Made by @dsalakhov и @azakarka
Актуальную версию файла можно найти в канале

Благодарность выражается:
@Another_option - за дополнительный материал в конспекте
@adeliagaraeva - за найденный баг в решении 7+.4а
@mishasvintus - за найденный баг в решении 7.4а
Колесниченко Елене Юрьевне за прекрасные семинары

Материал к к/р в 3 модуле. Матанализ

Табличные производные

$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(U \pm V)' = U' \pm V'$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
$(a^x)' = a^x \ln a$ частный случай $(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x} \log_a e$ частный случай $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$

$$\frac{dt}{dx} = t' \quad dx = \frac{dt}{t'} \quad dt = t'dx$$

Правило Лопиталя

Если: $f(x), g(x)$ — действительнозначные функции, дифференцируемые в проколотой окрестности U точки a, где a — действительное число или один из символов $+\infty, -\infty, \infty$, причём

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или ∞;
2. $g'(x) \neq 0$ в U;
3. существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

   Тогда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

   Пределы также могут быть односторонними

Пример

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

Табличные интегралы

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$		

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

Неопределенный интеграл

Техники интегрирования

Замена переменной

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int f(x)dx, \quad x = \varphi(t)$$

Универсальная тригонометрическая замена

$$\int \frac{\text{многочлен}(\sin x, \cos x)}{\text{многочлен}(\sin x, \cos x)} dx$$

$$\text{Замена} \quad \boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Другие тригонометрические замены

Если подынтегральная функция обладает одним из свойств:

1. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$;
2. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$;
3. $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$;

то для вычисления интеграла удобнее использовать соответственно подстановки:

1. $t = \cos x, \quad x \in (-\pi/2; \pi/2)$;
2. $t = \sin x, \quad x \in (0; \pi)$;
3. $t = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\pi/2; \pi/2)$;

Интегрирование по частям

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$
$$\int u dv = uv - \int v du$$

Интегрирование рациональных функций

Если нам нужно найти интеграл от рациональной функции вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, действует по следующей схеме:

1. $\deg P \geqslant \deg Q \Rightarrow$ выделить целую часть
2. $Q(x)$ раскладывается на множители
    1. $\frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}$ все корни различны и действительны
    $= \frac{A_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$, находим $A_1, \ldots, A_n$
    2. Все корни действительны, но есть кратные
    $\frac{P(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}} = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{A_{n1}}{x-a_n} + \ldots + \frac{A_{n\alpha_1}}{(x-a_n)^{\alpha_n}}$
    3. Есть комплексные корни, не кратные
    $\frac{P(x)}{(x^2+px+q)(x^2+ax+b)}, \quad (D^\star < 0) \quad = \frac{Ax+B}{x^2+px+q} + \frac{Cx+D}{x^2+ax+b} + \ldots$
    4. Есть комплексные корни, кратные
    $\frac{P}{Q} = \frac{P}{(x^2+px+q)^n \cdot \ldots} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n} + \ldots$
    $\star$ — тут имеется в виду дискриминант от многочлена

Метод Остоградского

Пусть $\deg P < \deg Q$. Тогда:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$$

где $Q_2(x)$ имеет те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но однократно, $Q_1(x) = Q(x)/Q_2(x)$, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ находятся методом неопределенных коэффициентов после дифференцирования формулы, с учетом $\deg P_1 < \deg Q_1(x)$, $\deg P_2(x) < \deg Q_2(x)$.

Метод Остоградского удобно использовать, если знаменатель $Q(x)$ имеет кратные корни.

Рекурентные интегралы

$$I_n = \int \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x (\sin x)^{n-1}$$

$$I_0 = x + c, \quad I_1 = -\cos x + c$$

Рекурентный определенный интеграл

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1$$

$$n \equiv_2 0 : I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$n \equiv_2 1 : I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot |\Delta_k|$$

$$\xi_k \in \Delta_k, \quad \Delta_k = [x_{k-1}, x_k], \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \lambda(T) = \max_k |\Delta_k|$$

Пример

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta_k} \boxed{=}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \xi_k = \frac{k}{n}, \quad x \in [0, 2]$$

$$\boxed{=} \int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| \Big|_0^2 = \ln|1+2| - \ln|1+0| = \ln 3$$

P.s. Использовалась теорема, что непрерывная функция интегрируема

Формула Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

$$F - \text{любая первообразная для } f$$

Интегрирование по частям

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$$

Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$$

$$\text{Проблема в } b\ - \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{A\to b-}\int\limits_a^A f(x)dx$$

