



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIwersytet
EKONOMICZNY
W KRAKOWIE



EDUKACJA
DLA
PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy” (POKL.04.01.01-00-011/09-00)
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Analiza matematyczna i algebra liniowa

Materiały pomocnicze dla studentów – do wykładów:

(*) Przestrzenie metryczne. Całka Riemanna wielokrotna.

- Przestrzeń wektorowa.
- Przestrzeń Euklidesa.
- Całka Riemanna wielokrotna.

Dodatek

Temat 7: Przestrzeń wektorowa (nad ciałem liczb rzeczywistych)

Celem wykładu jest przedstawienie pojęcia przestrzeni wektorowej. Ze względu na ograniczone ramy czasowe wykładu omówiona zostanie tylko przestrzeń wektorowa nad ciałem liczb rzeczywistych.

1. Podstawowe definicje.

Niech V będzie niepustym zbiorem.

Działaniem wewnętrznym w zbiorze V nazywamy odwzorowanie $h: V \times V \rightarrow V$.
Działaniem zewnętrznym w zbiorze V nazywamy odwzorowanie $g: \mathbf{R} \times V \rightarrow V$.

W dalszym wykładzie działanie wewnętrzne oznaczać będziemy symbolem \oplus i nazywać dodawaniem, natomiast działanie zewnętrzne oznaczać będziemy symbolem $*$ i nazywać mnożeniem.

Elementy zbioru V nazywać będziemy wektorami i oznaczać dużymi literami typu X , Y , Z , itp., natomiast elementy zbioru \mathbf{R} nazywać będziemy skalarami i oznaczać małymi literami typu a , b , c , itp.

Definicja.

Przestrzenią wektorową nazywamy strukturę złożoną ze zbioru V i określonych w nim działania wewnętrznego \oplus i działania zewnętrznego $*$ spełniających następujące warunki:

- Dodawanie \oplus jest **przemienne**, tzn.
$$\forall X, Y \in V : X \oplus Y = Y \oplus X,$$
- Dodawanie \oplus jest **łączne**, tzn.
$$\forall X, Y, Z \in V : (X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z),$$
- Istnieje wektor zerowy $0 = (0, \dots, 0)$, który jest **elementem neutralnym** dodawania, tzn.
$$\exists 0 \in V : \forall X \in V : V \oplus 0 = 0 \oplus X = X,$$
- Dla każdego wektora $X = (x_1, \dots, x_n)$ istnieje **wektor przeciwny** $-X = (-x_1, \dots, -x_n)$, tzn.
$$\forall X \in V \exists (-X) \in V : X \oplus (-X) = (-X) \oplus X = 0,$$
- $\forall a, b \in \mathbf{R} \forall X \in V : a * (b * X) = (a \cdot b) * X,$
- $\forall a \in \mathbf{R} \forall X, Y \in V : a * (X \oplus Y) = (a * X) \oplus (a * Y),$
- $\forall a, b \in \mathbf{R} \forall X \in V : (a + b) * X = (a * X) \oplus (b * X),$
- $\forall X \in V : 1 * X = X.$

Z powyższej definicji wynika, że działania \oplus i $*$ mają również następujące własności:

- Dla każdej liczby a : $a * 0 = 0$
- Dla każdego wektora X : $0 * X = 0$
- Dla każdej liczby a i każdego wektora X : $a * X = 0 \Rightarrow a = 0$ lub $X = 0$
- Dla każdej liczby a i każdego wektora X : $(-a) * X = -(a * X)$.

Najważniejszym przykładem przestrzeni wektorowej jest przestrzeń \mathbf{R}^n jako n krotny iloczyn kartezjański zbioru liczb rzeczywistych \mathbf{R} przez siebie, tzn.

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

Elementami \mathbf{R}^n są n wyrazowe ciągi liczb rzeczywistych postaci $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Standardowy sposób określenia działań w \mathbf{R}^n jest następujący:

$$(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$a * (x_1, \dots, x_n) = (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n).$$

Wektorem zerowym jest ciąg $0 = (0, \dots, 0)$, a wektorem przeciwnym do ciągu $X = (x_1, \dots, x_n)$ jest ciąg $-X = (-x_1, \dots, -x_n)$.

