Planche n° 36. Fonctions uniformément continues. Corrigé

Exercice n° 1

1) a) Soit $\varepsilon > 0$. Soient x et y deux réels de $[0,1]$. Supposons que $x \leqslant y$.

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = x+y-2\sqrt{xy} \leqslant x+y-2\sqrt{x^2} = y-x = |x-y|\,.$$

En échangeant les rôles de x et y, l'égalité précédente est encore valable si $x \geqslant y$. On a donc démontré que pour tous réels x et y de $[0,1]$, $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \leqslant |y-x|$ ou encore $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Soit alors $\alpha = \varepsilon^2 > 0$. Soient x et y deux réels de $[0,1]$ tels que $|x-y| \leqslant \alpha$. On a

$$\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|y-x|} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ \left(|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| \leqslant \varepsilon\right),$$

et donc que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$.

Remarque. Puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur le segment $[0,1]$, le théorème de Heine permet d'affirmer directement que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur le segment $[0,1]$.

b) Il s'agit de vérifier que $M = \text{Sup}\left\{\left|\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x}\right|,\ (x,y) \in [0,1]^2\right\}$ est égal à $+\infty$.

$\left\{\left|\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{y-x}\right|,\ (x,y) \in [0,1]^2\right\}$ contient $\left\{\dfrac{\sqrt{x}}{x},\ x \in]0,1]\right\}$. Donc, pour tout $x \in]0,1]$, $M \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Quand x tend vers 0, on obtient $M = +\infty$. Ceci montre que f n'est pas lipshitzienne sur $[0,1]$ (mais est uniformément continue sur $[0,1]$).

2) Soient x et y deux réels de $[1,+\infty[$.

$$\left|\sqrt{y}-\sqrt{x}\right| = \frac{|y-x|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leqslant \frac{|y-x|}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}|y-x|.$$

Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1,+\infty[$ et en particulier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1,+\infty[$.

3) Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque f est uniformément continue sur $[0,1]$, $\exists \alpha_1 > 0/\ \forall (x,y) \in [0,1]^2,\ \left(|x-y| \leqslant \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Puisque f est uniformément continue sur $[1,+\infty[$, $\exists \alpha_2 > 0/\ \forall (x,y) \in [1,+\infty[^2,\ \left(|x-y| \leqslant \alpha_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Soit $\alpha = \text{Min}\{\alpha_1,\alpha_2\} > 0$. Soit $(x,y) \in [0,+\infty[^2$ tel que $|x-y| \leqslant \alpha$.

- Si x et y sont dans $[0,1]$,

$$\begin{aligned}|x-y| \leqslant \alpha &\Rightarrow |x-y| \leqslant \alpha_1 \text{ (car } \alpha \leqslant \alpha_1)\\ &\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\\ &\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon \text{ (car } \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon).\end{aligned}$$

- Si x et y sont dans $[1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}|x-y| \leqslant \alpha &\Rightarrow |x-y| \leqslant \alpha_2 \text{ (car } \alpha \leqslant \alpha_2)\\ &\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\\ &\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon \text{ (car } \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon).\end{aligned}$$

- Si par exemple, $0 \leqslant x \leqslant 1 \leqslant y$, alors $|x-1| \leqslant |x-y| \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ et donc $|f(x)-f(1)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|y-1| \leqslant |x-y| \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ et donc $|f(y)-f(1)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Mais alors

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f(1)|+|f(1)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon>0,\ \exists \alpha>0/\ \forall (x,y)\in[0,+\infty[^2,\ (|x-y|\leqslant\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon)$ et donc que la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice n^o 2

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $x_n=\sqrt{2n\pi}$ et $y_n=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}$.

- Pour tout entier naturel n, $y_n-x_n=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}-\sqrt{2n\pi}=\dfrac{\pi/2}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}+\sqrt{2n\pi}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-x_n)=0$.
- Pour tout entier naturel n, $f(y_n)-f(x_n)=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(y_n)-f(x_n))=1\neq 0$.

On a trouvé deux suites de réels positifs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que x_n-y_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $f(x_n)-f(y_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On sait alors que la fonction $f\ :\ x\mapsto\sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice n^o 3

Posons $\ell=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
Soit $\varepsilon>0$. $\exists A>0/\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\ \left(x\geqslant A\Rightarrow |f(x)-\ell|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$.

Soit $(x,y)\in[A,+\infty[^2$. Alors, $|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-\ell|+|\ell-f(y)|\leqslant\dfrac{2\varepsilon}{3}$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0,A]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine.
Donc, $\exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in[0,A]^2,\ |x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Résumons. $\alpha>0$ étant ainsi fourni, soient x et y deux réels de $[0,+\infty[$ vérifiant $|x-y|\leqslant\alpha$.

- Si $(x,y)\in[0,A]^2$, on a $|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}\leqslant\varepsilon$.
- Si $(x,y)\in[A,+\infty[^2$, on a $|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{2\varepsilon}{3}\leqslant\varepsilon$.
- Si enfin on a $0\leqslant x\leqslant A\leqslant y$ alors, puisque $|A-x|\leqslant|x-y|\leqslant\alpha$, on a $|f(x)-f(A)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$ et puisque A et y sont dans $[A,+\infty[$, on a $|f(y)-f(A)|\leqslant\dfrac{2\varepsilon}{3}$. Mais alors,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(A)|+|f(y)-f(A)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ \forall(x,y)\in[0,+\infty[^2,\ (|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon)$. f est donc uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice n^o 4

Soit T une période strictement positive de f. f est continue sur le segment $[0,T]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,T]$. M est encore un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ par T-périodicité et donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon>0$.
f est continue sur le segment $[0,T]$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur ce segment. Donc,

$$\exists\alpha\in]0,T[/\ \forall(x,y)\in[0,T]^2,\ \left(|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Soient x et y deux réels tels que $|x-y|\leqslant\alpha(<T)$.

