

Décomposition de domaines de Schwarz accélérée par la méthode  
Aitken-SVD  
Analyse de la géométrie Trois Cercles

Wyneo, a.gautier

11 Juin 2025

# Remerciements

Nous remercions, M.Tromeur-Dervout, Enseignant-Chercheur à l'université Claude Bernard Lyon 1, pour son accompagnement et son attention sur ce projet.

Nous remercions également l'équipe du département MAM de Polytech Lyon, pour nous avoir permis de travailler sur un projet en autonomie ainsi que pour leurs suggestions de projets, tous plus intéressants les uns que les autres.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Décomposition de Domaines</b>	<b>4</b>
1.1 Décomposition de Schwarz . . . . .	4
1.2 Accélération d'Aitken . . . . .	5
1.3 Accélération d'Aitken SVD . . . . .	6
1.4 Décomposition en Valeurs Singulières . . . . .	7
1.5 Pseudo-Inverse de Moose-Penrose . . . . .	8
<b>2 Implémentation numérique</b>	<b>9</b>
2.1 Géométrie à deux cercles . . . . .	10
2.2 Géométrie à trois cercles . . . . .	13
<b>3 Solutions Manufacturées</b>	<b>16</b>
3.1 Prérequis . . . . .	16
3.2 Implémentation des solutions manufacturées . . . . .	17
3.3 Performances des algorithmes . . . . .	17
<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>4 Programmes</b>	<b>21</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>22</b>

# Introduction

La décomposition de domaine de Schwarz est une méthode d'approximation d'équations aux dérivées partielles, consistant à scinder notre domaine en plusieurs sous-domaines, sur lesquels le système différentiel est approximé successivement, avec par exemple une méthode d'éléments finis de type Galerkin. Chaque approximation sert à la suivante du fait que des nouvelles conditions sont fixées sur les bords du sous-domaine approximé selon la précédente itération.

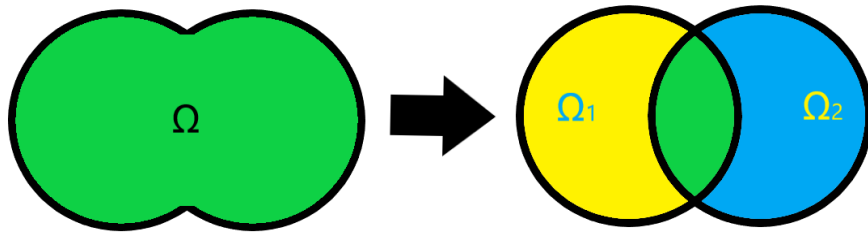


Figure 1: Exemple de Décomposition de Domaine : Le domaine  $\Omega$  peut être décomposé en deux cercles  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , qui sont des géométries plus simples.

Cette méthode est en réalité assez peu utilisée, du fait de sa lenteur de convergence. Il est possible d'exploiter une propriété des erreurs d'itérations, notamment sur les bords. En effet, les itérations successives sur les bords suivent un opérateur linéaire. Une fois cet opérateur approximé, il est possible de connaître la "valeur exacte" sur les bords, et donc d'effectuer une dernière approximation sur chaque sous-domaine avec des conditions aux limites exactes.

Cependant, même cette méthode d'accélération d'Aitken n'est pas suffisante d'un point de vue performance. En effet, il est parfois nécessaire de faire un grand nombre d'itérations de la décomposition de Schwarz pour déterminer correctement l'opérateur linéaire d'erreur. Du fait qu'il est nécessaire d'inverser cette matrice entière, cette méthode est en réalité peu optimale.

Une autre méthode consiste à faire un nombre faible d'itérations de Schwarz, puis faire une analyse des traces via une décomposition en valeurs singulières. Cette décomposition permet de trouver les vecteurs d'erreurs les plus significatifs, et ainsi de connaître une bonne approximation de l'opérateur d'erreur au bord. En appliquant des nouvelles conditions aux limites pour recommencer l'algorithme complet (itérations de Schwarz et décomposition SVD), jusqu'à la convergence. Cette méthode se prénomme "Accélération via Aitken-SVD". [1]

Cette décomposition de Schwarz accéléré via Aitken-SVD a été montrée expérimentalement plus efficace que la décomposition de Schwarz classique. Cependant, une question subsiste : Quelles sont les performances de cette méthode quand une partie du domaine complet est incluse dans plus de deux sous-domaines ?

Dans ce rapport, nous détaillerons le fonctionnement des algorithmes et résumerons leurs théories. Puis, nous appliquerons la méthode d'accélération d'Aitken SVD pour une équation de Poisson sur une géométrie à deux cercles pour des conditions de Dirichlet Homogènes, avant de l'utiliser pour le même système, mais avec une géométrie à trois cercles.

# Partie 1

## Décomposition de Domaines

### 1.1 Décomposition de Schwarz

La décomposition de domaines est un processus consistant à scinder le domaine complet en plusieurs sous-domaines. Cette décomposition est motivée par le fait que la résolution du système EDP sur chacun des sous-domaines est plus aisée que sur le domaine complet, ou bien que le comportement de l'équation est très différente selon le sous-domaine. En titre d'exemple extrême, on pourrait imaginer que le système global soit définie comme une somme de systèmes individuels sur chacun des sous-systèmes, et dont les conditions aux limites sont cohérentes. Une bonne décomposition de domaines est donc à apprécier selon la nature du problème et de sa géométrie.

Pour implémenter la décomposition de domaines concrètement, il est courant d'organiser la matrice du système linéaire du problème complet par blocs. Chaque bloc va désigner un sous-domaine, un recouvrement ou bien une interface. Une fois ces blocs définis, il est possible de les appeler aisément via des "matrices de restriction", et donc de résoudre le problème donné seulement sur une sous-partie du domaine.

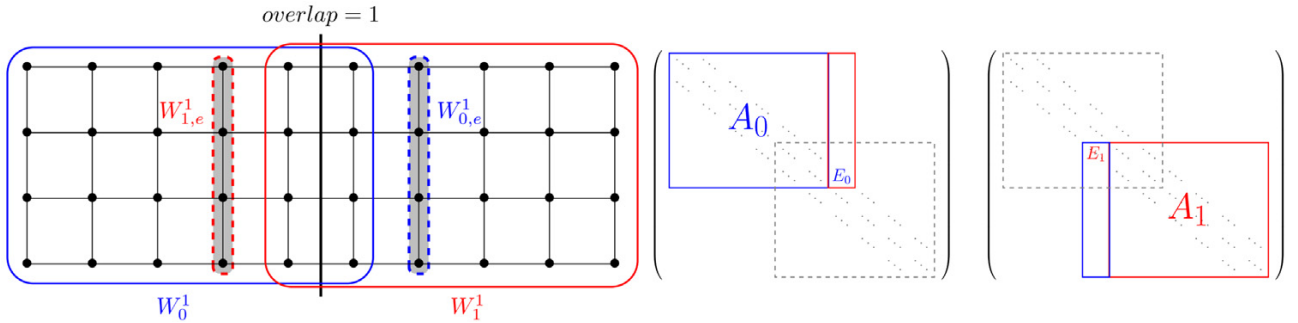


Figure 1.1: Illustration de la restriction à des sous-domaines du problème [1]. À gauche, un maillage avec deux sous-domaines se recouvrant, À droite, les sous-matrices "théoriques" du problème différentiel défini pour chaque sous-domaine.

Notre projet se focalise notamment sur un type de décomposition de domaine spécifique, la décomposition de domaines de Schwarz. Il s'agit d'une méthode avec recouvrement, c'est à dire que tous les sous-domaines ont une intersection avec un autre sous-domaine, intersection qui est de même dimension que le sous-domaine (voir figure 1). Il existe également des méthodes sans recouvrement, qui sont en dehors du cadre ce projet.