Выделение проблемных точек

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c_1} + \int\limits_{c_1}^{\alpha} + \int\limits_{\alpha}^{c_2} + \int\limits_{c_2}^{b}$$

$$c_1, c_2, \dots, c_n - \text{проблемные точки}$$

$$\text{В интеграле проблема должна быть одна и с краю!}$$

Производная от интеграла

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

Пример 1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x(\operatorname{arctg} u)^2du}{\sqrt{x^2+1}} =_\star \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\boxed{=}$$

$$=_\star \int\limits_0^x(\operatorname{arctg} u)^2du \geqslant \int\limits_{\pi/4}^x(\operatorname{arctg} u)^2du \geqslant \int\limits_{\pi/4}^x 1du = x - \frac{\pi}{4} \to +\infty$$

$$\text{По Лопиталю: } \boxed{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{(\pi/2)^2}{1} = \frac{\pi^2}{4}$$

Пример 2

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt = \underbrace{\sqrt{1+(x^2)^2}}_{f(x^2)}\cdot\underbrace{2x}_{(x^2)'} = 2x\sqrt{1+x^4}$$

Сходимость несобственных интегралов

- Интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$
- Интеграл $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$

Признаки сравнения

1. Пусть $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$, тогда справедливо следующее
    1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится
    2. $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится
2. $f \sim g \quad (f \geqslant 0)$
   $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \Leftrightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ оба сходятся/расходятся

Критерий Коши (для сходимости и расходимости)

$$\int\limits_0^{\infty} f(x)dx \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists A \quad \forall A_1, A_2 > A \quad \underbrace{\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|}_{\text{кусок хвоста интеграла}} < \varepsilon$$

$$\int\limits_0^{\infty} f(x)dx \text{ расходится } \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 \quad \forall A \quad \exists A_1, A_2 > A \quad \underbrace{\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|}_{\text{кусок хвоста интеграла}} \geqslant \varepsilon$$

Признак Дирихле (для сходимости)

1. $\left|\int\limits_a^A f(x)dx\right| \leqslant M$ - не зависит от A
2. g - монотонная
3. $x \to +\infty \Rightarrow g \to 0$

   Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится

Пример

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

$$f = \cos x - \text{ограничена}, \quad g = \frac{1}{x} \to 0,\ x \to \infty, \quad g - \text{монотонна}$$

$$\left|\int\limits_1^A \cos x dx\right| = \left|\sin x\Big|_1^A\right| \leqslant 2 \Rightarrow \text{пр. Дирихле, интеграл сходится}$$

Признак Абеля (для сходимости)

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится
2. g - монотонная
3. $|g| \leqslant M$ не зависит от x

   Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится

Условная и абсолютная сходимость

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится абсолютно, если } \int\limits_a^\infty |f|dx \text{ сходится}$$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ сходится условно, если } \int\limits_a^\infty f dx \text{ сходится и } \int\limits_a^\infty |f|dx \text{ расходится}$$

Площадь, длина, объём

Площадь фигуры

1. Рисуется примерный график
2. Находятся границы фигуры
3. Считается определенный интеграл с найденными границами

Длина кривой

1. На входе имеются формулы для каждой координаты ($x = f_x(t)$, $y = f_y(t)$, $z = f_z(t)$)
2. Находятся границы кривой относительно t (t_1, t_2)
3. Длина считается по формуле:

$$t \in [t_1, t_2]; \quad l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

Объём тела, образованного при вращении вокруг оси Ox

1. Рисуется примерный график
2. Находятся границы фигуры
3. Объём считается по формуле:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox

1. Рисуется примерный график
2. Находятся границы фигуры
3. Площадь поверхности считается по формуле:

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp \frac{\Theta_n}{12n}, \quad \exp x = e^x, \quad \Theta_n \in (0, 1), \quad n > 0$$

Ряды Тейлора ($x \to 0$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Пример применения

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}^1 + o(\cancel{x}^1)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0}(1 + o(1)) = 1 + 0 = 1$$

Замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Не менее замечательные замены

$$(1+t^2) = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x + cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x}$$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x}$$

Тригонометрия

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Почти табличные интегралы

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c \qquad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c = -\arccos\frac{x}{a} + c, \quad |x| < a, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + c, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + c, \quad a \neq 0 \quad (|x| > |a|)$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})) + c$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})) + c$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + c$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + c$$

Разбор листка №7

Задание 1

Пункт а)

