Notes

Kopnov Alexandr

19 апреля 2023 г.

Содержание

1 Постановка

Найти

$$\min f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + \sin(6x_1 + 7x_2) + 3x_1 + 2x_2$$

$$\nabla f(x) = \frac{df}{dx_1}\vec{e_1} + \frac{df}{dx_2}\vec{e_2}$$

$$\frac{df}{dx_1} = 2x_1 + 6\cos(6x_1 + 7x_2) + 3$$

$$\frac{df}{dx_2} = 8x_2 + 7\cos(6x_1 + 7x_2) + 2$$

Строим $\{x_k\}$ — релаксационную последовательность спуска: $f(x_{k+1}) \leqslant f(x_k)$, используя двухшаговую систему: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$.

Функция f ограничена снизу:

$$(x_1^2 + 3x_1) + (4x_2^2 + 2x_2) + \sin(6x_1 + 7x_2) = (x_1 + 1.5)^2 - 2.25 + (2x_2 + 0.5)^2 - 0.25 + \sin(6x_1 + 7x_2) \geqslant$$
$$\geqslant 0 - 2.25 + 0 - 0.25 - 1 = -3.5$$

Покажем, что градиет $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица

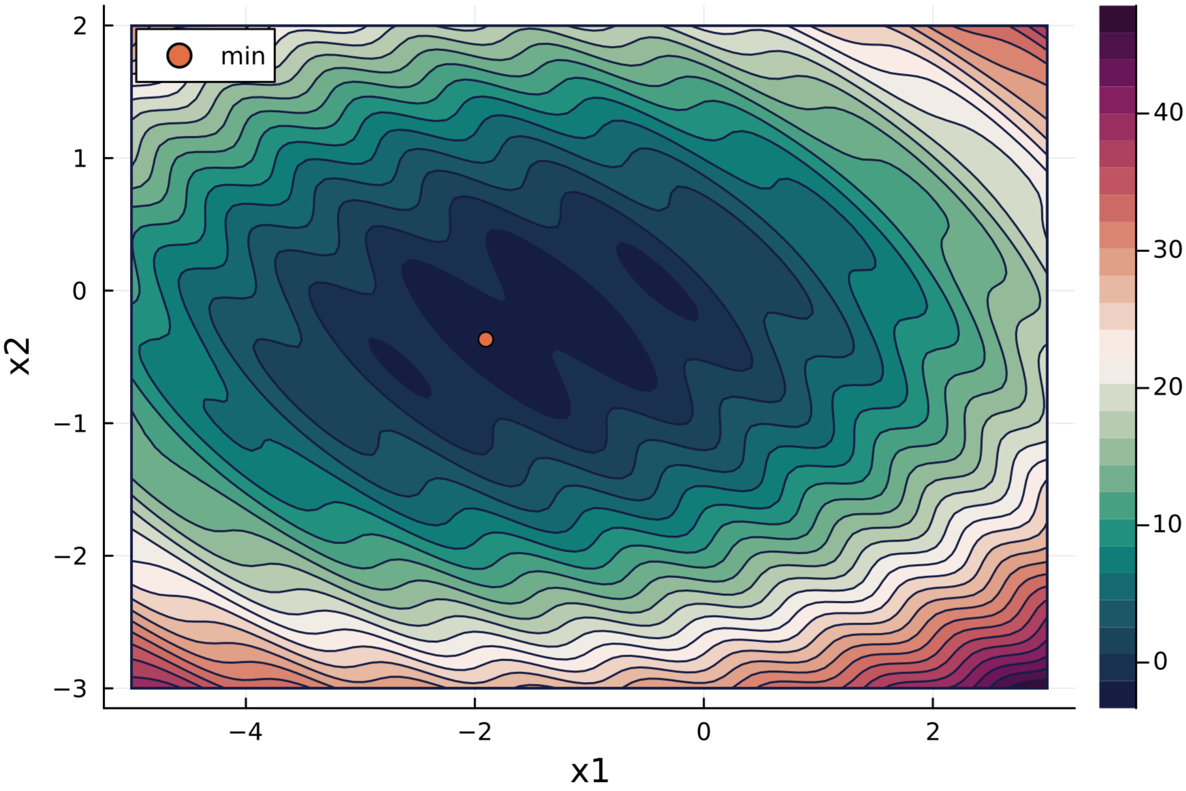
$$\nabla f(x) - \nabla f(y) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2y_1 + 6\cos(6x_1 + 7x_2) - 6\cos(6y_1 + 7y_2) \\ 8x_2 - 8y_2 + 7\cos(6x_1 + 7x_2) - 7\cos(6y_1 + 7y_2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2(x_1 - y_1) - 12\sin\frac{6x_1+7x_2+6y_1+7y_2}{2}\sin\frac{6x_1+7x_2-6y-7y_2}{2} \\ 8(x_2 - y_2) - 14\sin\frac{6x_1+7x_2+6y_1+7y_2}{2}\sin\frac{6x_1+7x_2-6y-7y_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 = \frac{x_1+y_1}{2} & a_2 = \frac{x_2+y_2}{2} \\ d_1 = \frac{x_1-y_1}{2} & d_2 = \frac{x_2-y_2}{2} \end{bmatrix} \implies \begin{pmatrix} 4d_1 - 12\sin(6a_1 + 7a_2)\sin(6d_1 + 7d_2) \\ 16d_2 - 14\sin(6a_1 + 7a_2)\sin(6d_1 + 7d_2) \end{pmatrix}$$
$$x - y = 2d \qquad \|x - y\|_1 = 2|d_1| + 2|d_2|$$