- S'il existe un entier naturel k tel que $(x,y)\in[kT,(k+1)T]^2$, alors $x-kT\in[0,T]$, $y-kT\in[0,T]$, puis $|(x-kT)-(y-kT)|=|y-x|\leqslant\alpha$ et donc $|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\leqslant\varepsilon$.
- Sinon, en supposant par exemple que $x\leqslant y$, puisque l'on a choisi $\alpha<T$,

$$\exists k\in\mathbb{Z}/\ (k-1)T\leqslant x\leqslant kT\leqslant y\leqslant(k+1)T.$$

Mais alors, $|x-kT|\leqslant|y-x|\leqslant\alpha$ et $|y-kT|\leqslant|y-x|\leqslant\alpha$. Par suite,

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(kT)|+|f(y)-f(kT)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Dans tous les cas, si $|x-y|\leqslant\alpha$, alors $|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

f est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Planche n° 37. Intégration sur un segment. Corrigé

Exercice n° 1

f est continue sur le segment $[a, b]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Puisque f est strictement positive sur $[a, b]$, ce maximum est strictement positif.

Soit $\varepsilon \in]0, 2M[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n \, dx\right)^{1/n}$. Par croissance de l'intégrale, on a déjà

$$u_n \leqslant \left(\int_a^b M^n \, dx\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n},$$

(car $\forall x \in [a, b],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow \forall x \in [a, b],\ (f(x))^n \leqslant M^n$ par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0, +\infty[$).
D'autre part, par continuité de f en x_0 tel que $f(x_0) = M$, $\exists [\alpha, \beta] \subset [a, b]/\ \alpha < \beta$ et $\forall x \in [\alpha, \beta],\ f(x) \geqslant M - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on a alors

$$u_n \geqslant \left(\int_\alpha^\beta (f(x))^n \, dx\right)^{1/n} \geqslant \left(\int_\alpha^\beta \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \, dx\right)^{1/n} = \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n}.$$

En résumé,

$$\forall \varepsilon \in]0, 2M[,\ \exists (\alpha, \beta) \in [a, b]^2/\ \alpha < \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n} \leqslant u_n \leqslant M(b-a)^{1/n}.$$

Mais, $\lim\limits_{n \to +\infty} M(b-a)^{1/n} = M$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(M - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n} = M - \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Par suite, $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \geqslant n_1,\ M(b-a)^{1/n} \leqslant M + \varepsilon$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \geqslant n_2,\ \left(M - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{1/n} \geqslant M - \varepsilon$.

Soit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $M - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant M + \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*/\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - M| \leqslant \varepsilon),$$

et donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = M$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} = \underset{[a,b]}{\text{Max}}\, f.}$$

Plus généralement, si g continue sur $[a, b]$, g admet un minimum m_1 et un maximum M_1 sur cet intervalle, tous deux strictement positifs puisque g est strictement positive. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$m_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n \, dx\right)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) \, dx\right)^{1/n} \leqslant M_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n \, dx\right),$$

et comme d'après l'étude du cas $g = 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} m_1^{1/n}\left(\displaystyle\int_a^b (f(x))^n \, dx\right)^{1/n} = \lim\limits_{n \to +\infty} M_1^{1/n}\left(\displaystyle\int_a^b (f(x))^n \, dx\right)^{1/n} = M$,

le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\int_a^b (f(x))^n g(x) \, dx\right)^{1/n} = M$. On a montré que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n g(x) \, dx\right)^{\frac{1}{n}} = \underset{[a,b]}{\text{Max}}\, f.}$$

Exercice n° 2

1) f est continue sur le segment $[0, 1]$ et est donc bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leqslant \int_0^1 t^n |f(t)| \, dt \leqslant M \int_0^1 t^n \, dt = \frac{M}{n+1},$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+1} = 0$, on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et f sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. On peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$u_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ dt.$$

Puisque f' est continue sur $[0,1]$, d'après le début de la question $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ dt = 0$ ou encore

$$-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'autre part, puisque $f(1) \neq 0$, $\dfrac{f(1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(1)}{n}$ ou encore $\dfrac{f(1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{f(1)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Finalement, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{f(1)}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ou encore

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}.}$$

2) Puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f(1) = 0$, une intégration par parties fournit

$$u_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ dt.$$

Puisque f' est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f'(1) \neq 0$, le 1) appliqué à f' fournit

$$u_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\frac{f'(1)}{n} = -\frac{f'(1)}{n^2}.$$

Par exemple, $\displaystyle\int_0^1 t^n \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\ dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\int_0^1 t^n \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\ dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^2}$.

Exercice n° 3

1) Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x^2\sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction f sur $[0,1]$. Puisque la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ et que le pas $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on sait que u_n tend vers

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\ dx &= \left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\ dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\ dx\right)\\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right)\\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.\end{aligned}$$

2) On peut avoir envie d'écrire :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\ln(a+k) - \ln k)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{a}{k}\right).$$

La suite de nombres a, $\dfrac{a}{2}$,..., $\dfrac{a}{n}$ « est une subdivision (à pas non constant) de $[0,a]$ » mais malheureusement son pas $a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On n'est pas dans la même situation que précédemment.

Rappel. (exo classique) Soit v une suite strictement positive telle que la suite $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ tend vers un réel positif ℓ, alors la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tend encore vers ℓ.

Posons $v_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$ puis $u_n = \sqrt[n]{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n+1}{n+1} \to 1,$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3) Encore une fois, ce n'est pas une somme de Riemann. On tente un encadrement assez large : pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)×nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\frac{3n+1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{3n+1}{2n}$. Or, $\frac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\frac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

4) Tout d'abord

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$. u_n est donc effectivement une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur le segment $[0,1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0,1[$.