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^3} = \int \frac{dx}{(x-1)^3(x+1)^3} = \frac{\dots}{(x-1)^2(x+1)^2} + \int \frac{\dots}{(x-1)(x+1)} dx =$$

$$= \frac{Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^2} + \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} dx \boxed{=}$$

$$\frac{1}{(x^2-1)^3} = \frac{(3Cx^2+2Dx+E)(x^2-1)^{\cancel{2}} - (Cx^3+Dx^2+Ex+F)\cdot 2\,\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = (3Cx^2+2Dx+E)(x^2-1) - 4x(Cx^3+Dx^2+Ex+F) + A(x-1)^2(x+1)^3 + B(x+1)^2(x-1)^3$$

$$\begin{array}{llll} x=1: & 1=-4(C+D+E+F) & \text{при } x^5: & 0=A+B \\ x=-1: & 1=4(-C+D-E+F) & \text{при } x^4: & 0=3C-4C+3A-2A-3B+2B \\ x=0: & 1=-E+A-B & \text{при } x: & 0=-2D-4F-2A+3A-2B+3B \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -4 & -4 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -4 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{УСВ}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{=} \frac{\frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{8}x}{(x^2-1)^2} + \int \frac{3/16}{x-1} - \frac{3/16}{x+1} dx = \frac{1}{16}\left(\frac{6x^3-10x}{(x^2-1)^2} + 3\ln|x-1| - 3\ln|x+1|\right) + c$$

Пункт б)

$$\int \frac{dx}{2+\sin x - 2\cos x} = \left[t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] = \int \frac{\frac{\cancel{2}\,dt}{1+t^2}}{\cancel{2}^{\,1} + \frac{\cancel{2}\,t}{1+t^2} - \cancel{2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t^2+t-1+t^2} = \int \frac{dt}{t(2t+1)} =$$

$$= \int \frac{1}{t} - \frac{2}{2t+1} dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}} dt = \ln|t| - \ln\left|t+\frac{1}{2}\right| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right| + c$$

Задание 2

Пункт а)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-n^2}}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\left(\sqrt{1-\frac{1^2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+\sqrt{1-\frac{n^2}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\boxed{=}$$

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},\quad \xi_k=\frac{k}{n},\quad x\in[0,1]$$

$$\boxed{=}\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\begin{bmatrix} x=\sin t\\ dt=\dfrac{dx}{x'}\Rightarrow dx=x'dt=\cos t dt\\ x\in[0,1]\Rightarrow t\in[0,\pi/2]\end{bmatrix}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int_0^{\pi/2}|\cos t|\cdot\cos t\,dt=_*$$

$$=_*\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2t+1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2t+1dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+t\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{1}{2}\Big(0+\frac{\pi}{2}-(0+0)\Big)=\frac{\pi}{4}$$

$*$ − при $t\in[0,\pi/2]$ $\cos t$ неотрицателен, поэтому модуль можно снять

Пункт б)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-\sin x}^{\sin x}\left(e^{t^2}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2\cdot\int_0^{\sin x}\left(e^{t^2}-1\right)\right)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(e^{\sin^2 x}-1\right)\cdot\cos x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x}-1}{x^2}\cdot\cos x=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin^2 x+o(\sin^2 x)-1}{x^2}\cdot\cos x=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x)))^2+o(x^2)}{x^2}\cdot\cos x=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}^1+o(\cancel{x^2}^1)}{\cancel{x^2}^1}\cdot\cos x=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\cos x=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

Задание 3

Пункт а)

$$\int_0^{+\infty}5^{-\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix} t=\sqrt{x}\\ dx=\dfrac{dt}{t'}=\dfrac{dt}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2tdt\end{bmatrix}=2\int_0^{+\infty}5^{-t}t\,dt=2\left(-\frac{5^{-t}t}{\ln 5}\Bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-\frac{5^{-t}}{\ln 5}\,dt\right)=$$

$$=2\left(0+\frac{1}{\ln 5}\int_0^{+\infty}5^{-t}\,dt\right)=\frac{2}{\ln 5}\cdot\left(-\frac{5^{-t}}{\ln 5}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2}{\ln 5}\cdot\left(0+\frac{1}{\ln 5}\right)=\frac{2}{\ln^2 5}$$

Пункт б)

$$I=\int\limits_0^{+\infty}3^{-x}\cos(6x)\,dx=-\frac{3^{-x}\cos(6x)}{\ln 3}\bigg|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\cdot(-\sin(6x)\cdot 6)\,dx=\frac{1}{\ln 3}-\frac{6}{\ln 3}\int\limits_0^{+\infty}3^{-x}\sin(6x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}-\frac{6}{\ln 3}\left(-\frac{3^{-x}\sin(6x)}{\ln 3}\bigg|_0^{+\infty}-\int\limits_0^{+\infty}-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\cdot(\cos(6x)\cdot 6)\right)=\frac{1}{\ln 3}-\frac{6}{\ln 3}\left(0+\frac{6}{\ln 3}\int\limits_0^{+\infty}3^{-x}\cos(6x)\right)=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}-\frac{36}{\ln^2 3}\int\limits_0^{+\infty}3^{-x}\cos(6x)=\frac{1}{\ln 3}-\frac{36}{\ln^2 3}\cdot I$$

$$I=\frac{1}{\ln 3}-\frac{36}{\ln^2 3}\cdot I$$

$$I\left(1+\frac{36}{\ln^2 3}\right)=\frac{1}{\ln 3}$$

$$I=\frac{\ln^2 3}{\ln 3\cdot(\ln^2 3+36)}=\frac{\ln 3}{\ln^2 3+36}$$

Задание 4

Пункт а)

