

# ***DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ***

**calculatrice: autorisée**

**durée: 4 heures**

## **Sujet**

Température de la surface de la terre.....	2
I. Étude approchée de la température de surface de la Terre.....	2
II. Influence d'autres facteurs sur la température de la surface terrestre.....	2
Rail de Laplace.....	5
I. Mouvement d'un barreau dans un champ magnétique.....	5
A. Roulement sans glissement.....	5
B. Mouvement du barreau.....	6
C. Mouvement du barreau accroché à un ressort.....	6
II. Mouvement de deux barreaux dans un champ magnétique.....	6
A. Barreau 1 se déplaçant à vitesse constante.....	7
B. Mouvement de 2 barreaux accrochés chacun à un ressort.....	7
Étude de défauts de planéité de miroirs métalliques.....	8
I. Éclairage de l'interféromètre.....	8
II. Interféromètre en lame d'air.....	8
III. Interféromètre en coin d'air.....	9
IV. Interféromètre avec miroir sphérique.....	9
V. Analyse d'un défaut de planéité d'une surface métallique réfléchissante.....	10

# Température de la surface de la terre

On étudie des températures moyennes dans le temps. On admettra dans la suite que ceci revient à étudier la température en régime stationnaire, indépendant du temps.

## I. Étude approchée de la température de surface de la Terre.

La terre et le soleil se comportent comme des corps noirs.

On détermine ici la température qu'aurait la terre si cette température résultait seulement de l'équilibre entre la puissance reçue du soleil et celle rayonnée dans l'espace par la terre. On considérera que les températures des surfaces de la terre et du soleil sont uniformes.

1. Exprimer puis calculer la puissance  $P_{\text{Soleil}}$  rayonnée par le Soleil en fonction des données figurant à la fin du problème.
2. En admettant que la température du Soleil soit stationnaire, d'où provient cette énergie? Déterminer la variation de masse par seconde du Soleil  $\dot{M}_s = \frac{dM_s}{dt}$ .
3. La terre ne reçoit qu'une petite fraction de la puissance rayonnée par le soleil. Sachant que le rayonnement solaire est émis de manière isotrope exprimer puis calculer :  $r = \frac{P_{\text{Terre}}}{P_{\text{Soleil}}}$  le rapport de la puissance reçue par la Terre sur la puissance totale émise par le Soleil (on justifiera en s'appuyant sur un schéma clair).
4. Calculer la puissance totale reçue par la surface terrestre.
5. Les observations spatiales montrent que la fraction du flux solaire diffusé ou réfléchi par la terre vers l'espace vaut en moyenne 30 % et donc la puissance solaire absorbée par la terre ne représente que  $y=70\%$  de celle qui est reçue. Quelle est la puissance absorbée par la terre ?
6. On considère dans cette partie que la température effective de la surface de la Terre  $T_T$  résulte d'un équilibre entre l'énergie du Soleil qu'elle absorbe et l'énergie qu'elle rayonne elle-même. Donner la température moyenne de la surface de la Terre sous la forme:  $T_T = T_s * f(R_s, d, y)$ .
7. Faire l'application numérique et commenter le résultat.

## II. Influence d'autres facteurs sur la température de la surface terrestre

La mesure de la température moyenne de la surface de la terre donne une valeur supérieure à celle qui vient d'être calculée. Plusieurs raisons permettent d'expliquer cette différence : l'effet de serre dû à l'atmosphère et le flux géothermique issu de la terre.

8. Expliquer qualitativement l'effet de serre. Quels sont les principaux gaz qui en sont à l'origine ?

On se propose d'étudier le flux géothermique et pour cela on admet que la température à l'intérieur de la terre est stationnaire et ne dépend que de la distance  $r$  à son centre.

9. Comment varierait la température  $T(r)$  à l'intérieur de la terre en fonction de  $r$ , si celle-ci

ne contenait aucune source d'énergie ? On justifiera avec précision la réponse.

En réalité il existe une puissance géothermique due à l'existence d'isotopes radioactifs de périodes très longues à l'intérieur de la terre. Ils se désintègrent en émettant des rayonnements dont les énergies se transforment en chaleur. Afin de mesurer ce flux à la surface de la terre, on réalise des forages ( à quelques centaines de mètres ) et on mesure le gradient de température en surface : on trouve un gradient de direction verticale et de valeur numérique:  $30\text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$  .

10. Comment peut on mesurer expérimentalement le gradient de température.

11. Calculer le flux géothermique au niveau de la surface de la terre :

- pour un mètre carré ?
- pour toute la surface de la terre ( notation  $\Phi$  ) ?

$\Phi$  désignant une grandeur positive. Préciser le sens positif adopté pour ce flux.

On cherche la répartition des températures à l'intérieur de la croûte terrestre qui a une épaisseur  $e=33\text{ km} \ll R_T=6400\text{ km}$  , en admettant qu'elle ne contienne aucun élément radioactif et que le flux géothermique provienne des couches intérieures de la terre. On désigne la profondeur par  $z$  . On néglige désormais la courbure de la terre et on travaille en coordonnées cartésiennes.

12. Réaliser un bilan thermique pour un volume d'épaisseur  $dz$  intérieur à la croûte terrestre. Que peut-on en conclure concernant le vecteur flux surfacique géothermique ?

13. Déterminer l'équation différentielle, très simple, vérifiée alors par la température en un point quelconque intérieur à la croûte terrestre, à la profondeur  $z$  .

14. Déterminer la température en un point de la croûte terrestre connaissant la température  $T_T$  de la surface de la terre

15. A.N.: Déterminer la température à  $33\text{ km}$  sous la surface du sol. (  $T_T=278\text{ K}$  ).

16. Si on n'avait pas négligé la courbure de la terre, quelle serait l'expression du vecteur densité volumique de courant thermique  $\vec{j}=j\vec{u}_r$  dans la croûte terrestre en fonction de  $\phi$  ,  $R_T$  ,  $z$  et du vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  . On travaillera au premier ordre en  $\frac{z}{R_T}$  .

17. Quelle est l'erreur relative maximale commise pour  $\|\vec{j}\|$  , dans la croûte terrestre, en négligeant la courbure.

En réalité la température à  $33\text{ km}$  sous la surface est seulement de  $893\text{ K}$  . En effet, une partie des radioéléments est uniformément répartie dans la croûte terrestre et produit une puissance radioactive  $p_V$  par unité de volume.

18. Établir avec soin, en négligeant la courbure de la terre, l'équation différentielle de la température en un point quelconque intérieur à la croûte terrestre à la profondeur  $z$  en régime stationnaire en fonction de  $p_V$  ,  $z$  et des données expérimentales.

19. Déterminer la température en ce point en fonction de  $p_V$  ,  $z$  et des données expérimentales.

20. Déterminer  $p_V$  et la puissance radioactive totale  $P_i$  dégagée dans la croûte terrestre. En déduire le pourcentage de flux géothermique issu de la croûte terrestre.

*Données numériques:*

rayon du Soleil:	$R_S = 700\,000\text{ km}$
rayon de la Terre:	$R_T = 6400\text{ km}$
distance moyenne Terre-Soleil:	$d = 150.10^6\text{ km}$
température du Soleil:	$T_S = 5800\text{ K}$
constante de Stefan:	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-4}$
épaisseur de la croûte terrestre	$e = 33\text{ km}$
conductivité thermique de la croûte:	$\lambda = 2,3\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$
masse de la terre	$M = 6.10^{24}\text{ kg}$
vitesse de la lumière:	$c = 3.10^8\text{ m s}^{-1}$

---

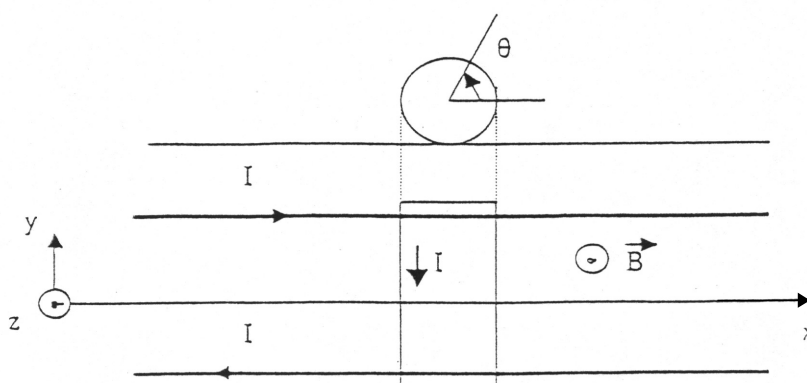
# Rail de Laplace

Ce problème propose l'étude de mouvements de conducteurs dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  uniforme et permanent. On négligera les champs magnétiques propres créés par les courants induits devant le champ extérieur.

Les candidats devront faire des schémas clairs sur lesquels les orientations ressortiront nettement. Les fautes de signe seront particulièrement pénalisées.

