

# Materiały do ćwiczeń

## Przetwarzanie Sygnałów Cyfrowych Teoria Przetwarzania Sygnałów

M. Jabłoński

16 maja 2019

KAiR, Akademia Górniczo-Hutnicza

## Całkowe przekształcenie Fouriera

Analiza harmoniczna sygnałów za pomocą szeregów Fouriera pozwala na badanie właściwości przebiegów wyłącznie okresowych. W praktyce jednak mamy do czynienia z sygnałami, które nie mają charakteru okresowego lub których czas trwania jest ograniczony. W takich sytuacjach analizę częstotliwościową można przeprowadzić za pomocą tzw. **ciągłego przekształcenia Fouriera**  $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega)$  (1). W odróżnieniu od wyniku analizy harmonicznej (szeregi Fouriera), dziedziną  $\omega$  ciągłej reprezentacji częstotliwościowej transformaty  $X(j\omega)$  uzyskanej za pomocą przekształcenia Fouriera ma charakter ciągły.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

W ogólności, reprezentacja częstotliwościowa ma charakter zespolony dlatego można widmo sygnału przedstawić w równoważnej postaci fazowo-amplitudowej (3) gdzie  $A(\omega)$  stanowi gęstość widmową amplitudy, zaś  $\phi(\omega)$  gęstość widmową fazy. Wówczas postać zespolona może być odtworzona w następujący sposób:  $X(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ .

$$\begin{cases} A(\omega) = |X(j\omega)| \\ \phi(\omega) = \arg(X(j\omega)) \end{cases} \quad (3)$$

Warunki Dirichleta (wystarczające) istnienia transformaty Fouriera sygnału  $x(t)$  są następujące:

**WD1** – Funkcja  $x(t)$  jest bezwzględnie całkowana w całej dziedzinie  $t$ :  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

**Uwaga:** Warunek ten jest **wystarczający** – nie jest konieczny do istnienia transformaty. Warunku tego nie spełniają funkcje które jednak mają reprezentację częstotliwościową np.:  $\sin(\omega_0 t)$ ,  $\cos(\omega_0 t)$  i inne. Funkcje te nie są transformalne w sensie zwykłym lecz w sensie granicznym  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_{\alpha}(t) = x(t)$ . Obraz częstotliwościowy funkcji trygonometrycznych możemy wyznaczyć jako granicę – ich obrazem częstotliwościowym są tzw. dystrybucje określone na dziedzinie pulsacji  $\delta(\omega - \omega_0)$ .

**WD2** – Funkcja  $x(t)$  ma skończoną liczbę ekstremów ( $\max(t)$ ,  $\min(t)$ ) na dowolnym skończonym przedziale.

**WD3** – Funkcja  $x(t)$  ma skończoną liczbę punktów nieciągłości na dowolnym skończonym przedziale. Wartości funkcji w punktach nieciągłości muszą być ograniczone.

Wzór na ciągłe przekształcenie Fouriera można łatwo wyprowadzić z definicji szeregu Fouriera zakładając że okres sygnału wejściowego  $T_0$  w granicy zmierza do nieskończoności:  $T_0 \rightarrow \infty$ .

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\omega_0 n t} = \quad (4)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt \right) e^{j\omega_0 n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2\pi}{T_0} \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt \right) e^{j\omega_0 n t} \quad (5)$$

Jeśli okres w granicy dąży do nieskończoności  $T_0 \rightarrow \infty$ , to:

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt \right) e^{j\omega_0 n t} \left( \frac{2\pi}{T_0} \right) = \quad (6)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7)$$

# 1 Podstawowe własności transformaty Fouriera

- **Twierdzenie o liniowości**

Jeżeli

$$x(t) \equiv X(j\omega) \text{ oraz } y(t) \equiv Y(j\omega)$$

to

$$ax(t) + by(t) \equiv aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

- **Twierdzenie Parsewala**

Tw. Parsewala mówi o równoważności energii w obu reprezentacjach sygnału a wartość  $\frac{|X(j\omega)|^2}{2\pi}$ , definiowana w literaturze także jako  $\frac{X(j\omega)X^*(j\omega)}{2\pi}$ , stanowi gęstość widmową energii. Czynniki  $2\pi$  pomijamy, jeśli całkowanie odbywa się względem częstotliwości  $f$  a nie pulsacji  $\omega$ .

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (8)$$

- **Przesunięcie w dziedzinie czasu**

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \quad (9)$$

Wniosek: przesunięcie oryginału w czasie powoduje zmianę jedynie części fazowej widma. Gęstość widmowa amplitudy pozostaje bez zmiany.

