Notes

Kopnov Alexandr

14 мая 2023 г.

Содержание

1 Постановка

Решить задачу

$$\min \phi_0(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | \phi_i(x) \leqslant 0, i = \overline{1, m}\}$$

методом отсекающей гиперплоскости. Обосновать сходимость метода.

1.1 Данные задачи:

В нашем случае $\phi_0 = x_1^2 + 4x_2^2 + \sin(6x_1 + 7x_2) + 3x_1 + 2x_2$ — нелинейная функция, значит вводим $\phi_4(x_1, x_2, x_3) = \phi_0 - x_3$, а в качестве функции цели выберем $\phi_0(x) = x_3$ Из решения задачи без ограничений знаем точку минимума:

$$([-1.9043886748215388, -0.36794672198200706], -3.2716974195454807)$$

По условиям применимости метода $\phi_i(x), i = \overline{1, m}$ должны быть выпуклыми. Рассмотрим выпуклость функции ϕ_4

$$\phi_4(x) = \phi_{41} + \phi_{42} - x_3$$

$$\phi_{41} = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 \text{ — выпуклая}$$

$$-x_3 \text{ — линейная} \implies \text{выпуклая}$$

$$\phi_{42} = \sin(6x_1 + 7x_2)$$

Для поиска интервала на котором функция ϕ_{42} будет выпуклой, воспользуемся теоремой: Пусть S — непустое открытое выпуклое мн-во, $\phi(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Тогда для того, чтобы $\phi(x)$ была выпуклой функцией на S необходимо и достаточно, чтобы её гессиан $H(x)$ был положительно-полуопределённой матрицей

$$H_{42}(x) = \begin{pmatrix} -36\sin(6x_1+7x_2) & -42\sin(6x_1+7x_2) \\ -42\sin(6x_1+7x_2) & -49\sin(6x_1+7x_2) \end{pmatrix}$$

Матрица будет положительно полуопределённой при $\sin(6x_1+7x_2) \leqslant 0$. (изначально исследование проводилось для всей функции, а не только для синуса, но это не внесло значительных изменений $(\sin(6x_1+7x_2) \leqslant 0.0414)$, хотя привело к существенному удлинению выкладок)

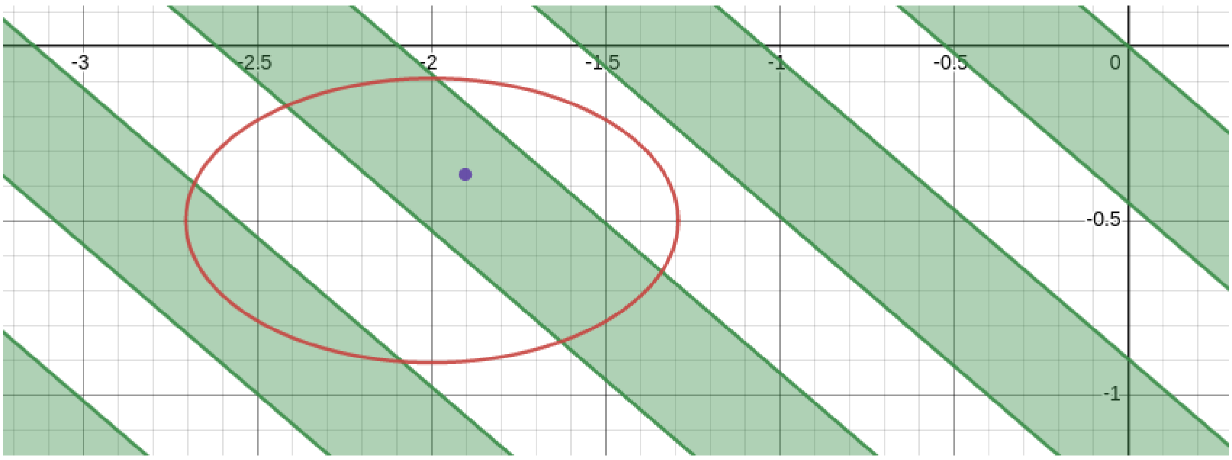
Т.о. поставим линейные условия:

$$\begin{aligned} 6x_1+7x_2 &\geqslant -5\pi \\ 6x_1+7x_2 &\leqslant -4\pi \end{aligned} \implies \begin{aligned} -6x_1-7x_2-5\pi &\leqslant 0 \\ 6x_1+7x_2+4\pi &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Поставим нелинейное условие:

$$(x+2)^2+3(y+0.5)^2 \leqslant 0.5 \implies (x+2)^2+3(y+0.5)^2-\frac{1}{2} \leqslant 0$$

Так выглядит область допустимых значений при отображении через `Desmos`



В качестве начального приближения возьмём многогранное мн-во $S_0 = \{x | a_i^T x - b_i \leqslant 0, i = \overline{-3, 0}\}$ где

$$\begin{aligned} 6x_1+7x_2 &\leqslant -4\pi \\ -6x_1-7x_2 &\leqslant 5\pi \\ x_2 &\leqslant -0.05 \\ x_2+0.5 &\geqslant x_1 \\ -x_1-x_2+x_3 &\geqslant -2 \\ x_3 &\leqslant 50 \end{aligned} \implies \begin{aligned} 6x_1+7x_2 &\leqslant -4\pi \\ -6x_1-7x_2 &\leqslant 5\pi \\ x_2 &\leqslant -0.05 \\ x_1-x_2 &\leqslant 0.5 \\ x_1+x_2-x_3 &\leqslant 2 \\ x_3 &\leqslant 50 \end{aligned}$$

Представление исходного полиэдра в виде матрицы ограничений

```
6,3
0,0,1
6,7,0,LT,-12.566
-6,-7,0,LT,15.708
0,1,0,LT,-0.05
1,-1,0,LT,0.5
1,1,-1,LT,2
0,0,1,LT,50
1,2,3
```

1.2 О субградиенте

Вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называется субградиентом функции $\phi(x)$ в точке $x_\circ \in S$, если

$$\phi(x) \geqslant \phi(x_\circ) + y^T(x - x_\circ), \quad \forall x \in S$$

Заметим, что $y = y(x_\circ)$
В прошлом семестре была доказана теорема:
Пусть $\phi(x)$ — выпукло-дифференцируемая функция, заданная на выпуклом множестве S, причём $\dot{S} \neq \emptyset$. Тогда в каждой точке $x_\circ \in \dot{S}$ субградиент $y = \nabla\phi(x_\circ)$

Рассмотрим функцию $\phi(x) = \max_i\{\phi_i(x)\}$. Запишем субградиент функции $\phi_i(x)$

$$\phi_i(x) \geqslant \phi_i(x_\circ) + y_i^T(x - x_\circ)$$

По теореме, $y_i = \nabla\phi_i(x_\circ)$. Будем использовать $\phi_i : \phi(x_\circ) = \phi_i(x_\circ)$ (наибольшую из функций в заданной точке). Тогда

$$\phi(x) \geqslant \phi_i(x) \geqslant \phi_i(x_\circ) + \nabla\phi_i^T(x - x_\circ) = \phi(x_\circ) + \nabla\phi_i^T(x - x_\circ)$$

Таким образом, $\nabla\phi_i(x_\circ)$ — субградиент функции ϕ в т. $x_\circ$