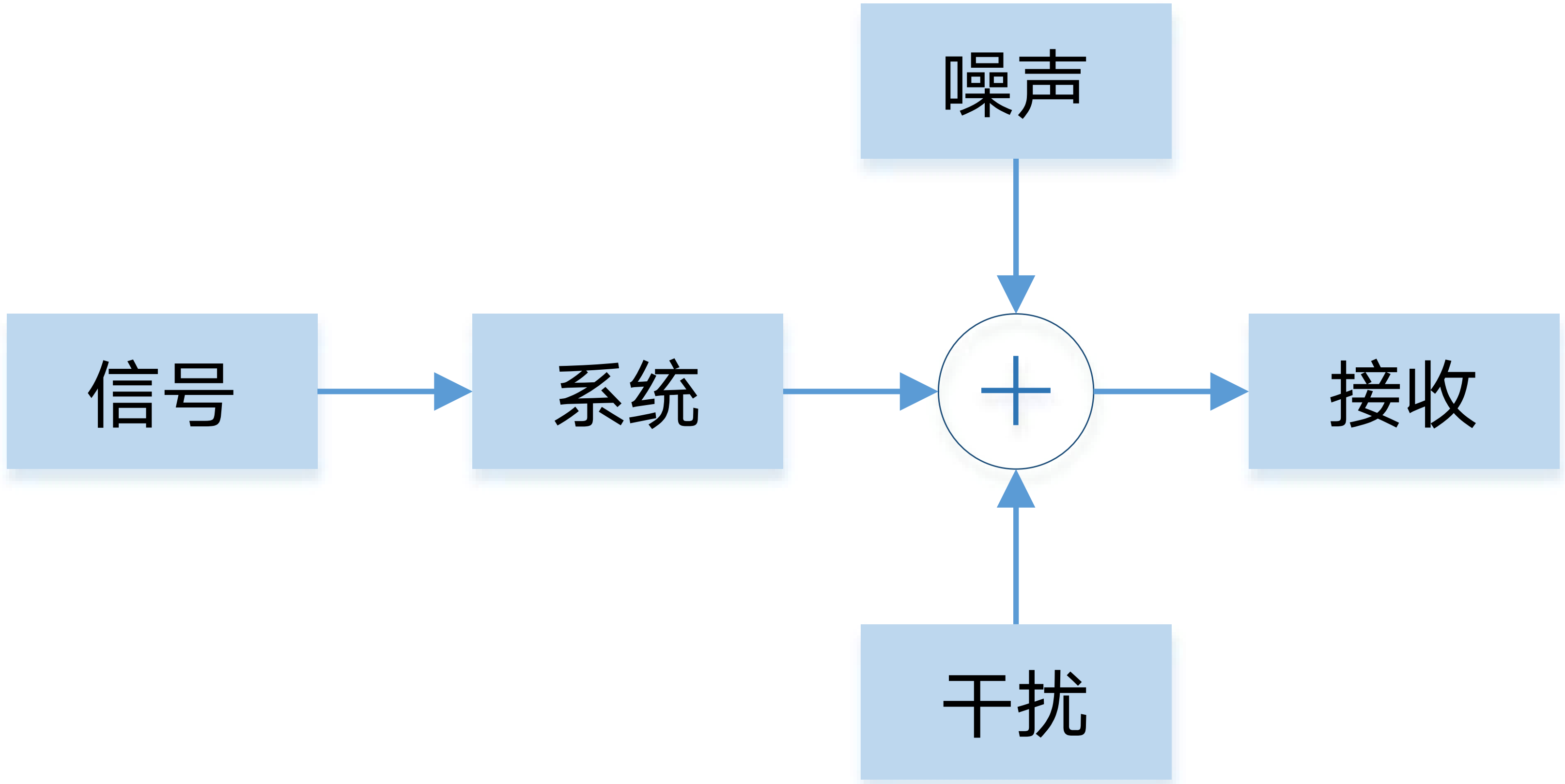
声纳与雷达技术（估计篇）
6/8

浙江大学海洋学院

2023.12.20

- 历史篇
- 入门篇
- 物理篇
- 波形篇
- 检测篇
- 估计篇
- 应用篇



最佳接收

信号、噪声、干扰、系统

内容提纲

❑经典估计	Classical Estimation
➤最小均方误差估计	Minimum Mean Square Error Estimation - MMSE
➤最小方差无偏估计	Minimum Variance Unbiased Estimation - MVU （CRB）
➤线性最小均方误差估计	Linear Minimum Mean Square Error Estimation - LMMSE
➤最佳线性无偏估计	Best Linear Unbiased Estimation - BLUE（CRB）
➤最小二乘估计	Least Square Estimation - LSE
➤矩估计	Moment Estimation
❑贝叶斯估计	Bayesian Estimation
➤最小均方误差估计	Minimum Mean Square Error Estimation - MMSE
➤最大后验估计	Maximum a Posteriori Estimation – MAP
➤最大似然估计	Maximum Likelihood Estimation – MLE
➤最大似然比估计	Maximum Likelihood Ratio Estimation – MLE
❑声纳估计	Sonar Estimation
➤距离估计器 –匹配滤波	Matched Filter
➤方位估计器 –波束形成	Beamformer

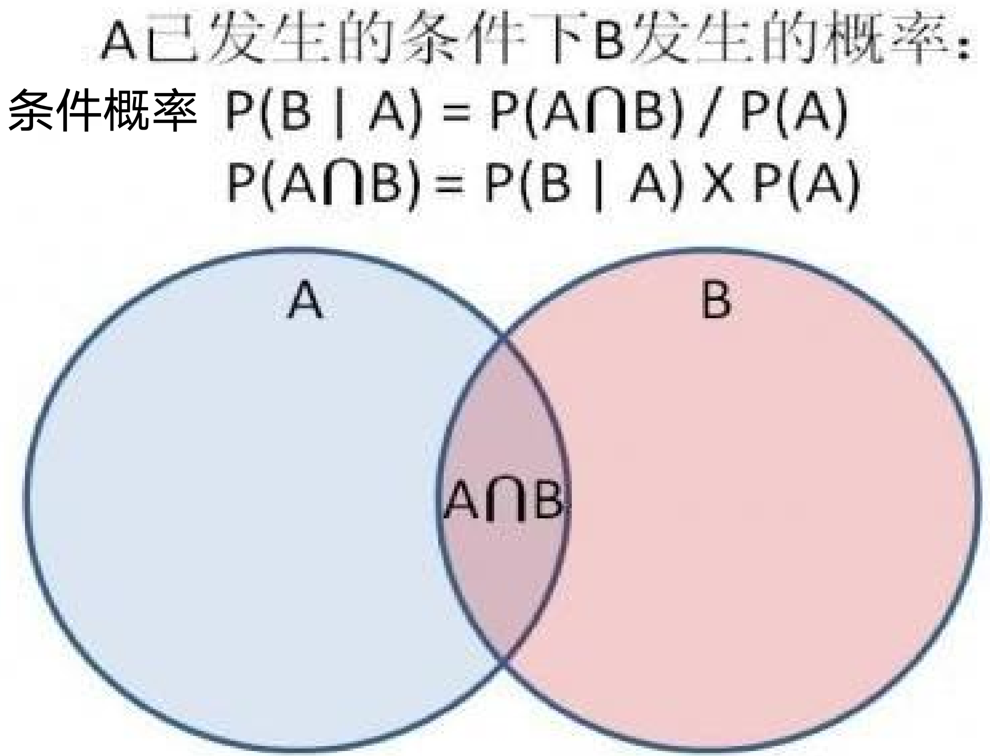
Cramér–Rao bound, CRB

Cramér–Rao lower bound (CRLB)

贝叶斯Bayes公式→贝叶斯学派

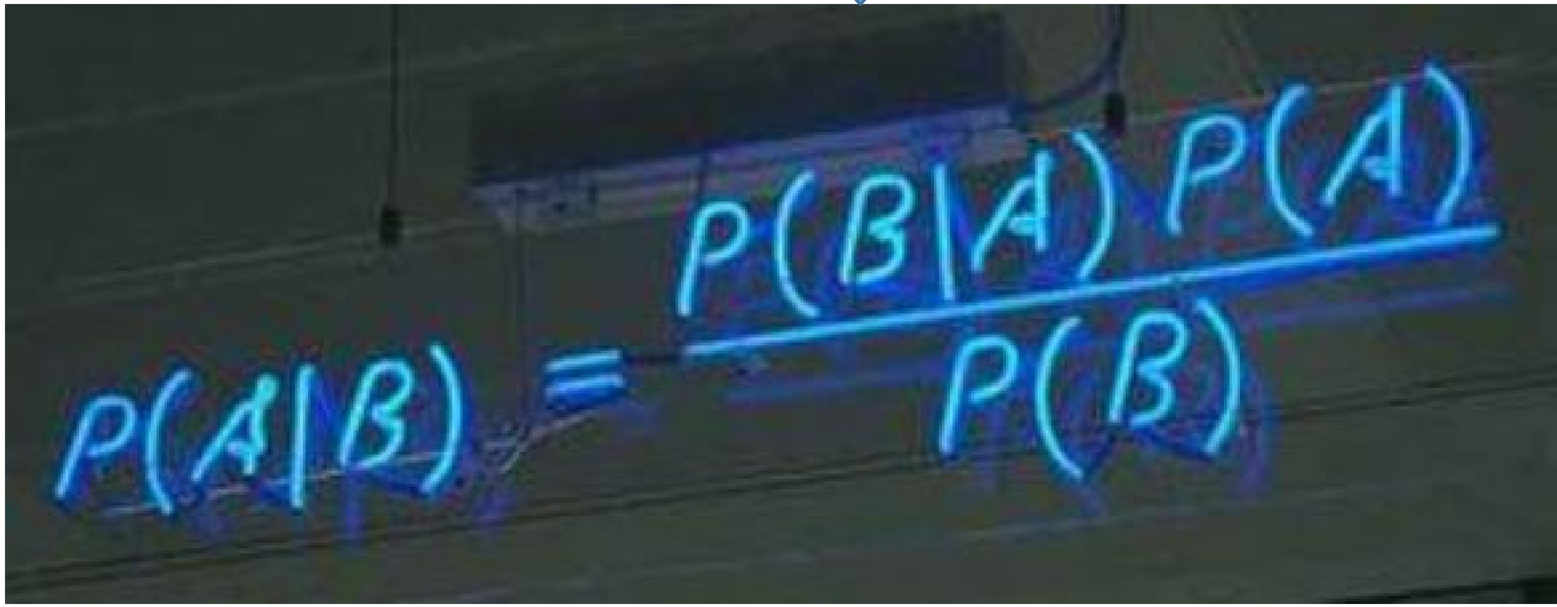
- 后验概率 P(A|B) = 先验概率×似然度
- 先验概率 P(A)
- 似然度　P(B|A)/P(B)

