基于 Brouwer 拓扑度及 Lojasiewicz-Simon 梯度法的纳什均衡点存在唯一性及稳定性的研究

萃英学院　　2022 级　　王一鑫

2023 年 12 月 22 日

1　问题引入

考虑如下系统

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{N} m_k(y_k - y_i) + \sigma(\theta_i - y_i^p)y_i \tag{1}$$

该标量系统表示一个意见动态博弈模型，在给定一组不同的确信度值 θ_i 的情况下，意见 y_i 变化以达到最佳一致。这样的一致性 y^* 可看作是具有 N 个玩家的非合作博弈中的纳什平衡，旨在最大化每名玩家的相应收益

$$p_i(y) = \sigma(\frac{1}{2}\theta_i y_i^2 - \frac{1}{p+2}y_i^{p+2}) - \frac{M}{2}(\bar{y} - y_i)^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\sum_j m_j y_j$$

试证明：系统存在唯一的稳定纳什平衡点 y^*，并且它是该系统的全局吸引子，即如下定理.

定理 1.1

对于任意正参数集 $(\theta, m, \sigma) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+$，系统(1)存在唯一的稳定纳什平衡点 $y^* \in \mathbb{R}_+^N$. 此外，对于任意正解 $y(t) \in \mathbb{R}_+^N$，当 $t \to \infty$ 时，它都会收敛到 y^*.

2　纳什均衡 (Nash equilibrium)

在本节中，介绍 John Nash 提出的非合作博弈中纳什均衡 [2] 的相关概念.

一场博弈由这几个要素构成：

- **玩家 (Players)**：博弈的参与者

- **策略 (Strategy)**：博弈玩家各自的操作
- **收益 (Payoff)**：博弈玩家的收益，一般用矩阵来表示，在连续的时候也会写成函数。
- **信息 (Information)**：博弈玩家知道的信息
- **理性 (Rationality)**：博弈玩家是理性的，在竞争的情况下使自己的收益最大化

博弈论方法的本质——相互依存性：每一方的收益不仅依赖于自己的策略，同时也依赖其他参与方的策略.

博弈论研究的目标——均衡：博弈中的各个玩家通过改变自己的策略造成收益的变化。由于玩家是理性的，他们会调整策略使自己的收益最大。在这样的情况下，一个“稳定”的策略选择是值得研究的。各个玩家选择了各自的策略之后，没有动机去改变当前的策略，就形成了稳定的状态.

下面我们给出上述内容的数学定义.

定义 2.1: 有限博弈

一个由 n 人构成的博弈是一个由 n 个玩家组成的有限集，每个玩家都有一个相关的**纯策略集**.

我们以《史记 • 孙子吴起列传》中田忌赛马的故事为例理解概念。田忌和齐威王是这场有限博弈中的两名玩家，他们分别以特定顺序派出上、中、下等马为各自纯策略集。

定义 2.2: 混合策略

纯策略集中元素的线性组合为混合策略，记第 i 名玩家的混合策略为 S_i. 若系数分别为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1 \quad c_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

假设田忌和齐威王进行多次比赛，他们分别以特定比例调整不同顺序策略使用，使得自己获得最大收益，这就是他们的混合策略。

定义 2.3: 收益函数

函数 p_i 将第 i 名玩家在 n 人选定各自策略 $S_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 下的收益情况映射到一个实数，表示该情况下的收益. 称该函数为一组策略下的收益函数，即

$$p_i : \quad S_1 \times S_2 \times S_3 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$$

即有一个田忌和齐威王各自有相应的收益函数，用来计算他们在确定策略时各自的收益大小.

定义 2.4: 博弈

一个由 n 人组成的有限博弈，第 i 个人的策略为 S_i，收益函数为 p_i，则一场博弈可以表示为

$$G = \{S_1, \cdots, S_n, p_1, \cdots, p_n\}$$

定义 2.5: 纳什均衡 (Nash equilibrium)

在博弈 $G = \{S_1, \cdots, S_n, p_1, \cdots, p_n\}$ 中，如果由各个博弈方的各一个策略组成的某个策略组合 $\{S_1^*, \cdots, S_n^*\}$ 中，任一博弈方 i 的策略 S_i^* 都是对其余博弈方策略的组合 $\{S_1^*, \cdots, S_{i-1}^*, S_{i+1}^*, \cdots, S_n^*\}$ 的最佳对策，即

$$\{S_1^*, \cdots, S_{i-1}^*, S_i^*, S_{i+1}^*, \cdots, S_n^*\} \geq p_i(S_1^*, \cdots, S_{i-1}^*, S_{ij}^*, S_{i+1}, \cdots, S_n^*) \quad \forall S_{ij} \in S_i$$

则称 $\{S_1^*, \cdots, S_n^*\}$ 为 G 的一个**纳什均衡**.

