王一鑫

A+

蘭州大學
LANZHOU UNIVERSITY

习题四、

1. (1) $1_{\bar{A}} = \begin{cases} 1 & 如果\bar{A}发生 \\ 0 & 如果\bar{A}不发生 \end{cases}$ 即 $1_{\bar{A}} = \begin{cases} 1 & 如果A不发生 \\ 0 & 如果A发生 \end{cases}$.

故 $1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$.

$1_{AB} = \begin{cases} 1 & 如果AB发生 \\ 0 & 如果AB不发生 \end{cases}$ $1_A = \begin{cases} 1 & 如果A发生 \\ 0 & 如果A不发生 \end{cases}$

$1_B = \begin{cases} 1 & 如果B发生 \\ 0 & 如果B不发生 \end{cases}$. $P\{AB发生\} = P\{A发生且B发生\}$.

$P\{AB不发生\} = P\{A, B至少有一不发生\}$

故 $1_{AB} = 1_A \cdot 1_B$

$P(A\cup B) = P\{A, B至少有一发生\} = P\{A, B均不发生) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$

$P(\overline{A\cup B}) = P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P\{A, B均不发生) = P(\bar{A}\bar{B})$.

故 $1_{A\cup B} = 1 - 1_{\bar{A}\bar{B}}$. □

(2) 要证 $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

由 $1_{A\cup B} = 1 - 1_{\bar{A}\bar{B}}$ 知 $P(A\cup B) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$

$1_{AB} = 1_A \cdot 1_B$ 知 $P(AB) = P(A)P(B)$.

$1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$ 知 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = [1-P(A)][1-P(B)] = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$.

故 $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. □

(3) $1_{A\cup B\cup C} = 1_{A\cup B} + 1_C - 1_{A\cup B}\cdot 1_C$

$= 1_A + 1_B + 1_C - 1_{AB} - (1_A + 1_B - 1_{AB})\cdot 1_C$

$= 1_A + 1_B + 1_C - 1_{AB} - 1_{AC} - 1_{BC} + 1_{ABC}$. □

(4). $1_A + 1_B + 1_C - 1_{A\cup B} - 1_{B\cup C} - 1_{A\cup C} + 1_{A\cup B\cup C}$

$= 1_A + 1_B + 1_C - 1_A - 1_B + 1_{AB} - 1_{AB} - 1_C + 1_{BC} - 1_A - 1_C + 1_{AC}$
$+ 1_A + 1_B + 1_C - 1_{AB} - 1_{AC} - 1_{BC} + 1_{ABC}$

$= 1_{ABC}$. □

(5). 先设整个比赛有不败的队的概率为A，有不胜的队的概率为B，则求

$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

设第i队不败的概率 A_i，不胜的概率 B_i $(1\le i\le 5, i\in Z)$

$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{5} A_i)$ $P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{5} B_i)$. $P(AB) = P(\bigcup_{i=1}^{5} A_iB_i)$.

由实际情况，$i\ne j$ 时，$P(A_iA_j)=0$, $P(B_iB_j)=0$ $P(A_iB_i)=0$

$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i) - \sum_{i\ne j} P(A_iA_j) + \cdots = \sum_{i=1}^{5} P(A_i) = 5\times\frac{1}{2^4}$.

$P(B) = P(A) = \frac{5}{2^4}$.

$P(AB) = \sum_{i\ne j} P(A_iB_j) = C_5^1 C_4^1 \cdot \frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^3}$.

$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - 5\times\frac{1}{2^4}\times 2 - C_5^1C_4^1\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{17}{32}$ □

(6) 由于 $P\{1_A=1\}=P(A)$ $P\{1_B=1\}=P(B)$

$P\{1_A=0\}=P(\bar{A})$ $P\{1_B=0\}=P(\bar{B})$

$P\{1_A=1, 1_B=1\}=P(AB)$. $P\{1_A=1, 1_B=0\}=P(A\bar{B})$

$P\{1_A=0, 1_B=1\}=P(\bar{A}B)$. $P\{1_A=0, 1_B=0\}=P(\bar{A}\bar{B})$

知 $1_A, 1_B$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ A.B独立. □.

2. 解：由题 $\sum_{n=0}^{\infty} A\frac{B^n}{n!} = Ae^B = 1$. $A=e^{-B}$.

$E(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} nA\frac{B^n}{n!} = Be^{-B}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B^{n-1}}{(n-1)!} = B\cancel{e^{-B}} = a$. $A=e^{-a}$. □.