A果，B因



条件概率、全概率

P(AB)= P(A|B) P(B)= P(B|A) P(A)



6、声纳参数估计

回波窄带信号

$$s_r(t) = A_r a(t-t_d)\cos[2\pi(f_0+f_d)(t-t_d)+\phi(t-t_d)]$$

回波基带复包络

$$u_r(t) = A_r e^{-j2\pi f_0 t_d} u(t-t_d) e^{j2\pi f_d (t-t_d)}$$

时延 Time Delay-距离　多普勒频移 Doppler Shift-速度

$$t_d = 2R/c \qquad f_d = -(2/\lambda)V_r$$

■距离

■速度

■方位

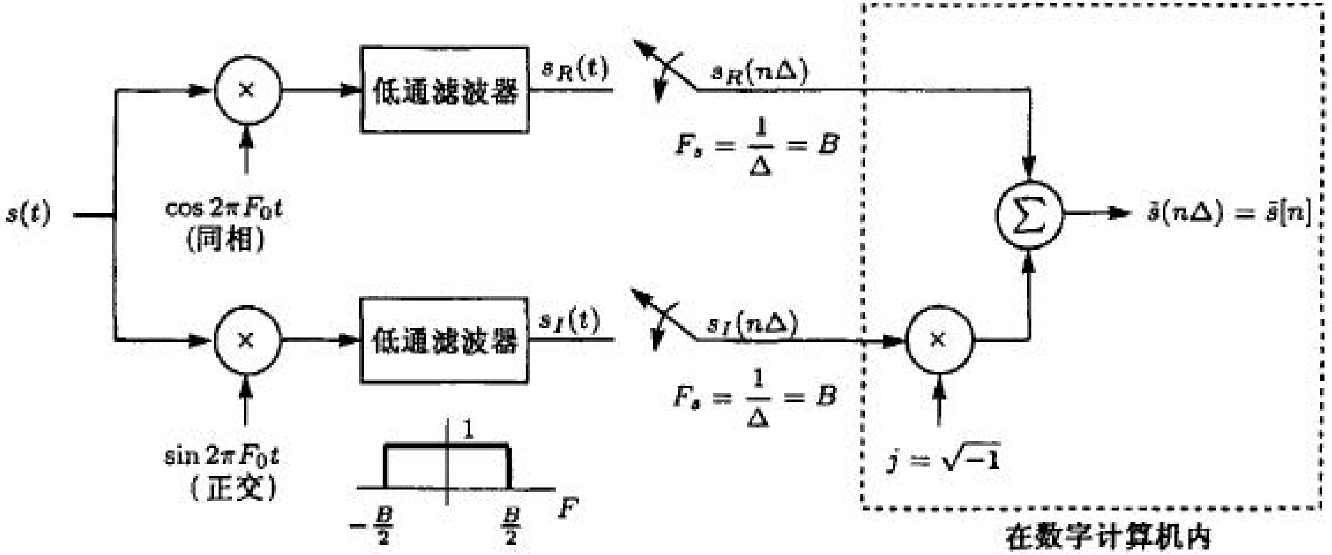
□正交解调　Orthogonal Demodulation

□数字下变频　Digital Down Convertor

□希尔伯特变换Hilbert Transform

$$\tilde{\mathbf{x}} \sim \mathcal{CN}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{C}_{\tilde{x}})$$

$$p(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\pi^n \det(\mathbf{C}_{\tilde{x}})} \exp\left[-(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\boldsymbol{\mu}})^H \mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\boldsymbol{\mu}})\right]$$



参量空间： 需要接收端作出估计的参量集合

观测空间： 接收端收到的观测信号的集合

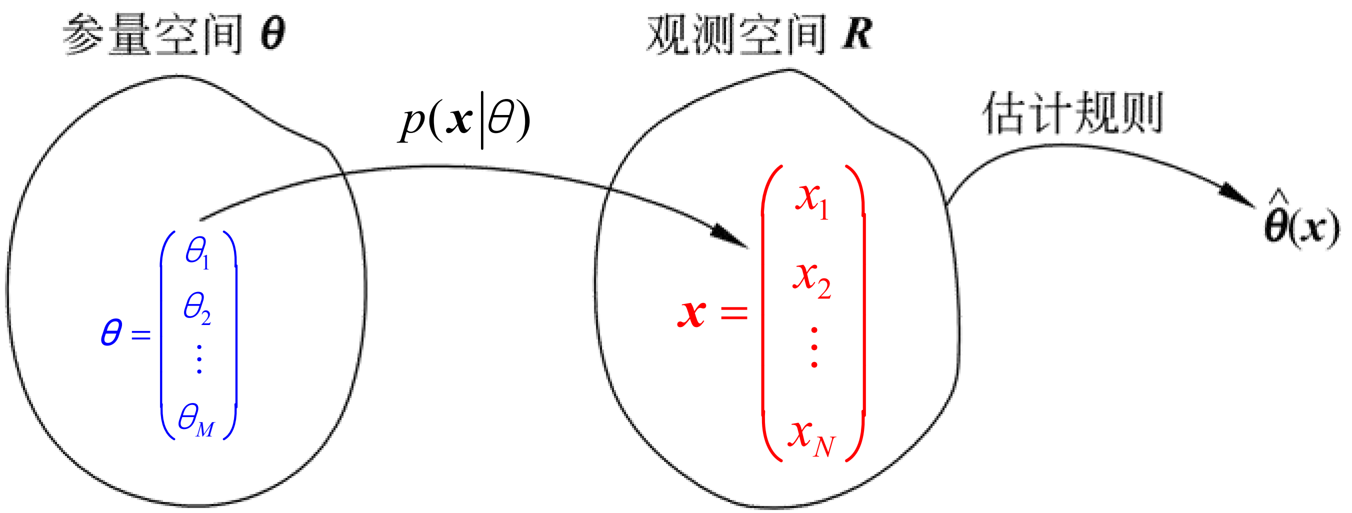
概率映射： 信源发送信号到接收端过程中，会有噪声的影响，观测信号中包含被估计向量的信息，所以观测信号是以被估计向量为参数的随机向量，用$p(x|\theta)$ 来描述。

估计规则： 利用被估计向量的先验知识和观测信号的统计特性，根据指标要求，构造观测向量的函数来定义估计量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})=g(x_1,x_2,\cdots,x_N)$

