KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE
EDUKACJA DLA PRZEDSIĘBIORCZOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy" (POKL.04.01.01-00-011/09-00) jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Analiza matematyczna i algebra liniowa

Materiały pomocnicze dla studentów – do wykładów

Liczby zespolone.

- Konstrukcja ciała liczb zespolonych.
- Postacie liczby zespolonej.
- Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych.
- Rozwiązywanie równań kwadratowych w ciele liczb zespolonych.

informatyka stosowana

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy" ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-00

UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE

Temat 6: Liczby zespolone

Przedstawione zostanie dosyć szczegółowo ciało liczb zespolonych. Szereg prostych własności polecone zostanie do udowodnienia w ramach pracy własnej.

1. Uwagi historyczne.

Pojęcie liczby zespolonej zostało wprowadzone w XVI wieku w związku z poszukiwaniem rozwiązań równań algebraicznych. Równanie kwadratowe $x^2 = -1$ nie ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych. Okazuje się również, że pewne typy równań algebraicznych trzeciego stopnia, tzw. przypadek nieprzywiedlny, mają rozwiązania rzeczywiste, które można tylko wyznaczyć operując liczbą $\sqrt{-1}$, czyli rozwiązaniem równania $x^2 = -1$. Liczba $\sqrt{-1}$ nie należy do zbioru liczb rzeczywistych, więc dla odróżnienia od znanych dotychczas liczb nazwano ją liczbą urojoną. Podstawy teorii liczb zespolonych jako pierwszy sformułował matematyk włoski R. Bombelli w 1572 r. w pracy *L'Algebra.* Do analizy matematycznej liczby zespolone wprowadzone zostały przez matematyka szwajcarskiego L. Eulera w 1748 r. Ścisłą teorię liczb zespolonych opracowali niezależnie od siebie w XIX wieku matematyk niemiecki C.F. Gauss i matematyk irlandzki W.R. Hamilton. Obecnie liczby zespolone powszechnie stosowane są w matematyce, fizyce i naukach technicznych.

2. Konstrukcja ciała liczb zespolonych. Podstawowe pojęcia.

Niech $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, gdzie **R** oznacza zbiór liczb rzeczywistych.
Zbiór **C** jest zatem zbiorem uporządkowanych par liczb rzeczywistych.

<u>Definicje.</u>
Elementy zbioru **C** oznaczamy symbolem

$$z = (a, b)$$

i nazywamy **liczbami zespolonymi**. Liczby a i b są liczbami rzeczywistymi.
W liczbie zespolonej $z = (a, b)$ wyróżniamy **część rzeczywistą** $\mathrm{Re}\, z = a$ i **część urojoną** $\mathrm{Im}\, z = b$.

dwa działania wewnętrzne

zero i jedynka zespolona

<u>Twierdzenie.</u>
Zbiór **C** z wyżej określonymi działaniami oraz z wyróżnionymi elementami jedynką i zerem zespolonym mają strukturę algebraiczną ciała. Nazywamy go ciałem liczb zespolonych.

Własności:

1)
2)
3)
4)
5)
6)
7)
8)

wzory na różnicę i iloraz liczb zespolonych:

<u>Definicja.</u>
Liczbą sprzężoną do liczby zespolonej $z=(a,b)$ nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z}=(a,-b)$.

<u>Twierdzenie.</u>
Dla każdych liczb zespolonych z, z_1, z_2 prawdziwe są równości:

- $\overline{(\overline{z})} = z$,
- $z + \overline{z} = (2\mathrm{Re}\, z, 0)$, $z - \overline{z} = (0, 2\mathrm{Im}\, z)$,
- $\overline{z} = z \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, z = 0$,
- $\overline{z} = (0,0) \Leftrightarrow z = (0,0)$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$,
- $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z}_1 . \overline{z}_2$,
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, dla $z_2 \neq (0,0)$.

Moduł liczby zespolonej

<u>Twierdzenie.</u>
Dla każdych liczb zespolonych z, z_1, z_2 prawdziwe są równości:

- $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z.\overline{z})}$, $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = (0,0)$,
- $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$,
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ dla $z_2 \neq (0,0)$,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
- $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Argument liczby zespolonej

Płaszczyzna zespolona

3. Postacie liczby zespolonej: algebraiczna, trygonometryczna, wykładnicza.

Postać algebraiczna liczby zespolonej.

<u>Twierdzenie.</u>
Odwzorowanie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}'$ określone wzorem

$$f(a)=(a,0)$$

jest izomorfizmem ciała liczb rzeczywistych **R** z ciałem $\mathbf{C}'$.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Twierdzenie.
Jeżeli $z_1 = |z_1|.(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|.(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, to

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad \text{dla } z_2 \neq 0.$$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

4. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych.

Definicja.
Potęgę liczby zespolonej z o wykładniku naturalnym określa się w sposób rekurencyjny:

$$z^1 = z,$$

$$z^{k+1} = z^k.z, \text{ dla } k \in \mathbf{N}.$$

Twierdzenie (Moivre'a).
Jeżeli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to dla każdej liczby naturalnej n potęga z^n jest równa:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Definicja.
Pierwiastkiem stopnia naturalnego n **liczby zespolonej** z nazywamy każdą liczbę zespoloną x taką, że $x^n = z$.

Twierdzenie.
Dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ i liczby naturalnej n pierwiastek $\sqrt[n]{z}$ jest zbiorem n elementowym. Jeżeli $z = |z|.(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to elementy zbioru $\sqrt[n]{z}$ określa wzór:

$$x_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots,n-1 .$$

5. Rozwiązywanie równań kwadratowych w ciele liczb zespolonych.