5. 解： 记 $\xi_i = \begin{cases} 1 & 第i次摸到白球 \\ 0 & 第i次摸到黑球 \end{cases}$ 设第i次摸到白球概率 A_i

$E(\xi_i) = P(A_i) \cancel{= P(A_i|A_{i-1})P(A_{i-1}) + P(A_i|\bar{A}_{i-1})P(\bar{A}_{i-1})} = \frac{a}{a+b}$. $i=1,2,\cdots,c$

兰州大学
LANZHOU UNIVERSITY

[illegible]

[illegible]

证明：由于 $E(\xi)$ 存在，$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x)$ 收敛

对 $A>0$，$0 \le A F(-A) \le \int_{-\infty}^{-A} |x| dF(x) \to 0$ $(A \to +\infty)$

故 $\lim_{x \to -\infty} xF(x) = 0$

同理 $\lim_{x \to +\infty} x[1-F(x)] = 0$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = \int_{-\infty}^{0} x\,dF(x) + \int_{0}^{+\infty} x\,dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\,dF(x) - \int_{0}^{+\infty} x\,d[1-F(x)]$$

$$= xF(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx - x[1-F(x)]\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} [1-F(x)]\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} [1-F(x)]\,dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx$$

特别地，ξ 取非负值，$\int_{-\infty}^{0} F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$.

$E(\xi) = \int_{0}^{+\infty} [1-F(x)]\,dx$. □

概率论作业
数学萃英班
王一鑫

9. 若随机变量ξ服从Laplace分布，其密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}},\quad -\infty<x<\infty,\ \lambda>0$$

试求$E(\xi)$及$D(\xi)$

解：
$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}dx$$
$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\lambda}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda t+\mu}{2\lambda}e^{-|t|}\cdot\lambda dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda t+\mu)e^{-|t|}dt$$
$$=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-|t|}dt+\frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}dt$$
$$=0+\frac{\mu}{2}\cdot 2=\mu.$$
$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}dt$$
$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\lambda}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2t^2\cdot\frac{1}{2\lambda}\cdot\lambda e^{-|t|}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2t^2e^{-|t|}dt$$
$$=\lambda^2\int_{0}^{+\infty}t^2e^{-t}dt=2\lambda^2$$

即 $E(\xi)=\mu$. $D(\xi)=2\lambda^2$ □

11. 某城市共有N辆汽车，车牌号从1到N，若随机地(可重复)记下n辆车的车牌号，其最大号码ξ，求$E(\xi)$.

解：若记A_k为抄到最大号码为k，B_k为抄到最大号码不超过k.

$A_k=B_k-B_{k-1}$. 由于 $B_k\supset B_{k-1}$.

$$P(A_k)=P(B_k)-P(B_{k-1})=\frac{k^n}{N^n}-\frac{(k-1)^n}{N^n}.$$

$$E(\xi)=\sum_{k=1}^{N}k\cdot\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}=\frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{N}k^{n+1}-(k-1)^{n+1}-(k-1)^n=N-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k^n}{N^n}$$

对于足够大的N，$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k^n}{N^n} = N\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}\frac{k^n}{N^n} \approx N\int_0^1 x^n dx = \frac{N}{n+1}$.

$E(\xi) = N - \sum_{k=1}^{N-1}\frac{k^n}{N^n} \approx \frac{n}{n+1}N$. □

13、若ξ_1, ξ_2相互独立，均服从$N(\mu,\sigma^2)$，试证：

$$E\max(\xi_1,\xi_2) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

证明：设 $\eta_1 = \frac{\xi_1-\mu}{\sigma}$，$\eta_2 = \frac{\xi_2-\mu}{\sigma}$，$\eta_1$与$\eta_2$是相互独立的标准正态变量. η_1, η_2的分布函数为 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}$

$\max(\xi_1,\xi_2) = \max(\sigma\eta_1+\mu, \sigma\eta_2+\mu) = \sigma\max(\eta_1,\eta_2)+\mu$.

设 $X = \max(\eta_1,\eta_2)$，它的分布函数为

$F_X(x) = P\{\max(\eta_1,\eta_2) < x\} = P\{\eta_1 < x, \eta_2 < x\} = [\Phi(x)]^2$.

$$\begin{aligned}
E\max(\eta_1,\eta_2) &= E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, dF_X(x) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)\, x\varphi(x)\, dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\}\, x\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{t^2}{2}\}dt\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} x\exp\{-\frac{x^2}{2}\}\left(\int_{-\infty}^{x}\exp\{-\frac{t^2}{2}\}dt\right)dx. \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{x}\exp\{-\frac{t^2}{2}\}dt\right)de^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{t^2}{2}\}dt\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

