

# Klasyczny proces ryzyka i ruch Browna

## Autorzy

Małgorzata Jakubik 262279

Karolina Wypych 262333



# Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki  
26 czerwca 2022r.

## Spis treści

<b>1. Zadanie 1</b>	2
1.1. Wstęp	2
1.1.1. Proces ryzyka	2
1.1.2. Jednorodny proces Poissona	2
1.2. Dane w zadaniu	3
1.3. Dopasowanie klasycznego modelu ryzyka do danych	4
1.3.1. Premia $c$	4
1.3.2. Rozkład wysokości wypłacanych odszkodowań $\mathbf{X}_i$	4
1.3.3. Intensywność wypłacania ubezpieczeń	7
1.4. Narzut	10
1.5. Wnioski	10
<b>2. Symulacje procesu ryzyka</b>	10
2.1. Moment ruiny	11
2.2. Prawdopodobieństwo ruiny dla skończonego horyzontu czasowego	11
2.3. Prawdopodobieństwo ruiny dla nieskończonego horyzontu czasowego	12
2.4. Wnioski	13
<b>3. Zadanie 2</b>	13
3.1. Ruch Browna	13
3.2. Symulowanie ruchu Browna	13
3.3. Średni czas wyjścia z przedziału $[a, b]$	14
3.4. Prawdopodobieństwo wyjścia przez $b$	15
3.5. Symulacja Monte Carlo przejścia przez $b$	16
3.6. Wnioski	17

# 1. Zadanie 1

## 1.1. Wstęp

### 1.1.1. Proces ryzyka

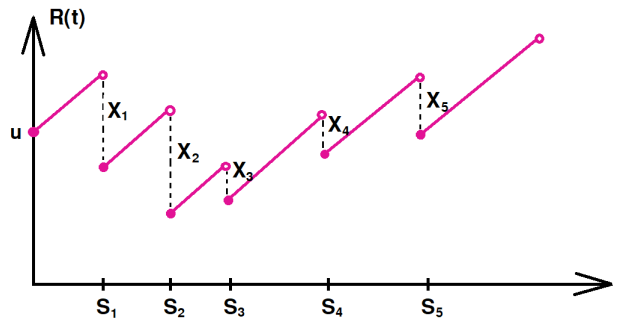
Proces ryzyka to proces stochastyczny opisujący kapitał firmy ubezpieczeniowej na horyzoncie czasowym  $T$ . Opisany jest wzorem

$$R(t) = u + c(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (1)$$

gdzie:

1.  $t \in [0, T]$
2.  $u > 0$  - kapitał początkowy
3.  $c(t)$  - premia (przychody ze sprzedaży polis)
4.  $N(t)$  - proces liczący straty
5.  $X_i$  - zmienne losowe iid. reprezentujące wysokości wypłacanych odszkodowań,  $\mathbb{E}X_i = \mu$ ,  $X_i > 0$ ,  $X_i \perp\!\!\!\perp N(t)$ .

Procesem ryzyka, wokół którego skupia się ta praca, jest jego klasyczna wersja. Charakteryzuje się ona liniowym przychodem ze sprzedaży polis, tzn.  $c(t) = c \cdot t$ . Ponadto w tym modelu momenty wypłacania ubezpieczeń są generowane z jednorodnego procesu Poissona o intensywności  $\lambda_p$ .



Rysunek 1. Klasyczny proces ryzyka

### 1.1.2. Jednorodny proces Poissona

Jednorodnym procesem Poissona z intensywnością  $\lambda_p > 0$  nazywamy proces liczący  $\{N(t), t \geq 0\}$ , który spełnia następujące warunki:

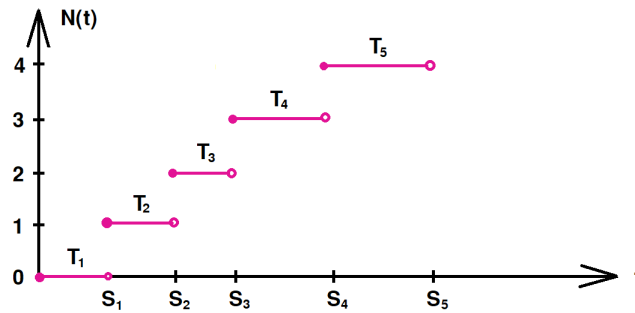
1.  $N(0) = 0$ ,
2.  $N(t)$  ma niezależne przyrosty,
3.  $N(t)$  ma stacjonarne przyrosty
4.  $N(t) \sim Poiss(\lambda_p t)$ , tzn.  $P(N(t) = n) = e^{-\lambda_p t} \cdot \frac{(\lambda_p t)^n}{n!}$ .

Średnia liczba obserwacji, które pojawiły się do momentu  $t$  wynosi  $\mathbb{E}(N(t)) = \lambda_p t$ . Stąd parametr  $\lambda_p$  nazywany jest intensywnością pojawiania się zdarzeń

losowych. Algorytm generowania jednorodnego procesu Poissona składa się z następujących kroków:

1. Wstawiamy  $I = 0, t = 0$ .
2. Generujemy  $U \sim U(0,1)$ .
3. Wstawiamy  $t = t - \frac{1}{\lambda_p} \log(U)$ . Jeśli  $t > T$  kończymy algorytm, a w przeciwnym razie wstawiamy  $I = I + 1, S_I = t$ .
4. Wracamy do punktu 2.

W ten sposób otrzymujemy momenty skoków jednorodnego procesu Poissona na  $[0, T]$ .



Rysunek 2. Jednorodny proces Poissona

## 1.2. Dane w zadaniu

W zadaniu zajmujemy się danymi otrzymanymi od prowadzącego. Plik zawiera listę z 50 trajektoriami pewnego procesu ryzyka wysymulowanego na odcinku  $[0, 100]$ , z krokiem czasowym  $h = 10^{-2}$ . Kapitał początkowy to  $u = 50$ . Plik ma rozszerzenie `.p`, więc w Pythonie otwieramy go, używając polecenia `pickle.load(open('ścieżka', 'rb'))`.