- **Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości**

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(j(\omega - \omega_0))\} = e^{j\omega_0 t} x(t) \quad (10)$$

- **Twierdzenie o różniczkowaniu**

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega) \quad (11)$$

pod warunkiem że funkcja  $x(t)$  jest ciągła i  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$

- **Twierdzenie o całkowaniu**

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\zeta) d\zeta\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) \quad (12)$$

$\int_{-\infty}^t x(\zeta) d\zeta$  jest splotem  $x(t) * \mathbf{1}(t)$ .

- **Twierdzenie o skalowaniu w czasie i częstotliwości (o podobieństwie)**

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (13)$$

pod warunkiem, że  $a > 0$

- **Twierdzenie o transformacie splotu**

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau\right\} = X(j\omega)Y(j\omega) \quad (14)$$

- **Symetria dualna**

Proste i odwrotne przekształcenie Fouriera jest dualne. Transformata obrazu częstotliwościowego daje oryginał i odwrotnie.

Jeżeli

$$x(t) \equiv X(j\omega) \text{ to } X(t) \equiv 2\pi x(-\omega) \quad (15)$$

Symetria dualna na przykładzie impulsu prostokątnego i jego widma:

$$\mathcal{F}\left\{x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < T_1 \\ 0 & \text{dla } |t| > T_1 \end{cases}\right\} = X_1(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega T_1}$$

$$\mathcal{F}\left\{x_2(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}\right\} = X_2(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{dla } |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

- **Sprzężenie i symetria**

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega) \quad (16)$$

Wniosek: dla funkcji rzeczywistej  $x^*(t) = x(t)$  zachodzi  $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$  oraz  $X^*(-j\omega) = X(j\omega)$ , gęstość widmowa amplitudy jest parzysta, zaś gęstość widmowa fazy jest nieparzysta

## 2 Transformata Fouriera - przypadki szczególne chociaż niewyszukane

Biorąc pod uwagę pierwszy wystarczający warunek Dirichleta **WD1** istnienia transformaty Fouriera należy omówić sposób wyznaczania transformaty niektórych elementarnych sygnałów które posiadają obraz częstotliwościowy choć tego warunku nie spełniają. Można je znaleźć w tablicach lub wyprowadzić w oparciu o własności przekształcenia Fouriera.

### 2.1 Dystrybucje przydane w przekształceniu Fouriera

Dystrybucja  $\delta(t)$  (17) jest funkcjonalem (tzw. obiektem o nośniku zwartym) którego pole powierzchni jest równe jedności zaś wymiar (czas trwania w przypadku sygnału czasowego) wynosi 0. Graficznie sygnał oznaczany jest jako wektor pionowy o wysokości proporcjonalnej do energii sygnału. Dystrybucje mogą być całkowane i różniczkowane oraz poddają się przekształceniu Fouriera a także odwrotnemu przekształceniu Fouriera.

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t \neq 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (18)$$

Funkcjonal  $\delta(t)$  może być zdefiniowany jako granica rodziny funkcji prostokątnych, Lorentza lub krzywej Gaussa z granicą w  $h = 0$ :  $\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t, h)$

$$f(t, h) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{h}} \quad (19)$$

Wynikiem całkowania impulsu  $\delta(t)$  jest skok jednostkowy  $H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt$  oznaczany często jako  $\mathbf{1}(t)$ .

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases} \quad (20)$$

Delta Diraca  $\delta(t)$  i skok jednostkowy  $\mathbf{1}(t)$  są przydatne w modelowaniu procesu próbkowania sygnału oraz analizie sygnałów cyfrowych.

## 2.2 Transformata sygnału $\delta(t)$

Obrazem częstotliwościowym delty Diraca  $\delta(t)$  jest funkcja stała (22) co oznacza, że w jego widmie występują wszystkie częstotliwości w równym stopniu.

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega} dt = 1 \quad (21)$$

Z kolei obrazem czasowym delty Diraca  $\delta(\omega)$  w dziedzinie częstotliwości jest funkcja stała  $x(t) = 1$  co oznacza zupełny brak zmienności sygnału - częstotliwość (pulsacja) równa 0.

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad (22)$$

zatem

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega) \quad (23)$$

Powyższe można również wyprowadzić na podstawie twierdzenia o symetrii dualnej.

