HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 4

1. (a) Die Anwendung des Logarithmus und anschließende Subtraktion von log(63) auf beiden Seiten der Gleichung liefert die quadratische Gleichung

$$x^2 \;+\; 2\,x \;-\; \log(63)$$

Die Lösungen hiervon sind

$$x_{1,2} \;=\; -1 \,\pm\, \sqrt{1+\log(63)} \;=\; \begin{cases} 1.26784803864622567172 \\ -3.26784803864622567172 \end{cases}$$

(b) Man setzt $y = \mathrm{e}^x$. Dann ist $y^2 = (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$. Dieses in die Gleichung eingesetzt und 63 auf beiden Seiten abgezogen, liefert die quadratische Gleichung

$$y^2 \;+\; 2\,y \;-\; 63$$

Die Lösungen hiervon sind

$$y_{1,2} \;=\; -1 \,\pm\, \sqrt{1+63} \;=\; \begin{cases} 7 \\ -8 \end{cases}$$

Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, kommt wegen $y = \mathrm{e}^x$ nur die erste dieser Lösungen in Frage. Die eindeutige Lösung der gegebenen Gleichung lautet somit:

$$\mathrm{e}^x \;=\; 7 \quad\Rightarrow\quad x \;=\; \log(7) \;=\; 1.94591014905531330510$$

2.

a) $-21 + 101x - 9x^3 + x^4 = (x-7)(x+3)(x - \frac{1}{2}(5+\sqrt{21}))(x - \frac{1}{2}(5-\sqrt{21}))$
b) $-18 - 48x - 35x^2 - x^3 + 5x^4 + x^5 = (x+1)(x+3)^2(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))$
c) $16 + 36x + 22x^2 - 4x^3 - 9x^4 - 2x^5 + x^6 = (x-4)(x-2)(x+1)^2(x^2+2x+2)$.

3. Spaltet man die beiden zu den Nullstellen x_1 und x_2 gehörigen Linearfaktoren ab, so liefert dies ein Produktzerlegung

$$p(x) \;=\; (x-x_1)(x-x_2)g(x)$$

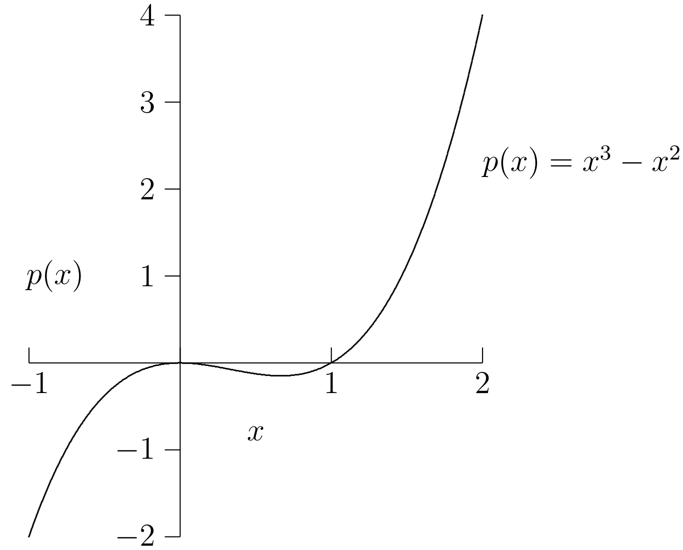
Aufgrund der Gradformel besitzt das Abspaltungspolynom $g(x)$ den Grad 1 und hat somit die Gestalt

$$g(x) \;=\; (x-x_3) \quad \text{mit einem} \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

x_3 ist damit eine Nullstelle von $p(x)$. Das aber $p(x)$ nur die beiden Nullstellen x_1 und x_2 besitzt, muß entweder $x_3 = x_1$ oder $x_3 = x_2$; eine der beiden Nullstellen kommt somit mit doppelter Ordnung vor.

