

# Podstawy automatyki

## Charakterystyki czasowe podstawowych obiektów dynamicznych

### Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zapoznanie się z charakterystykami czasowymi podstawowych obiektów dynamicznych przy użyciu środowiska MATLAB. Zadaniem było badanie odpowiedzi obiektów na dwa typy wymuszeń - skok jednostkowy oraz deltę Diraca. Naszym zadaniem było ponadto wyznaczenie parametrów obiektów na podstawie wykresów ich charakterystyk skokowych.

### Przebieg ćwiczenia

Charakterystyki obiektów wyznaczyliśmy, symulując je w MATLABie przy użyciu transmitancji, a następnie generowaliśmy poszczególne wykresy wraz z ich opisami. Dla każdego rodzaju obiektu wyznaczyliśmy odpowiedzi na wymuszenia skokowe i impulsowe. Stworzyliśmy po kilka rodzin charakterystyk, zmieniając kolejno wszystkie parametry obiektów tak, aby poznać jak poszczególne parametry wpływają na kształt krzywych charakterystyk.

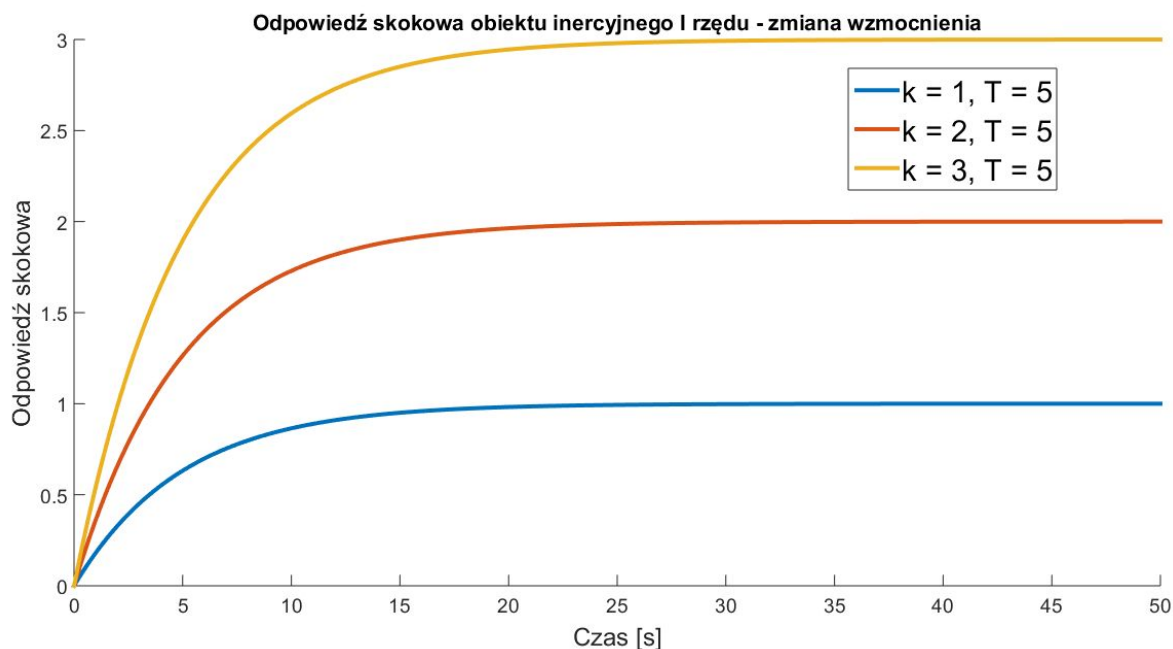
### Obiekt inercyjny I rzędu

Transmitancja obiektu inercyjnego pierwszego rzędu przedstawia się następująco:

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

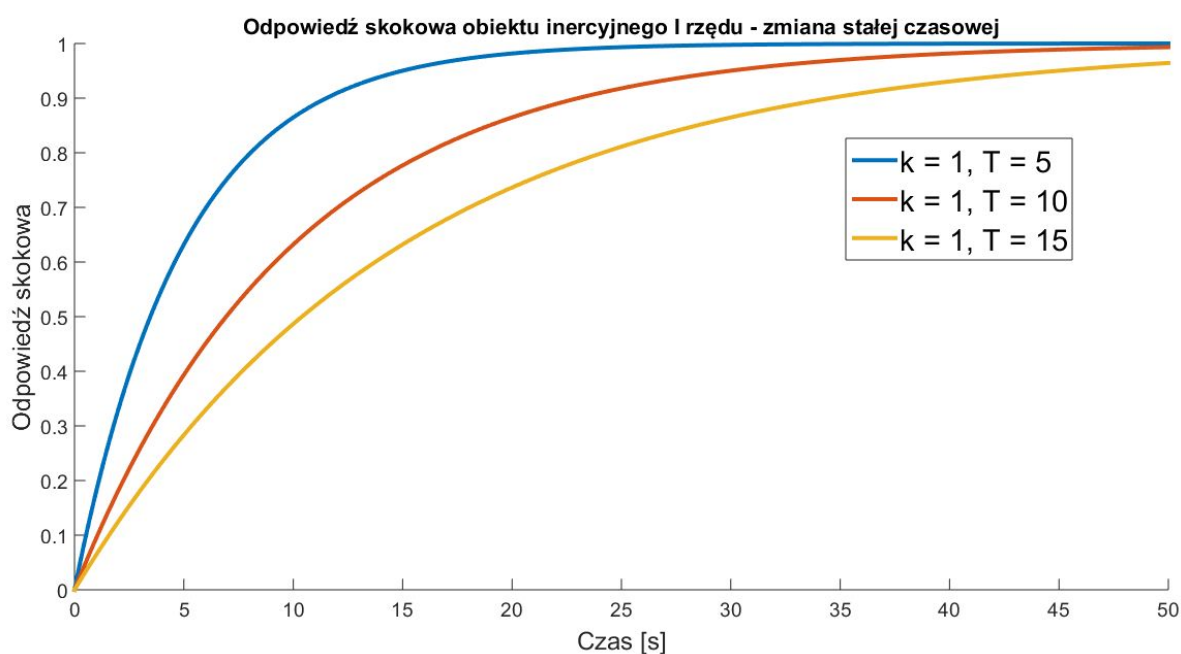
Zarówno dla odpowiedzi skokowej, jak i impulsowej wyznaczyliśmy dwie rodziny charakterystyk, zmieniając najpierw wzmocnienie obiektu, a następnie jego stałą czasową.

Na poniższych wykresach przedstawiono rodziny odpowiedzi skokowych oraz impulsowych obiektu inercyjnego I rzędu, przy zmianie wzmocnienia oraz stałej czasowej.



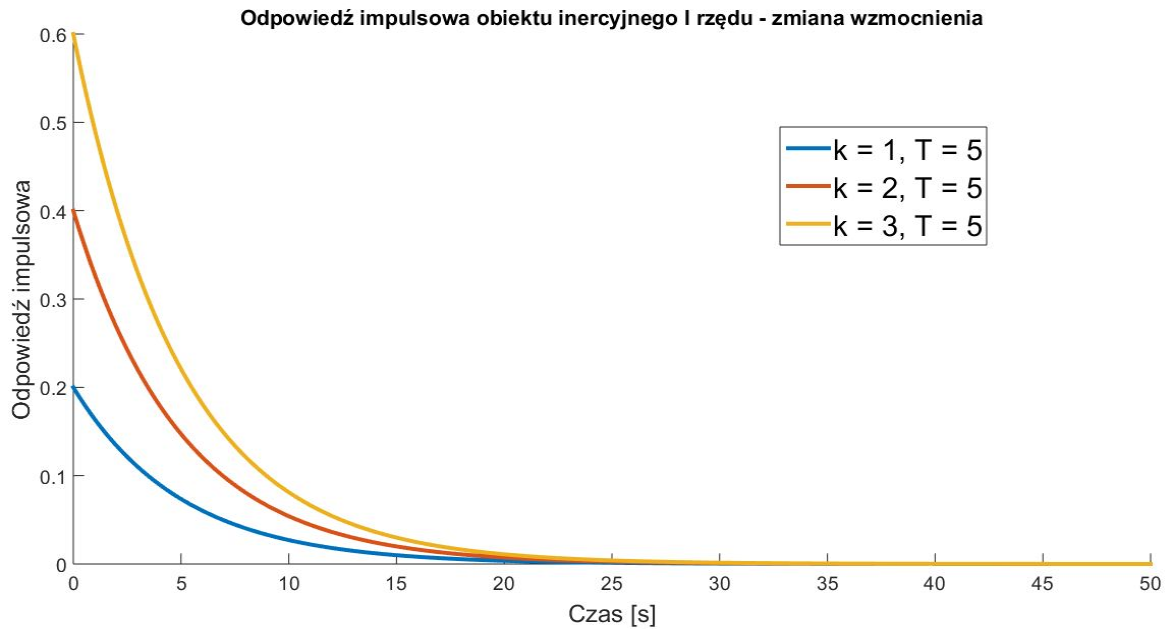
Rys. 1. Odpowiedź skokowa obiektu inercyjnego I rzędu - zmiana wzmocnienia

Z powyższego wykresu wynika, że zwiększenie wzmocnienia w obiekcie inercyjnym I rzędu "podnosi" charakterystykę skokową, zwiększa maksymalną wartość, którą osiąga wykres. Nie zmienia się natomiast czas, po którym osiągana jest wartość ustalona. Analogicznie, zmniejszenie wartości wzmocnienia obniża charakterystykę.



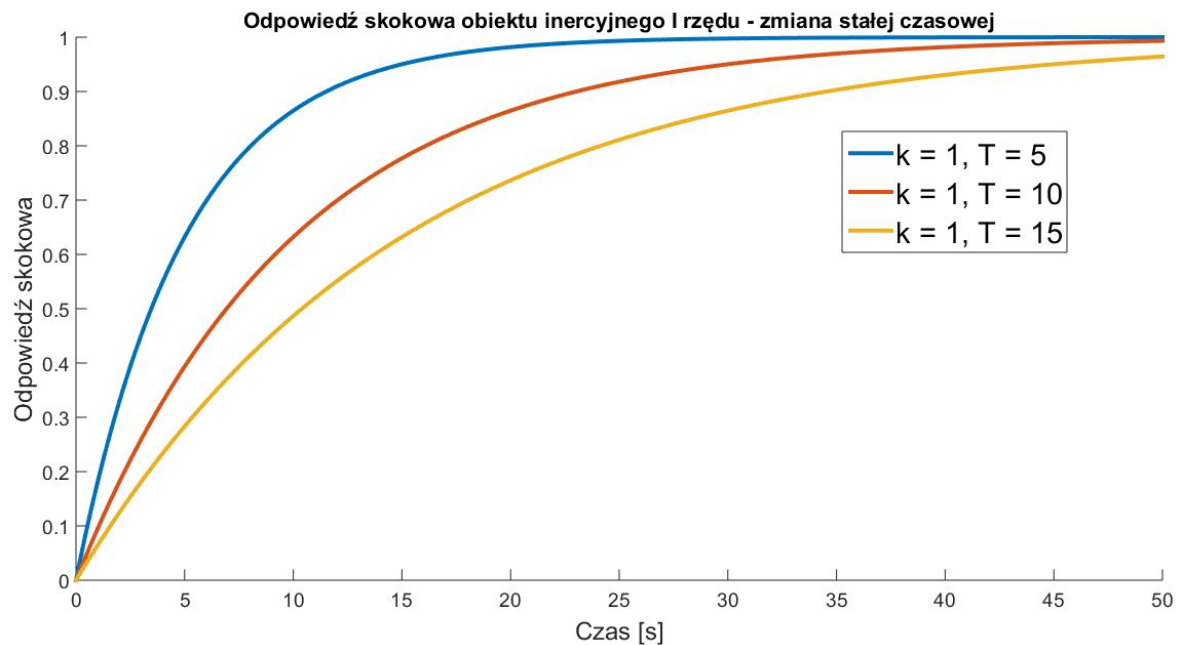
Rys. 2. Odpowiedź skokowa obiektu inercyjnego I rzędu - zmiana stałej czasowej

Jak widać, zwiększenie stałej czasowej czyni charakterystykę bardziej łagodną, mniej ostrą. Charakterystyka wolniej dąży do wartości ustalonej. Zmiana stałej czasowej nie wpływa na wartość maksymalną, ustaloną.