## I. Mouvement d'un barreau dans un champ magnétique

On considère un barreau cylindrique creux mobile de masse  $m$ , de rayon  $r$ , de moment d'inertie  $J$  par rapport à son axe. Ce barreau peut rouler sur deux rails conducteurs horizontaux  $H_1$  et  $H_2$  de résistance négligeable et distants de  $a$ . Dans son déplacement le barreau reste perpendiculaire aux rails et présente une résistance  $R$  au courant. Un courant d'intensité  $I$  circule dans les rails et le conducteur mobile ( le sens positif imposé pour le courant est indiqué sur la figure ). On place l'ensemble dans le champ magnétique vertical  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . On repère la position du barreau par l'abscisse  $x$  de son milieu et centre d'inertie noté  $M$ .



Caractéristiques du barreau :  $m=5g$ ,  $r=3mm$ ,  $a=10cm$ ,  $J=45.10^{-9} kg.m^2$ ,  $R=0,1\Omega$ .

### A. Roulement sans glissement

On suppose que le mouvement de roulement du barreau sur les rails selon  $Ox$  s'effectue sans glissement.

1. En admettant que le barreau est soumis à des forces électromagnétiques équivalentes à une force unique horizontale  $\vec{F}_L = F_L \vec{u}_x$  s'appliquant au centre d'inertie  $M$ , montrer que l'accélération

$\vec{a}_M$  du centre d'inertie est donnée par:  $\vec{a}_M = \frac{\vec{F}_L}{m_{ap}}$  où  $m_{ap}$  est une constante que l'on

déterminera en fonction de  $m$ ,  $r$  et  $J$ .

2. Application numérique : calculer  $\frac{m_{ap}}{m}$ .

3. Le coefficient de frottement étant  $f$ , donner la condition sur  $f$  pour que la condition de non glissement soit satisfaite.

Dans la suite, on utilisera la notation  $m_{ap}$  .

### B. Mouvement du barreau

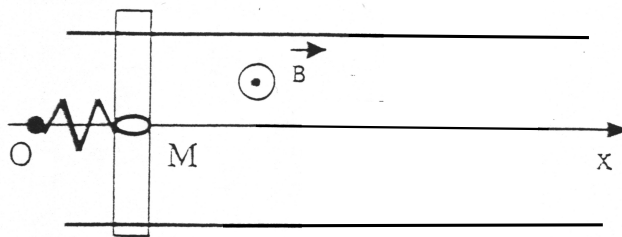
Les deux rails sont reliés à un générateur de tension de f.e.m.  $E$  et à un interrupteur. A  $t=0$  , on ferme l'interrupteur, le barreau étant immobile.

4. Décrire qualitativement le mouvement ultérieur du barreau.
5. Écrire les équations permettant d'étudier le mouvement.
6. Définir et exprimer le temps de relaxation  $\tau$  en fonction des données. Application numérique.
7. Résoudre et exprimer la vitesse de  $M$  en fonction du temps. Application numérique.
8. Donner les caractéristiques du mouvement au bout d'un temps long devant le temps de relaxation. Justifier physiquement le résultat obtenu.

Données :  $B=1\text{ Tesla}$  ,  $E=10\text{ mV}$  .

### C. Mouvement du barreau accroché à un ressort

Le barreau est maintenant relié à l'extrémité d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  dans le plan des rails et dont l'autre extrémité est fixée en un point  $O$  que l'on prend comme origine de l'axe pour repérer la position du barreau. On désigne par  $x$  la position du milieu du barreau  $M$  . A  $t=0$  on ferme l'interrupteur, le barreau étant dans sa position d'équilibre en  $x=\ell_0$  .



9. Étudier qualitativement le mouvement ultérieur du barreau.
10. Déterminer la nouvelle position d'équilibre du barreau :  $x_{eq}$  .
11. Établir l'équation différentielle du mouvement du barreau faisant intervenir  $x$  ,  $x_{eq}$  ,  $\tau$  et une pulsation à noter  $\omega_0$  .
12. Décrire les divers mouvements possibles du barreau et donner la valeur  $k_{cr}$  de  $k$  permettant d'obtenir un amortissement critique. Application numérique.
13. Faire le bilan énergétique entre  $t=0$  et  $t \rightarrow \infty$  .

## II. Mouvement de deux barreaux dans un champ magnétique

On supprime le générateur et on ajoute maintenant sur les rails un deuxième barreau identique au

précédent. On étudie le mouvement des deux barreaux selon  $Ox$  et on repère la position des barreaux par les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  de leurs milieux  $M_1$  et  $M_2$  avec  $\overrightarrow{O_1M_1} = x_1 \vec{u}_x$  et  $\overrightarrow{O_2M_2} = x_2 \vec{u}_x$  (l'origine  $O_2$  est a priori différente de  $O_1$ ).

#### A. Barreau 1 se déplaçant à vitesse constante

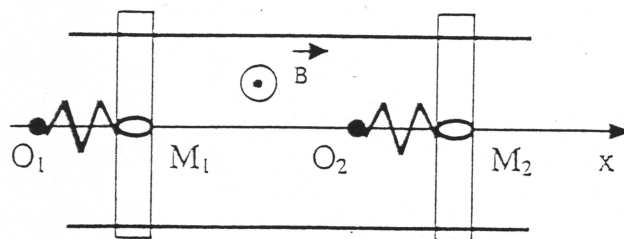
Le champ magnétique étant constant, les deux barreaux étant immobiles, on impose à partir de  $t=0$  au barreau 1 de se déplacer à la vitesse  $v_1$  constante (les barreaux roulent sans glisser).

14. Justifier qualitativement que le barreau 2 se met en mouvement.

15. Établir l'équation différentielle donnant alors le mouvement du barreau 2 et déterminer la vitesse limite et le temps de relaxation. Applications numériques.

#### B. Mouvement de 2 barreaux accrochés chacun à un ressort

Les deux barreaux sont maintenant reliés à des ressorts identiques fixés en  $O_1$  et  $O_2$ . Les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  sont toujours mesurées à partir de  $O_1$  et  $O_2$ .



16. Écrire l'équation électrique du circuit lorsque les barreaux sont animés des vitesses  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$ .

17. En déduire les équations différentielles caractérisant les mouvements de chaque barreau.

18. Résoudre le système obtenu dans le cas particulier de l'amortissement critique, et avec les conditions initiales  $t=0$ ,  $x_{1,0} = x_{2,0} = \ell_0$ ,  $v_{1,0} = v_0$  et  $v_{2,0} = 0$ .

19. Quels sont les mouvements des barreaux au bout d'un temps infini. Justifier par des considérations physiques le résultat obtenu. Dépend-il des conditions initiales?

20. Faire le bilan énergétique entre  $t=0$  et  $t \rightarrow \infty$ .

# Étude de défauts de planéité de miroirs métalliques

On considère un interféromètre de Michelson « théorique » dans lequel la lame séparatrice est considérée comme idéalement fine. Il n'y a pas de compensatrice. La séparatrice introduit un déphasage supplémentaire égal à  $\pi$  pour une des deux ondes : celle qui s'y réfléchit dès l'entrée. On suppose en outre que les éclairagements dus à chacune des deux ondes qui émergent de l'interféromètre sont égaux ; on les note  $\mathcal{E}_0$ .

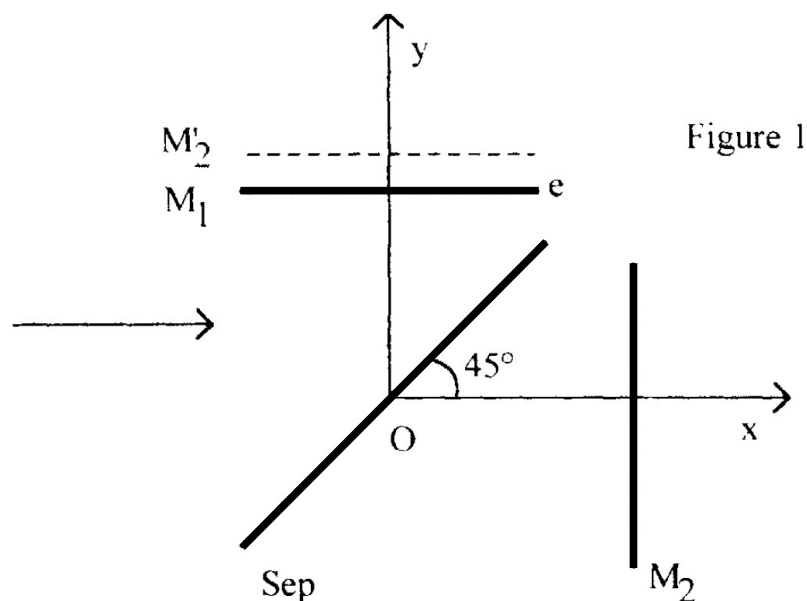
Soit  $M'_2$  le symétrique du miroir  $M_2$  par la séparatrice.

## I. Éclairage de l'interféromètre

On considère un système optique centré afocal, constitué de deux lentilles convergentes  $L_1$  et  $L_2$  de distances focales  $f'_1$  et  $f'_2$  avec  $f'_1 < f'_2$ . Le faisceau lumineux traverse d'abord  $L_1$ . Ce système reçoit un faisceau de lumière parallèle cylindrique de révolution, de diamètre  $d$ , dont l'axe de symétrie est confondu avec l'axe optique du système.

