

Made by [@dsalakhov](#)

Актуальную версию файла можно найти в [канале](#)

Уведомлять об опечатках, багах в решениях в лс или на [гитхабе](#)

Благодарность выражается:

[@nol\\_erk](#) - за прорешанный листок, с которым можно было свериться :)

## Подготовительный лист к КР-1

### Задача #1

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\pi \cdot (\pi+1) \cdot \dots \cdot (\pi+n-1) \cdot n}$$

#### Решение

$$\frac{(n+1)!}{\pi \cdot (\pi+1) \cdot \dots \cdot (\pi+n-1) \cdot n} < \frac{(n+1)!}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+2) \cdot n} = \frac{2(n+1)!}{(n+2)!n} = \frac{2}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{сходится}$$

### Задача #2

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n + \frac{1}{n}} \cos \frac{3+2n}{3+2n+n^2}$$

#### Решение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2n}{3+2n+n^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{3+2n}{3+2n+n^2} = 1$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + \frac{1}{n}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + \frac{1}{n}} \cos \frac{3+2n}{3+2n+n^2} \neq 0 \Rightarrow \text{расходится}$$

### Задача #3

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(0.5+1)(0.5+2) \cdot \dots \cdot (0.5+n)}{(1.5+1)(1.5+2) \cdot \dots \cdot (1.5+n)} \right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0$$

## Решение

$$a_n = \left( \frac{1.5 \cdot \cancel{2.5} \cdot \dots \cdot \cancel{(0.5+n)}}{\cancel{2.5} \cdot \cancel{3.5} \cdot \dots \cdot (1.5+n)} \right)^\alpha = \left( \frac{1.5}{1.5+n} \right)^\alpha \sim \frac{1}{n^\alpha} \text{ сходитс} \text{я при } \alpha > 1, \text{ иначе расходится}$$

## Задача #4

Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}$$

## Решение

$$a_n = \cos \frac{\pi n}{6}, \quad b_n = \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^N a_n \leq \frac{1}{|\sin \frac{\pi}{6}|} \quad // \text{внизу можно посмотреть как это доказывается}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad // \text{лог слабее степени}$$

$$\left( \frac{\ln^6 x}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{6 \ln^5 x \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln^6 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{12 \ln^5 x - \ln^6 x}{2x^{3/2}} = 0 \Rightarrow 12 - \ln x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = e^{12}. \quad \text{В овербольших числах производная} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\lceil e^{12} \rceil - 1} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}}_{const} + \underbrace{\sum_{n=\lceil e^{12} \rceil}^{\infty} \frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi n}{6}}_{\text{сходится по Дирихле}} - \text{сходится}$$

## Задача #5

Исследовать условную/абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+4}{n+3}$$

## Решение

$$a_n = (-1)^n \ln \frac{n+4}{n+3}, \quad c_n = |a_n|$$

$$C_n = \sum_{k=1}^n c_k = \ln \frac{\cancel{5}}{4} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \cdot \dots \cdot \frac{n+4}{\cancel{n+3}} = \ln \frac{n+4}{4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = +\infty \Rightarrow \text{ряд не сходитс} \text{я абсолютно}$$

$$b_n = \ln \frac{n+4}{n+3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad \{b_n\} \text{ убывает} \Rightarrow \text{по признаку Лейбница исходный ряд сходитс} \text{я условно}$$

## Задача #6

Исследовать на равномерную сходимость:

$$f_n(x) = \frac{1 + \ln(nx)}{nx}, \quad a) D_1 = (0; 1), \quad b) D_2 = (1; +\infty)$$

### Решение

При фиксированно  $x$ ,  $f_n(x)$  сходится к 0. Иначе говоря, последовательность поточечно сходится к нулю. Это означает, что если последовательность сходится равномерно, то оно должно сходится равномерно к 0:

a)

$$x = \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) = \frac{1 + \ln(1)}{1} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{D_1} |f_n(x) - f(x)| \neq 0 \Rightarrow \text{посл. равномерно не сходится}$$

b)

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon &\Rightarrow |f_n(x)| < \varepsilon \stackrel{f_n(x) \geq 0, x \in D_2}{\Rightarrow} \frac{1 + \ln(nx)}{nx} < \varepsilon \\ f'_n(x) &= \frac{\frac{n}{nx} \cdot nx - (1 + \ln(nx)) \cdot n}{n^2 x^2} = \frac{-\ln(nx)}{nx^2} < 0 \text{ при всех } x \in D_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sup_{D_2} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1 + \ln n}{n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{D_2} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln n}{n} = 0 \Rightarrow \text{сходится равномерно} \end{aligned}$$

## Задача #7

Исследовать на равномерную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx) \cdot \sin \frac{1}{nx}}{4 + \ln^2(nx)}, \quad D = [2; +\infty)$$

### Решение

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{\cos(nx) \cdot \sin \frac{1}{nx}}{4 + \ln^2(nx)}, \quad |f_n(x)| = \frac{|\cos(nx)| \cdot |\sin \frac{1}{nx}|}{4 + \ln^2(nx)} \leq \frac{1 \cdot (\frac{1}{nx} + o(\frac{1}{nx}))}{\ln^2(nx)} = \frac{1 + o(1)}{nx \ln^2(nx)} \sim \\ &\sim \frac{1}{nx \ln^2(nx)} <_{\star} \frac{1}{n \ln^2 n} \text{ сходится (ряд Бертра)} \\ &\quad \star \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

# Чем пользоваться?

## Необходимое условие сходимости ряда

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Иначе говоря:

Если,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  не сходится. Однако, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  может расходиться, например:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

## Критерии сходимости ряда

### Критерий Коши

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m : n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

### Обратный критерий Коши

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n, m : n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \geq \varepsilon$$

## Сходимость произведений

(Абсолютной/Условной) сходимость произведения  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ , эквивалентна

(абсолютной/условной) сходимостью  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

## Признаки сходимости знакопостоянного ряда

### Первый признак сравнения

Пусть  $a_n \geq b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда

1. если сходится  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то сходится и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,

2. если расходится  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , то расходится и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

## Второй признак сравнения

$a_n, b_n > 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ . Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  эквивалентны по сходимости, то есть (ра-)сходятся одновременно.

