HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 3

1. Für alle $x \in N$ ist $x \geq \inf N$. Wegen $M \subset N$ gilt daher auch insbesondere für alle $x \in M$ die Ungleichung $x \geq \inf N$, d. h. $\inf N$ ist eine untere Schranke von M; da $\inf M$ die größte untere Schranke von M ist, folgt $\inf M \geq \inf N$.

2. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Der Induktionsanfang für $n = 2$ wurde in der Vorlesung durchgeführt; es handelt sich dabei um die gewöhnliche Dreiecksungleichung. Der Induktionsschluß (für $n > 2$) lautet:

$$
\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{n} a_i| &= |\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n| \\
&\leq |\sum_{i=1}^{n-1} a_i| + |a_n| \quad \text{(gewöhnl. Dreiecksungleichung)} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} |a_i|\right) + |a_n| \quad \text{(nach Ind. vor.: Fall } n-1\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |a_i|
\end{aligned}
$$

3. $\frac{6\times 7}{2} \cdot \frac{7\times 8}{2} = 21 \times 28 = 588$

4. Beweis durch vollständige Induktion:

   Induktionsanfang: Sei $n = 0$.

$$
\begin{aligned}
\text{linke Seite} &: \; 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3 \\
\text{rechte Seite} &: \; 2^{2^{0+1}} - 1 = 2^2 - 1 = 3
\end{aligned}
$$

   Induktionsschluß: Die Behauptung sei für $n-1$ bewiesen:

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{n-1}(2^{2^i}+1) &= 2^{2^n} - 1 \qquad \Big| \times (2^{2^n}+1) \\
\prod_{i=0}^{n}(2^{2^i}+1) &= (2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1) \\
&= \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 \\
&= 2^{2\cdot 2^n} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1 \qquad \text{qed}
\end{aligned}
$$

5.
   a) $f(x) = x^3 \mathrm{sign}(x)$ ist gerade
   b) $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{|x|+2}$ ist weder gerade noch ungerade. Dieses erkennt man durch Einsetzen von $x = 1$ und $x = -1$.
   c) $f(x) = \dfrac{x^5+3x^3-6x}{1+x^4}$ ist ungerade.

6. Anwendung des Logarithmus auf beide Seiten der Ungleichung

$$7^n \;\leq\; 3 \cdot 10^{12}$$

und anschließende Berücksichtigung der Logarithmengesetze liefert:

$$\begin{array}{rrcl} & \log(7^n) & \leq & \log\left(3 \cdot 10^{12}\right) \\ \Rightarrow & n\ \log(7) & \leq & \log(3) + \log\left(10^{12}\right) \\ \Rightarrow & n\ \log(7) & \leq & \log(3) + 12\ \log\left(10\right) \end{array}$$

Wegen $\log(7) > 0$ können beide Seiten der letzten Ungleichung durch $\log(7) > 0$ geteilt werden:

$$\begin{array}{rrcl} & n & \leq & \dfrac{\log(3) + 12\ \log\left(10\right)}{\log(7)} \\ \Rightarrow & n & \leq & \dfrac{1.09861228866810969139 + 12 \cdot 2.30258509299404568401}{1.94591014905531330510} \\ \Rightarrow & n & \leq & 14.76411098351283953560 \end{array}$$

Die größte natürliche Zahl, die die diese Ungleichung erfüllt, ist

$$n \;=\; 14$$

Insbesondere ist dann $7^{14} = 6\,782\,230\,728\,49$.

7. **a)** Gegeben sei die Funktion $\mathrm{g} : N \longrightarrow M$ mit $\mathrm{g}(\mathrm{f}(x)) = x$ für alle $x \in M$. Behauptung: Dann ist f injektiv. Seien dazu $x_1, x_2 \in M$ mit

$$\mathrm{f}(x_1) = \mathrm{f}(x_2)$$

gegeben. Wendet man die Funktion g auf beide Seiten dieser Gleichung an, so folgt

$$\mathrm{g}(\mathrm{f}(x_1)) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(x_2))$$

und damit weiter wegen $\mathrm{g}(\mathrm{f}(x)) = x$;

$$x_1 = \mathrm{g}(\mathrm{f}(x_1)) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(x_2)) = x_2$$

also $x_1 = x_2$. Damit ist die Injektivität gezeigt.
b) Sei eine Funktion $\mathrm{g} : N \longrightarrow M$ mit $\mathrm{f}(\mathrm{g}(y)) = y$ für alle $y \in N$ gegeben. Zu zeigen ist, daß daraus die Surjektivität von f folgt, d. h. daß es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $\mathrm{f}(x) = y$ gibt: Zu $y \in N$ setze man $x = \mathrm{g}(y)$, dann ist nämlich

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(\mathrm{g}(y)) = y.$$