xmas coding 2017
Prof. Dr. Jörg Kreiker
Wintersemester 2017/18

Hochschule Fulda
University of Applied Sciences

20. Dezember 2017

Aufgabenblatt

Abgabe: 17:00 Uhr

1 Datenverarbeitung

Aufgabe 1: Drillinge In der Datei `drilling.txt` stehen 100000 Zeilen mit je 100 Großbuchstaben von A bis Z. Ein `char` der dreimal hintereinander in einer Zeile auftaucht, heißt *Drilling*. Drillinge können sich überlappen! Wie viele Drillinge gibt es in der Datei `drilling.txt`? Lösung: **14469** ☐

Aufgabe 2: 000 bis 999 Man betrachte in dieser Aufgabe die jeweils *letzten drei Ziffern* jeder Zufallszahl aus der Datei `random.txt`. In der Datei `random.txt` sind 1.000.000 Zufallszahlen jeweils in einer Zeile. Für die letzten drei Ziffern gibt es natürlich 1000 Möglichkeiten von 000 bis 999. In welcher Zeile sind alle 1000 möglichen Endungen *erstmals* alle vorgekommen? Gesucht ist die Zeile mit dem ersten Auftreten der letzten noch fehlenden Kombination. Lösung: **6534** ☐

Aufgabe 3: Kleinste Differenz Was ist die *kleinste Differenz* zweier beliebiger Zahlen in `random.txt`? Lösung: **10680875** ☐

Aufgabe 4: Längste aufsteigende Folge Wie lang ist die längste Teilfolge in der Datei `random.txt`, die echt aufsteigend ist? Eine echt aufsteigende Teilfolge ist eine Folge aufeinander folgender Zahlen, so dass die nächste echt größer als die jetzige ist. Im unten stehenden Beispiel hat die längste echt aufsteigende Teilfolge die Länge 5.

$$-14 \quad 12 \quad 3 \quad \mathbf{-1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{18} \quad \mathbf{19} \quad \mathbf{37} \quad 37 \quad -3 \quad -5$$

Lösung: **10** ☐

Aufgabe 5: Zufällig Fibo? Welche Fibonacci Zahl hat sich in der Datei `random.txt` versteckt? Lösung: **160500643816367088** ☐

Aufgabe 6: Teilsummen In der Datei `teilsumme.txt` stehen 10000 ganze Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{9999}$ in jeweils einer eigenen Zeile.

- Wie groß ist die maximale *Teilsumme*

$$\max_{0 \leq i \leq j < 10000} \sum_{k=i}^{j} a_k$$

also die größte Summe aufeinanderfolgender Zahlen in der Datei? Lösung: **159037417375**

☐

2 Zahlsysteme

Aufgabe 7: Fibonacci 2. Ordnung Die n-te Fibonacci Zahl $F(n)$ ist wie folgt definiert:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

Die n-te Fibonacci Zahl *zweiter Ordnung* $\mathcal{F}(n)$ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{F}(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ \mathcal{F}(n-1) + \mathcal{F}(n-2) + F(n) & n > 1 \end{cases}$$

Berechne den Wert $\mathcal{F}(80)$. Lösung: **1364926996460655490** □

Aufgabe 8: Mystische Zahlsysteme (1) Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig als die Summe paarweise verschiedener und *nicht benachbarter* Fibonacci Zahlen darstellen. Zum Beispiel ist $22 = 21 + 1 = F(8) + F(2)$ und $1000000 = F(30) + F(26) + F(24) + F(12) + F(10)$. Da $F(2) = 1$ kann man jeder Zahl also einen String aus 0 und 1 zuordnen. Dabei steht eine 1 genau dann an der i-ten Stelle von rechts, wenn $F(i)$ in der obigen Darstellung vorkommt. Die sogenannte Fibonacci-Darstellung von 22 dezimal ist also 1000001 und die Darstellung von 1000000 dezimal ist 10001010000000000010100000000. Man beachte, dass die rechteste Stelle $F(2)$ entspricht (da $F(1)$ und $F(0)$ nicht benötigt werden). Wie ist die Fibo-Darstellung von 12345678901234567890? Lösung:

