KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE

EDUKACJA DLA PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy" (POKL.04.01.01-00-011/09-00) jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Analiza matematyczna i algebra liniowa

Materiały pomocnicze dla studentów – do wykładów

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej.

- Całka nieoznaczona i oznaczona.
- Całka niewłaściwa.
- Zastosowania ekonomiczne i geometryczne całki oznaczonej.

informatyka stosowana

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy" ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-00

UNIWERSYTET EKONOMICZNY W KRAKOWIE

Temat 4: Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

Rachunek całkowy zostanie przedstawiony jako „odwrócenie” rachunku różniczkowego. Wykład zostanie ograniczony do elementarnych metod całkowania oraz całkowanie przez części i przez podstawienie.

1. Funkcja pierwotna i definicja całki nieoznaczonej.

Niech $f:\mathbf{R}\supset I\to\mathbf{R}$ będzie funkcją określoną w przedziale *I*.

Definicja.
Funkcję $F:\mathbf{R}\supset I\to\mathbf{R}$ nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji f w przedziale *I*, jeżeli *F* jest funkcją różniczkowalną oraz $F'=f$ w przedziale *I*.

Definicja.
Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f nazywamy **całką nieoznaczoną** funkcji f i oznaczamy symbolem $\int f(x)dx$.

2. Reguły całkowania.

1. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
3. $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx,\ a \neq 0$
4. (metoda całkowania przez części)
   $\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$
5. (metoda całkowania przez podstawienie lub zmianę zmiennej)
   $\int g[f(x)] \cdot f'(x)dx = \int g(t)dt$, gdzie $t = f(x)$

3. Wzory rachunku całkowego.

1. $\int a\,dx = ax + C$
2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
3. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg} x + C$
9. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg} x + C_1 = -\mathrm{arcctg} x + C_2$
11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$

Warto korzystać również z następującego uogólnienia wzoru (3):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

4. Całka oznaczona Riemanna pojedyncza – podstawowe definicje.

Niech dana będzie funkcja $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ ograniczona.

Definicje.

1. ***n*-tym podziałem** P_n **przedziału** $[a,b]$ nazywamy ciąg liczb $x_0,\ldots,x_n$ taki, że $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.
2. **Średnicą podziału** P_n nazywamy liczbę $\Delta_n=\max\Delta x_i$, $i=1,\ldots,n$, gdzie $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.
3. **Normalnym ciągiem podziałów** nazywamy taki ciąg (P_n) podziałów odcinka $[a,b]$, dla którego $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n=0$.
4. ***n*-tą sumą całkową** nazywamy sumę: $S_n\big(f,P_n,(t_i)\big)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\cdot\Delta x_i$, gdzie $t_i\in[a,b]$.

Definicja.

Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów (P_n) ciąg sum całkowych $S_n\big(f,P_n,(t_i)\big)$ jest zbieżny do tej samej granicy skończonej *S* niezależnie od wyboru punktów (t_i), to mówimy, że funkcja *f* jest całkowalna (w sensie Riemanna) w przedziale $[a,b]$. Granicę *S* nazywamy **całką oznaczoną Riemanna** funkcji *f* w przedziale $[a,b]$ i oznaczamy symbolem $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego.

Twierdzenie.

Jeżeli $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą oraz *F* jest jej funkcją pierwotną, to $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

5. Własności całki funkcji ciągłej.

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,   dla $a < c < b$

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5. (metoda całkowania przez części)

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

6. (metoda całkowania przez podstawienie lub zmianę zmiennej)

$$\int_a^b g[f(x)]f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)dt, \quad \text{gdzie } t = f(x)$$

7. (twierdzenie o wartości średniej). Istnieje $c \in [a,b]$ takie, że

$$\int_a^a f(x)dx = f(c)(b-a)$$

8. Jeżeli *f* = 0 w przedziale $[a,b]$, to $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Jeżeli *f* ≥ 0, to $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Jeżeli *f* ≥ *g*, to $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

9. $\int_a^b |f(x)|dx \geq \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

6. Całka niewłaściwa.

Definicja.

