



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIwersytet
EKONOMICZNY
W KRAKOWIE



EDUKACJA
DLA
PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń
dla studentów

6. Interpolacja wielomianowa

- 6.1. Wielomian interpolacyjny Lagrange’a
- 6.2. Wielomian interpolacyjny Newtona
- 6.3. Interpolacja Hermite’a

I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- wielomian;
oraz umiejętności:
- działania na wielomianach.

II. Zadania

zad. 1) Podać trzy różne wielomiany spełniające warunki:

$$W(0) = 0 \quad W(-1) = -1 \quad W(1) = 1$$

zad. 2) Za pomocą wzorów interpolacyjnych Lagrange’a i Newtona, znaleźć wielomiany możliwie najniższego stopnia spełniające poniżej podane warunki. Porównać czas otrzymania rezultatów przy pomocy obydwu wzorów.

- a) $W(-1) = -4, W(0) = -1, W(1) = 6$
- b) $W(-1) = -4, W(0) = -1, W(1) = 6, W(2) = 41$
- c) $W(-2) = -75, W(-1) = -4, W(0) = -1, W(1) = 6, W(2) = 41$
- d) $W(-2) = -75, W(-1) = -4, W(0) = -1, W(1) = 6, W(2) = 41, W(3) = 200$

zad. 3) Za pomocą wzorów interpolacyjnych Hermite’a, znaleźć wielomiany możliwie najniższego stopnia spełniające poniżej podane warunki:

- a) $W(-1) = 5, W(1) = -1, W'(1) = -1$
- b) $W(-1) = 1, W'(-1) = 15, W(1) = 3, W'(1) = -5$
- c) $W(-1) = -4, W'(-1) = -2, W(0) = -2, W(1) = -8, W'(1) = -14$
- d) $W(-2) = -19, W'(-2) = 68, W(-1) = 1, W'(-1) = 0, W(1) = 5, W'(1) = 20$
- e) $W(-1) = -1, W(0) = 1, W'(0) = 0, W(1) = -3, W'(1) = -9, W(2) = -7, W'(2) = 28$

zad. 4) Znalazłeś się w posiadaniu mapy, określającej położenie zaginionego skarbu piratów. Według mapy znajdujesz się obecnie w punkcie o współrzędnych $(0, 1)$, natomiast skarb ukryty jest w punkcie $(4, 41)$. Ponadto na odwrocie mapy widnieje

informacja, iż droga do skarbu pełna jest pułapek, a jedyne bezpieczne przejście wiedzie przez punkty o współrzędnych $(1, -1)$, $(2, -7)$, $(3, -5)$. Wykorzystaj wzory interpolacyjne Lagrange'a i Newtona do określenia bezpiecznej drogi z punktu początkowego do miejsca, w którym znajduje się skarb.

zad. 5) Stacja meteorologiczna zlokalizowana w miejscowości Wielka Numerica zarejestrowała w dniach 1, 2, 3, 5, 6 następujące wielkości opadów 54, 40, 12, 10, 24 mm/m^2 . Przez wzgląd na święto państwowe pomiar w dniu 4. nie mógł zostać przeprowadzony przez żadnego z pracowników stacji. Skorzystaj ze wzorów interpolacyjnych Lagrange'a i Newtona i sprawdź, czy w dniu święta państwowego mieszkańcy Wielkiej Numeriki cieszyli się bezdeszczową pogodą.

III. Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. 1) Przy pomocy wzorów interpolacyjnych Lagrange'a i Newtona, znaleźć wielomiany możliwie najniższego stopnia spełniające poniżej podane warunki:

- a) $W(-3) = -5, W(0) = 1, W(1) = -1, W(3) = 25$
- b) $W(-1) = -1, W(3) = -5, W(4) = -16, W(6) = -92$
- c) $W(-2) = -21, W(-1) = -1, W(0) = 1, W(1) = 3, W(2) = -1$
- d) $W(-3) = 210, W(-1) = -8, W(1) = -26, W(3) = -324, W(5) = -614$

zad. 2) Sonda *Metodus*, znajdująca się na orbicie Marsa, bada powierzchnię planety, szukając potencjalnej trasy dla łazika marsjańskiego *Numericus*. Podczas ostatniego połączenia z Ziemią sonda przesłała następujący zestaw danych: $(-3, -712)$, $(-2, -104)$, $(0, 2)$, $(1, -8)$, $(2, -12)$, $(3, 176)$, gdzie pierwsza współrzędna odpowiada punktowi na badanej trasie, natomiast druga – wysokości względem pewnego punktu odniesienia. Wykorzystaj wzory interpolacyjne Lagrange'a i Newtona do wyznaczenia wysokości w punkcie -1 , gdzie obecnie znajduje się *Numericus*.

zad. 3) Za pomocą wzorów interpolacyjnych Hermite'a wyznaczyć wielomiany możliwie najniższego stopnia, spełniające podane warunki:

