一数学萃英班.
王一鑫
概率论作业

A

兰州大学
LANZHOU UNIVERSITY

习题一.

2. (1). 若A发生,则 B.C 一定同时发生.

(2). B或C发生时,必有A发生.

(3) A、B同时发生时,必有C发生.

(4). A发生时,B.C至少有一个不发生.

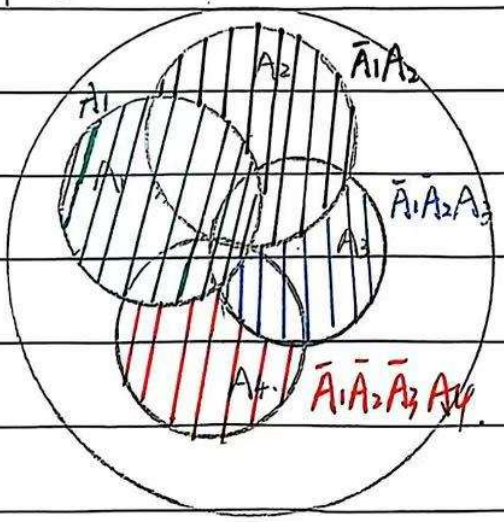
4. 证明: $n=2$时 $\bigcup_{i=1}^{2} A_i = \cancel{A_1+A_2=A_1+A}$ $A_1 \cup A_2 = A_1+(A_2-A_{12}) = A_1+\bar{A}_1A_2$

假设 $n=k$时 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1+\bar{A}_1A_2+\cdots+\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k$ 成立.

则 $n=k+1$时. $\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = (\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cup A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i + \overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}\, A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i + \bigcap_{i=1}^{k} \bar{A}_i \cdot A_{k+1}$

$= A_1+\bar{A}_1A_2+\cdots+\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_k A_{k+1}$ □.

$n=4$时.



6. (1). $A\cup B\cup C\cup D$. (2). $ABC\bar{C}\bar{D}$ (3) $ABC\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD$ $+\bar{A}B\bar{C}D$.

(4). $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ (5). $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$.

9. (1). $P(A_1)=\frac{\#(A_1)}{\#(\Omega)}=\frac{2\cdot 4!}{5!}=\frac{2}{5}$.

(2) $P(A_2)=\frac{\#(A_2)}{\#(\Omega)}=\frac{2\cdot 3!}{5!}=\frac{1}{10}$.

(3) $P(A_3)=\frac{\#(A_3)}{\#(\Omega)}=\cancel{\frac{2\cdot 3!}{5!}}=\frac{2\cdot 2\cdot 4!-2\cdot 3!}{5!}=\frac{7}{10}$.

(4) $P(A_4)=\frac{\#(A_4)}{\#(\Omega)}=\frac{C_3^1A_3^2A_2^2}{5!}=\frac{3}{10}$

(5) $P(A_5)=\frac{\#(A_5)}{\#(\Omega)}=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$.

15. 解: $P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\frac{A_m^n\cdot(m-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{m!(m-1)!}{(m-n)!(m+n-1)!}$

18. 解: $P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\frac{4\times C_4^4\times C_{48}^9}{C_{52}^{13}}=\frac{44}{4165}$.

19 解: (1) $P(A_1)=\frac{\#(A_1)}{\#(\Omega)}=\frac{4}{C_{52}^5}=\frac{1}{649740}$

(2) $P(A_2)=\frac{\#(A_2)}{\#(\Omega)}=\frac{4\times 9}{C_{52}^5}=\frac{3}{216580}$

(3) $P(A_3)=\frac{\#(A_3)}{\#(\Omega)}=\frac{13\times C_{48}^1}{C_{52}^5}=\frac{1}{4165}$.

(4) $P(A_4)=\frac{\#(A_4)}{\#(\Omega)}=\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^1C_4^2}{C_{52}^5}=\frac{6}{4165}$

(5) $P(A_5)=\frac{\#(A_5)}{\#(\Omega)}=\frac{4\times C_{13}^5}{C_{52}^5}=\frac{33}{16660}$

(6) $P(A_6)=\frac{\#(A_6)}{\#(\Omega)}=\frac{10\times(4^5-4)}{C_{52}^5}=\frac{5}{1274}$

(7) $P(A_7)=\frac{\#(A_7)}{\#(\Omega)}=\frac{C_{13}^1C_4^3C_{12}^2C_4^1C_4^1}{C_{52}^5}=\frac{88}{4165}$

(8) $P(A_8)=\frac{\#(A_8)}{\#(\Omega)}=\frac{C_{13}^2\times C_4^2\times C_4^2\times 11\times 4}{C_{52}^5}=\frac{198}{4165}$

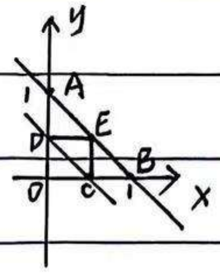
(9) $P(A_9)=\frac{\#(A_9)}{\#(\Omega)}=\frac{C_{13}^1\times C_4^2\times C_{12}^3C_4^1C_4^1C_4^1}{C_{52}^5}=\frac{352}{833}$.