纳什均衡在现实中有很多例子，例如**田忌赛马**中，计算得出田忌和齐威王各以 $\frac{1}{6}$ 的概率安排马出场的顺序为一个纳什均衡；**囚徒困境**中两人均选择揭发对方为一个纳什均衡；美苏冷战时期，罗素提出的**胆小鬼博弈**中，一方前进一方后退是一个纳什均衡.

3 定理证明

有了以上铺垫，下面我们回到原问题。

在一阶常微分方程系统

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{N} m_k(y_k - y_i) + \sigma(\theta_i - y_i^p)y_i$$

中，y_i 代表意见，θ_i 代表信念，后者不会随着时间推移而改变，而意见在协调力量的推动下达成共识，长时间的变化有望导致意见达成一致，即系统的稳定状态

$$\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k - y_i) + \sigma(\theta_i - y_i^p)y_i = 0 \tag{2}$$

对于该式的解可被视作意见博弈下的纳什均衡，即每个个体都没有一个转向其他意见而获利的方案，可以用收益函数表示为

$$p_i(\mathbf{y}^*) = \max_{r^p \in [\min \theta_k, \max \theta_k]} p_i(y_1^*, \cdots, y_{i-1}^*, r, y_{i+1}^*, \cdots, y_N^*) \qquad \forall i = 1, \cdots .N$$

我们先讨论一种最简单的情形，即所有信念达成共识时

$$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_N \tag{3}$$

此时显然 $y_i = \theta_i$ 是纳什均衡点。然而在一般情况下，纳什均衡点的存在性并非显然，下面我们将证明一般情况下的定理，即

定理 3.1

对于任意正参数集 $(\theta, m, \sigma) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+$，系统 1存在唯一的稳定纳什平衡点 $y^* \in \mathbb{R}_+^N$. 此外，对于任意正解 $y(t) \in \mathbb{R}_+^N$，当 $t \to \infty$ 时，它都会收敛到 y^*.

这个定理的证明将分为以下两步：

- 纳什均衡存在的唯一性与稳定性
- 任意正解都会收敛到纳什均衡点

3.1 纳什均衡的唯一性与稳定性

我们只需求极值点的值，就可以对任何均衡点的位置进行粗略的先验估计. 我们用 y_+ 表示最大的 y_i，θ_+ 表示相应的有相同指数的 θ_i，于是有

$$y_+^p \leq \theta_+$$

类似地，

$$y_-^p \geq \theta_-$$

即对 $\forall i = 1, 2, \cdots, N$，解都落在相应的区间

$$\min \theta_k \leq y_i^p \leq \max \theta_k$$

则对于信念达成共识的情况，我们得到唯一解 $y_i = \theta^{1/p}$.
粗略的先验估计是不够的，我们期望得到更精确的结果，注意到

$$-\sum_{k=1}^{N} m_k y_i + \sigma(\theta_i - y_i^p) y_i = -\sum_{k=1}^{N} m_k y_k \leq 0 \tag{4}$$

即

$$(\sigma\theta_i - M) y_i \leq \sigma y_i^{p+1}$$

这里 $M := \sum_{i=1}^{N} m_i$，得到

$$y_i^p \geq \theta_i - \frac{M}{\sigma} \tag{5}$$

不失一般性，我们可以假设 θ 是单调递增的，即

$$0 < \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_N$$

我们有如下引理

引理 3.2

对于 $\theta_1 \leq y_1^p \leq \cdots \leq y_N^p \leq \theta_N$，以下估计对所有的 i 均成立

$$y_i^p \geq \theta_i + \frac{m_{\geq i} - M}{\sigma} \qquad m_{\geq i} := m_i + \cdots + m_N$$

$\theta_i = \theta_j\ (i \neq j)$ 当且仅当 $y_i = y_j$

证明. 设 $i > j$，分别有

$$\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k - y_i) + \sigma(\theta_i - y_i^p)y_i = 0$$

和

$$\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k - y_j) + \sigma(\theta_j - y_j^p)y_j = 0$$

