Eowyn Renoud Hallereau
3A MAM
2023-2024

TP3 Simulation Aléatoire
Compte-rendu

---

1 L'aiguille de Buffon

Exercice 1

1. On veut montrer que $\mathbb{P}(D=1) = \dfrac{2a}{\pi L}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D=1) &= \mathbb{P}(X \leq \frac{a}{2}\cos\theta) + \mathbb{P}(X > L - \frac{a}{2}\cos\theta) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \frac{a}{2}\cos\theta) + 1 - \mathbb{P}(X \leq L - \frac{a}{2}\cos\theta)\end{aligned} \tag{1}$$

On note (2) $\mathbb{P}(X \leq \frac{a}{2}\cos\theta)$ et (4) $\mathbb{P}(X \leq L - \frac{a}{2}\cos\theta)$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq \frac{a}{2}\cos\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy\end{aligned} \tag{2}$$

avec $Y = \dfrac{a}{2}\cos\theta$

Or $f_Y(y) = (F_Y(y))'$ et

$$\begin{aligned}F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(\frac{a}{2}\cos\theta \leq y\right) &= \mathbb{P}\left(|\theta| \geq \arccos\left(\frac{2y}{a}\right)\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(|\theta| < \arccos\left(\frac{2y}{a}\right)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(-\arccos\left(\frac{2y}{a}\right) < \theta < \arccos\left(\frac{2y}{a}\right)\right) \\ &= 1 - F_\theta\left(\arccos\left(\frac{2y}{a}\right)\right) + F_\theta\left(-\arccos\left(\frac{2y}{a}\right)\right)\end{aligned}$$

Donc

$$f_Y(y) = \frac{2}{a\sqrt{1-(\frac{2y}{a})^2}} * f_\theta\left(\arccos\left(\frac{2y}{a}\right)\right) + \frac{2}{a\sqrt{1-(\frac{2y}{a})^2}} * f_\theta\left(-\arccos\left(\frac{2y}{a}\right)\right)$$

Or $\theta \sim \mathcal{U}([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et $f_\theta\left(\arccos\left(\frac{2y}{a}\right)\right) = \frac{1}{\pi} * \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\arccos\left(\frac{2y}{a}\right))$

et $f_\theta\left(-\arccos\left(\frac{2y}{a}\right)\right) = \frac{1}{\pi} * \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(-\arccos\left(\frac{2y}{a}\right)) = \frac{1}{\pi} * \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\arccos\left(\frac{2y}{a}\right))$

Donc

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi a\sqrt{1-(\frac{2y}{a})^2}}\left(2 * \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\arccos\left(\frac{2y}{a}\right))\right) = \frac{4}{\pi a\sqrt{1-(\frac{2y}{a})^2}} * \mathbb{1}_{[0,\frac{a}{2}]}(y)$$

car

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \arccos\left(\frac{2y}{a}\right) \leq \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2y}{a} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Donc de (2) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq \frac{a}{2}\cos\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{L} * \mathbb{1}_{[0,L]}(x) * \frac{4}{\pi a\sqrt{1-(\frac{2y}{a})^2}}\mathbb{1}_{[0,\frac{a}{2}]}(y)\,dx\,dy \\ &= \int_{0}^{\frac{a}{2}}\int_{-\infty}^{y} \frac{4}{\pi a L\sqrt{1-(\frac{2y}{a})^2}}\,dx\,dy \\ &= \int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{4y}{\pi a L\sqrt{1-(\frac{2y}{a})^2}}\,dy \\ &= \frac{1}{\pi L}\int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{-4y}{a^2\sqrt{1-(\frac{2y}{a})^2}} * (-a)\,dy \\ &= \frac{-a}{\pi L}\left[\sqrt{1-\left(\frac{2y}{a}\right)^2}\right]_0^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{-a}{\pi L}\left(\sqrt{1-1}-\sqrt{1-0}\right) \\ &= \frac{a}{\pi L} \end{aligned} \tag{3}$$

