Inhaltsverzeichnis

1 Signierte Maße

In diesem Kapitel wollen wir uns mit σ-additiven Funktionen beschaftigen, die nicht notwendig nichtnegativ sind. Als Motivation betrachten wir ein Integral

$$v(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Wir haben schon früher festgestellt, dass dadurch eine σ-additive Funktion definiert ist, wenn das Integral von f existiert. Dieses Integral können wir zerlegen:

$$v(A) = \int_A f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_A f_- \, \mathrm{d}\mu.$$

Wenn wir $v_1(A) = \int_A f_+ \, \mathrm{d}\mu$ und $v_2(A) = \int_A f_- \, \mathrm{d}\mu$ setzen, dann haben wir dadurch eine Darstellung

$$v(A) = v_1(A) - v_2(A)$$

von v als Differenz zweier Maße gefunden.

Definition 1. *Es sei ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, und eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ heißt signierte Maßfunktion (oder signiertes Maß), wenn:*

1. $v(\emptyset) = 0$;
2. *ihr Wertebereich entweder $(-\infty, \infty]$ oder $[-\infty, \infty)$ ist, d.h. es können nicht sowohl ∞ und $-\infty$ als Werte auftreten;*
3. *Falls $A_j, j \in \mathbb{N}$, eine Folge von disjunkten Mengen in $\mathcal{A}$ ist, dann gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Definition 2. *Sei μ ein signiertes Maß auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt*

1. *positiv, falls $\mu(B) \geq 0$ für alle $B \in \mathcal{A}, B \subseteq A$ gilt;*
2. *negativ, falls $\mu(B) \leq 0$ für alle $B \in \mathcal{A}, B \subseteq A$ gilt.*

Lemma 1. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum, und μ ein signiertes Maß. Falls $A_j, j \in \mathbb{N}$, eine wachsende Folge von Mengen aus $\mathcal{A}$ ist, d.h. für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $A_j \subseteq A_{j+1}$, dann gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$$

Falls $A_j, j \in \mathbb{N}$, eine fallende Folge von Mengen aus $\mathcal{A}$ ist, d.h. für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $A_{j+1} \subseteq A_j$, dann gilt

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Beweis. Trivial, wie im Fall von positiven Maßen. □

Lemma 2. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum, und μ ein signiertes Maß. Es gibt ein Folge positiver Mengen E_n aus $\mathcal{A}$. Dann $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ eine positive Menge.*

Beweis. Es sei $B \in \mathcal{A}$ eine Teilmenge von $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Die Menge

$$B \cap \Big(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big)$$

ist disjunkte positive Mengen, weil sie Teilmenge von A_n ist. Dann gilt

$$\mu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(B \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) \geq 0.$$

□

Lemma 3. *Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum, und μ ein signiertes Maß. Es gibt eine positive Menge P und eine negative Menge N, so dass $P \cap N = \emptyset$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $P \cap N$ positiv noch negativ ist. Wir wählen eine Menge F, die als Teilmenge von $E \setminus F$ ist, daher sind $F \subseteq P$ und $F \subseteq N$. $F \subseteq P \implies \mu(F) \geq 0$ und $F \subseteq N \implies \mu(F) \leq 0$. Dann gilt $\mu(F) = 0$, so dass $P \cap N = \emptyset$. □

Der zentrale Satz dieses Kapitels ist der

Satz 1.1 (Zerlegung von Hahn). *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem endlichen signierten Maß. Dann existieren eine positive Mengen Ω^+ und eine negative Menge Ω^-, mit $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ und $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$, so dass*

(a) $\mu(A) \geq 0$, für alle $A \in (\Omega^+ \cup \mathcal{A})$;

(b) $\mu(B) \geq 0$, für alle $B \in (\Omega^- \cup \mathcal{A})$.

Bevor wir diese Aussage beweisen, müssen wir zurest an die folgende Lemma beweisen, die als die wichtigste Lemma im Maßtheorie gezeigt ist.

