Tematy projektów

1. Opracować algorytm przekształcający macierz dowolnego układu równań do macierzy, która spełnia warunek wystarczający zbieżności w metodach iteracyjnych.

2. Zbadać wpływ błędów popełnianych przy podawaniu współczynników układu równań na wartość błędu rozwiązania dla wybranych trzech metod dokładnych oraz jednej metody iteracyjnej. Wykonać odpowiednie symulacje, wyniki zwizualizować na wykresie przedstawiającym zależność błędu rozwiązania od sumarycznego błędu wszystkich współczynników dla co najmniej 5 różnych wielkości błędu, a następnie znaleźć wielomian interpolacyjny opisujący tę zależność.
   Mile widziana (aczkolwiek niekonieczna) analiza teoretyczna problemu.

3. Opracować algorytm, który dla zadanego równania nieliniowego postaci $f(x) = 0$ wyznacza jak najlepszą procedurę iteracyjną, którą będzie można wykorzystać w algorytmie iteracji prostej. Uzasadnić skuteczność algorytmu na wybranej klasie funkcji (np. wielomiany stopnia co najwyżej 5).

4. Opracować algorytm iteracji prostej dla układu równań nieliniowych (czy da się skonstruować także algorytm iteracji Seidela?). Spróbować podać warunek, kiedy algorytm będzie zbieżny i uzasadnić jego słuszność przeprowadzając odpowiednie testy.

5. Stworzyć procedurę obliczającą całki funkcji dwóch zmiennych wykorzystując poznane metody całkowania funkcji jednej zmiennej. Zadanie rozwiązać wykorzystując wybraną metodę numeryczną dwukrotnie:
   - dla funkcji $f(x, y)$ najpierw całkujemy względem zmiennej x, a y traktujemy jako parametr; dostajemy w wyniku funkcję $g(y) = \int f(x, y)dx$;
   - następnie całkujemy funkcję $g(y)$ po zadanym przedziale zmienności.

   Zbadać dokładność każdej z zastosowanych metod w zależności od zastosowanej siatki podziałów oraz znaleźć wielomian interpolacyjny obrazujący tę zależność.

6. Wykorzystaj wybraną metodę przybliżoną (iterację prostą lub metodę siecznych) do znalezienia wartości zmienności implikowanej indeksu WIG20 porównując ceny wynikające ze wzoru Blacka-Scholesa z cenami opcji kupna na ten indeks (można je znaleźć np. tutaj http://www.bankier.pl/inwestowanie/notowania/opcje.html).

7. W poniższej tabeli zestawiono średnie miesięczne temperatury powietrza zanotowane w stacji meteorologicznej Kraków w latach 2000-2004 (w °C). Oblicz średnie za ten okres średnie temperatury miesięczne. Następnie wyznacz wielomian interpolacyjny przedstawiający zmiany temperatury w Krakowie w ciągu roku. Rozważ różne zestawy punktów uwzględniane w interpolacji tak, by uzyskany wielomian był jak najlepszy. Następnie wykorzystując jedną z metod przybliżonych znajdź w jakich dniach średnia temperatura

w Krakowie spada poniżej zera oraz kiedy średnia temperatura staje się dodatnia. Wykorzystując rachunek różniczkowy znajdź najcieplejszy i najzimniejszy dzień w roku oraz średnią temperaturę z roku wykorzystując średnią całkową (do wyznaczenia całki – wykorzystaj jedną z metod poznanych na zajęciach).

Rok	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
2000	-1,8	2,5	4,0	12,2	15,4	17,5	16,9	19,1	12,5	12,4	6,9	1,4
2001	-0,9	0,3	3,5	8,2	15,1	15,3	19,9	19,6	12,2	11,8	2,2	-4,2
2002	-0,9	3,9	5,4	9,1	17,1	17,9	20,4	20,1	12,9	7,8	5,4	-5,3
2003	-2,4	-4,7	2,8	7,8	16,5	19,1	19,5	19,9	14,2	5,9	4,8	0,0
2004	-4,2	0,6	3,5	9,5	12,7	16,8	18,3	18,9	13,7	10,4	4,4	0,8

8. Stworzyć aplikację, która pomoże rozwiązać problem optymalnej produkcji fabryce mebli *Szuflandia*. Fabryka produkuje 10 rodzajów mebli, które będziemy oznaczać m_1, m_2, ..., m_{10}. Meble te produkowane są z ośmiu rodzajów materiałów r_1,..., r_8, które w określonym czasie produkcji dostępne są w ograniczonej ilości. Poniższa tabela zawiera ilość materiałów, jaka jest potrzebna do wyprodukowania każdego z mebli, liczbę pracowników, którzy są potrzebni do stworzenia tych mebli oraz zapotrzebowanie na dany rodzaj mebli.

