HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 3

1. Gegeben seien zwei nach unten beschränkte Mengen $M, N \subset \mathbb{R}$; begründen Sie:

$$M \subset N \quad \Rightarrow \quad \inf M \ \geq \ \inf N$$

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt die *verallgemeinerte Dreiecksungleichung*:

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Nehmen Sie den Induktionsanfang bei $n = 2$ vor. Verwenden Sie sowohl beim Induktionsanfang als auch beim Induktionsschluß die in der Vorlesung hergeleitete einfache Dreiecksungleichung:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

3. Berechnen Sie: $\sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{7} i \cdot j$.

4. Das Produktzeichen ($\prod$) ist definiert durch

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \ = \ a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \quad \text{mit} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \ \in \ \mathbb{R} \ .$$

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{i=0}^{n} (2^{2^i} + 1) \ = \ 2^{2^{n+1}} - 1.$$

5. Welche der folgenden Funktion von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist gerade, welche ist ungerade?

a) $f(x) = x^3 \text{sign}(x)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{|x| + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^5 + 3x^3 - 6x}{1 + x^4}$.

6. Bestimmen Sie die größte Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$7^n \ \leq \ 3 \cdot 10^{12}$$

7. Seien M und N zwei nichtleere Mengen, und sei $\mathrm{f} : M \longrightarrow N$ eine Funktion. Zeigen Sie:

a) Die Funktion f ist injektiv, wenn es eine Funktion $\mathrm{g} : N \longrightarrow M$ gibt mit

$$\mathrm{g}(\mathrm{f}(x)) = x \qquad \text{für alle} \quad x \in M$$

b) Die Funktion f ist surjektiv, wenn es eine Funktion $\mathrm{h} : N \longrightarrow M$ gibt mit

$$\mathrm{f}(\mathrm{h}(y)) = y \qquad \text{für alle} \quad y \in N$$

HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 3

1. Für alle $x \in N$ ist $x \geq \inf N$. Wegen $M \subset N$ gilt daher auch insbesondere für alle $x \in M$ die Ungleichung $x \geq \inf N$, d. h. $\inf N$ ist eine untere Schranke von M; da $\inf M$ die größte untere Schranke von M ist, folgt $\inf M \geq \inf N$.

2. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Der Induktionsanfang für $n = 2$ wurde in der Vorlesung durchgeführt; es handelt sich dabei um die gewöhnliche Dreiecksungleichung. Der Induktionsschluß (für $n > 2$) lautet:

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{n} a_i| &= |\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n| \\
&\leq |\sum_{i=1}^{n-1} a_i| + |a_n| \quad \text{(gewöhnl. Dreiecksungleichung)} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} |a_i|\right) + |a_n| \quad \text{(nach Ind. vor.: Fall } n-1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |a_i|
\end{aligned}$$

3. $\frac{6\times7}{2} \cdot \frac{7\times8}{2} = 21 \times 28 = 588$

4. Beweis durch vollständige Induktion:

   Induktionsanfang: Sei $n = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{linke Seite} &: \quad 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3 \\
\text{rechte Seite} &: \quad 2^{2^{0+1}} - 1 = 2^2 - 1 = 3
\end{aligned}$$

   Induktionsschluß: Die Behauptung sei für $n - 1$ bewiesen:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{n-1}(2^{2^i} + 1) &= 2^{2^n} - 1 \qquad \big| \times (2^{2^n} + 1) \\
\prod_{i=0}^{n}(2^{2^i} + 1) &= (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) \\
&= \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 \\
&= 2^{2\cdot 2^n} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1 \qquad \text{qed}
\end{aligned}$$

5.

a)	$f(x) = x^3 \text{sign}(x)$	ist gerade
b)	$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{\lvert x\rvert + 2}$	ist weder gerade noch ungerade. Dieses erkennt man durch Einsetzen von $x = 1$ und $x = -1$.
c)	$f(x) = \dfrac{x^5 + 3x^3 - 6x}{1 + x^4}$	ist ungerade.

6. Anwendung des Logarithmus auf beide Seiten der Ungleichung

$$7^n \;\leq\; 3 \cdot 10^{12}$$

und anschließende Berücksichtigung der Logarithmengesetze liefert:

$$\begin{array}{rrcl} & \log(7^n) & \leq & \log\left(3 \cdot 10^{12}\right) \\ \Rightarrow & n\,\log(7) & \leq & \log(3) + \log\left(10^{12}\right) \\ \Rightarrow & n\,\log(7) & \leq & \log(3) + 12\,\log(10) \end{array}$$

Wegen $\log(7) > 0$ können beide Seiten der letzten Ungleichung durch $\log(7) > 0$ geteilt werden:

$$\begin{array}{rrcl} & n & \leq & \dfrac{\log(3) + 12\,\log(10)}{\log(7)} \\ \Rightarrow & n & \leq & \dfrac{1.09861228866810969139 + 12 \cdot 2.30258509299404568401}{1.94591014905531330510} \\ \Rightarrow & n & \leq & 14.76411098351283953560 \end{array}$$

Die größte natürliche Zahl, die die diese Ungleichung erfüllt, ist

$$n \;=\; 14$$

Insbesondere ist dann $7^{14} = 6\,782\,230\,728\,49$.

7. **a)** Gegeben sei die Funktion $\mathrm{g} : N \longrightarrow M$ mit $\mathrm{g}(\mathrm{f}(x)) = x$ für alle $x \in M$. Behauptung: Dann ist f injektiv. Seien dazu $x_1, x_2 \in M$ mit

$$\mathrm{f}(x_1) = \mathrm{f}(x_2)$$

gegeben. Wendet man die Funktion g auf beide Seiten dieser Gleichung an, so folgt

$$\mathrm{g}(\mathrm{f}(x_1)) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(x_2))$$

und damit weiter wegen $\mathrm{g}(\mathrm{f}(x)) = x$;

$$x_1 = \mathrm{g}(\mathrm{f}(x_1)) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(x_2)) = x_2$$

also $x_1 = x_2$. Damit ist die Injektivität gezeigt.
b) Sei eine Funktion $\mathrm{g} : N \longrightarrow M$ mit $\mathrm{f}(\mathrm{g}(y)) = y$ für alle $y \in N$ gegeben. Zu zeigen ist, daß daraus die Surjektivität von f folgt, d. h. daß es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $\mathrm{f}(x) = y$ gibt: Zu $y \in N$ setze man $x = \mathrm{g}(y)$, dann ist nämlich

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(\mathrm{g}(y)) = y.$$