Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Aufgabe: Die Information über einen geheimen Wert $m \in \mathbb{N}$ wird unter drei Personen so aufgeteilt, daß je zwei von ihnen zusammen den Wert m ermitteln können. Dabei wird das in der Vorlesung erläuterte Verfahren angewandt. Die Informationen an die drei Personen lauten

$$(1243, 847) \qquad (1197, 939) \qquad (2183, 1150) \tag{1}$$

Wie lautet jeweils der geheime Wert m. Zeigen Sie, wie jeweils zwei Personen gemeinsam diesen Wert berechnen.

2. Aufgabe: Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzt man

$$\mathrm{kgV}(a, b) \quad = \quad \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a, b)} \tag{2}$$

Der Wert $\mathrm{kgV}(a, b)$ aus (2) heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b. Um nachzuweisen, daß diese Bezeichnung gerechtfertigt ist, soll in dieser Aufgabe gezeigt werden, daß für $m = \mathrm{kgV}(a, b)$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$a \mid n, \;\; b \mid n \quad \Rightarrow \quad m \mid n \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie (3) zunächst für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.
Hinweis: Verwenden Sie einen geeigneten Hilfssatz aus der Vorlesung (siehe Skript).

(b) Zeigen Sie anschließend (3) für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$.

3. Aufgabe: Zeigen Sie, daß die Menge der folgenden 2×2-Matrizen zusammen mit der üblichen komponentenweisen Addition und der üblichen Matrizenmultiplikation einen kommutativen Ring mit Eins bildet:

$$\mathcal{R} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \tag{4}$$

Zeigen Sie anhand von Beispielen, daß dieser Ring Nullteiler besitzt.

4. Aufgabe: Im Folgenden werden zwei Relationen Rel_1 und Rel_2 angegeben. Die eine ist über den $n \times n$-Matrizen für ein $n \in \mathbb{N}$ und die andere über $\mathbb{R}[x]$, der Menge aller reellen Polynome, definiert. Prüfen Sie bei beiden Relationen nach, ob es sich um Äquivalenzrelationen handelt. Falls eine der Relationen keine Äquivalenzrelation sein sollte, so geben Sie an, welche der drei Bedingungen für Äquivalenzrelationen verletzt ist.

(a) A, B $n \times n$-Matrizen mit: $A \sim B \;\Leftrightarrow\; \det(A) = \det(B)$

(b) $\mathrm{p}(x)$, $\mathrm{q}(x)$ Polynome mit $\mathrm{p}(x) \sim \mathrm{q}(x) \;\Leftrightarrow\;$ $\mathrm{p}(x)$ und $\mathrm{q}(x)$ besitzen entweder beide keine Nullstelle oder besitzen mindestens eine gemeinsame Nullstelle.

5. Aufgabe: Geben Sie $\varphi(42)$ sowie alle Elemente von $\mathbb{Z}_{42}^*$ an. Stellen Sie für $\mathbb{Z}_{42}^*$ eine Multiplikationstabelle auf und geben Sie für jede invertierbare Restklasse $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{42}^*$ deren Inverse $\overline{a}^{-1}$ an. Schreiben Sie für die Aufstellung der Multiplikationstabelle ein kleines Programm in der Programmiersprache Ihrer Wahl.

6. Aufgabe: Begründen Sie, daß in dem Restklassenring $\mathbb{Z}_{22}$ jede Gleichung der Form

$$\overline{0} = \overline{9} \cdot x + \overline{a} \tag{5}$$

mit $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{22}$ lösbar ist. Warum sind die Lösungen jeweils eindeutig? Geben Sie für jedes $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{22}$ die Lösung von (5) an.

Begründen Sie, daß die Gleichung

$$\overline{0} = \overline{4} \cdot x + \overline{3} \tag{6}$$

nicht lösbar ist und daß hingegen die Gleichung

$$\overline{0} = \overline{4} \cdot x + \overline{6} \tag{7}$$

mehrdeutig lösbar ist.