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{5/2}}{(1+x^2)^2}dx=\int\limits_0^{1}\frac{x^{5/2}}{(1+x^2)^2}dx_{(1)}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^{5/2}}{(1+x^2)^2}dx_{(2)}$$

$$(1)\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^{2.5}}{1+2x^2+x^4}dx\leqslant\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{2.5}}{x^4}dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{1.5}}-\text{сходится, т.к. }1.5>1$$

$$(2)-\text{сходится, проблемных точек нет}$$

$$\text{Сумма сходящихся интегралов сходится}\Rightarrow\text{исходный интеграл сходится}$$

Пункт б)

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax\operatorname{arctg}bx}{x^2}dx=\int\limits_0^{1}\frac{\operatorname{arctg}ax\operatorname{arctg}bx}{x^2}dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax\operatorname{arctg}bx}{x^2}dx$$

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}ax\operatorname{arctg}bx}{x^2}dx,\quad g(x)=\operatorname{arctg}ax\operatorname{arctg}bx,\quad f(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx-\text{сходится},\quad g(x)-\text{монотонна},\quad g(x)\leqslant\frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow\text{по пр. Абеля интеграл сходится}$$

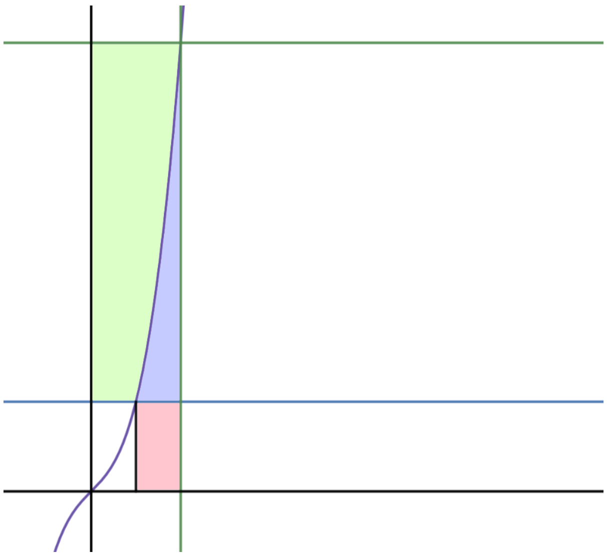
$$ab \geqslant 0 \quad \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} dx \qquad \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{ax \cdot bx}{x^2} = ab - \text{сходится}$$

$$ab \leqslant 0 \quad \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} dx = -\int\limits_0^1 \frac{-\operatorname{arctg} ax \operatorname{arctg} bx}{x^2} dx \quad \text{сводится к случаю, когда} \quad ab \geqslant 0$$

Так как слагаемые сходятся, то и сумма интегралов сходится

Задание 5

Рисуем примерный график



Площадь зеленой + синей области - площадь прямоугольника со сторонами 2 и 8 - 16

Найдем место пересечения $y = 2$ и $y = x^3 + x$ - $x = 1$ и $y = 10$, $y = x^3 + x$ - $x = 2$

Площадь красной области - площадь прямоугольника со сторонами 1 и 2 - 2

Площадь красной + синей области, это определенный интеграл:

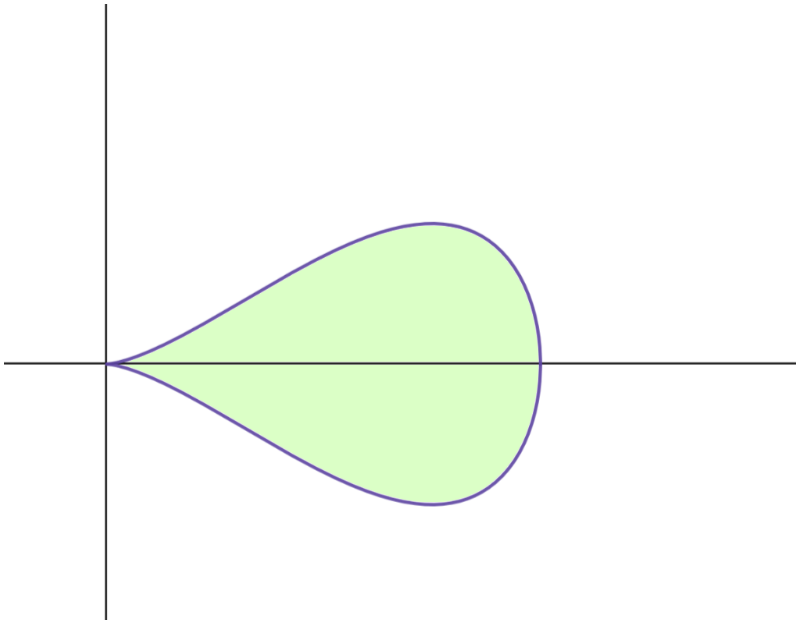
$$\int\limits_1^2 x^3 + x \, dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = (4+2) - (1/4 + 1/2) = 6 - 3/4 = \frac{21}{4}$$

