

Introduction 引言

相对论时空观的集中反映: 洛伦兹变换

狭义相对论的时空观

用相对论时空观修正的物理学

狭义相对论与量子场论简介

# PPT写法

吴昭

Email: 570686385@qq.com

重庆大学 电气工程学院

2020-08-01



# 前言

## ● Prerequisites 预修课程:

- 电磁场
- 电机学

## ● Textbook 教材:

- 周衍柏 《理论力学》
- 郭硕鸿 《电动力学》

## ● Reference Books 参考书:

- 朗道 理论力学
- Griffiths Introduction to Electrodynamics



# 前言

## ● Prerequisites 预修课程:

- 电磁场
- 电机学

## ● Textbook 教材:

- 周衍柏 《理论力学》
- 郭硕鸿 《电动力学》

## ● Reference Books 参考书:

- 朗道 理论力学
- Griffiths Introduction to Electrodynamics



# 前言

- **Prerequisitesheight 预修课程:**

- 电磁场
- 电机学

- **Textbook 教材:**

- 周衍柏 《理论力学》
- 郭硕鸿 《电动力学》

- **Reference Books 参考书:**

- 朗道 理论力学
- Griffiths Introduction to Electrodynamics



# CONTENTS

- 1 Introduction
- 2 Lorentz transformation
- 3 spacetime of SR
- 4 用相对论时空观修正的物理学
- 5 狭义相对论与量子场论简介



# CONTENTS

- 1 Introduction
  - 背景与存在问题
  - 解决办法
- 2 Lorentz transformation
- 3 spacetime of SR
- 4 用相对论时空观修正的物理学
- 5 狭义相对论与量子场论简介



# 背景, 问题

- 惯性参照系: 使牛顿力学成立的参照系
- 牛顿力学的时空观: 伽利略变换

$$t' = t, \quad (1.1)$$

$$x' = x + vt, \quad (1.2)$$

$$y' = y, \quad (1.3)$$

$$z' = z. \quad (1.4)$$

- 伽利略相对性原理:



# 背景, 问题

- 惯性参照系: 使牛顿力学成立的参照系
- 牛顿力学的时空观: 伽利略变换

$$t' = t, \quad (1.1)$$

$$x' = x + vt, \quad (1.2)$$

$$y' = y, \quad (1.3)$$

$$z' = z. \quad (1.4)$$

- 伽利略相对性原理:





# 背景, 问题

- 惯性参照系: 使牛顿力学成立的参照系
- 牛顿力学的时空观: 伽利略变换

$$t' = t, \quad (1.1)$$

$$x' = x + vt, \quad (1.2)$$

$$y' = y, \quad (1.3)$$

$$z' = z. \quad (1.4)$$

- 伽利略相对性原理:



# HISTORY

- 惯性系问题
- 速度无穷大问题
- 电磁波: 波动介质问题, 波速问题

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t), \quad (1.5)$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$



# HISTORY

- 惯性系问题
- 速度无穷大问题
- 电磁波: 波动介质问题, 波速问题

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t), \quad (1.5)$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$



# HISTORY

- 惯性系问题
- 速度无穷大问题
- 电磁波: 波动介质问题, 波速问题

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t), \quad (1.5)$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$



# 如何解决?

- 光速不变原理
- 狭义相对性原理: 一切物理规律在不同惯性系下形式相同



# 如何解决?

- 光速不变原理
- 狭义相对性原理: 一切物理规律在不同惯性系下形式相同



# CONTENTS

## 1 Introduction

## 2 Lorentz transformation

## 3 spacetime of SR

## 4 用相对论时空观修正的物理学

## 5 狭义相对论与量子场论简介

- 光速不变性导致间隔不变性
- 由间隔不变, 导出洛伦兹变换



# 事件, 由光信号联系着的事件

- 事件  $(ct, x, y, z)$ . 两个由光联系着的事件, 在  $\Sigma$  与  $\Sigma'$  中分别有

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (2.1)$$

- 一般情况下,  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \neq 0$ , then what is the relationship between them?
- So we still have

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2.$$





# 事件, 由光信号联系着的事件

- 事件  $(ct, x, y, z)$ . 两个由光联系着的事件, 在  $\Sigma$  与  $\Sigma'$  中分别有

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (2.1)$$

- 一般情况下,  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \neq 0$ , then what is the relationship between them?
- So we still have