$E\max(\xi_1,\xi_2) = E[\sigma\max(\eta_1,\eta_2)+\mu] = \sigma E\max(\eta_1,\eta_2)+\mu = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$. □

兰州大学
LANZHOU UNIVERSITY

14. 设 $f(x)$ $(0\le x<\infty)$ 是单调非降函数，且 $f(x)>0$，对随机变量 ξ，若 $Ef(|\xi|)<\infty$

则对任意 $x>0$，$P\{|\xi|\ge x\}\le \frac{1}{f(x)}Ef(|\xi|)$

证明：设 ξ 的分布函数 $F(x)$。

$$P\{|\xi|\ge x\} = \int_{|t|\ge x} dF(t)$$

$$= \int_{f(|t|)\ge f(x)} dF(t)$$

$$\le \frac{1}{f(x)}\int_{f(|t|)\ge f(x)} f(|t|)\,dF(t)$$

$$\le \frac{1}{f(x)}\int_{\mathbb{R}} f(|t|)\,dF(t)$$

$$= \frac{1}{f(x)}E(f(|\xi|)).$$ □

15. 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为正的独立随机变量，服从相同分布，密度函数 $p(x)$。

试证：$E\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k}{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}\right)=\frac{k}{n}$

证明：令 $\eta_i=\frac{\xi_i}{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}$，$1\le i\le n$，则由题，$\eta_i$ 服从相同分布。

$|\eta_i|\le 1$，故 $E(\eta_i)$ 存在。

$E(\sum_{i=1}^{n}\eta_i)=1$，$E(\eta_i)=E(\eta_j)$ $1\le i,j\le n$. 故

$E(\eta_i)=\frac{1}{n}$. $E(\sum_{i=1}^{k}\eta_i)=\frac{k}{n}$ □

16. 袋中装有 N 只球，但其中白球数为随机变量，只知其数学期望为 n，试证从该袋中摸一球得到白球的概率为 $\frac{n}{N}$。

解：设 ξ 为袋中白球数量，摸到白球为事件 A。

$E(\xi)=\sum_{k=0}^{N}kP\{\xi=k\}=n.$

$P(A)=\sum_{k=0}^{N}P(A|\xi=k)P(\xi=k)=\sum_{k=0}^{N}\frac{k}{N}P\{\xi=k\}=\frac{n}{N}$ □

17. 甲袋中装有a只白球b只黑球. 乙袋中装有α只白球β只黑球. 现从甲袋中摸出c($c\le a+b$)只球放入乙袋中, 求从乙袋中再摸一球为白球的概率.

解: 设c只球中白球个数为ξ, 由5. $E(\xi)=\frac{a}{a+b}$.

设乙袋中再摸一球为白球为事件B. 由全概率公式.

$$P(B)=\sum_{k=0}^{c}P(\xi=k)P(B|\xi=k)$$
$$=\sum_{k=0}^{c}P(\xi=k)\cdot\frac{\alpha+k}{\alpha+\beta+c}$$
$$=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+c}+\sum_{k=0}^{c}k\frac{P(\xi=k)}{\alpha+\beta+c}$$
$$=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+c}+\frac{\frac{a}{a+b}}{\alpha+\beta+c}.$$ □

19. 甲袋中有a只白球b只黑球, 乙袋中有c只白球d只黑球, 从两袋中各摸出一球, 并交换放入另一袋中, 这样做了n次之后, 再从甲袋中摸出一球, 求这球是白球的概率.

解: 记X_i, Y_i为第i次交换后甲、乙两袋中的白球数.

有 $X_i+Y_i=a+c$. $E(X_i)+E(Y_i)=a+c$

设 $\xi_i=\begin{cases}1 & 第i次从甲袋中摸出一只白球\\ 0 & 第i次从甲袋中摸出一只黑球\end{cases}$

$\eta_i=\begin{cases}1 & 第i次从乙袋中摸出一只白球\\ 0 & 第i次从乙袋中摸出一只黑球\end{cases}$

$X_i=X_{i-1}+\eta_i-\xi_i$. 由16. ~~$P(X_i)=E(\xi_i)=$~~ Y_{i-1}.