两式相减，整理得

$$(\sigma\theta_j - M)(y_i - y_j) + \sigma(\theta_i - \theta_j) = \sigma(y_i^{p+1} - y_j^{p+1}) \tag{6}$$

由 Lagrange 中值定理，存在 y_i 和 y_j 之间的 ξ，使得

$$(\sigma\theta_j - M)(y_i - y_j) + \sigma(\theta_i - \theta_j) = \sigma(p+1)(y_i - y_j)\xi^p$$

我们断言 $y_i \geq y_j$. 事实上，若 $y_i < y_j$，两边同时除以 $y_i - y_j$ 可得

$$(\sigma\theta_j - M) \geq \sigma(p+1)\xi^p$$

显然 $\sigma\theta_j - M > 0$，由(5)可得

$$(\sigma\theta_j - M) \geq (p+1)(\sigma\theta_j - M)$$

矛盾！故 $y_i \geq y_j$

如果 $y_i = y_j$，由(6)显然有 $\theta_i = \theta_j$. 如果 $\theta_i = \theta_j$ 时，$y_i \neq y_j$，会得到

$$(\sigma\theta_j - M) = \sigma(p+1)\xi^p$$

矛盾！

由于 $y_i \geq y_j$，对于(4)中 $\sum_{k=1}^N m_k y_k$ 一项有如下估计

$$\sum_{k=1}^N m_k y_k \geq \sum_{k=i}^N m_k y_k \geq \sum_{k=i}^N m_k y_i = m_{\geq i} y_i$$

于是有

$$m_{\geq i} y_i + (\sigma\theta_i - M) y_i \leq \sigma y_i^{p+1}$$

即

$$y_i^p \geq \theta_i + \frac{m_{\geq i} - M}{\sigma}$$

$\square$

下面我们证明均衡点的存在唯一性

命题 3.3

对于任意正参数集 $(\theta, m, \sigma) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+$，(2)存在唯一的正数解 $\mathbf{y}^*$，它是系统(1)的局部指数稳定均衡解. 映射 $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*(\theta, m, \sigma) : \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^N$ 是无限光滑的.

证明. 对于一个给定的正参数集 $(\theta, m, \sigma) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+$，我们考虑如下映射 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\theta,m,\sigma} : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}^N$，定义为

$$\mathbb{F}(y) = \left\{ M y_i - \sum_{k=1}^N m_k y_k - \sigma(\theta_i - y_i^p) y_i \right\}_{i=1}^N$$

我们断言(2)的任何解都不是该映射的临界解，并且有正的雅各比值，事实上，我们可以计算雅各比矩阵

$$D_{\mathbf{y}}\mathbb{F}(\mathbf{y}) = diag\{d_i\}_{i=1}^N - \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_N \end{pmatrix}$$

其中

$$d_i = M + \sigma(p+1) y_i^p - \sigma\theta_i$$

计算雅各比行列式

$$\det D_{\mathbf{y}}\mathbb{F}_\theta(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} d_1 - m_1 & -m_2 & \cdots & -m_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -m_1 & -m_2 & \cdots & d_N - m_N \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & -d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -m_1 & -m_2 & \cdots & d_N - m_N \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} d_i - \sum_{k=1}^{N} m_k \prod_{i \neq k} d_i$$

$$= \prod_{i=1}^{N} d_i \times \big(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{d_k}\big)$$

下面我们来确定该值的符号，首先证明 $\forall i, d_i > 0$. 采用反证法，假设对于某个 i，有 $d_i \leq 0$，即

$$(p+1)y_i^p \leq \theta_i - \frac{M}{\sigma}$$

于是 $\theta_i - \dfrac{M}{\sigma} \geq 0$，进一步，由(3.2)，我们得到

$$(p+1)\Big(\theta_i + \frac{m_{\geq i} - M}{\sigma}\Big) \leq \theta_i - \frac{M}{\sigma}$$

移项有

$$p\Big(\theta_i - \frac{M}{\sigma}\Big) \leq -\frac{m_{\geq i}}{\sigma}(p+1) < 0$$

这与 $\theta_i - \dfrac{M}{\sigma} \geq 0$ 矛盾！

因此，雅各比行列式的值由 $\big(1 - \sum_{k=1}^{N} \dfrac{m_k}{d_k}\big)$ 确定，为表示方便，令 $\dfrac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i y_i = \bar{y}$，由(2)

$$M\bar{y} - My_i + \sigma\theta_i y_i - \sigma y_i^{p+1} = 0$$

带入 d_i 的表达式，可得

$$\frac{1}{d_i} = \frac{y_i}{M\bar{y} + \sigma p y_i^p}$$

进而

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{d_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i y_i}{M\bar{y} + \sigma p y_i^p} < \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i y_i}{M\bar{y}} = 1$$

我们得到 $\big(1 - \sum_{k=1}^{N} \dfrac{m_k}{d_k}\big) > 0$，即雅各比行列式的值为正.

