第三章.

2. 设ξ为伯努利试验中第一个游程(连续的失败或成功)的长.求ξ的概率分布.

解: $\xi \sim g(k+1, p)$.

$$P(\xi=k) = p^k q + q^k p.$$

4. 若分布函数定义为$F(x)=P\{\xi\le x\}$,试证随时的$F(x)$具有下列性质.
(i)非降. (ii) $F(-\infty)=0$. $F(+\infty)=1$; (iii) 右连续

证明: (i) 当$a<b$时. $F(b)-F(a) = P\{a<\xi\le b\} \ge 0$.

即$F(x)$非降.

(ii). $P\{-\infty<\xi\le+\infty\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{n<\xi\le n+1\}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F(n+1)-F(n)]$

$= \lim_{n\to+\infty} F(n) - \lim_{m\to-\infty} F(m) = 1$.

由于$F(x)$非降. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{m\to-\infty} F(m)$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to+\infty} F(n)$存在.
由于$0\le F(x)\le 1$, 故

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$. $\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

(iii). 由于$F(x)$是单调函数,只须证明对于一列单调下降的数列
$x_0>x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$, $x_n\to x$ 成立 $\lim_{n\to\infty} F(x_n)=F(x)$ 即可

~~$F(x)-F(x_0)=P\{x_0<\xi\le$~~

$F(x_0)-F(x) = P\{x<\xi\le x_0\} = \sum_{n=1}^{\infty}[F(x_{n-1})-F(x_n)] = F(x_0) - \lim_{n\to\infty} F(x_n)$

所以 $F(x+0) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$. 即$F(x)$右连续.

5. 若 $\xi \sim N(0,1)$，试求常数 a, b, c，使 (1) $a = P\{\xi \geq 1.645\}$.
(2) $P\{|\xi| < b\} = 95\%$. (3) $P\{|\xi - c| > c\} = 0.51$.

解：经查表得

(1) $a = 0.05$.

(2) $b = 1.96$.

(3). $c = 1.165$.

7. 若 ξ 的分布函数为 $N(60, 9)$，求分点 x_1, x_2, x_3, x_4，使 ξ 落在 $(-\infty, x_1)$，(x_1, x_2)，(x_2, x_3)，(x_3, x_4)，(x_4, ∞) 中的概率之比为 $7:24:38:24:7$.

解：标准化为 $N(0,1)$ 后，经查表得

$\frac{x_1 - 60}{3} = -1.48$.　　$x_1 = 55.56$.

$\frac{x_2 - 60}{3} = -0.5$　　$x_2 = 58.5$.

$\frac{x_3 - 60}{3} = 0.5$.　　$x_3 = 61.5$.

$\frac{x_4 - 60}{3} = 1.48$　　$x_4 = 64.44$.

8. 在帕斯卡分布 $\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$ 中，令 $k\Delta t = t$，$p = \lambda \Delta t$，试证当 $\Delta t \to 0$ 时，它能用 $\frac{\lambda(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \Delta t$ 来逼近.

证明：$k\Delta t = t$，$p = \lambda\Delta t$ 时

$$\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} = \frac{(k-1)(k-2)\cdots[k-(r-1)]}{(r-1)!} (\lambda\Delta t)^r (1-\lambda\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t} - r}$$

$$= \frac{(k\Delta t - \Delta t)\cdots[k\Delta t - (r-1)\Delta t]\,\lambda^r}{(r-1)!\,(1-\lambda\Delta t)^r} \cdot \Delta t \cdot (1-\lambda\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}}.$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}(1-\lambda\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = \lim_{\Delta t\to 0} e^{\frac{t}{\Delta t}\ln(1-\lambda\Delta t)} = e^{-\lambda t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(k\Delta t-\Delta t)\cdots[k\Delta t-(r+1)\Delta t]\lambda^r}{(r-1)!\,(1-\lambda\Delta t)^r}\cdot \cancel{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t-\Delta t)\cdots[t-(r+1)\Delta t]\lambda^r}{(r-1)!\,(1-\lambda\Delta t)^r} = \frac{\lambda(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}$$

于是，$\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r} = \frac{\lambda(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda t}\cdot\Delta t + o(\Delta t)$.

