Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń

dla studentów

1. Teoria błędów, notacja *O*

1.1. Błąd bezwzględny, błąd względny
1.2. Ogólna postać błędu
1.3. Problem odwrotny teorii błędów
- zasada równego wpływu
- metoda równych kresów górnych błędów bezwzględnych
- metoda jednakowego pomiaru

1.4. Notacja *O*

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy” ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-00

I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- pochodna funkcji;
- pochodna cząstkowa funkcji wielu zmiennych;
- różniczka funkcji wielu zmiennych;
- rozwinięcie Taylora funkcji wielu zmiennych;

oraz umiejętności:

- obliczania pochodnych;
- obliczania pochodnych cząstkowych.

Obliczenia prowadzimy z dokładnością do (co najmniej) czterech miejsc po przecinku, o ile treść zadania nie podaje innej dokładności.

II. Zadania

zad. 1) Wyznaczyć błąd bezwzględny Δa oraz błąd względny δa, gdy liczba A jest przybliżana przez jej obcięcie do czterech miejsc po przecinku. Jakie są kres górny błędu bezwzględnego Δ_a oraz kres górny błędu względnego δ_a (z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku)?

a) $A = 0{,}321947$
b) $A = e \approx 2{,}7182818$

zad. 2) Dysk twardy w pewnym komputerze ma pojemność 120000 MB. Użytkownik tego komputera oszacował, że dysk pomieści około 120 GB danych. Wiedząc, że 1 GB = 1024 MB, oblicz rzeczywistą pojemność dysku w GB, a potem błąd bezwzględny i względny szacowania pojemności dysku w GB.

zad. 3) Obliczyć kresy górne błędów bezwzględnego i względnego wartości zagregowanego popytu obliczanych przy zaokrąglonych cenach, gdy popyt jest opisany formułą

$$Q(p_1, p_2, p_3) = \frac{2}{p_1} + \frac{3}{p_2} + \frac{4}{p_3}$$

a ceny towarów wynoszą $p_1 = 2 \pm 0{,}01$, $p_2 = 3 \pm 0{,}12$, $p_3 = 2 \pm 0{,}1$.

zad. 4) Objętość 1 kilograma pewnego gazu w zależności od (wyrażonej w molach) liczby cząsteczek trzech jego składowych: x, y i z wyraża sie wzorem

$$V(x,y,z) = x^2 z + \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Obliczyć kresy górne błędów bezwzględnego i względnego popełnianych przy obliczaniu objętości kilograma gazu, jeśli liczby cząsteczek składowych tego gazu wynoszą $x = 4 \pm 0{,}04$, $y = 1 \pm 0{,}02$, $z = 2 \pm 0{,}01$,

zad. 5) Pole powierzchni działki trójkątnej można obliczyć przy pomocy wzoru Herona

$$P(a,b,c) = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2},$$

gdzie a, b, c to długości krawędzi działki. Z jaką dokładnością należy znać wartości $a \approx 3m$, $b \approx 4m$, $c \approx 5m$, by pole powierzchni działki było obliczone z dokładnością $0{,}1m^2$? Wyniki podać w oparciu o metody: jednakowo dokładnego pomiaru, równych kresów górnych błędu bezwzględnego i równego wpływu.

zad. 6) Promień podstawy walca wynosi $r \approx 2cm$, a wysokość walca $h \approx 3cm.$ Z jaką dokładnością należy określić r, h oraz $\pi \approx 3{,}14$, aby objętość walca obliczyć z dokładnością do $0{,}1cm^3$?