1. Donner une définition concrète expérimentale de ce que l'on désigne par système afocal.
2. Faire une figure soignée de la marche du faisceau de lumière envisagé dans le système en indiquant la position des foyers des deux lentilles.
3. Exprimer le diamètre  $d'$  du faisceau en sortie (réponse littérale).
4. Application numérique :  $f'_1 = 5\text{ mm}$  et  $f'_2 = 150\text{ mm}$ . Calculer  $d'$ .
5. Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

## II. Interféromètre en lame d'air





L'interféromètre est réglé en « lame d'air », et éclairé par une onde plane, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ , arrivant avec une incidence de  $45^\circ$  sur la séparatrice.  $M_1$  est parallèle à  $Ox$  et  $M_2$  est parallèle à  $Oy$ . La direction de l'onde plane incidente est parallèle à  $Ox$ . Soit  $e$  la distance algébrique entre  $M_1$  et  $M'_2$ . (Voir *figure 1*).

On recueille les faisceaux émergents sur un écran translucide plan parallèle au miroir  $M_1$ .

6. Quel est l'aspect de ce plan pour une distance  $e$  donnée ?
7. Démontrer l'expression de l'éclairement  $\mathcal{E}$  en fonction de  $e$  et des autres données.
8. Comment varie l'éclairement  $\mathcal{E}$  si  $e$  varie ? Tracer la courbe  $\mathcal{E}(e)$ . Indiquer les valeurs caractéristiques.
9. Est-il possible de repérer la position correspondant à  $e=0$  ? Justifier. Montrer que l'utilisation d'une source de lumière blanche permet de résoudre le problème.

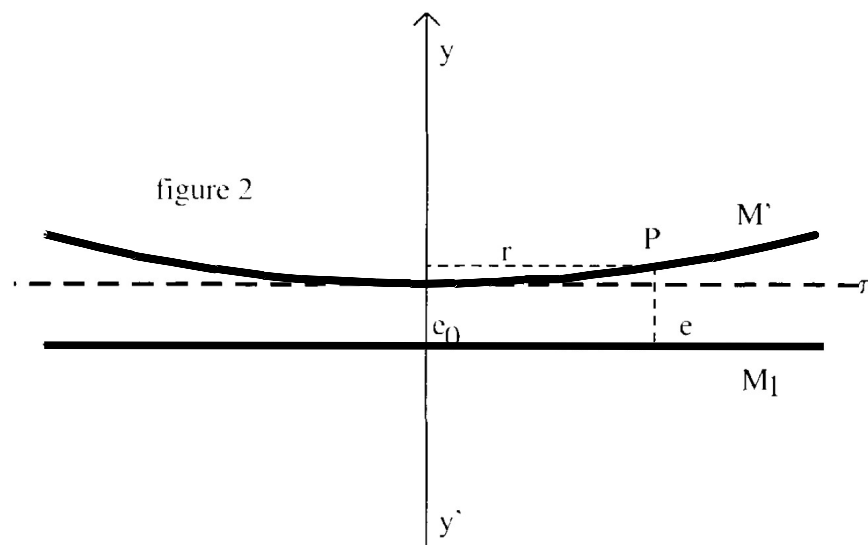
### III. Interféromètre en coin d'air

On admet que la condition  $e=0$  est réalisée. La source est monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . On incline alors  $M_2$  d'un angle  $\alpha$  faible. On éclaire l'ensemble par une source monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$  de telle sorte que l'on observe des franges d'interférences localisées du coin d'air.

10. Préciser les conditions expérimentales de leur observation. Comment procéder si l'on veut observer le phénomène sur un écran.
11. Exprimer l'éclairement  $\mathcal{E}$ , sur la surface de localisation, en fonction de  $x$  et des autres données. Tracer la courbe  $\mathcal{E}(x)$ . Déterminer l'interfrange  $i$  en fonction de  $\alpha$  et  $\lambda$ .

### IV. Interféromètre avec miroir sphérique

Le miroir  $M_2$  initialement plan et tel que  $M'_2$  soit parallèle à  $M_1$  s'est déformé et est devenu sphérique. On admettra que le centre de la sphère  $M'$  symétrique de  $M_2$  par rapport à la séparatrice, de rayon  $R$ , se trouve sur l'axe  $y'y$ , qui est donc axe de symétrie de  $M'$ . Le dispositif est éclairé comme dans la question précédente. (Voir *figure 2*).



Soit  $e_0$  la distance entre  $M_1$  et le plan  $\pi$  tangent à  $M'$  et parallèle à  $M_1$  avec  $e_0 > 0$  comme sur la figure.

12. Exprimer l'épaisseur d'air  $e$  entre  $M_1$  et  $M'$ , pour un point  $P$  de  $M'$ , en fonction de  $e_0$ ,  $r$  et  $R$ . Les conditions d'observation impliquent l'approximation  $r \ll R$ .

13. Montrer que l'on observe des anneaux.

14. Déterminer l'ordre  $p_0$  au centre des anneaux en fonction de  $e_0$  et  $\lambda$ .

15. On utilise l'indice  $k$  : pour repérer les anneaux brillants, sachant que  $k=1$  correspond au premier anneau brillant à partir du centre de la figure d'interférences, de rayon  $R_1$  sur la surface de localisation. Exprimer le rayon  $R_k$  du  $k$ ème anneau brillant en fonction de  $R_1$ ,  $k$ ,  $\lambda$ , et  $R$ .

16. Exprimer le rayon  $R$  de la sphère en fonction des rayons du  $k$ ème et du  $(k+1)$ ème anneaux. En réalité, on a mesuré les rayons de tous les anneaux brillants visibles. Comment exploiter les mesures pour déterminer au mieux le rayon de la sphère ?

17. Pour déterminer rapidement si  $M_2$  est devenu concave ou convexe, on déplace  $M_2$  par translation vers la séparatrice :  $\pi$  reste parallèle à  $M_1$ . Montrer que l'observation du phénomène permet de donner une réponse à cette question.

18. En diminuant  $e_0$ , les anneaux rentrent. On mesure  $R_1 = 5,7 \text{ mm}$  et  $R_{112} = 6 \text{ cm}$ . En déduire la nature de  $M_2$  et la valeur de  $R$ .

## V. Analyse d'un défaut de planéité d'une surface métallique réfléchissante.

Une surface métallique  $S$  polie est plane à l'exception d'un défaut. On l'installe sur un des bras d'un interféromètre de Michelson, à la place de  $M_2$ . L'interféromètre est éclairé comme dans la question précédente. On rappelle que  $M_1$  est également un miroir métallique parfaitement plan.

19. Le symétrique  $S'_{plane}$  de la partie plane de la surface réfléchissante par rapport à la séparatrice doit être parallèle à  $M_1$ . Comment s'en assurer ? Comment régler le contact optique entre  $M_1$  et  $S'_{plane}$  ?

20. On observe alors une figure d'interférences comprenant 4 courbes fermées sombres et un point sombre. Que peut-on déduire de cette figure ? Préciser numériquement.

## Réponses

Température de la surface de la terre

1)

$$P_{\text{Soleil}} = \sigma T_s^4 4\pi R_s^2$$

A.N.

$$= 5,67 \cdot 10^{-8} \times 5800^4 \times 4\pi \times (7 \cdot 10^8)^2$$

$$P_{\text{Soleil}} = 3,95 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

2) L'énergie vient de la conversion masse-énergie selon la formule d'Einsteins:  $E = mc^2$  (réactions de fusion nucléaire)  
La masse du soleil diminue donc.

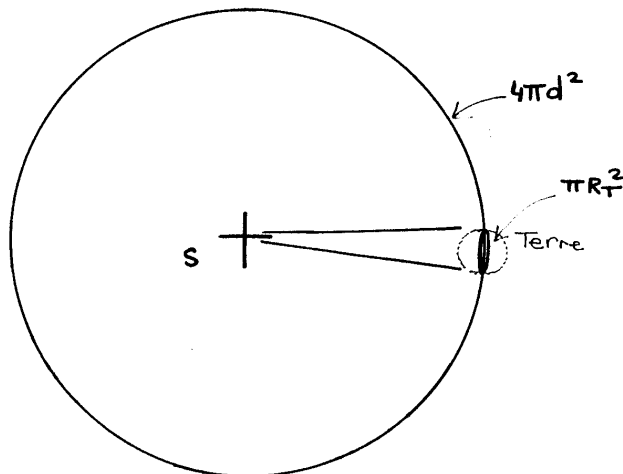
$$\dot{M}_s = - \frac{P_{\text{Soleil}}}{c^2}$$

A.N.

$$= \frac{-3,95 \cdot 10^{26}}{(3 \cdot 10^8)^2}$$

$$\dot{M}_s = -4,39 \cdot 10^9 \text{ kg s}^{-1}$$

3)



La puissance émise par le soleil se distribue uniformément sur la surface  $4\pi d^2$ . La puissance reçue par la terre correspond à la puissance arrivant sur la surface  $\pi R_T^2$

$$r = \frac{P_{\text{Terre}}}{P_{\text{Soleil}}} = \frac{\pi R_T^2}{4\pi d^2}$$

$$r = \left( \frac{R_T}{2d} \right)^2$$

$$\text{A.N.} \quad = \left( \frac{6,4 \cdot 10^6}{2 \times 150 \times 10^9} \right)^2$$

$$r = 4,55 \cdot 10^{-10}$$

$$4) \quad P_{\text{Terre}} = r P_{\text{Soleil}}$$

$$\text{A.N.} \quad = 4,55 \cdot 10^{-10} \times 3,95 \cdot 10^{26}$$

$$P_{\text{Terre}} = 1,80 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

$$5) \quad P_{\text{absorbée}} = y P_{\text{Terre}}$$

$$\text{A.N.} \quad = 0,7 \times 1,80 \cdot 10^{17}$$

$$P_{\text{absorbée}} = 1,26 \cdot 10^{17} \text{ W}$$

$$6) \quad P_{\text{absorbée}} = P_{\text{rayonnée}} \quad (\text{équilibre radiatif})$$

$$y \left( \frac{R_T}{2d} \right)^2 \sigma T_S^4 4\pi R_S^2 = \sigma T_T^4 4\pi R_T^2$$

donc :

$$T_T^4 = y \frac{R_S^2}{4d^2} T_S^4$$

$$T_T = y^{1/4} \sqrt{\frac{R_S}{2d}} T_S$$

$$7) \quad \text{A.N.} \quad = 0,7^{1/4} \left( \frac{700 \cdot 10^3}{2 \times 150 \cdot 10^6} \right)^{1/2} 5800$$

$$T_T = 256 \text{ K}$$

(soit  $-17^\circ\text{C}$ .)

