

第13章 连续变量的统计推断（二） ——单因素方差分析

学习目标

- 掌握单因素方差分析的方法原理
- 了解单因素方差分析的适用条件
- 能用SPSS进行单因素方差分析

主要内容

- 13.1 方差分析概述
- 13.2 案例
- 13.3 均数间的多重比较
- 13.4 各组均数的精细比较

13.1 方差分析概述

单因素方差分析的目的

- 检验某一个影响因素的差异是否会给观察变量带来显著影响。
 - 多个样本均数的比较不能用两两t检验。
- 例如：
 - 考察不同的时间点是否对消费者信心指数产生显著影响；
 - 考察不同产地的汽车的耗油量是否不同；
 - 考察不同疗法的效果是否不同。

两个概念：因素和水平

- 考察不同时间点的消费者信心指数是否有显著差异，在这个问题中，**时间点就是因素（Factor）**，**200704、200712、200812和200912就是这个因素的4个水平（Level）或4个组。**
- 方差分析就是考察不同水平的总体均数是否存在显著差异。

方法原理

因素水平	样本观测值			
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n1}
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n2}
...	...			
k	y_{k1}	y_{k2}	...	y_{knk}

$\overline{y_1}$

$\overline{y_2}$

$\overline{y_k}$

方法原理

- 方差分析是基于变异分解的原理进行的，在单因素方差分析中，整个样本的变异（样本观测值之间的差异）由如下两个部份构成：

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$$

$$\text{总变异 (SS}_T\text{)} = \text{组内变异 (SS}_W\text{)} + \text{组间变异 (SS}_B\text{)}$$

总变异 = 随机变异 + 处理因素导致的变异

方法原理

- 当 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ 成立时，组间变异与组内变异均由随机误差构成，值应当接近。
- $F = \text{组间变异测量指标} / \text{组内变异测量指标}$ ，则F的值应当接近1。否则，F值将会偏离1，并且各组间的不一致程度越强，F值越大。
- 若组间差异远远大于组内差异，说明处理因素的影响的确存在，如果两者相差无几，则说明该影响不存在。

方法原理

- 原假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots \mu_k$
- 备择假设 $H_1: k$ 个总体均数不全相同
- 检验统计量与P值

$$\begin{aligned}\text{检验统计量 } F_{k-1, N-k} &= \frac{SS_B / (k-1)}{SS_W / (N-k)} \\ &= \frac{MS_B}{MS_W} : F(k-1, N-k)\end{aligned}$$

$$P\text{值} = P(F_{k-1, N-k} \geq \text{样本观测量 } F)$$

- 得出结论

适用条件

- 本质上和t检验的情况类似
 - **独立性**：严格要求，但一般都没问题。
 - **正态性**：Box和Anderson等人的研究表明，方差分析对于正态性的要求是稳健的。当正态性得不到满足时，方差分析的结论并不会受到太大的影响。
 - **方差齐性**：在各组间样本含量相差不太大时，方差轻微不齐仅会对方差分析的结论有少许影响。一般而言，只要最大 / 最小方差之比小于3，分析结果都是稳定的。
 - **样本量不能过于悬殊。**