Lemma 4. *Sei μ ein endliches signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gibt eine Menge $\Omega_0 \in \mathbb{A}$ mit beiden Eigenschaften*

(a) $\mu(\Omega_0) \geq \mu(\Omega) \quad \Omega_0 \subset \Omega;$

(b) $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in (\Omega_0 \cap \mathcal{A}).$

Beweis. Wir zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Menge $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit beiden Eigenschaften:

(i) $\mu(\Omega_\varepsilon) \geq \mu(\Omega) \quad \Omega_\varepsilon \subset \Omega;$

(ii) $\mu(A) > -\varepsilon, \quad \forall A \in (\Omega_\varepsilon \cap \mathcal{A}).$

1. Wenn $\mu(\Omega) \leq 0$ ist, dann erfüllt $\Omega_\varepsilon = \emptyset$ diese Bedingungen.
2. Offenbar kann dabei $\mu(\Omega) > 0$ vorausgesetzt werden. Wenn $\mu(A) > -\varepsilon$ für alle $A \in (\Omega \cap \mathcal{A})$ gilt, dann erfüllt $\Omega_\varepsilon = \Omega$ beiden bedingungen, und das gesuchte Ω_ε gefunden.
3. Also betrachten wir den Fall, dass eine Menge $A_1 \in (\Omega \cap \mathcal{A})$ mit $\mu(A_1) \leq -\varepsilon$ existiert. Da Ω die disjunkte Vereinigung von A_1 und $\Omega \setminus A_1$ ist. Aus der Definition von μ folgt,

$$\mu(\Omega \setminus A_1) = \mu(\Omega) - \mu(A_1) \geq \mu(\Omega) + \varepsilon > \mu(\Omega).$$

Gilt daher $\mu(A) > -\varepsilon$ für alle $A \in (\Omega \setminus A_1) \cap \mathcal{A}$. Dann kann wir $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus A_1$ gesetzt werden, und wir sind fertig.
4. Ansonsten gibt es ein $A_2 \in (\Omega \setminus A_1) \cap \mathcal{A}$ und $\mu(A_2) \leq -\varepsilon$. Da $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ erhalten wir

$$\mu(\Omega \setminus (A_1 \cup A_2)) = \mu(\Omega) - (\mu(A_1) + \mu(A_2)) \geq \mu(\Omega) + 2\varepsilon > \mu(\Omega),$$

und gilt daher $\mu(A) > -\varepsilon$ für alle $A \in (\Omega \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap \mathcal{A}$. Dann kann wir $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (A_1 \cup A_2)$ gesetzt werden.
5. Wenn nicht, käme man so fortfahrend nach endlich vielen Schritten nicht zum Ziel, so ergäbe sich eine Folge (A_n) paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{A}$ mit

$$\mu(\Omega \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)) > \mu(\Omega), \text{und}\, \mu(A_n) \leq -\varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen $A_1, A_2, \ldots$ sind disjunkt. Für $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ folgt

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} -\varepsilon = -\infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ liefern ein Widerspruch zu $\mu(A) \in \mathbb{R}$. Damit ist gezeigt, dass ein $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{A}$ existiert, für beiden Bedingungen (i), (ii) erfüllt ist.
6. Um jetzt Ω_0 zu finden. Sei $\Omega = \Omega_1$ als Grundmenge. Betrachten wir die Mengen Ω_ε mit beiden Eigenschaften (i) und (ii) für $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wegen (i)

folgt $\Omega_{1/(n+1)} \subset \Omega_{1/n}$ und $\mu(\Omega_{1/(n+1)}) \geq \mu(\Omega_{1/n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sind nämlich $\Omega_1 \supset \Omega_{1/2} \supset \Omega_{1/3} \supset \ldots \supset \Omega_{1/n}$ bereits konstruiert. Sei $\Omega_0 = \cap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Für $A \in (\Omega_0 \cap \mathcal{A})$ gilt dann $\mu(A) > \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen (ii), also $\mu(A) \geq 0$, womit (b) gezeigt ist. Sei $E_n = \Omega_{1/n} \setminus \Omega_{1/(n+1)}$. Wegen $\Omega_{1/(n+1)} \subset \Omega_{1/n}$, ist $\Omega_{1/n}$ die disjunkte Vereinigung von E_n und $\Omega_{1/(n+1)}$, so dass $\mu(\Omega_{1/(n+1)}) + \mu(E_n) = \mu(\Omega_{1/n})$ folgt. Wegen $\mu(\Omega_{1/(n+1)}) \geq \mu(\Omega_{1/n})$, erhalten wir $\mu(E_n) \leq 0$. Folglich sind die Mengen $\Omega_0, E_1, E_2, \ldots$ disjunkt und ihre Vereinigung ist Ω. Daher folgt $\mu(\Omega) = \mu(\Omega_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. Wegen $\mu(E_n) \leq 0$ erhalten wir $\mu(\Omega) \leq \mu(\Omega_0)$. Da auch $\Omega_0 \subset \Omega$ gilt, ist (a) gezeigt. □

Beweis Theorem 1.1:

Beweis. Wir nehmen an, dass der Werterbereich von μ ist $[-\infty, \infty)$, und wenn der Wertebereich von μ ist $[-\infty, \infty)$, nehmen wir $-\mu$. Sei $\alpha = \sup\{\mu(A) | \, A \subseteq \Omega\}$. Dann existiert $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\alpha = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$.