Température très faible. Le modèle doit être perfectionné)

8) - En l'absence des gaz à l'origine de l'effet de serre :

- le rayonnement issu du soleil arrive sur terre.
- la terre réémet de l'infrarouge.

- En présence des gaz à l'origine de l'effet de serre :

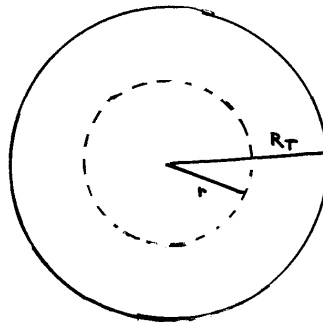
- le rayonnement issu du soleil arrive sur terre.
- la terre réémet de l'infrarouge mais celui-ci est absorbé par l'atmosphère.
- l'atmosphère réémet de l'infrarouge notamment vers la terre.

La surface terrestre reçoit donc davantage d'énergie.

- gaz responsables :
  - $\text{CO}_2$
  - méthane
  - vapeur d'eau

9) En régime stationnaire

$$T = T(r, \theta)$$



on fait un bilan pour le volume limité par une sphère de rayon  $r < R$  pendant  $dt$

$$\underbrace{dU}_{\substack{\text{nul en régime} \\ \text{stationnaire}}} = \underbrace{\delta U_{\text{reçu}}}_{\substack{\downarrow \\ -\oint \vec{q} \cdot d\vec{S} \, dt \\ -\delta(r) 4\pi r^2 dt}} + \underbrace{\delta U_{\text{produit}}}_{\substack{\text{nul si on suppose} \\ \text{l'absence de sources} \\ \text{internes}}}$$

donc

$$\dot{q}(r) = 0$$

$$-\lambda \frac{dT(r)}{dr} = 0$$

$$T(r) = \text{cste}$$

La température est donc uniforme.

remarque :

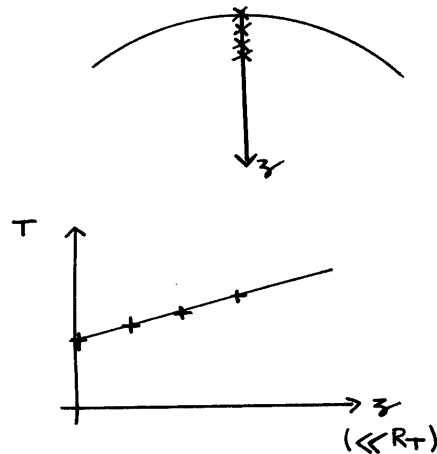
en faisant un bilan sur le volume élémentaire entre la sphère  $r$  et  $r+dr$ , on obtiendrait seulement :  $\dot{q}_{(r)} = \frac{\phi}{4\pi r^2} \rightarrow \text{cste}$  (cf  $\text{div } \vec{q} = 0$ )

soit : 
$$T(r) = \frac{\phi}{4\pi\lambda} \frac{1}{r} + A \rightarrow \text{cste}$$

Il faudrait alors en déduire que  $\phi$  est nul dans la mesure où il ne peut y avoir de singularité en  $r=0$  (pas de "source ponctuelle" au centre)

10)

On détermine le gradient "en surface" à l'occasion de forages, en faisant des mesures de température à des profondeurs différentes, proches de la surface. On étudie  $T(z)$



on en déduit

$$\left( \frac{dT}{dz} \right)_{z=0} = 0$$

11) En comptant les flux positivement dans le sens des  $r$  croissants

$$\rightarrow \varphi_{\text{surf\u00e1ique}} = \frac{\iint \mathcal{I}_n dS}{S}$$

$$= \mathcal{I}_r \quad (\mathcal{I}_r \text{ est ici positif})$$

$$\boxed{\varphi_{\text{en surface}} = -\lambda \frac{dT}{dr}}$$

$$\text{A.N.} \quad = -2,3 \times (-30 \cdot 10^{-3})$$

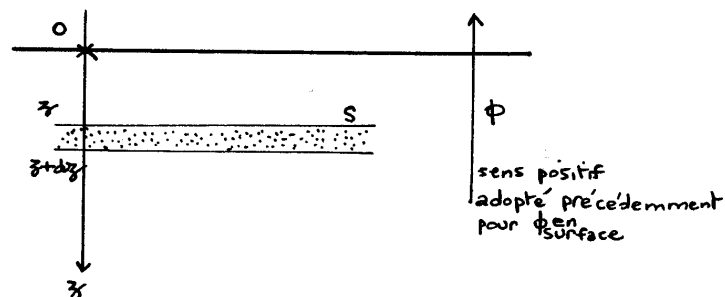
$$\boxed{\varphi_{\text{en surface}} = 69 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-2}}$$

→ Pour toute la surface de la terre

$$\begin{aligned} \phi_{\text{en surface}} &= \varphi \times 4\pi R_T^2 \\ &= 69 \cdot 10^{-3} \times 4\pi (6,4 \cdot 10^6)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\phi_{\text{en surface}} = 35,5 \underbrace{10^{12}}_{T_W} \text{ W}}$$

13) On n\u00e9glige la courbure de la terre.



On pose  $\mathcal{I}_z = -\lambda \frac{dT}{dz}$  ( $\mathcal{I}_z$  est ici n\u00e9gatif)

Le bilan entre  $z$  et  $z+dz$  pendant  $dt$  donne, en l'absence de sources et en r\u00e9gime permanent

$$\mathcal{I}_{(z)} S dt - \mathcal{I}_{(z+dz)} S dt$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{I}}_{(z)} \text{ est donc uniforme}}$$

13)

$$j_z = \text{cte} = -\lambda \frac{dT}{dz}$$

$$\frac{dT}{dz} = \text{constante}$$

14)

$$\text{C.L.} \quad \frac{dT}{dz} = \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z=0} \rightarrow 30 \text{ K km}^{-1}$$

on intègre :

$$\int_{T_T}^T dT = \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z=0} \int_{z=0}^z dz$$

$$T(z) - T_T = \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z=0} z$$

15)

A.N.

$$T(z=e) = T_T + \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z=0} e$$

$$= 278 + 30 \times 33$$

$$T(z=e) = 1,27 \cdot 10^3 \text{ K}$$

16) Sans négliger la courbure

$$j_r 4\pi r^2 = \phi = \text{constante}$$

$$\vec{j} = \frac{\phi}{4\pi r^2} \vec{ur}$$

avec

$$r = R_T - z$$

$$= R_T \left( 1 - \frac{z}{R_T} \right)$$

$$\vec{j} = \frac{\phi}{4\pi R_T^2} \left( 1 - \frac{z}{R_T} \right)^{-2} \vec{ur}$$

à l'ordre 1 en  $\frac{z}{R_T}$ 

$$\vec{j} = \frac{\phi}{4\pi R_T^2} \left( 1 + \frac{2z}{R_T} \right) \vec{ur}$$



En remplaçant  $\vec{u}_r$  par  $-\vec{u}_z$  (le " $\vec{u}_z$  local")  
 ceci revient à écrire

$$\vec{f} = -\lambda \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z=0} \left( 1 + \frac{2z}{R_T} \right) \vec{u}_z$$

au lieu de :

$$\vec{f} = -\lambda \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z=0} \vec{u}_z$$

17) Au lieu de  $1 + \frac{2z}{R_T}$ , on a plus 1.