类似地，注意到左上角的 n 阶子式 M_n,$n<N$ 有类似的表达

$$M_n=\prod_{i=1}^{n}d_i\times\big(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{d_k}\big)$$

于是它以相同方式维持稳定性，这种情况下容易发现

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{d_k}<\frac{1}{M\bar{y}}\sum_{k=1}^{n}m_ky_k<1$$

对唯一性的证明要用到布劳威尔拓扑度 (Brouwer topological degree) 的结论 [3]，研究映射 $\mathbb{F}$ 在零点的拓扑度. 为使得定义合理，我们将限制 $\mathbb{F}$ 在一个扇形区域 $\mathcal{W}$ 中，在此之前先表示内积与范数

$$\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle=\sum_{i=1}^{N}m_iy_iz_i\qquad\|\mathbf{y}\|_p^p=\sum_{i=1}^{N}m_iy_i^p$$

定义扇形区域

$$\mathcal{W}=\{\mathbf{y}:\mathbf{y}_i\geq 0,\ \varepsilon\leq\|\mathbf{y}\|_\infty,\ \|\mathbf{y}\|_{p+1}\leq R\}$$

这里的 $R>0$ 充分大，ε 是任意小的数.

首先我们验证边界的像不包含原点，即 $0\notin\mathbb{F}(\partial\mathcal{W})$. 按照定义可分别计算三个边界处的值：

(1) $\mathbf{y}_i=0$，此时 $\mathbb{F}^i=M\bar{y}>0$.

(2) $\|\mathbf{y}\|_{p+1}=R$，计算

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbb{F}^i(\mathbf{y})&=\sum_{i=1}^{N}[My_i-\sum_{k=1}^{N}m_ky_k+\sigma(y_i^p-\theta_i)y_i]\\&=-\sigma\sum_{i=1}^{N}m_i\theta_i+\sigma\sum_{i=1}^{N}m_iy_i^{p+1}\\&=-\sigma\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{y}\rangle+\sigma\|\mathbf{y}\|_{p+1}^{p+1}\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}\sigma\|\mathbf{y}\|_{p+1}^{p+1}-\sigma\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{y}\rangle&\geq\sigma\|\mathbf{y}\|_{p+1}^{p+1}-\sigma\|\mathbf{y}\|_{p+1}\|\boldsymbol{\theta}\|_{\frac{p+1}{p}}\\&=\sigma\|\mathbf{y}\|_{p+1}(\|\mathbf{y}\|_{p+1}^p-\|\boldsymbol{\theta}\|_{p+1}^p)\\&>0\end{aligned}$$

这里的 R 充分大.

(3) $\|\mathbf{y}\|_\infty = \varepsilon$ 有

$$\begin{aligned} -\sigma\langle\boldsymbol{\theta},\mathbf{y}\rangle + \sigma\|\mathbf{y}\|_{p+1}^{p+1} &\le -\sigma\theta_-\|\mathbf{y}\|_1 + \sigma \max_{1\le i\le N} y_i\|\mathbf{y}\|_1 \\ &= -\sigma\theta_-\|\mathbf{y}\|_1 + \sigma\varepsilon^p\|\mathbf{y}\|_1 \\ &< 0 \end{aligned}$$

这里的 ε 充分小.

于是，我们可以使用 M.Nagumo 提出的近似方案 [4] 计算布劳威尔拓扑度，即对于一个连续映射 $\mathbb{F}$ 与有界开集 $\mathcal{W}$，可以用每个 $y \notin \mathbb{F}(\partial\mathcal{W})$ 计算，通过公式

$$\deg\{\mathbb{F},\mathcal{W},\mathbf{0}\} = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{F}^{-1}(\mathbf{0})} \operatorname{sgn}(\det D_{\mathbf{y}}\mathbb{F}(\mathbf{y}))$$

我们已经计算得出了所有的雅可比值为正，接下来只需说明 $\deg\{\mathbb{F},\mathcal{W},\mathbf{0}\} = 1$ 就可以得到唯一性.

