微分几何大作业

2022 数学萃英班　　王一鑫

2024 年 12 月 29 日

题目 1. 向量积的概念可以推广到高维空间吗？

解答.

在 Wikipedia 中，我查询到了有关**七维向量积**的信息.

七维向量积是七维空间中向量的双线性算子，和三维向量积有着类似的性质：

- 满足反交换律.
- 对于 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^7$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 正交.

然而，也有不同的特性：

- 七维向量积不满足 Jacobi 恒等式.
- 每对三维向量只有一个向量积（不考虑正负），每对七维向量可以有很多向量积.

具体定义如下：在 Euclidean 空间 V 上的向量积是一种双线性映射（bilinear map），将 V 中的向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 映射到 V 中的另一个向量 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$，并具有以下性质：

- **正交性：**

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{y} = 0,$$

- **模长：**

$$|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2,$$

  可以等价表达式为：

$$|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \sin\theta,$$

  这是以 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为边所围成的平行四边形的面积。

-

$$|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \quad \text{当 } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0,$$

具体运算可以由乘法表给出. Cayley 给出了如下的乘法表：

$\times$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

该表格可以用于计算任意两个向量的向量积. 例如，要计算 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ 的 $\boldsymbol{e}_1$ 分量，可以选择出所有与 $\boldsymbol{e}_1$ 相关的基向量相乘项，结果为：

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})_1 = x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_5 - x_5y_4 + x_7y_6 - x_6y_7.$$

这样的乘法表并不唯一.

对于更一般的向量积推广，有如下结果：在任意维度内的 r 元运算，可以通过某些公理实现。假设在一个 d 维空间 V 上存在一个 r 元运算。于是，一个 r-重 d-维“向量积”多线性运算可以表示为：

$$(C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_r) : V^{dr} = \underbrace{V^d \times \cdots \times V^d}_{r} \to V^d$$

满足以下性质：

$$\forall i = 1, 2, \ldots, r$$

$$(C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_r) \cdot C_i = 0$$

并且：

$$(C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_r) \cdot (C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_r) = \det(C_i \cdot C_j)$$

Eckmann（1943）和 Whitehead（1963）解决了实欧几里得空间中连续情况的问题，而 Brown 和 Gray（1967）解决了多线性情况。此外，该解法对任意特征不为 2 的域都适用，并且适用于 $1 \le r \le d$ 的情况。定理（Eckmann、Whitehead 和 Brown-Gray 的结果）表明，只有在以下条件下，“广义向量积”才存在：

(1) d 为偶数，$r = 1$

在每一个偶数维度中，单一因子的向量积存在. 这可以被视为某种“Wick 旋转”.

(2) d 是任意值，$r = d - 1$

在任意维度 d 中，$(d-1)$-重向量积是存在的. 只需取这些 $(d-1)$ 个向量与标准正交基向量 $(e_1, \ldots, e_r)$ 的行列式即可.

(3) $d = 3, 7$，$r = 2$ 在 3 维和 7 维空间中存在 2 重向量积. 正是我们熟知的向量积与刚才所提到的七维向量积.

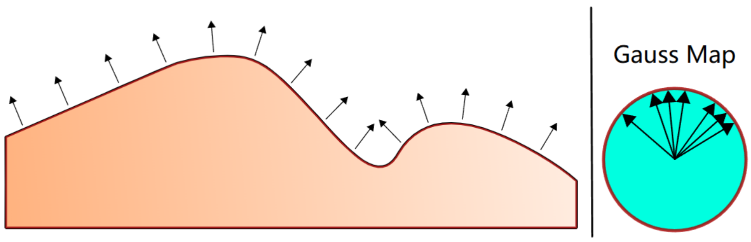
(4) $d = 8$，$r = 3$ 在 8 维空间中存在 3 重向量积.

。 □

题目 2. 将 Gauss 映射推广到 3 维和 4 维空间的曲线上.