Schritt 1. Aus Lemma 4 folgt die Existenz einer Folge $C_n \in \mathcal{A}$ mit $C_n \subset B_n$ und $\mu(C_n) \geq \mu(B_n)$. Sei $D_n = C_n \setminus \cup_{i=1}^{\infty} C_i$. Die Mengen sind disjunkt. Sei $\Omega^+ = \cup_{n=1}^{\infty} D_n = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$. Sei $A \in \mathcal{A}$ und $A \subset \Omega^+$. Setze $A_n = A \cap D_n$. Wegen $A_n \subset D_n \subset C_n$, aus Lemma 4 folgt $\mu(A_n) \geq 0$. Da A disjunkte Vereinigung der A_n ist, folgt

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq 0.$$

Damit ist (a) gezeigt.

Schritt 2. Wir zeigen, dass $\mu(\Omega^+) = \alpha$ ist.

Wegen $\mu(\Omega^+) = \mu(C_n) + \mu(\Omega^+ \setminus C_n)$ und $\mu(\Omega^+ \setminus C_n) \subset \Omega^+$ folgt $\mu(\Omega^+ \setminus C_n) \geq 0$. Folglich erhalten wir $\mu(\Omega^+) = \mu(C_n) + \mu(\Omega^+ \setminus C_n) \geq \mu(C_n)$. Daraus folgt $\mu(\Omega^+) \geq \mu(C_n) \geq \mu(B_n) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \alpha$. Dann ist $\mu(\Omega^+) = \alpha$ gezeigt, und ist μ ein endliches Maß, und somit auch $\alpha < \infty$ gezeigt.

Schritt 3. Es sei $\Omega^- = \Omega \setminus \Omega^+$, und zeigen wir, dass $\mu(B) \leq 0$, für jedem $B \in (\Omega^- \cap \mathcal{A})$. Angenommen, wäre für eine $B \in (\Omega^- \cup \mathcal{A})$ mit $\mu(B) > 0$. Wir haben festgestellt, dass $\Omega^+ \cap B = \emptyset$. Dann wäre

$$\mu(\Omega^+ \cup B) = \mu(\Omega^+) + \mu(B) = \alpha + \mu(B) > \alpha.$$

Widerspruch zur Definition von α. Also gilt $\mu(B) \leq 0$ für alle $B \in (\Omega^- \cup \mathcal{A})$. Das ist (b). □

Korollar 1. *Jedes endliche signierte Maß μ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist Differenz zwei endlicher Maße.*

Beweis. Es sei $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ eine Hahn-Zerlegung von Theorem 1.1. Dann werden durch

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap \Omega^+), \quad \mu^-(A) = -\mu(A \cap \Omega^-)$$

offenbar Maße für alle $A \in \mathcal{A}$ definiert, und es gilt $\mu = \mu^+ - \mu^-$, wegen

$$A = (A \cap \Omega^+) \cup (A \cap \Omega^-).$$

□

Dagegen ist die Hahn-Zerlegung nicht eindeutig.

Korollar 2. *Sei μ ein endliches signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Seien $\Omega = P_1 \cup N_1 = P_2 \cup N_2$ zwei Hahn-Zerlegungen von Ω bezüglich μ. Dann gelten symmetrische Differenz von P_1, P_2 und N_1, N_2 Nullmengen sind.*

Beweis. Es gilt

$$P_1 \Delta P_2 = (P_1 \setminus P_2) \cup (P_2 \setminus P_1).$$

Dann sind $P_1 \setminus P_2 = P_1 \cap {P_2}^{\mathrm{c}}$ ist eine Teilmenge der positiven Menge P_1, und eine Teilmenge der negativen Menge ${P_1}^{\mathrm{c}}$. Also ist $P_1 \setminus P_2$ Nullmenge, und analog ist $P_2 \setminus P_1$ Nullmenge. Dann gilt $\mu(P_1 \Delta P_2) = 0$. □

Um eine eindeutige Zerlegung zu erhalten, fugt man eine zusätzliche Bedingung hinzu.

