

Materiały do ćwiczeń

Przetwarzanie Sygnałów Cyfrowych Teoria Przetwarzania Sygnałów

M. Jabłoński

11 marca 2019

KAiR, Akademia Górniczo-Hutnicza

Wprowadzenie

1 Sygnały ciągłe, dyskretne i cyfrowe

Sygnały cyfrowe stanowią bardzo istotny element współczesnej szeroko pojętej nauki i techniki. Ze względu na rozwinięte metody obliczeń komputerowych sygnały stanowią najczęściej wynik przetwarzania jakiejś wielkości fizycznej o charakterze ciągłym (temperatura, ciśnienie, naprężenie, intensywność oświetlenia) na sygnał elektryczny (prąd I lub napięcie U). W procesach próbkowania (sygnał dyskretny) oraz kwantyzacji (sygnał skwantowany) zachodzących w torze przetwornika analogowo-cyfrowego wielkości te zamieniają się na uporządkowane ciągi liczb które mają określoną reprezentację w systemie binarnym (por. tab. 1). W niektórych wypadkach, już podczas procesu przetwarzania wielkości fizycznych dochodzi do dyskretyzacji. Np. w matrycach czujników kamer wizyjnych strumień światła próbkowany jest z określoną rozdzielczością przestrzenną (skończona liczba pikseli na powierzchni czujnika) i czasową (skończona liczba ramek obrazu w ciągu sekundy). Istnieją również sygnały niepowiązane z wielkościami fizycznymi. Mogą nimi być dane statystyczne lub np. notowania giełdowe.

Tabela 1: Podstawowa klasyfikacja sygnałów

	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{N}$
$t \in \mathbb{R}$	sygnał ciągły	sygnał skwantowany
$t \in \mathbb{N}$	sygnał dyskretny	sygnał cyfrowy

gdzie:

t – dziedzina (np. czas, odległość, ...),

x – przeciwdziedzina (wartość chwilowa napięcia, reprezentacja liczbową, ...).

Prawidłowa zamiana sygnału ciągłego na cyfrowy oraz interpretacja wyników tej konwersji wymaga znajomości parametrów wejściowego sygnału ciągłego oraz takiego jego ukształtowania aby uzyskany sygnał cyfrowy możliwie jednoznacznie odwzorowywał właściwości sygnału ciągłego. Jako typowy sygnał cyfrowy, w trakcie ćwiczeń, będziemy rozumieć uprządkowany ciąg liczb reprezentowanych w urządzeniu obliczeniowym (procesor cyfrowy lub synchroniczny cyfrowy układ elektroniczny), pamięci cyfrowej lub pliku.

Analiza harmoniczna sygnałów

2 Rozwijanie sygnałów w szereg Fouriera

Jednym z podstawowych narzędzi matematycznych pozwalających na badanie rzeczywistych sygnałów ciągłych jest fourierowska analiza harmoniczna polegająca na rozwinięciu nieskończonego okresowego sygnału ciągłego w tzw. szereg Fourier'a. Umożliwia ona m.in. analizę zachowania liniowych i stacjonarnych układów dynamicznych (mechanicznych, elektrycznych i innych) w stanie ustalonym podczas pobudzenia sygnałem ciągłym okresowym. Pozwala modelować proces konwersji sygnału analogowego (ciągłego) na postać cyfrową tj. przetwarzanie A/C (Analog/Cyfra). Jest również wykorzystywana w opisywaniu procesu modulacji oraz ocenie zniekształceń sygnałów.

Szereg Fouriera możemy potraktować jako sygnał dyskretny określony na dziedzinie częstotliwości. Węzły dyskretyzacji są kolejnymi krotnościami podstawowego okresu zmienności sygnału wejściowego. Wartości szeregu przyporządkowane kolejnym węzłom dyskretyzacji mogą być liczbami zespolonymi i odwzorowują wagowy udział przebiegu sinusoidalnego (o danej częstotliwości dyskretniej i określonej fazie) w formowaniu sygnału ciągłego.

Na potrzeby ćwiczeń przyjmujemy że funkcja $x(t)$ opisująca sygnał ciągły ma charakter rzeczywisty a nie zespolony i spełnia warunek $x(t) = x^*(t)$. Jest to uzasadnione, ponieważ większość technicznych systemów analizy i przetwarzania operuje na rzeczywistych wielkościach fizycznych. Rozwinięciu w szereg Fouriera poddaje się przebiegi opisane funkcjami okresowymi $x(t)$ spełniającymi warunek $\bigwedge_{t \in \mathbb{R}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} f(t) = x(t + kT_0)$, gdzie T_0 - okres, $k \in \mathbb{C}$. Oprócz tego funkcja $x(t)$ musi spełnić trzy warunki Dirichlet'a:

WD1 – jest bezwzględnie całkowalna w każdym okresie T_0 $\int_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|dt < \infty$, gdzie $t_1 \in \{-\infty, +\infty\}$

WD2 – posiada skończoną liczbę ekstremów w każdym okresie T_0 ,

WD3 – posiada skończoną liczbę punktów nieciągłości w każdym okresie T_0 .

