KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE

EDUKACJA DLA PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy" (POKL.04.01.01-00-011/09-00)
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Analiza matematyczna i algebra liniowa

Materiały pomocnicze dla studentów – do wykładów

Opracował (-li): 1. Prof. dr hab. Edward Smaga
2. dr Anna Gryglaszewska
3. mgr Marta Kornafel
4. mgr Fryderyk Falniowski
5. mgr Paweł Prysak

informatyka stosowana

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy" ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-00

UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE

1. Organizacja zajęć

Temat 1: Macierze liczbowe i wyznaczniki

1. Podstawowe definicje
2. Rodzaje macierzy:
   a) prostokątna – zerowa, transponowana
   b) kwadratowa: główna przekątna, macierz trójkątna górna (dolna), przekątniowa (diagonalna), jednostkowa, symetryczna, skośnie symetryczna
3. Działania na macierzach:
   a) dodawanie
   b) mnożenie przez liczbę
   c) odejmowanie
   d) mnożenie macierzy przez macierz
4. Własności działań na macierzach
5. Definicja rekurencyjna wyznacznika
6. Schematy obliczania wyznaczników 2 i 3 stopnia
7. Własności wyznaczników
8. Obliczanie wyznaczników stopnia wyższego
9. Definicja macierzy odwrotnej
10. Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą dopełnień algebraicznych
11. Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą operacji elementarnych
12. Równania macierzowe

Temat 2: Układy równań liniowych

1. Rząd macierzy
2. Podstawowe definicje, zapis macierzowy
3. Rodzaje układów równań:
   a) jednorodne, niejednorodne
   b) oznaczone, nieoznaczone, sprzeczne, równoważne
4. Układ Cramera – rozwiązywanie za pomocą macierzy odwrotnej
5. Układ Cramera – rozwiązywanie za pomocą wzorów Cramera
6. Układ dowolny:
   a) twierdzenie Kroneckera-Capellego
   b) wyznaczanie równoważnego układu bazowego
   c) (*) rozwiązywanie metodą operacji elementarnych

Temat 3: Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

1. Definicja funkcji wielu zmiennych oraz dziedzina
2. Pochodne cząstkowe

3. Interpretacja ekonomiczna pochodnych cząstkowych
4. (*) Pochodna i różniczka funkcji
5. Ekstrema lokalne – definicja i twierdzenia
6. Metoda najmniejszych kwadratów
7. Ekstrema warunkowe – definicja i twierdzenia

Temat 4: Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

1. Funkcja pierwotna i definicja całki nieoznaczonej
2. Reguły całkowania
3. Wzory rachunku całkowego
4. Całka oznaczona Riemanna pojedyncza – podstawowe definicje
5. Własności całki funkcji ciągłej
6. Całka niewłaściwa:
    a) w przedziale nieograniczonym
    b) z funkcji nieograniczonej
7. Zastosowania ekonomiczne całki oznaczonej
8. Zastosowania geometryczne całki oznaczonej

Temat 5: Równania różniczkowe

1. Równanie różniczkowe zwyczajne – definicja i podstawowe pojęcia
2. Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych
3. Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Temat 6: Liczby zespolone

1. Uwagi historyczne
2. Konstrukcja ciała liczb zespolonych. Podstawowe pojęcia
3. Postacie liczby zespolonej:
    a) algebraiczna
    b) trygonometryczna
    c) wykładnicza
4. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych
5. Rozwiązywanie równań kwadratowych w ciele liczb zespolonych

(*) Dodatek: Przestrzeń wektorowa. Przestrzeń Euklidesa. Całka Riemanna wielokrotna.