### 2.2.1 Transformata funkcji $\cos(t)$ oraz $\sin(t)$

Funkcję  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$  możemy zapisać na podstawie wzorów Eulera w postaci (24).

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}}{2} \quad (24)$$

Znając transformtę sygnału stałego oraz stosując twierdzenie o przesunięciu uzyskujemy (25). Analogicznie można uzyskać wzór na transformatę funkcji  $\sin(\omega_0 t)$  (26)

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (25)$$

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (26)$$

## 2.3 Modulacja

Przykładowym zastosowaniem przekształcenia Fouriera jest opis wyniku modulacji polegającej na złożeniu kilku sygnałów. W przypadku modulacji amplitudowej z falą nośną proces ten opisany jest równaniem (27), gdzie sygnał  $x_n = \cos(\omega_0 t)$  nazywany jest falą nośną zaś  $x_m(t)$  sygnałem modulującym a współczynnik  $m \leq 1$  to głębokość modulacji. Sygnał  $x_m(t)$  może mieć dowolny charakter ale w praktyce jego pasmo (zakres częstotliwość) powinien być mniejszy niż częstotliwość sygnału nośnego  $x_n(t)$ . Przebieg modulujący  $x_m(t)$  stanowi obwiednię sygnału nośnego  $x_n(t)$ .

$$y(t) = (1 + mx_m(t))x_n(t) \quad (27)$$

Jednym ze sposobów modulacji jest próbkowanie które stanowi pierwszy etap konwersji sygnałów ciągłych do postaci cyfrowej.

## Część I

### 3 Wyznaczanie ciągłej transformaty Fouriera

Badanie całkowitego przekształcenia fouriera zostanie wykonane za pomocą przybornika do obliczeń symbolicznych pakietu MATLAB. Badane będą przebiegi aperiodyczne, nieskończone sygnały okresowe o częstotliwości  $f_0 = 100\text{Hz}$  oraz sygnały modulowane. Przykładowy skrypt wraz z wynikami przedstawiono na rysunku 1.

#### 3.1 Ćwiczenie 1

Wykonaj obliczenia oraz wyświetl widmo sygnału sinusoidalnego jak na rysunku 1.

**Uwaga:** Kod pod komendami `ezplot()` odpowiada za wyszukiwanie obiektów delty Diraca  $\delta(t)$  a następnie rysuje je na wykresie w postaci słupka. Należy jednak pamiętać o "ręcznym" skalowaniu wysokości tych impulsów na wykresie. Zabieg ten jest konieczny ponieważ funkcja `ezplot` nie wyświetla dystrybucji poprawnie. Kod należy odkomentować, gdy w sygnale czasowym (lub widmie) spodziewamy się delty Diraca.

**Uwaga:** Komenda `subs()` służy w tym przypadku do ewaluacji wyrażenia symbolicznego z konkretnymi wartościami numerycznymi.

**Uwaga:** Aby dowiedzieć się jak definiować sygnały w **Zad. 2** skorzystaj z plików pomocy pakietu MATLAB w następujący sposób:

```
doc symbolic/fourier
help fourier
```

#### 3.2 Zadanie 2

Przebadaj działanie przekształcenia Fouriera dla poniższych sygnałów:

1. sygnał  $\cos(\omega_0 t)$ ,
2. sygnał stały o wartości 10 (do jego zdefiniowania należy użyć polecenia `sym(10)`),
3. skok jednostkowy o amplitudzie 1,
4. impuls prostokątny o amplitudzie 1 oraz czasie trwania  $T_i = \frac{2}{f_0}$ ,
5. impuls trójkątny (symetryczny) o amplitudzie 1 oraz czasie trwania  $T_i = \frac{2}{f_0}$ .

W sprawozdaniu umieść kod definiujący przebieg sygnału wejściowego oraz uzyskane wykresy.

