



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”  
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

---

# Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń  
dla studentów

## 2. Metody dokładne

- 2.1. Metoda Gaussa
- 2.2. Metoda Gaussa-Jordana
- 2.3. Algorytm GooglePageRank
- 2.4. Metoda Cholesky’ego
- 2.5. Metoda Banachiewicza

## I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- wektor, macierz, wyznacznik macierzy, rząd macierzy;
- iloczyn skalarny, norma;
- macierz trójkątna, macierz diagonalna;

oraz umiejętności:

- wykonywania operacji elementarnych na wierszach macierzy;
- obliczania wyznacznika macierzy oraz wyznaczania rzędu macierzy;
- wykonywania operacji macierzowych (dodawanie, mnożenie, transponowanie, odwracanie);
- określania ilości rozwiązań układu równań liniowych (tw. Kroneckera-Capellego).

## II. Zadania

zad. 1) Korzystając z eliminacji Gaussa rozwiązać następujące układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -7 \end{cases}$$

zad. 2) Obliczyć wyznacznik macierzy  $A$  metodą tradycyjną oraz wykorzystując schemat obliczeniowy eliminacji Gaussa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

zad. 3) Wykorzystując metodę Gaussa-Jordana rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 - x_4 = -8 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 8 \\ 3x_1 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 - 3x_3 - x_4 = -15 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

zad. 4) Korzystając z metody Cholesky'ego rozkładu macierzy na iloczyn macierzy trójkątnych rozwiązać następujące układy równań:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 15x_3 - 8x_4 = 5 \\ 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 3x_4 = -5 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 11x_4 = 1 \\ -2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ -3x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 12x_4 = 2 \end{cases}$$

zad. 5) Wykorzystując metodę Banachiewicza rozwiązać układy równań:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x_1 + 4x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 24x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 11 \end{cases}$$

zad. 6) Uporządkować strony algorytmem Page Rank, jeśli sieć składa się z następujących linków:

- a)  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1;$
- b)  $4 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2;$
- c)  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1;$
- d)  $1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 5, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 2;$
- e)  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 6, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 5, 6 \rightarrow 1;$

**III. Zadania do samodzielnego rozwiązania**

zad. 1) Korzystając z eliminacji Gaussa rozwiązać następujące układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -5 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$$

zad. 2) Obliczyć wyznaczniki macierzy  $A$  i  $B$  metodą tradycyjną oraz wykorzystując schemat obliczeniowy eliminacji Gaussa.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

zad. 3) Wykorzystując metodę Gaussa-Jordana wyznaczyć rozwiązania następujących układów:

$$\text{a) } \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = -5 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_3 + 2x_4 = 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases}$$

zad. 4) Rozwiązać następujące układy równań wykorzystując metodę Cholesky'ego:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 9 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 9 \end{cases}$$

zad. 5) Wykorzystując metodę Banachiewicza rozwiązać układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 3 \\ -3x_1 + 5x_2 = 3 \\ 6x_1 + 6x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 10 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 7x_4 = -7 \end{cases}$$

zad. 6) Uporządkować strony algorytmem Page Rank, jeśli sieć składa się z następujących linków:

a)  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1;$

b)  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2;$

c)  $1 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 5, 1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 1, 6 \rightarrow 4;$

#### IV. Odpowiedzi

zad. 1)

$$\text{a) } X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$\text{b) } X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}^T.$$

zad. 2)

$$\det A = -6, \det B = 12.$$

zad. 3)

$$\text{a) } X = [-3 \quad -15 \quad -12 \quad 8]^T;$$

$$\text{b) } X = \left[-\frac{1}{3} \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{2}\right]^T.$$

zad. 4)

$$\text{a) } X = [-1 \quad 0 \quad 2 \quad -1]^T;$$

$$\text{b) } X = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 2]^T.$$

zad. 5)

$$\text{a) } X = [-1 \quad 0 \quad 2]^T;$$

$$\text{b) } X = [1 \quad 3 \quad -1 \quad 0]^T.$$

zad. 6)

a)  $(2,1,3 = 4);$

b)  $(2 = 3,1,4);$

c)  $(1,4,6,5,3,2).$