*Made by @dsalakhov и @azakarka*
Актуальную версию файла можно найти в канале
Нашёл ошибку? Лучше всего написать об этом на гитхабе

*Писать по ошибкам в задачах @azakarka*

# Материал к экзамену в 4 модуле. Матанализ

## Разбор Листка 13+

### Задача 1

#### Условие

Найдите производную функции $f$ в точке $M$ по направлению вектора $\vec{a}$:

1. $f = xy^2z^3$, $M = (3, 2, 1)$, $\vec{a} = (3, 4, 5)$
2. $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M = (3, 3, 1)$, $\vec{a} = (-1, 2, 2)$

#### Решение

##### Пункт а

В самом начале отнормируем направляющий вектор. $\vec{a} = (3, 4, 5) \rightsquigarrow \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, 5)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 4 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 5 \cdot \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Найдем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2 \end{cases}$$

Подставляем в выражение:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(3y^2z^3 + 8xyz^3 + 15xy^2z^2\right)$$

Осталось лишь найти значение в точке:

$$\frac{\partial f}{\partial a}\Big|_{(3,2,1)} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3\cdot 4\cdot 1 + 8\cdot 3\cdot 2\cdot 1 + 15\cdot 3\cdot 4\cdot 1) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(12+48+180) = 24\sqrt{2}$$

### Пункт б

Делаем тоже самое:

$$\vec{a} = (-1, 2, 2) \rightsquigarrow \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{3}\left(-\frac{\partial f}{\partial x} + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{3(x^2+y^2+z^2)}\cdot(-2x+4y+4z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\Big|_{(3,3,1)} = \frac{10}{3\cdot 19} = \frac{10}{57}$$

## Задача 2

### Условие

Вычислите значение дифференциала функции

$$f(x,y) = x^3y^6 + e^{x+y^2}$$

в точке (1, 1) на векторе (1, 2)

### Решение

В дифференциале уже не надо нормировать вектор.

воспользуемся равенством:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Наш вектор $v$ и будет отвечать $(dx, dy)$, мы как бы приближаемся по нему. Посчитаем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^6 + e^{x+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y^5 + 2y\cdot e^{x+y^2} \end{cases}$$

$$df\Big|_{(1,1)} = (3+e^2)dx + (6+2e^2)dy$$

тогда ответ:

$$(3+e^2)\cdot 1 + (6+2e^2)\cdot 2 = 5e^2 + 15$$

# Задача 3

## Условие

Найдите касательную плоскость

1. к графику функции $z = e^x xy + e^y xy$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2e)$
2. к поверхности, заданной уравнением $z^2 = x^3 + y^2$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$

## Решение

**Задача 9.2.** Пусть гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$. Используя тот факт, что градиент ортогонален множествам уровня, докажите, что

а) **уравнение касательной плоскости** в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0;$$

б) **уравнение нормали** в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

### Пункт а

приведем к нужному виду:

$$F(x; y; z) = e^x xy + e^y xy - z = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x; y; z) = e^x y + e^x xy + e^y y \\ F'_y(x; y; z) = e^x x + e^y x + e^y xy \\ F'_z(x; y; z) = -1 \end{cases}$$

Подставим в точку

$$\begin{cases} F'_x(1; 1; 2e) = e + e + e = 3e \\ F'_y(1; 1; 2e) = e + e + e = 3e \\ F'_z(1; 1; 2e) = -1 \end{cases}$$

**Ответ:**

$$3e(x-1)+3e(y-1)-(z-2e)=0 \Rightarrow 3ex+3ey-z=4e$$

**Пункт б**

$$F(x;y;z)=x^3+y^2-z^2=0$$

$$\begin{cases} F'_x(x;y;z)=3x^2 \\ F'_y(x;y;z)=2y \\ F'_z(x;y;z)=-2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x(2;1;3)=12 \\ F'_y(2;1;3)=2 \\ F'_z(2;1;3)=-6 \end{cases}$$

**Ответ:**

$$12(x-2)+2(y-1)-6(z-3)=0 \Rightarrow 6x+y-3z=4$$

# Задача 4

## Условие

Пусть $\varphi$ - дважды непрерывно дифференцируемая, а $f$ — сложная функция, заданная следующим образом

$$f(x,y)=\varphi(xy,x^3+y^2)$$

1. Выразите дифференциал 1-го порядка функции $f$ через частные производные функции $\varphi$
2. Выразите дифференциал 2-ого порядка функции $f$ через частные производные функции $\varphi$

## Решение

Найти решение таких же задач с семинара можно тут с примерно 24-ой минуты

$$u=xy, v=x^3+y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'_u \cdot y + \varphi'_v \cdot 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (\varphi'_u \cdot y + \varphi'_v \cdot 3x^2)dx + (\varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y)dy$$