Definition 3. *Zwei signierte Maße v_1, v_2 auf $(\Omega, \mathcal{A})$ heißen zueinander singulär, und man schreibt dafür $v_1 \perp v_2$, wenn es eine Menge $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $v_1(A) = v_2(A^{\mathrm{c}}) = 0$.*

Korollar 3 (Zerlegung von Jordan)**.** *Sei μ ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Es gibt genau eine Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ mit zueinander singulären Maßen μ^+, μ^-.*

Beweis. Seien (P, N) eine Hahn-Zerlegung im Sinne von Theorem 1.1, und für alle $A \in \mathcal{A}$ existieren

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$$

und

$$\mu^-(A) = -\mu(A \cap N).$$

Aus Korollar 1 folgt $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und μ^+, μ^- sind zwei endliche nichtnegative Maße. Dann gilt $\mu^+(N) = \mu^-(P) = 0$, d.h. $\mu^+ \perp \mu^-$. Dies zeigt die Existenz.
Seien $(\tilde{P}, \tilde{N})$ eine weitere Hahn Zerlegung bezüglich μ, für jedem $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \tilde{P}$ gilt

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A) = \mu^+(A).$$

Folglich erhalten man

$$\mu^+(A) = \mu^+(A \cap \tilde{P}) + \mu^+(A \cap \tilde{N}) = \mu^+(A \cap \tilde{P}).$$

Analog ist

$$\mu^-(A) = -\mu^-(A \cap \tilde{N}),$$

so dass die Eindeutigkeit von Jordan-Zerlegung (μ^+, μ^-) bewiesen ist. □

2 Maß mit Dichten- Satz von Radon-Niodym

Es sei beliebiger Maßraum $(\omega, \mathcal{A}, \mu)$ und sei f eine meßbare nichtnegative oder integrierbare Funktion auf ω. In diesem Kapital wollen wir uns das Verhalten dieses Integrals in Abhängigkeit von jedem Menge $A \in \mathcal{A}$ interessieren.

Satz 2.1. *Für jede nichtnegative Funktion f wird durch*

$$v(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

ein Maß auf $A \in \mathcal{A}$ definiert.

Beweis. Es ist $v(\emptyset) = 0$ und $v \geq 0$. Nun zeigen wir, v abzählbare Aktivität folgt. Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise fremder Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt

$$\mathbb{1}_A f = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n} f$$

und aus Satz von der monotonen Konvergenz, folgt

$$v(A) = \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n).$$

Also ein Maß auf $\mathcal{A}$. □

Definition 4. *Ist f eine nichtnegative, $\mathcal{A}$-messbare Funktion auf Ω, so heißt das durch Theorem 2.1 auf $\mathcal{A}$ definierte Maß v das Maß mit der Dichte f bezüglich μ. Es wird auch mit*

$$v = f\mu$$

bezeichnet.

Über den Zusammenhängzwischen μ und v wollen wir die folgende Eingenschften zeigen.

Satz 2.2. *Für je zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktion f, g gilt*

$$f = g \; \mu\text{-fast überall} \Longrightarrow f\mu = g\mu.$$

Ist f oder $g\mu$-integrierbar, so gilt auch die Umkehrung.

Bevor wir diese Aussage beweisen, zurest müssen wir die folgende Lemma beweisen.

Lemma 5. *Für jede nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare Funktion f auf Ω, gilt*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu \Longleftrightarrow f = 0 \; \mu\text{-fast überall.}$$

Beweis. Wegen der Meßbarkeit von f liegt die Menge

$$N = \{f \neq 0\} = \{f > 0\}$$

in $\mathcal{A}$ und wir zeigen,

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \Longleftrightarrow \mu(N) = 0.$$

Sei $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0$. Sei die Folge $A_n = \{f \geq n^{-1}\}, n \in \mathbb{N}$ der Mengen liegt in $\mathcal{A}$, und es gilt $A_n \uparrow N$. Wegen $\mu(N) = \lim \mu(A_n)$, zeigen wir also $\mu(A_n) = 0$ für alle n. Dann gilt $f \geq n^{-1}\mathbb{1}_{A_n}$ und somit

$$0 = \int f \,\mathrm{d}\mu \geq n^{-1}\mu(A_n) \geq 0,$$

also gilt $\mu(N) = \lim \mu(A_n) = 0$.
Sei umgekehrt. Sei $\mu(N) = 0$. Für jede Folge der Funktionen $u_n = n\mathbb{1}_N, n \in \mathbb{N}$ und ist $\int u_n \,\mathrm{d}\mu = 0$. Setzen wir also $g = \sup u_n$, so folgt $u_n \uparrow g$ und aus Satz von der monotonen Konvergenz folgt $\int g \,\mathrm{d}\mu = \sup \int u_n \,\mathrm{d}\mu = 0$. Schließlich ist $f \leq g$ und damit

$$0 \leq \int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu \leq 0,$$

also gilt $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0$. □

Beweis Theorem 2.2

Beweis. Mit f und g stimmen für jede Menge $A \in \mathcal{A}$ auch die Funktionen $\mathbb{1}_A f$ und $\mathbb{1}_A g$ stimmen fast überall herein. Folglich gilt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu.$$

