HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 7

1.
$$
\begin{aligned}
& \sin\left((n+\tfrac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\tfrac{1}{2})x\right) \\
= \; & \sin\left(nx+\tfrac{1}{2}x\right) - \sin\left(nx-\tfrac{1}{2}x\right) && \text{Additionstheorem des sinus!} \\
= \; & \sin(nx)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos(nx) \\
& - \sin(nx)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos(nx) && \text{zwei Glieder heben sich weg!} \\
= \; & 2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos(nx)
\end{aligned}
$$

2. Beweis durch vollständige Induktion:
   $\underline{n = 0}$:

$$\text{linke Seite:} \quad \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{j=1}^{0} \cos(jx)}_{\text{Die Summe ohne Summanden hat den Wert Null.}} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{rechte Seite:} \quad \frac{\sin\left((0+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$\underline{n-1 \Rightarrow n}$: Zunächst beachte man, daß aufgrund der vorherigen Aufgabe

$$\cos nx = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

gilt. Addiert man beide Seiten dieser Gleichung zu den beiden Seiten der aufgrund der Induktionsvoraussetzung gültigen (für $n-1$) Gleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \cos(jx) &= \frac{\sin\left(((n-1)+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

so erhält man

$$\frac{1}{2}+\sum\nolimits_{j=1}^{n-1}\cos(jx)+\cos(nx)$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}+\sum\nolimits_{j=1}^{n}\cos(jx)\\
&= \frac{\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)\;-\;\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{Der 1. und 3. Summand heben sich weg.}\\
&= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3. Man kann zwei einfache Gleichungssystem angeben, die beide bereits in reduzierter Form vorliegen. Ein lösbares Gleichungssystem mit Rang 2 ist

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & & & = & 0\\ & x_2 & & = & 0\\ & & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

   Ein unlösbares Gleichungssystem mit Rang 2 ist

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & & & = & 0\\ & x_2 & & = & 0\\ & & 0x_3 & = & 1 \end{array}$$

4. Sei n die Anzahl der Unbekannten, m die Anzahl der Gleichungen und r der Rang des Gleichungssystems. Nach Voraussetzung ist hier $n > m$. Aus der durch das Gaußsche Eliminationsverfahren gewonnenen reduzierten Darstellung des Gleichungssystems folgt $r \leq m$; insgesamt hat man damit $r < n$ bzw. $s = n - r \geq 1$. Nach einem Satz der Vorlesung besitzt das zugehörige homogene Gleichungssystem Basislösungen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s$, die insbesondere von null verschieden sind. Hat das Gleichungssystem nun mindestens eine Lösung $\vec{x}_0$, so folgt, daß die unendlich vielen $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{x}_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls Lösung sind.

5. Zieht man die ganz rechts stehende Matrix von beiden Seiten der Gleichung ab, so erhält man eine Gleichung der Form

$$Y = A \circ X$$

   Von der Matrix A läßt sich die Inverse bestimmen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3552 & -588 & -488 & 77\\ 1160 & 192 & 159 & -25\\ 139 & 23 & 19 & -3\\ 42 & 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -5\\ 7 & 20 & 2 & 33\\ -1 & -1 & -16 & -4\\ 1 & 8 & -40 & -4 \end{pmatrix}$$

   Beim Berechnen der Inversen empfiehlt es sich hier, bei der letzten Spalte zu beginnen: man zieht zunächst geeignete Vielfache der letzten Zeile von den vorherigen Zeilen ab, so daß die ersten drei Einträge der letzten Spalte zu Null werden. Als Lösung erhält man dann

$$X = A^{-1} \circ Y = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 1 & -13\\ 76 & 27 & -7 & 87\\ -58 & -2 & 1 & -8\\ -110 & 9 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

Diese Lösung ist die einzige Lösung: Gäbe es eine zweite Lösung $\tilde{X}$, so folgte aus den beiden Gleichungen $Y = A \circ X$ und $Y = A \circ \tilde{X}$ sofort

$$A \circ X = A \circ \tilde{X}$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung von links her mit der Inversen von A, so erhält man $\tilde{X} = X$.

6. Man löst die Gleichung nach t auf, indem man den Entwicklungssatz anwendet, hier die Determinante nach der zweiten Spalte entwickelt und die entstehenden 2×2–Matrix direkt berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 9 & 1+t & 10 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = -0 \cdot \det \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + (1+t) \circ \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = 26 - 2t$$

Die eindeutige Lösung der Gleichung ist somit $t = 13$.

7. **a)** $\det M = -57$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{19} & \frac{-3}{19} & \frac{1}{57} \\ \frac{-8}{19} & \frac{4}{19} & \frac{5}{57} \\ \frac{1}{19} & \frac{9}{19} & \frac{-1}{19} \end{pmatrix}$$

b) $\det M = 1$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 822 & -361 & 55 & -13 \\ -936 & 412 & -63 & 15 \\ 429 & -189 & 29 & -7 \\ -59 & 26 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Das charakteristische Polynom berechnet man am besten mit dem Entwicklungssatz, es lautet

$$p(t) = \det(A - tE) = -t^3 + 6t^2 + 9t - 14$$

Den ersten Eigenvektor findet man unter den Teilern des konstanten Gliedes $+14$ des charakteristischen Polynoms, die restlichen durch Lösen der verbleibenden quadratischen Gleichung. Die drei Eigenwerte sind $\lambda = -2$, $\mu = 7$ und $\nu = 1$. Zugehörige Eigenvektoren erhält man durch Lösen der entstehenden homogenen Gleichungssysteme. Drei Eigenvektoren sind $\vec{u} = (3, 1, 1)^t$, $\vec{v} = (1, 0, -2)^t$ und $\vec{w} = (3, 1, 0)^t$.