INTERPOLACJA OGÓLNIE

W przedz [a;b] jest n+1 różnych pkt x0..xn i wartości funkc f(x) w tych pkt. Znalezc F(x) która w wezlach ma te same wart co f(x) i przybliża f(x) w pkt pośrednich.Zaklada się kl.funk.interp.wielom.algebr,trygon i funk sklejane

INTERPOLACJA WIELOMIANOWA

Istnieje tylko jeden wiel.interp.st. co najwyżej n >= 0,który w pkt x0..xn na wart. y0..yn interpoluje funkcję|**Dowód[3]:**

$$\begin{cases} a0 + a1x0 + a2x0^2 \ldots anx0^2 = y0 \\ a0 + a1x1 + a2x1^2 \ldots anx1^2 = y1 \\ . \\ a0 + a1xn + a2xn^2 \ldots anxn^2 = yn \end{cases}$$

N+1 równań i n+1 niewiadomych 1 rozwzanie

Liczę wyznacznik:

D=detA=det $\begin{bmatrix} 1 & x0 & x0^2 & \cdots & x0^n \\ 1 & x1 & x1^2 & \cdots & x1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & xn & xn^2 & \cdots & xn^n \end{bmatrix}$

Jest to wyzn. Vandermondea =/= 0 => xi=/=xj dla i=/=j**|**Wobc tego**[2]** $ai = \frac{1}{D}\sum_{j=0}^{n} y(xj)Dij$

^Dopełnienie algebr. elem.na poz. (i,j)

INTERPOLACJA LAGRANGEA

Wstawiam [2]do[3] i grupuję względem yi.

Dostaję **[4]**:

$$W_n(x) = y_0\phi_0(x) + y_1\phi_1(x) + \ldots + y_n\phi_n(x)$$

gdzie $\phi_i(x)$-wielom.st.<=n**|**Z war.interp:

$$W_n(x_i) = y_1 \leftrightarrow W_n(x_i)$$
$$= y_0\phi_0(x) \ldots y_1\phi_1(x) \ldots y_i\phi_i(x) \ldots y_n\phi_n(x)$$

czyli wynika stąd,że każda z fun. $\phi_j$musi spełniać warunek $\phi_j(x_i) = \begin{cases} 0, j \neq i \\ 1, j = i \end{cases}$

Czyli dla $x \neq x_j$,j=0,1..n , $\phi_j(x) = 0$ a dla x=x_j $\phi_j(x) = 1$

Zakładam że $\phi_j(x) = \lambda(x - x_j) \ldots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \ldots (x - x_n)$**|**Z warunków:

$$\phi_j(x) = \lambda(x_j - x_0)(x_j - x_1) \ldots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \ldots (x_j - x_n) = 1$$

Ruguję parametr λ i dostaję :

$$\phi_j(x) = \frac{(x-x_j) \ldots (x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \ldots (x-x_n)}{(x_j-x_0) \ldots (x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1}) \ldots (x_j-x_n)}$$

Takie wyrażenia wstawia się do **[4]**, żeby otrzymać wielom. interpolujący**|**Oznaczam:

$$W_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{W_{n+1}(x)}{(x - x_j)\left\{\frac{W_{n+1}(x)}{(x - x_j)} | x = x_j\right\}}$$

Jest to równoważne z

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{W_{n+1}(x)}{(x - x_j)W'_{n+1}(x_j)}$$

Tudzież

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[y_j \prod_{i=0, i \neq j}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_j - x_i)} \right]$$

Oszacowanie Błędu Interpolacyjnego

Błąd $\varepsilon(x) = f(x) * W_n(x)$**|**Można go oszacować $f^{(n+1)}(x)$ w przedziale [a,b]-maksymalna wartość**|**Można pokazać:

$$f(x) - W_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \ldots (x - x_n)$$

$\xi \epsilon int(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) - najmn.przedz.zawie.$

$|\varepsilon| = |f(x) - W_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |W_{n+1}|$gdzie:

$M_{n+1} = sup\left|f^{(n+1)}(x)\right|; x\epsilon[a, b]$**|**$M_{n+1}$ zależy od funkcji.**|**Dobierając węzły interp. można minimalizować $|W_{n+1}|$

Szczególny Przypadek (równoodległe węzły)

$$x_i = x_0 + i * h, \qquad i = 0,1, \ldots, n$$

$x = x_0 + th,\ t \in R(argument)$**|**Dostanie się:

$$L_n(x) = L_n(x_o + th) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{i=0, j \neq i}^{n} \frac{t - j}{i - j}$$