解答. 回顾 2 维空间曲线 $\mathbf{r}$ 的 Gauss 映射. 在曲线 $\mathbf{r}$ 的任一点 $\mathbf{r}(s)$，有一个单位法向量 $\mathbf{n}(s)$，将 $\mathbf{n}(s)$ 的起点平移到平面的原点，$\mathbf{n}(s)$ 的终点就落到单位圆周 S^1 上，这样就定义了一个映射

$$\begin{aligned} g : \mathbf{r} &\to S^1 \\ s &\mapsto \mathbf{n}(s) \end{aligned}$$



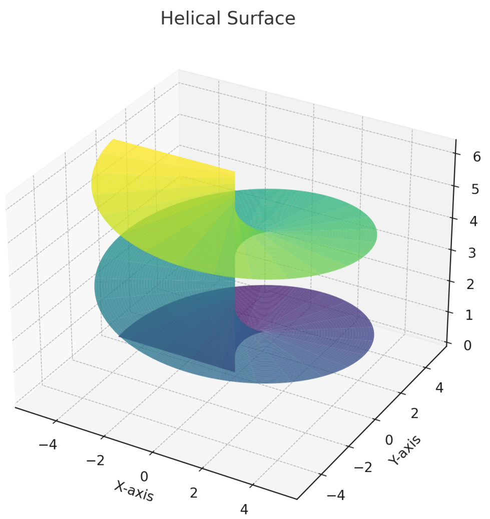
在 3 维空间中，对于曲面 S 上的一条正则曲线，每一点都有确定的法向量. 类似地，将法向量的起点平移到原点，法向量就落到单位球面 S^2 上.

在 4 维甚至更高维的 R^n 中的超曲面中，给出 R^n 中的曲面 S，高斯映射是一个连续映射

$$g : S \to S^{n-1}$$

使得 $g(p)$ 是在点 p 上正交于 S 的单位向量，即曲面 S 在点 p 处的法向量. 从超曲面映射到 R^n 中的单位球面 S^{n-1}. □

题目 3. 证明：正螺旋面 $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$ 是极小曲面；并证明：直纹极小曲面是平面或者正螺旋面.



解答. 直接计算，有

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, b),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}(b\sin v, -b\cos v, u).$$

故

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + b^2.$$

又

$$\mathbf{r}_{uu} = 0, \quad \mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0),$$

故

$$L = 0, \quad M = -\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}}, \quad N = 0.$$

从而，平均曲率

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = 0.$$

由极小曲面定义，知正螺旋面是极小曲面.

下证直纹极小曲面是平面或者正螺旋面. 设极小直纹面 S 的参数表示为 $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{a}(u)+v\mathbf{b}(u)$，则

$$\mathbf{r}_u=\mathbf{a}'(u)+v\mathbf{b}'(u),\quad \mathbf{r}_v=\mathbf{b}(u),\quad \mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v=\mathbf{a}'(u)\wedge\mathbf{b}(u)+v\mathbf{b}'(u)\wedge\mathbf{b}(u).$$

故

$$E=\langle\mathbf{a}',\mathbf{a}'\rangle+2v\langle\mathbf{a}',\mathbf{b}'\rangle+v^2\langle\mathbf{b}',\mathbf{b}'\rangle,\quad F=\langle\mathbf{a}',\mathbf{b}\rangle+v\langle\mathbf{b}',\mathbf{b}\rangle,\quad G=\langle\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle.$$

作参数变换使得 (u,v) 是正交参数，从而 $|\mathbf{b}(u)|=1$，以及 $\langle\mathbf{a}'(u),\mathbf{b}(u)\rangle=0$. 此时 $F=0, G=1$.

