

Estimation d'erreur a posteriori

21 mai 2014

1 Estimation a posteriori.

Comme la solution de la formulation variationnelle $u \in H_0^1(\Omega)$, on sait que $k\nabla u \in L^2(\Omega)^n$ et $\operatorname{div}(k\nabla u) = -f + \alpha u$. Alors $k\nabla u \in H(\operatorname{div})$.

De plus, selon le principe de l'énergie complémentaire, on a :

$$-G(k\nabla u) = \min_{\sigma \in H(\operatorname{div})} -G(\sigma)$$

alors :

$$\begin{aligned} -G(k\nabla u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} k |\nabla u - \nabla u_h|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|f - \alpha u + \alpha u - f|^2}{\alpha} \\ -G(k\nabla u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|e_h\|_V^2 \end{aligned}$$

alors on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \|e_h\|_V^2 \leq -G(\sigma), \forall \sigma \in H(\operatorname{div})$$

2 Approximation du flux.

Comme

$$G_h(\sigma_h) = \max_{\tau \in W_h} G_h(\tau)$$

on a $\forall t > 0, \tau \in W_h$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G_h(\sigma_h + t\tau) - G_h(\sigma_h)}{t} = 0$$

De plus,

$$\begin{aligned} & -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G_h(\sigma_h + t\tau) - G_h(\sigma_h)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ k^{-1} \int_{\Omega} |\sigma_h + t\tau - k\nabla u_h|^2 - |\sigma_h - k\nabla u_h|^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \alpha^{-1} \int_{\Omega} |f - \alpha u + \operatorname{div} \sigma_h + t \operatorname{div} \tau|^2 - |f - \alpha u + \operatorname{div} \sigma_h|^2 dx \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{2\tau(\sigma_h - k\nabla u_h) + t\tau^2}{k} + \frac{t(\operatorname{div} \tau)^2 + 2\operatorname{div} \tau(f + \operatorname{div} \sigma_h - \alpha u_h)}{\alpha} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{2\tau(\sigma_h - k\nabla u_h)}{k} + \frac{2\operatorname{div} \tau(f + \operatorname{div} \sigma_h - \alpha u_h)}{\alpha} dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \frac{\tau \sigma_h}{k} + \frac{\operatorname{div} \tau(f + \operatorname{div} \sigma_h)}{\alpha} dx - 2 \int_{\Omega} \tau \nabla u_h + \operatorname{div} \tau u_h dx \end{aligned}$$

selon l'équation de Stokes,

$$\int_{\Omega} \tau \nabla u_h + \operatorname{div} \tau u_h dx = \int_{\Omega} \tau \nabla u_h dx - \int_{\Omega} \tau \nabla u_h dx + \int_{\partial\Omega} \tau \cdot n u_h ds = 0$$

Alors on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\tau \sigma_h}{k} + \frac{\operatorname{div} \tau (f + \operatorname{div} \sigma_h)}{\alpha} dx = 0, \forall \tau \in W_h$$

et comme $\sigma = k \nabla u$ est tel que

$$G(k \nabla u) = \max_{\sigma \in H(\operatorname{div})} G(\sigma)$$

on en deduit que σ_h est une approximation de $\sigma = k \nabla u$ dans l'espace W_h .

3 Conditions d'optimalité pour le potentiel.

On introduit la "fonction chapeau" ϕ définie par

$$\phi = \begin{cases} 1 - |x| & si \quad |x| \leq 1 \\ 0 & si \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Ainsi, on peut définir la base de V_h :

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right) = (1 - |\frac{x - x_j}{h}|)^+$$

De plus, la solution u_h et $\forall v_h \in V_h$ vérifient :

$$\int_{\Omega} k \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \alpha u_h v_h = \int_{\Omega} f v_h dx$$

On décompose u_h sur la base des $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$ et on note $U_h = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq N}$. Si on prend $v_h = \phi_i$ ce qui donne

$$k \sum_j U_h^j \int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i + \alpha \sum_j U_h^j \int_{\Omega} \phi_j \phi_i = \sum_j \int_{\Omega} f \phi_j$$

