HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 5

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Logarithmus, daß jede positive reelle Zahl $x \in \mathbb{R}^+$ eine sogenannte Gleitkommadarstellung besitzt:

$$x \;=\; m \cdot 2^u \qquad \text{mit} \quad 1 \le m < 2 \quad \text{und} \quad u \in \mathbb{Z}$$

   Geben Sie die Gleitkommadarstellung von $x_0 = 987654321369$ an.

2. Sei $\mathrm{p}(x)$ ein Polynom vom Gerade mindestens 1. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß ein $x_1 \in \mathbb{R}$ genau dann eine Nullstelle des Polynoms $\mathrm{p}(x)$ ist, wenn der zugehörige Linearfaktor $x - x_1$ das Polynom $\mathrm{p}(x)$ ohne Rest teilt. In dieser Aufgabe geht es um einen ähnlichen Sachverhalt für den Fall, daß x_1 keine Nullstelle von $\mathrm{p}(x)$ ist

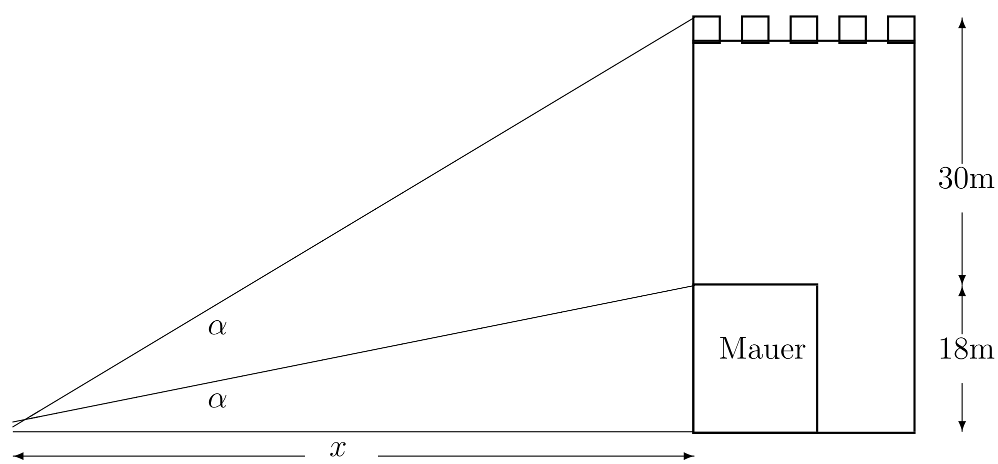
   a) Begründen Sie: Ist x_1 keine Nullstelle von $\mathrm{p}(x)$, so besitzt der Divisionsrest r, der bei Teilung von $\mathrm{p}(x)$ durch $x - x_1$ entsteht, den Grad 0, d. h. er ist eine Konstante:

$$\mathrm{p}(x) \;:\; (x - x_1) \;=\; \mathrm{g}(x) \text{ Rest } r \qquad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R} \tag{1}$$

   b) Begründen Sie weiter: Der Divisionsrest in (1) ist gerade der Wert des Polynoms $\mathrm{p}(x)$ an der Stelle $x = x_1$:

$$r \;=\; \mathrm{p}(x_1)$$

3. Über einer $h = 18$ m hohen Mauer erhebt sich ein Turm mit der Länge $l = 30$ m . In welcher Entfernung x vom Fuße der Mauer sind Mauerkrone und Turm unter jeweils gleichem Winkel α zu sehen? Wie groß ist α?



4. Finden Sie ein $\delta \in (-\pi, \pi]$ mit

$$\cos(\delta) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{und} \qquad \sin(\delta) \;=\; \frac{2}{\sqrt{5}}$$

5. Welchen Rang haben die beiden folgenden linearen Gleichungssysteme? Bestimmen Sie auch die beiden Lösungsmengen, indem Sie, falls vorhanden, jeweils eine spezielle Lösung und geeignete Grundlösungen des zugehörigen homogenen Systems angeben:

   c)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\
3x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 63
\end{array}
$$

   a)

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & = & 0 \\
5x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 11x_4 & = & -4 \\
-x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 6 \\
2x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 4
\end{array}
$$

6. Drei Herren weigern sich, ihr Alter zu verraten. Obendrein tragen sie etwas seltsame Namen, nämlich Xaver, Ymir, Zacharias. Nach einigem Überreden lassen sich aber von ihnen diese Aussagen über das Alter (in Jahren) eines jeden von ihnen entlocken:

   Wäre Xaver sechs Jahre jünger, als er tatsächlich ist, so wäre er halb so alt, wie heute Ymir und Zacharias zusammen. Alle drei zusammen sind 111 Jahre alt. Vor 20 Jahren war Ymir doppelt so alt wie Zacharias.

