wynik: test: /20 pkt | pyt. otwarte: /8 pkt | zad. otwarte: /12 pkt

Zadania testowe:

W poniższych pytaniach jedna lub dwie odpowiedzi są prawidłowe.
Za każdą w pełni prawidłową odpowiedź przyznaje się 2pkt. Za odpowiedź częściowo prawidłową: 1pkt.
Jeżeli zaznaczone są odpowiedzi wykluczające się lub więcej niż dwie, nie otrzymuje się punktów.

Zad. 1. Spośród podanych macierzy wskaż macierze Markowa:

A) $\begin{bmatrix} 1,1 & -0,1 \\ -0,1 & 1,1 \end{bmatrix}$ **B)** $\begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{bmatrix}$ **C)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D)** $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$

Zad. 2. Które z poniższych całek są zbieżne:

A) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ **B)** $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ **C)** $\int_e^\infty \ln x\,dx$ **D)** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\vdots$

Pytania otwarte:

Zad. 1. [4 pkt.] Podać przykładowe twierdzenie poznane na wykładzie, które jest warunkiem koniecznym oraz takie, które jest warunkiem wystarczającym (np. dla istnienia ekstremów lub istnienia rozwiązań układu równań liniowych).

Zad. 2. [4 pkt.] Podać twierdzenie opisujące metodę obliczania pól powierzchni figur płaskich. Zilustrować to twierdzenie graficznie. Uzasadnić, że pole powierzchni figury płaskiej nie może być ujemne.

Zadania rachunkowe:

Zad. 1. [3 pkt.] Rozwiąż równanie w przestrzeni liczb zespolonych

$$iz^2 + 3iz + i + 3 = 0.$$

Zad. 2. [3 pkt.] Niech

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Wyznacz $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$.

Zad. 3. [3 pkt.] Wyznacz ekstrema funkcji $f(x,y) = xy$ przy warunku $4x^2 + y^2 = 8$.

Zad. 4. [3 pkt.] Rozwiąż zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' + 3y = 9x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Analiza matematyczna i algebra liniowa
Zagadnienia otwarte na egzamin

Spośród poniższych zagadnień zostaną wybrane pytania do części otwartej egzaminu pisemnego. Proszę je dobrze przemyśleć. Będzie to pomocne w przygotowaniu się również do części testowej egzaminu.

Część z nich ma strukturę "*podaj definicję / twierdzenie, a następnie użyj jej/go do wykazania czegoś*", a pozostałe są postaci "*czy prawdą jest, że... - uzasadnij lub wskaż przykład, który pokazuje, że to nieprawda*".

W większości pytań nie ma podanych konkretnych funkcji, punktów, macierzy, itp. Na egzaminie będą tam wstawione konkretne przykłady (analogiczne do rozważanych na ćwiczeniach).

1. Podaj przykładowe twierdzenie poznane na wykładzie, które jest warunkiem koniecznym oraz takie, które jest warunkiem wystarczającym (np. dla istnienia ekstremów lub istnienia rozwiązań układu równań liniowych).
2. Na czym polega utożsamienie zbioru liczb zespolonych z płaszczyzną kartezjańską? Omówić charakterystykę punktu $z \equiv (x, y)$.
3. Podać trzy własności modułu liczby zespolonej i udowodnić je.
4. Podać dwie własności argumentu liczby zespolonej i udowodnić je.
5. Podać wzór de Moivre'a dla pierwiastka liczby zespolonej. Ile rozwiązań ma równanie $z^n = w$, gdzie w jest daną liczbą zespoloną? Podać charakteryzację geometryczną. Rozwiązać równanie $z^n = w$ ($w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cap [0, 6]$)
6. Dla jakich macierzy możliwe jest ich potęgowanie? Wyznaczyć trzecią potęgę macierzy A (będzie podana).
7. Dokończ własność: $(A \cdot B)^T = \ldots\ldots$ Sprawdź poprawność na przykładzie macierzy A, B (będą podane).
8. Kiedy na pewno (bez wykonywania obliczeń) można stwierdzić, że macierz jest osobliwa? Uzasadnić, czy podane macierze są osobliwe: A, B, C.
9. Wiadomo, że dla pewnej macierzy $A \in M_{2\times 2}$ zachodzi $\det A = 1$. Ile wynosi $\det(3A)$?
10. Wykazać, że $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
11. Wykazać, że dla dowolnej macierzy dolnie (lub górnie) trójkątnej wymiaru 3×3 wyznacznik jest równy $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$.
12. Ile może wynieść rząd macierzy wymiaru 2×4, w której $a_{23} = 8$? Wyznaczyć rząd macierzy A.

