Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Gegeben seinen die folgenden vier Teilmengen von $\mathbb{N}$ bzw. von $\mathbb{R}$:

$$A = \{n \mid n = m^2,\ m \in \mathbb{N}\ \},$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ ,\ |85 - x| < 35\},$$

$$C = \{n \mid n = 3 \cdot m + 1,\ m \in \mathbb{N}\ ,\ n \leq 1000\},$$

$$D = \{n \mid n = 3 \cdot m + 2,\ m \in \mathbb{N}\ ,\ n \leq 1000\}.$$

   Bestimmen Sie: a) alle Teilmengen von $A \cap B \cap C$, b) die Anzahl der Elemente von $(A \cap B) \cup C$ und c) die Anzahl der Elemente von $A \cap D$.

2. Beweisen Sie für zwei *positive* reelle Zahlen x und y:

$$x^2 \leq y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq y.$$

3. Beschreiben Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}$:

$$\{x \in \mathbb{R}\ \mid \frac{2x - x^2}{1 - x} \leq 0\},$$

4. Gegeben seien zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$M\ =\ \{(x, y) \mid 0 < x < 4,\ y > 0 \text{ und } y < 2x\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad N\ =\ [3, 5] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

   Skizzieren Sie die drei Mengen M, N und $M \cap N$.

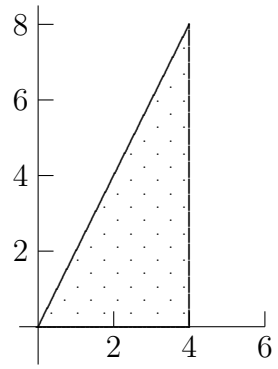
Übung zu Mathematik I für Informatik

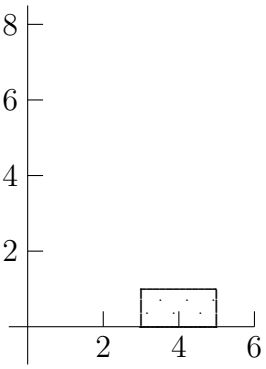
1. a) $\{64, 100\}$, $\{64\}$, $\{100\}$, $\emptyset$, b) 334, c) 0

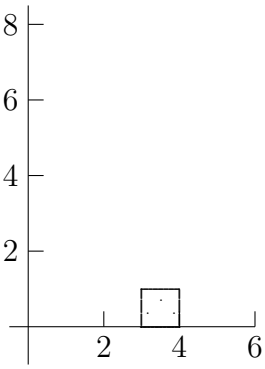
2. Wegen $x \leq y$ ist
$$x - y \ \leq \ 0$$
Wegen $x, y > 0$ ist auch $x + y > 0$; die Ungleichung bleibt daher erhalten, wenn man beide Seiten mit $x + y$ mulitipliziert:
$$(x - y)(x + y) \ \leq \ 0 \cdot (x + y) \quad \Longrightarrow \quad x^2 - y^2 \ \leq \ 0$$
Addition von y^2 auf beiden Seiten der Ungleichung liefert das Ergebnis.

3. Sei
$$M := \{x \in \mathbb{R} \ | \ \frac{2x - x^2}{1 - x} \leq 0\}.$$
1. Fall: $x = 0 \Rightarrow x \in M$
2. Fall: $0 < x < 1$, Division durch $x > 0$ und Multiplikation mit $1 - x > 0$ liefern
$$2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$
Wegen $x < 1$ tritt dieser Fall nicht ein.
3. Fall: $x > 1$, Division durch $x > 0$ und Multiplikation mit $1 - x < 0$ liefern
$$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$
Dieses ist für alle x mit $1 < x \leq 2$ erfüllt.
4. Fall: $x < 0$, Division durch $x < 0$ und Multiplikation mit $1 - x > 0$ liefern
$$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$
Dieses ist für alle x mit $x < 0$ erfüllt.
Insgesamt folgt
$$M = (-\infty, 0] \cup (1, 2].$$

4. Die Mengen M, N und $M \cap N$ besitzen die Gestalt:







Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Gegeben sei das kartesische Produkt

$$A \;=\; \{-1, 0, 1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$$

Geben Sie alle Elemente der folgenden Teilmenge $B \subset A$ an:

$$B \;=\; \{(x, y) \in A \mid x + y \geq 3\}$$

2. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen

$$\text{a)} \quad |x| - 1 = \frac{1}{2}x, \quad \text{b)} \quad |x - 3| - 2|x + 2| = 0,$$

$$\text{c)} \quad ||x + 5| - 1| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{d)} \quad (x - 1)^2 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 3)^2 + (|x - 2| - 1)^2 = 0.$$

3. Für welche reellen Zahlen gilt die Ungleichung

$$|x - 2| \;<\; |x - 3| \quad ?$$

4. Beweise für drei reelle Zahlen a, b und $c \in \mathbb{R}$:

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|.$$

5. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{37 + i}{i} \;=\; \binom{38 + n}{n}.$$

6. Für zwei reelle Zahlen a und $b \in \mathbb{R}$ sei $\max(a, b)$ definiert als die größere der beiden Zahlen und entsprechend $\min(a, b)$ als die kleinere der beiden Zahlen. Zeige:

$$\max\,(a, b) = \frac{(a + b) + |a - b|}{2} \quad \text{und} \quad \min\,(a, b) = \frac{(a + b) - |a - b|}{2}.$$

7. Sei

$$M \;:=\; \{x \mid x = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} \;\text{ mit }\; n \in \mathbb{N}\,\}.$$

Man gebe, falls vorhanden, $\sup(M)$, $\max(M)$, $\inf(M)$ und $\min(M)$ an.

1. $B = \{(0,3),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

2. **a)**
   1. Fall: Sei $x \geq 0$, dann ist $x - 1 = \frac{1}{2}x$ und damit $x = 2$.
   2. Fall: Sei $x < 0$, dann ist $-x - 1 = \frac{1}{2}x$ und damit $x = \frac{-2}{3}$.
   Somit erfüllen $x = 2$ und $x = \frac{-2}{3}$ die Gleichung.
   b)
   1. Fall: Sei $x \geq 3$, dann ist $(x-3) - 2(x+2) = 0$ und damit wäre $x = -7$, wegen $x \geq 3$ tritt dieser Fall nicht auf.
   2. Fall: Sei $-2 \leq x < 3$, dann ist $-(x-3) - 2(x+2) = 0$ und damit ist $x = -\frac{1}{3}$.
   3. Fall: Sei $x < -2$, dann ist $-(x-3) + 2(x+2) = 0$ und damit ist $x = -7$.
   Somit sind $x = -\frac{1}{3}$ und $x = -7$ die beiden Lösungen der Gleichung.
   c)
   1. Fall: Sei $x \geq -5$, dann ist $x + 5 \geq 0$, und man kann folgern

$$\begin{aligned} ||x+5|-1| \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x+5-1 \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -4 - \frac{1}{2} \leq x \leq -4 + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left[\frac{-9}{2}, \frac{-7}{2}\right] \end{aligned}$$

   2. Fall: Sei $x < -5$, dann ist $x + 5 < 0$ und man kann folgern

$$\begin{aligned} ||x+5|-1| \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -(x+5)-1 \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 6 - \frac{1}{2} \leq -x \leq 6 + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -6 - \frac{1}{2} \leq x \leq -6 + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left[\frac{-13}{2}, \frac{-11}{2}\right] \end{aligned}$$

   Also: x erfüllt die Ungleichung genau dann, wenn

$$x \in \left[\frac{-13}{2}, \frac{-11}{2}\right] \cup \left[\frac{-9}{2}, \frac{-7}{2}\right]$$

   ist.
   d) Setze $a = (x-1)(x-2)(x-3)$ und $b = |x-2| - 1$. Wegen $a^2 + b^2 = 0$ folgt dann nach Vorlesung $a = b = 0$. Aus $a = 0$ erhält man wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{R}$: $x - 1 = 0$ oder $x - 2 = 0$ oder $x - 3 = 0$, d. h. $x \in \{1,2,3\}$. Durch Einsetzen sieht man, daß genau für $x = 1$ und $x = 3$ die Bedingung $b = 0$ erfüllt ist. Die Gleichung ist somit genau für $x \in \{1,3\}$ erfüllt.

3. Sei M die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen Die drei Fälle $x \geq 3$, $x \leq 2$ und $2 < x < 3$ werden einzeln behandelt:

   (a) Sei $x \geq 3$, insbesondere ist dann auch $x > 2$, und es folgt, falls x die Ungleichung erfüllt

$$\begin{array}{rrcll} & x-2 & < & x-3 & \\ \Leftrightarrow & -2 & < & -3 & \\ \Leftrightarrow & 2 & > & 3 & \text{Widerspruch!} \end{array}$$

   Also ist für diese x stets $x \notin M$.

   (b) Sei $x \leq 2$, insbesondere ist dann auch $x < 3$, und für die $x \in M$ gilt

$$\begin{array}{rrcll} & -(x-2) & < & -(x-3) & \\ \Leftrightarrow & 2-x & < & 3-x & \\ \Leftrightarrow & 2 & < & 3 & \text{Dieses ist stets erfüllt.} \end{array}$$

   Also ist für diese x stets $x \in M$.

   (c) Sei nun $2 < x < 3$. Für $x \in M$ ist dann

$$\begin{array}{rrcl} & x-2 & < & -(3-x) \\ \Leftrightarrow & x-2 & < & 3-x \\ \Leftrightarrow & 2x & < & 5 \\ \\ \Leftrightarrow & x & < & \frac{5}{2} \end{array}$$

   Also: von diesen x liegen genau diejenigen mit $x < \frac{5}{2}$ in der Menge M.

   Insgesamt folgt $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{2}\}$. Dieses sind genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die dichter an 2 als an 3 liegen!

4. Man wende die Dreiecksungleichung auf die beiden Zahlen a und $d = b + c$ an:

$$|a+b+c| \;=\; |a+d| \;\leq\; |a| + |d| \;=\; |a| + |b+c|$$

   Eine zweite Anwendung der Dreicksungleichung und anschließende Addition von $|a|$ liefern:

$$|b+c| \;\leq\; |b| + |c| \quad \Longrightarrow \quad |a| + |b+c| \;\leq\; |a| + |b| + |c|$$

   Beide Ungleichungen zusammen liefern das Ergebnis:

$$|a+b+c| \;\leq\; |a| + |b+c| \;\leq\; |a| + |b| + |c|$$

5. Beweis durch vollständige Induktion über n:

   Induktionsanfang: Sei $n = 0$:

$$\begin{array}{rcl} \text{linke Seite} & : & \binom{37}{0} = 1 \\ \text{rechte Seite} & : & \binom{38+0}{0} = \binom{38}{0} = 1 \end{array}$$

Induktionsschluß: Die Behauptung gelte für $n-1$ als bewiesen; dann folgt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{37+i}{i} = \binom{37+n}{n-1} \quad \Big| + \binom{37+n}{n}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{37+i}{i} = \binom{37+n}{n-1} + \binom{37+n}{n}$$

$$= \binom{37+n+1}{n} = \binom{38+n}{n},$$

da allgemein für $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ die Regel $\binom{a}{b} + \binom{a}{b-1} = \binom{a+1}{b}$ gilt. Damit ist alles bewiesen.

6. Zur Auflösung der Beträge nimmt wie üblich Fallunterscheidungen vor. Hier lauten die beiden Fälle "$a \geq b$" bzw. "$a < b$". Für die erste Gleichung berechnet man im Fall "$a \geq b$" wegen $|a-b| = (a-b)$:

$$\frac{(a+b)+|a-b|}{2} = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = a = \max(a,b)$$

Im umgekehrten Fall "$a < b$" hat man wegen $|a-b| = (b-a)$:

$$\frac{(a+b)+|a-b|}{2} = \frac{(a+b)+(b-a)}{2} = b = \max(a,b)$$

Entsprechend verfährt man bei der zweiten Gleichung.

7. Die Menge

$$M := \{x \mid x = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ mit } n \in \mathbb{N}\}.$$

ist sowohl nach oben als auch noch unten beschränkt und besitzt außerdem ein Maximum:

Das Maximum: Es ist

$$x_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in M$$

Andererseits ist für alle $n \geq 2$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} = x_1$$

$$\text{also} \qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq x_1 \quad \text{für alle } x \in M$$

Daher ist x_1 der größte in M enthaltene Wert; x_1 ist damit die kleinste obere Schranke von M und damit auch das Maximum von M.

Das Infimum: Man erkennt sofort, daß M durch 0 nach unten beschränkt ist: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0 \tag{1}$$

Da andererseits sich die Elemente der Menge M für immer größer werdendes n der Null beliebig stark annähern, kann es keine größere untere Schranke als 0 geben. Daher ist 0 die größte untere Schranke von M, d. h. es ist $0 = \inf(M)$. Da aber, wie man anhand von (1) sieht, $0 \notin M$ ist; ist Null kein Minimum von M.

HS Osnabrück
FIuI – Biermann

Übung zu Mathematik I für Informatik

Blatt 3

1. Gegeben seien zwei nach unten beschränkte Mengen $M, N \subset \mathbb{R}$; begründen Sie:

$$M \subset N \quad \Rightarrow \quad \inf M \ \geq \ \inf N$$

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt die *verallgemeinerte Dreiecksungleichung*:

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

   Nehmen Sie den Induktionsanfang bei $n = 2$ vor. Verwenden Sie sowohl beim Induktionsanfang als auch beim Induktionsschluß die in der Vorlesung hergeleitete einfache Dreiecksungleichung:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

3. Berechnen Sie: $\sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{7} i \cdot j$.

4. Das Produktzeichen ($\prod$) ist definiert durch

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \ = \ a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \quad \text{mit} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \ \in \ \mathbb{R} \ .$$

   Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{i=0}^{n} (2^{2^i} + 1) \ = \ 2^{2^{n+1}} - 1.$$

5. Welche der folgenden Funktion von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist gerade, welche ist ungerade?

   a) $f(x) = x^3 \text{sign}(x)$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{|x| + 2}$

   c) $f(x) = \dfrac{x^5 + 3x^3 - 6x}{1 + x^4}$.

6. Bestimmen Sie die größte Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$7^n \ \leq \ 3 \cdot 10^{12}$$

7. Seien M und N zwei nichtleere Mengen, und sei $\mathrm{f} : M \longrightarrow N$ eine Funktion. Zeigen Sie:
   a) Die Funktion f ist injektiv, wenn es eine Funktion $\mathrm{g} : N \longrightarrow M$ gibt mit

$$\mathrm{g}(\mathrm{f}(x)) = x \qquad \text{für alle} \quad x \in M$$

   b) Die Funktion f ist surjektiv, wenn es eine Funktion $\mathrm{h} : N \longrightarrow M$ gibt mit

$$\mathrm{f}(\mathrm{h}(y)) = y \qquad \text{für alle} \quad y \in N$$

1. Für alle $x \in N$ ist $x \geq \inf N$. Wegen $M \subset N$ gilt daher auch insbesondere für alle $x \in M$ die Ungleichung $x \geq \inf N$, d. h. $\inf N$ ist eine untere Schranke von M; da $\inf M$ die größte untere Schranke von M ist, folgt $\inf M \geq \inf N$.

2. Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt. Der Induktionsanfang für $n = 2$ wurde in der Vorlesung durchgeführt; es handelt sich dabei um die gewöhnliche Dreiecksungleichung. Der Induktionsschluß (für $n > 2$) lautet:

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{n} a_i| &= |\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) + a_n| \\ &\leq |\sum_{i=1}^{n-1} a_i| + |a_n| \quad \text{(gewöhnl. Dreiecksungleichung)} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} |a_i|\right) + |a_n| \quad \text{(nach Ind. vor.: Fall } n-1\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |a_i| \end{aligned}$$

3. $\frac{6\times 7}{2} \cdot \frac{7\times 8}{2} = 21 \times 28 = 588$

4. Beweis durch vollständige Induktion:

   Induktionsanfang: Sei $n = 0$.

$$\begin{aligned} \text{linke Seite} &: 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3 \\ \text{rechte Seite} &: 2^{2^{0+1}} - 1 = 2^2 - 1 = 3 \end{aligned}$$

   Induktionsschluß: Die Behauptung sei für $n-1$ bewiesen:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n-1}(2^{2^i}+1) &= 2^{2^n} - 1 \qquad \big| \times (2^{2^n}+1) \\ \prod_{i=0}^{n}(2^{2^i}+1) &= (2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1) \\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 \\ &= 2^{2\cdot 2^n} - 1 \;=\; 2^{2^{n+1}} - 1 \qquad \text{qed} \end{aligned}$$

5.
   a) $f(x) = x^3 \text{sign}(x)$ ist gerade
   b) $f(x) = \frac{x^2+3x}{|x|+2}$ ist weder gerade noch ungerade. Dieses erkennt man durch Einsetzen von $x = 1$ und $x = -1$.
   c) $f(x) = \frac{x^5+3x^3-6x}{1+x^4}$ ist ungerade.

6. Anwendung des Logarithmus auf beide Seiten der Ungleichung

$$7^n \leq 3 \cdot 10^{12}$$

und anschließende Berücksichtigung der Logarithmengesetze liefert:

$$\begin{aligned} \log(7^n) &\leq \log(3 \cdot 10^{12}) \\ \Rightarrow \quad n \log(7) &\leq \log(3) + \log(10^{12}) \\ \Rightarrow \quad n \log(7) &\leq \log(3) + 12 \log(10) \end{aligned}$$

Wegen $\log(7) > 0$ können beide Seiten der letzten Ungleichung durch $\log(7) > 0$ geteilt werden:

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{\log(3) + 12 \log(10)}{\log(7)} \\ \Rightarrow \quad n &\leq \frac{1.0986122886681096913 9 + 12 \cdot 2.3025850929940456840 1}{1.9459101490553133051 0} \\ \Rightarrow \quad n &\leq 14.764110983512839535 60 \end{aligned}$$

Die größte natürliche Zahl, die die diese Ungleichung erfüllt, ist

$$n = 14$$

Insbesondere ist dann $7^{14} = 6\,782\,230\,728\,49$.

7. **a)** Gegeben sei die Funktion $g : N \longrightarrow M$ mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$. Behauptung: Dann ist f injektiv. Seien dazu $x_1, x_2 \in M$ mit

$$f(x_1) = f(x_2)$$

gegeben. Wendet man die Funktion g auf beide Seiten dieser Gleichung an, so folgt

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

und damit weiter wegen $g(f(x)) = x$;

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$$

also $x_1 = x_2$. Damit ist die Injektivität gezeigt.
b) Sei eine Funktion $g : N \longrightarrow M$ mit $f(g(y)) = y$ für alle $y \in N$ gegeben. Zu zeigen ist, daß daraus die Surjektivität von f folgt, d. h. daß es zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ gibt: Zu $y \in N$ setze man $x = g(y)$, dann ist nämlich

$$f(x) = f(g(y)) = y.$$

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Finden Sie alle Lösungen der beiden Gleichungen

   $$\text{(a)}\quad e^{x^2+2x} = 63 \qquad \text{(b)}\quad e^{2x} + 2\,e^{x} = 63$$

2. Zerlegen Sie die folgenden reellen Polynome in Faktoren möglichst kleinen Grades. Verwenden Sie dabei das Hornerschema (siehe Skript). Bestimmen Sie die Nullstellen gegebenenfalls durch „Suchen“.

   a) $f(x) = -21 + 101x - 9x^3 + x^4$
   b) $f(x) = -18 - 48x - 35x^2 - x^3 + 5x^4 + x^5$
   c) $f(x) = 16 + 36x + 22x^2 - 4x^3 - 9x^4 - 2x^5 + x^6$.

   Hinweis: Finden Sie Nullstellen durch Probieren. Gute Kandidaten für Nullstellen sind bei diesen Polynomen die ganzzahlichen Teiler der konstanten Glieder.

3. Gegeben sei ein – der Einfachheit halber – normiertes Polynom dritten Grades $p(x)$, das *genau* die beiden Nullstellen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$ besitzt. Begründen Sie: Dann ist entweder x_1 oder x_2 eine doppelte Nullstelle. Geben Sie ein Beispiel für ein solches Polynom an, und skizzieren Sie es.

4. Zeigen Sie mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra, daß ein – der Einfachheit halber – normiertes Polynom $p(x)$ ungeraden Grades mindestens eine (reelle) Nullstelle besitzt. Überlegen Sie sich dieses zunächst für ein Polynom dritten Grades.

5. Ein Polynom zweiten Grades besitzt keine, zwei einfache oder eine doppelte Nullstelle. Geben Sie ebenso alle bezüglich der Nullstellen bei einem – der Einfachheit halber normiertem – Polynom vierten Grades vorkommenden Möglichkeiten an. Geben Sie für jeden Fall ein Beispielpolynom an und skizzieren Sie es.

   Hinweis: Betrachten Sie die Produktzerlegung gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra.

6. Gegeben sei die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $\mathrm{f}(x) = \cos^2(x)$ Warum gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

   $$\mathrm{f}(x+\pi) = \mathrm{f}(x) \quad ?$$

7. Beweisen Sie: für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

   $$\text{a)}\quad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$
   $$\text{b)}\quad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc…
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit den Nummern 2268, 2319 und 090028.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. (a) Die Anwendung des Logarithmus und anschließende Subtraktion von $\log(63)$ auf beiden Seiten der Gleichung liefert die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2\,x - \log(63)$$

Die Lösungen hiervon sind

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+\log(63)} = \begin{cases} 1.26784803864622567172 \\ -3.26784803864622567172 \end{cases}$$

(b) Man setzt $y = \mathrm{e}^x$. Dann ist $y^2 = (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$. Dieses in die Gleichung eingesetzt und 63 auf beiden Seiten abgezogen, liefert die quadratische Gleichung

$$y^2 + 2\,y - 63$$

Die Lösungen hiervon sind

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+63} = \begin{cases} 7 \\ -8 \end{cases}$$

Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, kommt wegen $y = \mathrm{e}^x$ nur die erste dieser Lösungen in Frage. Die eindeutige Lösung der gegebenen Gleichung lautet somit:

$$\mathrm{e}^x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \log(7) = 1.94591014905531330510$$

2.

a) $-21 + 101x - 9x^3 + x^4 = (x-7)(x+3)(x-\frac{1}{2}(5+\sqrt{21}))(x-\frac{1}{2}(5-\sqrt{21}))$
b) $-18 - 48x - 35x^2 - x^3 + 5x^4 + x^5 = (x+1)(x+3)^2(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))$
c) $16 + 36x + 22x^2 - 4x^3 - 9x^4 - 2x^5 + x^6 = (x-4)(x-2)(x+1)^2(x^2+2x+2)$.

3. Spaltet man die beiden zu den Nullstellen x_1 und x_2 gehörigen Linearfaktoren ab, so liefert dies ein Produktzerlegung

$$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)g(x)$$

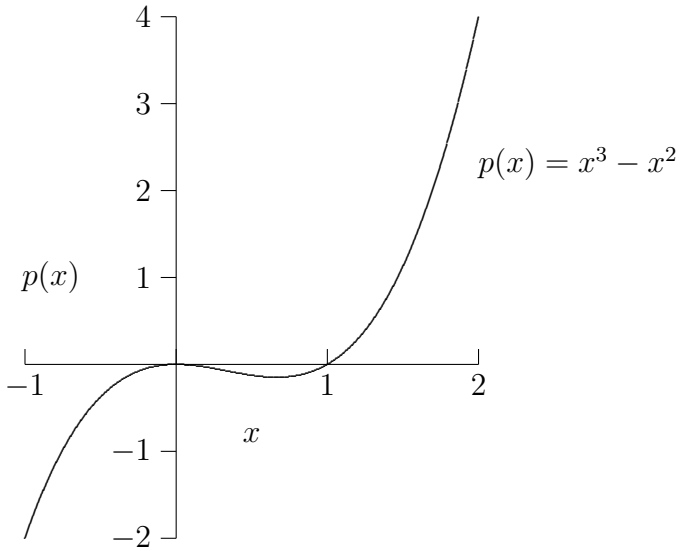
Aufgrund der Gradformel besitzt das Abspaltungspolynom $g(x)$ den Grad 1 und hat somit die Gestalt

$$g(x) = (x-x_3) \quad \text{mit einem} \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

x_3 ist damit eine Nullstelle von $p(x)$. Das aber $p(x)$ nur die beiden Nullstellen x_1 und x_2 besitzt, muß entweder $x_3 = x_1$ oder $x_3 = x_2$; eine der beiden Nullstellen kommt somit mit doppelter Ordnung vor.

Ein Beispiel für ein solches Polynom ist

$$p(x) = x^2(x-1) = x^3 - x$$



4. Angenommen, daß Polynom $p(x)$ besäße keine reelle Nullstelle, dann kämen in seiner Produktzerlegung gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra nur Faktoren zweiten Grades ohne reelle Nullstellen vor; die Produktzerlegung hätte dann die Gestalt

$$p(x) \;=\; (x^2 + a_1 x + b_1)^{k_1} \cdot (x^2 + a_2 x + b_2)^{k_2} \cdots (x^2 + a_m x + b_m)^{k_m}$$

Wendet man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Gradformel an, so folgte

$$\mathrm{grad}(p(x)) \;=\; 2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_m \;=\; 2\sum_{i=1}^{m} k_i$$

$\mathrm{grad}(p(x))$ wäre damit im Widerspruch zur Voraussetzung eine gerade Zahl. Daher muß in der zu $p(x)$ gehörigen Produktzerlegung mindestens ein Linearfaktor vorkommen, und zu diesem gehört eine Nullstelle.

5. Betrachtet man zunächst die Produktzerlegung gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra

$$p(x) \;=\; (x - x_1)^{l_1} \cdots (x - x_n)^{l_n} \cdot (x^2 + a_1 x + b_1)^{k_1} \cdots (x^2 + a_m x + b_m)^{k_m}$$

und wendet man auf die rechte Seite die Gradformel an, so ist

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}(p(x)) \;&=\; l_1 + l_2 + \ldots l_n + 2k_1 + 2k_2 + \ldots 2k_m \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} l_i \;+\; 2\sum_{i=1}^{m} k_i \\ \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} l_i \;&=\; \mathrm{grad}(p(x)) \;-\; 2\sum_{i=1}^{m} k_i \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung der Grad von $p(x)$ vier und damit insbesondere eine gerade Zahl ist, gibt es für die Gesamtordung der Nullstellen $\sum_{i=1}^{n} l_i$ nur die Möglichkeiten 0, 2, und 4. Für die Nullstellen ergeben sich damit die Möglichkeiten

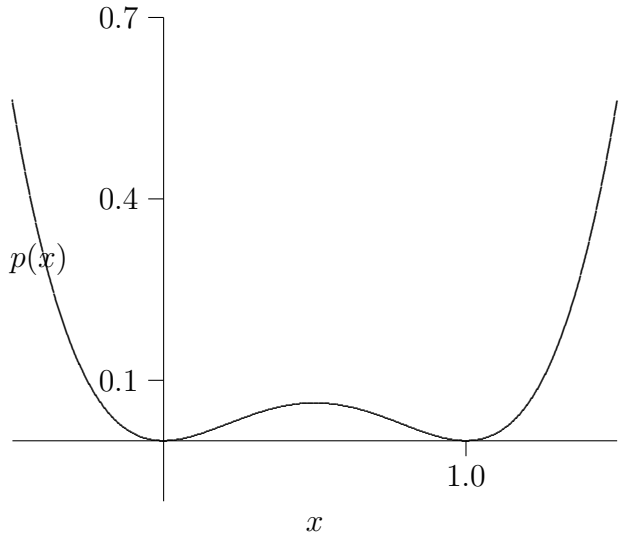
(a) keine Nullstelle, Beispiel: $p(x) = x^4 + 1$,

(b) eine doppelte Nullstelle, Beispiel: $p(x) = x^4 + x^2$,

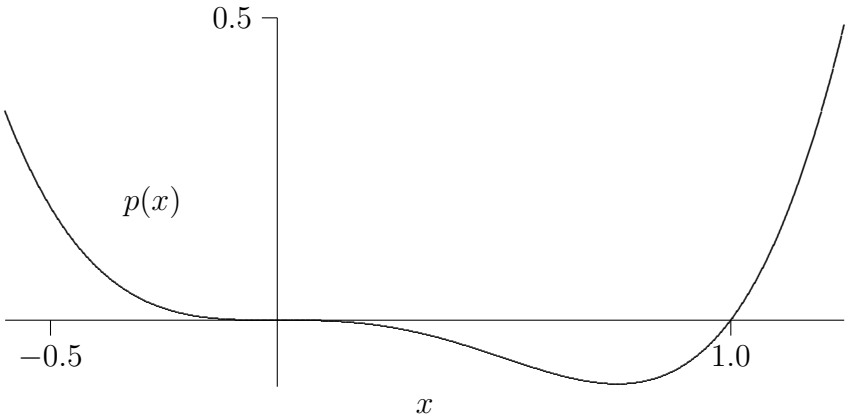
(c) zwei einfache Nullstellen, Beispiel: $p(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$,

(d) eine vierfache Nullstelle, Beispiel: $p(x) = x^4$,

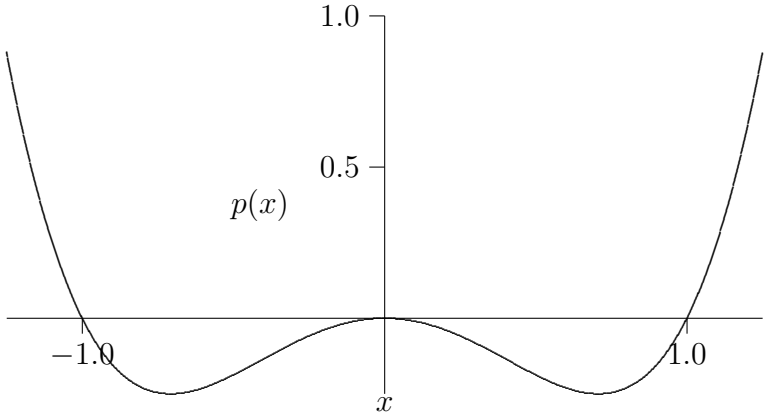
(e) zwei doppelte Nullstellen, Beispiel: $p(x) = x^2(x - 1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$,



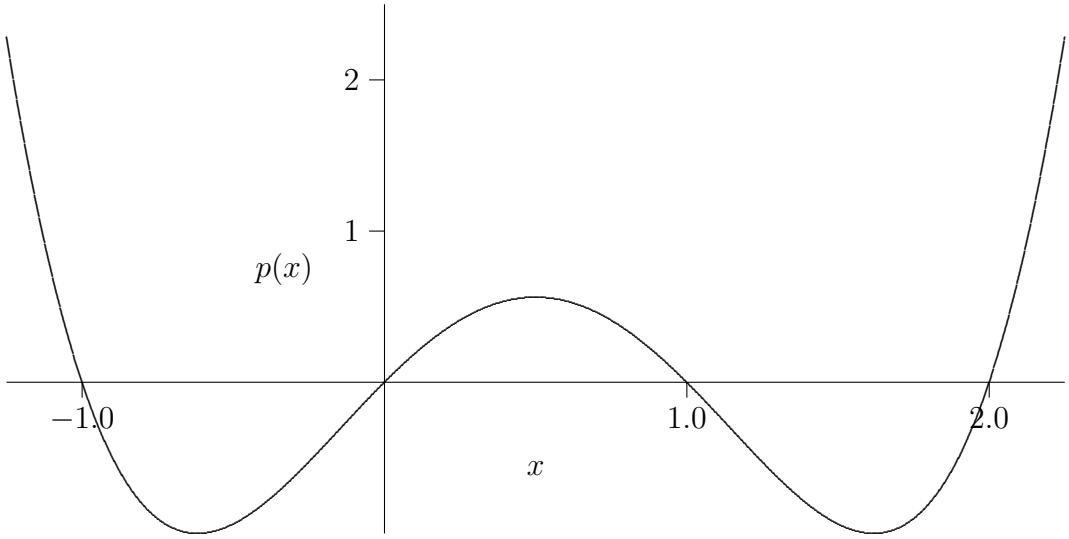
(f) eine einfache und eine dreifache Nullstelle, Beispiel: $p(x) = (x - 1)x^3 = x^4 - x^3$,



(g) zwei einfache und eine doppelte Nullstelle, Beispiel: $p(x) = (x-1)(x+1)x^2 = x^4-x^2$,



(h) vier einfache Nullstellen, Beispiel: $p(x) = x(x-1)(x+1)(x-2) = x^4-2x^3-x^2+2x$.