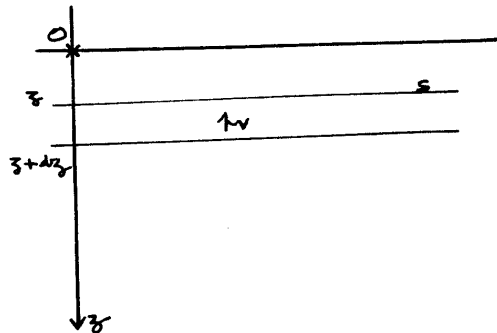
Soit une erreur relative (ou valeur absolue) de  $\frac{2z}{R_T}$   
 maximale pour  $z=e$ .

erreur relative maximale	=	$\frac{2e}{R_T}$
--------------------------------	---	------------------

A.N.  $= \frac{2 \times 33}{6400}$

erreur relative maximale	$\approx$	1%
--------------------------------	-----------	----

18)



Bilan pour la tranche  $dz$  pendant  $dt$

$$d^2U = S^2U_{\text{regu}} + S^2U_{\text{produit}}$$

$$0 = \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z=0} S dt + p_v S dz dt - \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dz} \right)_{z+dz} S dt$$

$$0 = - \frac{d\lambda}{dz} dz S dt + P_V S dz dz$$

$$\frac{d\lambda}{dz} = P_V$$

$$-\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} = P_V$$

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dz^2} = -\frac{P_V}{\lambda}}$$

12) On intègre

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{P_V}{\lambda} z + A$$

$$\boxed{\frac{dT}{dz} = -\frac{P_V}{\lambda} z + \left(\frac{dT}{dz}\right)_{z=0}}$$

$$T = -\frac{P_V}{\lambda} \frac{z^2}{2} + \left(\frac{dT}{dz}\right)_{z=0} z + B$$

$$\boxed{T = -\frac{P_V}{\lambda} \frac{z^2}{2} + \left(\frac{dT}{dz}\right)_{z=0} z + T_T}$$

20) On écrit T en  $z=e$  pour déterminer  $P_V$

$$\boxed{P_V = \frac{2\lambda}{e^2} \left( \left(\frac{dT}{dz}\right)_0 e + T_T - T(e) \right)}$$

A.N.  $= \frac{2 \cdot 23}{(33 \cdot 10^3)^2} \left( 30 \cdot 10^{-3} \cdot 33 \cdot 10^3 + 278 - 893 \right)$

$$\boxed{P_V = 1,58 \cdot 10^{-6} \text{ W m}^{-3}}$$

On détermine  $P_T$  dans la croûte terrestre.

$$P_T = \iiint_{\text{croûte}} P_V dV$$

$$= P_V V$$

$$= P_V \frac{4}{3} \pi (R_T^3 - (R_T - e)^3)$$

$$\downarrow$$

$$R_T^3 - 3R_T^2 e + \underbrace{3R_T e^2 - e^3}_{\text{on néglige}}$$

$$P_T \simeq P_V 4\pi R_T^2 e$$

$$A.N. \quad = 1,58 \cdot 10^{-6} 4\pi (6,4 \cdot 10^6)^2 33 \cdot 10^3$$

$$P_T = 26,9 \cdot 10^{12} \text{ W}$$

Pourcentage de flux géothermique issu de la croûte terrestre

$$\%flux = \frac{P_T}{\phi_{en \text{ surface}}}$$

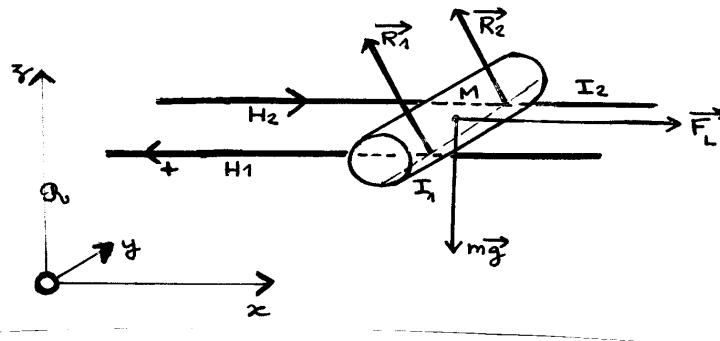
$$= \frac{26,9}{35,5}$$

$$\%flux = 76 \%$$


---

## Rail de Laplace

1) Roulement sans glissement du barreau cylindrique creux :



Résolution énergétique puisque en présence de roulement sans glissement la réaction  $\vec{R}_1$  et la réaction  $\vec{R}_2$  ne travaillent pas.

Théorème de la puissance cinétique au barreau dans  $\mathcal{R}$

$$\frac{dE_c}{dt} = \underbrace{P_{\vec{R}_1}}_{\substack{\text{nul} \\ \vec{v}_{I_1} \in \text{barreau} \\ \text{est nul}}} + \underbrace{P_{\vec{R}_2}}_{\substack{\text{nul} \\ \vec{v}_{I_2} \in \text{barreau} \\ \text{est nul}}} + \underbrace{P_{m\vec{g}}}_{\substack{\text{nul} \\ m\vec{g} \perp \vec{v}_M}} + P_{\vec{F}_L}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = F_L v_M$$

avec  $E_c$  (théorème de König)

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m v_M^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_M^2 + \frac{1}{2} J \frac{v_M^2}{r^2} \\ &= \frac{1}{2} \left( m + \frac{J}{r^2} \right) v_M^2 \end{aligned}$$

$$\left( m + \frac{J}{r^2} \right) v_M a_M = F_L v_M$$

$$\boxed{\vec{F}_L = \underbrace{\left( m + \frac{J}{r^2} \right)}_{m_{ap}} \vec{a}_M}$$

Remarque : La résolution par le PFD est plus longue

(pour simplifier je fais directement  $R_{1y} = 0$  et  $R_{2y} = 0$ )

→ Et de la résultante cinétique au barreau dans  $\mathcal{R}$

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{F}_L + m\vec{g} = m\vec{a}_M$$

$$/x \quad R_{1x} + R_{2x} + F_L = m a_M \quad (1)$$

$$/y \quad R_{1y} + R_{2y} - mg = 0$$

→ Et du moment cinétique en M au barreau dans  $\mathcal{R}^*$

(avec  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_y$ ) [Remarque:  $\omega = -\dot{\theta}$  sur la figure]

$$\vec{MI}_1 \wedge \vec{R}_1 + \vec{MI}_2 \wedge \vec{R}_2 = \frac{d}{dt} (J \omega \vec{u}_y)$$

(cf  $M_y$  axe de révolution du cylindre)

$$/x \quad -\frac{a}{2} R_{1y} + \frac{a}{2} R_{2y} = 0$$

$$/y \quad -r R_{1x} - r R_{2x} = J \frac{d\omega}{dt}$$

$$/z \quad \frac{a}{2} R_{1x} - \frac{a}{2} R_{2x} = 0$$

ce qui donne

$$R_{1x} = R_{2x}$$

$$R_{2y} = R_{1y}$$

$$R_{1x} + R_{2x} = -\frac{J}{r} \frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

→ Relation de roulement sans glissement.

Le signe est facile à trouver (si  $v_M > 0$ ,  $\omega > 0$ )

$$v_M = r \omega \quad (3)$$

Finalement, avec (1), (2), (3)

$$-\frac{J}{r^2} \frac{dv_M}{dt} + F_L = m a_M$$

$$F_L = \left(m + \frac{J}{r^2}\right) a_M$$

2)

$$\frac{m_{ap}}{m} = 1 + \frac{J}{mr^2}$$

A.N. 
$$= 1 + \frac{45 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3} (3 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$\frac{m_{ap}}{m} = 2$$

remarque :

Pour un cylindre creux, toute la masse est à la distance  $r$  de l'axe. On aura donc

$$J = mr^2$$

et  $m_{ap} = 2$

C'est bien le résultat obtenu dans l'A.N.

3) Si nous glissons, la réaction est à l'intérieur du cône de frottement.

$$\left| \frac{R_{1x}}{R_{1z}} \right| \leq f \quad (\text{idem pour } \vec{R}_2)$$

$$\frac{(m_{ap} - m) |a_n|/2}{m g/2} \leq f$$

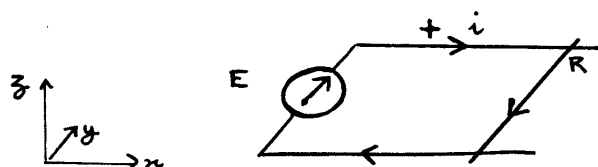
donc :

$$f \geq \left( \frac{m_{ap}}{m} - 1 \right) \frac{|a_n|}{g}$$

soit ici A.N.

$$f \geq \frac{|a_n|}{g}$$

4)



- à la fermeture de l'interrupteur, l'interruette  $i$  passe dans le barreau. Celui-ci, placé dans  $\vec{B}$  subit alors une force de Laplace ( $F_L < 0$  si  $E > 0$  et  $B > 0$ ).
- Le barreau roule alors ( $v_M < 0$ ) et ce déplacement engendre une f.e.m. induite.
- Cette f.e.m. induite  $e$  sera opposée à  $E$  ( $e < 0$ ) (Lenz)  $|e|$  augmente avec  $|v_M|$ . Donc  $E + e$  diminue comme l'accélération du barreau.
- on finit par atteindre  $E + e = 0$  donc  $i = 0$  donc  $F_L = 0$ . Le barreau a alors sa vitesse limite.

