Made by @dsalakhov и @azakarka
Актуальную версию файла можно найти в канале

Линейная алгебра и геометрия

Разбор экзамена 2020-2021

Вариант 1

Задача 1

Условие

Определите все значения, которые может принимать размерность пересечения ядра и образа линейного оператора $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в ядре содержится вектор $v = (1, 0, -1, 2)$

Решение [@azakarka]

Ключевой факт: $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = 4$
$\dim(\ker \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi) \leq \min(\dim \ker \varphi, \dim \operatorname{Im} \varphi)$
Поэтому $0 \leq \dim(\ker \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi) \leq 2$

Это была оценка, теперь примеры:

0. $\varphi : \forall u \in \mathbb{R}^4, u \mapsto 0$
1. (v, e_1, e_2, e_3) - базис в $\mathbb{R}^4$, тогда $\varphi : \begin{cases} v \mapsto 0 \\ e_1 \mapsto v \\ e_2 \mapsto e_1 \\ e_3 \mapsto e_2 \end{cases}$
2. (v, u, e_1, e_2) - базис в $\mathbb{R}^4$, тогда $\varphi : \begin{cases} v, u \mapsto 0 \\ e_1 \mapsto v \\ e_2 \mapsto u \end{cases}$

   Ответ: $\{0, 1, 2\}$

Задача 2

Условие

Определите нормальный вид квадратичной формы
$Q(x, y, z) = x^2 + ay^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$

Решение [@azakarka]

Сделаем замену координат: $\begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$

Тогда матрица квадратичной формы $B(Q(x', y', z'))$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & a \end{pmatrix}$$

Решим задачу методом Якоби:

$$\begin{cases} \delta_1 = 1 \\ \delta_2 = 1 - 4 = -3 \\ \delta_3 = a + 16 + 16 - 4 - 16 - 4a = -3a + 12 \end{cases}$$

согласно методу после замены координат канонический вид выглядит так: $\delta_1(x'')^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1}(y'')^2 + \frac{\delta_3}{\delta_2}(z'')^2$

то есть канонический (а значит и нормальный) вид зависит только от значения $-3a + 12$, переберем случаи:

1. $-3a + 16 > 0 \Rightarrow a < 4$, $(x'')^2 - (y'')^2 - (z'')^2$
2. $-3a + 16 = 0 \Rightarrow a = 4$, $(x'')^2 - (y'')^2$
3. $-3a + 16 < 0 \Rightarrow a > 4$, $(x'')^2 - (y'')^2 + (z'')^2$

Задача 3

Условие

В четырёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ даны векторы v_1, v_2, v_3. Известно, что матрица Грама векторов v_1, v_2 равна $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, вектор v_3 имеет длину 10 и его ортогональная проекция $\langle v_1, v_2 \rangle$ равна $2v_1 - v_2$. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3.

Решение [@dsalakhov]

Сначала найдём матрицу Грама для всей системы векторов:

$$(v_3, v_1) = (\text{pr } v_3 + \text{ort } v_3, v_1) = (\text{pr } v_3, v_1) + \underbrace{(\text{ort } v_3, v_1)}_{=0} =$$
$$= (2v_1 - v_2, v_1) = 2(v_1, v_1) - (v_2, v_1) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$$

$(v_3, v_2) = \ldots = 2(v_1, v_2) - (v_2, v_2) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$
$(v_3, v_3) = |v_3|^2 = 10^2 = 100$
Отсюда, матрица Грама:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 100 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{vol}\, P(v_1, v_2, v_3)^2 = \det G \Rightarrow \mathrm{vol}\, P(v_1, v_2, v_3) = \sqrt{\det G}$

$$\det G = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 100 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 100 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 1 - 5^3 - 3^2 \cdot 100 - 4 \cdot 1^2 =$$
$$= 2000 + 15 + 15 - 125 - 900 - 4 = 1001$$

Ответ: $\sqrt{1001}$

Задача 4

Условие

Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 - 3\varphi$ диагонализуем.

Решение [@dsalakhov]

Оператор φ в $\mathbb{R}^2$ не диагонализуем, значит, в каноническом виде это жорданова клетка размера 2 вида: $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$
Считаем $\varphi^2 - 3\varphi$:

$$\varphi^2 - 3\varphi = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x & 3 \\ 0 & 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x-3) & 2x-3 \\ 0 & x(x-3) \end{pmatrix}$$

Тогда полученный оператор $\varphi^2 - 3\varphi$ диагонализуем, если $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$
Ответ: $\begin{pmatrix} 1.5 & 1 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$

Задача 5

Условие

Про ортогональный линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((1,-1,1)) = (-1,1,-1), \varphi((2,0,1)) = (-2,1,0)$ и φ не самосопряжен. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу.

Решение [@azakarka]

Так как φ - ортогональный, не самосопряженный оператор, то $\exists e$ - ОНБ, в котором:

$$A(\varphi, e) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $(1, -1, 1)$ - собственный вектор, с собственным значением -1, обозначим $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$

Теперь дальше по алгоритму, найдем (e_1, e_2) - базис в $\langle e_3 \rangle^\perp$

$$(1, -1, 1) \Rightarrow ((1, 1, 0), (-1, 1, 2))$$

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$

$$\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (e_1 \quad e_2 \quad e_3) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

найдем координаты вектора в e, заметим, что $(2, 0, 1) = \sqrt{2}e_1 + \sqrt{3}e_3$, откуда $(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{3})$. Теперь для $(-2, 1, 0) = ((-2, 1, 0), e_1)e_1 + ((-2, 1, 0), e_2)e_2 + ((-2, 1, 0), e_3)e_3$, откуда можем вытащить координаты и получить систему

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\alpha = ((-2, 1, 0), e_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\sin\alpha = ((-2, 1, 0), e_2) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{3} = ((-2, 1, 0), e_3) = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ответ: в базисе (e_1, e_2, e_3) оператор φ имеет матрицу:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Задача 6

Условие

Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:

1. одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{50}$;

2. ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

?