Ein Beispiel für ein solches Polynom ist

$$p(x) \;=\; x^2(x-1) \;=\; x^3 - x$$



4. Angenommen, daß Polynom $p(x)$ besäße keine reelle Nullstelle, dann kämen in seiner Produktzerlegung gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra nur Faktoren zweiten Grades ohne reelle Nullstellen vor; die Produktzerlegung hätte dann die Gestalt

$$p(x) \;=\; (x^2 + a_1 x + b_1)^{k_1} \cdot (x^2 + a_2 x + b_2)^{k_2} \cdots (x^2 + a_m x + b_m)^{k_m}$$

   Wendet man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Gradformel an, so folgte

$$\mathrm{grad}(p(x)) \;=\; 2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_m \;=\; 2\sum_{i=1}^{m} k_i$$

   $\mathrm{grad}(p(x))$ wäre damit im Widerspruch zur Voraussetzung eine gerade Zahl. Daher muß in der zu $p(x)$ gehörigen Produktzerlegung mindestens ein Linearfaktor vorkommen, und zu diesem gehört eine Nullstelle.

5. Betrachtet man zunächst die Produktzerlegung gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra

$$p(x) \;=\; (x - x_1)^{l_1} \cdots (x - x_n)^{l_n} \cdot (x^2 + a_1 x + b_1)^{k_1} \cdots (x^2 + a_m x + b_m)^{k_m}$$

   und wendet man auf die rechte Seite die Gradformel an, so ist

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(p(x)) &= l_1 + l_2 + \ldots l_n + 2k_1 + 2k_2 + \ldots 2k_m \\ &= \sum_{i=1}^{n} l_i \;+\; 2\sum_{i=1}^{m} k_i \\ \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} l_i &= \mathrm{grad}(p(x)) \;-\; 2\sum_{i=1}^{m} k_i \end{aligned}$$

   Da nach Voraussetzung der Grad von $p(x)$ vier und damit insbesondere eine gerade Zahl ist, gibt es für die Gesamtordung der Nullstellen $\sum_{i=1}^{n} l_i$ nur die Möglichkeiten 0, 2, und 4. Für die Nullstellen ergeben sich damit die Möglichkeiten

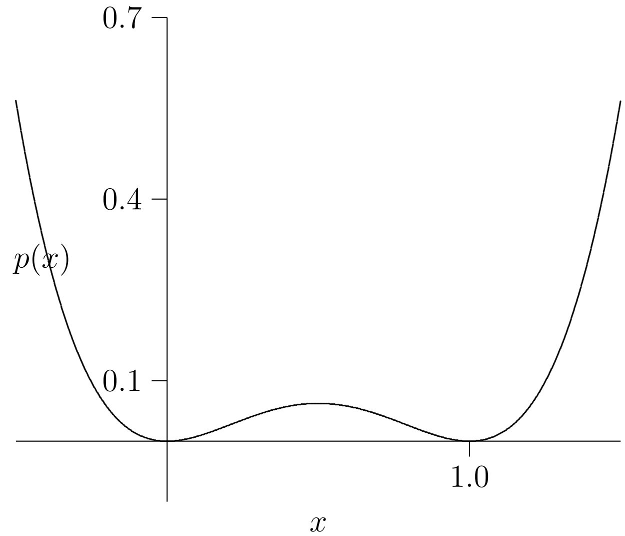
   (a) keine Nullstelle, Beispiel: $p(x) = x^4 + 1$,

   (b) eine doppelte Nullstelle, Beispiel: $p(x) = x^4 + x^2$,

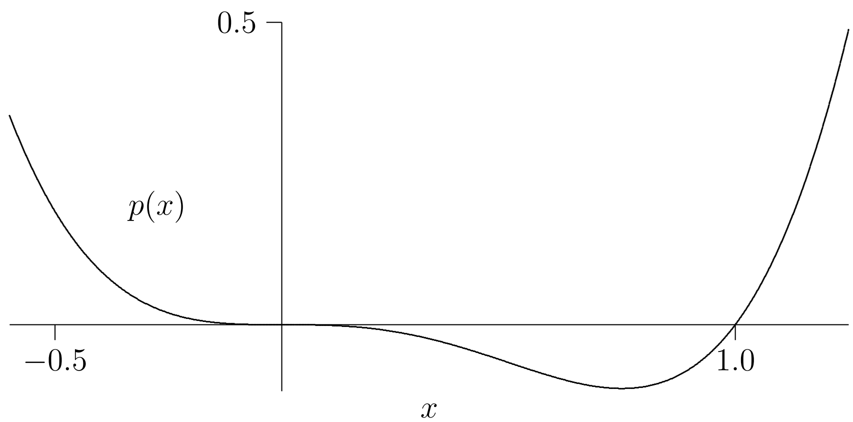
(c) zwei einfache Nullstellen, Beispiel: $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$,