13. Czy każdy układ, który ma jedno rozwiązanie, jest układem cramerowskim?

14. Dla macierzy $A \in M_{n\times n}$ liczba $\lambda \in \mathbb{C}$ jest jej pojedynczą wartością własną. Sformułować definicję wektora własnego, odpowiadającego wartości własnej λ. Podać geometryczną charakteryzację wektora własnego.

15. Podać twierdzenie Cayley'a-Hamiltona. Za jego pomocą wyznaczyć macierz odwrotną dla A.

16. Wykazać, że wartości własne macierzy A i jej transpozycji są takie same.

17. Wykazać, że wartości własne macierzy A^{-1} są odwrotnościami wartości własnych macierzy A.

18. Podać definicję macierzy ortogonalnej. Sprawdzić czy podana macierz A ma kolumny ortogonalne. Jeśli tak, to znormalizować je tak, aby otrzymać macierz ortogonalną.

19. Zdiagonalizować macierz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

20. Podać definicję macierzy nieredukowalnej. Wskazać po jednym przykładzie macierzy nieredukowalnej i macierzy redukowalnej.

21. Podać definicję macierzy Markowa. Scharakteryzować jej wartości własne.

22. Podać definicje stanu granicznego i stanu równowagi w równaniach różnicowych. Podać związek pomiędzy tymi pojęciami, jeżeli macierz równania różnicowego jest macierzą Markowa.

23. Uzasadnij, że układ równań $(P - I)w = 0$ w metodzie Google PageRank ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dlaczego wektor wag w można wybrać tak, aby wszystkie jego współrzędne były dodatnie?

24. Jaki rodzaj zmian wartości funkcji opisuje krańcowość cząstkowa, a jaki elastyczność cząstkowa? Dla funkcji $z = f(x, y)$ wyznaczyć krańcowości cząstkowe i elastyczności cząstkowe w punkcie (x_0, y_0) oraz podać interpretacje otrzymanych liczb.

25. Za pomocą różniczki znaleźć przybliżoną wartość wyrażenia typu $\sqrt[3]{1,079 + 25,982} - \sqrt{15,895}$.

26. Podać warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych? Wyznacz punkty krytyczne funkcji $z = f(x, y)$.

27. Czy w punkcie stacjonarnym, dla którego znaki minorów wiodących hesjanu układają się w ciąg $(+, -, +)$, istnieje maksimum rozważanej funkcji? Sprawdzić, czy w punkcie (x_0, y_0) funkcja $z = f(x, y)$ osiąga ekstremum. Jaki jest jego charakter?

28. Czy wartość funkcji w minimum lokalnym może być większa niż jej wartość w maksimum lokalnym? Jeśli tak, podać przykład (może byc graficzny). Jeśli nie, uzasadnij dlaczego.

29. Czy wynikiem procedury metody najmniejszych kwadratów może być wielomian 4 stopnia? Jeśli tak, od ilu zmiennych będzie zależała funkcja pomocnicza S? Dla zbioru danych $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ za pomocą MNK wyznaczyć krzywą trendu postaci $y = f(x)$.

30. Funkcja f osiąga minimum warunkowe w punkcie P_1 i minimum lokalne w punkcie P_2. Czy $P_1 = P_2$? Jeśli tak, uzasadnić. Jeśli nie, podać kontrprzykład (może być graficzny).

31. Czy jest możliwa następująca sytuacja: funkcja f osiąga w punkcie P minimum warunkowe przy warunku $g_1 = 0$ oraz maksimum warunkowe przy warunku $g_2 = 0$? Jeśli tak, podać przykład. Jeśli nie, uzasadnij dlaczego.

32. Czym się różni funkcja pierwotna od całki nieoznaczonej? Wyznacz funkcję pierwotną i całkę nieoznaczoną dla funkcji $f(x) = x\ln(x^2 + 1)$.

33. Omówić konstrukcję całki oznaczonej Riemanna z funkcji ciągłej $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

34. Podać definicję wartości średniej funkcji f na przedziale $[a, b]$. Jaka jest jej geometryczna interpretacja? Wyznaczyć średnią efektywność uczenia się studenta IS między 34 i 35 oraz między 4 i 5 godziną przed egzaminem, gdy efektywność uczenia się w czasie jest dana jako $w(t) = 4x\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}dx$.

35. Podać ekonomiczne zastosowania całki oznaczonej (co najmniej dwa przykłady). Zastosować je dla funkcji $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$.