故 $\Delta t\to 0$ 时，它能用 $\frac{\lambda(\lambda t)^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\lambda t}\cdot\Delta t$ 来逼近.

9. 在生存分析中，若 ξ 是非负随机变量，分布函数 $F(x)$，密度函数 $f(x)$.
生存函数 $S(x) = P\{\xi\geq x\}$，失效率函数 $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$，试导出 $S(x)$，$\lambda(x)$，$F(x)$ 及 $f(x)$ 的关系，并以指数函数验证之.

解：
$$S(x) = 1-F(x) = \int_x^{\infty} f(x)\,dx.$$
$$S'(x) = -f(x).$$
$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = -\frac{S'(x)}{S(x)}.$$
$$\int_0^x \lambda(x)\,dx = \int_0^x -\frac{S'(x)}{S(x)}\,dx = -\ln S(x)$$
$$S(x) = \exp\{-\int_0^x \lambda(x)\,dx\}.$$
$$\cancel{f(x)=}\ F(x) = 1-\exp\{-\int_0^x \lambda(x)\,dx\}.$$
$$f(x) = -S'(x) = \lambda(x)\exp\{-\int_0^x\lambda(x)\,dx\} = F'(x).$$

指数分布中
$$F(x) = 1-e^{-\lambda x},\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\quad S(x) = e^{-\lambda x},\quad \lambda(x) = \lambda.$$

数学萃英班
王一鑫
概率论作业

A

兰州大学
LANZHOU UNIVERSITY

10.

12. 定义二元函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y>0\\ 0, & x+y\le 0\end{cases}$$

验证此函数对每个变元非降，左连续，且满足分布函数性质(ii)，但无法使(3.2.5)保持非负.

(3.2.5). $P\{a_1\le\xi_1<b_1, a_2\le\xi_2<b_2\}=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)$.

非降:
证明：对于固定的 y. 取 $x_1>x_2$.

① $x_1+y\le 0$, $x_2+y\le 0$, $F(x_1,y)-F(x_2,y)=0-0=0$

② $x_1+y>0$, $x_2+y\le 0$, $F(x_1,y)-F(x_2,y)=1-0=1>0$.

③ $x_1+y>0$, $x_2+y>0$. $F(x_1,y)-F(x_2,y)=1-1=0$

故 $F(x_1,y)-F(x_2,y)\ge 0$. 这就证明了此函数对 x 非降. 对于 y 同理可证.

左连续：由于 F 对每个变元非降，设对于固定的 y，有一列单调上升的函数列 $x_0<x_1<\cdots<x_n\to x$ ~~或~~. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 不妨设 $x+y>0$，由极限的保号性.

~~$F(x,y)-F(x_0,y)$ 存在 $\delta>0$ $0<x-x_n<\delta$ 时~~ $\exists N>0$. $n>N$ 时. $x_n+y>0$.

$\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n,y)-F(x,y)=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}F(x_n,y)=F(x,y)=F(x-0,y)$. 故 F 关于 x 左连续.
对于 y 同理可证.

(ii)性质. $x\to+\infty$. $x+y>0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=1$; $x\to-\infty$. $x+y<0$. $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$.

对于 y 同理可证.

不满足(3.2.5) 取 $a_1=a_2=0$. $b_1=b_2=1$. 则

$$P\{0\le x<1, 0\le y<1\}=F(1,1)-F(0,1)-F(1,0)+F(0,0)$$
$$=1-1-1+0=-1<0.$$

□.

