Тушканчик-матанчик

Made by @dsalakhov
Актуальную версию файла можно найти в канале
Уведомлять об опечатках, багах в решениях в лс или на гитхабе

Подготовительный лист к экзамену

Задача №1

Вычислить сумму, применяя почленное дифферецирование:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 0.5$$

Решение

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{(производящая функция)}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} dx = \frac{1}{2}(\log|1+x| - \log|1-x|) + c$$

$$\text{Подставим } x = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Т.к. } |x| < 0.5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x)) = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

Задача №2

Вычислите интеграл:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{y} dy$$

Решение 1

Посмотрим на область интегрирования:

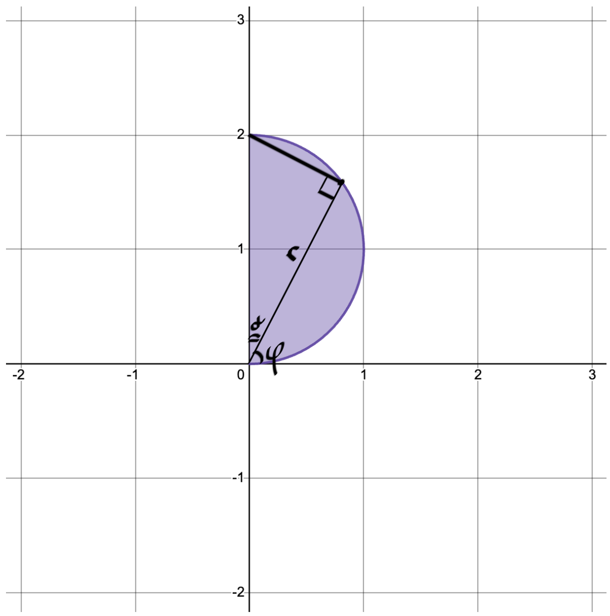
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant 1+\sqrt{1-x^2}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leqslant y-1 \leqslant \sqrt{1-x^2}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 \quad (y-1)^2 \leqslant 1-x^2$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 \quad x^2+(y-1)^2 \leqslant 1$$

Область интегрирования:



$$\text{Сделаем полярную замену: } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\text{Тогда область интегрирования: } \begin{cases} \varphi \in [0, \pi/2] \\ r \in [0, 2\sin\varphi]^{\star} \end{cases}$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{y}dy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \sqrt{r}\sqrt{\sin\varphi}\cdot \underbrace{r}_{||J||} dr = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\varphi}d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} r^{3/2}dr = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\varphi}\left[\frac{r^{5/2}}{5/2}\right]\Bigg|_0^{2\sin\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{2}{5}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\varphi}(2\sin\varphi)^{5/2}d\varphi = \frac{8\sqrt{2}}{5}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\varphi d\varphi = -\frac{8\sqrt{2}}{5}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos^2\varphi)d\cos\varphi = -\frac{8\sqrt{2}}{5}\left[\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$-\frac{8\sqrt{2}}{5}\left[\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{8\sqrt{2}}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

$$\star - \cos\alpha = \frac{r}{2} \Rightarrow r = 2\cos\alpha = 2\cos(90^\circ - \varphi) = 2\sin\varphi$$

Решение 2

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant 1+\sqrt{1-x^2}$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leqslant y-1 \leqslant \sqrt{1-x^2}$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 \quad (y-1)^2 \leqslant 1-x^2$$
$$0 \leqslant y \leqslant 2 \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2y-y^2}$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{y}dy = \int\limits_0^2 \sqrt{y}dy \int\limits_0^{\sqrt{2y-y^2}} dx = \int\limits_0^2 y\sqrt{2-y}dy = \begin{bmatrix} t = 2-y \\ dy = -dt \\ y \in [0,2] \Rightarrow t \in [2,0] \end{bmatrix} = \int\limits_2^0 (t-2)\sqrt{t}dt =$$

$$= \int\limits_2^0 t^{3/2} - 2t^{1/2}dt = \left[\frac{t^{5/2}}{5/2} - \frac{2t^{3/2}}{3/2}\right]\Bigg|_2^0 = -\frac{8\sqrt{2}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{5}$$

Задача №3

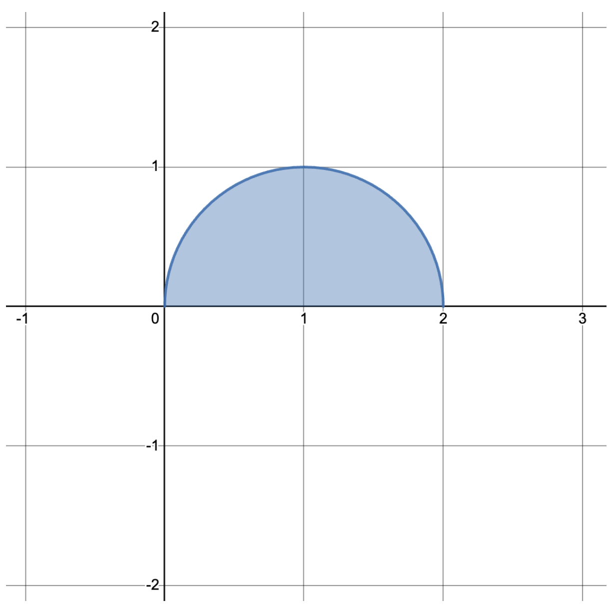
Вычислите интеграл:

