



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIwersytet
EKONOMICZNY
W KRAKOWIE



EDUKACJA
DLA
PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy” (POKL.04.01.01-00-011/09-00)
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Analiza matematyczna i algebra liniowa

Materiały pomocnicze dla studentów – do wykładów

Równania różniczkowe.

- Równanie różniczkowe zwyczajne.
- Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych.
- Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego.

Temat 5: Równania różniczkowe

Celem wykładu jest zaznajomienie studentów z podstawowymi pojęciami teorii równań różniczkowych. Wykład dotyczy niektórych typów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.

1. Równania różniczkowe zwyczajne – definicja i podstawowe pojęcia.

Równaniem różniczkowym nazywamy równanie opisujące zależność między szukaną funkcją i jej pochodnymi.

- równanie różniczkowe zwyczajne
- równanie o pochodnych cząstkowych
- rząd równania różniczkowego
- równanie różniczkowe rzędu pierwszego
- rozwiązanie (całka) równania różniczkowego
- rozwiązanie ogólne
- rozwiązania (całki) szczególne
- warunek początkowy
- zagadnienie początkowe (zagadnienie Cauchy'ego)

Twierdzenie.

Jeżeli funkcja f wraz z pochodną f'_y jest ciągła w obszarze D , to przez każdy punkt tego obszaru przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa.

Przykład.

Równanie różniczkowe

$$y' - y - x + 1 = 0$$

2. Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych.

Równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych nazywamy równanie postaci

$$y' = h(x)g(y),$$

gdzie $h:(a,b) \rightarrow \mathbf{R}$, $g:(c,d) \rightarrow \mathbf{R}$ są danymi funkcjami ciągłymi.

Przykład.

Wyznaczyć rozwiązanie równania

$$y' = 2xy^2 - x^2y'$$

spełniające warunek początkowy $y(0)=1$.

3. Równanie różniczkowe postaci $y' = h(ax + by + c)$.

Przykład.

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania

$$y' = (x + y - 1)^2.$$

4. Równanie jednorodne względem x i y .

Przykład.

Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$y' = \frac{x+2y}{x}, \quad y(1) = 0.$$

5. Równanie liniowe.

Równaniem liniowym niejednorodnym (n) nazywamy równanie postaci

$$y' = h(x)y + g(x), \quad (n)$$

gdzie $h, g: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ są zadanymi funkcjami ciągłymi, $g(x) \neq 0$ przynajmniej dla jednego x z przedziału (a, b) .

Wraz z równaniem (n) rozważane będzie skojarzone z nim **równanie liniowe jednorodne (j)** postaci

$$y' = h(x)y. \quad (j)$$

Znane są dwie metody wyznaczania rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego:

- **metoda uzmienniania stałej**
- **metoda przewidywania**

Przykład.

Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$y' = -\frac{3}{x}y + \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1. \quad (n)$$

Przykład.

Wykorzystując metodę przewidywania rozwiązać równanie

$$y' = 2y + e^{3x}.$$