HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 2

1. Gegeben sei das kartesische Produkt

$$A \;=\; \{-1,0,1,2\} \times \{1,2,3\}$$

   Geben Sie alle Elemente der folgenden Teilmenge $B \subset A$ an:

$$B \;=\; \{(x,y) \in A \mid x+y \geq 3\}$$

2. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen

$$\text{a)}\quad |x|-1=\frac{1}{2}x, \quad \text{b)}\quad |x-3|-2|x+2|=0,$$

$$\text{c)}\quad ||x+5|-1| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{d)}\quad (x-1)^2\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)^2+(|x-2|-1)^2=0.$$

3. Für welche reellen Zahlen gilt die Ungleichung

$$|x-2| \;<\; |x-3| \quad ?$$

4. Beweise für drei reelle Zahlen a, b und $c \in \mathbb{R}$:

$$|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|.$$

5. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{37+i}{i} \;=\; \binom{38+n}{n}.$$

6. Für zwei reelle Zahlen a und $b \in \mathbb{R}$ sei $\max(a,b)$ definiert als die größere der beiden Zahlen und entsprechend $\min(a,b)$ als die kleinere der beiden Zahlen. Zeige:

$$\max\,(a,b)=\frac{(a+b)+|a-b|}{2} \qquad \text{und} \qquad \min\,(a,b)=\frac{(a+b)-|a-b|}{2}.$$

7. Sei

$$M \;:=\; \{x \mid x=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \;\text{ mit }\; n \in \mathbb{N}\;\}.$$

   Man gebe, falls vorhanden, $\sup(M)$, $\max(M)$, $\inf(M)$ und $\min(M)$ an.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. $B = \{(0,3),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

2. **a)**
1. Fall: Sei $x \geq 0$, dann ist $x - 1 = \frac{1}{2}x$ und damit $x = 2$.
2. Fall: Sei $x < 0$, dann ist $-x - 1 = \frac{1}{2}x$ und damit $x = \frac{-2}{3}$.
Somit erfüllen $x = 2$ und $x = \frac{-2}{3}$ die Gleichung.
b)
1. Fall: Sei $x \geq 3$, dann ist $(x-3) - 2(x+2) = 0$ und damit wäre $x = -7$, wegen $x \geq 3$ tritt dieser Fall nicht auf.
2. Fall: Sei $-2 \leq x < 3$, dann ist $-(x-3) - 2(x+2) = 0$ und damit ist $x = -\frac{1}{3}$.
3. Fall: Sei $x < -2$, dann ist $-(x-3) + 2(x+2) = 0$ und damit ist $x = -7$.
Somit sind $x = -\frac{1}{3}$ und $x = -7$ die beiden Lösungen der Gleichung.
c)
1. Fall: Sei $x \geq -5$, dann ist $x + 5 \geq 0$, und man kann folgern

$$\begin{aligned} ||x+5|-1| \leq \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq x + 5 - 1 \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -4 - \frac{1}{2} \leq x \leq -4 + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{-9}{2}, \frac{-7}{2}\right] \end{aligned}$$

2. Fall: Sei $x < -5$, dann ist $x + 5 < 0$ und man kann folgern

$$\begin{aligned} ||x+5|-1| \leq \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq -(x+5) - 1 \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 6 - \frac{1}{2} \leq -x \leq 6 + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -6 - \frac{1}{2} \leq x \leq -6 + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{-13}{2}, \frac{-11}{2}\right] \end{aligned}$$

Also: x erfüllt die Ungleichung genau dann, wenn

$$x \in \left[\frac{-13}{2}, \frac{-11}{2}\right] \cup \left[\frac{-9}{2}, \frac{-7}{2}\right]$$

ist.
d) Setze $a = (x-1)(x-2)(x-3)$ und $b = |x-2| - 1$. Wegen $a^2 + b^2 = 0$ folgt dann nach Vorlesung $a = b = 0$. Aus $a = 0$ erhält man wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{R}$: $x - 1 = 0$ oder $x - 2 = 0$ oder $x - 3 = 0$, d. h. $x \in \{1,2,3\}$. Durch Einsetzen sieht man, daß genau für $x = 1$ und $x = 3$ die Bedingung $b = 0$ erfüllt ist. Die Gleichung ist somit genau für $x \in \{1,3\}$ erfüllt.

3. Sei M die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen Die drei Fälle $x \geq 3$, $x \leq 2$ und $2 < x < 3$ werden einzeln behandelt:

   (a) Sei $x \geq 3$, insbesondere ist dann auch $x > 2$, und es folgt, falls x die Ungleichung erfüllt

   $$\begin{array}{rrcll} & x-2 & < & x-3 & \\ \Leftrightarrow & -2 & < & -3 & \\ \Leftrightarrow & 2 & > & 3 & \quad \text{Widerspruch!} \end{array}$$

   Also ist für diese x stets $x \notin M$.

