Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx).$$

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Summationsformel: für $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \cos(jx) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die in einer vorherigen Aufgabe gezeigte Gleichung

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx) = \sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)$$

3. Geben Sie zwei lineare Gleichungssysteme mit jeweils drei Gleichungen und drei Unbestimmten an, die beide genau den Rang zwei besitzen. Das eine dieser beiden Gleichungssysteme soll lösbar, das andere soll unlösbar sein.

4. Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem, das mehr Unbekannte als Gleichungen enthält; man zeige, daß dann das Gleichungssystem niemals eine eindeutige Lösung besitzt, d. h. es kann nur vorkommen, daß das Gleichungssystem unlösbar ist oder unendlich viele Lösungen besitzt.

5. Finden Sie eine Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 3 & 14 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 9 & 100 & 30 & 45 \\ 77 & 112 & 13 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3552 & -588 & -488 & 77 \\ 1160 & 192 & 159 & -25 \\ 139 & 23 & 19 & -3 \\ 42 & 7 & 6 & -1 \end{pmatrix} \circ X + \begin{pmatrix} 1 & 11 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 100 & 30 & 45 \\ 77 & 112 & 13 & 7 \end{pmatrix}$$

Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

6. Finden Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 9 & 1+t & 10 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{gilt.}$$

7. Berechnen Sie zu den folgenden Matrizen die Determinanten und jeweils im Falle einer von null verschiedenen Determinante die Umkehrmatrix:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 12 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 12 & 18 \\ 5 & 17 & 37 & 69 \\ 1 & 4 & 13 & 45 \end{pmatrix}$$

8. Bestimmen Sie von der 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 36 & -9 \\ -6 & 19 & -3 \\ -18 & 54 & -2 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom, sämtliche Eigenwerte und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc…
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit den Nummern 11215, 090044 und 11208.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.

HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 7

1.
$$
\begin{aligned}
& \sin\left((n+\tfrac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\tfrac{1}{2})x\right) \\
= \; & \sin\left(nx+\tfrac{1}{2}x\right) - \sin\left(nx-\tfrac{1}{2}x\right) && \text{Additionstheorem des sinus!} \\
= \; & \sin(nx)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos(nx) \\
& - \sin(nx)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos(nx) && \text{zwei Glieder heben sich weg!} \\
= \; & 2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos(nx)
\end{aligned}
$$

2. Beweis durch vollständige Induktion:
$\underline{n=0}$:

linke Seite: $\frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{j=1}^{0}\cos(jx)}_{\text{Die Summe ohne Summanden hat den Wert Null.}} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

rechte Seite: $\dfrac{\sin\left((0+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

$\underline{n-1 \Rightarrow n}$: Zunächst beachte man, daß aufgrund der vorherigen Aufgabe

$$\cos nx = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

gilt. Addiert man beide Seiten dieser Gleichung zu den beiden Seiten der aufgrund der Induktionsvoraussetzung gültigen (für $n-1$) Gleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\cos(jx) &= \frac{\sin\left(((n-1)+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \cos(jx) + \cos(nx) \\
&= \tfrac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \cos(jx) \\
&= \frac{\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{Der 1. und 3. Summand heben sich weg.} \\
&= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3. Man kann zwei einfache Gleichungssystem angeben, die beide bereits in reduzierter Form vorliegen. Ein lösbares Gleichungssystem mit Rang 2 ist

$$\begin{array}{ccccc}
x_1 & & & = & 0 \\
 & x_2 & & = & 0 \\
 & & 0x_3 & = & 0
\end{array}$$

Ein unlösbares Gleichungssystem mit Rang 2 ist

$$\begin{array}{ccccc}
x_1 & & & = & 0 \\
 & x_2 & & = & 0 \\
 & & 0x_3 & = & 1
\end{array}$$

4. Sei n die Anzahl der Unbekannten, m die Anzahl der Gleichungen und r der Rang des Gleichungssystems. Nach Voraussetzung ist hier $n > m$. Aus der durch das Gaußsche Eliminationsverfahren gewonnenen reduzierten Darstellung des Gleichungssystems folgt $r \leq m$; insgesamt hat man damit $r < n$ bzw. $s = n - r \geq 1$. Nach einem Satz der Vorlesung besitzt das zugehörige homogene Gleichungssystem Basislösungen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s$, die insbesondere von null verschieden sind. Hat das Gleichungssystem nun mindestens eine Lösung $\vec{x}_0$, so folgt, daß die unendlich vielen $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{x}_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls Lösung sind.

5. Zieht man die ganz rechts stehende Matrix von beiden Seiten der Gleichung ab, so erhält man eine Gleichung der Form

$$Y = A \circ X$$

Von der Matrix A läßt sich die Inverse bestimmen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3552 & -588 & -488 & 77 \\ 1160 & 192 & 159 & -25 \\ 139 & 23 & 19 & -3 \\ 42 & 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -5 \\ 7 & 20 & 2 & 33 \\ -1 & -1 & -16 & -4 \\ 1 & 8 & -40 & -4 \end{pmatrix}$$

Beim Berechnen der Inversen empfiehlt es sich hier, bei der letzten Spalte zu beginnen: man zieht zunächst geeignete Vielfache der letzten Zeile von den vorherigen Zeilen ab, so daß die ersten drei Einträge der letzten Spalte zu Null werden. Als Lösung erhält man dann

$$X = A^{-1} \circ Y = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 1 & -13 \\ 76 & 27 & -7 & 87 \\ -58 & -2 & 1 & -8 \\ -110 & 9 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

Diese Lösung ist die einzige Lösung: Gäbe es eine zweite Lösung $\tilde{X}$, so folgte aus den beiden Gleichungen $Y = A \circ X$ und $Y = A \circ \tilde{X}$ sofort

$$A \circ X = A \circ \tilde{X}$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung von links her mit der Inversen von A, so erhält man $\tilde{X} = X$.

6. Man löst die Gleichung nach t auf, indem man den Entwicklungssatz anwendet, hier die Determinante nach der zweiten Spalte entwickelt und die entstehenden 2×2–Matrix direkt berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 9 & 1+t & 10 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = -0 \cdot \det \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + (1+t) \circ \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = 26 - 2t$$

Die eindeutige Lösung der Gleichung ist somit $t = 13$.

7. **a)** $\det M = -57$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{19} & \frac{-3}{19} & \frac{1}{57} \\ \frac{-8}{19} & \frac{4}{19} & \frac{5}{57} \\ \frac{1}{19} & \frac{9}{19} & \frac{-1}{19} \end{pmatrix}$$

b) $\det M = 1$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 822 & -361 & 55 & -13 \\ -936 & 412 & -63 & 15 \\ 429 & -189 & 29 & -7 \\ -59 & 26 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Das charakteristische Polynom berechnet man am besten mit dem Entwicklungssatz, es lautet

$$p(t) = \det(A - tE) = -t^3 + 6t^2 + 9t - 14$$

Den ersten Eigenvektor findet man unter den Teilern des konstanten Gliedes $+14$ des charakteristischen Polynoms, die restlichen durch Lösen der verbleibenden quadratischen Gleichung. Die drei Eigenwerte sind $\lambda = -2$, $\mu = 7$ und $\nu = 1$. Zugehörige Eigenvektoren erhält man durch Lösen der entstehenden homogenen Gleichungssysteme. Drei Eigenvektoren sind $\vec{u} = (3, 1, 1)^t$, $\vec{v} = (1, 0, -2)^t$ und $\vec{w} = (3, 1, 0)^t$.