36. Podać twierdzenie opisujące metodę obliczania pól powierzchni figur płaskich. Zilustrować to twierdzenie graficznie. Uzasadnić, że pole powierzchni figury płaskiej nie może być ujemne.

37. Dla równań różniczkowych zwyczajnych, czym się różni rozwiązanie ogólne od rozwiązania szczególnego? Podać dwa sposoby na otrzymanie rozwiązania szczególnego z rozwiązania ogólnego. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania (o zmiennych rozdzielonych) $y' = f(x, y)$ oraz podać rozwiązanie szczególne przy warunku początkowym $y(0) = y_0$ (funkcja f oraz punkt y_0 będą podane).

38. Podać schemat rozwiązania równania różniczkowego liniowego niejednorodnego. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania $y' = f(x, y)$ (funkcja f będzie podana).

1. Istnienie ekstremów:

WK: Jeśli funkcja ma ekstremum w x_o to pochodne cząstkowe w tym punkcie są równe zero.

WW: Jeśli ciąg znaków minorów jest +++ to mamy min lokalne. Jeśli ciąg -+-+ to mamy maks lokalne. Każdy inny ciąg mówi o tym że mamy punk siodłowy.

2. Utożsamianie zbioru liczb zespolonych z płaszczyzną kartezjańską:

- W liczbie zespolonej mamy część rzeczywistą oraz urojoną. Jeżeli narysujemy układ współrzędnych, to oś ox będzie przeznaczona dla części rzeczywistej, a oś oy dla części urojonej (Im)
- Modul to hipotenuza
- Liczby sprzężone sa symetryczne względem osi rzeczywistych Re

3. Własności modułu liczby zespolonej:

$|z+w| \leq |z| + |w|$

$|z-w\,| \geq |z| - |w|$

$|zw| = |z| \cdot |w|$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$|z| \geq 0, |z| = 0 \leftrightarrow z = (0,0)$

4. Własności argumentu liczby zespolonej

$\mathrm{Arg}(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$

$\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

Udowodnienie: na przykładzie z i w

Niech z i w – dowolne liczby zespolone, z i w not = (0,0)

$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$

$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$

$$z \cdot w = |z||w|(\cos\phi \cdot \cos\psi + \cos\phi \cdot i\sin\psi\ + i\sin\phi \cdot \cos\psi - \sin\phi \cdot \sin\psi)$$

$$\cos(\phi+\psi) = \cos\phi \cdot \cos\psi - \sin\phi \cdot \sin\psi$$

$$\sin(\phi+\psi) = \cos\phi \cdot \sin\psi + \sin\phi \cdot \cos\psi$$

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)\,)$$

Arg(z*w) = $\phi + \psi = \arg z + \arg w$

5. Wzór de Movier'a:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right) dla\ k = 0 \ldots n-1$$

Równanie ma n rozwiązań.

Charakterystyka geometryczna: Pierwiastki zespolone dzielą okrąg o promieniu 1 z centem w p. (0,0) na równe sektory.

6. Potęgowanie jest możliwe tylko dla macierzy kwadratowych

7. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$\det(A^T) = \det A$

8. Kiedy przynajmniej jedna kolumna lub wiersz macierzy jest zerowy, albo dwa wiersze lub dwie kolumny są identyczne lub są wielokrotnościami.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \det(\quad)$$

9. $\det(3A) = 9\det A$. Mnożenie kolumny przez skalar mnozy wyznacznik przez ten skalar. W macierzy 2x2 mnożymy dwie kolumny, więc wyznacznik zwiększa się o 9 razy.
10. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Mnozenie jest przemienne więc $\det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \cdot A)$
11. Weźmy macierz trójkątną górną… wykonamy obliczenia za pomocą metody Sarrusa…
12. Max rząd macierzy = min(m,n). W naszym przypadku, rząd może być 1 albo 2.
13. Nie, ale każdy układ Cramerowski ma dokładnie jedno rozwiązanie. Np. układ który ma 3 równania ale 2 niewiadome i rzędy A i U są równe 2. Wtedy układ jest oznaczony, ale nie jest Cramerowski.
14. Wektor v nazywamy wektorem własnym skojarzonym z wartością własną lambda, spełniający równanie Av = lambda*v
15. Twierdzenie Cayley'a-Hamiltona: Macierz A spełnia swoje równanie charakterystyczne

$$A^2 + 2A = 4 \mid \cdot A^{-1}$$
$$A + 2I = 4A^{-1}$$
$$\frac{1}{4}(A + 2I) = A^{-1}$$

