HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 9

1. **a)** Man prüft nach, $\vec{u}$ ob Eigenwert von B ist, indem man einfach $B \circ \vec{u}$ ausrechnet und dabei mehrere Male verwendet, daß $A \circ \vec{u} = \lambda \vec{u}$ ist:

$$
\begin{aligned}
B \circ \vec{u} \;=\; (A^2 + 3A + 5E) \circ \vec{u} \;&=\; (A^2) \circ \vec{u} + 3A \circ \vec{u} + 5E \circ \vec{u} \\
&=\; A \circ A \circ \vec{u} + 3\lambda\vec{u} + 5\vec{u} \\
&=\; A \circ \lambda\vec{u} + 3\lambda\vec{u} + 5\vec{u} \\
&=\; \lambda A \circ \vec{u} + 3\lambda\vec{u} + 5\vec{u} \\
&=\; \lambda^2\vec{u} + 3\lambda\vec{u} + 5\vec{u} \qquad \text{jetzt } \vec{u} \text{ ausklammern!} \\
&=\; (\lambda^2 + 3\lambda + 5)\vec{u}
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt: $\vec{u}$ ist Eigenvektor von B zum Eigenwert $\mu = \lambda^2 + 3\lambda + 5$.

b) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\det(A - tE) \;=\; t^2 - 9$$

Die beiden Nullstellen hiervon und damit zwei Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -3$. Um einen Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$ zu finden, ist das homogene Gleichungssystem

$$(A - 3E) \circ \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} -33-3 & 12 \\ -90 & 33-3 \end{pmatrix} \circ \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} -36 & 12 \\ -90 & 30 \end{pmatrix} \circ \vec{x} \;=\; 0$$

zu lösen. Man erhält als eine Lösung $\vec{u} = (1,3)^t$.

Nach dem ersten Teil der Aufgabe ist $\vec{u}$ auch Eigenvektor zu B und zwar zum Eigenwert

$$\mu \;=\; \lambda_1^2 + 3\lambda_1 + 5 \;=\; 3^2 + 3 \cdot 3 + 5 \;=\; 23$$

2. Lösung: Zunächst ergibt sich, daß 3 ein gemeinsamer Teiler von m und $n_1 \cdot n_2$ ist, denn nach Aufgabenstellung ist 3 Teiler von m sowie von n_2 und damit auch von $n_1 \cdot n_2$. Zu zeigen bleibt, daß 3 sogar der *größte* gemeinsame Teiler von m und $n_1 \cdot n_2$ ist.

Mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus findet man dazu Darstellungen

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot m \;+\; b_1 \cdot n_1 \;&=\; 1 \\
a_2 \cdot m \;+\; b_2 \cdot n_2 \;&=\; 3
\end{aligned}
\qquad \text{mit} \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}
$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, faßt dabei die durch m teilbaren Summanden zusammen und klammert bei diesen m aus, so erhält man

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot m \;+\; a_1 \cdot b_2 \cdot n_2 \;+\; a_2 \cdot b_1 \cdot n_1) \cdot m \;+\; b_1 \cdot b_2 \cdot (n_1 \cdot n_2) \;=\; 3$$

Jeder gemeinsame Teiler $d \in \mathbb{N}$ von m und $n_1 \cdot n_2$ ist daher auch ein Teiler von 3. Dafür gibt es nur die Möglichkeit $d = 1$ und $d = 3$. Da 3 in der Tat ein gemeinsamer Teiler von m und $n_1 \cdot n_2$ ist, ist 3 sogar deren größter gemeinsamer Teiler.

3. Lösung: Der Euklidische Algorithmus zeigt, daß die beiden Zahlen 1990 und 479 teilerfremd sind. Der Chinesische Restsatz kann daher (mit den Bezeichnungen des Skriptes) auf die Zahlen $m = 1990$, $n = 479$ sowie $u = r_1 = 235$, $v = r_2 = 333$ angewandt werden. Nimmt man Teilungen mit Rest von u durch m bzw. von v durch n vor, so liefern diese offentlichtlich: $235 = 0 \cdot 1990 + 235$ sowie $333 = 0 \cdot 479 + 333$. Aufgrund des Chinesischen Restsatzes erhält man nun ein $w \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} w &= q_1 \cdot 1990 + 235 \\ w &= q_2 \cdot 479 + 333 \end{aligned} \tag{1}$$

Zu dessen Berechnung wendet man zunächst den erweiterten Euklidischen Algorithmus an; dieser liefert:

$$1 = 123 \cdot 1990 - 511 \cdot 479$$

Wie in der Vorlesung bzw. im Skript beim Beweis des Chinesischen Restsatzes gezeigt, erhält man damit ein $w \in \mathbb{Z}$ mit (1) durch

$$w = 333 \cdot 123 \cdot 1990 - 235 \cdot 511 \cdot 479 = 23987695$$

Ändert man w um ein Vielfaches von $1990 \cdot 479$ ab:

$$w + k \cdot (1990 \cdot 479)$$

so erhält man weitere Zahlen, die (1) erfüllen. Insbesondere sind diese für hinreichend große k sicher positiv. Die kleinste positive Zahl w_0 mit (1) liefert die Teilung mit Rest von w durch $1990 \cdot 479 = 953210$:

$$w = q \cdot (1990 \cdot 479) + 157445 \qquad \Rightarrow \qquad w_0 = 157445$$

4. Lösung: Der erweiterte euklidische Algorithmus liefert $u, v \in \mathbb{Z}$ mit

$$d = \mathrm{ggT}(a, b) = u \cdot a + v \cdot b$$

Unter Verwendung von $a_1 = a/d$ und $b_1 = b/d$ bzw. $a = d \cdot a_1$ und $b = d \cdot b_1$ wird das zu

$$d = u \cdot d \cdot a_1 + v \cdot b = d \cdot b_1$$

Teilung beider Seiten durch d liefert

$$1 = u \cdot a_1 + v \cdot b_1 \tag{2}$$

Ist jetzt $c \in \mathbb{N}$ ein gemeinsamer Teiler von a_1 und b_1, so ist c wegen (2) auch ein Teiler von 1. Dann bleibt aber nur die Möglichkeit $c = 1$. Somit muß $\mathrm{ggT}(a_1, b_1) = 1$ sein.