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2.$$



# 事件, 由光信号联系着的事件

- 事件  $(ct, x, y, z)$ . 两个由光联系着的事件, 在  $\Sigma$  与  $\Sigma'$  中分别有

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (2.1)$$

- 一般情况下,  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \neq 0$ , then what is the relationship between them?
- So we still have

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2.$$



# 某个空间下最重要的不变性/标量: 间隔

- 因为  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  这个量的特殊性、重要性, 我们将它起个名字, 叫间隔, 记为

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.2)$$

- 逆变矢量  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ ,  
协变矢量  $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$ ,
- 所以我们可得

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu.$$



## 某个空间下最重要的不变性/标量: 间隔

- 因为  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  这个量的特殊性、重要性, 我们将它起个名字, 叫间隔, 记为

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.2)$$

- 逆变矢量  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ ,  
协变矢量  $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$ ,
- 所以我们可得

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu.$$



## 某个空间下最重要的不变性/标量: 间隔

- 因为  $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$  这个量的特殊性、重要性, 我们将它起个名字, 叫间隔, 记为

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.2)$$

- 逆变矢量  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ ,  
协变矢量  $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$ ,
- 所以我们可得

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu.$$



# 不同时空具有不同的度规

- 我们引入以下二阶对称张量

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

称为度规,

- 就可将间隔进一步表为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

- 度规在广义相对论中, 具有更重要的作用.



# 不同时空具有不同的度规

- 我们引入以下二阶对称张量

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

称为度规,

- 就可将间隔进一步表为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

- 度规在广义相对论中, 具有更重要的作用.



# 不同时空具有不同的度规

- 我们引入以下二阶对称张量

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

称为度规,

- 就可将间隔进一步表为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

- 度规在广义相对论中, 具有更重要的作用.





# 事件变换的一般关系

- 简单分析, 不难得知, 两个惯性坐标系中看同一个事件的坐标关系为

$$ct' = act + bx, \quad (2.4)$$

$$x' = Act + Bx, \quad (2.5)$$

$$y' = y, \quad (2.6)$$

$$z' = z. \quad (2.7)$$

- 利用间隔不变性  $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$ , 即有

$$\left. \begin{aligned} a^2 - A^2 &= 1 \\ b^2 - B^2 &= -1 \\ ab - AB &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = B, A = b, \\ a^2 - b^2 = 1. \end{cases}$$



# 事件变换的一般关系

- 简单分析, 不难得知, 两个惯性坐标系中看同一个事件的坐标关系为

$$ct' = act + bx, \quad (2.4)$$

$$x' = Act + Bx, \quad (2.5)$$

$$y' = y, \quad (2.6)$$

$$z' = z. \quad (2.7)$$

- 利用间隔不变性  $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$ , 即有

$$\left. \begin{aligned} a^2 - A^2 &= 1 \\ b^2 - B^2 &= -1 \\ ab - AB &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = B, A = b, \\ a^2 - b^2 = 1. \end{cases}$$



# 洛伦兹变换

- 由前述结果, 可将变换进一步整理作

$$ct' = act + bx, \quad (2.8)$$

$$x' = bct + ax; \quad (2.9)$$

注意其中  $a^2 - b^2 = 1$ .

- $\Sigma'$  中看自己原点的坐标恒为 0,  $\Sigma$  中看它是  $-vt$ , 于是我们有

$$0 = bct - avt; \quad (2.10)$$

即

$$\frac{b}{a} = \frac{v}{c} := \beta.$$



# 洛伦兹变换

- 由前述结果, 可将变换进一步整理作

$$ct' = act + bx, \quad (2.8)$$

$$x' = bct + ax; \quad (2.9)$$

注意其中  $a^2 - b^2 = 1$ .

- $\Sigma'$  中看自己原点的坐标恒为 0,  $\Sigma$  中看它是  $-vt$ , 于是我们有

$$0 = bct - avt; \quad (2.10)$$

即

$$\frac{b}{a} = \frac{v}{c} := \beta.$$



# 洛伦兹变换

- 由前述结果, 我们最终解得

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} := \gamma, \quad (2.11)$$

$$b = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \beta\gamma. \quad (2.12)$$



# 洛伦兹变换

- So at last, we get the final form of the Lorentz transformation:

$$\begin{cases} ct' = \frac{ct + \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x' = \frac{vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z; \end{cases} \quad (2.13)$$

- Lorentz boost.



