Calculus-Exam4

Дисклеймер. Это черновой вариант, возможно, в файле присутствуют дофигищк ошибок

Made by @dsalakhov и @azakarka
Актуальную версию файла можно найти в канале
Нашёл ошибку? Лучше всего написать об этом на гитхабе

Материал к экзамену в 4 модуле. Матанализ

Разбор Листка 13+

Задача 1

Условие

Найдите производную функции f в точке M по направлению вектора $\vec{a}$:

1. $f = xy^2z^3$, $M = (3, 2, 1)$, $\vec{a} = (3, 4, 5)$
2. $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M = (3, 3, 1)$, $\vec{a} = (-1, 2, 2)$

Решение

Пункт а

В самом начале отнормируем направляющий вектор. $\vec{a} = (3, 4, 5) \rightsquigarrow \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, 5)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \left(3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 4 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 5 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Найдем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2 \end{cases}$$

Подставляем в выражение:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(3y^2z^3 + 8xyz^3 + 15xy^2z^2\right)$$

Осталось лишь найти значение в точке:

$$\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{(3,2,1)} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3\cdot 4\cdot 1 + 8\cdot 3\cdot 2\cdot 1 + 15\cdot 3\cdot 4\cdot 1) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(12 + 48 + 180) = 24\sqrt{2}$$

Пункт б

Делаем тоже самое:

$$\vec{a} = (-1, 2, 2) \rightsquigarrow \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{3}\left(-\frac{\partial f}{\partial x} + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{3(x^2+y^2+z^2)}\cdot(-2x + 4y + 4z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\Big|_{(3,3,1)} = \frac{10}{3\cdot 19} = \frac{10}{57}$$

Задача 2

Условие

Вычислите значение дифференциала функции

$$f(x, y) = x^3y^6 + e^{x+y^2}$$

в точке (1, 1) на векторе (1, 2)

Решение

В дифференциале уже не надо нормировать вектор.

воспользуемся равенством:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Наш вектор v и будет отвечать (dx, dy), мы как бы приближаемся по нему. Посчитаем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^6 + e^{x+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y^5 + 2y \cdot e^{x+y^2} \end{cases}$$

$$df\Big|_{(1,1)} = (3+e^2)dx + (6+2e^2)dy$$

тогда ответ:

$$(3+e^2) \cdot 1 + (6+2e^2) \cdot 2 = 5e^2 + 15$$

Задача 3

Условие

Найдите касательную плоскость

1. к графику функции $z = e^x xy + e^y xy$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2e)$
2. к поверхности, заданной уравнением $z^2 = x^3 + y^2$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$

Решение

Задача 9.2. Пусть гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$. Используя тот факт, что градиент ортогонален множествам уровня, докажите, что

а) уравнение касательной плоскости в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0;$$

б) уравнение нормали в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

Пункт а

приведем к нужному виду:

$$F(x; y; z) = e^x xy + e^y xy - z = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x; y; z) = e^x y + e^x xy + e^y y \\ F'_y(x; y; z) = e^x x + e^y x + e^y xy \\ F'_z(x; y; z) = -1 \end{cases}$$

Подставим в точку

$$\begin{cases} F'_x(1;1;2e) = e + e + e = 3e \\ F'_y(1;1;2e) = e + e + e = 3e \\ F'_z(1;1;2e) = -1 \end{cases}$$

Ответ:

$$3e(x-1) + 3e(y-1) - (z-2e) = 0 \Rightarrow 3ex + 3ey - z = 4e$$

Пункт б

$$F(x;y;z) = x^3 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x;y;z) = 3x^2 \\ F'_y(x;y;z) = 2y \\ F'_z(x;y;z) = -2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x(2;1;3) = 12 \\ F'_y(2;1;3) = 2 \\ F'_z(2;1;3) = -6 \end{cases}$$

