Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń

dla studentów

5. Przybliżone metody rozwiązywania równań

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy” ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-00

I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- sieczna, styczna;
- pochodna funkcji jednej zmiennej;
- związek pochodnej z własnościami funkcji jednej zmiennej;
- jakobian;
- macierz odwrotna;

oraz umiejętności:

- rozwiązywanie równań liniowych;
- wyprowadzenie wzoru prostej przechodzącej przez dwa punkty;
- obliczanie pochodnej pierwszego i drugiego rzędu funkcji jednej zmiennej i wielu zmiennych;
- wyznaczanie stycznej do wykresu funkcji różniczkowalnej

II. Zadania

zad. 1) Zlokalizować pierwiastki poniższych równań do przedziałów o długości 1:

a) $x^2 - 5 = 0$
b) $x^3 + 6x^2 - 15x - 1 = 0$
c) $4x^3 - 2x^2 + 3 = 0$

zad. 2) Dla równań i odpowiadających im przedziałów z zadania 1, za pomocą metody bisekcji znaleźć drugie przybliżenia rozwiązań. Oszacować błąd tego przybliżenia. Ile powtórzeń metody musielibyśmy wykonać, żeby zapewnić sobie błąd przybliżenia nie większy niż 0,001?

zad. 3) Sprawdzić, czy odwzorowanie $g(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ spełnia założenia o zbieżności algorytmu iteracji prostej:

a) na przedziale $[0, 1]$
b) na przedziale $\left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

zad. 4) Sprawdzić, które z poniższych wyrażeń użyte w metodzie iteracji prostej gwarantują znalezienie dodatniego pierwiastka równania $x^2 - 5 = 0$, a następnie użyć go do znalezienia drugiego przybliżenia rozwiązania:

a) $x^{(n+1)} = 5 + x^{(n)} - \left(x^{(n)}\right)^2$
b) $x^{(n+1)} = \frac{5}{x^{(n)}}$
c) $x^{(n+1)} = 1 + x^{(n)} - \frac{1}{5}\left(x^{(n)}\right)^2$
d) $x^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(n)} + \frac{5}{x^{(n)}}\right)$

W każdym z możliwych przypadków oszacować błąd drugiego przybliżenia na podstawie twierdzeń z wykładu.

zad. 5) Wykonać dwie iteracje metody Newtona dla znalezienia miejsca zerowego funkcji $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$ w przedziale $(-1, 0)$. Udowodnić, że w tym przedziale znajduje się dokładnie jedno rozwiązanie. Uzasadnić zbieżność metody. Oszacować błąd drugiego przybliżenia na podstawie odpowiedniego wzoru z wykładu.

zad. 6) Metodą siecznych wyliczyć dwa przybliżenia dodatniego pierwiastka równania

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

Uzasadnić zbieżność metody. Oszacować błąd drugiego przybliżenia na podstawie twierdzenia z wykładu.

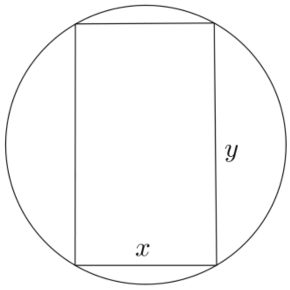
zad. 7) Wyznaczyć trzecie przybliżenie liczby $\sqrt[3]{2}$ korzystając kolejno z:

a) metody bisekcji
b) metody iteracji prostej
c) metody siecznych
d) metody stycznych

zad. 8) Funkcje popytu i podaży dla bananów wyrażają się odpowiednio wzorami $P(x) = \frac{3}{2(x+1)}$ oraz $Q(x) = e^x - 1$, gdzie x oznacza cenę bananów. Korzystając z metody iteracji wyznaczyć cenę równowagi rynkowej dla bananów, podając jako odpowiedź drugie przybliżenie tej metody.

zad. 9) Pomiędzy ciepłem właściwym wody c przy temperaturze *t*, a tą temperaturą została ustalona zależność $c = 2t + e^t(1 - t)$. Oblicz temperaturę, przy której ciepło właściwe wody c osiąga wartość największą i ile ona wynosi. Podając wynik wykorzystaj pierwsze przybliżenie z metody stycznych.

zad. 10) Wskaźnik wytrzymałości W belki prostokątnej, poziomo leżącej, wyraża się wzorem $W = (x^2 + x + 1)y^2$, gdzie x jest szerokością, y - wysokością przekroju belki. Jak wyciąć z pnia mającego kształt walca, którego podstawa ma średnicę równą 2, belkę prostokątną o największym wskaźniku wytrzymałości (por. Rys. 1). Podając wynik wykorzystaj drugie przybliżenie z metody siecznych.



