Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy"
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń

dla studentów

3. Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych

3.1. Metoda iteracji prostej
3.2. Metoda Seidela
3.3. Zbieżność metod iteracyjnych i warunek stopu

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy" ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-00

I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- wektor, macierz, wyznacznik macierzy;
- równanie macierzowe;
- macierz trójkątna;

oraz umiejętności:

- wykonywanie operacji elementarnych na wierszach macierzy;
- mnożenie macierzy;
- rozwiązywanie równań macierzowych

II. Zadania

zad. 1) Sprawdzić, czy podane macierze spełniają WW zbieżności metod iteracyjnych prostej i Seidela dla macierzy:

$$A_1=\begin{bmatrix}0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}3\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}7\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}0{,}1 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}9 & 1\\ 0 & 0 & 0{,}3\end{bmatrix}\qquad A_3=\begin{bmatrix}3 & 0 & -5\\ 0 & 8 & 2\\ -5 & 2 & 9\end{bmatrix}$$

zad. 2) Obliczyć normę macierzy:

$$D_1=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}\qquad D_2=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}$$

a następnie sprawdzić, po ilu iteracjach w schemacie opartym na tych macierzach rozwiązanie będzie oszacowanie z błędem nie większym niż 10^{-2}, jeśli $X^{(0)}=[2\ \ -1\ \ 0]^T$.

zad. 3) Podać dwa pierwsze przybliżenia obu metod iteracji, wybierając jako przybliżenie początkowe zadany wektor $X^{(0)}$:

a) $\begin{cases}4x_1-x_2-x_3=-4\\ x_1+3x_2-x_3=12\\ 2x_1-x_2+4x_3=8\end{cases}\qquad X^{(0)}=\begin{bmatrix}6\\4\\0\end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ $\qquad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

zad. 4) Zapisać uproszczoną macierz Google'a dla sieci:

$$1 \to 2, \qquad 2 \to 3, \qquad 2 \to 4, \quad 3 \to 1.$$

Stosując metodę iteracji prostej do odpowiedniego układu równań oszacować wartość wag i sporządzić ranking stron.

zad. 5) Podany układ równań zapisać w postaci równoważnej tak, aby spełniony był warunek wystarczający zbieżności metod przybliżonych:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

III. Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. 1) Dla podanych układów równań wykonaj kolejno polecenia:

1. oblicz normę macierzy *D* odpowiadającej układowi i zdecyduj, czy schematy są zbieżne;
2. wyznacz liczbę iteracji konieczną do uzyskania wyniku z dokładnością $\varepsilon = 10^{-9}$;
3. rozwiąż układ jedną z metod dokładnych;
4. wyznacz dwie pierwsze iteracje w metodzie iteracji prostej;
5. wyznacz dwie pierwsze iteracje w metodzie Seidela;
6. porównaj wyniki otrzymane w punktach 3.,4. i 5.

a) $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x_1 - x_2 + \quad + x_4 = 4 \\ \quad -2x_2 - x_3 \quad = 1 \\ \quad x_2 + 2x_3 \quad = 4 \\ \quad x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -1 \end{cases}$

zad. 2) Prędkość rakiety, zanotowana w trzech momentach czasu wynosi:

$$v(5) = 106{,}8 \text{ m/s}$$
$$v(8) = 177{,}2 \text{ m/s}$$
$$v(12) = 279{,}2 \text{ m/s}$$

Wartość prędkości jest przybliżana funkcją $v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$ dla $t \in [5,12]$. O ile to możliwe, za pomocą metody Seidela wyznacz wartości współczynników a_1, a_2, a_3. Jako początkowe oszacowanie przyjmij $a^{(0)} = [1 \quad 2 \quad 5]^T$ i wyznacz dwie pierwsze iteracje.

zad. 3) Zapisać uproszczoną macierz Google'a dla sieci:

a) $1 \to 2,\ 2 \to 3, 3 \to 1,\ 3 \to 4, 4 \to 1, 4 \to 2;$

b) $1 \to 4,\ 1 \to 5, 1 \to 6,\ 2 \to 1,\ 2 \to 3, 3 \to 1, 3 \to 5,\ 5 \to 1,\ 5 \to 6,\ 6 \to 1,$ $6 \to 4$

Stosując metodę iteracji prostej do odpowiedniego układu równań oszacować wartość wag i sporządzić ranking stron (na podstawie czterech pierwszych iteracji). Wyniki porównać z rankingami wynikającymi z zastosowania metod dokładnych. Ile iteracji zapewnia wiarygodność rankingu otrzymanego metodą iteracyjną z dokładnością do czterech miejsc po przecinku?

zad. 4) Restauracja zaopatruje kuchnię w trzy składniki. Stosując metodę Seidela ustalić ceny jednostkowe poszczególnych składników, jeżeli wiadomo, że:
cena dwóch kompletów tych dóbr wynosi 3,25 zł;
dwa opakowania pierwszego składnika i sześć opakowań drugiego składnika kosztuje 5,05zł;
koszt dwóch opakowań pierwszego składnika oraz pięć jednostek trzeciego składnika wynosi 3,5zł.

