Übung zu Mathematik I für Informatik

1. Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx).$$

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Summationsformel: für $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \cos(jx) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die in einer vorherigen Aufgabe gezeigte Gleichung

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(nx) = \sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left((n-\frac{1}{2})x\right)$$

3. Geben Sie zwei lineare Gleichungssysteme mit jeweils drei Gleichungen und drei Unbestimmten an, die beide genau den Rang zwei besitzen. Das eine dieser beiden Gleichungssysteme soll lösbar, das andere soll unlösbar sein.

4. Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem, das mehr Unbekannte als Gleichungen enthält; man zeige, daß dann das Gleichungssystem niemals eine eindeutige Lösung besitzt, d. h. es kann nur vorkommen, daß das Gleichungssystem unlösbar ist oder unendlich viele Lösungen besitzt.

5. Finden Sie eine Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 3 & 14 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 9 & 100 & 30 & 45 \\ 77 & 112 & 13 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3552 & -588 & -488 & 77 \\ 1160 & 192 & 159 & -25 \\ 139 & 23 & 19 & -3 \\ 42 & 7 & 6 & -1 \end{pmatrix} \circ X + \begin{pmatrix} 1 & 11 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 100 & 30 & 45 \\ 77 & 112 & 13 & 7 \end{pmatrix}$$

Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

6. Finden Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 9 & 1+t & 10 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{gilt.}$$

7. Berechnen Sie zu den folgenden Matrizen die Determinanten und jeweils im Falle einer von null verschiedenen Determinante die Umkehrmatrix:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 12 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 12 & 18 \\ 5 & 17 & 37 & 69 \\ 1 & 4 & 13 & 45 \end{pmatrix}$$

8. Bestimmen Sie von der 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 36 & -9 \\ -6 & 19 & -3 \\ -18 & 54 & -2 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom, sämtliche Eigenwerte und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

TeachMatics - Das Seminartool für Hoc…
MassMatics UG

Bearbeiten Sie die Aufgaben mit den Nummern 11215, 090044 und 11208.

Hinweis: Eine Anleitung für die Applikation *TeachMatics* finden Sie im OSCA-Hochschulportal im Lernraum dieser Vorlesung.