徐思源 191220133 计算机系 本科生

1.1

(a) $\frac{8a-1}{3} \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{1}{8}$

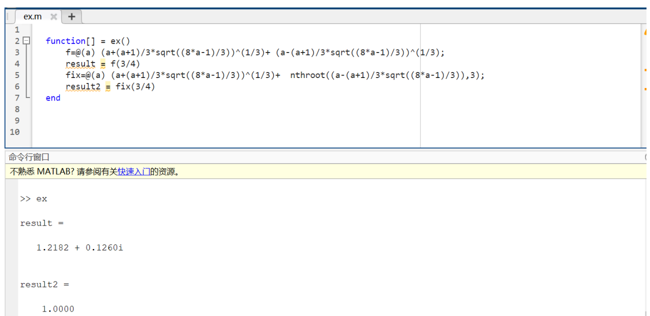
(b) $a = \frac{1}{8} \Rightarrow$ 式 (1.1) 为 1

(c) $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{32}$ 时，式 (1.1) 均等于 1

猜想：当 $a \geq \frac{1}{8}$ 时，式 (1.1) 等于 1

(d) 输出结果为 1.2182+0.1260i

(e) 当 $a = \frac{3}{4}$ 的时候，由于 $a - \frac{a+1}{3} \cdot \frac{8a-1}{3} < 0$，根据 matlab 的规则，默认计算开方对应的复数解，所以会出现这样的结果，我们可以利用 nthroot 函数将计算结果限制在实数，结果如下



(f) 符号：式 (1.1) 为 f,$x_1 =^3 \sqrt{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$，$x_2 =^3 \sqrt{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$

数学表达：$a \geq \frac{1}{8}$ 时，$f \equiv 1$.

证明:$f = x_1+x_2 = \frac{(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)}{x_1^2-x_1x_2+x_2^2} = \frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2-x_1x_2+x_2^2} = \frac{2a}{(x_1+x_2)^2-3x_1x_2} = \frac{2a}{f^2-(1-2a)}$

$\Rightarrow (f-1)(f^2+f+2a) = 0$

而 $a \geq \frac{1}{8}$ 时，$f^2+f+2a = 0$ 无解，有 $a \geq \frac{1}{8}$ 时,$f \equiv 1$

(g) 此时 a=2, 满足 $a \geq \frac{1}{8}$, 故 ${}^3\sqrt{2+\sqrt{5}} +^3 \sqrt{2-\sqrt{5}} = 1$

(h) 根据在 (g) 中得证明，我们可以知道其实式 (1.1) 是对于方程 $f^3 - (1-2a)f - 2a = 0$ 的解，如果我们将复数域中的解也考虑在内，则方程 $f^3 - (1-2a)f - 2a = 0$ 在 $a \leq \frac{1}{8}$ 时也有解，令 $p = 2a-1, q = -2a$, 就可以用 p,q 来表示式 (1.1) 中的 a，结果符合卡丹方法的解

2.6

(a) 期望为 $\frac{1}{\beta}$ 方差为 $\frac{1}{\beta^2}$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x} & x \geq 0 \\ 0 & \end{cases} \tag{1}$$

(c)$Pr(X \geq a+b|X \geq a)$=$\frac{Pr(X \geq a+b)}{Pr(X \geq a)}$=$\frac{1-F(a+b)}{1-F(a)}$=$\frac{e^{-\beta(a+b)}}{e^{-\beta a}}$=$e^{-\beta b}$

$Pr(x \geq b)$=$e^{-\beta b}$

$Pr(X \geq a+b|X \geq a)$=$Pr(x \geq b)$

(d) 期望寿命为 1000

剩余寿命期望为 1000(无记忆性知 2000hours 后 X 概率分布不变)

2.7

(a)E[x]=$\frac{1}{3}$,Var[x]=$\frac{1}{9}$

(b) 可以使用，因为对于指数分布而言 $Pr(X < 0)$=0, 所以 $Pr(X \geq 1) = \frac{1}{3}$

(c)$E[x] = \frac{1}{3}, Var[x] = \frac{1}{9} \neq 0$, 根据切比雪夫单边的情况 $Pr(X \geq 1) \leq \frac{1}{4}$

2.10

(a) $\forall x, y, \frac{1}{2}(f(x)+f(y)) = \frac{1}{2}(e^{ax}+e^{ay}) \leq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{e^{ax} \cdot e^{ay}} \leq e^{a \cdot \frac{x+y}{2}}$=$f(\frac{x+y}{2})$

所以函数是凸函数

(b)$\forall x, y > 0, \frac{1}{2}(g(x)+g(y)) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y) = \ln\sqrt{xy} \leq \ln\frac{x+y}{2} = g(\frac{x+y}{2})$

(c)$h''(x) = \frac{1}{x} > 0$, 且由题意知 x=0 时，函数有定义且连续，所以函数是凸函数

(d) 题意转化为在 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ 的情况下使 H 最大

取拉格朗日乘子 λ,

拉格朗日函数为 $L(p_1...p_n; \lambda) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i + \lambda(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i)$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial P_i} = -\log_2 P_i - \frac{1}{\ln 2} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1} nP_i = 0, \end{cases} \tag{2}$$

联立①②解得

$$\begin{cases} P_i = \frac{1}{n}, \\ \lambda = \log_2 n - \frac{1}{\ln 2}, \end{cases} \tag{3}$$

综上，$P_i = \frac{1}{n}$ 时，熵取得最大值