Puisque f est croissante sur $[0,1[$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, on a

$$\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

et pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \geqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{0}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{Arcsin}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

et

$$u_n - \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \leqslant \int_{0}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{Arcsin}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{Arcsin}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\leqslant u_n\leqslant \text{Arcsin}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\text{Arcsin}\, 1=\dfrac{\pi}{2}$, et donc u_n tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.

5) Pour $1\leqslant k\leqslant n$, $\sqrt{k}-1\leqslant \left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor\leqslant\sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right).$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et la somme de Riemann $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}$ tend vers $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\dfrac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\dfrac{3}{2}$.

6) Là, on a une somme de Riemann à pas constant associée à une fonction continue sur un segment : $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$ tend vers $\displaystyle\int_0^1\dfrac{x^2}{8x^3+1}\,dx=\left[\dfrac{1}{24}\ln|8x^3+1|\right]_0^1=\dfrac{\ln 3}{12}$.

7) $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2(k+n)+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2+\dfrac{2k+1}{n}}$.

u_n tend vers $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2\dfrac{1}{2+x}\,dx=\dfrac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)=\dfrac{\ln 2}{2}$.

8) Soit $f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x}$ si $x>0$ et 0 si $x=0$. f est continue sur $[0,1]$ (théorème de croissances comparées). Donc, $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Pour $x\in[0,1]$, posons $F(x)=\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, F l'est et

$$\int_0^1 f(x)\,dx=F(0)=\lim_{x\to 0,\ x>0}F(x)=\lim_{x\to 0,\ x>0}\left[e^{-1/t}\right]_x^1=\lim_{x\to 0,\ x>0}(e^{-1}-e^{-1/x})=\frac{1}{e}.$$

Donc, u_n tend vers $\dfrac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 4

Supposons f de classe C^2 sur $[0,1]$. Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_n=\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(t)\,dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

f est de classe C^2 sur le segment $[0,1]$. Par suite, $F^{(3)}=f''$ est définie et bornée sur ce segment. En notant M_2 la borne supérieure de $|f''|$ sur $[0,1]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 appliquée à F sur le segment $[0,1]$ fournit

$$\left|F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{(1/n)^3M_2}{6},$$

et donc,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right|&\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1/n)^3M_2}{6}=\frac{M_2}{6n^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right]\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ou encore $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right]\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right)$, ou enfin,

$$u_n\underset{n\to+\infty}{=}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})=\frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or, la fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$. Par suite, la somme de RIEMANN $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,dt=f(1)-f(0)$ et donc

$$\frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2n}(f(1)-f(0)+o(1))\underset{n\to+\infty}{=}\frac{f(1)-f(0)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement,

$$\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice n° 5

1) Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour $\lambda>0$:

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|=\left|\frac{1}{\lambda}\left(-[\cos(\lambda t)f(t)]_a^b+\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt)\right)\right|\leqslant\frac{1}{\lambda}\left(|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b|f'(t)|\,dt\right).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, et donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

2) Si f est simplement supposée continue par morceaux, on ne peut donc plus effectuer une intégration par parties.

Le résultat est clair si $f=1$, car pour $\lambda>0$, $\displaystyle\left|\int_a^b\sin(\lambda t)\,dt\right|=\left|\frac{\cos(\lambda a)-\cos(\lambda b)}{\lambda}\right|\leqslant\frac{2}{\lambda}$.

Le résultat s'étend aux fonctions constantes par linéarité de l'intégrale puis aux fonctions constantes par morceaux par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire aux fonctions en escaliers.

Soit alors f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon>0$. On sait qu'il existe une fonction en escaliers g sur $[a,b]$ telle que $\forall x\in[a,b],\ |f(x)-g(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Pour $\lambda>0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|&=\left|\int_a^b(f(t)-g(t))\sin(\lambda t)\,dt+\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\\&\leqslant\int_a^b|f(t)-g(t)|\,dt+\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\leqslant(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}+\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|.\end{aligned}$$

Maintenant, le résultat étant déjà établi pour les fonctions en escaliers,

$$\exists A>0/\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \left(\lambda\geqslant A\Rightarrow\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Pour $\lambda\geqslant A$, on a alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. On a montré que

$$\forall\varepsilon>0,\exists A>0/\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ (\lambda\geqslant A\Rightarrow\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\leqslant\varepsilon),$$

et donc que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

Exercice n° 6

1) Soient m un réel strictement positif et, pour $t \in \mathbb{R}$, $f_m(t) = e^{mt}$. f_m est bien un élément de E et de plus,

$$\begin{aligned}\varphi(f_m) &= \frac{1}{m^2}(e^{mb} - e^{ma})(e^{-ma} - e^{-mb})\\ &= \frac{1}{m^2}e^{m(a+b)/2}\left(e^{m(b-a)/2} - e^{-m(b-a)/2}\right)e^{-m(a+b)/2}\left(e^{m(b-a)/2} - e^{-m(b-a)/2}\right)\\ &= \frac{4\,\mathrm{sh}^2(m(b-a)/2)}{m^2}.\end{aligned}$$

Cette expression tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$ et $\varphi(E)$ n'est pas majoré.

2) Soit f continue et strictement positive sur $[a, b]$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que :

$$\varphi(f) = \left(\int_a^b \left(\sqrt{f(t)}\right)^2\,dt\right)\left(\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2\,dt\right) \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,dt\right)^2 = (b-a)^2,$$

avec égalité si et seulement si $\exists\lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall t \in [a, b],\ \sqrt{f(t)} = \lambda\dfrac{1}{\sqrt{f(t)}}$ ou encore si et seulement si $\exists\lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall t \in [a, b],\ f(t) = \lambda$, c'est-à-dire que f est une constante strictement positive.

Ceci montre que $\varphi(E)$ admet un minimum égal à $(b-a)^2$ et obtenu si et seulement si f est une constante strictement positive.

