Équation de la chaleur

Notation :

— O *représente l'origine* $(0,0,0)$ *de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$ *;*

— B *la boule ouverte de centre* O *et de rayon* 1 *;*

— B^* *cette boule ouverte privée de l'origine ;*

— $\overline{B}$ *la boule fermée de centre* O *et de rayon* 1 *;*

— S *la sphère de centre* O *de rayon* 1*.*

Le but du problème est l'étude de fonctions

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{B} \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & F(x,y,z,t) \end{array} \right.$$

vérifiant :

— $\Delta F = \dfrac{\partial F}{\partial t}$ sur $B^* \times]0,+\infty[$, où $\Delta F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ (équation de la chaleur) **(1)**

— $\forall t \in]0,+\infty[\,, \quad \forall (x,y,z) \in S, \quad F(x,y,z,t) = 0$ **(2)**

— $\forall (x,y,z) \in \overline{B}, \quad F(x,y,z,0) = \psi(x,y,z)$ **(3)**

(ψ est une fonction de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$, qui décrit l'état initial, et que l'on précisera si besoin dans la suite).

Partie I

1. Soit l'équation différentielle : $$xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad (E)$$
   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0 et les exprimer à l'aide de la fonction sinc (sinus cardinal) définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\operatorname{sinc}(0) = 1 \text{ et } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ pour } x \neq 0.$$
   (b) Pour résoudre (E) sur $]0,+\infty[$, inspiré par la solution qu'on vient de trouver, on pose $y(x) = \dfrac{z(x)}{x}$. Déterminer l'équation différentielle (E') en z équivalente à (E).

   (c) Résoudre (E') et en déduire la solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$.

2. Soit $F : \overline{B} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

   $F(x,y,z,t) = f(r)h(t)$ où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

   f est non identiquement nulle, continue sur $[0,1]$, de classe C^2 sur $]0,1[$

   h est non identiquement nulle, continue sur $]0,+\infty]$, de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

   (a) Exprimer ΔF (en dehors de l'origine O) en fonction de h et f et de leurs dérivées.

   (b) Montrer que si F est solution de **(1)**, il existe une constante réelle λ telle que :
   $$\forall r \in]0,1[\,, \quad f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) + \lambda f(r) = 0 \qquad (E_\lambda)$$
   $$\forall t \in]0,+\infty[\,, \quad h'(t) + \lambda h(t) = 0 \qquad (H_\lambda)$$

3. (a) Soit $\lambda > 0$; notons $\alpha = \sqrt{\lambda}$. Montrer que si φ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$, alors la restriction à $]0,1[$ de $r \mapsto \varphi(\alpha r)$ est solution de (E_λ).

   (b) Résoudre (E_λ) dans le cas où $\lambda = 0$ puis le cas où $\lambda < 0$.

4. Déterminer les λ réels tels que (E_λ) ait des solutions non nulles prolongeables par continuité sur $[0,1]$, nulles en $r = 1$. Quelles fonctions vérifiant **(1)** et **(2)** a-t-on ainsi pu exhiber ?

Équation de la chaleur

Partie II

On admet que : $\forall r \in]0,1[,\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin(n\pi r)}{r} = 1$ avec $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$.

1. Notons $T(r,t)$ la somme de la série $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\mathrm{sinc}(n\pi r)\exp\left(-n^2\pi^2 t\right)$ lorsqu'elle converge.
   (a) Soit $r \in [0,1]$ fixé. Montrer que la série ci-dessus définie converge pour tout $t > 0$ et que $t \mapsto T(r,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   Peut-on affirmer que $T : (r,t) \mapsto T(r,t)$ est continue sur $[0,1]\times]0,+\infty[$?
   (b) Soit $r \in [0,1[$ fixé. Montrer qu'il existe un réel M tel que pour tout $n > 0$
   $$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sin(k\pi r)\right| \leqslant M.$$
   (c) Soit $r \in [0,1[$ fixé. Montrer que la série définie en début de question 1 de cette partie II converge pour tout $t \geqslant 0$ et que $t \mapsto T(r,t)$ est continue sur $]0,+\infty]$. Pour cela, on admettra le résultat suivant (lemme d'Abel pour la convergence uniforme), établi à la dernière partie :

Théorème
Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une suite numérique telle qu'il existe un réel M vérifiant :
$$\forall n \geqslant 1,\quad \left|\sum_{k=1}^{n} v_i\right| \leqslant M$$
Soit I un intervalle et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions telle que pour tout $x \in I$ la suite $(\varepsilon_n(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante, et telle que la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers zéro sur I. Alors la série de terme général $\varepsilon_n v_n$ converge uniformément sur I.