*Rys. 3. Odpowiedź impulsowa obiektu inercyjnego I rzędu - zmiana wzmocnienia*

Z powyższego wykresu wynika, że zmiana wzmocnienia w przypadku odpowiedzi impulsowej obiektu I rzędu zmienia wartość początkową charakterystyki (im większe wzmocnienie, tym większa wartość początkowa). Nie zmienia ona natomiast czasu, po którym odpowiedź zanika do zera.



*Rys. 4. Odpowiedź impulsowa obiektu inercyjnego I rzędu - zmiana stałej czasowej*

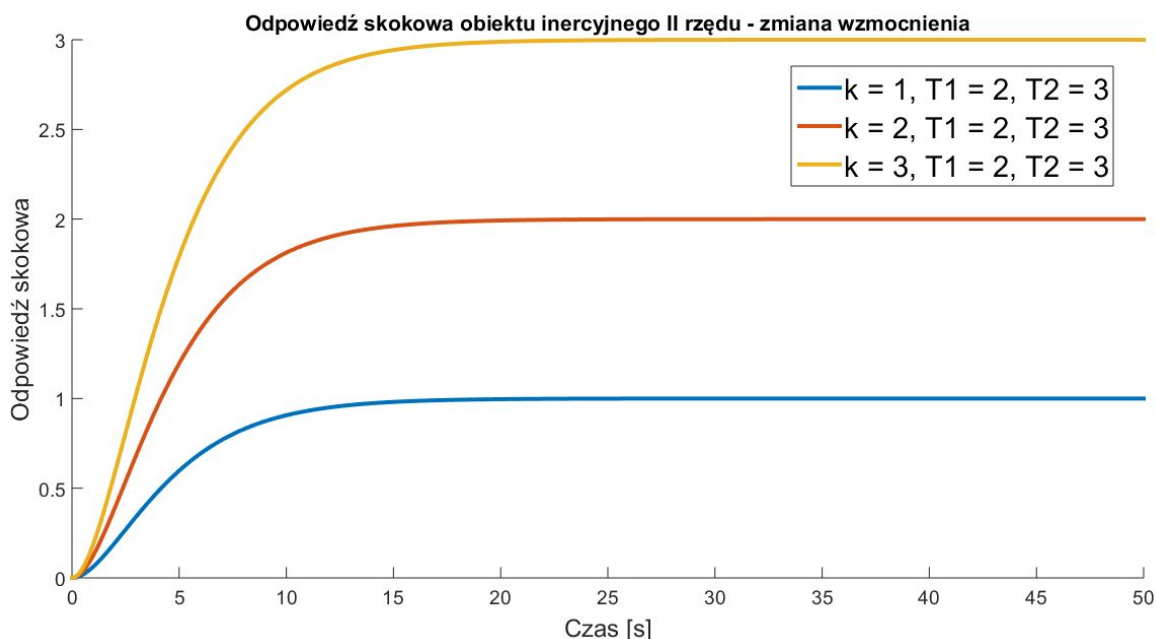
Zwiększenie stałej czasowej z kolei wygładza odpowiedź, czyni ją mniej stromą. Charakterystyka wolniej zanika do zera, wraz ze wzrostem stałej czasowej maleje też wartość początkowa.

## Obiekt inercyjny II rzędu

Transmitancja obiektu inercyjnego drugiego rzędu wygląda następująco:

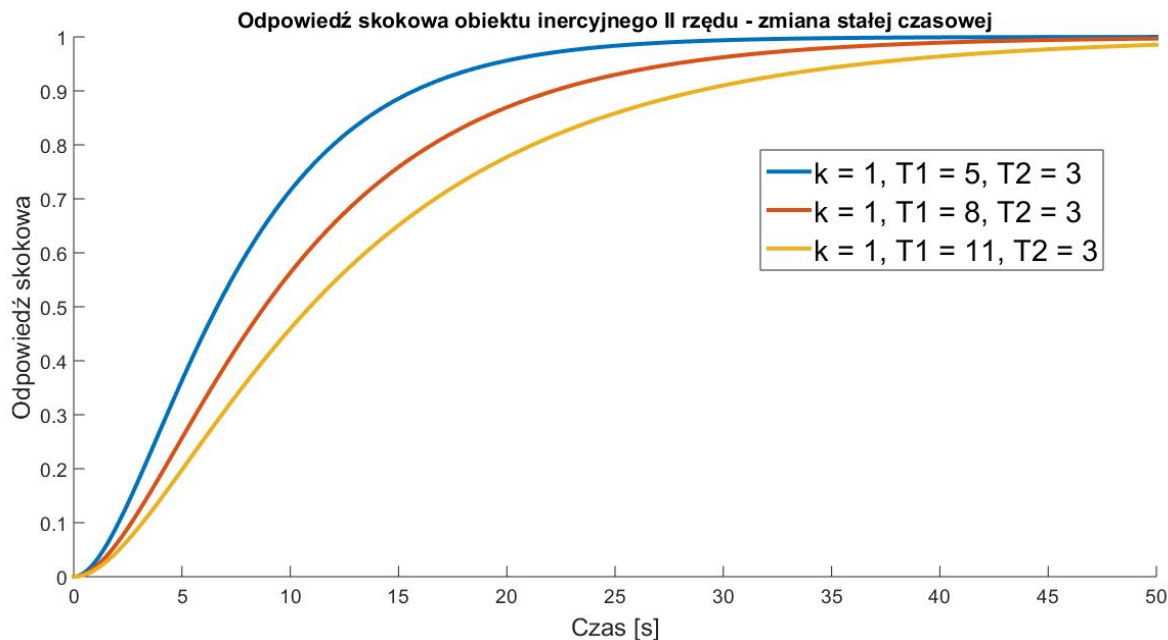
$$G(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}$$

W przypadku obiektu II rzędu również zmienialiśmy dwa parametry - wzmacnienie  $k$  oraz stałą  $T_1$ . Nie badaliśmy zachowania charakterystyki przy zmianach  $T_2$  z uwagi na to, że efekt byłby dokładnie ten sam, jak przy zmienianiu  $T_1$  przy stałej wartości  $T_2$ . Poniżej przedstawiono rodziny odpowiedzi skokowych i impulsowych tego obiektu.



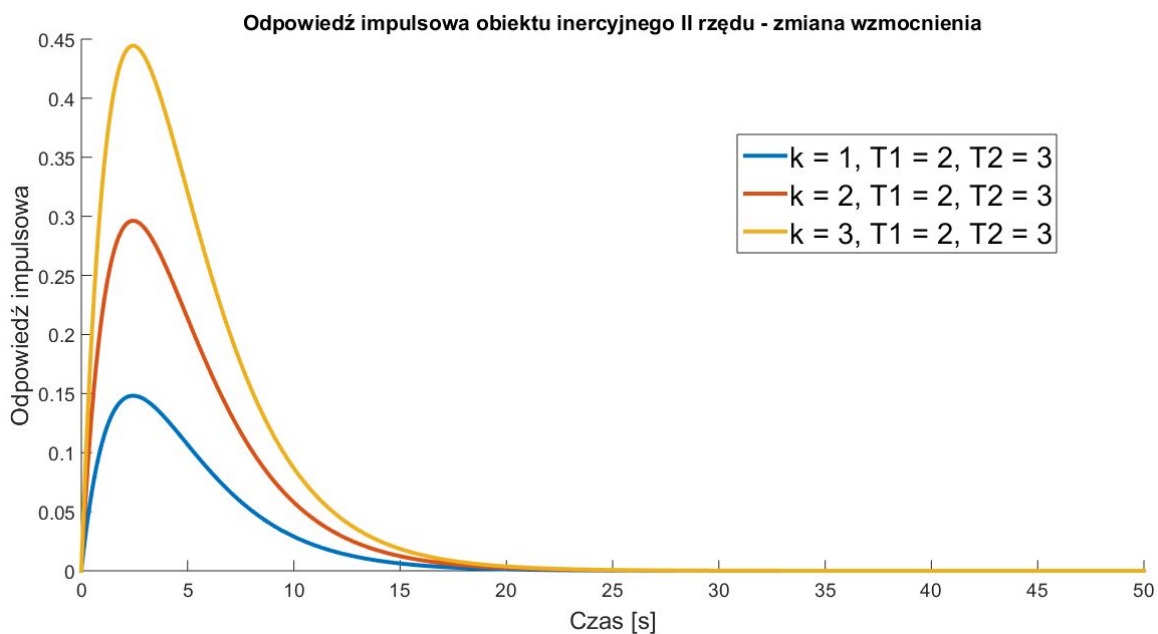
Rys. 5. Odpowiedź skokowa obiektu inercyjnego II rzędu - zmiana wzmacnienia

Z powyższej charakterystyki wynika że, podobnie jak w przypadku obiektu pierwszego rzędu, zwiększenie wzmacnienia podnosi charakterystykę, zwiększa wartość ustaloną, która równa jest współczynnikowi wzmacnienia. Na wykresie można również zaobserwować charakterystyczne przegięcie, występujące w obiektach inercyjnych II i wyższych rzędów.



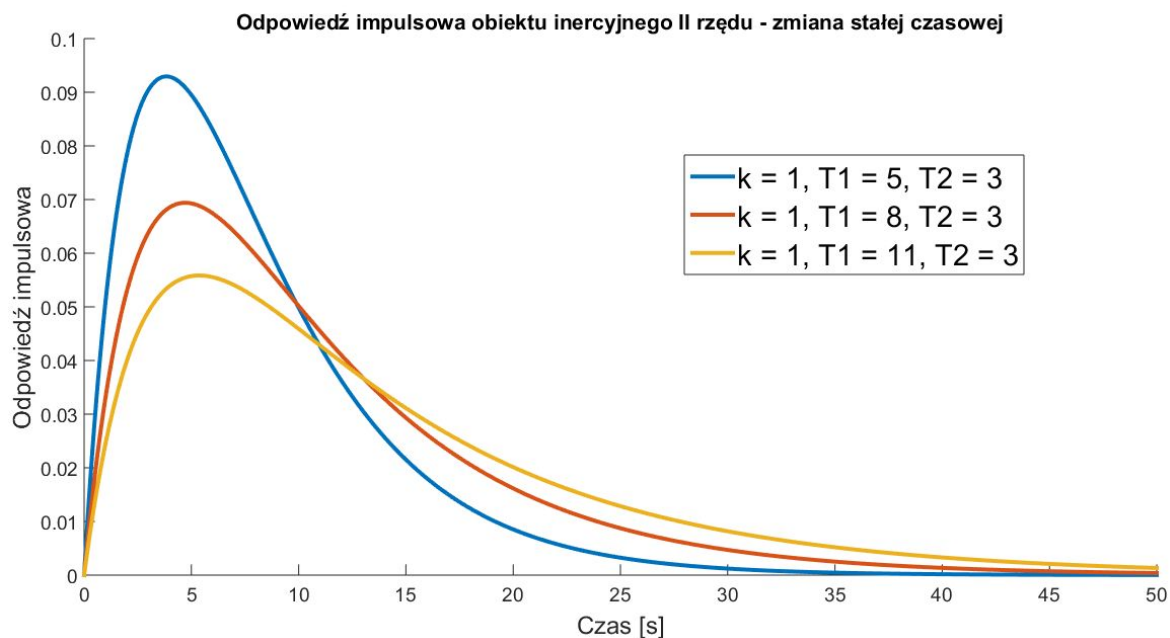
Rys. 6. Odpowiedź skokowa obiektu inercyjnego II rzędu - zmiana stałej czasowej

W tym przypadku wzrost stałej czasowej również łagodzi charakterystykę, zwiększa czas, po którym osiągnąta jest wartość ustalona.