für alle $A \in \mathcal{A}$, also gilt $f\mu = g\mu$.
Zeigen wir die Umkehrung. Sei f μ-integrierbar und $f\mu = g\mu$. Wegen $g \geq 0$ und $\int g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, ist g auch μ-integrierbar.
Wir zeigen, dass die in $\mathcal{A}$ gelegte Menge

$$N = \{f > g\}$$

eine μ-Nullmenge ist.
Für alle $\omega \in N$ ist die Funktion $h(\omega) = f(\omega) - g(\omega)$ definiert und $h > 0$. Also ist die Definition

$$h = \mathbb{1}_N f - \mathbb{1}_N g$$

sinnvoll. Wegen $\mathbb{1}_N f \leq f$ und $\mathbb{1}_N g \leq g$ sind auch die Funktionen $\mathbb{1}_N f$ und $\mathbb{1}_N g$ μ-integrierbar. Wegen $f\mu = g\mu$ besitzen die beiden Funktionen dassselbe μ-Integral, d.h.

$$\int h \,\mathrm{d}\mu = \int_N f \,\mathrm{d}\mu - \int_N g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Heraus folgt $\mu(h) = 0$, wegen Lemma 5, da $N = \{h > 0\}$ gilt. □

Nun kommen wir zu dem angeküngiten Hauptproblem: Auf der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ seien zwei Maße μ und v gegeben. Wie man entscheiden kann, ob v eine Dichte bezüglich μ besitzt. Notwendig hierfür ist die Bedingung, dass jede μ-Nullmenge $A \in \mathcal{A}$ auch eine v-Nullmenge ist.

Definition 5. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und v ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann heißt v absolut stetig bezüglich μ, kurz: μ-stetig, wenn jede μ-Nullmenge auf $\mathcal{A}$ auch eine v-Nullmenge ist. Man schreibt dafur $v \ll \mu$.*

Wir wollen sehen, wie der Begriff der Absolutstetigkeit von Maßen mit dem Begriff der Stetigkeit von Funktionen zusammenhängt. Die nächste Behauptung läßt bereits eine Ähnlichkeit mit der Stetigkeit von Funktionen erahnen.

Satz 2.3. *Gegeben seien endliche Maße μ und v auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$, und v ist genau dann μ-stetig, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ exsistiert eine Zahl $\delta > 0$, dass*

$$\mu(A) \leq \delta \Longrightarrow v(A) \leq \varepsilon,$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Beweis. Aus der Bedingung folgt $v(A) \leq \varepsilon$ für jedem Nullmenge $A \in \mathbb{A}$. Dann gilt $v(A) = 0$ und somit ist v ein μ-stetiges Maß.
Umgekehrt. Zeigen wir, dass v kein μ-stetiges Maß, wenn die Bedingung nicht erfüllt. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eingenschften

$$\mu(A_n) \leq 2^{-n} \text{and} \, v(A_n) > \varepsilon.$$

Setzen wir

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

so für diese Menge aus $\mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A) \leq \mu\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) \leq \sum_{m=n}^{\infty} A_m \leq \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-n+1}.$$

also $\mu(A) = 0$, wenn $n \to \infty$. Andererseits wegen der Endlichkeit von v gilt

$$v(A) = v(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} v(A_n) \geq \varepsilon > 0,$$

gemäß der Lemma von Fatou. Das Maß v daher ist nicht μ-stetig. $\square$

Wie bereits angekügit, ergibt sich die Beantwortung der wichtigen Frage.

Satz 2.4 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Maßraum, und gegeben seien μ σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$ mit $v \ll \mu$. Dann gibt es eine nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare Funktion f mit*

$$v(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Die Funktion f ist eindeutig bestimmt, d.h. Ist $\tilde{f}$ eine weitere Dichte von v bezüglich μ, so gilt $f = \tilde{f}$ μ-fast überall, mit $\mu(\{f \neq \tilde{f}\}) = 0$.