Rysunek 3. Wiązka 50 trajektorii otrzymanych z pliku od prowadzącego

### 1.3. Dopasowanie klasycznego modelu ryzyka do danych

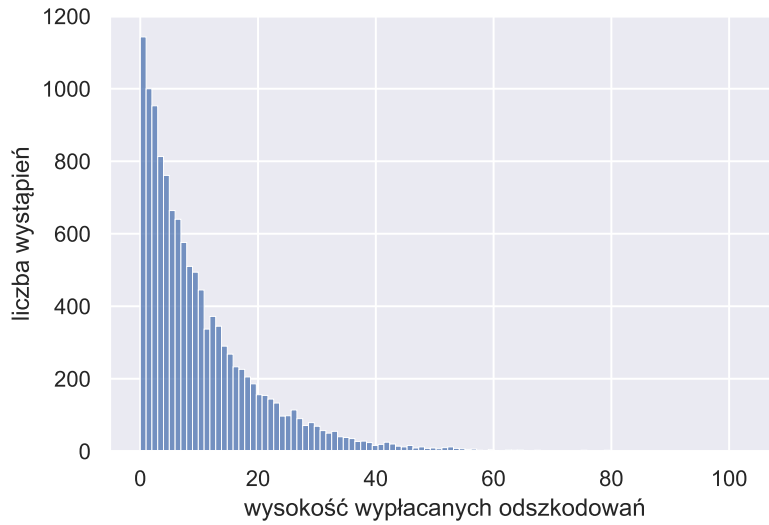
#### 1.3.1. Premia $c$

Pracę z danymi rozpoczniemy od wyznaczenia wysokości premii, czyli przychodu ze sprzedaży polis. Ponieważ rozważamy klasyczny proces ryzyka, będzie ona równa współczynnikowi kierunkowemu prostej łączącej dwa pierwsze punkty każdej z trajektorii. Wystarczy rozpatrzeć jedynie pierwsze wartości, ponieważ każdy proces musi rozpocząć się od zakupu polisy. Dzieje się tak, gdyż aby zaobserwować spadek, czyli wypłacenie odszkodowania, należy najpierw wykupić ubezpieczenie. Tym razem dla wszystkich trajektorii różnica wartości procesu ryzyka między początkowymi punktami wynosi 0.5. Ponieważ punkty są oddalone od siebie w czasie o  $10^{-2}$ , przyjmujemy wysokość omawianej premii na poziomie  $c = 50$ .

#### 1.3.2. Rozkład wysokości wypłacanych odszkodowań $X_i$

Chcąc dopasować klasyczny model ryzyka do danych, niezbędne jest wyznaczenie rozkładu zmiennej losowej  $X_i$  reprezentującej wysokość  $i$ -tego wypłaconego odszkodowania (czyli  $i$ -tej szkody. Rozkład ten jest jednkowy dla każdej z trajektorii, dlatego szukanie go rozpoczniemy od wyodrębnienia spadków i narysowania ich histogramu, a następnie posługując się metodą momentów oraz wykresami dystrybuanty, gęstości i QQ-plotem, odczytamy typ i parametr rozkładu.

Wysokości wypłacanych odszkodowań odnajdujemy przez porównanie ze sobą dwóch sąsiadujących elementów każdej z trajektorii. Wszystkie punkty oddziela ten sam krok czasowy  $h = 10^{-2}$ , a przychód ma charakter liniowy. Zatem o braku spadku możemy mówić, gdy wartość procesu ryzyka w danym punkcie nie jest równa wartości w punkcie poprzednim powiększonej o  $c \cdot h = 50 \cdot 10^{-2} = 0.5$ . Wówczas wysokość wypłaconego odszkodowania jest równa różnicy między wartością uwzględniającą sam przychód a rzeczywistym kapitałem firmy.



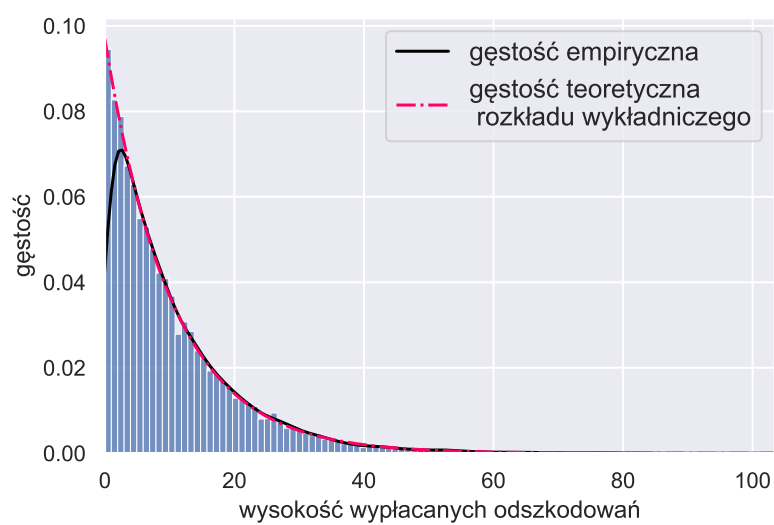
Rysunek 4. Histogram wysokości wypłacanych odszkodowań  $X_i$

Na pierwszy rzut oka widać, że obrys histogramu kształtem przypomina gęstość rozkładu wykładniczego. Zweryfikujemy tę hipotezę wyliczając potencjalny parametr  $\lambda_x$ , a następnie porównując empiryczne i teoretyczne wykresy dystrybuant oraz rysując QQ-plot.

