0 \\
& X_{CG} + X_{DG} - X_{GP} \leq 0 \\
& X_{EP} + X_{GP} - F \leq 0 \\
\text{on } x_i >= 0 &
\end{aligned}
$$

Resolució amb RStudio

Introduïm les estructures matricials del model a RStudio i resolem el model amb la funció solveLP.

Un cop obtinguda la solució, podem veure el valor de la funció objectiu al "$opt". Aquest valor represnta el fluix màxim de yobibytes/s que pot passar des del node inici fins el node desti, en total, 26 yobibytes.

```
> PL.sol\$opt
[1] 26
```

El valor de cada variable el trobarem a l'estructura $solution de l'objecte solució. X_{CD}, X_{CE} i X_{EC} són les variables no bàsiques perquè el valor és 0.

```
> PL.sol\$solution
Xab Xac Xad Xbe Xcd Xce Xcg Xdg Xec Xep Xgp  F
9   8   9   9   0   0   8   9   0   9   17  26
```

El camp "$tab" de la solució ens proporciona la taula símplex optimitzada. Com que hi ha moltes variables i restriccions queda una taula símplex molt gran. Per aquest motiu, hem partit la taula en els tres trossos següents:

Base	X_{AB}	X_{AC}	X_{AD}	X_{BE}	X_{CD}	X_{CE}	X_{CG}	X_{DG}	X_{EC}	X_{EP}	X_{GP}	F	Valor
S_1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	2
S_2	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	0	0	1
S_3	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	3
S_4	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	3
S_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	10
S_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	9

X_{GP}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	17
S_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
S_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	9
X_{EP}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	9
X_{DG}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	9
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	26
X_{AB}	1	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	9
X_{AC}	0	1	0	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	8
X_{AD}	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	9
X_{BE}	0	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	0	0	9
X_{CG}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	8
S_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z-C$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	26

Base	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}	Valor
S_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	2
S_2	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1
S_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	3
S_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	3
S_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
S_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
X_{GP}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	17
S_8	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	5
S_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	9
X_{EP}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	9
X_{DG}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	9
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	26
X_{AB}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	9
X_{AC}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	8
X_{AD}	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	9
X_{BE}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	9
X_{CG}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
S_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
$Z-C$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	26

Base	S_{17}	S_{18}	Valor
S_1	0	0	2
S_2	0	0	1
S_3	-1	0	3
S_4	0	0	3
S_5	0	0	10
S_6	0	0	9
X_{GP}	0	0	17
S_8	-1	0	5
S_9	0	0	9
X_{EP}	0	0	9
X_{DG}	1	0	9
F	1	0	26
X_{AB}	0	0	9
X_{AC}	0	0	8
X_{AD}	1	0	9
X_{BE}	0	0	9
X_{CG}	0	0	8
S_{18}	1	1	0
$Z-C$	1	0	26

De la taula podem obtenir els valors de les variables i les folgances, saber quines variables són bàsiques i quines no i esbrinar també els costos reduïts de cada variable. Com que ja hem vist abans els valors de les variables de decisió no els tornarem a comentar. Tot i això, podem veure que els valors de les folgances són:

$$S_1 = 2; S_2 = 1; S_3 = 3; S_4 = 3; S_5 = 10; S_6 = 9; S_7 = 0; S_8 = 5; S_9 = 9$$
$$S_{10} = 0; S_{11} = 0; S_{12} = 0; S_{13} = 0; S_{14} = 0; S_{15} = 0; S_{16} = 0; S_{17} = 0; S_{18} = 0$$

De la taula podem obtenir també les variables vàsiques (les de la primera columna): X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BE}, X_{CG}, X_{DG}, X_{EP}, X_{GP}, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{18}. Aquestes tindràn cost reduït igual a 0, també observable a la taula (última fila). També ens fixem que una variable bàsica (S_{18}) té valor 0, d'on podem deduir que la solució és degenerada.

Les folgances S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, S_{16}, S_{17} tenen cost resuït 1. Les variables i folgances X_{CD}, X_{CE}, X_{EC} i S_7 tenen cost reduït 0, malgrat son variables no bàsiques.