# 洛伦兹变换

- So at last, we get the final form of the Lorentz transformation:

$$\begin{cases} ct' = \frac{ct + \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x' = \frac{vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z; \end{cases} \quad (2.13)$$

- Lorentz boost.



# 洛伦兹变换

- 我们还可将上述变换用矩阵形式表为

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (2.14)$$





# CONTENTS

## 1 Introduction

## 2 Lorentz transformation

## 3 spacetime of SR

## 4 用相对论时空观修正的物理学

## 5 狭义相对论与量子场论简介

- 动尺收缩, 车库佯谬; 动“程”延缓, 孪生子佯谬
- 时空图, 因果律, 同时的相对性
- 抵达宇宙尽头; 与过去人与未来人互动



# 动尺收缩

- 洛伦兹变换, 将使我们发现一个全新的世界观; 同时, 像两个铁球同时落地一样, 它将再一次更深刻地警醒我们: 感官体验是粗浅的, 更精确的规律依赖于更精确的现象的获得.
- 我们假设,  $\Sigma'$  系上有一根棍, 长为  $L'$ , 问, 在  $\Sigma$  上看来, 它长  $L$  是多少?

$$x'_1 = \gamma\beta ct + \gamma x_1, \quad (3.1)$$

$$x'_2 = \gamma\beta ct + \gamma x_2, \quad (3.2)$$

两式相减即得

$$L' = \gamma L, \text{ or } L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L'.$$



# 动尺收缩

- 洛伦兹变换, 将使我们发现一个全新的世界观; 同时, 像两个铁球同时落地一样, 它将再一次更深刻地警醒我们: 感官体验是粗浅的, 更精确的规律依赖于更精确的现象的获得.
- 我们假设,  $\Sigma'$  系上有一根棍, 长为  $L'$ , 问, 在  $\Sigma$  上看来, 它长  $L$  是多少?

$$x'_1 = \gamma\beta ct + \gamma x_1, \quad (3.1)$$

$$x'_2 = \gamma\beta ct + \gamma x_2, \quad (3.2)$$

两式相减即得

$$L' = \gamma L, \text{ or } L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L'.$$



# 关于长度的几个佯谬

- 车库到底能不能装下车子? 两端下雨的同时/不同时性;
- 长棍到底会不会掉下冰缝? 重力改成两个人拉 (重力想象成两个一直拉, 下同); 拉的同时/不同时性;
- 电路到底会不会被接通? 光传播有时间;
- 潜水艇是上浮还是下沉? 重力全向心或无重力下, 无浮力; 地面上 (海洋不下坠情况下): 浮力不基本, 是由大量水分子向下运动产生的, 光速穿行的飞船, 水分子来不及下移, 浮力规律不再是老样子. 前面说的, 有待商榷. 浮力对上下面的作用, 可以看成是瞬时的. 实现情况, 水在艇推动下产生形变与力, 不构成疑难; 在水是理想水的情况下, 这意思就是, 推开静之水/阻碍物, 却不受到任何反作用, 假设错误. 所以即便存在理想水 (被压不爆炸), 也不存在这种理想移动.



# 关于长度的几个佯谬

- 车库到底能不能装下车子? 两端下雨的同时/不同时性;
- 长棍到底会不会掉下冰缝? 重力改成两个人拉 (重力想象成两个一直拉, 下同); 拉的同时/不同时性;
- 电路到底会不会被接通? 光传播有时间;
- 潜水艇是上浮还是下沉? 重力全向心或无重力下, 无浮力; 地面上 (海洋不下坠情况下): 浮力不基本, 是由大量水分子向下运动产生的, 光速穿行的飞船, 水分子来不及下移, 浮力规律不再是老样子. 前面说的, 有待商榷. 浮力对上下面的作用, 可以看成是瞬时的. 实现情况, 水在艇推动下产生形变与力, 不构成疑难; 在水是理想水的情况下, 这意思就是, 推开静之水/阻碍物, 却不受到任何反作用, 假设错误. 所以即便存在理想水 (被压不爆炸), 也不存在这种理想移动.