Ensuite on calcule (4)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq L - \frac{a}{2}\cos\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} f_{(X,Z)}(x,z)\,dx\,dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} f_X(x)f_Z(z)\,dx\,dz \end{aligned} \tag{4}$$

avec $Z = L - \frac{a}{2}\cos\theta$

Or $f_Z(z) = (F_Z(z))'$ et

$$\begin{aligned}
F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(L - \frac{a}{2}\cos\theta \leq z\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{a}{2}\cos\theta \geq L - z\right) \\
= \mathbb{P}\left(\cos\theta \geq \frac{2(L-z)}{a}\right) &= \mathbb{P}\left(|\theta| \leq \arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)\right) \\
= \mathbb{P}\left(-\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right) \leq \theta \leq \arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)\right) & \\
= F_\theta\left(\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)\right) - F_\theta\left(-\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)\right) &
\end{aligned}$$

Donc

$$f_Z(z) = \frac{2}{a\sqrt{1-\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)^2}} * f_\theta\left(\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)\right) + \frac{2}{a\sqrt{1-\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)^2}} * f_\theta\left(-\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)\right)$$

Or $\theta \sim \mathcal{U}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f_\theta\left(\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)\right) = \frac{1}{\pi} * \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right))$
et $f_\theta\left(-\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)\right) = \frac{1}{\pi} * \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(-\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)) = \frac{1}{\pi} * \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right))$
Donc

$$f_Z(z) = \frac{2}{\pi a\sqrt{1-\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)^2}}\left(2 * \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(\arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right))\right) = \frac{4}{\pi a\sqrt{1-\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)^2}} * \mathbb{1}_{[L-\frac{a}{2},L]}(z)$$

car

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \leq \arccos\left(\frac{2(L-z)}{a}\right) \leq \frac{\pi}{2} \\
\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2(L-z)}{a} \leq 1 \\
\Leftrightarrow 0 \leq L - z \leq \frac{a}{2} \\
\Leftrightarrow L - \frac{a}{2} \leq z \leq L
\end{aligned}$$

Donc de (4) :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq L - \frac{a}{2}\cos\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{L} * \mathbb{1}_{[0,L]}(x) * \frac{4}{\pi a\sqrt{1-\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)^2}} \mathbb{1}_{[L-\frac{a}{2},L]}(z)\, dx\, dz \\
&= \int_{L-\frac{a}{2}}^{L}\int_{-\infty}^{z} \frac{4}{\pi a L\sqrt{1-\left(\frac{2(L-z)}{a}\right)^2}}\, dx\, dz \\
&= \int_{L-\frac{a}{2}}^{L} \frac{4z}{\pi a L\sqrt{1-\left(\frac{2(L-z)}{a}\right))^2}}\, dz \quad \text{On pose} \quad w = L-z \quad dz = -dw \\
&= \int_{\frac{a}{2}}^{0} \frac{4(L-w)}{\pi a L\sqrt{1-(\frac{2w}{a})^2}}(-\,dw) \\
&= \int_{\frac{a}{2}}^{0} \frac{-4L}{\pi a L\sqrt{1-(\frac{2w}{a})^2}}\, dw + \int_{\frac{a}{2}}^{0} \frac{4w}{\pi a L\sqrt{1-(\frac{2w}{a})^2}}\, dw \\
&= \int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{-2}{a\sqrt{1-(\frac{2w}{a})^2}} * \left(\frac{-2}{\pi}\right) dw + \int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{-4w}{a^2\sqrt{1-(\frac{2w}{a})^2}} * \left(\frac{a}{\pi L}\right) dw \\
&= \frac{-2}{\pi}\left[\arccos\left(\frac{2w}{a}\right)\right]_0^{\frac{a}{2}} + \frac{a}{\pi L}\left[\sqrt{1-\left(\frac{2w}{a}\right)^2}\right]_0^{\frac{a}{2}} \\
&= \frac{-2}{\pi}\left(0-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{a}{\pi L}\left(\sqrt{1-1}-\sqrt{1-0}\right) \\
&= 1 - \frac{a}{\pi L}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Finalement de (1), (3) et (5) on obtient :

$$
\mathbb{P}(D=1) = \frac{a}{\pi L} + 1 - (1 - \frac{a}{\pi L}) = \frac{2a}{\pi L}
$$