估计性能： 无偏性、有效性、一致性、充分性

均值 方差 均方误差

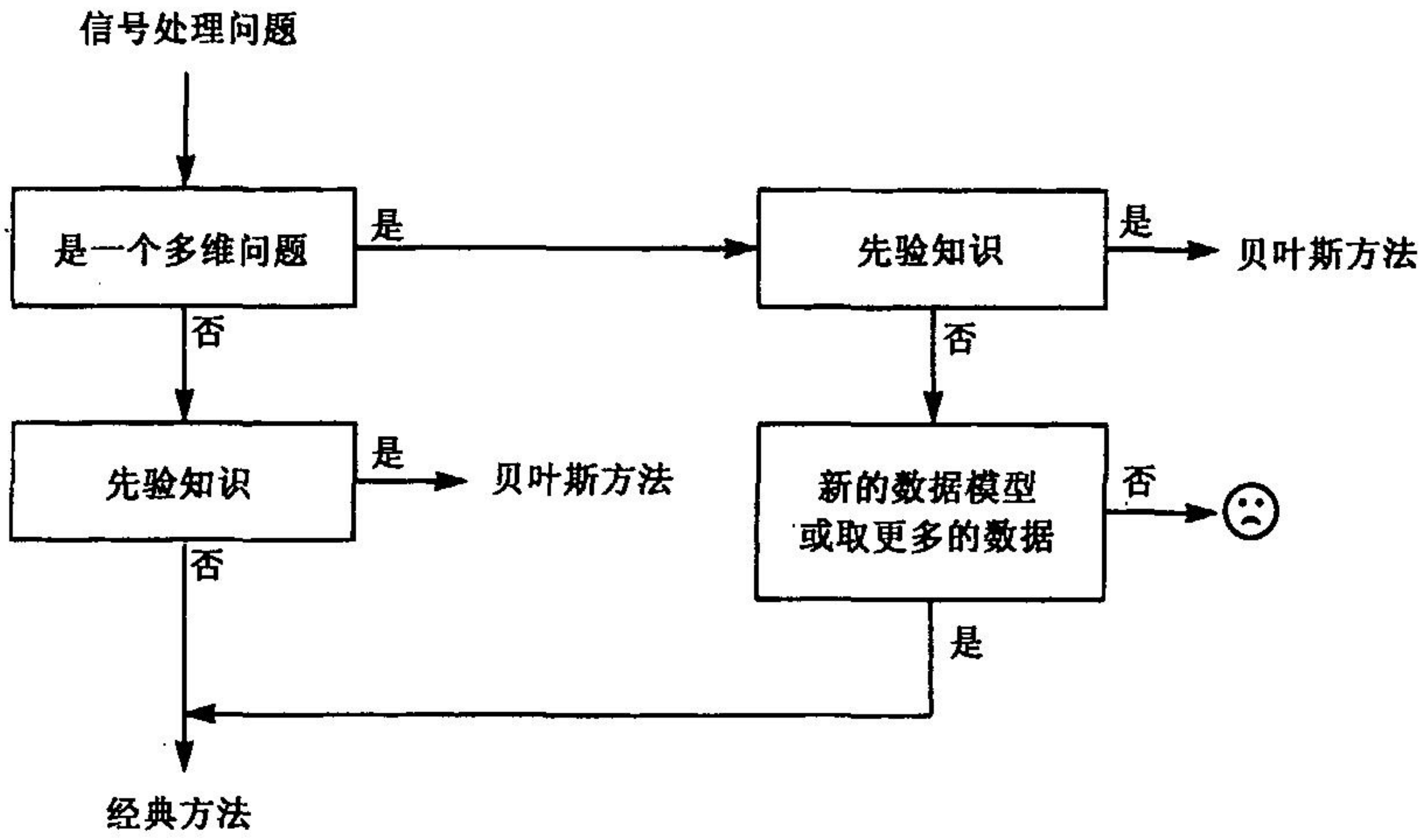
$$\mu_{\hat{\theta}}=\mathrm{E}(\hat{\theta}),\quad \sigma_{\hat{\theta}}^2=\mathrm{Var}(\hat{\theta})=\mathrm{E}[(\hat{\theta}-\mu_{\hat{\theta}})^2],\quad \varepsilon_{\hat{\theta}}^2=\mathrm{E}[(\theta-\hat{\theta})^2]$$



- 参量空间、概率映射、观测空间、估计准则
- 概率映射函数完整描述含有被估计向量信息时观测向量统计特性
- 数据模型选择原则：1复杂性，足以描述数据基本特征；2简单性，足以允许估计最佳且易实现；3线性， **x=Hθ+w**，最优估计解析解

经典估计 vs 贝叶斯估计

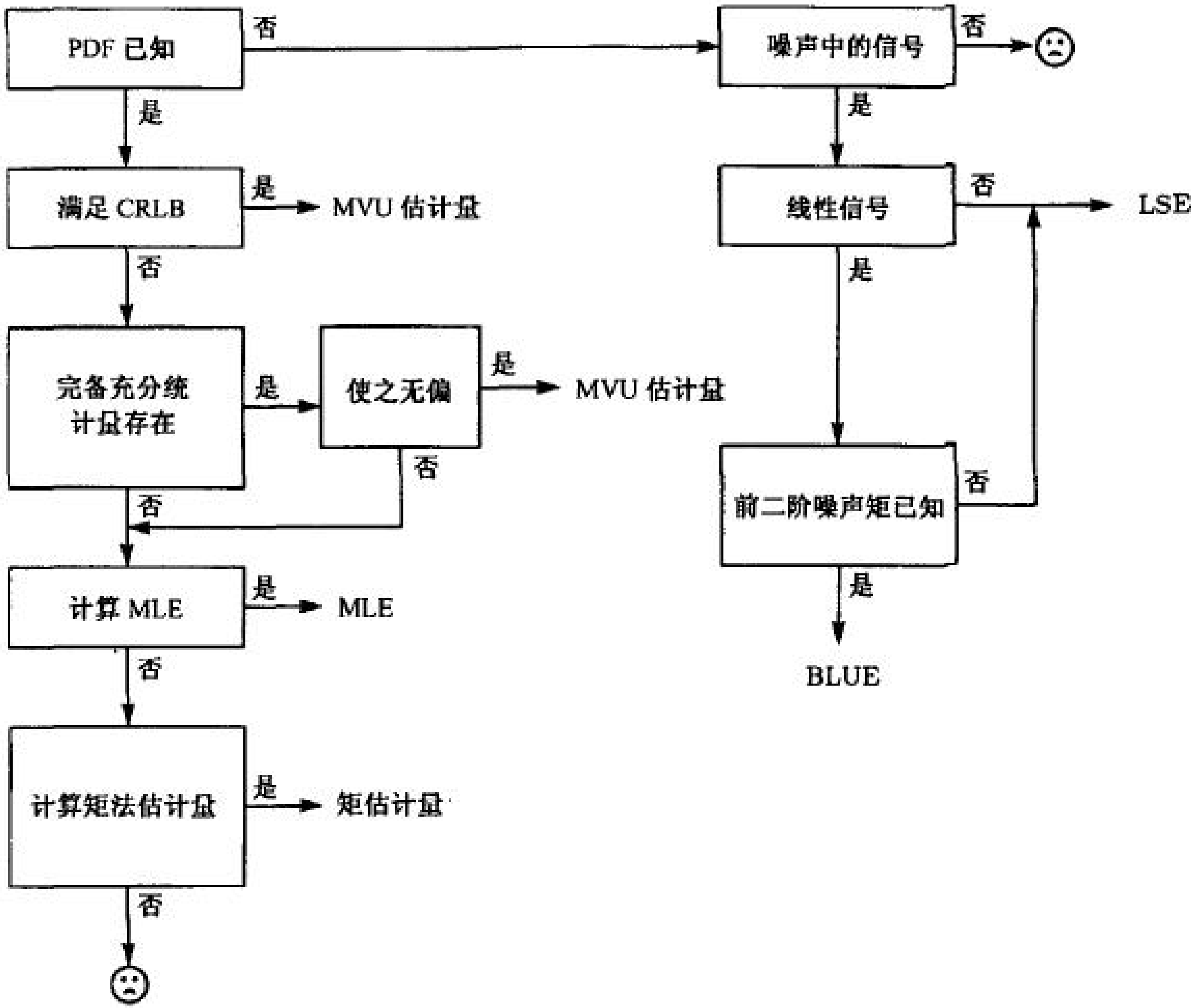
- 经典估计
  未知的确定向量估计
- 贝叶斯估计
  未知的随机向量估计



多维问题？先验知识？ 新的数据模型或更多的数据？

6.1、经典估计方法

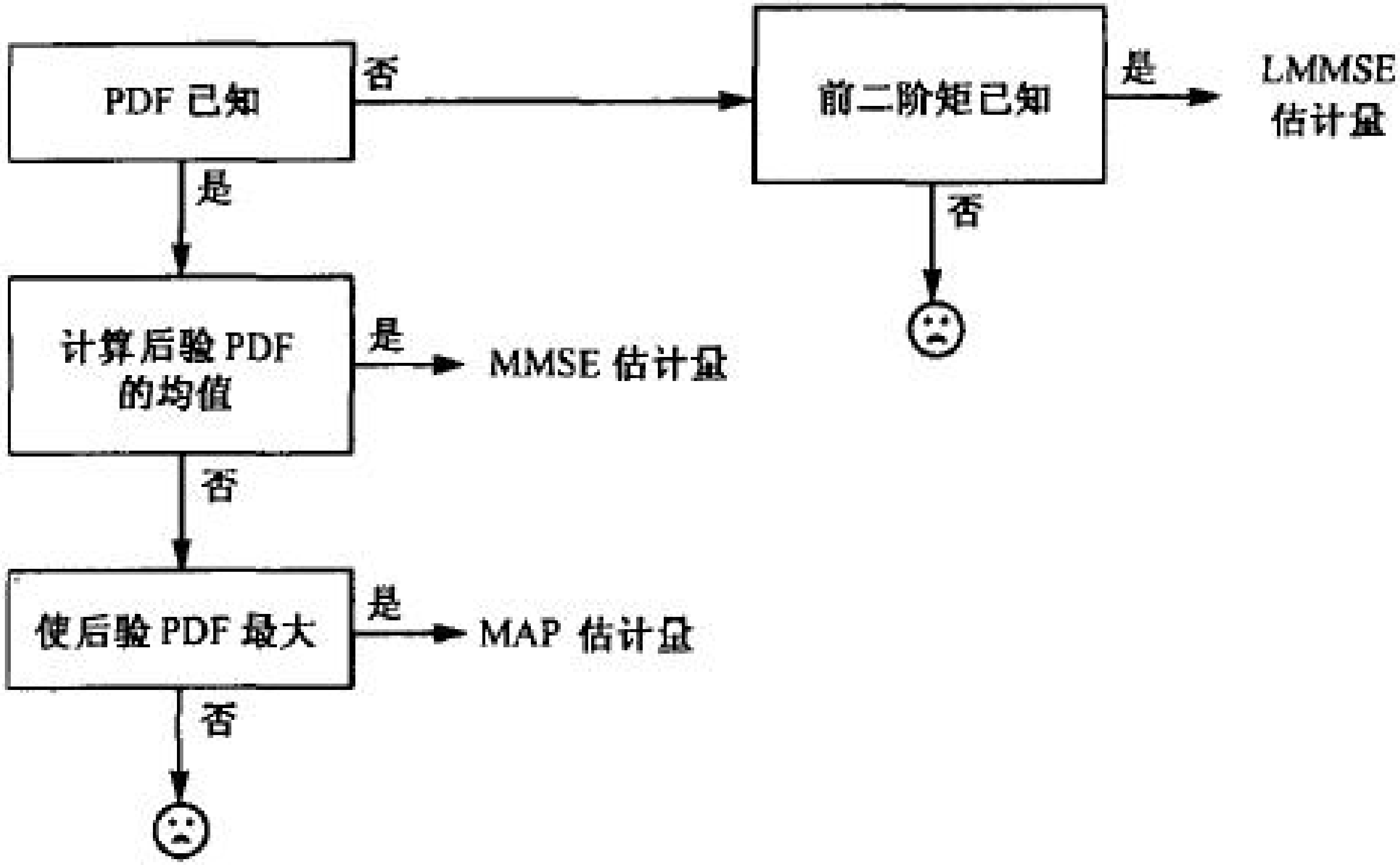
- 最小方差无偏估计 MVU
- 最佳线性无偏估计 BLUE
- 最大似然估计 MLE
- 最小二乘估计 LSE
- 矩方法