14. 若 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是对应于分布函数 $F_1(x),F_2(x),F_3(x)$ 的密度函数. 证明对于一切 $\alpha\ (-1<\alpha<1)$, 下列函数是密度函数, 且具有相同的边际密度函数 $f_1(x_1)$. $f_2(x_2)$. $f_3(x_3)$:

$$f_\alpha(x_1,x_2,x_3)=f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)\{1+\alpha[2F_1(x_1)-1]\cdot[2F_2(x_2)-1][2F_3(x_3)-1]\}.$$

证明: $0\le F_i(x_i)\le 1$, $i=1,2,3$ 于是 $|2F_i(x_i)-1|\le 1$ $-1<\alpha\prod_{i=1}^{3}[2F_i(x_i)-1]<1$

$f_\alpha(x_1,x_2,x_3)\ge 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x_i)[2F_i(x_i)-1]\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}[2F_i(x_i)-1]\,dF_i(x_i)=F_i^2(x_i)-F_i(x_i)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0.\quad i=1,2,3$$

于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x_1,x_2,x_3)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2)dx_2\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x_3)dx_3=1$.

从而 $f_\alpha(x_1,x_2,x_3)$ 是密度函数.

$$p_1(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x_1,x_2,x_3)\,dx_2dx_3=f_1(x_1).$$

$$p_2(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_3=f_2(x_2)$$

$$p_3(x_3)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2=f_3(x_3)$$ □.

15. 若 (ξ,η) 的联合概率分布为

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.1
1	0	0.2	c

且 $P\{\xi\eta\ne0\}=0.4$, $P\{\eta\le0|\xi\le0\}=\frac{2}{3}$. 试求: (1) a.b.c之值. (2) ξ 及 η 的边际概率分布 (3) $\xi+\eta$ 的概率分布

解: (1)
$$\begin{cases} P\{\xi\eta\ne0\}=a+0.2+c=0.4. \\ P\{\eta\le0|\xi\le0\}=\dfrac{a+0.1+b}{a+0.3+b}=\dfrac{2}{3}. \\ a+b+c+0.1+0.2+0.2+0.1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0.1\\ b=0.2\\ c=0.1\end{cases}$$

(2).

ξ	-1	0	1
P	0.2	0.4	0.4

η	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

(3).

$\xi+\eta$	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0.1	0.4	0.3	0.1

□.

18. 设二维随机变量 (ξ,η) 的联合密度为

$$p(x,y)=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}e^{-y}$$

$k_1>0,\ k_2>0.\ 0<x\le y<\infty$. 试求 ξ 与 η 的边际密度函数.

解: $$p_\xi(x)=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}x^{k_1-1}\int_x^{+\infty}(y-x)^{k_2-1}e^{-y}dy$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}x^{k_1-1}e^{-x}\int_x^{+\infty}(y-x)^{k_2-1}e^{-(y-x)}dy$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}x^{k_1-1}e^{-x}\int_0^{+\infty}t^{k_2-1}e^{-t}dt$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}x^{k_1-1}e^{-x}\cdot\Gamma(k_2)=\frac{x^{k_1-1}e^{-x}}{\Gamma(k_1)},\quad x>0.$$

$$p_\eta(y)=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}e^{-y}\int_0^y x^{k_1-1}(y-x)^{k_2-1}dx$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}e^{-y}y^{k_1+k_2-1}\int_0^y\left(\frac{x}{y}\right)^{k_1-1}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{k_2-1}d\frac{x}{y}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}e^{-y}y^{k_1+k_2-1}\int_0^1 t^{k_1-1}(1-t)^{k_2-1}dt$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}e^{-y}y^{k_1+k_2-1}B(k_1,k_2)$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}e^{-y}y^{k_1+k_2-1}\frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1+k_2)}=\frac{y^{k_1+k_2-1}}{\Gamma(k_1+k_2)}e^{-y},\quad y>0.\ \square$$

20. (1) 若 (ξ,η) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0\le x\le1,\ 0\le y\le1.\\ 0, & 其他.\end{cases}$

问 ξ 与 η 是否相互独立

(2) 若 (ξ,η) 的联合密度函数为 $g(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y,\ 0\le y\le1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

问 ξ 与 η 是否相互独立.

