Биномиальное распределение $p(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $\mathbb{E} = np, \mathbb{D} = np(1-p)$ $\varphi(t) = (1-p+pe^{it})^n$ Пуассоновское распределение $p(k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $\mathbb{E} = \lambda, \mathbb{D} = \lambda$ $\varphi(t) = \exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}$ Непрерывное равномерное $F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leqslant x < b \\ 1, x \geqslant b \end{cases}$ $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$ $\mathbb{E} = \dfrac{a+b}{2}, \mathbb{D} = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ $\varphi(t) = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$	Геометрическое распределение $p(k) = (1-p)^{n-1}p$ $\mathbb{E} = \dfrac{q}{p}, \mathbb{D} = \dfrac{q}{p^2}$ $\varphi(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)e^{it}}$ Нормальное распределение $p(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ $\mathbb{E} = \mu, \mathbb{D} = \sigma^2$ $\varphi(t) = \exp\left(\mu\, i\, t - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$ Экспоненциальное распределение $F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-ax}, x \geqslant 0 \end{cases}$ $p(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ ae^{-ax}, x \geqslant 0 \end{cases}$ $\mathbb{E} = \dfrac{1}{a}, \mathbb{D} = \dfrac{1}{a^2}$ $\varphi(t) = \left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-1}$

ЦПТ: $\xi_1, \ldots \xi_n$ - нез. одинак. распр, $\mathbb{E}\xi_1 = a, \mathbb{D}\xi = \sigma^2$

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - a\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2\right)$$

Наследование сходимости:

$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н./p/d}} \xi$, f - непрерывна относ. $\xi \Longrightarrow f(\xi_n) \xrightarrow{\text{п.н./p/d}} f(\xi)$

Лемма Слуцкого:

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi, \eta_n \xrightarrow{d} C$ - константа, то $\xi_n(+/\cdot)\eta_n \to \xi_n(+/\cdot)C$

Многомерная ЦПТ:

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}Y \\ \mathbb{E}Z \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma), \text{ где } \Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{D}Y & cov(Y,Z) \\ cov(Y,Z) & \mathbb{D}Z \end{pmatrix}$$

Гауссовские векторы:

$\xi \sim N(a, \Sigma) \Longrightarrow \mathbb{E}\xi = a, \mathbb{D}\xi = \Sigma$ - матрица ковариаций

$\varphi(t) = e^{i<a,b> - \frac{1}{2}<\Sigma t, t>}$

$$p_\xi(t) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle \Sigma^{-1}(t-a), (t-a)\right\rangle\right\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det\Sigma}}$$

$\xi = A\eta \Rightarrow E[\xi] = AE[\eta], D[\xi] = AD[\eta]A^T$

Неравенства

Марков: $\xi \geqslant 0, a > 0 \Rightarrow P\left[\xi \geqslant a\right] \leqslant \dfrac{E\xi}{a}$

Чебышев: $D\xi < \infty \Rightarrow P\left[|\xi - E[\xi]| \geqslant a\right] \leqslant \dfrac{D\xi}{a^2}; P[\xi = 0] \leqslant \dfrac{D[\xi]}{(E[\xi])^2}$

Хар. функции

$\varphi_\xi(t) = E[e^{it\xi}]$

$\varphi_{\xi_n}(t) \to \varphi_\xi(t) \Longleftrightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Замена случайных величин

Пусть есть X_1, X_2 случайные величины с совместной плотностью p_{X_1,X_2}. Пусть также есть $y_1(x_1,x_2), y_2(x_1,x_2)$ – замена переменных, $Y_1 = y_1(X_1,X_2), Y_2 = y_2(X_1,X_2)$ Тогда

$p_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = p_{X_1,X_2}(x_1(y_1,y_2), x_2(y_1,y_2))|J|, \quad |J| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}\right|$

Ортогонализация Грама-Шмидта

1. В качестве первого вектора u_1 берем первый ненулевой вектор из v_i. Если таких нет, то ответ – пустое множество.

2. Пусть мы нашли вектора $u_1, \ldots, u_s$ и пусть v_d – первый еще не просмотренный вектор среди v_i. Посчитать вектор

$$u' = v_d - \frac{(v_d,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1 - \ldots - \frac{(v_d,u_s)}{(u_s,u_s)}u_s$$

3. Если $u' \neq 0$ положим $u_{s+1} = u'$, иначе пропустим v_d. Теперь перейдем к предыдущему шагу с вектором v_{d+1} вместо v_d.

Свёртки

$p_{\xi+\eta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(t-q)p_\eta(q)\ dq$

$p_{\xi-\eta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(t+q)p_\eta(q)\ dq$

$p_{\xi\cdot\eta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(t/q)p_\eta(q)\frac{1}{|q|}\ dq$

$p_{\xi/\eta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(tq)p_\eta(q)|q|\ dq$

Интегральчики и дифференциальчики:

<table>
<tr><td>

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$
$$\int_a^{+\infty} e^{-x\cdot c}\,\mathrm{dx} = \frac{e^{-ac}}{c}, c>0$$
$$\int_a^{+\infty} xe^{-x\cdot c}\,\mathrm{dx} = \frac{(ac+1)e^{-ac}}{c^2}, c>0$$
$$\int_a^{+\infty} x^2e^{-x\cdot c}\,\mathrm{dx} = \frac{\left((ac)^2+2ac+2\right)e^{-ac}}{c^3}, c>0$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$\int_a^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{e^{-a^2}}{a}$$
$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax-bx^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}}, b>0$$