13.2 案例

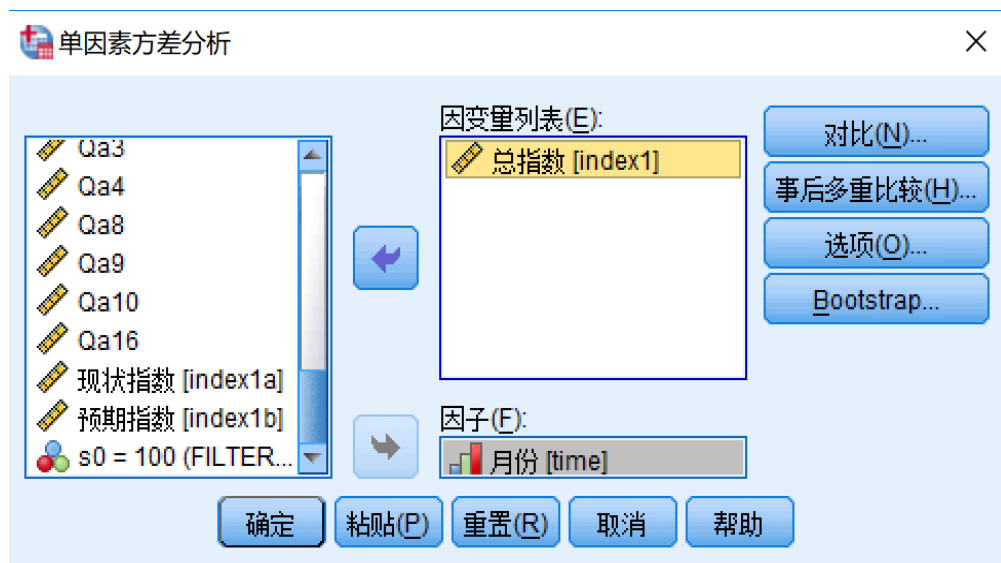
案例

- 数据文件：CCSS_Sample.sav
- 要求：检验北京地区4个时间点的消费者总信心指数是否有显著差异
- 具体过程：
 - 选择个案（北京地区）
 - 判断是否满足适用条件
 - 独立性
 - 正态性（直方图、偏度系数和峰度系数、P-P图、Q-Q图、K-S检验）
 - 方差齐性（“分析” -> “比较平均值” -> “平均值”，观察4个标准差）

案例

- “分析” → “比较平均值” → “单因素方差分析”
- 将“index1”选入“因变量列表”框，将“time”选入“因子”框
- 单击“选项”按钮，勾选“方差齐性检验”和“平均值图”

案例



案例

Test of Homogeneity of Variances

总指数

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
.534	3	374	.659

方差齐性检验的P值，说明样本事件是正常事件，没有出现矛盾，不拒绝 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$

