CheatSheet по Теорверу

Матожидание&Дисперсия&Ковариация&Момент

Матожидание

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{a \in A = \xi(\Omega)} aP(\xi = a)$$

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx$$

$$\mathbb{E}f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \iint\limits_{\mathbb{R}^n} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) p_{\xi_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots dx_n$$

Свойства матожидания

Для дискретной с.в.

$$\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$$
$$\forall w \quad \xi(w) \leqslant \eta(w) \Rightarrow \mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}\eta$$
$$|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$$
$$\mathbb{E}f(\xi) = \sum_{a \in A = \xi(\Omega)} f(a)P(\xi = a)$$
$$\xi, \eta - \text{независимые с.в} \Rightarrow \mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$

В общем случае

$$\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$$
$$\xi \leqslant \eta \Rightarrow \mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}\eta$$
$$|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$$
$$\xi, \eta - \text{независимые/некоррел. с.в} \Rightarrow \mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$
$$f(x) - \text{борелл. функция} \Rightarrow \mathbb{E}f(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) p_\xi(x) dx$$
$$|\mathbb{E}\xi\eta| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2}, \qquad |\mathbb{E}\xi\eta| = \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2} \Leftrightarrow \xi \text{ и } \eta \text{ лин. завис. п.н. между собой}$$

Дисперсия&Ковариация

Определение:

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2]$$
$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$$
$$\text{коеф. корр.:} \quad \rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta))}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta}}, \quad 0 < \mathbb{D}\xi, \mathbb{D}\eta < \infty$$

Удобные формулы:

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}\xi^2 - (\mathbb{D}\xi)^2$$
$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$

Свойства Дисперсии&Ковариации

$$\mathrm{cov}(a_1\xi + b_1\eta, a_2\zeta + b_2\chi) = a_1a_2\mathrm{cov}(\xi,\zeta) + a_1b_2\mathrm{cov}(\xi,\chi) + b_1a_2\mathrm{cov}(\eta,\zeta) + b_1b_2\mathrm{cov}(\eta,\chi)$$
$$\mathbb{D}\xi \geqslant 0$$
$$\mathbb{D}\xi = \mathrm{cov}(\xi,\xi)$$
$$\mathbb{D}(c\cdot\xi) = c^2\cdot\mathbb{D}\xi \quad c\in\mathbb{R}$$
$$\mathbb{D}(c+\xi) = \mathbb{D}\xi \quad c\in\mathbb{R}$$
$$\mathbb{D}(\xi+\eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta - 2\mathrm{cov}(\xi,\eta)$$
$$|\rho(\xi,\eta)| \leqslant 1 \qquad |\rho(\xi,\eta)| = 1 \Leftrightarrow (\xi - \mathbb{E}\xi) \text{ и } (\eta - \mathbb{E}\eta) \text{ лин. завис. п.н. между собой}$$
$$\xi_1,\ldots,\xi_n - \text{ попарно некоррелированные с.в.} \Rightarrow \mathbb{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \ldots + \mathbb{D}\xi_n$$
$$\text{С.в. } \xi_1,\ldots,\xi_n \text{ независимы в совокупности} \Rightarrow \mathbb{D}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \ldots + \mathbb{D}\xi_n$$

Момент с.в

$$\nu_k = \mathbb{E}\xi^k - k\text{-ый начальный момент с.в. } \xi\text{, в случае, если } \mathbb{E}\xi^k \text{ определено}$$
$$\mu_k = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k] - k\text{-ый центральный момент с.в } \xi$$

Независимость&Некоррелируемость

Определения

- Дискретные с.в. называются независимы, если $P(\{\xi = a\}\cap\{\eta = b\}) = P(\{\xi = a\})\cdot P(\{\eta = b\})$.
- С.в $\xi_1,\ldots,\xi_n$ независимы в совокупности, если $\forall x_1,\ldots,x_n \in R \quad P(\xi_1 < x_1,\ldots,\xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1)\cdot\ldots\cdot P(\xi_n < x_n) \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow F_\xi(x_1,\ldots,x_n) = F_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot F_{\xi_n}(x_n) \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow p_\xi(x_1,\ldots,x_n) = p_{\xi_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot p_{\xi_n}(x_n)$
- Если $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$, то ξ и η некоррелируемые

Свойства

$$\xi,\eta - \text{независимые с.в.} \Rightarrow \xi,\eta \text{ некореллируемые}$$

$$\xi_1,\ldots,\xi_n - \text{независимые в сов. с.в,} \quad f_1,\ldots,f_n - \text{бор. функции из } \mathbb{R} \text{ в } \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_1(\xi_1)\ldots,f_n(\xi_n) \text{ независимы в совокупности}$$