Bemerkung 1. *Man kann in Theorem 2.4 auf die Voraussetzung der σ-Endlichkeit von v verzichten, allerdings ist f dann eine nicht mehr reellwertige Funktion.*

Beispiel 1. *Sei $I = [0, 1]$ und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Teilmengen in I, für welche entweder A oder A^c abzählbar ist. Seien v ein Lesbegue Maß auf $\mathcal{A}$ und μ das Zählmaß auf $\mathcal{A}$. Dann $\emptyset$ ist die einzige Nullmenge, und somit v trivialerweise μ-stetig. Aber kann v keine Dichte bezüglich μ besitzen. Aus $v = f\mu$ mit $f \in L^1(\mu)$ würde nämlich für welche $\omega \in I$ folgen:*

$$0 = v(\{\omega\}) = \int_{\{\omega\}} f \, \mathrm{d}\mu = f(\omega)\mu(\{\omega\}) = f(\omega) \cdot 1 = f(\omega),$$

d.h. f genau 0 ist. Jedoch folgt

$$1 = v(I) = \int_I f \, \mathrm{d}\mu = \int_I 0 \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Widerspruch!

Bemerkung 2. *Mann kann in Theorem 2.4 die Voraussetzung der absolute stetigkeit auf v bezüglich μ nicht verzichten.*

Beispiel 2. *Sei $I = [0, 1]$ und $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller Teilmengen in I. Sei v ein Lesbegue Maß. Betrachten wir das Maß μ mit*

$$\mu(E) = \#(E \cap \mathbb{Q})$$

für alle $E \in I$, d.h. μ nimmt die Anzahl der rationalen Elementen in Menge E und bzw. $\mu(E) = 0$ wie sonst. Wegen $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, erhalten wir

$$[0, 1] = ([0, 1] \cap (I \setminus \mathbb{Q})) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n.$$

Dann folgt μ ein nichnegatives σ-endliches Maß. Jedoch erhalten wir

$$\mu(I \setminus \mathbb{Q}) = 0,$$

und

$$v(I \setminus \mathbb{Q}) = 1,$$

und somit ist v nicht μ-stetig. Wäre $v = f\mu$ mit $f \in L^1(\mu)$, dann erhalten wir

$$0 = v(\{\omega\}) = \int_{\{\omega\}} f \,\mathrm{d}\mu = f(\omega)\mu(\{\omega\}) = f(\omega),$$

also $f(\omega) = 0$ für aller $\omega \in \mathbb{Q}$. Dann aber Wäre $v = 0$, was falsch ist.

Beweis Theorem 2.4:

Beweis. Wir unterscheiden den zwei Fälle.
Fall 1. Wir beschränken uns auf den Fall endlicher Maße μ und v.
Schritt 1. Zuerst betrachten wir das Funktionensystem aller $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen g mit

$$\mathfrak{G} = \left\{ g \geq 0 \,\middle|\, \forall A \in \mathcal{A}, \int g \,\mathrm{d}\mu \leq v(A) \right\}.$$

Da $g \equiv 0$ zu $\mathfrak{G}$ gehört, so dass $\mathfrak{G}$ nicht leer ist.
Schritt 2. Wir vermuten, dass $\mathfrak{G}$ maximales Element enthält und dieses die geforderten Eigenschaften erfüllt.
Setzen wir nun

$$\alpha = \sup_{g \in \mathfrak{G}} \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Man beachten, dass das Supremum endlich ist, weil v endlich ist, d.h.

$$\alpha = \sup_{g \in \mathfrak{G}} \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu \leq v(\Omega) < \infty.$$

Es gibt eine Folge der $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{G}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \tilde{g}_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{g \in \mathfrak{G}} \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.$$

Nun setzen wir auch eine Folge

$$g_n = \max_{1 \geq j \geq n} (\tilde{g}_j),$$

für die wegen $\tilde{g}_n \leq g_n$ die Relation

$$\int \tilde{g}_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int g_n \,\mathrm{d}\mu$$

gelten. Nun zeigen wir, dass mit zwei Funktionen g_1 und g_2 auch deren Maximum zu $\mathfrak{G}$ gehört. Hier setzen wir die Menge $A_1 = \{g_1 \geq g_2\}$ und $A_1 = {A_1}^{\mathrm{c}}$. Dann ergibt sich für jedes $A \in \mathcal{A}$ zu die folgende Umgleichung

$$\begin{aligned}\int_A \max(g_1, g_2)\,\mathrm{d}\mu &= \int_{A\cap A_1} \max(g_1, g_2)\,\mathrm{d}\mu + \int_{A\cap A_2} \max(g_1, g_2)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{A\cap A_1} g_1\,\mathrm{d}\mu + \int_{A\cap A_2} g_2\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq v(A\cap A_1) + v(A\cap A_2) \\ &= v(A)\end{aligned}$$

Mit Induktion beweisen wir, dass g_n in $\mathfrak{G}$ gehört.
Schritt 3. Dann zeigen wir, dass die Funktion $f \in \mathfrak{G}$ existiert mit

$$\int_\omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu$$

Da $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die monoton wachsende Folge und

$$g_n \uparrow f$$

für eine gewisse messbare Funktion $f \geq 0$. Wir zeigen, dass $f \in \mathfrak{G}$ gilt. Für beliebiges $A \in \mathcal{A}$, wegen $\mathbb{1}_A g_n \uparrow \mathbb{1}_A f$ mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} g_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Wegen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{G}$ enthält, ist das Integral von f nach oben beschränkt, d.h.