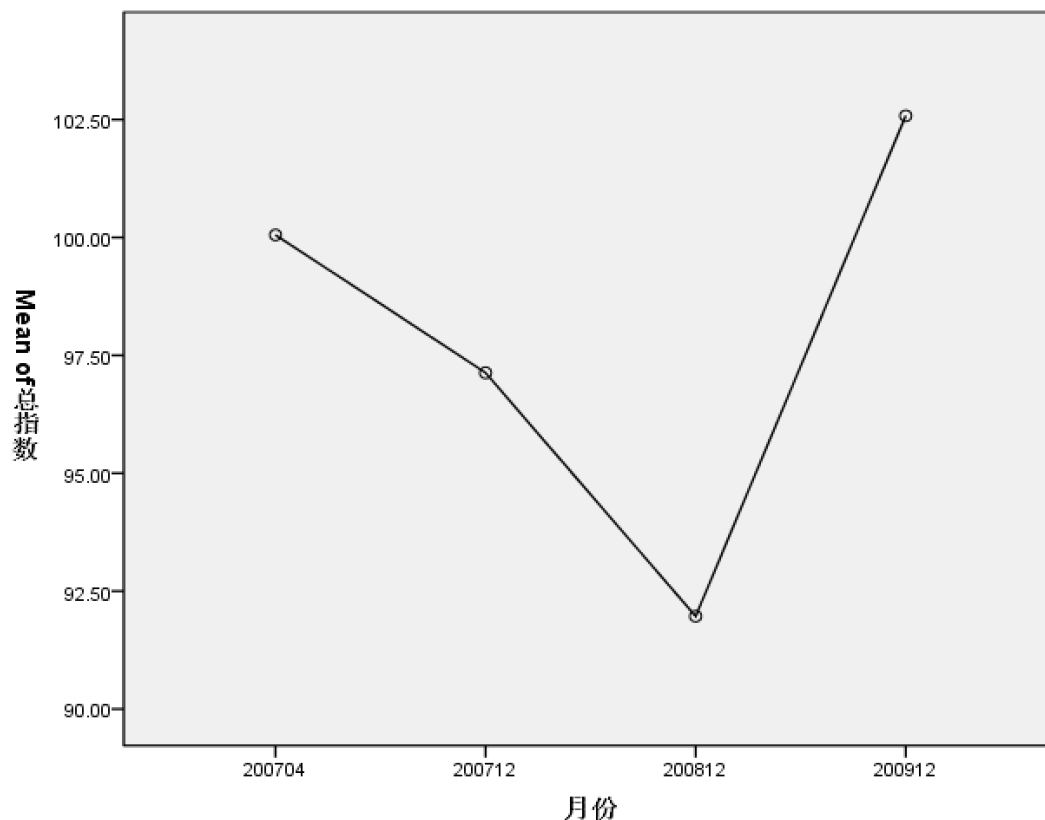
ANOVA

总指数

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	5721.643	3	1907.214	5.630	.001
Within Groups	126692.442	374	338.750		
Total	132414.084	377			

均值检验的P值，说明样本事件是小概率事件，出现矛盾，拒绝 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

案例



借助此图，就可明白各样本均值的大小关系：有显著差异！这种差异能否推广至总体呢？(应用单样本方差分析进行检验)

13.3 均数间的多重比较

事后比较（非计划好的多重比较）

- 前面的单因素方差分析只是回答了“多个均数间是否有差异？”这个问题，但是具体是哪些均数存在差异，并没有给出答案。
- 上例中，到底是四者之间均有差别？还是某一组与其他3组有区别？还是某两组与另两组有区别？

多重比较的两种类型

- 非计划好的（ Unplanned Comparisons, Post-hoc Comparisons ）：在单因素方差分析得到的结果是拒绝 H_0 后才有必要进行，是一种探索性的分析。“事后比较”对话框，13.3节讲解
- 计划好的（Planned Comparisons）：在收集数据之前便决定了要通过多重比较来考察多个组与某个特定组间的差别或者某几个特定组间彼此的差别。这种情况应该是对数据有了一定的了解。“对比”对话框，13.4节讲解

事后比较（非计划好的多重比较）

- 几种常用的两两比较方法：
 - **Dunnett 法**：常用于多个试验组与一个对照组间的比较
 - **Tukey 法**：需要进行任意两组间的比较而各组样本含量相同时
 - **Scheffe 法**：多用于进行比较的两组间样本含量不等时

事后比较（非计划好的多重比较）

- **案例：**继续检验北京地区4个不同时间点的消费者信心指数的均值间存在怎样的差异。
- 选择“Scheffe法”

单因素 ANOVA: 事后多重比较

假定方差齐性

<input type="checkbox"/> LSD	<input type="checkbox"/> S-N-K	<input type="checkbox"/> Waller-Duncan
<input type="checkbox"/> Bonferroni	<input type="checkbox"/> Tukey	类型 I/类型 II 误差比率: 100
<input type="checkbox"/> Sidak	<input type="checkbox"/> Tukey's-b	<input type="checkbox"/> Dunnett
<input checked="" type="checkbox"/> Scheffe	<input type="checkbox"/> Duncan	控制类别(Y): 最后一个
<input type="checkbox"/> R-E-G-W F	<input type="checkbox"/> Hochberg's GT2	检验
<input type="checkbox"/> R-E-G-W Q	<input type="checkbox"/> Gabriel	<input checked="" type="radio"/> 双侧(2) <input type="radio"/> < 控制(O) <input type="radio"/> > 控制(N)

未假定方差齐性

<input type="checkbox"/> Tamhane's T2	<input type="checkbox"/> Dunnett's T3	<input type="checkbox"/> Games-Howell	<input type="checkbox"/> Dunnett's C
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	--------------------------------------

