KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE

EDUKACJA DLA PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy" (POKL.04.01.01-00-011/09-00) jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Analiza matematyczna i algebra liniowa

Materiały pomocnicze dla studentów – do wykładów

Macierze liczbowe i wyznaczniki. Układy równań liniowych.

- Macierze.
- Wyznaczniki.
- Macierz odwrotna.
- Równania macierzowe.
- Rząd macierzy.
- Układy równań liniowych.

informatyka stosowana

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy" ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-00

UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE

Temat 1: Macierze liczbowe

Celem wykładu jest zapoznanie studentów z podstawami rachunku macierzowego, wskazanie na rolę rachunku macierzowego jako dogodnego narzędzia do opisu i analizy procesów ekonomicznych. Ze względu na szczupłe ramy czasowe wykład ograniczony zostanie do macierzy liczbowych, należy jednak wspomnieć o ogólniejszym podejściu.

1. Podstawowe definicje.

Definicja. **Macierzą liczbową** o m wierszach i n kolumnach nazywamy dowolne odwzorowanie $A:\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}\to\mathbf{R}$.

2. Rodzaje macierzy.

- **macierz kwadratowa**
- **macierz przekątniowa** lub **diagonalna**
- **macierz jednostkowa**
- **macierz symetryczna**
- **macierz skośnie symetryczna**
- **macierz prostokątna**
- **macierz zerowa**
- **macierz transponowana**

3. Działania na macierzach.

- **Dodawanie**
- **Mnożenie przez liczbę**
- **Odejmowanie macierzy**
- **Mnożenie macierzy przez macierz**

4. Własności działań na macierzach.

Wymienione wyżej działania mają następujące własności (zakładamy, że wszystkie wskazane działania są wykonalne):

- $A+0=0+A=A$,
- $A\cdot I=A$, $I\cdot A=A$,
- $A+B=B+A$,
- $(A+B)+C=A+(B+C)$,
- $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$,
- $A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$, $(A+B)\cdot C=(A\cdot C)+(B\cdot C)$,
- $(a+b)\cdot A=(a\cdot A)+(b\cdot A)$,
- $a\cdot(A+B)=(a\cdot A)+(a\cdot B)$,
- $(a\cdot b)\cdot A=a\cdot(b\cdot A)$,
- $(A^T)^T=A$,
- $(A+B)^T=A^T+B^T$,
- $(a\cdot A)^T=a\cdot A^T$,
- $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

5. Definicja rekurencyjna wyznacznika.

- **podwyznacznik** lub **minor**
- **dopełnienie algebraiczne**

Definicja **wyznacznika** (w zależności od stopnia).

I. $|a_{11}|=a_{11}$, gdy $n=1$.

II. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}D_{i1}+a_{i2}D_{i2}+\dots+a_{in}D_{in} \text{ dla } i=1,\dots,n \text{, gdy } n>1.$$

Definicja.

Macierz kwadratową, której wyznacznik jest różny od 0, nazywamy **macierzą nieosobliwą**.

Macierz kwadratową, której wyznacznik jest równy 0, nazywamy **macierzą osobliwą.**

6. Schematy obliczania wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego.

7. Własności wyznaczników.

Własności.

- Wyznacznik macierzy prostej jest równy wyznacznikowi macierzy transponowanej. Z własności tej wynika, że wszystkie twierdzenia odnoszące się do wierszy wyznaczników prawdziwe są także w odniesieniu do jego kolumn.
- Jeżeli w wyznaczniku przestawimy dwa wiersze (kolumny), to wartość wyznacznika zmieni się na przeciwną.
- Jeżeli w wyznaczniku dwa wiersze (kolumny) są proporcjonalne, to wartość wyznacznika jest równa 0.
- Wyznacznik można obliczyć rozwijając go względem któregokolwiek wiersza lub kolumny. Wynika stąd, że wyznacznik, którego pewien wiersz (kolumna) składa się z samych 0, jest równy 0.
- Jeżeli do pewnego wiersza (kolumny) dodamy wielokrotność innego wiersza (kolumny), to wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie.
- Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów głównej przekątnej.
- Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

8. Obliczanie wyznaczników stopnia wyższego.

9. Definicja macierzy odwrotnej.

Definicja.
Macierzą odwrotną do macierzy nieosobliwej *A* nazywamy taką macierz A^{-1}, że:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I .$$

Własności.

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,
- $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$,
- $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

10. Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą dopełnień algebraicznych.

Twierdzenie.
Jeżeli wyznacznik macierzy *A* jest różny od 0, to macierz *A* jest odwracalna oraz $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot D^{T}$, gdzie *D* jest macierzą dopełnień algebraicznych elementów macierzy *A*.

11. Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą operacji elementarnych.