### 5) → Équation électrique

- on détermine la f.e.m. induite

$$\begin{aligned}
 e &= \int_{\text{tige}} (\vec{v}_M \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\
 &= \int_{\text{tige}} (v_M \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z) \cdot dy \vec{u}_y \\
 &= \int_a^0 -v_M B \, dy
 \end{aligned}$$

$$e = B v_M a$$

- Loi du circuit

$$E + e = R i$$

$$E + B v_M a = R i \quad (4)$$

### → Équation mécanique

- on détermine la force de Laplace sur la tige

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_L &= \int_{\text{tige}} i \, d\vec{l} \wedge \vec{B} \\
 &= \int_{\text{tige}} i \, dy \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z \\
 &= \int_a^0 i \, dy B \vec{u}_x
 \end{aligned}$$

$$\vec{F}_L = -i B a \vec{u}_z$$

• Équation du mvt de la barre

$$-i B a = m_{ap} \frac{dv_M}{dt} \quad (5)$$

6) Avec 4) et 5) on obtient

$$E + B v_M a = R \left( -\frac{m_{ap}}{B a} \frac{dv_M}{dt} \right)$$

$$\frac{dv_M}{dt} + \frac{B^2 a^2}{m_{ap} R} v_M = -\frac{a B}{m_{ap} R} E$$

On pose  $\tau$  temps de relaxation (au bout de 4 ou 5  $\tau$ , la vitesse aura atteint sa valeur limite)

$$\tau = \frac{m_{ap} R}{B^2 a^2}$$

A.N.

$$\tau = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{12^2 \cdot 0,1^2}$$

$$\tau = 0,1 \text{ s}$$

7) On désigne par  $v_{Lim}$  la solution particulière de l'équation différentielle (= vitesse limite)

$$v_{Lim} = -\frac{E}{a B}$$

A.N.

L'équa diff s'écrit alors

$$v_{Lim} = -0,1 \text{ m/s}$$

$$\frac{dv_M}{dt} + \frac{v_M}{\tau} = \frac{v_{Lim}}{\tau}$$

l'équation caractéristique est :

$$r + \frac{1}{\tau} = 0$$

La solution est :

$$v_M = A e^{-t/\tau} + v_{Lim}$$

$$\text{C.I.} \quad 0 = A + v_{Lim}$$



$$v_M = v_{Lim} (1 - e^{-t/\tau})$$

A.N.

$$v_M / \text{ms}^{-1} = 0,1 (1 - e^{-10t})$$

8) Si  $t \gg \tau$

$$v_M \rightarrow v_{Lim} = -\frac{E}{2B}$$

C'est la valeur pour laquelle on a :

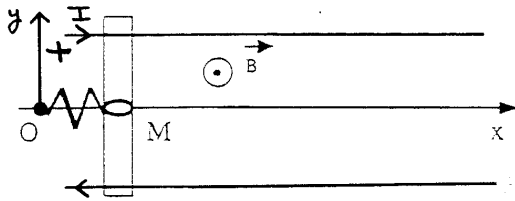
- $a_M = 0$  car
- $F_L = -i 2B = 0$  car
- $i = \frac{e+E}{R} = 0$  car
- $e+E = 0$

donc

$$- B v_{Lim} 2 + E = 0$$

$$v_{Lim} = -\frac{E}{2B} \quad (\text{o.k.})$$

9)



Le raisonnement commence comme précédemment (cf 4)

Il faut tenir compte de la force exercée par le ressort

La position d'équilibre correspond à  $F_L + F_{ressort} = 0$

Sous l'effet de la force d'amortissement (partie de  $F_L$  en  $-k v_M$ )

le mouvement va conduire à cette position d'équilibre.

Cette fois, pour  $t \rightarrow \infty$ , au lieu de  $i \rightarrow 0$  et  $v \rightarrow v_{Lim}$ , on

aura au contraire  $i \rightarrow i_{Lim}$  et  $v \rightarrow 0$ .

(Si  $E > 0$ , à l'équilibre, le ressort travaillera en contraction et non pas en extension)

10) → équation du circuit électrique

$$E + B v_M a = R i$$

(6)

→ équation mécanique

$$\begin{aligned} \text{avec } \vec{F}_{\text{ressort}} &= -k(l - l_0) \vec{ux} \\ &= -k(x - x_0) \vec{ux} \end{aligned}$$

$$-i a B - k(x - x_0) = m_{ap} \frac{dv_M}{dt}$$

(7)

A l'équilibre, l'accélération est nulle  $\frac{dv_M}{dt} = 0$ .

On suppose de plus que le système est au repos ( $t \rightarrow \infty$ ) et  $v_M = 0$

Ces deux équations s'écrivent alors :

$$E = R i_{eq}$$

$$-i_{eq} a B - k(x_{eq} - x_0) = 0$$

donc

$$-k(x_{eq} - x_0) = \frac{a B E}{R}$$

(8)

$$x_{eq} = x_0 - \frac{a B E}{k R}$$

11) on reporte  $i$  tiré de l'équation 6) dans l'équation 7)

$$-a B \left( \frac{E + B v_M a}{R} \right) - k(x - x_0) = m_{ap} \frac{dv_M}{dt}$$

et on soustrait (8)

$$-\frac{a B E}{R} - k(x_{eq} - x_0) = 0$$

$$-\frac{a^2 B^2 v_M}{R} - k(x - x_{eq}) = m_{ap} \frac{dv_M}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{a^2 B^2}{m_{ap} R} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m_{ap}} (x - x_{eq}) = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 (x - x_{eq}) = 0$$

$$\text{avec } \zeta = \frac{m_{ap} R}{B^2 a^2} \text{ comme précédemment}$$

et la pulsation propre

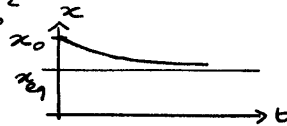
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_{ap}}}$$

12) L'équation caractéristique est :

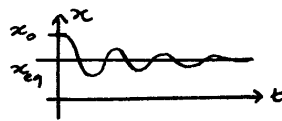
$$r^2 + \frac{1}{b} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta' = \frac{1}{4b^2} - \omega_0^2$$

$\Delta' > 0$  mouvement aperiodique



$\Delta' < 0$  mouvement pseudoperiodique



$\Delta' = 0$  cas limite du régime critique

$$\frac{1}{4b^2} = \omega_0^2$$

$$k_c = \frac{B^4 e^4}{4 m_{ap} R^2}$$

$$A.N. = \frac{1}{4} \frac{0,1^4}{10^{-2} (10^{-1})^2}$$

$$k_c = 0,25 \text{ N m}^{-1}$$

13) On retrouve le bilan d'énergie pendant  $dt$

- électromagnétique (équation 6)  $\times i dt$

$$SW_{\text{fourni par générateur}} = SW_{\text{converti Joule}} + SW_{\text{Laplace}}$$

- mécanique (équation 7)  $\times v dt$

$$SW_{\text{Laplace}} - dE_{\text{P elastique}} = dE_{\text{C barre}}$$

- électromécanique  
(somme des deux bilans)

$$d(E_{\text{C barre}} + E_{\text{P elastique}}) = SW_{\text{fourni par générateur}} - SW_{\text{converti Joule}}$$

Entre  $t = 0$  et  $t = \infty$

$$\rightarrow \Delta E_c = E_{c\infty} - E_{c0} \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} m_{ap} v_m^2$$

$$= 0 - 0$$

$$\rightarrow \Delta E_p = E_{p\infty} - E_{p0} \quad \text{avec} \quad E_p = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

$$= \frac{1}{2} k (x_{eq} - x_0)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{a^2 B^2 E^2}{k R^2}$$

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} W_{\text{générateur}} &= \int_{t=0}^{\infty} E i \, dt \\ W_{\text{Joule}} &= \int_{t=0}^{\infty} R i^2 \, dt \end{aligned} \right\}$$

Ces deux termes sont infinis.

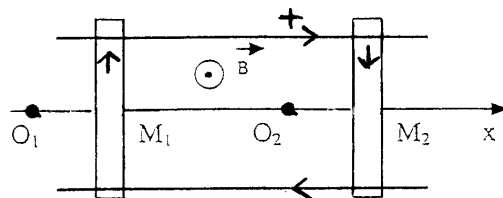
Finalement :

$$\boxed{W_{\text{générateur}} - W_{\text{Joule}} = \Delta E_{p \text{ élastique}}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{a^2 B^2 E^2}{k R^2}$$

L'énergie fournie par le générateur qui n'a pas été convertie en chaleur par effet Joule est stockée par le ressort en énergie potentielle élastique.

14)



En  $t = 0^+$  :

Il y a création d'une force électromotrice induite  $e_1$  dans (1).

Le courant induit passe dans (2) qui subit une force de Laplace et se met donc en mouvement.

15) Pour (2) le sens positif correspond à celui adopté jusqu'à présent. On peut donc récupérer les résultats.

Pour (1) le sens positif est contraire.

On a donc :

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} e_2 = B v_2 a \\ e_1 = -B v_1 a \end{array} \right\} e = e_1 + e_2 = B a (v_2 - v_1)$$

→ loi du circuit de résistance  $R' = 2R$

$$\boxed{B a (v_2 - v_1) = 2R i(t)}$$

$$\rightarrow F_{L2} = -i B a$$

→ équation du mouvement de la tige (2)

$$\boxed{-i a B = m_{ap} \frac{dv_2(t)}{dt}}$$

D'où finalement l'équation différentielle

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{B^2 a^2}{2m_{ap} R} v_2 = \frac{B^2 a^2}{2m_{ap} R} v_1$$

on pose  $\boxed{\tau' = 2\tau} \quad (\text{cf } R' = 2R)$   
 $\boxed{= 0,2 \text{ s}}$

$$\boxed{\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{v_2(t)}{\tau'} = \frac{v_1}{\tau'}}$$

La vitesse limite est donc :

$$\boxed{v_{2Lim} = v_1}$$

On pourrait s'y attendre en vertu de la loi de Lenz.

