

Актуальную версию файла можно найти в [канале](#)

!!! Attention, могут быть ошибки

CheatSheet по Теорверу

Матожидание&Дисперсия&Ковариация&Момент

Матожидание

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{a \in A=\xi(\Omega)} aP(\xi = a)$$

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi}(x)dx$$

$$\mathbb{E}f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) p_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

Свойства матожидания

Для дискретной с.в.

$$\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$$

$$\forall w \quad \xi(w) \leq \eta(w) \Rightarrow \mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$$

$$|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$$

$$\mathbb{E}f(\xi) = \sum_{a \in A=\xi(\Omega)} f(a)P(\xi = a)$$

$$\xi, \eta - \text{независимые с.в} \Rightarrow \mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$

В общем случае

$$\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$$

$$\xi \leq \eta \Rightarrow \mathbb{E}\xi \leq \mathbb{E}\eta$$

$$|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$$

$$\xi, \eta - \text{независимые/некоррел. с.в} \Rightarrow \mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$$

$$f(x) - \text{борелл. функция} \Rightarrow \mathbb{E}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_{\xi}(x)dx$$

$$|\mathbb{E}\xi\eta| \leq \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2}, \quad |\mathbb{E}\xi\eta| = \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2} \Leftrightarrow \xi \text{ и } \eta \text{ лин. завис. п.н. между собой}$$

Дисперсия&Ковариация

Определение:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\xi &= \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2] \\ \text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)] \\ \text{коэф. корр.: } \rho(\xi, \eta) &= \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta}}, \quad 0 < \mathbb{D}\xi, \mathbb{D}\eta < \infty\end{aligned}$$

Удобные формулы:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\xi &= \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 \\ \text{cov}(\xi, \eta) &= \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta\end{aligned}$$

Свойства Дисперсии&Ковариации

$$\text{cov}(a_1\xi + b_1\eta, a_2\zeta + b_2\chi) = a_1a_2\text{cov}(\xi, \zeta) + a_1b_2\text{cov}(\xi, \chi) + b_1a_2\text{cov}(\eta, \zeta) + b_1b_2\text{cov}(\eta, \chi)$$

$$\mathbb{D}\xi \geq 0$$

$$\mathbb{D}\xi = \text{cov}(\xi, \xi)$$

$$\mathbb{D}(c \cdot \xi) = c^2 \cdot \mathbb{D}\xi \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{D}(c + \xi) = \mathbb{D}\xi \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

$$|\rho(\xi, \eta)| \leq 1 \quad |\rho(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow (\xi - \mathbb{E}\xi) \text{ и } (\eta - \mathbb{E}\eta) \text{ лин. завис. п.н. между собой}$$

$$\xi_1, \dots, \xi_n - \text{попарно некоррелированные с.в.} \Rightarrow \mathbb{D}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \dots + \mathbb{D}\xi_n$$

$$\text{С.в. } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ независимы в совокупности} \Rightarrow \mathbb{D}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \dots + \mathbb{D}\xi_n$$

Момент с.в

$$\nu_k = \mathbb{E}\xi^k - k\text{-ый начальный момент с.в. } \xi, \text{ в случае, если } \mathbb{E}\xi^k \text{ определено}$$

$$\mu_k = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k] - k\text{-ый центральный момент с.в } \xi$$

Независимость&Некоррелируемость

Определения

- Дискретные с.в. называются независимы, если $P(\{\xi = a\} \cap \{\eta = b\}) = P(\{\xi = a\}) \cdot P(\{\eta = b\})$.
- С.в ξ_1, \dots, ξ_n независимы в совокупности, если $\forall x_1, \dots, x_n \in R \quad P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n < x_n) \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow F_\xi(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n) \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow p_\xi(x_1, \dots, x_n) = p_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{\xi_n}(x_n)$
- Если $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, то ξ и η некоррелируемые

Свойства

$$\xi, \eta - \text{независимые с.в.} \Rightarrow \xi, \eta \text{ некоррелируемые}$$

$$\begin{aligned}\xi_1, \dots, \xi_n - \text{независимые в сов. с.в.,} \quad f_1, \dots, f_n - \text{бор. функции из } \mathbb{R} \text{ в } \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow f_1(\xi_1) \dots, f_n(\xi_n) \text{ независимы в совокупности}\end{aligned}$$

Распределения

Функция распределения

$$F_{\xi}(x) = P[\xi \leq x], \quad F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt, \quad p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x)$$