Supposons La méthode de décomposition de domaine de Schwarz consiste aux étapes suivantes :

---

**Algorithm 1** Décomposition de Domaines de Schwarz pour deux sous-ensembles

---

Résoudre l'équation principale sur le sous-domaine 1

Récupérer les valeurs du bord du sous-domaine 2 contenu dans le sous-domaine 1

Les affecter en tant que nouvelle condition aux limites non homogènes du problème défini sur le sous-domaine 2

Résoudre l'équation principale sur le sous-domaine 2

Récupérer les valeurs du bord du sous-domaine 1 contenu dans le sous-domaine 2

Les affecter en tant que nouvelle condition aux limites non homogènes du problème défini sur le sous-domaine 1

Réitérer jusqu'à convergence

---

Cette méthode de décomposition possèdent deux caractéristiques intéressantes :

- La parallélisation en est aisée, permettant de réduire le temps de calcul en répartissant les résolutions successives sur différentes unités de calcul. [1]
- La vitesse de convergence et la précision dépend fortement de la proportion recouverte des sous-domaines. Plus grande elle est, meilleure seront les performances de la méthode.

Cependant, cette méthode est assez lente pour converger. Comme nous le verrons plus tard, l'erreur entre deux itérations est linéaire. Donc, lorsque l'on souhaite atteindre la précision machine au niveau des bords, il est nécessaire de trouver des astuces pour accélérer l'algorithme.

## 1.2 Accélération d'Aitken

L'accélération d'Aitken [2] exploite une propriété importante de la décomposition de domaines de Schwarz : Le "vecteur résidu" à l'interface suit un opérateur linéaire et ce, pour toutes les itérations.

Soit  $y^k$  la  $k$ -ième itération de Schwarz sur un des sous-domaines,  $y^\infty$ , la solution à l'interface et  $P$  l'opérateur linéaire propre à cette interface. Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $y^k - y^\infty = P(y^{k-1} - y^\infty)$ . Par de la simple manipulation algébrique, on obtient donc cette première propriété :

$$y^\infty = (I - P)^{-1}(y^k - Py^{k-1}) \quad (1.1)$$

Donc, trouver cet opérateur linéaire permettrait de réduire grandement le nombre d'itérations nécessaires à la convergence. Comment peut-on effectuer cette approximation ? Lorsque l'on définit rigoureusement la décomposition de domaine de Schwarz, nous nous rendons compte que l'opérateur  $P$  suit la propriété suivante :  $P = (e^{n+1}, e^n, \dots, e^2)(e^n, \dots, e^2)^{-1}$ . Avec  $e^k = y^k - y^{k-1}$ .  $n$  est ici le nombre de nœuds à l'interface.

De ce fait, nous pouvons utiliser l'accélération d'Aitken pour trouver le  $y^\infty$  plus rapidement qu'avec uniquement la décomposition de domaine de Schwarz, puis réaliser une dernière résolution via une méthode de Galerkin sur chacun des sous-domaines avec les différents  $y^\infty$  affectés en tant que condition de Dirichlet non-homogène à leur interface respective. Cependant, le nombre de nœuds aux interfaces ( $k$ ) peut se révéler très important selon le raffinement de notre maillage, notamment sur des problèmes 2D ou 3D. Il ne faut pas non plus oublier que la décomposition de Schwarz est utile lorsque les sous-domaines sont des formes géométriques simples, dont les bords peuvent être irréguliers. C'est le cas sur la géométrie avec deux cercles intersectés, les deux points d'intersections des cercles génèrent une discontinuité, ce qui indique qu'il faudra certainement raffiner le maillage autour de ces points, ce qui générera probablement plus de points aux interfaces.

Il serait bon de pouvoir utiliser cette méthode d'accélération sans devoir réaliser un nombre d'itérations de Schwarz proportionnels à l'interface. Une idée serait notamment d'exploiter l'information présente dans les premières itérations, sur un espace de rang moindre comparé à une base complète de  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ . Cette première idée a entraîné l'élaboration de l'accélération d'Aitken-SVD.

### 1.3 Accélération d'Aitken SVD

Cette méthode d'accélération repose sur les mêmes bases que l'accélération d'Aitken classique. Cependant, elle exploite le fait que  $P$  est linéaire pour approximer  $P$  sur un espace plus petit que l'espace "complet". Pour cela, elle utilise la décomposition en valeurs singulières (DVS), pour ne garder que les composantes principales de cet espace de rang moindre. Généralement, pour déterminer le nombre de composantes principales, on va utiliser des méthodes de coupures arbitraires selon la significativité des facteurs, ou des méthodes se basant sur la courbure théorique des coefficients de significativité, comme la méthode du coude.

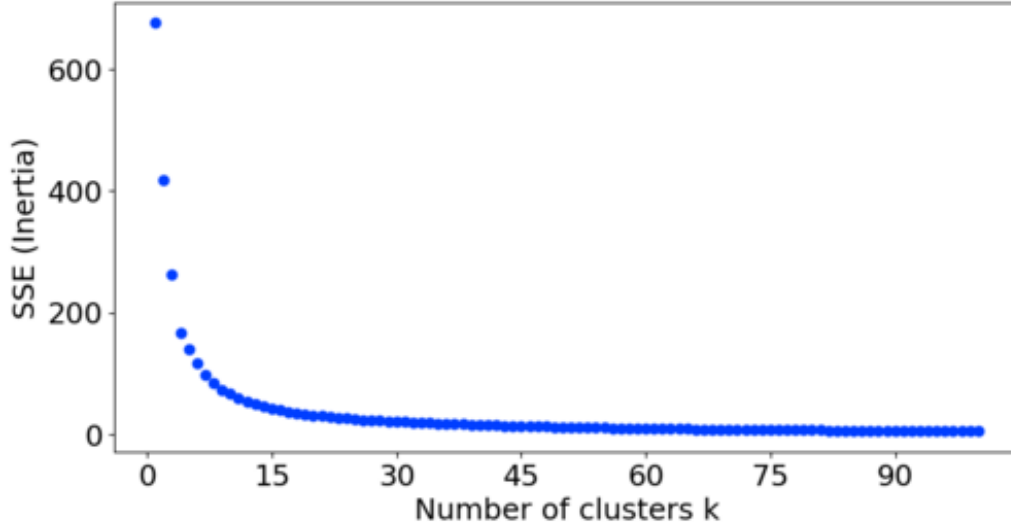


Figure 1.2: Exemple de graphique de significativité, ici pour le nombre de clusters utilisés dans l'algorithme des K-moyennes. On reconnaît aisément un maximum de courbure.

La décomposition DVS énonce que  $Y = U\Sigma V^*$ . Or,  $U$  représente en bref une nouvelle base de vecteurs propres significatifs. Supposons que nous avons fait  $k$  itérations. Du fait qu'il soit une base, et que  $(y^0, y^1, \dots, y^k)$  convergent vers  $(y^\infty, y^\infty, \dots, y^\infty)$ , on sait que le premier vecteur ("première colonne") de  $U$  converge vers  $\frac{y^\infty}{\|y^\infty\|}$ .

De cette convergence, on peut déduire une nouvelle approximation de la matrice  $P$  [1] [3] :

$$P \simeq \hat{P} = U^T(e^{k+1}, \dots, e^2)(U^T(e^k, \dots, e^1))^{-MP} \quad (1.2)$$

Ici, l'opérateur  $-MP$  représente le pseudo-inverse de Moore-Penrose. L'intervention de cette opération est nécessaire car cette matrice spécifique est rectangulaire, et l'opérateur inverse classique n'est pas définie sur ce genre de matrice. Un pseudo-inverse n'a pas un coût de calcul astronomiquement plus grand comparée à l'inverse classique. Cet estimateur est aisément calculable, et nécessite moins d'itérations de l'algorithme de Schwarz, car il partage des propriétés de l'accélération d'Aitken. Une question subsiste cependant, comment réagit l'algorithme sur les "points de rebroussements" ?

