

Classic

-PROMISE-

Saturday 2nd April, 2022

1 星型搜索

- 问题：在一星型交叉路口找某条路上的一个点，找一个点，必须经过或刚好到该点才算找到。

•

```
Algorithm: Star Search
Input: The number of roads  $w$ 
Output: The road and the distance each turn explored.
1:  $i = 1$ 
2: repeat:
3:    $d = \left(\frac{w}{w-1}\right)^i$ 
4:   Explore the path  $(i \bmod w)$  up to distance  $d$ 
5:   if goal not found then
6:     Go back to origin
7:    $i = i + 1$ 
8: until goal found
```

类似域 introduction 中的线性搜索，指数增长的基数是 $\frac{w}{w-1}$

- 计算竞争比：

设点在第 j 条路径的 $(\frac{w}{w-1})^j + \epsilon$ 处，则 $OPT = (\frac{w}{w-1})^j + \epsilon \geq (\frac{w}{w-1})^j$ ，而

$$ALG = 2 \cdot \left(\frac{w}{w-1} + \left(\frac{w}{w-1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{w}{w-1} \right)^{j+w-1} \right) + \left(\frac{w}{w-1} \right)^j + \epsilon = 2 \cdot \left(w \cdot \left(\frac{w}{w-1} \right)^{j+w-1} - w \right) + OPT \leq 2 \cdot \frac{w^w}{(w-1)^{w-1}} \cdot \left[\frac{w}{(w-1)^j} \right] + OPT \leq \left[1 + 2 \frac{w^w}{(w-1)^{w-1}} \right] \cdot OPT$$

2 电梯问题

- 问题：设乘坐电梯花费的时间是 E ，楼梯是 S ，那么你应该等待多久之后放弃呢？给出一个最佳竞争比的算法。

- 解答:

Algorithm: A better-late-than-never strategy
Input: The time E and S taken by the elevator and stairs to get to your floor respectively.
Output: A waiting strategy.
 1: Waiting for $S - E$ time
 2: **If** the elevator comes **then**
 3: Take the elevator and we are optimal.
 4: **Else**
 5: Take the stairs and use $2 \cdot S - E$ time

- 分析竞争比: 设等待时间是 T , 那么
 当 $T+E < S$ 时, $OPT=T+E$, 否则, $OPT=S$;
 当 $T+E < S$ 时, $ALG=T+E$, 否则, $ALG=S-E+S=2S-E$;
 所以竞争比为 $2 - \frac{E}{S}$;
- 拓展: 所有确定的在线算法不能实现竞争比小于 $2 - \frac{E}{S}$;
 设算法的等待时间是 W , 那么都考虑最坏的情况:
 $W < S-E$ 时, 假设 $S-E$ 时电梯刚好到, 那么竞争比是: $\frac{W+S}{W+E} \geq \frac{S-E+S}{S}$.
 否则, 竞争比是 $\frac{W+S}{S} \geq \frac{S-E+S}{S}$.

3 汇率问题

- 假设知道 n 天内汇率的上下界 U 和 L , 但是只有到第 n 天才知道是最后一天, 必须进行交易, 希望找到一个在线算法使得交易收益最多。

Algorithm: The Reservation Price Policy (RPP)
Input: $U, L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ and the last day n (You may not know the value of n until on the last day).
Output: A trading day.
 1: $p^* \leftarrow \sqrt{U \cdot L}$, $flag \leftarrow 0$
 2: **For each day** $j \leq n$ **and when** $flag = 0$ **do**
 3: p_j is revealed
 4: **if** $j < n$ **and** $p_j \geq p^*$ **then**
 5: Trade all savings on day j
 6: $flag \leftarrow 1$
 7: **else if** $j = n$ **then**
 8: Trade all savings on day n

分析竞争比, 竞争比是 $\sqrt{\frac{U}{L}}$
 考虑最差情况, 假设在第 j 天交易。

$j < n$ 时, 则假设第 j 天汇率为 $\sqrt{U \cdot L}$ 设第 n 天汇率为 U , 则 $\frac{OPT}{ALG} = \frac{U}{\sqrt{U \cdot L}}$

$j = n$ 时, 假设第 j 天是 L , 而可以知道 $p_j < \sqrt{UL}$, 则 $\frac{OPT}{ALG} < \frac{\sqrt{UL}}{L}$

- n 知道的情况下, 竞争比也不少于上述的竞争比
- 不知道 U 和 L , 只知道 $\frac{U}{L}$ 的情况下, 竞争比至少是 $\frac{U}{L}$

证明: 假设前面汇率都是 1, 最后一天用来构造最差情况,

在第 i 天交易:

$i < n$ 的时候, 假设第 n 天为 $\frac{U}{L}$

$i = n$ 的时候, 假设第 n 天是 $\frac{L}{U}$