解: (1) $f_\xi(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1 4xy\,dy=2x.$

$f_\eta(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1 4xy\,dy=2y$

$f(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$. ξ 与 η 相互独立

(2) $g_\xi(x)=\int_x^1 g(x,y)dy=\int_x^1 8xy\,dy=4x(1-x^2)$

$g_\eta(y) = \int_0^y g(x,y)dx = \int_0^y 8xy\,dx = 4y^3$.

$g(x,y) \neq g_\xi(x) g_\eta(y)$，故$\xi$与$\eta$不独立 □.

21. 若ξ,η相互独立且皆以概率$\frac{1}{2}$取值+1及-1，令$\zeta=\xi\eta$，试证ζ,ξ,η两两独立但不相互独立。

证明：$P\{\zeta=1\} = P\{\xi=1,\eta=1\} + P\{\xi=-1,\eta=-1\} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$P\{\zeta=-1\} = P\{\xi=1,\eta=-1\} + P\{\xi=-1,\eta=1\} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$P\{\zeta=1,\xi=1\} = P\{\xi=1,\eta=1\} = \frac{1}{4} = P\{\zeta=1\}P\{\xi=1\}$.

$P\{\zeta=1,\xi=-1\} = P\{\xi=-1,\eta=-1\} = \frac{1}{4} = P\{\zeta=1\}P\{\xi=-1\}$。

$P\{\zeta=-1,\xi=1\} = P\{\xi=1,\eta=-1\} = \frac{1}{4} = P\{\zeta=-1\}P\{\xi=1\}$。

$P\{\zeta=-1,\xi=-1\} = P\{\xi=-1,\eta=1\} = \frac{1}{4} = P\{\zeta=-1\}P\{\xi=-1\}$.

因此ζ与ξ独立。同理ζ与η独立。由此ζ,ξ,η两两独立

然而$P\{\zeta=1,\xi=1,\eta=1\} = \frac{1}{4}$

$P\{\zeta=1\} = P\{\xi=1\} = P\{\eta=1\} = \frac{1}{2}$。 $P\{\zeta=1,\xi=1,\eta=1\} \neq P\{\zeta=1\}P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}$。

因此ζ,ξ,η不相互独立。 □

王一鑫

A

兰州大学 LANZHOU UNIVERSITY

22、证明：

$f_\xi(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac{1}{2}$. $g_\eta(y)=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dx=\frac{1}{2}$

$p(x,y)\neq f_\xi(x)g_\eta(y)$. 故 ξ,η 不独立.

而对于 $0\le u\le 1$. $P\{\xi^2<u\}=\int_{x^2<u}f_\xi(x)dx=\int_{x^2<u}\frac{1}{2}dx=\sqrt{u}$.

$0\le v\le 1$ $P\{\eta^2<v\}=\int_{y^2<v}g_\eta(y)dy=\int_{y^2<v}\frac{1}{2}dy=\sqrt{v}$.

$P\{\xi^2<u,\eta^2<v\}=\iint_{\substack{x^2<u\\ y^2<v}}p(x,y)dxdy=\sqrt{u}\sqrt{v}$，故 ξ^2,η^2 独立 □

24. 解：(1) $P\{\mu_1=n_1,\mu_2=n_2\}=\frac{C_{N_1}^{n_1}C_{N_2}^{n_2}C_{N-N_1-N_2}^{n-n_1-n_2}}{C_N^n}$

(2) $P\{\mu_1=n_1\}=\sum_{n_2=0}^{n-n_1}\frac{C_{N_1}^{n_1}C_{N_2}^{n_2}C_{N-N_1-N_2}^{n-n_1-n_2}}{C_N^n}=\frac{C_{N_1}^{n_1}C_{N-N_1}^{n-n_1}}{C_N^n}$.

(3) $P\{\mu_2=n_2|\mu_1=n_1\}=\frac{P\{\mu_1=n_1,\mu_2=n_2\}}{P\{\mu_1=n_1\}}=\frac{C_{N_2}^{n_2}C_{N-N_1-N_2}^{n-n_1-n_2}}{C_{N-N_1}^{n-n_1}}$ □

26. 证明：(1) $P\{\xi_1+\xi_2=n\}=\sum_{k=0}^{n}P\{\xi_1=k\}P\{\xi_2=n-k\}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}$

$=e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$.