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_1 = |4d_1 - 12\sin(6a_1 + 7a_2)\sin(6d_1 + 7d_2)| + |16d_2 - 14\sin(6a_1 + 7a_2)\sin(6d_1 + 7d_2)| \leqslant$$
$$\leqslant 4|d_1| + 16|d_2| + 26|\sin(6a_1 + 7a_2)\sin(6d_1 + 7d_2)| \leqslant 26|d_1| + 26|d_2| + 26|\sin(6d_1 + 7d_2)| \leqslant$$
$$13\|x - y\|_1 + 26|6d_1 + 7d_2|(\sin x \leqslant x) \leqslant 13 \cdot (1 + 3.5)\|x - y\|_1 = 58.5\|x - y\|_1$$

График функции, также отмечено значение минимума, получаемое с помощью градиентного спуска в библиотеке `Optim` языка `Julia!!` с начальной точкой `(0,0)`

```
f(x :: Vector{Float64}) = x[1]^2 + 4*x[2]^2 + sin(6*x[1] + 7*x[2]) + 3*x[1] + 2*x[2];
x1 = range(-5,3, length=100);
x2 = range(-3,2, length=100);
vals = [f([x,y]) for y in x2, x in x1];
minim = Optim.minimizer(optimize(f,zeros(2), GradientDescent()));
# p1 = surface(x1,x2,vals, c=:curl, xlabel="x1", ylabel="x2", cam=(120,30));
# scatter!([minim[1]],[minim[2]],[f(minim)], label="min")
p2 = contour(x1,x2,vals,levels=25,fill=true, c=:curl, dpi = 300, xlabel="x1", ylabel="x2");
scatter!([minim[1]],[minim[2]], label="min");
# plot(p1,p2, size=(500,300), dpi=300)
savefig("figs/plot.png")
```



Точка минимума и значение функции в ней

```
([-1.9043886748215388, -0.36794672198200706], -3.2716974195454807)
```

Результаты работы функции оптимизации в `Julia`

```
f(x) = x[1]^2 + 4*x[2]^2 + sin(6*x[1] + 7*x[2]) + 3*x[1] + 2*x[2];

optimize(f, zeros(2), GradientDescent())
```

```
 * Status: success

 * Candidate solution
    Final objective value:     -3.271697e+00

 * Found with
    Algorithm:     Gradient Descent

 * Convergence measures
    |x - x'|               = 4.29e-09 ≰ 0.0e+00
    |x - x'|/|x'|          = 2.25e-09 ≰ 0.0e+00
    |f(x) - f(x')|         = 0.00e+00 ≤ 0.0e+00
    |f(x) - f(x')|/|f(x')| = 0.00e+00 ≤ 0.0e+00
    |g(x)|                 = 1.82e-07 ≰ 1.0e-08

 * Work counters
    Seconds run:   0  (vs limit Inf)
    Iterations:    167
```

```
    f(x) calls:    425
    f(x) calls:   425
```

2 Градиентный метод наискорейшего спуска

Выбираем $\epsilon > 0$, x_0, $0 < \alpha_0 < 1$ — начальное приближение.

На k-й итерации:

1. Вычисляем градиент f. Реализуется как вектор функций — частных производных.
2. Подбираем шаг: $\alpha_k \in (0, 1] : f(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) = \min$.
    a) Метод золотого сечения
    b) Метод дихотомии
3. $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$.