Rys. 7. Odpowiedź impulsowa obiektu inercyjnego II rzędu - zmiana wzmocnienia

W przypadku odpowiedzi impulsowej obiektu inercyjnego II rzędu wzrost wzmocnienia powoduje zwiększenie się wartości maksymalnej odpowiedzi. Wartość wzmocnienia nie ma natomiast wpływu na czas zanikania odpowiedzi.



*Rys. 8. Odpowiedź impulsowa obiektu inercyjnego II rzędu - zmiana stałej czasowej*

W tym przypadku również można zaobserwować, że wzrost stałej czasowej wypłaszcza charakterystykę, zwiększa czas, po którym odpowiedź zanika. Ponadto, wraz ze wzrostem stałej czasowej maleje wartość maksymalna odpowiedzi.

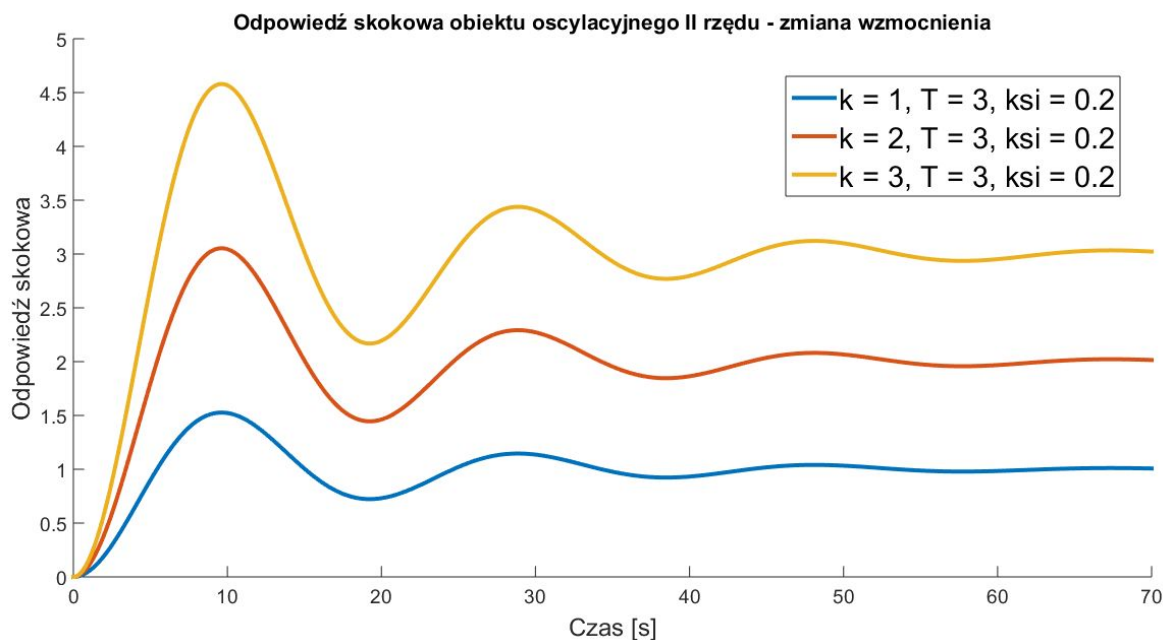
## Obiekt oscylacyjny II rzędu

Transmitancja obiektu oscylacyjnego II rzędu wygląda następująco:

$$G(s) = \frac{k}{T_0^2 s^2 + 2\xi T_0 s + 1}$$

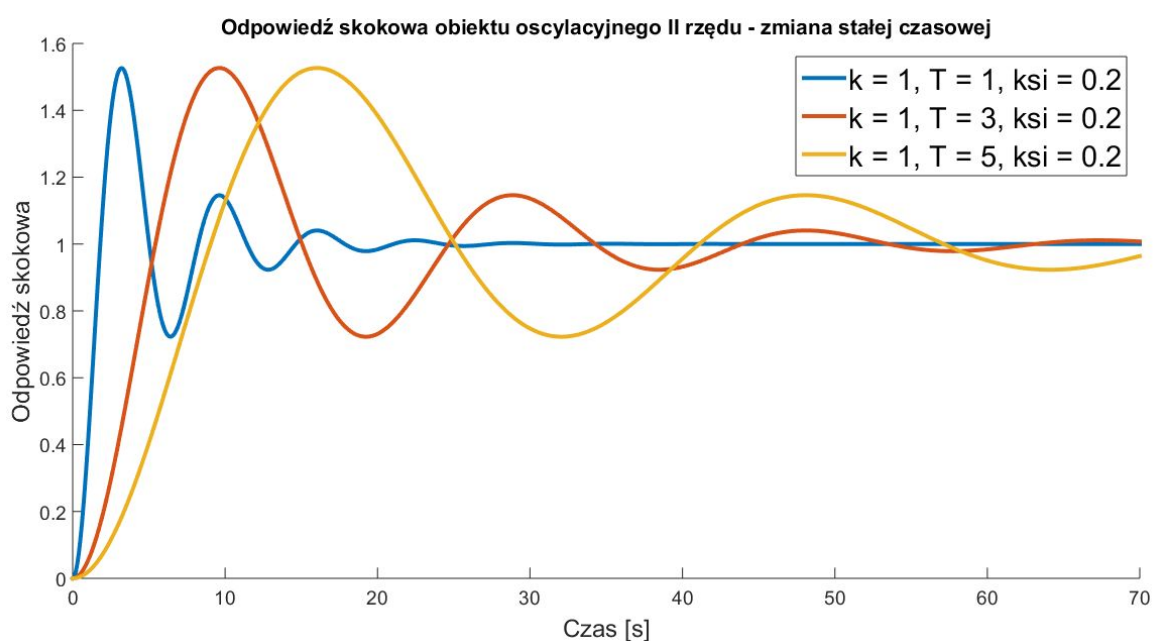
W przypadku tego obiektu zmienialiśmy 3 parametry - wzmocnienie, okres drgań własnych nietłumionych oraz współczynnik tłumienia.

Poniżej zaprezentowano rodziny charakterystyk skokowych i impulsowych tego obiektu.



Rys. 9. Odpowiedź skokowa obiektu oscylacyjnego II rzędu - zmiana wzmocnienia

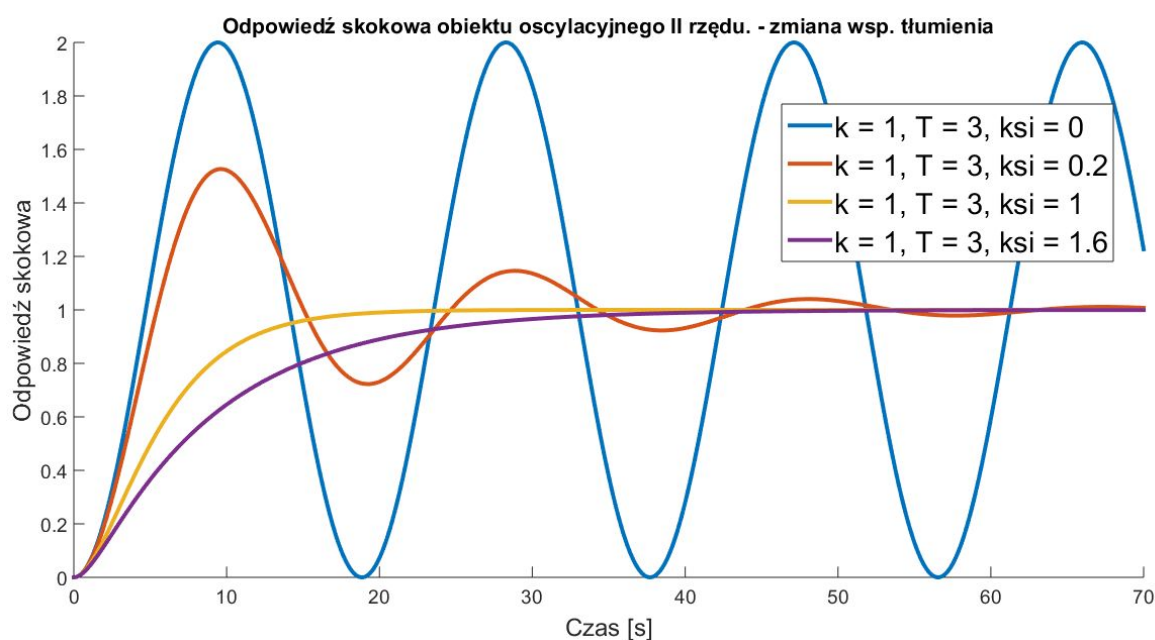
W tym przypadku zwiększenie wzmocnienia również powoduje podniesienie charakterystyki oraz zwiększenie wartości ustalonej odpowiedzi, która równa jest wartości wzmocnienia (w przypadku obiektu tłumionego). Obiekt nietłumiony oscylowałby wokół tej wartości, natomiast obiekty aperiodyczny i aperiodyczny krytyczny dążyłyby do tej wartości, nie przekraczając jej jednak.



Rys. 10. Odpowiedź skokowa obiektu oscylacyjnego II rzędu - zmiana okresu drgań własnych

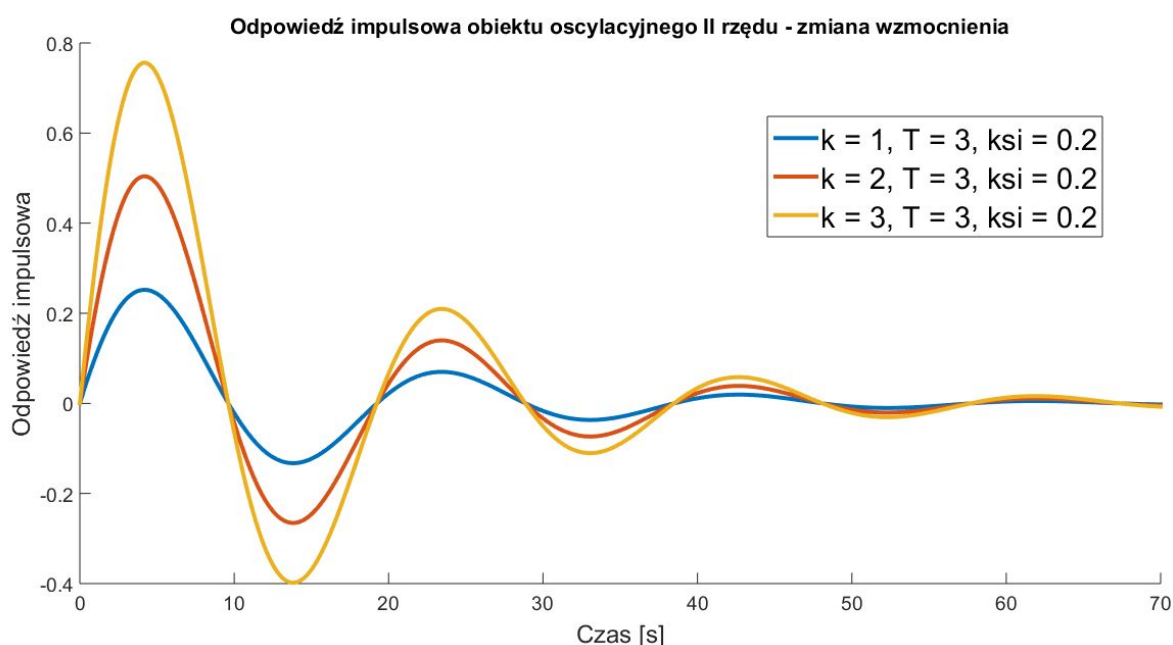
Jak widać, zwiększenie okresu drgań własnych rozciąga charakterystykę, wydłuża czas, po jakim obiekt zostanie stłumiony (w przypadku obiektu nietłumionego po prostu rozciągnęłoby to charakterystykę).





