HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 6

1. Zur Herstellung der reduzierten Form stellt man bei der hier vorliegenden Matrix die dritte Zeile an den Anfang und wendet anschließend das Gaußche Verfahren wie üblich an. Eine reduzierte Form dieses Gleichungssystems ist dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang ist 4, und der Corang ist 5-4=1. Die Lösbarkeit erkennt man an der letzten Gleichung: Es ist die einzige Nullgleichung, und auf der rechten Seite steht ebenfalls eine Null. Wie in der Vorlesung angegeben, erhält man aus der reduzierten Form die Lösungsmenge:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2.

$$\begin{aligned} \tan(x) = \cot(x) \;&\Leftrightarrow\; \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &\Leftrightarrow\; \sin^2(x) = \cos^2(x) \\ &\Leftrightarrow\; \cos^2(x) - \sin^2(x) = 0 && \text{Additionstheorem!} \\ &\Leftrightarrow\; \cos(2x) = 0 && \text{d. h. } 2x \text{ ist Nullstelle des cos} \\ &\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3. Die Adjazenzmatrix des ersten Graphen lautet:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihre Potenzen lauten:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die vierte Potenz der Adjazenzmatrix ist die Nullmatrix. Es gibt somit in diesem Graphen keine Wege, die aus mehr als drei Kanten bestehen. Daraus folgt, daß der Graph keinen

Kreis (Masche, Zykel) enthalten kann; denn bei Vorliegen eines Kreises gäbe es Wege beliebiger Länge.

Die Adjazenzmatrix des zweiten Graphen lautet:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihre Potenzen lauten:

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die vierte Potenz der Adjazenzmatrix ist nicht die Nullmatrix. Es muß in diesem Graphen somit Wege, die aus mehr als drei Kanten bestehen, geben. Daraus folgt, daß der Graph mindestens einen Kreis (Masche, Zykel) enthalten muß; denn bei vier Knoten wären nur kreisfreie Wege mit höchstens drei Kanten möglich.

4. Man setze etwa $x_0 = -7\pi$, dann ist

$$\tan x_0 = \frac{\sin(-7\pi)}{\cos(-7\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

Wegen $\arctan 0 = 0$ folgt

$$\arctan(\tan(-7\pi)) = \arctan 0 = 0 = x_0 + 7\pi$$

Der arctan stellt *nur* für den auf das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ eingeschränkten tan die Umkehrfunktion dar; der gewählte Wert $x_0 = -7\pi$ liegt jedoch nicht in $(-\pi/2, \pi/2)$.

5. Eine reduzierte Form ist

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & (5+\lambda)x_3 & = & 1 \\ & & & & (1-4\lambda)x_3 & = & 1 \end{array}$$

Man erkennt an der reduzierten Form, daß das Gleichungssystem genau für $\lambda = \frac{1}{4}$ unlösbar ist.

6. **a)**

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Es ist $A^2 = C \circ D \circ C^{-1} \circ C \circ D \circ C^{-1} = C \circ D \circ D \circ C^{-1} = C \circ D^2 \circ C^{-1}$, ebenso folgt, da sich auch hier die mittleren Faktoren jeweils wegheben:

$$\begin{aligned}
A^5 &= (C \circ D \circ C^{-1})^5 = C \circ D^5 \circ C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^5 \circ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2828 & 1594 & 7619 \\ -1005 & 615 & 2643 \\ -912 & 490 & 2489 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Zunächst beachte man, daß sich die letzte Spalte von C folgendermaßen darstellen läßt:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C \circ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt leicht:

$$A \circ \vec{c} = (C \circ D \circ C^{-1}) \circ (C \circ \vec{e}_3) = C \circ D \circ \vec{e}_3 = C \circ 3\vec{e}_3 = 3C \circ \vec{e}_3 = 3\vec{c}$$

d) Man setze

$$B = C \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \circ C^{-1} = \begin{pmatrix} -14.28694207 & 13.79413216 & 34.26284649 \\ -5.924074484 & 6.702613548 & 12.80166070 \\ -4.681433796 & 4.045759308 & 11.73059289 \end{pmatrix}$$

Dann ist in der Tat

$$B^2 = C \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^2 \circ C^{-1} = C \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \circ C^{-1} = A$$