Materiały do ćwiczeń

Przetwarzanie Sygnałów Cyfrowych
Teoria Przetwarzania Sygnałów

M. Jabłoński

14 marca 2019
KAiR, Akademia Górniczo-Hutnicza

Wprowadzenie

1 Sygnały ciągłe, dyskretne i cyfrowe

Sygnały cyfrowe stanowią bardzo istotny element współczesnej szeroko pojętej nauki i techniki. Ze względu na rozwinięte metody obliczeń komputerowych sygnały stanowią najczęściej wynik przetwarzania jakiejś wielkości fizycznej o charaktererze ciągłym (temperatura, ciśnienie, naprężenie, intensywność oświetlenia) na sygnał elektryczny (prąd I lub napięcie U). W procesach próbkowania (sygnał dyskretny) oraz kwantyzacji (sygnał skwantowany) zachodzących w torze przetwornika analogowo-cyfrowego wielkości te zamienianie są na uporządkowane ciągi liczb które mają określoną reprezentację w systemie binarnym (por. tab. 1). W niektóych wypadkach, już podczas proceu przetwarzania wielkości fizycznych dochodzi do dyskretyzacji. Np. w matrycach czujników kamer wizyjnych strumień światła próbkowany jest z określoną rozdzielczością przestrzenną (skończona liczba pikseli na powierzchni czujnika) i czasową (skończona liczba ramek obrazu w ciągu sekundy). Istnieją również sygnały niepowiązane z wielkościami fizycznymi. Mogą nimi być dane statystyczne lub np. notowania giełdowe. gdzie:

Tabela 1: Podstawowa klasyfikacja sygnałów

	$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{N}$
$t \in \mathbb{R}$	sygnał ciągły	sygnał skwantowany
$t \in \mathbb{N}$	sygnał dyskretny	**sygnał cyfrowy**

t – dziedzina (np. czas, odległość, ...),
x – przeciwdziedzina (wartość chwilowa napięcia, reprezentacja liczbowa, ...).

Prawidłowa zamiana sygnału ciągłego na cyfrowy oraz interpretacja wyników tej konwersji wymaga znajomości parametrów wejściowego sygnału ciągłego oraz takiego jego ukształtowania aby uzyskany cygnał cyfrowy możliwe jednoznacznie odwzorowywał właściwości sygnału ciągłego. Jako typowy sygnał cyfrowy, w trakcie ćwiczeń, będziemy rozumieć uprządkowany ciąg liczb reprezentowanych w urządzeniu obliczeniowym (procesor cyfrowy lub synchroniczny cyfrowy układ elektroniczny), pamięci cyfrowej lub pliku.

Analiza harmoniczna sygnałów

2 Rozwijanie sygnałów w szereg Fouriera

Jednym z podstawowych narzędzi matematycznych pozwalających na badanie rzeczywistych sygnałów ciągłych jest fourierowska analiza harmoniczna polegająca na rozwinięciu nieskończonego okresowego sygnału ciągłego w tzw. szereg Fourier'a. Umożliwia ona m.in. analizę zachowania liniowych i stacjonarnych układów dynamicznych (mechanicznych, elektrycznych i innych) w stanie ustalonym podczas pobudzenia sygnałem ciągłym okresowym. Pozwala modelować proces konwersji sygnału analogowego (ciągłego) na postać cyfrową tj. przetwarzanie A/C (Analog/Cyfra). Jest również wykorzystywana w opisywaniu procesu modulacji oraz ocenie zniekształceń sygnałów.

Szereg Fouriera możemy potraktować jako sygnał dyskretny określony na dziedzinie częstotliwości. Węzły dyskretyzacji są kolejnymi krotnościami podstawowego okresu zmienności sygnału wejściowego. Wartości szeregu przyporządkowane kolejnym węzłom dyskretyzacji mogą być liczbami zespolonymi i odwzorowują wagowy udział przebiegu sinusidalnego (o danej częstotliwości dyskretnej i określonej fazie) w formowaniu sygnału ciągłego.