Rys. 11. Odpowiedź skokowa obiektu oscylacyjnego II rzędu - zmiana wsp. tłumienia

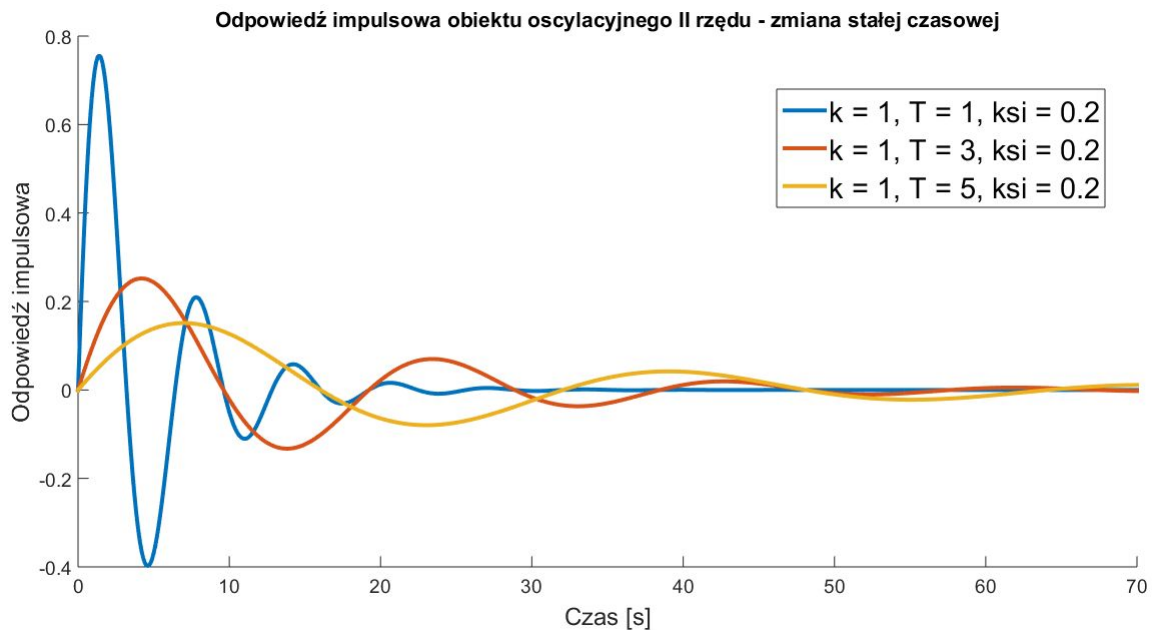
Zmiana współczynnika tłumienia powoduje sporą zmianę charakteru obiektu. Dla współczynnika równego zero mamy do czynienia z obiektem nietłumionym, oscylującym wokół wartości równej wzmocnieniu; dla wsp. od 0 do 1 mamy do czynienia z obiektem tłumionym; dla wartości tłumienia równej 1 mamy obiekt aperiodyczny krytyczny, a dla współczynnika tłumienia większego od 1 obiekt jest aperiodyczny. Obiekty aperiodyczne nie wykonują oscylacji, dążą od razu do wartości ustalonej.



Rys. 12. Odpowiedź impulsowa obiektu oscylacyjnego II rzędu - zmiana wzmocnienia

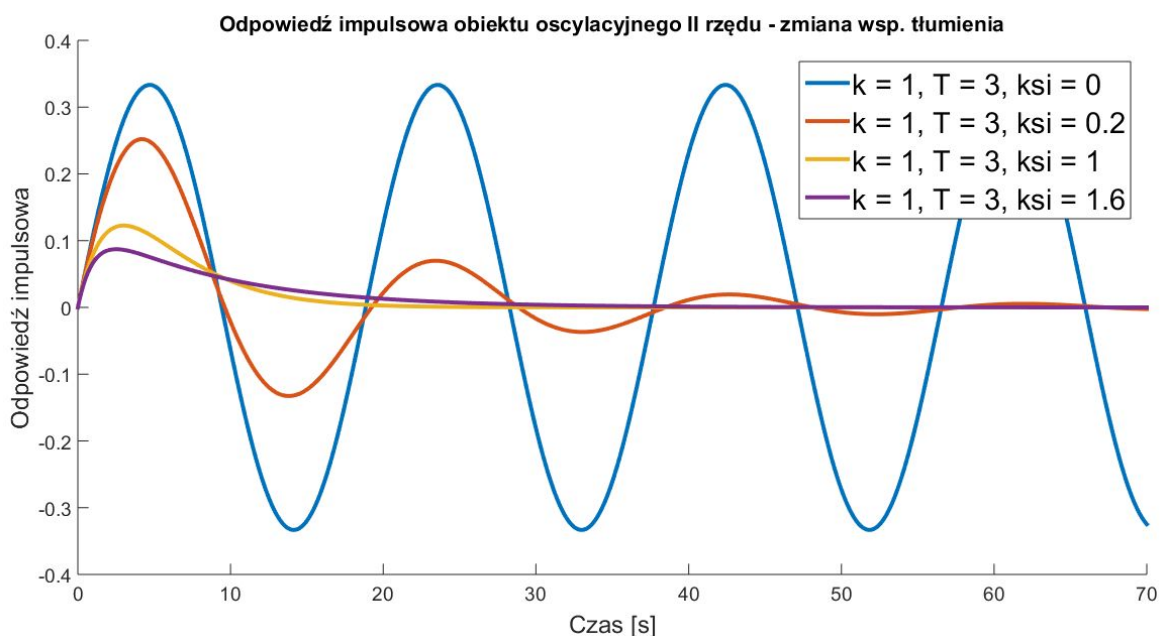


Jak widać, zwiększenie wzmocnienia rozciąga charakterystykę w pionie, powoduje zwiększenie wartości kolejnych maksimów odpowiedzi. Nie wpływa natomiast na czas, po jakim oscylacje zostają wygaszone (w przypadku obiektu tłumionego).



Rys. 13. Odpowiedź impulsowa obiektu oscylacyjnego II rzędu - zmiana okresu drgań własnych

Zwiększenie okresu drgań własnych w przypadku odpowiedzi impulsowej, podobnie jak dla odpowiedzi skokowej, rozciąga charakterystykę, zwiększa czas, po którym odpowiedź osiąga wartość 0. Powoduje to jednocześnie zmniejszenie się maksymalnej wartości odpowiedzi.



Rys. 14. Odpowiedź impulsowa obiektu oscylacyjnego II rzędu - zmiana wsp. tłumienia

W tym przypadku zmiana współczynnika tłumienia również zmienia charakter obiektu - od nietłumionego, przez tłumiony i aperiodyczny krytyczny, po aperiodyczny. Wzrost współczynnika tłumienia powoduje coraz silniejsze tłumienie oscylacji obiektu.

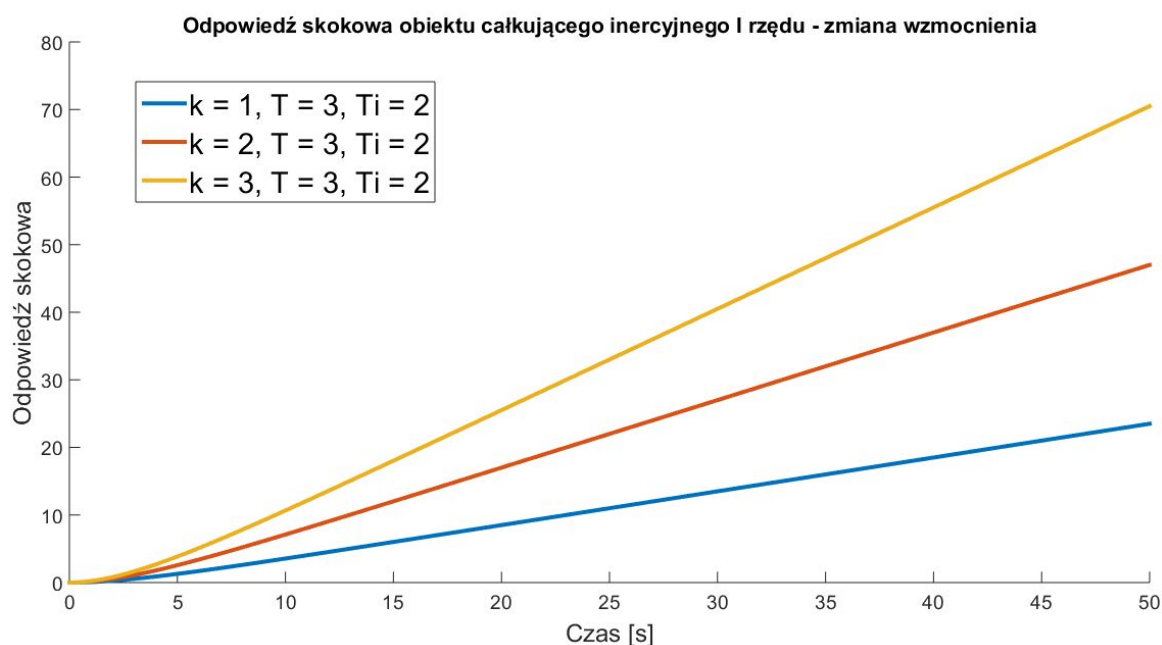
## Obiekt całkujący z inercją I rzędu

Transmitancja obiektu całkującego z inercją I rzędu przedstawia się następująco:

$$G(s) = \frac{k}{T_i s(Ts + 1)}$$

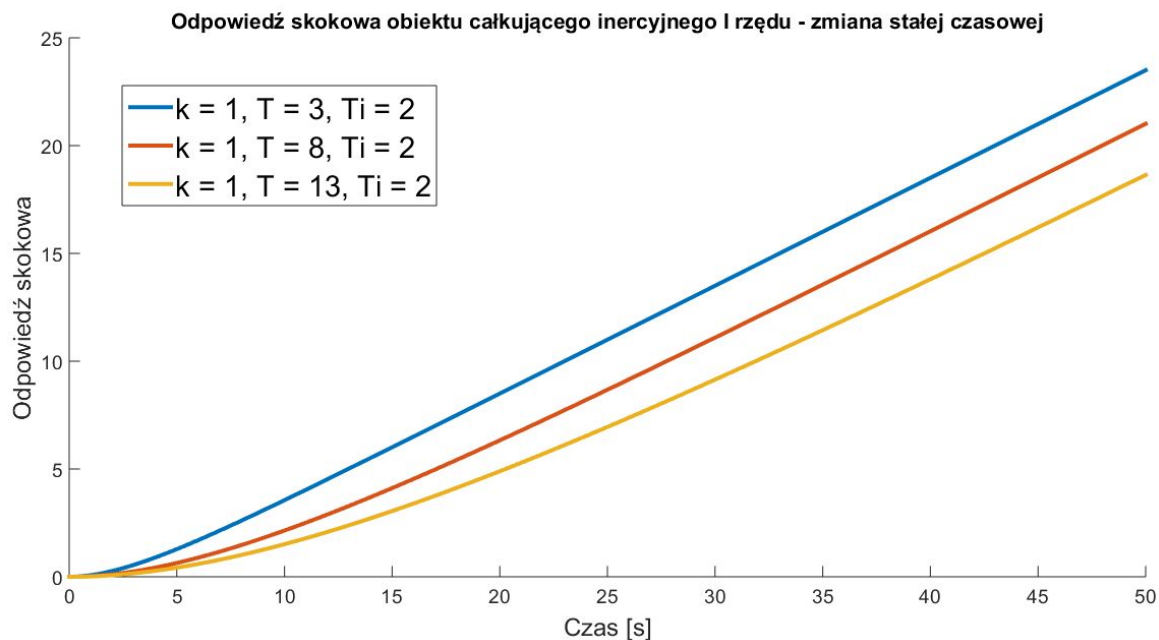
W przypadku tego obiektu badaliśmy wpływ zmian trzech parametrów na charakterystykę - wzmocnienia, stałej czasowej i czasu całkowania.