Temat 7: Przestrzeń wektorowa (nad ciałem liczb rzeczywistych)

1. Podstawowe definicje
2. Wektory liniowo zależne i liniowo niezależne
3. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

4. Współrzędne wektora przy zadanej bazie

Temat 8: Przestrzeń Euklidesa

1. Iloczyn skalarny:
   a) definicja aksjomatyczna
   b) standardowy iloczyn skalarny w R^n
2. Norma wektora:
   a) nierówność Schwarza-Buniakowskiego
   b) nierówność Cauchy-Minkowskiego
   c) miara kąta między wektorami
   d) bazy ortogonalne i ortonormalne

Temat 9: Całka Riemanna wielokrotna

1. Całka wielokrotna w kostce
2. Całka po zbiorze normalnym
3. Niektóre zastosowania geometryczne całki wielokrotnej

2. Literatura:

Literatura podstawowa:

1) Cewe A., Nahorska H., Pancer I. [2005], „*Tablice matematyczne*", wydanie II, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk.
2) Gryglaszewska A., Kosiorowska M., Paszek B. [2009], „*Ćwiczenia z matematyki, część 1"*, wydanie 6, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
3) Gryglaszewska A., Kosiorowska M., Paszek B. [2008], „*Ćwiczenia z matematyki, część 2"*, wydanie 3, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
4) Gurgul H., Suder M. [2009], „*Matematyka dla kierunków ekonomicznych*. *Przykłady i zadania wraz z repetytorium ze szkoły średniej*", Wydawnictwo Wolters Kluwer Polska Sp. z o. o., Kraków.
5) Krysicki W., Włodarski L. [2008], *„Analiza matematyczna w zadaniach część I"*, wydanie 29, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
6) Krysicki W., Włodarski L. [2008], *„Analiza matematyczna w zadaniach część II"*, wydanie 27, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Literatura uzupełniająca:

1) Jurlewicz T., Skoczylas Z. [2005], *„Algebra liniowa 2. Przykłady i zadania"*, wydanie 5, Oficyna Wydawnicza GiS.
2) Stankiewicz W., *„Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych"*

3. Zasady oceniania.

Kurs matematyki dla kierunku studiów Informatyka Stosowana realizowany jest w dwóch semestrach w ramach przedmiotów: „Wprowadzenie do matematyki" (zajęcia wyrównawcze) w pierwszym semestrze oraz „Analiza matematyczna i algebra liniowa" w drugim. Przedmiot kończy się egzaminem obejmującym całość omawianych zagadnień. Celem egzaminu jest sprawdzenie umiejętności rozwiązywania przez studentów typowych zadań. Zadania egzaminacyjne nie zawierają pytań testowych i nie sprawdzają wiedzy typowo teoretycznej.

Forma przeprowadzenia egzaminu:

1. W pierwszym semestrze student zalicza ćwiczenia na podstawie trzech kolokwiów punktowanych po 20pkt. każde. Jest też również możliwość zbierania dodatkowych punktów z aktywności (trzy plusy = 1pkt.). Maksymalna liczba punktów (60pkt.) stanowi 40% końcowego egzaminu. Pierwszy semestr nie kończy się egzaminem tylko zaliczeniem i ilość zdobytych punktów procentowo przenosi się na egzamin końcowy po drugim semestrze.
2. W drugim semestrze student musi uzyskać zaliczenie z ćwiczeń by móc przystąpić do egzaminu. Punkty z tego egzaminu stanowią 60% końcowego egzaminu.

Egzamin uznaje się za zdany jeśli student uzyskał co najmniej 50% maksymalnej liczby punktów łącznie z obu semestrów.

Przykładowe zestawy egzaminacyjne

I semestr

Zestaw 1

1) Wyznaczyć i narysować zbiory $A\times B$ oraz B^2 jeśli:

$$A=\left\{x\in\mathbf{R}:\arccos(x-1)<\frac{\pi}{2}\right\},\qquad B=\left\{x\in\mathbf{R}:x\le\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x\right\}.$$

2) Dana jest relacja $S\subset R^2$, $xSy \Leftrightarrow y=|x|+1$. Narysować wykres relacji S oraz sprawdzić, czy $S\subset\mathbf{R}^2$ jest:

a) zwrotna,
b) odwzorowaniem,
c) iniekcją?

3) Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-3}\right)^{3n+5}$.

4) Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji

$$f(x)=x\cdot\ln(x+e).$$

Zestaw 2

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{6}-\arccos\left(\frac{1}{2}\log_{0,1}x\right)}$.
2. Zbadać, czy relacja $S\subset X\times X$, gdzie X jest zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru $A\neq\emptyset$ jest relacją równoważności, gdy $BSC \Leftrightarrow B\cap C\neq\emptyset$.
3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x)=\ln(x+e)-x^2$.
4. Dla jakich wartości parametrów $a,b\in\mathbf{R}$ funkcja

$$f(x)=\begin{cases}1-2x & \text{dla } x<0\\ a-\frac{1}{4}x^2 & \text{dla } x\in[0,4]\\ 2b-\frac{1}{2}x & \text{dla } x>4\end{cases}$$

jest ciągła w **R**?

II semestr

Zestaw 1

1. Rozwiązać równanie macierzowe (za pomocą macierzy odwrotnej):

$$X^T\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}^2.$$

2. W zależności od wartości parametru $a\in\mathbf{R}$ zbadać liniową zależność wektorów $x=(2,-1,a)$, $y=(-4,2,-3)$ w przestrzeni wektorowej $(\mathbf{R}^3,\mathbf{R},+,\cdot)$.
3. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x,y)=2x^3+y^2-3xy+1$. Obliczyć $f'_x(1,3)$ oraz podać interpretację.
4. Zbadać zbieżność całki $\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3+1}}dx$.

Zestaw 2

1. Za pomocą macierzy odwrotnej, rozwiązać równanie macierzowe:

$$(2I-3X)^T\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}^T\cdot\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

2. W zależności od wartości parametru $k\in\mathbf{R}$ określić liczbę rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases}2x+ky=2\\ x+3y+kz=3\\ -x+2y+z=1.\end{cases}$$

3. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x,y)=x+2y$ przy warunku $x^2+y^2=5$.
4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y=2^x$, $y=1-x$, $y=4$.

Przykładowe zestawy egzaminacyjne (egzamin z całości materiału)

Zestaw 1

1) Sprawdzić, czy relacja $S \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $xSy \overset{def}{\Leftrightarrow} (x-y)\cdot(x+y) \ge 0$ jest porządkiem całkowitym (zupełnym).

2) Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2}$.

3) Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\pi - \frac{3}{2}\arccos\left(4^{-x} - 1\right)}$.

4) Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

5) Rozwiązać układ równań liniowych (wykorzystując tw. Kroneckera – Capelliego):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ -x + 3y - 2z = -2 \\ 2x + y + 3z = -1. \end{cases}$$

6) Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x, y) = \frac{1}{4}\ln x + \frac{3}{4}\ln y$ przy warunku $2x + 3y = 16$.

7) Zbadać zbieżność całki $\int_1^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx$.

8) Sprawdzić, czy wektory $x = (-1, 1, 0)$, $y = (0, 1, -1)$, $z = (1, 0, -1)$ są bazą przestrzeni wektorowej $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}, +, \cdot)$.

Zestaw 2

1) Wyznaczyć i narysować zbiór $A \times B$, gdy

$A = \left\{x \in \mathbf{R} : \arccos|x - 2| \le \frac{\pi}{3}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{R} : (x^2 + 1)^{5-x} < 1\right\}$.

2) Sprawdzić, czy odwzorowanie $f : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x}{x-2}$ jest bijekcją. Jeśli tak, wyznaczyć funkcję f^{-1}.

3) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ jest jednocześnie rosnąca i wklęsła?

4) Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = x - 3\mathrm{arcctg}x$.

5) Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 - 6xy + y^3 + 6x + 6y$.

6) W przestrzeni $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}, +, \cdot)$ dane są wektory: $x = (1, 1, 0)$, $y = (0, 1, 1)$, $z = (1, 0, 1)$. Sprawdzić na podstawie definicji, czy układ wektorów $\{-y + x,\ -z + x + y,\ -2x + z\}$ generuje przestrzeń $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}, +, \cdot)$.

7) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y = \ln x$, $y = 1 - x$, $y = 1$.

8) Za pomocą macierzy odwrotnej, rozwiązać równanie macierzowe:

$$\left(X \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)^T - \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} + 6I = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$