CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

Do przybliżonego obliczania całek najczęściej stosuje się kwadratury. Ogólny wzór na kwadraturę: $I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx Q(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ Gdzie A_k-współ.kwadratury, $x_1 \dots x_n$-węzły wyznaczające podział przedziału [a,b] **|** Reszta kwadratur: $Rf \coloneqq I(f) - Q(f)$ powinna być minimalna.

RZĄD KWADRATURY (kryt. dokładności)

Def: Kwadratura Q jest rzędu n jeżeli jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia <n **|** Q(w)=I(w) dla $w \in W_{n-1}$ oraz istnieje wielomian stopnia n, dla którego $Q(W_n) \neq I(W_n)$ **|** Kwadr. jest dobra dla funkcji małego i dużego stopnia. **|** Kawdr. NC oparte na n+1 węzłach są rzędu: n+2 dla n parzystych; n+1 dla n nieparzystych

KWADRATURA INTERPOLACYJNA

Otrzymujemy całkując wielom.interp. Hermitea (lub w szczególności Lagrangea) funkji początkowej $f(x) = H_{n,f}(x) + v(x)$[<-reszta interpolacji] **|** po scałkowaniu dostaję $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b H_{n,f}(x)dx + \int_a^b v(x)dx$ **|** Po przybliżniu dostajemy $Q(f) = I(H_{n,f}(x))$ (kwadratu. interp.) **|** Jeżeli $f \in C^n_{[a,b]}$ to reszta $R(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(\xi)dx$ gdzie: $f_{n+1}(x) = \prod_{i-0}^{k}(x - x_i)^{m_i}$; m_i-ilość informacji w danym punkcie(z Hermitea); k-ilość punktów **|** Jeżeli f(x)-wielomian stopnia n to $f^{(n+1)}(x) = 0$ **|** Lemat: Kwadratury interpolacyjne oparte na węzłach o łącznej krotności (n+1) są rzędu co najmniej (n+1) **|** Liczę dla interpolacji Lagrangea $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} + v(x)$ Całkuję i otrzymuję kwadraturę $Q(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ gdzie $A_i = \int_a^b \prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx$ **|** Kwadratura otrzymana dla funkcji sklejanych stopnia 1 nie jest kwadraturą interpolacyjną – nie jest dokładna dla wielomianu stopnia drugiego

KWADRATURY NEWTONA-COTESA

Kwadraturami N-C przybliżającymi $\int_a^b f(x)dx$ są kwadratury $Q(x) = I(L_n)$ gdzie L_n (w interp. Lagrange) funkcji f(x) oparty na równoodległych węzłach $x_0 = a, x_1 = a + h$, ...,$x_n = a + nh$=b **|** Podstawiając x=a+t(h)=b otrzymujemy: $L_n(x) = l_n(a + th) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{j=0,i\neq j}^{n}\frac{t-j}{i-j}$; $x_i = a + ih$; i=0,1,..n **|** $h = \frac{b-a}{2}$ **|** $Q(t) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ **|** $A_i = h\int_b^n \prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{t-j}{i-j}dt$

ZŁOŻONE KWADRATURY NEWTONA-COTESA

w odróżnieniu od kwadratury prostej nie jest kwadraturą interpolacyjną. Zadany przedział [a,b] dzielimy na podprzedziały, a następnie stosujemy kwadratury proste(interpolacyjne). **(1)**Dzielimy przedział [a,b] na N podprzedziałów z węzłami równoległymi $x_i = a + i\frac{a-b}{N}$; i=0,1,...,N **(2)**W każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ wyznaczamy n+1 węzłów postaci: $x_{ij} = x_i + j\frac{x_{i-1}-x_i}{n}$; i=0,1,..n **(3)**W każdym przedziale stosujemy kwadraturę Newtona-Cotesa opartą na n+1 węzłach: $I^{(i)}(f) = inf_{x_i}^{x_{i-1}} f(x)dx = Q_i(f) - E_i(f)$

Zatem wzór złożonej kwadratury NC to:

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{n} A_j f(x_{ij})$$

Złożony Wzór Trapezów

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right)$$

Błędy: $E_T(f) = \frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}f^{(2)}(\xi)$

Złożony Wzór Simpsona

$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{x_{k+1}-x_k}{6}\left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right) + f(x_{k+1})\right)$ Błąd: $E_S(f) = \frac{1}{180}\frac{(b-a)^5}{n^4}f^{(4)}(\xi)$

Złożony Wzór Prostokątów

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)\left((x_k) - (x_{k+1})\right)$$