**Zad. domowe:** Dla przebiegów  $\cos(\omega_0 t)$  oraz  $\sin(\omega_0 t)$  sporządź również wykresy gęstości widmowej amplitudy oraz wykresy fazowe. Porównaj je i opisz różnice w sprawozdaniu.

```

clear all; close all;
syms t x f0 w w0 X_FT

f0 = 100; %Hz
w0 = 2*pi*f0;

BND_t = [-10/f0;10/f0]; %20 okresow
t_SMP = [BND_t(1):1/(10*f0):BND_t(2) ];
BND_w = [-3*w0;3*w0];
w_SMP = [BND_w(1):w0/10:BND_w(2) ];

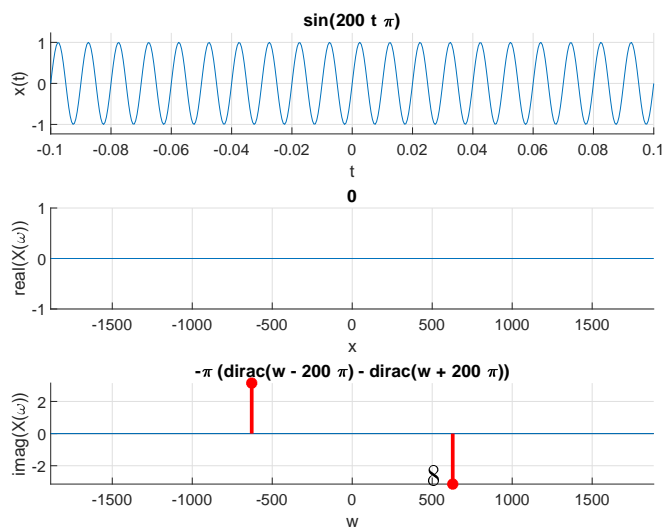
x = sin(w0*t);
X_FT = fourier(x);

figure
subplot(3,1,1); ylabel('x(t)'); hold on
ezplot(x,BND_t); hold on; grid on;
%v_num = subs(x, t, t_SMP);
%n = find(abs(v_num) == inf); % plot dirac (inf)
%stem(t_SMP(n),sign(v_num(n)),'r*', 'LineWidth', 2);

subplot(3,1,2); ylabel('real(X(\omega))'); hold on
ezplot(real(X_FT), BND_w); hold on; grid on;
%v_num = subs(real(X_FT), w, w_SMP);
%n = find( abs(v_num) == inf); % plot dirac (inf)
%stem(w_SMP(n),sign(v_num(n)),'r*', 'LineWidth', 2);

subplot(3,1,3); ylabel('imag(X(\omega))'); hold on
ezplot(imag(X_FT), BND_w); hold on; grid on
v_num = subs(imag(X_FT), w, w_SMP);
n = find( abs(v_num) == inf ); % plot dirac (inf)
stem(w_SMP(n),pi*sign(v_num(n)),'r*', 'LineWidth', 2);

```



Rysunek 1: Wyznaczanie transformaty przebiegu  $\sin(\omega_0 t)$



### 3.3 Zadanie 3

Przeprowadź modulację sygnału  $\cos(\omega_0 t)$  przebiegiem sinusoidalnym o częstotliwości 10-krotnie mniejszej, amplitudzie 1 i głębokości modulacji  $m = 0.5$ . Wyznacz transformatę Fouriera sygnału zmodulowanego i uzgodnij skalę prążków widma. Kod programu oraz wykresy samieść w sprawozdaniu.

**Zad. domowe:** Porównaj moc sygnału nośnego z sygnałem modulującym. Opisz jaki wpływ na tę relację ma głębokość modulacji  $m$ .

### 3.4 Zadanie 4

Wyznacz transformatę Fouriera sygnału  $\cos(\omega_0 t)$  "okienkowanego" tak aby w oknie znajdowało się 6.5 okresów przebiegu  $T_o = 6.5/f_0$ . Dzięki temu przebieg rozpocznie się w obrębie okna i zakończy wartością zerową. Do okienkowania zastosuj odpowiednio przeskalowane sygnały z **Zad. 2**:

1. sygnał prostokątny,
2. sygnał trójkątny,
3. krzywą gaussa  $e^{-\frac{t^2}{2c^2}}$ .

**Zad. domowe:** Dla każdego przypadku sporządź wykres gęstości widmowej amplitudy sygnału. porównaj uzyskane wyniki z widmem sygnału  $\cos(\omega_0 t)$  niepoddanego okienkowaniu. Wskaż najlepszą metodę okienkowania. Wybór uzasadnij.

## Wzór sprawozdania

Lab. ?? Temat ćwiczenia				
Nazwisko, Imię	Data wykonania ćw.	Planowy dzień zajęć	Planowa godz. zajęć	Godz. wyk.*
Nazwisko, Imię	rok. mies. dz.	środa czwartek	gg:mm	

\* tylko w przypadku odrabiania ćwiczeń.

<b>Zad. 1:</b> Pytanie/zagadnienie
Odp. :
<b>Zad. 2:</b> Pytanie/zagadnienie
Odp. :
<b>Zad. . . . :</b> Pytanie/zagadnienie
Odp. :