Per saber l'interval de sensibilitat de les variables de desició utilitzem la informació del camp "$allvars". Les columnes "min.c" i "max.c" indiquen l'interval de sensibilitat de cada variable. Mentre els coeficients de les variables es trobin dins dels respectius interval, l'estructura de les variables bàsiques i no-bàsiques es manté.

```
> PL.sol\$allvar
       opt cvec min.c max.c marg marg.reg
Xab      9    0    -1   Inf   NA       NA
Xac      8    0    -1   Inf   NA       NA
Xad      9    0    -1   Inf   NA       NA
Xbe      9    0    -1   Inf   NA       NA
Xcd      0    0  -Inf     0    0        1
Xce      0    0  -Inf     0    0        1
Xcg      8    0  -Inf   Inf   NA       NA
Xdg      9    0    -1   Inf   NA       NA
Xec      0    0  -Inf     0    0        2
Xep      9    0    -1   Inf   NA       NA
Xgp     17    0    -1   Inf   NA       NA
F       26    1     0   Inf   NA       NA
S Res1   2    0  -Inf     1    0       NA
S Res2   1    0  -Inf     1    0       NA
S Res3   3    0  -Inf     1    0       NA
S Res4   3    0  -Inf     1    0       NA
S Res5  10    0  -Inf   Inf    0       NA
S Res6   9    0  -Inf   Inf    0       NA
S Res7   0    0  -Inf     0    0        3
S Res8   5    0  -Inf     1    0       NA
S Res9   9    0  -Inf   Inf    0       NA
S Res10  0    0  -Inf     1   -1        9
S Res11  0    0  -Inf     1   -1        9
S Res12  0    0  -Inf     1   -1       26
S Res13  0    0  -Inf     1   -1        9
S Res14  0    0  -Inf     1   -1        8
S Res15  0    0  -Inf     1   -1        9
S Res16  0    0  -Inf     1   -1        9
S Res17  0    0  -Inf     1   -1        9
S Res18  0    0    -1   Inf    0       NA
```

Formulació del model Dual

Per fer l'anàlisi paramètrica d'algun dels termes independents farem servir el model dual. Per això, abans de fer qualsevol anàlisi el formularem aquí per utilitzar-lo més endavant.

Per les característiques del model primal, obtenir el dual serà molt senzill.

- Tindrem tantes variables U com restriccions i els seus coeficients seran els dels termes independents de les restriccions.

- Tindrem tantes restriccions com variables de decisió en el model Primal, la cardinalitat de totes serà "≥" donat que totes les restriccions en el primar son "≤" i el terme independent serà el coeficient de la funció objectiu de la variable corresponent del primal.
- Els coeficients de les variables a les restriccions serà el resultat de transposar la matriu A, formada pels coeficients de les variables per cada restricció en el primal.
- Com que el primal és un model de maximització, en el dual serà de minimització

Reunides totes aquestes informacions tenim que el model Dual queda:

$$\min W = 11U_1 + 9U_2 + 12U_3 + 12U_4 + 10U_5 + 9U_6 + 8U_7 + 14U_8 + 9U_9 + 9U_{10} + 17U_{11}$$

subjecte a:

$$\begin{aligned}
&U_1 - U_{12} + U_{13} \geq 0\\
&U_2 - U_{12} + U_{14} \geq 0\\
&U_3 - U_{12} + U_{15} \geq 0\\
&U_4 - U_{13} + U_{16} \geq 0\\
&U_5 - U_{14} + U_{15} \geq 0\\
&U_6 - U_{14} + U_{16} \geq 0\\
&U_7 - U_{14} + U_{17} \geq 0\\
&U_8 - U_{15} + U_{17} \geq 0\\
&U_9 + U_{14} - U_{16} \geq 0\\
&U_{10} - U_{16} + U_{18} \geq 0\\
&U_{11} - U_{17} + U_{18} \geq 0\\
&U_{12} - U_{18} \geq 1
\end{aligned}$$

on $x_i >= 0$

Anàlisis paramètrica de terme independent b_{10}

Podem fer un estudi paramètric del coeficient b_{10} tenint en compte que els intervals de sensibilitat caldrà calcular-los sobre el problema dual (D).

