

1. a) Setzt man

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

so rechnet man sofort nach, daß die drei Einheitsvektoren Eigenvektoren zu diesen drei Eigenwerten sind:

$$A \circ \vec{e}_1 = 2\vec{e}_1 \quad A \circ \vec{e}_2 = 3\vec{e}_2 \quad A \circ \vec{e}_3 = 5\vec{e}_3$$

Da A eine 3×3 -Matrix ist, kann A nicht mehr als 3 Eigenwerte besitzen.

- b) Setze

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist offenbar $I \neq E$, obwohl I nur den Eigenwert 1 besitzt. Das letztere erkennt man daran, daß das charakteristische Polynom von I

$$\det(I - tE) = (1 - t)^3$$

nur die Nullstelle 1 besitzt.

2. Aufgrund der Angaben gelten für den Übergang vom t -ten zum $t + 1$ -ten Jahr die Gleichungen

$$v_{t+1,1} = \frac{1}{10} \cdot v_{t,2} + v_{t,3}$$

$$v_{t+1,2} = v_{t,1}$$

$$v_{t+1,3} = \frac{9}{10} \cdot v_{t,2}$$

Dieses ergibt die Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Fahrzeugverteilung \vec{v}_* ist konstant, wenn sie sich von einem Jahr zum nächsten nicht verändert, d. h. falls gilt

$$A \circ \vec{v}_* = \vec{v}_*$$

Dieses bedeutet, daß eine mögliche konstante Verteilung durch einen Eigenvektor \vec{v}_* zum Eigenwert 1 dargestellt wird. Falls die Matrix A tatsächlich einen solchen Eigenwert besitzt, muß das homogene Gleichungssystem

$$(A - E) \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{10} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & -1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$$

eine von Null verschiedene Lösung besitzen. Man prüft dieses nach, indem man die Matrix $A - E$ mit dem Gaußschen Verfahren reduziert: man erhält als reduzierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, daß diese Matrix den Rang 2 bzw. den Corang $1 = 3 - 2$ und damit eine von Null verschiedene Grundlösung besitzt. Diese Grundlösung und damit ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 1 lautet

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 10/9 \\ 10/9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als mögliche konstante Verteilungen kommen positive Vielfache von \vec{u} in Frage:

$$\vec{v}_* = \mu \cdot \vec{u} \quad \text{mit} \quad \mu > 0$$

Unabhängig vom Faktor μ gilt bei einer solchen konstanten Verteilung: je 34.5% der Fahrzeuge sind ein oder zwei Jahre alt, 31.0% der Fahrzeuge sind drei Jahre alt.

Bemerkung: Man kann natürlich auch mit Hilfe des charakteristischen Polynoms der Matrix A nachprüfen, ob diese Matrix den Eigenwert 1 besitzt. Das charakteristische Polynom lautet:

$$p(t) = -t^3 + 0.1t + 0.9$$

$p(t)$ besitzt nur die (reelle) Nullstelle 1.

3. Lösung: Aufgrund der Information des Spitzels weiß man, daß der Klartextbuchstabe “R“ im Schlüsseltext dem Buchstaben “W“ entspricht. Ist k der (zunächst noch unbekannte) Schlüssel, so muß aufgrund der Arbeitsweise des Caesar-Verfahrens gelten:

$$R + k = W \pmod{26} \quad \text{bzw.} \quad 17 + k = 22 \pmod{26}$$

Daher lautet der Schlüssel $k = 5$ bzw. $k \hat{=} F$. Damit kann jetzt der Text entschlüsselt werden:

INBJYYJWFZXXNHMYJSXNSISNHMYLZY
- FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF

Man ersetzt hier jeden Buchstaben durch seine Nummer aus $\{0, \dots, 25\}$:

$$\begin{array}{r} 8\ 13\ 9\ 1\ 9\ 24\ 24\ 9\ 22\ 5\ 25\ 23\ 23\ 13\ 7\ 12\ 24\ 9\ 18\ 23\ 13\ 18\ 8\ 18\ 13\ 7\ 12\ 24\ 11\ 25\ 24 \\ -\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5 \\ \hline 3\ 8\ 4\ 22\ 4\ 19\ 19\ 4\ 17\ 0\ 20\ 18\ 18\ 8\ 2\ 7\ 19\ 4\ 13\ 18\ 8\ 13\ 3\ 13\ 8\ 2\ 7\ 19\ 6\ 20\ 19 \bmod{26} \\ \hat{=}\text{D I E W E T T E R A U S S I C H T E N S I N D N I C H T G U T} \end{array}$$

4. Lösung:

m	n	Division mit Rest	$a = b'$	$b = a' - qb'$
2431	2601	$2431 = 0 \cdot 2601 + 2431$	-46	43
2601	2431	$2601 = 1 \cdot 2431 + 170$	43	-46
2431	170	$2431 = 14 \cdot 170 + 51$	-3	43
170	51	$170 = 3 \cdot 51 + 17$	1	-3
51	17	$51 = 3 \cdot 17 + 0$	0	1
17	0	$\text{ggT}(2431, 2601) = 17$	1	0

Damit wurde berechnet:

$$17 = \text{ggT}(2431, 2601) = -46 \cdot 2431 + 43 \cdot 2601$$

m	n	Division mit Rest	$a = b'$	$b = a' - qb'$
27047	3363	$27047 = 8 \cdot 3363 + 143$	-682	5485
3363	143	$3363 = 23 \cdot 143 + 74$	29	-682
143	74	$143 = 1 \cdot 74 + 69$	-15	29
74	69	$74 = 1 \cdot 69 + 5$	14	-15
69	5	$69 = 13 \cdot 5 + 4$	-1	14
5	4	$5 = 1 \cdot 4 + 1$	1	-1
4	1	$4 = 4 \cdot 1 + 0$	0	1
1	0	$\text{ggT}(27047, 3363) = 1$	1	0