Exercice n° 7

Pour t réel, posons $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}$ puis, pour x réel, $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\,dt$. Puisque g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 et $G' = g$ (G est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1). Plus précisément, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc G est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Finalement, f est définie et de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Etude en 1.

$$f(x) = \frac{G(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{=} \frac{G(1) + G'(1)(x-1) + \dfrac{G''(1)}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}{x-1} \underset{x\to 1}{=} g(1) + \frac{g'(1)}{2}(x-1) + o((x-1)).$$

Donc, f admet en 1 un développement limité d'ordre 1. Par suite, f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = g(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ puis le prolongement est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{g'(1)}{2}$. Or, pour tout réel x,

$$g'(x) = 2x\frac{1}{\sqrt{1+x^8}} + x^2\left(-\frac{4x^7}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}\right) = 2x\frac{1-x^8}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}$$

et $g'(1) = 0$. Donc, $f'(1) = 0$.

Dérivée. Variations Pour $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{G'(x)(x-1) - G(x)}{(x-1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)$ est du signe de $h(x) = G'(x)(x-1) - G(x)$ dont la dérivée est

$$h'(x) = G''(x)(x-1) + G'(x) - G'(x) = (x-1)g'(x) = \frac{2x(x-1)\left(1-x^8\right)}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}.$$

Pour tout réel x, $h'(x)$ est du signe de $2x(x-1)(1-x^8)$ ou encore du signe de $-2x(1+x)(x-1)^2$. h est donc décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $[-1, 0]$.

Maintenant, quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), $G'(x)(x-1) = g(x)(x-1) \sim x\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x}$ et donc $G'(x)(x-1)$ tend vers 0. Ensuite, pour $x \geqslant 1$

$$0 \leqslant G(x) \leqslant \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^8}}\,dt = 1 - \frac{1}{x} \leqslant 1,$$

et G est bornée au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$ par une démarche analogue $\displaystyle\int_x^1 \leqslant \ldots$). Comme G est croissante sur $\mathbb{R}$, G a une limite réelle en $+\infty$ et en $-\infty$. Cette limite est strictement positive en $+\infty$ et strictement négative en $-\infty$. Par suite, h a une limite strictement positive en $-\infty$ et une limite strictement négative en $+\infty$. Sur $[0,+\infty[$, h est décroissante et s'annule en 1. Donc, h est positive sur $[0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$. Ensuite,

$$h(-1) = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt - \sqrt{2} = 2\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt - \sqrt{2} < 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\,dt - \sqrt{2} = 0,$$

et $h(-1) < 0$. h s'annule donc, une et une seule fois sur $]-\infty,-1[$ en un certain réel α et une et une seule fois sur $]-1,0[$ en un certain réel β. De plus, h est strictement positive sur $]-\infty,\alpha[$, strictement négative sur $]\alpha,\beta[$, strictement positive sur $]\beta,1[$ et strictement négative sur $]1,+\infty[$.
f est strictement croissante sur $]-\infty,\alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha,\beta]$, strictement croissante sur $[\beta,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Etude en l'infini. En $+\infty$ ou $-\infty$, G a une limite réelle et donc f tend vers 0.

Exercice n° 8

1) La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f.
La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est paire et donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ est impaire. Comme la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire, f est impaire.

2) Pour x réel, $f'(x) = -2xe^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xf(x) + 1$.

3) Pour $x \geqslant 1$, une intégration par parties fournit :

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt = \int_1^x \frac{1}{2t} \times 2te^{t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2t}e^{t^2}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt,$$

et donc,

$$\begin{aligned}
|1-2xf(x)| &= \left|1 - 2xe^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt\right| \\
&= \left|1 - 1 + exe^{-x^2} + xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt\right| \\
&\leqslant xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + exe^{-x^2} + 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Il reste le premier. Pour $x \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
0 \leqslant xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt &= xe^{-x^2}\int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + xe^{-x^2}\int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt \\
&\leqslant xe^{-x^2} \times (x-2)\frac{e^{(x-1)^2}}{1^2} + xe^{-x^2}e^{x^2}\int_{x-1}^x \frac{1}{t^2}\,dt \\
&= x(x-2)e^{-2x+1} + x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = x(x-1)e^{-2x+1} + \frac{1}{x-1}.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que $xe^{-x^2}\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Finalement, $1-2xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ou encore, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

4) Pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x)) = \dfrac{e^{x^2}}{2x} - \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ puis,

$$g'(x) = e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc, g s'annule au plus une fois sur $]0,+\infty[$. Ensuite, $f'(1) = 1-2f(1) = 1-2e^{-1}\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\,dt$. Or, la méthode des rectangles fournit $\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}\,dt = 1,44... > 1,35... = \frac{e}{2}$, et donc $f'(1) < 0$ puis $g(1) < 0$.
Enfin, comme en 0^+, $g(x) \sim \dfrac{1}{2x}f'(0) = \dfrac{1}{2x}$, $g(0^+) = +\infty$.
Donc, g s'annule exactement une fois sur $]0,+\infty[$ en un certain réel x_0 de $]0,1[$.

5) g est strictement positive sur $]0,x_0[$ et strictement négative sur $]x_0,+\infty[$. Il en de même de f'. f est ainsi strictement croissante sur $[0,x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0,+\infty[$. Par parité, f est strictement croissante sur $[-x_0,0]$ et strictement croissante sur $]-\infty,x_0]$.

Exercice n° 9

Pour $t \in [0,1]$, puisque $f(0) = 0$,

$$\begin{aligned} f^2(t) &= \left(\int_0^t f'(u)\,du\right)^2 \leqslant \left(\int_0^t f'^2(u)\,du\right)\left(\int_0^t 1\,du\right) \quad \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &= t\int_0^t f'^2(u)\,du \leqslant t\int_0^1 f'^2(u)\,du, \end{aligned}$$

et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant \int_0^1 t\left(\int_0^1 f'^2(u)\,du\right)\,dt = \left(\int_0^1 f'^2(u)\,du\right)\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(u)\,du.$$

Exercice n° 10

Pour x réel donné, la fonction $t \mapsto |t-x|f(t)$ est continue sur $[a,b]$ et donc $F(x)$ existe.