Rys. 1

zad. 11) Korzystając z metody Newtona znaleźć drugie przybliżenie rozwiązania poniższego układu równań:

a) $\begin{cases} x + xy = 2 \\ x^2 + y^2 = xy \end{cases} \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ 4xy^2 - x = 1 \end{cases} \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

zad. 12) Jaś Kowalski student kierunku Informatyka Stosowana na Uniwersytecie Ekonomicznym w Krakowie wybrał się na wakacje do swoich dziadków we Francji - znanych matematyków. Jako, że dawno dziadków nie widział, na pierwszym spotkaniu, zapytał ich ile mają obecnie lat. Staruszkowie odpowiedzieli mu następująco: „Różnica kwadratów naszych lat wynosi 240, zaś różnica sześcianów 21602”. Zapytali również Jasia o to ile według niego, mają lat. Jaś udzielił im takiej odpowiedzi: „Wyglądacie na pełnych życia sześćdziesięciolatków, ale biorąc pod uwagę stereotyp społeczny w małżeństwie mężczyzna powinien być starszy od kobiety, więc zgaduję, że babcia ma 58 lat, a ty dziadku 60 lat”. Dziadek odpowiedział mu na to tymi słowami: „Masz rację Jasiu, ale nie jest to dokładna odpowiedź”. Babcia, jak to babcia, zapytała zaś: „Czy wiesz Jasiu jak policzyć nasz wiek? Czy może dać Ci wskazówkę?”. Jasiu szybko i z dumą odpowiedział: „Nie potrzebuję wskazówki, wykorzystam metodę Newtona rozwiązywania nieliniowych układów równań, której nauczyłem się na kursie z metod numerycznych na Uniwersytecie Ekonomicznym w Krakowie”. Jaką odpowiedź, dotyczącą wieku swoich dziadków, powinien podać Jaś?

III. Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. 1) Dla podanych równań wykonać kolejno polecenia:

1. zlokalizować przynajmniej jeden z pierwiastków w przedziale o długości 1
2. zastosować metodę bisekcji do wyznaczenia czterech pierwszych przybliżeń
3. zastosować metodę iteracji prostej do wyznaczenia czterech pierwszych przybliżeń
4. zastosować metodę falsi do wyznaczenia czterech pierwszych przybliżeń
5. zastosować metodę Newtona do wyznaczenia czterech pierwszych przybliżeń

6. zastosować twierdzenia z wykładu do oszacowania błędów wspomnianych czwartych przybliżeń

a) $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ (dodatni pierwiastek)
b) $\ln x + x + 1 = 0$
c) $2^{x-3} + x - 2 = 0$

zad. 2) Dla równania $x^2 - a = 0$:
a) podać wzór na przybliżenie $x^{(k+1)}$ w metodzie Newtona
b) przyjmując $a = 2$, $x^{(0)} = 2$ obliczyć $x^{(2)}$

zad. 3) Wyznaczyć piąte przybliżenie liczby $\sqrt[4]{3}$ korzystając kolejno z:
a) metody iteracji prostej
b) metody siecznych
c) metody stycznych

zad. 4) Przy rzucie ukośnym samolot zabawka, który posiada dodatkowy własny napęd na baterie, zakreśla tor o równaniu $h(x) = 3x - x\ln x - \frac{x^2}{2}$. Znaleźć maksymalne wzniesienie samolotu. Podając wynik wykorzystaj drugie przybliżenie z metody stycznych.

zad. 5) W podanych układach równań nieliniowych obliczyć dwie pierwsze iteracje rozwiązania w metodzie Newtona:

a) $\begin{cases} x^3 + x^2y = y + 6 \\ x^2y + y = 2y^2 \end{cases}$ $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xy = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

IV. Odpowiedzi

zad. 1)

a)

1. $\bar{x} \in (0, 1)$, $b = 1$ jest punktem stałym
2. $x^{(0)} = \frac{1}{2}$; $x^{(1)} = \frac{3}{4}$, $x^{(2)} = \frac{5}{8}$; $x^{(3)} = \frac{11}{16}$; $x^{(4)} = \frac{23}{32} = 0{,}71875$
3. $g(x) = \sqrt{\frac{2}{x+3}}$;
   $x^{(0)} = 0$; $x^{(1)} \approx 0{,}8165$; $x^{(2)} \approx 0{,}7239$; $x^{(3)} \approx 0{,}7329$; $x^{(4)} \approx 0{,}7320$
4. $x^{(0)} = 0$; $x^{(1)} = 0{,}5$; $x^{(2)} = 0{,}68$; $x^{(3)} \approx 0{,}7215$; $x^{(4)} \approx 0{,}7300$
5. $x^{(0)} = 1$; $x^{(1)} \approx 0{,}7778$; $x^{(2)} \approx 0{,}7338$; $x^{(3)} \approx 0{,}7321$; $x^{(4)} \approx 0{,}7321$

b)