Первый дифференциал нашли, поищем вторые:
(так как $\varphi$ дважды дифференцируема по Шварцу смешанные производные равны)

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi'_u \cdot y + \varphi'_v \cdot 3x^2) = y \cdot \left(\varphi''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{uv}\frac{\partial v}{\partial x}\right) +$$
$$+6x \cdot \varphi'_v + 3x^2 \cdot \left(\varphi''_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$
$$= y^2\varphi''_{uu} + 6x\varphi'_v + 6x^2y\varphi''_{uv} + 9x^4\varphi''_{vv}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y) =$$
$$= \varphi'_u + x\left(\varphi''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{vu} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2y\left(\varphi''_{uv} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$
$$\varphi'_u + xy\varphi''_{uu} + 3x^3\varphi''_{vu} + 2y^2\varphi''_{uv} + 6x^2y\varphi''_{vv} =$$
$$\varphi'_u + xy\varphi''_{uu} + \varphi''_{vu}(3x^3 + 2y^2) + 6x^2y\varphi''_{vv}$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y) = x\left(\varphi''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi''_{uv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\varphi'_v + 2y\left(\varphi''_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$
$$x^2\varphi''_{uu} + 2xy\varphi''_{uv} + 2\varphi'_v + 2xy\varphi''_{vu} + 4y^2\varphi''_{vv} =$$
$$x^2\varphi''_{uu} + 4xy\varphi''_{vu} + 4y^2\varphi''_{vv} + 2\varphi'_v$$

Теперь просто подставим все, что мы нашли в равенство (автор не видит смысл делать это явно)

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

### Альтернативное решение

$$u = xy, v = x^3 + y^2$$

$$\begin{cases} du = ydx + xdy \\ dv = 3x^2dx + 2ydy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2u = d(ydx + xdy) =_\star dydx + dxdy = 2dxdy \\ d^2v = d(3x^2dx + 2ydy) =_\star 6xdx^2 + 2dy^2 \end{cases}$$

$\star$ - тут $d^2x = d^2y = 0$

$$df = d\varphi = \varphi'_u du + \varphi'_v dv = \varphi'_u(ydx + xdy) + \varphi'_v(3x^2dx + 2ydy) =$$
$$= (y\varphi'_u + 3x^2\varphi'_v)dx + (x\varphi'_u + 2y\varphi'_v)dy$$

$$d^2f = d(d\varphi) = d(\varphi'_u du + \varphi'_v dv) = d(\varphi'_u du) + d(\varphi'_v dv) = d(\varphi'_u)du + \varphi'_u d^2u + d(\varphi'_v)dv + \varphi'_v d^2v =$$
$$= (\varphi''_{uv}dv + \varphi''_{uu}du)du + \varphi'_u d^2u + (\varphi''_{vu}du + \varphi''_{vv}dv)dv + \varphi'_v d^2v = \text{дальше на силу рук}$$

# Задача 5

## Условие

Функция $z = z(x, y)$ задана неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x = v\sin u \\ y = v\cos u \\ z = uv^2 \end{cases}$$

Найдите $dz$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $u = \frac{\pi}{4}$, $v = 1$

## Решение

$$dz = d(uv^2) = z'_v dv + z'_u du = 2vu \cdot dv + v^2 \cdot du$$

теперь нам нужно выразить $(dv, du)$ через $(dx, dy)$, так как нас просят выразить $dz$ через $(x, y)$.

Мы это осуществим с помощью матрицы Якоби:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin u & v\cos u \\ \cos u & -v\sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dv \\ du \end{pmatrix}$$

Мы нашли эти выражения с помощью первых двух равенств в системе.

Найдем:

$$\begin{pmatrix} \sin u & v\cos u \\ \cos u & -v\sin u \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-v}\begin{pmatrix} -v\sin u & -v\cos u \\ -\cos u & \sin u \end{pmatrix} (*)$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} dv \\ du \end{pmatrix} = \frac{1}{-v}\begin{pmatrix} -v\sin u & -v\cos u \\ -\cos u & \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Теперь уже можно выразить $dz$ через $(x, y)$:

$$dz = 2vu \cdot dv + v^2 \cdot du = 2vu(\sin u \cdot dx + \cos u \cdot dy) - v(-\cos u \cdot dx + \sin u \cdot dy) =$$
$$(2vu\sin u + v\cos u)dx + (2vu\cos u - v\sin u)dy$$

Найдем также значение в точке, для этого найдем саму точку:

$$\begin{cases} x = v\sin u \\ y = v\cos u \\ z = uv^2 \\ v = 1 \\ u = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{4}\right)$$

Тогда:

$$dz\Big|_P = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx + \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)dy$$