1000000000101000101001010101000101000010100000101000101010001
0101001000000000100000010101000 □

Aufgabe 9: Mystische Zahlsysteme (2) Es gibt eine wunderbare Art und Weise alle *vollständig gekürzten Brüche* aufzuzählen. Die ersten Schritte sind wie folgt:

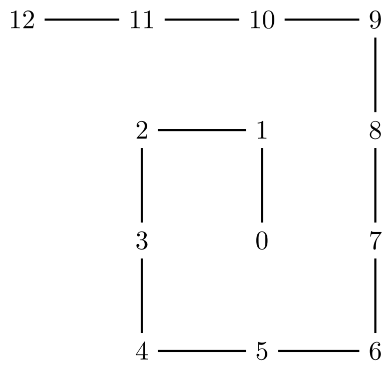
0. $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$
1. $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}$
2. $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}$
3. $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}$
4. ...

Man erhält die jeweils nächste Zeile also aus der vorherigen, indem man zwischen je zwei Brüche $\frac{z_1}{n_1}$ und $\frac{z_2}{n_2}$ den Bruch $\frac{z_1 + z_2}{n_1 + n_2}$ einfügt (neue Brüche in blau). Durch dieses Verfahren kann man jedem Bruch eine *Codierung* wie folgt zuordnen.

- $\frac{1}{1}$ erhält die Codierung ε
- Bruch q erhält seine Codierung durch *binäre Suche* von $\frac{1}{1}$ ausgehend (unter Ignorierung von $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$), indem man für jeden Schritt nach links ein L vermerkt und für jeden Schritt nach rechts ein R, bis man auf q trifft.

Beispiele: $\frac{3}{2}$ hat die Codierung RL und $\frac{5}{7}$ hat die Codierung $LRRL$. Was ist die Codierung von $\frac{37}{100}$? Lösung: **LLRLLRRLRR** □

Aufgabe 10: Spirale Freunde der TV Show *Game of Thrones* kennen das spiralförmige Muster, welches sowohl von den *children of the forest* als auch von den *white walker* verwendet wird. Was kaum jemand weiß ist, dass es sich dabei um eine Möglichkeit handelt, eine natürliche Zahl durch ein *Paar* aus natürlichen Zahlen wir folgt zu kodieren.



Hierbei entspricht die 0 dem Ursprung $(0, 0)$, die 9 entspricht dem Paar $(1, 2)$, die 12 entspricht dem Paar $(-2, 2)$.

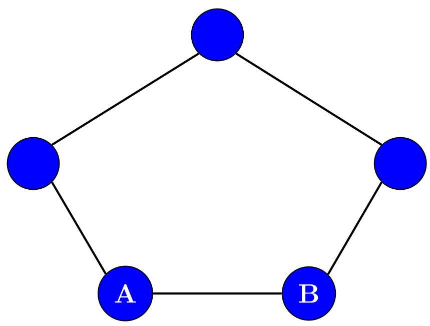
- Welche Zahl hat die Kodierung $(42, 42)$? Lösung: **7224**

□

3 Zufall

Aufgabe 11: Die Höhle der *three-eyed crow* Bran hat die Höhle der *three-eyed crow* erreicht und muss viel lernen. Zur Ablenkung macht er jeden Tag einen Spaziergang. Er verlässt die Höhle mit gleicher Wahrscheinlichkeit durch den Vorderausgang oder den Hinterausgang (der von Hodor bewacht wird). Da der Winter mittlerweile da ist, zieht er beim Verlassen ein Paar Winterstiefel an. Bei der Heimkehr wählt er erneut mit gleicher Wahrscheinlichkeit und unabhängig von der Wahl beim Aufbruch Vorder- oder Hinterausgang. Er zieht die Stiefel nun dort wieder aus. Sollte er eines Tages einen Ausgang wählen, wo sich keine Stiefel mehr befinden, geht er trotzdem raus und wird vom *Night King* gefangen. Wie viele Spaziergänge schafft Bran im Schnitt, ohne gefangen zu werden, wenn am Anfang 17 Paar Stiefel am Vorderausgang und 19 Paar Stiefel am Hinterausgang stehen? Lösung: **682** □