Poniżej przedstawiono wyznaczone przez nas odpowiedzi skokowe oraz impulsowe tego obiektu.



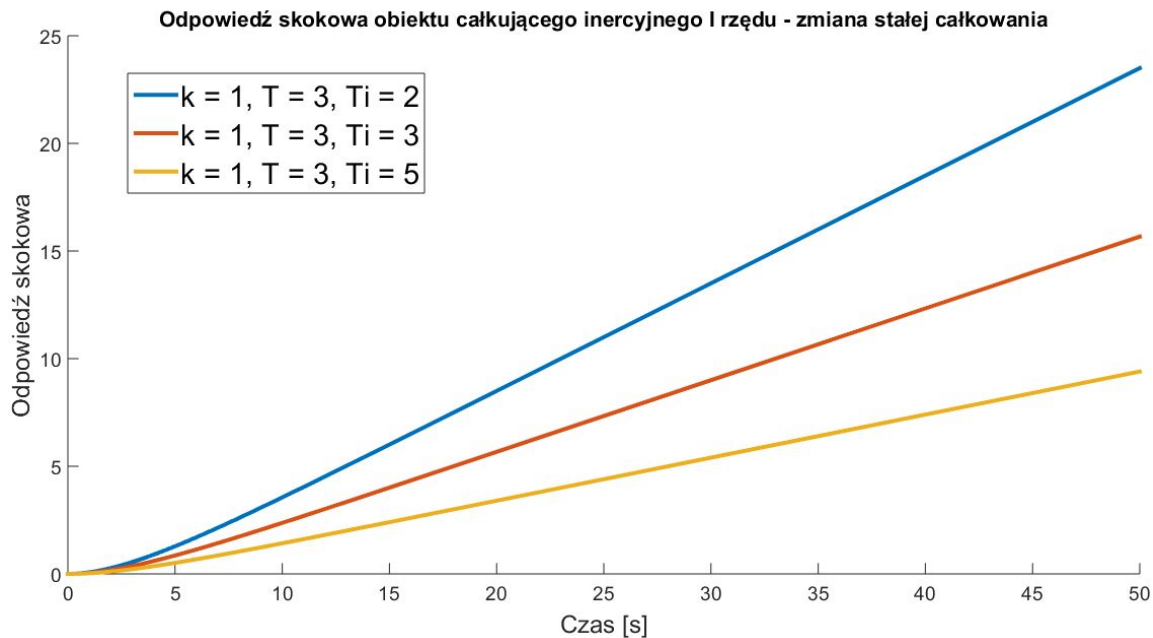
Rys. 15. Odpowiedź skokowa ob. całkującego z inercją I rzędu - zmiana wzmocnienia

Jak widać, w tym przypadku wraz ze wzrostem wzmocnienia charakterystyka podnosi się, zwiększa się współczynnik nachylenia wykresu. W chwilach początkowych dostrzec można inercję, wynikającą z istnienia części inercyjnej w obiekcie.



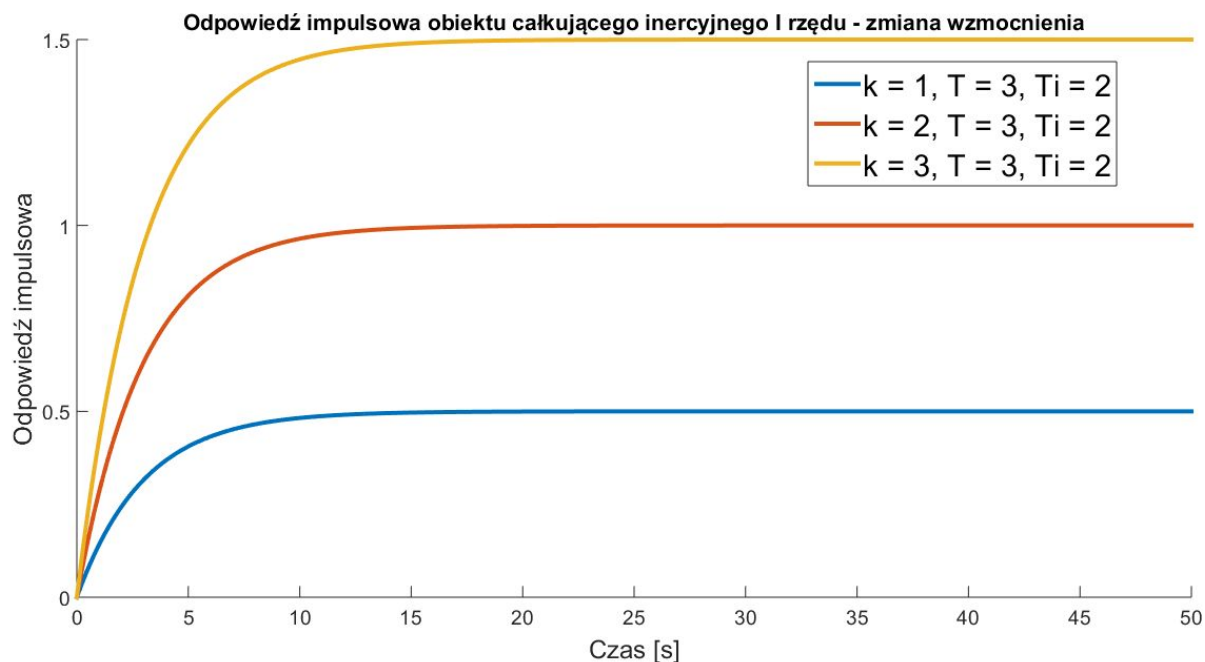
Rys. 16. Odpowiedź skokowa ob. całkującego z inercją I rzędu - zmiana stałej czasowej

Wzrost stałej czasowej zwiększa początkową inercję, ugina charakterystykę w kierunku osi poziomej. Nie ma natomiast wpływu na nachylenie odpowiedzi, w dalszej wykresu części można dostrzec, że poszczególne odpowiedzi są w zasadzie równoległe.



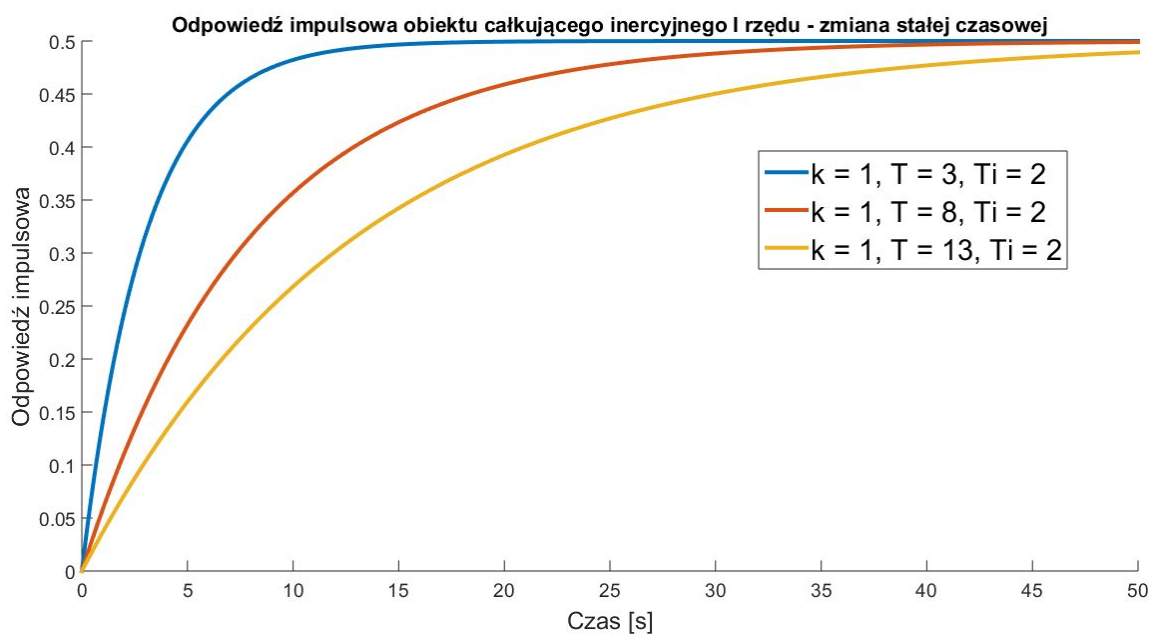
Rys. 17. Odpowiedź skokowa ob. całkującego z inercją I rzędu - zmiana czasu całkowania

Jak można się było spodziewać, wraz ze wzrostem czasu całkowania, maleje nachylenie charakterystyki. Całkowanie jest więc wolniejsze, odpowiedź nie narasta tak szybko.



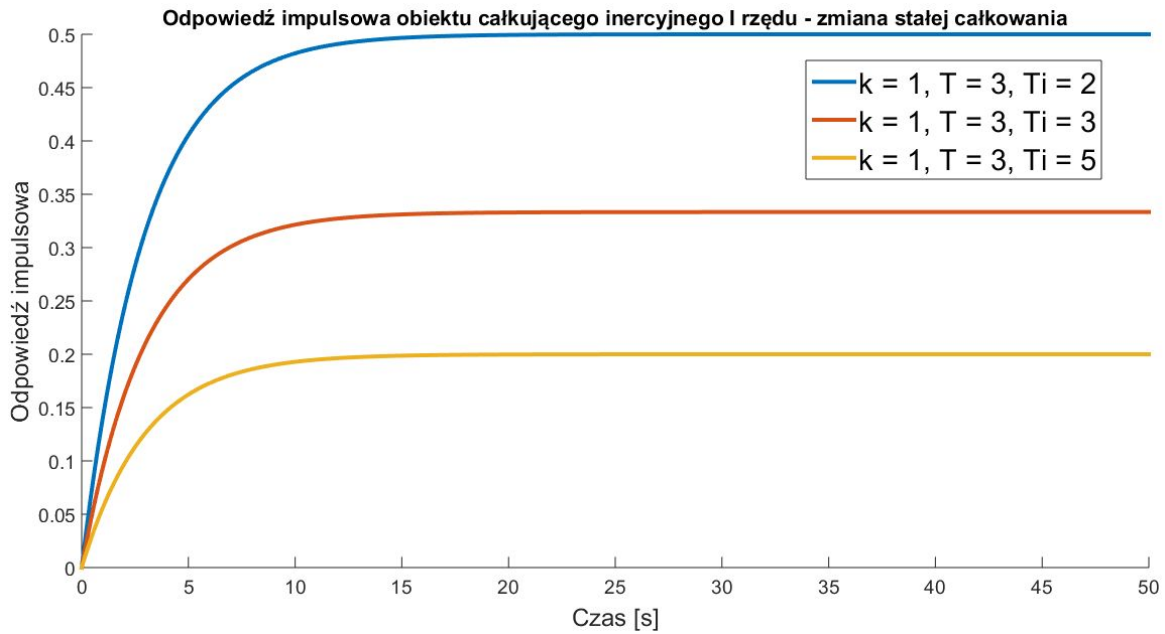
Rys. 18. Odpowiedź impulsowa ob. całkującego z inercją I rzędu - zmiana wzmocnienia

Jak widać, zmiana wzmocnienia w tym przypadku zwiększa wartość odpowiedzi w stanie ustalonym, po zakończeniu całkowania impulsu. Zwiększa również oczywiście nachylenie wykresu w fazie początkowej.



Rys. 19. Odpowiedź impulsowa ob. całkującego z inercją I rzędu - zmiana stałej czasowej

Wzrost stałej czasowej spowalnia całkowanie, łagodzi przebieg charakterystyki, czyni ją mniej stromą.



Rys. 20. Odpowiedź impulsowa ob. całkującego z inercją I rzędu - zmiana czasu całkowania

Wzrost czasu całkowania wydłuża oczywiście całkowanie, zmniejsza więc początkowe nachylenie charakterystyki. Zmniejsza również wartość w stanie ustalonym, która jest odwrotnie proporcjonalna do czasu całkowania.