Dans notre cas, ce qui est qualifié de point de rebroussement est un point sur lequel les dérivées partielles premières sont nulles, et dont la matrice hessienne a un déterminant nul. Il s'agit de cas complexes à gérer pour notre algorithme, car on perd une forme "direction du transfert de l'information" sur ces points à l'interface. Il n'y a pas de notion de vecteurs tangents ou orthogonaux à la tangente sur ces points.

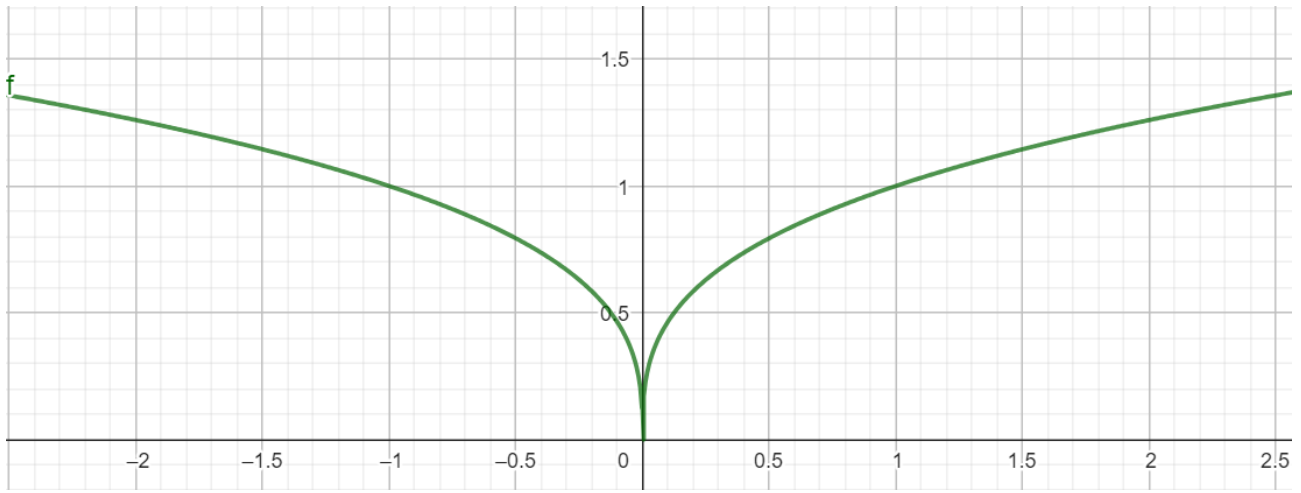


Figure 1.3: Exemple de point de rebroussement en  $(0, 0)$  pour l'équation  $y = |x|^{1/3}$

Pour tester cela, nous adopterons la géométrie à trois cercles intersectés. Les points délimitant la partie centrale sont des points de rebroussement compris dans le domaine, donc affectant certainement la propagation des informations transmises par la méthode de Aitken-SVD.

Avant de s'attarder plus en profondeur sur notre tentative de résolution, il nous paraît important d'expliquer en quoi consiste la décomposition en valeurs singulières, ainsi que le pseudo-inverse de Moore-Penrose.

## 1.4 Décomposition en Valeurs Singulières

La décomposition en valeurs singulières (Singular Value Decomposition) est une factorisation spécifique de matrices :

$$M = U\Sigma V^*$$

Avec :

- $\Sigma$  : Une matrice "diagonale" (conventionnellement ordonnée de façon décroissante), dont les valeurs sont les racines carrées des valeurs propres de  $M^*M$
- $U$  : Une matrice unitaire (vecteur normés et orthogonaux entre eux) contenant les vecteurs singuliers de  $M$  (vecteurs propres correspondant aux valeurs propres précédentes)
- $V$  : Une matrice unitaire contenant les vecteurs singuliers de  $M$

La construction d'une telle décomposition s'appuie en théorie sur l'identification des valeurs propres et vecteurs propres de  $M$  et  $M^*$ . On pourrait utiliser des algorithmes comme les puissances itérées pour les identifier, mais on préfère en pratique utiliser d'autres stratégies.

Cette décomposition est utile pour identifier les vecteurs "donnant le plus d'informations" dans une matrice. Elle est par exemple utile pour identifier des facteurs de corrélation empiriques (éventuellement quantitatifs) dans un jeu de données statistiques via une analyse en composantes principales.



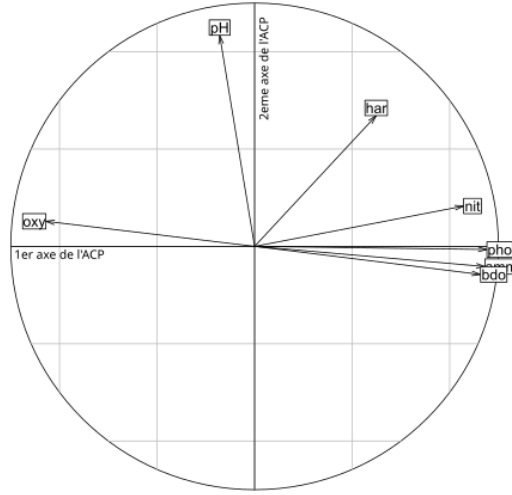


Figure 1.4: Illustration d'un cercle de corrélation pour des stations d'épurations dans le Doubs. Les deux axes représentent les axes principaux, et les flèches la projection des individus sur le plan de ces deux axes. On peut ainsi identifier empiriquement les contributions des individus aux axes, et trouver des hypothèses sur la "signification" des axes par rapport aux corrélations entre individus.

## 1.5 Pseudo-Inverse de Moore-Penrose

La notion de pseudo-inverse, au-delà du pseudo-inverse de Moore-Penrose, tient en de multiples critères. Soit  $M^+$  le pseudo-inverse d'une matrice  $M$ , alors  $MM^+M = M$ . Cependant, il n'y a pas de garantie d'unicité du pseudo-inverse si l'on se tient à ce critère. Les critères de Moore-Penrose [4] résolvent cet inconvénient :

- $MM^{-MP}M = M$
- $M^{-MP}MM^{-MP} = M^{-MP}$
- $MM^{-MP}$  et  $M^{-MP}M$  sont des matrices auto-adjointes.

Ainsi, nous obtenons un "inverse généralisé" unique pour toutes les matrices, y compris les rectangulaires. La notion de pseudo-inverse de Moore-Penrose se confond avec celle de la matrice inversible pour les matrices pour lesquelles il existe.

Il existe globalement deux moyens pour calculer le pseudo-inverse de Moore-Penrose :

- Calculer l'inverse gauche  $((M^*M)^{-1}M^*)$  ou l'inverse droit  $M^*(MM^*)^{-1}$  selon l'existence ou non de dépendance linéaire entre les colonnes de  $M$
- Effectuer une DVS, puis réarranger les termes pour obtenir  $M^+ = U^*(D^T)^{-1}V$  (le  $-1$  est à comprendre dans le sens d'inverse de matrice diagonale, même si la matrice est rectangulaire).

Nous avons fait le choix de ce pseudo-inverse pour notre projet car il s'agit du plus courant, garantissant l'unicité, et étant plutôt facile à calculer. Il s'agit également du pseudo-inverse utilisé dans notre référence principale.