   Damit ist aber klar, wie alt jeder dieser drei Herren ist! Nämlich?

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc...
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit den Nummern 11421, 11338 und 090029.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Da eine der beiden für die Gleitkommadarstellung benötigten Größen im Exponenten steht, empfiehlt es sich, zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^+$ auf beide Seite der Gleichung $x = m \cdot 2^u$ den Logarithmus anzuwenden:

$$\begin{aligned}
\log(x) &= \log(m \cdot 2^u) \\
&= \log(m) + \log(2^u) \\
&= \log(m) + u \log(2) \\
\Rightarrow \quad \frac{\log(x)}{\log(2)} &= \frac{\log(m)}{\log(2)} + u \qquad (1)
\end{aligned}$$

Für die beiden Summanden auf der rechten Seite der letzten Gleichung gilt einerseits $u \in \mathbb{Z}$ und andererseits wegen $1 \leq m < 2$ und der Monotonie der Logarithmusfunktion

$$0 = \log(1) \leq \log(m) < \log(2) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \underbrace{\frac{\log(m)}{\log(2)}}_{=w} < 1$$

Der erste Summand auf der rechten Seite von (1) wurde zur Abkürzung w genannt; es ist somit $0 \leq w < 1$. Damit erhält man aus (1) unter Verwendung der Gaußklammer[1]

$$u = \left[\frac{\log(x)}{\log(2)}\right] \qquad w = \frac{\log(x)}{\log(2)} - u \qquad m = \mathrm{e}^{w \cdot \log(2)}$$

Die letzte Gleichung ergab sich hier durch Auflösen von $w = \log(m)/\log(2)$ noch m.

Bemerkung 1: Die Zahl m heißt „Mantisse“ und die Zahl u heißt „Exponent“.
Bemerkung 2: Die Rechnung hätte sich etwas vereinfachen lassen, wenn man anstelle des natürlichen Logarithmus $\log(x)$ den logarithmus dualis $ld(x) = \log(x)/log(2)$ verwendet hätte.

Für $x_0 = 987654321369$ berechnet man

$$\begin{aligned}
u &= \left[\frac{\log(987654321369)}{\log(2)}\right] = \left[\frac{27.61859859631610355483}{\log(0.69314718055994530941)}\right] \\
&= [39.84521523120812838578] = 39 \\
w &= \frac{\log(987654321369)}{\log(2)} - 39 = 0.84521523120812838578 \\
m &= \mathrm{e}^{0.84521523120812838578 \cdot \log(2)} = \left(\mathrm{e}^{\log(2)}\right)^{0.84521523120812838578} \\
&= 2^{0.84521523120812838578} = 1.79653274493648496039
\end{aligned}$$

Also ist

$$987654321369 = 1.79653274493648496039 \cdot 2^{39}$$

[1] Die Gaußklammer ist der ganze Anteil einer reellen Zahl a: $[a] = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq a\}$; siehe Skript.

2. **a)** Da der Grad des Divisionsrestes immer kleiner als der Grad des Divisors ist – andernfalls wäre noch ein weiterer Schritt bei der Polynomdivision möglich – und der Divisor $(x - x_1)$ hier den Grad 1 besitzt, kann der Rest nur das Nullpolynom oder ein Polynom vom Grad 0 sein. In beiden Fällen besteht das Restpolynom nur aus den konstanten Glied und ist damit eine Konstante $r \in \mathbb{R}$.

   b) Da, wie gesehen, das Restpolynom eine Konstante $r \in \mathbb{R}$ ist, liefert die Polynomdivision durch $x - x_1$ die Gleichung