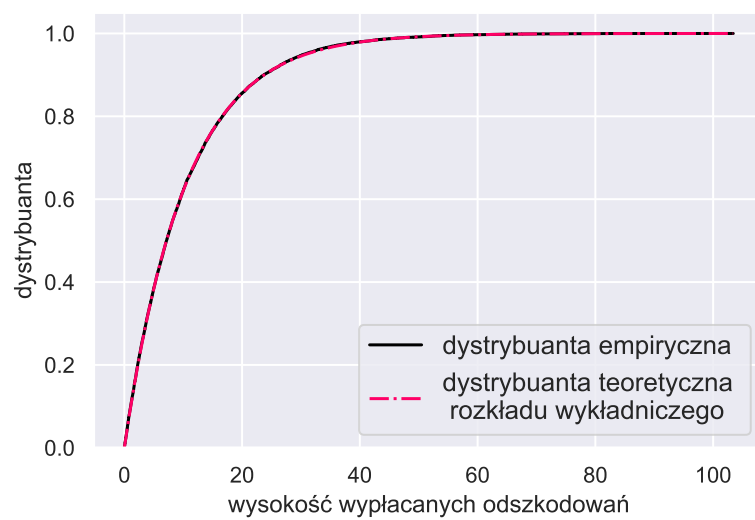
W celu wyznaczenia szukanego parametru, posłużymy się poznaną na studiach metodą momentów. Wiemy, że średnią próbkową wyraża się wzorem  $\overline{X} = \sum_{i=1}^n X_i$ , a wartość oczekiwana rozkładu wykładniczego z parametrem  $\lambda > 0$  to  $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{\lambda}$ . Dla naszych danych średnia próbkowa wynosi w przybliżeniu  $\overline{X} = 10.3142$ . Dlatego możemy zapisać równanie

$$\overline{X} = \frac{1}{\lambda_x},$$

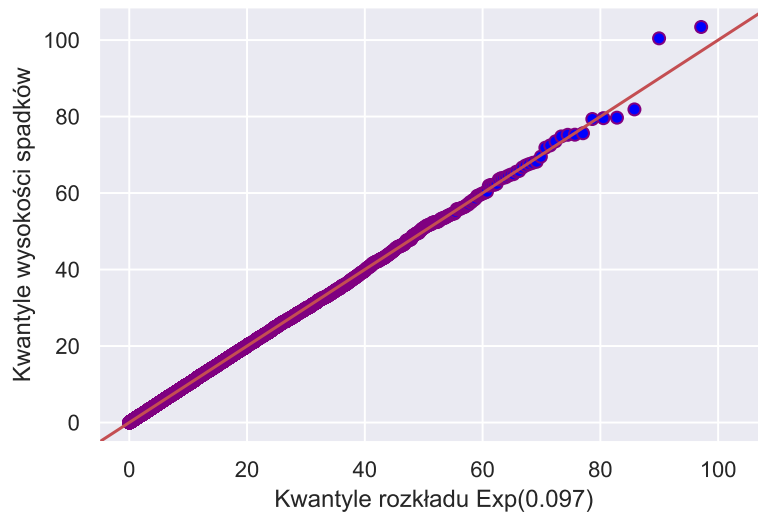
z którego wyznaczamy  $\lambda_x \approx 0.097$ .



Rysunek 5. Porównanie gęstości empirycznej z teoretyczną rozkładu  $Exp(\lambda_x)$



Rysunek 6. Porównanie dystrybuanty empirycznej z teoretyczną rozkładu  $Exp(\lambda_x)$



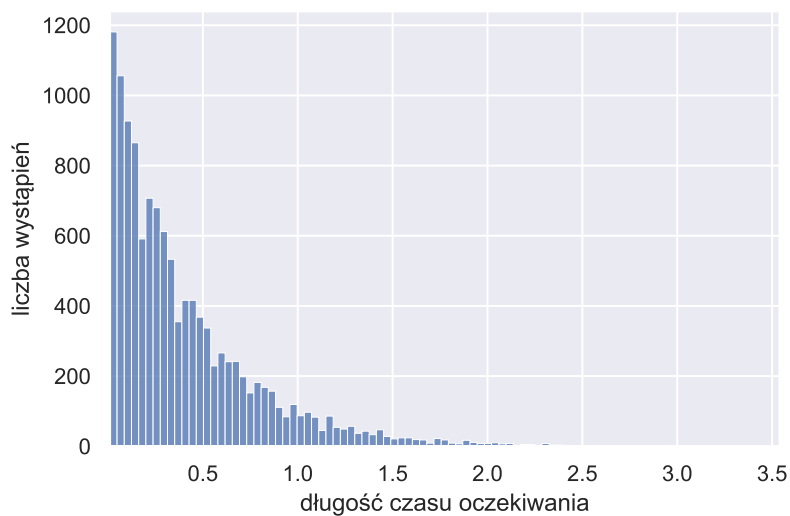
Rysunek 7. Wykres kwantylowy dla rozkładu  $Exp(\lambda_x)$

Na rysunku 5. nanieśliśmy na histogram gęstość empiryczną i teoretyczną dla rozkładu  $Exp(\lambda_x)$ . Gołym okiem widać, że oba wykresy pokrywają się ze sobą. Nie inaczej dzieje się na rysunku 6., gdzie tym razem dystrybucje nachodzą na siebie. Ponadto wykres kwantylowy stanowi linię prostą nachyloną pod kątem  $45^\circ$  do osi  $OX$ . Wszystko to potwierdza naszą hipotezę o rozkładzie wykładniczym. Powyższe wykresy dowodzą także poprawności wyestymowania wartości parametru  $\lambda_x = 0.097$  za pomocą metody momentów.