En notant

$$(b_h)_i = \int_{(i-1)h}^{ih} f(x) \frac{x - (i-1)h}{h} dx + \int_{ih}^{(i+1)h} f(x) \frac{(i+1)h - x}{h} dx,$$

et en introduisant la matrice $A_h = kh^{-1}K + \alpha hM$, avec

$$h^{-1}K = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq N},$$

et

$$hM = \left(\int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq N},$$

la formulation variationnelle dans V_h revient à résoudre dans \mathbb{R}^N le système linéaire $A_h U_h = b_h$. Comme on a déjà la forme de base $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$, la plupart des coefficients de K et M sont nuls. Un calcul simple montre que

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i dx = \begin{cases} -h^{-1} & si \quad j = i - 1 \\ 2h^{-1} & si \quad j = i \\ -h^{-1} & si \quad j = i + 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et

$$\int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx = \begin{cases} \frac{h}{6} & \text{si } j = i - 1 \\ \frac{4h}{6} & \text{si } j = i \\ \frac{h}{6} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, la matrice K et M sont tridiagonales

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4 Calcul du potentiel

À l'aide de `scilab`, et en choisissant les paramètres $N = 100, f = 1, \alpha = 1$, on obtient la courbe de la solution u_h en figure 1.

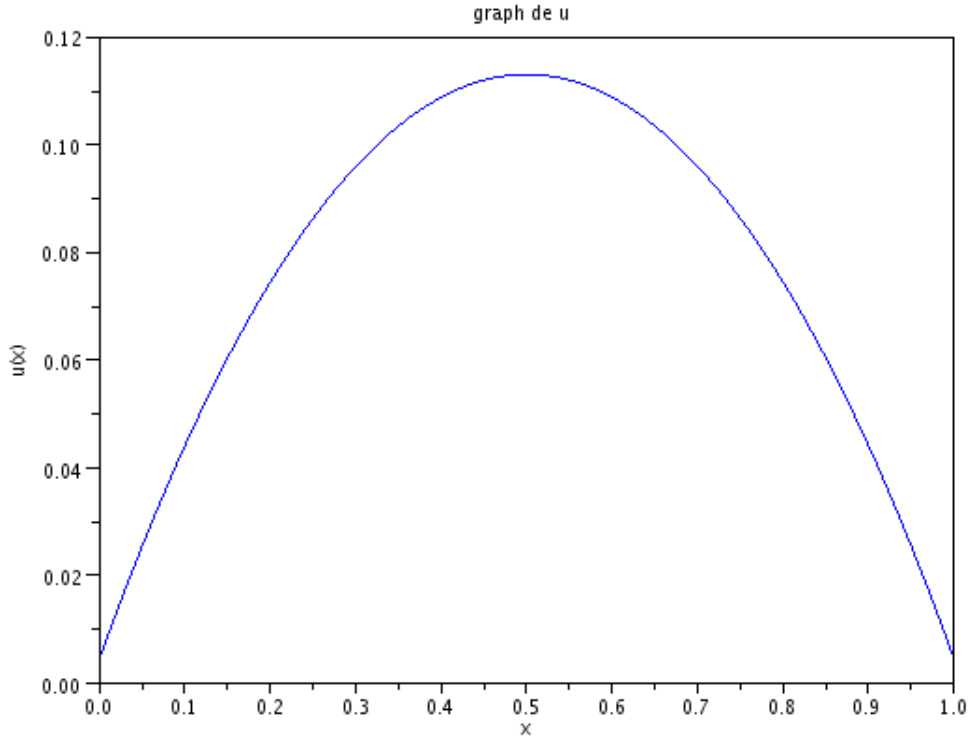


FIGURE 1 – graph de u_h

5 Conditions d'optimalité pour le flux.

D'après la Question 2, σ_h et $\forall \tau \in W_h$ vérifient :

$$\int_{\Omega} \frac{\tau \sigma_h}{k} + \frac{\text{div} \tau (f + \text{div} \sigma_h)}{\alpha} dx = 0.$$

Avec la même méthode que Question 3, on décompose σ_h sur la base des $(\phi_j)_{0 \leq j \leq N+1}$ et on note $\Sigma_h = (\sigma_h(x_j))_{0 \leq j \leq N+1}$. Si on prend $\tau = \phi_i$ ce qui donne

$$k^{-1} \sum_j \Sigma_h^j \int_{\Omega} \phi_j \phi_i + \alpha^{-1} \sum_j \Sigma_h^j \int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i = -\alpha^{-1} \int_{\Omega} f \nabla \phi_i$$