由

$$\mathbf{r}_{uu}=\mathbf{a}''+v\mathbf{b}''(u),\quad \mathbf{r}_{uv}=\mathbf{b}'(u),\quad \mathbf{r}_{vv}=0,$$

记 $\Delta:=|\mathbf{r}_u\wedge\mathbf{r}_v|$. 计算得

$$L=\frac{1}{\Delta}\Big[(\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{b})+v\big((\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'')+(\mathbf{a}'',\mathbf{b}',\mathbf{b})\big)+v^2(\mathbf{b}'',\mathbf{b}',\mathbf{b})\Big]$$
$$M=\frac{1}{\Delta}(\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}')\quad N=0$$

曲面 S 是极小的 $\Leftrightarrow H=0$，即

$$0=\Delta(LG-2MF+NE)=(\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{b})+v\big((\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'')+(\mathbf{a}'',\mathbf{b}',\mathbf{b})\big)+v^2(\mathbf{b}'',\mathbf{b}',\mathbf{b}).$$

等式成立当且仅当

$$\begin{cases}(\mathbf{a}'',\mathbf{a}',\mathbf{b})=0\\(\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}'')+(\mathbf{a}'',\mathbf{b}',\mathbf{b})=0\\(\mathbf{b}'',\mathbf{b}',\mathbf{b})=0.\end{cases}\tag{*}$$

由式 (*) 中第三式，知 $\mathbf{b}(u)$ 在某个平面上，由假设 $|\mathbf{b}(u)|=1$ 是一条单位球面曲线. 从而 $\mathbf{b}(u)$ 是一个单位圆.

若 $\mathbf{a}(u)$ 为常向量，则 S 是平面. 现在假设 $\mathbf{a}(u)$ 不为常向量. 可以设 u 是曲线 $\mathbf{a}(u)$ 的弧长参数，它的 Frenet 标架为 $\{\mathbf{a}(u), \mathbf{t}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{B}(u)\}$. 由 (*) 中第一式知

$$0 = (\mathbf{a}'', \mathbf{a}', \mathbf{b}) = (k\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}) = -k\langle \mathbf{B}, \mathbf{b}\rangle$$

若 $k = 0$，则 $\mathbf{a}(u)$ 是直线. 可以设

$$\mathbf{a}(u) = (0, 0, bu).$$

由假设及 $\langle \mathbf{a}', \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle = 0$，即 $\mathbf{t} \perp \mathbf{b}$，故

$$\mathbf{b}(u) = (\cos u, \sin u, 0).$$

从而，曲面 S 的参数表达式为

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u) = (v\cos u, v\sin u, bu).$$

即，曲面 S 为正螺旋面.

若 k 不恒等于 0 则 $\langle \mathbf{B}, \mathbf{b}\rangle = 0$. 由假设 $\langle \mathbf{t}, \mathbf{b}\rangle = 0$，于是 $\mathbf{b} \mathbin{/\!/} \mathbf{n}$. 不妨设 $\mathbf{b} = \mathbf{n}$，由 (*) 中的第二式，有

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'') + (\mathbf{a}'', \mathbf{b}', \mathbf{b}) \\
&= (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \ddot{\mathbf{n}}) + (\dot{\mathbf{t}}, \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{n}) \\
&= \langle \mathbf{B}, -\dot{k}\mathbf{t} - k^2\mathbf{n} + \dot{\tau}\mathbf{B} - \tau^2\mathbf{n}\rangle \\
&= \dot{\tau}
\end{aligned}$$

这表示 τ 是常数.

若 $\tau \equiv 0$，则 $\mathbf{a}(u)$ 是平面曲线，$\mathbf{b}(u)$ 是其主法向量，从而 S 是平面.