6.2、贝叶斯估计方法

- 最小均方误差估计 MMSE
- 最大后验估计 MAP
- 线性最小均方误差估计 LMMSE

联合高斯分布下MAP=MMSE



克拉美罗界 Cramér–Rao bound - CRB

1、估计量的无偏性 $b(\theta)\begin{cases} = 0, \text{unbiased} \\ \neq 0, \text{biased} \end{cases}$

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta} p(\boldsymbol{x}|\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \theta + b(\theta)$$

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta} p(\boldsymbol{x},\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\theta = \mathrm{E}(\theta)$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}[\hat{\theta}(\boldsymbol{x}_N)] = \theta, \quad \text{非随机参量}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}[\hat{\theta}(\boldsymbol{x}_N)] = \mathrm{E}(\theta), \quad \text{随机参量}$$

2、估计量的有效性

$$\mathrm{E}[(\theta - \hat{\theta}_1)^2] < \mathrm{E}[(\theta - \hat{\theta}_2)^2]$$

则称估计量 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

克拉美-罗不等式
克拉美-罗界
无偏有效估计量

估计量方差
估计误差方差
均方误差

$$\begin{cases} \mathrm{Var}(\hat{\theta}) \\ \mathrm{Var}(\theta - \hat{\theta}) \\ \mathrm{E}[(\theta - \hat{\theta})^2] \end{cases}$$

均方误差准则（MSE）：

度量估计量偏移真值的平方偏差的统计平均值。

$$\mathrm{mse}(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{mse}(\hat{\theta}) &= E\left\{\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right) + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)\right]^2\right\} \\ &= var(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2 \\ &= \boxed{var(\hat{\theta})} + \boxed{b^2(\theta)}\end{aligned}$$

方差

偏差

最小方差无偏估计(MVU)： 约束—偏差为零

对无偏估计量确定一个下限CRB

CRLB定理（Cramer-Rao 下限定理）

假定**PDF** $p(\boldsymbol{x};\theta)$ 满足“正则”条件： $E\left[\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{x};\theta)}{\partial \theta}\right]=0$

则，任何无偏估计量 $\hat{\theta}$ 的方差必定满足：

$$\operatorname{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{-E\left[\dfrac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x};\theta)}{\partial \theta^2}\right]}$$

且对于某个函数 g 和 I，当且仅当

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x};\theta)}{\partial \theta}=I(\theta)\left(g(\boldsymbol{x})-\theta\right)$$

时，对所有 θ 达到下限的无偏估计量可以求得：

$$\hat{\theta}=g(\boldsymbol{x})$$

$$\operatorname{var}(\hat{\theta})=\frac{1}{I(\theta)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta^2}p(\boldsymbol{x},\theta)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\theta+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta}\right)^2 p(\boldsymbol{x},\theta)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\theta=0$$

Fisher信息矩阵

- ☐ 数据信息矩阵
- ☐ 先验信息矩阵

$$\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta^2}\right]=-\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

$$p(\boldsymbol{x},\theta)=p(\boldsymbol{x}\mid\theta)p(\theta)$$

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta}=\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}\mid\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta}$$

$$\mathrm{E}[(\theta-\hat{\theta})^2]\geqslant\frac{1}{\mathrm{E}\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}\mid\theta)}{\partial \theta}+\dfrac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

$$\mathrm{E}[(\theta-\hat{\theta})^2]\geqslant\frac{1}{-\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x}\mid\theta)}{\partial \theta^2}+\dfrac{\partial^2 \ln p(\theta)}{\partial \theta^2}\right]}$$

$$\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}\mid\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta}=(\theta-\hat{\theta})k$$

随机参量的贝叶斯估计

贝叶斯准则：在信号参量估计中，使估计的平均代价最小。适用于随机参量。

$$C(H_j)=\sum_{i=0}^{1}c_{ij}P(H_i\mid H_j),\quad j=0,1$$

$$C=P(H_0)C(H_0)+P(H_1)C(H_1)=\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{1}c_{ij}P(H_j)P(H_i\mid H_j)$$

代价函数的一般形式：

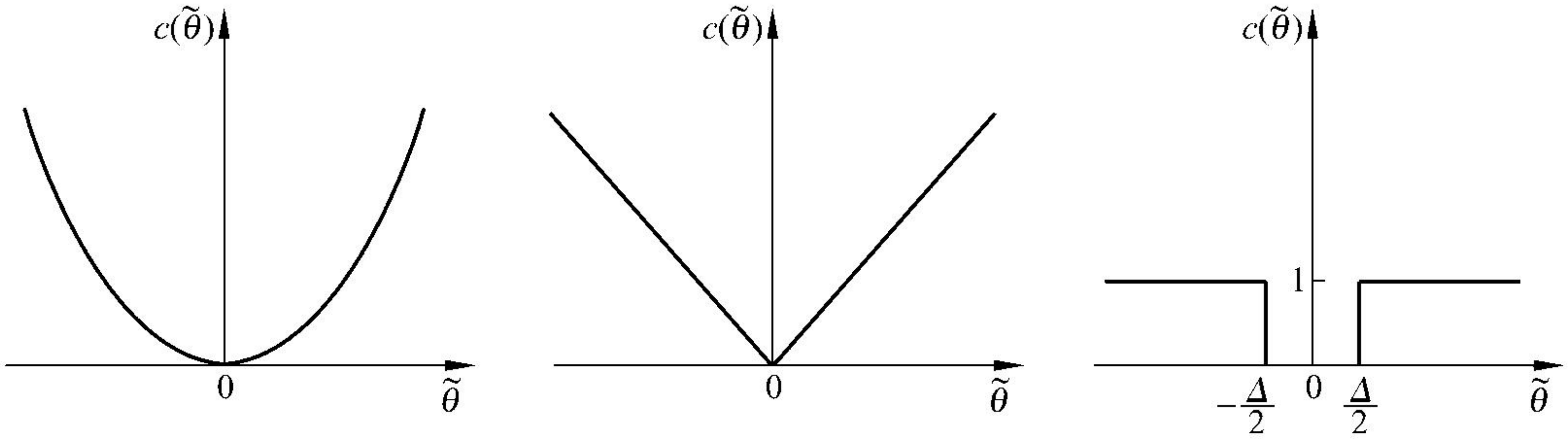
$$c(\tilde{\theta})=c(\theta-\hat{\theta})$$

（1）非负；
（2）误差 $\tilde{\theta}=0$ 时最小。

$$c(\tilde{\theta})=c(\theta-\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2$$

$$c(\tilde{\theta})=c(\theta-\hat{\theta})=|\theta-\hat{\theta}|$$

$$c(\tilde{\theta})=c(\theta-\hat{\theta})=\begin{cases}1, & |\tilde{\theta}|\geqslant\dfrac{\Delta}{2}\\ 0, & |\tilde{\theta}|<\dfrac{\Delta}{2}\end{cases}$$



(a) 误差平方代价函数　(b) 误差绝对值代价函数　(c) 均匀代价函数

平均代价

$$C=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}c(\theta,\tilde{\theta})p(\boldsymbol{x},\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}c(\theta-\hat{\theta})\mathrm{p}(\boldsymbol{x},\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\theta$$

贝叶斯公式

$$p(\boldsymbol{x},\theta)=p(\theta|\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})$$

$$C=\int_{-\infty}^{\infty}p(\boldsymbol{x})\left[\int_{-\infty}^{\infty}c(\theta-\hat{\theta})p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

条件平均代价

$$C(\hat{\theta}|\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}c(\theta-\hat{\theta})p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta$$

上述条件平均代价函数 $C(\hat{\theta}|x)$ **对** $\hat{\theta}$ **求最小，即可以求得随机参量**θ **的贝叶斯估计量** $\hat{\theta}_b$ **。**

