HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 4

1. Finden Sie alle Lösungen der beiden Gleichungen

$$\text{(a)}\quad e^{x^2+2x} \;=\; 63 \qquad\qquad \text{(b)}\quad e^{2x} \,+\, 2\,e^{x} \;=\; 63$$

2. Zerlegen Sie die folgenden reellen Polynome in Faktoren möglichst kleinen Grades. Verwenden Sie dabei das Hornerschema (siehe Skript). Bestimmen Sie die Nullstellen gegebenenfalls durch „Suchen“.

   a) $f(x) = -21 + 101x - 9x^3 + x^4$
   b) $f(x) = -18 - 48x - 35x^2 - x^3 + 5x^4 + x^5$
   c) $f(x) = 16 + 36x + 22x^2 - 4x^3 - 9x^4 - 2x^5 + x^6$.

   Hinweis: Finden Sie Nullstellen durch Probieren. Gute Kandidaten für Nullstellen sind bei diesen Polynomen die ganzzahlichen Teiler der konstanten Glieder.

3. Gegeben sei ein – der Einfachheit halber – normiertes Polynom dritten Grades $p(x)$, das *genau* die beiden Nullstellen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$ besitzt. Begründen Sie: Dann ist entweder x_1 oder x_2 eine doppelte Nullstelle. Geben Sie ein Beispiel für ein solches Polynom an, und skizzieren Sie es.

4. Zeigen Sie mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra, daß ein – der Einfachheit halber – normiertes Polynom $p(x)$ ungeraden Grades mindestens eine (reelle) Nullstelle besitzt. Überlegen Sie sich dieses zunächst für ein Polynom dritten Grades.

5. Ein Polynom zweiten Grades besitzt keine, zwei einfache oder eine doppelte Nullstelle. Geben Sie ebenso alle bezüglich der Nullstellen bei einem – der Einfachheit halber normiertem – Polynom vierten Grades vorkommenden Möglichkeiten an. Geben Sie für jeden Fall ein Beispielpolynom an und skizzieren Sie es.

   Hinweis: Betrachten Sie die Produktzerlegung gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra.

6. Gegeben sei die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $\mathrm{f}(x) = \cos^2(x)$ Warum gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\mathrm{f}(x + \pi) \;=\; \mathrm{f}(x) \quad ?$$

7. Beweisen Sie: für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{a)}\quad \cos^2 x \;=\; \tfrac{1}{2}(\cos 2x \,+\, 1)$$

$$\text{b)}\quad \sin^2 x \;=\; \tfrac{1}{2}(1 \,-\, \cos 2x)$$

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc...
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit den Nummern 2268, 2319 und 090028.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. (a) Die Anwendung des Logarithmus und anschließende Subtraktion von log(63) auf beiden Seiten der Gleichung liefert die quadratische Gleichung

$$x^2 \,+\, 2\,x \,-\, \log(63)$$

Die Lösungen hiervon sind

$$x_{1,2} \;=\; -1 \pm \sqrt{1+\log(63)} \;=\; \begin{cases} 1.26784803864622567172 \\ -3.26784803864622567172 \end{cases}$$

(b) Man setzt $y = \mathrm{e}^x$. Dann ist $y^2 = (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$. Dieses in die Gleichung eingesetzt und 63 auf beiden Seiten abgezogen, liefert die quadratische Gleichung

$$y^2 \,+\, 2\,y \,-\, 63$$

Die Lösungen hiervon sind

$$y_{1,2} \;=\; -1 \pm \sqrt{1+63} \;=\; \begin{cases} 7 \\ -8 \end{cases}$$

Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, kommt wegen $y = \mathrm{e}^x$ nur die erste dieser Lösungen in Frage. Die eindeutige Lösung der gegebenen Gleichung lautet somit:

$$\mathrm{e}^x \;=\; 7 \quad\Rightarrow\quad x \;=\; \log(7) \;=\; 1.94591014905531330510$$

2.

a) $-21 + 101x - 9x^3 + x^4 = (x-7)(x+3)(x - \frac{1}{2}(5+\sqrt{21}))(x - \frac{1}{2}(5-\sqrt{21}))$
b) $-18 - 48x - 35x^2 - x^3 + 5x^4 + x^5 = (x+1)(x+3)^2(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))$
c) $16 + 36x + 22x^2 - 4x^3 - 9x^4 - 2x^5 + x^6 = (x-4)(x-2)(x+1)^2(x^2+2x+2)$.