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu \geq v(A) < \infty,$$

und somit f in $\mathfrak{G}$ gehört
Schritt 4. Dann zeigen wir, dass

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

Wegen $f \in \mathfrak{G}$ gilt

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

Andererseits wegen $g_n \geq \tilde{g}_n$, folgt

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} g_n\,\mathrm{d}\mu \geq \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n\,\mathrm{d}\mu = \sup_{g\in\mathfrak{G}} \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu,$$

d.h.

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \geq \sup_{g\in\mathfrak{G}} \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

Folglich wegen

$$\int_\omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\omega g \,\mathrm{d}\mu$$

gilt das Funktionensystem $\mathfrak{G}$ ein maximales Element enthält.
Schritt 5. Jetzt zeigen wir, dass $v(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Wir nehmen an, dass $v(A) \geq \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ ist und somit

$$\tau(A) = v(A) - \int_A f \,\mathrm{d}\mu, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

ein endliches Maß existiert. Zu zeigen ist $\tau = 0$.
Angenommen, es gilt $\tau(\Omega) > 0$. Da μ als endlich vorausgesetzt wurde, finden wir ein $\underline{\varepsilon > 0}$ mit

$$\tau(\Omega) > \varepsilon\mu(\Omega).$$

Sei (Ω^+, Ω^-) eine Hahn-Zerlegung des signierten Maß $\tau(\Omega) - \varepsilon\mu(\Omega)$. Dann erhalten wir

$$\tau(A) \geq \tau(A \cap \Omega^+) \geq \varepsilon\mu(A \cap \Omega^+)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann existiert eine Funktion $f_0 = f + \varepsilon\mu(\Omega^+)$ und daher bei beliebigem $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_A f_0 \,\mathrm{d}\mu &= \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(A \cap \Omega^+) \\
&\leq \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \tau(A \cap \Omega^+) \\
&\leq \int_A f \,\mathrm{d}\tau(A) \\
&= v(A).
\end{aligned}$$

Dann liegt die Funktion f_0 auch in $\mathfrak{G}$. Wegen $\int f \,\mathrm{d}\mu = \alpha$ und der Definition der α muss auch

$$\int f_0 \,\mathrm{d}\mu = \alpha,$$

woraus

$$\mu(\Omega^+) = 0$$

sein. Wegen $v \ll \mu$ impliziert $v(\Omega^+) = 0$ und foglich $\tau(\Omega^+) = 0$. [1] Deshalb erhatlen wir

$$\begin{aligned}
\tau(\Omega) - \varepsilon\mu(\Omega) &= (\tau - \varepsilon)(\Omega^+) + (\tau - \varepsilon)(\Omega^-) \\
&= (\tau - \varepsilon)(\Omega^-) \leq 0
\end{aligned}$$

[1] Wir merken an, dass dies die einzige Stelle im Beweis ist, an der die Absolutstetigkeit des Maßes v bezüglich μ benutzt wird.

Jedoch ist es Widerspruch an Definition der ε. *Schritt 6.* Es ist noch die Einzigkeit der Radon-Nikodym-Ableitung nachzuweisen. Seien f und g nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare Funktionen mit

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A g \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Es ist zu zeigen, dass hieraus $f = g$ mu-fast überall ist. Setzen wir $A = \{f \geq g\}$ und nun zeigen wir, dass $\mu(A) = 0$. Wegen f und g die $\mathcal{A}$-messbare Funktionen, erhalten wir $\mathbb{1}_A(f - g)$ auch eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion, dann gilt

$$\int \mathbb{1}_A(f-g) \,\mathrm{d}\mu = \int_A (f-g) \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu - \int_A g \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Mit der Lemma 5 folgt $\mu(A) = 0$ und dann ist $f \geq g$ μ-f.ü. Analog zeigt man $f \leq g$ μ-f.ü.
Fall 2. Wir betrachten, dass μ und v σ-endlich sind.
Schritt 1. Wir möchten eine Doppelfolge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = (C_l \cap D_m)_{l,m\in\mathbb{N}}$ mit paarweise disjunkter Mengen zu konstruieren.
Zurest betrachten wir μ und v σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$, und seien die Folgen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ und $\mu(C_n) < \infty$ und $v(D_n) < \infty$. Dann gilt es