1、最小均方误差估计

$$C(\hat{\theta}|\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}(\theta-\hat{\theta})^2p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}}\int_{-\infty}^{\infty}(\theta-\hat{\theta})^2p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\int_{-\infty}^{\infty}\theta p(\theta\mid\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta+2\hat{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}p(\theta\mid\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta\Big|_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_{\mathrm{mse}}}=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta=1$$

$$\hat{\theta}_{\mathrm{mse}}=\int_{-\infty}^{\infty}\theta p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta$$

将后验概率转化
为先验概率表达

$$p(\theta|\boldsymbol{x})=p(\boldsymbol{x}|\theta)p(\theta)/p(\boldsymbol{x})$$

$$p(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}p(\boldsymbol{x},\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{-\infty}^{\infty}p(\boldsymbol{x}|\theta)p(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\hat{\theta}_{\mathrm{mse}}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\theta p(\boldsymbol{x}\mid\theta)p(\theta)\mathrm{d}\theta}{\int_{-\infty}^{\infty}p(\boldsymbol{x}\mid\theta)p(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

2、最大后验估计

$$C(\hat{\theta} \mid \boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}-\frac{\Delta}{2}} p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta + \int_{\hat{\theta}+\frac{\Delta}{2}}^{\infty} p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta$$

$$= 1 - \int_{\hat{\theta}-\frac{\Delta}{2}}^{\hat{\theta}+\frac{\Delta}{2}} p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta$$

等效于使 $\int_{\hat{\theta}-\frac{\Delta}{2}}^{\hat{\theta}+\frac{\Delta}{2}} p(\theta|\boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta$ 最大

$$\left.\frac{\partial p(\theta|\boldsymbol{x})}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{\mathrm{map}}} = 0$$

$p(\theta|\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}|\theta)p(\theta)/p(\boldsymbol{x})$

$$\left.\frac{\partial \ln p(\theta|\boldsymbol{x})}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{\mathrm{map}}} = 0$$

$$\left.\left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}|\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \ln p(\theta)}{\partial \theta}\right]\right|_{\theta=\hat{\theta}_{\mathrm{map}}} = 0$$

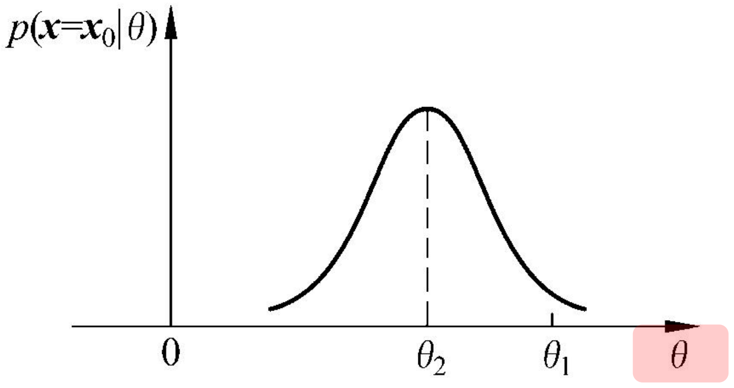
6.3、最大似然估计

最大似然估计常用来估计未知的非随机参量。

最大似然估计定义：使似然函数 $p(\boldsymbol{x}|\theta)$最大的θ 值作为估计量的参量估计方法(Maximum Likelihood Estimation)。

最大似然估计原理

最大似然函数的基本原理是：对于某个选定的 θ，考虑 $\boldsymbol{x}$落在一个小区域内的概率$p(\boldsymbol{x}|\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，取 $p(\boldsymbol{x}|\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$最大的那个$\theta$作为估计量 $\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}$ 。



似然函数是在给定$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$后得到的，可以画出它与被估计量$\theta$ 的关系曲线。

PDF作为未知参数的函数（ $\boldsymbol{x}$ 固定），称之为似然函数。

$$\left.\frac{\partial p(\boldsymbol{x}|\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}}=0 \qquad \left.\frac{\partial\ln p(\boldsymbol{x}|\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_{\mathrm{ml}}}=0$$

$$\left.\left[\frac{\partial\ln p(\boldsymbol{x}|\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\ln p(\theta)}{\partial\theta}\right]\right|_{\theta=\hat{\theta}_{\mathrm{map}}}=0$$

相当于最大似然估计用于估计没有任何先验知识的随机参量θ，

假定θ 为均匀分布，上式第二项为零，最大后验概率估计转化为最大似然估计。

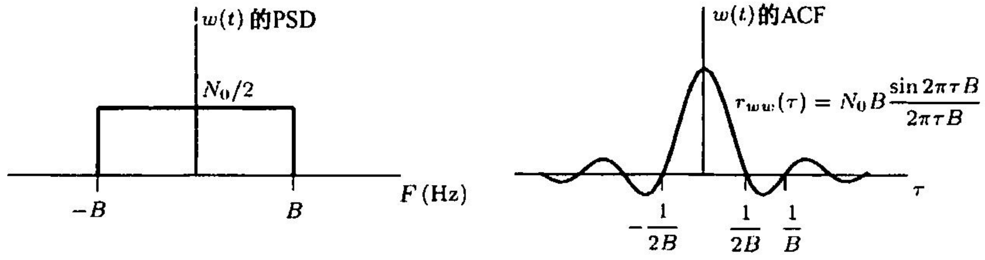
距离估计

在雷达和主动声纳中发射信号脉冲,从发射机到目标再返回的双程延迟 τ_0 与距离 R 有关,即 $\tau_0=2R/c$,其中 c 是传播速度。假定 c 是已知的,因此距离的估计等价于时延的估计。如果 $s(t)$是发射信号,那么对于接收连续波形的一个简单模型是

$$x(t)=s(t-\tau_0)+w(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

发射信号脉冲假定在区间$[0,T_s]$上是非零的。另外,假定信号限制在带宽 B Hz 的频带内,如果最大延迟时间是 $\tau_{0_{\max}}$,那么通过令 $T=T_s+\tau_{0_{\max}}$,观测间隔的选择将包括整个信号。噪声可以建模为具有图 3.7 的 PSD 和 ACF 的高斯噪声,噪声的带限特性是由于对 B Hz带宽信号的连续波形进行滤波所造成的。以奈奎斯特(Nyquist)采样速率对连续的接收波形进行采样,即以 $\Delta=1/(2B)$秒采样形成观测数据

$$x(n\Delta)=s(n\Delta-\tau_0)+w(n\Delta) \qquad n=0,1,\ldots,N-1$$



令 $x[n]$和 $w[n]$是采样序列,那么我们有离散的数据模型

$$x[n]=s(n\Delta-\tau_0)+w[n] \tag{3.35}$$

注意,$w[n]$是 WGN,由于样本之间的间隔是 $k\Delta=k/(2B)$,它对应于图 3.7 中 $w(t)$的 ACF 的零点。另外,$w[n]$的方差为 $\sigma^2=r_{ww}(0)=N_0B$。由于信号只在区间 $\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_0+T_s$ 上是非零的,因此(3.35)式化简为

$$x[n]=\begin{cases} w[n] & 0 \leqslant n \leqslant n_0-1 \\ s(n\Delta-\tau_0)+w[n] & n_0 \leqslant n \leqslant n_0+M-1 \\ w[n] & n_0+M \leqslant n \leqslant N-1 \end{cases} \tag{3.36}$$

其中 M 是采样信号的长度,$n_0=\tau_0/\Delta$ 是样本中的延迟(为了简单起见,我们假定 Δ 非常小,以至于 τ_0/Δ 可由一个整数近似)。由于 $\tau_0=n_0\Delta$,通过这个公式我们可以应用(3.14)式计算 CRLB。

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(\hat{\tau}_0) & \geqslant \frac{\sigma^2}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\partial s[n;\tau_0]}{\partial \tau_0}\right)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{\displaystyle\sum_{n=n_0}^{n_0+M-1}\left(\frac{\partial s(n\Delta-\tau_0)}{\partial \tau_0}\right)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{\displaystyle\sum_{n=n_0}^{n_0+M-1}\left(\left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=n\Delta-\tau_0}\right)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{\displaystyle\sum_{n=0}^{M-1}\left(\left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=n\Delta}\right)^2}
\end{aligned}$$

假定 Δ 小到足以用一个积分来近似和式,我们有

$$\operatorname{var}(\hat{\tau}_0) \geqslant \frac{\sigma^2}{\displaystyle\frac{1}{\Delta}\int_0^{T_s}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 dt}$$

最后,注意 $\Delta=1/(2B)$,$\sigma^2=N_0B$,我们有

$$\operatorname{var}(\hat{\tau}_0) \geqslant \frac{\dfrac{N_0}{2}}{\displaystyle\int_0^{T_s}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 dt} \tag{3.37}$$

• 4.3复杂信号波形

时延估计标准差

$$\sigma_\tau = \frac{1}{B_{rms}\sqrt{2E_x/\eta_0}} \qquad B_{rms}^2 = \frac{(2\pi)^2\int_{-\infty}^{\infty} f^2\ |X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df}$$

Doppler频移估计标准差

$$\sigma_{f_d} = \frac{1}{\tau_{rms}\sqrt{2E_x/\eta_0}} \qquad \tau_{rms}^2 = \left((2\pi)^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2\ |x(t)|^2 dt\right) \Big/ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt\right)$$

