习题一.

1. 从袋子中摸摸球，其中共有5个球，3蓝、2红，则随机变量

$$X=\begin{cases}1 & 摸到蓝球\\ 0 & 摸到红球\end{cases}$$

服从 0-1 分布 $P(X=1)=0.6$. $P(X=0)=0.4$.

2. 调查投掷一枚硬币，随机变量

$$X=\begin{cases}1 & 正面\\ 0 & 反面\end{cases}$$

服从 0-1 分布. $P(X=1)=P(X=0)=0.5$.

3. 解：从 $(a_1,\cdots,a_M)$ 中不放回地随机抽取 m 个，共有 A_M^m 种取法.

从 $(a_{M+1},\cdots,a_N)$ 中不放回地随机抽取 $n-m$ 个，共有 A_{N-M}^{n-m} 种取法.

每种取法是等可能的

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_N=x_N)=\frac{1}{A_M^m A_{N-M}^{n-m}}=\frac{M!\cdot(N-M)!}{(M-m)!(N-M-n+m)!}$$

4. 解：由于每次测量相互独立，则 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n)$

① $|x_1-x_2|\le|x_3-x_4|$，则后 $n-4$ 次用第一架天平. $x_5,\cdots,x_n\sim N(a,\sigma_1^2)$.

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-n/2}\cdot\sigma_1^{-n+2}\sigma_2^{-2}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=5}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x_3-a)^2+(x_4-a)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

② $|x_1-x_2|>|x_3-x_4|$ 则后 $n-4$ 次用第二架天平. $x_5,\cdots,x_n\sim N(a,\sigma_2^2)$

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-n/2}\cdot\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-n+2}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=3}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma_2^2}-\frac{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

5. 解: (1) $\mathcal{X}=(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ ($X_i=0$或1, $i=1,2,3,4,5$)

$\sum_{i=1}^{5} X_i \sim b(5,p)$

(2) X_1+X_2, $\min\limits_{1\le i\le 5} X_i$ 是统计量. 它们是样本的函数.

X_5+2p, $X_5-E(X_1)$, $(X_5-X_1)^2/D(X_1)$ 不是统计量, 它们与未知参数p有关

(3)

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{n-m}{n} & 0\le x<1\\ 1 & x>1.\end{cases}$$

6. 证明: $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+b=a\bar{x}+b.$

$S_y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-a\bar{x}-b)^2=\frac{a^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

$=a^2S_x^2$

作变换 $y_i=10x_i+500$. x_i 分别为

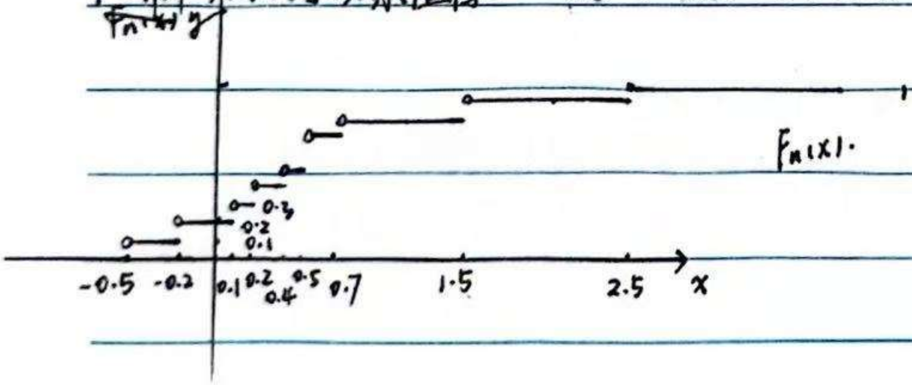
$-2, 5, 0, 9, 1, 6, -1, 10, 8$.

$\bar{x}=\frac{1}{9}(-2+5+0+9+1+6-1+10+8)=4.$ $\bar{y}=10\times4+500=540$

$S_x^2=\frac{1}{8}(36+1+16+25+9+4+25+36+16)=21.$

$S_y^2=100\times21=2100.$

7. 解: 排列观察值得. $-0.5<-0.2<0.1<0.2<0.4<0.5<0.7\le0.7<1.5<2.5$



9. 解: $\bar{X}=\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36}X_i$, $\bar{X}\sim N(50,1)$.

$P(50.6\le X<51.8)=P(0.6\le X-50<1.8)=\Phi(1.8)-\Phi(0.6)=0.96407-0.7257$
$=0.23837$

10. 解: $\bar{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i\sim N(\mu,0.01)$

$P(|\bar{X}|<c)=P(-c<\bar{X}<c)=P(\frac{-c-\mu}{\frac{1}{10}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{1}{10}}<\frac{c-\mu}{\frac{1}{10}})$

$=P\,\Phi(10c-10\mu)-\Phi(-10c-10\mu)<\Phi(10c)-\Phi(-10c)$

$=2\Phi(10c)-1\le 0.05.$

查表可得 $10c\le 0.06$ $c\le 0.006.$

11. 解: $\bar{X}\sim N(\mu,(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2)$

$P(|\bar{X}-\mu|<0.1)\ge 99.7\%$. 即.

$P(\frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu|}{\sigma}<\frac{0.1\sqrt{n}}{\sigma})=2\Phi(\frac{0.1\sqrt{n}}{\sigma})-1\ge 0.997$. 得

n应取441.

12. 解: ~~由~~ $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b(n,0.5)$.

由切比雪夫不等式. $P\{|\sum_{i=1}^{n}X_i-0.5n|\ge 0.1n\}\le\frac{D(\sum_{i=1}^{n}X_i)}{(0.1n)^2}=\frac{25}{n}\le 0.1$

$n\ge 250$.

由中心极限定理. $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-0.5n}{\sqrt{0.25n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

$P(~~0.4~~\,|\sum_{i=1}^{n}X_i-0.5n|\le 0.1n\}=P(\frac{|\sum_{i=1}^{n}X_i-0.5n|}{\sqrt{0.25n}}\le\frac{\sqrt{n}}{5})$

$=2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{5})-1\ge 0.9.$ $n\ge 68.$