

计控学院本科生 2015—2016 学年第 2 学期

离散数学课程期末考试试卷 (A 卷)

专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

得 分

一、判断题: (10 分, 在括号内划“√”或“×”)

- () 1. “如果太阳从西边出来, 则 $2+2=4$ ”, 此命题值为假。
- () 2. $(1, 3, 3, 3)$ 可以成为无向简单图的度数序列。
- () 3. 有一个函数 $f: X \rightarrow Y$, 若 f 具有反函数, 则 f 一定是单射。
- () 4. n ($n \geq 5$) 阶无向完全图都是非平面图。
- () 5. 在某集合上二元运算中, 若某元素存在左右逆元, 则该元素逆元唯一。
- () 6. 命题公式的主析取范式为 0, 则其主合取范式为 1。
- () 7. 有向图的关联矩阵中所有元素之和为该图度之和。
- () 8. 完全二分图 $K_{r,s}$ ($r \geq 1, s \geq 1$) 都不是平面图。
- () 9. 若关系 R 具有自反性, 则一定不具有反自反性。
- () 10. $A = \{a+b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, 关于数的加法和乘法, 是环、整环和域。

得 分

二、填空 (共 30 分) (每小题 3 分, 本大题共 30 分)

1. 连通非平凡的无向图 G 有一条欧拉回路当且仅当图 G _____。
2. 后缀表达式: $7\ 2\ 3\ * - 4\ \uparrow\ 9\ 3\ /\ +$ 的数值是 ()
2. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $Y = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$, $W = \{1, 2, 3, 6, 18, 54\}$
 $L = \{1, 2, 3, 6, 12\}$, 这些集合中关于整除关系构成格的有_____。
4. 无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通图, 且 G 中_____。
5. 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图, $|V| = 6$, $|E| = 22$, 则 G 一定是_____。
- A. 完全图 B. 正则图 C. 简单图 D. 多重图
6. 在完全二叉树中, 若有 t 片叶子, 则边的总数 _____。
7. 设 $[R, +, \cdot]$ 是代数系统, 如果 ① $[R, +]$ 是交换群 ② $[R, \cdot]$ 是半群
③ _____, 则称 $[R, +, \cdot]$ 为环。

8. 一颗树有两个 2 度结点, 1 个 3 度结点和 3 个 4 度结点, 则 1 度结点数为_____。

9. 若 $|P(A \cup B)| = 256$, $|P(A)| = 64$, $|B| = 3$, 则 $|A \oplus B| =$ _____。

10. 带权为 4, 6, 8, 10, 12 的最优二叉树的数权是 ()

得 分

三、(10 分)

设 f 和 g 是 N 到 N 的函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x=0,1,2,3 \\ 0 & x=4 \\ x & x \geq 5 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ 为偶数} \\ 3 & x \text{ 为奇数} \end{cases}$$

(1) 求 $f \circ g$

(2) 说明 $f \circ g$ 是否为单射、满射、双射的。

得 分

四、(8 分)

正实数集 R^+ 上的二元运算 \circ 定义为 $x \circ y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, 则 \circ 是否为可结合的、可交换的? 是否

满足消去律? 是否存在关于 \circ 的幺元、零元? 如果有, 把它们找出来。运算 \circ 是否满足等幂律? 如果存在幺元, 哪些元素有逆元? 并找出其逆元。

得 分

五、(8 分)

设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群， H 是 G 的非空子集，证明：如果对任意元素 $a, b \in H$ ，有 $a * b^{-1} \in H$ ，则 $\langle H, * \rangle$ 是一个子群。

得 分

六、证明题 (24 分)

1、(6 分) 设 A 、 B 、 C 为任意集合，证明：

$$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A) = B - A$$

2、(8分) 设 G 为具有 n 个结点的简单图，且 $m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 则 G 是连通图。

3、(8分) 设有 $2n$ 个电话局，如果每一个电话局至少可以与另外 n 个电话局直接通话，证明在这 $2n$ 个电话局的任何两个电话局之间都可以通话（也可能要通过另外的电话局）。

得 分

四、应用（本题共 10 分）

设 G 是简单平面图，则它一定有一个度数 ≤ 5 的结点。