注意到信号能量$\mathcal{E}$是

$$\mathcal{E} = \int_0^{T_s} s^2(t)\,dt$$

这样导出(3.37)式的另一种形式

$$\boxed{\mathrm{var}(\hat{\tau}_0) \geqslant \frac{1}{\frac{\mathcal{E}}{N_0/2}\overline{F^2}}} \quad \text{时延估计方差} \tag{3.38}$$

其中

$$\overline{F^2} = \frac{\int_0^{T_s}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 dt}{\int_0^{T_s} s^2(t)dt}$$

可以证明$\mathcal{E}/(N_0/2)$是 SNR[Van Trees 1968]。另外，利用标准傅里叶变换性质，

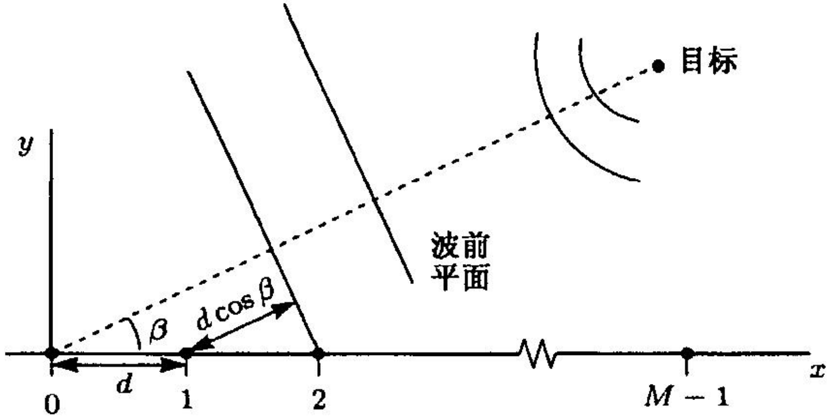
$$\overline{F^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi F)^2|S(F)|^2dF}{\int_{-\infty}^{\infty}|S(F)|^2dF} \tag{3.39}$$

其中 F 表示连续时间频率，$S(F)$是 $s(t)$的傅里叶变换，所以$\overline{F^2}$是信号带宽的度量。在这一表达式中，可以很清楚地看出$\overline{F^2}$是信号的均方带宽。由(3.38)式和(3.39)式可知，均方带宽越大，CRLB 越小。例如，假定信号是由 $s(t)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_F^2(t-T_s/2)^2\right)$给出的高斯脉冲，$s(t)$在区间$[0,T_s]$上非零，那么$|S(F)|=(\sigma_F/\sqrt{2\pi})\exp(-2\pi^2F^2/\sigma_F^2)$且$\overline{F^2}=\sigma_F^2/2$。当均方带宽增加时，信号脉冲变窄，这样就更容易估计时延。

最后，注意到 $R=c\tau_0/2$，利用(3.16)式，距离的 CRLB 为

$$\boxed{\mathrm{var}(\hat{R}) \geqslant \frac{c^2/4}{\frac{\mathcal{E}}{N_0/2}\overline{F^2}}} \quad \text{距离估计方差} \tag{3.40}$$

方位估计



在声纳中,我们感兴趣是估计图 3.8 所示的目标方位。为此,声压场由排成一线的等间距的传感器观测到,假定目标辐射一个正弦信号 $A\cos(2\pi F_0 t+\phi)$,那么,在第 n 个传感器收到的信号是 $A\cos(2\pi F_0(t-t_n)+\phi)$,其中 t_n 是辐射到第 n 个传感器的时间。如果阵的位置离目标很远,那么,圆的波前在阵的位置就可以看成平面波。如图 3.8 所示,第 $n-1$个传感器与第 n 个传感器由于额外的传播距离而引起的波程差为 $d\cos\beta/c$。这样,第 n 个传感器的传播时间为

$$t_n = t_0 - n\frac{d}{c}\cos\beta \qquad n=0,1,\ldots,M-1$$

其中 t_0 是到第 0 个传感器的传播时间,在第 n 个传感器观测到的信号是

$$s_n(t) = A\cos\left[2\pi F_0(t-t_0+n\frac{d}{c}\cos\beta)+\phi\right]$$

如果取数据的单个"快拍",或者在某个时刻 t_s 对阵元的输出进行采样,那么

$$s_n(t_s) = A\cos[2\pi(F_0\frac{d}{c}\cos\beta)n+\phi'] \tag{3.42}$$

其中 $\phi'=\phi+2\pi F_0(t_s-t_0)$。在这个公式中,很显然空间观测是频率为 $f_s=F_0(d/c)\cos\beta$ 的正弦型信号。为了完成数据的描述,我们假定传感器的输出受到零均值、方差为 σ^2 的高斯噪声的污染,传感器与传感器之间的这些噪声是相互独立的,数据的模型为

$$x[n] = s_n(t_s)+w[n] \qquad n=0,1,\ldots,M-1$$

其中 $w[n]$是 WGN。由于典型的情况是 A、ϕ 是未知的,那么,我们有像例(3.14)式那样根据(3.42)式估计$\{A,f_s,\phi'\}$的问题。一旦确定了这些参数的 CRLB,我们就可以利用参数来变换公式。对 $\boldsymbol{\theta}=[A\ f_s\ \phi']^T$ 的变换是

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}A\\ \beta\\ \phi'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\\ \arccos\left(\dfrac{cf_s}{F_0 d}\right)\\ \phi'\end{bmatrix}$$

雅可比矩阵为

$$\frac{\partial\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{c}{F_0 d\sin\beta} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以,根据(3.30)式得

$$\left[\mathbf{C}_{\hat{\alpha}}-\frac{\partial\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})^T}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right]_{22}\geqslant 0$$

由于对角雅可比矩阵,可得

$$\operatorname{var}(\hat{\beta})\geqslant\left[\frac{\partial\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right]_{22}^2[\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})]_{22}$$

但是根据(3.41)式,我们有

$$[\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})]_{22}=\frac{12}{(2\pi)^2\eta M(M^2-1)}$$

因此

$$\boxed{\operatorname{var}(\hat{\beta})\geqslant\frac{12}{(2\pi)^2\eta M(M^2-1)}\frac{c^2}{F_0^2 d^2\sin^2\beta}}$$

方位估计方差

或者最终有

$$\boxed{\operatorname{var}(\hat{\beta})\geqslant\frac{12}{(2\pi)^2 M\eta\dfrac{M+1}{M-1}\left(\dfrac{L}{\lambda}\right)^2\sin^2\beta}} \tag{3.43}$$

其中 $\lambda=c/F_0$ 是传播平面波的波长,$L=(M-1)d$ 是阵的长度。注意,如果 $\beta=90°$,那么这是最容易估计的方位,而 $\beta=0°$是不可能估计的方位。另外,下限和阵的长度与波长之比(即 L/λ)以及阵的输出 SNR(即 $M\eta$)有关,在习题 3.19 中考察了 CRLB 使用的可行性研究。

我们继续考虑例 3.15 中的阵列处理问题，但是这里假定传感器的噪声是非白噪声。我们希望在设计波束形成器时考虑噪声的色度。波束形成器是发射信号的估计器，在许多情况下，非白噪声是有意干扰的结果。回想到对于发射的正弦信号 $A\cos(2\pi F_0 t+\phi)$，在一线阵上接收的信号为

$$s_n(t) = A\cos\left[2\pi f_s n + 2\pi F_0(t-t_0)+\phi\right] \qquad n=0,1,\ldots,M-1$$

其中，n 为传感器号，$f_s = F_0(d/c)\cos\beta$（d 为传感器间距，c 为传播速度，β 为到达角）是空间频率，t_0 为传播到第 0 个传感器的时间。如果我们选择处理接收数据中的解析信号，则令 $\phi' = -2\pi F_0 t_0 + \phi$（$\phi$ 和 t_0 一般为未知），对信号分量我们有

$$\tilde{s}_n(t) = A\exp(j\phi')\exp(j2\pi f_s n)\exp(j2\pi F_0 t) = \tilde{A}\exp(j2\pi f_s n)\exp(j2\pi F_0 t)$$

对于时间上的每一瞬间，我们在 M 个传感器上有信号矢量"快拍"(snapshot)，

$$\tilde{\mathbf{s}}(t) = \left[\ \tilde{s}_0(t)\ \ \tilde{s}_1(t)\ \ \ldots\ \ \tilde{s}_{M-1}(t)\ \right]^T = \tilde{A}\exp(j2\pi F_0 t)\mathbf{e}$$

其中 $\mathbf{e}=[1\ \exp(j2\pi f_s)\ldots\exp[j(2\pi f_s(M-1))]]^T$。假定数据模型为

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{A}\exp(j2\pi F_0 t)\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{w}}(t)$$

其中 $\tilde{\mathbf{w}}(t)$ 为零均值、协方差矩阵为 $\mathbf{C}$ 的噪声矢量。假定均值和协方差不随时间 t 变化。我们希望设计一个波束形成器，将传感器的输出线性地组合为

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n^* \tilde{x}_n(t) = \mathbf{a}^H\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