2. Soit $F : \overline{B}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :
   $F(x,y,z,t) = T\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, t\right)$ pour $(x,y,z,t) \neq (0,0,0,0)$, et $F(0,0,0,0) = 1$.
   (a) Montrer que F vérifie **(2)** et **(3)** pour une fonction ψ que l'on précisera.
   (b) Montrer que F vérifie **(1)**.
   (c) Montrer que F est continue sur $\overline{B}\times]0,+\infty[$.

Partie III

1. Soit F continue sur $\overline{B}\times]0,+\infty]$ vérifiant **(2)** ainsi que :
   $$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial t} \text{ sur } B\times]0,+\infty[\qquad \textbf{(1')}$$
   $$\forall (x,y,z) \in \overline{B}, F(x,y,z,0) \geqslant 0 \qquad \textbf{(4)}$$
   On se propose de démontrer par l'absurde que F ne prend que des valeurs positives ou nulles.
   Soit $(x_1,y_1,z_1,t_1) \in B\times]0,+\infty[$ tel que $F(x_1,y_1,z_1,t_1) < 0$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, vérifiant $F(x_1,y_1,z_1,t_1) + \varepsilon t_1 < 0$. On notera F_ε la fonction définie sur $\overline{B}\times]0,+\infty]$ par
   $$F_\varepsilon(x,y,z,t) = F(x,y,z,t) + \varepsilon t.$$
   (a) Montrer qu'il existe $(x_0,y_0,z_0,t_0) \in B\times[0,t_1[$ tel que
   $$F_\varepsilon(x_0,y_0,z_0,t_0) = \inf\left\{F_\varepsilon(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t) \in \overline{B}\times[0,t_1]\right\}.$$
   (b) Montrer que $\frac{\partial^2 F_\varepsilon}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0,t_0) \geqslant 0$ et que $\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial t}(x_0,y_0,z_0,t_0) \leqslant 0$.

Équation de la chaleur

(c) Conclure.

2. Montrer que si F continue sur $\overline{B} \times]0, +\infty]$ vérifie outre les conditions **(1')** et **(2)** la condition
$$\forall (x, y, z) \in \overline{B}, \quad F(x, y, z, 0) = 0 \qquad \textbf{(3')}$$
alors $F = 0$.

3. Soit ψ une fonction continue de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$ donnée et soit F continue sur $\overline{B} \times]0, +\infty]$ solution de **(1')**, **(2)** et **(3)**. Montrer que F est unique.

Partie IV

On reprend les notations du lemme d'Abel (énoncé au II.1.c.). réel M vérifiant : fonctions telle que décroissante, et telle que la I.

1. Soient $p, q \geqslant 1$ des indices entiers. Soit $x \in I$. Établir une égalité de la forme :
$$\sum_{k=p+1}^{k=p+q} \varepsilon_k(x) v_k = \sum_{k=p}^{k=p+q-1} (\varepsilon_k(x) - \varepsilon_{k+1}(x)) S_k + \varepsilon_j(x) S_j - \varepsilon_i(x) S_i \,,$$
où les indices i et j sont à préciser en fonction de p et q.

2. En déduire une majoration de $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{k=p+q} \varepsilon_k(x) v_k$ utilisant M.