Биномиальное распределение

$$\begin{aligned} \xi &\sim Bin(p, n) \\ P(\xi = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ \mathbb{E}\xi &= np, \quad \mathbb{D}\xi = np(1-p) \\ \varphi_{\xi}(t) &= (1-p + pe^{it})^n \end{aligned}$$

Геометрическое распределение

$$\begin{aligned} \xi &\sim Geom(p), \quad q = p - 1 \\ P(\xi = k) &= q^{k-1} \cdot p \\ \mathbb{E}\xi &= \frac{1}{p}, \quad \mathbb{D}\xi = \frac{q}{p^2} \\ \varphi_{\xi}(t) &= \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} \end{aligned}$$

Пуассоновское распределение

$$\begin{aligned} \xi &\sim Pois(\lambda) \\ P(\xi = k) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ \mathbb{E}\xi &= \lambda, \quad \mathbb{D}\xi = \lambda \\ \varphi_{\xi}(t) &= e^{\lambda(e^{it}-1)} \end{aligned}$$

Непрерывное равномерное распределение

$$\begin{aligned} \xi &\sim U(a, b), \quad a \leq b \\ F_{\xi}(x) &= \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b) \\ 1, & x \geq b \end{cases} \\ p_{\xi}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\ \mathbb{E}\xi &= \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12} \\ \varphi(t) &= \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} \end{aligned}$$

Нормальное распределение

$$\xi \sim N(\mu, \sigma^2) \sim \mu + \sigma N(0, 1)$$

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E} = \mu, \quad \mathbb{D} = \sigma^2$$

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{\mu it - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Стандартное нормальное распределение

$$\xi \sim N(0, 1)$$

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\mathbb{E}\xi = 0, \quad \mathbb{D}\xi = 1 \quad \mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{D}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2 = 1 + 0 = 1$$

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\text{Для сверки: } \mu_{2k} = \mathbb{E}\xi^{2k} = (2k-1)!!, \quad \mu_{2k+1} = \mathbb{E}\xi^{2k+1} = 0$$

Экспоненциальное распределение

$$\xi = Exp(\alpha)$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\alpha}, \quad \mathbb{D}\xi = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\varphi_{\xi}(t) = \frac{1}{1 - \frac{it}{\alpha}}$$

Случайный вектор

Определение

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall i \quad \xi_i - \text{с.в.} \Rightarrow \xi - \text{случайный вектор}$$

Свойства

$$\xi - \text{случайный вектор}, \quad f - \text{бор. ф.} \Rightarrow f(\xi) - \text{случайный вектор}$$

Распределение случайного вектора

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) - \text{случ. вектор}$$

$$\text{Совместная функция распределения с.в. } (\xi_1, \dots, \xi_n): F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

Матожидание случайного вектора

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) - \text{случайный вектор} \Rightarrow \mathbb{E}\xi = (\mathbb{E}\xi_1, \dots, \mathbb{E}\xi_n)$$

Дисперсия (матрица ковариации) случайного вектора

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — случайный вектор $\Rightarrow \mathbb{D}\xi = (\text{cov}(\xi_i, \xi_j) : i, j \in \{1, \dots, n\})$ (матрица ков. симм.)

Характеристические функции случайной величины

Определение

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E} e^{it\xi} = \mathbb{E} \cos(t\xi) + i \mathbb{E} \sin(t\xi)$$

Свойства хар. функций

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\varphi_\xi(t)| \leq \varphi_\xi(0) = 1$$

$$\eta = a\xi + b \Rightarrow \varphi_\eta(t) = e^{itb} \varphi_\xi(at)$$

$$\varphi_\xi(t) \text{ равн. непрерывна на } \mathbb{R}$$

$$\overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$$

$$\forall t \quad \varphi_\xi(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$$

$$\xi, \eta - \text{независимые с.в.} \Rightarrow \varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$$

Следствия из свойств хар. функций

$$Pois(\lambda_1) + Pois(\lambda_2) = Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\xi_1, \xi_2 - \text{нез. с.в.} \quad \xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2), \quad \xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Производная хар функции

$$\xi - \text{с.в.} \quad \forall r \in \{1, \dots, n\} E[|\xi|^r] < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall r \in \{1, \dots, n\} \quad \varphi_\xi^{(r)}(t) = E[(i\xi)^r e^{it\xi}], \quad \varphi_\xi^{(r)}(0) = i^r E[\xi^r]$$

Единственность с.в.