En notant

$$(c_h)_i = -(\alpha h)^{-1} \int_{(i-1)h}^{ih} f(x) dx + (\alpha h)^{-1} \int_{ih}^{(i+1)h} f(x) dx$$

pour $0 < i < N+1$,

$$(c_h)_0 = (\alpha h)^{-1} \int_0^h f(x) dx \quad \text{et} \quad (c_h)_{N+1} = -(\alpha h)^{-1} \int_{Nh}^1 f(x) dx$$

et en introduisant la matrice $B_h = k^{-1} h M' + \alpha^{-1} h^{-1} K'$, avec

$$h^{-1} K' = \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i dx \right)_{0 \leq i, j \leq N+1},$$

et

$$h M' = \left(\int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx \right)_{0 \leq i, j \leq N+1},$$

la formulation variationnelle dans W_h revient à résoudre dans \mathbb{R}^{N+2} le système linéaire $B_h \Sigma_h = c_h$. On note que W_h a les mêmes éléments finis de base pour $1 \leq i \leq N$ que ceux utilisés pour V_h . Donc il suffit de calculer les coefficients de K' et M' correspondant ϕ_0 et ϕ_{N+1} . Pour $i = 0, N+1$,

$$\int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i dx = \begin{cases} -h^{-1} & si \quad j = i - 1 \\ h^{-1} & si \quad j = i \\ -h^{-1} & si \quad j = i + 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et

$$\int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx = \begin{cases} \frac{h}{6} & si \quad j = i - 1 \\ \frac{2h}{6} & si \quad j = i \\ \frac{h}{6} & si \quad j = i + 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Ainsi, la matrice K' et M' sont

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6 Calcul du flux.

A l'aide de **scilab**, en utilisant les mêmes valeur numeriques qu'à la question precedente, on obtient la courbe du flux σ_h en figure 2.

7 Discrétisation de l'opérateur d'injection V_h dans W_h .

Dans la base de V_h , u_h s'écrit : $u_h = \sum_{j=1}^N U_h^j \phi_j$. Dans la base de W_h , u_h s'écrit : $u_h = \sum_{j=0}^{N+1} W_h^j \phi_j$. Or, $u_h \in H_0^1(\Omega)$. C'est-à-dire que l'on a $\sum_{j=0}^{N+1} W_h^j \phi_j(0) = \sum_{j=0}^{N+1} W_h^j \phi_j(1) = 0$. Ainsi, $W_h^0 = W_h^{N+1} = 0$ et $\sum_{j=1}^N (U_h^j - W_h^j) \phi_j = 0$. De plus, puisque $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$ est la base de V_h , on a

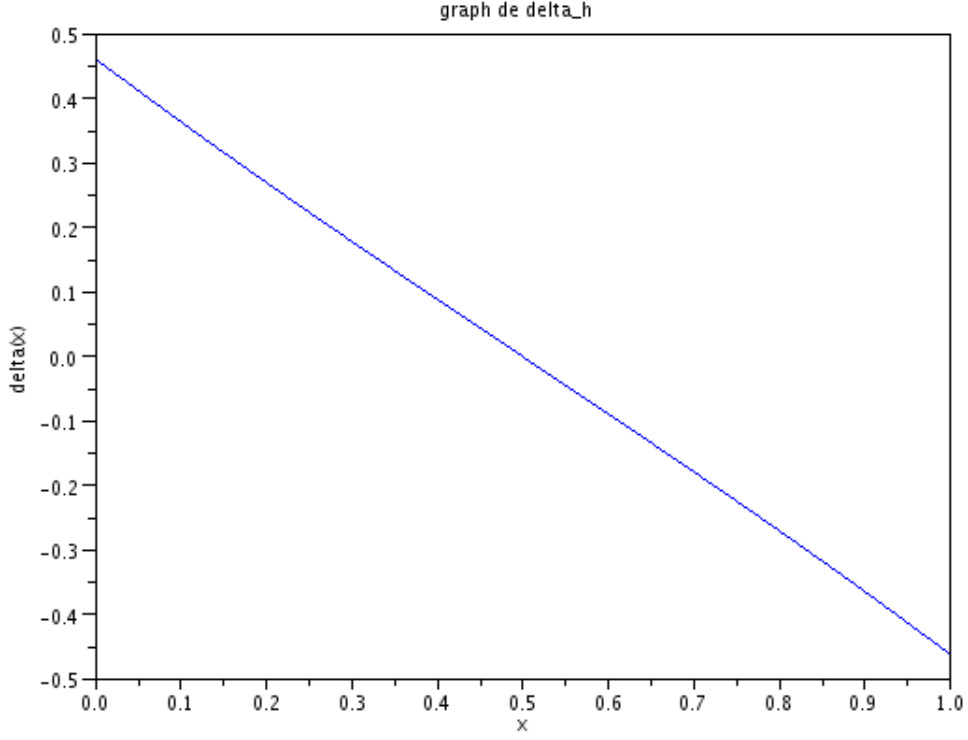


FIGURE 2 – graph de σ_h

bien que $U_h^j = W_h^j$ pour $j = 1, \dots, N$. Finalement, on a I_V est de la forme