16. Na przykładzie pokazać to (wartości są te same)
17. Na przykładzie pokazać to (wartości są odwrotnościami)
18. Macierz ortogonalna to taka macierz której kolumny są układem ortonormalnym. Układ ortonormalny – wektory są prostopadłe (iloczyn skalarny zero) oraz <v1,v1> = 1.
Własności macierzy ortogonalnej: $A^{-1} = A^T$.
Kolumny (wiersze) są układem ortonormalnym.
$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$
19. No to A = PDP^-1
20. Macierz kwadratowa jest nieredukowalna, jeżeli dla każdej pary $(i, j) \in \{1, .. n\}\ X\ \{1, \dots, n\}$ istnieje liczba naturalna m taka, ze A^mij > 0
21. Macierz markowa – macierz kwadratowa w której wszystkie spolczynniki są >= od zera i suma kolumn daje jedynkę. 1 jest jedną z wartości własnych macierzy markowa
22. Stan równowagi – wektor wlasny macierzy przejścia A skojarzony z wartością wlasną 1
Stan graniczny równania różnicowego to stan u_∞ taki, że

$$u_\infty = \lim A^k u_0 =$$
$$Au = u$$

Stan równowagi – wektor wlasny macierzy A skojarzony z lambda = 1
Związek: Jeżeli macierz jest macierzą markowa, to stan równowagi jest stanem granicznym.
23. Skoro P jest macierzą markowa , po odjęciu od niej macierzy jednostkowej dostaniemy macierz (P-I), której rząd jest mniejszy od liczby zmiennych, więc jeżeli potraktujemy tą macierz jako układ równań liniowych, z tw. Kroneckera-Capellego, ten układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.
Ponieważ macierz P jest macierzą Markowa, jest ona nieujemna i nieredukowalna oraz w.w 1 jest wartością dominującą. Więc z twierdzenia Perrona-Frobeniusa, wektor własny skojarzony z wartością własnych 1 można dobrać tak by wszystkie składowe były dodatnie.
24. Krańcowość – wzrost/spadek w jednostkach.
Elastyczność -wzrost spadek w procentach.
Krańcowość – obliczanie pochodnych cząstkowych w punktach x_o… Wzór na elastyczność:
$E_x f(x_0, y_o) = \frac{x_o}{f(x_0, y_o)} \cdot f'(x_0, y_0)$
25. Oblicznie wartośći przybliżonej za pomocą różniczki:
- Obliczamy różnicę Δx_i dla każdej zmiennej

- Obliczamy pochodne cząstkowe
- $df(x_1, x_2, x_3) = \sum f'_x \cdot \Delta x_i$
- Wartość przybliżona: $f(x_1, \ldots) = f(x_o, \ldots) + df(x_1, \ldots)$
26. WK dla istnienia ekstremów funkcji dwóch zmiennych: Jeżeli f posiada ekstremóm lokalne w punkcie x_o oraz istnieją pochodne cząstkowe w tym punkcie, to są w tym punckie równe zero. Jest to punkt krytyczny.
27. Nie, ten ciąg minorów mówi nam o istnieniu w tym punkcie punktu siodłowego.
28. Tak. To że minimum lokalne wskazuje na jego lokalność. Przykład: f(x) = x^2-3/x – 2
29. Tak, od 1 do 5 parametrów.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

Dalek szukamy minimum lokalne (Pochodne cząstkowe, równe zero, hesjan, ciąg minorów)
30.Nie. Przykład : x^2 oraz x^2 przy warunku x in [1,2]. Min lokalne w x=0, min warunkowe w x in 1.
31. Tak, Przykład: funkcja x^2 oraz warunki: x in [1,2] oraz x in [2,3] maks war1 = 2 min war2 = 2.
32. Funkcja pierwotna funkcji f – Funkcja F taka że F' = f. Całka nieoznaczona – zbiór wszystkich pierwotnych funkcji f.
33. Konstrukcja całki oznaczonej Riemanna z funkcji ciągłej
- n-ty podział Pn przedzia$[a.b]$ – ciąg liczb $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ takich że $a = x_0 <, x_1 <, x_2 > \ldots x_n = b$
- Średnica podziału $P_n$to jest liczba $\Delta_n = \max \Delta x_i$ gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- Normalny ciąg podziału to taki ciąg podziałów $(P_0, P_1, P_2, \ldots . P_n)$ że $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$
- n-ta suma całkowa:

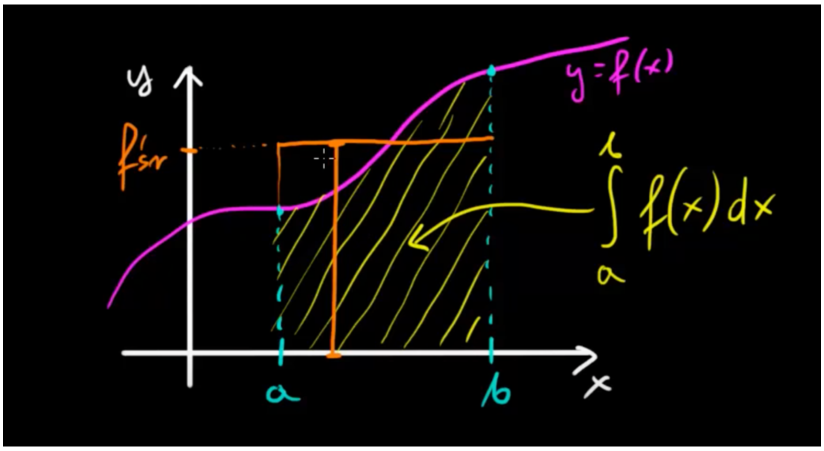
$$S_n(f, P_n, (t_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i$$

Gdzie $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$
Całka oznaczona Reimana:
- Dla każdego normalnego ciągu podziałów (Pn) ciąg sum częściowych jest zbieżny do tej samej granicy skończonej S niezależnie od wyboru punktów, to funkcja jest całkowalna w sensie Reimanna
- Granica S to jest całka oznaczona Riemanna w przedziale [a,b]

34. Wartość średnia funkcji f w przedziale [a,b] to wyrażenie:

$$f_{sr}[a, b] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Interpretacja geometryczna: średnia wysokość figury, stworzona przedziałem a i b oraz ograniczona z góry wykresem funkcji. (Wysokość prostokąta o bokach [a,b] oraz $[0, f_{sr}[a.b]]$



35. Interpretacja ekonomiczna: Jeśli funkcja f : [a,b] -> R opisuje pewną wielkość krańcową (koszt krańcowy, popyt krańcowy) zależną od argumentu x, to zmiana wielkości całkowitej przy zmianie argumentu od x_1 do x_2 jest opisana formułą:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

b) Obliczanie średniego zysku ze sprzedaży produktu:

$$f_{sr}[a,b] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

36. Dane są funkcje $f, g: [a,b] \to R$ – są ciągłe
Niech będzie dany obszar:

$$A = \{(x,y) \in R^2 : x\ [a,b]\ oraz\ f(x) \le y \le g(x)\}$$

Wtedy pole obszary A ograniczonego tymi dwiema funkcjami:

$$|\,A\,| = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

Pole powierzchnie figury nie może być ujemne, bo jedna funkcja jest powyżej drugiej, więc wyrażenie pod całką jest nieujemne. Całka z funkcji nieujemnej jest niejumena.
37. Rozwiązanie ogólne to rodzina wszystkich rozwiązań szczególnych, gdzie C jest parametrem. Rozwiązanie szczególne to szczególny przypadek przy pewnej stałej C. Sposoby otrzymania rozwiązania szczególnego:
- Rozwiązanie zagadnienia początkowego (obliczenie rozwiązania ogólnego potem układ równań), inaczej – zadanie warunku początkowego
- Przyjęcie wartości rzeczywistej zamiast C.
38. Rozwiązanie równania różniczkowego niejednorodnego:
- Szukamy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $y_1 = C \cdot f(x)$
- $y_2 = C(x) \cdot f(x) \to y_2' \to$ Podstawiamy w równanie niejednorodne
- Wyliczamy stąd C(x) przez całkę
- Przyjmujemy 0 zamiast C po obliczeniu całki C'(x) –
- Podstawiamy C(x) do y_2 – otrzymujemy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego
- Rozwiązanie ogólne: $y = y_1 + y_2$
39. Metody rozwiązywań równań różniczkowych
- Równania postaci $y' = h(ax + by + c)$:

  $z(x) = ax + by(x) + c$
  1) Różniczkujemy obie strony
  2) Wyliczamy y

3) Wstawiamy to w równanie różniczkowe i musimy otrzymać równanie o zmiennych rozdzielonych

- Równanie postaci $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$

$z(x) = \frac{y(x)}{x}$
$y(x) = x \cdot z(x)$
$y'(x) = z + xz'$

Wstawiamy formuły w równanie różniczkowe i otrzymujemy zmienne rozdzielone