Resolem el problema dual(D) per a obtener els intervals de sensibilitat. En lloc de resoldre un PL dual(D) de "min" resoldrem el problema (D) com un PL de "Max" amb la f.o canviada de signe (-f.o.). Anem modificant el terme b_{10} per obtenir els diferents intervals de sensibilitat des de $-\infty$ fins a $+\infty$:

- Per a b_{10} = -1:
  - Interval de sensibilitat $(-\infty, 0]$
  - Problema Infactible
- Per a $b_{10} = 9$:
  - Interval de sensibilitat [0,11]
  - Pendent = 1
  - Z = 26 amb interval [17,28]
  - Les folgances bàsiques són: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{18}
  - Les variables bàsiques són: X_{AB}, X_{AC},X_{AD}, X_{BE}, X_{CG}, X_{DG}, X_{EP}, X_{GP}, F
- Per a $b_{10} = 12$:
  - Interval de sensibilitat [11,15]
  - Pendent = 1
  - Z = 29 amb interval[28,32]
  - Les folgances bàsiques: S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{18}
  - Les variables bàsiques són: X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BE}, X_{CE}, X_{CG}, X_{DG}, X_{EP}, X_{GP}, F

- Per a $b_{10} = 16$:
  - Interval de sensibilitat $[15,\infty)$
  - Pendent = 0
  - Z = 32 (el màxim)
  - Les folgances bàsiques: S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{11}, S_{18}
  - Les variables bàsiques són: X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BE}, X_{CE}, X_{CG}, X_{DG}, X_{EP}, X_{GP}, F

Construïm la taula de l'anàlisi parametrica:

Interval	De Coef.	A Coef.	De Z	A Z	Pendent	Var. entra	Var. surt
1r	$-\infty$	0	—	—	—	—	Infactible
2n	0	11	17	28	1	S_7, X_{CE}	S_1, S_2
3r	11	15	28	32	1	S_11	S_3
4t	15	$+\infty$	32	—	0	—	—

Podem representar les dades de la taula gràficament, com es veu a la figura 2:

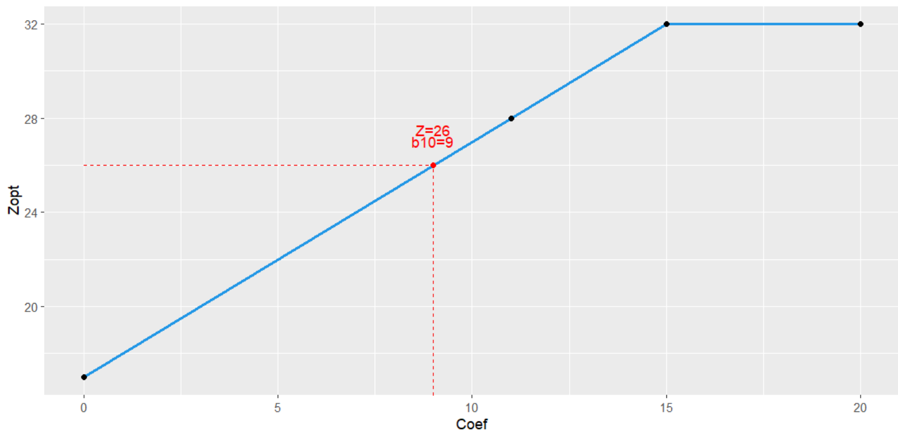


Figura 2: Anàlisi paramètrica del coeficient b_{10}

És veu que en l'interval $(-\infty, 0]$ no hi ha solució. A partit del $b_{10} = 0$ hi ha solució, es manté el pendent a 1 fins $b_{10} = 15$, moment en que passa a ser 0. El pendent ens indica que per cada unitat de transit extra que admeti l'enllaç SE-P aconseguirem que el flux màxim de la xarxa augmenti el valor d'aquest pendent.

Observem que quan el valor de b_{10} arriba a 11, es produeix un canvi de base, de manera que en la nova organització els enllaços C-SB i C-SC transportaran el flux màxmim possible, per l'enllaç SC-SE hi començarem a transportar informació i per l'enllaç SC-SF deixarem de transportar el valor màxim de la informació que permet l'enllaç. Podem observar que, a partir de $b_{10} = 15$, per més que l'enllaç SE-P admeti més transit no podem organitzar la xarxa per transmetre més flux.