Aufgabe 12: Finger Dance Aeron, Euron, Balon, Asha und Theon spielen den traditionellen *finger dance* der *Iron Islands*. Dabei stehen sie in einem Fünfeck:



Zu Beginn des Spiels haben die Spieler auf Position A und B jeweils eine Handaxt in der Hand. In jeder Runde werfen beide Spieler mit Axt *gleichzeitig* ihre Axt mit 50% Wahrscheinlichkeit zum linken oder zum rechten Nachbarn. Das Spiel endet, wenn ein Spieler beide Äxte fangen muss (und dabei ggf. einen Finger verliert, daher der Name des Spiels). Wie viele Runden dauert das Spiel im Schnitt? Lösung: **12** □

Aufgabe 13: Weihnachtsrum Der gute Weihnachtsrum wird in einem mehrstufigen Verfahren hergestellt, wozu man drei gleich große, riesige Fässer A, B und C verwendet. Jedes Jahr wird $\frac{1}{3}$ aus Fass C in Flaschen abgefüllt und durch $\frac{1}{3}$ aus Fass B ersetzt. Dieses Drittel wird wiederum durch $\frac{1}{3}$ aus Fass A ersetzt. Fass A wird dann mit frischem Rum aufgefüllt. Dieses Verfahren wurde schon vom allerersten Weihnachtsmann vor Urzeiten etabliert (wegen seiner Expertise in der spanischen Sherry Produktion). Wie alt ist der Rum im Schnitt, wenn er in Flaschen gefüllt wird? Lösung: **9** □

4 Geschicktes Zählen

Aufgabe 14: Merkwürdige Bäume Beim Spielen in den *Crypts of Winterfell* entdeckt Rickon ein seltsames Blatt Papier mit dem folgenden Weihnachtsbaum (aka Dreieck).

1						**0. Zeile**
0	1					**1. Zeile**
1	1	0				**2. Zeile**
0	1	2	2			**3. Zeile**
5	5	4	2	0		**4. Zeile**
0	5	10	14	16	16	**5. Zeile**

Als gewiefter Mathematiker erkennt Rickon sofort das Muster: Die Folgereihe ergibt sich jeweils durch die *partiellen Summen* der darüberliegenden Reihe. Das heißst durch Aufsummieren aller Zahlen in der darüberliegenden Reihe *vor* der eigenen Position. In ungeraden Reihen geschieht dies von links nach rechts, in geraden Reihen von rechts nach links. Die Lieblingszahl seines Haustieres *Shaggydog* ist die 15. Welche Zahl steht wohl in der 15. Zeile ganz rechts? Lösung: **1903757312**
□

Aufgabe 15: Und raus bist du! Die 1234 Rentiere des Weihnachtsmannes zählen ab, wer putzen muss, während alle anderen Geschenke verteilen. Hierzu stellen sie sich in einen Kreis. Rudolph bekommt die Nummer 1 und alle anderen fortlaufend die Nummern 2 bis 1234. Sie zählen nun in 3er Schritten beginnend bei Rudolph ab. Jeder Dritte hat Glück und darf Geschenke verteilen. Die ersten Glücklichen sind also die Nummern 3, 6 und 9. Glückliche verlassen den Kreis. Wer übrig bleibt, muss putzen. Bei 5 Rentieren wären die Glücklichen die Nummern 3, 1, 5 und 2. Nummer 4 müsste putzen. In welchen Schritten muss bei 1234 abgezählt werden, so dass Rudolph putzen muss? Lösung: **217** □