2. Voici le code pour calculer π avec cette méthode :

```r
#Approximation de pi avec la methode de Buffon
l = 10
a = 5
d = c()
som = 0
ite = 1000000 #nombre d'iterations
teta = runif(ite, -pi / 2, pi / 2)
X = runif(ite, 0, l)

for (i in 1:ite){
  if ((0 <= X[i] && X[i] <= (a/2)*cos(teta[i])) ||
        (l-(a/2)*cos(teta[i]) <= X[i] && X[i] <= l)){
    d[i] = 1
  }else{
    d[i] = 0
  }
  som = som + d[i]
}
```

```

esperance = som / ite
Pi = (2 * a) / (esperance * l)
print(Pi)
```

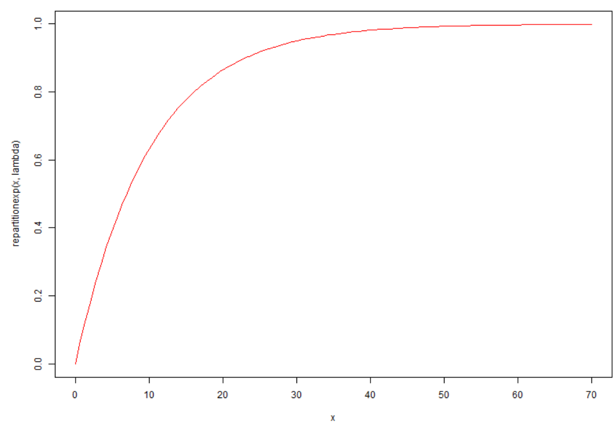
On obtien normalment 3.14...

2 Simulation par la méthode d'inversion

1. Voici le code pour la simulation d'une loi exponentielle :

```
#Simulation loi exponentielle

repartitionexp = function(x, lambda) {
  repart = c()
  for (i in 1:length(x)){
    repart[i] = integrate(function(x) dexp(x, lambda), 0, x[i])$value
   # $value permet d'avoir la valeur sans l'approximation
  }
  return(repart)
}

nbite = 1000
lambda = 1 / 10
U = runif(nbite, 0, 1)

for (i in 1:length(U)){
  U[i] = (-1 / lambda) * log(1 - U[i])
}
U = sort(U)

y = c()
for (i in 1:nbite){
  y[i] = i
}

par(mfrow = c(2, 1))
curve(repartitionexp(x, lambda), 0, 70, col = "red")
plot(U, y)
par(mfrow = c(1, 1))
```

On obtient :



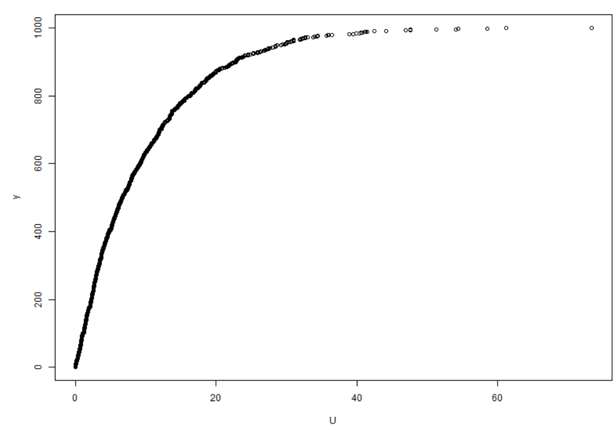


Figure 1: Fonctions de répartition de la loi expoinnentielle réelle (rouge) et de celle simulée (noir)

On remarque que les deux graphiques se ressemblent énormément, or si deux lois ont la même fonction de répartition alors se sont les mêmes lois.

2. Voici le code pour la simulation d'une loi de Bernoulli :

```
#Simulation loi de Bernoulli

repartionber = function(x, p) {
  repart = c()
  for (i in 1:length(x)){
    if (x[i] < 0) repart[i] = 0
    if (0 <= x[i] && x[i] < 1) repart[i] = (1 - p)
    if (x[i] >= 1) repart[i] = 1
  }
  return(repart)
}

nbite = 1000

y = c()
for (i in 1:nbite){
  y[i] = i
}

```

```
p = 0.6
U2 = c()
U2 = runif(nbite, 0, 1)
for (i in 1:length(U2)){
  if (0 < U2[i] && U2[i] < (1 - p)) U2[i] = 0
  if ((1 - p) <= U2[i] && U2[i] <= 1) U2[i] = 1
}
U2 = sort(U2)

par(mfrow = c(2, 1))
curve(repartionber(x, p), -0.1, 1, col = "red")
plot(U2, y)
par(mfrow = c(1, 1))
```

