Materiały do ćwiczeń

Przetwarzanie Sygnałów Cyfrowych
Teoria Przetwarzania Sygnałów

M. Jabłoński

16 maja 2019

KAiR, Akademia Górniczo-Hutnicza

Całkowe przekształenie Fouriera

Analiza harmoniczna sygnałów za pomocą szeregów Fouriera pozwala na badanie właściwości przebiegów wyłącznie okresowych. W praktyce jednak mamy do czynienia z sygnałami, które nie mają charakteru okresowego lub których czas trwania jest ograniczony. W takich sytuacjach analizę częstotliwością można przeprowadzić za pomocą tzw. **ciągłego przekształcenia Fouriera** $\mathcal{F}(x(t)) = X(j\omega)$ (1). W odróżnieniu od wyniku analizy harmonicznej (szeregi Fouriera), dziedzina ω ciągłej reprezentacji częstotliwościowej transformaty $X(j\omega)$ uzyskanej za pomocą przekształcenia Fouriera ma charakter ciągły.

$$X(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{2}$$

W ogólności, reprezentacja częstotliwościowa ma charkter zespolny dlatego można widmo sygnały przedstawić w równoważnej postaci fazowo-amplitudowej (3) gdzie $A(\omega)$ stanowi gęstość widmową amplitudy, zaś $\phi(\omega)$ gęstość widmową fazy. Wówaczas postać zespolona może być odtworzona w następujący sposób: $X(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$.

$$\begin{cases} A(\omega) = |X(j\omega)| \\ \phi(\omega) = arg(X(j\omega)) \end{cases} \tag{3}$$

Warunki Dirichleta (wystarczające) istnienia transformaty Fouriera sygnału $x(t)$ są następujące:

WD1 – Funkcja $x(t)$ jest bezwzględnie całkowana w całej dziedzinie t: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$

> **Uwaga:** Warunek ten jest **wystarczający** – nie jest konieczny do istnienia transformaty. Warunku tego nie spełniają funkcje które jednak mają reprezentację częstotliwościową np.: $\sin(\omega_0 t)$, $\cos(\omega_0 t)$ i inne. Funkcje te nie są transformalne w sensie zwykłym lecz w sensie granicznym $\lim\limits_{\alpha \to 0} x_\alpha(t) = x(t)$. Obraz częstotliwościwy funkcji trygonometrycznych możemy wyznaczyć jako granicę – ich obrazem częstotliwościowym są tzw. dystrybucje określone na dziedzinie pulsacji $\delta(\omega - \omega_0)$.

WD2 – Funkcja $x(t)$ ma skończoną liczbę ekstremów ($\max(t)$, $\min(t)$) na dowolnym skończonym przedziale.

WD3 – Funkcja $x(t)$ ma skończoną liczbę punktów nieciągłości na dowolnym skończonym przedziale. Wartości funkcji w punktach nieciągłości muszą być ograniczone.

Wzór na ciągłe przekształcenie Fouriera można łatwo wyprowadzić z definicji szeregu Fouriera zakładając że okres sygnału wejściowego T_0 w granicy zmierza do nieskończoności: $T_0 \to \infty$.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\omega_0 nt} = \tag{4}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j\omega_0 nt} dt \right) e^{j\omega_0 nt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{T_0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j\omega_0 nt} dt \right) e^{j\omega_0 nt} \tag{5}$$

Jeśli okres w granicy dąży do nieskończoności $T_0 \to \infty$, to:

$$\lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) e^{-j\omega_0 nt} dt \right) e^{j\omega_0 nt} \left(\frac{2\pi}{T_0} \right) = \tag{6}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 nt} dt \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{7}$$

1 Podstawowe własności transformaty Fouriera

- **Twierdzenie o liniowości**
  Jeżeli
  $$x(t) \equiv X(j\omega) \text{ oraz } y(t) \equiv Y(j\omega)$$
  to
  $$ax(t) + by(t) \equiv aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

- **Twierdzenie Parsevala**
  Tw. Parsevala mówi o równoważności energii w obu reprezentacjach sygnału a wartość $\frac{|X(j\omega)|^2}{2\pi}$, definiowana w literaturze także jako $\frac{X(j\omega)X^*(j\omega)}{2\pi}$, stanowi gęstość widmową energii. Czynnik 2π pomijamy, jeśli całkowanie odbywa się względem częstotliwości f a nie pulsacji ω.
  $$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \tag{8}$$

- **Przesunięcie w dziedzinie czasu**
  $$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \tag{9}$$
  Wniosek: przesunięcie oryginału w czasie powoduje zmianę jedynie części fazowej widma. Gęstość widmowa amplitudy pozostaje bez zmiany.

- **Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości**
  $$\mathcal{F}^{-1}\left\{X(j(\omega-\omega_0))\right\} = e^{j\omega_0 t} x(t) \tag{10}$$

- **Twierdzenie o różniczkowaniu**
  $$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega) \tag{11}$$
  pod warunkiem że funkcja $x(t)$ jest ciągła i $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t)) = 0$

- **Twierdzenie o całkowaniu**
  $$\mathcal{F}\left\{\int\limits_{-\infty}^{t} x(\zeta)d\zeta\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) \tag{12}$$
  $\int\limits_{-\infty}^{t} x(\zeta)d\zeta$ jest splotem $x(t) * \mathbf{1}(t)$.

- **Twierdzenie o skalowaniu w czasie i częstotliwości (o podobieństwie)**

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \tag{13}$$

pod warunkiem, że $a > 0$

- **Twierdzenie o transformacie splotu**

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau\right\} = X(j\omega)Y(j\omega) \tag{14}$$

- **Symetria dualna**

Proste i odwrotne przekształcenie Fouriera jest dualne. Transformata obrazu częstotliwościowego daje oryginał i odwrotnie.