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2 \leqslant 2x \\ 0 \leqslant z \leqslant y}} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$$

Решение

$$x^2+y^2 \leqslant 2x \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-1 \leqslant 0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 \leqslant 1$$

Область интегрирования по x, y:



Цилиндрическая замена:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow ||J|| = r$$

Тогда ограничения следующие:

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 \\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi \\ 0 \leqslant z \leqslant r\sin\varphi \end{cases}$$

Считаем:

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 2x \\ 0\leqslant z\leqslant y}} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} dr \int\limits_0^{r\sin\varphi} z\sqrt{r^2}\underbrace{r}_{||J||}dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\left[\frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^{r\sin\varphi} dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{r^4}{2}\sin^2\varphi dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^4 dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\left[\frac{r^5}{5}\right]\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\frac{32\cos^5\varphi}{5}d\varphi =$$

$$= \frac{16}{5}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\cos^5\varphi d\varphi = \frac{16}{5}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)^2 d\sin\varphi = \frac{16}{5}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi - 2\sin^4\varphi + \sin^6\varphi d\sin\varphi =$$

$$= \frac{16}{5}\left[\frac{\sin^3\varphi}{3} - \frac{2\sin^5\varphi}{5} + \frac{\sin^7\varphi}{7}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{16}{5}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{16}{5}\cdot\frac{8}{105} = \frac{128}{525}$$

Задача №4

Найти объем множества:

$$x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x^2 + z^2 \leqslant 1$$

Решение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x^2 + z^2 \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Объем вычисляется так:

$$\iiint\limits_D 1dxdydz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz =_\star 8\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} = 8\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}dy =$$

$$= 8\int\limits_0^1 1 - x^2 dx = 8\left[x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = 8\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

$\star$ – симм. по 3 коорд.

Cheat Sheet

Замены координат

Полярная замена координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \det J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

Цилидрическая замена координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \det J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_z \\ y'_r & y'_\varphi & y'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Сферическая замена координат 1

$$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases} \Rightarrow \det J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\psi \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\psi \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -r\cos\psi\sin\varphi & -r\sin\psi\cos\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\left(\sin\psi\begin{vmatrix} -\cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\cos\varphi \\ \cos\psi\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi \end{vmatrix} + \cos\psi\begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -\cos\psi\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi & \cos\psi\cos\varphi \end{vmatrix}\right) =$$

$$= r^2\left(\sin^2\psi\cos\psi + \cos^3\psi\right) = r^2\cos\psi\left(\sin^2\psi + \cos^2\psi\right) = r^2\cos\psi$$

Сферическая замена координат 2

$$\begin{cases} x = r\sin\psi\cos\varphi \\ y = r\sin\psi\sin\varphi \\ z = r\cos\psi \end{cases} \Rightarrow \det J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_\psi \\ y'_r & y'_\varphi & y'_\psi \\ z'_r & z'_\varphi & z'_\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\varphi & r\sin\psi\cos\varphi & r\cos\psi\sin\varphi \\ \cos\psi & 0 & -r\sin\psi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\left(-\sin\psi\begin{vmatrix} \sin\psi\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\sin\varphi & \sin\psi\cos\varphi \end{vmatrix} + \cos\psi\begin{vmatrix} -\sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\cos\varphi \\ \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi \end{vmatrix}\right) =$$

$$= r^2\left(-\sin^3\psi - \cos^2\psi\sin\psi\right) = -r^2\sin\psi\left(\sin^2\psi + \cos^2\psi\right) = -r^2\sin\psi \Rightarrow ||J|| = r^2\sin\psi$$

Производящие ряды

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{nk} = \frac{1}{1-x^k}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n x^n = \frac{1}{1-rx}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$	
$\sum\limits_{n=\underline{\mathbf{1}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \cos x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x$

Выведение производящих рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n x^{kn} = 1 + rx^k + r^2 x^{2k} + \ldots = I$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + rx^k + r^2x^{2k} + \ldots - rx^k \cdot (1 + rx^k + r^2x^{2k} + \ldots) = I - rx^k \cdot I \Rightarrow I = \frac{1}{1 - rx^k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{1-x} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \frac{1}{1+x} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{nk} = \frac{1}{1-x^k} \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x^2)}\right)' = \frac{1}{(1-x)^3}$$

$\cos x, \sin x, \ln(1+x), e^x$ – ряды тейлора

Табличные производные

$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(U \pm V)' = U' \pm V'$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
$(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x} \log_a e$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$

Табличные интегралы

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$		