On obtient :

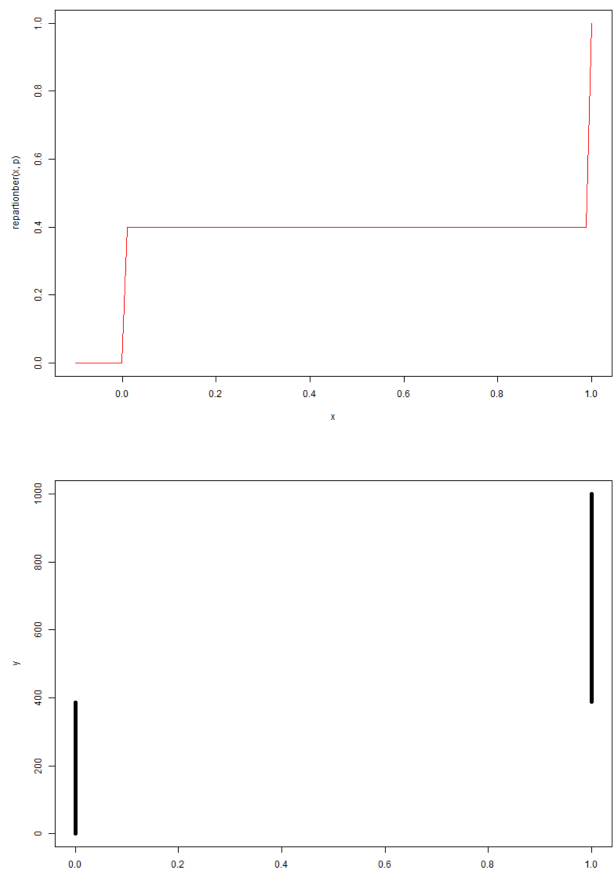


Figure 2: Fonctions de répartitions de la loi de Bernoulli réelle (rouge) et de celle simulée (noir)

Bien que les points ne soient pas reliés sur la fonction de répartition de la loi simulé, on reconnait bien le même graphique que celui en rouge. Ceci indique que les deux lois ont la même fonction de répartition, ce sont donc les mêmes lois.

3 Méthode de Box Muller pour la simulation de variables gaussiennes

Exercice 2

1. L'énoncé nous donne :

$$\begin{cases} X_1 = \sqrt{2V}\cos(2\pi U) \\ X_2 = \sqrt{2V}\sin(2\pi U) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = \frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{2V}}\right) \\ X_2 = \sqrt{2V}\sin\left(2\pi * \frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{2V}}\right)\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U = \frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{2V}}\right) \\ X_2 = \sqrt{2V}\sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{\sqrt{2V}}\right)^2} = \sqrt{2V - X_1^2} \end{cases} \quad \text{car} \quad \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U = \frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{\frac{2}{2}(X_1^2+X_2^2)}}\right) = \frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right) \\ V = \frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2) \end{cases}$$

Ainsi : $\Psi^{-1}(X_1, X_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right), \frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2)\right)$

On veut calculer : $J_{\Psi^{-1}}(X_1, X_2)$ or $(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ et

$\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right) = \frac{X_2^2}{(X_1^2+X_2^2)^{\frac{3}{2}}}$ donc

$$\frac{\partial \Psi_1^{-1}}{\partial X_1} = -\frac{1}{2\pi} * \frac{X_2^2}{(X_1^2+X_2^2)^{\frac{3}{2}}} * \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}})^2}} = -\frac{1}{2\pi} * \frac{X_2^2}{(X_1^2+X_2^2)|X_2|}$$

De la même façon on a : $\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right) = \frac{-X_1X_2}{(X_1^2+X_2^2)^{\frac{3}{2}}}$ donc

$$\frac{\partial \Psi_1^{-1}}{\partial X_2} = -\frac{1}{2\pi} * \frac{-X_1X_2}{(X_1^2+X_2^2)^{\frac{3}{2}}} * \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}})^2}} = \frac{1}{2\pi} * \frac{X_1X_2}{(X_1^2+X_2^2)|X_2|}$$