### 1.3.3. Intensywność wypłacania ubezpieczeń

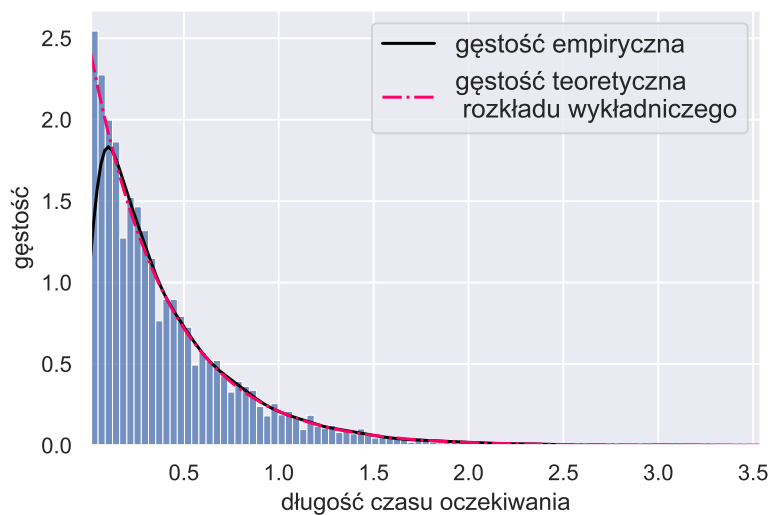
Kolejną czynnością, jaką należy wykonać, chcąc dopasować otrzymane dane do klasycznego procesu ryzyka, jest znalezienie intensywności wypłacanych ubezpieczeń. Jak wcześniej wspomnieliśmy, czasy oczekiwania na kolejny spadek są generowane z jednorodnego procesu Poissona o intensywności  $\lambda_p$ , a co za tym idzie mają rozkład wykładniczy z tym samym parametrem. Zatem musimy skupić się na wyznaczeniu czasów oczekiwania na kolejną wypłatę ubezpieczenia. W tym celu wyodrębnimy z danych momenty wystąpienia spadków, a następnie wyznaczymy wspomniane czasy oczekiwania, wyliczając różnice wartości następujących po sobie momentów. Wówczas, wiedząc, że poruszamy się w obrębie rozkładu wykładniczego, będziemy musieli jedynie wyznaczyć jego parametr. Zrobimy to analogicznie do szukania rozkładu  $X_i$ .



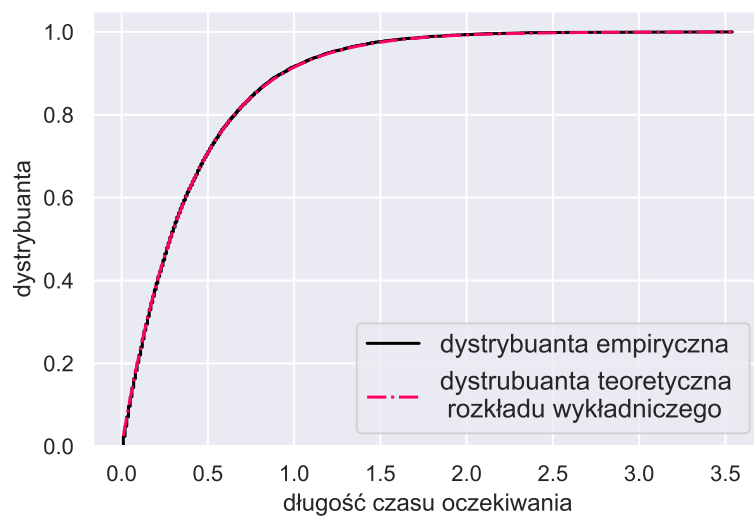


Rysunek 8. Histogram czasów oczekiwania na wypłacenie kolejnego odszkodowania

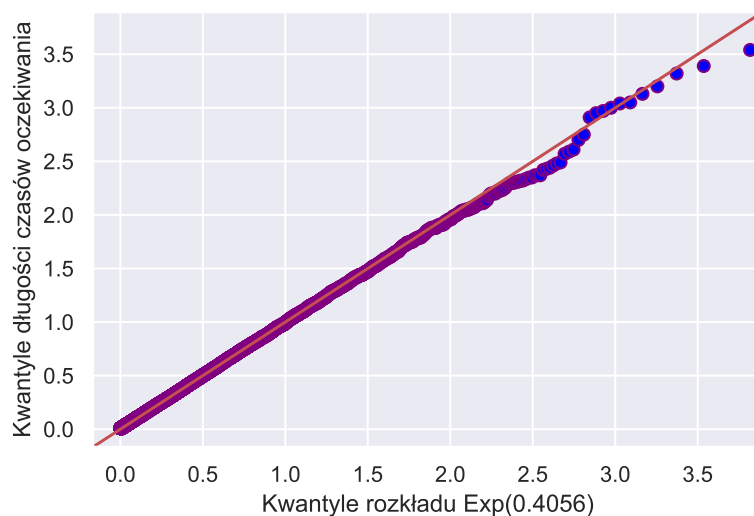
Zgodnie z założeniami procesu ryzyka histogram obrysem przypomina gęstość rozkładu wykładniczego. Korzystając z funkcji w Pythonie obliczamy średnią próbkową czasów oczekiwania i otrzymujemy  $\bar{T} = 0.4056$ . Wykorzystując ponownie metodę momentów, dostajemy  $\lambda_p = 2.4652$ .



Rysunek 9. Porównanie gęstości empirycznej z teoretyczną rozkładu  $Exp(\lambda_p)$



Rysunek 10. Porównanie dystribuanty empirycznej z teoretyczną rozkładu  $Exp(\lambda_p)$



Rysunek 11. Wykres kwantylowy rozkładu  $Exp(\lambda_p)$

Ponownie zarówno dystribuanty jak i gęstości pokrywają się, a wykres kwantylowy stanowi linię prostą nachyloną do osi  $OX$  pod kątem  $45^\circ$ . Świadczy to o prawidłowym dopasowaniu rozkładu zmiennej losowej  $T_i$ . Skoro czasy oczekiwania na wypłacenie kolejnego odszkodowania pochodzą z rozkładu  $Exp(2.4388)$ , proces zliczający spadki, czyli dla klasycznego procesu ryzyka jednorodny proces Poissona przyjmuje parametr intensywności  $\lambda_p = 2.4652$ .

#### 1.4. Narzut

Celem firmy ubezpieczeniowej jest zarobienie pieniędzy, dlatego cena polisy musi być odpowiednio wysoka, tak by zmniejszać ryzyko bankructwa towarzystwa ubezpieczeniowego. Dlatego też kowta, za jaką klient może nabyć polisę, jest zależna od parametru  $\theta$  zwanego narzutem bezpieczeństwa. Związek między nimi opisuje wzór:

$$c = (1 + \theta)\lambda_p \mathbb{E}X_i.$$

Stąd też narzut wyraża się poprzez:

$$\theta = \frac{c}{(\mathbb{E}X_i) \cdot \lambda_p} - 1.$$

a dla rozważanych w zadaniu danych wynosi  $\theta = 0.9664$ .