2. Liniowa zależność i niezależność wektorów.

Rozważamy przestrzeń wektorową V .

Jeżeli $X_1, \dots, X_p \in V$ oraz $a_1, \dots, a_p \in \mathbf{R}$, to wektor

$$a_1 * X_1 \oplus a_2 * X_2 \oplus \dots \oplus a_p * X_p$$

nazywamy **kombinacją liniową wektorów** X_1, \dots, X_p o współczynnikach a_1, \dots, a_p .

Definicja.

Wektory X_1, \dots, X_p nazywamy **liniowo zależnymi**, jeżeli istnieją skalary a_1, \dots, a_p nie wszystkie równe 0 takie, że:

$$a_1 * X_1 \oplus a_2 * X_2 \oplus \dots \oplus a_p * X_p = 0.$$

Definicja.

W przeciwnym przypadku wektory X_1, \dots, X_p nazywamy **liniowo niezależnymi**, tzn. wektory X_1, \dots, X_p są liniowo niezależne, jeżeli jedyną kombinacją liniową tych wektorów równą wektorowi 0 jest kombinacja o wszystkich współczynnikach równych 0.

W celu zbadania, czy wektory X_1, \dots, X_p są liniowo zależne czy też liniowo niezależne należy rozwiązać równanie

$$a_1 * X_1 \oplus a_2 * X_2 \oplus \dots \oplus a_p * X_p = 0$$

ze względu na współczynniki a_1, \dots, a_p . Jeżeli jedynym rozwiązaniem jest rozwiązanie zerowe $a_1 = 0, \dots, a_p = 0$, to wektory X_1, \dots, X_p są liniowo niezależne. Jeżeli oprócz rozwiązania zerowego istnieje rozwiązanie niezerowe, to wektory X_1, \dots, X_p są liniowo zależne.

3. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej.

Niech A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni wektorowej V . Zbiór wszystkich kombinacji liniowych utworzonych z wektorów zbioru A oznaczamy symbolem $U(A)$.

Jeżeli $U(A) = V$, czyli każdy wektor z V da się przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów z A , to mówimy, że A jest układem generującym (układem generatorów) przestrzeni V . O przestrzeni V mówimy, że jest generowana przez A .

Definicja.

Zbiór $A \subset V$ nazywamy **bazą przestrzeni** V , jeżeli:

1. A jest układem generującym V .
2. Każdy skończony ciąg wektorów z A jest liniowo niezależny.

Oto najważniejsze fakty dotyczące bazy:

- Każda przestrzeń generowana przez skończony zbiór wektorów ma bazę skończoną (złożoną ze skończonej ilości wektorów)
- Baza nie jest wyznaczona jednoznacznie
- Każda baza skończona ma tę samą ilość elementów

Wspólną ilość elementów każdej bazy nazywamy wymiarem przestrzeni i oznaczamy symbolem $\dim V$. Jeżeli przestrzeń V ma bazę nieskończoną, to przyjmujemy $\dim V = \infty$.

Oto najważniejsze fakty dotyczące wymiaru i bazy:

- Wymiar przestrzeni wektorowej jest równy maksymalnej ilości wektorów liniowo niezależnych
- W przestrzeni k wymiarowej istnieje co najwyżej k wektorów liniowo niezależnych
- W przestrzeni k wymiarowej każdy zbiór k liniowo niezależnych wektorów tworzy jej bazę.

Przykład.

W przestrzeni wektorowej \mathbf{R}^n najważniejszym przykładem bazy jest tzw. baza kanoniczna. Tworzą ją wektory:

$$E_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

.....

$$E_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

Przestrzeń \mathbf{R}^n jest przestrzenią n wymiarową, czyli $\dim \mathbf{R}^n = n$.

4. Współrzędne wektora.

Przy ustalonej bazie przestrzeni wektorowej każdy wektor da się przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów tej bazy tylko na jeden sposób. Współczynniki tej kombinacji liniowej (wyznaczone jednoznacznie) nazywamy współrzędnymi danego wektora przy zadanej bazie.