Итого ответ: $16 - \left(\frac{21}{4} - 2 \right) = \frac{51}{4}$

Задание 6

Пункт а)

1. Рисуем примерный график



2. Так как нижняя половина симметрична верхней, будем искать определенный интеграл от $y=\sqrt{x^3-x^4}$. Для этого, надо найти точку пересечения функции и Ox : $x=0, x=1$
3. Считаем определенный интгеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{x^3-x^4}\,dx = \int_0^1 x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx = \int_0^1 x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \\ x=\dfrac{1}{1+t^2} \\ dx = x'dt = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}dt \\ x\in[0,1] \Rightarrow t\in(+\infty,0] \end{array}\right] =$$

$$= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1+t^2)^2}\cdot t\cdot\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt = 2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^4}dt =_* 2\left(\frac{At^5+Bt^3+Ct}{(1+t^2)^3}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{D}{1+t^2}dt\right)\boxed{=}$$

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^4} = \left(\frac{At^5+Bt^3+Ct}{(1+t^2)^3}\right)' - \frac{D}{1+t^2} = \frac{-A(t^2-5)t^4-3B(t^2-1)t^2-C(5t^2-1)-D(1+t^2)^3}{(1+t^2)^4}$$

$$\begin{array}{llll} t=0: & 0=C-D & \text{при } t^2: & 1=3B-5C-3D \\ t=1: & 1=4A-4C-8D & \text{при } t^4: & 0=5A-3B-3D \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{УСВ}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{16} \end{array}\right)$$

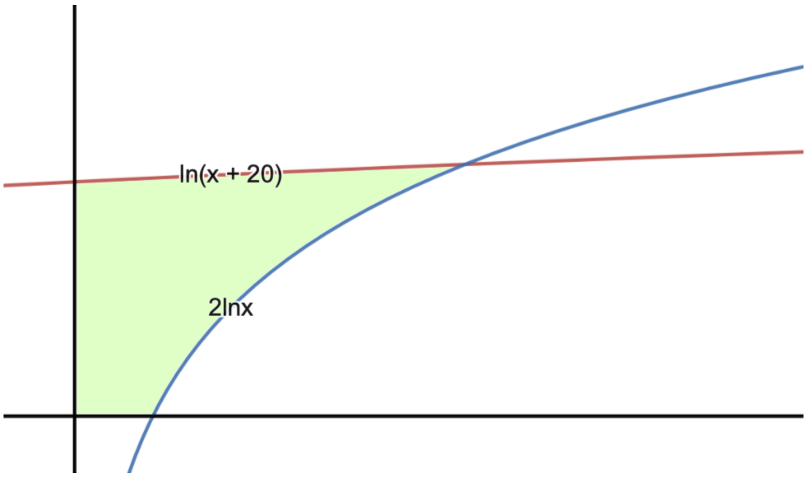
$$\boxed{=} 2\left(0+\frac{1}{16}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt\right) = \frac{1}{8}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\infty+} = \frac{\pi}{16}$$

Итого, получаем ответ: $2 \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

$\star$ - если функция четная, то в методе Остоградского вне интеграла коэффициенты при четных степенях равны нулю, внутри интеграла коэффициенты при нечетных степенях равны нулю

Пункт б)

1. Рисуем примерный график



2. Находим точки пересечения:

   $2\ln x = \ln(x+20) \Rightarrow e^{2\ln x} = e^{\ln(x+20)} \Rightarrow x^2 = x + 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+4) \Rightarrow x_{12} = -4, 5$

   Графики пересекаются при $x = 5$

3. Осталось посчитать определенный интеграл для промежутка $[0, 1]$ и $[1, 5]$:

$$S = \int\limits_0^1 \ln(x+20)dx + \int\limits_1^5 \ln(x+20) - 2\ln x\, dx =$$

$$= (\ln(x+20)(x+20) - (x+2))\Big|_0^1 + (\ln(x+20)(x+20) - (x+20))\Big|_1^5 - (2x\ln x - 2x)\Big|_1^5 =$$

$$= (\ln(x+20)(x+20) - (x+20))\Big|_0^5 - 10\ln 5 + 10 + 2\ln 1 - 2 = 25\ln 25 - 25 - 20\ln 20 + 20 + -10\ln 5 + 8 =$$