在(3)的条件下，我们曾得出唯一的一个纳什均衡点. 记(3)时的情况为 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\theta,\cdots\theta)$，固定任意有这种形式的 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$，考虑映射的同伦 (homotopy):

$$\mathbb{F}_\tau = \mathbb{F}_{\tau\boldsymbol{\theta}+(1-\tau)\hat{\boldsymbol{\theta}},\mathbf{m},\sigma} \quad 0\le\tau\le 1$$

我们已经证明了 $\forall\tau$，$\mathbf{0} \notin \mathbb{F}_\tau(\partial\mathcal{W})$，于是通过同伦变换下拓扑性质的不变性，得到

$$\deg\{\mathbb{F}_{\boldsymbol{\theta},\mathbf{m},\sigma},\mathcal{W},\mathbf{0}\} = \deg\{\mathbb{F}_{\hat{\boldsymbol{\theta}},\mathbf{m},\sigma},\mathcal{W},\mathbf{0}\} = 1$$

唯一性得证.

关于 $(\boldsymbol{\theta},\mathbf{m},\sigma)$ 的函数 $\mathbf{y}^*$ 的光滑性，由于雅各比行列式是非退化的，由隐函数定理，可根据 $\mathbb{F}$ 的无限光滑性推出 $\mathbf{y}^*$ 的光滑性，命题得证. □

3.2 梯度结构以及向纳什均衡的收敛

对系统增加一个扰动 $E_i(t)$ 得到

$$\dot{y}_i = \sum_{k=1}^{N} m_k(y_k - y_i) + \sigma(\theta_i - y_i^p)y_i + E_i(t) \tag{7}$$

如果初始条件在 $\mathbf{y}^*$ 的一个小邻域内，且 $E(t)$ 是很小的，显然可以应用(3.3). 但对于一般情况下的解，我们需要用到(7)的隐式梯度结构.

首先，我们建立有界性，注意到

$$\dot{y}_i=\sum_{k=1}^{N}m_k(y_k-y_i)+\sigma(\theta_i-y_i^p)y_i+E_i(t)\le\sum_{k=1}^{N}m_ky_k+\sigma(\theta_i-y_i^p)y_i+E_i(t)$$

有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{y}\|_2^2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}y_i^2&=\sum_{i=1}^{N}2m_iy_i\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}\\&\le\sum_{i=1}^{N}2m_iy_i\left[\sum_{k=1}^{N}m_ky_k+\sigma(\theta_i-y_i^p)y_i+E_i(t)\right]\\&\le 2\sum_{i=1}^{N}\sigma m_i(\theta_iy_i^2-y_i^{p+2})+m_iy_iE_i(t)+m_iy_i\sum_{k=1}^{N}m_ky_k\\&\le 2\sigma\theta^+\|\mathbf{y}\|_2^2-2\sigma\|\mathbf{y}\|_{p+2}^{p+2}+2E^{'}(t)+2\|\mathbf{y}\|_2^2\\&\le 2\|\mathbf{y}\|_2^2(\sigma\theta^++1-\sigma\|\mathbf{y}\|_2^p)+E(t)\end{aligned}$$

如果在某些时刻点有 $\|\mathbf{y}\|_2^p>2(\theta^++\frac{1}{\sigma})$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{y}\|_2^2\le-2(\sigma\theta^++1)\|\mathbf{y}\|_2^2+E(t)\le-c_0+E(t)$$

因此，若从某时间 T 开始，当 $E(t)<\frac{c_0}{2}$，$t>T$，这样的估计将给出一个递减的结果，由标准最大值原理便证明了结论.

