ДИСКЛЕЙМЕР. Это черновой вариант, в файле наверняка присутствуют дофигища ошибок

Made by @dsalakhov и @azakarka
Актуальную версию файла можно найти в канале
Нашёл ошибку? Создай issue на github

Материал к экзамену в 4 модуле. Матанализ

Разбор Листка 13+

Задача 1

Условие

Найдите производную функции f в точке M по направлению вектора $\vec{a}$:

1. $f = xy^2z^3$, $M = (3, 2, 1)$, $\vec{a} = (3, 4, 5)$
2. $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M = (3, 3, 1)$, $\vec{a} = (-1, 2, 2)$

Решение

Пункт а

В самом начале отнормируем направляющий вектор. $\vec{a} = (3, 4, 5) \rightsquigarrow \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, 5)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 4 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 5 \cdot \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Найдем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2 \end{cases}$$

Подставляем в выражение:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(3y^2z^3 + 8xyz^3 + 15xy^2z^2\right)$$

Осталось лишь найти значение в точке:

$$\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{(3,2,1)} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3\cdot 4\cdot 1 + 8\cdot 3\cdot 2\cdot 1 + 15\cdot 3\cdot 4\cdot 1) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(12 + 48 + 180) = 24\sqrt{2}$$

Пункт б

Делаем тоже самое:

$$\vec{a} = (-1, 2, 2) \rightsquigarrow \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{3}\left(-\frac{\partial f}{\partial x} + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{3(x^2+y^2+z^2)}\cdot(-2x + 4y + 4z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\Big|_{(3,3,1)} = \frac{10}{3\cdot 19} = \frac{10}{57}$$

Задача 2

Условие

Вычислите значение дифференциала функции

$$f(x, y) = x^3y^6 + e^{x+y^2}$$

в точке (1, 1) на векторе (1, 2)

Решение

В дифференциале уже не надо нормировать вектор.

воспользуемся равенством:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Наш вектор v и будет отвечать (dx, dy), мы как бы приближаемся по нему. Посчитаем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^6 + e^{x+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y^5 + 2y \cdot e^{x+y^2} \end{cases}$$

$$df\Big|_{(1,1)} = (3+e^2)dx + (6+2e^2)dy$$

тогда ответ:

$$(3+e^2)\cdot 1 + (6+2e^2)\cdot 2 = 5e^2 + 15$$

Задача 3

Условие

Найдите касательную плоскость

1. к графику функции $z = e^x xy + e^y xy$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2e)$
2. к поверхности, заданной уравнением $z^2 = x^3 + y^2$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$

Решение

Задача 9.2. Пусть гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x;y;z) = 0$. Используя тот факт, что градиент ортогонален множествам уровня, докажите, что

а) **уравнение касательной плоскости** в точке $(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0) = 0;$$

б) **уравнение нормали** в точке $(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}.$$

Пункт а

приведем к нужному виду:

$$F(x;y;z) = e^x xy + e^y xy - z = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x;y;z) = e^x y + e^x xy + e^y y \\ F'_y(x;y;z) = e^x x + e^y x + e^y xy \\ F'_z(x;y;z) = -1 \end{cases}$$

Подставим в точку

$$\begin{cases} F'_x(1;1;2e) = e + e + e = 3e \\ F'_y(1;1;2e) = e + e + e = 3e \\ F'_z(1;1;2e) = -1 \end{cases}$$

Ответ:

$$3e(x-1) + 3e(y-1) - (z-2e) = 0 \Rightarrow 3ex + 3ey - z = 4e$$

Пункт б

$$F(x;y;z) = x^3 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x;y;z) = 3x^2 \\ F'_y(x;y;z) = 2y \\ F'_z(x;y;z) = -2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x(2;1;3) = 12 \\ F'_y(2;1;3) = 2 \\ F'_z(2;1;3) = -6 \end{cases}$$

Ответ:

$$12(x-2) + 2(y-1) - 6(z-3) = 0 \Rightarrow 6x + y - 3z = 4$$

Задача 4

Условие

Пусть φ - дважды непрерывно дифференцируемая, а f — сложная функция, заданная следующим образом

$$f(x,y) = \varphi(xy, x^3 + y^2)$$

1. Выразите дифференциал 1-го порядка функции f через частные производные функции φ
2. Выразите дифференциал 2-ого порядка функции f через частные производные функции φ

Решение

Найти решение таких же задач с семинара можно тут с примерно 24-ой минуты

$$u = xy, v = x^3 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\varphi'_u\cdot y+\varphi'_v\cdot 2x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\varphi'_u\cdot x+\varphi'_v\cdot 2y$$

