Przykładowe kolokwium nr 2

Zadanie 1a.

Wykorzystując definicję wartości własnej znajdź wartości własne macierzy A oraz wektor własny odpowiadający największej z nich. Wykorzystaj metodę potęgową do znalezienia największej wartości własnej tej macierzy. W tym celu wyznacz wektor $y^{(4)}$ zaczynając iteracje od $y^{(0)} = [1,1,1]^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Odp. $\lambda_1 = 5;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = 1, v = [2;\ 1;\ 1]^T;\ \lambda_{max}^{MP} \approx 4{,}9542.$

Zadanie 1b.

Zlokalizuj wartości własne macierzy A wykorzystując twierdzenie o kołach Gerszgorina. Znajdź wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda = 1$. Następnie wykorzystaj metodę potęgową do znalezienia największej wartości własnej tej macierzy. W tym celu wyznacz wektor $y^{(4)}$ zaczynając iteracje od $y^{(0)} = [1,1,1]^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Odp. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K_1(4;4) \cup K_2(2;2) \cup K_3(2;2), w = [1;\ 0;\ -1]^T;$
$\lambda_{max}^{MP} \approx 4{,}9542$

Zadanie 2a (b).

Zlokalizuj dodatni pierwiastek równania $3x^3 + x = 2$ z dokładnością do przedziału o długości 1, a następnie znajdź jego drugie przybliżenie wykorzystując metodę siecznych (stycznych) oraz metodę bisekcji. Wyznacz kres górny błędu bezwzględnego drugiego przybliżenia rozwiązania uzyskanego metodą bisekcji.

Odp. $\bar{x} \in [0;1];\ x_{sieczne}^{(2)} = \frac{17}{25} = 0{,}68;\ x_{styczne}^{(2)} = \frac{634}{845} \approx 0{,}7503;$
$x_{bisekcja}^{(2)} = \frac{5}{8};\ \Delta_{x_{bisekcja}^{(2)}} = \frac{1}{8}$

Zadanie 3.

Znajdź drugie przybliżenie rozwiązania poniższego układu równań nieliniowych, rozpoczynając iterację od punktu $\boldsymbol{X}^{(0)} = [x^{(0)};\ y^{(0)}]^T = [-1;\ 1]^T$.

$$\begin{cases} x^2 + xy = 1 \\ x^3 + 2y = xy^2 \end{cases}$$

Odp. $\boldsymbol{X}^{(2)} = \left[-\frac{3}{2};\ \frac{3}{4}\right]^T$

Zadanie 4.

Wyznacz wielomiany interpolacyjne Lagrange'a i Newtona, jeśli w punktach zamieszczonych w pierwszym wierszu tabeli mają one przyjmować odpowiednie wartości z wiersza drugiego. Wyznacz wielomian Hermite'a, dla którego dodatkowo zachodzi $W'(0) = 6$.

x_i	-2	-1	0	1	3
y_i	-32	-10	-12	-20	-102

Odp. $W_L(x) = W_N(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 12$
$W_H(x) = 2x^5 - 3x^4 - 13x^3 + 6x - 12$

Zadanie 5.

Wykorzystując poznane metody całkowania numerycznego wyznacz przybliżoną wartość poniższej całki przyjmując $n = 2$.

$$\int_1^7 \frac{x^2 - 7x + 10}{x}\, dx$$

Odp. $S_T = \frac{93}{14} \approx 6{,}6429;\ S_P = \frac{285}{154} \approx 1{,}8506;\ S_N = \frac{93}{56} \approx 1{,}6607.$