若 $\tau \neq 0$，则由 (*) 第三式知

$$0 = (\mathbf{b}'', \mathbf{b}', \mathbf{b}) = (\ddot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{n}) = \dot{k}\tau$$

因此 $\dot{k}=0$，即 k 为常数. 于是 $\mathbf{a}(u)$ 是圆柱螺旋线，可设

$$\mathbf{a}(u)=\left(\frac{k}{k^2+\tau^2}\cos\left(\sqrt{k^2+\tau^2}u\right),\frac{k}{k^2+\tau^2}\sin\left(\sqrt{k^2+\tau^2}u\right),\frac{\tau}{\sqrt{k^2+\tau^2}}u\right),$$

则

$$\mathbf{b}(u)=\mathbf{n}(u)=\left(-\cos\left(\sqrt{k^2+\tau^2}u\right),-\sin\left(\sqrt{k^2+\tau^2}u\right),0\right).$$

故

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v)&=\mathbf{a}(u)+v\mathbf{b}(u)\\&=\left(\left(\frac{k}{k^2+\tau^2}-v\right)\cos\left(\sqrt{k^2+\tau^2}u\right),\left(\frac{k}{k^2+\tau^2}-v\right)\sin\left(\sqrt{k^2+\tau^2}u\right),\frac{\tau}{k^2+\tau^2}u\right).\end{aligned}$$

作参数变换

$$\tilde{v}=\sqrt{k^2+\tau^2}u,\quad \tilde{u}=\frac{k}{k^2+\tau^2}-v,$$

则曲面 S 的参数表达式变为

$$\mathbf{r}(\tilde{u},\tilde{v})=\left(\tilde{u}\cos\tilde{v},\tilde{u}\sin\tilde{v},\frac{\tau}{k^2+\tau^2}\tilde{v}\right).$$

故曲面 S 是正螺旋面。 □

题目 4. 求 $k_n=Lx^2+2Mxy+Ny^2$ 在约束

$$(x,y)\in\{(x,y)|Ex^2+2Fxy+Gy^2=1\}$$

下的最大、最小值.

解答. 利用拉格朗日乘数法，构造拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=Lx^2+2Mxy+Ny^2-\lambda(Ex^2+2Fxy+Gy^2-1).$$

$\mathcal{L}$ 分别对 x, y 和 λ 求偏导，并令偏导数等于 0，得到以下方程：

(i) 对 x 求偏导：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2Lx + 2My - \lambda(2Ex + 2Fy) = 0,$$

即：

$$Lx + My = \lambda(Ex + Fy).$$

(ii) 对 y 求偏导：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2Mx + 2Ny - \lambda(2Fx + 2Gy) = 0,$$

即：

$$Mx + Ny = \lambda(Fx + Gy).$$

(iii) 对 λ 求偏导：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 - 1) = 0,$$

即：

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = 1.$$

改写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

非零解 (x, y) 存在的条件是系数矩阵的行列式为 0：

$$\det \begin{bmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{bmatrix} = 0.$$

展开得

$$(L - \lambda E)(N - \lambda G) - (M - \lambda F)^2 = 0.$$

展开后整理：

$$\lambda^2(EG - F^2) - \lambda(LG + NE - 2MF) + (LN - M^2) = 0. \tag{4}$$

观察得与书中主曲率 k 满足的方程一致，记两个主曲率分别为 k_1, k_2 且 $k_1 \geq k_2$.

求得

$$\begin{aligned}(k_n)_{\max} &= Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 \\ &= (Lx + My)x + (Mx + Ny)y \\ &= k_1(Ex + Fy)x + k_1(Fx + Gy)y \\ &= k_1(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2) = k_1\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}(k_n)_{\min} &= Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 \\ &= (Lx + My)x + (Mx + Ny)y \\ &= k_2(Ex + Fy)x + k_2(Fx + Gy)y \\ &= k_2(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2) = k_2\end{aligned}$$

□

题目 5. 验证

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \Gamma^\xi_{\alpha\beta} b_{\xi\gamma} - \Gamma^\xi_{\alpha\gamma} b_{\xi\beta} = 0$$

和

$$\frac{\partial b^\xi_\beta}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial b^\xi_\gamma}{\partial u^\beta} = -b^\eta_\beta \Gamma^\xi_{\eta\gamma} + b^\eta_\gamma \Gamma^\xi_{\eta\beta}$$