Распределения

Функция распределения

$$F_\xi(x) = P[\xi \leqslant x], \quad F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt, \quad p_\xi(x) = F'_\xi(x)$$

Биномиальное распределение

$$\xi \sim Bin(p, n)$$
$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\mathbb{E}\xi = np, \qquad \mathbb{D}\xi = np(1-p)$$
$$\varphi_\xi(t) = (1 - p + pe^{it})^n$$

Геометрическое распределение

$$\xi \sim Geom(p), \qquad q = p - 1$$
$$P(\xi = k) = q^{k-1} \cdot p$$
$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{D}\xi = \frac{q}{p^2}$$
$$\varphi_\xi(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$$

Пуассоновское распределение

$$\xi \sim Pois(\lambda)$$
$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$
$$\mathbb{E}\xi = \lambda, \qquad \mathbb{D}\xi = \lambda$$
$$\varphi_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Непрерывное равномерное распределение

$$\xi \sim U(a, b), \qquad a \leqslant b$$
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b) \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$
$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$
$$\mathbb{E}\xi = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$
$$\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

Нормальное распределение

$$\xi \sim N(\mu, \sigma^2) \sim \mu + \sigma N(0,1)$$
$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$\mathbb{E} = \mu, \qquad \mathbb{D} = \sigma^2$$
$$\varphi_\xi(t) = e^{\mu i t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Стандартное нормальное распределение

$$\xi \sim N(0,1)$$
$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$\mathbb{E}\xi = 0, \qquad \mathbb{D}\xi = 1 \qquad \mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{D}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2 = 1 + 0 = 1$$
$$\varphi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$\text{Для сверки: } \mu_{2k} = \mathbb{E}\xi^{2k} = (2k-1)!!, \quad \mu_{2k+1} = \mathbb{E}\xi^{2k+1} = 0$$

Экспоненциальное распределение

$$\xi = Exp(\alpha)$$
$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$
$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\alpha}, \qquad \mathbb{D}\xi = \frac{1}{\alpha^2}$$
$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{1 - \frac{it}{\alpha}}$$

Случайный вектор

Определение

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad \forall i \;\; \xi_i - \text{с.в,} \Rightarrow \xi - \text{случайный вектор}$$

Свойства

$$\xi - \text{случайный вектор}, \quad f - \text{бор. ф.} \Rightarrow f(\xi) - \text{случайный вектор}$$

Распределение случайного вектора

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) - \text{случ. вектор}$$
$$\text{Совместная функция распределения с.в. } (\xi_1, \dots, \xi_n)\text{:} \quad F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \dots, \xi_n \leqslant x_n)$$

Матожидание случайного вектора

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) - \text{случайный вектор} \Rightarrow \mathbb{E}\xi = (\mathbb{E}\xi_1, \dots, \mathbb{E}\xi_n)$$

Дисперсия (матрица ковариации) случайного вектора

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор $\Rightarrow \mathbb{D}\xi = (\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) : i, j \in \{1, \ldots, n\})$ (матрица ков. симм.)

Характеристические функции случайной величины

Определение

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}\cos(t\xi) + i\mathbb{E}\sin(t\xi)$$

Свойства хар. функций

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\varphi_\xi(t)| \leqslant \varphi_\xi(0) = 1$$
$$\eta = a\xi + b \Rightarrow \varphi_\eta(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$$
$$\varphi_\xi(t) \text{ равн. непрерывна на } \mathbb{R}$$
$$\overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$$
$$\forall t \ \ \varphi_\xi(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi \overset{d}{=} -\xi$$
$$\xi, \eta - \text{независимые с.в} \Rightarrow \varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

Следствия из свойств хар. функций

$$Pois(\lambda_1) + Pois(\lambda_2) = Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$$
$$\xi_1, \xi_2 - \text{нез. с.в} \quad \xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2), \quad \xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Производная хар функции

$$\xi - \text{с.в} \quad \forall r \in \{1, \ldots, n\} E[|\xi|^r] < \infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall r \in \{1, \ldots, n\} \quad \varphi_\xi^{(r)}(t) = E[(i\xi)^r e^{it\xi}], \qquad \varphi_\xi^{(r)}(0) = i^r E[\xi^r]$$

Единственность с.в.

$$\xi, \eta - \text{с.в., тогда } \xi \overset{d}{=} \eta \Leftrightarrow \varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Характеристические функции случайного вектора