Damit wurde berechnet:

$$1 = \text{ggT}(27047, 3363) = -682 \cdot 27047 + 5485 \cdot 3363$$

5. Lösung: Da zwei gerade Zahlen zumindest den gemeinsamen Teiler 2 besitzen, können sie nicht teilerfremd sein.

6. Lösung: Es gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten; zwei sollen hier erläutert werden:

- (a) Multipliziert man die Potenz $(u+1)^k$ aus¹, so erhält man eine Summe mit zahlreichen Summanden von denen genau einer den Wert 1 hat und alle übrigen durch u teilbar sind. Faßt man die durch u teilbaren zusammen und klammert u aus, so erhält man mit einem $a \in \mathbb{Z}$ für die Potenz $(u+1)^k$ die Darstellung

$$(u+1)^k = a \cdot u + 1 \tag{1}$$

Das liefert wiederum

$$(u+1)^k - a \cdot u = (a \cdot u + 1) - a \cdot u = 1$$

¹Man könnte den Binomischen Lehrsatz verwenden.

Also:

$$(u+1)^k - a \cdot u = 1$$

Gäbe es nun einen gemeinsamen Teiler $d > 1$ von u und $(u+1)^k$, so wäre das auch ein Teiler von 1; und das kann nicht sein. Folglich müssen u und $(u+1)^k$ teilerfremd sein.

(b) Man führt eine vollständige Induktion über den Exponenten k durch.

Für $k = 1$ sind u und $(u+1)^1$ wegen

$$(u+1) - u = 1$$

teilerfremd: Ein gemeinsamer Teiler $d > 1$ müßt auch 1 teilen, was nicht möglich ist.

Für $k > 0$ werde angenommen, daß u und $(u+1)^{k-1}$ teilerfremd ist. Da im Induktionsanfang bereits gezeigt wurde, daß u und $u+1$ teilerfremd sind, folgt mit Hilfe eines Hilfssatzes der Vorlesung, daß auch

$$u \quad \text{und} \quad (u+1)^k = (u+1)^{k-1} \cdot (u+1)$$

teilerfremd sind.

7. Lösung:

$$157 = 31 \cdot 5 + 2$$

$$31 = 6 \cdot 5 + 1$$

$$6 = 1 \cdot 5 + 1$$

$$1 = 0 \cdot 5 + 1$$

$$\Rightarrow 157 = (1112)_5$$

$$785 = 157 \cdot 5 + 0$$

$$157 = 31 \cdot 5 + 2$$

$$31 = 6 \cdot 5 + 1$$

$$6 = 1 \cdot 5 + 1$$

$$1 = 0 \cdot 5 + 1$$

$$\Rightarrow 785 = (11120)_5$$

1. **a)** Finden Sie ein Beispiel für eine 3×3 -Matrix A , die die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 5$ besitzt, und geben Sie zu jedem dieser Eigenwerte einen Eigenvektor an. Warum besitzt A keine weiteren Eigenwerte?
- b)** Finden Sie ein Beispiel für eine 3×3 -Matrix B , die nur den Eigenwert 1 besitzt und die nicht gleich der Einheitsmatrix ist.
2. In einer Überflußgesellschaft gelte:
 - Jedes Kraftfahrzeug ist ein, zwei oder drei Jahre alt.
 - 10% der zweijährigen sowie sämtliche dreijährigen Autos werden durch Neuwagen ersetzt.
 - Die Gesamtzahl der Fahrzeuge ändert sich nicht.

Der Vektor

$$\vec{v}_t = \begin{pmatrix} v_{1,t} \\ v_{2,t} \\ v_{3,t} \end{pmatrix}$$

bezeichne die Altersverteilung der Autos im Jahre t .

Zu der “Entwicklungsgleichung“

$$\vec{v}_{t+1} = A \circ \vec{v}_t$$

bestimme man die Übergangsmatrix A . Weiterhin finde man eine Altersverteilung, \vec{v}_* , die zeitlich konstant ist.

3. Aufgabe: Mit dem Caesar-Verfahren wurde ein ausschließlich aus Großbuchstaben des lateinischen Alphabets bestehender Text verschlüsselt; der Schlüsseltext lautet:

$$\text{INJBYYJWFZXXNHMYJSXNSISNHMYLZY} \quad (1)$$

Ein Spitzel hat mitgeteilt, daß bei Verwendung desselben Verfahrens und desselben Schlüssels der Klartext “REGEN“ den Schlüsseltext “WJLJS“ besitzt. Verwenden Sie dieses, um den Code zu brechen und den Klartext zu (1) herauszufinden.

4. Aufgabe: Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

$$\text{ggT}(2431, 2601), \quad \text{ggT}(27047, 3363)$$

Finden Sie weiterhin mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus ganze Zahlen $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 2431 + b_1 \cdot 2601 &= \text{ggT}(2431, 2601) \\ a_2 \cdot 27047 + b_2 \cdot 3363 &= \text{ggT}(27047, 3363) \end{aligned}$$

5. Aufgabe: Begründen Sie, daß zwei gerade ganze Zahlen niemals teilerfremd sind.

6. Aufgabe: Sei $u \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die beiden Zahlen u und $(u + 1)^k$ teilerfremd sind.
7. Aufgabe: Stelle Sie die Zahlen 157 und 785 im Fünferstellenwertsystem dar. Verwenden Sie dabei die Teilung mit Rest.



**TeachMatics - Das
Seminartool für Hoc...**
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgabe mit
der Nummer 090314.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.