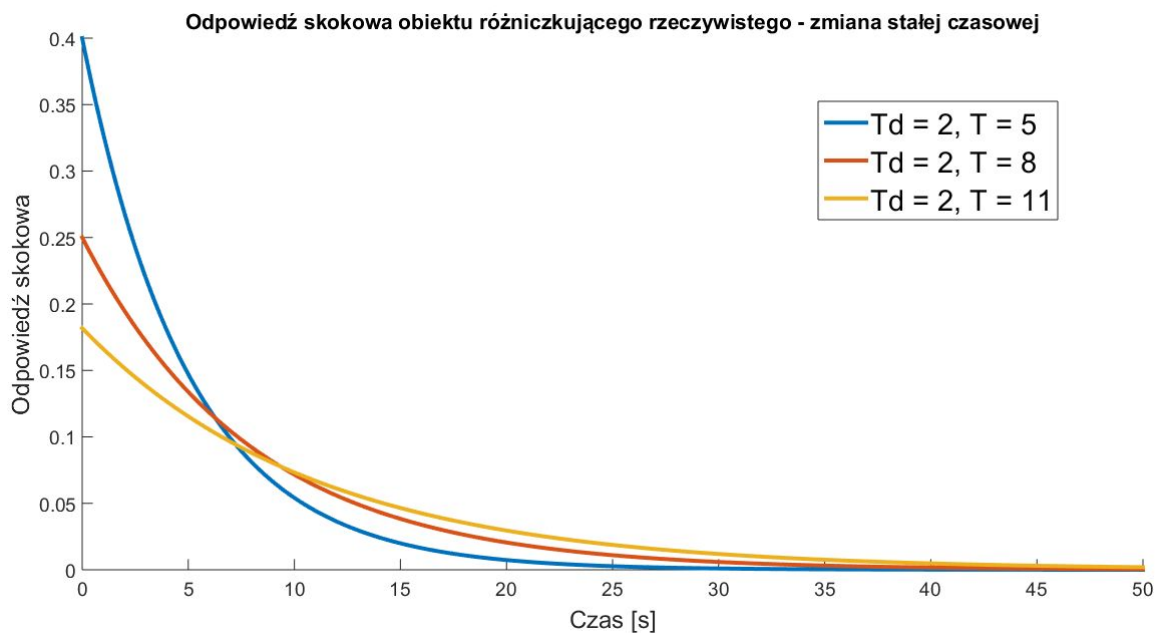
## Obiekt różniczkujący rzeczywisty

Transmitancja obiektu różniczkującego rzeczywistego jest opisana równaniem:

$$G(s) = \frac{T_d s}{T_s + 1}$$

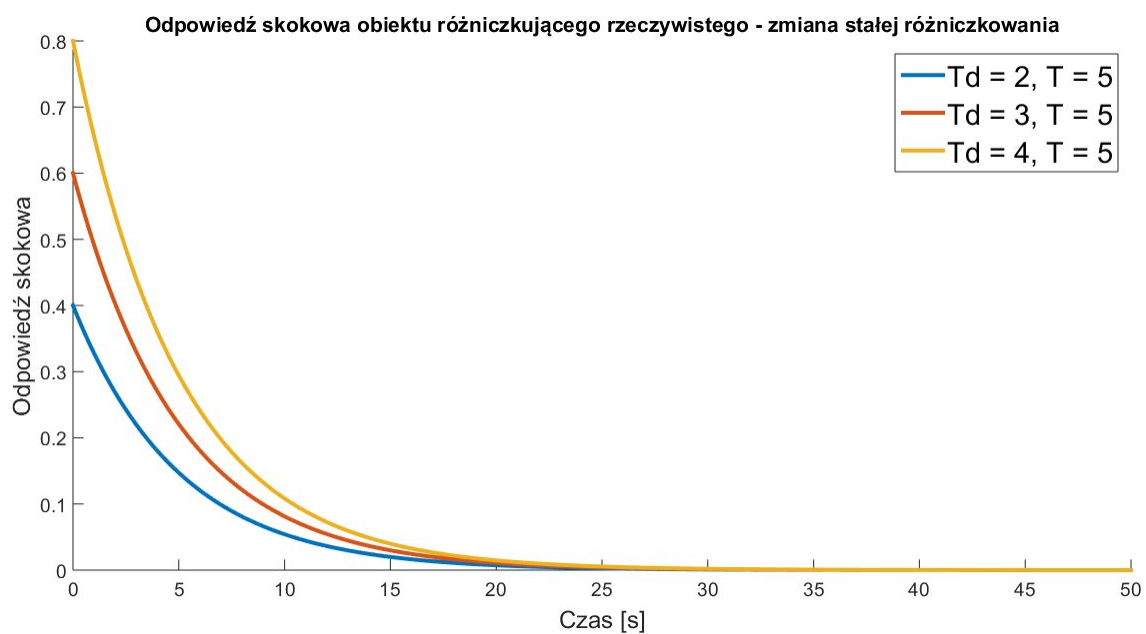
W przypadku obiektu różniczkującego zmienialiśmy dwa parametry - czas różniczkowania oraz stałą czasową.

Na poniższych wykresach przedstawiono odpowiedzi skokowe i impulsowe.



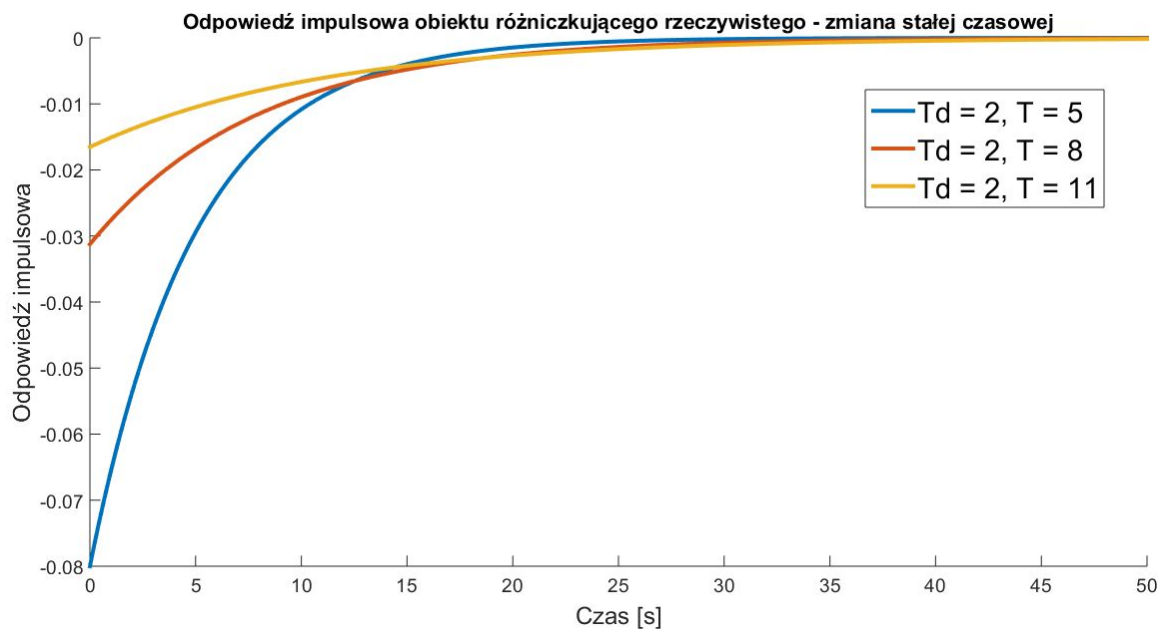
Rys. 21. Odpowiedź skokowa ob. różniczkującego rzeczywistego - zmiana stałej czasowej

Jak widać, wzrost stałej czasowej zmniejsza wartość początkową odpowiedzi. Zmniejsza również stromość charakterystyki, wypłaszcza ją.



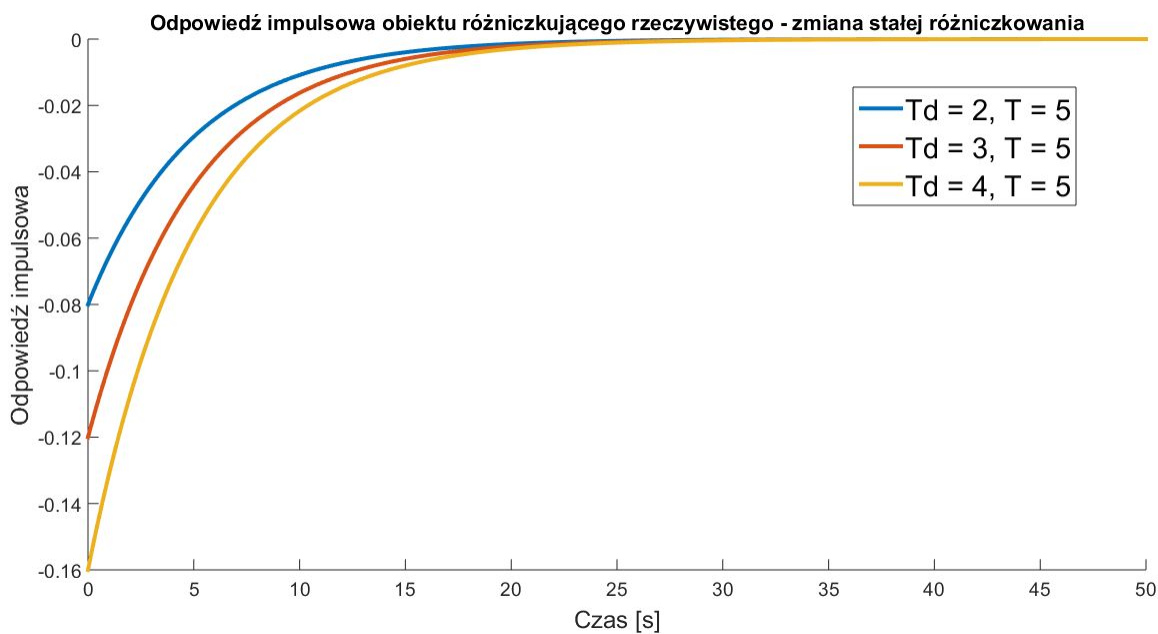
Rys. 22. Odpowiedź skokowa ob. różniczkującego rzecz. - zmiana czasu różniczkowania

Zwiększenie czasu różniczkowania z kolei podnosi charakterystykę, zwiększa wartość początkową. Wydłuża również proces różniczkowania sygnału wejściowego. Na kolejnych wykresach przedstawiono odpowiedzi impulsowe obiektu różniczkującego.



Rys. 23. Odpowiedź impulsowa ob. różniczkującego rzeczywistego - zmiana stałej czasowej

W przypadku wymuszenia impulsowego wzrost stałej czasowej wypłaszcza charakterystykę w kierunku osi poziomej.



Rys. 24. Odpowiedź impulsowa ob. różniczkującego rzecz. - zmiana czasu różniczkowania

Wzrost czasu różniczkowania obniża początkową część charakterystyki i wartość początkową, zwiększa czas, po którym odpowiedź osiąga 0.