On tendra vers  $e_1 + e_2 = 0$  et  $i = 0$ .

---

16) L'équation électrique est la même que ci-dessus.

$$\boxed{B a (v_2(t) - v_1(t)) = 2R i(t)}$$

---

17) Mvt de la tige (2) cf équation 7)

$$-i a B - k(x_2 - l_0) = m_{ap} \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$-\frac{a^2 B^2}{2R} \left( \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) - k(x_2 - l_0) = m_{ap} \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{1}{\bar{b}} \left( \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) + \omega_0^2 (x_2 - l_0) = 0} \quad (9)$$

Mvt de la tige (1)

Le sens d'intégration est contraire d'où  $F_{L1} = +i a B$

$$i a B - k(x_1 - l_0) = m_{ap} \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{1}{\bar{b}} \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + \omega_0^2 (x_1 - l_0) = 0} \quad (10)$$

Pour résoudre, on pose  $\alpha = x_1 + x_2$   
 $\beta = x_1 - x_2$

La somme des équations (9) et (10) donne :

$$\boxed{\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 (\alpha - 2l_0) = 0} \quad (11)$$

La différence entre les deux équations donne (avec  $\bar{b}' = 2\bar{b}$ )

$$\boxed{\frac{d^2 \beta}{dt^2} + \frac{1}{\bar{b}} \frac{d\beta}{dt} + \omega_0^2 \beta = 0} \quad (12)$$

18) L'équation (11) donne :

$$(\alpha - 2l_0) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$\text{C.I. avec en } t=0 \quad \left| \begin{array}{l} \alpha_0 = x_{1,0} + x_{2,0} = 2l_0 \\ \dot{\alpha}_0 = v_{1,0} + v_{2,0} = v_0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{donc} \\ \left| \begin{array}{l} (\alpha_0 - 2l_0) = 0 = A \\ v_0 = B \omega_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{donc } A = 0 \\ \text{donc } B = \frac{v_0}{\omega_0} \end{array} \end{array}$$

$$\boxed{\alpha = 2l_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

L'équation (12) donne, en supposant le régime critique :

$$\Delta' = \frac{1}{4\tau_0^2} - \omega_0^2 = 0 \quad \text{soit} \quad 2\omega_0\tau_0 = 1$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= (A t + B) \exp(-\omega_0 t) \\ \dot{\beta} &= A \exp(-\omega_0 t) - \omega_0 (A t + B) \exp(-\omega_0 t) \end{aligned}$$

C.I. avec en  $t=0$   $\left| \begin{array}{l} \beta_0 = x_{1,0} - x_{2,0} = 0 \\ \dot{\beta}_0 = v_{1,0} - v_{2,0} = v_0 \end{array} \right.$

donc

$$\left| \begin{array}{l} 0 = B \\ v_0 = A \end{array} \right.$$

$$\beta = v_0 t \exp(-\omega_0 t)$$

finallement

$$x_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$(x_1 - l_0) = \frac{v_0}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{v_0 t}{2} \exp(-\omega_0 t)$$

$$x_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(x_2 - l_0) = \frac{v_0}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \frac{v_0 t}{2} \exp(-\omega_0 t)$$

19) si  $t \rightarrow \infty$

$$(x_1 - l_0) \rightarrow \frac{v_0}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$(x_2 - l_0) \rightarrow \frac{v_0}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

On pourrait s'attendre à cette "synchronisation" des mouvements.

$$v_1 - v_2 \rightarrow 0 \quad \text{donc} \quad i \rightarrow 0$$

en accord avec la loi de Lenz.

20) L'énergie d'un oscillateur  $E = E_c + E_p$ . On peut l'écrire  
 $E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$  ou  $\frac{1}{2} k (x_{\max} - l_0)^2$

En l'absence de couplage par la présence de B, on aurait

$$(x_1 - l_0) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$(x_2 - l_0) = 0$$

Ici

$$x_1 - l_0 \rightarrow \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$x_2 - l_0 \rightarrow \frac{v_0}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$$

L'énergie initiale était donnée au premier oscillateur

$$E_i = \frac{1}{2} m_{ap} \left( \frac{v_0}{\omega_0} \right)^2$$

L'énergie finale est distribuée sur les deux oscillateurs

$$E_f = 2 \left( \frac{1}{2} m_{ap} \left( \frac{v_0}{2\omega_0} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} m_{ap} \left( \frac{v_0}{\omega_0} \right)^2$$

$$= \frac{E_i}{2}$$

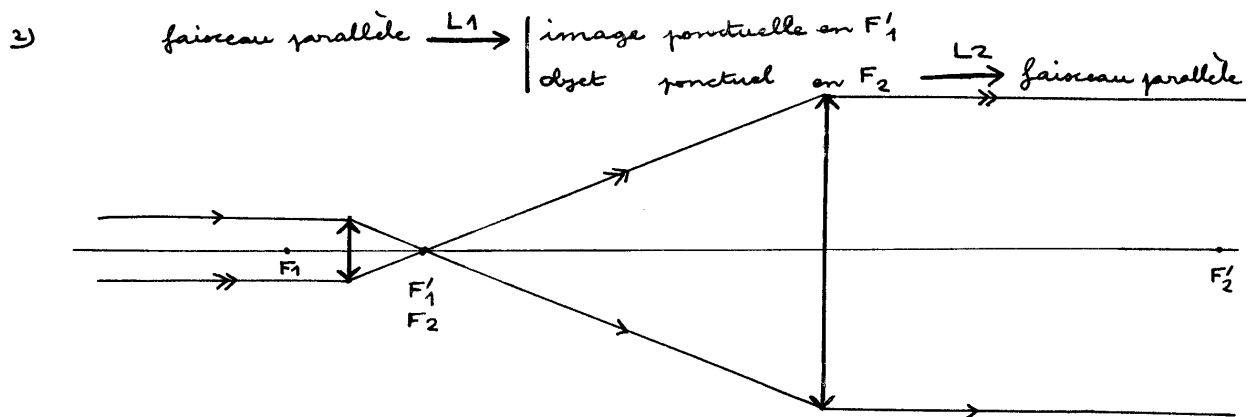
La moitié de l'énergie initiale a été ici  
convertie en "chaleur" par l'effet Joule



## Défauts de planéité des miroirs métalliques

- 1) Un système afocal donne d'un faisceau parallèle incident, un faisceau émergent parallèle lui-aussi.

Le faisceau émergent n'est ni convergent (on ne pourra pas définir de foyers réels) ni divergent (on ne pourra définir de foyers virtuels)



- 3) D'après Thalès

$$\frac{d'}{d} = \frac{f'_2}{f'_1}$$

- 4) A.N.

$$\begin{aligned} d' &= d \frac{f'_2}{f'_1} \\ &= d \frac{150}{5} \end{aligned}$$

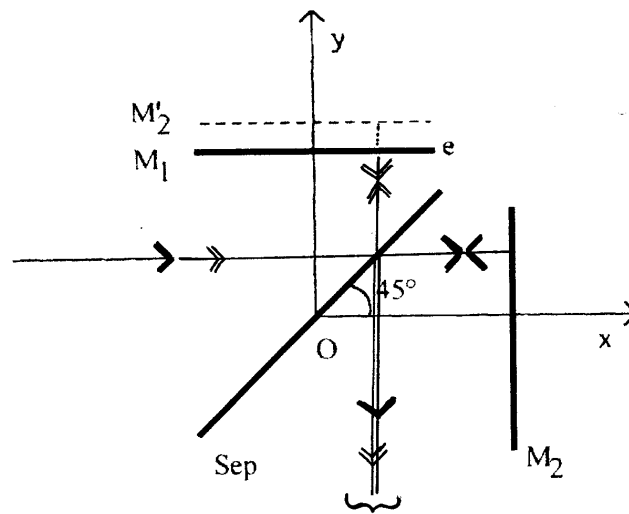
$$d' = 30 d$$

- 5) Ce dispositif permet d'élargir le faisceau incident.  
(exemple: élargir un faisceau laser)

Il s'agit d'un :

expandeur de faisceau

6)



on pose  $d = e_2 - e_1$

La différence de marche est la même pour tous les couples de rayons qui interfèrent.

$$\delta_{2/1} = 2 \cdot n \cdot e - \frac{\lambda}{2}$$

$\nwarrow n=1$        $\nwarrow \lambda \text{ vide}$

différence de marche  
ondulatoire  
(cf déphasage de  $\pi$   
pour l'onde 1 qui se réfléchit  
sur la séparatrice)