从而使信号无失真通过，但输出的噪声达到最小。无失真意味着如果 $\tilde{\mathbf{x}}(t)=\tilde{\mathbf{s}}(t)=\tilde{A}\exp(j2\pi F_0 t)\mathbf{e}$，那么在波束形成器的输出中，我们应该有

$$\tilde{y}(t) = \tilde{A}\exp(j2\pi F_0 t)$$

这就要求

$$\mathbf{a}^H\tilde{\mathbf{s}}(t) = \tilde{A}\exp(j2\pi F_0 t)$$

或者

$$\mathbf{a}^H\mathbf{e} = 1$$

或者最终约束

$$\mathbf{e}^H\mathbf{a} = 1$$

波束形成器输出端的噪声方差为

$$E\left[|\mathbf{a}^H\tilde{\mathbf{w}}(t)|^2\right] = E\left[\mathbf{a}^H\tilde{\mathbf{w}}(t)\tilde{\mathbf{w}}^H(t)\mathbf{a}\right] = \mathbf{a}^H\mathbf{C}\mathbf{a}$$

这也是 $\tilde{y}(t)$ 的方差。因此，最佳波束形成器的加权由下面问题的解给出：在约束 $\mathbf{e}^H\mathbf{a}=1$ 的条件下，使 $\mathbf{a}^H\mathbf{C}\mathbf{a}$ 最小。于是，有时这也称为最小方差无失真响应(MVDR)波束形成器 [Owsley 1985]。读者将发现，我们早已结合 BLUE 解出此问题，事实上由(15.51)式，令 $\mathbf{W}=\mathbf{C}$，$\mathbf{B}=\mathbf{e}^H$，$\mathbf{b}=1$，我们有最佳解为

$$\mathbf{a}_{\mathrm{opt}} = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}^H\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}}$$

波束形成器的输出端为

空间非白噪声

$$\boxed{\tilde{y}(t) = \frac{\mathbf{e}^H\mathbf{C}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}(t)}{\mathbf{e}^H\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}}} \tag{15.75}$$

ABF

自适应波束形成

可以验证，$\tilde{y}(t)$ 刚好是 $\tilde{A}\exp(j2\pi F_0 t)$ 对给定 t 的 BLUE。在例 15.7 中，对 $F_0=0$ 因而也是对 $\mathbf{e}=\mathbf{1}$，我们也推导了这样的结果。"自适应波束形成器"的名称来自于(15.75)式的实际实现，其中的噪声协方差矩阵通常未知，因此必须在信号出现之前进行估计，那么我们说波束形成器对噪声场的出现是自适应的。当然，在使用估计的协方差矩阵时，并没有与波束形成器相联系的最佳协方差矩阵。当估计协方差时如果信号出现，那么性能可能很差[Cox 1973]。注意，如果 $\mathbf{C}=\sigma^2\mathbf{I}$，传感器的噪声是不相关的，且具有相等的方差("空间白化")，则(15.75)式简化为

空间白噪声

$$\boxed{\tilde{y}(t) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\tilde{x}_n(t)\exp(-j2\pi f_s n)}$$

CBF

常规波束形成

波束形成器首先在不同的传感器中调整信号的相位，通过改变传播延迟、然后取平均，使它们在时间上进行校准。这就是所谓的常规波束形成器[Knight, Pridham, and Kay 1981]。

波束形成器是源信号估计器

$$\tilde{x}[n] = \tilde{A}\exp(j2\pi f_0 n) + \tilde{w}[n] \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

其中，$\tilde{w}[n]$是方差为 σ^2 的 CWGN，$\tilde{A} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_A^2)$，$\tilde{A}$ 与 $\tilde{w}[n]$独立。用矩阵形式表示，我们有

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{A}\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{w}}$$

其中，$\mathbf{e} = [1 \ \exp(j2\pi f_0) \ldots \exp(j2\pi f_0(N-1))]^T$。由于独立复高斯随机变量之和也是复高斯的(参见 15.4 节)，我们有

$$\tilde{\mathbf{x}} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{\tilde{x}})$$

为了求协方差矩阵，由于 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{\mathbf{w}}$独立，所以

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\tilde{x}} &= E(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^H) = E\left((\tilde{A}\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{w}})(\tilde{A}\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{w}})^H\right) \\
&= E(|\tilde{A}|^2)\mathbf{e}\mathbf{e}^H + \sigma^2\mathbf{I} = \sigma_A^2\mathbf{e}\mathbf{e}^H + \sigma^2\mathbf{I}
\end{aligned}$$

我们现在考察在假定 f_0 和 σ^2 已知时复幅度的方差 σ_A^2 的估计问题。PDF 为

$$p(\tilde{\mathbf{x}}; \sigma_A^2) = \frac{1}{\pi^N \det(\mathbf{C}_{\tilde{x}}(\sigma_A^2))} \exp\left[-\tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\tilde{\mathbf{x}}\right]$$

为了确定是否达到 CRLB，我们计算

$$\frac{\partial \ln p(\tilde{\mathbf{x}}; \sigma_A^2)}{\partial \sigma_A^2} = -\frac{\partial \ln \det(\mathbf{C}_{\tilde{x}}(\sigma_A^2))}{\partial \sigma_A^2} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\tilde{\mathbf{x}}}{\partial \sigma_A^2}$$

利用(15.47)式和(15.48)式，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln p(\tilde{\mathbf{x}}; \sigma_A^2)}{\partial \sigma_A^2} &= -\mathrm{tr}\left(\mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\frac{\partial \mathbf{C}_{\tilde{x}}(\sigma_A^2)}{\partial \sigma_A^2}\right) + \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\frac{\partial \mathbf{C}_{\tilde{x}}(\sigma_A^2)}{\partial \sigma_A^2}\mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\tilde{\mathbf{x}} \\
&= -\mathrm{tr}\left(\mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\mathbf{e}\mathbf{e}^H\right) + \tilde{\mathbf{x}}^H \mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\mathbf{e}\mathbf{e}^H \mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\tilde{\mathbf{x}} \\
&= -\mathbf{e}^H \mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\mathbf{e} + |\mathbf{e}^H \mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\tilde{\mathbf{x}}|^2
\end{aligned}$$

但是

$$\mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I} - \frac{1}{\sigma^4}\frac{\sigma_A^2\mathbf{e}\mathbf{e}^H}{1 + \frac{N\sigma_A^2}{\sigma^2}}$$

所以

$$\mathbf{C}_{\tilde{x}}^{-1}(\sigma_A^2)\mathbf{e} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{e} - \frac{N\sigma_A^2}{\sigma^4 + N\sigma_A^2\sigma^2}\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}}{N\sigma_A^2 + \sigma^2}$$

因此

$$\frac{\partial \ln p(\tilde{\mathbf{x}}; \sigma_A^2)}{\partial \sigma_A^2} = -\frac{N}{N\sigma_A^2 + \sigma^2} + \frac{|\tilde{\mathbf{x}}^H\mathbf{e}|^2}{(N\sigma_A^2 + \sigma^2)^2} = \left(\frac{N}{N\sigma_A^2 + \sigma^2}\right)^2\left(\frac{|\tilde{\mathbf{x}}^H\mathbf{e}|^2}{N^2} - \frac{\sigma^2}{N} - \sigma_A^2\right)$$

估计量

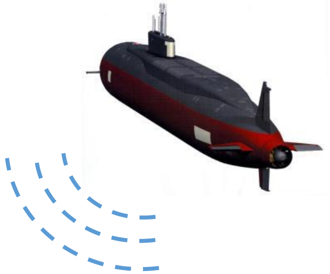
$$\boxed{\hat{\sigma_A^2} = \frac{|\tilde{\mathbf{x}}^H\mathbf{e}|^2}{N^2} - \frac{\sigma^2}{N} = \frac{1}{N^2}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]\exp(-j2\pi f_0 n)\right|^2 - \frac{\sigma^2}{N}}$$

是满足 CRLB 的，它是有效估计量并且具有最小方差，

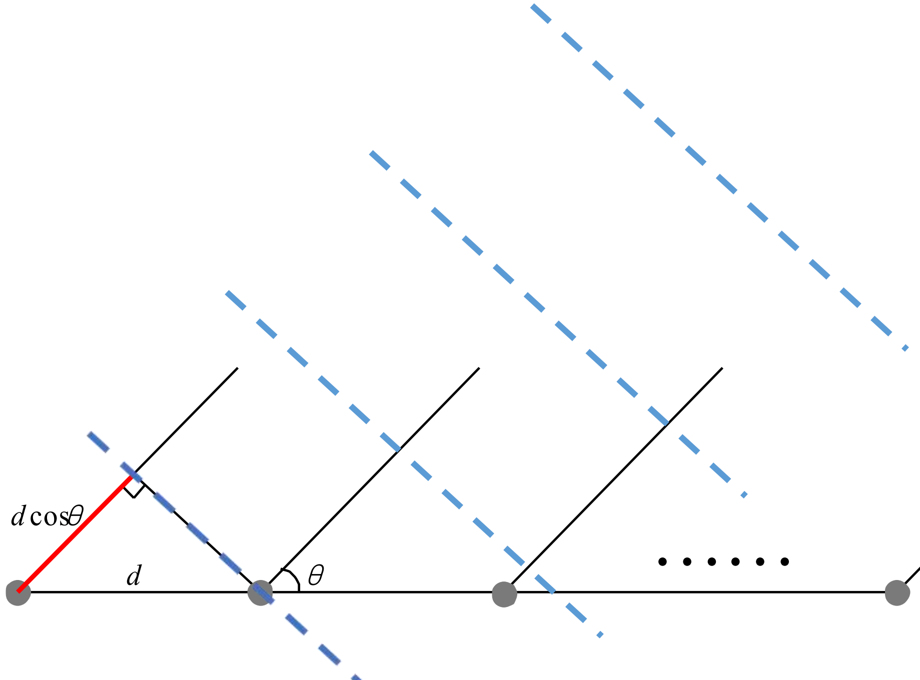
$$\boxed{\mathrm{var}(\hat{\sigma_A^2}) = \left(\sigma_A^2 + \frac{\sigma^2}{N}\right)^2}$$

