# Calculus-Exam4

> template
>
> > template_latex
>
> > template_authors
> >
> > *Made by @dsalakhov и @azakarka*
>
> > template_channel_info
> >
> > Актуальную версию файла можно найти в канале

# Материал к экзамену в 4 модуле. Матанализ

Calculus-Exam4 > Задача 4

## Задача 1

### Условие

Найдите производную функции $f$ в точке $M$ по направлению вектора $\vec{a}$:

1. $f = xy^2z^3$, $M = (3, 2, 1)$, $\vec{a} = (3, 4, 5)$
2. $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M = (3, 3, 1)$, $\vec{a} = (-1, 2, 2)$

### Решение

#### Пункт a

В самом начале отнормируем направляющий вектор. $\vec{b} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, 5)$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 4 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 5 \cdot \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Найдем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2 z^2 \end{cases}$$

Подставляем в выражение:

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \left(3y^2 z^3 + 8xyz^3 + 15xy^2 z^2\right)$$

Осталось лишь найти значение в точке:

$$\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{(3,2,1)} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3 \cdot 4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 15 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(12 + 48 + 180) = 24\sqrt{2}$$

### Пункт б

Делаем тоже самое:

$$b = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{3}\left(-\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{3(x^2 + y^2 + z^2)} \cdot (-2x + 4y + 4z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}\Big|_{(3,3,1)} = \frac{10}{3 \cdot 19} = \frac{10}{57}$$

# Задача 2

## Условие

Вычислите значение дифференциала функции

$$f(x, y) = x^3 y^6 + e^{x+y^2}$$

в точке (1, 1) на векторе (1, 2)

## Решение

В дифференциале уже не надо нормировать вектор.

воспользуемся равенством:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Наш вектор $v$ и будет отвечать $(dx, dy)$, мы как бы приближаемся по нему. Посчитаем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^6 + e^{x+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y^5 + 2y \cdot e^{x+y^2} \end{cases}$$

$$df\Big|_{(1,1)} = (3+e^2)dx + (6+2e^2)dy$$

тогда ответ:

$$(3+e^2) \cdot 1 + (6+2e^2) \cdot 2 = 5e^2 + 15$$

# Задача 3

## Условие

Найдите касательную плоскость

1. к графику функции $z = e^x xy + e^y xy$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2e)$
2. к поверхности, заданной уравнением $z^2 = x^3 + y^2$ в точке $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$

## Решение

**Задача 9.2.** Пусть гладкая поверхность задана неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$. Используя тот факт, что градиент ортогонален множествам уровня, докажите, что

а) **уравнение касательной плоскости** в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0;$$

б) **уравнение нормали** в точке $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

### Пункт а

приведем к нужному виду:

$$F(x; y; z) = e^x xy + e^y xy - z = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x;y;z) = e^x y + e^x xy + e^y y \\ F'_y(x;y;z) = e^x x + e^y x + e^y xy \\ F'_z(x;y;z) = -1 \end{cases}$$

Подставим в точку

$$\begin{cases} F'_x(1;1;2e) = e + e + e \\ F'_y(1;1;2e) = e + e + e \\ F'_z(1;1;2e) = -1 \end{cases}$$

Ответ:

$$3e(x-1) + 3e(y-1) - (z-2e) = 0 \Rightarrow 3ex + 3ey - z = 4e$$

**Пункт б**

$$F(x;y;z) = x^3 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\begin{cases} F'_x(x;y;z) = 3x^2 \\ F'_y(x;y;z) = 2y \\ F'_z(x;y;z) = -2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_x(2;1;3) = 12 \\ F'_y(2;1;3) = 2 \\ F'_z(2;1;3) = -6 \end{cases}$$

Ответ:

$$12(x-2) + 2(y-1) - 6(z-3) = 0 \Rightarrow 6x + y - 3z = 3$$

# Задача 4

## Условие

Пусть $\varphi$ - дважды непрерывно дифференцируемая, а $f$ — сложная функция, заданная следующим образом

$$f(x,y) = \varphi(xy, x^3 + y^2)$$

1. Выразите дифференциал 1-го порядка функции $f$ через частные производные функции $\varphi$
2. Выразите дифференциал 2-ого порядка функции $f$ через частные производные функции $\varphi$

## Решение

Найти решение таких же задач с семинара можно тут с примерно 24-ой минуты

$$u = xy, v = x^3 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f'_u \cdot y + f'_v \cdot 2x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = f'_u \cdot x + f'_v \cdot 2y$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (f'_u \cdot y + f'_v \cdot 2x^2)dx + (f'_u \cdot x + f'_v \cdot 2y)dy$$