W przestrzeni wektorowej \mathbf{R}^n wektor $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy kanonicznej w postaci:

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_n E_n.$$

Zatem współrzędnymi tego wektora są liczby x_1, x_2, \dots, x_n .

Jeżeli zamiast bazy kanonicznej wybierzemy inną bazę, to współrzędne nie będą pokrywały się z wyrazami wektora.

Przykład.

W przestrzeni \mathbf{R}^3 współrzędnymi wektora $X = (-1, 2, -5)$ przy bazie kanonicznej $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$ są liczby $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -5$.

W celu wyznaczenia współrzędnych wektora $X = (-1, 2, -5)$ przy bazie $X_1 = (1, 1, 0)$, $X_2 = (1, 0, 1)$, $X_3 = (0, 0, 1)$ należy rozwiązać równanie:

$$(-1, 2, -5) = a_1 (1, 1, 0) + a_2 (1, 0, 1) + a_3 (0, 0, 1).$$

Mamy kolejno:

$$(-1, 2, -5) = (a_1, a_1, 0) + (a_2, 0, a_2) + (0, 0, a_3),$$

$$(-1, 2, -5) = (a_1 + a_2, a_1, a_2 + a_3),$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 + a_3 = -5 \end{cases}$$

Stąd $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = -2$.

Komentarz.

Można przedstawić ogólną definicję struktury algebraicznej, działań, wyróżnionych elementów. W szczególności wspomnieć o możliwości zdefiniowania przestrzeni wektorowej nad dowolnym ciałem. Jeżeli czas na to pozwoli, to można przedstawić pojęcie podprzestrzeni, sumy prostej podprzestrzeni.

Temat 8: Przestrzeń Euklidesa

Celem wykładu jest przedstawienie ogólnej przestrzeni Euklidesa, na tle najważniejszego przykładu, jakim jest przestrzeń \mathbf{R}^n .

1. Iloczyn skalarny.

Definicja.

Iloczynem skalarnym w przestrzeni wektorowej V nazywamy odwzorowanie $\circ: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ spełniające następujące warunki:

1. $\forall X, Y \in V \quad X \circ Y = Y \circ X$
2. $\forall X, Y \in V \quad \forall a \in \mathbf{R} \quad (a * X) \circ Y = a(X \circ Y)$
3. $\forall X, Y, Z \in V \quad (X \oplus Y) \circ Z = (X \circ Z) + (Y \circ Z)$
4. $\forall X \in V \quad X \circ X \geq 0 \quad i \quad (X \circ X = 0 \Leftrightarrow X = 0).$

Przestrzeń wektorową, w której określony jest iloczyn skalarny, nazywamy przestrzenią euklidesową i oznaczamy symbolem E .

Z definicji iloczynu skalarnego wynika, że dla każdego wektora X :

$$0 \circ X = 0.$$

W przestrzeni \mathbf{R}^n iloczyn skalarny określa się standardowo w następujący sposób: jeżeli $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$, to

$$X \circ Y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

2. Norma wektora, kąt między wektorami.

Iloczyn skalarny pozwala na wprowadzenie pojęcia normy (długości) wektora.

Definicja.

Normą wektora X w przestrzeni Euklidesa E nazywamy liczbę:

$$\|X\| = \sqrt{X \circ X}$$

Ważne własności normy wektora opisuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie.

Dla każdych wektorów X i Y prawdziwe są nierówności:

1. $|X \circ Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ (nierówność Schwarza-Buniakowskiego).
2. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (nierówność Cauchy-Minkowskiego).

Wykorzystując iloczyn skalarny i pojęcie normy można wprowadzić szereg innych ważnych pojęć.

Definicje.

Odległością między wektorami X i Y nazywamy liczbę:

$$d(X, Y) = \|X - Y\|.$$

Kątem między niezerowymi wektorami X i Y nazywamy liczbę:

$$\varphi = \arccos \frac{X \circ Y}{\|X\| \cdot \|Y\|}.$$

Wektory X i Y nazywamy **ortogonalnymi** (prostopadłymi), jeżeli $X \circ Y = 0$.

Ciąg wektorów X_1, \dots, X_k nazywamy **ortogonalnym**, jeżeli wektory tego ciągu są parami ortogonalne, tzn. $X_i \circ X_j = 0$ dla $i \neq j$.