3. Conclure : la série de terme général $\varepsilon_n v_n$ converge uniformément sur I.

4. Dans le contexte de la partie II, peut-on alors obtenir la continuité de F sur $B^* \times [0, +\infty[$?

Équation de la chaleur

PARTIE I

1. (a) Soit y une telle solution avec $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $|x| < r$ et $0 < r \leqslant R = Rc\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right)$ avec le rayon $R > 0$. dans l'équation différentielle : on trouve pour $n \geq 1$: $(n+1)(n+2)a_{n+1} = -a_{n-1}$, et $a_1 = 0$.
Cela donne la nullité des impairs, et $a_{2p} = (-1)^p a_0 \frac{1}{(2p+1)!}$.
Réciproquement, c'est là $a_0 \sin x/x$ pour $x \neq 0$ et a_0 pour $x = 0$, donc $a_0\mathrm{sinc}(x)$.
Les solutions DSE au voisinage de 0 le sont en fait sur $\mathbb{R}$, et constituent la droite dirigée par sinc.
   (b) On trouve aussitôt $z''(x) + z(x) = 0$.
   (c) Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les combinaisons linéaires de sinc et $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$.
2. (a) L'application $(x, y, z) \mapsto r$ est C^2 sur le complémentaire de O ; comme composée, à t fixé, F est C^2, et on calcule les dérivées partielles par la règle de la chaîne. La première suffit, les rôles joués par les trois variables étant symétriques.
On a d'abord $\dfrac{\partial F}{\partial x} = h(t)f'(r)\dfrac{x}{r}$, puis $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = h(t).[f''(r)\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{f'(r)}{r} - \dfrac{x^2}{r^3}f'(r)]$.
Alors $\Delta F = h(t)[f''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + 3\frac{f'(r)}{r} - \frac{x^2+x^2+z^2}{r^3}f'(r)] = h(t)[f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r}]$.
   (b) On a par ailleurs $\dfrac{\partial F}{\partial t} = f(r)h'(t)$. L'équation revient à $h(t)[f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r}] = f(r)h'(t)$ $(*)$.
Par hypothèse, h n'est pas identiquement nulle, il existe alors un $t_0 > 0$ tel que $h(t_0) \neq 0$. Posons $\lambda = -\dfrac{h'(t_0)}{h(t_0)}$. On voit d'après $(*)$ que f vérifie (E_λ).
On reporte alors dans la relation $(*)$, il vient $f(r)[h'(t) + \lambda h(t)] = 0$. On choisit un $r > 0$ pour lequel $f(r) \neq 0$, on obtient l'équation (H_λ). A posteriori, le caractère arbitraire du choix de t_0 disparaît.
3. (a) Prenons $f(r) = \varphi(\alpha r)$. On calcule $f''(r) + (2/r)f'(r) + \lambda f(r) = \alpha^2\varphi''(\alpha r) + (2\alpha)/r\varphi'(\alpha r) + \alpha^2\varphi(\alpha r) = (\alpha/r)(\alpha r\varphi''(\alpha r) + 2\varphi'(\alpha r) + (\alpha/r)\varphi(\alpha r))$. Il en résulte que φ est solution de (E) sur $]0, \alpha[$ si et seulement si f est solution de (E_λ) sur $]0, 1[$ (c'est un peu plus précis que ce qui est demandé). En tout cas, à l'aide des solutions trouvées au 1., on fabrique des f convenables pour (E_λ), ce qui suffit dans la logique du problème.
   (b) Il y a plusieurs façons de s'y prendre. On peut revenir à l'idée de la multiplication par r. En posant $g(r) = rf(r)$, l'équation est équivalente à $g''(r) + \lambda g(r) = 0$. On retrouve bien $g(r) = \gamma\sin(\alpha r) + \delta\cos(\alpha r)$ dans le cas où $\lambda = \alpha^2$.
Pour $\lambda = 0$, on trouve ainsi $g(r) = ar + b$, puis $f(r) = a + b/r$, qui se trouvait facilement directement.
Pour $\lambda < 0$, il vient $g(r) = \gamma\sinh(\alpha r) + \delta\cosh(\alpha r)$ dans le cas où $\lambda = -\alpha^2$. On pouvait aussi trouver ce résultat en remarquant que α pouvait être choisi complexe : la solution du cas λ négatif fournissait alors des $\cos(i\alpha r)$, $\sin(i\alpha r)$, donnant les sinh et cosh.
4. La condition (2) revient ici à $f(1) = 0$, ce qui explique qu'on cherche les telles solutions de (E_λ). Pour prolonger en 0, dans le cas $\lambda = 0$, il faut f constante, mais alors, f est nulle, c'est exclu. Sinon, le prolongement en 0 exige la disparition des cos et ou des ch. Pour $\lambda < 0$, $\gamma\sinh(\alpha r)$ ne pourra s'annuler en 1 qu'avec $\gamma = 0$, exclu.
On ne trouve des solutions possibles finalement que pour $\lambda > 0$, $\alpha = \sqrt{\lambda}$, ce sont les multiples de $\mathrm{sinc}(\alpha r)$. Exiger $\mathrm{sinc}(\alpha) = 0$ revient alors à $\alpha = n\pi$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$. À un facteur près, on est ainsi arrivé à $f(r) = \dfrac{\sin(n\pi r)}{n\pi r}$.
Pour h, on trouve les multiples de $\exp(-\lambda t) = \exp(-n^2\pi^2 t)$.
Finalement, la fonction $\mathrm{sinc}(n\pi r)\exp(-n^2\pi^2 t)$ (et ses multiples) donne une fonction F (pour $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) vérifiant **(1)** et **(2)** (et continue sur $\overline{B} \times \mathbb{R}_+$).

