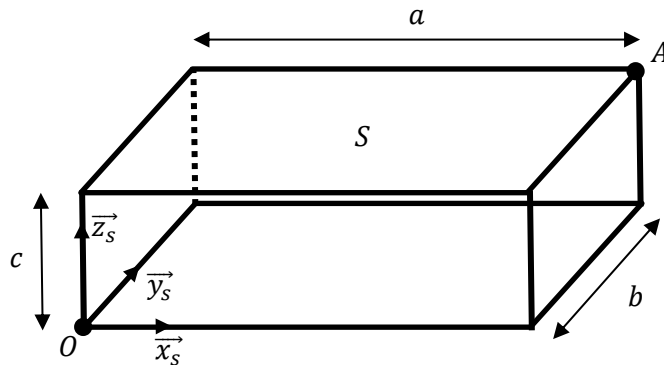


Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

## Exercice 1: Matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle



**Question 1:** Déterminer les coordonnées du centre de gravité  $G$  du solide  $S$  dans le repère  $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$

$G$  est à l'intersection des 3 plans de symétrie du solide :  $G\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

**Question 2:** Déterminer la matrice d'inertie  $I(G, S)$  de  $S$  en  $G$

$$V = abc \quad ; \quad m = \rho abc \quad ; \quad dV = dxdydz \quad ; \quad \text{Origine en } G$$

$$I(G, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{G, \mathcal{B}_S} = \dots = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{G, \mathcal{B}_S}$$

La matrice en  $G$  est diagonale car on a au moins deux plans de symétrie parmi  $(G, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ ,  $(G, \vec{x}_s, \vec{z}_s)$  et  $(G, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  (attention, le  $G$  est important, le point d'expression de la matrice sous forme simplifiée doit appartenir aux éléments de symétrie). Cela veut dire aussi  $D = E = F = 0$

$$A = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S y^2 \rho dV + \int_S z^2 \rho dV$$

Attention : les bornes de l'intégrale doivent être centrées sur le point  $G$ .

$$A = \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} y^2 dxdydz + \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dxdydz$$

$$A = \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \rho \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{z=-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz$$

$$A = \rho \frac{ac}{3} [y^3]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} + \rho \frac{ab}{3} [z^3]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \rho \frac{ac}{3} \frac{b^3}{4} + \rho \frac{ab}{3} \frac{c^3}{4} = \rho \frac{ab^3c}{12} + \rho \frac{abc^3}{12} = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$$

Par analogie :

$$B = \int_S (x^2 + z^2) dm = \frac{m}{12} (a^2 + c^2) \quad ; \quad C = \int_S (x^2 + y^2) dm = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

$$I(G, S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12} (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{G, \mathcal{B}_S}$$

Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

**Question 3: Déterminer la matrice d'inertie  $I(O, S)$  de  $S$  en  $O$  en utilisant le théorème de Huygens généralisé**

$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(O, S) = I(G, S) + m \begin{bmatrix} \frac{b^2 + c^2}{4} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2 + c^2}{4} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{a^2 + b^2}{4} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(O, S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{G, \mathfrak{B}_S} + \begin{bmatrix} m \frac{b^2 + c^2}{4} & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & m \frac{a^2 + c^2}{4} & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & m \frac{a^2 + b^2}{4} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$\frac{m}{12} + \frac{m}{4} = \frac{4m}{12} = \frac{m}{3}$$

$$I(O, S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(b^2 + c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}(a^2 + c^2) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{O, \mathfrak{B}_S}$$

Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

**Question 4: Déterminer la matrice d'inertie  $I(O, S)$  de  $S$  en  $O$  par la méthode intégrale**

On change l'origine du repère d'intégration, en ce point il est nécessaire de calculer tous les termes de la matrice (pas de symétrie passant par  $O$ ) :

$$I(O, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{O, \mathcal{B}_S}$$

$$A = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S y^2 \rho dV + \int_S z^2 \rho dV$$

$$A = \rho \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c y^2 dx dy dz + \rho \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c z^2 dx dy dz$$

$$A = \rho \int_{x=0}^a dx \int_{y=0}^b y^2 dy \int_{z=0}^c dz + \rho \int_{x=0}^a dx \int_{y=0}^b dy \int_{z=0}^c z^2 dz$$

$$A = \rho \frac{ab^3c}{3} + \rho \frac{abc^3}{3} = \frac{m}{3}(b^2 + c^2)$$

Par analogie :