zad. 7) W związku ze zbliżającym się końcem okresu wsparcia dla systemu operacyjnego Okna XL, administrator sieci uniwersyteckiej planuje aktualizację oprogramowania na podległych mu maszynach. W tym celu przygotowuje on listę n systemów operacyjnych, wraz z możliwością posortowania listy ze względu na różne kryteria. Administrator rozważa implementację jednego z następujących algorytmów sortujących:

a) Sortowanie przez wstawianie: w k −tym kroku $(1 \leq k \leq n)$ mamy posortowane pierwsze $k - 1$ elementów listy. Wybieramy k −ty element listy i wstawiamy go we właściwe miejsce poprzez porównanie go z elementami już posortowanymi.
b) Sortowanie przez wybieranie: w k −tym kroku $(1 \leq k \leq n)$ mamy posortowane $k - 1$ najmniejszych elementów listy. Spośród pozostałych elementów wybieramy najmniejszy i zamieniamy go w liście z elementem na pozycji k −tej.

Wyznacz złożoność obliczeniową tych algorytmów (oblicz liczbę wykonywanych operacji porównywania) i wskaż lepszy z nich (pod względem złożoności).

zad. 8) Wyznacz liczbę operacji mnożenia oraz liczbę operacji dodawania wykonywanych podczas rozwiązywania układu n równań liniowych o n niewiadomych metodą eliminacji Gaussa-Jordana i na tej podstawie podaj złożoność obliczeniową algorytmu.

III. Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. 1) Wyznaczyć błąd bezwzględny Δa oraz błąd względny δa, gdy liczba A jest przybliżana przez liczbę a. Jakie są kres górny błędu bezwzględnego Δ_a oraz kres górny błędu względnego δ_a (z dokładnością do czterech miejsc po przecinku)?

a) $A = 1{,}129124$, $a = 1{,}12$

b) $A = 1{,}129124$, $a = 1{,}13$

c) $A = \pi$, $a = 3{,}14$

zad. 2) Obliczyć kresy górne błędów bezwzględnego i względnego wartości podanych funkcji obliczanych dla wskazanych wartości argumentów:

a) $f(x,y) = \ln x + \ln y$, $x = 10 \pm 0{,}001$, $y = \frac{1}{10} \pm 0{,}0001$

b) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 - (x+z)^2$, $x = 1 \pm 0{,}02$, $y = -1 \pm 0{,}03$, $z = 3 \pm 0{,}02$

zad. 3) Zgodnie z prawem powszechnego ciążenia dwa ciała o masach $M\,kg$ i $m\,kg$ odległe od siebie o r metrów przyciągają się wzajemnie z siłą

$$F(M,m,r) = \frac{GMm}{r^2}$$

gdzie przyjmujemy, że $G \approx \frac{200}{3} \cdot 10^{-12} \frac{m^3}{kg\,s^2}$. Oblicz kresy górne błędu bezwzględnego i względnego siły przyciągania ciał o masach $M = 4 \pm \frac{9}{100} kg$, $m = 2 \pm \frac{3}{100} kg$ i odległych o $r = 2 \pm \frac{12}{1000} m$.

zad. 4) Dana jest funkcja f i przybliżone wartości argumentów. Z jaką dokładnością należy określić wartości x, y oraz z, aby obliczyć wartość f z dokładnością 0,03? Zadanie rozwiązać trzema metodami i porównać otrzymane wyniki.

a) $f(x,y,z) = y - xyz$, $x \approx 2, y \approx 5, z \approx 1$

b) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}(x^2 + y^2 + z^2)$, $x \approx 1, y \approx 0, z \approx -1$

zad. 5) Z Centrum Lotów Kosmicznych w Krakowie przyszło polecenie, aby skorygować położenie stacji kosmicznej *Miś*, znajdującej się na orbicie okołoziemskiej. W celu zmiany położenia stacji należy posłużyć się trzema silnikami manewrowymi. Czas działania każdego z silników powinien wynieść $x \approx 2$ minuty, $y \approx 4$ minuty, $z \approx 3$ minuty. Zmianę położenia stacji (w metrach), powstałą w wyniku działania silników, opisuje funkcja:

$$f(x,y,z) = xy + yz - xz.$$

Oblicz z jaką dokładnością należy określić wielkości x, y i z tak, aby korekta położenia stacji nie spowodowała błędu położenia przekraczającego 0,3 metra. Zadanie rozwiąż metodami równego wpływu, równych kresów i pomiaru jednakowo dokładnego, a wynik podaj w sekundach.