3. Spaltet man die beiden zu den Nullstellen x_1 und x_2 gehörigen Linearfaktoren ab, so liefert dies ein Produktzerlegung

$$p(x) \;=\; (x-x_1)(x-x_2)g(x)$$

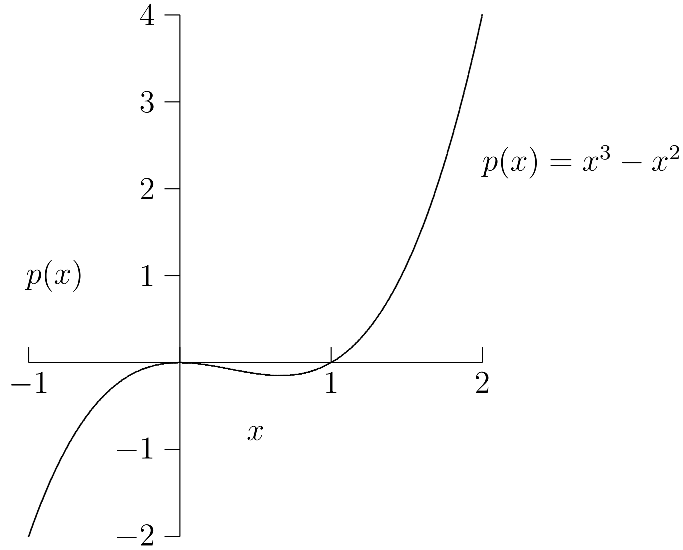
Aufgrund der Gradformel besitzt das Abspaltungspolynom $g(x)$ den Grad 1 und hat somit die Gestalt

$$g(x) \;=\; (x-x_3) \quad \text{mit einem} \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

x_3 ist damit eine Nullstelle von $p(x)$. Das aber $p(x)$ nur die beiden Nullstellen x_1 und x_2 besitzt, muß entweder $x_3 = x_1$ oder $x_3 = x_2$; eine der beiden Nullstellen kommt somit mit doppelter Ordnung vor.

Ein Beispiel für ein solches Polynom ist

$$p(x) \;=\; x^2(x-1) \;=\; x^3 - x$$



4. Angenommen, daß Polynom $p(x)$ besäße keine reelle Nullstelle, dann kämen in seiner Produktzerlegung gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra nur Faktoren zweiten Grades ohne reelle Nullstellen vor; die Produktzerlegung hätte dann die Gestalt

$$p(x) \;=\; (x^2 + a_1 x + b_1)^{k_1} \cdot (x^2 + a_2 x + b_2)^{k_2} \cdots (x^2 + a_m x + b_m)^{k_m}$$

   Wendet man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Gradformel an, so folgte

$$\text{grad}(p(x)) \;=\; 2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_m \;=\; 2\sum_{i=1}^{m} k_i$$

   $\text{grad}(p(x))$ wäre damit im Widerspruch zur Voraussetzung eine gerade Zahl. Daher muß in der zu $p(x)$ gehörigen Produktzerlegung mindestens ein Linearfaktor vorkommen, und zu diesem gehört eine Nullstelle.

5. Betrachtet man zunächst die Produktzerlegung gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra

$$p(x) \;=\; (x - x_1)^{l_1} \cdots (x - x_n)^{l_n} \cdot (x^2 + a_1 x + b_1)^{k_1} \cdots (x^2 + a_m x + b_m)^{k_m}$$

   und wendet man auf die rechte Seite die Gradformel an, so ist

$$\begin{aligned} \text{grad}(p(x)) \;&=\; l_1 + l_2 + \ldots l_n + 2k_1 + 2k_2 + \ldots 2k_m \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} l_i \;+\; 2\sum_{i=1}^{m} k_i \\ \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} l_i \;&=\; \text{grad}(p(x)) \;-\; 2\sum_{i=1}^{m} k_i \end{aligned}$$

   Da nach Voraussetzung der Grad von $p(x)$ vier und damit insbesondere eine gerade Zahl ist, gibt es für die Gesamtordung der Nullstellen $\sum_{i=1}^{n} l_i$ nur die Möglichkeiten 0, 2, und 4. Für die Nullstellen ergeben sich damit die Möglichkeiten

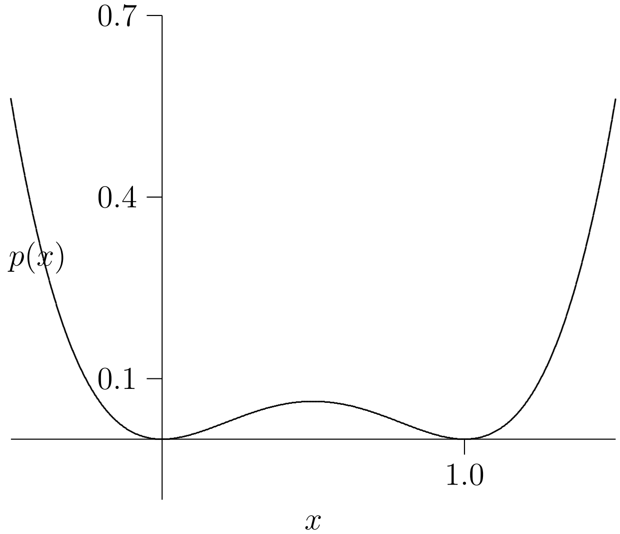
   (a) keine Nullstelle, Beispiel: $p(x) = x^4 + 1$,