Na potrzeby ćwiczeń przyjmujemy że funkcja $x(t)$ opisująca sygnał ciągły ma charakter rzeczywisty a nie zespolony i spełnia warunek $x(t) = x^*(t)$. Jest to uzasadnione, ponieważ większość technicznych systemów analizy i przetwarzania operuje na rzeczywistych wielkościach fizycznych. Rozwinięciu w szereg Fouriera poddaje się przebiegi opisane funkcjami okresowymi $x(t)$ spełniającymi warunek $\bigwedge\limits_{t\in\mathbb{R}} \bigwedge\limits_{k\in\mathbb{N}} f(t) = x(t + kT_0)$, gdzie T_0 - okres, $k \in \mathbb{C}$. Oprócz tego funkcja $x(t)$ musi spełnić trzy warunki Dirichlet'a:

WD1 – jest bezwzględnie całkowalna w każdym okresie T_0 $\int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} |x(t)|dt < \infty$, gdzie $t_1 \in \{-\infty, +\infty\}$

WD2 – posiada skończoną liczbę ekstremów w każdym okresie T_0,

WD3 – posiada skończoną liczbę punktów nieciągłości w każdym okresie T_0.

Jeśli funkcja spełnia te trzy warunki wówczas zachodzi równoważność $x(t) \equiv X$ a szereg dyskretny X_n jednoznacznie opisuje ciągły sygnał $x(t)$. Możliwe jest również syntezowanie ciągłego sygnału okresowego poprzez ustalanie wartości współczynników szeregu X_n. Rozwinięcie w szereg Fouriera i transformacja odwrotna opisana może być za pomocą jednej z trzech postaci: spostaci wykładniczej (1,2), fazowej (3) trygonometrycznej (5,6).

- postać wykładnicza, gdzie $n \in \mathbb{Z}$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)e^{-j\omega_0 nt}dt \tag{1}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\omega_0 nt} \tag{2}$$

- postać fazowa

$$\theta_n = \arg(X_n) \tag{3}$$

$$x(t) = |X_0| + 2\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| cos(n\omega_0 t + \theta_n) \tag{4}$$

- postać trygonometryczna dla sygnałów rzeczywistych, gdzie $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_o = \frac{1}{T_0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)dt \\ a_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)\cos(\omega_0 nt)dt \\ b_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)\sin(\omega_0 nt)dt \end{cases} \tag{5}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \tag{6}$$

We wzorach (1-6) występuje pulsacja ω_0 powiązana z okresem T_0 przebiegu i jego częstotliwością w następujący sposób: $\omega_0 = 2\pi,\ f_0 = \frac{1}{T_0}$.

Czynnik $g_n(t) = e^{-j\omega_0 nt}$ w postaci wykładniczej (1) reprezentuje harmoniczne zespolone funkcje bazowe w postaci nieskończonej liczby funkcji trygonometrycznych sin() i cos() o pulsacjach $n\omega_0$. Mogą one stanowić bazę ponieważ spełniają warunek ortogonalności (7) w granicach jednego okresu T_0.

$$\bigwedge_{n \neq m} \int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} g_n(t)g_m^*(t)dt = 0 \tag{7}$$

2.1 Podstawowe własności szeregów Fouriera

- **Tw. Parsevala**: energia sygnału ciągłego w okresie równa (8) jest energii szeregu Fouriera wyznaczonej na jego podstawie.

$$\frac{1}{T_0} \int\limits_{t_1}^{t_1+T_0} x^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \tag{8}$$

- **Liniowość** (9): szereg Fouriera wyznaczony dla liniowej kombinacji okresowych sygnałów ciągłych $x(t)$ i $y(t)$ stanowi liniową kombinację odpowiadających im szeregów X i Y.

$$Dx(t) + Cy(t) \equiv DX + CY \tag{9}$$

- **Przesunięcie w czasie** (10): sygnału ciągłego odpowiada zastosowaniu mnożnika $e^{-jn\omega_0 t_1}$ do szeregu Fouriera sygnału oryginalnego.

$$x(t - t_1) \equiv e^{-jn\omega_0 t_1} X \tag{10}$$

2.2 Współczynnik zawartości harmonicznych

Jednym z parametrów charakteryzujących sygnały ciągłe jest współczynnik zawartości harmonicznych (11) THD (ang. Total Harmonic Distortion) opisujący stopień odkształcenia sygnału od idelanego przebiegu sinusoidalnego. Przesunięcie fazowe nie ma znaczenia ponieważ do jego wyliczenia wykorzystuje się skuteczne wartości RMS (ang. Root Mean Square) poszczególnych składowych funkcji harmonicznych. W przypadku sygnałów okresowych o zerowej składowej stałej (tj. $\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t)dt = 0$) wartość skuteczna określona wzorem (12) jest najczęściej liniową funkcją amplitudy A sygnału $x(t)$.

$$\mathrm{THD} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{n=2}^{\infty} S_n^2}}{S_1} \tag{11}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x^2(t)dt} \tag{12}$$

2.3 Zadanie przygotowacze ZP1

Podaj po jednym przykładzie funkcji niespełniających poszczególnych warunków Dirichleta **WD1**, **WD2** i **WD3**.