1. $\bar{x} \in (e^{-2}, 1)$, $a = e^{-2}$ jest nieruchomym końcem przedziału
2. $x^{(0)} = \frac{1}{2}$; $x^{(1)} = \frac{1}{4}$, $x^{(2)} = \frac{3}{8}$; $x^{(3)} = \frac{5}{16}$, $x^{(4)} = \frac{9}{32} = 0{,}28125$
3. $g(x) = \frac{1}{9}(8x - 1 - \ln x)$
   $x^{(0)} = 1$; $x^{(1)} \approx 0{,}7778$; $x^{(2)} \approx 0{,}6082$; $x^{(3)} \approx 0{,}4847$; $x^{(4)} \approx 0{,}4002$
4. $x^{(0)} = 1$; $x^{(1)} \approx 0{,}3963$; $x^{(2)} \approx 0{,}3043$; $x^{(3)} \approx 0{,}2845$; $x^{(4)} \approx 0{,}2799$
5. $x^{(0)} = e^{-2}$; $x^{(1)} \approx 0{,}2384$; $x^{(2)} \approx 0{,}276$; $x^{(3)} \approx 0{,}2785$; $x^{(4)} \approx 0{,}2785$

c)

1. $\bar{x} \in (1, 2)$, $b = 2$ jest nieruchomym końcem przedziału
2. $x^{(0)} = \frac{3}{2}$; $x^{(1)} = \frac{7}{4}$, $x^{(2)} = \frac{13}{8}$; $x^{(3)} = \frac{25}{16}$; $x^{(4)} = \frac{51}{32} = 1{,}59375$
3. $g(x) = 2 - 2^{x-3}$;
   $x^{(0)} = 1$; $x^{(1)} = 1{,}75$; $x^{(2)} \approx 1{,}5796$; $x^{(3)} \approx 1{,}6264$; $x^{(4)} \approx 1{,}6141$
4. $x^{(0)} = 1$; $x^{(1)} = 1{,}6$; $x^{(2)} \approx 1{,}6162$; $x^{(3)} \approx 1{,}6167$; $x^{(4)} \approx 1{,}6167$
5. $x^{(0)} = 2$; $x^{(1)} \approx 1{,}6287$; $x^{(2)} \approx 1{,}6167$; $x^{(3)} \approx 1{,}6167$; $x^{(4)} \approx 1{,}6167$

zad. 2)

a) $x^{(k+1)} = \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 + a}{2x^{(k)}}$

b) $x^{(2)} = \frac{17}{12}$

zad. 3)

a) $x^{(5)} \approx 1{,}0917$ ($g(x) = x - 0{,}01x^4 + 0{,}03$, $x^{(0)} = 1$)

b) $x^{(5)} \approx 1{,}3009$ ($\bar{x} \in (1, 2), x^{(0)} = 1$)

c) $x^{(5)} \approx 1{,}3161$ ($\bar{x} \in (1, 2), x^{(0)} = 2$)

zad. 4) $h'(x) = 2 - \ln x - x$. Metodą graficzną można zauważyć, że równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie należące do przedziału $(1, 2)$. Z metody stycznych: $x^{(0)} \coloneqq 1, x^{(1)} = \frac{3}{2}, x^{(2)} = \frac{9}{5} - \frac{3}{5}\ln\frac{3}{2} \approx 1{,}5567$. Ponieważ $h''(x) = -\frac{1}{x} - 1 < 0$ dla $x \in (1, 2)$, więc dla $x \approx 1{,}5567$ funkcja $h(x)$ osiąga maksimum, które wynosi w przybliżeniu 2,7695.

zad. 5)

a) $X^{(1)} = [2, 2]^T$, $X^{(2)} = \left[\frac{23}{14}, \frac{12}{7}\right]^T$

b) $X^{(1)} = \left[\frac{1}{2}, -1\right]$, $X^{(2)} = \left[\frac{23}{72}, -\frac{139}{144}\right]$