# 关于长度的几个佯谬

- 车库到底能不能装下车子? 两端下雨的同时/不同时性;
- 长棍到底会不会掉下冰缝? 重力改成两个人拉 (重力想象成两个一直拉, 下同); 拉的同时/不同时性;
- 电路到底会不会被接通? 光传播有时间;
- 潜水艇是上浮还是下沉? 重力全向心或无重力下, 无浮力; 地面上 (海洋不下坠情况下): 浮力不基本, 是由大量水分子向下运动产生的, 光速穿行的飞船, 水分子来不及下移, 浮力规律不再是老样子. 前面说的, 有待商榷. 浮力对上下面的作用, 可以看成是瞬时的. 实现情况, 水在艇推动下产生形变与力, 不构成疑难; 在水是理想水的情况下, 这意思就是, 推开静之水/阻碍物, 却不受到任何反作用, 假设错误. 所以即便存在理想水 (被压不爆炸), 也不存在这种理想移动.



# 关于长度的几个佯谬

- 车库到底能不能装下车子? 两端下雨的同时/不同时性;
- 长棍到底会不会掉下冰缝? 重力改成两个人拉 (重力想象成两个一直拉, 下同); 拉的同时/不同时性;
- 电路到底会不会被接通? 光传播有时间;
- 潜水艇是上浮还是下沉? 重力全向心或无重力下, 无浮力; 地面上 (海洋不下坠情况下): 浮力不基本, 是由大量水分子向下运动产生的, 光速穿行的飞船, 水分子来不及下移, 浮力规律不再是老样子. 前面说的, 有待商榷. 浮力对上下面的作用, 可以看成是瞬时的. 实现情况, 水在艇推动下产生形变与力, 不构成疑难; 在水是理想水的情况下, 这意思就是, 推开静之水/阻碍物, 却不受到任何反作用, 假设错误. 所以即便存在理想水 (被压不爆炸), 也不存在这种理想移动.



# 动“程”延缓, 孪生子佯谬

- 我们假设在  $\Sigma$  系上某固定点处, 发生一段进程, 如吸烟, 则有

$$ct'_1 = \gamma ct_1 + \beta \gamma x, \quad (3.3)$$

$$ct'_2 = \gamma ct_2 + \beta \gamma x, \quad (3.4)$$

进而得知

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (3.5)$$

- 到底谁更年轻, 谁更老?
- 双引信爆炸问题: 会不会炸?





# 动“程”延缓, 孪生子佯谬

- 我们假设在  $\Sigma$  系上某固定点处, 发生一段进程, 如吸烟, 则有

$$ct'_1 = \gamma ct_1 + \beta \gamma x, \quad (3.3)$$

$$ct'_2 = \gamma ct_2 + \beta \gamma x, \quad (3.4)$$

进而得知

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (3.5)$$

- 到底谁更年轻, 谁更老?
- 双引信爆炸问题: 会不会炸?



# 动“程”延缓, 孪生子佯谬

- 我们假设在  $\Sigma$  系上某固定点处, 发生一段进程, 如吸烟, 则有

$$ct'_1 = \gamma ct_1 + \beta \gamma x, \quad (3.3)$$

$$ct'_2 = \gamma ct_2 + \beta \gamma x, \quad (3.4)$$

进而得知

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (3.5)$$

- 到底谁更年轻, 谁更老?
- 双引信爆炸问题: 会不会炸?



# (某事件的) 时空图, 光锥

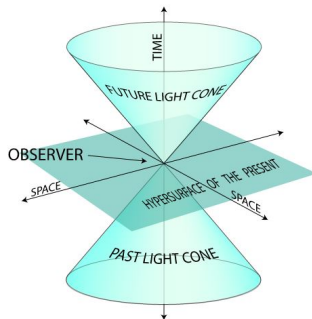


Figure 3.1: 间隔/时空区域的划分.



# 其它诸事件与某事件的间隔的分类

- 类光间隔  $ds^2 = 0$ , 光锥面
- 类时间隔  $ds^2 > 0$ , 光锥内: 绝对未来, 绝对过去
- 类空间隔  $dx^2 < 0$ , 光锥外: 回到未来, 突破因果?



# 其它诸事件与某事件的间隔的分类

- 类光间隔  $ds^2 = 0$ , 光锥面
- 类时间隔  $ds^2 > 0$ , 光锥内: 绝对未来, 绝对过去
- 类空间隔  $dx^2 < 0$ , 光锥外: 回到未来, 突破因果?