Ortogonalny ciąg wektorów X_1, \dots, X_k nazywamy **ortonormalnym**, jeżeli każdy z tych wektorów ma długość 1, tzn. $X_i \circ X_j = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j \\ 0, & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$

Twierdzenie.

W k wymiarowej przestrzeni Euklidesa każdy ciąg k niezerowych wektorów ortogonalnych tworzy jej bazę (tzn. baza ortogonalna).

Twierdzenie.

W każdej przestrzeni Euklidesa istnieją bazy ortogonalne i ortonormalne.

Baza kanoniczna jest przykładem bazy ortogonalnej i ortonormalnej w przestrzeni \mathbf{R}^n .

Komentarz.

Wszystkie pojęcia dotyczące iloczynu skalarnego: norma, własności normy, kąt między wektorami itd. należy zinterpretować w przestrzeni \mathbf{R}^n . Jeżeli będzie to możliwe można przedstawić proces ortogonalizacji Grama-Schmidta.

Temat 9: Całka Riemanna wielokrotna

Ogólna koncepcja wykładu sprowadza się do możliwości zastąpienia całki wielokrotnej przez całkę iterowaną. Wskazane zostaną również możliwości zastosowań geometrycznych.

1. Całka wielokrotna w kostce.

Niech $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$ będzie kostką (przedziałem k wymiarowym) w przestrzeni arytmetycznej \mathbf{R}^k .

Niech $f: \mathbf{R}^k \supset I \rightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją ograniczoną określoną w kostce I .

Definicje.

1. **Objętością kostki** I nazywamy liczbę $|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_k - a_k)$.
2. **n -tym podziałem P_n kostki I** nazywamy taki podział kostki I na kostki częściowe I_i , że żadne dwie kostki częściowe nie mają wspólnych punktów wewnętrznych oraz w sumie dają całą kostkę I .
3. **Średnicą podziału P_n** nazywamy największą odległość dwóch punktów należących do tej samej kostki częściowej podziału P_n . Oznaczamy ją symbolem Δ_n .
4. **Normalnym ciągiem podziałów** nazywamy taki ciąg (P_n) podziałów kostki I , dla którego $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$.
5. **n -tą sumą całkową** nazywamy sumę: $S_n(f, P_n, (t_i)) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot |I_i|$, gdzie $t_i \in I_i$.

Definicja.

Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów (P_n) ciąg sum całkowych jest zbieżny do tej samej granicy S , niezależnie od wyboru punktów (t_i) , to mówimy, że funkcja f jest całkowalna w kostce I . Granicę S nazywamy **całką oznaczoną Riemanna** funkcji f w kostce I i oznaczamy symbolem $\int_I f(x) dx$ lub $\int_I f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$.

W przypadku, gdy f jest funkcją ciągłą całkę wielokrotną można wyznaczyć obliczając wielokrotnie całkę pojedynczą. Jest to tzw. całka iterowana. Możliwość taką precyzuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie.

Jeżeli $f: \mathbf{R}^k \supset I \rightarrow \mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą kostce $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$, to

$$\int_I f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}} \left[\int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \dots, x_k) dx_k \right] dx_{k-1} \dots dx_1.$$

Dowodzi się również, że kolejność całkowania w całce iterowanej występującej w powyższym twierdzeniu jest dowolna.

Przykład.

W celu wyznaczenia całki $\int_I (2x + y) dx dy$, gdzie I jest prostokątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$ zauważmy, że prostokąt I , po którym obliczana jest całka, można przedstawić w postaci: $I = [0,2] \times [0,1]$. Stąd

$$\int_I (2x + y) dx dy = \int_0^2 \left[\int_0^1 (2x + y) dy \right] dx = \int_0^2 (x^2 + xy) \Big|_0^1 dx = \int_0^2 (1 + y) dy = 4.$$

2. Całka po zbiorze normalnym.

Niech $D \subset \mathbf{R}^k$ będzie zbiorem ograniczonym oraz funkcja $f: \mathbf{R}^k \supset D \rightarrow \mathbf{R}$ również ograniczona.