为了能更好的理解系统解的长期动态过程，我们重新调整该系统，将其转换为梯度流. 事实上，当所有质量相等时，即 $m_i=\frac{1}{N}$，这样的结果是显然的，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{y}=-\nabla\Phi(\mathbf{y})+\mathbf{E}(t)\tag{8}$$

这里的 $\Phi(\mathbf{y})$ 为

$$\Phi(\mathbf{y})=-\frac{1}{2N}(y_1+\cdots+y_N)^2-\frac{1}{2}\sum_i(\sigma\theta_i-1)y_i^2+\frac{\sigma}{p+2}\sum_i y_i^{p+2}$$

对于一般的情况，我们引入新的变量

$$z_i=\sqrt{m_i}y_i$$

系统可以化为下面的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z_i=\sum_j\sqrt{m_im_j}z_j-Mz_i+\frac{\sigma}{m_i^{\frac{p}{2}}}(m_i^{\frac{p}{2}}\theta_i-z_i^p)z_i+E_i(t)$$

与此同时，$\Phi(\mathbf{z})$ 也随之改变

$$\Phi(\mathbf{z})=-\frac{1}{2}\left(\sum_j\sqrt{m_j}z_j\right)^2-\frac{1}{2}\sum_j(\sigma\theta_j-M)z_j^2+\frac{\sigma}{p+2}\sum_j\frac{z_j^{p+2}}{m_j^{\frac{p}{2}}}$$

原始的系统现在转换为扰动梯度流

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{z}=-\nabla\Phi(\mathbf{z})+\mathbf{E}(t) \tag{9}$$

注意到我们在(3.3)中的论述以及(9)解的有界性均可以直接由旧系统直接转化为新系统，然而新系统中破坏了原有系统的结构，但我们下面将说明这样的结构不再需要.

我们的目标转为证明(9)中的解收敛到唯一的纳什均衡点 $\mathbf{z}^*$，$z_i^*=\sqrt{m_i}y_i^*$，证明基于 Lojasiewicz 梯度不等式.

定理 3.4: Lojasiewicz 梯度不等式 [5]

Φ 是一个邻域 U 中的实解析函数. 若对 $\forall\mathbf{z}_0\in U$，都存在常数 $c>0$ 以及 $\delta\in(0,1]$ 和 $\mu\in[\frac{1}{2},1]$，使得

$$\|\nabla\Phi(\mathbf{z})\|\geq c\mid\Phi(\mathbf{z})-\Phi(\mathbf{z}_0)\mid^{\mu}\qquad\forall\mathbf{z}\in U,\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_0\|\leq\delta$$

前文论述中选择的 Φ 在正向扇形区域中是实解析的，于是这个不等式可以在此运用.

于是，我们考虑(9)的一个正解 $\mathbf{z}\in\mathbb{R}_+^N$. 既然每个解都是有界的，于是 $\mathbf{z}(t)$ 有一个聚点 $\mathbf{z}_0$，$\mathbf{z}_0\in\mathbb{R}_+^N$. 事实上，根据原来系统的扇形最大原则，相应的 $\mathbf{y}$ 解将保持在一个更小的不与坐标平面相交的扇形 $\Sigma\subset\mathbb{R}_+^N$，经过变换的 $\mathbf{z}$ 自然也在同一个扇形中，由(3.3)的证明不难发现 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$ 均不能靠近 $\mathbf{0}$，因此 $\mathbf{z}_0\in\Sigma\backslash\mathbf{0}$.

让我们考虑一个递增的时间序列 $t_n:n\geq1$，使得 $\mathbf{z}(t_n)\to\mathbf{z}_0$，我们要证明 $\mathbf{z}(t)$ 最终进入并停留在 $B_r(\mathbf{z}_0):=\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N:\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_0\|<r\}$，这样的 r 任意小，便有 $\mathbf{z}(t)\to\mathbf{z}_0$ 中. 除此以外，我们还将进一步证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{z}$ 沿着某些时间序列趋于 0. 这将推导出 $\nabla\Phi(\mathbf{z}_0)=0$，从而 $\mathbf{z}_0=\mathbf{z}^*$.

这个证明通过建立对聚点 $\mathbf{z}_0$ 附近 $\mathbf{z}(t)$ 轨道长度的控制. 我们继续对弧长函数进行估计，这是 Simon 结果 [6] 的局部版本.

定义

$$H(t):=\Phi(\mathbf{z}(t))+\frac{3}{4}\int_t^{\infty}\|\mathbf{E}(s)\|^2\,\mathrm{d}s$$

引理 3.5

只要 $\mathbf{z}(t) \in B_\delta(\mathbf{z}_0)$，对于 $t' \le t \le t''$，有

$$\int_{t'}^{t''} \|\dot{\mathbf{z}}(s)\| \,\mathrm{d}s \le 4 \int_{H(t'')}^{H(t')} \frac{1}{c \mid \xi - \Phi(\mathbf{z}_0) \mid^\mu} \,\mathrm{d}\xi + \int_{t'}^{t''} \tilde{E}(s) \,\mathrm{d}s$$

这里的 $\tilde{E}$ 是一个指数衰减量.

