

# Calculus - Exam4

Made by [@dsalakhov](#) и [@azakarka](#)

Актуальную версию файла можно найти в [канале](#)

Нашёл ошибку? Лучше всего написать об этом на [гитхабе](#)

Писать по ошибкам в задачах [@azakarka](#)

## Материал к экзамену в 4 модуле. Матанализ

### Разбор Листка 13+

#### Задача 1

##### Условие

Найдите производную функции  $f$  в точке  $M$  по направлению вектора  $\vec{a}$ :

1.  $f = xy^2z^3$ ,  $M = (3, 2, 1)$ ,  $\vec{a} = (3, 4, 5)$
2.  $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $M = (3, 3, 1)$ ,  $\vec{a} = (-1, 2, 2)$

##### Решение

##### Пункт а

В самом начале отнормируем направляющий вектор.  $\vec{a} = (3, 4, 5) \rightsquigarrow \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, 5)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \left( 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 4 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 5 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Найдем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2 z^2 \end{cases}$$

Подставляем в выражение:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} (3y^2 z^3 + 8xyz^3 + 15xy^2 z^2)$$

Осталось лишь найти значение в точке:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{(3,2,1)} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3 \cdot 4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 15 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(12 + 48 + 180) = 24\sqrt{2}$$

## Пункт 6

Делаем тоже самое:

$$\vec{a} = (-1, 2, 2) \rightsquigarrow \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{3} \left( -\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{3(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot (-2x + 4y + 4z)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{a}} \right|_{(3,3,1)} = \frac{10}{3 \cdot 19} = \frac{10}{57}$$

## Задача 2

### Условие

Вычислите значение дифференциала функции

$$f(x, y) = x^3 y^6 + e^{x+y^2}$$

в точке  $(1, 1)$  на векторе  $(1, 2)$

### Решение

В дифференциале уже не надо нормировать вектор.

воспользуемся равенством:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Наш вектор  $v$  и будет отвечать  $(dx, dy)$ , мы как бы приближаемся по нему. Посчитаем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^6 + e^{x+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y^5 + 2y \cdot e^{x+y^2} \end{cases}$$

$$df|_{(1,1)} = (3 + e^2)dx + (6 + 2e^2)dy$$

тогда ответ:

$$(3 + e^2) \cdot 1 + (6 + 2e^2) \cdot 2 = 5e^2 + 15$$

## Задача 3

### Условие

Найдите касательную плоскость

1. к графику функции  $z = e^x xy + e^y xy$  в точке  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2e)$
2. к поверхности, заданной уравнением  $z^2 = x^3 + y^2$  в точке  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$

### Решение

**Задача 9.2.** Пусть гладкая поверхность задана неявно уравнением  $F(x; y; z) = 0$ . Используя тот факт, что градиент ортогонален множествам уровня, докажите, что

а) уравнение касательной плоскости в точке  $(x_0; y_0; z_0)$  имеет вид

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0;$$

б) уравнение нормали в точке  $(x_0; y_0; z_0)$  имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

### Пункт а

приведем к нужному виду:

$$F(x; y; z) = e^x xy + e^y xy - z = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x; y; z) = e^x y + e^x xy + e^y y \\ F'_y(x; y; z) = e^x x + e^y x + e^y xy \\ F'_z(x; y; z) = -1 \end{cases}$$

Подставим в точку

$$\begin{cases} F'_x(1;1;2e) = e + e + e = 3e \\ F'_y(1;1;2e) = e + e + e = 3e \\ F'_z(1;1;2e) = -1 \end{cases}$$

**Ответ:**

$$3e(x-1) + 3e(y-1) - (z-2e) = 0 \Rightarrow 3ex + 3ey - z = 4e$$

**Пункт 6**

$$F(x; y; z) = x^3 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x; y; z) = 3x^2 \\ F'_y(x; y; z) = 2y \\ F'_z(x; y; z) = -2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x(2; 1; 3) = 12 \\ F'_y(2; 1; 3) = 2 \\ F'_z(2; 1; 3) = -6 \end{cases}$$

**Ответ:**

$$12(x-2) + 2(y-1) - 6(z-3) = 0 \Rightarrow 6x + y - 3z = 4$$

**Задача 4**

**Условие**

Пусть  $\varphi$  - дважды непрерывно дифференцируемая, а  $f$  — сложная функция, заданная следующим образом

$$f(x, y) = \varphi(xy, x^3 + y^2)$$

1. Выразите дифференциал 1-го порядка функции  $f$  через частные производные функции  $\varphi$
2. Выразите дифференциал 2-ого порядка функции  $f$  через частные производные функции  $\varphi$

**Решение**

Найти решение таких же задач с семинара можно [ТУТ](#) с примерно 24-ой минуты

$$u = xy, v = x^3 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'_u \cdot y + \varphi'_v \cdot 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (\varphi'_u \cdot y + \varphi'_v \cdot 3x^2) dx + (\varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y) dy$$