(d) eine vierfache Nullstelle, Beispiel: $p(x) = x^4$,

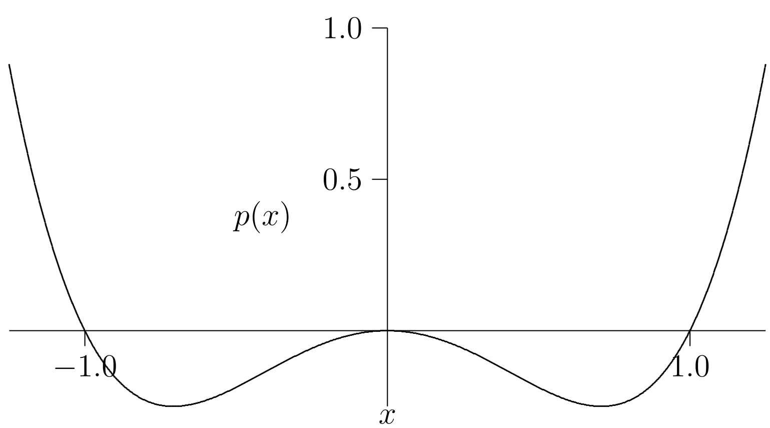
(e) zwei doppelte Nullstellen, Beispiel: $p(x) = x^2(x - 1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$,



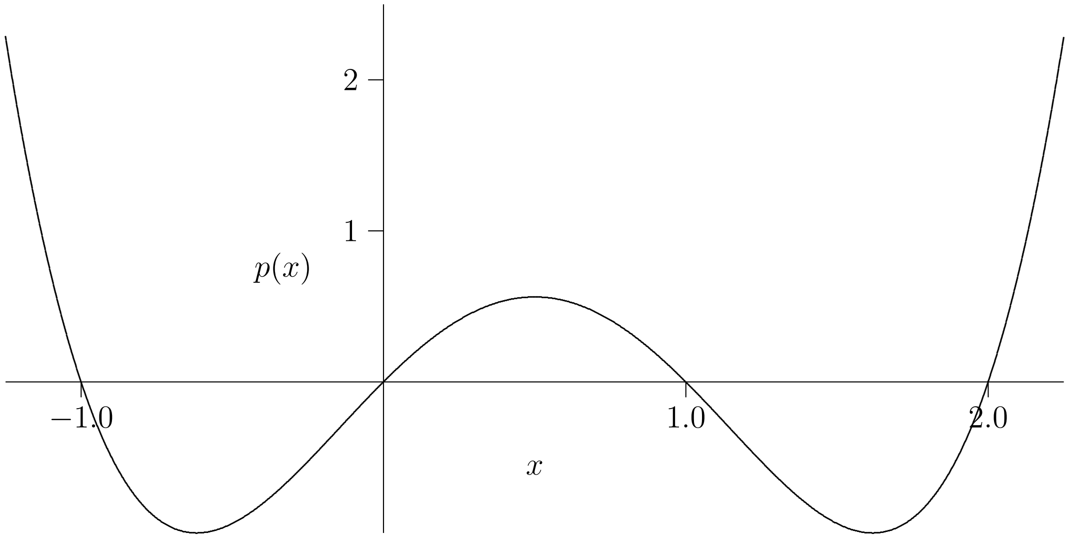
(f) eine einfache und eine dreifache Nullstelle, Beispiel: $p(x) = (x - 1)x^3 = x^4 - x^3$,



(g) zwei einfache und eine doppelte Nullstelle, Beispiel: $p(x) = (x-1)(x+1)x^2 = x^4-x^2$,



(h) vier einfache Nullstellen, Beispiel: $p(x) = x(x-1)(x+1)(x-2) = x^4-2x^3-x^2+2x$.



6. Nach Vorlesung besteht für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$$

Damit rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x+\pi) &= \cos^2(x+\pi) \\ &= (-\cos(x))^2 = (-1)^2 \cdot \cos^2(x) \\ &= \cos^2(x) = \mathrm{f}(x) \end{aligned}$$

7. **a)**

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{=\cos 2x} + \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1}) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x) \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + \underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{=-\cos 2x}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}$$