Théorème d'Abel et applications

Partie I: Théorème d'Abel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k,\quad R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k,\quad g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Quelle est la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier votre réponse
2. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est inclus dans le domaine de définition de g
3. Quelle est la limite de (R_n). Justifier votre réponse ?
4. Soit $\varepsilon>0$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$: $|R_n|\leqslant \frac{\varepsilon}{2}$
   (b) En écrivant $a_k=R_{k-1}-R_k$. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$ et pour tout n,m tels que $1\leqslant n\leqslant m$, on a :
   $$\sum_{k=n}^{m} a_k x^k=R_{n-1}x^n-R_m x^{m+1}+\sum_{k=n}^{m} R_k\left(x^{k+1}-x^k\right)$$
   (c) En déduire que pour tout $x\in[0,1]$ et pour tout $m\geqslant n>N$, on a : $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right|\leqslant\varepsilon$
5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$
6. Montrer que $g(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Partie II: Étude de convergence

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit h_n sur $\mathbb{R}$ par $h_n(x)=\dfrac{e^{inx}}{n^\alpha}$

7. Montrer que si $\alpha>1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} h_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$
8. Montrer que si $\alpha\leqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} h_n(x)$ diverge pour tout $x\in\mathbb{R}$

Dans les trois questions qui suivent, on suppose que $\alpha\in\,]0,1]$ et pour tout $a\in\,]0,\pi[$ on pose $I_a=[a,2\pi-a]$.

9. Soit $x\in I_a$
   (a) Calculer en fonction de n et x la somme $C_n(x)=\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$
   (b) Montrer qu'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que :
   $$\forall x\in I_a,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |C_n(x)|\leqslant M$$

Indication **:** *Vous pouvez utiliser librement la relation :* $\forall\theta\in\mathbb{R}, 1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Théorème d'Abel et applications

(c) En écrivant $e^{ikx} = C_k(x) - C_{k-1}(x)$; montrer que pour tout p, q dans $\mathbb{N}$ tels que $2 \leqslant p \leqslant q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{e^{ikx}}{k^\alpha} = \frac{1}{(q+1)^\alpha} C_q(x) - \frac{1}{p^\alpha} C_{p-1}(x) + \sum_{k=p}^{q} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) C_k(x)$$

(d) En déduire que pour tout p, q dans $\mathbb{N}$ tels que $2 \leqslant p \leqslant q$, on a : $\left| \displaystyle\sum_{k=p}^{q} \frac{e^{ikx}}{k^\alpha} \right| \leqslant \frac{2M}{p^\alpha}$

10. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{e^{ikx}}{k^\alpha}$ converge uniformément sur I_a

(b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{e^{ikx}}{k^\alpha}$ converge simplement sur $]0, 2\pi[$

(c) Montrer que la somme $h : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k^\alpha}$ est continue sur $]0, 2\pi[$

11. En déduire que les séries de fonctions $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{\cos(kx)}{k^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ convergent uniformément sur I_a et que les fonctions $h_1 : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k^\alpha}$ et $h_2 : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ sont continues sur $]0, 2\pi[$

Partie III: Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

12. Soit $x \in]0, 2\pi[$ et $b \in]0, 1[$

(a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} t^{k-1} \sin(kx)$ converge uniformément en t sur $[0, b]$

(b) En déduire que

$$\int_0^b \left(\sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1} \sin(kx) \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} b^k$$

(c) Montrer que

$$\lim_{b \to 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} b^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

13. Soit $t \in]0, 1[$

(a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2} = \dfrac{1}{2it} \left(\dfrac{1}{1 - te^{ix}} - \dfrac{1}{1 - te^{-ix}} \right)$

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$

(c) Déduire que :

$$\frac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1} \sin(kx)$$

(d) Montrer que : $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 1^-} \int_0^\varepsilon \frac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2} \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$

THÉORÈME D'ABEL ET APPLICATIONS

14. Soit $x \in]0,\pi[$. En écrivant $\dfrac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2} = \dfrac{1}{\sin x}.\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{t-\cos x}{\sin x}\right)^2}$, montrer que
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi - x}{2}$$
Cette égalité a encore lieu pour $x=\pi$
15. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$
16. Soit $\beta \in]0,\pi[$. Montrer que
$$\int_\beta^\pi \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k\beta + (-1)^{k+1}}{k^2}$$
17. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
18. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
19. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