5. Lösung: Aus der Definition der Gruppe ergibt sich sofort, daß sie die die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

als neutrales Element enthält. Das Assoziativgesetz ist bekanntlich für die Matrizenmultiplikation gültig. Damit ist es insbesondere auch für die hier betrachteten Matrizen gültig. Die Multiplikation zweier solcher Matrizen liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 + y_1 \\ 0 & 1 & x_2 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Anhand von (4) erkennt man:

- Die Produkt zweier solcher Matrizen ist wieder eine Matrix dieser Gestalt. Die Gruppe ist damit bezüglich der Matrixmultiplikation "$\circ$" abgeschlossen.
- Zur Matrix aus $\mathcal{G}$ mit den Werten x_1, x_2 in der letzten Spalte erhält man die inverse Matrix, indem man die Werte x_1, x_2 durch $-x_1$ und $-x_2$ ersetzt. Die Inverse liegt damit ebenfalls in $\mathcal{G}$.
- Da die Multiplikation zweier Matrizen der Addition der Elemente x_1, x_2 bzw. y_1, y_2 entspricht und diese Addition von der Reihenfolge unabhängig ist, hängt auch die Multiplikation nicht von der Reihenfolge ab und ist damit kommutativ.

6. Lösung:

(a) Sei $\mathcal{G}$ eine beliebige Gruppe mit 7 Elementen. Ist $a \in \mathcal{G}$, so gilt nach Vorlesung bzw. Skript

$$\operatorname{ord}(a) \mid \operatorname{ord}(\mathcal{G}) \;=\; 7$$

Da 7 eine Primzahl ist, kommen für $\operatorname{ord}(a)$ nur die Werte 1 und 7 in Frage.

(b) Sei wieder $\mathcal{G}$ eine beliebige Gruppe mit 7 Elementen, und sei $a \in \mathcal{G} \setminus \{1\}$. Nach Teil (a) der Aufgabe ist dann $\operatorname{ord}(a) = 7$. Dann sind aber die Potenzen

$$1 = a^0,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6 \tag{5}$$

alle verschieden. Die sieben Elemente (5) stellen somit die gesamte Gruppe $\mathcal{G}$ dar. Da es sich hierbei um Potenzen von a handelt, erzeugen diese Potenzen die Gruppe $\mathcal{G}$, die damit zyklisch mit erzeugendem Element a ist.

Bemerkung: Wie man erkennen konnte, kann hier jedes Element $a \in \mathcal{G}$, $a \neq 1$ als erzeugendes Element für $\mathcal{G}$ genommen werden. Dieser Sachverhalt trifft für alle Gruppen zu, deren Ordnung eine Primzahl ist.

HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 9

1. **a)** Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in M^{n,n}$ mit dem Eigenvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Dann ist auch $\vec{u}$ Eigenvektor der Matrix

$$B = A^2 + 3A + 5E$$

Wie lautet der zu B und $\vec{u}$ gehörige Eigenwert?

b) Berechnen Sie zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -33 & 12 \\ -90 & 33 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = A^2 + 3A + 5E$$

jeweils einen Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor.

2. Aufgabe: Gegeben seien drei natürliche Zahlen $m, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\operatorname{ggT}(m, n_1) = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{ggT}(m, n_2) = 3$$

Zeigen Sie, dann ist auch

$$\operatorname{ggT}(m, (n_1 \cdot n_2)) = 3$$

Hinweis: Sie können sich an dem Hilfssatz im Skript Seite 159 und an dessen Begründung orientieren.

3. Aufgabe: Warum läßt sich eine Zahl $w \in \mathbb{N}$ finden, für die die Teilungen mit Rest durch 1990 und 479 die Reste $r_1 = 235$ und $r_2 = 333$ liefern:

$$\begin{aligned} w &= q_1 \cdot 1990 + 235 \\ w &= q_2 \cdot 479 + 333 \end{aligned} \qquad ? \tag{1}$$

Finden Sie ein solches $w \in \mathbb{N}$. Warum gibt es für w mehrere Möglichkeiten? Bestimmen Sie anschließend das minimale $w_0 \in \mathbb{N}$, das (1) erfüllt.

4. Aufgabe: Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, und sei

$$d = \operatorname{ggT}(a, b)$$

Seien damit $a_1 = a/d$ und $b_1 = b/d$. Was ist dann $\operatorname{ggT}(a_1, b_1)$?

5. Aufgabe: Zeigen Sie, daß die Menge der folgenden 3×3-Matrizen zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine kommutative Gruppe bildet:

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{2}$$

Ist diese Gruppe endlich?

6. Aufgabe:

   (a) Sei $a \in \mathcal{G}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gruppe mit sieben Elementen ist. Welche Werte können bei der Ordnung von a, d. h. bei $\operatorname{ord}(a)$ vorkommen?

   (b) Zeigen Sie, daß eine Gruppe mit sieben Elementen stets eine zyklische Gruppe ist.