Laboratorium 7

1. Transformacja falkowa - właściwości i zastosowania

Transformacja Fouriera stosuje w jądrze funkcje sinusoidalne. Transformacja falkowa stosuje w jądrze funkcję (zwana falką) spełniająca wymagania analizy czasowo-częstotliwościowej. Zatem liczba falek jest nieskończenie duża podobnie jak transformacji falkowych w odróżnieniu od zdefiniowanego jądra transformacji Fouriera.
Transformacja Fouriera umożliwia bardzo dobrą lokalizację w dziedzinie częstotliwości. Natomiast nie jest w stanie dostarczać lokalizacji w dziedzinie czasu. Jest to wynik własności funkcji kosinus i siunus. Nośniki tych funkcji w dziedzinie częstotliwości są punktami natomiast w dziedzinie czasu są nieograniczone. Nośniki falek oraz ich widm nie są punktowe, analiza z zastosowaniem transformacji falkowej nie dostarcza idealnej rozdzielczości, ani w dziedzinie czasu ani w dziedzinie częstotliwości.

W przypadku transformacji falkowej jądrem jest funkcja (zwana falką) spełniająca wymagania analizy czasowo-częstotliwościowej. Widmowa analiza falek pokazuje, że zawierają one częstotliwości należące do pewnego pasma (ściśle w przypadku falek Mayera lub tylko praktycznie jak w przypadku falek Daubechies). Istnieje nieskończenie wiele falek, zatem jest nieskończenie wiele transformacji falkowych w odróżnieniu od jednoznacznie zdefiniowanego jądra transformacji Fouriera. Jądro transformacji falkowej na ogół jest oznaczane literą Ψ. Jądro to jest zarówno funkcją czasu t jak i parametru skali *a* oraz parametru przesunięcia *b*. Parametr *a* przesuwa widmo falki w dziedzinie częstotliwości a parametr *b* przesuwa falkę w dziedzinie czasu. Dzięki temu możliwa jest analiza czaso-zmiennego rozkładu częstotliwości.

Transformacja falkowa służy więc do analizy sygnałów niestacjonarnych, ponieważ dostarcza informacji o czasowo-częstotliwościowych zmianach sygnałów.

Proces stacjonarny – proces stochastyczny, w którym wszystkie momenty oraz momenty łączne są stałe. Gdy wartość średnia, wariancja oraz funkcja autokorelacji zmieniają się wraz ze zmianą czasu, proces losowy nazywa się niestacjonarnym. Przykładem procesu stacjonarnego jest proces szumu białego. Procesem niestacjonarnym jest zaś proces jednokrotnego uderzenia w talerze perkusyjne, gdzie moc akustyczną kolizji zmniejsza się wraz z upływem czasu.

Transformacja falkowa dla sygnałów analogowych (ciągłych) jest przekształceniem całkowym

$$t(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

gdzie
a − parametr skali (przesunięcie w dziedzinie częstotliwości),
b − parametr przesunięcia w dziedzinie czasu t,

$s(t)$ − analizowany sygnał,

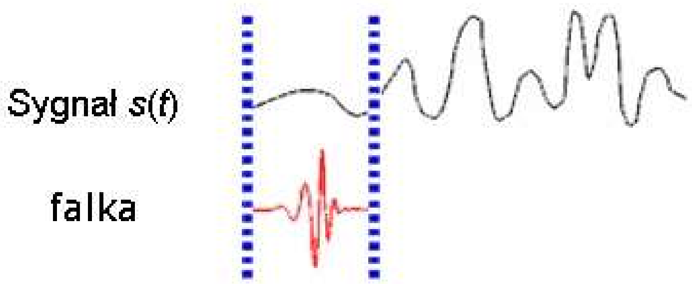
$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ − jądro transformacji falkowej,

$t(a, b)$ - transformata falkowa.

Wynik transformacji falkowej

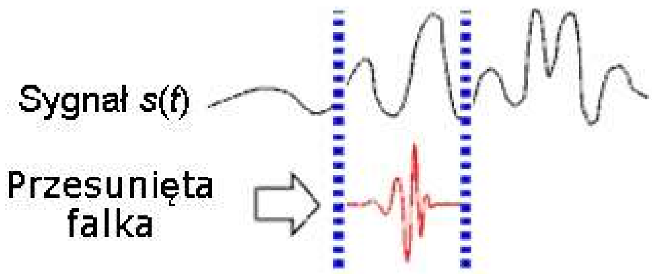
Wynikiem transformacji falkowej są współczynniki, których wartości są zależna od parametrów a i b oraz sygnału badanego $s(t)$. Dla danych wartości a i b współczynnik jest miarą podobieństwa pomiędzy daną falką a wybranym fragmentem sygnału $s(t)$. O ile wygodnie dla nas by było gdyby wartości otrzymane w wyniku analizy falkowej zawierały się w przedziale <0,1> (0 – sygnał krańcowo różny, niepodobny; 1 – sygnały identyczne), to w wyniku ciągłej transformacji falkowej (np. w pakiecie Matlab) otrzymujemy szereg współczynników, które wykraczają poza ten zakres przyjmując wartości np. z zakresu (-4 , 4).