故 $\xi_1+\xi_2\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

(2) $P\{\xi_1=k|\xi_1+\xi_2=n\}=\frac{P(\xi_1=k,\xi_2=n-k)}{P\{\xi_1+\xi_2=n\}}=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-\lambda_1-\lambda_2}}$

$=C_n^k\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$,

27. 解：(1) $P\{\eta<y\}=P\{\xi^{-1}<y\}=P\{\xi>y^{-1}\}=\int_{y^{-1}}^{+\infty}p(y)dy$

故密度函数为 $p(y^{-1})y^{-2}$，$y\neq 0$.

(2) $P\{\eta<y\}=P\{\tan\xi<y\}=P\{\xi<\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n\pi+\arctan y)\}$

密度函数为 $\frac{1}{1+y^2}p(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n\pi+\arctan y))$.

(3) $P\{\eta<y\}=P\{|\xi|<y\}=P\{-y<\xi<y\}=\int_{-y}^{y}p(y)dy$

故密度函数为 $p(y)+p(-y)$，$y\geq 0$. □

28. 解：设 $P\{\xi=i\}=q^{i-1}p$.

(1) $i<k$ 时. $P\{\zeta=k,\xi=i\}=P\{\eta=k,\xi=i\}=p^2q^{i+k-2}$

$i=k$ 时 $P\{\zeta=k,\xi=i\}=\sum_{j=1}^{k}P\{\eta=j,\xi=k\}=pq^{k-1}\frac{1-q^k}{1-q}\cdot p=pq^{k-1}(1-q^k)$.

$i>k$ 时 $P\{\zeta=k,\xi=i\}=0$.

(2) $P\{\zeta=k\}=\sum_{i=1}^{k-1}P\{\xi=i,\eta=k\}+\sum_{j=1}^{k}P\{\xi=k,\eta=j\}=pq^{k-1}(2-q^{k-1}-q^k)$.

(3) $P\{\xi=i|\zeta=k\}=\frac{P\{\xi=i,\zeta=k\}}{P\{\zeta=k\}}=\begin{cases}\frac{pq^{i-1}}{2-q^{k-1}-q^k} & i<k\\ \frac{1-q^k}{2-q^{k-1}-q^k} & i=k\\ 0 & i>k.\end{cases}$

33. 解：指数分布的密度函数 $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，分布函数 $F(x)=1-e^{-\lambda x}$. $x>0$

$F_\eta(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_i(x))=1-e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x}$，$x>0$.

$p_\eta(x)=(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x}$，$x>0$.

$\eta\sim Exp(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$ □

39、解：设 $u=x^2+y^2$，$v=\frac{x}{y}$.

$J^{-1}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & 2y \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2}\end{vmatrix}=-2(v^2+1)$，

$|J|=\frac{1}{2(v^2+1)}$.

$q(u,v)=p(x,y)|J|=2\cdot\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2}\}\cdot\frac{1}{2(1+v^2)}=\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}\cdot\frac{1}{\pi(1+v^2)}$

$=p_U(u)\cdot p_V(v)$

于是 U, V 相互独立，$p_U(u)=\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}, u>0$，$p_V(v)=\frac{1}{\pi(1+v^2)}$，$-\infty<v<+\infty$.

41. 解：(1) $p(x,y)=\frac{1}{2\pi\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left\{\frac{1}{2(1-\frac{1}{2})}\left[(x-4)^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-4)(y-3)}{1\cdot\sqrt{2}}+\frac{(y-3)^2}{2}\right]\right\}$.

(2) $\mu_1=4$. $\mu_2=3$ $\sigma_1=1$. $\sigma_2=\sqrt{2}$. $\rho=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(3) $p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{2}}$.

(4) $p(x|y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\{-[x-(\frac{11}{2}-\frac{y}{2})]^2\}$.