DS

-PROMISE-

Sunday 3rd April, 2022

1 链表更新问题

- 题目理解看 wiki 更清楚一点
  https://en.wikipedia.org/wiki/List_update_problem
- 三种在线算法解决：
  Move-To-Front (MTF)：直接把当前搜索项移到开头，不改变其他元素的位置
  Transpose (TR)：将当前项和前一个交换
  Frequency-Count (FC)：按访问频率降序排列
- 证明 MTF 是 2-competitive 的
  可以参考:
https://www.cs.yale.edu/homes/aspnes/pinewiki/OnLineAlgorithms.html

均摊分析

在 t 时刻，根据当前 MTF 和 OPT 的序列进行比较，假设序列为 π π^*, 而 x 和 x^* 的位置分别是 k 和 k^*，假设按照此时的序列，假设 π^* 中在 x^* 后面而 π 中在 x 前面数有 v 个，那么我们可以得到有 v 个逆序对，这 v 个逆序对是我们搜索到 x 的时候已经存在的，在平坦分析中，我们认为这是在 t-1 时刻交换的。根据定义我们可以得到 $k^* \geq k - v$,x 前面有 k-v-1 个元素，而当我们执行将 x 移动到队头的时候，x 新生成和抵消掉的逆序对个数是 $k - v - 1$ 个，也就是说，新产生了 $k - v - 1$ 个逆序对，这是本次需要交换的。

综上 $\phi(t-1) = v, \phi(t) = k - v - 1$, 故 $C_{MTF} + \phi(t) - \phi(t-1) = k + k - v - 1 - v = 2(k - v) - 1 \leq 2k^* - 1 = 2C_{OPT} - 1$.

$\sum_{t=1}^{m}((C_{MTF}(\sigma(t))) + \phi(T) - \phi(t-1)) \leq \sum_{t=1}^{m} 2C_{OPT} - m$

$\Rightarrow \sum_{t=1}^{m} C_{MTF}(\sigma(t)) + \phi(m) - \phi(0) \leq \sum_{t=1}^{m} 2C_{OPT} - m$
$\Rightarrow C_{MTF}(\sigma) \leq 2C_{OPT} - m - \phi(m)$

- TR 和 FC 的 competitive ratio 都是 $\Omega(n)$

对于 TR 构造：链表 $A \to B \to C \to D$, 请求序列为 C,D,C,D... 那么代价就是 n^2.competitive ratio 为 $\Omega(n)$, 对于这个情况，更好的是把两个都挪到最前面，这时候代价是 n+n+2+2+...+2=4n-4, 这时候 ratio 是 $\frac{n^2}{4n-4} = \Theta(n)$

对于 FC 构造：一直请求频率最低的那么代价就是 $n + (n-1) + .. + 2 + 1 = \frac{n^2+n}{2}$，或者更好的方式我们把这个元素提前到最前面的位置，代价就是 $n + 1 + 1 + ... + 1 = 2n - 1$，ratio 在这个时候是 $\Theta(n)$.