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	Σ
r_1	3	5	2	4	7	6	2	3	2	5	560
r_2	2	3	6	1	5	4	3	3	5	1	460
r_3	4	3	2	5	4	5	1	1	3	4	440
r_4	6	9	7	8	8	7	11	9	7	8	1173
r_5	13	12	15	7	18	9	22	18	13	9	1972
r_6	7	9	8	9	8	6	10	8	7	9	1182
r_7	11	13	12	10	13	12	14	15	9	12	1795
r_8	6	5	7	5	6	4	7	4	0	6	744
Personel	2	3	4	3	4	5	3	5	3	2	499
Zapotrzebowanie	4	6	3	7	3	7	4	5	6	3	662

- Rozwiązać układ, który zadaje powyższa tabela wybraną metodą numeryczną (przyjmujemy, że zużywamy wszystkie dostępne środki, dzięki czemu zmniejszamy koszty magazynowania surowców oraz realizujemy całe zapotrzebowanie na 662 sztuki mebli – liczby w ostatnim wierszu wskazują, które z mebli są częściej kupowane, a nie realną wielkość popytu).
- Przeanalizować możliwe rozwiązania przybliżone całkowitoliczbowe.
- Przeanalizować wpływ zaokrągleń na wartość zysku dla uzyskanych rozwiązań całkowitoliczbowych, jeśli funkcja zysku wyraża się wzorem:

$$Z(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}) =$$

$$= 5m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 6m_4 + 8m_5 + 2m_6 + 5m_7 + 4m_8 + 6m_9 + 3m_{10}$$

- Znaleźć wielomian interpolacyjny $Z(m)$, gdzie m jest łączną liczbą mebli produkowanych przez fabrykę, a $Z(m)$ – średnim zyskiem dla rozważanych rozwiązań całkowitoliczbowych.

- (*) Spróbować opracować algorytm znajdywania przybliżonych rozwiązań całkowitoliczbowych w oparciu o którąś z metod rozwiązywania układów równań liniowych.

9. Bank *Grosik* chce zaproponować klientom nowy rodzaj kredytów rocznych.Oprocentowanie kredytu będzie określone przez stopę r_0 i co miesiąc będzie ono wzrastało (lub malało w zależności od preferencji klienta) o stałą liczbę dziesiątych punkta procentowego - dr (0,1 pkt, 0,2 pkt, itd.) Wysokość comiesięcznych spłat równa będzie podwojonej wartości odsetek od aktualnego stanu zadłużenia (jedna na spłatę odsetek - druga zmniejsza stan zadłużenia). Po dwunastu miesiącach terminowych spłat pozostałe zadłużenie jest anulowane. Zakładamy, że zysk banku z kredytu powinien wynosić 10% wyjściowej kwoty kredytu.
   - Wykorzystując jedną z metod iteracyjnych rozwiązywania równań opracuj algorytm wyznaczający wyjściową wartość stopy r_0 w zależności od danego kroku dr.
   - Do dyskontowania transz wpłat klienta wykorzystaj stopę wolną od ryzyka równą $R = 5\%$.
   - Wyznacz wielomian interpolacyjny zależności stopy wyjściowej r_0 od kilku wartości kroku dr dla rat malejących oraz rosnących.

10. Właściciel telefonii komórkowej CALL2ALL planuje zmienić plany taryfowe. W związku z tym przeprowadził wśród klientów ankietę, która miała na celu wybór przez każdego z respondentów 5 spośród dostępnych 10 elementów, które będą wchodzić w skład tworzonych ofert. Jeśli poniższa tabela zawiera wyniki ankiety, zaproponuj 5 przykładowych ofert, które jak najlepiej będą pasowały do klientów firmy CALL2ALL.

