

兰州大学 2024 — 2025 学年第 一 学期
期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 泛函分析 任课教师: _____

学院: _____ 专业: 数学萃英班 年级: 2022

姓名: _____ 校园卡号: _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									
阅卷教师									

一. (20) 给定Banach空间 X 和 X 中的有界闭凸子集 M . 如果算子 $A: M \rightarrow M$ 是紧的, 证明 A 在 M 中存在不动点.

二. (20) 证明任意Hilbert空间都是自反的.

三. (15) 给定Banach空间 X 及 Y . 如果 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, 证明 A 是满算子当且仅当 A 是开算子.

四. (15) 给定Hilbert空间 X 及 $A \in \mathcal{L}(X, X)$. 证明 A 存在唯一的伴随算子 A^* 且 $A^* \in \mathcal{L}(X, X)$.

五. (20) 给定Hilbert空间 X 及 X 中的有界闭凸子集 M . 如果泛函 $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是弱下半连续的, 则变分问题

$$F(u) = \min!$$

在 M 中存在解.

六. (10) 给定线性赋范空间 X . 证明对任意的 $u_0 \in X, u_0 \neq 0$, 存在 $f \in X^*$ 使得 $\|f\| = 1$ 及

$$f(u_0) = \|u_0\|.$$