6. Nach Vorlesung besteht für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$$

Damit rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x+\pi) &= \cos^2(x+\pi) \\ &= (-\cos(x))^2 \;=\; (-1)^2 \cdot \cos^2(x) \\ &= \cos^2(x) \;=\; \mathrm{f}(x) \end{aligned}$$

7. **a)**

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{=\cos 2x} + \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1}) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x) \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + \underbrace{\sin^2 x - \cos^2 x}_{=-\cos 2x}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Logarithmus, daß jede positive reelle Zahl $x \in \mathbb{R}^+$ eine sogenannte Gleitkommadarstellung besitzt:

$$x \;=\; m \cdot 2^u \qquad \text{mit} \quad 1 \le m < 2 \quad \text{und} \quad u \in \mathbb{Z}$$

   Geben Sie die Gleitkommadarstellung von $x_0 = 987654321369$ an.

2. Sei $\mathrm{p}(x)$ ein Polynom vom Gerade mindestens 1. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß ein $x_1 \in \mathbb{R}$ genau dann eine Nullstelle des Polynoms $\mathrm{p}(x)$ ist, wenn der zugehörige Linearfaktor $x - x_1$ das Polynom $\mathrm{p}(x)$ ohne Rest teilt. In dieser Aufgabe geht es um einen ähnlichen Sachverhalt für den Fall, daß x_1 keine Nullstelle von $\mathrm{p}(x)$ ist

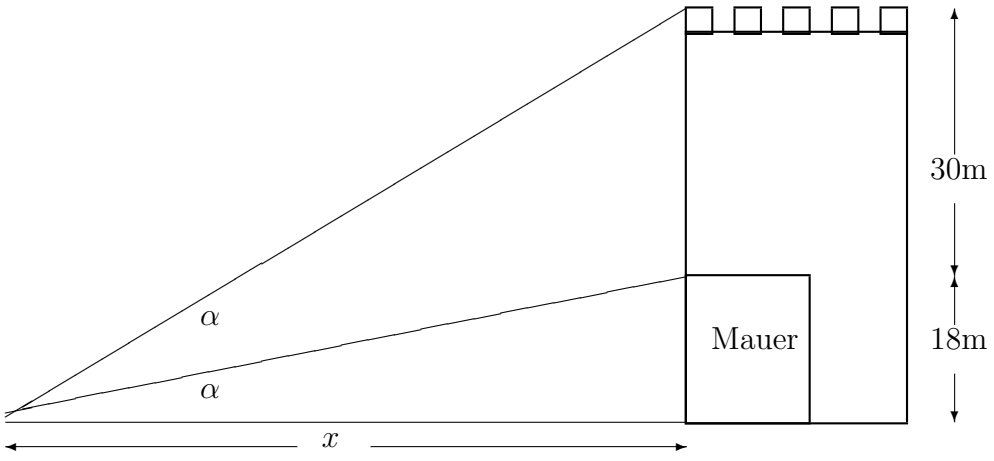
   a) Begründen Sie: Ist x_1 keine Nullstelle von $\mathrm{p}(x)$, so besitzt der Divisionsrest r, der bei Teilung von $\mathrm{p}(x)$ durch $x - x_1$ entsteht, den Grad 0, d. h. er ist eine Konstante:

$$\mathrm{p}(x) \;:\; (x - x_1) \;=\; \mathrm{g}(x) \text{ Rest } r \qquad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R} \tag{1}$$

   b) Begründen Sie weiter: Der Divisionsrest in (1) ist gerade der Wert des Polynoms $\mathrm{p}(x)$ an der Stelle $x = x_1$:

$$r \;=\; \mathrm{p}(x_1)$$

3. Über einer $h = 18\ \mathrm{m}$ hohen Mauer erhebt sich ein Turm mit der Länge $l = 30\ \mathrm{m}$. In welcher Entfernung x vom Fuße der Mauer sind Mauerkrone und Turm unter jeweils gleichem Winkel α zu sehen? Wie groß ist α?



4. Finden Sie ein $\delta \in (-\pi, \pi]$ mit

$$\cos(\delta) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{und} \qquad \sin(\delta) \;=\; \frac{2}{\sqrt{5}}$$

5. Welchen Rang haben die beiden folgenden linearen Gleichungssysteme? Bestimmen Sie auch die beiden Lösungsmengen, indem Sie, falls vorhanden, jeweils eine spezielle Lösung und geeignete Grundlösungen des zugehörigen homogenen Systems angeben:

c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 63 \end{array}$$

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 4x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 11x_4 & = & -4 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

6. Drei Herren weigern sich, ihr Alter zu verraten. Obendrein tragen sie etwas seltsame Namen, nämlich Xaver, Ymir, Zacharias. Nach einigem Überreden lassen sich aber von ihnen diese Aussagen über das Alter (in Jahren) eines jeden von ihnen entlocken:

   Wäre Xaver sechs Jahre jünger, als er tatsächlich ist, so wäre er halb so alt, wie heute Ymir und Zacharias zusammen. Alle drei zusammen sind 111 Jahre alt. Vor 20 Jahren war Ymir doppelt so alt wie Zacharias.

   Damit ist aber klar, wie alt jeder dieser drei Herren ist! Nämlich?

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc...
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit den Nummern 11421, 11338 und 090029.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.

1. Da eine der beiden für die Gleitkommadarstellung benötigten Größen im Exponenten steht, empfiehlt es sich, zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^+$ auf beide Seite der Gleichung $x = m \cdot 2^u$ den Logarithmus anzuwenden:

$$\begin{aligned} \log(x) &= \log(m \cdot 2^u) \\ &= \log(m) + \log(2^u) \\ &= \log(m) + u\,\log(2) \\ \Rightarrow \quad \frac{\log(x)}{\log(2)} &= \frac{\log(m)}{\log(2)} + u \end{aligned} \tag{1}$$

Für die beiden Summanden auf der rechten Seite der letzten Gleichung gilt einerseits $u \in \mathbb{Z}$ und andererseits wegen $1 \le m < 2$ und der Monotonie der Logarithmusfunktion

$$0 = \log(1) \le \log(m) < \log(2) \quad \Rightarrow \quad 0 \le \underbrace{\frac{\log(m)}{\log(2)}}_{=w} < 1$$

Der erste Summand auf der rechten Seite von (1) wurde zur Abkürzung w genannt; es ist somit $0 \le w < 1$. Damit erhält man aus (1) unter Verwendung der Gaußklammer[1]

$$u = \left[\frac{\log(x)}{\log(2)}\right] \qquad w = \frac{\log(x)}{\log(2)} - u \qquad m = \mathrm{e}^{w \cdot \log(2)}$$

Die letzte Gleichung ergab sich hier durch Auflösen von $w = \log(m)/\log(2)$ noch m.

Bemerkung 1: Die Zahl m heißt „Mantisse“ und die Zahl u heißt „Exponent“.
Bemerkung 2: Die Rechnung hätte sich etwas vereinfachen lassen, wenn man anstelle des natürlichen Logarithmus $\log(x)$ den logarithmus dualis $ld(x) = \log(x)/log(2)$ verwendet hätte.

Für $x_0 = 987654321369$ berechnet man

$$\begin{aligned} u &= \left[\frac{\log(987654321369)}{\log(2)}\right] = \left[\frac{27.61859859631610355483}{\log(0.69314718055994530941)}\right] \\ &= [39.845215231208128385 78] = 39 \\ w &= \frac{\log(987654321369)}{\log(2)} - 39 = 0.8452152312081283857 8 \\ m &= \mathrm{e}^{0.8452152312081283857 8 \cdot \log(2)} = \left(\mathrm{e}^{\log(2)}\right)^{0.8452152312081283857 8} \\ &= 2^{0.8452152312081283857 8} = 1.79653274493648496039 \end{aligned}$$

Also ist

$$987654321369 = 1.79653274493648496039 \cdot 2^{39}$$

[1] Die Gaußklammer ist der ganze Anteil einer reellen Zahl a: $[a] = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le a\}$; siehe Skript.

2. **a)** Da der Grad des Divisionsrestes immer kleiner als der Grad des Divisors ist – andernfalls wäre noch ein weiterer Schritt bei der Polynomdivision möglich – und der Divisor $(x - x_1)$ hier den Grad 1 besitzt, kann der Rest nur das Nullpolynom oder ein Polynom vom Grad 0 sein. In beiden Fällen besteht das Restpolynom nur aus den konstanten Glied und ist damit eine Konstante $r \in \mathbb{R}$.

   b) Da, wie gesehen, das Restpolynom eine Konstante $r \in \mathbb{R}$ ist, liefert die Polynomdivision durch $x - x_1$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{p}(x)}{x - x_1} \;=\; \mathrm{g}(x) \;+\; \frac{r}{x - x_1}$$

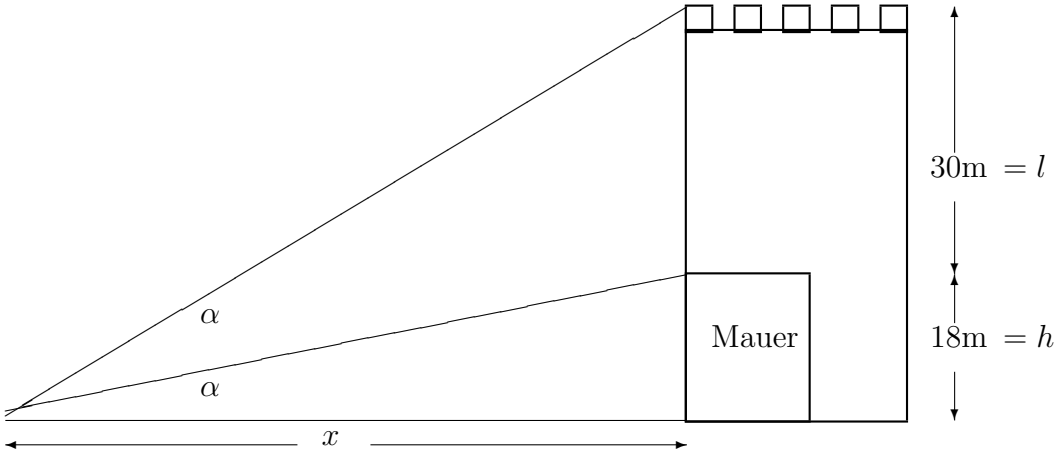
   mit einem Polynom $\mathrm{g}(x)$ (dem Quotienten). Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $x - x_1$, so erhält man

$$\mathrm{p}(x) \;=\; \mathrm{g}(x) \cdot (x - x_1) \;+\; r$$

   Setzt man hier $x = x_1$ ein, so erhält man in der Tat

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(x_1) &= \overbrace{\mathrm{g}(x_1) \cdot (x_1 - x_1)}^{=0} + r \\ &= r \end{aligned}$$

3.



$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{h}{x} \\ \tan 2\alpha &= \frac{h+l}{x} \\ &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad \text{für } \tan\alpha \text{ einsetzen!} \\ &= \frac{2h}{x(1-\frac{h^2}{x^2})} \\ &= \frac{2hx^2}{x(x^2-h^2)} \\ \Rightarrow \quad (h+l)(x^2-h^2) &= 2hx^2 \quad \text{nach } x \text{ auflösen!} \\ \Rightarrow \quad x &= h\sqrt{\frac{l+h}{l-h}} \\ \Rightarrow \quad \tan\alpha &= \sqrt{\frac{l-h}{l+h}} \end{aligned}$$

Damit folgt: $x = 36\text{m}$ und $\alpha = \arctan \frac{1}{2} = 26,565°$.

4. Zunächst stellt man sicher, daß $(-1/\sqrt{5})^2 + (2/\sqrt{5})^2 = 1$ ist und somit ein δ mit der gewünschten Eigenschaft existieren muß. Da der Wert des Cosinus negativ sein soll, berechnet man nach Vorlesung dieses δ durch

$$\delta \;=\; \arctan\left(\frac{2/\sqrt{5}}{-1/\sqrt{5}}\right) + \pi \;=\; \arctan(-2) + \pi \;=\; -1.1071 + \pi \;=\; 2.0344$$

5. **a)** Eine reduzierte Form ist

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 21 \end{array}$$

Der Rang ist $r = 2$; der Corang ist $s = n - r = 3 - r = 3 - 2 = 1$. Setzt man $x_3 = 0$, so liefert dieses die spezielle Lösung $S = (-14, 21, 0)$. Die wegen $s = 1$ einzige Grundlösung des homogenen Systems ist $G = (2, -3, 1)$. Die Lösungsmenge lautet somit

$$L \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Eine reduzierte Form ist :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ & & & & x_3 & & & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Der Rang ist $r = 4$; der Corang ist $s = n - r = 4 - r = 4 - 4 = 0$. Die wegen $s = 0$ eindeutige und wegen $r = 4 = m$ notwendigerweise existierende Lösung ist $(0, -4, 2, 2)$.

6. Ein geeignetes lineares Gleichungssystem soll aufgestellt werden, dabei stehe x für das Alter von Xaver und ebenso y und z für das Alter von Ymir bzw. Zacharias:

$$\begin{array}{lll} 1. & (x-6) = \frac{1}{2}(y+z) & \Leftrightarrow \quad 2x - y - z = 12 \\ 2. & & \quad\; x + y + z = 111 \\ 3. & (y-20) = 2(z-20) & \Leftrightarrow \quad\; y - 2z = -20 \end{array}$$

Anwendung des Gaußschen Verfahrens liefert eine reduzierte Form dieses Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 111 \\ & & y & + & z & = & 70 \\ & & & & z & = & 30 \end{array}$$

und damit $z = 30$, $y = 40$ und $x = 41$.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Bestimme Rang und Corang sowie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

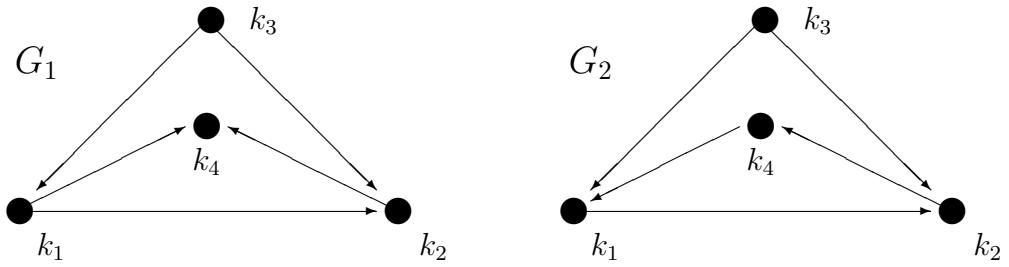
$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 & -1 & -5 \\ 3 & 6 & 7 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 5 & -35 & -20 \\ -5 & -10 & -12 & 0 & -11 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \\ -12 \\ -13 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung

$$\tan(x) \;=\; \cot(x)$$

erfüllt ist.

3. Bestimmen Sie die Adjazenzmatrizen A_1 und A_2 der beiden gerichteten Graphen G_1 und G_2:



Berechnen Sie deren Potenzen A_1^i sowie A_2^i für $i = 2, 3, 4$, und deuten Sie insbesondere für $i = 4$ die Ergebnisse. Die Potenz einer Matrix mit einem Exponenten $l \in \mathbb{N}$ ist dabei durch

$$A^l \;=\; \underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{l\text{-mal}}$$

gegeben.