</td><td>

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$$
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^a} = \frac{-a}{x^{a+1}}$$
$$\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C$$
$$\int \frac{1}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a}+C$$

</td></tr>
<tr><td>

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ на $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ на $\mathbb{R}, a>0, a\neq 1$.
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$ на $\mathbb{R}$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ на $\mathbb{R}$.
6. $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ на $\mathbb{R}, a\neq 0$.
7. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ на $(-\infty,-a),(-a,a),(a,+\infty)$.
8. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$ на $(-a,a), a>0$.
9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$ на $\mathbb{R}$ для $+$, на $(-\infty,-|a|)$ и $(|a|,+\infty)$ для $-$.
10. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$ на $\mathbb{R}$.
11. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$ на $\mathbb{R}$.
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$ на $(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k), k\in\mathbb{Z}$.
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \operatorname{ctg} x + C$ на $(\pi k, \pi+\pi k), k\in\mathbb{Z}$.
14. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = \operatorname{th} x + C$ на $\mathbb{R}$.
15. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx = -\operatorname{cth} x + C$ на $(-\infty,0),(0,+\infty)$.

</td><td>

$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \frac{1}{\ln x}dx.$
Неопределённый интеграл данных функций не выражается комбинацией элементарных функций.
По частям: $\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

Рандом свойства
$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k;$
$$P\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leqslant \sum_{i=1}^n P\left[A_i\right];$$

Формулы Байеса
$$P\left[A|B\right] = \frac{P\left[A\cap B\right]}{P\left[B\right]} = \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]};$$
$$P\left[B_i|A\right] = \frac{P\left[A|B_i\right]P\left[B_i\right]}{\sum\limits_{k=1}^n P\left[A|B_k\right]P\left[B_k\right]}$$

</td><td>

Матожидание:
$E[\alpha\xi+\beta\eta] = \alpha E[\xi]+\beta E[\eta]; |E\xi| \leqslant E|\eta|$
$E[\varphi(\xi)] = \sum_{a\in\xi(\Sigma)}\phi(a)P[\xi=a]$
ξ,η - независимы $\Rightarrow E[\xi\eta] = E[\xi]E[\eta]$

Дисперсия:
$D\xi = E[(\xi-E\xi)^2] = E\xi^2-(E\xi)^2$
$cov(\xi,\eta) = E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)] = E[\xi\eta]-E[\xi]E[\eta]$
$cov(\xi,\alpha\eta+\beta\chi) = \alpha cov(\xi,\eta)+\beta cov(\xi,\chi)$
$D\xi = cov(\xi,\xi)$
$D[c\xi] = c^2D\xi, D[\xi+c] = D\xi;$
$D\xi \geqslant 0$
$cov(\xi,\eta) = 0 \Rightarrow D[\xi+\eta] = D\xi+D\eta$

</td></tr>
</table>

Определения/Теоремы

Сходимость по вероятности: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow \forall\alpha > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} P[|\xi_n - \xi| \geqslant \alpha] = \lim\limits_{n\to\infty} P[\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geqslant \alpha\}] = 0$

Сходимость поточечно (с вероятностью 1/почти наверное): $P\left[\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi\right] = P\left[\left\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right\}\right] = 1$

Для дискретных случайных величин: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.ч.}} \xi$)

ЗБЧ: $cov(\xi_i, \xi_j) = 0, \exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : D[\xi_n] \leqslant C, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \Rightarrow \dfrac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{P} 0$

Следствие ЗБЧ: $D[\xi_n] \leqslant C \Rightarrow \dfrac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E[\xi_n]$

уЗБЧ (в форме колмогорова): нез. и о.р. $\xi_1, \ldots \xi_n, |E[\xi]| < \infty, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \Rightarrow \dfrac{S_n - E[S_n]}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$

Т. Пуассона: $S_n \sim Bin(n,p), np(n) \xrightarrow{n\to\infty} \lambda > 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}_+ : P[S_n = k] \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

База: ξ - абсолютно непр. с.в. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Функция распределения: $F_\xi(x) = P\left[\xi \leqslant x\right],\ F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt,\ p_\xi(x) = F'(x), E\left[\xi\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\, dx$

$F(x)$ — функция распредления на $\mathbb{R}$. Тогда $F(x) = \alpha_1 F_1(X) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$, где $F_1(x)$ — дискретная, $F_2(x)$ — абсолютно непрерывная, $F_3(x)$ — сингулярная. И $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Если функция $F(x)$ имеет счётное (или конечное) число точек разрыва $x_1, \ldots, x_n, \ldots$

то пусть $\delta_k = F(x_k+) - F(x_k-)$:

$$E[g(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) \cdot \delta_k + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) F'(x) dx$$

Техники решения

1. Выражать функцию рекурсивно через себя от меньших аргументов

2. $\max\left(x_1, \ldots, x_n\right) \leq a \Longleftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} x_i \leq a$

3. $\max\left(x_1, \ldots, x_n\right) \geq a \Longleftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} x_i \geq a$

4. Раскрыть неравенство с модулем в два неравенства.

5. Если X — с.в. принимающая целые неотриц. значения, то $P(X > 0) \leq E[X]$ и $P(X = 0) \leq \frac{D[X]}{(E[X])^2}$

6. Если нужно посчитать матожидание функции случайных величин, то можно внутри добавить условное матожидание и сначала посчитать его. Будет проще так как можно по факту фиксировать одну, и считать матожидание другой (см. секцию Условное матожидание).

7. Для гауссовского вектора можно разложить в назависимые и легче считать матожидание функции от них.