De plus $\frac{\partial \Psi_2^{-1}}{\partial X_1} = X_1$ et $\frac{\partial \Psi_2^{-1}}{\partial X_2} = X_2$

On obtient donc

$$J_{\Psi^{-1}}(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\pi} * \frac{X_2^2}{(X_1^2+X_2^2)|X_2|} & \frac{1}{2\pi} * \frac{X_1X_2}{(X_1^2+X_2^2)|X_2|} \\ X_1 & X_2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} |det(J_{\Psi^{-1}}(X_1, X_2))| &= \left|-\frac{1}{2\pi} * \frac{X_2^3}{(X_1^2+X_2^2)|X_2|} - \frac{1}{2\pi} * \frac{X_1^2X_2}{(X_1^2+X_2^2)|X_2|}\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2\pi} * \frac{X_2(X_2^2+X_1^2)}{(X_1^2+X_2^2)|X_2|}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \tag{6}$$

Ensuite $f_{U,V}(u,v) = f_U(u) * f_V(v) = \mathbb{1}_{[0,1]}(u) * \exp(-v) * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)$

$$\Rightarrow f(\Psi^{-1}(X_1,X_2)) = \exp(-\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2))*\mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right))*\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2)) \tag{7}$$

Donc d'après la proposition deux de l'énoncé ainsi que les équations (6) et (7) :

$$\begin{aligned} g(X_1,X_2) &= f(\Psi^{-1}(X_1,X_2)) * |det(J_{\Psi^{-1}}(X_1,X_2))| * \mathbb{1}_{\Psi(D)}(X_1,X_2) \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2)) * \mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right)) * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2))* \end{aligned}$$

$$\mathbb{1}_{\Psi(D)}(X_1,X_2) \tag{8}$$

Or $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2)) = 1 \quad \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}$

et $\mathbb{1}_{[0,1]}(\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}\right)) = 1 \quad \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}$

et $\Psi(D) = \mathbb{R}^2$ donc $\mathbb{1}_{\Psi(D)}(X_1,X_2) = 1 \quad \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}$

Ce qui, d'après (8), nous donne : $g(X_1,X_2) = \dfrac{1}{2\pi}\exp(-\dfrac{1}{2}(X_1^2+X_2^2))$

On reconnait ici la fonction de répartition d'une loi Normale de paramètre 0 et I_2 donc $(X_1,X_2) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$.

2. Voici le code validant le résulat démontré ci-dessus.

```
#Methode de Box Muller
library(plot3D)

repartitionnorm = function(x, m, sigma2) {
  repart <- c()
  for (i in 1:length(x)){
    repart[i] = integrate(function(x) dnorm(x, m, sigma2), 0, x[i])$value
  }
  return(repart)
}

ite = 10000
y = c()
for (i in 1:ite){
  y[i] = i
}

N1 = rnorm(ite, 0, 1)
N1 = cut(N1, 20)
N2 = rnorm(ite, 0, 1)
N2 = cut(N2, 20)
N = table(N1, N2)

U = runif(ite, 0, 1)
V = rexp(ite, 1)
X1 = sqrt(2 * V) * cos(2 * pi * U)
X2 = sqrt(2 * V) * sin(2 * pi * U)
```

```
X1 = cut(X1, 20)
X2 = cut(X2, 20)
X = table(X1, X2)

par(mfrow = c(2, 1))
hist3D(z = N)
hist3D(z = X)
par(mfrow = c(1, 1))
```

On obtient :

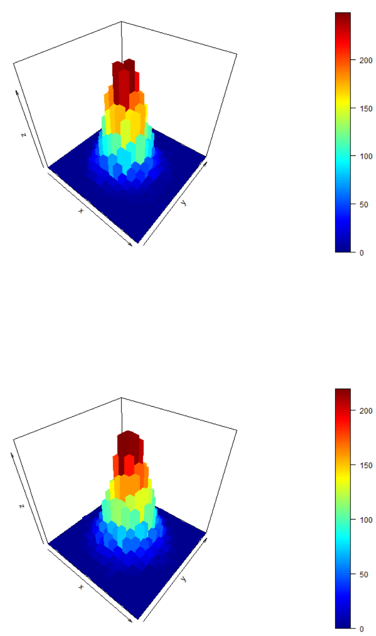


Figure 3: Fonctions de répartiton de U,V et X1,X2 dans le cadre de la méthode de Box Muller