#### 1.5. Wnioski

W omówionej powyżej części zadania dopasowaliśmy model ryzyka do otrzymanych. Bez większych trudności wyznaczyliśmy dochód ze sprzedaży polisy na poziomie  $c = 50$ . Natomiast bardziej złożona okazała się estymacja parametrów i sprawdzenie jej dokładności. Wszystkie wykonane czynności w rezultacie dały nam rozkład wykości wypłacanych odszkodowań  $X_i \sim \text{Exp}(0.097)$  oraz intensywność pojawiania się spadków  $\lambda_p = 2.4652$ . Bliska 1 wartość parametru  $\theta = 0.9664$  pozwala przypuszczać, że symulowane w drugiej części zadania procesy ryzyka pokażą bankructwo towarzystwa ubezpieczeniowego.

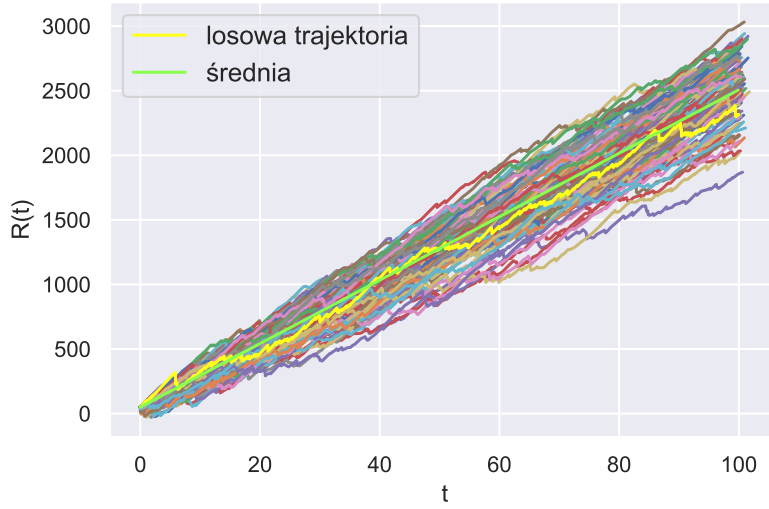
## 2. Symulacje procesu ryzyka

Po wyznaczeniu wartości premii  $c$  oraz wyestymowaniu parametrów  $\theta$  i  $\lambda_p$  przychodzi kolej na wysymulowanie trajektorii klasycznego procesu ryzyka  $R(t)$ . Zrobimy to postępując zgodnie z następującym algorytmem:

1. Generujemy  $N(t)$  na  $[0, T]$ .
2. Generujemy  $X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$ .
3. Podstawiamy do wzoru 1 ze strony 2.

Następnie do otrzymanej wiązki dorysowujemy jedną trajektorię z pliku z danymi. Dodatkowo porównujemy na wykresie wysymulowane procesy ze średnią  $R(t)$  wyrażoną wzorem

$$\mathbb{E}R(t) = \mathbb{E}u + \mathbb{E}ct - \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = u + ct + \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t) \right) \right) = \mathbb{E}(\mu \cdot N(t)) = \mu \lambda t.$$



Rysunek 12. Wykres 100 trajektorii procesu ryzyka  $R(t)$  wraz ze średnią i jedną losową trajektorią z pliku.

Widać, że wysymulowane trajektorie rozkładają się równomiernie wokół średniej a proces z danych zawiera się w obrębie wiązki. Ponadto rezultat naszej symulacji jest uderzająco podobny do procesów podanych przez prowadzącego (rysunek 3. na stronie 3.). Potwierdza to poprawność wyestymowania parametrów  $c$ ,  $\theta$  i  $\lambda_p$ .

### 2.1. Moment ruiny

Moment ruiny, zwany także momentem bankructwa, to chwila, dla której wartość procesu ryzyka po raz pierwszy spada poniżej zera. Definiowany jest poprzez

$$\tau(u) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\}.$$

### 2.2. Prawdopodobieństwo ruiny dla skończonego horyzontu czasowego

Prawdopodobieństwo ruiny dla skończonego horyzontu czasowego  $T$  przy ustalonym kapitale początkowym  $u$  to prawdopodobieństwo, że firma ubezpieczeniowa zbankrutuje przed chwilą  $T$ . Zgodnie z definicją wyraża się je następującym wzorem:

$$\Psi(u, T) \stackrel{\text{def}}{=} P(\tau(u) < T).$$

Można je wyznaczyć metodą Monte Carlo, postępując zgodnie z następującym algorytmem:

1. Generujemy  $N$  trajektorii procesu ryzyka  $R_1(t), \dots, R_N(t)$  na przedziale  $[0, T]$ .
2. Wyznaczamy liczbę trajektorii  $n$ , które spadły poniżej zera na przedziale  $[0, T]$ .  $n = \#\left\{i \in \{1, \dots, N\} : \min_{t \in [0, T]} R_i(t) < 0\right\}$ .

3. Podstawiamy do wzoru  $\Psi(u, T) = \frac{n}{N}$ .

Postępując zgodnie z powyższą instrukcją, oszacowaliśmy prawdopodobieństwo ruiny na przedziale  $[0, 100]$  i  $[0, 200]$ . Wynoszą one kolejno  $\Psi(50, 100) \approx 0.04903 = 4.903\%$  i  $\Psi(50, 200) \approx 0.04901 = 4.901\%$ , co biorąc pod uwagę dość wysoką wartość narzutu nie jest zaskakującym wynikiem.

