Made by @dsalakhov и @azakarka
Актуальную версию файла можно найти в канале

Материалы к СР7 по Матанизу

Предел функции по направлению.

> определение

Предел по направлению l в точке x_0 — предел по прямой X_l = $\{x_0 + l \cdot t | t \in \mathbb{R}\}$.

> пример

Найдите пределы функции $\frac{x^2 y}{y^2+x^4}$ по всем направлениям в точке $(0, 0)$.
Существует ли обычный предел этой функции в точке (0, 0)?

> решение

Пусть у нас направление $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, то есть

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha t = \alpha t \\ y(t) = y_0 + \beta t = \beta t \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{(\alpha t)^2 \beta t}{(\beta t)^2 + (\alpha t)^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha^2 \beta t}{\beta^2 + \alpha^4 t^2} =$$
$$= \begin{cases} \beta \neq 0, 0 \\ \beta = 0, 0 \end{cases}$$

Предел по любому направлению равен нулю, но не значит, что обычный предел существует. Для этого достаточно посмотреть функцию

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{x^2 y}{y^2 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Если мы пойдем по параболе получим другое значение, значит обычного предела не существует.

Повторный предел

Повторным пределом функции $f(x, y)$ называется последовательное вычисление пределов по каждой переменной

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y)$$

или

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

> Не всегда последовательное вычисление предела дает одинаковый результат:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=1\\ \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=-1\end{cases}$$

> из существования повторного предела не следует существование обычного предела

> из существования обычного предела не следует существование повторного

Вычисление обычного предела

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{sh}(xy)}{x^2+y^2}$$

Используем полярные координаты, то есть замену вида:

$$\begin{cases}x(r)=r\cos(\varphi)\\ y(r)=r\sin(\varphi)\end{cases}$$

Предел существует, когда предел не зависит от φ.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{sh}(xy)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{xy}-e^{-xy}}{2(x^2+y^2)}=\lim_{r\to 0+}\frac{e^{r^2\sin\varphi\cos\varphi}-e^{-r^2\sin\varphi\cos\varphi}}{2r^2}=$$
$$=\lim_{r\to 0+}\frac{1+r^2\cos\varphi\sin\varphi+o(r^2)-1+r^2\cos\varphi\sin\varphi}{2r^2}=\sin\varphi\cos\varphi$$

Как видим предела нет, потому что по разным направлениям у нас получается разные пределы.

Непрерывность

> условие

Докажите, что функция непрерывная по каждой переменной в точке (0, 0), но не является непрерывной в это точке $f(u,v)=\begin{cases}\frac{uv^2}{u^2+v^4}, u^2+v^2\neq 0\\ 0, u^2+v^2=0\end{cases}$

Отдельно по переменной очевидно $\lim\limits_{u\to 0}f(u,0)=\lim\limits_{v\to 0}f(0,v)=f(0,0)$

Теперь чтобы функция была непрерывна в точке у нее должен существовать предел, но его нет, потому что:

$$f(u,v) = \begin{cases} u = v^2, \frac{1}{2} \\ u = 0, 0 \end{cases}$$

соотвественно функция прерывна

Производная в точке по направлению

> Как считать

$f(x,y) = x^2y + xy^2$, $P = (-1,2)$, $\vec{v} = (3,4)$

Сначала нормируем вектор, это так надо
$|\vec{v}| = 5 \Rightarrow \vec{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

Теперь находим производную по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{df(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)}{dt}, \begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha t \\ y(t) = y_0 + \beta t \end{cases}$$

но это немного долго, альтернативно можно

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta$$

здесь мы ввели частную производную, то есть мы берем производную по одной переменной, а вторую считаем параметром (константой).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 \overset{P(-1,2)}{=} 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yx \overset{P(-1,2)}{=} -3$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{4}{5} \cdot (-3) = \frac{-12}{5}$$

> для случаев с тремя переменными берется уже 3 частные производные

Уравнение касательной

Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0) = 0$$

где F'_x частная производная по x

Уравнение нормали

В точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

Как искать дифференциалы функции

Способ 1

$$f = f(x,y,z)$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Способ 2

$$df = d(f)$$

Что нужно знать про дифференциал:

$$d(f+g) = d(f) + d(g)$$
$$d(const \cdot f) = const \cdot d(f)$$
$$d(fg) = d(f)g + fd(g)$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d(f)g - fd(g)}{g^2}$$

Когда функция дифференцируема на точке

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ и непрерывна в точке}$$
$$\Downarrow$$
$$f - \text{ дифференцируема в точке}$$

Иногда не получается посчитать частную производную в точке явно, поэтому нужно её считать по определению:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Чтобы доопределить функцию в точке (x_0, y_0) (для того, чтобы посчитать частные производные в ней), нужно взять предел:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f = \text{значения}$$

И наконец, чтобы понять, дифференцируема ли функция на точке, то $o(\text{что-то})$ действительно стремится к 0:

$$f\Big|_0 + \frac{\partial f}{\partial x}dx\Big|_{x_0} + \frac{\partial f}{\partial y}dy\Big|_{y_0} + o(\text{что-то})$$

Чтобы это проверить, считаем предел:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f}{\text{что-то}} \stackrel{?}{=} 0$$

Матрица Якоби и с чем его едят

Может потребоваться, понять, дифференцируемы ли функции в определенной точке (сразу много запросов), для этого задаётся такая штука, которая называется матрица Якоби (на k функциях от n переменных, есть $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Тогда привычная штука для одной функции, в случае многомерной пишется так:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1^0,\ldots,x_n^0) \\ f_2(x_1^0,\ldots,x_n^0) \\ \vdots \\ f_k(x_1^0,\ldots,x_n^0) \end{pmatrix} + J\cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1() \\ o_2() \\ \vdots \\ o_n() \end{pmatrix}$$

Производные k-го порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Последние два называются смешанными частными производными 2 порядка. Частенько они совпадают

Когда смешанные производные совпадают

Шварц

$$\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ в окрестности и непрерывны} \Rightarrow \text{совпадают}$$

Юнг

$\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ – дифференцируемы, f – дифференцируема в окрестности $\Rightarrow$ совпадают

Удобная запись производных

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f^{(n)}_{x_n x_{n-1} \dots x_1} \text{ !запись переменных в обратном порядке}$$

k-ый дифференциал

$$f = f(x, y)$$
$$df = f'_x dx + f'_y dy$$
$$d^2 f = f'' dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$
$$d^3 f = f''' dx^3 + 3 f'''_{xxy} dx^2 dy + 3 f'''_{xxy} dx dy^2 + f'''_{yyy} dy^3$$
$$\vdots$$
$$d^m f\Big|_a = \sum_{1 \leqslant j_1 \dots j_n \leqslant k} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}}(a) dx_{j_1} \dots dx_{j_n}$$

Удобнее считать втупую: $df = d(f), \quad d^2 f = d(d(f)), \dots$
$dx = \Delta x, \quad d^2 x = 0, \dots$