Первый дифференциал нашли, найдем вторые:

(так как  $\varphi$  дважды дифференцируема по Шварцу смешанные производные равны)

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi'_u \cdot y + \varphi'_v \cdot 3x^2) = y \cdot \left( \varphi''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{uv} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &\quad + 6x \cdot \varphi'_v + 3x^2 \cdot \left( \varphi''_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &= y^2 \varphi''_{uu} + 6x \varphi'_v + 6x^2 y \varphi''_{uv} + 9x^4 \varphi''_{vv} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{xy} &= f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y) = \\ &= \varphi'_u + x \left( \varphi''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{uv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2y \left( \varphi''_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \\ &\quad \varphi'_u + xy \varphi''_{uu} + 3x^3 \varphi''_{uv} + 2y^2 \varphi''_{vu} + 6x^2 y \varphi''_{vv} = \\ &\quad \varphi'_u + xy \varphi''_{uu} + \varphi''_{vu}(3x^3 + 2y^2) + 6x^2 y \varphi''_{vv} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot 2y) = x \left( \varphi''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi''_{uv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\varphi'_v + 2y \left( \varphi''_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ &\quad x^2 \varphi''_{uu} + 2xy \varphi''_{uv} + 2\varphi'_v + 2xy \varphi''_{vu} + 4y^2 \varphi''_{vv} = \\ &\quad x^2 \varphi''_{uu} + 4xy \varphi''_{vu} + 4y^2 \varphi''_{vv} + 2\varphi'_v \end{aligned}$$

Теперь просто подставим все, что мы нашли в равенство (автор не видит смысл делать это явно)

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$$

## Альтернативное решение

$$u = xy, v = x^3 + y^2$$

$$\begin{cases} du = ydx + xdy \\ dv = 3x^2 dx + 2ydy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^2 u = d(ydx + xdy) = \star dydx + dx dy = 2dx dy \\ d^2 v = d(3x^2 dx + 2ydy) = \star 6x dx^2 + 2dy^2 \end{cases}$$

★ - тут  $d^2 x = d^2 y = 0$

$$df = d\varphi = \varphi'_u du + \varphi'_v dv = \varphi'_u(ydx + xdy) + \varphi'_v(3x^2 dx + 2ydy) = \\ = (y\varphi'_u + 3x^2\varphi'_v)dx + (x\varphi'_u + 2y\varphi'_v)dy$$

$$d^2 f = d(d\varphi) = d(\varphi'_u du + \varphi'_v dv) = d(\varphi'_u du) + d(\varphi'_v dv) = d(\varphi'_u)du + \varphi'_u d^2 u + d(\varphi'_v)dv + \varphi'_v d^2 v = \\ = (\varphi''_{uv} dv + \varphi''_{uu} du)du + \varphi'_u d^2 u + (\varphi''_{vu} du + \varphi''_{vv} dv)dv + \varphi'_v d^2 v = \text{далее на силу рук}$$

## Задача 5

### Условие

Функция  $z = z(x, y)$  задана неявно системой уравнений

$$\begin{cases} x = v \sin u \\ y = v \cos u \\ z = uv^2 \end{cases}$$

Найдите  $dz$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  в точке  $u = \frac{\pi}{4}$ ,  $v = 1$

### Решение

$$dz = d(uv^2) = z'_v dv + z'_u du = 2vu \cdot dv + v^2 \cdot du$$

теперь нам нужно выразить  $(dv, du)$  через  $(dx, dy)$ , так как нас просят выразить  $dz$  через  $(x, y)$ .

Мы это осуществим с помощью матрицы Якоби:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin u & v \cos u \\ \cos u & -v \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dv \\ du \end{pmatrix}$$

Мы нашли эти выражения с помощью первых двух равенств в системе.

Найдем:

$$\begin{pmatrix} \sin u & v \cos u \\ \cos u & -v \sin u \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-v} \begin{pmatrix} -v \sin u & -v \cos u \\ -\cos u & \sin u \end{pmatrix} (*)$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} dv \\ du \end{pmatrix} = \frac{1}{-v} \begin{pmatrix} -v \sin u & -v \cos u \\ -\cos u & \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Теперь уже можно выразить  $dz$  через  $(x, y)$ :

$$dz = 2vu \cdot dv + v^2 \cdot du = 2vu(\sin u \cdot dx + \cos u \cdot dy) - v(-\cos u \cdot dx + \sin u \cdot dy) = \\ = (2vu \sin u + v \cos u)dx + (2vu \cos u - v \sin u)dy$$

Найдем также значение в точке, для этого найдем саму точку:

$$\begin{cases} x = v \sin u \\ y = v \cos u \\ z = uv^2 \\ v = 1 \\ u = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow P = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}, 1, \frac{\pi}{4} \right)$$

Тогда:

$$dz|_P = \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dx + \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dy$$