4. Finden Sie ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\arctan(\tan x_0) \;=\; x_0 + 7\pi$$

Wie ist das Vorhandensein eines solchen x_0 damit in Einklang zu bringen, daß der arctan die Umkehrfunktion des tan ist?

5. In dem Gleichungssystem mit dem Parameter λ

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & (11+\lambda)x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & (30+\lambda)x_3 & = & 8 \end{array}$$

setze man einen Wert für λ ein, so daß das Gleichungssystem *unlösbar* wird.

6. **a)** Berechnen Sie das Inverse C^{-1} der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sei $A \in \mathrm{M}^{3,3}(\mathbb{R})$ die Matrix $A = C \circ D \circ C^{-1}$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

berechnen[1] Sie die Matrix $A^5 = A \circ A \circ A \circ A \circ A$.

c) Sei $\vec{c} = (3\,1\,1)^t$ die letzte Spalte der Matrix C. Berechnen Sie

$$\vec{y} = A \circ \vec{c}$$

d) Finden Sie eine Matrix $B \in \mathrm{M}^{3,3}(\mathbb{R})$ mit $B \circ B = A$.

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc...
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit den Nummern 90039 und 090040.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.

[1] ohne Verwendung einer speziellen Funktion für Matrizenrechnung auf dem Taschenrechner oder PC

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Zur Herstellung der reduzierten Form stellt man bei der hier vorliegenden Matrix die dritte Zeile an den Anfang und wendet anschließend das Gaußche Verfahren wie üblich an. Eine reduzierte Form dieses Gleichungssystems ist dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Der Rang ist 4, und der Corang ist 5-4=1. Die Lösbarkeit erkennt man an der letzten Gleichung: Es ist die einzige Nullgleichung, und auf der rechten Seite steht ebenfalls eine Null. Wie in der Vorlesung angegeben, erhält man aus der reduzierten Form die Lösungsmenge:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2.

$$\begin{aligned} \tan(x) = \cot(x) &\Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &\Leftrightarrow \sin^2(x) = \cos^2(x) \\ &\Leftrightarrow \cos^2(x) - \sin^2(x) = 0 && \text{Additionstheorem!} \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 && \text{d. h. } 2x \text{ ist Nullstelle des cos} \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{4} + n\tfrac{\pi}{2}, \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3. Die Adjazenzmatrix des ersten Graphen lautet:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Ihre Potenzen lauten:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Die vierte Potenz der Adjazenzmatrix ist die Nullmatrix. Es gibt somit in diesem Graphen keine Wege, die aus mehr als drei Kanten bestehen. Daraus folgt, daß der Graph keinen

Kreis (Masche, Zykel) enthalten kann; denn bei Vorliegen eines Kreises gäbe es Wege beliebiger Länge.

Die Adjazenzmatrix des zweiten Graphen lautet:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihre Potenzen lauten:

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die vierte Potenz der Adjazenzmatrix ist nicht die Nullmatrix. Es muß in diesem Graphen somit Wege, die aus mehr als drei Kanten bestehen, geben. Daraus folgt, daß der Graph mindestens einen Kreis (Masche, Zykel) enthalten muß; denn bei vier Knoten wären nur kreisfreie Wege mit höchstens drei Kanten möglich.

4. Man setze etwa $x_0 = -7\pi$, dann ist

$$\tan x_0 = \frac{\sin(-7\pi)}{\cos(-7\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

Wegen $\arctan 0 = 0$ folgt

$$\arctan(\tan(-7\pi)) = \arctan 0 = 0 = x_0 + 7\pi$$

Der arctan stellt *nur* für den auf das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ eingeschränkten tan die Umkehrfunktion dar; der gewählte Wert $x_0 = -7\pi$ liegt jedoch nicht in $(-\pi/2, \pi/2)$.

5. Eine reduzierte Form ist

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & (5+\lambda)x_3 & = & 1 \\ & & & & (1-4\lambda)x_3 & = & 1 \end{array}$$

Man erkennt an der reduzierten Form, daß das Gleichungssystem genau für $\lambda = \frac{1}{4}$ unlösbar ist.

6. **a)**

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Es ist $A^2 = C \circ D \circ C^{-1} \circ C \circ D \circ C^{-1} = C \circ D \circ D \circ C^{-1} = C \circ D^2 \circ C^{-1}$, ebenso folgt, da sich auch hier die mittleren Faktoren jeweils wegheben:

$$\begin{aligned} A^5 &= (C \circ D \circ C^{-1})^5 = C \circ D^5 \circ C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^5 \circ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2828 & 1594 & 7619 \\ -1005 & 615 & 2643 \\ -912 & 490 & 2489 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Zunächst beachte man, daß sich die letzte Spalte von C folgendermaßen darstellen läßt:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C \circ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -31 & 7 & 3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt leicht:

$$A \circ \vec{c} = (C \circ D \circ C^{-1}) \circ (C \circ \vec{e}_3) = C \circ D \circ \vec{e}_3 = C \circ 3\vec{e}_3 = 3C \circ \vec{e}_3 = 3\vec{c}$$

d) Man setze

$$B = C \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \circ C^{-1} = \begin{pmatrix} -14.28694207 & 13.79413216 & 34.26284649 \\ -5.924074484 & 6.702613548 & 12.80166070 \\ -4.681433796 & 4.045759308 & 11.73059289 \end{pmatrix}$$

Dann ist in der Tat

$$B^2 = C \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^2 \circ C^{-1} = C \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \circ C^{-1} = A$$

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx).$$

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Summationsformel: für $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \cos(jx) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die in einer vorherigen Aufgabe gezeigte Gleichung

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx) = \sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)$$

3. Geben Sie zwei lineare Gleichungssysteme mit jeweils drei Gleichungen und drei Unbestimmten an, die beide genau den Rang zwei besitzen. Das eine dieser beiden Gleichungssysteme soll lösbar, das andere soll unlösbar sein.

4. Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem, das mehr Unbekannte als Gleichungen enthält; man zeige, daß dann das Gleichungssystem niemals eine eindeutige Lösung besitzt, d. h. es kann nur vorkommen, daß das Gleichungssystem unlösbar ist oder unendlich viele Lösungen besitzt.

5. Finden Sie eine Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 3 & 14 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 9 & 100 & 30 & 45 \\ 77 & 112 & 13 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3552 & -588 & -488 & 77 \\ 1160 & 192 & 159 & -25 \\ 139 & 23 & 19 & -3 \\ 42 & 7 & 6 & -1 \end{pmatrix} \circ X + \begin{pmatrix} 1 & 11 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 100 & 30 & 45 \\ 77 & 112 & 13 & 7 \end{pmatrix}$$

Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

6. Finden Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 9 & 1+t & 10 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{gilt.}$$

7. Berechnen Sie zu den folgenden Matrizen die Determinanten und jeweils im Falle einer von null verschiedenen Determinante die Umkehrmatrix:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 12 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 12 & 18 \\ 5 & 17 & 37 & 69 \\ 1 & 4 & 13 & 45 \end{pmatrix}$$

8. Bestimmen Sie von der 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 36 & -9 \\ -6 & 19 & -3 \\ -18 & 54 & -2 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom, sämtliche Eigenwerte und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc...
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit den Nummern 11215, 090044 und 11208.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1.
$$\begin{aligned}
& \sin\left((n+\tfrac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\tfrac{1}{2})x\right) \\
= \; & \sin\left(nx+\tfrac{1}{2}x\right) - \sin\left(nx-\tfrac{1}{2}x\right) && \text{Additionstheorem des sinus!} \\
= \; & \sin(nx)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos(nx) \\
& - \sin(nx)\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos(nx) && \text{zwei Glieder heben sich weg!} \\
= \; & 2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\cos(nx)
\end{aligned}$$

2. Beweis durch vollständige Induktion:
   $\underline{n=0}$:

$$\text{linke Seite:} \quad \frac{1}{2} + \underbrace{\sum_{j=1}^{0}\cos(jx)}_{\substack{\text{Die Summe ohne Summanden hat den} \\ \text{Wert Null.}}} = \frac{1}{2}+0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{rechte Seite:} \quad \frac{\sin\left((0+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

   $\underline{n-1 \Rightarrow n}$: Zunächst beachte man, daß aufgrund der vorherigen Aufgabe

$$\cos nx = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   gilt. Addiert man beide Seiten dieser Gleichung zu den beiden Seiten der aufgrund der Induktionsvoraussetzung gültigen (für $n-1$) Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\cos(jx) &= \frac{\sin\left(((n-1)+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \cos(jx) + \cos(nx) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \cos(jx) \\
&= \frac{\sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{Der 1. und 3. Summand heben sich weg.} \\
&= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3. Man kann zwei einfache Gleichungssystem angeben, die beide bereits in reduzierter Form vorliegen. Ein lösbares Gleichungssystem mit Rang 2 ist

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \\ 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ein unlösbares Gleichungssystem mit Rang 2 ist

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \\ 0x_3 &= 1 \end{aligned}$$

4. Sei n die Anzahl der Unbekannten, m die Anzahl der Gleichungen und r der Rang des Gleichungssystems. Nach Voraussetzung ist hier $n > m$. Aus der durch das Gaußsche Eliminationsverfahren gewonnenen reduzierten Darstellung des Gleichungssystems folgt $r \leq m$; insgesamt hat man damit $r < n$ bzw. $s = n - r \geq 1$. Nach einem Satz der Vorlesung besitzt das zugehörige homogene Gleichungssystem Basislösungen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s$, die insbesondere von null verschieden sind. Hat das Gleichungssystem nun mindestens eine Lösung $\vec{x}_0$, so folgt, daß die unendlich vielen $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{x}_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls Lösung sind.

5. Zieht man die ganz rechts stehende Matrix von beiden Seiten der Gleichung ab, so erhält man eine Gleichung der Form

$$Y = A \circ X$$

Von der Matrix A läßt sich die Inverse bestimmen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3552 & -588 & -488 & 77 \\ 1160 & 192 & 159 & -25 \\ 139 & 23 & 19 & -3 \\ 42 & 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & -5 \\ 7 & 20 & 2 & 33 \\ -1 & -1 & -16 & -4 \\ 1 & 8 & -40 & -4 \end{pmatrix}$$

Beim Berechnen der Inversen empfiehlt es sich hier, bei der letzten Spalte zu beginnen: man zieht zunächst geeignete Vielfache der letzten Zeile von den vorherigen Zeilen ab, so daß die ersten drei Einträge der letzten Spalte zu Null werden. Als Lösung erhält man dann

$$X = A^{-1} \circ Y = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 1 & -13 \\ 76 & 27 & -7 & 87 \\ -58 & -2 & 1 & -8 \\ -110 & 9 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

Diese Lösung ist die einzige Lösung: Gäbe es eine zweite Lösung $\tilde{X}$, so folgte aus den beiden Gleichungen $Y = A \circ X$ und $Y = A \circ \tilde{X}$ sofort

$$A \circ X = A \circ \tilde{X}$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung von links her mit der Inversen von A, so erhält man $\tilde{X} = X$.

6. Man löst die Gleichung nach t auf, indem man den Entwicklungssatz anwendet, hier die Determinante nach der zweiten Spalte entwickelt und die entstehenden 2×2–Matrix direkt berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 9 & 1+t & 10 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = -0 \cdot \det \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + (1+t) \circ \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = 26 - 2t$$

Die eindeutige Lösung der Gleichung ist somit $t = 13$.

7. **a)** $\det M = -57$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{19} & \frac{-3}{19} & \frac{1}{57} \\ \frac{-8}{19} & \frac{4}{19} & \frac{5}{57} \\ \frac{1}{19} & \frac{9}{19} & \frac{-1}{19} \end{pmatrix}$$

b) $\det M = 1$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 822 & -361 & 55 & -13 \\ -936 & 412 & -63 & 15 \\ 429 & -189 & 29 & -7 \\ -59 & 26 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Das charakteristische Polynom berechnet man am besten mit dem Entwicklungssatz, es lautet

$$p(t) = \det(A - tE) = -t^3 + 6t^2 + 9t - 14$$

Den ersten Eigenvektor findet man unter den Teilern des konstanten Gliedes $+14$ des charakteristischen Polynoms, die restlichen durch Lösen der verbleibenden quadratischen Gleichung. Die drei Eigenwerte sind $\lambda = -2$, $\mu = 7$ und $\nu = 1$. Zugehörige Eigenvektoren erhält man durch Lösen der entstehenden homogenen Gleichungssysteme. Drei Eigenvektoren sind $\vec{u} = (3, 1, 1)^t$, $\vec{v} = (1, 0, -2)^t$ und $\vec{w} = (3, 1, 0)^t$.

1. **a)** Setzt man

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

so rechnet man sofort nach, daß die drei Einheitsvektoren Eigenvektoren zu diesen drei Eigenwerten sind:

$$A \circ \vec{e}_1 \;=\; 2\vec{e}_1 \quad A \circ \vec{e}_2 \;=\; 3\vec{e}_1 \quad A \circ \vec{e}_3 \;=\; 5\vec{e}_1$$

Da A eine 3×3-Matrix ist, kann A nicht mehr als 3 Eigenwerte besitzen.

b) Setze

$$I \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist offenbar $I \neq E$, obwohl I nur den Eigenwert 1 besitzt. Das letztere erkennt man daran, daß das charakteristische Polynom von I

$$\det(I - tE) \;=\; (1-t)^3$$

nur die Nullstelle 1 besitzt.

2. Aufgrund der Angaben gelten für den Übergang vom t-ten zum $t+1$-ten Jahr die Gleichungen

$$\begin{aligned} v_{t+1,1} &= \frac{1}{10} \cdot v_{t,2} + v_{t,3} \\ v_{t+1,2} &= v_{t,1} \\ v_{t+1,3} &= \frac{9}{10} \cdot v_{t,2} \end{aligned}$$

Dieses ergibt die Übergangsmatrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Fahrzeugverteilung $\vec{v}_*$ ist konstant, wenn sie sich von einem Jahr zum nächsten nicht verändert, d. h. falls gilt

$$A \circ \vec{v}_* \;=\; \vec{v}_*$$

Dieses bedeutet, daß eine mögliche konstante Verteilung durch einen Eigenvektor $\vec{v}_*$ zum Eigenwert 1 dargestellt wird. Falls die Matrix A tatsächlich einen solchen Eigenwert besitzt, muß das homogene Gleichungssystem

$$(A - E) \circ \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{10} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & -1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} \;=\; 0$$

eine von Null verschiedene Lösung besitzen. Man prüft dieses nach, indem man die Matrix $A - E$ mit dem Gaußschen Verfahren reduziert; man erhält als reduzierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, daß diese Matrix den Rang 2 bzw. den Corang $1 = 3-2$ und damit eine von Null verschiedene Grundlösung besitzt. Diese Grundlösung und damit ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 1 lautet

$$\vec{u} \;=\; \begin{pmatrix} 10/9 \\ 10/9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als mögliche konstante Verteilungen kommen positive Vielfache von $\vec{u}$ in Frage:

$$\vec{v}_* \;=\; \mu \cdot \vec{u} \quad \text{mit} \quad \mu > 0$$

Unabhängig vom Faktor μ gilt bei einer solchen konstanten Verteilung: je 34.5% der Fahrzeuge sind ein oder zwei Jahre alt, 31.0% der Fahrzeuge sind drei Jahre alt.

Bemerkung: Man kann natürlich auch mit Hilfe des charakteristischen Polynoms der Matrix A nachprüfen, ob diese Matrix den Eigenwert 1 besitzt. Das charakteristische Polynom lautet:

$$p(t) \;=\; -t^3 + 0.1t + 0.9$$

$p(t)$ besitzt nur die (reelle) Nullstelle 1.

