

1、设 $G = \{1,2,4,5,7,8\}$, 其上定义二元运算 \times_9 , 即模 9 的乘法。请写出运算表, 并判断 $\langle G, \times_9 \rangle$ 是否为群? 是否为循环群? 若是, 求出它的所有生成元。

2、证明: 若 p 是素数, 则 $p^m (m \geq 1)$ 阶群中一定有一个 p 阶子群。

3、 G 为有限群, H, K 均为 G 的子群, 满足 $H \subseteq K$, 证明: H 也是 K 的子群, 且有

$$[G:H] = [G:K][K:H]$$

这里 $[G:H]$ 表示 H 在 G 中左陪集的个数。

4、 G 为群, H 为 G 的子群, N 为 G 的正规子群 (即 N 为 G 的子群且满足 $\forall g \in G, gN = Ng$), 证明: NH 也是 G 的子群。

5、 G 为群, $a, b \in G$, 证明:

$$(1) \quad |b^{-1}ab| = |a|$$

$$(2) \quad |ab| = |ba|$$

其中 $|a|$ 表示元素 a 的阶。

6、 G 为阿贝尔群, $n \in \mathbb{Z}_+$, 证明 $\{g \in G | g^n = e\}$ 是 G 的子群。

7、证明群 G 不能写成两个真子群的并。