Определение

$$\xi \in \mathbb{R}^n - \text{случ. вектор} \Rightarrow \varphi_\xi(t) = E\left[e^{i\langle \xi, t\rangle}\right], \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \xi, t\rangle = \sum_{k=1}^n t_k \xi_k - \text{скалярное произв.}$$

Критерий независимости

$$\xi_1, \ldots, \xi_n \text{ независимы в совокупности} \Leftrightarrow \varphi_\xi(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n}(t), \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

Нормальные (Гауссовские) векторы

Определения

$$\xi - \text{ гауссовский вектор} \Leftrightarrow \varphi_\xi(t) = e^{-\frac{1}{2}\langle Rt,t\rangle + i\langle a,t\rangle}, \qquad R - \text{симм. неотр. опр. матрица}$$

Теорема об эквивалентных определениях:

1. ξ – гаусс. вектор
2. $\xi = A\eta + b, \quad \eta_i \sim N(0,1), \quad \eta_i$ (компоненты) независимы, $A = \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$
3. $\forall x \quad \langle x, \eta\rangle$ - нормальная с.в.

Лемма о независимости компонент

$$\xi = (\xi_1, \dots, x_n), \text{ компоненты } \xi \text{ независимы } \Leftrightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$$

Плотность гауссовских векторов

$$\xi \sim N(a, R) - n\text{-мерный гауссовский вектор}$$
$$\text{Тогда } R \text{ положит. опр. } \Leftrightarrow \exists\, p_\xi(t) \text{ и } p_\xi(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det R}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\langle R(t-a), t-a\rangle\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$$

Приведения гаусс. вектора к стандартному нормальному

$$\xi \sim N(a, R) \text{ - } n\text{-мерный гауссовский вектор} \quad D = \sqrt{R}$$
$$\eta = D^{-1}(\xi - a) \Rightarrow \eta \sim N(0, D^{-1}R(D^{-1})^T) \sim N(0, E_n)$$

Свойства

$$\xi \sim N(\mu, \Sigma)$$
$$A\xi \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)$$
$$\varphi_{A\xi+b}(t) = e^{i\langle t,b\rangle}\varphi_\xi(A^T t)$$

,

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Пусть нам дан вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim N(0, R)$. Хотим найти такие $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, что $\eta_i \sim N(0,1)$ и $\xi = A\eta$
Для этого сначала находим ортогональный базис (1). Далее нормируем его (2)

1. $\eta_1' = \xi_1, \quad \eta_2' = \xi_2 - \frac{\mathrm{cov}(\xi_2, \eta_1')}{\mathbb{D}\eta_1'}\eta_1', \quad \dots, \quad \eta_n' = \xi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{cov}(\xi_n, \eta_k')}{\mathbb{D}\eta_k'}$
2. $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \eta_i = \frac{\eta_i'}{\mathbb{D}\eta_i'}$
3. Мы выразили η_i через ξ. Тогда запишем в строки матрицы A^{-1} линейную комбинацию η_i и найдем обратную матрицу к A^{-1}. ($\xi = A\eta \Rightarrow \eta = A^{-1}\xi$)
   В случае, если $\xi \sim N(a, R), a \neq 0$. Тогда, рассматриваем $\xi' = \xi - a \sim N(0, R)$

Сходимости

Сходимость по вероятности

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \to 0, n \to \infty$$

Сходимость почти наверное

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow P\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\}\right) = 1 \qquad \text{поточечная сходимость}$$

Критерий сходимости п.н

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad P(\sup_{m\geqslant n} |\xi_m - \xi| > \varepsilon) \to 0, n \to \infty$$

Признак сходимости п.н

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftarrow \forall\varepsilon > 0 \ \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \text{ сходится}$$

Сходимость в среднем порядка p

$$p > 0 \quad \xi_n \xrightarrow{Lp} \xi \Leftrightarrow \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \to 0, n \to \infty$$

Сходимость по распределению

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall x \quad F_{\xi_n}(x) \to F_{\xi}(x), n \to \infty$$

Следствия сходимостей

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$ (в случае дискретных величин: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$)
2. $\xi_n \xrightarrow{Lp} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Теорема Пуассона

$$S_n \sim Bin(n,p), \quad np(n) \to \lambda \quad \lambda > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}+ \quad P(S_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, n \to \infty$$

Теорема Муавра-Лапласа

$$p = const \in (0,1) \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P_n(a,b) = P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right)$$

$$\sup_{a<b} \left| P_n(a,b) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

ЗБЧ

Закон больших чисел в форме Чебышева

$$\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} - \text{попарно некорр. с.в} \quad \exists c \ \forall n \ \mathbb{D}\xi_n \leqslant c \quad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \ \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left| \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \right| \geqslant \varepsilon \right) \to 0, n \to \infty$$

Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова

$$\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} - \text{посл. нез. и одинаково распр. с.в.} \ \ \mathbb{E}\xi_1 < \infty \Rightarrow \frac{S_n}{n} \overset{\text{п.н.}}{\to} \mathbb{E}\xi_1$$

ЦПТ

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ - нез. одинак. распр., $\mathbb{E}\xi_1 = a, \mathbb{D}\xi = \omega^2$. Тогда:

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{d}{\to} N(0,1), \qquad \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \overset{d}{\to} N(0, \sigma^2)$$

Многомерная ЦПТ

$$\{\xi_n, n \in N\} - \text{послед. независ. одинаково распр. с.в. из } R^m$$
$$a = \mathbb{E}\xi_1, \quad R = \mathbb{D}\xi_1 \quad \text{конечные}$$
$$S_n = \xi_1 + \ldots + x_n$$
$$\text{Тогда } \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \overset{d}{\to} N(0, R)$$

Для размера 2:

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}Y \\ \mathbb{E}Z \end{pmatrix}\right) \overset{d}{\to} \mathbb{N}(0, \Sigma), \text{ где } \Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{D}Y & \operatorname{cov}(Y,Z) \\ \operatorname{cov}(Y,Z) & \mathbb{D}Z \end{pmatrix}$$

Наследование сходимости:

$$\xi_n \overset{\text{п.н.}/p/d}{\to} \xi, \quad f - \text{непрер. относ. } \xi \Rightarrow f(\xi_n) \overset{\text{п.н.}/p/d}{\to} f(\xi)$$

Лемма Слуцкого:

$$\xi_n \overset{d}{\to} \xi, \quad \eta_n \overset{d}{\to} C \text{ - константа} \Rightarrow \xi_n(+/\cdot)\eta_n \overset{d}{\to} \xi(+/\cdot)C$$

Неравенства

Неравенство Маркова

$$\xi \geqslant 0, a > 0 \Rightarrow P[\xi \geqslant a] \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{a}$$

Неравенство Чебышева

$$\mathbb{D}\xi < \infty \Rightarrow P[|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant a] \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

Свертки

Если ξ и η независимые случайные величины, тогда:

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y)p_\eta(x-y)dy$$

$$p_{\xi-\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y)p_\eta(x+y)dy$$

$$p_{\xi\cdot\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y)p_\eta(x/y)\frac{1}{|y|}dy$$

$$p_{\xi/\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y)p_\eta(xy)|y|dy$$

Выведение формулы свертки

Можно пользоваться только сверткой для суммы, остальные нужно дополнительно выводить. Покажем, как вывести свертку для умножения:

$$P(\xi\cdot\eta \leqslant z) = \iint\limits_{x\cdot y\leqslant z} p_{\xi\cdot\eta}(x,y)dxdy =_\star \iint\limits_{x\cdot y\leqslant z} p_\xi(x)p_\eta(y)dxdy$$

$$\text{замена: } \begin{cases} u = x \\ v = x\cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases}$$

$$\det J = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \Rightarrow |\det J| = \frac{1}{|u|}$$

$$\iint\limits_{x\cdot y\leqslant z} p_\xi(x)p_\eta(y)dxdy = \iint\limits_{v\leqslant z} p_\xi(u)p_\eta\left(\frac{v}{u}\right)\underbrace{\frac{1}{|u|}}_{|\det J|}dudv =_{\star\star} \int\limits_{-\infty}^{z}dv\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi\left(\frac{v}{u}\right)p_\eta(u)\frac{1}{|u|}du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{\xi\cdot\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x/y)p_\eta(y)\frac{1}{|y|}dy$$

$\star$ - пользуемся независимостью

$\star\star$ - легендарная теорема Фубини

Формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}$$

Допы

Интегралы

Интегрирование по частям

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int\limits_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'vdx$$

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

Для сверки

$\int\limits_a^{+\infty} e^{-xc}dx = \frac{e^{-ac}}{c}, c > 0$	$\int\limits_a^{+\infty} x^{-xc}dx = \frac{(ac+1)e^{-ac}}{c^2}, c > 0$
$\int\limits_a^{+\infty} x^2 e^{-xc}dx = \frac{((ac)^2 + eac + 2)e^{-ac}}{c^3}, c > 0$	$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\int\limits_a^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{e^{-a^2}}{a}$	$\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ax-bx^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}}, b > 0$	

Табличные интегралы

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$		

Интегралы, которые не смогли

$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx$$