2.4 Zadanie przygotowacze ZP2

Wyznacz w sposób analityczny wzrór na wartość skuteczną $U_{sk}(A, f_g)$ przebiegu napięcia sieci energetycznej $u(t) = A\sin(2\pi f_g t)$, gdzie f_g to częstotliwość generatora, zaś A jest amplitudą napięcia wyrażoną w jednostkach [V].

Część I

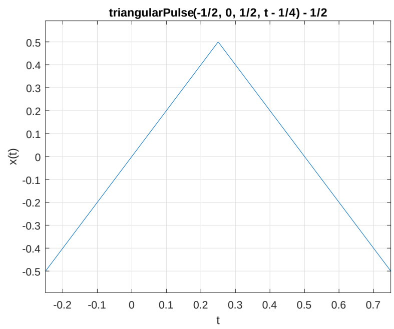
3 Analiza harmoniczna sygnałów - przebieg ćwiczenia - cz. 1

Badanie sygnałów ciągłych można wykonać stosują analizę matematyczną i rachunek całkowy. Istnieją również biblioteki służące do obliczeń symbolicznych w pakietach inżynierskich (np. MATLAB), które w wielu zadaniach projektowych usprawniają czasochłonne obliczenia.

3.1 Ćwiczenie 1

Stosując symboliczną reprezentację zmiennych i funkcji wygeneruj jeden okres przebiegu trójkątnego i określ jego podstawowe parametry w dziedznie czasu.

```
clear all; close all;


syms t t1 t2 offset x

T0 = 1.0; % okres
t1 = -0.5;
t2 = t1+T0;
offset = T0/4;

f0 = 1/T0; % czestotliwosc
w0 = 2*pi*f0; % pulsacja

% granice całkowania
BND = [t1,t2] + offset;

x = triangularPulse(t1,0,t2,t-offset)-0.5;

figure;
ezplot(x,BND); grid on; ylabel('x(t)')
```



Rysunek 1: Definiowanie przebiegu jednego okresu sygnału ciagłego

3.1.1 Zadanie 1

Za pomocą czerwonego kółka ○ oznacz na wykresie punkty zmiany znaku wartości sygnału - wykres umieść w sprawozdaniu.

3.2 Zadanie 2

Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera X_n dla 16-tu pierwszych funkcji bazowych i oznacz ich wartosci na wykresie. W sprawozdaniu umieść uzyskany wykres zespolonych współcznników szeregu Fouriera.

```
NT = 15;
X=[];
ind = -NT : NT;
for n = ind
    Xn = (1/T0)*int(x*exp(-i*w0*n*t),t,BND)
    X(n + NT + 1) = Xn;
end

figure; hold on;
stem(ind*f0,real(X),'b','LineWidth',2);
xlabel('f [Hz]')
stem(ind*f0,imag(X),'r','LineWidth',2);
grid on
legend('real(X_n)','image(X_n)','Location','NorthEast')
title('Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera X_n')
```

Rysunek 2: Wyznaczanie współczynników zespolonych szeregu dla 16-tu pierwszych funkcji bazowych

3.3 Zadanie 3

Wyznacz współczynniki a_n i b_n trygonometryczne szeregu dla 15-tu pierwszych częstotliwości harmonicznych oraz składowej stałej a_0 zgodnie ze wzorem (5) i przypisz je do wektorów typu rzeczywistego `a` oraz `b` wzroując się na przkładzie z rys. 2. Pokaż je na wykresie z zachowaniem skali częstotliwości (wykres umieść w sprawozdaniu). Porównaj je ze współczynnikami szeregu zespolonego uzyskanego w **Zad. 2**. Opisz różnice i podobieństwa. Wyjaśnij jaka jest interpretacja mnożnika 2.0 we wzorze (6).