# 其它诸事件与某事件的间隔的分类

- 类光间隔  $ds^2 = 0$ , 光锥面
- 类时间隔  $ds^2 > 0$ , 光锥内: 绝对未来, 绝对过去
- 类空间隔  $dx^2 < 0$ , 光锥外: 回到未来, 突破因果?



# 因果律, 相对与绝对

- 因果律不可破: 有因果关系的事次序必不可变; 同时相对
- 四维量的三维分量观察: 长度, 时间相对
- 四维间隔标量, 四维坐标矢量, 四维速度/动量矢量, 绝对.



# 因果律, 相对与绝对

- 因果律不可破: 有因果关系的事次序必不可变; 同时相对
- 四维量的三维分量观察: 长度, 时间相对
- 四维间隔标量, 四维坐标矢量, 四维速度/动量矢量, 绝对.





# 因果律, 相对与绝对

- 因果律不可破: 有因果关系的事次序必不可变; 同时相对
- 四维量的三维分量观察: 长度, 时间相对
- 四维间隔标量, 四维坐标矢量, 四维速度/动量矢量, 绝对.



# 抵达宇宙尽头; 与过去人与未来人互动

抵达宇宙尽头; 与过去人与未来人互动

◀ back



# CONTENTS

## 1 Introduction

## 2 Lorentz transformation

## 3 spacetime of SR

## 4 用相对论时空观修正的物理学

## 5 狭义相对论与量子场论简介

- 相对论力学: 从四维协变量到质能等价
- 电磁学天生相对论协变



# 四维速度矢量

- 除了坐标四维矢量外, 最简单的是速度四维矢量 后者定义为

$$V^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(c, \mathbf{V}). \quad (4.1)$$

- 为什么这样做? 验证: 两个矢量合成一个标量:

$$V^\mu V_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 V^2 = c^2.$$



## 四维速度矢量

- 除了坐标四维矢量外, 最简单的是速度四维矢量 后者定义为

$$V^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(c, \mathbf{V}). \quad (4.1)$$

- 为什么这样做? 验证: 两个矢量合成一个标量:

$$V^\mu V_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 V^2 = c^2.$$



# 四维动量矢量

- 于是, 动量四维矢量我们定义如下

$$\begin{aligned} p^\mu &:= m_0 V^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \mathbf{V}) \\ &= \left( \frac{\gamma m_0 c^2}{c}, \mathbf{p} \right) = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right); \end{aligned} \quad (4.2)$$

- 上式中取  $E = \gamma m_0 c^2$  的原因, 是作泰勒展开可以发现  $\gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$ .



## 四维动量矢量

- 于是, 动量四维矢量我们定义如下

$$\begin{aligned} p^\mu &:= m_0 V^\mu = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \mathbf{V}) \\ &= \left( \frac{\gamma m_0 c^2}{c}, \mathbf{p} \right) = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right); \end{aligned} \quad (4.2)$$

- 上式中取  $E = \gamma m_0 c^2$  的原因, 是作泰勒展开可以发现  $\gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$ .



# 伟大的质能等价现身

- 于是我们发现, 当物体静止时, 仍有

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (4.3)$$

的能量, 这称为质能等价;

- 而  $\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$ , 即

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

称为能动关系.





# 伟大的质能等价现身

- 于是我们发现, 当物体静止时, 仍有

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (4.3)$$

的能量, 这称为质能等价;

- 而  $\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2$ , 即

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4,$$

称为能动关系.



# 麦克斯韦方程的洛伦兹协变形式

- 问: 电磁学规律, 即麦克斯韦方程, 是否洛伦兹协变?
- 麦克斯韦方程可写为

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\nu}, \quad (4.4)$$

$$\partial_{\mu} F_{\nu\rho} + \partial_{\nu} F_{\rho\mu} + \partial_{\rho} F_{\mu\nu} = 0; \quad (4.5)$$

即电磁学规律天生是四维协变的。



# 麦克斯韦方程的洛伦兹协变形式

- 问: 电磁学规律, 即麦克斯韦方程, 是否洛伦兹协变?
- 麦克斯韦方程可写为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (4.4)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0; \quad (4.5)$$

即电磁学规律天生是四维协变的.