Théorème d'Abel et applications

Partie I: Théorème d'Abel

1. La serie $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge donc son terme général tend vers 0, soit $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
2.
   - Pour $x=1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge ;
   - Pour $x\in[0,1[$, on a $a_n x^n = \circ(x^n)$ et $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est une série géométrique de raison $x\in[0,1[$, donc elle converge et par suite la convergence absolue de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$

   Donc $[0,1]\subset D_g$
3. La suite des restes d'une série convergente est de limite nulle
4. Soit $\varepsilon>0$
   (a) $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc il existe N tel que $\forall n\geqslant N$, on a $|R_n|\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
   (b) Soit n,m tels que $1\leqslant n\leqslant m$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m} a_k x^k &= \sum_{k=n}^{m}(R_{k-1}-R_k)\,x^k\\
&= \sum_{k=n}^{m} R_{k-1}x^k - \sum_{k=n}^{m} R_k x^k\\
&= \sum_{k=n-1}^{m-1} R_k x^{k+1} - \sum_{k=n}^{m} R_k x^k\\
&= R_{n-1}x^n - R_m x^{m+1} + \sum_{k=n}^{m} R_k x^{k+1} - \sum_{k=n}^{m} R_k x^k\\
&= R_{n-1}x^n - R_m x^{m+1} + \sum_{k=n}^{m} R_k\left(x^{k+1}-x^k\right)
\end{aligned}$$

   (c) Soit $x\in[0,1]$ et soit $m\geqslant n>N$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right| &\leqslant |R_{n-1}x^n| + \left|R_m x^{m+1}\right| + \sum_{k=n}^{m} |R_k|\left(x^k - x^{k+1}\right)\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}x^n + \frac{\varepsilon}{2}x^{m+1} + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\sum_{k=n}^{m}\left(x^k-x^{k+1}\right)}_{\text{télescopage}}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}x^n + \frac{\varepsilon}{2}x^{m+1} + \frac{\varepsilon}{2}\left(x^n - x^{m+1}\right)\\
&\leqslant \varepsilon x^n \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

5.
   - La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge simplement sur $[0,1]$
   - Pour $\varepsilon>0$, il existe N tel que pour tout $m\geqslant n>N$ et $x\in[0,1]$, on a : $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\right|\leqslant\varepsilon$.

     On fait tendre m vers $+\infty$, on obtient pour tout $x\in[0,1]$, $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k\right|\leqslant\varepsilon$, ou encore $\left\|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k\right\|_\infty\leqslant\varepsilon$.

     Par définition de la limite $\left\|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k x^k\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème d'Abel et applications

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$

6. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et $a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} a_n$, alors d'après le théorème d'interversion lim et $\sum$, on a $g(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Partie II: Étude de convergence

7. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $|h_n(x)| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 1} h_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ puis elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$
8. Si $\alpha\leqslant 0$, $\left|\dfrac{e^{inx}}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}\not\to 0$. D'après la condition nécessaire, la série $\sum_{n\geqslant 1} h_n(x)$ diverge grossièrement
9. (a) La somme $C_n(x)=\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k$ est géométrique de raison $e^{ix}\neq 1$, donc $C_n(x) = e^{ix}\dfrac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$

   (b) Soit $x\in I_a$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a
$$|C_n(x)|\leqslant \frac{2}{|e^{ix}-1|} = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$$
   Le nombre $M=\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)$ répond à la question

   (c) Soit n,m tels que $1\leqslant n\leqslant m$, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}\frac{e^{ikx}}{k^\alpha} &= \sum_{k=p}^{q}\left(C_k(x)-C_{k-1}(x)\right)\frac{1}{k^\alpha}\\ &= \sum_{k=p}^{q} C_k(x)\frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=p}^{q} C_{k-1}(x)\frac{1}{k^\alpha}\\ &= \sum_{k=p}^{q} C_k(x)\frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=p-1}^{q-1} C_k(x)\frac{1}{(k+1)^\alpha}\\ &= C_q(x)\frac{1}{(q+1)^\alpha} - C_{p-1}(x)\frac{1}{p^\alpha} + \sum_{k=p}^{q} C_k(x)\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\end{aligned}$$

   (d) Par inégalité triangulaire
$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=p}^{q}\frac{e^{ikx}}{k^\alpha}\right| &\leqslant \left|C_q(x)\frac{1}{(q+1)^\alpha}\right| + \left|C_{p-1}(x)\frac{1}{p^\alpha}\right| + \left|\sum_{k=p}^{q} C_k(x)\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right|\\ &\leqslant \frac{M}{(q+1)^\alpha} + \frac{M}{p^\alpha} + M\underbrace{\sum_{k=p}^{q}\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)}_{\text{télescopage}}\\ &\leqslant \frac{2M}{p^\alpha}\end{aligned}$$

