Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Da eine der beiden für die Gleitkommadarstellung benötigten Größen im Exponenten steht, empfiehlt es sich, zu gegebenem $x \in \mathbb{R}^+$ auf beide Seite der Gleichung $x = m \cdot 2^u$ den Logarithmus anzuwenden:

$$\begin{aligned} \log(x) &= \log(m \cdot 2^u) \\ &= \log(m) + \log(2^u) \\ &= \log(m) + u \log(2) \\ \Rightarrow \quad \frac{\log(x)}{\log(2)} &= \frac{\log(m)}{\log(2)} + u \qquad (1) \end{aligned}$$

Für die beiden Summanden auf der rechten Seite der letzten Gleichung gilt einerseits $u \in \mathbb{Z}$ und andererseits wegen $1 \leq m < 2$ und der Monotonie der Logarithmusfunktion

$$0 = \log(1) \leq \log(m) < \log(2) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \underbrace{\frac{\log(m)}{\log(2)}}_{=w} < 1$$

Der erste Summand auf der rechten Seite von (1) wurde zur Abkürzung w genannt; es ist somit $0 \leq w < 1$. Damit erhält man aus (1) unter Verwendung der Gaußklammer[1]

$$u = \left[\frac{\log(x)}{\log(2)}\right] \qquad w = \frac{\log(x)}{\log(2)} - u \qquad m = \mathrm{e}^{w \cdot \log(2)}$$

Die letzte Gleichung ergab sich hier durch Auflösen von $w = \log(m)/\log(2)$ noch m.

Bemerkung 1: Die Zahl m heißt „Mantisse“ und die Zahl u heißt „Exponent“.
Bemerkung 2: Die Rechnung hätte sich etwas vereinfachen lassen, wenn man anstelle des natürlichen Logarithmus $\log(x)$ den logarithmus dualis $ld(x) = \log(x)/log(2)$ verwendet hätte.

Für $x_0 = 987654321369$ berechnet man

$$\begin{aligned} u &= \left[\frac{\log(987654321369)}{\log(2)}\right] = \left[\frac{27.61859859631610355483}{\log(0.69314718055994530941)}\right] \\ &= [39.84521523120812838578] = 39 \\ w &= \frac{\log(987654321369)}{\log(2)} - 39 = 0.84521523120812838578 \\ m &= \mathrm{e}^{0.84521523120812838578 \cdot \log(2)} = \left(\mathrm{e}^{\log(2)}\right)^{0.84521523120812838578} \\ &= 2^{0.84521523120812838578} = 1.79653274493648496039 \end{aligned}$$

Also ist

$$987654321369 = 1.79653274493648496039 \cdot 2^{39}$$

[1] Die Gaußklammer ist der ganze Anteil einer reellen Zahl a: $[a] = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq a\}$; siehe Skript.

2. **a)** Da der Grad des Divisionsrestes immer kleiner als der Grad des Divisors ist – andernfalls wäre noch ein weiterer Schritt bei der Polynomdivision möglich – und der Divisor $(x - x_1)$ hier den Grad 1 besitzt, kann der Rest nur das Nullpolynom oder ein Polynom vom Grad 0 sein. In beiden Fällen besteht das Restpolynom nur aus den konstanten Glied und ist damit eine Konstante $r \in \mathbb{R}$.

   b) Da, wie gesehen, das Restpolynom eine Konstante $r \in \mathbb{R}$ ist, liefert die Polynomdivision durch $x - x_1$ die Gleichung

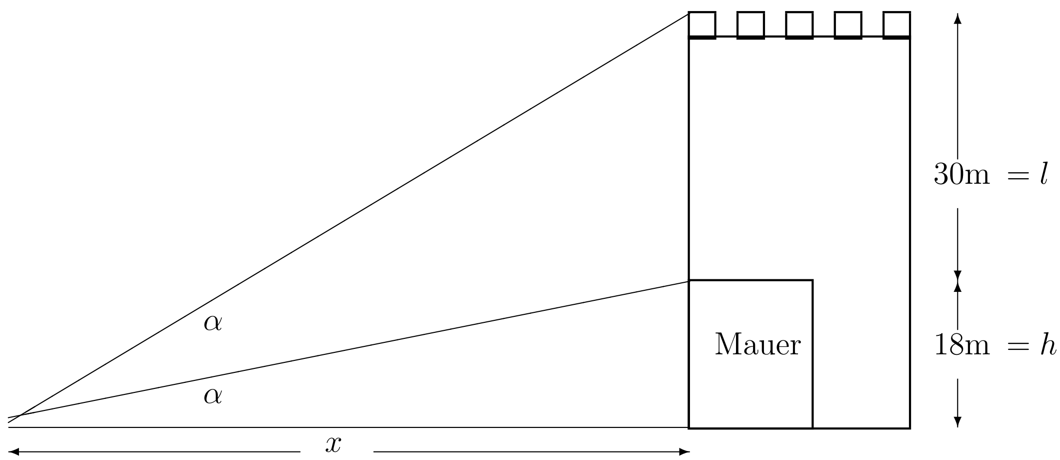
$$\frac{\mathrm{p}(x)}{x - x_1} = \mathrm{g}(x) + \frac{r}{x - x_1}$$