Anàlisis paramètrica de terme independent b_{11}

Per a fer un estudi paramètric del coeficient b_{11} hem de calcular, igual que amb l'anterior estudi, els intervals de sensibilitat sobre el problema dual (D).

Tenim que a partir del problema dual (D), b_{11} pren un valor de 17 i ens trobem amb les seguents dades:

Per a $b_{11} = 17$:

- Interval de sensibilitat [14,21]
- Pendent = 1
- Z = 26 amb interval [23,30]
- Les folgances bàsiques són: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{18}

– Les variables bàsiques són: X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BE}, X_{CG}, X_{DG}, X_{EP}, X_{GP}, F

Provem doncs amb $b_{11} = 13$ per a començar a buscar el límit inferior de l'interval de sensibilitat:
Per a $b_{11} = 13$:

– Interval de sensibilitat [12,14]

– Pendent = 1

– Z = 22 amb interval [21,23]

– Les folgances bàsiques són: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{18}

– Les variables bàsiques són: X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BE}, X_{CG}, X_{DG}, X_{EP}, X_{GP}, F

Seguim buscant el límit inferior:
Per a $b_{11} = 11$:

– Interval de sensibilitat [0,12]

– Pendent = 1

– Z = 20 amb interval [9,21]

– Les folgances bàsiques són: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{18}

– Les variables bàsiques són: X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BE}, X_{CG}, X_{DG}, X_{EP}, X_{GP}, F

Per a $b_{11} = -1$:

– Interval de sensibilitat $(-\infty, 0]$

– Problema Infactible

Ara provem amb $b_{11} = 22$ per a començar a buscar el límit superior:
Per a $b_{11} = 22$:

– Interval de sensibilitat $[22,+\infty)$

– Pendent = 0

– Z = 31 (màxim)

– Les folgances bàsiques són: S_1, S_4, S_5, S_6, S_9, S_{11}, S_{18}

– Les variables bàsiques són: X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BE}, X_{CD}, X_{CG}, X_{DG}, X_{EC}, X_{EP}, X_{GP}, F

Es veu que ens hem saltat un interval, el qual podem trobar amb $b_{11} = 21.5$:
Per a $b_{11} = 21.5$:

– Interval de sensibilitat [21,22]

– Pendent = 1

– Z = 30.5 amb interval [30,31]

– Les folgances bàsiques són: S_1, S_4, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{18}

– Les variables bàsiques són: X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BE}, X_{CD}, X_{CG}, X_{DG}, X_{EC}, X_{EP}, X_{GP}, F

Construïm la taula de l'anàlisi parametrica:

Interval	De Coef.	A Coef.	De Z	A Z	Pendent	Var. entra	Var. surt
1r	$-\infty$	0	—	—	—	—	Infactible
2n	0	12	9	21	1	—	—
3r	12	14	21	23	1	—	—
4t	14	21	23	30	1	—	—
5è	21	22	30	31	1	X_{CD}, X_{EC}	S_2, S_3
6è	22	$+\infty$	31	31	0	S_{11}	S_8

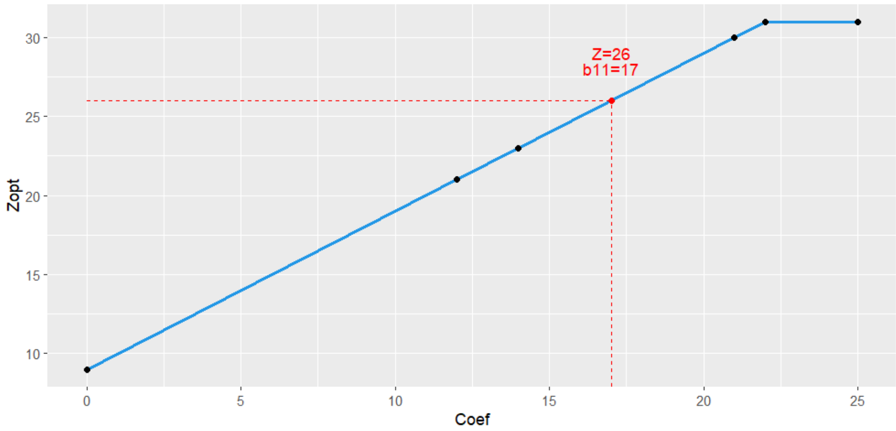


Figura 3: Anàlisi paramètrica del coeficient b_{11}

Podem representar les dades de la taula gràficament, com es veu a la figura 3.