## Partie 2

# Implémentation numérique

Nous allons implémenter la méthode de décomposition de Schwarz combinée avec l'accélération d'Aitken SVD, avec le logiciel Matlab et la PDE toolbox [5]. Le but de cette partie est de démontrer l'efficacité de ces deux méthodes combinées ensemble, pour un problème du Laplacien :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Sur les frontières du domaine de résolution, des conditions de Dirichlet homogènes sont imposées.

La méthode d'éléments finis de Galerkin sera utilisée, avec des éléments finis triangulaires  $\mathcal{P}_2$ . Le domaine admet la triangulation  $\mathcal{T}_h$ . Le problème discret est donc :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

avec  $V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in \mathcal{P}_2(K) \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } v_h(x) = 0 \forall x \in \partial\Omega\}$ .

Pour résoudre ce problème nous implémentons la méthode de Schwarz combinée avec l'accélération d'Aitken SVD. La figure 2.1 présente les différentes grandes étapes de notre algorithme. La partie principale du programme est une boucle de  $n$  itérations de Schwarz suivies d'une accélération d'Aitken SVD. Le critère d'arrêt pour cette boucle est atteint si les résidus sont inférieurs à un  $\epsilon$  fixé, ou si le nombre maximal d'itérations est atteint. Les résidus  $e$  correspondent ici à la norme entre la solution obtenue à la dernière itération de Schwarz et la solution de l'itération précédente. Avec les notations précédentes :  $e^k = \|y^k - y^{k-1}\|_{\infty}$ .

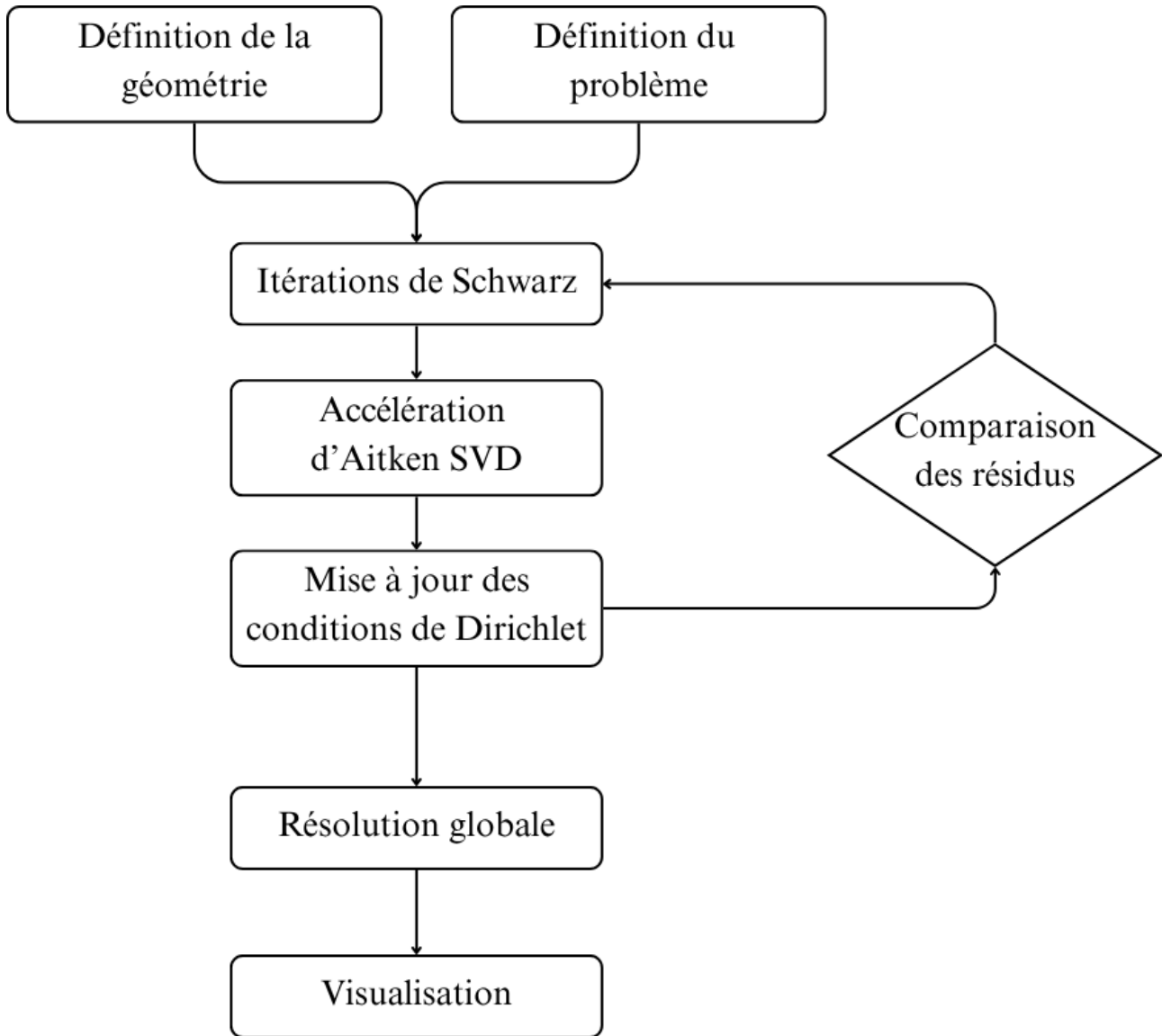


Figure 2.1: Grandes étapes de l'algorithme

Nous allons résoudre ce problème sur deux domaines différents, afin de démontrer l'intérêt de cette méthode sur des géométries avec des sous-domaines qui se superposent. Premièrement, nous implémenterons le problème du Laplacien décrit ci-dessus sur un domaine composé de deux cercles qui se superposent, puis sur un domaine composé de trois cercles intersectés.

## 2.1 Géométrie à deux cercles

En premier, nous allons implémenter le problème (3.1) sur un domaine composé de deux cercles écartés d'une distance  $L$ . Ce domaine est séparé en deux sous-domaines générés séparément (figure 2.2). Il y a un sous-domaine à gauche correspondant à un cercle et l'intersection, ainsi qu'un sous-domaine à droite correspondant également à un cercle avec l'intersection. Plus la distance  $L$  est grande, moins les cercles se superposent et donc plus le problème est complexe. Il sera intéressant de faire varier cette distance.

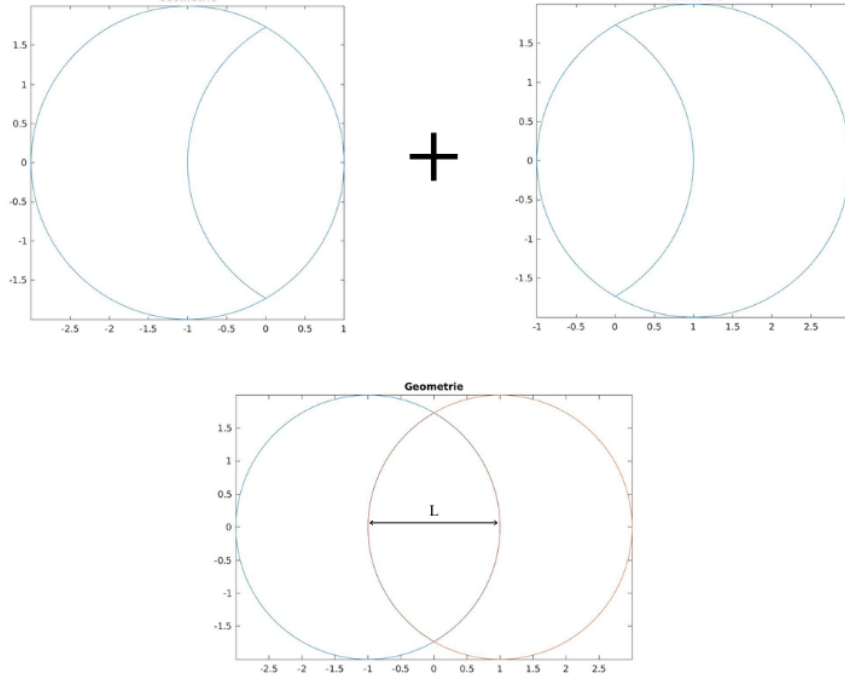


Figure 2.2: Géométrie avec deux cercles

Pour cette géométrie, nous avons fixé le nombre maximal d'itérations de Schwarz à 10. De plus, le nombre d'itérations totales, donc le nombre d'accélération est lui aussi fixé à 10. Le rayon de chacun des cercles est  $R = 2$  et dans un premier temps la distance d'espacement  $L = 2.8$ .