IV. Odpowiedzi

zad. 1)

a)

1. $\|D\|_1 = \frac{1}{4}$
2. $k = 15$
3. $X = [0{,}4 \quad 0{,}4 \quad 0{,}4]^T$
4. $X^{(1)} = [0{,}375 \quad 0{,}375 \quad 0{,}375]^T,$
   $X^{(2)} = [0{,}40625 \quad 0{,}40625 \quad 0{,}40625]^T;$
5. $X^{(1)} = [0{,}375000 \quad 0{,}390625 \quad 0{,}404297]^T,$
   $X^{(2)} = [0{,}400635 \quad 0{,}399384 \quad 0{,}399998]^T;$

b)

1. $\|D\|_\infty = \frac{1}{2}$
2. $k = 31$
3. $X = [-0{,}25 \quad -2 \quad 3 \quad 1]^T$
4. $X^{(1)} = [-0{,}843750 \quad -1{,}5 \quad 2{,}25 \quad 0{,}8125]^T,$
   $X^{(2)} = [-0{,}421875 \quad -1{,}625 \quad 2{,}75 \quad 0{,}78125]^T;$
5. $X^{(1)} = [-0{,}84375 \quad -1{,}5 \quad 2{,}75 \quad 0{,}96875]^T,$
   $X^{(2)} = [-0{,}3828125 \quad -1{,}875 \quad 2{,}9375 \quad 0{,}9921875\,]^T.$

zad. 2) Układ równań generowany przez dane zadania to:

$$\begin{cases} 25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106{,}8 \\ 64a_1 + 8a_2 + a_3 = 177{,}2 \\ 144a_1 + 12a_2 + a_3 = 279{,}2 \end{cases}$$

Macierz główna układu nie spełnia żadnego z podanych w wykładzie kryteriów zbieżności, więc nie ma gwarancji zbieżności metody do rozwiązania dokładnego

zad. 3) Możliwe rozwiązania:

a) Dla $w_4 = 2$, z pominięciem ostatniego równania dostajemy układ:

$$\begin{cases} -w_1 + \frac{1}{2}w_3 = -1 \\ w_1 - w_2 = -1 \\ w_2 - w_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (W_1 + W_2) \\ (W_1 + W_2 + W_3) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} -w_1 + \frac{1}{2}w_3 = -1 \\ -w_2 + \frac{1}{2}w_3 = -2 \\ -\frac{1}{2}w_3 = -2 \end{cases}$$

Ranking na podstawie rozwiązania dokładnego: $(2 = 3,1,4)$

Ranking na podstawie rozwiązania przybliżonego: $(2 = 3,1,4)$

$k_{min} = 1$

b) Dla $w_4 = 6$, z pominięciem pierwszego równania dostajemy układ spełniający założenia zbieżności procedury iteracyjnej:

$$\begin{cases} -w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_5 + \frac{1}{2}w_6 = -1 \\ -w_2 = -1 \\ \frac{1}{2}w_2 - w_3 = -1 \\ \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{2}w_6 = 5 \\ \frac{1}{3}w_1 - w_5 = -1 \\ \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_5 - w_6 = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \cancel{(W_1)} \\ (W_1 \leftrightarrow W_6) \\ (W_1 + W_6 - W_4) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} -\frac{5}{3}w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_6 = -7 \\ -w_2 = -1 \\ \frac{1}{2}w_2 - w_3 = -1 \\ \frac{1}{3}w_1 - w_5 = -1 \\ \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{2}w_6 = 5 \end{cases}$$

Ranking na podstawie rozwiązania przybliżonego: $(1{,}4 = 6{,}5{,}3{,}2)$

Ranking na podstawie rozwiązania dokładnego: $(1{,}4{,}6{,}5{,}3{,}2)$

$k_{min} = 31$

zad. 4) Układ równań dyktowany przez dane zadania jest postaci:

$$\begin{cases} 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 3{,}25 \\ 2p_1 + 6p_2 = 5{,}05 \\ 2p_1 + 5p_3 = 3{,}5 \end{cases}$$

Macierz główna tego układu spełnia założenia zbieżności metod iteracyjnych. Ceny jednostkowe dóbr wynoszą odpowiednio $p_1 = 0{,}3125, p_2 = 0{,}7375, p_3 = 0{,}5750$ (oszacowane na podstawie 70-tej iteracji ☺)