$$\xi, \eta - \text{с.в.}, \text{ тогда } \xi \stackrel{d}{=} \eta \Leftrightarrow \varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Характеристические функции случайного вектора

Определение

$$\xi \in \mathbb{R}^n - \text{случ. вектор} \Rightarrow \varphi_\xi(t) = E \left[e^{i\langle \xi, t \rangle} \right], \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \xi, t \rangle = \sum_{k=1}^n t_k \xi_k - \text{скалярное произв.}$$

Критерий независимости

$$\xi_1, \dots, \xi_n \text{ независимы в совокупности} \Leftrightarrow \varphi_\xi(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(t), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Нормальные (Гауссовские) векторы

Определения

ξ — гауссовский вектор $\Leftrightarrow \varphi_{\xi}(t) = e^{-\frac{1}{2}\langle Rt, t \rangle + i\langle a, t \rangle}$, R — симм. неотр. опр. матрица

Теорема об эквивалентных определениях:

1. ξ — гаусс. вектор
2. $\xi = A\eta + b$, $\eta_i \sim N(0, 1)$, η_i (компоненты) независимы, $A = \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$
3. $\forall x \quad \langle x, \eta \rangle$ — нормальная с.в.

Лемма о независимости компонент

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, компоненты ξ независимы $\Leftrightarrow \xi_1, \dots, \xi_n$ некорр.

Плотность гауссовских векторов

$\xi \sim N(a, R)$ — n -мерный гауссовский вектор

Тогда R положит. опр. $\Leftrightarrow \exists p_{\xi}(t)$ и $p_{\xi}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det R}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\langle R(t-a), t-a \rangle\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n$

Приведения гаусс. вектора к стандартному нормальному

$\xi \sim N(a, R)$ — n -мерный гауссовский вектор $D = \sqrt{R}$

$\eta = D^{-1}(\xi - a) \Rightarrow \eta \sim N(0, D^{-1}R(D^{-1})^T) \sim N(0, E_n)$

Свойства

$\xi \sim N(\mu, \Sigma)$

$A\xi \sim N(A\mu, A\Sigma A^T)$

$\varphi_{A\xi+b}(t) = e^{i\langle t, b \rangle} \varphi_{\xi}(A^T t)$

,

Ортогонализация Грамма-Шмидта

Пусть нам дан вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \sim N(0, R)$. Хотим найти такие $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, что $\eta_i \sim N(0, 1)$ и $\xi = A\eta$

Для этого сначала находим ортогональный базис (1). Далее нормируем его (2)

$$1. \quad \eta'_1 = \xi_1, \quad \eta'_2 = \xi_2 - \frac{\text{cov}(\xi_2, \eta'_1)}{\sqrt{\mathbb{D}\eta'_1}} \eta'_1, \quad \dots, \quad \eta'_n = \xi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\text{cov}(\xi_n, \eta'_k)}{\sqrt{\mathbb{D}\eta'_k}} \eta'_k$$

$$2. \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \eta_i = \frac{\eta'_i}{\sqrt{\mathbb{D}\eta'_i}}$$

3. Мы выразили η_i через ξ . Тогда запишем в строки матрицы A^{-1} линейную комбинацию η_i и найдем обратную матрицу к A^{-1} . ($\xi = A\eta \Rightarrow \eta = A^{-1}\xi$)

В случае, если $\xi \sim N(a, R)$, $a \neq 0$. Тогда, рассматриваем $\xi' = \xi - a \sim N(0, R)$

Сходимости

Сходимость по вероятности

$$\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Сходимость почти наверное

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow P\left(\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\}\right) = 1 \quad \text{поточечная сходимость}$$

Критерий сходимости п.н

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\sup_{m \geq n} |\xi_m - \xi| > \varepsilon\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Признак сходимости п.н

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < \infty \text{ сходится}$$

Сходимость в среднем порядка p

$$p > 0 \quad \xi_n \xrightarrow{Lp} \xi \Leftrightarrow \mathbb{E}|\xi_n - \xi|^p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Сходимость по распределению

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall x \quad F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_{\xi}(x), n \rightarrow \infty$$

Следствия сходимостей

1. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$ (в случае дискретных величин: $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$)
2. $\xi_n \xrightarrow{Lp} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$
3. $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Теорема Пуассона

$$S_n \sim \text{Bin}(n, p), \quad np(n) \rightarrow \lambda \quad \lambda > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z} + \quad P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, n \rightarrow \infty$$