PARTIE II

1. (a) Pour $a > 0$ et $t \in [a, +\infty[$, on domine le terme général de la série :
$|2(-1)^{n+1}\mathrm{sinc}(n\pi r)\exp(-n^2\pi^2 t)| \leq 2\exp(-n^2\pi^2 a)$ (on a utilisé : $\forall x, |\mathrm{sinc}(x)| \leq 1$, classique).
C'est alors le terme général d'une série convergente, indépendante de t. Cela assure la convergence normale

de la série de fonctions, chacune est continue, on obtient la continuité de $t \mapsto T(r,t)$ d'abord sur chaque $[a,+\infty[$, finalement sur $]0,+\infty[$.
Rien n'interdit de considérer des fonctions de deux variables :

$$u_n(r,t) = 2(-1)^{n+1}\mathrm{sinc}(n\pi r)\exp\left(-n^2\pi^2 t\right).$$

La domination obtenue (indépendante de r !) montre que la série converge normalement sur $[0,1]\times[a,+\infty[$, ce qui y assure la continuité de T. Finalement, T est continue sur $[0,1]\times]0,+\infty[$.

(b) Pour $r=1$, la somme est nulle. Sinon, on calcule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sin(k\pi r) = Im(\sum_{k=1}^{n}\exp(ik\pi(r+1))) = Im(\exp(z)\frac{1-\exp(nz)}{1-\exp(z)})$, avec $z = i\pi(r+1)$, et $\exp(z)\neq 1$.
Alors, la somme se domine par $\dfrac{2}{|1-\exp(i(r+1)\pi)|} = M$ (et $M=0$ pour $r=1$).

(c) On écrit alors $u_n(r,t) = \dfrac{-2}{\pi r}(-1)^n\sin(n\pi r).\dfrac{\exp(-n^2\pi^2 t)}{n} = K.v_n\varepsilon_n$, où K est une constante, $v_n = (-1)^n\sin(n\pi r)$, $\varepsilon_n = \frac{\exp(-n^2\pi^2 t)}{n}$. On a bien $(\varepsilon_n(t))$ décroissante de limite nulle pour tout $t\in[0,+\infty[$ (même $t=0$!). La convergence est uniforme : domination par $1/n$. Par ailleurs les sommes S_n sont bien majorées, on l'a vu. On assure ainsi la convergence uniforme de la série de fonctions en t (à r fixé), donc la continuité cette fois sur $[0,+\infty[$.

2. (a) Pour $(x,y,z)\in S$, $r=1$, la valeur de F est $T(1,t)=0$.
Pour $t=0$, on est ramené à $T(r,0)$. Or pour $r\in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\frac{\sin(n\pi r)}{r} = 1$, d'après le II.1., et par convention $F(0)=1$: c'est exactement dire que F vérifie **(3)** pour $\psi = 1$ sur B (ici, $\psi=0$ sur la sphère, il y a discontinuité...).

(b) Voici le cœur de la question. On a ajouté, en une somme de série convergente, des solutions à l'équation **(1)**. A-t-on encore une solution ? Il s'agit en fait de voir que les dérivées partielles utiles pour **(1)** se calculent terme à terme. On doit donc appliquer (plusieurs fois !) un théorème de dérivation terme à terme, en prenant soin de bien choisir la variable par rapport à laquelle on dérive, le reste étant bloqué.
Prenons ici $u_n(r,t) = 2(-1)^{n+1}\mathrm{sinc}(n\pi r)\exp(-n^2\pi^2 t)$ (le terme général de $T(r,t)$), et, ayant fixé y,z et t, prenons $x\in[0,1]$. On doit dériver $g(x) = u_n(\sqrt{x^2+y^2+z^2},t)$ par rapport à x, et dominer indépendamment de x, pour obtenir $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, puis poursuivre avec $g''(x)$.
D'une part, sinc est C^2 sur $\mathbb{R}$, cette fonction ainsi que sa dérivée première et seconde tendant vers 0 en $\pm\infty$ (elles sont $O(1/x)$), on peut les dominer sur $\mathbb{R}$, soit trois constantes M_0, M_1, M_2. Puis, comme composée, $r\mapsto \mathrm{sinc}(n\pi r)$ est aussi C^2 sur $\mathbb{R}$, avec des dérivées (d'ordre 0, 1, 2) dominées par M_0, $n\pi M_1$, $n^2\pi^2 M_2$ (ceci, pour tout n). Les dérivées de $u_n(r,t)$ par rapport à r sont ainsi dominées par les mêmes valeurs multipliées par $2\exp(-n^2\pi^2 t)$.
Pour $x\in[0,1]$ enfin, $g(x) = u_n(\sqrt{x^2+y^2+z^2},t)$. Puisque l'on écarte le point $(0,0,0)$, la racine n'est pas prise en 0, et on peut dériver par rapport à x (on considère t fixé : on écrit des dérivées ordinaires) :

