Made by [@dsalakhov]
Актуальную версию файла можно найти в [канале]
Уведомлять об опечатках, багах в решениях в лс или на [гитхабе]

Благодарность выражается:
[@nol_erk]- за прорешанный листок, с которым можно было свериться :)

Подготовительный лист к КР-1

Задача #1

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\pi \cdot (\pi+1) \cdot \ldots \cdot (\pi+n-1) \cdot n}$$

Решение

$$\frac{(n+1)!}{\pi \cdot (\pi+1) \cdot \ldots \cdot (\pi+n-1) \cdot n)} < \frac{(n+1)!}{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+2) \cdot n} = \frac{2(n+1)!}{(n+2)!n} = \frac{2}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{сходится}$$

Задача #2

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n+\frac{1}{n}} \cos \frac{3+2n}{3+2n+n^2}$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+2n}{3+2n+n^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos \frac{3+2n}{3+2n+n^2} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+\frac{1}{n}} \geqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \geqslant 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+\frac{1}{n}} \cos \frac{3+2n}{3+2n+n^2} \neq 0 \Rightarrow \text{расходится}$$

Задача #3

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(0.5+1)(0.5+2) \cdot \ldots \cdot (0.5+n)}{(1.5+1)(1.5+2) \cdot \ldots \cdot (1.5+n)} \right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0$$

Решение

$$a_n = \left(\frac{1.5 \cdot \cancel{2.5} \cdot \ldots \cdot \cancel{(0.5+n)}}{\cancel{2.5} \cdot \cancel{3.5} \cdot \ldots \cdot (1.5+n)} \right)^{\alpha} = \left(\frac{1.5}{1.5+n} \right)^{\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ сходится при } \alpha > 1, \text{иначе расходится}$$

Задача #4

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}$$

Решение

$$a_n = \cos \frac{\pi n}{6}, \quad b_n = \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{\pi}{6}|} \quad // \text{ внизу можно посмотреть как это доказывается}$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = 0 \quad // \text{лог слабее степени}$$

$$\left(\frac{\ln^6 x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{6 \ln^5 x \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln^6 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{12 \ln^5 x - \ln^6 x}{2x^{3/2}} = 0 \Rightarrow 12 - \ln x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = e^{12}. \quad \text{В овербольших числах производная } \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\lceil e^{12} \rceil - 1} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}}_{const} + \underbrace{\sum_{\lceil e^{12} \rceil}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}}_{\text{сходится по Дирихле}} - \text{сходится}$$

Задача #5

Исследовать условную/абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+4}{n+3}$$

Решение

$$a_n = (-1)^n \ln \frac{n+4}{n+3}, \quad c_n = |a_n|$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = \ln \frac{\cancel{5}}{4} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \cdot \ldots \cdot \frac{n+4}{\cancel{n+3}} = \ln \frac{n+4}{4} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} B_n = +\infty \Rightarrow \text{ряд не сходится абсолютно}$$

$$b_n = \ln \frac{n+4}{n+3}, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0, \quad \{b_n\} \text{ убывает} \Rightarrow \text{по признаку Лейбница исходный ряд сходится условно}$$

Задача #6

Исследовать на равномерную сходимость:

$$f_n(x) = \frac{1+\ln(nx)}{nx}, \quad a)D_1 = (0;1), \quad b)D_2 = (1;+\infty)$$

Решение

При фиксированно x, $f_n(x)$ сходится к 0. Иначе говоря, последовательность поточечно сходится к нулю. Это означает, что если последовательность сходится равномерно, то оно должно сходится равномерно к 0:

a)

$$x = \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) = \frac{1+\ln(1)}{1} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{D_1} |f_n(x) - f(x)| \neq 0 \Rightarrow \text{посл. равномерно не сходится}$$

b)