Jeżeli

$$x(t) \equiv X(j\omega) \text{ to } X(t) \equiv 2\pi x(-\omega) \tag{15}$$

Symetria dualna na przykładzie impulsu prostokątnego i jego widma:

$$\mathcal{F}\left\{x_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ dla} & |t| < T_1 \\ 0 \text{ dla} & |t| > T_1 \end{cases}\right\} = X_1(j\omega) = \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega T_1}$$

$$\mathcal{F}\left\{x_2(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}\right\} = X_2(j\omega) = \begin{cases} 1 \text{ dla} & |\omega| < \omega_0 \\ 0 \text{ dla} & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

- **Sprzężenie i symetria**

$$\mathcal{F}\left\{x^*(t)\right\} = X^*(-j\omega) \tag{16}$$

Wniosek: dla funkcji rzeczywistej $x^*(t) = x(t)$ zachodzi $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ oraz $X^*(-j\omega) = X(j\omega)$, gęstość widmowa amplitudy jest parzysta, zaś gęstość widmowa fazy jest nieparzysta

2 Transformata Fouriera - przypadki szczególne chociaż niewyszukane

Biorąc pod uwagę pierwszy wystarczający warunek Dirichleta **WD1** istnienia transformaty Fouriera należy omówić sposób wyznaczania transformaty niektórych elementranych sygnałów które posiadają obraz częstotliwościowy choć tego warunku nie spełniają. Można je znaleźć w tablicach lub wyprowadzić w oparciu o własności przekształcenia Fouriera.

2.1 Dystrybucje przydane w przekształceniu Fouriera

Dystrybucja $\delta(t)$ (17) jest funkcjonałem (tzw. obiektem o nośniku zwartym) którego pole powierzchni jest równe jedności zaś wymiar (czas trwania w przypadku sygnału czasowego) wynosi 0. Graficznie sygnał oznaczany jest jako wektor pionowy o wysokości proporcjonalnej do energii sygnału. Dystrybucje mogą być całkowane i różniczkowane oraz pddają się przekształceniu Fouriera a także odwrotnemu przekształceniu Fouriera.

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t \neq 0 \end{cases} \tag{17}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \tag{18}$$

Funkcjonał $\delta(t)$ może być zdefiniowany jako granica rodziny funkcji prostokątnych, Lorentza lub krzywej Gaussa z granicą w $h = 0$: $\delta(t) = \lim\limits_{h \to 0} f(t, h)$

$$f(t, h) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{\frac{-t^2}{h}} \tag{19}$$

Wynikiem całkowania impulsu $\delta(t)$ jest skok jednostkowy $H(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt$ oznaczany często jako $\mathbf{1}(t)$.

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases} \tag{20}$$

Delta Diraca $\delta(t)$ i skok jednoskowy $\mathbf{1}(t)$ są przydatne w modelowaniu prcesu próbkowania sygnału oraz analizie sygnałów cyfrowych.

2.2 Transformata sygnału $\delta(t)$

Obrazem częstotliwościowym delty Diraca $\delta(t)$ jest funkcja stała (22) co oznacza, że w jego widmie występują wszystkie częstotliwości w równym stopniu.

$$\mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega}dt = 1 \tag{21}$$

Z kolei obrazem czasowym delty Diraca $\delta(\omega)$ w dziedzinie częstotliwości jest funkcja stała $x(t) = 1$ co oznacza zupełny brak zmienności sygnału - częstotliwość (pulsacja) równa 0.

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\delta(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega}d\omega = \frac{1}{2\pi} \tag{22}$$

zatem

$$\mathcal{F}\left\{1\right\} = 2\pi\delta(\omega) \tag{23}$$

Powyższe można również wyporwadzić na podstawie twierdzenia o symetrii dualnej.

2.2.1 Transformata funkcji $\cos(t)$ oraz $\sin(t)$

Funkcję $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ możemy zapisać na podstawie wzorów Eulera w postaci (24).

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}}{2} \tag{24}$$

Znając transformtę sygnału stałego oraz stosując twierdzenie o przesunięciu uzyskujemy (25). Analogicznie można uzyskać wzór na transformatę funkcji $\sin(\omega_0 t)$ (26)

$$\mathcal{F}\left\{\cos(\omega_0 t)\right\} = \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{25}$$

$$\mathcal{F}\left\{\sin(\omega_0 t)\right\} = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{26}$$

2.3 Modulacja

Przykładowym zastosowaniem przekształcenia Fouriera jest opis wyniku modulacji polegającej na złożeniu kilku sygnałów. W przypadku modulacji amplitudowej z falą nośną proces ten opisany jest równaniem (27), gdzie sygnał $x_n = \cos(\omega_0 t)$ nazywany jest falą nośną zaś $x_m(t)$ sygnałem modulującym a współczynnik $m \leq 1$ to głębokość modulacji. Sygnał $x_m(t)$ może mieć dowolny charakter ale w praktyce jego pasmo (zakres częstotliwość) powienien być mniejszy niż częstotliwośc sygnału nośnego $x_n(t)$. Przebieg modulujący $x_m(t)$ stanowi obwiednię sygnału nośnego $x_n(t)$.

$$y(t) = (1 + mx_m(t))x_n(t) \tag{27}$$

Jednym ze spobów modulacji jest próbkowanie które stanowi pierwszy etap konwersji sygnałów ciągłych do postaci cyfrowej.