Второй дифференциал уже не инвариантен, поэтому найдем его стандартным способом. Для нахождением $z'_y$ воспользуемся равенством $dz = z'_x dx + z'_y dy$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(2vu\cos u - v\sin u) =$$
$$= 2v'_x u\cos u + 2vu'_x\cos u - 2vu\sin u \cdot u'_x - v'_x\sin u - v\cos u \cdot u'_x =$$
$$= v'_x(2u\cos u - \sin u) + u'_x(2v\cos u - 2vu\sin u - v\cos u)$$

чтобы не таскать с собой громоздкие выражения, сразу подставим точку:

$$\Rightarrow \Big|_P = v'_x\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + u'_x\left(\sqrt{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= v'_x\left(\frac{\pi-2}{2\sqrt{2}}\right) + u'_x\left(\frac{2-\pi}{2\sqrt{2}}\right) = (v'_x - u'_x)\cdot\frac{\pi-2}{2\sqrt{2}} =$$

тут воспользуемся обратной матрицей Якоби $(*)$

$$= \left(\sin u - \frac{\cos u}{v}\right)\cdot\frac{\pi-2}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\pi-2}{2\sqrt{2}} = 0$$

# Задача 6

## Условие

Найдите все точки локального экстремума функции

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 + 12y$$

## Решение

Найдем все стационарные точки, то есть точки, в которых дифференциал равен 0:

$$df = (6x^2 - 6y)dx + (-6x - 6y + 12)dy$$

$$df = 0 \iff \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6x + 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow P_1 = (1,1), P_2 = (-2,4)$$

Нашли кандидатов, теперь посмотрим на второй дифференциал функции, выпишем сразу в матрицу, чтобы применить критерий Сильвестра:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{применим хитрость с линала}] \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -72x - 36 \end{cases}$$

Поясню про "хитрость с линала", у нас матрица квадратичной формы$Q(dx, dy)$ мы можем посчитать угловые миноры этой матрицы, но тогда переменная $x$ будет в обоих сигмах, что не очень удобно (имхо). Вместо этого, лучше рассмотреть матрицу $Q(dy, dx)$ (задачи очевидно эквивалентные), у которой уже $x$ будет лишь в одной сигме.

подставим обе точки:

$$P_1 = (1, 1) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -108 \end{cases}$$

нулевых миноров нет, по критерию она неопределенная

$$P_2 = (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \max$$

**Ответ:**
точка $(-2, 4)$ - точка локального максимума

## Задача 7

### Условие

Найдите все точки условного локального экстремума функции

1. $f(x, y, z) = \sqrt{3}x + 3y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, если $xy = z^2 - 6z + 5$

### Решение

#### Пункт а

Функция ограничитель: $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$
Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = f + \lambda\varphi$$

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = \sqrt{3} + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 3 + 2y\lambda = 0 \\ L'_z = 2 + 2z\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим систему и получим:
$P_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ с $\lambda = 2$
$P_2 = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ с $\lambda = -2$

Как и в предыдущей задаче мы решим эту с помощью Сильвестра. Составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Видно, что невырожденная матрица либо положительно либо отрицательно определенная при любых условиях, поэтому даже не смотря на значение $d\varphi$, можно сразу выписать ответ:

$P_1$ - точка локального условного минимума
$P_2$ - точка локального условного максимума

### Пункт б

$$\varphi(x, y, z) = z^2 - 6z + 5 - xy$$

$$L = f + \lambda\varphi$$

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y\lambda = 0 \\ L'_y = 2y - x\lambda = 0 \\ L'_z = 2z + 2z\lambda - 6\lambda = 0 \\ L'_\lambda = z^2 - 6z + 5 - xy = 0 \end{cases}$$

Решаем, получаем:
$P_1 = (0, 0, 1), \lambda = \frac{1}{2}$
$P_2 = (0, 0, 5), \lambda = -\frac{5}{2}$

составим матрицу:

тут уже не так очевидно, выпишем вторые дифференциалы:

$$\begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2 + 2\lambda)dz^2 \\ d\varphi = -ydx - xdy + (2z - 6)dz = 0 \end{cases}$$

**Подставим точки:**

$$P_1 = (0,0,1) : \begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2+2\lambda)dz^2 \\ d\varphi = (2-6)dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \end{cases} \Rightarrow d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 4 - \lambda^2 = 4 - \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{min}$$

$$P_2 = (0,0,5) : \begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2+2\lambda)dz^2 \\ d\varphi = (10-6)dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \end{cases} \Rightarrow d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 4 - \lambda^2 = 4 - \frac{25}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{неопределенная форма - точка не является экстремумом}$$

**Ответ:**

$P_1$ - локальный условный минимум