Тогда

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=(\varphi'_u\cdot y+\varphi'_v\cdot 2x^2)dx+(\varphi'_u\cdot x+\varphi'_v\cdot 2y)dy$$

Первый дифференциал нашли, поищем вторые:
(так как φ дважды дифференцируема по Шварцу смешанные производные равны)

$$\begin{gathered}f''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(f'_x)=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi'_u\cdot y+\varphi'_v\cdot 2x^2)=y\cdot(\varphi''_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi''_{uv}\frac{\partial v}{\partial x})+\\ +4x\cdot\varphi'_v+2x^2\cdot(\varphi''_{vu}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi''_{vv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})=\\ =xy\varphi''_{uu}+4x\varphi'_v+4x^2y\varphi''_{uv}+4x^4\varphi''_{vv}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\varphi''_{xy}=\varphi''_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(f'_y)=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi'_u\cdot x+\varphi'_v\cdot 2y)=\\ =\varphi'_u+x(\varphi''_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi''_{vu}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})+2y(\varphi''_{uv}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi''_{vv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x})=\\ \varphi'_u+xy\varphi''_{uu}+3x^3\varphi''_{vu}+2xy\varphi''_{uv}+6x^2y\varphi''_{vv}=\\ f'_u+xy\varphi''_{uu}+x\varphi''_{vu}(3x^2+2y)+6x^2y\varphi''_{vv}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}f''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(\mathbb{f}'_y)=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi'_u\cdot x+\varphi'_v\cdot 2y)=x(\varphi''_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\varphi''_{uv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+2\varphi'_v+2y(\varphi''_{vu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\varphi''_{vv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})=\\ x^2\varphi''_{uu}+2xy\varphi''_{uv}+2\varphi'_v+2xy\varphi''_{vu}+4y^2\varphi''_{vv}=\\ x^2\varphi''_{uu}+4xy\varphi''_{vu}+4y^2\varphi''_{vv}+2\varphi'_v\end{gathered}$$

Теперь просто подставим все, что мы нашли в равенство (автор не видит смысл делать это явно)

$$d^2f=f''_{xx}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}dy^2$$

Задача 5

Условие

Функция $z=z(x,y)$ задана неявно системой уравнений

$$\begin{cases}x=v\sin u\\ y=v\cos u\\ z=uv^2\end{cases}$$

Найдите dz и $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ в точке $u=\frac{\pi}{4}$, $v=1$

Решение

Приведем все к стандартному виду:

$$\begin{cases} F_1(x,y,v,u,z) = x - v\sin u = 0 \\ F_2(x,y,v,u,z) = y - v\cos u = 0 \\ F_3(x,y,v,u,z) = z - uv^2 = 0 \end{cases}$$

Мы знаем только значения $v = 1, u = \frac{\pi}{4}$ найдем все остальные значения в точке.

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = \frac{\pi}{4}$$

$$P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$$

Выпишем матрицу, которая используется в теореме о неявном отображении:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial v} \\ \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial u} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial z} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}\Big|_P = \begin{pmatrix} -\sin u & -\cos u & -2uv \\ -v\cos u & v\sin u & v^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Big|_P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не тяжело увидеть что определитель не нулевой, матрица обратима.

Тогда применим теорему о неявном отображении:

$$\exists f_1, f_2, f_3 : \begin{cases} v = f_1(x,y) \iff x = v\sin u \\ u = f_2(x,y) \iff y = v\cos u \\ z = f_3(x,y) \iff z = uv^2 \end{cases}$$

$$dz = d(uv^2) = (v^2 \cdot u'_x + 2uv \cdot v'_x)dx + (v^2 \cdot u'_y + 2uv \cdot v'_y)dy$$

$$\begin{cases} 1 = \sin u \cdot v'_x + v\cos u \cdot u'_x \\ 0 = \cos u \cdot v'_x - v\sin u \cdot u'_x \end{cases}\Big|_P = \begin{cases} 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(v'_x + u'_x) \\ 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(v'_x - u'_x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u'_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

подставим в дифференциал

$$dz\Big|_P = (u'_x + \sqrt{2}v'_x)dx + (u'_y + \sqrt{2}v'_y)dy =$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)dx + (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)dy$$

теперь найдем $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y) = \frac{\partial z}{\partial x}(v^2 \cdot u'_y + 2uv \cdot v'_y) =$$

$$2v \cdot v'_x \cdot u'_y + v^2 \cdot (u''_{yx}) + 2u \cdot u'_x \cdot v \cdot v'_y + 2uv \cdot v'_x \cdot v'_y + 2uv \cdot v''_{yx}$$