$$I_V = \begin{pmatrix} 0 \\ Id \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8 Discrétisation de l'opérateur d'injection W_h dans X_h .

Dans la base de W_h , σ_h s'écrit : $\sigma_h = \sum_{j=0}^{N+1} \Sigma_h^j \phi_j$. Dans la base de X_h , σ_h s'écrit : $\sigma_h = \sum_{j=0}^{2N+1} X_h^j \psi_j$. Donc,

$$\sigma_h(0) = \Sigma_h^0 = X_h^0$$

et

$$\sigma_h(1) = \Sigma_h^{N+1} = X_h^{2N+1}.$$

De plus, pour $\forall \lambda \in]0, 1[$, $x = x_i + \lambda h$, on a

$$\sigma_h(x) = \lambda \Sigma^{i+1} + (1 - \lambda) \Sigma^i = \lambda X^{2i+1} + (1 - \lambda) X^{2i}.$$

C'est-à-dire, pour $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, que l'on a $\Sigma^i = X^{2i}$ et $\Sigma^{i+1} = X^{2i+1}$. Ainsi,

$$\Sigma^i = X^{2i} = X^{2(i-1)+1} = X^{2i-1}, \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Finalement, on a

$$I_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9 Discrétisation de l'opérateur gradient sur X_h .

Dans la base de X_h , τ_h s'écrit : $\tau_h = \sum_{j=0}^{2N+1} T_h^j \psi_j$, et v_h s'écrit : $v_h = \sum_{j=0}^{2N+1} V_h^j \psi_j$. Avec la même méthode que Question 8, pour $\forall \lambda \in [0, 1]$, $x = x_i + \lambda h$, on a

$$\tau_h(x) = \lambda T^{2i+1} + (1 - \lambda) T^{2i}.$$

De plus,

$$\nabla v(x) = h^{-1}(-V^{2i} + V^{2i+1}), \forall i \in \{0, \dots, N+1\}$$

Ainsi, on a

$$T^{2i} = h^{-1}(V^{2i+1} - V^{2i}) \quad \text{si } \lambda = 0$$

et

$$T^{2i+1} = h^{-1}(V^{2i+1} - V^{2i}) \quad \text{si } \lambda = 1$$

Finalement, on a

$$D_h = h^{-1} \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D \end{pmatrix}, \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10 Discrétisation de l'opérateur de masse sur X_h .

Dans la base de X_h , τ_h s'écrit : $\tau_h = \sum_{i=0}^N T_h^{2i} \psi_{2i} + T_h^{2i+1} \psi_{2i+1}$. Donc,

$$\int_{\Omega} |\tau_h|^2 dx = \sum_{i=0}^N \int_{ih}^{(i+1)h} (T_h^{2i} \psi_{2i} + T_h^{2i+1} \psi_{2i+1})^2 dx = \sum_{i=0}^N \frac{h}{3} (T_h^{2i})^2 + \frac{h}{3} (T_h^{2i+1})^2 + 2 \frac{h}{6} T_h^{2i+1} T_h^{2i}$$

Ainsi, $\int_{\Omega} |\tau_h|^2 dx = N_h T \cdot T$, ou

$$N_h = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N \end{pmatrix}, \quad \text{avec } N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11 Estimation d'erreur.