证明. 我们有

$$-\dot{H}(t) = -\langle \nabla\Phi(\mathbf{z}(t)), \dot{\mathbf{z}}(t) \rangle + \frac{3}{4}\|\mathbf{E}(t)\|^2 \ge \frac{1}{4}\|\nabla\Phi(\mathbf{z}(t))\|\|\dot{\mathbf{z}}(t)\| \tag{10}$$

所以，函数 $H(\cdot)$ 是不增的. 为了进一步证明，我们需要再构造另外两个辅助函数

$$\Psi(x) := \int_0^x \frac{1}{\psi(\xi)} \,\mathrm{d}\xi$$

这里的 $\psi(\xi)$ 为

$$\psi(\xi) := c \mid \xi - \Phi(\mathbf{z}_0) \mid^\mu$$

这里的 $\mu \in (0, 1)$，由函数的凸性和三角不等式，得到

$$\begin{aligned} \psi(H(t)) &= c \mid \big(\Phi(\mathbf{z}(t)) - \Phi(\mathbf{z}_0)\big) + \frac{3}{4}\int_t^\infty \|\mathbf{E}(s)\|^2 \,\mathrm{d}s \mid^\mu \\ &\le c \mid \Phi(\mathbf{z}(t)) - \Phi(\mathbf{z}_0) \mid^\mu + c\Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty \|\mathbf{E}(s)\|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^\mu \end{aligned} \tag{11}$$

计算微分有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(H(t)) = \dot{\Psi}(H(t))\dot{H}(t) = \frac{\dot{H}(t)}{\psi(H(t))}$$

结合(10)和(11)有

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(H(t)) \ge \frac{1}{4c} \cdot \frac{\|\nabla\Phi(\mathbf{z}(t))\|\|\dot{\mathbf{z}}(t)\|}{\mid \Phi(\mathbf{z}(t)) - \Phi(\mathbf{z}_0) \mid^\mu + \Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty \|\mathbf{E}(s)\|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^\mu}$$

因此，由 Lojasiewicz 梯度不等式(3.4)我们得到

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(H(t)) \ge \frac{1}{4} \cdot \frac{\|\nabla\Phi(\mathbf{z}(t))\|\|\dot{\mathbf{z}}(t)\|}{\|\nabla\Phi(\mathbf{z})\| + c\Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty \|\mathbf{E}(s)\|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^\mu} \quad \forall t \in (t', t'')$$

于是，对 $\forall t \in (t', t'')$，有

$$-4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(H(t)) \ge \|\dot{\mathbf{z}}(t)\| - c\Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty \|\mathbf{E}(s)\|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^\mu \frac{\|\dot{\mathbf{z}}(t)\|}{\|\nabla\Phi(\mathbf{z})\| + c\Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty \|\mathbf{E}(s)\|^2 \,\mathrm{d}s\Big)^\mu} \tag{12}$$

为了估计右侧第二项的值，利用(9)

$$\frac{\|\dot{\mathbf{z}}(t)\|}{\|\nabla\Phi(\mathbf{z})\|+c\Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty\|\mathbf{E}(s)\|^2\,\mathrm{d}s\Big)^\mu}=\frac{\|-\nabla\Phi(\mathbf{z})+\mathbf{E}(t)\|}{\|\nabla\Phi(\mathbf{z})\|+c\Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty\|\mathbf{E}(s)\|^2\,\mathrm{d}s\Big)^\mu}$$
$$\leq 1+\frac{\|\mathbf{E}(t)\|}{c\Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty\|\mathbf{E}(s)\|^2\,\mathrm{d}s\Big)^\mu} \tag{13}$$

结合(12)和(13)，得到

$$-4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(H(t))\geq\|\dot{\mathbf{z}}(t)\|-c\Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty\|\mathbf{E}(s)\|^2\,\mathrm{d}s\Big)^\mu-\|\mathbf{E}(t)\|\quad\forall t\in(t',t'')$$

为表示方便，定义指数衰减量

$$\tilde{E}(t)\coloneqq c\Big(\frac{3}{4}\int_t^\infty\|\mathbf{E}(s)\|^2\,\mathrm{d}s\Big)^\mu+\|\mathbf{E}(t)\|$$

进而

$$\|\dot{\mathbf{z}}(t)\|\leq-4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(H(t))+\tilde{E}(t)\quad\forall t\in(t',t'') \tag{14}$$

