INTERPOLACJA HERMITEA [obrazek]

Niech suma $\sum_{i=0}^{k} m_i = n+1\,; k \le m$ gdzie k-l.pkt **|** Danych jest k+1 różnych węzłów $x_0, x_1 \dots x_k$ oraz l.naturarnych $m_0, m_1 \dots m_k$ takie że $\sum_{i=0}^{k} m_i = n+1$ określające ilość znanych informacji (wartości funk i kolejnych pochodnych) o funkcji w węźle ‘i’ **|** Znaleźć dla danej funkcji f wielomian H_n stopnia co najwyżej n spełniający warunek $H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) dla\ i = 0,1,\dots,k\,; j = 0,1,\dots,m_{i-1}$

Zadanie interpolacyjne Hermite’a ma jednoznaczne rozwiązanie

INTERPOLACJA CZYBYSZEWA

[OBRAZEK szczególny przykład funk $f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$]

Zachodzi zjawisko Rungego-gdy wybieramy bardzo dużo węzłów równoodległych interp. daje bardzo dobre efekty w środku przedziału interp, a po bokach przedziału efekt jest najmocniejszy.(dla interp.lagra.albo wielom)

Zatem Interp.Czyby. to sposób obl. węzłów, optymalny żeby błąd interp. był najmniejszy.

Def. Rodzina (trójkątna) wielom.Czyb. $T_n(x) \coloneqq \cos(n * arccosx)$ **|** Własności:

[1]Opis rekurencyjny $T_0(x) = 1; T_1(x) = x$
$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ dla n>1

[2] $T_n(x)$ jest równoważny pewnemu wielom. algebr. ST. n określonemu w [-1;1]

[3]Współczy. wiodący wynosi $\begin{cases} 2^{n-1}, n \ge 1 \\ 1, \quad n = 0 \end{cases}$

[4] T_n ma n miejsc zerowych w [-1;1] jednokrotnych rzeczywistych

$$x_k = cos\left(\frac{2k+1}{n} * \frac{\pi}{2}\right), k = 0,1,\dots,n-1$$

lub $x_k = cos\left(\frac{2k-1}{n} * \frac{\pi}{2}\right), k = 1,2,\dots,n$

[5]Własność minimalna: Ze wszystkich wielomianów stopnia n o współczynniku wiodącym równym 1, najmniejszą normę maksymalną w [-1;1] ma wielomian $\frac{1}{2^{n-1}} T_n$.

Jego norma maksymalna wynosi $\frac{1}{2^{n-1}}$ (norm.maks $\|f_\infty\| = \max_{x\epsilon[a,b]}|f(x)|$)

Gdy[a,b]=[-1,1] wówczas wielomianem stopnia n+1 takim, aby $sup_{x[a,b]}|W_{n+1}(x)|$ było minimalne jest wielomian $W_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ **|** Optymalny zbiór węzłów dla interp. w przedziale [-1;1] odpowiada zatem wielom. Czyb. T_n. Wówczas: **|** $|f(x) - W_n(x)| = \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}$ **|** Teraz żeby mieć węzły Czyb. na dowolnym przedziale [a,b] trzeba przeskalować. **|** $t = C_1 x + C_2$ **|** $[t = a \wedge x = -1\,], [t = a \wedge x = 1] \Rightarrow \begin{cases} a = -C_1 + C_2 \\ b = C_1 + C_2 \end{cases}$

Zatem: $t = \frac{1}{2}(b-a)x + \frac{1}{2}(a+b)$ **|** Dowolną funkcję f(t) określoną na przedziale [a,b] można przeskalować, aby była określona na przedziale [-1,1] i odwrotnie. Przeskalowanie nie zmienia interpolacji. **|** Czyli optymalne węzły to: dla k = 0,1,…n-1

$$t_k = \frac{1}{2}\left[(b-a)cos\left(\frac{2k+1}{n} * \frac{\pi}{2}\right) + (b+a)\right]$$

Zbieżność Ciągów Wielomianów:

Zbieżność – Faber, Bernstein

Dla każdego układu n+1 węzłów $x \in [a,b]$ istnieje funkcja „złośliwa” ciągła w [a,b], dla której metoda interpolacji nie jest jednostajnie zbieżna w tym przedziale, do tej funkcji.