Jeżeli funkcja f jest całkowalna w każdym przedziale $[a,M]$ oraz istnieje granica skończona $\lim\limits_{M\to b^-}\int\limits_a^M f(x)dx$, to granicę tę nazywamy **całką niewłaściwą** funkcji f w przedziale $[a,b)$ i zapisujemy ją w postaci $\int\limits_a^b f(x)dx$. Mówimy wówczas, że całka niewłaściwa $\int\limits_a^b f(x)dx$ jest zbieżna. Tak więc

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{M\to b^-}\int\limits_a^M f(x)dx .$$

Jeżeli granica $\lim\limits_{M\to b^-}\int\limits_a^M f(x)dx$ nie istnieje lub jest nieskończona, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int\limits_a^b f(x)dx$ jest rozbieżna.

W analogiczny sposób definiujemy całkę niewłaściwą $\int\limits_a^b f(x)dx$, gdy a jest punktem osobliwym:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{M\to a^+}\int\limits_M^b f(x)dx .$$

W szczególności:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to +\infty}\int\limits_a^M f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{M\to -\infty}\int\limits_M^b f(x)dx .$$

Jeżeli oba końce przedziału całkowania są punktami osobliwymi, to całkę niewłaściwą $\int\limits_a^b f(x)dx$ należy przedstawić w postaci sumy dwóch całek niewłaściwych z jednym punktem osobliwym, np.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx .$$

Całkę taką nazwiemy zbieżną, jeżeli oba składniki są całkami zbieżnymi.

7. Zastosowanie ekonomiczne całki oznaczonej.

1) **Wielkość produkcji całkowitej *P*** w czasie *T* przy zmiennej wydajności pracy *w*(*t*) określa wzór:

$$P = \int_{0}^{T} w(t)dt .$$

2) **Stan zapasów *Z*** po czasie *T*, jeżeli intensywność napełniania w chwili *t* od momentu rozpoczęcia napełniania wynosi *i*(*t*), określa:

$$Z = \int_{0}^{T} i(t)dt .$$

3) **Średnią sprzedaż (lub zysk)** w okresie $[0,T]$ jeżeli wielkość sprzedaży (zysku) do momentu *t* wyraża funkcja *s*(*t*), określa wzór:

$$s_{śr} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} s(t)dt$$

8. Zastosowanie geometryczne całki oznaczonej.

1) **Pole obszaru płaskiego**

Jeżeli obszar płaski *d* na płaszczyźnie można przedstawić w postaci:

$$D = \{(x,y): a \le x \le b \ i \ f(x) \le y \le g(x)\}$$

gdzie *f* i *g* są funkcjami ciągłymi w przedziale $[a,b]$, to pole $|D|$ tego obszaru wyraża całka:

$$|D| = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]dx .$$

2) **(*) Długość krzywej**
Jeżeli funkcja *f* określona w przedziale $[a,b]$ ma ciągłą pochodną w tym przedziale, to długość *L* krzywej będącej wykresem tej funkcji wyraża całka:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \ .$$

3) **(*) Objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej**
Niech *f* będzie funkcją określoną w przedziale $[a,b]$, o ciągłej pochodnej, przyjmującą wartości nieujemne. Jeżeli krzywa, będąca wykresem funkcji *f*, będzie obracać się wokół osi *x*, to wyznaczy tzw. bryłę obrotową *V*. Bryłami obrotowymi są mi.: walec, stożek, stożek ścięty, kula i nieskończenie wiele innych brył, które nie mają specjalnych nazw. Objętość $|V|$ i pole powierzchni bocznej *S* bryły obrotowej *V* określają wzory:

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx \ ,$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx \ .$$

<u>Pytania kontrolne:</u>

1. Dlaczego w regule całkowania 3-ej należy założyć $a \neq 0$?
2. Czy w metodzie całkowania przez podstawienie $t = f(x)$ jest wyznaczone jednoznacznie?

3. Dlaczego całka oznaczona funkcji ciągłej $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej *F*?
4. Kiedy całkę niewłaściwą nazywamy zbieżną, a kiedy rozbieżną?
5. Czy w twierdzeniu o wartości średniej w rachunku całkowym liczba *c* jest wyznaczona jednoznacznie? Czy wartość średnia *f(c)* jest wyznaczona jednoznacznie?
6. Czy prawdą jest, że jeżeli $f(x) \leq 0$ w przedziale [*a*,*b*], to również $\int_a^b f(x)dx \leq 0$?