10. (a) Soit $x\in I_a$, la suite des somme partielle du terme général $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{e^{ikx}}{k^\alpha}$ est du Cauchy, donc la série converge simplement sur I_a, en outre $|R_p(x)|\leqslant\dfrac{2M}{p^\alpha}\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

(b) Soit $x \in]0, 2\pi[$, il existe $a \in]0, 2\pi[$ tel que $x \in I_a$. La convergence uniforme sur I_a entraîne la convergence simple sur I_a. En particulier $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$

(c)
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $h_k : x \longmapsto \frac{e^{ikx}}{k^\alpha}$ est continue sur $]0, 2\pi[$;
- La série $\sum_{k\geqslant 1} h_k$ converge simplement sur $]0, 2\pi[$;
- Soit $[a, b] \subset]0, 2\pi[$, on prend $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < \min(a, \pi, 2\pi - b)$. On a alors $[a, b] \subset I_\alpha = [\alpha, 2\pi - \alpha]$. La série $\sum_{k\geqslant 1} h_k$ converge uniformément sur I_α, donc elle est aussi sur $[a, b]$

Ainsi h est continue sur $]0, 2\pi[$

11. Les deux séries $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos(kx)}{k^\alpha}$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$ sont les séries composantes de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{ikx}}{k^\alpha}$ dans la base $(1, i)$, donc elles convergent uniformément sur I_a et les deux fonctions h_1 et h_2 sont les fonctions composantes de la fonction h dans la base $(1, i)$, donc elles sont continues sur $]0, 2\pi[$

Partie III: Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

12. Soit $x \in]0, 2\pi[$ et $b \in]0, 1[$

(a) Soit $t \in [0, b]$, on a $\left|t^{k-1}\sin(kx)\right| \leqslant b^{k-1}$ et la série $\sum_{k\geqslant 1} b^{k-1}$ est convergente, donc la série $\sum_{k\geqslant 1} t^{k-1}\sin(kx)$ converge normalement, puis uniformément sur $[0, b]$

(b)
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto t^{k-1}\sin(kx)$ est continue sur le segment $[0, b]$
- La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 1} t^{k-1}\sin(kx)$ converge uniformément sur $[0, b]$

Alors d'après le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$, on a

$$\int_0^b \left(\sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}\sin(kx)\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^b t^{k-1}\sin(kx)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} b^k$$

(c) La série numérique $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin(kx)}{k}$ converge, d'après la question 11, et d'après la question 6, on a

$$\lim_{b\to 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} b^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

13. Soit $t \in]0, 1[$

(a) On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - te^{ix}} - \frac{1}{1 - te^{-ix}} &= \frac{te^{ix} - te^{-ix}}{(1 - te^{ix})(1 - te^{-ix})} \\ &= \frac{2it\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2} \end{aligned}$$

où encore $\frac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2} = \frac{1}{2it}\left(\frac{1}{1 - te^{ix}} - \frac{1}{1 - te^{-ix}}\right)$

Théorème d'Abel et applications

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - z^{n+1} = (1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k$, donc $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{n} z^k + \dfrac{z^{n+1}}{1-z}$.
Or $\left|\dfrac{z^{n+1}}{1-z}\right| = \dfrac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\sum_{k=0}^{n} z^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-z}$. donc la série $\sum_{k\geqslant 0} z^k$ converge de somme $\dfrac{1}{1-z}$, donc $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$

(c) On a $\left|te^{ix}\right| = t < 1$, on applique le résultat précédent, on obtient à la fois

$$\frac{1}{1-te^{ix}} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{ikx} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-te^{-ix}} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-ikx}$$

Par différence, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-te^{ix}} - \frac{1}{1-te^{-ix}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{ikx} - \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-ikx} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \\ &= 2i\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \sin(kx) = 2i\sum_{k=1}^{+\infty} t^k \sin(kx) \end{aligned}$$

On fait appel à la relation de la question 13a, alors

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{1-2t\cos x + t^2} &= \frac{1}{2it}\left(\frac{1}{1-te^{ix}} - \frac{1}{1-te^{-ix}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}\sin(kx) \end{aligned}$$

