UWARUNKOWANIE ZADANIA

Cecha nie zależy od metody rozwiązania Dane zadania: $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots, d_i \in R$ Zamiast dokładnych danych dysponujemy ich reprezentacjami: $rd(d_1), rd(\,d_2), \dots,$ $rd(d_n), \dots, rd(d_i)$ **|** $rd(d_i) = d_i(1+\varepsilon_i)$ gdzie $|\varepsilon_i| \le 2^{-t}$ **|** Ta niewielka zmiana może powodować duże zmiany względne rozwiązania. Jeżeli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany jego rozwiązania to zadanie nazywamy źle uwarunkowanym. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzeniarozwiąznia nazywamy wskaźnikami uwarunkowania zadania. **Przykład:** $a = (a_1, .., a_n)\ b = (b_1, .., b_n)$ **|** $a_i(\varepsilon) = a_i(1+\alpha_i)\ b_i(\varepsilon) = b_i(1+\beta_i)$ **|** $\alpha_i\beta_i \approx 0$ **|** $S = \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i$ **|** Oszacujmy zmianę wyniku $\left|\frac{\sum_{i=1}^n a_i(1+\alpha_i)b_i(1+\beta_i)}{\sum_{i=1}^n a_i b_i}\right| \approx \left|\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i(\alpha_i+\beta_i)}{\sum_{i=1}^n a_i b_i}\right| \le$ $(\max|\alpha_i+\beta_i|)[\mathbf{1}] * \left|\frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i+\beta_i|}{\sum_{i=1}^n a_i b_i}\right| [\mathbf{2}]$ gdzie $|\alpha_i| \le \alpha_{max}\ ; |\beta_i| = \beta_{max}$ [1]Zaburzenie maksymalne; [2]Współczynnik uwarunk.zad **|** Jeżeli $a_i\ i\ b_i$ mają taki sam znak to wskaźn. =1 Jeżeli znaki $a_i\ i\ b_i$ różne to wskaźnik uwarunkowania zadania >1 **|** Maksymalne zabużenie względne danych może się przenieść na zaburzenie względne wyniku, co najwyżej z takim mnożnikiem

STABILNOŚĆ NUMERYCZNA ALGORYTMU

D-zbiór danych; a-wektor danych $a = [a_1, \dots, a_k]$; W-wektor wyniku $W = \{W_1, \dots, W_k\}$ **|** Należy obliczyć W=W(a) – algorytm idealny. Algorytm określa odwzorowanie WN-wynik numeryczny (algorytm liczony na komputerze). **|** Wynik W' obliczony dla danych numerycznych $W' = WN(a, \varepsilon)$ **|** DN(ε)-zbiór danych, dla których określony jest algorytm $WN(a, \varepsilon)$ **|** Mówimy, że algorytm jest numerycznie stabilny jeżeli dla dowolnie wybranych danych $\mathring{a} \in D$ istnieje taka dokładność obliczeń ε_0 że dla $\varepsilon < \varepsilon_0$ mamy: 1) $\mathring{a} \in DN(\varepsilon)$ **|** 2)$\lim_{\varepsilon\to 0} WN(\mathring{a}, \varepsilon) = W(\mathring{a})$ **|** czyli algorytm jest numerycznie stabilny wtedy, gdy zwiększając dokładność obliczeń można wyznaczyć (z dowolną dokładnością) dowolne istniejące rozwiązanie zadania. **Przykład-NIESTABILNY** $y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$ chcemy liczyć dla n=1,2,…,10^6 **|** ze wzoru rekurencyjnego $y_n + 5y_{n-1} = \frac{1}{n}$ **|** $y_n + 5y_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n+5x^{n-1}}{x+5} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+5)}{x+5} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$ **|** $y_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5} dx = ln6 - ln5 \approx 0{,}182;$ $y_1 = 1 - 5y_0 \approx 0{,}090;\ y_2 = \frac{1}{2} - 5y_1 \approx 0{,}05;$ $y_3 = \frac{1}{3} - 5y_2 \approx 0{,}083;\ y_4 = \frac{1}{4} - 5y_3 \approx -0{,}165;$ **|** Błąd zaokrąglenia y_0, którego moduł może sięgać 5*10^6 jest mnożony przez 5 dla obliczenia y_1. Kolejne błędy dalej przemnażane są przez 5. **Przykład-STABILNY** $y_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}y_n$ Oszac. wartość początkową y_n. y_n maleje gdy n wzrasta (dla dużych n maleje wolno) **|** Zał.: $\begin{cases} y_{10} \approx y_9 \\ y_n < y_{10} < \frac{1}{60} < y_9 \end{cases}$ **|** $y_9 + 5y_9 \approx \frac{1}{10} \rightarrow\ y_9 \approx \frac{1}{60} \approx 0{,}017;$ $y_8 = \frac{1}{45} - \frac{1}{5}y_9 \approx 0{,}019;\ y_7 = \frac{1}{40} - \frac{1}{5}y_8 \approx 0{,}021;\ y_6 = 0{,}025;\ y_5 = 0{,}028;\ y_4 = 0{,}034;$ $y_3 = 0{,}043;\ y_2 = 0{,}058;\ y_1 = 0{,}088;$ $y_0 = 0{,}182;$ Wynik prawidłowy

POPRAWNOŚĆ NUMERYCZNA

Za numerycznie najwyższej jakości uznajemy takie algorytmy, dla których obliczone rozwiązanie jest nieco zaburzonym rozwiązaniem (dokładnym) zadania o nieco zaburzonych danych. Algorytm spełniający te postulaty nazywamy Numerycznie Poprawnym. **|** D-zbiór danych **|** a-idealne dane **|** Zaburzone dane: $(a + \delta a) \in D$ **|** Dla algorytmu numerycznie poprawnego: WN(a,ε)-wynik maszynowy **|** $WN(a, \varepsilon) = W(a, \delta a)$-wynik idealny