Übung zu Mathematik I für Informatik

1. (a) Bekanntlich läßt sich für $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ die inverse Restklasse $\overline{a}^{\,-1}$ mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus berechnen. Es besteht aber die zusätzliche Möglichkeit, $\overline{a}^{\,-1}$ mit Hilfe eines geeigneten positiven Exponenten $t \in \mathbb{N}$ zu berechnen:

$$\overline{a}^{\,-1} \;=\; \overline{a}^{\,t} \tag{1}$$

   Wie nämlich? *Hinweis*: Satz von Euler.

   (b) Wie lautet dieser Exponent bei $n = 21$? Berechnen Sie auf beide Arten $\overline{10}^{\,-1} \in \mathbb{Z}_{21}$.

2. Finden Sie in dem Restklassenkörper $\mathbb{Z}_{163}$ Nullstellen des Polynoms

$$\mathrm{p}(X) \;=\; X^2 + \overline{127} \cdot X + \overline{99} \tag{2}$$

   Hinweis: 163 ist eine Primzahl mit $163 \equiv 3 \mod 4$. An geeigneter Stelle können Sie den Algorithmus zum schnellen Potenzieren einsetzen.

3. Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Finden Sie zwei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ mit

   - $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$
   - $\vec{a}_1$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.
   - $\vec{a}_2$ steht senkrecht auf $\vec{b}$.

   b) Finden Sie einen Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$, der senkrecht auf $\vec{b}$ steht und für den

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \;=\; -30$$

   gilt.

4. Zeigen Sie: Die Gerade

$$G \;=\; \{\vec{a}_0 + \lambda \vec{a}_1 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} \;\subset\; \mathbb{R}^2$$

   mit $\vec{a}_1 \neq 0$ enhält genau dann den Nullvektor, wenn $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_1$ *linear abhängig* sind.

5. Gegeben seien

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 .$$

   Zeigen Sie, daß diese Vektoren linear unabhängig sind. Ergänzen Sie weiterhin diese Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$, d. h. finden Sie zwei weitere Vektoren $\vec{x}_4, \vec{x}_5 \in \mathbb{R}^5$, so daß $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5)$ eine Basis des $\mathbb{R}^5$ ist.

6. Wählen Sie aus

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

drei zueinander linear unabhängige Vektoren aus und stellen Sie die restlichen beiden als Linearkombinationen der drei ausgewählten Vektoren dar.

7. Gegeben sei in Hessescher Normalform die Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$G = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \sqrt{52} \right\}$$

   (a) Geben Sie die Gerade G in Parameterform, d. h. in der Form $\{\vec{a} + t\,\vec{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$, an.

   (b) Geben Sie eine weitere Gerade $H \in \mathbb{R}^2$ an, die denselben Abstand zum Nullpunkt wie die Gerade G besitzt, zur Geraden G parallel verläuft aber nicht gleich der Geraden G ist.