3. Lösung: Aufgrund der Information des Spitzels weiß man, daß der Klartextbuchstabe "R" im Schlüsseltext dem Buchstaben "W" entspricht. Ist k der (zunächst noch unbekannte) Schlüssel, so muß aufgrund der Arbeitsweise des Caesar-Verfahrens gelten:

$$\mathrm{R} + k \;=\; \mathrm{W} \mod 26 \qquad \text{bzw.} \qquad 17 + k \;=\; 22 \mod 26$$

Daher ist lautet der Schlüssel $k = 5$ bzw. $k \hat{=} \mathrm{F}$. Damit kann jetzt der Text entschlüsselt werden:

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{INJBJYYJWFZXXNHMYJSXNSISNHMYLZY} \\ - & \mathrm{FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF} \\ \hline \end{array}$$

Man ersetzt hier jeden Buchstaben durch seine Nummer aus $\{0, \ldots, 25\}$:

$$\begin{array}{rl} & 8\,13\;9\;\;1\;\;9\,24\,24\;\;9\,22\;\;5\,25\,23\,23\,13\;\;7\,12\,24\;\;9\,18\,23\,13\,18\;\;8\,18\,13\;\;7\,12\,24\,11\,25\,24 \\ - & 5\;\;5\,5\;\;5\,5\;\;5\;\;5\,5\;\;5\,5\;\;5\,5\;\;5\;\;5\,5\;\;5\,5\;\;5\;\;5\,5\;\;5\;\;5\,5\;\;5\;\;5\,5\;\;5\;\;5\,5\;\;5\;\;5\;\;5\;\;5 \\ \hline & 3\;\;8\;4\,22\;4\,19\,19\;4\,17\;\;0\,20\,18\,18\;\;8\;\;2\;\;7\,19\;\;4\,13\,18\;\;8\,13\;\;3\,13\;\;8\;\;2\;\;7\,19\;\;6\,20\,19 \mod 26 \\ \hat{=} & \mathrm{D\;\;I\,E\,W\,E\;\;T\;\;T\,E\;\;R\,A\;\;U\;\;S\;\;S\;\;I\,C\;\;H\;\;T\,E\;\;N\;\;S\;\;I\;\;N\,D\;\;N\;\;I\,C\;\;H\;\;T\;\;G\;\;U\;\;T} \end{array}$$

4. Lösung:

m	n	Division mit Rest	$a = b'$	$b = a' - qb'$
2431	2601	$2431 = 0 \cdot 2601 + 2431$	-46	43
2601	2431	$2601 = 1 \cdot 2431 + 170$	43	-46
2431	170	$2431 = 14 \cdot 170 + 51$	-3	43
170	51	$170 = 3 \cdot 51 + 17$	1	-3
51	17	$51 = 3 \cdot 17 + 0$	0	1
17	0	$\mathrm{ggT}(2431, 2601) = 17$	1	0

Damit wurde berechnet:

$$17 \;=\; \mathrm{ggT}(2431, 2601) \;=\; -46 \cdot 2431 \,+\, 43 \cdot 2601$$

m	n	Division mit Rest	$a = b'$	$b = a' - qb'$
27047	3363	$27047 = 8 \cdot 3363 + 143$	-682	5485
3363	143	$3363 = 23 \cdot 143 + 74$	29	-682
143	74	$143 = 1 \cdot 74 + 69$	-15	29
74	69	$74 = 1 \cdot 69 + 5$	14	-15
69	5	$69 = 13 \cdot 5 + 4$	-1	14
5	4	$5 = 1 \cdot 4 + 1$	1	-1
4	1	$4 = 4 \cdot 1 + 0$	0	1
1	0	$\mathrm{ggT}(27047, 3363) = 1$	1	0

Damit wurde berechnet:

$$1 \;=\; \mathrm{ggT}(27047, 3363) \;=\; -682 \cdot 27047 \,+\, 5485 \cdot 3363$$

5. Lösung: Da zwei gerade Zahlen zumindest den gemeinsamen Teiler 2 besitzen, können sie nicht teilerfremd sein.

6. Lösung: Es gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten; zwei sollen hier erläutert werden:

   (a) Multipliziert man die Potenz $(u+1)^k$ aus[1], so erhält man eine Summe mit zahlreichen Summanden von denen genau einer den Wert 1 hat und alle übrigen durch u teilbar sind. Faßt man die durch u teilbaren zusammen und klammert u aus, so erhält man mit einem $a \in \mathbb{Z}$ für die Potenz $(u+1)^k$ die Darstellung

   $$(u+1)^k \;=\; a \cdot u \,+\, 1 \tag{1}$$

   Das liefert wiederum

   $$(u+1)^k \,-\, a \cdot u \;=\; (a \cdot u \,+\, 1) \,-\, a \cdot u \;=\; 1$$

[1] Man könnte den Binomischen Lehrsatz verwenden.

Also:

$$(u+1)^k \; - \; a \cdot u \; = \; 1$$

Gäbe es nun einen gemeinsamen Teiler $d > 1$ von u und $(u+1)^k$, so wäre das auch ein Teiler von 1; und das kann nicht sein. Folglich müssen u und $(u+1)^k$ teilerfremd sein.

(b) Man führt eine vollständige Induktion über den Exponenten k durch.
Für $k = 1$ sind u und $(u+1)^1$ wegen

$$(u+1) \; - \; u \; = \; 1$$

teilerfremd: Ein gemeinsamer Teiler $d > 1$ müßt auch 1 teilen, was nicht möglich ist.
Für $k > 0$ werde angenommen, daß u und $(u+1)^{k-1}$ teilerfremd ist. Da im Induktionsanfang bereits gezeigt wurde, daß u und $u+1$ teilerfremd sind, folgt mit Hilfe eines Hilfssatzes der Vorlesung, daß auch

$$u \qquad \text{und} \qquad (u+1)^k \; = \; (u+1)^{k-1} \cdot (u+1)$$

teilerfremd sind.

7. Lösung:

$$\begin{aligned} 157 &= 31 \cdot 5 + 2 \\ 31 &= 6 \cdot 5 + 1 \\ 6 &= 1 \cdot 5 + 1 \\ 1 &= 0 \cdot 5 + 1 \\ \Rightarrow\; 157 &= (1112)_5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 785 &= 157 \cdot 5 + 0 \\ 157 &= 31 \cdot 5 + 2 \\ 31 &= 6 \cdot 5 + 1 \\ 6 &= 1 \cdot 5 + 1 \\ 1 &= 0 \cdot 5 + 1 \\ \Rightarrow\; 785 &= (11120)_5 \end{aligned}$$

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. **a)** Finden Sie ein Beispiel für eine 3×3-Matrix A, die die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 5$ besitzt, und geben Sie zu jedem dieser Eigenwerte einen Eigenvektor an. Warum besitzt A keine weiteren Eigenwerte?

   b) Finden Sie ein Beispiel für eine 3×3-Matrix B, die nur den Eigenwert 1 besitzt und die nicht gleich der Einheitsmatrix ist.

2. In einer Überflußgesellschaft gelte:

   - Jedes Kraftfahrzeug ist ein, zwei oder drei Jahre alt.
   - 10% der zweijährigen sowie sämtliche dreijährigen Autos werden durch Neuwagen ersetzt.
   - Die Gesamtzahl der Fahrzeuge ändert sich nicht.

   Der Vektor

   $$\vec{v}_t \;=\; \begin{pmatrix} v_{1,t} \\ v_{2,t} \\ v_{3,t} \end{pmatrix}$$

   bezeichne die Altersverteilung der Autos im Jahre t.

   Zu der "Entwicklungsgleichung"

   $$\vec{v}_{t+1} \;=\; A \circ \vec{v}_t$$

   bestimme man die Übergangsmatrix A. Weiterhin finde man eine Altersverteilung, $\vec{v}_*$, die zeitlich konstant ist.

3. Aufgabe: Mit dem Caesar-Verfahren wurde ein ausschließlich aus Großbuchstaben des lateinischen Alphabets bestehender Text verschlüsselt; der Schlüsseltext lautet:

   $$\text{INJBJYYJWFZXXNHMYJSXNSISNHMYLZY} \qquad (1)$$

   Ein Spitzel hat mitgeteilt, daß bei Verwendung desselben Verfahrens und desselben Schlüssels der Klartext "REGEN" den Schlüsseltext "WJLJS" besitzt. Verwenden Sie dieses, um den Code zu brechen und den Klartext zu (1) herauszufinden.

4. Aufgabe: Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

   $$\text{ggT}(2431, 2601), \qquad \text{ggT}(27047, 3363)$$

   Finden Sie weiterhin mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus ganze Zahlen $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ mit

   $$\begin{aligned} a_1 \cdot 2431 \;+\; b_1 \cdot 2601 \;&=\; \text{ggT}(2431, 2601) \\ a_2 \cdot 27047 \;+\; b_2 \cdot 3363 \;&=\; \text{ggT}(27047, 3363) \end{aligned}$$

5. Aufgabe: Begründen Sie, daß zwei gerade ganze Zahlen niemals teilerfremd sind.

6. Aufgabe: Sei $u \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die beiden Zahlen u und $(u+1)^k$ teilerfremd sind.

7. Aufgabe: Stelle Sie die Zahlen 157 und 785 im Fünferstellenwertsystem dar. Verwenden Sie dabei die Teilung mit Rest.

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc...
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgabe mit der Nummer 090314.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.

1. **a)** Man prüft nach, $\vec{u}$ ob Eigenwert von B ist, indem man einfach $B \circ \vec{u}$ ausrechnet und dabei mehrere Male verwendet, daß $A \circ \vec{u} = \lambda\vec{u}$ ist:

$$\begin{aligned} B \circ \vec{u} \;=\; (A^2 + 3A + 5E) \circ \vec{u} \;&=\; (A^2) \circ \vec{u} + 3A \circ \vec{u} + 5E \circ \vec{u} \\ &=\; A \circ A \circ \vec{u} + 3\lambda\vec{u} + 5\vec{u} \\ &=\; A \circ \lambda\vec{u} + 3\lambda\vec{u} + 5\vec{u} \\ &=\; \lambda A \circ \vec{u} + 3\lambda\vec{u} + 5\vec{u} \\ &=\; \lambda^2\vec{u} + 3\lambda\vec{u} + 5\vec{u} \qquad \text{jetzt } \vec{u} \text{ ausklammern!} \\ &=\; (\lambda^2 + 3\lambda + 5)\vec{u} \end{aligned}$$

   Damit ist gezeigt: $\vec{u}$ ist Eigenvektor von B zum Eigenwert $\mu = \lambda^2 + 3\lambda + 5$.

   b) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\det(A - tE) \;=\; t^2 - 9$$

   Die beiden Nullstellen hiervon und damit zwei Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -3$. Um einen Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$ zu finden, ist das homogene Gleichungssystem

$$(A - 3E) \circ \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} -33 - 3 & 12 \\ -90 & 33 - 3 \end{pmatrix} \circ \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} -36 & 12 \\ -90 & 30 \end{pmatrix} \circ \vec{x} \;=\; 0$$

   zu lösen. Man erhält als eine Lösung $\vec{u} = (1, 3)^t$.

   Nach dem ersten Teil der Aufgabe ist $\vec{u}$ auch Eigenvektor zu B und zwar zum Eigenwert

$$\mu \;=\; \lambda_1^2 + 3\lambda_1 + 5 \;=\; 3^2 + 3 \cdot 3 + 5 \;=\; 23$$

2. Lösung: Zunächst ergibt sich, daß 3 ein gemeinsamer Teiler von m und $n_1 \cdot n_2$ ist, denn nach Aufgabenstellung ist 3 Teiler von m sowie von n_2 und damit auch von $n_1 \cdot n_2$. Zu zeigen bleibt, daß 3 sogar der *größte* gemeinsame Teiler von m und $n_1 \cdot n_2$ ist.

   Mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus findet man dazu Darstellungen

$$\begin{aligned} a_1 \cdot m \;+\; b_1 \cdot n_1 \;&=\; 1 \\ a_2 \cdot m \;+\; b_2 \cdot n_2 \;&=\; 3 \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$$

   Multipliziert man diese beiden Gleichungen miteinander, faßt dabei die durch m teilbaren Summanden zusammen und klammert bei diesen m aus, so erhält man

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot m \;+\; a_1 \cdot b_2 \cdot n_2 \;+\; a_2 \cdot b_1 \cdot n_1) \cdot m \;+\; b_1 \cdot b_2 \cdot (n_1 \cdot n_2) \;=\; 3$$

   Jeder gemeinsame Teiler $d \in \mathbb{N}$ von m und $n_1 \cdot n_2$ ist daher auch ein Teiler von 3. Dafür gibt es nur die Möglichkeit $d = 1$ und $d = 3$. Da 3 in der Tat ein gemeinsamer Teiler von m und $n_1 \cdot n_2$ ist, ist 3 sogar deren größter gemeinsamer Teiler.

3. Lösung: Der Euklidische Algorithmus zeigt, daß die beiden Zahlen 1990 und 479 teilerfremd sind. Der Chinesische Restsatz kann daher (mit den Bezeichnungen des Skriptes) auf die Zahlen $m = 1990$, $n = 479$ sowie $u = r_1 = 235$, $v = r_2 = 333$ angewandt werden. Nimmt man Teilungen mit Rest von u durch m bzw. von v durch n vor, so liefern diese offentlichtlich: $235 = 0 \cdot 1990 + 235$ sowie $333 = 0 \cdot 479 + 333$. Aufgrund des Chinesischen Restsatzes erhält man nun ein $w \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} w &= q_1 \cdot 1990 + 235 \\ w &= q_2 \cdot 479 + 333 \end{aligned} \tag{1}$$

Zu dessen Berechnung wendet man zunächst den erweiterten Euklidischen Algorithmus an; dieser liefert:

$$1 = 123 \cdot 1990 - 511 \cdot 479$$

Wie in der Vorlesung bzw. im Skript beim Beweis des Chinesischen Restsatzes gezeigt, erhält man damit ein $w \in \mathbb{Z}$ mit (1) durch

$$w = 333 \cdot 123 \cdot 1990 - 235 \cdot 511 \cdot 479 = 23987695$$

Ändert man w um ein Vielfaches von $1990 \cdot 479$ ab:

$$w + k \cdot (1990 \cdot 479)$$

so erhält man weitere Zahlen, die (1) erfüllen. Insbesondere sind diese für hinreichend große k sicher positiv. Die kleinste positive Zahl w_0 mit (1) liefert die Teilung mit Rest von w durch $1990 \cdot 479 = 953210$:

$$w = q \cdot (1990 \cdot 479) + 157445 \qquad \Rightarrow \qquad w_0 = 157445$$

4. Lösung: Der erweiterte euklidische Algorithmus liefert $u, v \in \mathbb{Z}$ mit

$$d = \mathrm{ggT}(a, b) = u \cdot a + v \cdot b$$

Unter Verwendung von $a_1 = a/d$ und $b_1 = b/d$ bzw. $a = d \cdot a_1$ und $b = d \cdot b_1$ wird das zu

$$d = u \cdot d \cdot a_1 + v \cdot b = d \cdot b_1$$

Teilung beider Seiten durch d liefert

$$1 = u \cdot a_1 + v \cdot b_1 \tag{2}$$

Ist jetzt $c \in \mathbb{N}$ ein gemeinsamer Teiler von a_1 und b_1, so ist c wegen (2) auch ein Teiler von 1. Dann bleibt aber nur die Möglichkeit $c = 1$. Somit muß $\mathrm{ggT}(a_1, b_1) = 1$ sein.

5. Lösung: Aus der Definition der Gruppe ergibt sich sofort, daß sie die die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

als neutrales Element enthält. Das Assoziativgesetz ist bekanntlich für die Matrizenmultiplikation gültig. Damit ist es insbesondere auch für die hier betrachteten Matrizen gültig. Die Multiplikation zweier solcher Matrizen liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 + y_1 \\ 0 & 1 & x_2 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Anhand von (4) erkennt man:

- Die Produkt zweier solcher Matrizen ist wieder eine Matrix dieser Gestalt. Die Gruppe ist damit bezüglich der Matrixmultiplikation "$\circ$" abgeschlossen.
- Zur Matrix aus $\mathcal{G}$ mit den Werten x_1, x_2 in der letzten Spalte erhält man die inverse Matrix, indem man die Werte x_1, x_2 durch $-x_1$ und $-x_2$ ersetzt. Die Inverse liegt damit ebenfalls in $\mathcal{G}$.
- Da die Multiplikation zweier Matrizen der Addition der Elemente x_1, x_2 bzw. y_1, y_2 entspricht und diese Addition von der Reihenfolge unabhängig ist, hängt auch die Multiplikation nicht von der Reihenfolge ab und ist damit kommutativ.