## Признак Вейерштрасса

Если  $|a_n| \leq b_n$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

## Признак Коши

Если  $a_n \geq 0$  и  $\{a_n\}$  - монотонно невозрастающая последовательность, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

## Интегральный признак Коши

Если  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$  и  $f(x)$  монотонно не возрастает, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sim \int_0^{\infty} f(x) dx$$

## Радикальный признак Коши

Если  $a_n \geq 0$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ , то

1. если  $q < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится

2. если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится

3. если  $q = 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  как сходится  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$ , так и расходится  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1\right)$

## Признак Даламбера

Если  $a_n > 0$ ,  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ,  $D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , то

1. если  $d > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится

2. если  $D < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится

## Признак Гаусса

Если  $a_n > 0$  и  $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \delta > 0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

## Признаки сходимости знакопеременного ряда

### Признак Дирихле

$$\left. \begin{array}{l} \exists M > 0 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq M \\ \{b_n\} \text{ (нестрого) монотонна} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится}$$

### Признак Абеля

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \\ \{b_n\} \text{ (нестрого) монотонна} \\ \exists M > 0 : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится}$$

### Признак Лейбница

$$\left. \begin{array}{l} b_n \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \\ \{b_n\} \text{ (нестрого) монотонно убывает} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \text{ сходится}$$

Причем оценка на остаток:  $|r_n| \leq b_{n+1}$

## Перестановки членов ряда

### Сходимость перестановки

Если  $a_n \geq 0$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то ряд полученной из какой-то

перестановки членов исходного ряда сходится и равен изначальному ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

## Абсолютная сходимость перестановки

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно, то ряд полученной из какой-то перестановки членов исходного ряда сходится абсолютно и равен изначальному ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

## Условная сходимость перестановки (конструктив)

По теореме Римана, тогда существуют следующие перестановки:

1.  $\forall A \in \mathbb{R} \quad \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  - биекция:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$
2.  $\exists \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  - биекция:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \pm\infty$
3.  $\exists \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  - биекция: последовательность частичных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty}$  не имеет ни конечного, ни бесконечного предела

## Произведения рядов

### Произведение абсолютно сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \text{ и оба сходятся абсолютно}$$
$$\Rightarrow \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B$$

### Теорема Мертенса

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B, \text{ оба сходятся и хотя бы один из них сходится}$$
$$\text{абсолютно} \Rightarrow \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = A \cdot B, \text{ где } c_n = a_1 b_n + \dots + a_n b_1$$

### Теорема Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C, \text{ где } c_n = a_1 b_n + \dots + a_n b_1$$

Тогда  $C = AB$

# Функциональная последовательность

## Поточечная сходимость

$f_n \xrightarrow{D} f$  - поточечная сходимость функциональной последовательности  $f_n(x)$  к функции  $f(x)$ :

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(x, \varepsilon) \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

## Равномерная сходимость

$f_n \rightrightarrows f$  - равномерная сходимость функциональной последовательности  $f_n(x)$  к функции  $f(x)$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n > N, \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной сходимости от поточечной, что существует  $N$  для всех  $x$  при конкретном  $\varepsilon$ .

**Замечание:**  $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \xrightarrow{D} f$

## Критерии равномерной сходимости

### lim-sup критерий

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_D |f_n(x) - f(x)| = 0$$

### Критерий Коши

Пусть  $f_n, f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда:

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N, \forall x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

## Полезные штучки

### Как ограничивать сумму (ко-)синусов

Ограничим сумму синусов (для косинусов аналогично)

Есть два варианта: один для рекуррентных, другой для ящериц:

$$1. \quad \sum_{k=1}^n \sin \alpha k = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n (e^{\alpha i})^k \leq \left| \sum_{k=1}^n (e^{\alpha i})^k \right| = [\text{геом прогрессия}] = \left| \frac{e^{\alpha i}(1 - e^{\alpha i n})}{1 - e^{\alpha i}} \right| \leq \frac{2}{1 - e^{\alpha i}}$$



2. Воспользуемся тем, что  $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha k = \sin \left( \alpha k + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \left( \alpha k - \frac{\alpha}{2} \right)$ . Тогда

домножим  $\sum_{k=1}^n \sin \alpha k$  на  $2 \cos \frac{\alpha}{2}$  и получим:  $\sin \left( \alpha n + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \frac{\alpha}{2}$

$\sum_{k=1}^n \sin \alpha k = \frac{\sin \left( \alpha n + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \leq \left| \frac{\sin \left( \alpha n + \frac{\alpha}{2} \right) - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right|$ , дальше, наверное, как-то и можно  
сократить, но зачем, если есть первый способ

## Формула Эйлера

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

## Формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \exp \frac{\Theta_n}{12n}, \quad \exp x = e^x, \quad \Theta_n \in (0, 1), \quad n > 0$$

## Ряд Бертрана

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$$

1. При  $\alpha > 1$  ряд сходится
2. При  $\alpha = 1$ ,  $\beta \geq 2$  ряд сходится
3. При  $\alpha = 1$ ,  $\beta < 2$  ряд расходится
4. При  $\alpha < 1$  ряд расходится

## Ряды Тейлора (снова...)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + o(x^3)$$

**Табличные производные**

$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(U \pm V)' = U' \pm V'$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$
$(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$