Pour $x \leqslant a$, $F(x) = \displaystyle\int_a^b (t-x)f(t)\,dt = -x\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b tf(t)\,dt$. F est donc de classe C^1 sur $]-\infty,a]$ en tant que fonction affine et, pour $x < a$, $F'(x) = -\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $F'_g(a) = -\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

De même, pour $x \geqslant b$, $F(x) = x\displaystyle\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)\,dt$. F est donc de classe C^1 sur $[b,+\infty[$ en tant que fonction affine et, pour $x > b$, $F'(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $F'_d(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Enfin, si $a \leqslant x \leqslant b$,

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt + \int_x^b (t-x)f(t)\,dt = x\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt\right) - \int_a^x tf(t)\,dt + \int_x^b tf(t)\,dt.$$

Puisque les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto tf(t)$ sont continues sur $[a,b]$, F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et, pour $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt + x(f(x) - (-f(x))) - xf(x) - xf(x) \\ &= \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

et en particulier, $F'_d(a) = -\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F'_g(a)$ et $F'_g(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F'_d(b)$.

F est continue $]-\infty,a]$, $[a,b]$ et $[b,+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$. F est de classe C^1 sur $]-\infty,a]$, $[a,b]$ et $[b,+\infty[$. De plus, $F'_g(a) = F'_d(a)$ et $F'_g(b) = F'_d(b)$. F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 11

Puisque f est continue et strictement croissante sur $[0,a]$, f réalise une bijection de $[0,a]$ sur $f([0,a]) = [0,f(a)]$.

Soit $x \in [0,a]$. Pour $y \in [0,f(a)]$, posons $g(y) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt - xy$. Puisque f est continue sur $[0,a]$, on sait que f^{-1} est continue sur $[0,f(a)]$ et donc la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ est définie et de classe C^1 sur $[0,f(a)]$. Donc g est de classe C^1 sur $[0,f(a)]$ et pour $y \in [0,f(a)]$, $g'(y) = f^{-1}(y) - x$.

f étant strictement croissante sur $[0,a]$, $g'(y)>0 \Leftrightarrow f^{-1}(y)>x \Leftrightarrow y>f(x)$. Par suite, g' est strictement négative sur $[0,f(x)[$ et strictement positive sur $]f(x),f(a)]$. Par suite, g est strictement décroissante sur $[0,f(x)]$ et strictement croissante sur $[f(x),f(a)]$. g admet en $y=f(x)$ un minimum global égal à $g(f(x))=\int_0^x f(t)\ dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\ dt-xf(x)$. Notons $h(x)$ cette expression.

f est continue sur $[0,a]$. Donc, la fonction $x\mapsto \int_0^x f(t)\ dt$ est de classe C^1 sur $[0,a]$. D'autre part, $y\mapsto \int_0^y f^{-1}(t)\ dt$ est de classe C^1 sur $[0,f(a)]$. On en déduit que $x\mapsto \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\ dt$ est de classe C^1 sur $[0,a]$. Il en est de même de h et pour $x\in[0,a]$,

$$h'(x)=f(x)+f'(x)f^{-1}(f(x))-f(x)-xf'(x)=0.$$

h est donc constante sur $[0,a]$ et pour $x\in[0,a]$, $h(x)=h(0)=0$.

La fonction h admet donc un minimum global égal à 0 et on a montré que

$$\forall(x,y)\in[0,a]\times[0,f(a)],\ \int_0^x f(t)\ dt+\int_0^y f^{-1}(t)\ dt-xy\geqslant \int_0^x f(t)\ dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\ dt-xf(x)=0.$$

Exercice n° 12

Pour $x\in[0,1]$, posons $g(x)=f(x)-x$. g est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 g(x)\ dx=\int_0^1 f(x)\ dx-\int_0^1 x\ dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

Si g est de signe constant, g étant de plus continue sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, on sait que g est nulle. Sinon, g change de signe sur $[0,1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule au moins une fois. Dans tous les cas, g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$ ou encore, f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

Exercice n° 13

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(t)\ dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\ dt\right)&=\left(\int_0^1\left(\sqrt{f(t)}\right)^2\ dt\right)\left(\int_0^1\left(\sqrt{g(t)}\right)^2\ dt\right)\\&\geqslant\left(\int_0^1\sqrt{f(t)}\sqrt{g(t)}\ dt\right)^2\geqslant\left(\int_0^1 1\ dt\right)^2=1.\end{aligned}$$

Exercice n° 14

Soit $x\in[0,1]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. La formule de Taylor-Laplace à l'ordre 1 fournit

$$\sin x=x-\int_0^x(x-t)\sin t\ dt\leqslant x,$$

car pour $t\in[0,x]$, $(x-t)\geqslant 0$ et pour $t\in[0,x]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t\geqslant 0$.

De même, la formule de Taylor-Laplace à l'ordre 3 fournit

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\int_0^x\frac{(x-t)^3}{6}\sin t\ dt\geqslant x-\frac{x^3}{6}.$$

Donc, $\forall x\in[0,1],\ x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin x\leqslant x$.

Soient alors $n\geqslant 1$ puis $k\in[\![1,n]\!]$. On a $0\leqslant\frac{1}{(n+k)^2}\leqslant 1$ et donc

$$\frac{1}{(n+k)^2}-\frac{1}{6(n+k)^6}\leqslant\sin\left(\frac{1}{(n+k)^2}\right)\leqslant\frac{1}{(n+k)^2},$$

puis en sommant

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^2}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^6}\leqslant\sum_{k=1}^n\sin\frac{1}{(n+k)^2}\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^2}.$$

Maintenant,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^2}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{n}\left(\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,dx+o(1)\right)\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'autre part,

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6(n+k)^6}\leqslant n\times\frac{1}{6n^6}=\frac{1}{6n^5},$$

et donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6(n+k)^6}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On en déduit que $2n\left(\dfrac{1}{(n+k)^2}-\dfrac{1}{6(n+k)^6}\right)\underset{n\to+\infty}{=}2n\left(\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}1+o(1)$ et que $2n\dfrac{1}{(n+k)^2}\underset{n\to+\infty}{=}1+o(1)$.

Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $2n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{(n+k)^2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ou encore

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{(n+k)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}.$$

Exercice n° 15

1ère solution. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme dans l'exercice précédent, la formule de Taylor-Laplace fournit pour tout réel x de $[0,1]$, $x-\dfrac{x^3}{6}\leqslant\sin x\leqslant x$. Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^6}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$ et d'autre part,

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^6}\leqslant n\times\frac{n^3}{n^6}=\frac{1}{n^2}.$$

Donc, $\displaystyle\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$ puis

$$-\frac{1}{n}\leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\leqslant 0.$$

Le théorème des gendarmes montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=0$ ou encore

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2ème solution. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}&=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ik/n^2}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i/n^2}\frac{1-e^{ni/n^2}}{1-e^{i/n^2}}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})/n^2}\frac{\sin\dfrac{1}{2n}}{\sin\dfrac{1}{2n^2}}\right)=\frac{\sin\dfrac{n+1}{2n^2}\sin\dfrac{1}{2n}}{\sin\dfrac{1}{2n^2}}\\
&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\left(\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)}{\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=}\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1}\underset{n\to+\infty}{=}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Exercice n° 16

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \text{Arcsin}^n x \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ et donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \, dx = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+0}\, dx = \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\, dx - \int_0^\pi \sin x\, dx\right| = \left|\int_0^\pi \frac{-x\sin x}{x+n}\, dx\right| \leqslant \int_0^\pi \left|\frac{-x\sin x}{x+n}\right| dx \leqslant \int_0^\pi \frac{\pi}{0+n}\, dx = \frac{\pi^2}{n}.$$

Or, $\frac{\pi^2}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}\, dx$ tend vers $\int_0^\pi \sin x\, dx = 2$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 17

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. g est continue sur $\mathbb{R}$ (car pour tout réel t, $t^4+t^2+1 > 0$) et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Définition, dérivabilité, dérivée.
Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, F est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F(x) = G(2x) - G(x)$. G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

Parité. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $t = -u$ et donc $dt = -du$, on obtient, en notant que g est paire

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\, dt = \int_x^{2x} g(-u) \times (-du) = -\int_x^{2x} g(u)\, du = -F(x).$$

F est donc impaire.

Variations. Pour tout x réel,

$$\begin{aligned}
\text{sgn}(F'(x)) &= \text{sgn}\left(\frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\right) = \text{sgn}\left(2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}\right) \\
&= \text{sgn}\left(4(x^4+x^2+1) - (16x^4+4x^2+1)\right) \text{ (par croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\
&= \text{sgn}(-12x^4+3) = \text{sgn}(1-4x^4) = \text{sgn}(1-2x^2).
\end{aligned}$$

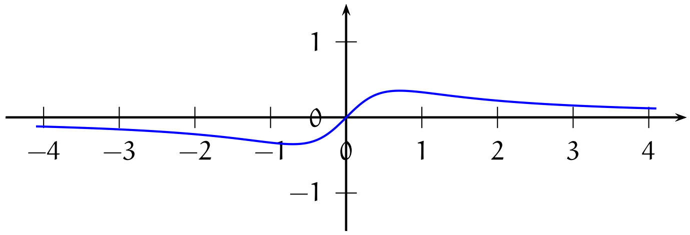
F est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

Etude en $+\infty$. Pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4}}\, dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{x^4}}\, dt = \frac{2x-x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Graphe. Le graphe de F a l'allure suivante



Exercice n° 18

f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive donnée de f sur $\mathbb{R}$. Notons $(*)$ la relation :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y)=F(x+y)-F(x-y)\quad(*).$$

Pour $x=y=0$, on obtient : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(0)=0$. Puis $x=0$ fournit $\forall y\in\mathbb{R},\ F(y)-F(-y)=0$. F est donc nécessairement paire et sa dérivée f est nécessairement impaire.

La fonction nulle est solution du problème. Soit f une éventuelle solution non nulle. Il existe alors un réel y_0 tel que $f(y_0)\neq 0$. Pour tout réel x, on a alors

$$f(x)=\frac{1}{f(y_0)}\int_{x-y_0}^{x+y_0}f(t)\ dt=\frac{1}{f(y_0)}(F(x+y_0)-F(x-y_0)).$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{f(y_0)}(F(x+y_0)-F(x-y_0))$ et donc de f. Mais alors, F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc f l'est aussi (f est en fait de classe C^∞ par récurrence).

En dérivant $(*)$ à y fixé, on obtient $f'(x)f(y)=f(x+y)-f(x-y)$ $(**)$, mais en dérivant à x fixé, on obtient aussi $f(x)f'(y)=f(x+y)+f(x-y)$ $(***)$. En redérivant $(**)$ à y fixé, on obtient $f''(x)f(y)=f'(x+y)-f'(x-y)$ et en dérivant $(***)$ à x fixé, on obtient $f(x)f''(y)=f'(x+y)-f'(x-y)$. Mais alors,

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f''(x)f(y)=f(x)f''(y),$$

et en particulier,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)-\frac{f''(y_0)}{f(y_0)}f(x)=0.$$

On a montré que si f est solution du problème, il existe un réel λ tel que f est solution de l'équation différentielle $y''-\lambda y=0$ (E).