# 麦克斯韦方程的洛伦兹协变形式

- 万有引力如何?
- Welcome to the lessons of 童校长!



# 麦克斯韦方程的洛伦兹协变形式

- 万有引力如何?
- Welcome to the lessons of 童校长!



# CONTENTS

## 1 Introduction

## 2 Lorentz transformation

## 3 spacetime of SR

## 4 用相对论时空观修正的物理学

## 5 狭义相对论与量子场论简介

- 能动关系: 量子化的出发点
- 自旋与场的关系



# 非相对论量子力学

- 一般所谓的量子力学, 指的是非相对论量子力学. How to get the Schrodinger's equation?
- 替换原则: 在经典能动关系  $T + V = E$  中作代换  $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ ,  $E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ , 并作用在波函数上, 就得

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) \quad (5.1)$$

此即薛定谔方程。



# 非相对论量子力学

- 一般所谓的量子力学, 指的是非相对论量子力学. How to get the Schrodinger's equation?
- 替换原则: 在经典能动关系  $T + V = E$  中作代换  $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$ ,  $E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ , 并作用在波函数上, 就得

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) \quad (5.1)$$

此即薛定谔方程.





# 相对论量子力学

- 相对论能动关系, 我们再次写出为

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 c^2, \text{ or } p^2 - m^2 = 0. \quad (5.2)$$

- 仍按之前的替换原则, 或现在紧凑地写为  $p^\mu = i\partial^\mu$ ,  $p_\mu = i\partial_\mu$ , 并作用在波函数上, 就得

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0. \quad (5.3)$$

此即 Klein-Gordon 方程.



# 相对论量子力学

- 相对论能动关系, 我们再次写出为

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 c^2, \text{ or } p^2 - m^2 = 0. \quad (5.2)$$

- 仍按之前的替换原则, 或现在紧凑地写为  $p^\mu = i\partial^\mu$ ,  $p_\mu = i\partial_\mu$ , 并作用在波函数上, 就得

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0. \quad (5.3)$$

此即 Klein-Gordon 方程.



# 自旋与场的关系: 群表示论

- 双曲三角函数有

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1;\end{aligned}\tag{5.4}$$

- 而我们恰有  $\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1$ , 所以若我们令

$$\gamma = \cosh \zeta, \quad \beta\gamma = \sinh \zeta,$$

就可得



# 自旋与场的关系: 群表示论

- 双曲三角函数有

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1;\end{aligned}\tag{5.4}$$

- 而我们恰有  $\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1$ , 所以若我们令

$$\gamma = \cosh \zeta, \quad \beta\gamma = \sinh \zeta,$$

就可得



# 自旋与场的关系: 群表示论

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta & 0 & 0 \\ \sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
 &= \exp \begin{bmatrix} 0 & \zeta & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$



# 自旋与场的关系: 群表示论

于是一个一般的洛伦兹 boost 就是

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \\ \zeta_x & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_y & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$



# 自旋与场的关系: 群表示论

洛伦兹变换的连续变换, 有六个, 三个 **boost**, 以及三个旋转; 后者以绕  $Z$  轴正方向的旋转为例, 为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \exp \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



# 自旋与场的关系: 群表示论

所以全部六个洛伦兹变换就可写为:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \\ \zeta_x & 0 & \theta_z & -\theta_y \\ \zeta_y & -\theta_z & 0 & \theta_x \\ \zeta_z & \theta_y & -\theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad (5.6)$$





# 自旋与场的关系: 群表示论

- 洛伦兹变换的含义? 对矢量的变换作用
- 群表示得出自旋与场的关系: 洛伦兹变换对其它量的变换
- 狄拉克方程的严格导出.



# 自旋与场的关系: 群表示论

- 洛伦兹变换的含义? 对矢量的变换作用
- 群表示得出自旋与场的关系: 洛伦兹变换对其它量的变换
- 狄拉克方程的严格导出。



# 自旋与场的关系: 群表示论

- 洛伦兹变换的含义? 对矢量的变换作用
- 群表示得出自旋与场的关系: 洛伦兹变换对其它量的变换
- 狄拉克方程的严格导出.



# 末片

- 感谢大家!
- 你是你的大学, 与万门一起进步!



# 末片

- 感谢大家!
- 你是你的大学, 与万门一起进步!

