Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 1

1. Определите все значения, которые может принимать размерность пересечения ядра и образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в ядре содержится вектор $v = (1, 0, -1, 2)$.

2. Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$ в зависимости от значения параметра a.

3. В четырёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ даны векторы v_1, v_2, v_3. Известно, что матрица Грама векторов v_1, v_2 равна $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, вектор v_3 имеет длину 10 и его ортогональная проекция на $\langle v_1, v_2 \rangle$ равна $2v_1 - v_2$. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

4. Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 - 3\varphi$ диагонализуем.

5. Про ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((1, -1, 1)) = (-1, 1, -1)$, $\varphi((2, 0, 1)) = (-2, 1, 0)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

6. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:
1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{50}$;
2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 12y + a = 0$$

определяет однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 2

1. Определите все значения, которые может принимать размерность пересечения ядра и образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в ядре содержится вектор $v = (1, 2, 0, -1)$.

2. Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 + 4xy - 6xz - 12yz$ в зависимости от значения параметра a.

3. В четырёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ даны векторы v_1, v_2, v_3. Известно, что матрица Грама векторов v_1, v_2 равна $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, вектор v_3 имеет длину 10 и его ортогональная проекция на $\langle v_1, v_2 \rangle$ равна $v_1 - 2v_2$. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

4. Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 + 2\varphi$ диагонализуем.

5. Про ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi(()) = ()$, $\varphi(()) = ()$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

6. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:
1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{10}$;
2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$3x^2 - 2y^2 + 4xz + 8y + a = 0$$

определяет двухполостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 3

1. Определите все значения, которые может принимать размерность пересечения ядра и образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в ядре содержится вектор $v = (1, 0, 2, -2)$.

2. Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 3z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$ в зависимости от значения параметра a.

3. В четырёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ даны векторы v_1, v_2, v_3. Известно, что матрица Грама векторов v_1, v_2 равна $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, вектор v_3 имеет длину 10 и его ортогональная проекция на $\langle v_1, v_2 \rangle$ равна $2v_1 - v_2$. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

4. Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 + 3\varphi$ диагонализуем.

5. Про ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((0, 1, -1)) = (0, -1, 1)$, $\varphi((-1, 2, 0)) = (1, 0, 2)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

6. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:
1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{20}$;
2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$-2y^2 + 3z^2 - 4xz + 4y + a = 0$$

определяет однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Письменная экзаменационная работа 2

Вариант 4

1. Определите все значения, которые может принимать размерность пересечения ядра и образа линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в ядре содержится вектор $v = (1, 2, 0, -2)$.

2. Определите нормальный вид квадратичной формы $Q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + 2z^2 + 6xy - 4xz - 12yz$ в зависимости от значения параметра a.

3. В четырёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ даны векторы v_1, v_2, v_3. Известно, что матрица Грама векторов v_1, v_2 равна $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, вектор v_3 имеет длину 10 и его ортогональная проекция на $\langle v_1, v_2 \rangle$ равна $v_1 - 2v_2$. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

4. Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 - 2\varphi$ диагонализуем.

5. Про ортогональный линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((1, 1, 0)) = (-1, -1, 0)$, $\varphi((2, 0, -1)) = (0, -2, 1)$ и φ не самосопряжён. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

6. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:
1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{40}$;
2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$3x^2 + 2y^2 - 4xz - 8y + a = 0$$

определяет двухполостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой данное уравнение принимает канонический вид.

8. Линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