• si $\lambda>0$, en posant $k=\sqrt{\lambda}$, (E) s'écrit $y''-k^2y=0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x\mapsto A\,\mathrm{sh}(kx)+B\,\mathrm{ch}(kx)$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x\mapsto A\,\mathrm{sh}(kx)$, $A\in\mathbb{R}$. Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A\in\mathbb{R}^*$ (on sait que la fonction nulle est solution) et $x\in\mathbb{R}$, posons $f(x)=A\,\mathrm{sh}(kx)$. Alors

$$\int_{x-y}^{x+y}f(t)\ dt=\frac{A}{k}(\mathrm{ch}(k(x+y))-\mathrm{ch}(k(x-y)))=\frac{2A}{k}\mathrm{sh}(kx)\,\mathrm{sh}(ky)=\frac{2}{kA}f(x)f(y).$$

f est solution si et seulement si $\dfrac{2}{kA}=1$ ou encore $A=\dfrac{2}{k}$.

• si $\lambda<0$, en posant $k=\sqrt{-\lambda}$, (E) s'écrit $y''+k^2y=0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x\mapsto A\sin(kx)+B\cos(kx)$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x\mapsto A\sin(kx)$, $A\in\mathbb{R}$. Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A\in\mathbb{R}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, posons $f(x)=A\sin(kx)$. Alors

$$\int_{x-y}^{x+y}f(t)\ dt=\frac{A}{k}(\cos(k(x-y))-\cos(k(x+y)))=\frac{2A}{k}\sin(kx)\sin(ky)=\frac{2}{kA}f(x)f(y).$$

f est solution si et seulement si $\dfrac{2}{kA}=1$ ou encore $A=\dfrac{2}{k}$.

• si $\lambda=0$, (E) s'écrit $y''=0$. Les solutions de (E) sont les fonctions affines et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x\mapsto Ax$, $A\in\mathbb{R}$. Réciproquement, si $f(x)=Ax$

$$\int_{x-y}^{x+y}f(t)\ dt=\frac{A}{2}((x+y)^2-(x-y)^2)=2Axy=\frac{2}{A}f(x)f(y),$$

et f est solution si et seulement si $A=2$.

Les solutions sont la fonction nulle, la fonction $x \mapsto 2x$, les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k}\sin(kx)$, $k > 0$, et les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k}\operatorname{sh}(kx)$, $k > 0$.

Exercice n° 19

Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. F est de classe C^2 sur le segment $[a, b]$ et l'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'écrire

$$\left|F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a) - \frac{b-a}{2}F'(a)\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}\sup\{|F''(x)|,\ x \in [a, b]\}.$$

Mais $F'(a) = f(a) = 0$ et $F'' = f'$. Donc,

$$\left|F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a)\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{M(b-a)^2}{4}.$$

De même, puisque $F'(b) = f(b) = 0$,

$$\left|F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(b)\right| \leqslant \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| &= |F(b) - F(a)| \leqslant \left|F(b) - F\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F(a)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4} = M\frac{(b-a)^2}{4}.\end{aligned}$$

Exercice n° 20

Si $\int_0^1 f(t)\ dt \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\ dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\ dt &\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\ dt = \int_0^1 |f(t)|\ dt \Leftrightarrow \int_0^1 (|f(t)| - f(t))\ dt = 0 \\ &\Leftrightarrow |f| - f = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\ &\Leftrightarrow f = |f| \Leftrightarrow f \geqslant 0.\end{aligned}$$

Si $\int_0^1 f(t)\ dt \leqslant 0$, alors $\int_0^1 -f(t)\ dt \geqslant 0$ et d'après ce qui précède, f est solution si et seulement si $-f = |-f|$ ou encore $f \leqslant 0$.

En résumé, f est solution si et seulement si f est de signe constant sur $[0, 1]$.

Exercice n° 21

1) Si $x > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1, +\infty[$ et $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$. Par suite, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ existe. De plus,

$$x\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\ dt \leqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_x^{x^2} t\frac{1}{t\ln t}\ dt \leqslant x^2\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\ dt.$$

Mais,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\ dt = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln(x)| = \ln\left|\frac{2\ln x}{\ln x}\right| = \ln 2.$$

Donc, $\forall x > 1,\ x\ln 2 \leqslant F(x) \leqslant x^2\ln 2$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 1,\ x > 1} F(x) = \ln 2$.

Si $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$ puis $[x^2, x] \subset]0, 1[$. Donc, $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2, x]$ et $F(x) = -\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t}\ dt$ existe.

Pour $t \in [x^2, x]$, on a $t\ln t < 0$ et $x^2 \leqslant t \leqslant x$. Par suite,

$$x\frac{1}{t\ln t} \leqslant t\frac{1}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \leqslant x^2\frac{1}{t\ln t},$$

puis, $\displaystyle\int_{x^2}^{x} x\frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant \int_{x^2}^{x} x^2\frac{1}{t\ln t}\,dt$, et finalement,

$$x^2\ln 2 = \int_{x}^{x^2} x^2\frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant F(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant \int_{x}^{x^2} x\frac{1}{t\ln t}\,dt = x\ln 2.$$

On obtient alors $\displaystyle\lim_{x\to 1,\ x<1} F(x) = \ln 2$ et finalement, $\displaystyle\lim_{x\to 1} F(x) = \ln 2$. On en déduit que F se prolonge par continuité en 1 en posant $F(1) = \ln 2$ (on note encore F le prolongement obtenu).

2) Domaine de définition. On a déjà vu que F est définie (au moins) sur $]0,+\infty[$ (F désignant le prolongement). Il ne parait pas encore possible de donner un sens à $F(0)$ et encore moins à $F(x)$ quand $x<0$, car alors $[x,0]$ est un intervalle de longueur non nulle contenu dans $[x,x^2]$, sur lequel la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ n'est même pas définie.

$$D_F =]0,+\infty[.$$

Dérivabilité et dérivée. Pour $t\in]0,1[\cup]1,+\infty[$, posons $g(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ et notons G une primitive de g sur cet ensemble. Alors, pour x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $F(x) = G(x^2) - G(x)$. On en déduit que F est de classe C^1 sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et que pour x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$F'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Maintenant, quand x tend vers 1, $\dfrac{x-1}{\ln x}$ tend vers 1. Ainsi, F est continue sur $]0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et F' a une limite réelle en 1. Un théorème classique d'analyse permet d'affirmer que F est de classe C^1 sur D_F et en particulier, dérivable en 1 avec $F'(1) = 1$.

