EQUATION MATRICIELLE

Les parties I et II sont, dans une large mesure, indépendantes.
Soit n un entier naturel non nul.

Partie I

On travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E, I_E est l'application identité de E et θ désigne l'application nulle. Par convention : $\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad f^0 = I_E$.

On étudie sur quelques cas particuliers, l'équation : $(f + I_E)^{2n} - I_E = \theta$ où $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'inconnue.

1. Déterminer les homothéties vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.
2. En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$ déterminer les sommes $S = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}$ et $S' = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1}$

   (la notation C_n^k désigne le coefficient binomial : $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.)
3. Si s est une symétrie de E, exprimer $(s + I_E)^{2n} - I_E$ en fonction de s et I_E.
   En déduire les symétries de E solutions de l'équation proposée.

Partie II

On travaille dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.
I désigne la matrice identité et O la matrice nulle.

On pose $G = \left\{ M_{a,b} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ où $M_{a,b}$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base ; vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

   On cherche à résoudre l'équation matricielle $(*) \quad (M + I)^{2n} - I = O$, avec M, matrice inconnue, dans G.

   On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

   Soient $M = M_{a,b}$ un élément de G tel que $b \neq 0$, u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M et I_E, l'application identité de E.
2. Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \mathrm{Ker}(u - (a+2b).I_E)$.
3. Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \mathrm{Ker}(u - (a-b).I_E)$.
4. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E ; on la note $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
6. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   Ecrire P et déterminer P^{-1} en précisant la méthode utilisée et en détaillant les calculs.
7. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.
8. Montrer que : M est solution de l'équation $(*)$ si et seulement si D est solution de l'équation $(*)$.
9. Déterminer toutes les matrices D solutions de l'équation $(*)$.
10. En déduire toutes les solutions de l'équation $(*)$ dans G.

Equation matricielle

Partie I

1. Soit $f = \alpha I_E$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\left((\alpha+1)^{2n} - 1\right) I_E = \Theta$, or aI_E inversible pour $a \neq 0$ donc on a $(\alpha+1)^{2n} - 1 = 0$, i.e. f solution $\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n-1]\!]\,,\ \alpha = z_k$.
2. $4^n = (1+1)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n} C_{2n}^k$ et $0 = (-1+1)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k C_{2n}^k = \sum_{k \text{ pair}} C_{2n}^k - \sum_{k \text{ impair}} C_{2n}^k$.
   On a donc $S + S' = 4^n$ et $S - S' = 0$, d'où $S = S' = 2 \times 4^{n-1}$.
3. On a $s^2 = s \circ s = I_E$ et s et I_E commutent donc, d'après la formule du binôme,
   $(s + I_E)^{2n} - I_E = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k s^k I_E^{2n-k} - I_E = \sum_{k \text{ pair}} C_{2n}^k I_E^{\frac{k}{2}} + \sum_{k \text{ impair}} C_{2n}^k s - I_E = S's + (S-1)I_E$.
   On a donc s solution si, et seulement si, $s = \dfrac{1-S}{S} I_E$ et s symétrie, ce qui impose $\left(\dfrac{1-S}{S}\right)^2 = 1$ $(s^2 = I_E)$.
   On doit donc avoir $S = \dfrac{1}{2}$, or $S \in \mathbb{N}$! Il n'y a donc aucune symétrie solution.

Partie II

1. On a $G = \left\{aI + bJ \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc
   $G = \mathbf{Vect}\,(I, J)$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ e.v. donc G s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donc e.v.
   (I, J) libre car, si $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $aI + bJ = O \Longrightarrow M_{a,b} = O$ d'où $a = b = 0$ par identification des coefficients (I, J) étant libre et génératrice dans G, (I, J) base de G et $\dim(G) = 2$.
   $M_{a,b} \times M_{c,d} = M_{ac+2bd, ad+bc+bd} \in G$ donc G stable par produit matriciel.
2. On a $u : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tel que $u(X) = MX$ (i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M$ avec $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{C}^3$).
   Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.
   $$\begin{aligned} X \in E_1 &\Longleftrightarrow (M - (a+2b)I)X = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} b(-2x+y+z) = 0 \\ b(x-2y+z) = 0 \\ b(x+y-2z) = 0 \end{cases} \\ &\underset{b\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -2x+y+z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$
   D'où $E_1 = \{(z,z,z) \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathbf{Vect}(e_1')$ avec $e_1' = (1,1,1) \neq (0,0,0)$ donc e_1' base de E_1.
3. Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ X \in E_2 \Longleftrightarrow (M - (a-b)I)X = 0 \Longleftrightarrow b(x+y+z) = 0$. Or $b \neq 0$ donc $E_2 = \{(-y-z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{C}^2\} = \mathbf{Vect}(e_2', e_3')$ où $e_2' = (-1,1,0)$ et $e_3' = (-1,0,1)$.
   e_2' et e_3' n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de E_2, i.e. une base.
4. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, $\det(\mathrm{Mat}\mathcal{B}\mathcal{B}') = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc $\mathcal{B}'$ libre.
   Or $\mathrm{card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{C}^3) = 3$ donc $\mathcal{B}'$ base de $\mathbb{C}^3$.
5. on a $u(e_1') = (a+2b)e_1', u(e_2') = (a-b)e_2', u(e_3') = (a-b)e_3'$ donc $D = \mathrm{Mat}\mathcal{B}'u = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$.

EQUATION MATRICIELLE

6. On a $P = \text{Mat}\mathcal{B}\mathcal{B}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   En accolant I_3 à P et en effectuant des transformations élémentaires sur les lignes jusqu'à ce que P soit transformée en I_3, on obtient : $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
7. On a $D = P^{-1}MP$ (changement de bases) donc $M = PDP^{-1}$.
8. $M+I = \text{Mat}\mathcal{B}u + \text{Mat}\mathcal{B}I_E = \text{Mat}\mathcal{B}u + I_E$ donc $(M+I)^{2n} - I = \text{Mat}\mathcal{B}(u+I_E)^{2n} - I_E$. De même, $(D+I)^{2n} - I = \text{Mat}\mathcal{B}'(u+I_E)^{2n} - I_E$ d'où (changement de base) $(D+I)^{2n} - I = P^{-1}\left((M+I)^{2n} - I\right)P$.
   Donc : $(M+I)^{2n} - I = O \iff (D+I)^{2n} - I = O$.
9. On a : $(D+I)^{2n} - I = \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} - 1 \end{pmatrix}$, donc
   D solution ssi $A(a+2b) = A(a-b) = 0$, i.e. $\exists (k,j) \in [\![0, 2n-1]\!]^2$, $a+2b = z_j$ et $a-b = z_k$.
10. On en déduit : M solution de $(\star) \iff \exists (k,j) \in [\![0, 2n-1]\!]^2$, $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2z_k + z_j & z_j - z_k & z_j - z_k \\ z_j - z_k & 2z_k + z_j & z_j - z_k \\ z_j - z_k & z_j - z_k & 2z_k + z_j \end{pmatrix}$
    (et sous l'hypothèse générale : $M \in G$).