### 2.3. Prawdopodobieństwo ruiny dla nieskończonego horyzontu czasowego

Prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym czasie jest prawdopodobieństwem zbankrutowania w dowolnym momencie w przyszłości. Zdefiniowane jest jako

$$\Psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} P(\tau(u) < \infty).$$

Przy jego wyznaczaniu skorzystamy ze wzoru Pollaczka-Chinczyna o następującej postaci:

$$\Psi(u) = \frac{\theta}{1 + \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \theta}\right)^n B_n(u), \quad \text{gdzie :}$$

- $B_n(u) = P(Y_1 + \dots + Y_n > u)$
- $Y_i$  to zmienne losowe iid. o gęstości  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - F_{X_i}(x)}{\mu}$ , gdzie  $\mu = \mathbb{E}X_i$ .

Przy szacowaniu prawdopodobieństwa ruiny  $\Psi(u)$  dla nieskończonego horyzontu czasowego ponownie skorzystamy z metody Monte Carlo, tym razem opierając ją na zapisanym wyżej wzorze.

1. Tworzymy tablicę  $Z$  o rozmiarze  $N$ .
2. Generujemy zmienną losową  $K \sim \text{Geom}\left(\frac{\theta}{1 + \theta}\right)$ .
3. Generujemy zmienne losowe iid.  $Y_1, \dots, Y_K$ , każda z nich o gęstości  $f(x) = \frac{1 - F_{X_i}(x)}{\mu}$ .
4. Jeśli  $Y_1 + \dots + Y_K > u$  wstawiamy  $Z[i] = 1$ , w przeciwnym razie  $Z[i] = 0$ .
5. Powtarzamy  $N$  razy kroki od 2 do 4.
6. Podstawiamy do wzoru  $\Psi(u) = \frac{Z[1] + \dots + Z[N]}{N}$ .

Wykonując kolejne kroki algorytmu uzyskaliśmy  $\Psi(50) \approx 0.0465 = 4.65\%$ . W niektórych przypadkach możliwe jest zweryfikowanie wyniku wartością teoretyczną  $\Psi(u)$ . Prawdopodobieństwo to jest znane w jawnej postaci tylko w kilku sytuacjach, m.in. gdy spadki pochodzą z rozkładu wykładniczego. Wówczas dla tego przypadku wzór analityczny jest następujący:

$$\Psi_a(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\lambda_x u \frac{\theta}{1 + \theta}}.$$

Po podstawieniu  $u = 50$  i wyestymowanej wartości parametru  $\theta = 0.9664$  dostajemy  $\Psi_a(50) \approx 0.04695 = 4.695\%$ .

## 2.4. Wnioski

W drugiej części zadania, z użyciem wcześniej wyestymowanych parametrów, pomyślnie wysymulowaliśmy trajektorie procesu ryzyka oraz wyznaczyliśmy prawdopodobieństwo ruiny zarówno w skończonym jak i nieskończonym czasie. Patrząc na stosunkowo dużą wartość narzutu  $\theta$  spodziewaliśmy się, że rzadko kiedy procesy zakończą się bankructwem. Otrzymane wyniki eksperymentu:  $\Psi(50,100) \approx 4.903\%$ ,  $\Psi(50,200) \approx 0.04901 = 4.901\%$  i  $\Psi(50) = 4.65\%$  pokryły się z naszymi przewidywaniami. Wyniki dla horyzontu czasowego  $T = 200$  i  $T = 100$  różnią się jedynie o jedną tysięczną procenta a prawdopodobieństwo dla nieskończonego również niewiele od nich odbiega. Pozwala to przypuszczać, że przy parametrze  $\theta$  oscylującym wokół jedynki (a zwłaszcza większym od niej) długość obserwacji nie wpływa znacząco na szansę upadku. Pokrywa się to z intuicją -im większe przychody ze sprzedaży polis, tym mniejsze prawdopodobieństwo zbankrutowania firmy ubezpieczeniowej. Ponadto patrząc na wartości  $\Psi_a(50)$  i  $\Psi(50)$  możemy obliczyć błąd względny przybliżania metodą Monte Carlo. Wynosi on około 0.96%. Tak niska wartość świadczy o tym, że poprawnie przeprowadziliśmy symulację klasycznego procesu ryzyka.

## 3. Zadanie 2

### 3.1. Ruch Browna

Ruch Browna czyli inaczej proces Wienera to proces stochastyczny spełniający następujące warunki:

- $B_0 = 0$ ,
- $B_t$  ma niezależne przyrosty,
- $B_t$  ma stacjonarne przyrosty,
- $B_t \sim \mathbb{N}(0, t)$ ,
- $B_t$  ma ciągle i nieróżniczkowalne trajektorie.

Dla skończenie wymiarowych rozkładów  $B_t$  zachodzi m.in. własność  $\frac{1}{2}$ -samopodobieństwa definiowana jako

$$\forall c > 0 \quad B(c \cdot t) \stackrel{d}{=} c^{\frac{1}{2}} \cdot B(t). \quad (2)$$

W zadaniu rozpatrujemy przypadek jednowymiarowego ruchu Browna.

### 3.2. Symulowanie ruchu Browna

Chcemy wygenerować wektor  $[B(t_0), B(t_1), \dots, B(t_n)]$ ,

gdzie  $t_i = ih$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $h = \frac{T}{n}$ ,

a  $T = nt$  to nasz horyzont czasowy. Ponieważ  $B_t$  ma niezależne, stacjonarne przyrosty

$$B(t_i) - B(t_{i-1}) \stackrel{d}{=} B(t_i - t_{i-1}) = B(h) \sim \mathbb{N}(0, h). \quad (3)$$

W celu wygenerowania takiego wektora kolejno generujemy przyrosty.