Exercice 3

1. De la même manière qu'à l'exercice 2 on calcule la loi de (Y,Z) :

   L'énoncé nous donne :

$$\begin{cases} Y = \frac{U}{U+V} \\ Z = U + V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \frac{U}{U+Z-U} = \frac{U}{Z} \\ V = Z - U \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = YZ \\ V = Z - YZ \end{cases}$$

   Ainsi : $\Psi^{-1}(Y,Z) = (YZ, Z(1-Y))$

   Ce qui nous donne :

$$J_{\Psi^{-1}}(Y,Z) = \begin{pmatrix} Z & Y \\ -Z & 1-Y \end{pmatrix}$$

   Alors :

$$|det(J_{\Psi^{-1}}(Y,Z))| = |Z(1-Y) + ZY| = |Z - ZY + ZY| = Z \tag{9}$$

Ensuite

$$f_{U,V}(u,v) = f_U(u) * f_V(v) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1}e^{-\theta u}v^{\beta-1}e^{-\theta v} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u) * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(v)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(\Psi^{-1}(Y,Z)) &= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)}(YZ)^{\alpha-1}e^{-\theta YZ}(Z(1-Y))^{\beta-1}e^{-\theta Z(1-Y)} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(YZ) * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(Z(1-Y)) \\ &= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)}Y^{\alpha-1}(1-Y)^{\beta-1}Z^{\alpha+\beta-2}e^{-\theta Z} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(YZ) * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(Z(1-Y))\end{aligned} \tag{10}$$

Donc d'après la proposition deux de l'énoncé ainsi que les équations (9) et (10) :

$$\begin{aligned}g(Y,Z) = f_{Y,Z}(y,z) &= f(\Psi^{-1}(y,z)) * |det(J_{\Psi^{-1}}(y,z))| * \mathbb{1}_{\Psi(D)}(y,z) \\ &= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}z^{\alpha+\beta-2}e^{-\theta z}z * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(yz) * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z(1-y)) * \end{aligned} \tag{11}$$

$\mathbb{1}_{\Psi(D)}(y,z)$

Or $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(yz) = 1 \quad \forall y,z \in \mathbb{R}_+$
et $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z(1-y)) = \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \quad \forall y,z \in \mathbb{R}_+$
et $\Psi(D) = \mathbb{R}_+^2$ donc $\mathbb{1}_{\Psi(D)}(y,z) = 1 \quad \forall y,z \in \mathbb{R}_+$
Ce qui, d'après (11), nous donne :

$$f_{Y,Z}(y,z) = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}z^{\alpha+\beta-1}e^{-\theta z} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z) * \mathbb{1}_{]0,1[}(y) \tag{12}$$

On peut donc calculer :

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}z^{\alpha+\beta-1}e^{-\theta z} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z) * \mathbb{1}_{]0,1[}(y)\,dz \\ &= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} * \mathbb{1}_{]0,1[}(y)\int_0^{+\infty}\left(\frac{w}{\theta}\right)^{\alpha+\beta-1}e^{-w}\frac{1}{w}\,dw \quad \textbf{avec} \quad w = \theta z \\ &= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\theta^{\alpha+\beta}}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} * \mathbb{1}_{]0,1[}(y)\int_0^{+\infty} w^{\alpha+\beta-1}e^{-w}\,dw \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} * \mathbb{1}_{]0,1[}(y)\end{aligned} \tag{13}$$

On reconnait ici la fonction de répartition d'une loi Beta de paramètres alpha et beta.

2.

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}z^{\alpha+\beta-1}e^{-\theta z} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z) * \mathbb{1}_{]0,1[}(y)\,dy \\ &= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{\alpha+\beta-1}e^{-\theta z} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy \\ &= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{\alpha+\beta-1}e^{-\theta z} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)\left(\int_0^1 y^{\alpha-1}\,dy - \int_0^1 y^{\alpha+\beta-2}\,dy\right) \\ &= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{\alpha+\beta-1}e^{-\theta z} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)\left(\left[\frac{y^\alpha}{\alpha}\right]_0^1 - \left[\frac{y^{\alpha+\beta-1}}{\alpha+\beta-1}\right]_0^1\right) \\ &= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}z^{\alpha+\beta-1}e^{-\theta z} * \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+\beta-1}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

Je ne reconnais pas de loi spécifique.

