

Листок 13⁺

Задачи для подготовки к экзамену

На экзамене будут некоторые из этих типов задач (но не все). Учитывайте, что каждая задача стоит определенное число баллов. Одинаковые по сложности пункты включены в листок для возможности отработки решения.

Задача 13⁺.1. Найдите производную функции f в точке M по направлению вектора \vec{a} :

а) (2 балла) $f = xy^2z^3$, $M = (3, 2, 1)$, $\vec{a} = (3, 4, 5)$;

б) (2 балла) $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M = (3, 3, 1)$, $\vec{a} = (-1, 2, 2)$.

Задача 13⁺.2. (2 балла) Вычислите значение дифференциала функции

$$f(x, y) = x^3y^6 + e^{x+y^2}$$

в точке $(1, 1)$ на векторе $(1, 2)$.

Задача 13⁺.3. Найдите касательную плоскость

а) (2 балла) к графику функции $z = e^xxy + e^yxy$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2e)$;

б) (2 балла) к поверхности, заданной уравнением $z^2 = x^3 + y^2$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$.

Задача 13⁺.4. Пусть φ - дважды непрерывно дифференцируемая, а f — сложная функция, заданная следующим образом

$$f(x, y) = \varphi(xy, x^3 + y^2).$$

а) (2 балла) Выразите дифференциал 1-го порядка функции f через частные производные функции φ .

б) (4 балла) Выразите дифференциал 2-го порядка функции f через частные производные функции φ .

Задача 13⁺.5. (4 балла) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x = v \sin u \\ y = v \cos u \\ z = uv^2. \end{cases}$$

Найдите dz и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $u = \frac{\pi}{4}, v = 1$.

Задача 13⁺.6. (5 баллов) Найдите все точки локального экстремума функции

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 + 12y.$$

Задача 13⁺.7. Найдите все точки условного локального экстремума функции

а) (5 баллов) $f(x, y, z) = \sqrt{3}x + 3y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

б) (5 баллов) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, если $xy = z^2 - 6z + 5$.