Ответ:

$$12(x-2) + 2(y-1) - 6(z-3) = 0 \Rightarrow 6x + y - 3z = 4$$

Задача 4

Условие

Пусть φ - дважды непрерывно дифференцируемая, а f — сложная функция, заданная следующим образом

$$f(x,y) = \varphi(xy, x^3 + y^2)$$

1. Выразите дифференциал 1-го порядка функции f через частные производные функции φ
2. Выразите дифференциал 2-ого порядка функции f через частные производные функции φ

Решение

Найти решение таких же задач с семинара можно тут с примерно 24-ой минуты

$$u = xy, v = x^3 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'_u \cdot y + \varphi'_v \cdot 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (\varphi'_u \cdot y + \varphi'_v \cdot 3x^2)dx + (\varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y)dy$$

Первый дифференциал нашли, поищем вторые:
(так как φ дважды дифференцируема по Шварцу смешанные производные равны)

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi'_u \cdot y + \varphi'_v \cdot 3x^2) = y \cdot (\varphi''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{uv}\frac{\partial v}{\partial x}) +$$
$$+4x \cdot \varphi'_v + 3x^2 \cdot (\varphi''_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) =$$
$$= xy\varphi''_{uu} + 4x\varphi'_v + 6x^2y\varphi''_{uv} + 9x^4\varphi''_{vv}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y) =$$
$$= \varphi'_u + x(\varphi''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{vu} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) + 2y(\varphi''_{uv} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) =$$
$$\varphi'_u + xy\varphi''_{uu} + 3x^3\varphi''_{vu} + 2xy\varphi''_{uv} + 6x^2y\varphi''_{vv} =$$
$$\varphi'_u + xy\varphi''_{uu} + x\varphi''_{vu}(3x^2 + 2y) + 6x^2y\varphi''_{vv}$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y) = x(\varphi''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi''_{uv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) + 2\varphi'_v + 2y(\varphi''_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) =$$
$$x^2\varphi''_{uu} + 2xy\varphi''_{uv} + 2\varphi'_v + 2xy\varphi''_{vu} + 4y^2\varphi''_{vv} =$$
$$x^2\varphi''_{uu} + 4xy\varphi''_{vu} + 4y^2\varphi''_{vv} + 2\varphi'_v$$

Теперь просто подставим все, что мы нашли в равенство (автор не видит смысл делать это явно)

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

Задача 5

Условие

Функция $z = z(x, y)$ задана неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x = v\sin u \\ y = v\cos u \\ z = uv^2 \end{cases}$$

Найдите dz и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $u = \frac{\pi}{4}$, $v = 1$

Решение

$$dz = d(uv^2) = z'_v dv + z'_u du = 2vu \cdot dv + v^2 \cdot du$$

теперь нам нужно выразить (dv, du) через (dx, dy), так как нас просят выразить dz через (x, y).

Мы это осуществим с помощью матрицы Якоби:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin u & v\cos u \\ \cos u & -v\sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dv \\ du \end{pmatrix}$$

Мы нашли эти выражения с помощью первых двух равенств в системе.

Найдем:

$$\begin{pmatrix} \sin u & v\cos u \\ \cos u & -v\sin u \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-v} \begin{pmatrix} -v\sin u & -v\cos u \\ -\cos u & \sin u \end{pmatrix} (*)$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} dv \\ du \end{pmatrix} = \frac{1}{-v} \begin{pmatrix} -v\sin u & -v\cos u \\ -\cos u & \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Теперь уже можно выразить dz через (x, y):

$$dz = 2vu \cdot dv + v^2 \cdot du = 2vu(\sin u \cdot dx + \cos u \cdot dy) - v(-\cos u \cdot dx + \sin u \cdot dy) =$$
$$(2vu\sin u + v\cos u)dx + (2vu\cos u - v\sin u)dy$$

Найдем также значение в точке, для этого найдем саму точку:

$$\begin{cases} x = v\sin u \\ y = v\cos u \\ z = uv^2 \\ v = 1 \\ u = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{4})$$

Тогда:

$$dz\Big|_P = (\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})dx + (\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})dy$$

