2015年中科院考研试题量子力学

一.质量为μ的粒子限制在长度为L的一维匣子($0<x<L$)中自由运动，在$x=0$与$x=L$处其定态波函数满足条件$\Psi(0)=\Psi(L)$，$\Psi'(0)=\Psi'(L)$.

1. 求体系能级.

2. 将第一激发态归一化波函数表示为动量本征态的线性组合，并求动量平均值为0时组合系数满足的条件.

二.粒子在球对称谐振子势阱$V(r)=\dfrac{1}{2}\mu\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$中运动，受到微扰作用$H'=\lambda\left(xyz+x^2y+xy^2\right)$, λ为常数。求准确到二级微扰修正的基态能量.

（提示：粒子数表象下，$\langle n_x' |\hat{x}| n_x\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left(\sqrt{n_x+1}\delta_{n_x',n_x+1}+\sqrt{n_x}\delta_{n_x',n_x-1}\right)$）.

三.两个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子组成的体系，$\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{1}}$和$\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{2}}$分别表示两个粒子的自旋算符，$\hat{\boldsymbol{S}}$为两粒子的总自旋算符，$\hat{\boldsymbol{n}}$表示两粒子相对运动方向的单位矢量。设系统的相互作用哈密顿量为$H=3\left(\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{1}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)\left(\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{2}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)-\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_2$

1.证明

(a)$\hat{\boldsymbol{S}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_2=\dfrac{1}{2}\hat{\boldsymbol{S}}^{\mathbf{2}}-\dfrac{3}{4}\hbar^2$

(b)$\left(\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{1}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)\left(\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{2}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\right)^2-\dfrac{1}{4}\hbar^2$

2.证明$\left[H,\hat{\boldsymbol{S}}^{\mathbf{2}}\right]=0$

四.质量为μ的粒子在一维势$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ Bx & x>0\end{cases}$中运动，其中$B>0$是常数.

1.试从下列波函数中选择一个合理的束缚态试探波函数，并说明理由.

a)$e^{-\frac{x}{a}}$　　　　b)$xe^{-\frac{x}{a}}$　　　　c)$1-e^{-\frac{x}{a}}$

其中$a>0$为变分参数.

2.取所选的试探波函数，用变分法估算体系基态能量.

五.一个二能级体系，哈密顿算符的矩阵表达式为$H_0=\begin{pmatrix}E_1^{(0)} & 0\\ 0 & E_2^{(0)}\end{pmatrix}$,$\left(E_1^{(0)}<E_2^{(0)}\right)$.设$t=0$时刻体系处于$H_0$的基态上，后受微扰$H'$的作用，$H'=\begin{pmatrix}0 & \gamma\\ \gamma & 0\end{pmatrix}$，$\gamma$为常数.

1.求出在$t>0$时刻，体系处于H_0激发态的几率$P_{E_2^{(0)}}(t)$的精确表达式.

2.利用一阶含时微扰论求$P_{E_2^{(0)}}(t)$，并与精确表达式比较，讨论所得结果的适用条件.