Tabela transformat Laplace'a

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^q	$\frac{\Gamma(q+1)}{s^{q+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t + \beta)$	$\frac{s \sin \beta + \omega \cos \beta}{s^2+\omega^2}$
$\sinh \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\cosh \alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
$\ln t$	$\frac{-(\ln s + \gamma)}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

Własności transformaty Laplace'a

- Liniowość

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

- Zmiana skali

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{a}\right)$$

- Przesunięcie w dziedzinie czasu

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\mathbf{1}(t-t_0)\}(s) = e^{-st_0}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

- Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$$

- Transformata pochodnej

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0^+)$$
$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

  w ogólności:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0^+)$$

- Pochodna transformaty

$$\mathcal{L}^{(n)}\{f(t)\}(s) = (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$$

  stąd

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n\mathcal{L}^{(n)}\{f(t)\}(s)$$

- Transformata całki

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

- Całka transformaty

$$\int_s^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}(\sigma)\mathrm{d}\sigma := \lim_{Re(p)\to\infty}\int_s^p \mathcal{L}\{f(t)\}(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s)$$

- Transformata funkcji T-okresowej

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

- Twierdzenie Borela o splocie

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

- Twierdzenie o wartości początkowej i końcowej

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

  przy czym drugie twierdzenie zachodzi tylko, gdy transformata nie ma biegunów na prawej półpłaszczyźnie oraz ma co najwyżej jeden w zerze.

Metoda residuów: jeśli $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$, to oryginał można wyznaczyć ze wzoru

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{res}_{s_i} \left[F(s)e^{st}\right]$$

Residuum w k-krotnym biegunie s_0:

$$\mathrm{res}_{s_0} g(s) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s\to s_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}} \left[(s-s_0)^k g(s)\right]$$

Dla bieguna pierwszego rzędu:

$$\mathrm{res}_{s_0} g(s) = \lim_{s\to s_0} (s-s_0) g(s)$$

Dla funkcji będących ilorazem wielomianów (biegun pierwszego rzędu):

$$\mathrm{res}_{s_0} g(s) = \lim_{s\to s_0} (s-s_0) g(s) = \lim_{s\to s_0} (s-s_0) \frac{f(s)}{h(s)} = \lim_{s\to s_0} \frac{f(s) + f'(s)(s-s_0)}{h'(s)} = \frac{f(s_0)}{h'(s_0)}$$

Residua w biegunach sprzężonych:

$$\mathrm{res}_{s_0} g(s) + \mathrm{res}_{\overline{s}_0} g(s) = 2\mathrm{Re}\left\{\mathrm{res}_{s_0} g(s)\right\}$$

Na podstawie: J.Długosz - *Funkcje zespolone.*