Второй дифференциал уже не инвариантен, поэтому найдем его стандартным способом. Для нахождением z'_y воспользуемся равенством $dz = z'_x dx + z'_y dy$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(2vu\cos u - v\sin u) =$$
$$= 2v'_x u\cos u + 2vu'_x\cos u - 2vu\sin u \cdot u'_x - v'_x\sin u - v\cos u \cdot u'_x =$$
$$= v'_x(2u\cos u - \sin u) + u'_x(2v\cos u - 2vu\sin u - v\cos u)$$

чтобы не таскать с собой громоздкие выражения, сразу подставим точку:

$$\Rightarrow \Big|_P = v'_x(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}) + u'_x(\sqrt{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}) =$$
$$= v'_x(\frac{\pi - 2}{2\sqrt{2}}) + u'_x(\frac{2-\pi}{2\sqrt{2}}) =$$

тут воспользуемся обратной матрицей Якоби $(*)$

$$= \sin u(\frac{\pi-2}{2\sqrt{2}}) + \cos u(\frac{2-\pi}{2\sqrt{2}}) = \frac{\pi - 2 + 2 - \pi}{4} = 0$$

Задача 6

Условие

Найдите все точки локального экстремума функции

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 + 12y$$

Решение

Найдем все стационарные точки, то есть точки, в которых дифференциал равен 0:

$$df = (6x^2 - 6y)dx + (-6x - 6y + 12)dy$$

$$df = 0 \iff \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6x + 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow P_1 = (1, 1), P_2 = (-2, 4)$$

Нашли кандидатов, теперь посмотрим на второй дифференциал функции, выпишем сразу в матрицу, чтобы применить критерий Сильвестра:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{применим хитрость с линала}] \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -72x - 36 \end{cases}$$

подставим обе точки:

$$P_1 = (1, 1) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -108 \end{cases}$$

нулевых миноров нет, по критерию она неопределенная

$$P_2 = (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \max$$

Ответ:

точка $(-2, 4)$ - точка локального максимума

Задача 7

Условие

Найдите все точки условного локального экстремума функции

1. $f(x,y,z) = \sqrt{3}x + 3y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, если $xy = z^2 - 6z + 5$

Решение

Пункт а

Функция ограничитель: $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$
Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,z) = f + \lambda\varphi$$

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = \sqrt{3} + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 3 + 2y\lambda = 0 \\ L'_z = 2 + 2z\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим систему и получим:
$P_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ с $\lambda = 2$
$P_2 = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, 1)$ с $\lambda = -2$

Как и в предущей задачи мы решим задачу критерием Сильвестра, составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

видно, что невырожденная матрица либо положительно либо отрицательно определенная при любых условиях, поэтому даже не смотря на значение $d\varphi$, можно сразу выписать ответ:

P_1 - точка локального условного минимума
P_2 - точка локального условного максимума

Пункт б

$$\varphi(x,y,z) = z^2 - 6z + 5 - xy$$

$$L = f + \lambda\varphi$$

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y\lambda = 0 \\ L'_y = 2y - x\lambda = 0 \\ L'_z = 2z + 2z\lambda - 6\lambda = 0 \\ L'_\lambda = z^2 - 6z + 5 - xy = 0 \end{cases}$$

Решаем, получаем:
$P_1 = (0,0,1), \lambda = \frac{1}{2}$
$P_2 = (0,0,5), \lambda = -\frac{5}{2}$

составим матрицу:

тут уже не так очевидно, выпишем вторые дифференциалы:

$$\begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2+2\lambda)dz^2 \\ d\varphi = -ydx - xdy + (2z-6)dz = 0 \end{cases}$$

Подставим точки:

$$P_1 = (0,0,1) : \begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2+2\lambda)dz^2 \\ d\varphi = (2-6)dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \end{cases} \Rightarrow d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 4 - \lambda^2 = 4 - \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \min$$

$$P_2 = (0,0,5) : \begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2+2\lambda)dz^2 \\ d\varphi = (10-6)dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \end{cases} \Rightarrow d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 4 - \lambda^2 = 4 - \frac{25}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \max$$

Ответ:

P_1 - локальный условный минимум, P_2 - локальный условный максимум