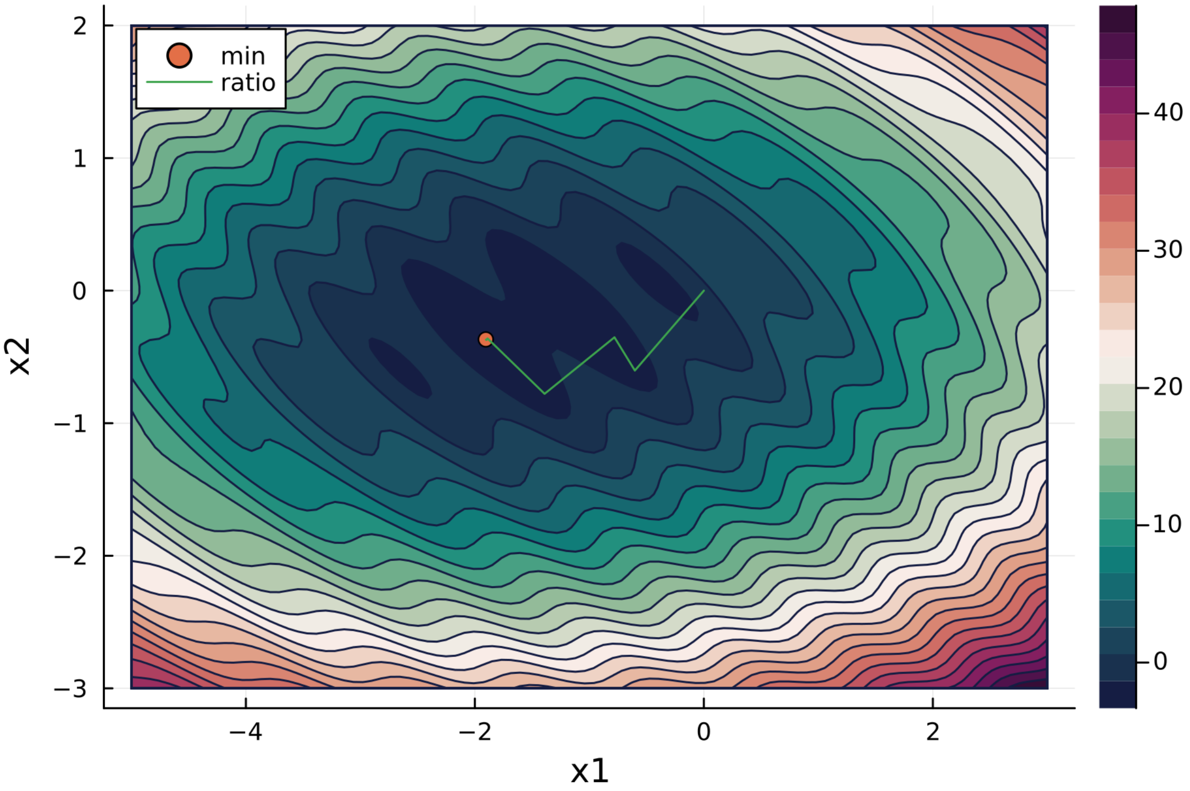
Условие выхода из цикла:

$$\|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$$

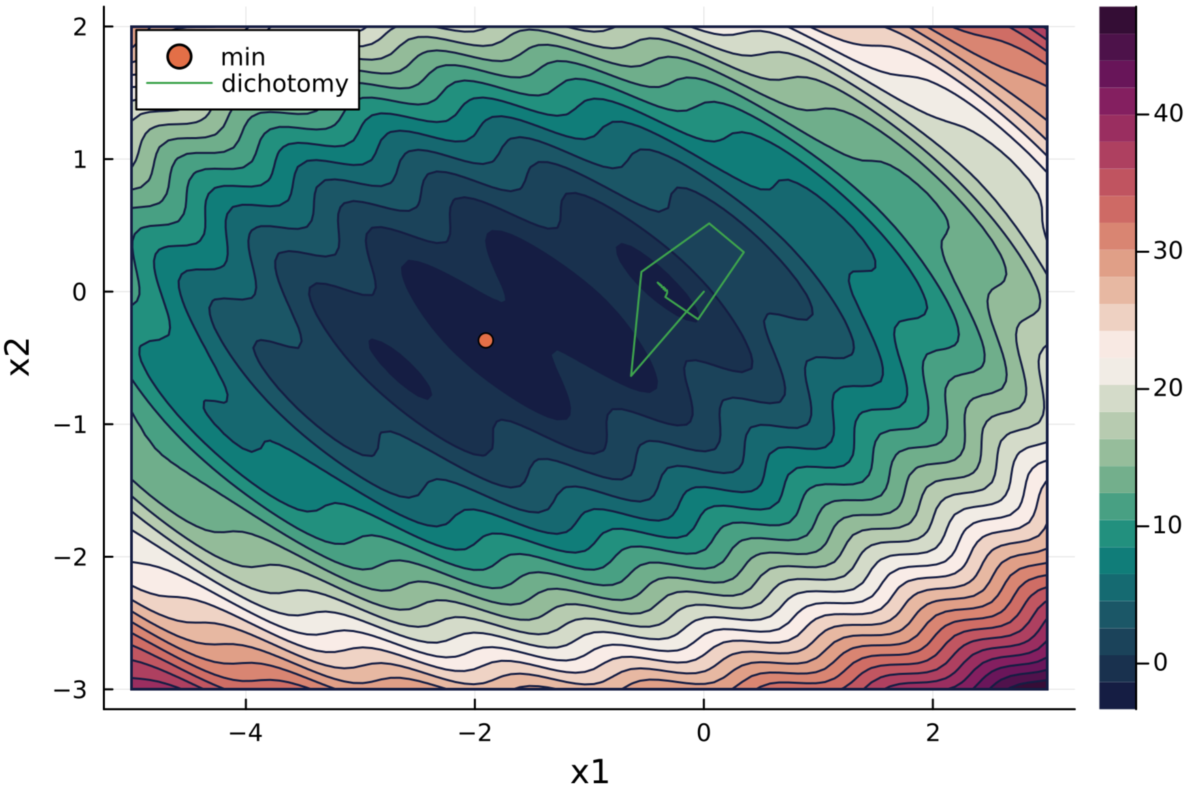
Как правило, используют евклидову норму.