3. D'après les équations (12), (13) et (14) on voit que $f_{Y,Z}(y,z) \neq f_Y(y) * f_Z(z)$ donc Y et Z ne sont pas indépendantes.

4 Méthode de Monte-Carlo

Exercice 4

Voici le code donnant une approximation de π par la méthode de Monte-Carlo :

```
#Simulation de Pi par la methode de Monte Carlo

ite = 1000000
x = runif(ite, 0, 1)
y = runif(ite, 0, 1)
D = c()

for (i in 1:ite) {
  if ((x[i]^2 + y[i]^2) <= 1) {
    D[i] = 1
  } else {
    D[i] = 0
  }
}

P = 4 * (sum(D) / ite)
print(P)
```

On obtient 3,14...

5 Simulation par la méthode du rejet

Exercice 5

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U < \frac{1}{T}) = \mathbb{P}\left(U < \frac{f(x)}{cg(x)}\right) &= F_U\left(\frac{f(x)}{cg(x)}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{f(x)}{cg(x)}} f_U(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{f(x)}{cg(x)}} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\,dt \quad \text{car} \quad U \sim \mathcal{U}([0,1]) \\
&= \int_{0}^{\frac{f(x)}{cg(x)}} dt \quad \text{car} \quad f(x) \leq cg(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{cg(x)} \leq 1 \\
&= [t]_0^{\frac{f(x)}{cg(x)}} = \frac{f(x)}{cg(x)} \\
&= \frac{1}{c} \quad \text{car} \quad X \sim f(x) = g(x)
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in B | U < \frac{1}{T}) &= \frac{\mathbb{P}(X \in B \cap U < \frac{1}{T})}{\mathbb{P}(U < \frac{1}{T})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X \in B)\mathbb{P}(U < \frac{1}{T})}{\mathbb{P}(U < \frac{1}{T})} \quad \text{car X et U sont indépendantes} \\
&= \mathbb{P}(X \in B) \\
&= \int_B f(x)\, dx
\end{aligned}
$$

Exercice 6

Voici l'algorithme simulant X selon la méthode du rejet :

```r
#Methode du rejet

ite = 10000
abs = c()
ord = c()

f1 = function(x){
  f = c()
  for (i in 1:length(x)){
    if (-1 <= x[i] && x[i] <= 1) {
      f[i] = (2 / pi) * sqrt(1 - x[i]^2)
    } else {
      f[i] = 0
    }
  }
  return(f)
}

for (i in 1:ite){
  u = runif(1, 0, 1)
  g = runif(1, -1, 1)
  if (u <= (2 / pi) * sqrt(1 - g^2)) {
    abs[i] = g
    ord[i] = u
  }else {
    abs[i] = 0
    ord[i] = 0
  }
}

plot(abs, ord, cex = 0.5)
curve(f1(x), -1, 1, add = TRUE)
```

On obtient :

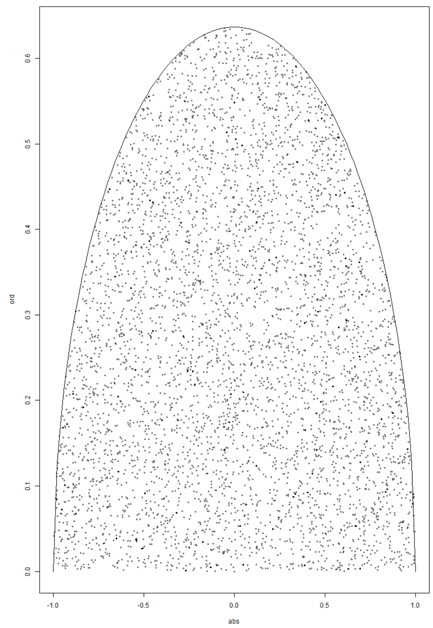


Figure 4: Simulation de la fonction de répartition de X selon la méthode du rejet

La figure (4) permet de valider l'algorithme de la méthode du rejet.