HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 3

1. Gegeben seien zwei nach unten beschränkte Mengen $M, N \subset \mathbb{R}$; begründen Sie:
$$M \subset N \quad \Rightarrow \quad \inf M \ \geq \ \inf N$$

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt die *verallgemeinerte Dreiecksungleichung*:
$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$
Nehmen Sie den Induktionsanfang bei $n = 2$ vor. Verwenden Sie sowohl beim Induktionsanfang als auch beim Induktionsschluß die in der Vorlesung hergeleitete einfache Dreiecksungleichung:
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

3. Berechnen Sie: $\sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{7} i \cdot j$.

4. Das Produktzeichen ($\prod$) ist definiert durch
$$\prod_{i=1}^{n} a_i \ = \ a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \quad \text{mit} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \ \in \ \mathbb{R} \ .$$
Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:
$$\prod_{i=0}^{n} (2^{2^i} + 1) \ = \ 2^{2^{n+1}} - 1.$$

5. Welche der folgenden Funktion von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist gerade, welche ist ungerade?
$$\text{a)} \quad f(x) = x^3 \mathrm{sign}(x)$$
$$\text{b)} \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 2}$$
$$\text{c)} \quad f(x) = \frac{x^5 + 3x^3 - 6x}{1 + x^4}.$$

6. Bestimmen Sie die größte Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit
$$7^n \ \leq \ 3 \cdot 10^{12}$$

7. Seien M und N zwei nichtleere Mengen, und sei $\mathrm{f} : M \longrightarrow N$ eine Funktion. Zeigen Sie:
a) Die Funktion f ist injektiv, wenn es eine Funktion $\mathrm{g} : N \longrightarrow M$ gibt mit
$$\mathrm{g}(\mathrm{f}(x)) = x \qquad \text{für alle} \quad x \in M$$
b) Die Funktion f ist surjektiv, wenn es eine Funktion $\mathrm{h} : N \longrightarrow M$ gibt mit
$$\mathrm{f}(\mathrm{h}(y)) = y \qquad \text{für alle} \quad y \in N$$