La figure 2.3 illustre la solution obtenue à la fin des itérations de Schwarz accélérées avec Aitken SVD. La figure 2.4 montre l'évolution des résidus avec et sans accélérations.

Pour cet exemple, la méthode de Schwarz combinée avec Aitken SVD converge en deux itérations totales, c'est-à-dire deux fois dix itérations de Schwarz suivies d'une accélération. L'accélération d'Aitken SVD est clairement observable sur la figure. La méthode de Schwarz combinée avec Aitken SVD permet de diviser par presque deux le nombre d'itérations nécessaire à la convergence. Il est aussi important de remarquer que la méthode que nous avons implémentée permet d'obtenir une précision machine.

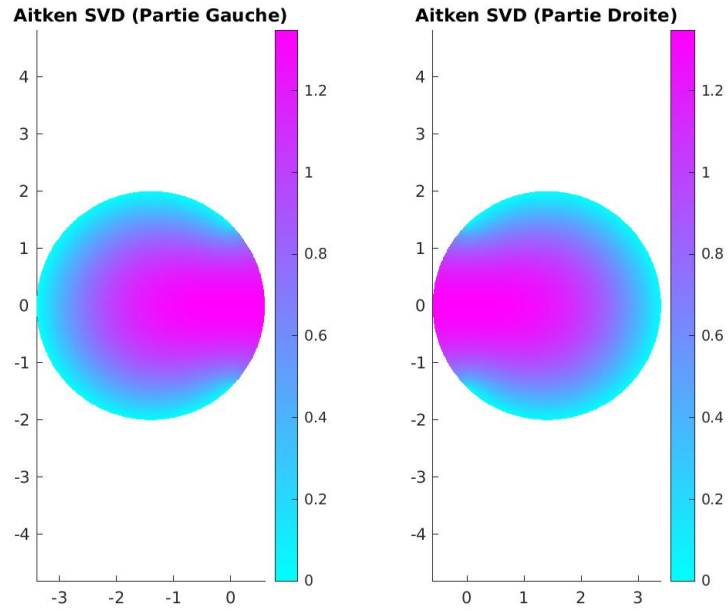


Figure 2.3: Solution  $u$  finale

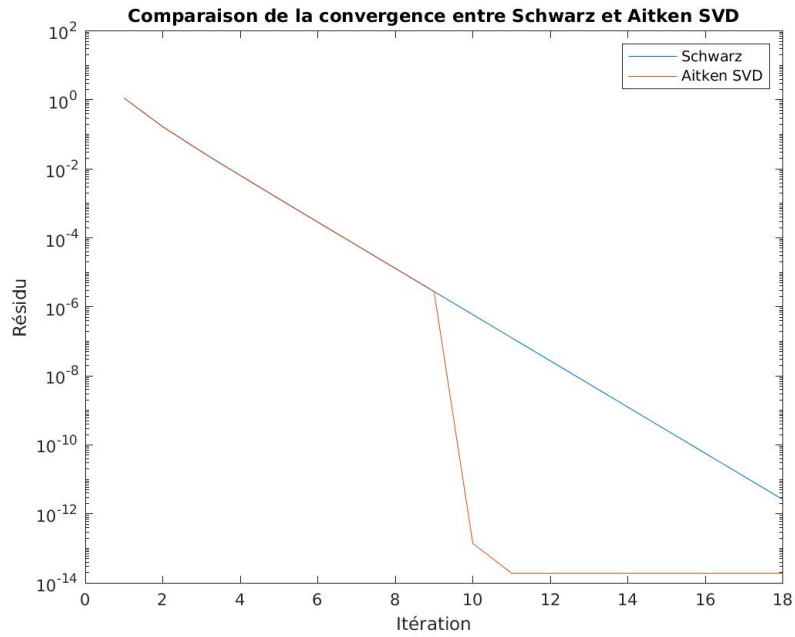


Figure 2.4: Évolution des résidus pour  $L = 2.8$

En augmentant la distance  $L$  à  $L = 3.8$ , l'interface entre les deux cercles diminue, ce qui implique une solution plus complexe à trouver. On peut voir sur la courbe des résidus (figure 2.5) qu'il faut donc plus d'itérations pour que l'algorithme converge. Deux accélérations d'Aitken SVD sont nécessaires, à la place pour  $L = 2.8$ .

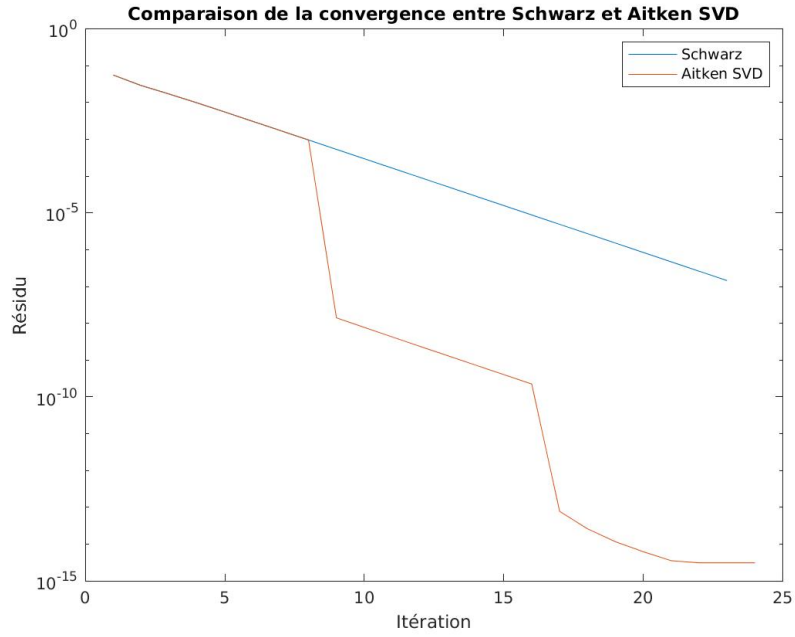


Figure 2.5: Évolution des résidus pour  $L = 3.8$

## 2.2 Géométrie à trois cercles

Nous allons maintenant implémenter la méthode de résolution pour une géométrie composée de trois cercles intersectés (figure 2.6). L'intérêt de cette géométrie est que certains points du domaine sont situés dans plus de deux sous-domaines. De plus, il existe des points de rebroussement qui se situent à l'intérieur du domaine de calcul.