$$B = \frac{m}{3}(a^2 + c^2) \quad ; \quad C = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

$$D = \int_S yz dm = \rho \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c yz dx dy dz = \rho \int_{x=0}^a dx \int_{y=0}^b y dy \int_{z=0}^c z dz$$

$$D = \rho a \frac{b^2}{2} \frac{c^2}{2} = \frac{m}{4} bc$$

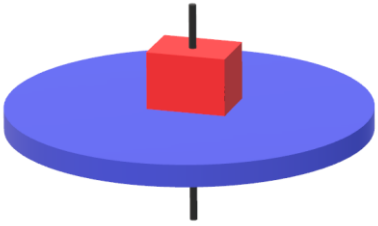
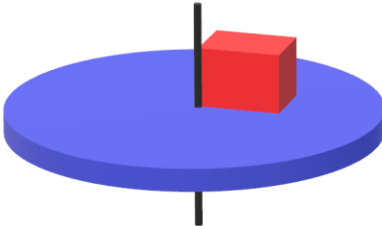
Par analogie :  $E = \frac{m}{4} ac$  ;  $F = \frac{m}{4} ab$

Soit finalement :

$$I(O, S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(b^2 + c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}(a^2 + c^2) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{O, \mathcal{B}_S}$$

**Question 5: Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie  $J$  recherchée**

$$J = \vec{z} \cdot I(M, S) \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}_S} \cdot \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_S} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}_S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}_S} \cdot \begin{pmatrix} -E \\ -D \\ C \end{pmatrix}^{\mathcal{B}_S} = C$$

	
$J = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$	$J = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$

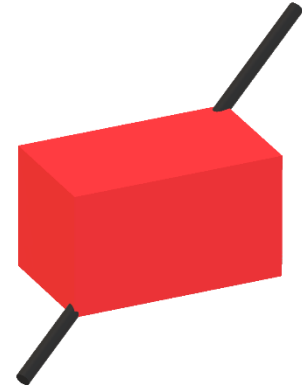
Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

**Question 6: Déterminer le moment d'inertie autour de cet axe**

Exprimons le vecteur  $\vec{OA}$  dans  $\mathcal{B}_S$  :  $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_S}$

Soit le vecteur unitaire associé :  $\vec{OA} = L\vec{u}$  avec  $L = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_S}$$



Penser au fait que  $G$  est sur la droite  $OA$  :

$$I = \vec{u} \cdot I(G, S) \vec{u} = \vec{u} \cdot I(A, S) \vec{u}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_S} \cdot \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{O, \mathcal{B}_S} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_S}$$

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_S} \cdot \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2)a \\ \frac{m}{12}(a^2 + c^2)b \\ \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_S}$$

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \left( \frac{m}{12}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{m}{12}(a^2 + c^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c^2 \right)$$

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \frac{m}{12} (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2)$$

$$I = \frac{m}{6} \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

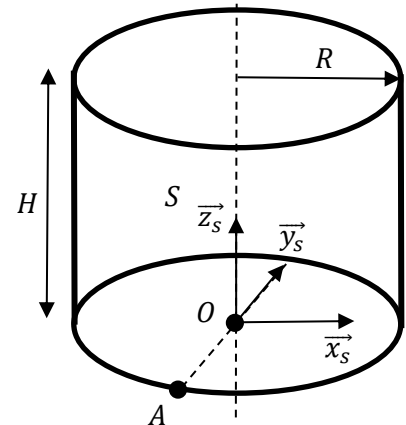
Sinon avec la matrice en  $A \odot$  :