   mit einem Polynom $\mathrm{g}(x)$ (dem Quotienten). Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $x - x_1$, so erhält man

$$\mathrm{p}(x) = \mathrm{g}(x) \cdot (x - x_1) + r$$

   Setzt man hier $x = x_1$ ein, so erhält man in der Tat

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(x_1) &= \overbrace{\mathrm{g}(x_1) \cdot (x_1 - x_1)}^{=0} + r \\ &= r \end{aligned}$$



3.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{h}{x} \\ \tan 2\alpha &= \frac{h+l}{x} \\ &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \quad \text{für } \tan\alpha \text{ einsetzen!} \\ &= \frac{2h}{x(1 - \frac{h^2}{x^2})} \\ &= \frac{2hx^2}{x(x^2 - h^2)} \\ \Rightarrow \quad (h+l)(x^2 - h^2) &= 2hx^2 \qquad \text{nach } x \text{ auflösen!} \\ \Rightarrow \quad x &= h\sqrt{\frac{l+h}{l-h}} \\ \Rightarrow \quad \tan\alpha &= \sqrt{\frac{l-h}{l+h}} \end{aligned}$$

Damit folgt: $x = 36\text{m}$ und $\alpha = \arctan \frac{1}{2} = 26,565°$.

4. Zunächst stellt man sicher, daß $(-1/\sqrt{5})^2 + (2/\sqrt{5})^2 = 1$ ist und somit ein δ mit der gewünschten Eigenschaft existieren muß. Da der Wert des Cosinus negativ sein soll, berechnet man nach Vorlesung dieses δ durch

$$\delta \;=\; \arctan\left(\frac{2/\sqrt{5}}{-1/\sqrt{5}}\right) + \pi \;=\; \arctan(-2) + \pi \;=\; -1.1071 + \pi \;=\; 2.0344$$

5. **a)** Eine reduzierte Form ist

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 21 \end{array}$$

Der Rang ist $r = 2$; der Corang ist $s = n - r = 3 - r = 3 - 2 = 1$. Setzt man $x_3 = 0$, so liefert dieses die spezielle Lösung $S = (-14, 21, 0)$. Die wegen $s = 1$ einzige Grundlösung des homogenen Systems ist $G = (2, -3, 1)$. Die Lösungsmenge lautet somit

$$L \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \,\Big|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Eine reduzierte Form ist :

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ & & & & x_3 & & & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & = & 2 \end{array}$$

Der Rang ist $r = 4$; der Corang ist $s = n - r = 4 - r = 4 - 4 = 0$. Die wegen $s = 0$ eindeutige und wegen $r = 4 = m$ notwendigerweise existierende Lösung ist $(0, -4, 2, 2)$.

6. Ein geeignetes lineares Gleichungssystem soll aufgestellt werden, dabei stehe x für das Alter von Xaver und ebenso y und z für das Alter von Ymir bzw. Zacharias:

$$\begin{array}{lllccccccc} 1. & (x-6) = \frac{1}{2}(y+z) & \Leftrightarrow & 2x & - & y & - & z & = & 12 \\ 2. & & & x & + & y & + & z & = & 111 \\ 3. & (y-20) = 2(z-20) & \Leftrightarrow & & & y & - & 2z & = & -20 \end{array}$$

Anwendung des Gaußschen Verfahrens liefert eine reduzierte Form dieses Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 111 \\ & & y & + & z & = & 70 \\ & & & & z & = & 30 \end{array}$$

und damit $z = 30$, $y = 40$ und $x = 41$.