信号幅度估计

6.4、波束形成Beamforming
波束形成器Beamformer



- 空间滤波器Spatial Filter
- 波达角估计DOA
- 阵列信号处理Array Signal Processing
- 远场假设
- 点源假设
- 平面波假设
- 相干性假设
- 均匀性假设



（一）常规波束形成CBF

常规波束形成器（Conventional Beamformer——CBF）

$$\boxed{D_{\mathrm{CBF}}(\theta)=\mathbf{e}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{e}}$$

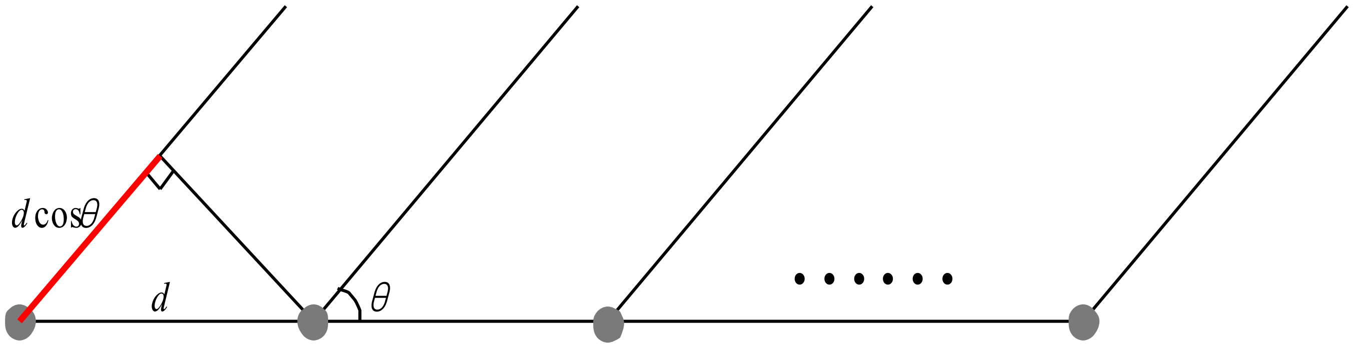
$$\mathbf{e}=\left[1,e^{-j\omega\tau},e^{-j2\omega\tau},\cdots,e^{-j(\mathrm{N}-1)\omega\tau}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\tau=c^{-1}d\cos\theta$$

$$\mathbf{x}=\left[x_1,x_2,\cdots,x_{\mathrm{N}-1}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{R}=\mathrm{E}\left[\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}\right]$$

$$\hat{R}_{ij}=\sum_{l=1}^{L}x_i^*(l)x_j(l)$$



（二）最小方差无失真响应波束形成器 MVDR

最小方差无失真响应Minimum Variance Distortionless Response

亦称自适应波束形成器Adaptive Beamformer——ABF

$$\boxed{\mathrm{D}_{\mathrm{MVDR}}(\theta)=\mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{w}}$$

$$\min_{\mathbf{w}}\mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{w} \;+\; \mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{e}=1 \quad\rightarrow\quad \mathbf{w}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}\left(\mathbf{e}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}\right)^{-1}$$

$$\boxed{\mathrm{D}_{\mathrm{MVDR}}(\theta)=\left(\mathbf{e}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}\right)^{-1}}$$

协方差矩阵对角加载 $\mathbf{w}_{\varepsilon}=(\mathbf{R}+\varepsilon\mathbf{I})^{-1}\mathbf{e}\left[\mathbf{e}^{\mathrm{H}}(\mathbf{R}+\varepsilon\mathbf{I})\mathbf{e}\right]^{-1}$

$$\boxed{\mathrm{D}_{\mathrm{MVDR}}(\theta)=\mathbf{w}_{\varepsilon}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{w}_{\varepsilon}}$$

（三）多信号分类波束形成器MUSIC

多信号分类：MUltiple SIgnal Classification

★信号矩阵与噪声矩阵分离需估计源数

$$P_{MU}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^*(\theta)\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N^*\mathbf{a}(\theta)}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{APA}^* + \lambda_{\min}\mathbf{S}_0 \qquad \lambda_{\min} \geq 0$$

$$\mathbf{Se}_i = \lambda_i \mathbf{S}_0 \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) & \cdots & \mathbf{a}(\theta_D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \overline{\mathbf{XX}^*} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{FF}^*}\mathbf{A} + \mathbf{WW}^*$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{APA}^* + \lambda\mathbf{S}_0$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{AF} + \mathbf{W}$$

（四）方法对比

ordinary beamforming (BF)

maximum likelihood (ML)

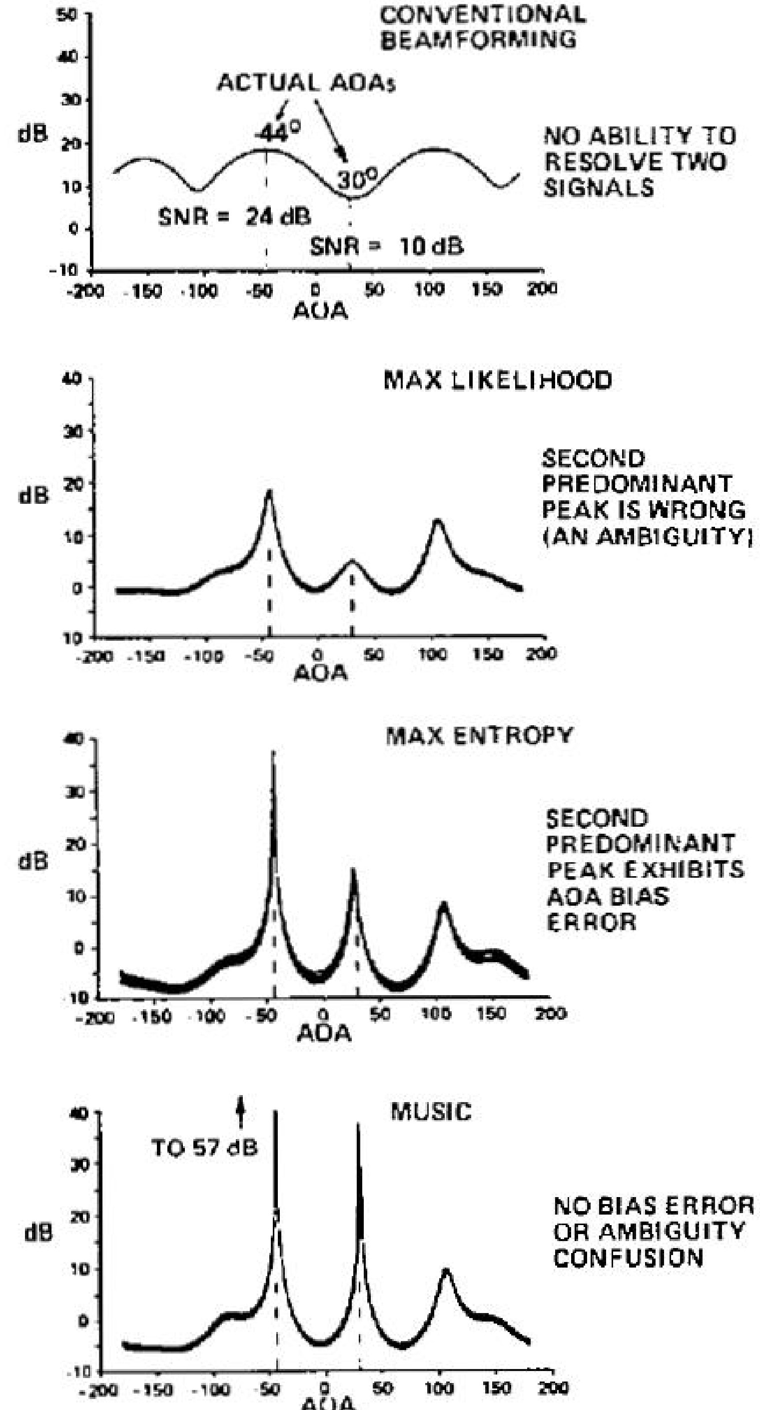
maximum entropy (ME)

$$P_{BF}(\theta) = a^*(\theta)Sa(\theta)$$

$$P_{ML}(\theta) = \frac{1}{a^*(\theta)S^{-1}a(\theta)}$$

$$P_{ME}(\theta) = \frac{1}{a^*(\theta)cc^*a(\theta)}$$

$$P_{MU}(\theta) = \frac{1}{a^*(\theta)E_N E_N^* a(\theta)}$$



（五）经典论文

【1】J. Capon, “High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," Proc. IEEE, vol. 57, no. 8, Aug. 1969.

【2】Pisarenko, V. F. "The retrieval of harmonics from a covariance function," Geophysics, J. Roy. Astron. Soc., vol. 33, pp. 347-366, 1973.

【3】Schmidt, R.O, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," IEEE Trans. Antennas Propagation, Vol. AP-34 (March 1986), pp.276-280.