Istnieje kostka I taka, że $D \subset I$. Określamy funkcję $f_0: I \rightarrow \mathbf{R}$ wzorem:

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in D \\ 0 & \text{dla } x \in I - D \end{cases}.$$

Kostka I nie jest wyznaczona jednoznacznie, ale $\int_I f_0$ nie zależy od wyboru I , ponieważ f_0 jest rozszerzeniem funkcji f poprzez wartość 0.

Definicja.

Jeżeli istnieje $\int_I f_0$, to mówimy, że funkcja f jest całkowalna w zbiorze D i przyjmujemy

$$\int_D f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \int_I f_0(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

Szczególnie prosto wyznacza się całki wielokrotne po tzw. zbiorach normalnych. W tym przypadku całkę wielokrotną zastępuje się przez całkę iterowaną.

Definicja.

Mówimy, że zbiór $D \subset \mathbf{R}^k$ jest normalny względem osi x_i , jeżeli da się przedstawić postaci:
 $D = \{(x_1, \dots, x_k) : (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \in A \text{ oraz } g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \leq x_i \leq h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k)\}$
gdzie $A \subset \mathbf{R}^{k-1}$, g i h są funkcjami określonymi w A .

Twierdzenie.

Jeżeli funkcja $f: \mathbf{R}^k \supset D \rightarrow \mathbf{R}$ jest całkowalna w zbiorze D normalnym względem osi x_i , to

$$\int_D f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \int_A \left[\int_{g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k)}^{h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k)} f(x_1, \dots, x_k) dx_i \right] dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_k.$$

Stosując powyższe twierdzenie wielokrotnie, całkę wielokrotną zastępuje się przez całkę iterowaną zestawioną z całek pojedynczych.

Ze względów praktycznych najważniejsze są następujące przypadki:

- I. Jeżeli zbiór $D \subset \mathbf{R}^2$ można przedstawić w postaci

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

to dla funkcji $f(x, y)$ całkowalnej w D zachodzi równość:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

- II. Jeżeli zbiór $D \subset \mathbf{R}^3$ można przedstawić w postaci

$$D = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x), u(x, y) \leq z \leq w(x, y)\}$$

to dla funkcji $f(x, y, z)$ całkowalnej w D zachodzi równość:

$$\int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_{g(x)}^{h(x)} \left[\int_{u(x, y)}^{w(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx.$$

Przykład.

Wyznaczyć całkę $\int_D (x-y) dx dy$, gdzie D jest zbiorem ograniczonym krzywymi: $y = x^2 - 2x$,
 $y = 2x$.

Rozwiązanie:

W tym przykładzie $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, x^2 - 2x \leq y \leq 2x\}$. Stąd

$$\int_D (x-y) dx dy = \int_0^4 \left[\int_{x^2-2x}^{2x} (x-y) dy \right] dx = \int_0^4 \left(\frac{x^4}{2} - 3x^3 + 4x^2 \right) dx = -\frac{64}{15}.$$

3. Niektóre zastosowania geometryczne całki wielokrotnej.

Przyjmijmy z definicji, że miarę $|D|$ zbioru $D \subset \mathbf{R}^k$ określa całka

$$|D| = \int_D 1 dx_1 \dots dx_k.$$

W szczególności mamy zatem:

- a) **Pole obszaru płaskiego** $D \subset \mathbb{R}^2$ określa całka

$$|D| = \int_D 1 dx dy.$$

- b) **Objętość zbioru** $V \subset \mathbb{R}^3$ określona jest wzorem

$$|V| = \iiint_V 1 dx dy dz$$

Jeżeli zbiór V można przedstawić w postaci

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\}$$

gdzie f jest funkcją ciągłą w D , to

$$|V| = \iiint_V 1 dx dy dz = \iint_D \left[\int_0^{f(x,y)} 1 dz \right] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

- c) **Objętość bryły obrotowej**, powstałej przez obrót obszaru płaskiego D położonego całkowicie nad osią ox określa całka

$$|V| = 2\pi \iint_D y dx dy.$$

- d) **Pole płata powierzchniowego** S o równaniu $z = f(x, y)$, gdzie $(x, y) \in D$, f jest klasy C^1 w D , określa wzór:

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy.$$