- a) $W(-2) = 134, W'(-2) = -336, W(0) = 2, W'(0) = 0, W(1) = -1,$
 $W'(1) = -6$
- b) $W(-2) = 100, W'(-2) = -532, W(-1) = -1, W'(-1) = 22,$
 $W(0) = 8, W'(0) = 0, W(2) = -124, W'(2) = -572$

IV. Odpowiedzi

zad. 1)

$$\begin{aligned} \text{a) Postać Lagrange'a: } & -5 \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(-3-0)(-3-1)(-3-3)} + \frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{(0+3)(0-1)(0-3)} - \frac{(x+3)(x-0)(x-3)}{(1+3)(1-0)(1-3)} + \\ & 25 \frac{(x+3)(x-0)(x-1)}{(3+3)(3-0)(3-1)} \end{aligned}$$

Postać Newtona: $-5 + 2(x + 3) - (x + 3)x + (x + 3)x(x - 1)$

Postać ogólna: $x^3 + x^2 - 4x + 1$

$$\text{b) Postać Lagrange'a: } -\frac{(x-3)(x-4)(x-6)}{(-1-3)(-1-4)(-1-6)} - 5\frac{(x+1)(x-4)(x-6)}{(3+1)(3-4)(3-6)} - \\ 16\frac{(x+1)(x-3)(x-6)}{(4+1)(4-3)(4-6)} - 92\frac{(x+1)(x-3)(x-4)}{(6+1)(6-3)(6-4)}$$

Postać Newtona: $-1 - (x + 1) - 2(x + 1)(x - 3) - (x + 1)(x - 3)(x - 4)$

Postać ogólna: $-x^3 + 4x^2 - 2x - 8$

$$\text{c) Postać Lagrange'a: } -21\frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-0)(-2-1)(-2-2)} - \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + \\ \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)} + 3\frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-0)(1-2)} - \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-0)(2-1)}$$

Postać Newtona: $-21 + 20(x + 2) - 9(x + 2)(x + 1) + 3(x + 2)(x + 1)x - (x + 2)(x + 1)x(x - 1)$

Postać ogólna: $-x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$$\text{d) Postać Lagrange'a: } 210\frac{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}{(-3+1)(-3-1)(-3-3)(-3-5)} - 8\frac{(x+3)(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1+3)(-1-1)(-1-3)(-1-5)} - \\ 26\frac{(x+3)(x+1)(x-3)(x-5)}{(1+3)(1+1)(1-3)(1-5)} - 324\frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-5)}{(3+3)(3+1)(3-1)(3-5)} - 614\frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)}{(5+3)(5+1)(5-1)(5-3)}$$

Postać Newtona: $210 - 109(x + 3) + 25(x + 3)(x + 1) - 10(x + 3)(x + 1)(x - 1) + 2(x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 3)$

Postać ogólna: $2x^4 - 10x^3 - 25x^2 + x + 6$

$$\text{zad. 2) Postać Lagrange'a: } -712\frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-3+2)(-3-0)(-3-1)(-3-2)(-3-3)} - \\ 104\frac{(x+3)(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-2+3)(-2-0)(-2-1)(-2-2)(-2-3)} + 2\frac{(x+3)(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)}{(0+3)(0+2)(0-1)(0-2)(0-3)} - \\ 8\frac{(x+3)(x+2)(x-0)(x-2)(x-3)}{(1+3)(1+2)(1-0)(1-2)(1-3)} - 12\frac{(x+3)(x+2)(x-0)(x-1)(x-3)}{(2+3)(2+2)(2-0)(2-1)(2-3)} + \\ 176\frac{(x+3)(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(3+3)(3+2)(3-0)(3-1)(3-2)}$$

Postać Newtona: $-712 + 608(x + 3) - 185(x + 3)(x + 2) + 41(x + 3)(x + 2)x - 7(x + 3)(x + 2)x(x - 1) + 2(x + 3)(x + 2)x(x - 1)(x - 2)$

Postać ogólna: $2x^5 - 3x^4 - x^3 - 3x^2 - 5x + 2$

$f(-1) = 0$

zad. 3)

$$\text{a) Postać Newtona: } 134 - 336(x + 2) + 135(x + 2)^2 - 51(x + 2)^2x + \\ + 13(x + 2)^2x^2 - 3(x + 2)^2x^2(x - 1)$$

Postać ogólna: $-3x^5 + 4x^4 + x^3 - 5x^2 + 2$

$$\text{b) Postać Newtona: } 100 - 532(x + 2) + 431(x + 2)^2 - 308(x + 2)^2(x + 1) + \\ + 120(x + 2)^2(x + 1)^2 - 42(x + 2)^2(x + 1)^2x + 8(x + 2)^2(x + 1)^2x^2 + \\ - 2(x + 2)^2(x + 1)^2x^2(x - 2)$$

Postać ogólna: $-2x^7 + 4x^5 + 2x^3 - 5x^2 + 8$