   (b) Sei $x \leq 2$, insbesondere ist dann auch $x < 3$, und für die $x \in M$ gilt

   $$\begin{array}{rrcll} & -(x-2) & < & -(x-3) & \\ \Leftrightarrow & 2-x & < & 3-x & \\ \Leftrightarrow & 2 & < & 3 & \quad \text{Dieses ist stets erfüllt.} \end{array}$$

   Also ist für diese x stets $x \in M$.

   (c) Sei nun $2 < x < 3$. Für $x \in M$ ist dann

   $$\begin{array}{rrcl} & x-2 & < & -(3-x) \\ \Leftrightarrow & x-2 & < & 3-x \\ \Leftrightarrow & 2x & < & 5 \\ \Leftrightarrow & x & < & \frac{5}{2} \end{array}$$

   Also: von diesen x liegen genau diejenigen mit $x < \frac{5}{2}$ in der Menge M.

   Insgesamt folgt $M = \{x \in \mathbb{R} \, | x < \frac{5}{2}\}$. Dieses sind genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die dichter an 2 als an 3 liegen!

4. Man wende die Dreiecksungleichung auf die beiden Zahlen a und $d = b + c$ an:

   $$|a+b+c| \;=\; |a+d| \;\leq\; |a| + |d| \;=\; |a| + |b+c|$$

   Eine zweite Anwendung der Dreicksungleichung und anschließende Addition von $|a|$ liefern:

   $$|b+c| \;\leq\; |b| + |c| \quad \Longrightarrow \quad |a| + |b+c| \;\leq\; |a| + |b| + |c|$$

   Beide Ungleichungen zusammen liefern das Ergebnis:

   $$|a+b+c| \;\leq\; |a| + |b+c| \;\leq\; |a| + |b| + |c|$$

5. Beweis durch vollständige Induktion über n:

   Induktionsanfang: Sei $n = 0$:

   $$\begin{array}{rcl} \text{linke Seite} & : & \binom{37}{0} = 1 \\ \text{rechte Seite} & : & \binom{38+0}{0} = \binom{38}{0} = 1 \end{array}$$

Induktionsschluß: Die Behauptung gelte für $n-1$ als bewiesen; dann folgt:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{37+i}{i} = \binom{37+n}{n-1} \qquad \Big| + \binom{37+n}{n}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{37+i}{i} = \binom{37+n}{n-1} + \binom{37+n}{n}$$

$$= \binom{37+n+1}{n} = \binom{38+n}{n},$$

da allgemein für $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ die Regel $\binom{a}{b} + \binom{a}{b-1} = \binom{a+1}{b}$ gilt. Damit ist alles bewiesen.

6. Zur Auflösung der Beträge nimmt wie üblich Fallunterscheidungen vor. Hier lauten die beiden Fälle "$a \geq b$" bzw. "$a < b$". Für die erste Gleichung berechnet man im Fall "$a \geq b$" wegen $|a-b| = (a-b)$:

$$\frac{(a+b)+|a-b|}{2} = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = a = \max(a,b)$$

Im umgekehrten Fall "$a < b$" hat man wegen $|a-b| = (b-a)$:

$$\frac{(a+b)+|a-b|}{2} = \frac{(a+b)+(b-a)}{2} = b = \max(a,b)$$

Entsprechend verfährt man bei der zweiten Gleichung.

7. Die Menge

$$M := \{x \mid x = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ mit } n \in \mathbb{N}\}.$$

ist sowohl nach oben als auch noch unten beschränkt und besitzt außerdem ein Maximum:

Das Maximum: Es ist

$$x_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in M$$

Andererseits ist für alle $n \geq 2$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} = x_1$$

$$\text{also} \qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq x_1 \quad \text{für alle } x \in M$$

Daher ist x_1 der größte in M enthaltene Wert; x_1 ist damit die kleinste obere Schranke von M und damit auch das Maximum von M.

Das Infimum: Man erkennt sofort, daß M durch 0 nach unten beschränkt ist: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0 \tag{1}$$

Da andererseits sich die Elemente der Menge M für immer größer werdendes n der Null beliebig stark annähern, kann es keine größere untere Schranke als 0 geben. Daher ist 0 die größte untere Schranke von M, d. h. es ist $0 = \inf(M)$. Da aber, wie man anhand von (1) sieht, $0 \notin M$ ist; ist Null kein Minimum von M.