显著性水平(F): 0.05

继续 取消 帮助

事后比较（非计划好的多重比较）

Multiple Comparisons

Dependent Variable: 总指数

Scheffe

(I) 月份	(J) 月份	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
200704	200712	2.92397	2.59643	.737	-4.3675	10.2154
	200812	8.08787*	2.59009	.022	.8142	15.3615
	200912	-2.52545	2.81143	.848	-10.4207	5.3698
200712	200704	-2.92397	2.59643	.737	-10.2154	4.3675
	200812	5.16390	2.58361	.264	-2.0915	12.4193
	200912	-5.44942	2.80546	.289	-13.3279	2.4290
200812	200704	-8.08787*	2.59009	.022	-15.3615	-.8142
	200712	-5.16390	2.58361	.264	-12.4193	2.0915
	200912	-10.61332*	2.79960	.003	-18.4753	-2.7513
200912	200704	2.52545	2.81143	.848	-5.3698	10.4207
	200712	5.44942	2.80546	.289	-2.4290	13.3279
	200812	10.61332*	2.79960	.003	2.7513	18.4753

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

事后比较（非计划好的多重比较）

Homogeneous Subsets

总指数

Scheffe^{a,b}

月份	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
200812	102	91.9668	
200712	101	97.1307	97.1307
200704	100		100.0547
200912	75		102.5801
Sig.		.302	.255

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 92.941.

b. The group sizes are unequal. The harmonic mean of the group sizes is used. Type I error levels are not guaranteed.

4个时间点的总指数被分为两组，
（200812, 200712）以及
（200712, 200704, 200912），
组间的均值存在显著差异，而组
内的均值无显著差异。

13.4 各组均数的精细比较

对比（计划好的多重比较）

方法原理

- μ_1 、 μ_2 、 μ_3 、 μ_4 分别表示200704、200712、200812和200912北京地区的index1的均值。欲检验 μ_1 与 μ_2 、 μ_2 与 μ_3 是否有显著性差异。

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_0': \mu_2 = \mu_3$$

转换为:

$$H_0: a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + a_3\mu_3 + a_4\mu_4 = 0, a_1=1, a_2=-1, a_3=0, a_4=0$$

$$H_0': b_1\mu_1 + b_2\mu_2 + b_3\mu_3 + b_4\mu_4 = 0, b_1=0, b_2=-1, b_3=1, b_4=0$$

案例

- 数据文件：CCSS_Sample.sav
- 要求：检验北京地区2007年12月的消费者总信心指数的均值(μ_2)是否与2007年4月、2009年12月均值的平均水平($(\mu_1 + \mu_4)/2$)有显著差异
- 具体过程：
 - 选择个案（北京地区）
 - “分析” → “比较平均值” → “单因素方差分析”
 - 将“index1”选入“因变量列表”框，将“time”选入“因子”框
 - 点击“对比”按钮，依次输入系数：1、-2、0、1

案例

单因素方差分析

因变量列表(E):

总指数 [index1]

因子(F):

月份 [time]

ID [id]
S0. 城市 [s0]
S2. 性别 [s2]
S3. 年龄 [s3]
S4. 学历 [s4]
S5. 职业 [s5]
S7. 婚姻状况 [s7]
S9. 家庭月收入 [s9]
C0. 请问你的家庭

对比(N)...
事后多重比较(H)...
选项(O)...
Bootstrap...

确定 粘贴(P) 重置(R) 取消 帮助

单因素 ANOVA: 对比

☐ 多项式(P) 度(D): 线性

1 的对比 1

上一页(V) 下一页(N)

系数(O):

添加(A) 1
更改(C) -2
删除(R) 0
1

系数总计: 0.000

继续 取消 帮助

对比（计划好的）

Contrast Coefficients

Contrast	月份			
	200704	200712	200812	200912
1	1	-2	0	1

Contrast Tests

		Contrast	Value of Contrast	Std. Error	t	df	Sig. (2-tailed)
总指数	Assume equal variances	1	8.3734	4.61736	1.813	374	.071
	Does not assume equal variances	1	8.3734	4.65858	1.797	187.761	.074

P值0.071>0.05, 因此, 不拒绝 H_0 : $\mu_2 = (\mu_1 + \mu_4)/2$

THE END