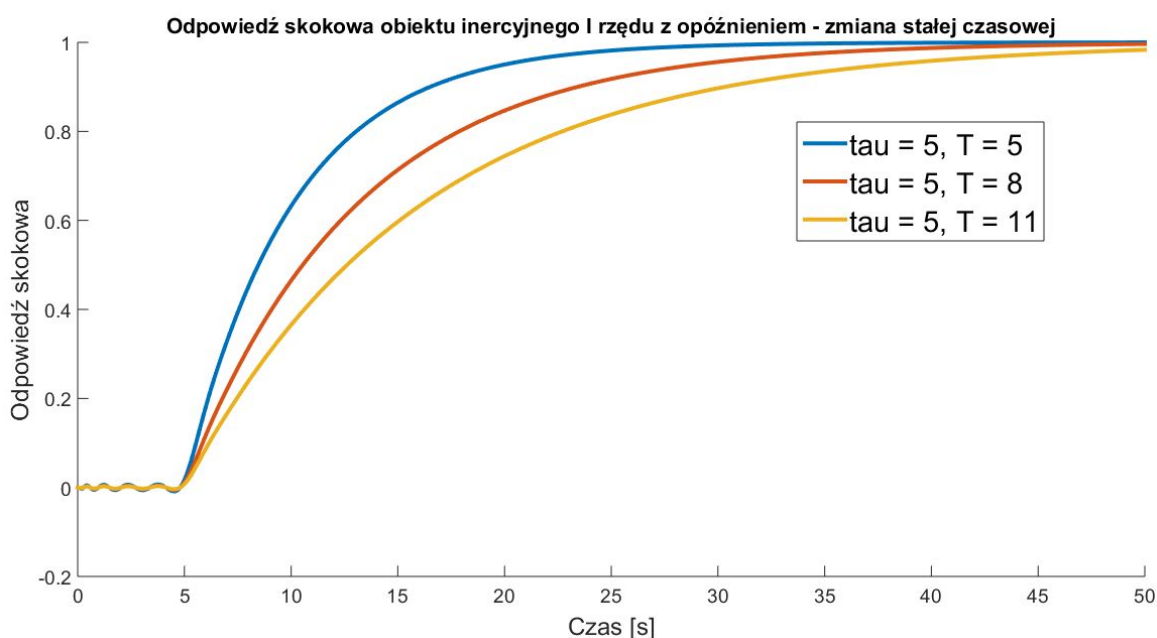
## Obiekt inercyjny I rzędu z opóźnieniem

Transmitancja obiektu inercyjnego I rzędu z opóźnieniem wygląda następująco:

$$G(s) = \frac{e^{-s\tau}}{Ts + 1}$$

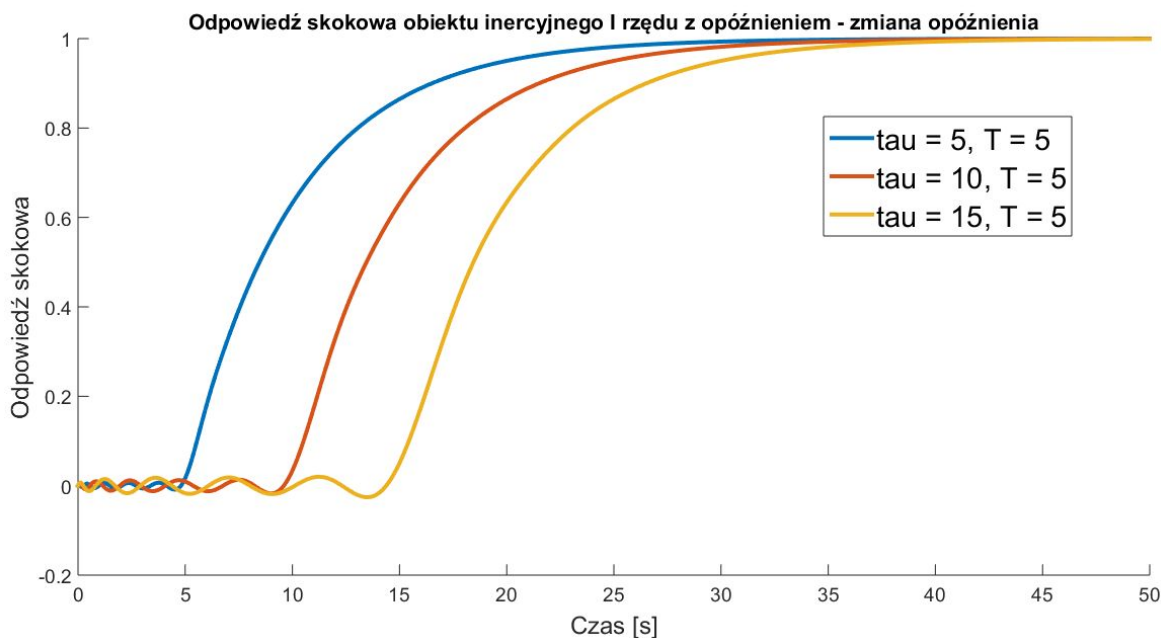
W obiekcie tym zmienialiśmy również dwa parametry - stałą czasową i opóźnienie, które zamodelowaliśmy w MATLABie przy pomocy aproksymacji Padego 10-tego rzędu.

Poniżej przedstawiliśmy odpowiedzi skokowe i impulsowe.



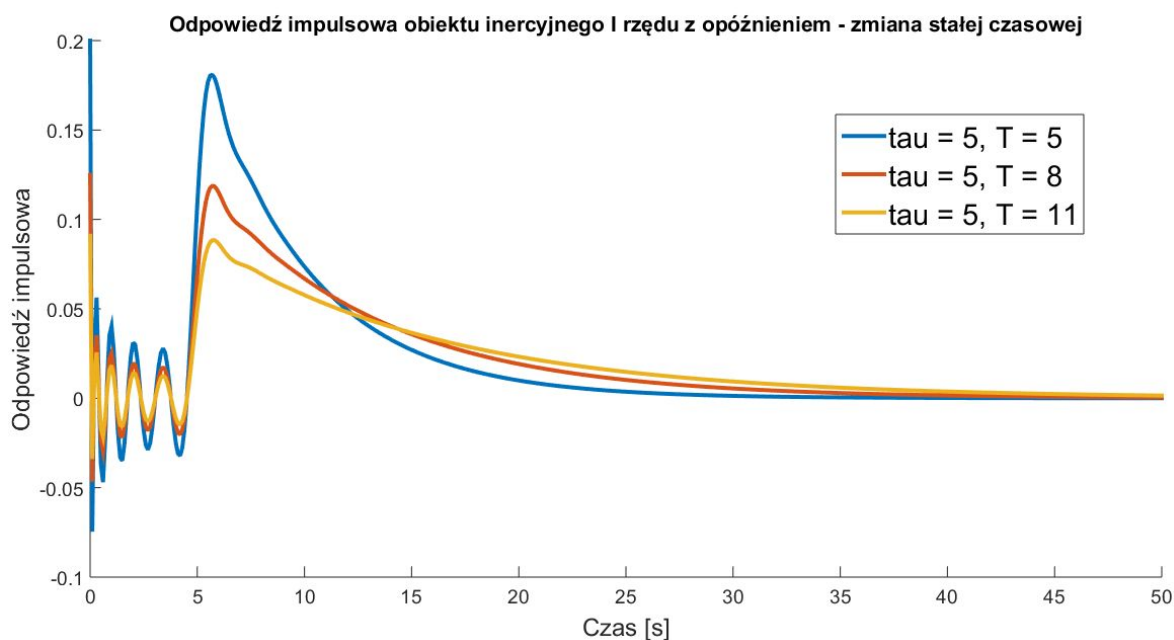
Rys. 25. Odpowiedź skokowa ob. inercyjnego I rzędu z opóźnieniem - zmiana stałej czasowej

Tak jak w poprzednich przypadkach, wzrost stałej czasowej zwiększa inercję obiektu, czyni jego charakterystykę skokową mniej stromą, bardziej łagodną, wydłuża czas, po którym odpowiedź osiąga wartość ustaloną. Można ponadto zauważyć, że aproksymacja Padego w tym przypadku w dobry sposób przybliżyła opóźnienie obiektu.



Rys. 26. Odpowiedź skokowa ob. inercyjnego I rzędu z opóźnieniem - zmiana opóźnienia

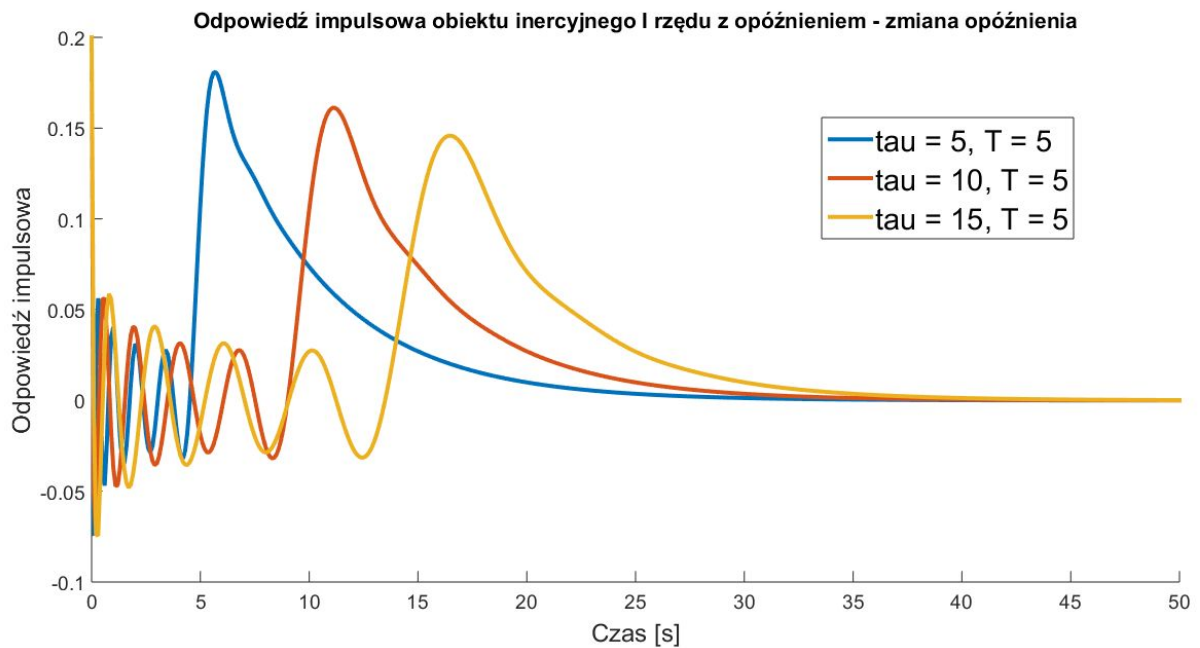
Można zauważyć, że dla większych wartości opóźnienia jakość aproksymacji Padego nieco się pogarsza. Skutkiem wzrostu opóźnienia jest oczywiście zwiększenie czasu, po którym obiekt zaczyna reagować na wymuszenie.



Rys. 27. Odp. impulsowa ob. inercyjnego I rzędu z opóźnieniem - zmiana stałej czasowej

W przypadku odpowiedzi impulsowej, wzrost stałej czasowej powoduje zmniejszenie maksymalnej wartości charakterystyki, wypłaszcza również charakterystykę, czyni ją mniej stromą. Można ponadto zauważyć, że w tym przypadku aproksymacja Bodego nie radzi sobie już z przybliżaniem opóźnienia, oscylacje są bardzo wyraźne. Aproksymacja

zniekształca również delikatnie odpowiedź, co można zauważyć w najwyższych punktach wykresów.