D'après (2), on a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \|e_h\|_V^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} k^{-1} |\sigma - k \nabla u_h|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha^{-1} |f - \alpha u_h + \nabla \cdot \sigma|^2 dx, \forall \sigma \in H(\text{div})$$

De plus, avec les résultats de Question 7, 8 et 9, on a $I_W \Sigma - k D_h I_W I_V U_h$ et $F_h - \alpha I_W I_V U_h + D_h I_W \Sigma_h$ sont les coordonnées de $\sigma - k \nabla u_h$ et de $f - \alpha u_h + \nabla \cdot \sigma$ respectivement dans X_h . Finalement, avec Question 10, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|e_h\|_V^2 &\leq \frac{1}{2} (k^{-1} N_h (I_W \Sigma - k D_h I_W I_V U_h) \cdot (I_W \Sigma - k D_h I_W I_V U_h) \\ &\quad + \alpha^{-1} N_h (F_h - \alpha I_W I_V U_h + D_h I_W \Sigma_h) \cdot (F_h - \alpha I_W I_V U_h + D_h I_W \Sigma_h)). \end{aligned}$$

A l'aide de scilab, on calcul l'estimation de $\|e_h\|_v$:

pour $N=100$, $\|e_h\|_v \leq 7.6 \times 10^{-6}$
pour $N=1000$, $\|e_h\|_v \leq 7.687 \times 10^{-8}$

12 Calcul du potentiel

En utilisant **FreeFem++**, on obtient une approximation du potentiel dans Ω le disque unité avec les paramètres : $f = 1, \alpha = 1, k = 1$.

On utilise une densité de maillage $\delta n = 10$, le réseau du maillage est en figure 3.

Et on obtient la valeur moyenne de u_h sur Ω est égale à 0.106642.

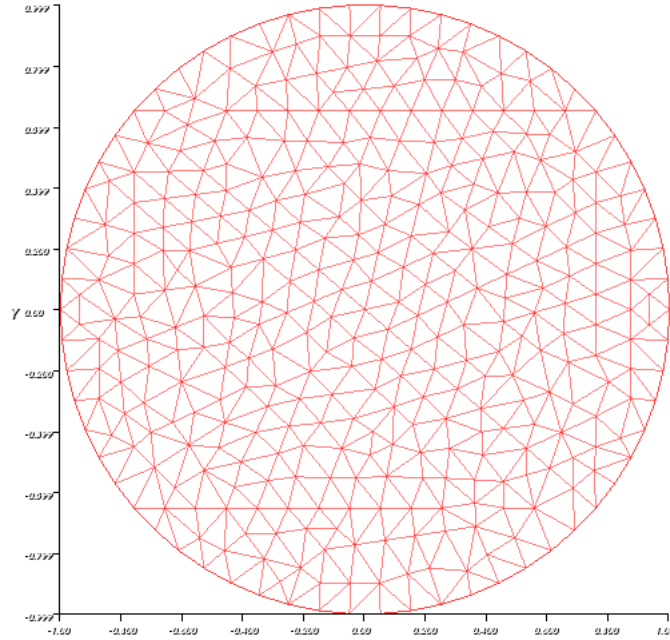


FIGURE 3 – maillage de la domaine Ω

En résolvant la Formulation Variationnelle du problème, on obtient le champ du potentiel (les iso-valeurs) en figure 4.

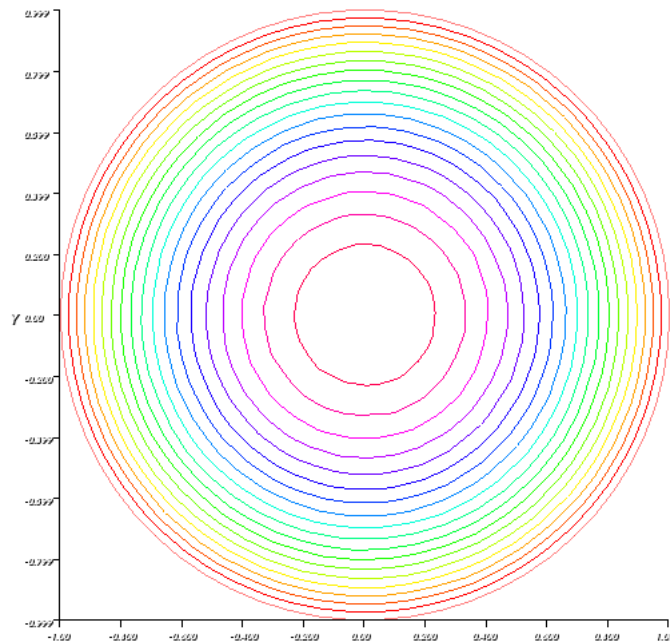


FIGURE 4 – graph des isovaleurs du potentiel u_h

13 Calcul du flux

À l'aide de **FreeFem++**, on résout la Formulation Variationnel pour σ_h et en choisissant des éléments RT0, on obtient le flux en figure 5.