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x)| < \varepsilon \overset{f_n(x)\geqslant 0, x\in D_2}{\Rightarrow} \frac{1+\ln(nx)}{nx} < \varepsilon$$

$$f_n'(x) = \frac{\frac{n}{nx}\cdot nx - (1+\ln(nx))\cdot n}{n^2x^2} = \frac{-\ln(nx)}{nx^2} < 0 \text{ при всех } x \in D_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{D_2} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1+\ln n}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{D_2} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \text{ сходится равномерно}$$

Задача #7

Исследовать на равномерную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)\cdot \sin\frac{1}{nx}}{4+\ln^2(nx)}, \quad D = [2;+\infty)$$

Решение

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)\cdot\sin\frac{1}{nx}}{4+\ln^2(nx)}, \quad |f_n(x)| = \frac{|\cos(nx)|\cdot|\sin\frac{1}{nx}|}{4+\ln^2(nx)} \leqslant \frac{1\cdot(\frac{1}{nx}+o(\frac{1}{nx}))}{\ln^2(nx)} = \frac{1+o(1)}{nx\ln^2(nx)} \sim$$

$$\sim \frac{1}{nx\ln^2(nx)} <_\star \frac{1}{n\ln^2 n} \text{ сходится (ряд Бертрана)}$$

$$\star \quad n \geqslant 2$$

Чем пользоваться?

Необходимое условие сходимости ряда

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Иначе говоря:

Если, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не сходится. Однако, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может расходится, например: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Критерии сходимости ряда

Критерий Коши

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m : n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

Обратный критерий Коши

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n, m : n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \geqslant \varepsilon$$

Сходимость произведений

(Абсолютная/Условная) сходимость произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, эквивалентна (абсолютной/условной) сходимостью $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

Признаки сходимости <u>знакопостоянного</u> ряда

Первый признак сравнения

Пусть $a_n \geqslant b_n \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда

1. если сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$,

2. если расходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то расходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Второй признак сравнения

$a_n, b_n > 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ эквивалентны по сходимости, то есть (ра-)сходятся одновременно.

Признак Вейерштрасса

Если $|a_n| \leqslant b_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Признак Коши

Если $a_n \geqslant 0$ и $\{a_n\}$ - монотонно невозрастающая последовательность, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

Интегральный признак Коши

Если $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0$ и $f(x)$ монотонно невозрастает, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sim \int\limits_{0}^{\infty} f(x) dx$$

Радикальный признак Коши

Если $a_n \geqslant 0, \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то

1. если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится
3. если $q = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ как сходится $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$, так и расходится $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1\right)$

Признак Даламбера

Если $a_n > 0, d = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad D = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то

1. если $d > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

2. если $D < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

Признак Гаусса

Если $a_n > 0$ и $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \delta > 0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Признаки сходимости знакопеременного ряда

Признак Дирихле

$$\left.\begin{array}{c} \exists M > 0 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant M \\ \{b_n\} \text{ (нестрого) монотонна} \\ \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится}$$

Признак Абеля

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \\ \{b_n\} \text{ (нестрого) монотонна} \\ \exists M > 0 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leqslant M \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится}$$

Признак Лейбница

$$\left.\begin{array}{c} b_n \geqslant 0, \quad \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0 \\ \{b_n\} \text{ (нестрого) монотонно убывает} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \text{ сходится}$$

Причем оценка на остаток: $|r_n| \leqslant b_{n+1}$

Перестановки членов ряда

Сходимость перестановки

Если $a_n \geqslant 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд полученной из какой-то перестановки членов исходного ряда сходится и равен изначальному ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Абсолютная сходимость перестановки

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд полученной из какой-то перестановки членов исходного ряда сходится абсолютно и равен изначальному ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Условная сходимость перестановки (конструктив)

По теореме Римана, тогда существуют следующие перестановки:

1. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$
2. $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \pm\infty$
3. $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция: последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела

Произведения рядов

Произведение абсолютно сходящихся рядов

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ и оба сходятся абсолютно
$\Rightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B$

Теорема Мертенса

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, оба сходятся и хотя бы один из них сходится абсолютно $\Rightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B$, где $c_n = a_1 b_n + \ldots + a_n b_1$

