Kolokwium nr 1 – przykład 1

Zadanie 1. W fabryce „Pierściennik” produkowane są pierścienie. Objętość pierścienia zależy od jego wysokości h, średnicy pierścienia φ oraz grubości pierścienia d i wyraża się wzorem $V(h,\varphi,d) = \pi h(\varphi d - d^2)$. Jeśli objętość pierścienia ma być podawana przez producenta z dokładnością do $1\,mm^3$, a wymiary pierścienia wynoszą w przybliżeniu $\varphi \approx 22\,mm,\ d \approx 3\,mm,\ h \approx 6\,mm$, wyznacz co najmniej dwiema metodami z jaką dokładnością mają być podawane wymiary pierścienia. Którą z metod daje lepsze wyniki?

Odpowiedź: MRW:$\Delta_h = 0{,}0018;\ \Delta_\varphi = 0{,}0058;\ \Delta_d = 0{,}0011;$
MRKGBB: $\Delta_{\boldsymbol{h}} = \Delta_\varphi = \Delta_d = 0{,}0018$; MJP: $\Delta_h = 0{,}0018;\ \Delta_\varphi = 0{,}0068;\ \Delta_d = 0{,}0009.$

Zadanie 2.
Rozwiąż poniższy układ wykorzystując metodę Gaussa:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -4 \\ -2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6 \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Odpowiedź: $X = [1; -1; 1; 0]^T$

Zadanie 3.
Rozwiąż poniższy układ wykorzystując metodę Cholesky’ego:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_3 + 6x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 9 \\ -2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$$

Odpowiedź: $X = [1; -1; 2; 0]^T$

Zadanie 4.
Znajdź ranking stron wykorzystując uproszczony algorytm Google Page Rank, jeśli na stronach występują następujące linki:

$$2 \to 1, 2 \to 3, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2$$

Odpowiedź: $(2, 1, 3, 4)$

Zadanie 5.
Wykorzystując metodę iteracji Seidela znajdź drugie przybliżenie rozwiązania poniższego układu równań. Iteracje zacznij od wektora $X^{(0)} = [0{,}6{,}0]^T$.
Ile iteracji należy wykonać, by błąd rozwiązania był nie większy niż 10^{-2}?

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ -x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Odpowiedź: $X^{(1)} = \left[-1; -\frac{9}{4}; \frac{7}{8}\right]^T, X^{(2)} = \left[\frac{7}{4}; -2; 1\right]^T$, $n = 28.$

Kolokwium nr 1 – przykład 2

Zadanie 1. W fabryce „Cylinderek” produkowane są cylindryczne wsporniki wykorzystywane w obudowach laptopów. Objętość cylindra zależy od wysokości h, średnicy $2R$ oraz średnicy wewnętrznego otworu $2r$ i wyraża się wzorem $V(h,r,R) = \pi h(R^2 - r^2)$. Jeśli objętość cylindra ma być podawana przez producenta z dokładnością do $0{,}1\,mm^3$, a jego wymiary wynoszą $h \approx 8\,mm, R \approx 3\,mm, r \approx 2\,mm$ wyznacz co najmniej dwiema metodami z jaką dokładnością mają być podawane wymiary.

Odpowiedź: MRW:$\Delta_h = 0{,}0021;\ \Delta_r = 0{,}0003;\ \Delta_R = 0{,}0002;$
MRKGBB: $\Delta_h = \Delta_r = \Delta_R = 0{,}0003$; MJP: $\Delta_h = 0{,}001;\ \Delta_r = 0{,}0002;\ \Delta_R = 0{,}0003.$

Zadanie 2.
Rozwiąż poniższy układ wykorzystując metodę Gaussa-Jordana:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_2 + \quad + x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

Odpowiedź: $X = [6; 3; -1; 1]^T$

Zadanie 3.
Rozwiąż poniższy układ wykorzystując metodę Banachiewicza:

$$\begin{cases} 9x_1 - 6x_2 + 3x_4 = -6 \\ -6x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 20x_4 = 3 \end{cases}$$

Odpowiedź: $X = [-1; 0; 2; 1]^T$

Zadanie 4.
Znajdź ranking stron wykorzystując uproszczony algorytm Google Page Rank, jeśli na stronach występują następujące linki:

$$1 \to 3, 3 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 1, 4 \to 2$$

Odpowiedź: $(3, 1, 4, 2)$

Zadanie 5.
Wykorzystując metodę iteracji prostej znajdź trzecie przybliżenie rozwiązania poniższego układu równań. Iteracje zacznij od wektora $X^{(0)} = [4{,}3{,}-8]^T$.
Ile iteracji należy wykonać, by błąd rozwiązania był nie większy niż 10^{-3}?

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 3 \\ -x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$$

Odpowiedź: $X^{(1)} = [3; 1; -1]^T, X^{(2)} = \left[\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right]^T, X^{(3)} = \left[\frac{2}{3}; 0; -\frac{13}{6}\right]^T$, $n = 24.$