$$g'(x) = u_n'(r)\frac{x}{r},\, g''(x) = u_n''(r)\frac{x^2}{r^2} + \frac{u_n'(r)}{r} - u_n'(r)\frac{x^2}{r^3}.$$

Or r peut être confiné dans un certain $[a,+\infty[$, car ou bien $(y,z)\neq(0,0)$, auquel cas on a $r\geq a = \sqrt{y^2+z^2}>0$, ou bien $y=z=0$, et on peut imposer $x\geq a>0$, puisque l'on ne veut le résultat que sur B^* : alors $r\geq x\geq a$. Maintenant, tout ce qui intervient dans la fonction et ses deux dérivées est borné indépendamment de x, avec un majorant de la forme $O(n^2).\exp(-n^2\pi^2 t)$. C'est le terme d'une série convergente indépendant de x. On peut donc appliquer deux fois de suite le théorème de dérivation terme à terme. On établit ainsi que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(\sqrt{x^2+y^2+z^2},t)$ est deux fois dérivable terme à terme (par rapport à x). Ceci est finalement valable en tout point x pour lequel $r\neq 0$.

Équation de la chaleur

Le raisonnement est le même pour y et z (symétrie des rôles), et le laplacien se calcule ainsi par dérivation terme à terme (inutile de préciser la dérivée pour le moment), en tout point qui n'est pas l'origine.
De l'autre côté, il faut dériver une fois par rapport à t. On prend $b > 0$ et $t \in [b + \infty[$. La dérivée par rapport à t est ici $-n^2\pi^2 u_n(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, t)$, on domine par $n^2\pi^2 u_n(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, b)$, ce qui fournit le terme général d'une série convergente, et la convergence normale. On peut encore dériver terme à terme, et ceci pour tout $t > 0$ en définitive.
Maintenant, il suffit de dire que par construction, chaque terme de la série vérifie l'équation **(1)** (vu au I.4.). Quand on calcule $\Delta F - \dfrac{\partial F}{\partial t}$, on peut le faire terme à terme, et on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$, donc F est solution de l'équation de la chaleur **(1)**.

(c) On a pris soin d'observer la continuité de T globale sur $[0,1]\times]0,+\infty[$. Par composition, on obtient la continuité de F sur $\overline{B}\times]0,+\infty[$.

PARTIE III

1. (a) La fonction F_ε, continue, car F l'est ainsi que $(x,y,z,t) \mapsto t$, atteint son minimum sur le compact $\overline{B}\times[0,t_1]$.
Soit (x_0, y_0, z_0, t_0) un point où ce minimum est atteint.
Si l'on avait $t_0 = 0$, le minimum serait 0 (grâce à **(4)**), alors que l'on sait $F < 0$ en au moins un point du compact. C'est donc que $t > 0$.
De même, si l'on avait $(x_0, y_0, z_0) \in S$, le minimum serait $0 + \varepsilon t_0 > 0$ (grâce à **(2)**), absurde.
Finalement $(x_0, y_0, z_0, t_0) \in B \times [0, t_1[$ est tel que
$F_\varepsilon(x_0, y_0, z_0, t_0) = \inf \left\{F_\varepsilon(x,y,z,t) \mid (x,y,z,t) \in \overline{B}\times[0,t_1]\right\}$.

(b) Alors, $x \mapsto F(x, y_0, z_0, t_0)$ a un minimum en x_0, et comme B est ouvert, c'est une fonction définie au voisinage de x_0, donc cela constitue un minimum local. Donc la dérivée première de cette fonction est nulle, et la dérivée seconde est positive ou nulle : ce résultat élémentaire connu, et rappelé en cours, sur les fonctions d'une seule variable, repose sur le développement limité au deuxième ordre, pour une fonction deux fois continûment dérivable en x.
De son côté, en la variable t, il y a un minimum également, mais peut-être pas local (si l'on était en t_1...). S'il est local, la dérivée en t est nulle, et, sinon, c'est un minimum à gauche, cela suffit en tout cas pour dire que la dérivée ne peut pas être > 0, donc est ≤ 0 (c'est encore l'argument du développement limité, et c'est toujours conforme à ce que l'on voit sur une figure).