Operacjami elementarnymi na wierszach macierzy nazywamy następujące przekształcenia:

- przestawienie dwóch wierszy,
- pomnożenie wiersza przez liczbę różną od 0,
- dodanie wielokrotności pewnego wiersza do innego wiersza.

Analogiczne operacje elementarne można wykonywać na kolumnach macierzy

<u>Twierdzenie.</u>
Każda operacja elementarna na wierszach macierzy sprowadza się do pomnożenia tej macierzy z lewej strony przez macierz jednostkową, na której wierszach wykonano tę operację elementarną.

<u>Twierdzenie.</u>
Jeżeli pewien ciąg operacji elementarnych przeprowadza macierz A do macierzy jednostkowej I, to ten sam ciąg operacji elementarnych przeprowadza macierz jednostkową I do macierzy odwrotnej A^{-1}.

12. Równania macierzowe.

<u>Pytania kontrolne:</u>
1. Ile jest macierzy zerowych i ile jest macierzy jednostkowych?
2. Czy zapis $A \cdot I = I \cdot A = A$ jest poprawny?
3. Czy każda macierz ma macierz odwrotną?
4. Czy z równości $AB = I$ wynika, że B jest macierzą odwrotną do A?
5. Czy schemat Sarrusa można zastosować do obliczania wyznacznika stopnia 4?
6. W jakich przypadkach wyznacznik jest równy 0?
7. Przy jakich przekształceniach wyznacznik nie zmienia swojej wartości?
8. Która z poznanych metod wyznaczania macierzy odwrotnej jest prostsza?

Temat 2: Układy równań liniowych

Celem wykładu jest zapoznanie studentów z macierzowymi metodami rozwiązywania układów równań liniowych.

1. Rząd macierzy.

<u>Definicja.</u>
Rzędem macierzy nazywamy najwyższy stopień wyznacznika różnego od 0, który da się wyjąć z tej macierzy. Rząd macierzy *A* oznaczać będziemy symbolem *rz A* lub *R*(*A*).

2. Podstawowe definicje, zapis macierzowy.

<u>Definicja.</u>
Układem *m* **równań liniowych** o *n* niewiadomych $x_1,...,x_n$ nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Współczynniki a_{ij} oraz wyrazy wolne b_i są zadanymi liczbami.

Rozwiązaniem układu równań nazywamy każdy ciąg *n* liczb, które po podstawieniu w miejsce niewiadomych zamieniają ten układ w układ równości prawdziwych.

3. Rodzaje układów równań.

Układy równań liniowych można dzielić na rodzaje w zależności od różnych kryteriów:

- jednorodne, gdy
- niejednorodne, gdy
- oznaczone, gdy
- nieoznaczone, gdy
- sprzeczne, gdy
- równoważne, gdy

4. Układ Cramera – rozwiązywanie za pomocą macierzy odwrotnej.

Definicja.
Układem Cramera nazywamy taki układ równań liniowych, którego macierz współczynników jest nieosobliwą macierzą kwadratową**.**

Twierdzenie.
Każdy układ Cramera $A \cdot X = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie (jest układem oznaczonym). Jego rozwiązanie określa wzór:

$$X = A^{-1} \cdot B .$$

5. Układ Cramera – rozwiązywanie za pomocą wzorów Cramera.

Twierdzenie.
Każdy układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie dane za pomocą wzorów Cramera:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \; i = 1,2,...n,$$

gdzie wyznacznik $|A_i|$ otrzymujemy z wyznacznika $|A|$ przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

6. Układ dowolny.

Twierdzenie Kroneckera-Capellego.
Układ równań liniowych ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy współczynników jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej, tzn. rz$A$ = rz$U$.

Wnioski.

- Jeżeli wspólny rząd macierzy współczynników i macierzy uzupełnionej jest równy ilości niewiadomych, tzn. rz$A$ = rz$U$ = n, to układ ma tylko jedno rozwiązanie (układ oznaczony).
- Jeżeli wspólny rząd macierzy współczynników i macierzy uzupełnionej jest mniejszy od ilości niewiadomych, tzn. rz$A$ = rz$U$ = k < n, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od n-k parametrów (układ nieoznaczony).
- Jeżeli rzędy macierzy współczynników i uzupełnionej są różne, tzn. rz$A \neq$ rz$U$, to układ nie ma rozwiązań (układ sprzeczny).

Pytania kontrolne:

1. Czy rząd macierzy może być większy niż ilość wierszy (kolumn)?
2. Co można powiedzieć o rozwiązalności układu jednorodnego?
3. Czy każdy układ, który ma tyle samo równań co niewiadomych jest układem Cramera?
4. Dlaczego rozwiązanie ogólne układu nieoznaczonego może mieć różne postacie?