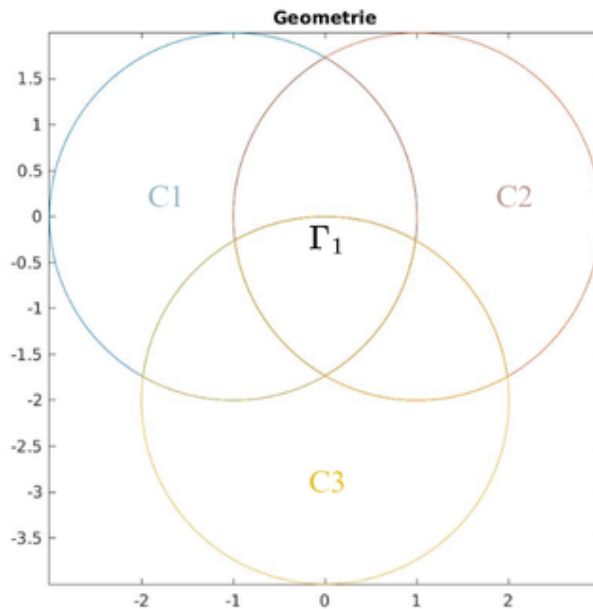


Figure 2.6: Géométrie avec trois cercles

La partie importante de cette géométrie est les trois bords du centre qui se situent dans les trois sous-cercles à la fois. Lors de la décomposition de Schwarz, à chaque tiers d'itérations, la condition de Dirichlet non homogène à l'interface peut venir en même temps de la valeur obtenue sur le cercle précédent ou sur celui d'encore avant. Nous avons choisi d'imposer comme condition de Dirichlet

seulement la valeur obtenue sur le dernier cercle calculé. Prenons l'exemple de la frontière  $\Gamma_1$ , elle se situe à la fois dans le cercle 1, le cercle 2 et le cercle 3. Elle se situe sur la frontière du cercle 3, donc au moment de calculer l'itération de Schwarz sur le cercle 3, il va falloir imposer une condition de Dirichlet non homogène sur  $\Gamma_1$ . Cette condition peut être à la fois la valeur obtenue lors du calcul du cercle 1 ou la valeur obtenue lors du calcul du cercle 2. Comme le cercle 2 a été le dernier calculé, nous avons choisi d'imposer sur  $\Gamma_1$  la valeur trouvée pour le cercle 2.

Nous avons fixé le nombre maximal d'itérations de Schwarz à 15, le nombre d'itérations totales, donc le nombre d'accélération à 10. Le rayon de chacun des cercles est  $R = 2$  et la distance d'espacement  $L = 2$ .

La figure 2.7 illustre la solution obtenue à la fin des itérations de Schwarz accéléré avec Aitken SVD. La figure 2.8 montre l'évolution des résidus avec et sans accélérations.

Dans le cas de cette géométrie, notre implémentation de la méthode de décomposition de Schwarz combinée avec l'accélération de Aitken SVD ne converge pas. L'accélération d'Aitken SVD ne permet pas d'obtenir une accélération de la convergence. En effet, les itérations de Schwarz seules permettent d'obtenir un bon résultat, mais si l'accélération est ajoutée alors l'algorithme ne converge pas. L'erreur se situe donc dans la partie de l'accélération d'Aitken SVD.

Cette erreur et cette incapacité à converger peuvent être dues au choix du paramètre  $\epsilon$  imposé pour limiter les composantes de la SVD à garder. Ce paramètre de l'accélération d'Aitken SVD limite la dimension de l'espace d'estimation de la matrice  $P$  définie plus haut. Bien que nous ayons testé plusieurs valeurs de  $\epsilon$ , de meilleurs résultats pourraient être obtenus en implémentant une méthode précise pour choisir la valeur optimale de  $\epsilon$ , par exemple la méthode du coude.

Enfin, il est possible que la méthode combinant Schwarz et Aitken SVD ne puisse pas converger pour cette géométrie à cause des points de rebroussement. Pour vérifier ceci, il aurait été intéressant d'implémenter une solution manufacturée, qui aurait permis de vérifier la convergence de notre algorithme plus précisément.

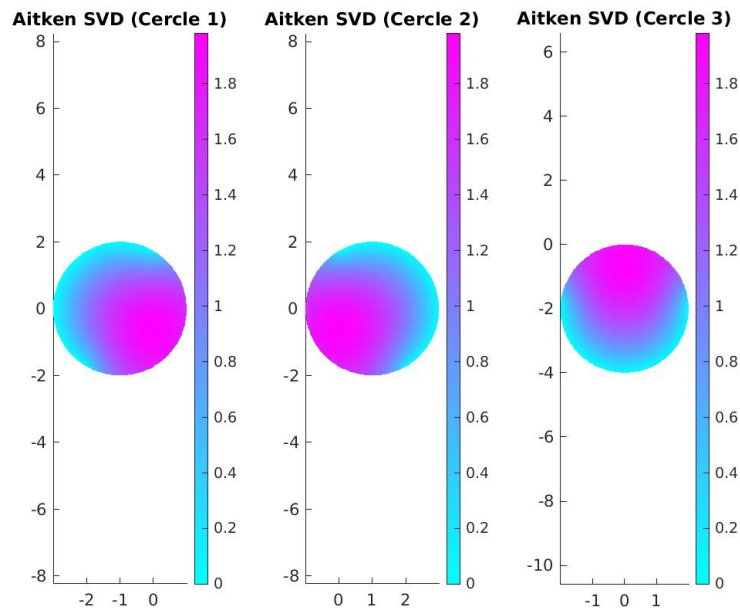


Figure 2.7: Solution  $u$  finale

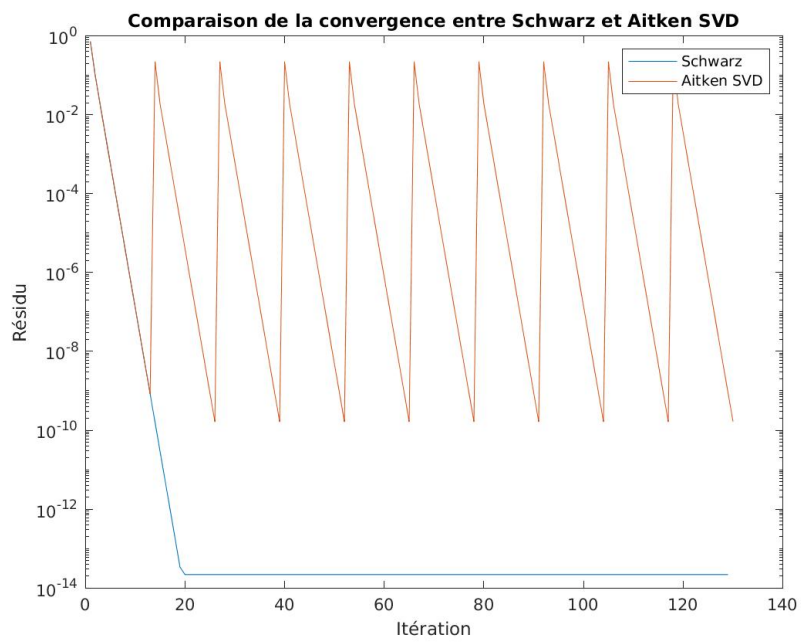


Figure 2.8: Évolution des résidus pour  $L = 2$



## Partie 3

# Solutions Manufacturées

### 3.1 Prérequis

La méthode des solutions manufacturées consiste à trouver une solution connue à notre problème pour vérifier si l'algorithme testé, dont on connaît l'ordre de convergence, fonctionne correctement. Nous avons donc cherché une fonction correspondant à notre problème, qui est donc nulle sur les bords des deux ou trois cercles. Nous avons fait deux choix. La première est la somme des normes euclidiennes centrées sur les cercles, moins le rayon du cercle au carré. On nullifiait également la fonction si  $(x, y)$  était en dehors du cercle.

La seconde fonction était la suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_{C_i}(x, y) = \sin \left( [(x - a)^2 + (y - b)^2] \frac{\pi}{R^2} \right) \mathbb{1}_{(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2}$$

Pour  $C_i$  un cercle de centre  $(a, b)$  et de rayon  $R$ .