Второй дифференциал уже не инвариантен, поэтому найдем его стандартным способом. Для нахождения  $z'_y$  воспользуемся равенством  $dz = z'_x dx + z'_y dy$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(z'_y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2vu \cos u - v \sin u) = \\ &= 2v'_x u \cos u + 2vu'_x \cos u - 2vu \sin u \cdot u'_x - v'_x \sin u - v \cos u \cdot u'_x = \\ &= v'_x(2u \cos u - \sin u) + u'_x(2v \cos u - 2vu \sin u - v \cos u) \end{aligned}$$

чтобы не таскать с собой громоздкие выражения, сразу подставим точку:

$$\begin{aligned} \Rightarrow |_P &= v'_x \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + u'_x \left( \sqrt{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= v'_x \left( \frac{\pi - 2}{2\sqrt{2}} \right) + u'_x \left( \frac{2 - \pi}{2\sqrt{2}} \right) = (v'_x - u'_x) \cdot \frac{\pi - 2}{2\sqrt{2}} = \end{aligned}$$

тут воспользуемся обратной матрицей Якоби (\*)

$$= \left( \sin u - \frac{\cos u}{v} \right) \cdot \frac{\pi - 2}{2\sqrt{2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{\pi - 2}{2\sqrt{2}} = 0$$

## Задача 6

### Условие

Найдите все точки локального экстремума функции

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 + 12y$$

### Решение

Найдем все стационарные точки, то есть точки, в которых дифференциал равен 0:

$$df = (6x^2 - 6y)dx + (-6x - 6y + 12)dy$$

$$df = 0 \iff \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6x + 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow P_1 = (1, 1), P_2 = (-2, 4)$$



Нашли кандидатов, теперь посмотрим на второй дифференциал функции, выпишем сразу в матрицу, чтобы применить критерий Сильвестра:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{применим хитрость с линала}] \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -72x - 36 \end{cases}$$

Поясню про "хитрость с линала", у нас матрица квадратичной формы  $Q(dx, dy)$  мы можем посчитать угловые миноры этой матрицы, но тогда переменная  $x$  будет в обоих сигмах, что не очень удобно (имхо). Вместо этого, лучше рассмотреть матрицу  $Q(dy, dx)$  (задачи очевидно эквивалентные), у которой уже  $x$  будет лишь в одной сигме.

подставим обе точки:

$$P_1 = (1, 1) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -108 \end{cases}$$

нулевых миноров нет, по критерию она неопределенная

$$P_2 = (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \max$$

**Ответ:**

точка  $(-2, 4)$  - точка локального максимума

## Задача 7

### Условие

Найдите все точки условного локального экстремума функции

1.  $f(x, y, z) = \sqrt{3}x + 3y + 2z$ , если  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , если  $xy = z^2 - 6z + 5$

### Решение

#### Пункт а

Функция ограничитель:  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = f + \lambda \varphi$$

Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = \sqrt{3} + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 3 + 2y\lambda = 0 \\ L'_z = 2 + 2z\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим систему и получим:

$$P_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) \text{ с } \lambda = 2$$

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ с } \lambda = -2$$

Как и в предыдущей задаче мы решим эту с помощью Сильвестра. Составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Видно, что невырожденная матрица либо положительно либо отрицательно определенная при любых условиях, поэтому даже не смотря на значение  $d\varphi$ , можно сразу выписать ответ:

$P_1$  - точка локального условного минимума

$P_2$  - точка локального условного максимума

## Пункт 6

$$\varphi(x, y, z) = z^2 - 6z + 5 - xy$$

$$L = f + \lambda\varphi$$

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y\lambda = 0 \\ L'_y = 2y - x\lambda = 0 \\ L'_z = 2z + 2z\lambda - 6\lambda = 0 \\ L'_\lambda = z^2 - 6z + 5 - xy = 0 \end{cases}$$

Решаем, получаем:

$$P_1 = (0, 0, 1), \lambda = \frac{1}{2}$$

$$P_2 = (0, 0, 5), \lambda = -\frac{5}{2}$$

составим матрицу:

тут уже не так очевидно, выпишем вторые дифференциалы:

$$\begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dx dy + 2dy^2 + (2 + 2\lambda)dz^2 \\ d\varphi = -ydx - xdy + (2z - 6)dz = 0 \end{cases}$$

**Подставим точки:**

$$P_1 = (0, 0, 1) : \begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2 + 2\lambda)dz^2 \\ d\varphi = (2 - 6)dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \end{cases} \Rightarrow d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 4 - \lambda^2 = 4 - \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \min$$

$$P_2 = (0, 0, 5) : \begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2 + 2\lambda)dz^2 \\ d\varphi = (10 - 6)dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \end{cases} \Rightarrow d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 4 - \lambda^2 = 4 - \frac{25}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{неопределенная форма - точка не является экстремумом}$$

**Ответ:**

$P_1$  - локальный условный минимум