   (b) eine doppelte Nullstelle, Beispiel: $p(x) = x^4 + x^2$,

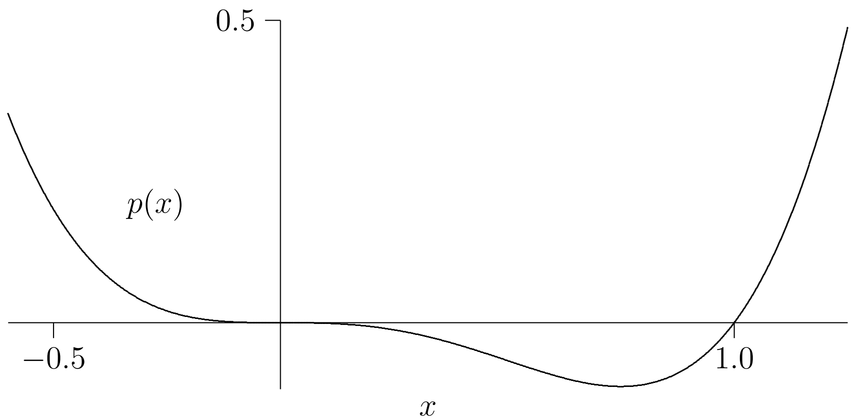
(c) zwei einfache Nullstellen, Beispiel: $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$,

(d) eine vierfache Nullstelle, Beispiel: $p(x) = x^4$,

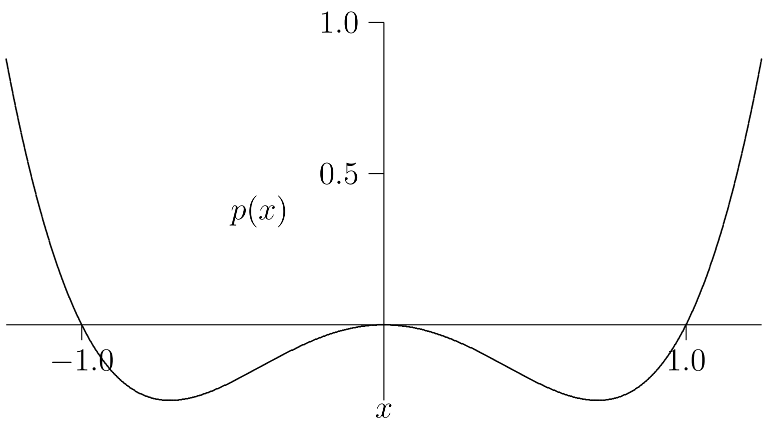
(e) zwei doppelte Nullstellen, Beispiel: $p(x) = x^2(x - 1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$,



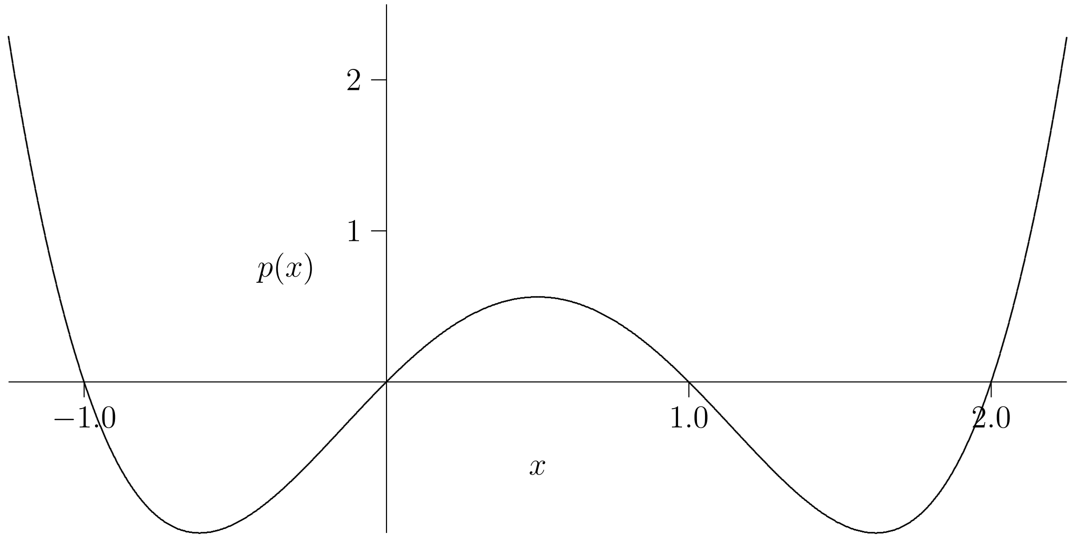
(f) eine einfache und eine dreifache Nullstelle, Beispiel: $p(x) = (x - 1)x^3 = x^4 - x^3$,



(g) zwei einfache und eine doppelte Nullstelle, Beispiel: $p(x) = (x-1)(x+1)x^2 = x^4-x^2$,



(h) vier einfache Nullstellen, Beispiel: $p(x) = x(x-1)(x+1)(x-2) = x^4-2x^3-x^2+2x$.



6. Nach Vorlesung besteht für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$$

Damit rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x+\pi) &= \cos^2(x+\pi) \\ &= (-\cos(x))^2 \;=\; (-1)^2 \cdot \cos^2(x) \\ &= \cos^2(x) \;=\; \mathrm{f}(x) \end{aligned}$$

7. **a)**

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{=\cos 2x} + \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1}) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x) \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + \underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{=-\cos 2x}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}$$