$$C_n = C_n \cap \Omega = C_n \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cap D_n,$$

und somit

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap D_n).$$

Sezten wir $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Aufzählung der Elementen auf dolppelfolge $(C_l \cap D_m)_{l,m\in\mathbb{N}}$. Dann ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Folge mit paarweise disjunkter Elementen aus $\mathcal{A}$.
Schritt 2. Setzen wir μ_n, v_n nichtnegative Maße $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu_n(A) = \mu(A \cap B_n) \leq \mu(B_n) < \infty$ und $v_n(A) = v(A \cap B_n) \leq v(B_n) < \infty$, so dass μ_n und v_n endliche sind. Wir zeigen, dass $v_n \ll \mu_n$ ist. Ist $v_n(A) = 0$, so ist $v(A \cap B_n) = 0$, und wegen $v \ll \mu$, folgt $\mu(A \cap B_n) = 0$ und $\mu_n(A) = 0$, und damit $v_n \ll \mu_n$.
Schritt 3. Ist $A \in \mathcal{A}$ eine μ-messbare Menge und $B_n \in \mathcal{A}$, und damit $A \cap B_n$ auch in $\mathcal{A}$ enthält. Folglich ist $A \cap B_n$ μ-messbar und auch μ_n-messbar. Jetzt erfüllt es die Voraussetzung der Theorem 2.4, und existiert es eine Folge der nichtnegativen μ_n-messbaren Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$v_n = \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu_n$$

für alle μ_n-messbare Menge $A \in \mathcal{A}$. Definieren wir f eine nichtnegative μ-messbare Funktion durch $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathbb{1}_{B_n}$ für alle $x \in B_n$. Dann wir zeigen, dass

$$v(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

für jedem $A \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $v(A) < \infty$. Wegen B_n paarweise disjunkt ist, folgt $A \cap B_n$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
v(A) &= v(A \cap \Omega) = v\big(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\big) = v\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap B_n)\big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} v(A \cap B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(A) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n \, \mathrm{d}\mu_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A\cap B_n} f_n \, \mathrm{d}\mu \quad \bigstar \\
&= \int_A \big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \mathbb{1}_{B_n}\big) \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_A f \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Schritt 5. Wir müssen die Gleichung $\bigstar$ beweisen, d.h.

$$\forall A \in \mathcal{A}, \int_A f \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{A\cap B_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Setzen wir eine Elementarfunktion $s = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ für beliebige $A_n \in \mathcal{A}$ und

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu_n = \sup\{\int_A s \, \mathrm{d}\mu_n \big| \, 0 \le f \le f\}$$

$$\int_{A\cap B_n} f \, \mathrm{d}\mu = \sup\Big\{\int_{A\cap B_n} s \, \mathrm{d}\mu \big| \, 0 \le s \le f\Big\}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Sei jede $A_n \in \mathcal{A}$, und somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_A s \, \mathrm{d}\mu_n &= \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \cdot \mu_n(A \cap A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \cdot \mu(A \cap A_n \cap B_n) \\
&= \int_{A\cap B_n} s \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{A\cap B_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Schritt 6. Wir müssen noch die Eindeutigkeit nachweisen. Es gibt g eine nichtnegative, $\mathcal{A}$-messbare Funktion mit

$$\forall A \in \mathcal{A}, v(A) = \int_A g \, \mathrm{d}\mu,$$

und somit gilt

$$\begin{aligned}\int_A f \,\mathrm{d}\mu_n &= \int_{A\cap B_n} f \,\mathrm{d}\mu \\ &= v(A\cap B_n) \\ &= \int_{A\cap B_n} g \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_A g \,\mathrm{d}\mu_m.\end{aligned}$$

Es folgt $f = g$ μ_n-fast überall, wegen μ_n und v_n endlich sind, wie wir in *Fall 1* bewiesen. Es gibt eine Menge $A = \{f \neq g\}$ und zeigen wir, dass $\mu(A) = 0$ ist. Wegen $\mu_n(A) = 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu(A) = \mu(A\cap\Omega) = \mu\big(A \cap \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)\big)\big) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A\cap B_n)\big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

so dass $f = g$ μ-f.ü. gilt. $\square$

Sehr mühsam!

Satz 2.5 (Zerlegungssatz von Lesbegue)**.** *Sind μ und v σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so läßt sich genau eine Weise in der Form $v = v_1 + v_2$ mit Maßen v_1 und v_2 auf $\mathcal{A}$ darstellen, wobei $v_1 \ll \mu$ und $v_2 \perp \mu$ gilt.*