$$= 25\ln 25 - 20\ln 20 - 10\ln 5 + 3$$

Задание 7

Пункт а)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln((2n)!)}{\ln n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\exp\frac{\Theta_{2n}}{24n}\right)}{\ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\exp\frac{\Theta_{n}}{12n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt{4\pi n}+\ln e^{-2n}+\ln 2n^{2n}+\ln\left(\exp\frac{\Theta_{2n}}{24n}\right)}{\ln\sqrt{2\pi n}+\ln e^{-n}+\ln n^{n}+\ln\left(\exp\frac{\Theta_{n}}{12n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt{4\pi n}-2n+2n\ln 2n+\frac{\Theta_{2n}}{24n}}{\ln\sqrt{2\pi n}-n+n\ln n+\frac{\Theta_{n}}{12n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt{4\pi n}-2n+2n\ln n+2n\ln 2}{\ln\sqrt{2\pi n}-n+n\ln n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln\sqrt{4\pi n}}{n\ln n}-\frac{2}{\ln n}+2+\frac{2\ln 2}{\ln n}}{\frac{\ln\sqrt{2\pi n}}{n\ln n}-\frac{1}{\ln n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{0-0+2+0}{0-0+1}=2$$

Пункт б)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)^{\left(\frac{n}{e}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}e^{\left(\frac{n}{e}\right)^n\ln\left(1+\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)}\boxed{=}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^n\ln\left(1+\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^n\frac{\sqrt{2\pi n}}{n!}(1+o(1))=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^n}\frac{\cancel{\sqrt{2\pi n}}}{\cancel{\sqrt{2\pi n}}\cdot\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^n}\cdot\exp\frac{\Theta_n}{12n}}(1+o(1))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+o(1)}{1+o(1)}=1$$

$$\boxed{=}\,e^1=e$$

Задание 8

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\exp\frac{\Theta_n}{12n}}{k!\left(\sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}\exp\frac{\Theta_{n-k}}{12(n-k)}\right)}\sim\frac{\sqrt{n}\cdot n^n}{k!\sqrt{(n-k)}(n-k)^{n-k}e^k}\sim$$

$$\sim\frac{n^n}{k!\,(n-k)^{n-k}}=\frac{e^{n\ln n}}{k!\,e^{(n-k)\ln(n-k)}}=\frac{e^{n\ln n-(n-k)\ln(n-k)}}{k!}\sim\frac{e^{k\ln n}}{k!}=\frac{n^k}{k!}$$

Разбор листка №7+

Задание 1

Пункт а)

Решим самым простым способом:

$$(\cos x + \sin x)' = -\sin x + \cos x = \cos x - \sin x$$

применим это знание:

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int \frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x} dx = [t = \cos x + \sin x] =$$
$$\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln|\cos x + \sin x| + c$$

Альтернативно можно воспользоваться упрощенной тригометрической заменой, а именно видим, что $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$, действительно:

$$\frac{(-\cos x) - (-\sin x)}{(-\cos x) + (-\sin x)} = \frac{-\cos x + \sin x}{-\cos x - \sin x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

поэтому воспользуемся заменой $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} =$$
$$= \int \frac{1-t}{1+t} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{A}{1+t} + \frac{Bt + C}{1+t^2} dt$$

решим систему:

$$\frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \Rightarrow A(1+t^2) + (Bt+C)(1+t) = 1 - t$$
$$\text{при} \begin{cases} t^0 : A + C = 1 \\ t^1 : B + C = -1 \\ t^2 : A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \end{cases}$$

продолжим

$$= \int \frac{1}{1+t} + \frac{-t}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + c$$
$$\ln|1 + \operatorname{tg} x| - \frac{1}{2}\ln|1 + \operatorname{tg}^2 x| + c = \ln\left|\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right| - \ln\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} + c =$$
$$= \ln|\cos x + \sin x| + c$$

Пункт б)

$$\int \frac{dx}{4\cos^2 x - 2\sin 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{4\cos^2 x - 4\sin x \cos x + \sin^2 x} =$$

$$= [R(\cos x, \sin x) = R(-\cos x, -\sin x)] = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{4 - 4\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x} = [t = \operatorname{tg} x] = \int \frac{dt}{4 - 4t + t^2} =$$

$$= \int \frac{1}{(t-2)^2} dt = -\frac{1}{t-2} + c = \frac{1}{2 - \operatorname{tg} x} + c$$

Задание 2

Пункт а)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} =$$

$$= \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Пункт б)

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{n}{k})^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Задание 3

Пункт а)

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Посмотрим на проблемые точки нашего интеграла, это точки $x = \{0, -1\}$, в задаче нас интересует только 0, поэтому разобьем наш интеграл на 2 по аддитивности и изучим по отдельности:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} + \int_1^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Второй очевидно сходится, поэтому посмотрим на 1:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} - \text{сходится}$$

Тогда давайте вычислим определенный интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx = 2t\cdot dt \end{bmatrix} = \int_0^\infty \frac{2t}{t(1+t^2)}dt = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x})\Big|_0^\infty = \pi$$

Можно было сразу найти определенный интеграл без проверки на сходимость, я показал сходимость для тех, кому это могло было не совсем очевидно.

