

Calculus - Exam4

Made by [@dsalakhov](#) и [@azakarka](#)

Актуальную версию файла можно найти в [канале](#)

Материал к экзамену в 4 модуле. Матанализ

Задача 1

Условие

Найдите производную функции f в точке M по направлению вектора \vec{a} :

1. $f = xy^2z^3$, $M = (3, 2, 1)$, $\vec{a} = (3, 4, 5)$
2. $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M = (3, 3, 1)$, $\vec{a} = (-1, 2, 2)$

Решение

Пункт а

В самом начале отнормируем направляющий вектор. $\vec{b} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, 5)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \left(3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 4 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 5 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Найдем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2 z^2 \end{cases}$$

Подставляем в выражение:

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{5\sqrt{2}} (3y^2 z^3 + 8xyz^3 + 15xy^2 z^2)$$

Осталось лишь найти значение в точке:

$$\frac{\partial f}{\partial b} \Big|_{(3,2,1)} = \frac{1}{5\sqrt{2}} (3 \cdot 4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 15 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1) = \frac{1}{5\sqrt{2}} (12 + 48 + 180) = 24\sqrt{2}$$

Пункт б

Делаем тоже самое:

$$b = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{3} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{3(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot (-2x + 4y + 4z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} \Big|_{(3,3,1)} = \frac{10}{3 \cdot 19} = \frac{10}{57}$$

Задача 2

Условие

Вычислите значение дифференциала функции

$$f(x, y) = x^3 y^6 + e^{x+y^2}$$

в точке $(1, 1)$ на векторе $(1, 2)$

Решение

В дифференциале уже не надо нормировать вектор.

воспользуемся равенством:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Наш вектор v и будет отвечать (dx, dy) , мы как бы приближаемся по нему. Посчитаем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^6 + e^{x+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3 y^5 + 2y \cdot e^{x+y^2} \end{cases}$$

$$df \Big|_{(1,1)} = (3 + e^2)dx + (6 + 2e^2)dy$$

тогда ответ:

$$(3 + e^2) \cdot 1 + (6 + 2e^2) \cdot 2 = 5e^2 + 15$$

Задача 3

Условие

Найдите касательную плоскость

1. к графику функции $z = e^x xy + e^y xy$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2e)$
2. к поверхности, заданной уравнением $z^2 = x^3 + y^2$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$

Решение

Задача 9.2. Пусть гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$. Используя тот факт, что градиент ортогонален множествам уровня, докажите, что

а) уравнение касательной плоскости в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0;$$

б) уравнение нормали в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

Пункт а

приведем к нужному виду:

$$F(x; y; z) = e^x xy + e^y xy - z = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x; y; z) = e^x y + e^x xy + e^y y \\ F'_y(x; y; z) = e^x x + e^y x + e^y xy \\ F'_z(x; y; z) = -1 \end{cases}$$

Подставим в точку

$$\begin{cases} F'_x(1; 1; 2e) = e + e + e \\ F'_y(1; 1; 2e) = e + e + e \\ F'_z(1; 1; 2e) = -1 \end{cases}$$

Ответ:

$$3e(x - 1) + 3e(y - 1) - (z - 2e) = 0 \Rightarrow 3ex + 3ey - z = 4e$$

Пункт б

$$F(x; y; z) = x^3 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x; y; z) = 3x^2 \\ F'_y(x; y; z) = 2y \\ F'_z(x; y; z) = -2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x(2; 1; 3) = 12 \\ F'_y(2; 1; 3) = 2 \\ F'_z(2; 1; 3) = -6 \end{cases}$$

Ответ:

$$12(x - 2) + 2(y - 1) - 6(z - 3) = 0 \Rightarrow 6x + y - 3z = 3$$

Задача 4

Условие

Пусть φ - дважды непрерывно дифференцируемая, а f — сложная функция, заданная следующим образом

$$f(x, y) = \varphi(xy, x^3 + y^2)$$

1. Выразите дифференциал 1-го порядка функции f через частные производные функции φ
2. Выразите дифференциал 2-ого порядка функции f через частные производные функции φ

Решение

Найти решение таких же задач с семинара можно [ТУТ](#) с примерно 24-ой минуты

$$u = xy, v = x^3 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_u \cdot y + f'_v \cdot 2x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f'_u \cdot x + f'_v \cdot 2y$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (f'_u \cdot y + f'_v \cdot 2x^2) dx + (f'_u \cdot x + f'_v \cdot 2y) dy$$

Первый дифференциал нашли, найдем вторые:

(так как φ дважды дифференцируема по Шварцу смешанные производные

равны)

$$\begin{aligned}f''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(f'_u \cdot y + f'_v \cdot 2x^2) = y \cdot (f''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{vu} \frac{\partial v}{\partial x}) + \\&\quad + 4x \cdot f'_v + 2x^2 \cdot (f''_{uv} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) = \\&\quad = xyf''_{uu} + 4xf'_v + 4x^2yf''_{uv} + 4x^4f''_{vv} \\f''_{xy} &= f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(f'_u \cdot x + f'_v \cdot 2y) = \\&= f'_u + x(f''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{vu} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) + 2y(f''_{uv} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) = \\&\quad f'_u + xyf''_{uu} + 3x^3f''_{vu} + 2xyf''_{uv} + 6x^2yf''_{vv} = \\&\quad f'_u + xyf''_{uu} + xf''_{vu}(3x^2 + 2y) + 6x^2yf''_{vv} \\f''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u \cdot x + f'_v \cdot 2y) = x(f''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{vu} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) + 2f'_v + 2y(f''_{uv} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) = \\&\quad x^2f''_{uu} + 2xyf''_{vu} + 2f'_v + 2xyf''_{uv} + 4y^2f''_{vv} = \\&\quad x^2f''_{uu} + 4xyf''_{vu} + 4y^2f''_{vv} + 2f'_v\end{aligned}$$

Теперь просто подставим все, что мы нашли в равенство (автор не видит смысл делать это явно)

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

Задача 5

Условие

Функция $z = z(x, y)$ задана неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x = v \sin u \\ y = v \cos u \\ z = uv^2 \end{cases}$$

Найдите dz и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $u = \frac{\pi}{4}$, $v = 1$

Решение

Задача 6

Условие

Найдите все точки локального экстремума функции

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 + 12y$$

Решение

Найдем всех кандидатов, то есть точки, в которых дифференциал равен 0:

$$df = (6x^2 - 6y)dx + (-6x - 6y + 12)dy$$

$$df = 0 \iff \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6x + 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow P_1 = (1, 1), P_2 = (-2, 4)$$

Нашли кандидатов, теперь посмотрим на второй дифференциал функции, выпишем сразу в матрицу, чтобы применить критерий Сильвестра:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{применим хитрость с линала}] \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -72x - 36 \end{cases}$$

подставим обе точки:

$$P_1 = (1, 1) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -108 \end{cases}$$

нулевых миноров нет, по критерию она неопределенная

$$P_2 = (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \max$$

Ответ:

точка $(-2, 4)$ - точка локального максимума

Задача 7

Условие

Найдите все точки условного локального экстремума функции

1. $f(x, y, z) = \sqrt{3}x + 3y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, если $xy = z^2 - 6z + 5$

Решение

Пункт а

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$$

найдем кандидатов на точку локального экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = \sqrt{3} + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 3 + 2y\lambda = 0 \\ L'_z = 2 - 2z\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим систему и получим:

$$P_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right) \text{ с } \lambda = 1$$

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -1\right) \text{ с } \lambda = -1$$

Как и в предыдущей задаче мы решим задачу критерием Сильвестра, составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

видно, что невырожденная матрица либо положительно либо отрицательно определенная при любых условиях, поэтому даже не смотря на значение dF , можно сразу выписать ответ:

P_1 - точка локального условного минимума

P_2 - точка локального условного максимума

Пункт 6

$$F = z^2 - 6z + 5 - xy$$

$$L = f + \lambda F$$

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y\lambda = 0 \\ L'_y = 2y - x\lambda = 0 \\ L'_z = 2z + 2z\lambda - 6\lambda = 0 \\ L'_\lambda = z^2 - 6z + 5 - xy = 0 \end{cases}$$

Решаем, получаем:

$$P_1 = (0, 0, 5), \lambda = \frac{1}{5}$$

$$P_2 = (0, 0, 1), \lambda = 5$$

составим матрицу:

тут уже не так очевидно, выпишем вторые дифференциалы:

$$\begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2 + 2\lambda)dz^2 \\ dF = -ydx - xdy + (2z - 6)dz = 0 \end{cases}$$

Подставим точки:

$$P_1 = (0, 0, 5) : \begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2 + 2\lambda)dz^2 \\ dF = (10 - 6)dz = 0 \end{cases} \Rightarrow dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = 2 - \lambda^2 = 2 - \frac{1}{25} > 0 \end{cases} \Rightarrow \min$$

для точки P_2 будет тоже самое, кроме λ , получится уже неопределенная матрица

Ответ:

P_1 - точка локального условного минимума