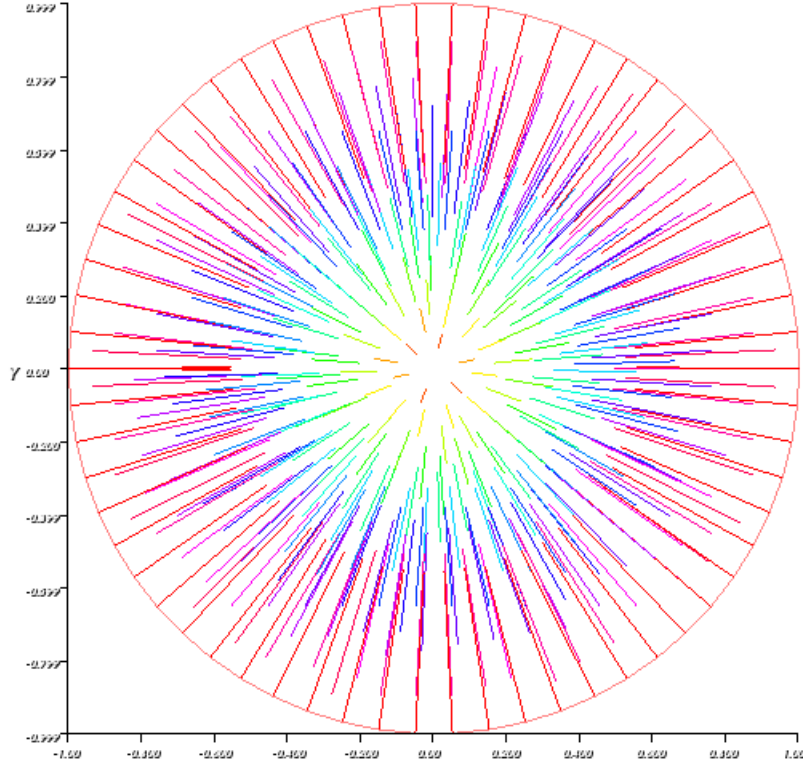


FIGURE 5 – graph du flux σ_h

14 Estimation d'erreurs

À l'aide de l'inégalité obtenu en question (1), avec les mêmes paramètres qu'en questions précédentes, la borne supérieur d'erreurs est :

$$\|e\|_V \leq 0.000906145$$

15 Taux de convergence

On choisit la paramètre δn égale à 10,20,...,100, et à chaque fois on résout la formulation variationnelle pour calculer la borne d'erreurs. Et on trace la courbe d'erreurs $\|e\|_V$ en fonction de densité δn , en logarithmique, la courbe est en figure 6.

On voit bien que la courbe est une ligne droite, cela signifie que l'erreur $\|e\|_V$ est en linéaire avec le pas de maillage $h = \frac{1}{\delta n}$, alors

$$\|e\|_V = O(h)$$

c'est à dire que le taux de convergence est d'ordre 1.

Selon le théorème (6.3.13) du cours, comme on à utilisé des éléments P1, l'erreur est d'ordre 1. Donc le taux de convergence en pratique est s'accord avec le taux théorique.

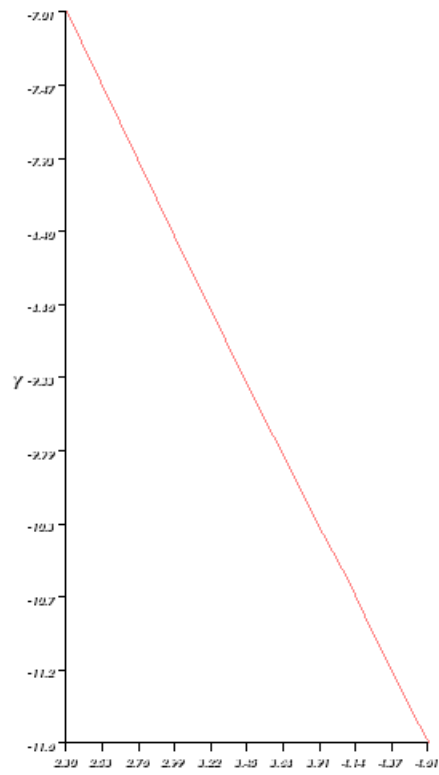


FIGURE 6 – d'erreurs $\|e\|_V$ en fonction de densité de maillage δn en logarithmique