Пункт б)

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$$

Этот интеграл тоже очевидно сходится

1. $\operatorname{arctg} x$ в числители ограничивается константой на бесконечности
2. $\frac{1}{x^2}$ сходится
   Более формально:

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx \leqslant \int_1^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2} - \text{сходится}$$

Тогда вычислим определенный интеграл:

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx = -\int_1^\infty \operatorname{arctg} x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^\infty \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} + \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_1^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\Big|_1^\infty = \frac{\pi}{4} + \ln 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+1}}\right) = \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$$

Задание 4

Пункт а)

$$\int_2^\infty \left(\cos\frac{2}{x} - 1\right)dx = \begin{bmatrix} t = \frac{1}{x} \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} \\ x\in[2;+\infty) \Rightarrow t\in[1/2, 0] \end{bmatrix} = \int_{1/2}^0 \frac{1-\cos(2t)}{t^2}dt =$$

$$= -\int_0^{1/2} \frac{1-\cos(2t)}{t^2}dt, \text{ смотрим что происходит при } t\to 0: \frac{1-\cos(2t)}{t^2} = \frac{1-\left(1-\frac{(2t)^2}{2}+o(t^2)\right)}{t^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)^2}{2}+o(t^2)}{t^2} = 2 + o(1) \to 2 \Rightarrow \text{ исходный интеграл сходится}$$

Пункт б)

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

Мы знаем, что логарифм слабее любой степени, поэтому $\exists x_1 > 2, \forall x > x_2 : \ln(x) < x^{\frac{1}{2}}$, и $\exists x_2 > 2, \forall x > x_2 : x^{\frac{2}{3}} < \sqrt{x^2-1}$ возьмем $x_0 = max(x_1, x_2)$:

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int_2^{x_0} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx + \int\limits_{x_0}^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} \leqslant \int_2^{x_0} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx + \int\limits_{x_0}^\infty \frac{x^{1/2}}{x\sqrt{x^2-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_2^{x_0} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx + \int\limits_{x_0}^\infty \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}}$$

оба сходятся.

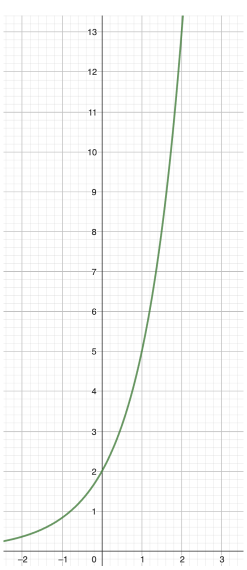
Теперь посмотрим на проблемную точку, а именно $x \to 1$. Здесь удобно будет делать замены по эквивалентности, поэтому сделаем замену:

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx = [t = x-1, x = t+1] = \int\limits_0^1 \frac{\ln(t+1)}{(t+1)\sqrt{t(t+2)}}dt = [t \to 0] =$$

$$\int\limits_0^1 \frac{t}{(t+1)\sqrt{t(t+2)}} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{t}{(1)\sqrt{t}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}$$

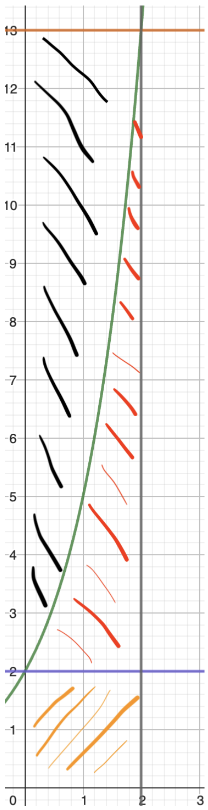
так как $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} < 1$ - предел сходится, а раз сходится больший, то сходится и наш.

Задание 5



Вот функция $f(x) = 2^x + 3^x$, что такое $g(y)$?

$g(y)$ такая функция, что если мы возьмем какой-то x_0, применим к нему функцию, получим $y_0 = f(x_0)$, а затем применим уже $g(y_0) = x_0$ получим снова тот же x_0. По сути это тоже самое, что поменять x и y местами, поэтому нам нужно найти черную площадь:



Как уже видно на рисунке, мы ее можем найти так: взять какой-то прямоугольник в котором она лежит, взять его площадь, вычесть лишнее.

Самый удобный прямоугольник будет в точке пересечения с нашими границами, то есть прямоугольник $(0,0),(g(13),13)$. Можно руками перебрать, что $g(13) = 2$. Площадь такого прямоугольника равна $2 \cdot 13 = 26$.

Далее, вычтем лишнее, самое легкое это оранжевый квадрат, в точках $(0,0),(2,2)$. Его площадь 4.