Теорема Муавра-Лапласа

$$p = \text{const} \in (0, 1) \Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P_n(a, b) = P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right)$$

$$\sup_{a < b} \left| P_n(a, b) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Закон больших чисел в форме Чебышева

$$\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} - \text{попарно некорр. с.в.} \quad \exists c \quad \forall n \quad \mathbb{D}\xi_n \leq c \quad S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова

$$\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\} - \text{посл. нез. и одинаково распр. с.в.} \quad \mathbb{E}\xi_1 < \infty \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}\xi_1$$

ЦПТ

ξ_1, \dots, ξ_n - нез. одинак. распр., $\mathbb{E}\xi_1 = a, \mathbb{D}\xi = \sigma^2$. Тогда:

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad \sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Многомерная ЦПТ

$\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — послед. независ. одинаково распр. с.в. из R^m

$$a = \mathbb{E}\xi_1, \quad R = \mathbb{D}\xi_1 \quad \text{конечные}$$

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

$$\text{Тогда } \sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - a \right) \xrightarrow{d} N(0, R)$$

Для размера 2:

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}Y \\ \mathbb{E}Z \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma), \quad \text{где } \Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{D}Y & \text{cov}(Y, Z) \\ \text{cov}(Y, Z) & \mathbb{D}Z \end{pmatrix}$$

Наследование сходимости:

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н./p/d}} \xi, \quad f - \text{непрер. относ. } \xi \Rightarrow f(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н./p/d}} f(\xi)$$

Лемма Слуцкого:

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi, \quad \eta_n \xrightarrow{d} C - \text{константа} \Rightarrow \xi_n(+/\cdot)\eta_n \xrightarrow{d} \xi(+/\cdot)C$$

Неравенства

Неравенство Маркова

$$\xi \geq 0, a > 0 \Rightarrow P[\xi \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{a}$$

Неравенство Чебышева

$$\mathbb{D}\xi < \infty \Rightarrow P[|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq a] \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{a^2}$$

Свертки

Если ξ и η независимые случайные величины, тогда:

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(y)p_{\eta}(x-y)dy$$

$$p_{\xi-\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(y)p_{\eta}(x+y)dy$$

$$p_{\xi \cdot \eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(y)p_{\eta}(x/y)\frac{1}{|y|}dy$$

$$p_{\xi/\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(y)p_{\eta}(xy)|y|dy$$

Выведение формулы свертки

Можно пользоваться только сверткой для суммы, остальные нужно дополнительно выводить. Покажем, как вывести свертку для умножения:

$$P(\xi \cdot \eta \leq z) = \iint_{x \cdot y \leq z} p_{\xi \cdot \eta}(x, y) dx dy = \star \iint_{x \cdot y \leq z} p_{\xi}(x) p_{\eta}(y) dx dy$$

$$\text{замена: } \begin{cases} u = x \\ v = x \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases}$$

$$\det J = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix} = \frac{1}{u} \Rightarrow |\det J| = \frac{1}{|u|}$$

$$\iint_{x \cdot y \leq z} p_{\xi}(x) p_{\eta}(y) dx dy = \iint_{v \leq z} p_{\xi}(u) p_{\eta}\left(\frac{v}{u}\right) \underbrace{\frac{1}{|u|}}_{|\det J|} du dv = \star \int_{-\infty}^z dv \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}\left(\frac{v}{u}\right) p_{\eta}(u) \frac{1}{|u|} du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{\xi \cdot \eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x/y) p_{\eta}(y) \frac{1}{|y|} dy$$

★ - пользуемся независимостью

★★ - легендарная теорема Фубини

Формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k)}$$

Допы

Интегралы

Интегрирование по частям

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v dx$$

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Для сверки

$\int_a^{+\infty} e^{-xc} dx = \frac{e^{-ac}}{c}, c > 0$	$\int_a^{+\infty} x^{-xc} dx = \frac{(ac+1)e^{-ac}}{c^2}, c > 0$
$\int_a^{+\infty} x^2 e^{-xc} dx = \frac{((ac)^2 + eac + 2)e^{-ac}}{c^3}, c > 0$	$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\int_a^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{e^{-a^2}}{a}$	$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax-bx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}}, b > 0$	

Табличные интегралы

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$		

Интегралы, которые не смогли

$$\int e^{-x^2} dx \quad \int \frac{\sin x}{x} dx \quad \int \frac{\cos x}{x} dx \quad \int \frac{1}{\ln x} dx$$