对(14)两边从 t' 到 t'' 积分，即

$$\int_{t'}^{t''}\|\dot{\mathbf{z}}(s)\|\,\mathrm{d}s\leq 4\int_{H(t'')}^{H(t')}\frac{1}{c\mid\xi-\Phi(\mathbf{z}_0)\mid^\mu}\,\mathrm{d}\xi+\int_{t'}^{t''}\tilde{E}(s)\,\mathrm{d}s$$

□

最后，我们对收敛性的证明做如下说明. 固定任意一个 $r<\delta$，遥想一个时间 $t_n\gg 1$，使得

$$\mathbf{z}(t_n)\in B_{\frac{r}{3}}(\mathbf{z}_0)\qquad 4\int_{\Phi(\mathbf{z}_0)}^{H(t_n)}\frac{1}{c\mid\xi-\Phi(\mathbf{z}_0)\mid^\mu}\,\mathrm{d}\xi<\frac{r}{3}\qquad\int_{t_n}^\infty\tilde{E}(s)\,\mathrm{d}s<\frac{r}{3}$$

我们证明对于所有 $t>t_n$ 的轨迹都落在 $B_r(\mathbf{z}_0)$ 中. 若不然，令 $t_n+\tilde{t},\tilde{t}>0$ 是使得 $\|\mathbf{z}(t_n+\tilde{t})-\mathbf{z}_0\|=r$ 成立的最小值，则对于 $\forall t\in(t_n,t_n+\tilde{t})$，$\mathbf{z}(t)$ 都落在 $B_r(\mathbf{z}_0)$，运用(3.5)，取 $t'=t_n$，$t''=t_n+\tilde{t}$，可得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}(t_n+\tilde{t})-\mathbf{z}_0\|&\leq\|\mathbf{z}(t_n+\tilde{t})-\mathbf{z}(t_n)\|+\|\mathbf{z}(t_n)-\mathbf{z}_0\|\\&\leq\int_{t_n}^{t_n+\tilde{t}}\|\dot{\mathbf{z}}(s)\|\,\mathrm{d}s+\frac{r}{3}\\&\leq 4\int_{H(t_n+\tilde{t})}^{H(t_n)}\frac{1}{c\mid\xi-\Phi(\mathbf{z}_0)\mid^\mu}\,\mathrm{d}\xi+\int_{t_n}^{t_n+\tilde{t}}\tilde{E}(s)\,\mathrm{d}s+\frac{r}{3}\\&<4\int_{\Phi(\mathbf{z}_0)}^{H(t_n)}\frac{1}{c\mid\xi-\Phi(\mathbf{z}_0)\mid^\mu}\,\mathrm{d}\xi+\int_{t_n}^{\infty}\tilde{E}(s)\,\mathrm{d}s+\frac{r}{3}\\&<\frac{r}{3}+\frac{r}{3}+\frac{r}{3}=r\end{aligned}$$

这与假设是矛盾的，因此对于 $\forall t \in [t_n, \infty)$，$\mathbf{z}(t)$ 都落在 $B_r(\mathbf{z}_0)$ 中.

注意到，上述论证意味着

$$\int_{t_n}^{\infty} \|\dot{\mathbf{z}}(s)\| \, \mathrm{d}s < \infty$$

因此，$\dot{\mathbf{z}}(s_n) \to 0$，进而 $\nabla\Phi(\mathbf{z}(s_n)) \to 0 = \nabla\Phi(\mathbf{z}_0)$

至此，(3.1)的证明全部完成. $\square$

参考文献

[1] Lear D, Reynolds D N, Shvydkoy R. Grassmannian reduction of Cucker-Smale systems and dynamical opinion games[J]. arXiv preprint arXiv:2009.04036, 2020.

[2] Nash J. Non-cooperative games[J]. Annals of mathematics, 1951: 286-295.

[3] Cronin J. Fixed point and topological degree in nonlinear analysis[M]. American Mathematical Society, 1964.

[4] Nagumo M. A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis[J]. American Journal of Mathematics, 1951, 73(3): 485-496.

[5] Lojasiewicz S. Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels[J]. Les équations aux dérivées partielles, 1963, 117: 87-89.

[6] Simon L. Asymptotics for a class of non-linear evolution equations, with applications to geometric problems[J]. Annals of Mathematics, 1983: 525-571.