Осталось самое сложное: красная фигура, но такое мы умеем находить, это просто

$$\int_0^2 f(x) - 2dx = \int_0^2 2^x + 3^x - 2dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} - 2x\right)\Big|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} + \frac{8}{\ln 3} - 4$$

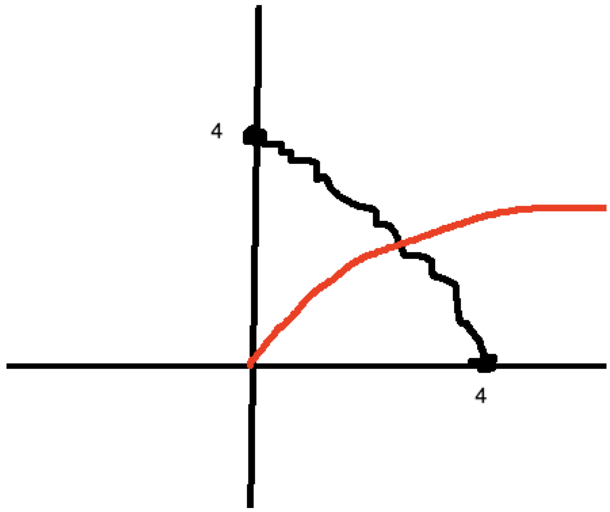
Ответ: $26 - 4 - \frac{3}{\ln 2} - \frac{8}{\ln 3} + 4 = 26 - \frac{3}{\ln 2} - \frac{8}{\ln 3}$

P.S. Можно было не выпендриваться и просто найти $\int_0^2 f(x)$, тогда мы бы посчитали красную и оранжевую площадь сразу

Задание 6

Пункт а)

Схематично зарисуем график:



Черное это уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$, красный соответственно $x=y^2$.

Так как нас интересует только первая плоскость, то можно преобразовать функции в $y=(2-\sqrt{x})^2$ и $y=\sqrt{x}$ соответственно.

Что нам нужно сделать. Видим, что функции строго монотонны в разные стороны, откуда одна точка пересечения. Найдем ее:

$(2-\sqrt{x})^2=\sqrt{x}$, не тяжело заметить, что это $x=1$.

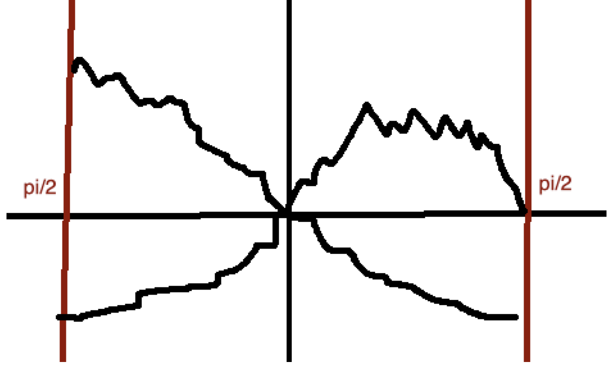
Теперь нам нужно найти площадь фигуры, соответственно это просто, площадь под красным графиком до $x=1$ и площадь под черным после:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x}dx + \int\limits_1^2 (2-\sqrt{x})^2dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 + 4x\Big|_1^4 - \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^4 + \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3} + 12 - \frac{64}{3} + \frac{8}{3} + 8 - \frac{1}{2} = \frac{2+36-64+8+24}{3} - \frac{1}{2} = \frac{6}{3} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Пункт б)

$$y^2 = \sin^2 x \cos x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$



Вот схематичный рисунок (в реале он в сто раз красивее). Поделим функцию на две: $y = \sqrt{\sin^2 x \cos x}, y = -\sqrt{\sin^2 x \cos x}$.
В первой четверти и $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$, так что вся функция выше Ox. В остальных аналогичные рассуждения со своими x.

Важно лишь то, что у нас нет смены знака (и неопределенности), поэтому мы можем брать интеграл полностью на отрезках. Можно заметить что площадь снизу равна площади сверху и слева, так как $\sin^2(-x)\cos(-x) = (-\sin x)^2 \cos x = \sin^2 x \cos x$, нам осталось только посчитать:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x \cos x} dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ x = \arccos t \\ dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{bmatrix} = -\int_1^0 \sqrt{t - t^3} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int\limits_0^1 \sqrt{t} dt =$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{8}{3}$

Задание 7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\sqrt{n}}{2^{2n}(n!)^2} = [\text{Стирлинг}] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \exp\left(\frac{\Theta_1}{24n}\right)}{2\pi n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot \exp\left(\frac{2\Theta_2}{12n}\right)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot \sqrt{n}}{2\pi n} \cdot \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot 2^{2n}} \cdot \exp\left(\frac{\Theta_1 - 4\Theta_2}{24n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$