(c) Alors au point considéré, $\Delta F_\varepsilon = \Delta F \geq 0$, et $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\partial F_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \leq -\varepsilon$: c'est contradictoire avec l'équation **(1)**.
Ainsi $F \geq 0$ sur $B \times]0,+\infty[$, et finalement sur $\overline{B}\times]0,+\infty]$ (par continuité).

2. On peut dire que F vérifie la condition **(4)**, donc $F \geq 0$. Mais toutes les conditions sont aussi vérifiées par $-F$!! Donc $F \leq 0$, finalement $F = 0$. Astucieux, non ?
3. Si F et G conviennent, $F - G$ vérifie, outre les conditions linéaires **(1')** et **(2)**, la condition **(3')**, et donc est nulle, on vient de le voir : le problème admet au plus une solution.

PARTIE IV

1. Si l'on sent (ou si l'on obtient par tâtonnement) que la formule correcte est :

$$\sum_{k=p+1}^{k=p+q} \varepsilon_k(x) v_k = \sum_{k=p}^{k=p+q-1} (\varepsilon_k(x) - \varepsilon_{k+1}(x)) S_k + \varepsilon_{p+q}(x) S_{p+q} - \varepsilon_p(x) S_p\,,$$

on peut le vérifier par récurrence sur $q \geq 1$ (à p fixé).
Sinon, on trouve directement la formule par application de la transformation d'Abel élémentaire : (laissons de côté les x inutiles ici) :
$\varepsilon_k S_k - \varepsilon_{k-1} S_{k-1} = \varepsilon_k (S_k - S_{k-1}) + (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) S_{k-1}$.

Équation de la chaleur

On somme de $p+1$ à $p+q$: $\varepsilon_{p+q}S_{p+q} - \varepsilon_p S_p = \sum_{k=p+1}^{k=p+q} \varepsilon_k v_k + \sum_{k=p+1}^{k=p+q} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})S_{k-1}$, le dernier terme est aussi $\sum_{k=p}^{k=p+q-1} (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k)S_k$, c'est la formule attendue, et aussi une méthode simple pour la trouver !

2. On obtient une majoration de $\sum_{k=p+1}^{k=p+q} \varepsilon_k(x)v_k$, en majorant dans la formule trouvée par l'inégalité triangulaire, en exploitant que la suite $(\varepsilon_n(x))$ est décroissante et positive (pour le moment, on raisonne à x fixé) : $|\sum_{k=p+1}^{k=p+q} \varepsilon_k(x)v_k| \leq \sum_{k=p}^{k=p+q-1} (\varepsilon_k(x) - \varepsilon_{k+1}(x))M + \varepsilon_{p+q}(x)M + \varepsilon_p(x)M = 2\varepsilon_p(x)M.$
3. Maintenant, on peut majorer uniformément en x par l'hypothèse de convergence uniforme vers 0 de la suite (ε_n). On a ainsi établi que les restes de Cauchy tendent uniformément vers 0 quand p tend vers $+\infty$, indépendamment de q. Grâce au critère de Cauchy uniforme, on peut donc conclure : la série de terme général $\varepsilon_n v_n$ converge uniformément sur I.
4. Reprenons la preuve du II.2.c. Fixons $[a,b] \subset]0,1[$, ou courra r. On reprend la majoration donnant M. Le calcul plus précis de la somme donne (pour un θ qui importe peu) :

$$Im(e^{i\theta}.\frac{\sin(\frac{n\pi(r+1)}{2})}{\sin(\frac{\pi(r+1)}{2})}),$$

que l'on domine par $\frac{1}{|\sin(\frac{\pi(r+1)}{2})|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\pi(b+1)}{2})|}$.
La constante K ... dépendait de r : elle se domine par $2/a\pi$. On peut majorer avec un M uniforme en r. Le reste de la preuve demeure : le reste de Cauchy se majore alors uniformément pour $(r,t) \in [a,b] \times [0,+\infty[$, on gagne en définitive la continuité de T sur $]0,1[\times[0,+\infty[$, puis celle de F sur $B^* \times [0,+\infty[$.