Jeśli funkcja spełnia te trzy warunki wówczas zachodzi równoważność $x(t) \equiv X$ a szereg dyskretny X_n jednoznacznie opisuje ciągły sygnał $x(t)$. Możliwe jest również syntezywanie ciągłego sygnału okresowego poprzez ustalanie wartości współczynników szeregu X_n . Rozwinięcie w szereg Fouriera i transformacja odwrotna opisana może być za pomocą jednej z trzech postaci: postaci wykładniczej (1,2), fazowej (3) trygonometrycznej (5,6).

- postać wykładnicza, gdzie $n \in \mathbb{Z}$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt \quad (1)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\omega_0 n t} \quad (2)$$

- postać fazowa

$$\theta_n = \arg(X_n) \quad (3)$$

$$x(t) = |X_0| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (4)$$

- postać trygonometryczna dla sygnałów rzeczywistych, gdzie $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) dt \\ a_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cos(\omega_0 n t) dt \\ b_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \sin(\omega_0 n t) dt \end{cases} \quad (5)$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (6)$$

We wzorach (1-6) występuje pulsacja ω_0 powiązana z okresem T_0 przebiegu i jego częstotliwością w następujący sposób: $\omega_0 = 2\pi$, $f_0 = \frac{1}{T_0}$.

Czynnik $g_n(t) = e^{-j\omega_0 n t}$ w postaci wykładniczej (1) reprezentuje harmoniczne zespolone funkcje bazowe w postaci nieskończonej liczby funkcji trygonometrycznych $\sin()$ i $\cos()$ o pulsacjach $n\omega_0$. Mogą one stanowić bazę ponieważ spełniają warunek ortogonalności (7) w granicach jednego okresu T_0 .

$$\bigwedge_{n \neq m} \int_{t_1}^{t_1+T_0} g_n(t) g_m^*(t) dt = 0 \quad (7)$$

2.1 Podstawowe własności szeregów Fouriera

- **Tw. Parsewala:** energia sygnału ciągłego w okresie równa (8) jest energii szeregu Fouriera wyznaczonej na jego podstawie.

$$\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (8)$$

- **Liniowość (9):** szereg Fouriera wyznaczony dla liniowej kombinacji okresowych sygnałów ciągłych $x(t)$ i $y(t)$ stanowi liniową kombinację odpowiadających im szeregów X i Y .

$$Dx(t) + Cy(t) \equiv DX + CY \quad (9)$$

- **Przesunięcie w czasie (10):** sygnału ciągłego odpowiada zastosowaniu mnożnika $e^{-jn\omega_0 t_1}$ do szeregu Fouriera sygnału oryginalnego.

$$x(t - t_1) \equiv e^{-jn\omega_0 t_1} X \quad (10)$$

2.2 Współczynnik zawartości harmoniczych

Jednym z parametrów charakteryzujących sygnały ciągłe jest współczynnik zawartości harmoniczych (11) THD (ang. Total Harmonic Distortion) opisujący stopień odkształcenia sygnału od idealnego przebiegu sinusoidalnego. Przesunięcie fazowe nie ma znaczenia ponieważ do jego wyliczenia wykorzystuje się skuteczne wartości RMS (ang. Root Mean Square) poszczególnych składowych funkcji harmoniczych. W przypadku przebiegów okresowych o zerowej składowej stałej (tj. $\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) dt = 0$) wartość skuteczna określona wzorem (12) jest najczęściej liniową funkcją amplitudy A sygnału $x(t)$.

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} S_n^2}}{S_1} \quad (11)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x^2(t) dt} \quad (12)$$

2.3 Zadanie przygotowawcze ZP1

Podaj po jednym przykładzie funkcji niespełniających poszczególnych warunków Dirichleta **WD1**, **WD2** i **WD3**.

2.4 Zadanie przygotowawcze ZP2

Wyznacz w sposób analityczny wzór na wartość skuteczną $U_{sk}(A, f_g)$ przebiegu napięcia sieci energetycznej $u(t) = A \sin(2\pi f_g t)$, gdzie f_g to częstotliwość generatora, zaś A jest amplitudą napięcia wyrażoną w jednostkach [V].