

2023 年 ODE 课程大作业参考选题

- 1、芯片中的数学：要求给出详细的方程或数学模型。
- 2、ChatGPT 背后的数学：要求给出具体那个数学知识在 ChatGPT 中那个部分得到应用，并举例。能给出与微分方程知识相关的例子最好。
- 3、战争能被精确预测吗？结合某一实际战争，给出刻画战争的微分方程模型并进行理论分析和数值仿真。相关参考文献：
【1】汪涛，超越战争论-战争与和平的数学原理，东方出版社，2016.7
- 4、微分方程边值问题：如何在愤怒的小鸟游戏中获得高分。建立数学模型，给出充分理由。
- 5、阅读小说《三体》，针对小说中的事件尝试建立数学模型进行预测。
- 6、能否给出初值问题解存在且唯一的充分必要条件？
- 7、意见或者 fans 之间竞争（参考王绍利的论文和 PRL 109,118702 (2012)），尝试用 flocking 的观点解释：周涛，“个人英雄主义还是强强联手？”，环球科学 006 (2014): 93-93.
- 8、感冒、艾滋病、肥胖、孤独、打哈欠、大笑、暴力行为、犯罪、骚乱、自杀、金融危机、谣言、童话、计算机病毒等之间有什么共同之处？请选择其中一个或者是类似的现象，用所学微分方程知识建模分析。参考资料：
【1】[英]亚当·库哈尔斯基，谷晓阳 李瞳 王兴伟 王雪萍 译，传染-为什么疾病、金融危机和社会行为会流行？中信出版社，2020.10
- 9、如何在竞争中使得自己的民族语言繁荣昌盛？相关参考文献：
【1】Abrams D M, Strogatz S H. Linguistics: Modelling the dynamics of language death[J]. Nature, 2003, 424: 900.
【2】Lieberman E, Michel J B, Jackson J, et al. Quantifying the evolutionary dynamics of language[J]. Nature, 2007, 449: 713-716.
【3】Wang W S Y, Minett J W. The invasion of language: emergence, change and death[J]. Trends in ecology and evolution, 2005, 20(5): 263-269.
【4】Juane M M, Seoane L F, Munuzuri A P, et al. Urbanity and the dynamics of language shift in Galicia[J]. Nature communications, 2019, 10(1): 1680.
- 10、考虑方程 $x'(t) = x(x-1) + f(t)$ 解的渐近行为。如果函数 $f(t)$ 是指数收敛到零的，其解的动力学行为如何？
- 11、建立塔科马海峡吊桥坍塌的非线性模型，分析其坍塌的原因。相关参考文献
【1】Lazer A.C. and McKenna P. J., Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis. Siam Review, 1990, 32 :537-578.
【2】McKenna, P., and J., Large Torsional Oscillations in Suspension Bridges Revisited: Fixing an Old Approximation. American Mathematical Monthly, 1999,106:1-18.

12、考虑如下系统

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^N m_k (y_k - y_i) + \sigma (\theta_i - y_i^p) y_i. \quad (1)$$

该标量系统表示一个意见动态博弈模型，在给定一组不同的确信度值 θ_i 的情况下，意见 y_i 变化以达到最佳一致。这样的一致性 \mathbf{y}^* 可看作是具有 N 个玩家的非合作博弈中的纳什平衡，旨在最大化每名玩家的相应收益

$$p_i(\mathbf{y}) = \sigma \left(\frac{1}{2} \theta_i y_i^2 - \frac{1}{p+2} y_i^{p+2} \right) - \frac{M}{2} (\bar{y} - y_i)^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \sum_j m_j y_j.$$

试证明：系统存在唯一的稳定纳什平衡点 \mathbf{y}^* ，并且它是该系统的全局吸引子，即如下定理。

定理 对于任意正参数集 $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{m}, \sigma) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+$ ，系统(1)存在唯一的稳定纳什平衡点 $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}_+^N$ 。此外，对于任意正解 $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}_+^N$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时，它都会收敛到 \mathbf{y}^* 。

相关参考文献：

- 【1】Lear D, Reynolds D N, Shvydkoy R. Grassmannian reduction of Cucker-Smale systems and dynamical opinion games. 2020.
- 【2】Nash J F. Non-Cooperative Games[J]. Annals of Mathematics, 1951, 54:286-295.

13、ODE 课程中给出的部分公开问题或者自己感兴趣的数学问题和数学建模问题等。