6. Lösung:

   (a) Sei $\mathcal{G}$ eine beliebige Gruppe mit 7 Elementen. Ist $a \in \mathcal{G}$, so gilt nach Vorlesung bzw. Skript
   $$\operatorname{ord}(a) \mid \operatorname{ord}(\mathcal{G}) \;=\; 7$$
   Da 7 eine Primzahl ist, kommen für $\operatorname{ord}(a)$ nur die Werte 1 und 7 in Frage.

   (b) Sei wieder $\mathcal{G}$ eine beliebige Gruppe mit 7 Elementen, und sei $a \in \mathcal{G} \setminus \{1\}$. Nach Teil (a) der Aufgabe ist dann $\operatorname{ord}(a) = 7$. Dann sind aber die Potenzen
   $$1 = a^0,\, a,\, a^2,\, a^3,\, a^4,\, a^5,\, a^6 \tag{5}$$
   alle verschieden. Die sieben Elemente (5) stellen somit die gesamte Gruppe $\mathcal{G}$ dar. Da es sich hierbei um Potenzen von a handelt, erzeugen diese Potenzen die Gruppe $\mathcal{G}$, die damit zyklisch mit erzeugendem Element a ist.

   Bemerkung: Wie man erkennen konnte, kann hier jedes Element $a \in \mathcal{G}$, $a \neq 1$ als erzeugendes Element für $\mathcal{G}$ genommen werden. Dieser Sachverhalt trifft für alle Gruppen zu, deren Ordnung eine Primzahl ist.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. **a)** Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathrm{M}^{n,n}$ mit dem Eigenvektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Zeigen Sie: Dann ist auch $\vec{u}$ Eigenvektor der Matrix

$$B \;=\; A^2 + 3A + 5E$$

Wie lautet der zu B und $\vec{u}$ gehörige Eigenwert?

b) Berechnen Sie zu den Matrizen

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -33 & 12 \\ -90 & 33 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B \;=\; A^2 + 3A + 5E$$

jeweils einen Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor.

2. Aufgabe: Gegeben seien drei natürliche Zahlen $m, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ggT}(m, n_1) \;=\; 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{ggT}(m, n_2) \;=\; 3$$

Zeigen Sie, dann ist auch

$$\mathrm{ggT}(m, (n_1 \cdot n_2)) \;=\; 3$$

Hinweis: Sie können sich an dem Hilfssatz im Skript Seite 159 und an dessen Begründung orientieren.

3. Aufgabe: Warum läßt sich eine Zahl $w \in \mathbb{N}$ finden, für die die Teilungen mit Rest durch 1990 und 479 die Reste $r_1 = 235$ und $r_2 = 333$ liefern:

$$\begin{aligned} w &= q_1 \cdot 1990 + 235 \\ w &= q_2 \cdot 479 + 333 \end{aligned} \qquad ? \qquad (1)$$

Finden Sie ein solches $w \in \mathbb{N}$. Warum gibt es für w mehrere Möglichkeiten? Bestimmen Sie anschließend das minimale $w_0 \in \mathbb{N}$, das (1) erfüllt.

4. Aufgabe: Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, und sei

$$d \;=\; \mathrm{ggT}(a, b)$$

Seien damit $a_1 = a/d$ und $b_1 = b/d$. Was ist dann $\mathrm{ggT}(a_1, b_1)$?

5. Aufgabe: Zeigen Sie, daß die Menge der folgenden 3×3-Matrizen zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine kommutative Gruppe bildet:

$$\mathcal{G} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \qquad (2)$$

Ist diese Gruppe endlich?

6. Aufgabe:

   (a) Sei $a \in \mathcal{G}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gruppe mit sieben Elementen ist. Welche Werte können bei der Ordnung von a, d. h. bei $\mathrm{ord}(a)$ vorkommen?

   (b) Zeigen Sie, daß eine Gruppe mit sieben Elementen stets eine zyklische Gruppe ist.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Aufgabe: Die Information über einen geheimen Wert $m \in \mathbb{N}$ wird unter drei Personen so aufgeteilt, daß je zwei von ihnen zusammen den Wert m ermitteln können. Dabei wird das in der Vorlesung erläuterte Verfahren angewandt. Die Informationen an die drei Personen lauten

$$(1243, 847) \qquad (1197, 939) \qquad (2183, 1150) \tag{1}$$

   Wie lautet jeweils der geheime Wert m. Zeigen Sie, wie jeweils zwei Personen gemeinsam diesen Wert berechnen.

2. Aufgabe: Für $a, b \in \mathbb{N}$ setzt man

$$\mathrm{kgV}(a, b) \;=\; \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a, b)} \tag{2}$$

   Der Wert $\mathrm{kgV}(a, b)$ aus (2) heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b. Um nachzuweisen, daß diese Bezeichnung gerechtfertigt ist, soll in dieser Aufgabe gezeigt werden, daß für $m = \mathrm{kgV}(a, b)$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

$$a \mid n, \;\; b \mid n \quad \Rightarrow \quad m \mid n \tag{3}$$

   (a) Zeigen Sie (3) zunächst für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.
   Hinweis: Verwenden Sie einen geeigneten Hilfssatz aus der Vorlesung (siehe Skript).

   (b) Zeigen Sie anschließend (3) für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$.

3. Aufgabe: Zeigen Sie, daß die Menge der folgenden 2×2-Matrizen zusammen mit der üblichen komponentenweisen Addition und der üblichen Matrizenmultiplikation einen kommutativen Ring mit Eins bildet:

$$\mathcal{R} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \tag{4}$$

   Zeigen Sie anhand von Beispielen, daß dieser Ring Nullteiler besitzt.

4. Aufgabe: Im Folgenden werden zwei Relationen Rel_1 und Rel_2 angegeben. Die eine ist über den $n \times n$-Matrizen für ein $n \in \mathbb{N}$ und die andere über $\mathbb{R}[x]$, der Menge aller reellen Polynome, definiert. Prüfen Sie bei beiden Relationen nach, ob es sich um Äquivalenzrelationen handelt. Falls eine der Relationen keine Äquivalenzrelation sein sollte, so geben Sie an, welche der drei Bedingungen für Äquivalenzrelationen verletzt ist.

   (a) A, B $n \times n$-Matrizen mit: $A \sim B \;\Leftrightarrow\; \det(A) = \det(B)$

   (b) $\mathrm{p}(x)$, $\mathrm{q}(x)$ Polynome mit $\mathrm{p}(x) \sim \mathrm{q}(x) \;\Leftrightarrow\;$ $\mathrm{p}(x)$ und $\mathrm{q}(x)$ besitzen entweder beide keine Nullstelle oder besitzen mindestens eine gemeinsame Nullstelle.

5. Aufgabe: Geben Sie $\varphi(42)$ sowie alle Elemente von $\mathbb{Z}_{42}^*$ an. Stellen Sie für $\mathbb{Z}_{42}^*$ eine Multiplikationstabelle auf und geben Sie für jede invertierbare Restklasse $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{42}^*$ deren Inverse $\overline{a}^{-1}$ an. Schreiben Sie für die Aufstellung der Multiplikationstabelle ein kleines Programm in der Programmiersprache Ihrer Wahl.

6. Aufgabe: Begründen Sie, daß in dem Restklassenring $\mathbb{Z}_{22}$ jede Gleichung der Form

$$\overline{0} \;=\; \overline{9} \cdot x + \overline{a} \tag{5}$$

mit $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{22}$ lösbar ist. Warum sind die Lösungen jeweils eindeutig? Geben Sie für jedes $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{22}$ die Lösung von (5) an.

Begründen Sie, daß die Gleichung

$$\overline{0} \;=\; \overline{4} \cdot x + \overline{3} \tag{6}$$

nicht lösbar ist und daß hingegen die Gleichung

$$\overline{0} \;=\; \overline{4} \cdot x + \overline{6} \tag{7}$$

mehrdeutig lösbar ist.

1. Lösung: Man berechnet jeweils mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus bzw. mit dem chinesischen Restsatz sowie mit der Teilung mit Rest:

$$\begin{aligned} -26 \cdot 1243 + 27 \cdot 1197 &= 1 \\ 939 \cdot (-26) \cdot 1243 + 847 \cdot 27 \cdot 1197 &= -2972409 \\ -2972409 &= -2 \cdot (1243 \cdot 1197) + \mathbf{3333} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -634 \cdot 1243 + 361 \cdot 2183 &= 1 \\ 1150 \cdot (-634) \cdot 1243 + 847 \cdot 361 \cdot 2183 &= -238781939 \\ -238781939 &= -88 \cdot (1243 \cdot 2183) + \mathbf{3333} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 538 \cdot 1197 - 295 \cdot 2183 &= 1 \\ 1150 \cdot 538 \cdot 1197 - 939 \cdot 295 \cdot 2183 &= 135881985 \\ 135881985 &= 52 \cdot (1197 \cdot 2183) + \mathbf{3333} \end{aligned}$$

Der geheime Wert ist 3333.

2. Lösung:

   (a) Für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $u \cdot a + v \cdot b = 1$. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ mit $a|n$ und $b|n$, so ist zu zeigen, daß auch $(a \cdot b)|n$ gilt[1]. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung $u \cdot a + v \cdot b = 1$ mit n:

   $$u \cdot a \cdot n + v \cdot b \cdot n = n$$

   so erkennt man, daß beide Summanden der linken Seite durch $a \cdot b$ teilbar sind. Folglich ist auch n durch $a \cdot b$ teilbar. Damit ist die Behauptung aus der Aufgabe für teilerfremde a, b gezeigt.

   (b) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig, $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ sowie $m = \mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b/d$. Zu zeigen ist, daß für $n \in \mathbb{N}$ mit $a|n$ und $b|n$ auch $m|n$ gilt. Als Teiler von a (und b) teilt d auch n. Es gibt somit $a_1, b_1, n_1 \in \mathbb{N}$ mit

   $$a = d \cdot a_1, \quad b = d \cdot b_1, \quad \text{und} \quad n = d \cdot n_1$$

   Es folgt dann sofort

   $$a_1 \mid n_1 \quad \text{und} \quad b_1 \mid n_1 \tag{1}$$

   Wie in einer früheren Aufgabe gezeigt wurde, ist $\mathrm{ggT}(a_1, b_1) = 1$. Wie im ersten Teil dieser Aufgabe gezeigt wurde, gilt dann wegen (1)

   $$(a_1 \cdot b_1) \mid n_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n_1}{a_1 \cdot b_1} \in \mathbb{N} \tag{2}$$

   Erweitert man den auf der rechten Seite von (2) stehenden (ganzzahlige) Bruch mit d^2, so erhält man weiter

[1] Dieses wurde im Skript bereits gezeigt; der Beweis wird aber hier noch einmal wiederholt

$$\frac{d^2 \cdot n_1}{d^2 \cdot a_1 \cdot b_1} \;=\; \frac{(d \cdot n_1) \cdot d}{(d \cdot a_1) \cdot (d \cdot b_1)} \;=\; \frac{n \cdot d}{a \cdot b} \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Der letzte (ganzzahlige) Bruch auf der rechten Seite von (3) läßt sich weiter umformen, damit erhält man

$$\frac{n \cdot d}{a \cdot b} \;=\; \frac{n}{(a \cdot b)/d} \;=\; \frac{n}{m} \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad m \mid n \tag{4}$$

Mit (4) ist die Behauptung gezeigt.

3. Lösung: Aus der Definition von $\mathcal{R}$ folgt sofort, daß die Nullmatrix und die Einheitsmatrix enthalten sind. Assoziativgesetz und Distributivgesetz sind erfüllt, da sie allgemein für Matrizen gelten. Dieses gilt auch für das Kommutativgesetz der Addition. Weiter folgt sofort aus der Definition von $\mathcal{R}$, daß mit einer Matrix auch deren Negative enthalten ist.

   Addition und Multiplikation zweier solcher Matrizen liefern:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ 0 & a_1 \cdot a_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

   Man erkennt hieran, daß beide Verknüpfungen wieder Matrizen in $\mathcal{R}$ liefern, womit die Abgeschlossenheit bezüglich der Addition und der Multiplikation gezeigt sind. Anhand von (6) erkennt man, daß die Multiplikation für zwei Matrizen der betreffenden Gestalt kommutativ ist.

   Insgesamt folgt damit, daß $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring mit Eins ist, der allerdings Nullteiler besitzt, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 0 & 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Lösung: Diese erste Relation ist eine Äquivalenzrelation. Die zweite Relation ist *keine* Äquivalenzrelation, denn die Transitivität ist nicht gegeben, wie das folgenden Beispiel zeigt:

$$\mathrm{p}_1(x) = x \qquad \mathrm{p}_2(x) = x^2 - x \qquad \mathrm{p}_3(x) = x - 1$$

   Hier ist $\mathrm{p}_1[x] \sim \mathrm{p}_2[x]$, da sie die Nullstelle $x_1 = 0$ gemeinsam besitzen. Ebenso ist $\mathrm{p}_2[x] \sim \mathrm{p}_2[x]$, da sie die Nullstelle $x_2 = 1$ gemeinsam besitzen. Aber es ist $\mathrm{p}_1[x] \not\sim \mathrm{p}_3[x]$, da sie keine gemeinsame Nullstelle besitzen.

5. Lösung: Man berechnet

$$\varphi(42) \;=\; 12$$

Die Multiplikationstabelle von $\mathbb{Z}_{42}^*$ lautet:

$*$	1	5	11	13	17	19	23	25	29	31	37	41
1	1	5	11	13	17	19	23	25	29	31	37	41
5	5	25	13	23	1	11	31	41	19	29	17	37
11	11	13	37	17	19	41	1	23	25	5	29	31
13	13	23	17	1	11	37	5	31	41	25	19	29
17	17	1	19	11	37	29	13	5	31	23	41	25
19	19	11	41	37	29	25	17	13	5	1	31	23
23	23	31	1	5	13	17	25	29	37	41	11	19
25	25	41	23	31	5	13	29	37	11	19	1	17
29	29	19	25	41	31	5	37	11	1	17	23	13
31	31	29	5	25	23	1	41	19	17	37	13	11
37	37	17	29	19	41	31	11	1	23	13	25	5
41	41	37	31	29	25	23	19	17	13	11	5	1

Die Inversen können, wie in der Vorlesung beschrieben, mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus berechnet werden. Steht wie hier die Multiplikationstabelle zur Verfügung, so sucht man in der zur Restklasse $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{42}^*$ gehörigen Zeile die $\overline{1}$; der dazu gehörige zweite Faktor ist die Inverse $\overline{a}^{-1}$. Man erhält hier:

$\overline{a}$	1	5	11	13	17	19	23	25	29	31	37	41
$\overline{a}^{-1}$	1	17	23	13	5	31	11	37	29	19	25	41

Die Multiplikationstabelle und $\varphi(42)$ können mit dem folgenden C-Programm berechnet werden:

```
#include <stdio.h>

unsigned long int ggt(unsigned long int a, unsigned long int b){
  while(b>0) {unsigned long int r=a%b; a=b; b=r;}
  return a;
}

int main(){
  unsigned long int n, a, b, phi=0;
  printf("Eine natrliche Zahl >"); scanf("%lu",&n);
  for(a=1;a<n;a++)
    if(ggt(a,n)==1) {
      phi++;
      for(b=1;b<n;b++)
        if(ggt(b,n)==1){
          printf("%lu * %lu =  %lu \n",a,b,(a*b)%n);
        }
      }
  printf("\nphi=%3lu\n\n",phi);
  return 0;
}
```

6. Lösung: Die in $\mathbb{Z}_{22}$ gegebene Gleichung

$$\overline{0} \;=\; \overline{9} \cdot x + \overline{a} \tag{7}$$

ist sicher lösbar, da die Restklasse $\overline{9}$, wie man anhand von $\mathrm{ggT}(9,22) = 1$ erkennt, invertierbar ist. Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus oder durch Probieren erhält man $\overline{9}^{-1} = \overline{5}$.