A l'interval $[-\infty, 0]$ no hi ha solució. A partir de $b_{11} = 0$ hi ha solució i es manté el pendent $= 1$, que com hem explicat abans, vol dir que en augmentar en 1 unitat el transit possible per l'enllaç SF-P s'augmenta en 1 unitat el flux màxim que pot passar per la xarxa. A partir de $b_{11} = 22$, passa a ser 0 i Z agafa valor màxim amb $Z = 31$, per més que augmentem el trànsit possible per aquest enllaç no aconseguirem una millor organització que ens permeti augmentar més el flux.

No hem observat canvis de base entre els diferents punts dels intervals fins als 2 últims, on hem observat que entre $b_{11} = 21$ i $b_{11} = 22$ pels enllaços SC-SD i SE-SC comencem a transmetre informació i que pels enllaços C-SC i C-SD passem a transmetre la informació màxima que permeten; i que a partir de $b_{11} = 22$, enviem el màxim d'informació possible per l'enllaç SD-SF i deixem d'enviar el màxim per l'enllaç SF-P.

b. Modificació del PL, nova condició *si-llavors*

Formulació de les noves restriccions

Per afegir cumplir la condició "*si des del node C al node SB es transmeten més de 3 yobibytes/s, aleshores del node SC al SD s'ha de transmetre com a mínim 5 yobibytes/s*", hem de formular les restriccions pertinent i per això hem d'identifixar $f(x)$ i $g(x)$.

Pel que fa a $f(x)$ es troba fàciment a partir de "*si des del node C al node SB es transmeten més de 3 yobibytes/s*". Si ho expressem matemàticament amb les variables del model i aïllem tot fent que a un costat quedi 0 tenim:

$$X_{AB} > 3 \rightarrow X_{AB} - 3 > 0$$

D'on podem obtenir que $f(x) = X_{AB} - 3$.

Per trobar $g(x)$, ens fixem en "*del node SC al SD s'ha de transmetre com a mínim 5 yobibytes/s*", novament ho expressem en forma d'inequació amb les variables del model i aïllem fent que a un costat quedi 0:

$$X_{CD} \geq 5 \rightarrow X_{CD} - 5 \geq 0$$

D'on obtenim que $g(x) = X_{CD} - 5$.

Les restriccions a afegir al model tindràn la forma:

$$f(x) \leq M(1 - X_b) \rightarrow X_{AB} - 3 \leq M(1 - X_b)$$

i

$$-g(x) \leq M \cdot X_b \rightarrow -(X_{CD} - 5) \leq M \cdot X_b \rightarrow -X_{CD} + 5 \leq M \cdot X_b$$

on X_b serà una nova variable binària.

Hem de calcular el valor de M tenint en compte que:

$$f(x) \leq M \rightarrow X_{AB} - 3 \leq M \text{ i } -g(x) \leq M \rightarrow -X_{CD} + 5 \leq M$$

Obtenim el valor màxim de X_{AB} i mínim de X_{CD} a través de la restricció $X_{AB} \leq 11$ i la restricció de signe, per calcular el valor de M. Farem servir $X_{AB} = 11$ i $X_{CD} = 0$:

$$X_{AB} - 3 \leq M \rightarrow 11 - 3 \leq M \rightarrow M \geq 8$$
$$-X_{CD} + 5 \leq M \rightarrow -0 + 5 \leq M \rightarrow M \geq 5$$

Com que M ha de ser igual per ambdues restriccions hem de prendre un valor de M que sigui major a 8. Per exemple prenem $M = 10$. Les restriccions a afegir al model, llavors, queden:

$$X_{AB} - 3 \leq 10(1 - X_b) \rightarrow X_{AB} + 10X_b \leq 13$$
$$-X_{CD} + 5 \leq 10X_b \rightarrow -X_{CD} - 10X_b \leq -5 \rightarrow X_{CD} + 10X_b \geq 5$$