#### Algorytm

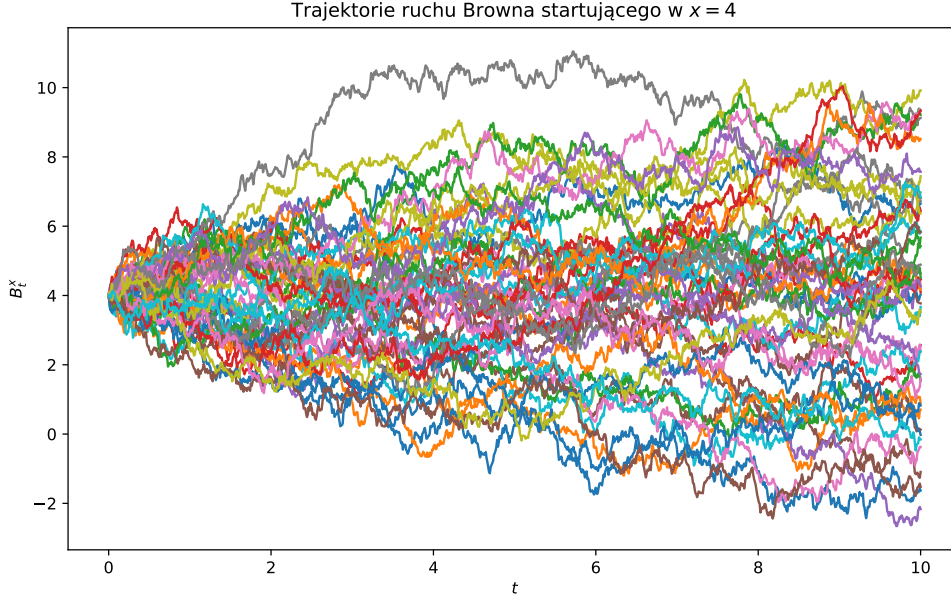
1.  $B(t_0) = B(0) = 0$ ,

$$2. B(t_{i+1}) = B(t_i) + h^{\frac{1}{2}} \cdot \xi_i, \quad \text{gdzie } \xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1), i = 0, \dots, n-1$$

W zadaniu rozpatrujemy przypadek ruchu Browna startującego z  $x \in \mathbb{R}$ . Określony jest on jako

$$B_t^x = B_t^0 + x, \quad (4)$$

gdzie  $B_t^0$  to klasyczny ruch Browna startujący z 0.



Rysunek 13. Przykładowe trajektorie ruchu Browna

Na rysunku 1. zaprezentowane zostały przykładowe trajektorie ruchu Browna, którego trajektorie zaczynają w  $x = 4$ .

### 3.3. Średni czas wyjścia z przedziału $[a, b]$

Mając określone  $[a, b] \in \mathbb{R}$ , gdzie  $a < b$  możemy zdefiniować

$$\tau_{a,b} := \inf \{t \geq 0 : B_t = a \vee B_t = b\}, \quad (5)$$

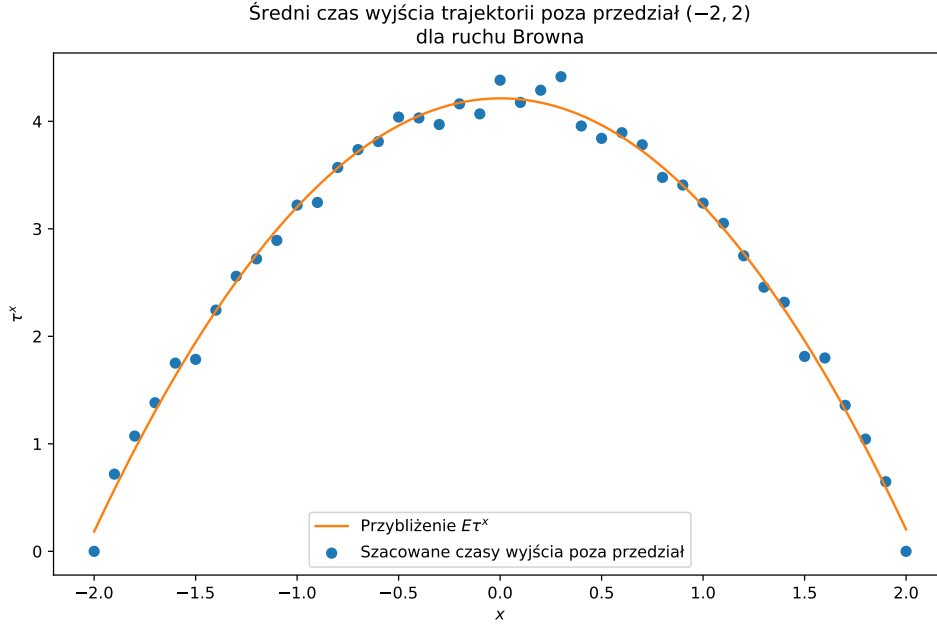
gdzie  $\tau_{a,b}$  jest czasem osiągnięcia granicy  $a$  lub  $b$ .

Chcemy oszacować średni czas wyjścia z przedziału  $[a, b]$  w zależności od  $x \in (a, b)$ . Szukamy więc  $\mathbb{E}\tau^x$ , gdzie

$$\tau^x := \inf \{t \geq 0 : B_t^x \notin [a, b]\}. \quad (6)$$

Wiedząc, że średnia z próby jest dobrym estymatorem wartości oczekiwanej do oszacowania średniego czasu wyjścia z przedziału  $[a, b]$  posługujemy się metodą Monte Carlo. Przyjmujemy  $b = -a$ , a za parametr  $b$  wybieramy  $b=2$ . Wybieramy takie parametry, aby czas symulacji nie był zbyt długi. Wybierając większą wartość otrzymalibyśmy podobne rezultaty, a czas oczekiwania na wyjście poza przedział były dłuższy. Symulację przeprowadzamy uśredniając czasy wychodzenia poza przedział. Generujemy proces zgodnie

z algorytmem (3.2). Gdy proces osiąga granicę  $b$  zapisujemy czas tego zdarzenia, a następnie powtarzamy wszystkie kroki  $N = 1000$  razy i uśredniamy otrzymane wartości.