$$\begin{aligned}
 I &= \vec{u} \cdot I(O, S) \vec{u} \\
 I &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}_s} \cdot \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(b^2 + c^2) & -\frac{m}{4}ab & -\frac{m}{4}ac \\ -\frac{m}{4}ab & \frac{m}{3}(a^2 + c^2) & -\frac{m}{4}bc \\ -\frac{m}{4}ac & -\frac{m}{4}bc & \frac{m}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{O, \mathfrak{B}_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}_s} \\
 I &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}_s} \cdot \begin{pmatrix} \frac{m}{3}(b^2 + c^2)a - \frac{m}{4}abb - \frac{m}{4}acc \\ -\frac{m}{4}aba + \frac{m}{3}(a^2 + c^2)b - \frac{m}{4}bcc \\ -\frac{m}{4}aca - \frac{m}{4}bcb + \frac{m}{3}(a^2 + b^2)c \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}_s} \\
 I &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left( \frac{m}{3}(b^2 + c^2)a - \frac{m}{4}abb - \frac{m}{4}acc \right) a + \left( -\frac{m}{4}aba + \frac{m}{3}(a^2 + c^2)b - \frac{m}{4}bcc \right) b \\
 &\quad + \left( -\frac{m}{4}aca - \frac{m}{4}bcb + \frac{m}{3}(a^2 + b^2)c \right) c \\
 I &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left( \frac{m}{3}(b^2 + c^2)a^2 - \frac{m}{4}a^2b^2 - \frac{m}{4}a^2c^2 \right) + \left( -\frac{m}{4}a^2b^2 + \frac{m}{3}(a^2 + c^2)b^2 - \frac{m}{4}b^2c^2 \right) \\
 &\quad + \left( -\frac{m}{4}a^2c^2 - \frac{m}{4}b^2c^2 + \frac{m}{3}(a^2 + b^2)c^2 \right) \\
 I &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \frac{m}{3} (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) - \frac{m}{4} (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) \\
 I &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) m \\
 I &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left( \frac{4}{6} - \frac{3}{6} \right) (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) m \\
 I &= \frac{m}{6} \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}
 \end{aligned}$$

Il y aurait une solution lourde consistant à changer la matrice de base pour que  $\vec{u}$  soit l'un des 3 vecteurs de sa base... On prendrait alors le terme diagonal associé à ce vecteur.

Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

## Exercice 2: Matrice d'inertie d'un cylindre



**Question 1: Déterminer les coordonnées du centre de gravité  $G$  du solide  $S$  dans le repère  $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$**

$G$  est à l'intersection des plans de symétrie verticaux et du plan médian horizontal du solide :  $G(0, 0, \frac{H}{2})$

**Question 2: Déterminer la matrice d'inertie  $I(G, S)$  de  $S$  en  $G$**

$$V = \pi R^2 H \quad ; \quad m = \rho \pi R^2 H \quad ; \quad dV = r dr d\theta dz$$

Origine en  $G$

$$x = r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta$$

$$I(G, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{G, \mathfrak{B}_s}$$

On a une symétrie de révolution autour de l'axe  $(G, \vec{z}_s)$  :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$$

$$C = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S r^2 dm = \rho \int_S r^2 dV = \rho \int_{r=0}^R r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz$$

$$\mathbf{C} = \rho \frac{R^4}{4} 2\pi H = \rho \pi H R^2 \frac{R^2}{2} = \mathbf{m} \frac{\mathbf{R}^2}{2}$$

$$\int_S z^2 dm = \rho \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz = \rho 2\pi \frac{R^2}{2} \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \rho \pi \frac{R^2}{3} \frac{2H^3}{8} = \rho \pi R^2 H \frac{H^2}{12} = m \frac{H^2}{12}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}}{2} + \int_S z^2 dm = \mathbf{m} \left( \frac{\mathbf{R}^2}{4} + \frac{\mathbf{H}^2}{12} \right)$$

$$I(G, S) = \begin{bmatrix} m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{G, \mathfrak{B}_s}$$

Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

**Question 3: Donner la forme de la matrice  $I(A, S)$**

Plan de symétrie  $(A, \vec{y}, \vec{z})$ , donc :

$$I(A, S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{O, \mathcal{B}_S}$$

**Question 4: Déterminer la matrice d'inertie  $I(A, S)$  de  $S$  en  $A$  en utilisant le théorème de Huygens généralisé**

$$\begin{aligned} \vec{GA} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ H \\ -\frac{H}{2} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_S} ; \quad I(A, S) = I(G, S) + m \begin{bmatrix} R^2 + \frac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{4} & -\frac{RH}{2} \\ 0 & -\frac{RH}{2} & R^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_S} \\ I(A, S) &= \begin{bmatrix} m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{G, \mathcal{B}_S} + m \begin{bmatrix} R^2 + \frac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H^2}{4} & -\frac{RH}{2} \\ 0 & -\frac{RH}{2} & R^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_S} \\ I(A, S) &= \begin{bmatrix} m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + R^2 + \frac{H^2}{4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + \frac{H^2}{4} \right) & -m \frac{RH}{2} \\ 0 & -m \frac{RH}{2} & m \left( \frac{R^2}{2} + R^2 \right) \end{bmatrix}_{O, \mathcal{B}_S} \\ I(A, S) &= \begin{bmatrix} m \left( \frac{5}{4} R^2 + \frac{H^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) & -m \frac{RH}{2} \\ 0 & -m \frac{RH}{2} & m \frac{3}{2} R^2 \end{bmatrix}_{O, \mathcal{B}_S} \end{aligned}$$

Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

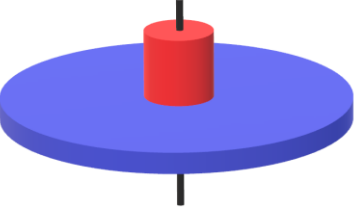
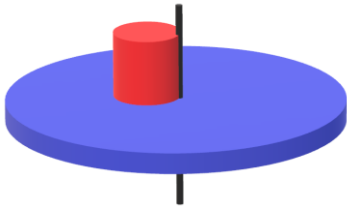
**Question 5: Que pensez-vous de la méthode de calcul intégral pour déterminer  $I(A, S)$**

Le calcul de  $I(A, S)$  par méthode intégrale va nécessiter de placer le centre du repère en  $A$ , ce qui rend les bornes complexes...

$$\int_S dm = \rho \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{f(\theta)} r dr d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \quad ; \quad f(\theta) = ???$$

$$\int_S dm = \rho \int_{x=0}^{2R} \int_{y=0-f(x)}^{f(x)} y dy d\theta \int_{z=-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \quad ; \quad f(x) = \sqrt{R^2 - (R-x)^2}$$

**Question 6: Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie  $J$  recherchée**

	
$J = m \frac{R^2}{2}$	$J = m \frac{3}{2} R^2$

**Question 7: Donner finalement la matrice d'inertie  $I(G, S)$  d'un cylindre  $S$  de CDG  $G$  de révolution d'axe  $(G, x)$**

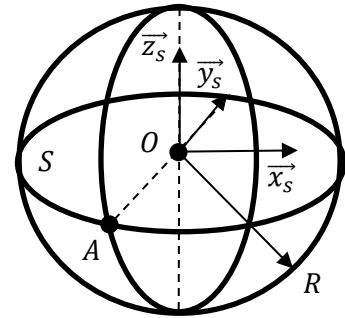
Il suffit d'adapter la diagonale :

$$I(G, S) = \begin{bmatrix} m \frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \end{bmatrix}_{G, \mathcal{B}_S}$$



Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

### Exercice 3: Matrice d'inertie d'une sphère



**Question 1: Déterminer les coordonnées du centre de gravité  $G$  du solide  $S$  dans le repère  $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$**

$G$  est à l'intersection d'une infinité de plans de symétrie passant par  $O$  :  $G = 0(0,0,0)$

**Question 2: Déterminer la matrice d'inertie  $I(G, S)$  de  $S$  en  $G$**

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad ; \quad m = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \quad ; \quad dV = r^2 \sin \psi \, dr d\theta d\psi$$

Origine en  $G$

$$x = r \sin \psi \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \psi \sin \theta \quad ; \quad z = r \cos \psi$$

$$I(G, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{G, \mathcal{B}_S}$$

On a une symétrie sphérique autour du point  $G$  :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$A = B = C = \frac{2}{3}I_G = \frac{2}{3} \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm = \frac{2}{3} \int_S r^2 dm$$

$$I_G = \int_S r^2 dm = \rho \int_{r=0}^R r^4 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\psi=0}^{\pi} d\psi = \rho \int_S r^4 \sin \psi \, dr d\theta d\psi$$

$$I_G = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$I_G = \rho \frac{R^5}{5} [-\cos \psi]_0^{\pi} 2\pi = \rho \frac{4}{5} \pi R^5 = \frac{3}{5} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 R^2 = \frac{3}{5} m R^2$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C} = \frac{2}{3}I_G = \frac{2}{3} \frac{3}{5} m R^2 = \frac{2}{5} m R^2$$

$$I(G, S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m R^2 \end{bmatrix}_{G, \mathcal{B}_S}$$

Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

Mauvaise méthode :

$$\begin{aligned}
 A = B = C &= \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S r^2 \sin^2 \psi dm = \rho \int_S r^2 \sin^2 \psi r^2 \sin \psi dr d\theta d\psi \\
 &= \rho \int_S r^4 \sin^3 \psi dr d\theta d\psi = \rho \int_{r=0}^R r^4 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\psi=0}^{\pi} \sin^3 \psi d\psi = \rho 2\pi \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi} \sin^3 \psi d\psi \\
 \int_0^{\pi} \sin^3 \psi d\psi &= \int_0^{\pi} \sin \psi \sin^2 \psi d\psi = \int_0^{\pi} \sin \psi (1 - \cos^2 \psi) d\psi \\
 u &= \cos \psi ; du = -\sin \psi d\psi \\
 \int_0^{\pi} \sin^3 \psi d\psi &= -\int_1^{-1} (1 - u^2) du = \int_1^{-1} (u^2 - 1) du = \left[ u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\
 A = B = C &= \rho \frac{4}{3} \pi R^3 2 \frac{R^2}{5} = \frac{2}{5} m R^2
 \end{aligned}$$

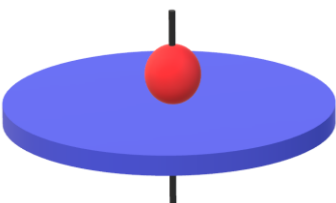
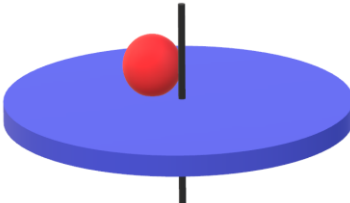
**Question 3: Déterminer la matrice d'inertie  $I(A, S)$  de  $S$  en  $A$  en utilisant le théorème de Huygens généralisé**

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{GA} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_S} ; \quad I(O, S) = I(G, S) + m \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_S} \\
 I(A, S) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m R^2 \end{bmatrix}_{G, \mathcal{B}_S} + m \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_S} \\
 I(A, S) &= \begin{bmatrix} \frac{7}{5} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} m R^2 \end{bmatrix}_{O, \mathcal{B}_S}
 \end{aligned}$$

**Question 4: Que pensez-vous de la méthode de calcul intégral pour déterminer  $I(A, S)$**

Le calcul de  $I(A, S)$  par méthode intégrale va nécessiter de placer le centre du repère en  $A$ , ce qui rend les bornes complexes...

**Question 5: Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie  $J$  recherchée**

	
$J = \frac{2}{5} m R^2$	$J = \frac{7}{5} m R^2$

Dernière mise à jour	MECA 2	Denis DEFAUCHY
16/11/2022	Dynamique	TD1 - Correction

## Exercice 4: Questions de concours

### Question 1: X-ENS PSI 2018 – Questions 23-24

#### Question 23 :

On a un seul plan de symétrie, celui de la coupe de la figure, soit  $(O, \vec{x}, \vec{z})$  de normale  $\vec{y}$ , donc :

$$I(A, S) = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & -E \\ \mathbf{0} & B & \mathbf{0} \\ -E & \mathbf{0} & C \end{bmatrix}_{O, \mathcal{B}_S}$$

#### Question 24 :

Si on néglige l'excentricité  $R_{orb}$  (il vaut 8mm, ce qui effectivement donnera un terme  $E$  faible), on a un nouveau plan de symétrie  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ , la matrice est diagonale.

Quelques éléments numériques :  $E = \int_S xz dm = \int_{x>0} xz dm + \int_{x<0} xz dm$ . Ces deux intégrales seraient opposées si  $X_{G_1}$  était nul et  $E$  serait nul. Compte tenu des dimensions,  $E$  sera petit devant les autres termes.

### Question 2: Justifier mathématiquement l'hypothèse de considérer le centre de gravité sur l'axe

J'appelle 1 la partie de gauche (cylindre diamètre D1 + bobinage) de symétrie de révolution dont le  $X_{G_1} = 0$  (CDG sur l'axe), et 2 la partie excentrée :

$$X_G = \frac{m_1 X_{G_1} + m_2 X_{G_1}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R_{orb}$$

A la fois  $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$  est petit devant 1, et  $X_{G_1} = R_{orb} = 8mm$ , donc  $X_G \approx 0$

### Question 3: E3A PSI 2017- Question I4

Dans l'ordre :

- Plans de symétrie  $(A, \vec{x}, \vec{y})$  et  $(A, \vec{y}, \vec{z})$  donc matrice diagonale. Les termes hors diagonaux sont donc nuls
- Symétrie de révolution autour de  $(A, \vec{z})$  donc «  $A = B$  »
- Dans toute base contenant  $\vec{z}$ , mais la question est mal posée, car il faut que la matrice soit exprimée en un point de l'axe de révolution

Attention : ne pas utiliser le mot « rotation », mais bien « révolution ».