Первый дифференциал нашли, поищем вторые:
(так как $\varphi$ дважды дифференцируема по Шварцу смешанные производные равны)

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(f'_u \cdot y + f'_v \cdot 2x^2) = y \cdot (f''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{vu}\frac{\partial v}{\partial x}) +$$
$$+4x \cdot f'_v + 2x^2 \cdot (f''_{uv} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) =$$
$$= xyf''_{uu} + 4xf'_v + 4x^2yf''_{uv} + 4x^4f''_{vv}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(f'_u \cdot x + f'_v \cdot 2y) =$$
$$= f'_u + x(f''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{vu} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) + 2y(f''_{uv} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) =$$
$$f'_u + xyf''_{uu} + 3x^3f''_{vu} + 2xyf''_{uv} + 6x^2yf''_{vv} =$$
$$f'_u + xyf''_{uu} + xf''_{vu}(3x^2 + 2y) + 6x^2yf''_{vv}$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(f'_u \cdot x + f'_v \cdot 2y) = x(f''_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{vu} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) + 2f'_v + 2y(f''_{uv} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}) =$$
$$x^2f''_{uu} + 2xyf''_{vu} + 2f'_v + 2xyf''_{uv} + 4y^2f''_{vv} =$$
$$x^2f''_{uu} + 4xyf''_{vu} + 4y^2f''_{vv} + 2f'_v$$

Теперь просто подставим все, что мы нашли в равенство (автор не видит смысл делать это явно)

$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

# Задача 6

## Условие

Найдите все точки локального экстремума функции

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy - 3y^2 + 12y$$

Найдем всех кандидатов, то есть точки, в которых дифференциал равен 0:

$$df = (6x^2 - 6y)dx + (-6x - 6y + 12)dy$$

$$df = 0 \iff \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6x + 6y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow P_1 = (1, 1), P_2 = (-2, 4)$$

Нашли кандидатов, теперь посмотрим на второй дифференциал функции, выпишем сразу в матрицу, чтобы применить критерий Сильвестра:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{применим хитрость с линала}] \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -72x - 36 \end{cases}$$

подставим обе точки:

$$P_1 = (1, 1) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 = -108 \end{cases}$$

нулевых миноров нет, по критерию она неопределенная

$$P_2 = (-2, 4) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -6 \\ \sigma_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \max$$

Ответ:
точка $(-2, 4)$ - точка локального максимума

# Задача 7

## Условие

Найдите все точки условного локального экстремума функции

1. $f(x, y, z) = \sqrt{3}x + 3y + 2z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, если $xy = z^2 - 6z + 5$

## Решение

### Пункт а

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$$

найдем кандидатов на точку локального экстремума:

$$\begin{cases} L'_x = \sqrt{3} + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 3 + 2y\lambda = 0 \\ L'_z = 2 - 2z\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим систему и получим:

$P_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2}, 1)$ с $\lambda = 1$
$P_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -1)$ с $\lambda = -1$

Как и в предущей задачи мы решим задачу критерием Сильвестра, составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

видно, что невырожденная матрица либо положительно либо отрицательно определенная при любых условиях, поэтому даже не смотря на значение $dF$, можно сразу выписать ответ:

$P_1$ - точка локального условного минимума
$P_2$ - точка локального условного максимума

### Пункт б

$$F = z^2 - 6z + 5 - xy$$

$$L = f + \lambda F$$

$$\begin{cases} L'_x = 2x - y\lambda = 0 \\ L'_y = 2y - x\lambda = 0 \\ L'_z = 2z + 2z\lambda - 6\lambda = 0 \\ L'_\lambda = z^2 - 6z + 5 - xy = 0 \end{cases}$$

Решаем, получаем:
$P_1 = (0, 0, 5), \lambda = \frac{1}{5}$
$P_2 = (0, 0, 1), \lambda = 5$

составим матрицу:

тут уже не так очевидно, выпишем вторые дифференциалы:

$$\begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2+2\lambda)dz^2 \\ dF = -ydx - xdy + (2z-6)dz = 0 \end{cases}$$

Подставим точки:

$$P_1 = (0,0,5) : \begin{cases} d^2L = 2dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2 + (2+2\lambda)dz^2 \\ dF = (10-6)dz = 0 \end{cases} \Rightarrow dx^2 - 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

выпишем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = 2 - \lambda^2 = 2 - \frac{1}{25} > 0 \end{cases} \Rightarrow \min$$

для точки $P_2$ будет тоже самое, кроме $\lambda$, получится уже неопределенная матрица

Ответ:

$P_1$ - точка локального условного минимума