нужно теперь найти первые частные производные по y и смешанные производные

$$\begin{cases} 0 = \sin u \cdot v'_y + v\cos u \cdot u'_y \\ 1 = \cos u \cdot v'_y - v\sin u \cdot u'_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = v'_y + u'_y \\ \sqrt{2} = v'_y - u'_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u'_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \cos u \cdot u'_x + \sin u \cdot v''_{yx} + v'_x \cdot \cos u \cdot u'_y - v\sin u \cdot u'_x \cdot u'_y + v\cos u \cdot u''_{yx} \\ 1 = -\sin u \cdot u'_x v'_y + \cos u \cdot v''_{yx} - v'_x \sin u \cdot u'_y - v\cos u \cdot u'_x u'_y - v\sin u u''_{yx} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + v''_{yx} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + u''_{yx} \\ \sqrt{2} = -\frac{1}{2} + v''_{yx} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - u''_{yx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} = v''_{yx} + u''_{yx} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = v''_{yx} - u''_{yx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v''_{yx} = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \\ u''_{yx} = \frac{-3\sqrt{2}-2}{4} \end{cases}$$

вернемся к нахождению:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_P = \frac{1}{2}(-\sqrt{2} + \frac{-3\sqrt{2}-2}{4} + \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}+2}{4}\pi)$$

Задача 6

Условие

Найдите все точки локального экстремума функции

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 + 12y$$

Решение

Найдем все стационарные точки, то есть точки, в которых дифференциал равен 0:

$$df = (6x^2 - 6y)dx + (-6x - 6y + 12)dy$$

$$df = 0 \iff \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6x + 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow P_1 = (1, 1), P_2 = (-2, 4)$$

Нашли кандидатов, теперь посмотрим на второй дифференциал функции, выпишем сразу в матрицу, чтобы применить критерий Сильвестра:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{применим хитрость с линала}] \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -72x - 36 \end{cases}$$

подставим обе точки:

$$P_1 = (1, 1) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -108 \end{cases}$$

нулевых миноров нет, по критерию она неопределенная

$$P_2 = (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \max$$

Ответ:
точка $(-2, 4)$ - точка локального максимума

Задача 7

Условие

Найдите все точки условного локального экстремума функции

1. $f(x, y, z) = \sqrt{3}x + 3y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, если $xy = z^2 - 6z + 5$

Решение

Пункт а

Функция ограничитель: $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$
Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = f + \lambda\varphi$$

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = \sqrt{3} + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 3 + 2y\lambda = 0 \\ L'_z = 2 + 2z\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим систему и получим:
$P_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ с $\lambda = 2$
$P_2 = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, 1)$ с $\lambda = -2$

Как и в предущей задачи мы решим задачу критерием Сильвестра, составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

видно, что невырожденная матрица либо положительно либо отрицательно определенная при любых условиях, поэтому даже не смотря на значение $d\varphi$, можно сразу выписать ответ:

P_1 - точка локального условного минимума
P_2 - точка локального условного максимума

Пункт б

$$\varphi(x,y,z)=z^2-6z+5-xy$$

$$L=f+\lambda\varphi$$

$$\begin{cases} L'_x=2x-y\lambda=0 \\ L'_y=2y-x\lambda=0 \\ L'_z=2z+2z\lambda-6\lambda=0 \\ L'_\lambda=z^2-6z+5-xy=0 \end{cases}$$

Решаем, получаем:
$P_1=(0,0,1),\lambda=\frac{1}{2}$
$P_2=(0,0,5),\lambda=-\frac{5}{2}$

составим матрицу:

тут уже не так очевидно, выпишем вторые дифференциалы:

$$\begin{cases} d^2L=2dx^2-2\lambda dxdy+2dy^2+(2+2\lambda)dz^2 \\ d\varphi=-ydx-xdy+(2z-6)dz=0 \end{cases}$$

Подставим точки:

$$P_1=(0,0,1):\begin{cases} d^2L=2dx^2-2\lambda dxdy+2dy^2+(2+2\lambda)dz^2 \\ d\varphi=(2-6)dz=0\Rightarrow dz=0 \end{cases}\Rightarrow d^2L=2dx^2-2\lambda dxdy+2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \sigma_1=2 \\ \sigma_2=4-\lambda^2=4-\frac{1}{4}>0 \end{cases}\Rightarrow\min$$

$$P_2=(0,0,5):\begin{cases} d^2L=2dx^2-2\lambda dxdy+2dy^2+(2+2\lambda)dz^2 \\ d\varphi=(10-6)dz=0\Rightarrow dz=0 \end{cases}\Rightarrow d^2L=2dx^2-2\lambda dxdy+2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \sigma_1=2 \\ \sigma_2=4-\lambda^2=4-\frac{25}{4}<0 \end{cases}\Rightarrow\max$$

Ответ:

P_1 - локальный условный минимум, P_2 - локальный условный максимум