(10) $P(A_{10})=\frac{\#(A_{10})}{\#(\Omega)}=1-\sum_{i=1}^{9}P(A_i)=\frac{1277}{2548}$

22. 解: $P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\frac{C_{M-1}^{m-1}\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

29. 解: 设三段长度分别为 $x, y, 1-x-y$.

$$\begin{cases} x+y>1-x-y \\ x+1-x-y>y \\ y+1-x-y>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y>\frac{1}{2} \\ x<\frac{1}{2} \\ y<\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$



$P(A)=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{1}{4}$.

31. 解: 最大似然估计法:

$p_n=\frac{C_{100-n}^3 C_n^2}{C_{100}^5}$ $\quad \frac{p_n}{p_{n-1}}=\frac{n(98-n)}{(101-n)(n-2)}$.

$n<\frac{202}{5}$ 时 $p_n>p_{n-1}$. $n>\frac{202}{5}$ 时. $p_n<p_{n-1}$. 故 $n=40$ 时 p_n 最大

频率估计概率法

$n=100\times\frac{2}{5}=40$.

故估计次品数40. 两种方法一致.

35. 解: 首先计算34题. 设 A_i 为事件"第i个士兵拿到自己的枪.

$P(A_i)=\frac{\#(A_i)}{\#(\Omega)}=\frac{(N-1)!}{N!}=\frac{1}{N}$.

$P(A_iA_j)=\frac{\#(A_iA_j)}{\#(\Omega)}=\frac{(N-2)!}{N!}=\frac{1}{N(N-1)}$.

$P(A_1A_2\cdots A_N)=\cdots\frac{\#(A_1A_2\cdots A_N)}{\#(\Omega)}=\frac{1}{N!}$.

$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_N)=\sum_{i=1}^{N}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le N}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{N-1}P(A_1A_2\cdots A_N)$.

$=C_N^1\cdot\frac{1}{N}-C_N^2\cdot\frac{1}{N(N-1)}+\cdots+(-1)^{N-1}\cdot\frac{1}{N!}$

$=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$

个典型.

兰州大学
LANZHOU UNIVERSITY

k个士兵都拿到自己枪的概率为 $\frac{(N-k)!}{N!}$

N-k个士兵都没拿到自己枪的概率为 $1-\sum_{i=1}^{N-k}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}=\frac{(-1)^0}{0!}+\sum_{i=1}^{N-k}\frac{(-1)^i}{i!}=\sum_{i=0}^{N-k}\frac{(-1)^i}{i!}$

$P=C_N^k\cdot\frac{(N-k)!}{N!}\cdot\sum_{i=0}^{N-k}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{1}{k!}\cdot\sum_{i=0}^{N-k}\frac{(-1)^i}{i!}$

45. 证明: $P(A)P(B)-P(AB)$

$=P(A)[P(AB)+P(\bar{A}B)]-P(AB)$.

$=P(A)P(\bar{A}B)-P(AB)[1-P(A)]\le P(A)P(\bar{A}B)\le P(A)[1-P(A)]\le\frac{1}{4}$.

令 $P(A)\ge P(B)$ $P(AB)-P(A)P(B)$

$\le P(B)-P(B)P(B)=P(B)[1-P(B)]\le\frac{1}{4}$.

故 $|P(AB)-P(A)P(B)|\le\frac{1}{4}$. 由上述讨论. 等号成立条件为 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ 且 $P(AB)=0$ 或 $\frac{1}{2}$.

或 ~~$P(AB)=\frac{1}{2}$~~

48. 证明: 设一维Borel域 $\mathcal{B}=\sigma\{[a,b)\}$.

设 $\tilde{\mathcal{B}}=\sigma\{(-\infty,x)\}$ 是形如 $(-\infty,x)$ 区间产生的 σ 域.

$[a,b)=(-\infty,b)-(-\infty,a)$, 由 $\tilde{\mathcal{B}}$ 为 σ 域. $[a,b)\in\tilde{\mathcal{B}}$,

从而. $\mathcal{B}\subset\tilde{\mathcal{B}}$

又 $(-\infty,x)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[x-n,x-n+1)$, $\mathcal{B}$ 为 σ 域. 所以 $(-\infty,x)\in\mathcal{B}$. $\tilde{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$.

于是 $\mathcal{B}=\tilde{\mathcal{B}}$.