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10
Os. 1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
Os. 2	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
Os. 3	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
Os. 4	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
Os. 5	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
Os. 6	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
Os. 7	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
Os. 8	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
Os. 9	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
Os. 10	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
Os. 11	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
Os. 12	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1

Os. 13	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
Os. 14	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
Os. 15	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
Os. 16	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
Os. 17	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
Os. 18	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Os. 19	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
Os. 20	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
Os. 21	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
Os. 22	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
Os. 23	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
Os. 24	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
Os. 25	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
Os. 26	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
Os. 27	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
Os. 28	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
Os. 29	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
Os. 30	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
Os. 31	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
Os. 32	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
Os. 33	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
Os. 34	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
Os. 35	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
Os. 36	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
Os. 37	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
Os. 38	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
Os. 39	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
Os. 40	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
Os. 41	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
Os. 42	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1

Os. 43	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
Os. 44	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
Os. 45	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
Os. 46	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
Os. 47	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
Os. 48	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
Os. 49	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
Os. 50	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0

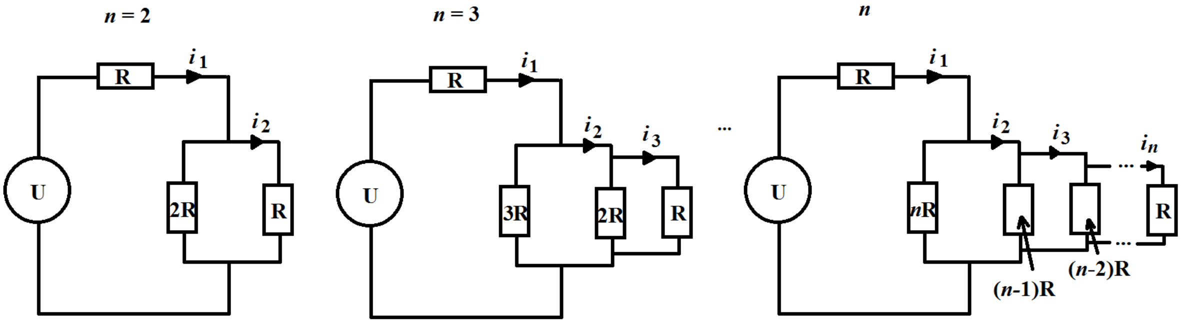
- Pogrupuj respondentów według ich upodobań (np. wykorzystując iloczyn skalarny wektora upodobań) w zespoły 10 osobowe.
- Dla każdej z grup znajdź jak najlepszą ofertę (rozwiąż odpowiedni układ równań, a następnie znajdź jak najlepsze rozwiązanie całkowitoliczbowe).
- Stwórz wielomian interpolacyjny zgodności przygotowanych ofert z preferencjami klientów (zmienną niezależną niech będzie numer oferty).

11. Opracuj filtr graficzny oparty o metodę interpolacji wielomianowej. Rozważ następujące przypadki:
    a) filtr wygładzający wierszami – dla pięciu sąsiadujących ze sobą pikseli wartość składowej RGB (lub odcień szarości) w punkcie środkowym ustalamy na podstawie wartości wielomianu interpolacyjnego skonstruowanego na podstawie wartości składowej RGB (lub odcienia szarości) czterech pozostałych punktów;
    b) filtr wzmacniający wierszami – dla pięciu sąsiadujących ze sobą pikseli wartość składowej RGB (lub odcień szarości) w punkcie pierwszym (bądź ostatnim) wyznaczamy na podstawie wartości wielomianu interpolaycjnego skonstruowanego na podstawie wartości składowej RGB (lub odcienia szarości) czterech pozostałych punktów.

    Można także rozważyć któryś z powyższych filtrów w wersji kolumnowej.

    (*) Spróbuj opracować procedurę interpolacji wielomianowej dla funkcji dwóch zmiennych (naśladując konstrukcję wielomianu Lagrange'a). Opracuj filtr, który uwzględnia zarówno wartość w pikselach sąsiadujących z danym pikselem w poziomie jak i w pionie.

12. Poniżej przedstawiono ciąg obwodów z opornikami. Rozwiązanie każdego z tych obwodów (wyznaczenie wszystkich prądów) sprowadza się do rozwiązania poniższych układów (tzw. metoda oczkowa).



$$\begin{bmatrix} 3R & -2R \\ -2R & 3R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4R & -3R & 0 \\ -3R & 5R & -2R \\ 0 & -2R & 3R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

$$\begin{bmatrix} (n+1)R & -nR & 0 & & 0 \\ -nR & (2n-1)R & -(n-1)R & \cdots & 0 \\ 0 & -(n-1)R & (2n-3)R & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wykorzystaj metodę metodę Banachiewicza do rozwiązania takiego układu dla wartości $n = 2, 3, \ldots, 50$. Wartość oporu R przyjmij 500Ω, a napięcie $U = 230V$. Jak zmienia się wartość prądu i_1 wraz z liczbą oporników w drabince (n)? Sprawdź, jak zmieniać się będzie wartość prądu, jeśli wartość oporu będzie podana z dokładnością $\pm 1\Omega$ dla $n = 25$.