1. 由 $O(n) < O(n^2) < O(2^n)$

$\therefore 2^n < 2^{n^2} < 2^{2^n}$

$\therefore g_2(n) < g_7(n) < g_6(n)$.

$\because g_4(n) = n(\log n)^3 = e^{\ln n + 3\ln\log n}$.

$g_3(n) = n^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}\ln n}$

$\therefore \dfrac{g_4(n)}{g_3(n)} = e^{3\ln\log n - \frac{1}{3}\ln n}$

$O(\log n) < O(n)$.

$\therefore g_4(n) < g_3(n)$

$\because g_5(n) = n^{\log n} = e^{\log n \ln n}$.

$\therefore g_5(n) > g_3(n)$

$g_2(n) = 2^n = e^{n\ln 2}$.

$\therefore g_5(n) < g_2(n)$.

$g_1(n) = e^{\sqrt{\log n}\ln 2}$.

$\dfrac{g_1(n)}{g_4(n)} = e^{\sqrt{\log n}\ln 2 - \ln n - 3\ln\log n} \to 0$.

$\therefore g_1(n) < g_4(n)$

综上 $g_1(n) < g_4(n) < g_3(n) < g_5(n)$

$< g_2(n) < g_7(n) < g_6(n)$.

2.(a)：法一：将楼梯分段，每段长为$\sqrt{n}$，第一瓶从低到高，按$\sqrt{n}$，$2\sqrt{n}$，……放下，摔碎后在 $x\sqrt{n}$和$(x+1)\sqrt{n}$之间进行线性查找．$(x+1)$为碎时上界．

复杂度 $O(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n}) = O(\sqrt{n}) < O(n)$.

法二：第一瓶按 1^2，$(1+1)^2$，$(1+1+1)^2$…进行，放碎后在 x^2和$(x+1)^2$之间~~查找~~线性查找

$O(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n}) = O(\sqrt{n}) < O(n)$.

(b) 分段每段长为$\sqrt[k]{n}$，从$\sqrt[k]{n}$，$2\sqrt[k]{n}$…，放第一瓶，碎后在段路中再次分段测试．

$\therefore f_k(n) = O(n^{\frac{1}{k}})$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_k(n)}{f_{k+1}(n)} = 0$.

(b)的法二似乎不太适用于这种情况，暂时有待考量．