2015年中科院高等数学（甲）试题

一.选择题

(1).对于函数$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$.结论不正确的是：

A.在$(0,\infty)$内有界. B.在$(0,\infty)$内$f(x)$没有最大值和最小值.

C.在$(0.\infty)$内处处可导. D.当$x\to\infty$和$x\to 0^+$时，$f(x)$极限存在.

(2).$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\dfrac{1}{x^2}}=$( )

A.1 B.0 C.∞ D.$e^{-\dfrac{1}{6}}$

(3).微分方程$y'=\dfrac{1}{y-x}$的通解为( )

A.$x=y+Ce^{-y}-1$ B.$y=x+Ce^{-x}-1$

C.$x=\ln|x-y-1|+C$ D.$y=\ln|y-x-1|+C$

(4).已知m,n为正整数，且$m>n$.如果：$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x, T=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos^m x\mathrm{d}x$则下面结论正确的一个是( )

A.$S>T$ B.$S=T$ C.$S<T$ D.S,T大小关系不确定

(5)设对任意的$x\in\mathbb{R}$，总有$m\le f(x)<g(x)<h(x)\le M$.且$g(x)$为连续函数，若$\lim\limits_{x\to\infty}[M-f(x)][h(x)-m]=0$.则对于$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$，下面结论正确的一个是( )

A.一定存在，且等于$\dfrac{M+m}{2}$ B.一定存在，且只能等于M或m

C.一定不存在 D.一定存在，且可以取到$[m,M]$上的任意值

(6)设$f(x)=x^2\sin x+\cos x+\frac{\pi}{2}x$，在其定义域内零点的个数是( )

A.2 B.3 C.4 D.多于4

(7)设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为非零实向量，且$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$垂直，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$垂直，则( )

A.$|\boldsymbol{b}|^2=7|\boldsymbol{a}|^2$ B.$|\boldsymbol{a}|^2=7|\boldsymbol{b}|^2$ C.$|\boldsymbol{b}|^2=5|\boldsymbol{a}|^2$ D.$|\boldsymbol{a}|^2=5|\boldsymbol{b}|^2$

(8)设平面D由$x+y=\dfrac{1}{2}, x+y=1$及两条坐标轴围成.$I_1=\iint\limits_D\ln(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_D\sin(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.则下面结论正确的一个是( )

A.$I_1<I_2<I_3$ B.$I_3<I_1<I_2$ C.$I_1<I_3<I_2$ D.$I_3<I_2<I_1$

(9)设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径分别为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$与$\dfrac{1}{3}$.则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^2}{b_n^2}x^n$的收敛半径为( )

A.2 B.$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ C.$\dfrac{1}{3}$ D.$\dfrac{1}{2}$

(10)已知曲面$x^2+y^2+2z^2=5$，在其上点(x_0,y_0,z_0)处的切平面与平面$x+2y+z=0$平分，则有( )

A.$x_0:y_0:z_0=4:2:1$ B.$x_0:y_0:z_0=2:4:1$

C.$x_0:y_0:z_0=1:4:2$ D.$x_0:y_0:z_0=1:2:4$

二.计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\sin\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\sin\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots\cdots+\sqrt{1+\sin\dfrac{n\pi}{n}}\right)$.

三.设$u=e^{x^2}\sin\dfrac{x}{y}$，计算$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$在点$(\pi,2)$处的值.

四.设D为第一象限内由$y=x,y=2x,xy=1,xy=2$所围成的区域,f为一元可微函数，且$f'=g$，记L为D的边界，证明：

$$\oint_L xf\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x=-\int_1^2\frac{g\left(u\right)}{2u}\mathrm{d}u$$

.

五.已知$y_1=x,y_2=x^2,y_3=e^x$为线性非齐次微分方程：$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的三特解，求该方程满足初始条件$y(0)=1,y'(0)=0$的特解.

六.设$f(x)=4x+\cos\pi x+\dfrac{1}{1+x^2}-x^2e^x+xe^x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.求$\int_0^1(1-x)e^x f(x)\mathrm{d}x$.

七.计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$其中$\Sigma$是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

八.将函数$f(x)=x-1,(0\le x\le 2)$展开成周期为4的余弦级数.

九.若$g(x)$为单调增加的可微函数，且当$x\ge a$时，$|f'(x)|\le g'(x)$.证明：当$x\ge a$时，$|f(x)-f(a)|\le g(x)-g(a)$.

十.函数$f(x)$在$[0,2]$上二阶可导，且$f'(0)=f'(2)=0$.证明：在区间$(0,2)$内至少存在一点ξ，满足$|f''(\xi)|\ge|f(2)-f(0)|$.

十一.设$0<a<1,x\ge 0$且$y\ge 0$，证明：

(1).$x^a y^{1-a}\le ax+(1-a)y$

(2).设 $x_1,x_2,\ldots x_n,y_1,y_2,\ldots y_n$均为实数，利用(1)的结果证明$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\le(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\dfrac{1}{2}}(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)^{\dfrac{1}{2}}$.