



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIwersytet
EKONOMICZNY
W KRAKOWIE



EDUKACJA
DLA
PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń
dla studentów

7. Całkowanie numeryczne

- 7.1. Metoda trapezów
- 7.2. Metoda parabol
- 7.3. Metoda 3/8 Newtona



informatyka
stosowana

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy” ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-00



UNIwersytet
EKONOMICZNY
W KRAKOWIE

I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- całka nieoznaczona;
 - całka oznaczona;
- oraz umiejętności:
- obliczanie podstawowych całek oznaczonych i nieoznaczonych;
 - obliczanie pochodnych funkcji;
 - wyznaczanie ekstremów funkcji na przedziałach.

II. Zadania

zad. 1) Oblicz daną całkę analitycznie, a następnie przy pomocy poznanych wzorów kwadratur wyznacz jej przybliżoną wartość (przyjmij $n = 1$):

$$\text{a) } \int_{-1}^5 (x + 1) dx \qquad \text{b) } \int_{-2}^4 (x^3 - 3) dx \qquad \text{c) } \int_{-3}^3 (2x - x^4) dx$$

zad. 2) Oblicz poniższą całkę analitycznie oraz jej przybliżone wartości wykorzystując wzory kwadratur dla $n = 1$ oraz $n = 2$. Porównaj uzyskane wyniki i rzeczywiste błędy przybliżenia z teoretycznymi oszacowaniami błędów:

$$\text{a) } \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$\text{b) } \int_{-2}^4 \frac{x^2 - 2}{x + 3} dx$$

zad. 3) Wykorzystując metodę 3/8 Newtona lub metodę parabol wyznacz trzy pierwsze przybliżenia wartości:

$$\text{a) } \ln 2$$

$$\text{b) } \operatorname{arctg} 3$$

zad. 4) Na ile podprzedziałów należy podzielić przedział całkowania, by błąd oszacowania wartości całki z zadania 2. był nie większy niż 0,001?

III. Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. 1) Dla podanych całek oznaczonych wykorzystaj wzory kwadratur dla uzyskania ich wartości przybliżonych. Przyjmij najpierw $n = 1$, a następnie $n = 2$.

a) $\int_1^4 \left(x^2 - x - \frac{1}{x}\right) dx$ b) $\int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx$ c) $\int_{-5}^1 \frac{x}{x-2} dx$

zad. 2) Oblicz na ile podprzedziałów należy podzielić przedział $[1, 2]$, aby błąd przybliżenia wartości poniższej całki wybraną metodą był nie większy niż:

a) 10^{-5} b) 10^{-7} c) 10^{-9}

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

zad. 3) Ryzyko urazu głowy w wypadku samochodowym może być opisane wskaźnikiem *HIC* (Head Injury Criterion). Jego postać opisana jest formułą:

$$HIC = \max_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T} (t_2 - t_1) \left(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \right)^{2,5}$$

gdzie $a(t)$ jest funkcją opisującą siły bezwładności na skutek których dochodzi do urazu (proporcjonalną do przyspieszenia), a T jest czasem hamowania samochodu poruszającego się początkowo z prędkością ok. 50 km/h. Oszacuj wartość wskaźnika *HIC* wykonując kolejne kroki:

- wyznacz średnią wartość funkcji $a(t)$ na przedziale $[50, 110]$

$$a(t) = \frac{16\,400}{(t-68)^2 + 400} + \frac{1\,480}{(t-93)^2 + 18}$$

obliczając metodą parabol lub 3/8 Newtona dla $n = 2$ całkę z tej funkcji i dzieląc ją przez długość przedziału całkowania, tj.

$$\bar{a} = \frac{1}{60} \int_{50}^{110} a(t) dt$$

(argument t funkcji $a(t)$ podany jest w milisekundach);

- następnie wyznacz przybliżoną wartość wskaźnika *HIC* obliczając wyrażenie:

$$HIC \approx (\bar{a})^{2,5} \cdot 0,06$$

gdzie 0,06 jest długością okna całkowania wyrażoną w sekundach;

- wartości wskaźnika *HIC* powyżej 1 000 oznaczają zagrożenie ludzkiego życia. Porównaj powyższy wynik z podobnie oszacowaną wartością wskaźnika *HIC* dla funkcji $a_A(t)$, opisującą przypadek z poduszką powietrzną w samochodzie:

$$a_A(t) = \frac{22\,000}{(t-74)^2 + 500}$$

Odpowiedzi

zad. 1)

a) $\int_1^4 \left(x^2 - x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{27}{2} - 2 \ln 2 \approx 12,1137$

Metoda	Trapezów	Parabol	3/8 Newtona
$n = 1$	$\frac{129}{8} = 16,125$	$\frac{483}{40} = 12,075$	$\frac{387}{32} = 12,094$
$n = 2$	$\frac{1\,047}{80} = 13,088$	$\frac{88\,149}{7\,280} = 12,108$	$\frac{27\,129}{2\,240} = 12,111$

b) $\int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4} \approx 5,9531$

Metoda	Trapezów	Parabol	3/8 Newtona
$n = 1$	$\frac{\pi^3}{2} \approx 15,503$	$\frac{\pi^3}{6} \approx 5,168$	$\frac{17\pi^3}{96} \approx 5,490$
$n = 2$	$\frac{\pi^3}{4} \approx 7,752$	$\frac{3\pi^3}{16} \approx 5,814$	$\frac{73\pi^3}{384} \approx 5,894$

c) $\int_{-5}^1 \frac{x}{x-2} dx = 6 - 2 \ln 7 \approx 2,1082$

Metoda	Trapezów	Parabol	3/8 Newtona
$n = 1$	$-\frac{6}{7} \approx -0,857$	$\frac{12}{7} \approx 1,714$	$\frac{66}{35} \approx 1,886$
$n = 2$	$\frac{15}{14} \approx 1,071$	$\frac{1\,563}{770} \approx 2,03$	$\frac{579}{280} \approx 2,068$

zad. 2)

Błąd maksymalny	Met. trapezów	Met. parabol	Met. 3/8 Newtona
10^{-5}	$n = 130$	$n = 6$	$n = 5$
10^{-7}	$n = 1\,291$	$n = 17$	$n = 14$
10^{-9}	$n = 12\,910$	$n = 54$	$n = 44$

zad. 3)

Metoda	Parabol	3/8 Newtona
Bez poduszki pow.	571	688
Z poduszką powietrzną	297	297