zad. 6) Wyznacz liczbę operacji mnożenia oraz liczbę operacji dodawania wykonywanych podczas wyznaczania:

a) macierzy odwrotnej do macierzy $n \times n$ metodą eliminacji Gaussa-Jordana
b) rzędu macierzy $n \times n$ metodą eliminacji Gaussa

i na tej podstawie podaj złożoność obliczeniową algorytmu.

IV. Odpowiedzi

zad. 1)

a) $\Delta a = 0{,}009124,\qquad \Delta_a = 0{,}0092$
$\delta a \approx 0{,}00808,\qquad \delta_a = 0{,}0081$
b) $\Delta a = 0{,}000876,\qquad \Delta_a = 0{,}0009$
$\delta a \approx 0{,}000776,\qquad \delta_a = 0{,}0008$
c) $\Delta a = \pi - 3{,}14 \approx 0{,}0015926535,\qquad \Delta_a = 0{,}0016$
$\delta a = \frac{\pi - 3{,}14}{\pi} \approx 0{,}000506957,\qquad \delta_a = 0{,}0006$

zad. 2)

a) $\Delta_f = 0{,}0011,\ f(x,y) = 0 \pm 0{,}0011,\qquad \delta_f -$ nie można zastosować
b) $\Delta_f = 0{,}36,\quad f(x,y,z) = -12 \pm 0{,}36,\ \delta_f = 0{,}03$

zad. 3) Odpowiedź:
$\Delta_F = 6{,}6\, pN, \delta_F = 4{,}95\%$

zad. 4)

zasada równego wpływu:

a) $\Delta_x = 0{,}002,\ \Delta_y = 0{,}01,\ \Delta_z = 0{,}001$
b) nie można zastosować ($f_z'(1{,}0,-1) = 0$)

metoda równych kresów górnych błędów bezwzględnych

a) $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0{,}001875$
b) $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0{,}005$

metoda pomiaru jednakowo dokładnego

a) $\Delta_x = 0{,}0024,\ \Delta_y = 0{,}006,\ \Delta_z = 0{,}0012$
b) $\Delta_x = 0{,}0075,\ \Delta_y = 0,\ \Delta_z = 0{,}0075$

zad. 5)

metoda równego wpływu: $\Delta_x = 6$ sekund, $\Delta_y = \frac{6}{5}$ sekundy, $\Delta_z = 3$ sekundy

metoda równych kresów górnych: $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \frac{9}{4}$ sekundy

pomiar jednakowo dokładny: $\Delta_x = \frac{9}{7}$ sekundy, $\Delta_y = \frac{18}{7}$ sekundy, $\Delta_z = \frac{27}{14}$ sekundy

zad. 6)

a) liczba operacji mnożenia:

$$\sum_{k=1}^{n}[n-(k-1)+(n-(k-1))(n-1)] + \sum_{k=1}^{n}[n+n(n-1)] = \frac{1}{2}n^2(3n+1)$$

liczba operacji dodawania:

$$\sum_{k=1}^{n}(n-(k-1))(n-1) + \sum_{k=1}^{n}n(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n(3n+1)$$

łączna liczba operacji: $\frac{1}{2}n(2n-1)(3n+1)$

złożoność obliczeniowa: $O(n^3)$

b) liczba operacji mnożenia:

$$\sum_{k=1}^{n}\big(n-(k-1)\big)(n-1-(k-1)) = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

liczba operacji dodawania:

$$\sum_{k=1}^{n}\big(n-(k-1)\big)(n-1-(k-1)) = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

łączna liczba operacji: $\frac{2}{3}(n-1)n(n+1)$

złożoność obliczeniowa: $O(n^3)$