Model amb la nova restricció

Si prenem el model original i hi ajuntem les restriccions obtingudes a l'apartat anterior, obtenim:

$$\begin{aligned}
& \text{MAX } Z = F \\
\text{subjecte a:} & \\
& X_{AB} \leq 11 \\
& X_{AC} \leq 9 \\
& X_{AD} \leq 12 \\
& X_{BE} \leq 12 \\
& X_{CD} \leq 10 \\
& X_{CE} \leq 9 \\
& X_{CG} \leq 8 \\
& X_{DG} \leq 14 \\
& X_{EC} \leq 9 \\
& X_{EP} \leq 9 \\
& X_{GP} \leq 17 \\
& F - X_{AB} - X_{AC} - X_{AD} \leq 0 \\
& X_{AB} - X_{BE} \leq 0 \\
& X_{AC} - X_{CD} - X_{CE} - X_{CG} + X_{EC} \leq 0 \\
& X_{AD} + X_{CD} - X_{DG} \leq 0 \\
& X_{BE} + X_{CE} - X_{EC} - X_{EP} \leq 0 \\
& X_{CG} + X_{DG} - X_{GP} \leq 0 \\
& X_{EP} + X_{GP} - F \leq 0 \\
& X_{AB} + 10X_b \leq 13 \\
& X_{CD} + 10X_b \geq 5 \\
\text{on } x_i >= 0 &
\end{aligned}$$

Resolució del nou model amb RStudio

Prenem el model entrat a l'apartat anterior i el modifiquem afegint les estructures corresponents de les noves restriccions (veure script adjunt):

- Afegim a cada restricció el coeficient de X_b, 0 en totes.
- Afegim els coeficients de les dues noves restriccions.
- Refem amb això la matriu A.
- Afegim els termes independents de les noves restriccions al vector b.
- Creem un vector de direccions per tenir les direccions de les restriccions (totes $\leq$, excepte l'última que serà $\geq$).

Un cop modificades les estructures executem la funció *lp* del paquet *lpSolve* per resoldre el model. Utilitzem aquest mètode perquè tenim una variable binària, que dificulta que puguem fer servir la funció *solveLP*, i ja tenim definides les estructures matricials, per la qual cosa ens és més còmode que amb la funció *solve* de la llibreria *lpSolveAPI*.

En resoldre el model podem obtenir els següents paràmetres:

Status Ens indica si s'ha trobat o no solució. En el nostre cas se'n troba.

Objval Correspón al valor de la funció objectiu. En el nostre cas $Z = 26$. És a dir, el trànsit màxim que passarà per la xarxa complint la restricció nova serà de 26 yobibytes/s.

Solution Mostra el valor de les variables de decisió:

$$X_{AB} = 9; X_{AC} = 9; X_{AD} = 8; X_{BE} = 9; X_{CD} = 5; X_{CE} = 0; X_{CG} = 4$$
$$X_{DG} = 13; X_{EC} = 0; X_{EP} = 9; X_{GP} = 17; X_F = 26; X_b = 0$$

Num.bin.solns Mostra el nombre de possibles distribucions òptimes. En el nostre cas la solució és única.

Si calculem els valors de les folgances obtenim els següents resultats:

$$s_1 = 2; s_2 = 0; s_3 = 4; s_4 = 3; s_5 = 5; s_6 = 9; s_7 = 4; s_8 = 1; s_9 = 9; s_{10} = 0$$
$$s_{11} = 0; s_{12} = 0; s_{13} = 0; s_{14} = 0; s_{15} = 0; s_{16} = 0; s_{17} = 0; s_{18} = 0; s_{19} = 4; s_{20} = 0$$

Ens podem fixar també que es compleix la restricció estipulada ja que, com que el trànsit que va de C a SB supera els 3 yobibytes/s ($X_{AB} = 9$), el trànsit que va de SC a SD és de com a mínim 5 yobibytes/s ($X_{CD} = 5$).