Die Lösung der Gleichung (7) berechnet man auf die gewohnte Weise: Man subtrahiert von beiden Seiten $\overline{a}$ und multipliziert anschließend mit $\overline{5} = \overline{9}^{-1}$:

$$x \;=\; -\overline{9}^{-1} \cdot \overline{a} \;=\; -\overline{5} \cdot \overline{a} \tag{8}$$

Die so berechnete Lösung ist eindeutig. Nimmt man nämlich an, es gebe zwei Lösungen

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \overline{9} \cdot x_1 + \overline{a} \\ \overline{0} &= \overline{9} \cdot x_2 + \overline{a} \end{aligned} \tag{9}$$

so liefern die Subtraktion beider Gleichungen (9) und die anschließende Multiplikation mit $\overline{5} = \overline{9}^{-1}$

$$\begin{aligned} \overline{5} \cdot \overline{0} &= \overline{5} \cdot \overline{9} \cdot (x_1 - x_2) \\ \Rightarrow \qquad \overline{0} &= x_1 - x_2 \\ \Rightarrow \qquad x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung (7) für alle möglichen $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{22}$ erhält man aus (8):

$\overline{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	17	12	7	2	19	14	9	4	21	16
$\overline{a}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x	11	6	1	18	13	8	3	20	15	10	5

Die Gleichung

$$\overline{0} \;=\; \overline{4} \cdot x + \overline{3} \tag{10}$$

ist *nicht* lösbar. Angenommen, es gäbe eine Lösung $x = \overline{u} \in \mathbb{Z}_{22}$, so wäre wegen $\overline{3}^{-1} = \overline{15}$ und wegen

$$\begin{aligned} \overline{3} &= -\overline{4} \cdot \overline{b} \;=\; -\overline{b} \cdot \overline{4} \\ \Rightarrow \quad \overline{1} &= (-\overline{15} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{4} \end{aligned}$$

die Restklasse $\overline{4}$ invertierbar, was aber wegen $\mathrm{ggT}(4,22) = 2$ nicht sein kann.

Die Gleichung

$$\overline{0} \;=\; \overline{4} \cdot x + \overline{6} \tag{11}$$

ist *mehrdeutig* lösbar ist. Zwei verschiedene Lösungen sind

$$x_1 \;=\; \overline{4} \quad \text{und} \quad x_2 \;=\; \overline{15}$$

Man beachte, daß die mehrdeutige Lösbarkeit für (9) nur deshalb möglich ist, weil $\overline{4} \in \mathbb{Z}_{22}$ ein Nullteiler ist.

1. Lösung: Person A und B kommen zusammen, wenden den Chinesischen Restsatz an und berechnen damit:

$$\begin{aligned} 15 \cdot 29 - 14 \cdot 31 &= 1 && \text{(erweiterter euklidischer Algorithmus)} \\ 4 \cdot 15 \cdot 29 - 7 \cdot 14 \cdot 31 &= -1298 && \text{(chinesischer Restsatz)} \\ -2 \cdot 29 \cdot 31 + 500 &= -1298 && \text{(Teilung mit Rest)} \end{aligned}$$

In der letzten Zeile erscheint als Divisionsrest der geheime Wert 500. Person A und C berechnen zusammen:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 29 - 5 \cdot 23 &= 1 && \text{(erweiterter euklidischer Algorithmus)} \\ 17 \cdot 4 \cdot 29 - 7 \cdot 5 \cdot 23 &= 1167 && \text{(chinesischer Restsatz)} \\ 1 \cdot 29 \cdot 23 + 500 &= 1167 && \text{(Teilung mit Rest)} \end{aligned}$$

Auch hier erscheint in der letzten Zeile erscheint wieder der geheime Wert 500. Person B und C berechnen zusammen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 31 - 4 \cdot 23 &= 1 && \text{(erweiterter euklidischer Algorithmus)} \\ 17 \cdot 3 \cdot 31 - 4 \cdot 4 \cdot 23 &= 1213 && \text{(chinesischer Restsatz)} \\ 1 \cdot 31 \cdot 23 + 500 &= 1213 && \text{(Teilung mit Rest)} \end{aligned}$$

Auch hier erkennt man wieder den geheimen Wert 500.

2. Lösung:

   (a) Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus oder – wie es in diesem Fall schnell möglich ist – durch Probieren erhält man

$$(-19) \cdot 5 + 1 \cdot 96 = 1 \tag{1}$$

   Nach Vorlesung erhält man damit die Lösung durch

$$x = \overline{30}^{-19} = \overline{30}^{97-1-19} = \overline{30}^{77} \tag{2}$$

   In (2) wurde der Satz von Euler verwendet. Zur Berechnung der Potenz $\overline{30}^{77}$ verwendet man ein geeignetes Rechnerprogramm[1], oder man implementiert das im Skript beschriebene Verfahren zum schnellen Potenzieren, wobei man alle Zwischenergebnisse sofort durch 97 teilen und durch ihren Divisionsrest ersetzen sollte. Eine Implementation in C ist:

[1] z. B. **bc**, den unter Linux und Unix verfügbaren *basic calculator*

```
unsigned long int pot(unsigned long int x,
                      unsigned long int e,
                      unsigned long int n){
  if(e==0) return 1;
  unsigned long int q=e/2, r=e%2;
  unsigned long int y=pot(x,q,n);
  y=(y*y)%n;
  if(r==1) y=(y*x)%n;
  return y;
}
```

Als Ergebnis erhält man $x = \overline{77}$

(b) Die Lösung der Gleichung

$$x^5 = \overline{30} \tag{3}$$

ist eindeutig bestimmt. Um dieses zu zeigen, nimmt man an, es gebe zwei Lösungen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{97}^*$:

$$\begin{aligned} x_1^5 &= \overline{30} \\ x_2^5 &= \overline{30} \end{aligned} \tag{4}$$

und zeigt, daß $x_1 = x_2$ ist. Dazu teilt man beide Gleichungen in (4) durcheinander:

$$(x_1 \cdot x_2^{-1})^5 = \overline{1}$$

Mit $y = x_1 \cdot x_2^{-1}$ wird dieses zu

$$y^5 = \overline{1} \tag{5}$$

Nach Vorlesung gilt daher für die Ordnung von y

$$\mathrm{ord}(y) \mid 5 \tag{6}$$

Da y ein Element der Gruppen $\mathbb{Z}_{97}^*$ ist, ist nach Vorlesung die Ordnung von y außerdem ein Teiler der Gruppenordnung:

$$\mathrm{ord}(y) \mid \#\mathbb{Z}_{97}^* = 96 \tag{7}$$

(6) und (7) ergeben zusammen

$$\mathrm{ord}(y) \mid \mathrm{ggT}(96, 5) = 1 \tag{8}$$

Damit bleibt nur die Möglichkeit $\mathrm{ord}(y) = 1$. Das heißt wiederum

$$\begin{aligned} & y = y^1 = \overline{1} \\ \Rightarrow \quad & x_1 \cdot x_2^{-1} = y = \overline{1} \\ \Rightarrow \quad & x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Damit wurde $x_1 = x_2$ gezeigt.

3. Lösung:

(a) Zum Lösen des lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} \overline{12}\cdot x_1 & + & \overline{15}\cdot x_2 & + & \overline{4}\cdot x_3 & = & \overline{21} \\ \overline{10}\cdot x_1 & + & \overline{3}\cdot x_2 & + & \overline{20}\cdot x_3 & = & \overline{2} \\ \overline{9}\cdot x_1 & + & \overline{13}\cdot x_2 & + & \overline{21}\cdot x_3 & = & \overline{3} \end{array} \tag{9}$$

über dem Restklassenkörper $\mathbb{Z}_{23}$ mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens beginnt man wie üblich mit der Normierung der ersten Zeile. Dazu teilt man hier die erste Zeile durch $\overline{12}$, d. h. man man multipliziert die erste Zeile mit dem inversen Koeffizienten $\overline{12}^{-1}$. Man sieht hier sofort bzw. errechnet mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus $\overline{12}^{-1} = \overline{2}$. Damit liefert die Normierung der ersten Zeile:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \overline{1}\cdot x_1 & + & \overline{7}\cdot x_2 & + & \overline{8}\cdot x_3 & = & \overline{19} \\ \overline{10}\cdot x_1 & + & \overline{3}\cdot x_2 & + & \overline{20}\cdot x_3 & = & \overline{2} \\ \overline{9}\cdot x_1 & + & \overline{13}\cdot x_2 & + & \overline{21}\cdot x_3 & = & \overline{3} \end{array} \tag{10}$$

Jetzt subtrahiert man das $\overline{10}$-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile und das $\overline{9}$-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \overline{1}\cdot x_1 & + & \overline{7}\cdot x_2 & + & \overline{8}\cdot x_3 & = & \overline{19} \\ & & \overline{2}\cdot x_2 & + & \overline{9}\cdot x_3 & = & \overline{19} \\ & & \overline{19}\cdot x_2 & + & \overline{18}\cdot x_3 & = & \overline{16} \end{array} \tag{11}$$

Jetzt normiert man die zweite Zeile, indem man sie mit $\overline{2}^{-1} = \overline{12}$ multipliziert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \overline{1}\cdot x_1 & + & \overline{7}\cdot x_2 & + & \overline{8}\cdot x_3 & = & \overline{19} \\ & & \overline{1}\cdot x_2 & + & \overline{16}\cdot x_3 & = & \overline{21} \\ & & \overline{19}\cdot x_2 & + & \overline{18}\cdot x_3 & = & \overline{16} \end{array} \tag{12}$$

Jetzt wird das $\overline{19}$-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile abgezogen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \overline{1}\cdot x_1 & + & \overline{7}\cdot x_2 & + & \overline{8}\cdot x_3 & = & \overline{19} \\ & & \overline{1}\cdot x_2 & + & \overline{16}\cdot x_3 & = & \overline{21} \\ & & & & \overline{13}\cdot x_3 & = & \overline{8} \end{array} \tag{13}$$

Man erkennt anhand dieser reduzierten Form des Gleichungssystems, daß der Rang 3 und damit der Corang 0 ist. Wie üblich erhält man die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems (9):

$$\begin{aligned} x_3 &= \overline{8}\cdot\overline{13}^{-1} = \overline{8}\cdot\overline{16} = \overline{13} \\ x_2 &= \overline{21} - \overline{16}\cdot x_3 = \overline{21} - \overline{16}\cdot\overline{13} = \overline{20} \\ x_1 &= \overline{19} - \overline{7}\cdot x_2 - \overline{8}\cdot x_3 = \overline{19} - \overline{7}\cdot\overline{20} - \overline{8}\cdot\overline{13} = \overline{5} \end{aligned} \tag{14}$$

(b) Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (9) lautet:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{12} & \overline{15} & \overline{4} \\ \overline{10} & \overline{3} & \overline{20} \\ \overline{9} & \overline{13} & \overline{21} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Hier gelten die gewohnten Regeln für die Determinantenberechnung. Mit Verwendung der Koeffizientenmatrix der reduzierten Form (13) liefert dieses:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \overline{12} & \overline{15} & \overline{4} \\ \overline{10} & \overline{3} & \overline{20} \\ \overline{9} & \overline{13} & \overline{21} \end{pmatrix} = \overline{12}\cdot\overline{2}\cdot\det \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{7} & \overline{8} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{16} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{13} \end{pmatrix} = \overline{13}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß man einen vor der Determinanten stehenden Faktor in diese hineinziehen kann, indem man eine einzelne Zeile mit diesem multipliziert. Weiter wurde verwendet, daß sich der Wert der Determinanten nicht ändert, wenn zu einer Zeile das Vielfache einer anderen addiert. Außerdem ist bei einer Diagonalmatrix die Determinante das Produkt der Diagonalelemente.[2]

Auch das Berechnen der inversen Matrix erfolgt in der gewohnten Weise mit dem Gauß(-Jorden)-Verfahren.[3] Man beginnt damit, daß man die Matrix A und die Einheitsmatrix nebeneinander schreibt.

$$\begin{pmatrix} \overline{12} & \overline{15} & \overline{4} \\ \overline{10} & \overline{3} & \overline{20} \\ \overline{9} & \overline{13} & \overline{21} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Anschließend führt man das Eliminationsverfahren soweit durch, bis aus A die Einheitsmatrix entstanden ist. Dabei werden alle Zeilenoperationen bei der Matrix A in gleicher Weise auch für die Zeilen der Einheitsmatrix durchgeführt. Die Einheitsmatrix verwandelt sich dann in die inverse Matrix A^{-1}. Es ist nur darauf zu achten, daß anstelle der sonst üblichen Division eine Multiplikation mit der inversen Restklasse des betreffenden Wertes zu erfolgen hat. Die einzelnen Schritte der Inversenberechnung lauten:

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{7} & \overline{8} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{9} \\ \overline{0} & \overline{19} & \overline{18} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{5} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{7} & \overline{8} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{16} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{13} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{13} & \overline{12} & \overline{0} \\ \overline{11} & \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{7} & \overline{8} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{16} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{13} & \overline{12} & \overline{0} \\ \overline{15} & \overline{9} & \overline{16} \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{7} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \overline{20} & \overline{20} & \overline{10} \\ \overline{3} & \overline{6} & \overline{20} \\ \overline{15} & \overline{9} & \overline{16} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \overline{22} & \overline{1} & \overline{8} \\ \overline{3} & \overline{6} & \overline{20} \\ \overline{15} & \overline{9} & \overline{16} \end{pmatrix} \tag{21}$$

[2]Siehe Vorlesung bzw. Skript zur Vorlesung „Mathematik 1 für Informatik“.
[3]Siehe auch hier die Vorlesung bzw. Skript zur Vorlesung „Mathematik 1 für Informatik“.

Die rechte Seite von (21) ist die inverse Matrix A^{-1}. Das Matrizenprodukt wird ebenfalls auf die bekannte Art berechnet; dieses liefert:

$$A^2 \;=\; A \circ A \;=\; \begin{pmatrix} \overline{8} & \overline{1} & \overline{18} \\ \overline{8} & \overline{5} & \overline{14} \\ \overline{13} & \overline{10} & \overline{1} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Als Beispiel soll hier nur die Berechnung des ersten Elementes der ersten Zeile vorgeführt werden:

$$\overline{12} \cdot \overline{12} \;+\; \overline{15} \cdot \overline{10} \;+\; \overline{4} \cdot \overline{9} \;=\; \overline{330} \;=\; \overline{8}$$

4. Lösung: Da $= 103$ eine Primzahl ist, ist $\varphi(103) = 102$, und nach dem Satz von Euler ist $\overline{a}^{\,102} = \overline{1}$ für alle $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{13}^*$. Um dieses hier auszunutzen, teilt man den gegebenen Exponenten mit Rest durch $\varphi(103) = 102$:

$$1740 \;=\; 17 \cdot 102 \;+\; 6 \tag{23}$$

Also hat man

$$\begin{aligned} \overline{5}^{\,1740} \;&=\; \overline{5}^{\,17\cdot 102+6} \;=\; \underbrace{\left(\overline{5}^{\,102}\right)^{17}}_{=\overline{1}} \cdot \overline{5}^{\,6} \;=\; \overline{125}^{\,2} \;=\; \overline{22}^{\,2} \\ &=\; \overline{484} \;=\; \overline{72} \end{aligned}$$

Bemerkung: Auf die Berechnung des ganzzahligen Quotienten 17 in (23) hätte man verzichten können. Es reicht, $6 \equiv 1740 \mod 102$ zu berechnen.

