

Notes

Kopnov Alexandr

2 мая 2023 г.

Содержание

1	Постановка	1
1.1	Данные задачи:	1

1 Постановка

Решить задачу

$$\min \phi_0(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | \phi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\}$$

методом отсекающей гиперплоскости. Обосновать сходимость метода.

1.1 Данные задачи:

В нашем случае $\phi_0 = x_1^2 + 4x_2^2 + \sin(6x_1 + 7x_2) + 3x_1 + 2x_2$ — нелинейная функция, значит вводим $\phi_4(x_1, x_2, x_3) = \phi_0 - x_3$, а в качестве функции цели выберем $\phi_0(x) = x_3$. Из решения задачи без ограничений знаем точку минимума:

$$([-1.9043886748215388, -0.36794672198200706], -3.2716974195454807)$$

По условиям применимости метода $\phi_i(x), i = \overline{1, m}$ должны быть выпуклыми. Рассмотрим выпуклость функции ϕ_4

$$\phi_4(x) = \phi_{41} + \phi_{42} - x_3$$

$$\phi_{41} = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 \text{ — выпуклая}$$

$$-x_3 \text{ — линейная} \implies \text{выпуклая}$$

$$\phi_{42} = \sin(6x_1 + 7x_2)$$

Для поиска интервала на котором функция ϕ_{42} будет выпуклой, воспользуемся теоремой: Пусть S — непустое открытое выпуклое мн-во, $\phi(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Тогда для того, чтобы $\phi(x)$ была выпуклой функцией на S необходимо и достаточно, чтобы её гессиан $H(x)$ был положительно-полуопределённой матрицей

$$H_{42}(x) = \begin{pmatrix} -36 \sin(6x_1 + 7x_2) & -42 \sin(6x_1 + 7x_2) \\ -42 \sin(6x_1 + 7x_2) & -49 \sin(6x_1 + 7x_2) \end{pmatrix}$$

Матрица будет положительно полуопределённой при $\sin(6x_1 + 7x_2) \leq 0$. (изначально исследование проводилось для всей функции, а не только для синуса, но это не внесло значительных изменений ($\sin(6x_1 + 7x_2) \leq 0.0414$), хотя привело к существенному удлинению выкладок)

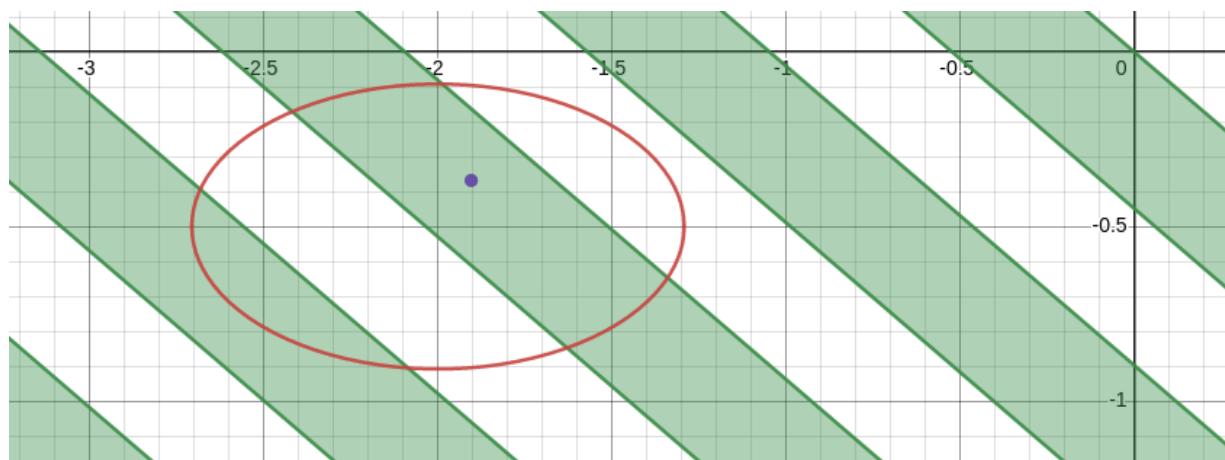
Т.о. поставим линейные условия:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 &\geq -5\pi & \Rightarrow & -6x_1 - 7x_2 - 5\pi \leq 0 \\ 6x_1 + 7x_2 &\leq -4\pi & \Rightarrow & 6x_1 + 7x_2 + 4\pi \leq 0 \end{aligned}$$

Поставим нелинейное условие:

$$(x + 2)^2 + 3(y + 0.5)^2 \leq 0.5 \Rightarrow (x + 2)^2 + 3(y + 0.5)^2 - \frac{1}{2} \leq 0$$

Так выглядит область допустимых значений при отображении через Desmos



В качестве начального приближения возьмём многогранное мн-во $S_0 = \{x | a_i^T x - b_i \leq 0, i = -3, 0\}$ где

$$\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 &\leq -4\pi & 6x_1 + 7x_2 &\leq -4\pi \\ -6x_1 - 7x_2 &\leq 5\pi & -6x_1 - 7x_2 &\leq 5\pi \\ x_2 &\leq -0.05 & \Rightarrow & x_2 \leq -0.05 \\ x_2 + 0.5 &\geq x_1 & & x_1 - x_2 \leq 0.5 \\ x_3 &\geq -3.5 & & -x_3 \leq 3.5 \\ x_3 &\leq 50 & & x_3 \leq 50 \end{aligned}$$