HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 6

1. Bestimme Rang und Corang sowie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

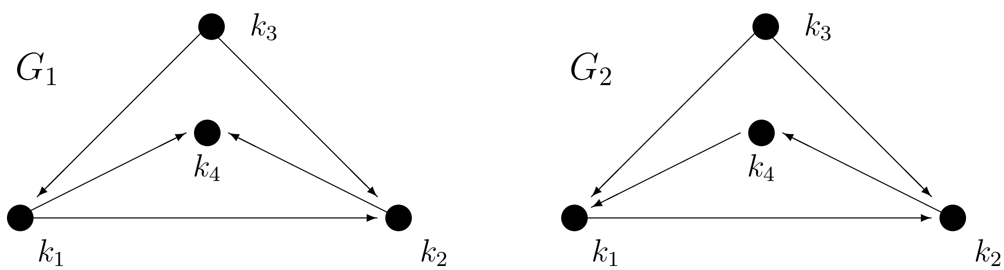
$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 & -1 & -5 \\ 3 & 6 & 7 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 5 & -35 & -20 \\ -5 & -10 & -12 & 0 & -11 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \\ -12 \\ -13 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung

$$\tan(x) = \cot(x)$$

erfüllt ist.

3. Bestimmen Sie die Adjazenzmatrizen A_1 und A_2 der beiden gerichteten Graphen G_1 und G_2:



Berechnen Sie deren Potenzen A_1^i sowie A_2^i für $i = 2, 3, 4$, und deuten Sie insbesondere für $i = 4$ die Ergebnisse. Die Potenz einer Matrix mit einem Exponenten $l \in \mathbb{N}$ ist dabei durch

$$A^l = \underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{l\text{-mal}}$$

gegeben.

4. Finden Sie ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\arctan(\tan x_0) = x_0 + 7\pi$$

Wie ist das Vorhandensein eines solchen x_0 damit in Einklang zu bringen, daß der arctan die Umkehrfunktion des tan ist?

5. In dem Gleichungssystem mit dem Parameter λ

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & (11+\lambda)x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & (30+\lambda)x_3 & = & 8 \end{array}$$

setze man einen Wert für λ ein, so daß das Gleichungssystem *unlösbar* wird.

6. **a)** Berechnen Sie das Inverse C^{-1} der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sei $A \in \mathrm{M}^{3,3}(\mathbb{R})$ die Matrix $A = C \circ D \circ C^{-1}$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

berechnen[1] Sie die Matrix $A^5 = A \circ A \circ A \circ A \circ A$.

c) Sei $\vec{c} = (3\,1\,1)^t$ die letzte Spalte der Matrix C. Berechnen Sie

$$\vec{y} = A \circ \vec{c}$$

d) Finden Sie eine Matrix $B \in \mathrm{M}^{3,3}(\mathbb{R})$ mit $B \circ B = A$.

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc...
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit den Nummern 90039 und 090040.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.

---

[1] ohne Verwendung einer speziellen Funktion für Matrizenrechnung auf dem Taschenrechner oder PC

1. Zur Herstellung der reduzierten Form stellt man bei der hier vorliegenden Matrix die dritte Zeile an den Anfang und wendet anschließend das Gaußche Verfahren wie üblich an. Eine reduzierte Form dieses Gleichungssystems ist dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang ist 4, und der Corang ist 5-4=1. Die Lösbarkeit erkennt man an der letzten Gleichung: Es ist die einzige Nullgleichung, und auf der rechten Seite steht ebenfalls eine Null. Wie in der Vorlesung angegeben, erhält man aus der reduzierten Form die Lösungsmenge:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2.

$$\begin{aligned} \tan(x) = \cot(x) \;&\Leftrightarrow\; \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &\Leftrightarrow\; \sin^2(x) = \cos^2(x) \\ &\Leftrightarrow\; \cos^2(x) - \sin^2(x) = 0 && \text{Additionstheorem!} \\ &\Leftrightarrow\; \cos(2x) = 0 && \text{d. h. } 2x \text{ ist Nullstelle des cos} \\ &\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3. Die Adjazenzmatrix des ersten Graphen lautet:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihre Potenzen lauten:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die vierte Potenz der Adjazenzmatrix ist die Nullmatrix. Es gibt somit in diesem Graphen keine Wege, die aus mehr als drei Kanten bestehen. Daraus folgt, daß der Graph keinen

Kreis (Masche, Zykel) enthalten kann; denn bei Vorliegen eines Kreises gäbe es Wege beliebiger Länge.

Die Adjazenzmatrix des zweiten Graphen lautet:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihre Potenzen lauten:

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die vierte Potenz der Adjazenzmatrix ist nicht die Nullmatrix. Es muß in diesem Graphen somit Wege, die aus mehr als drei Kanten bestehen, geben. Daraus folgt, daß der Graph mindestens einen Kreis (Masche, Zykel) enthalten muß; denn bei vier Knoten wären nur kreisfreie Wege mit höchstens drei Kanten möglich.

4. Man setze etwa $x_0 = -7\pi$, dann ist

$$\tan x_0 = \frac{\sin(-7\pi)}{\cos(-7\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

Wegen $\arctan 0 = 0$ folgt

$$\arctan(\tan(-7\pi)) = \arctan 0 = 0 = x_0 + 7\pi$$

Der arctan stellt *nur* für den auf das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ eingeschränkten tan die Umkehrfunktion dar; der gewählte Wert $x_0 = -7\pi$ liegt jedoch nicht in $(-\pi/2, \pi/2)$.

5. Eine reduzierte Form ist

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & (5+\lambda)x_3 & = & 1 \\ & & & & (1-4\lambda)x_3 & = & 1 \end{array}$$

Man erkennt an der reduzierten Form, daß das Gleichungssystem genau für $\lambda = \frac{1}{4}$ unlösbar ist.

6. **a)**

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Es ist $A^2 = C \circ D \circ C^{-1} \circ C \circ D \circ C^{-1} = C \circ D \circ D \circ C^{-1} = C \circ D^2 \circ C^{-1}$, ebenso folgt, da sich auch hier die mittleren Faktoren jeweils wegheben:

$$\begin{aligned}
A^5 &= (C \circ D \circ C^{-1})^5 = C \circ D^5 \circ C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^5 \circ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2828 & 1594 & 7619 \\ -1005 & 615 & 2643 \\ -912 & 490 & 2489 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Zunächst beachte man, daß sich die letzte Spalte von C folgendermaßen darstellen läßt:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C \circ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt leicht:

$$A \circ \vec{c} = (C \circ D \circ C^{-1}) \circ (C \circ \vec{e}_3) = C \circ D \circ \vec{e}_3 = C \circ 3\vec{e}_3 = 3C \circ \vec{e}_3 = 3\vec{c}$$

d) Man setze

$$B = C \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \circ C^{-1} = \begin{pmatrix} -14.28694207 & 13.79413216 & 34.26284649 \\ -5.924074484 & 6.702613548 & 12.80166070 \\ -4.681433796 & 4.045759308 & 11.73059289 \end{pmatrix}$$

Dann ist in der Tat

$$B^2 = C \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^2 \circ C^{-1} = C \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \circ C^{-1} = A$$