HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 9

1. **a)** Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathrm{M}^{n,n}$ mit dem Eigenvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Dann ist auch $\vec{u}$ Eigenvektor der Matrix

$$B \;=\; A^2 + 3A + 5E$$

Wie lautet der zu B und $\vec{u}$ gehörige Eigenwert?

b) Berechnen Sie zu den Matrizen

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -33 & 12 \\ -90 & 33 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B \;=\; A^2 + 3A + 5E$$

jeweils einen Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor.

2. Aufgabe: Gegeben seien drei natürliche Zahlen $m, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ggT}(m, n_1) \;=\; 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(m, n_2) \;=\; 3$$

Zeigen Sie, dann ist auch

$$\mathrm{ggT}(m, (n_1 \cdot n_2)) \;=\; 3$$

Hinweis: Sie können sich an dem Hilfssatz im Skript Seite 159 und an dessen Begründung orientieren.

3. Aufgabe: Warum läßt sich eine Zahl $w \in \mathbb{N}$ finden, für die die Teilungen mit Rest durch 1990 und 479 die Reste $r_1 = 235$ und $r_2 = 333$ liefern:

$$\begin{aligned} w &= q_1 \cdot 1990 + 235 \\ w &= q_2 \cdot 479 + 333 \end{aligned} \qquad ? \tag{1}$$

Finden Sie ein solches $w \in \mathbb{N}$. Warum gibt es für w mehrere Möglichkeiten? Bestimmen Sie anschließend das minimale $w_0 \in \mathbb{N}$, das (1) erfüllt.

4. Aufgabe: Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, und sei

$$d \;=\; \mathrm{ggT}(a, b)$$

Seien damit $a_1 = a/d$ und $b_1 = b/d$. Was ist dann $\mathrm{ggT}(a_1, b_1)$?

5. Aufgabe: Zeigen Sie, daß die Menge der folgenden 3×3-Matrizen zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine kommutative Gruppe bildet:

$$\mathcal{G} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{2}$$

Ist diese Gruppe endlich?

6. Aufgabe:

   (a) Sei $a \in \mathcal{G}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gruppe mit sieben Elementen ist. Welche Werte können bei der Ordnung von a, d. h. bei $\mathrm{ord}(a)$ vorkommen?

   (b) Zeigen Sie, daß eine Gruppe mit sieben Elementen stets eine zyklische Gruppe ist.