Для обоснования сходимости, используем Thm 3. О сходимости градиентного метода наискорейшего спуска, что требует доказательства липшицевости градиента.

```
df = CSV.read("build/res/" * name, DataFrame; header=["x","y"], delim=' ')
@df df plot(p2, :x, :y, labels = name)
savefig("figs/" * name * ".png")
```

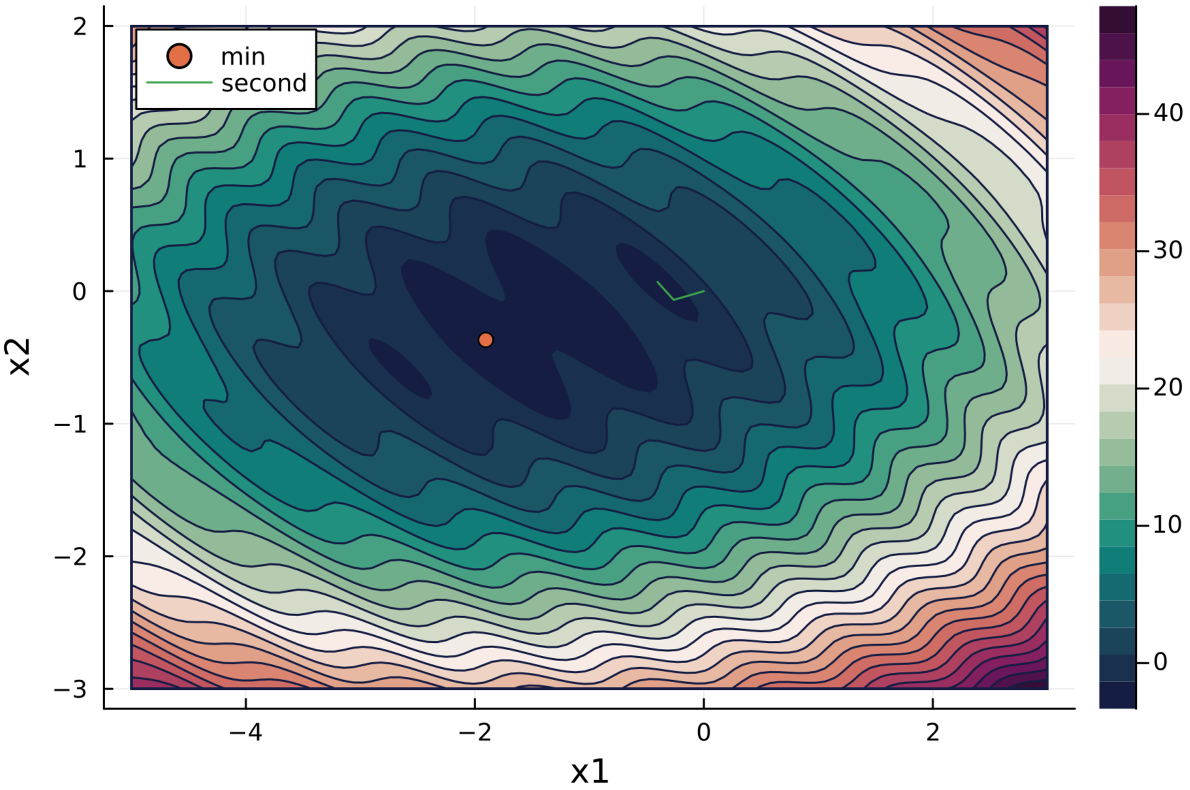


min
ratio
x1
x2



min
dichotomy
x1
x2

3 Градиентный метод второго порядка



Реализован Ньютоновский метод с выбором шага по принципу дробления. Поиск по «Пшеничного» привёл только к методу сопряжённых градиентов (первого порядка)