La fonction utilisée est donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F_C(x, y) = \sum_{i=1}^n f_{C_i}(x, y)$$

Ces fonctions admettent les graphes suivants :

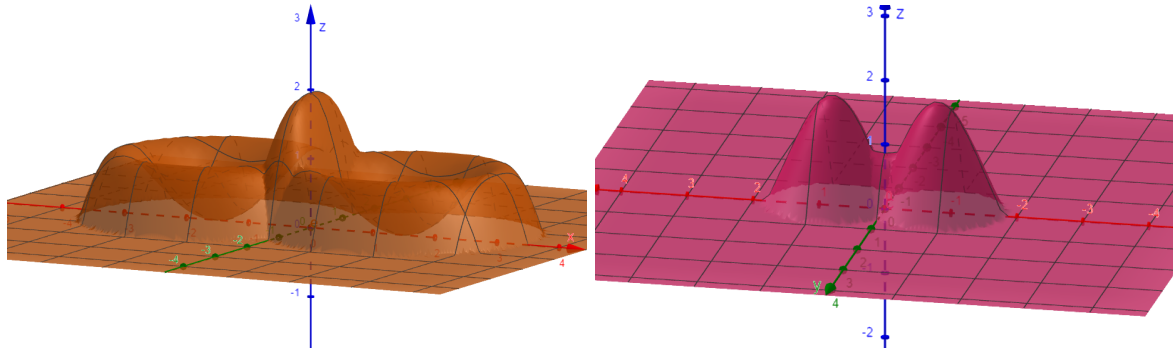


Figure 3.1: A gauche, le graphe de la fonction  $F_C$  pour deux cercles. A droite le graphe de la fonction basée sur les normes euclidiennes pour deux cercles.

Il est important de saisir que l'on ne cherche pas à vérifier l'ordre de convergence de la méthode, mais si elle converge vers une solution correcte. On veut donc vérifier que la méthode de décomposition de domaine de Schwarz et la méthode Schwarz-Aitken SVD convergent vers la solution approchée donnée par une méthode d'éléments finis, et non pas la solution exacte du problème. Vérifier cela reviendrait à vérifier dans un premier temps que nos algorithmes convergent vers la solution approchée, et qu'ensuite la méthode d'éléments finis utilisée converge vers la solution théorique avec l'ordre de convergence qu'on lui connaît.

Donc, au lieu de calculer le vecteur source  $f$  théorique pour notre solution manufacturée  $u$  :

$$-\Delta u = f_{th}$$

Il est nécessaire de passer à sa formulation discrète dans l'espace discrétisé  $V_h$ .

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \sum_{j=1}^{n_p} u_j \sum_{l=1}^{n_k} \int_{K_l} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_l d\underline{x} = \sum_{l=1}^{n_k} \int_{K_l} f_{app} \phi_l d\underline{x}, \forall i \in [[1, n_p]] \end{cases} \quad (3.1)$$

Il nous reste à déterminer  $f_{app}$ , à partir de notre solution initiale. Celle-ci est entièrement déterminée par la matrice de raideur  $K_{ij} = \int_{K_i} \varphi_j^{K_i} \cdot \varphi_i^{K_i} d\underline{x}$ , du fait des conditions de Dirichlet homogènes sur tout le bord. On obtient donc :

$$K u_{disc} = f_{app}$$

$u_{disc}$  étant le vecteur discrétisé des valeurs de la solution  $u$  sur les points du maillage. Nous permettant donc d'implémenter correctement le problème dans un langage informatique.

### 3.2 Implémentation des solutions manufacturées

Cette partie a été plutôt complexe pour nous d'un point de vue théorique et pratique. En effet, du fait de l'utilisation de l'algorithme de décomposition de domaines de Schwarz, nous devons séparer notre système d'équations en deux ou trois parties, correspondant à nos sous-domaines.

Cependant, sur ces sous-domaines, les conditions aux limites ne sont pas des conditions de Dirichlet homogènes, au vu des fonctions sélectionnées. En théorie, le vecteur source devrait donc être différent sur chacun des sous-domaines. Mais ajouter un relèvement sur des bords à l'intérieur de la géométrie n'est pas cohérent d'un point de vue du problème global. De plus, cela donnerait une forme "d'objectif" à atteindre directement à l'algorithme de décomposition de domaines de Schwarz, ce qui n'est pas l'objectif souhaité.

Finalement, nous avons testé les deux approches. Nous avons d'abord donné le vecteur source brut à notre algorithme de résolution, obtenu via la multiplication de la matrice de rigidité par le vecteur des points de notre fonction. Puis, nous avons utilisé le même vecteur auquel nous avons ajouté une contribution des points de Dirichlet en multipliant un vecteur de contributions (valeurs aux points bloqués) à la matrice de rigidité.

### 3.3 Performances des algorithmes

Cette partie manquera cruellement d'explications, car nous sommes toujours en recherche de l'erreur. En effet, ni notre implémentation de l'algorithme de décomposition de domaines de Schwarz, ni l'accélération d'Aitken-SVD, ne parviennent à converger vers la solution indiquée pour le problème à deux cercles. Cependant, leurs résidus convergent bien vers une constante, jusqu'à l'ordre de  $10^{-16}$ , qui est la précision machine. Nous obtenions toujours une erreur pour les deux solutions manufacturées de l'ordre de l'unité ou de la dizaine.

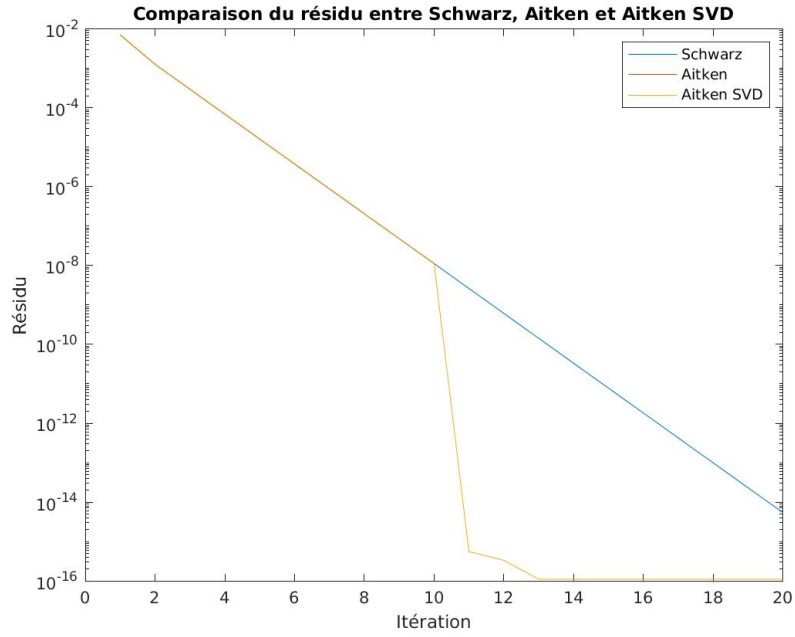


Figure 3.2: Résidu des méthodes de Schwarz, Schwarz-Aitken et Schwarz-Aitken SVD pour la solution manufacturée  $F_C$ , sans ajouter de contributions au vecteur source. L'axe des ordonnées est à 0, car nous avons soustrait la valeur minimale pour chaque résidu, pour nous donner une idée de la convergence.

Nous obtenons donc le même constat de vitesse de convergence pour les trois méthodes. L'accélération semble bien fonctionner. Nous avons également regardé le graphe de la fonction résultante de l'algorithme de Schwarz-Aitken SVD.