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ F'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\ln x} \text{ si } x\neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases}.$$

Variations. Si $x>1$, $x-1>0$ et $\ln x>0$ et si $0<x<1$, $x-1<0$ et $\ln x<0$. Dans tous les cas ($0<x<1$, $x=1$, $x>1$) $F'(x)>0$. F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Etude en $+\infty$. On a vu que $\forall x>1,\ F(x) > x\ln 2$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Plus précisément, pour $x>1$,

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_{x}^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt \geqslant \frac{x^2-x}{x\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

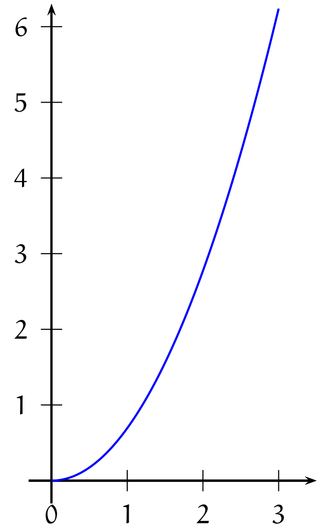
Comme $\dfrac{x-1}{\ln x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées, on en déduit que $\dfrac{F(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc que la courbe représentative de F admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

Etude en 0. Pour $x\in]0,1[$ et $t\in[x^2,x]$, on a $2\ln x = \ln(x^2) \leqslant \ln t \leqslant \ln x < 0$ et donc $\dfrac{1}{\ln x} \leqslant \dfrac{1}{\ln t} \leqslant \dfrac{1}{2\ln x}$, puis $(x-x^2)\dfrac{1}{\ln x} \leqslant \displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln t}\,dt \leqslant (x-x^2)\frac{1}{2\ln x}$ et finalement,

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x-x^2}{-2\ln x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x-x^2}{-\ln x}.$$

On obtient déjà $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x) = 0$. On peut prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$. Ensuite, $\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \dfrac{F(x)}{x}$ est compris entre $\dfrac{1-x}{-2\ln x}$ et $\dfrac{1-x}{-\ln x}$. Comme ces deux expressions tendent vers 0 quand x tend vers 0, on en déduit que $\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. F est donc dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Graphe.



Exercice n° 22

1) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, $f(t) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{t} = t$ et $\lim\limits_{t\to 0,\ t\neq 0} f(t) = 0 = f(0)$. Ainsi, f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

2) f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, $F' = f$ est positive sur $[0, +\infty[$, de sorte que F est croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que F admet en $+\infty$ une limite dans $]-\infty, +\infty]$.

Vérifions alors que F est majorée sur $\mathbb{R}$. On constate que $t^2 \times \dfrac{t^2}{e^t - 1}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, il existe un réel $A > 0$ tel que pour $t \geqslant A$, $0 \leqslant t^2 \times \dfrac{t^2}{e^t - 1} \leqslant 1$ ou encore $0 \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Pour $x \geqslant A$, on a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x \frac{t^2}{e^t - 1}\,dt \leqslant \int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x \frac{1}{t^2}\,dt \\ &= \int_0^A f(t)\,dt + \frac{1}{A} - \frac{1}{x} \leqslant \int_0^A f(t)\,dt + \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

F est croissante et majorée par $\displaystyle\int_0^A f(t)\,dt + \frac{1}{A}$ et donc a une limite réelle ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-t}} = t^2 e^{-t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{-t}\right)^k + \frac{\left(e^{-t}\right)^n}{1 - e^{-t}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} t^2 e^{-(k+1)t} + \frac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} e^{-nt} = \sum_{k=1}^{n} t^2 e^{-kt} + f_n(t)\ (*), \end{aligned}$$

où $f_n(t) = \dfrac{t^2 e^{-t}}{1 - e^{-t}} e^{-nt}$ pour $t > 0$. En posant de plus $f_n(0) = 0$, d'une part, f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et d'autre part, l'égalité $(*)$ reste vraie quand $t = 0$. En intégrant, on obtient

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^2 e^{-kt}\,dt + \int_0^x f_n(t)\,dt\ (**).$$

Soient alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^{-kt}\,dt &= \left[-\frac{1}{k} t^2 e^{-kt} \right]_0^x + \frac{2}{k} \int_0^x t e^{-kt}\,dt = -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} + \frac{2}{k} \left(\left[-\frac{1}{k} t e^{-kt} \right]_0^x + \frac{1}{k} \int_0^x e^{-kt}\,dt \right) \\ &= -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} - \frac{2}{k^2} x e^{-kx} - \frac{2}{k^3} e^{-kx} + \frac{2}{k^3}. \end{aligned}$$

Puisque $k > 0$, quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2e^{-kt}\,dt = \frac{2}{k^3}$. On fait alors tendre x vers $+\infty$ dans $(**)$ et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt\ (***).$$

Vérifions enfin que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt\right) = 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et a une limite réelle en $+\infty$. On en déduit que cette fonction est bornée sur $]0,+\infty[$. Soit M un majorant de cette fonction sur $]0,+\infty[$. Pour $x \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$0 \leqslant \int_0^x f_n(t)\,dt \leqslant M\int_0^x e^{-nt}\,dt = \frac{M}{n}(1-e^{-nx}).$$

$n \in \mathbb{N}^*$ étant fixé, on passe à la limite quand x tend vers $+\infty$ et on obtient

$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt \leqslant \frac{M}{n},$$

puis on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt\right) = 0.$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$ puis quand n tend vers $+\infty$ dans $(***)$, on obtient enfin

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \frac{t^2}{e^t-1}\,dt\right) = 2\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\right).$$