Теорема Абеля

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = C$, где $c_n = a_1 b_n + \ldots + a_n b_1$
Тогда $C = AB$

Функциональная последовательность

Поточечная сходимость

$f_n \xrightarrow{D} f$ - поточечная сходимость функциональная последовательности $f_n(x)$ к функции $f(x)$:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(x, \varepsilon) \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Равномерная сходимость

$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ - равномерная сходимость функциональная последовательности $f_n(x)$ к функции $f(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n > N, \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной сходимости от поточечной, что существует N для всех x при конкретном ε.

Замечание: $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f$

Критерии равномерной сходимости

lim-sup критерий

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sup_D |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Критерий коши

Пусть $f_n, f : D \to \mathbb{R}$. Тогда:

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N, \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Функциональные ряды

Поточечная сходимость

Пусть $D \subset \mathbb{R}, \quad f_n, S : D \to \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots$. Тогда, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится поточечно к $S(x)$ на множестве D, если $S_n \xrightarrow{D} S, n \to \infty$, где $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_n(x)$

Равномерная сходимость

Пусть $D \subset \mathbb{R}, \quad f_n, S : D \to \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots$. Тогда, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно к $S(x)$ на множестве D, если $S_n \overset{D}{\rightrightarrows} S, n \to \infty$, где $S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$

Критерии равномерной сходимости функциональных рядов

Критерий Коши

$$f_n : D \to \mathbb{R}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n > N, \quad \forall x \in D \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Признак Вейерштрасса

$$\left.\begin{matrix} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad |f_n(x)| \leqslant b_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows}$$

Признак Дирихле

$$\left.\begin{matrix} a_n, b_n : D \to \mathbb{R} \\ \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D \quad \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant M \\ \{b_n(x)\} \text{ монотонна по } n \text{ (т.е } \forall x \in D \quad b_n(x) \geqslant_{/\leqslant} b_{n+1}(x)) \\ b_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows}$$

Признак Абеля

$$\left.\begin{matrix} a_n, b_n : D \to \mathbb{R} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} \\ \{b_n(x)\} \text{ монотонна по } n \\ \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D \quad |b_n(x)| \leqslant M \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows}$$

Полезные штучки

Как ограничивать сумму (ко-)синусов

Ограничим сумму синусов (для косинусов аналогично)

Есть два варианта: один для русов, другой для ящеров:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin \alpha k = \operatorname{Im} \sum\limits_{k=0}^{n} (e^{\alpha i})^k \leqslant \left| \sum\limits_{k=1}^{n} (e^{\alpha i})^k \right| =$ [геом прогрессия] $= \left| \frac{e^{\alpha i}(1-e^{\alpha n i})}{1-e^{\alpha i}} \right| \leqslant \frac{2}{1-e^{\alpha i}}$
2. Воспользуемся тем, что $2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha k = \sin\left(\alpha k + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\alpha k - \frac{\alpha}{2}\right)$. Тогда домножим $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\alpha k$ на $2\cos\frac{\alpha}{2}$ и получим: $\sin\left(\alpha n + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}$
   $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\alpha k = \frac{\sin\left(\alpha n + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \leqslant \left| \frac{\sin\left(\alpha n + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \right|$, дальше, наверное, как-то и можно сократить, но зачем, если есть первый способ

Формула Эйлера

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\frac{\Theta_n}{12n}, \quad \exp x = e^x, \quad \Theta_n \in (0,1), \quad n > 0$$

Ряд Бертрана

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

1. При $\alpha > 1$ ряд сходится
2. При $\alpha = 1$, $\beta \geqslant 2$ ряд сходится
3. При $\alpha = 1$, $\beta < 2$ ряд расходится
4. При $\alpha < 1$ ряд расходится

Ряды Тейлора (снова...)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Табличные производные

$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(U \pm V)' = U' \pm V'$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
$(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$