Rysunek 14. Średni czas wyjścia ruchu Browna poza przedział  $[a, b]$  wraz z dopasowaną krzywą

Na rysunku 2. prezentujemy punkty pomiarowe wraz z krzywą dopasowaną za pomocą funkcji `curve_fit` pochodzącą z modułu `optimize` z biblioteki `scipy`, z której korzystamy przy użyciu języka Python. Otrzymujemy, że nasze wyniki układają się w kształt przypominający parabolę, dlatego też z pomocą funkcji `curve_fit` szukamy współczynników funkcji  $ax^2 + bx + c$ . Dopasowana krzywa jest postaci  $-1.00502114x^2 + 0.00491775x + 4.21378838$ . Na rysunku widzimy dopasowaną parabolę po przybliżeniu jej parametrów do dwóch miejsc po przecinku.

### 3.4. Prawdopodobieństwo wyjścia przez $b$

Chcemy sprawdzić jak często nastąpi wyjście przez  $b$ , czyli szukamy

$$P(B_{\tau^x}^x = b). \quad (7)$$

Ponieważ ruch Browna jest martyngałem zachodzi

$$\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (8)$$

W konsekwencji również  $\{B_{\tau_{a,b}}\}$  jest martyngałem. Otrzymujemy

$$\mathbb{E}[B_{\tau_{a,b}} | B_0 = x] = \mathbb{E}[B_0 | B_0 = x] = x \quad (9)$$

Zatem

$$x = \mathbb{E}[B_{\tau_{a,b}} | B_0 = x] = aP(B_{\tau_{a,b}} = a | B_0 = x) + bP(B_{\tau_{a,b}} = b | B_0 = x), \quad (10)$$



oraz

$$P(B_{\tau_{a,b}} = a | B_0 = x) + P(B_{\tau_{a,b}} = b | B_0 = x) = 1 \quad (11)$$

Z (10) i (11) otrzymujemy, że

$$P(B_{\tau_{a,b}} = b | B_0 = x) = \frac{x - a}{b - a}, \quad a \leq x \leq b \quad (12)$$

oraz analogicznie

$$P(B_{\tau_{a,b}} = a | B_0 = x) = \frac{b - x}{b - a}, \quad a \leq x \leq b. \quad (13)$$

Przyjmując  $x = 0$  oraz przedział  $[-a, b]$  w równaniu (12) otrzymujemy

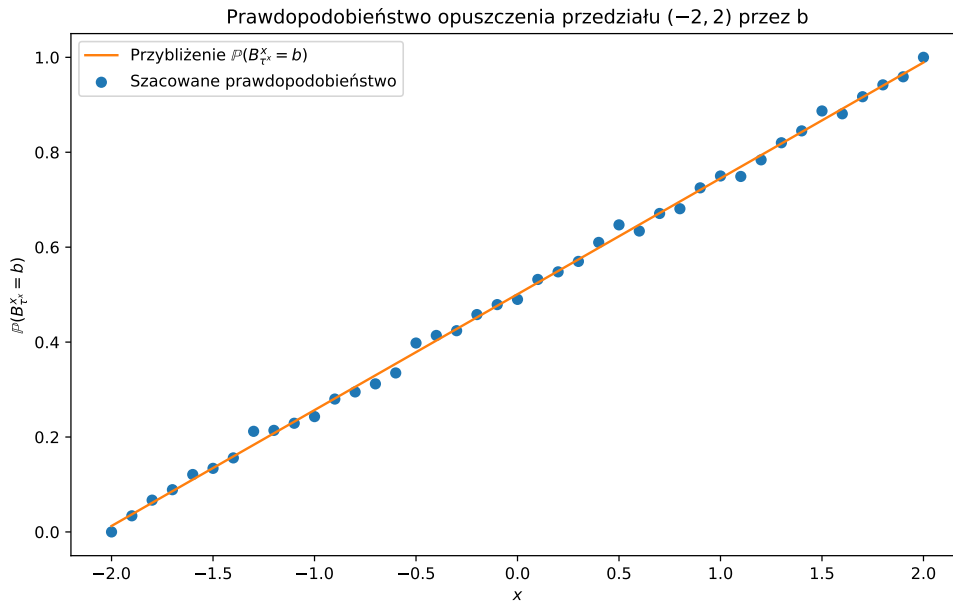
$$P(B_{\tau_b} = b) = \frac{a}{b + a} = \frac{a}{1 - a + a} = a \quad (14)$$

Możemy więc stwierdzić, że jako funkcję prawdopodobieństwa spodziewamy się funkcji liniowej.

### 3.5. Symulacja Monte Carlo przejścia przez b

W celu oszacowania prawdopodobieństwa wyjścia przez b ponownie korzystamy z metody Monte Carlo. Algorytm postępowania jest niemalże taki sam jak w przypadku uśredniania czasów wyjścia poza przedział w punkcie (3.3), jednak w tym przypadku rozróżniamy czy wychodzimy poza granicę a, czy poza granicę b. Ponieważ symulując ruch Browna nie generujemy ciągłej trajektorii, a kolejne punkty są generowane co jakiś krok czasowy (dyskretyzacja), jest mało prawdopodobne, aby podczas symulacji trafić w punkt  $b$ . Z tego powodu przekształcamy równanie (7) do postaci

$$P(B_{\tau^x}^x \geq b). \quad (15)$$



Rysunek 15. Prawdopodobieństwo przekroczenia górnej granicy przedziału w zależności od  $x$  wraz z dopasowaną krzywą

Otrzymujemy monotoniczną zależność między wynikami, ponownie dopasowujemy krzywą w ten sam sposób, co w punkcie (3.3), jednak tym razem dopasowujemy funkcję liniową. Dopasowana krzywa jest dokładnie postaci  $P(B_{\tau^x}^x = b) = 0.24413937x + 0.50087805$ .

### 3.6. Wnioski

W tym zadaniu skorzystaliśmy bezpośrednio z własności ruchu Browna/procesu Wienera. Średni czas wyjścia poza przedział  $[a, b]$  ułożył się w funkcję symetryczną - parabolę. Jest to o tyle intuicyjne, że przyrosty występujące w ruchu Browna pochodzą z rozkładu normalnego, który także jest symetryczny. Widzimy, że prawdopodobieństwo wyjścia przez górną granicę przedziału uzyskane za pomocą symulacji metodą Monte Carlo odpowiada wartości teoretycznej.