(d) Soit $\varepsilon \in]0,1[$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $\psi_k : t \longmapsto t^{k-1}\sin kx$ est continue sur $[0,\varepsilon]$
- La série $\sum_{k\geqslant 1} \psi_k$ converge normalement sur $[0,\varepsilon]$, car pour tout $t \in [0,\varepsilon]$, $|\psi(t)| \leqslant \varepsilon^{k-1}$ et la série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 1} \varepsilon^{k-1}$ converge. Ainsi $\sum_{k\geqslant 1} \psi_k$ converge uniformément sur $[0,\varepsilon]$

D'après le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin x}{1-2t\cos x + t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\varepsilon} \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}\sin(kx)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\varepsilon} t^{k-1}\sin(kx)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}\varepsilon^k \end{aligned}$$

D'autre part, la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{\sin(kx)}{k}$ converge, donc d'après la 6, $\lim_{\varepsilon\to 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(kx)}{k}\varepsilon^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(kx)}{k}$ et, par suite, $\lim_{\varepsilon\to 1^-} \int_0^{\varepsilon} \dfrac{\sin x}{1-2t\cos x + t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 1^-} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(kx)}{k}\varepsilon^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(kx)}{k}$

Théorème d'Abel et applications

14. Soit $x \in]0, \pi[$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sin x}}{1+\left(\frac{t-\cos x}{\sin x}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\arctan\left(\frac{t-\cos x}{\sin x}\right)\right]_0^1 \\
&= \arctan\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) + \arctan\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)
\end{aligned}$$

Avec $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \tan\dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{x}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, alors

$$\arctan\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) = \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

On rappelle la relation $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \mathbf{sgn}(x)\dfrac{\pi}{2}$, alors :

- Si $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, alors $\arctan\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - x$
- Si $x = \dfrac{\pi}{2}$, alors $\arctan\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = 0 \left(= \dfrac{\pi}{2} - x\right)$
- Si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, alors $x - \pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$ et

$$\arctan\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sin x - \pi}{\cos x - \pi}\right) = -\frac{\pi}{2} - (x-\pi) = \frac{\pi}{2} - x$$

Ainsi l'égalité souhaitée

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi - x}{2}$$

L'égalité a encore lieu pour $x = \pi$, car les deux membres de l'égalité s'annulent en π

15. Les égalités de 14 et 13d donnent $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$

16. Soit $\beta \in]0, \pi[$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto \dfrac{\sin kx}{k}$ est continue sur $[\beta, \pi]$;
- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ converge uniformément sur $[\beta, 2\pi - \beta]$, donc elle converge uniformément sur $[\beta, \pi] \subset [\beta, 2\pi - \beta]$

D'après le théorème d'interversion $\sum$ et $\int$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_\beta^\pi \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}\right)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_\beta^\pi \frac{\sin kx}{k}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{-\cos kx}{k^2}\right]_\beta^\pi \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k\beta - \cos k\pi}{k^2} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k\beta + (-1)^{k+1}}{k^2}
\end{aligned}$$

THÉORÈME D'ABEL ET APPLICATIONS

17. • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left|\dfrac{\cos k\beta + (-1)^{k+1}}{k^2}\right| \leqslant \dfrac{2}{k^2}$, donc la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{\cos k\beta + (-1)^{k+1}}{k^2}$ converge normalement sur $]0, \pi[$, donc elle est uniformément

  • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\cos k\beta + (-1)^{k+1}}{k^2} \xrightarrow[\beta \to 0^+]{} \dfrac{1 + (-1)^{k+1}}{k^2}$

  D'après le théorème d'interversion lim et $\sum$, on a

$$\lim_{\beta \to 0^+} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k\beta + (-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2}$$

  D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_\beta^\pi \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}\right) \mathrm{d}x &= \int_\beta^\pi \frac{\pi - x}{2} \,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{(\pi - x)^2}{4}\right]_\beta^\pi \\ &= \frac{(\pi - \beta)^2}{4} \xrightarrow[\beta \to 0^+]{} \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

  On tire l'égalité $\dfrac{\pi^2}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{2}{(2k+1)^2}$, ou encore $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

18. La famille $\left(\dfrac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et les deux parties $I_1 = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $I_2 = \{2k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, alors par le théorème de la sommation par paquets, les deux familles $\left(\dfrac{1}{(2k+1)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{4k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables et on a

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S$$

  Donc $\dfrac{3}{4} S = \dfrac{\pi^2}{8}$ et, par suite, $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

19. La famille $\left(\dfrac{(-1)^k}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et les deux parties $I_1 = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $I_2 = \{2k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, alors par le théorème de la sommation par paquets, les deux familles $\left(\dfrac{1}{(2k+1)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{4k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables et on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$$

  Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$