L'éclairement de l'écran est donc uniforme

7) On écrit les deux ondes :

$$\Delta_1 = \Delta_0 \exp -j\omega t$$

$$\Delta_2 = \Delta_0 \exp j\varphi_{2/1} \exp -j\omega t$$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

$$= (1 + \exp j\varphi_{2/1}) \Delta_0 \exp -j\omega t$$

$$E = \Delta \Delta^* = \Delta_0^2 (1 + \exp j\varphi_{2/1}) (1 + \exp -j\varphi_{2/1})$$

$$E = E_0 (1 + 1 + 2 \cos \varphi)$$

$$E = 2E_0 (1 + \cos \varphi)$$

avec

$$\delta = 2e - \frac{\lambda}{2}$$

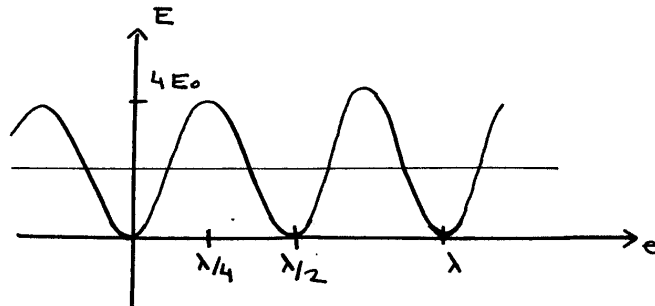
$$P = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

$$\varphi = 2\pi P = \frac{4\pi e}{\lambda} - \pi$$

$$E = 2E_0 (1 + \cos(\frac{4\pi e}{\lambda} - \pi))$$

$$E = 2E_0 (1 - \cos \frac{4\pi e}{\lambda})$$

8)



9) Il n'est pas possible de repérer la position correspondant à  $e=0$  car il existe une infinité de positions où l'éclairement est le même.

Par contre, en lumière blanche, seule la position  $e=0$  donne une frange noire puisque c'est la seule valeur de  $e$  qui donne un cosinus égal à 1 pour toutes les valeurs de  $\lambda$ .

10) → Les franges sont localisées sur le coin d'air

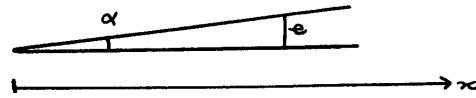
→ L'incidence est quasynormale. La source est étendue (mais pas trop pour que  $\delta$  ne dépende que de  $e$  et pas de l'inclinaison)

→ L'angle du coin d'air est petit.

→ Pour observer les franges sur un écran, il faut faire l'image du

con d'air sur l'écran. L'écran est le conjugué du con d'air par la lentille.

11)



$$\delta = 2e(x) - \frac{\lambda}{2}$$

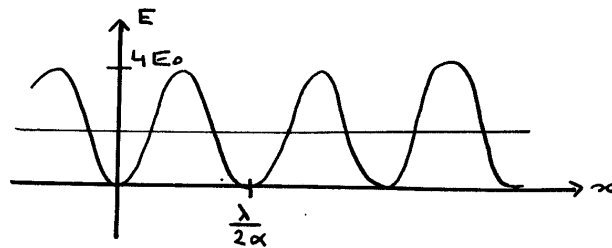
$$= 2\alpha x - \frac{\lambda}{2}$$

$$p = \frac{2\alpha x}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{4\pi\alpha x}{\lambda} - \pi$$

$$E = 2E_0 \left( 1 + \cos\left(\frac{4\pi\alpha x}{\lambda} - \pi\right) \right)$$

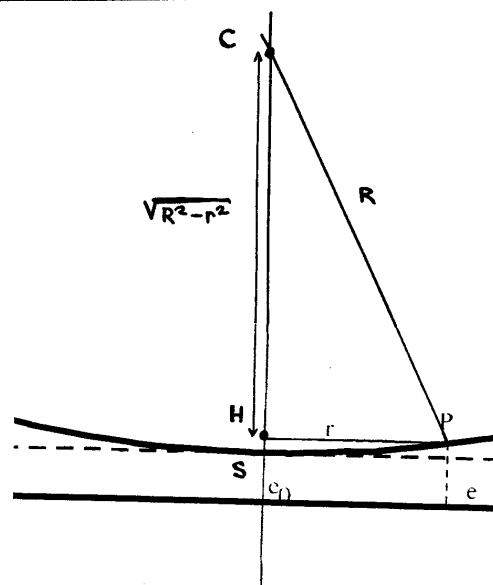
$$E = 2E_0 \left( 1 - \cos\frac{4\pi\alpha x}{\lambda} \right)$$



L'interfrange est la période de  $E$

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

12)



$$\begin{aligned}
 e &= e_0 + SH \\
 &= e_0 + SC - HC \\
 &= e_0 + R - \sqrt{R^2 - r^2} \\
 &= e_0 + R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right) \\
 &\quad \quad \quad \hookrightarrow \approx 1 - \frac{r^2}{2R^2}
 \end{aligned}$$

$$e = e_0 + \frac{r^2}{2R}$$

13) 
$$P = \frac{2e}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

$$P(r) = \frac{2e_0}{\lambda} + \frac{r^2}{\lambda R} - \frac{1}{2}$$

$P$  est fonction de  $r$ .

Les franges d'interférence sont donc des anneaux ( $r = \text{cste}$ ).

Ce sont les franges d'égal épaisseur.

14) Au centre,  $r = 0$

$$P_0 = \frac{2e_0}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

15)  $P$  est minimum au centre

Le premier anneau brillant correspond donc à :

$$P_1 = E(P_0) + 1$$

$\uparrow$  partie entière

Pour le  $k$ ème anneau brillant :

$$P_k = E(P_0) + k$$

ou 
$$P = P_0 + \frac{r^2}{\lambda R}$$

$$r = \sqrt{\lambda R} \sqrt{P - P_0}$$

Donc pour le premier anneau brillant :

$$R_1 = \sqrt{\lambda R} \sqrt{E(P_0) + 1 - P_0}$$

et pour le  $k$ ème anneau brillant

$$R_k = \sqrt{\lambda R} \sqrt{E(p_0) + k - p_0}$$

soit en fonction de  $R_1$

$$R_k = \sqrt{\lambda R} \sqrt{\frac{R_1^2}{\lambda R} - 1 + k}$$

$$R_k = \sqrt{R_1^2 + \lambda R (k-1)}$$

16) Expression de  $R$  en partant de  $R_k$  et  $R_{k+1}$

$$R_k^2 = R_1^2 + \lambda R (k-1)$$

$$R_{(k+1)}^2 = R_1^2 + \lambda R k$$

$$R_{(k+1)}^2 - R_k^2 = \lambda R$$

$$R = \frac{R_{k+1}^2 - R_k^2}{\lambda}$$

Expression de  $R$  en fn de  $k$  les  $R_k$

Il suffit de tracer la droite  $R_k^2$  en fonction de  $k$

La pente de la droite (regression linéaire) donne  $\lambda R$   
donc  $R$

remarque :

Les réponses précédentes ont été établies dans le cas de la figure proposée (le miroir est convexe).  
On peut se demander ce qu'elles deviennent pour un miroir concave. On fait  $R < 0$  pour le miroir concave.

$$12) e = e_0 + \frac{r^2}{2R} \quad (\text{idem avec } e < e_0)$$

15)  $p$  est maximum au centre

$$p_1 = E(p_0) \quad - \text{en supposant } p_0 \text{ non entier}$$

$$p_k = E(p_0) - (k-1)$$

$$r = \sqrt{-\lambda R} \sqrt{p_0 - p}$$

$$R_1 = \sqrt{-\lambda R} \sqrt{p_0 - E(p_0)}$$

$$R_k = \sqrt{-\lambda R} \sqrt{p_0 - E(p_0) + (k-1)}$$

$$R_k = \sqrt{R_1^2 + \lambda (-R) (k-1)}$$

17) On a 
$$p = \frac{2e_0}{\lambda} + \frac{r^2}{\lambda R} - \frac{1}{2}$$

on suppose  $e_0 > 0$  et  $e_0$  diminue.

$p$  est constant (cf on suit un anneau) si  $\frac{r^2}{\lambda R}$  augmente.

→ donc pour un miroir convexe ( $R > 0$  ici)  $r$  augmente.  
Les anneaux partent vers l'extérieur.

→ et pour un miroir concave ( $R < 0$  ici)  $r$  diminue.  
Les anneaux partent vers le centre.

18) Ici les anneaux rentrent, c'est un miroir concave.

$$R_k^2 = R_1^2 + \lambda (-R) (k-1) \quad (\text{cf remarque en 15})$$

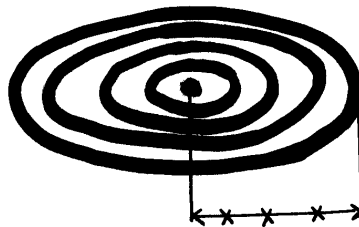
$$(-R) = \frac{R_k^2 - R_1^2}{(k-1) \lambda}$$

A.N.  $|R| = \frac{(6 \cdot 10^{-2})^2 - (5,7 \cdot 10^{-3})^2}{(112-1) \cdot 632,8 \cdot 10^{-9}}$

$$|R| = 50,8 \text{ m}$$

19) Pour régler le contact optique, on cherche l'éclairage uniforme.  
Ici, sombre, en lumière blanche (cf 9).

20) Entre deux franges sombres le défaut de planité est de  $\lambda/2$   
(cf différence de marche :  $\lambda$ )



entre ces deux points  
défaut de planité de  $4 \times \lambda/2$

Le défaut de planité est

$$4 \lambda/2 < d < 5 \lambda/2$$