$E(\xi_i)=P\{\xi_i=1\}=\frac{E(X_{i-1})}{a+b}$ $E(\eta_i)=P\{\eta_i=1\}=\frac{E(Y_{i-1})}{c+d}$.

$$E(X_i)=E(X_{i-1})+E(\eta_i)-E(\xi_i)=E(X_{i-1})+\frac{a+c-E(X_{i-1})}{c+d}-\frac{E(X_{i-1})}{a+b}$$
$$=(1-\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b})E(X_{i-1})+\frac{a+c}{c+d}$$

得到 $E(X_n)$ 的差分方程.

$$E(X_n)-\left(1-\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)E(X_{n-1})=\frac{a+c}{c+d}.$$

$$E(X_n)=C\left(1-\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)^n+\frac{(a+c)(a+b)}{a+b+c+d}.$$

$$E(X_0)=C\cancel{\left(1-\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)}+\frac{(a+c)(a+b)}{a+b+c+d}=a.\quad C=\frac{ad-bc}{a+b+c+d}.$$

n次操作后该球是白球的概率为

$$\frac{E(X_n)}{a+b}=\frac{ad-bc}{(a+b)(a+b+c+d)}\left(1-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d}\right)^n+\frac{a+c}{a+b+c+d}\ \square$$

20. 现有n个袋子,各装a只白球和b只黑球.先从第一个袋子中摸出一球,记下颜色后就把它放入第二个袋子中.再从第二个袋子中摸出一球,记下颜色后把它放入第三个袋子中,照这样办法依次摸下去,最后从第n个袋子中摸出一球并记下颜色,若在这n次摸球中所摸得的白球总数为 S_n,试求 $E(S_n)$

解: 令 $\xi_i=\begin{cases}1 & 从第i个袋子中摸出白球\\ 0 & 从第i个袋子中摸出黑球\end{cases}$

$P(\xi_1=1)=\dfrac{a}{a+b}$ $\quad\cancel{P(\xi_2)=}\quad$ 由1b. $P(\xi_2=1)=\dfrac{a+\frac{a}{a+b}}{a+b+1}=\dfrac{a}{a+b}.$

设 $n=k$ 时 $P(\xi_k=1)=\dfrac{a}{a+b}$, 则 $n=k+1$ 时

$$P(\xi_{k+1}=1)=\frac{a+\frac{a}{a+b}}{a+b+1}=\frac{a}{a+b}$$

由数学归纳法原理 $P(\xi_i=1)=\dfrac{a}{a+b}$, $i=1,2,\cdots,n$.

$$E(S_n)=E(\xi_1)+E(\xi_2)+\cdots+E(\xi_n)=P(\xi_1=1)+\cdots+P(\xi_n=n)=\frac{na}{a+b}\ \square$$

兰州大学
LANZHOU UNIVERSITY

21. 在物理实验中，为测量某物体的重量，通常要重复测量多次，最后再把测量记录的平均值作为该物体的重量，试说明这样做的道理。

解：设 W 为物体实际重量，第 i 次测量的误差为 ε_i，测量值 $W+\varepsilon_i$

设 $E(\varepsilon_i)=0$，$D(\varepsilon_i)=\sigma^2$，且 ε_i 相互独立。

测量 n 次后，取平均值

$$\frac{1}{n}(W+\varepsilon_1+\cdots+W+\varepsilon_n)=W+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i,$$

它的数学期望

$$E(W+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i)=E(W)+\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i)=W.$$

它的方差

$$D(W+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i)=\frac{\sigma^2}{n},$$ 这就减小了方差，提高了精度。

23. 甲、乙依下列规则玩随机游戏：甲从装有 i 个 i 号球（$i=1,2,\cdots,5$）的袋中随机摸出一球放入密盒中，让乙猜号。乙对甲的支付是他猜的号码与真正号码之差的(1)平方，(2)绝对值。试对这两种场合，讨论乙应采取的最佳策略。

解：(1) 令甲摸球的号码为 ξ，乙猜的号码为 c。

$E(\xi)=c$ 时，$E(\xi-c)^2$ 最小

$$c=E(\xi)=\frac{1}{15}\times1+\frac{2}{15}\times2+\frac{3}{15}\times3+\frac{4}{15}\times4+\frac{5}{15}\times5=\frac{11}{3}.$$

则乙应猜一次 3，猜两次 4。

(2) ~~E~~ c 为中位数，$E(|\xi-c|)$ 最小

则乙应猜 4

26. Per Pareto 分布的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} rA^r\frac{1}{x^{r+1}}, & x\geq A \\ 0 & x<A. \end{cases}$$

这里 $r>0$，$A>0$，试指出这分布具有 p 阶矩，当且仅当 $p<r$.

解：$$E(\xi^p)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^p\cdot rA^r\frac{dx}{x^{r+1}}=\int_A^{+\infty}rA^r\frac{1}{x^{r+1-p}}dx.$$

由判断方法，无穷级数收敛当且仅当 $r+1-p>1$，即 $p<r$. □