Aufgabe 16: Murmelspiel Dasher, Dancer und Prancer wollen anhand eines lustigen Murmelspiels schnelles Wachstum beobachten und ihre Kopfrechenfähigkeiten trainieren. Hierzu verwenden sie einen Haufen mit einem ausreichend großen Vorrat an Murmeln. In der ersten Runde hat Dasher zwei Murmeln, Dancer hält eine Murmel und Prancer keine Murmel. In der jeweils nächsten Runde werfen alle ihre Murmeln auf den Stapel und nehmen sich folgende Anzahl Murmeln vom Haufen:

- Dasher nimmt sich doppelt so viele wie in der vorigen Runde abzüglich der Anzahl, die Prancer in der vorigen Runde hatte
- Dancer nimmt sich so viele wie Dasher in der vorigen Runde hatte
- Prancer nimmt sich so viele wie Dancer in der vorigen Runde hatte.

In der zweiten Runde hat Dasher also 4 Murmeln, Dancer zwei und Prancer eine Murmel. Wie viele Murmeln hat Dasher in der Runde 89. Runde? Lösung: **7540113804746346428** □

Aufgabe 17: Voll geklammert In dieser Aufgabe betrachten wir das Produkt

$$\prod_{i=1}^{21} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{20} \cdot x_{21}$$

Wie viele mögliche Auswertungsreihenfolgen gibt es für dieses Produkt? In anderen Worten: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 20 nicht triviale Klammerpaare einzufügen? Beispiele:

- Bei $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ gibt es die beiden Möglichkeiten $((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$ und $(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$.
- Bei $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ gibt es die 5 Möglichkeiten $((x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4))$, $(x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4))$, $((x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4)$, $(x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4)))$ und $(((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4)$.

Lösung: **6564120420** □

Aufgabe 18: Pakete schieben Die Weihnachtswichtel müssen Pakete vom Nordpol-Stapel (N) über die Zwischenstation Rovaniemi-Stapel (R) nach Fulda-Stapel (F) transportieren. Alle Pakete haben unterschiedliche Größe und stehen am Anfang der Größe nach sortiert auf einem Stapel am Nordpol. Es darf niemals ein größeres Paket auf einem kleineren stehen. Es darf immer nur ein Paket auf einmal bewegt werden, nämlich das oberste des Stapels. Jedes Paket kann nur auf einer der vier möglichen Strecken bewegt werden, die wie folgt nummeriert sind:

1. N nach R
2. R nach F
3. F nach R
4. R nach N

Ein Weg ist eine gültige Abfolge von Strecken. Die kürzeste Weg für 1 Paket ist der Weg 12. Der kürzeste Weg für zwei Pakete ist der Weg 12134212. Wie lauten die *letzten* 50 Strecken des kürzesten Weges für 10 Pakete? Lösung:

12434312134212434312434212134212134312434212134212 □

Aufgabe 19: Betrunkenes Rentier Rentier Rudolph hat einen über den Durst getrunken und muss nach Hause wanken. Hierzu startet er im Ursprung $(0, 0)$ des Koordinatensystems und muss zum Punkt $(5, 5)$ gelangen. In jedem Schritt kann er nur 1 Einheit auf den Gitterlinien entlang laufen und darf dabei das von $(0, 0)$ und $(5, 5)$ aufgespannte Quadrat nicht verlassen (aber auf dessen Rändern laufen). Er nimmt nicht mehr viel wahr, allerdings riecht er, wenn er schon einmal an einer Koordinate gewesen ist und vermeidet diese. Sein Weg darf sich also nicht selber kreuzen. Wie viele mögliche Wege kann Rudolph gehen? *Tipp:* Wenn er von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ möchte, gibt es genau zwei Möglichkeiten: $(0, 0) \to (1, 0) \to (1, 1)$ und $(0, 0) \to (0, 1) \to (1, 1)$. Wenn er nach $(2, 2)$ gehen möchte, gibt es 12 Wege. Lösung: **1262816** □