是等价的

解答. 回顾张量运算的性质，有

$$\Gamma_{\xi\alpha\beta} = g_{\gamma\xi}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \quad b^\beta_\alpha = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$$

计算 $g_{\alpha\xi}(\frac{\partial b^\xi_\beta}{\partial u^\gamma}+b^\eta_\beta\Gamma^\xi_{\eta\gamma})$ 会发现

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\xi}\Big(\frac{\partial b^\xi_\beta}{\partial u^\gamma}+b^\eta_\beta\Gamma^\xi_{\eta\gamma}\Big) &= \frac{\partial(b_{\beta\alpha}g^{\alpha\xi})}{\partial u^\gamma}g_{\alpha\xi}+b^\eta_\beta\Gamma\alpha\eta\gamma \\
&= \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}g^{\alpha\xi}g_{\alpha\xi}+\frac{\partial g^{\alpha\xi}}{\partial u^\gamma}b_{\beta\alpha}g_{\alpha\xi}+b^\eta_\beta\Gamma\alpha\eta\gamma \\
&= \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\gamma}b_{\beta\alpha}g^{\alpha\xi}+b^\eta_\beta\Gamma\alpha\eta\gamma \\
&= \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}+b^\xi_\beta\Big(\Gamma_{\alpha\xi\gamma}-\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\gamma}\Big) \\
&= \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}+b^\xi_\beta\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\xi}+\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial g_{\xi\gamma}}{\partial u^\alpha}\Big)-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\Big] \\
&= \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-b^\xi_\beta\Gamma_{\xi\alpha\gamma} \\
&= \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-b_{\beta\eta}g^{\eta\xi}g_{\eta\xi}\Gamma^\eta_{\alpha\gamma} \\
&= \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\Gamma^\xi_{\alpha\gamma}b_{\xi\beta}
\end{aligned}$$

同理，计算得

$$g_{\alpha\xi}\Big(\frac{\partial b^\xi_\gamma}{\partial u^\beta}+b^\eta_\gamma\Gamma^\xi_{\eta\beta}\Big)=\frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}-\Gamma^\xi_{\alpha\beta}b_{\xi\gamma}$$

于是两式是等价的. □

题目 6. 写出 $F\neq 0$ 时，Gauss 曲率的内蕴（只由第一基本形式决定）计算公式.

解答. 当 $F\neq 0$ 时，

假定曲面 S 的第一基本形式为

$$I=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

即

$$I=\Big(\sqrt{E}\,du+\frac{F}{\sqrt{E}}\,dv\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{EG-F^2}{E}}\,dv\Big)^2.$$

设 $g=EG-F^2$, 则

$$\omega_1=\sqrt{E}\,du+\frac{F}{\sqrt{E}}\,dv,\quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{E}}\,dv.$$

由 Gauss 的绝妙定理得

$$K=-\frac{d\omega_{12}}{\omega_1\wedge\omega_2}.$$

计算得

$$\omega_1\wedge\omega_2=\sqrt{g}\,du\wedge dv.$$

设

$$\omega_{12}=a\,\omega_1\wedge\omega_1+b\,\omega_1\wedge\omega_2.$$

由曲面的结构方程

$$\begin{cases} d\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2,\\ d\omega_2=\omega_{21}\wedge\omega_1.\end{cases}$$

由于

$$d\omega_1=d\left(\sqrt{E}\,du+\frac{F}{\sqrt{E}}\,dv\right)=\left[-\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)\right]du\wedge dv,$$

$$d\omega_2=d\left(\sqrt{\frac{g}{E}}\,dv\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{g}{E}}\right)du\wedge dv.$$

得

$$a=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[-\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right)\right],$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{g}{E}}\right).$$