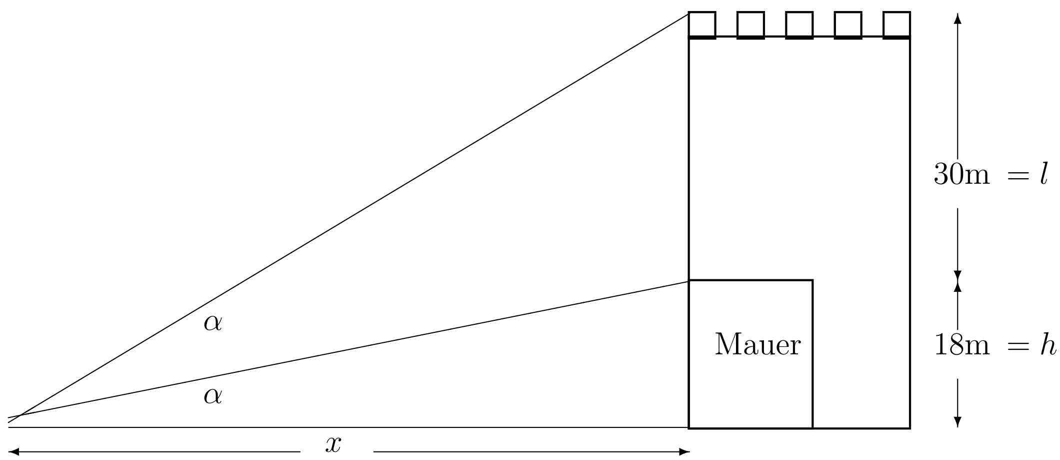
$$\frac{\mathrm{p}(x)}{x - x_1} = \mathrm{g}(x) + \frac{r}{x - x_1}$$

   mit einem Polynom $\mathrm{g}(x)$ (dem Quotienten). Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $x - x_1$, so erhält man

$$\mathrm{p}(x) = \mathrm{g}(x) \cdot (x - x_1) + r$$

   Setzt man hier $x = x_1$ ein, so erhält man in der Tat

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(x_1) &= \overbrace{\mathrm{g}(x_1) \cdot (x_1 - x_1)}^{=0} + r \\ &= r \end{aligned}$$

3. 

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{h}{x} \\
\tan 2\alpha &= \frac{h+l}{x} \\
&= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \text{für } \tan\alpha \text{ einsetzen!} \\
&= \frac{2h}{x(1-\frac{h^2}{x^2})} \\
&= \frac{2hx^2}{x(x^2-h^2)} \\
\Rightarrow \quad (h+l)(x^2-h^2) &= 2hx^2 \qquad\qquad \text{nach } x \text{ auflösen!} \\
\Rightarrow \quad x &= h\sqrt{\frac{l+h}{l-h}} \\
\Rightarrow \quad \tan\alpha &= \sqrt{\frac{l-h}{l+h}}
\end{aligned}$$

Damit folgt: $x = 36$m und $\alpha = \arctan\frac{1}{2} = 26,565°$.

4. Zunächst stellt man sicher, daß $(-1/\sqrt{5})^2 + (2/\sqrt{5})^2 = 1$ ist und somit ein δ mit der gewünschten Eigenschaft existieren muß. Da der Wert des Cosinus negativ sein soll, berechnet man nach Vorlesung dieses δ durch

$$\delta \;=\; \arctan\left(\frac{2/\sqrt{5}}{-1/\sqrt{5}}\right) + \pi \;=\; \arctan(-2) + \pi \;=\; -1.1071 + \pi \;=\; 2.0344$$

5. **a)** Eine reduzierte Form ist

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 21 \end{array}$$

Der Rang ist $r = 2$; der Corang ist $s = n - r = 3 - r = 3 - 2 = 1$. Setzt man $x_3 = 0$, so liefert dieses die spezielle Lösung $S = (-14, 21, 0)$. Die wegen $s = 1$ einzige Grundlösung des homogenen Systems ist $G = (2, -3, 1)$. Die Lösungsmenge lautet somit

$$L \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Eine reduzierte Form ist :

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ & & & & x_3 & & & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Der Rang ist $r = 4$; der Corang ist $s = n - r = 4 - r = 4 - 4 = 0$. Die wegen $s = 0$ eindeutige und wegen $r = 4 = m$ notwendigerweise existierende Lösung ist $(0, -4, 2, 2)$.

6. Ein geeignetes lineares Gleichungssystem soll aufgestellt werden, dabei stehe x für das Alter von Xaver und ebenso y und z für das Alter von Ymir bzw. Zacharias:

$$\begin{array}{lllccccccc} 1. & (x-6) = \frac{1}{2}(y+z) & \Leftrightarrow & 2x & - & y & - & z & = & 12 \\ 2. & & & x & + & y & + & z & = & 111 \\ 3. & (y-20) = 2(z-20) & \Leftrightarrow & & & y & - & 2z & = & -20 \end{array}$$

Anwendung des Gaußschen Verfahrens liefert eine reduzierte Form dieses Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 111 \\ & & y & + & z & = & 70 \\ & & & & z & = & 30 \end{array}$$

und damit $z = 30$, $y = 40$ und $x = 41$.