5. Lösung: Zunächst zeigt man durch Nachrechnen

$$\overline{164790}^{\,2} \;=\; \overline{85521} \quad \text{sowie} \quad \overline{261333}^{\,2} \;=\; \overline{85521}$$

Wegen

$$\overline{164790} \;+\; \overline{261333} \;=\; \overline{426123} \;=\; \overline{161734} \;\neq\; \overline{0}$$

ist $\overline{u} \neq \pm\overline{v}$.

Wäre $n = 264389$ eine Primzahl, so wäre $\mathbb{Z}_n$ ein Körper, und ein Polynom zweiten Grades

$$X^2 \;-\; \overline{a}$$

könnte nicht mehr als zwei Nullstellen besitzen. Hier besitzt aber für $\overline{a} = \overline{164790}^{\,2} = \overline{261333}^{\,2} = \overline{85521}$ dieses Polynom die vier Nullstellen $\pm\overline{164790}$, $\pm\overline{261333}$. Daher kann n keine Primzahl sein.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Aufgabe: Die Information einer vertraulichen Zahl wird unter drei Personen aufgeteilt. Dabei wird das in der Vorlesung vorgeführte Verfahren verwendet. Die drei Personen A, B und C erhalten jeweils die Information

$$A:\ (29,7), \quad B:\ (31,4), \quad C:\ (23,17)$$

   Wie lautet die geheime Zahl? Geben Sie an, wie jeweils zwei Personen diese gemeinsam ermitteln können.

2. Aufgabe: Betrachten Sie zu der Primzahl $p = 97$ den Restklassenring $\mathbb{Z}_{97}$.

   (a) Finden Sie ein $x \in \mathbb{Z}_{97}^*$ mit

$$x^5 \ = \ \overline{30} \tag{1}$$

   Finden Sie die Lösung von (1) nicht durch Probieren, sondern wenden Sie das in der Vorlesung erläuterte Verfahren an.

   (b) Warum ist die Lösung von (1) eindeutig?

3. (a) Das folgende lineare Gleichungssystem besitzt Koeffizienten aus dem Restklassenkörper $\mathbb{Z}_{23}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \overline{12}\cdot x_1 & + & \overline{15}\cdot x_2 & + & \overline{4}\cdot x_3 & = & \overline{21} \\ \overline{10}\cdot x_1 & + & \overline{3}\cdot x_2 & + & \overline{20}\cdot x_3 & = & \overline{2} \\ \overline{9}\cdot x_1 & + & \overline{13}\cdot x_2 & + & \overline{21}\cdot x_3 & = & \overline{3} \end{array} \tag{2}$$

   Lösen Sie dieses lineare Gleichungssystem mit Werten aus $\mathbb{Z}_{23}$, indem Sie in gewohnter Weise das Gaußsche Verfahren anwenden. Was sind Rang und Corang dieses Gleichungssystems?

   (b) Sei A die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (2). Berechnen Sie $\det(A)$, A^2 und, falls $\det(A) \neq \overline{0}$ ist, die Umkehrmatrix A^{-1}.

4. Berechnen Sie in dem Restklassenkörper $\mathbb{Z}_{103}$ die Potenz

$$\overline{5}^{\,1740} \tag{3}$$

   indem Sie die Rechnung zunächst mit Hilfe des Satzes von Euler vereinfachen.

5. Zeigen Sie, daß in dem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ mit $n = 264389$ die beiden Restklassen

$$\overline{u} \ = \ \overline{164790} \quad \text{und} \quad \overline{v} \ = \ \overline{261333} \tag{4}$$

   einerseits dasselbe Quadrat in $\mathbb{Z}_n$ besitzen und andererseits $\overline{u} \neq \pm\overline{v}$ ist.

   Wie kann man daraus schließen, daß $n = 264389$ *keine* Primzahl ist?

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. (a) Bekanntlich läßt sich für $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ die inverse Restklasse $\overline{a}^{-1}$ mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus berechnen. Es besteht aber die zusätzliche Möglichkeit, $\overline{a}^{-1}$ mit Hilfe eines geeigneten positiven Exponenten $t \in \mathbb{N}$ zu berechnen:

$$\overline{a}^{-1} \;=\; \overline{a}^{t} \tag{1}$$

   Wie nämlich? *Hinweis*: Satz von Euler.

   (b) Wie lautet dieser Exponent bei $n = 21$? Berechnen Sie auf beide Arten $\overline{10}^{-1} \in \mathbb{Z}_{21}$.

2. Finden Sie in dem Restklassenkörper $\mathbb{Z}_{163}$ Nullstellen des Polynoms

$$\mathrm{p}(X) \;=\; X^2 + \overline{127} \cdot X + \overline{99} \tag{2}$$

   Hinweis: 163 ist eine Primzahl mit $163 \equiv 3 \mod 4$. An geeigneter Stelle können Sie den Algorithmus zum schnellen Potenzieren einsetzen.

3. Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Finden Sie zwei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ mit

   - $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$
   - $\vec{a}_1$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig.
   - $\vec{a}_2$ steht senkrecht auf $\vec{b}$.

   b) Finden Sie einen Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$, der senkrecht auf $\vec{b}$ steht und für den

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \;=\; -30$$

   gilt.

4. Zeigen Sie: Die Gerade

$$G \;=\; \{\vec{a}_0 + \lambda\vec{a}_1 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} \;\subset\; \mathbb{R}^2$$

   mit $\vec{a}_1 \neq 0$ enhält genau dann den Nullvektor, wenn $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_1$ *linear abhängig* sind.

5. Gegeben seien

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;.$$

   Zeigen Sie, daß diese Vektoren linear unabhängig sind. Ergänzen Sie weiterhin diese Vektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$, d. h. finden Sie zwei weitere Vektoren $\vec{x}_4, \vec{x}_5 \in \mathbb{R}^5$, so daß $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5)$ eine Basis des $\mathbb{R}^5$ ist.

6. Wählen Sie aus

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

drei zueinander linear unabhängige Vektoren aus und stellen Sie die restlichen beiden als Linearkombinationen der drei ausgewählten Vektoren dar.

7. Gegeben sei in Hessescher Normalform die Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$:

$$G \;=\; \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \;=\; \sqrt{52} \right\}$$

   (a) Geben Sie die Gerade G in Parameterform, d. h. in der Form $\{\vec{a} + t\,\vec{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$, an.

   (b) Geben Sie eine weitere Gerade $H \in \mathbb{R}^2$ an, die denselben Abstand zum Nullpunkt wie die Gerade G besitzt, zur Geraden G parallel verläuft aber nicht gleich der Geraden G ist.

Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Lösung:

   (a) Nach dem Satz von Euler ist $\overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}$ für $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$. Damit erhält man

   $$\begin{aligned} \overline{a}^{-1} &= \underbrace{\overline{a}^{\varphi(n)}}_{=\overline{1}} \cdot \overline{a}^{-1} = \overline{a}^{\varphi(n)-1} \\ &= \overline{a}^{t} \qquad \text{mit} \quad t = \varphi(n) - 1 \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   Wegen $\varphi(n) > 1$ für $n > 2$ ist in diesem Fall der Exponent t in (1) sogar positiv. Im Ausnahmefall $n = 2$ ist ohnehin nur $\mathbb{Z}_2^* = \{\overline{1}\}$, und man kann $t = 1$ wählen.

   (b) Für $a = 10$ und $n = 21$ berechnet man $\overline{10}^{-1}$ auf die „traditionelle“ Weise mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus; dieser liefert:

   $$\begin{aligned} 1 &= -2 \cdot 10 + 1 \cdot 21 \\ \Rightarrow \quad \overline{10}^{-1} &= \overline{-2} = \overline{19} \end{aligned}$$

   Für die zweite Möglichkeit berechnet man zunächst

   $$\varphi(21) = \varphi(3 \cdot 7) = (3-1) \cdot (7-1) = 12$$

   Als berechnet man

   $$\begin{aligned} \overline{10}^{-1} &= \overline{10}^{11} = \overline{100}^{5} \cdot \overline{10} = \overline{-5}^{3} \cdot \overline{5}^{2} \cdot \overline{10} \\ &= \overline{-125 + 6 \cdot 21} \cdot \overline{4} \cdot \overline{10} = \overline{40} = \overline{19} \end{aligned}$$

   Man würde hier natürlich besser den Algorithmus zum schnellen Potenzieren einsetzen.

2. Lösung: Man kann bei dem Körper $\mathbb{Z}_{163}$ ebenso wie bei den reellen oder komplexen Zahlen die quadratische Ergänzung („p-q-Formel“) einsetzen. Das liefert hier für die beiden möglichen Nullstellen die Darstellung

   $$x_{1,2} = -\overline{127} \cdot \overline{2}^{-1} \pm \overline{2}^{-1} \cdot \sqrt{\overline{127}^{2} - \overline{4} \cdot \overline{99}} \tag{2}$$

   Man erkennt hier sofort – ohne den erweiterten euklidischen Algorithmus anwenden zu müssen: $\overline{2}^{-1} = \overline{82}$. Wie in der Vorlesung gezeigt, berechnet man die Quadratwurzel durch Potenzieren mit $(163 + 1)/4 = 41$. Das liefert

   $$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\overline{127} \cdot \overline{82} \pm \overline{82} \cdot \sqrt{\overline{155} - \overline{70}} \\ &= \overline{18} \pm \overline{82} \cdot \overline{85}^{41} = \overline{18} \pm \overline{82} \cdot \overline{133} \end{aligned} \tag{3}$$

   Achtung: Hier ist nicht sicher, ob die – immer mögliche – Potenzierung mit $(163+1)/4 = 41$ tatsächlich die Quadratwurzel von $\overline{85}$ geliefert hat. Dieses ist nur dann der Fall,

wenn $\overline{85}$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}_{163}$ ist[1]. Man muß daher, um sicherzustellen, ob wirklich die Quadratwurzel berechnet wurde, das Ergebnis der Potenzierung noch einmal quadrieren, d. h. hier noch folgende Rechnung durchführen:

$$\left(\overline{85}^{41}\right)^2 \;=\; \overline{133}^{\,2} \;=\; \overline{17689} \;=\; \overline{85} \tag{4}$$

Somit lieferte die Potenz in (3) tatsächlich die Quadratwurzel, und man die Rechnung fortsetzen:

$$x_{1,2} \;=\; \overline{18} \pm \overline{148} \;=\; \begin{cases} \overline{3} \\ \overline{33} \end{cases}$$

Die Potenz in (3) wurde mit dem Algorithmus zum schnellen Potenzieren berechnet.

3. **a)**

$$\vec{a}_1 \;=\; \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\cdot\vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 \;=\; \vec{a} - \vec{a}_1 \;=\; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Der Vektor $\vec{c}$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -2\cdot x_1 + 1\cdot x_2 &= 0 \\ +3\cdot x_1 - 4\cdot x_2 &= -30 \end{aligned}$$

Wendet man das Gaußsche Verfahren an, so erhält man die reduzierte Form:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{2}\cdot x_2 &= 0 \\ -\frac{5}{2}\cdot x_2 &= -30 \end{aligned}$$

Es folgt sofort $\vec{c} = (6, 12)^t$.

4. Es ist zu zeigen:

$$0 \in G \;\Leftrightarrow\; \vec{a}_0 \text{ und } \vec{a}_1 \text{ lin. abhg.}$$

1. Richtung: Sei $0 \in G$, dann hat der Nullvektor[2] mit einem $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ die Darstellung:

$$0 \;=\; 1\cdot\vec{a}_0 + \lambda_0\cdot\vec{a}_1$$

Dieses ist bereits eine die Null darstellende Linearkombination von $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_1$, bei der zumindest der Koeffizient von $\vec{a}_0$ von Null verschieden ist; also sind $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_1$ linear abhängig.
2. Richtung: Seien nun $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_1$ linear abhängig, d. h. es gebe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, die nicht beide gleich Null sind, mit

$$0 \;=\; \alpha\vec{a}_0 + \beta\vec{a}_1$$

Ist $\alpha \neq 0$, so erhält man nach Teilung durch α eine Darstellung von 0 als Geradenelement:

$$0 \;=\; \vec{a}_0 + \frac{\beta}{\alpha}\vec{a}_1 \;\in\; G$$

Ist $\beta \neq 0$, so folgt wegen $\vec{a}_1 \neq 0$:

$$-\alpha\vec{a}_0 \;=\; \beta\vec{a}_1 \;\neq\; 0$$

und damit auch $\alpha \neq 0$. Wie oben kann man jetzt wieder $0 \in G$ schließen.

[1] Siehe die Begründung der Formel zu Ziehen der Quadratwurzel in der Vorlesung bzw. im Skript.
[2] Zur Abkürzung wird hier für den Nullvektor statt $\vec{0}$ einfach 0 geschreiben.

5. Um die lineare Unabhängigkeit der $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ nachzuweisen, ist zu zeigen, daß die Gleichung

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 = 0 \tag{5}$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ erfüllt ist. Setzt man in (5) die Komponenten der Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ein, so erkennt man, daß es sich dabei um ein lineares homogenes Gleichungssystem mit den Unbestimmten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ handelt. Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Reduzierung dieser Matrix gemäß des Gaußschen Verfahrens liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt, daß das Gleichungssystem den Rang drei besitzt. Insbesondere ist der Rang gleich der Anzahl der Unbestimmten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ und damit der Corang Null. Es gibt daher keine von Null verschiedene Lösung dieses homogenen Systems und damit keine Werte für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die nicht alle gleich Null sind und (5) erfüllen.

Um $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$ zu ergänzen, setze man

$$\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu zeigen bleibt, daß $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_5$ linear unabhängig sind; aus Dimensionsgründen folgt dann, daß sie eine Basis des $\mathbb{R}^5$ bilden. Sei also

$$0 = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 + \lambda_4\vec{x}_4 + \lambda_5\vec{x}_5.$$

Zu zeigen ist $\lambda_1 = \cdots = \lambda_5 = 0$. Man schließt dazu wie oben: Man stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem auf, dessen Unbekannten $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ lauten, und rechnet nach, daß der Corang dieses Gleichungssystems Null beträgt. Das Gleichungssystem ist daher nur erfüllt, wenn alle λ_i gleich Null sind; die Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_5$ sind daher in der Tat linear unabhängig und bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^5$.

6. Zunächst bringe man die Matrix

$$A = (\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\vec{a}_4\vec{a}_5)$$

mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens in eine reduzierte Form. Man erkennt dann, daß die Matrix den Rang 3 hat, und wählt drei Spalten aus, so daß die Matrix aus diesen drei

Spalten auch noch den Rang 3 hat. Sind i, j, k die Indizes dieser drei Spalten, so sind die Vektoren $\vec{a}_i, \vec{a}_j, \vec{a}_k$ zueinander linear unabhängig.

Zum Finden der Darstellung der anderen beiden Vektoren als Linearkombinationen aus $\vec{a}_i, \vec{a}_j, \vec{a}_k$ verwende man wieder das Gaußsche Verfahren. Die reduzierten Formen der beiden zu berechnenden Gleichungssysteme gewinnt man sofort aus der reduzierten Form der Matrix A aus dem ersten Schritt.

7. (a) Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem mit nur einer Gleichung und zwei Unbekannten

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\, x_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}\, x_2 = \sqrt{52}$$

Die Teilung durch $2/\sqrt{13}$ (Normierung) liefert

$$x_1 + \frac{3}{2}\, x_2 = 13$$

Man erkennt Rang 1 und Corang 1. Ein spezielle Lösung $\vec{a}$ erhält man wie üblich mit $x_2 = 0$ und eine Grundlösung $\vec{b}$ des zugehörigen homogenen Systems mit $x_2 = 1$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das liefert die Parameterform

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Die gesuchte Gerade H erhält man, indem man in der Hesseschen Normalform das Negative des ursprünglichen Normalenvektors wählt:

$$H = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \sqrt{52} \right\}$$

Bei der Parameterform kann derselbe Richtungsvektor $\vec{b}$ gewählt werden; beim Stützvektor nimmt man das Negative des ursprünglichen Stützvektors:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$