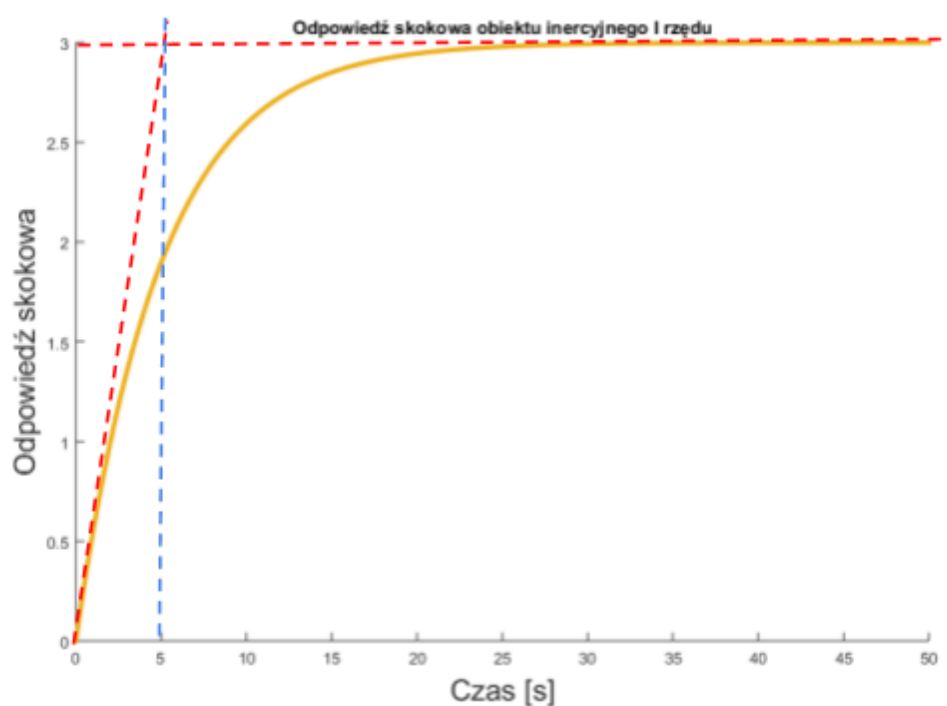
Rys. 28. Odpowiedź impulsowa ob. inercyjnego I rzędu z opóźnieniem - zmiana opóźnienia

Dla większych opóźnień jakość aproksymacji spada jeszcze bardziej i początkowe zachowanie charakterystyki nie ma nic wspólnego z opóźnieniem. Wzrost opóźnienia przesunęła oczywiście charakterystykę w prawo, zwiększa czas, po którym pojawia się odpowiedź obiektu na wymuszenie.

# Wyznaczanie parametrów

Naszym następnym zadaniem było wyznaczenie parametrów obiektów na podstawie ich odpowiedzi skokowych. Podaliśmy sposób w jaki można odczytać niektóre istotne wartości.

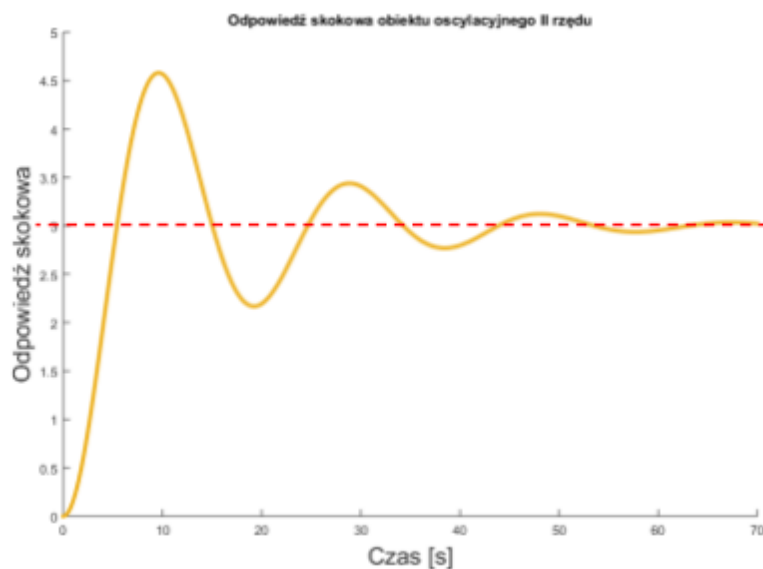
## Obiekt inercyjny I-szego rzędu



Rys. 29. Wyznaczanie parametrów na podstawie charakterystyki skokowej ob. in. 1 rz.

Wzmocnienie  $k$  odczytujemy w miejscu, w którym krzywa osiąga wartość maksymalną. Stała czasowa  $T$  w obiekcie to miejsce przecięcia się stycznej do krzywej charakterystyki w otoczeniu punktu  $(0,0)$ . Dla tego obiektu odczytaliśmy  $k = 3$  i  $T = 5$ .

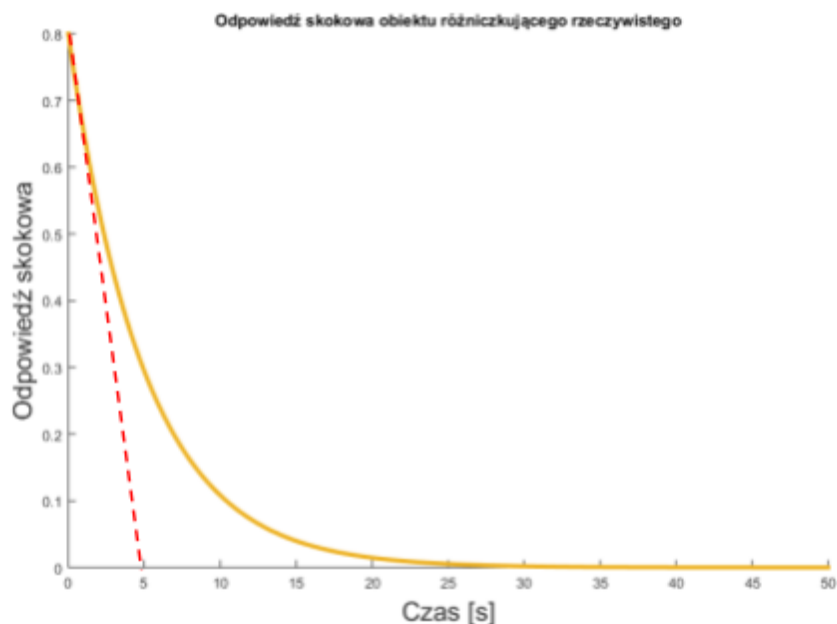
## Obiekt oscylacyjny II-giego rzędu



Rys. 30. Wyznaczanie parametrów na podstawie charakterystyki skokowej obiektu oscylacyjnego

Wartość tłumienia możemy oszacować na podstawie kształtu charakterystyki. Dla 0 nie występuje tłumienie i funkcja naprzemiennie osiąga maksimum i minimum równe  $2k$  oraz 0. Dla wartości pomiędzy 0 a 1 następuje tłumienie i funkcja będzie dążyć do osiągnięcia wartości  $k$  przechodząc kolejno nad i pod asymptotą. Dla wartości tłumienia większej od 1 nastąpi tzw. tłumienie krytyczne i funkcja nie będzie oscylować wokół asymptoty.

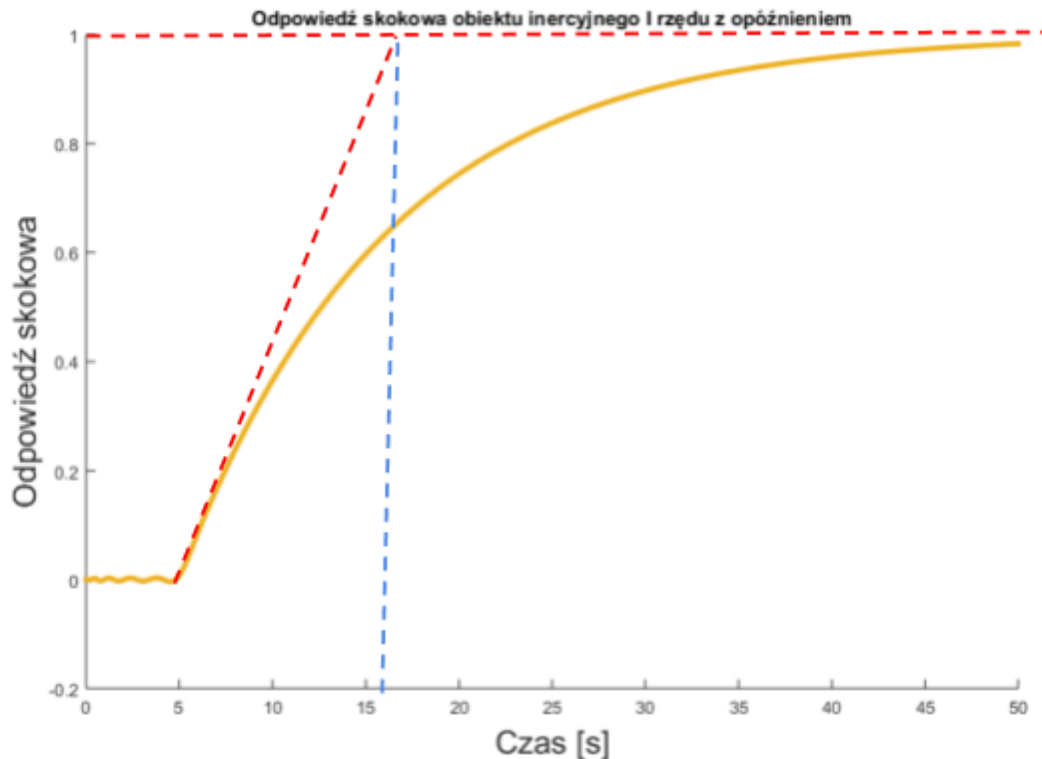
## Obiekt różniczkujący rzeczywisty



Rys. 31. Wyznaczanie parametrów na podstawie charakterystyki skokowej obiektu różn. rzecz.

Analizując obiekt różniczkujący rzeczywisty chcemy poznać czas różniczkowania  $T_d$  oraz stałą czasową  $T$ . Kreśląc styczną do krzywej dla otoczenia punktu dla  $t = 0$  będziemy mogli odczytać wartość  $T$  w miejscu przecięcia się tej stycznej z osią  $X$ . Czas różniczkowania poznamy mnożąc  $T$  przez wartość funkcji dla  $t = 0$ . Dla podanej charakterystyki jest to  $T = 5$  oraz  $T_d = 4$ .

## Obiekt inercyjny I-szego rzędu z opóźnieniem



Rys. 31. Wyznaczanie parametrów na podstawie charakterystyki skokowej obiektu in. 1 rz. z opóź.

Opóźnienie, często oznaczane grecką literą tau ( $\tau$ ) to czas po jakim rozpoczyna się odpowiedź inercyjna 1 rzędu.

Odpowiedź czasową otrzymamy rysując styczną do wykresu w punkcie  $(\tau, 0)$ . Następnie postępujemy analogicznie jak dla obiektu inercyjnego pierwszego rzędu. Miejsce przecięcia stycznej z asymptotą wskaże nam wartość  $T + \tau$ , dlatego musimy od wyniku jeszcze odjąć stałą opóźnienia, aby uzyskać  $T$ . W przypadku powyższej charakterystyki mamy  $\tau$  równe 5. Kreślimy styczną i otrzymujemy wynik 16, odejmując stałą opóźnienia uzyskujemy  $T = 11$ .

# Wnioski

Ćwiczenie pozwoliło nam zapoznać się z modelowaniem odpowiedzi skokowych i impulsowych obiektów przy pomocy MATLABa. Zapoznaliśmy się z charakterystykami czasowymi podstawowych typów obiektów oraz poznaliśmy wpływ poszczególnych parametrów na kształty tych charakterystyk.

Mogliśmy zauważyć, że zmiana wzmocnienia obiektu wpływa na wartość odpowiedzi w stanie ustalonym lub maksymalną wartość odpowiedzi. Zmiana stałej czasowej z kolei odpowiada za inercję, wpływa na ostrość, nachylenie charakterystyki, gwałtowność reakcji na wymuszenie. Czas całkowania oraz czas różniczkowania, jak sama nazwa wskazuje, odpowiadają za czas, w którym odpowiedź zostaje scałkowana lub zróżniczkowana; wydłuża ten czas lub go skraca. Opóźnienie jest czasem, po którym na wyjściu z obiektu pojawia się odpowiedź na wymuszenie. Zmiana współczynnika tłumienia może z kolei zmieniać charakter obiektu oscylacyjnego. Dla odpowiednich wartości współczynnika, wspomnianych przy omawianiu tego obiektu, obiekt może stać się oscylacyjnym nietłumionym, tłumionym, aperiodycznym lub aperiodycznym krytycznym.

Poznaliśmy również sposoby graficznego wyznaczania parametrów niektórych obiektów na podstawie ich odpowiedzi skokowych. Nie udało nam się wyznaczyć wszystkich parametrów wszystkich podstawowych obiektów.