Przykład procedury obliczania współczynnika falkowego:



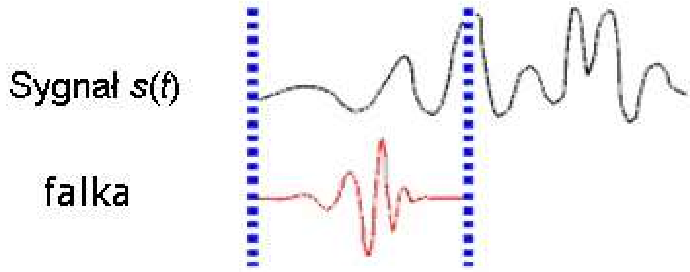
Rys. 1. Falka przy pewnej skali a i parametrze przesunięcia b

Falka przy pewnej skali a i parametrze przesunięcia b jest porównywana z sygnałem $s(t)$, w wyniku czego uzyskujemy współczynnik falkowy równy 0,0102



Rys. 2. Przesunięcie funkcji falkowej o parametr *b*, w wyniku czego zostanie ona porównana z innym fragmentem sygnału $s(t)$

Następną operacją jest przesunięcie funkcji falkowej o parametr b, w wyniku czego zostanie ona porównana z innym fragmentem sygnału $s(t)$.

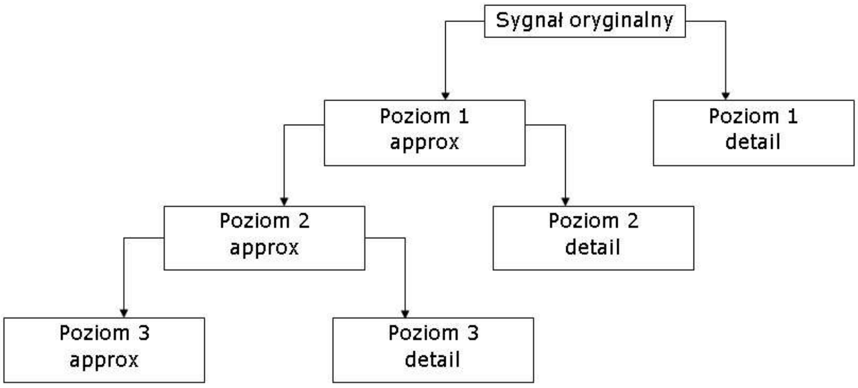


Rys. 3. Wszystkie fragmenty sygnału zostają porównane z daną funkcją falkową

W momencie gdy wszystkie fragmenty sygnału zostaną porównane z daną funkcją falkową przy zadanej skali *a*, zostaje ona zmieniona (w naszym przypadku skala *a* została zwiększona). W wyniku czego uzyskujemy inne wartości współczynnika falkowego (tutaj 0,2247).

Dekompozycja falkowa

Dyskretna transformacja falkowa (DWT) pozwala przedstawić sygnał w postaci liniowej kombinacji współczynników $a_j(k)$, $d_j(k)$. Współczynniki $d_j(k)$ zawierają informację o wysokich częstotliwościach oraz tworzą zbiór detali. Natomiast współczynniki $a_j(k)$ zawierają informację dolnoprzepustową, czyli stanowią aproksymację sygnału. DWT jest obliczana za pomocą filtrów. Jeżeli sygnał zostanie przepuszczony przez 2 filtry, jeden przepuszczający niskie, a drugi przepuszczające wysokie częstotliwości. Wtedy zostaje rozłożony na dwie części (szczegółową, nie zawierających informacji o niskich częstotliwościach) oraz przybliżającą, nie zawierających informacji o wysokich częstotliwościach.
Dekompozycja sygnału może być wykonywana wielokrotnie.



Rys. 4. Dekompozycja falkowa

Zastosowania falek

−Kompresja odcisków palców FBI. FBI miało 200 mln odcisków palców. Obliczono, że do przechowywania w pamięci komputera potrzebne by było 2000 terabajtów pamięci. Dzięki zastosowaniu falek udało się zmniejszyć zajętość każdego z obrazów do 7%. Kompresja JPG dała radę do 10%.

−Lokalizacja zaburzeń w pracy silnika. Falki są stosowane do analizy danych dotyczących silników, aby wykryć ewentualne uszkodzenia.

−Wygładzanie sygnałów. Szum jest cechą wysokich częstotliwości. Aby go usunąć wystarczy usunąć współczynniki d1, d2.

Przykład 1

Zapoznać się z toolboxem funkcją **waveletAnalyzer** (w starszych wersjach Matlab **wavemenu**). Proszę przeanalizować pliki: `wiatrak_20.wav`, `wiatrak_21.wav`, `wiatrak_23.wav`, `wiatrak_24.wav`, `przekladnia20.wav`, `przekladnia21.wav`, `przekladnia23.wav`, `przekladnia24.wav`.

Naciskając `Wavelet-1D->File->Load->Signal`
wybrać kolejno próbkę dźwięku `wiatrak_20.wav`.