进而

$$d\omega_{12}=d(a\,\omega_1+b\,\omega_2)=d\left[a\sqrt{E}\,du+a\frac{F}{\sqrt{E}}\,dv+b\sqrt{\frac{g}{E}}\,dv\right],$$

$$= \left[-\frac{\partial(a\sqrt{E})}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{F}{\sqrt{E}} + b\sqrt{\frac{g}{E}}\right)\right] du \wedge dv.$$

最后根据 Gauss 的绝妙定理

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2},$$

$$\begin{aligned} K = &- \frac{1}{\sqrt{g}}\Bigg\{ - \frac{\partial}{\partial v}\Bigg[\sqrt{\frac{E}{g}}\Big(- \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\big(\frac{F}{\sqrt{E}}\big)\Big)\Bigg] \\ &+ \frac{\partial}{\partial u}\Bigg[\frac{F}{\sqrt{Eg}}\Big(- \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\big(\frac{F}{\sqrt{E}}\big)\Big)\Bigg] \\ &+ \frac{\partial}{\partial u}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\Big(\sqrt{\frac{g}{E}}\Big)\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned}$$

□

题目 7. 求解二维非线性方程

$$-\Delta u = e^{2u}$$

解答. 曲面等温参数 (u, v) 下，曲面的第一基本形式为

$$I = \lambda^2(u, v)(du\,du + dv\,dv), \quad \lambda \neq 0.$$

根据 Gauss 的绝妙定理可以求得

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\ln\lambda.$$

令 $u = \ln\lambda$，上式等价于

$$-\Delta u = Ke^{2u}$$

取 $K = 1$. 考虑球极投影参数表示

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \left(2\frac{a^2 u}{a^2 + u^2 + v^2}, 2\frac{a^2 v}{a^2 + u^2 + v^2}, a\frac{u^2 + v^2 - a^2}{a^2 + u^2 + v^2}\right)$$

特别地，$a=1$ 时，$K=1$. 又

$$I(u,v)=\frac{4a^4}{(a^2+u^2+v^2)^2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$$

可以求得

$$\lambda=\frac{2}{1+u^2+v^2} \quad u=\ln\lambda=\ln\frac{2}{1+u^2+v^2}$$

□

题目 8. 给出曲面 S 上的任意一条曲线 C 的测地曲率 k_g 一般的计算公式.

解答. 曲面 $S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1,u^2)$ 上任意一条曲线 $C:u^1=u^1(s),u^2=u^2(s)$ 作为空间 E^3 中的曲线的参数方程是

$$\mathbf{r}(s)=\mathbf{r}\big(u^1(s),u^2(s)\big)$$

其中 s 是弧长参数。所以

$$\mathbf{e_1}(s)=\mathbf{t}(s)=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s}=\mathbf{r}_\alpha\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{e_1}(s)}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(s)}{\mathrm{d}s^2}&=\mathbf{r}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}+\mathbf{r}_\alpha\frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}\\&=\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)\mathbf{r}_\gamma+b_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\mathbf{n}.\end{aligned}$$

因此

$$k_g=\left\langle\frac{\mathrm{d}\mathbf{e_1}(s)}{\mathrm{d}s},\mathbf{e_2}(s)\right\rangle=\left\langle\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\gamma}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)r_\gamma,\mathbf{e_2}\right\rangle.$$

由于

$$\mathbf{e_2}=\mathbf{n}\wedge\mathbf{e_1}=\mathbf{n}\wedge\left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}_1+\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}_2\right),$$

故

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{e_2} \rangle &= \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}, \mathbf{r}_2) = -\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2| \\
\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{e_2} \rangle &= \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}(\mathbf{r}_2, \mathbf{n}\mathbf{r}_1) = \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
k_g = |\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2| & \left(\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s} \left(\frac{\mathrm{d}^2 u^2}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^2_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s} \left(\frac{\mathrm{d}^2 u^1}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^1_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} \right) \right) \\
& = \sqrt{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2} \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}^2 u^1}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^1_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} \\ \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}^2 u^2}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^2_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

□