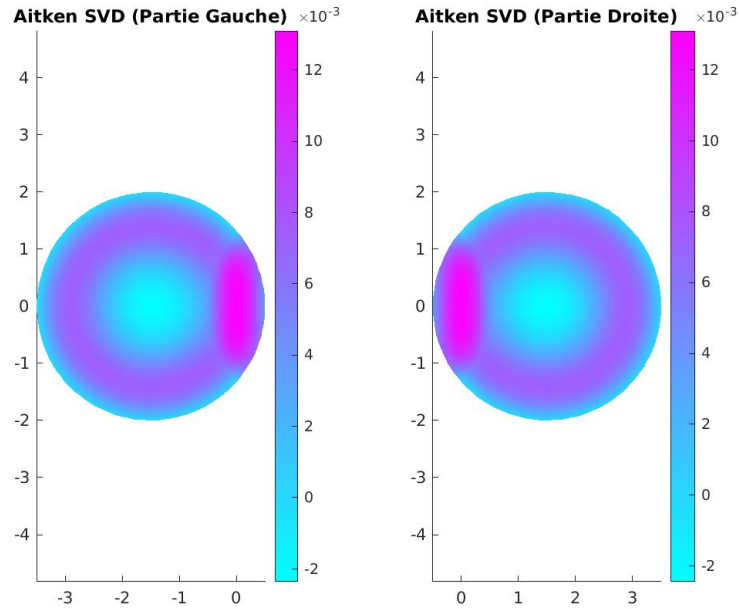


Figure 3.3: Graphe de l'approximation donnée par notre implémentation de Schwarz-Aitken-SVD pour la solution manufacturée  $f_{C1}$ .

Ce graphe est extrêmement ressemblant à celui de la fonction initiale, à ceci près que l'échelle semble s'être réduite d'un ordre  $10^{-3}$ . Cela explique donc notre forte différence avec le résultat attendu.

Nous avons fait plusieurs hypothèses pour expliquer cette différence entre la solution obtenue et

la solution manufacturée :

- La première vient directement de notre étude de solutions manufacturées : notre implémentation des algorithmes serait fautive. Nous trouvons cependant cette hypothèse assez improbable, puisque le comportement d'accélération est quand même observé, et que l'algorithme de décomposition de Schwarz n'est pas extrêmement complexe.
- Peut-être que nos solutions manufacturées ne sont pas suffisamment régulières. En effet, du fait qu'elle s'annulent brutalement aux frontières des sous-domaines ( $C^1$  par morceaux) , peut-être que cela pose un problème de convergence pour les algorithmes que nous utilisons.
- La seconde provient de notre implémentation du vecteur source. Le vecteur source donnée ne serait pas le vecteur source correspondant à notre problème discrétisée. En effet, nous ne parvenons pas à comprendre comment fonctionne l'application de conditions de Dirichlet non-homogènes sur matlab. Il ne semble pas utiliser de système de pénalisation, vu que la solution résultante est fortement influencée par les valeurs mises sur le vecteur source au niveau des composantes des nœuds bloquées. Une indication serait la documentation de assembleFEMatrices, permettant l'assemblage d'un problème de MEF aux nœuds libres. Cependant, calculer le vecteur source uniquement sur les points libres n'apportent pas d'améliorations apparentes. Utiliser le laplacien théorique pour une solution manufacturée simple ne fonctionne pas non plus (cas de la fonction norme euclidienne  $-4$  à l'intérieur du sous-domaine,  $0$  ailleurs).
- Finalement, une indication vient de l'échelle de grandeur. Il est possible que lors de notre implémentation du vecteur source de la solution manufacturée, nous avons d'une certaine manière sous-contraint ou sur-contraint le système en appliquant mal les conditions aux limites de Dirichlet (typiquement, en les ajoutant/retirant au mauvais moment), expliquant potentiellement ces valeurs proches de  $0$ . Mais pour résoudre ce problème, il faudrait concrètement comprendre comment fonctionne matlab pour ces conditions de Dirichlet non-homogène.

En clair, le problème reste toujours ouvert. Nous ne savons pas quels problèmes interviennent concrètement parmi nos hypothèses, nous empêchant de vérifier la convergence de la méthode de Schwarz-Aitken-SVD sur un cas avec des points de rebroussement.

# Conclusion

En conclusion, nous ne sommes pas parvenus à accomplir les objectifs de ce projet :

- Sur la géométrie deux cercles, le comportement de convergence des différents algorithmes correspond aux attentes.
- Sur la géométrie trois cercles, le comportement de convergence de Schwarz est correcte, mais les méthodes d'accélération sont coincées à un palier et oscillent.
- Notre tentative de vérification de la convergence des algorithmes vers la solution correcte à un problème donné via la méthode des solutions manufacturées s'est révélée infructueuse.

Cela nous donne une occasion de faire un bilan rétrospectif, sur ce qu'il aurait fallu mieux faire, afin d'éviter de reproduire ces erreurs sur des futurs projets :

- Morceler les objectifs de programmation en amont, et une fois ces objectifs atteints en faire un versionnage git propre.
- Interroger les experts du sujet dès que nous avons un doute important sur le fonctionnement de la méthode.
- Travailler plus avec la méthode des solutions manufacturées.

Nous pensons, en guise de rétrospective, avoir accompli et mis en place de bonnes techniques pour nos futurs projets :

- La communication a été fréquente entre les membres de l'équipe, afin de résoudre les incompréhensions théoriques, et voir les forces et faiblesses de chacun, pour assigner les tâches en accord avec l'état du moment et les compétences.
- Nos ressources et outils ont rapidement été centralisés, permettant un travail collaboratif et retrouver facilement les informations.
- Nous avons effectué une démarche de recherche, d'essais en erreurs à partir d'hypothèses, lesquelles nous devons interpréter à partir de notre bagage théorique.

En somme, même si l'ensemble des objectifs initiaux n'ont pas été accomplis, nous ne devons pas considérer ce projet comme un échec total. Avec plus de temps de travail et d'échanges avec notre référent, nous pensons pouvoir apporter une réponse à la question principale. Dans tous les cas, cette expérience a été enrichissante pour nous d'un point de vue pédagogique, et nous donne une occasion de nous améliorer pour nos projets du monde professionnel.

## Partie 4

# Programmes

Veillez trouver sur le lien ci-dessous nos divers codes : [Télécharger le fichier zip](#).

# Bibliographie

1. Berenguer, L. & Tromeur-Dervout, D. Sparse Aitken–Schwarz domain decomposition with application to Darcy flow. en. *Computers & Fluids* **249**, 105687. ISSN: 00457930. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045793022002808> (2025) (Dec. 2022).
2. Aitken, A. C. XXV.—On Bernoulli’s Numerical Solution of Algebraic Equations. en. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **46**. Publisher: Royal Society of Edinburgh Scotland Foundation, 289–305. ISSN: 0370-1646. <https://www.cambridge.org/core/journals/proceedings-of-the-royal-society-of-edinburgh/article/abs/xxvon-bernoullis-numerical-solution-of-algebraic-equations/64D4A7C56F1EFEC696AF68D7870DB451> (2025) (Jan. 1927).
3. Tromeur-Dervout, D. ACCELERATION OF THE CONVERGENCE OF THE ASYNCHRONOUS RESTRICTIVE ADDITIVE SCHWARZ METHOD. en.
4. *Moore–Penrose inverse* en. Page Version ID: 1285415514. Apr. 2025. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Moore%E2%80%93Penrose\\_inverse&oldid=1285415514](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Moore%E2%80%93Penrose_inverse&oldid=1285415514) (2025).
5. *Documentation en Ligne Matlab Version 2021b* <https://fr.mathworks.com/help/releases/R2021a/documentation-center.html> (2025).