Если существует, то предъявите такую матрицу.

Решение [@dsalakhov]

Сингулярное разложение ранга 1 имеет вид:
$v \cdot \Sigma \cdot u^T$, где $v \in \mathrm{Mat}_{2\times1}, u \in \mathrm{Mat}_{3\times1}$
Для B легко находятся (пока не ортонормированные) $v = (3, 1)$ и $u = (1, -2, 1)$ и $\Sigma = (1)$
Чтобы получить корректное сингулярное разложение, v и u должны быть ортонормированы, поэтому $v \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1), u \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$, тогда $\sigma_1 = \sqrt{60}$
При нахождении ближайших матриц по норме Фробениуса, нужно "отбрасывать" наименьшие сингулярные значения. Тогда σ_1 должен быть наибольшим сингулярным значением (т.к. при в ближайшей матрице ранга 1 он остался), а значит остальные сингулярные значения меньше $\sqrt{60} \Rightarrow$ условие 1 выполняется.
Ортогональный вектор к v: $\frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3)$, теперь нужен ортогональный вектор к u, что его длина до ортонормирования равна $\sqrt{5}$, например $(2, 1, 0) \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$
Получаем сингулярное разложение для A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{60} & 0 \\ 0 & \sqrt{50} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 7

Условие

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 12y + a = 0$$

определяет однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которых данное уравнение принимает канонический вид.

Решение [@dsalakhov]

Сначала приведём квадратичную форму к главным осям:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$\chi(t) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -t & 0 & 2 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 2 & 0 & -3-t \end{vmatrix} = -((-t)(2-t)(-3-t) - 2^2(2-t)) = (t-2)(t+4)(t-1)$$

$$\lambda = 2, \qquad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \overset{\text{УСВ}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = (0,1,0)$$

$$\lambda = 1, \qquad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{\text{УСВ}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (2,0,1) \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$$

$$\lambda = -4, \qquad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{УСВ}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = (-1,0,2) \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,0,2)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2y'}{\sqrt{5}} - \frac{z'}{\sqrt{5}} \\ y = x' \\ z = \frac{y'}{\sqrt{5}} + \frac{2z'}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Получаем: $2y^2 - 3z^2 + 4xz - 12y + a = 2(x')^2 + (y')^2 - 4(z')^2 - 12x' + a = 0$

Теперь выделяем квадраты и приводим к каноническому виду:

$$2(x')^2 + (y')^2 - 4(z')^2 - 12x' + a = 2((x')^2 - 6x') + (y')^2 - 4(z')^2 + a = \\ 2\underbrace{(x'-3)^2}_{=(x'')^2} - 18 + (y')^2 - 4(z')^2 + a = 2(x'')^2 + (y'')^2 - 4(z'') + a - 18 = 0$$

Уравнение однополостного гиперболоида имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

В нашем случае: $2(x'')^2 + (y'')^2 - 4(z'')^2 = 18 - a$

Получаем условие $18 - a > 0 \Rightarrow a < 18$

Выразим старые координаты через новые:

$$\begin{cases} x = \frac{2y''}{\sqrt{5}} - \frac{z''}{\sqrt{5}} \\ y = x'' + 3 \\ z = \frac{y''}{\sqrt{5}} + \frac{2z''}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ответ: $a < 18$, замена выше

Задача 8

Условие

Линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму.

Решение [@azakarka]

$$\det\begin{pmatrix} 4-t & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 3-t & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3-t & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (3-t)\cdot\det\begin{pmatrix} 4-t & 0 & -2 \\ 2 & 3-t & 2 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} =$$
$$= (3-t)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 4-t & -2 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (3-t)^2(t^2-5t+4+2) = (t-3)^3(t-2)$$

У нас два различных собственных значения, поэтому нам нужно найти базис в V^3 и ограничить на него наш оператор. Для этого введем

$$B = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

и найдем $\ker B^3$ что и будет нужным базисом:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & 0 & -14 \\ -4 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ker B^3 = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0), (2,0,0,1) \rangle$$

заметим теперь, что $\mathrm{rk} B = 1$, значит у нас ровно одна жорданова клетка с $\lambda = 3$, а значит нам просто нужно взять в найденном базисе вектор высоты 3, найдем:

$$(0,1,0,0) \overset{B}{\mapsto} 0$$

$$(0,0,1,0) \mapsto (0,2,0,0) \mapsto (0,0,0,0)$$

$$(2,0,0,1) \mapsto (0,-4,6,0) \mapsto (0,12,0,0) \mapsto (0,0,0,0)$$

Теперь найдем собственный вектор для $\lambda = 2$:

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1,7,-4,1)$$

Ответ:
в базисе $(0,12,0,0),(0,-4,6,0),(2,0,0,1),(1,7,-4,1)$ оператор принимает вид

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$