Uwaga: wektory w składni języka MATLAB indeskowane są liczbami naturalnymi bez zera. Oznacza to że nie można używać indeksów ujemnych ani 0. Zastosowanie indeksu 1 (np. `a(1)`) powoduje odwołanie się do pierwszego elementu wektora `a` lub po prostu wartości zmiennej jeśli `a` jest skalarem. Należy o tym pamiętać, jeśli chcemy zapisać w wektorze wartości o ujemnych współrzędnych. Wówczas należy zasotosować przesunięcie (ang. *offset*).

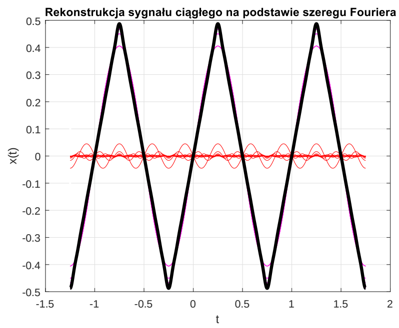
Uwaga: liczba zespolona nie jest w składni MATLAB traktowana jako wektor.

3.4 Ćwiczenie 4

Na podstawie uzyskanych współczynników a_0, a_n i b_n odtwórz 3 okresy przebiegu wejściowego w reprezentacji czasowej.

Uwaga: w celu wizualizacji stosujemy reprezentację numeryczną.

```
step = (BND(2) - BND(1))/1000;
tt = [BND(1)-T0 : step: BND(2) + T0];
xx = zeros(1,length(tt));
xx =  xx + a(1); % skladowa stala

figure
plot(tt,xx,’m’); grid on, hold on;
plot([0,0],[-0.6,0.6],’w.’)
xlabel(’t’); ylabel(’x(t)’);
pause(0.5)

for n = 1 : NT
    xx_n = 2*(a(n+1)*cos(w0*n*tt) + b(n+1)*sin(w0*n*tt));
    xx = xx + xx_n;
    plot(tt,xx_n,’r’); plot(tt,xx,’m’);
    title(sprintf(’n = %d’,n+1)); pause(0.5)
end

plot(tt,xx,’k’,’LineWidth’,3); grid on; hold on
plot([tt(1),tt(2)],[max(xx)-0.1,min(xx)+0.1],’w.’)
title(’Rekonstrukcja sygnału ciągłego na podstawie szeregu Fouriera’)
```



Rysunek 3: Rekonstrukcja sygnału ciągłego na podstawie współczynników szeregu w reprezentacji trygonometrycznej

3.5 Zadanie 5

Wykonaj rekonstrukcję 3-ch okresów przebiegu wejściowego na podstawie elementów szeregu zespolonego. Porównaj rezulaty rekonstrukcji z tymi uzyskanymi w **Ćw. 4** oraz z ciągłym przebiegiem widocznym na rysunku 1. Wylicz błąd aproksymacji przebiegu. W sprawozdaniu zanotuj wartość błędu oraz umieść kod programu. Opisz jaki wpływ na rekonstrukcję sygnału ma ograniczenie liczby elementów szeregu.

Uwaga: według definicji (1) szeregi Fouriera mają nieskończoną liczbę elementów.

Ankieta

Proszę opisać w sprawozdaniu, które z zagadnień poruszonych w ćwiczeniach i zadaniach było dla Pani/Pana zupełnie nowe.

Zadanie domowe

Wyznacz w sposób analityczny wzór (na papierze) na współczynniki szeregu Fouriera wybranego przebiegu (innego niż przebieg sinusoidalny) jego wartość skuteczną oraz współczynnik zniekształceń harmonicznych THD.
W sprawozdaniu umieść

- formalny zapis wybranego sygnału ciągłego postać analityczną ('na papierze'),
- postać symboliczną zgodna ze składnią MATLAB,
- analityczny wzór na elementy nieskończonego szeregu Fouriera,
- wartości współczynników 10-ciu pierwszych współczynników,
- analityczny wzór na współczynnik zawartości harmonicznych,
- wartość liczbową współczynnika zawartości harmonicznnych w funkcji amplitudy.

Wzór sprawozdania

Lab. ?? Temat ćwiczenia				
Nazwisko, Imię	Data wykonania ćw.	Planowy dzień zajęć	Planowa godz. zajęć	Godz. wyk.*
Nazwisko, Imię	rok. mies. dz.	środa czwartek	gg:mm	

* tylko w przypadku odrabiania ćwiczeń.

Zad. 1: Pytanie/zagadnienie
Odp.:

Zad. 2: Pytanie/zagadnienie
Odp.:

Zad. ...: Pytanie/zagadnienie
Odp.: