Réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait

Table des matières

1 Modèle du conducteur parfait

1.1 Définition

•Définition : Un conducteur parfait est défini comme un conducteur pour lequel la conductivité est trés grande.

pour un conducteur parfait on a :

- $\delta = 0$
- $\vec{E}(M,t) = \vec{0}$
- $\vec{j}(M,t) = \vec{0}$
- $\vec{B}(M,t) = \vec{0}$

1.2 Relations de passage à l'interface vide-conducteur parfait

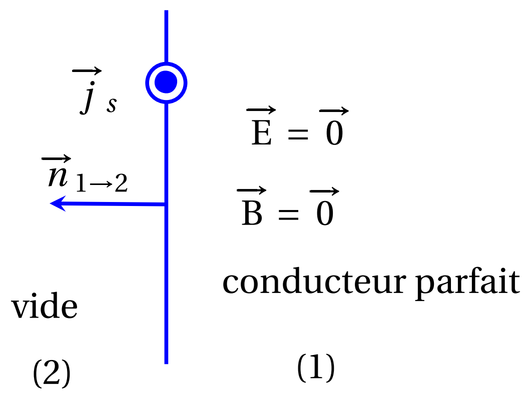
Considérons un conducteur parfait soumis à un champ électromagnétiques. Les relation de passagent s'écrivent

- $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}}$$

- $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}$

$$\boxed{\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}}$$



2 Réflexion sous incidence normale sur la surface d'un conducteur parfait

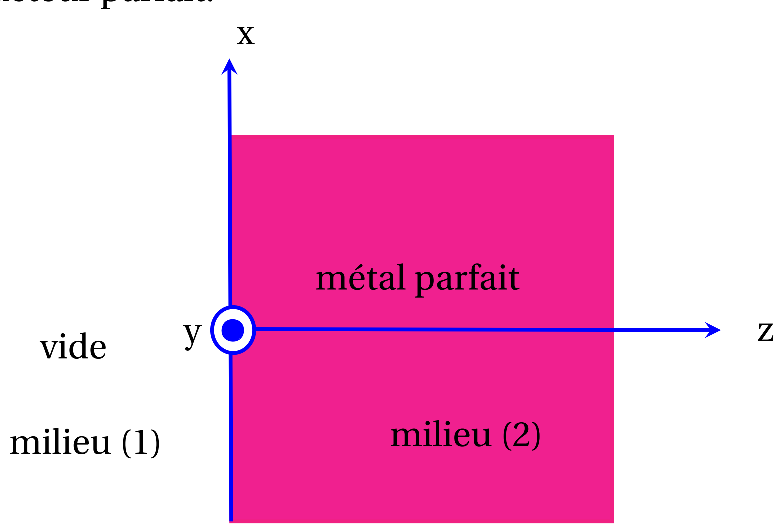
2.1 Position du problème

On se propose d'étudier le phénomène de réflexion d'une OEMPPH sur la surface d'un conducteur métallique supposé comme un conducteur parfait.

Considérons une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant dans le vide,et arrivant,sous incidence normale,sur la surface plane d'un métal parfait

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_i = \underline{\vec{E}}_{0i} \exp i(\omega_i t - kz)}$$

avec $\underline{\vec{E}}_{0i} \begin{vmatrix} E_{0x} \exp i\varphi_x \\ E_{0y} \exp i\varphi_y \\ 0 \end{vmatrix}$



- le vecteur d'onde pour l'onde incidente : $\vec{k}_i = \frac{\omega_i}{c}\vec{e}_z$
- $\underline{\vec{B}}_i(M,t) = \underline{\vec{B}}_{0i} \exp i(\omega_i t - k_i z)$

- $\underline{\vec{B}}_{0i} = \dfrac{\vec{k}_i \wedge \underline{\vec{E}}_{0i}}{\omega_i}$

2.2 Existence de l'onde réfléchie

L'onde incidente $(\underline{\vec{E}}_i, \underline{\vec{B}}_i)$ met les électrons de la surface du métal en mouvement oscillatoire,ce qui donne naissance à une onde réfléchie $(\underline{\vec{E}}_r, \underline{\vec{B}}_r)$ de pulsation ω_r par rayonnement (voir chapitre n° 5) se propageant dans le vide dans le sens des z décroissants :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_r = \underline{\vec{E}}_{0r} \exp i(\omega_r t + k_r z)}$$

le vecteur de l'onde réfléchie est : $\boxed{\vec{k}_r = -\dfrac{\omega_r}{c}\vec{e}_z}$

2.3 caractéristique de l'onde réfléchie

- $\underline{\vec{E}}_r$ vérifie l'équation de propagation dans le vide : $\Delta\underline{\vec{E}}_r - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\underline{\vec{E}}_r}{\partial t^2} = 0$

$$\boxed{k_r = \frac{\omega_r}{c}}$$

- $div\,\underline{\vec{E}}_r = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}.\underline{\vec{E}}_r = 0$
- $\vec{\nabla}\bullet = \dfrac{\partial\bullet}{\partial z}.\vec{e}_z \Rightarrow \dfrac{\partial\underline{\vec{E}}_r}{\partial z}\vec{e}_z = 0 \Rightarrow k_r\underline{\vec{E}}_r.\vec{e}_z = 0 \Rightarrow \underline{\vec{E}}_r \perp \vec{e}_z \Rightarrow \underline{\vec{E}}_{0r} \perp \vec{e}_z$

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_r \perp \vec{e}_z \text{ et } \underline{\vec{E}}_{0r} \perp \vec{e}_z}$$

- relation de passage en $z = 0$: $\underline{\vec{E}}_2 - \underline{\vec{E}}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$; $\underline{\vec{E}}_2 = \vec{0}$ (conducteur)

  donc $\underline{\vec{E}}_1 = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$

  de même pour $\underline{\vec{B}}$ on trouve $\underline{\vec{B}}_1 = -\mu_0\,\underline{\vec{j}}_s \wedge \vec{e}_z$

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z} \text{ et } \boxed{\underline{\vec{B}}_i + \underline{\vec{B}}_r = -\mu_0\,\underline{\vec{j}}_s \wedge \vec{e}_z}$$

- $\forall t$: $\underline{\vec{E}}_{0i} \exp i\omega_i t + \underline{\vec{E}}_{0r} \exp i\omega_r t = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$

  $\Leftrightarrow \underline{\vec{E}}_{0i} \exp i\omega_i t + \underline{\vec{E}}_{0r} \exp i\omega_r t = 0$ et $\boxed{\sigma = 0}$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\vec{E}}_{0i} & = & -\underline{\vec{E}}_{0r} \\ \omega_i & = & \omega_r \end{cases}$

- on pose $\omega_i = \omega_r = \omega$; $\underline{\vec{E}}_{0i} = -\underline{\vec{E}}_{0r} = \underline{\vec{E}}_0$ et $\vec{k}_r = -\vec{k}$

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_i = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t - kz)} \text{ et } \boxed{\underline{\vec{E}}_r = -\underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t + kz)}$$

- le champ magnétique : $\underline{\vec{B}}_r = \dfrac{-k\vec{e}_z \wedge \underline{\vec{E}}_r}{\omega}$

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_r = \underline{\vec{B}}_{0i} \exp i(\omega t + kz)}$$

2.4 Densité surfacique du courant induit sur la surface du métal parfait

- la relation de passage en $z=0$: $2\underline{\vec{B}}_{0i}\exp i\omega t=-\mu_0\underline{\vec{j}}_s\wedge\vec{e}_z$
- $2\vec{e}_z\wedge\underline{\vec{B}}_{0i}\exp i\omega t=-\mu_0\vec{e}_z\wedge\left(\underline{\vec{j}}_s\wedge\vec{e}_z\right)$
- $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ et $\vec{j}_s\perp\vec{e}_z$

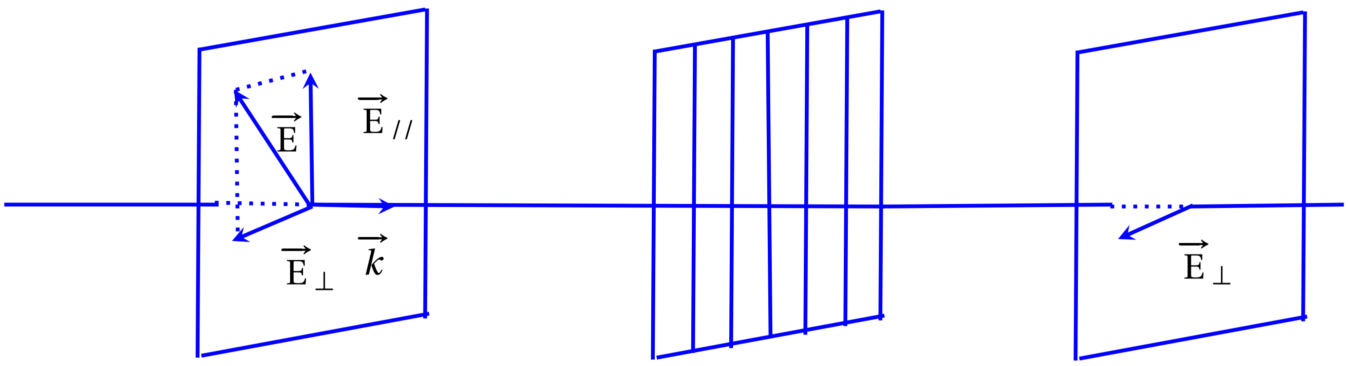
  $\underline{\vec{j}}_s=-\dfrac{2}{\mu_0}\vec{e}_z\wedge\underline{\vec{B}}_{0i}\exp i\omega t=-\dfrac{2}{\mu_0}\vec{e}_z\wedge\left(\dfrac{\vec{e}_z\wedge\underline{\vec{E}}_{0i}}{c}\right)\exp i\omega t$

$$\underline{\vec{j}}_s=\frac{2}{\mu_0 c}\underline{\vec{E}}_{0i}\exp i\omega t$$

2.5 Application : Principe de fonctionnement d'un polariseur d'ondes électromagnétiques

Considérons une OEMPP arrivant sous incidence normale sur la grille

$$\vec{E}=\vec{E}_{\perp}+\vec{E}_{//}$$



Champ incident Grille métallique Champ transmis

- Sous l'effet de $\vec{E}_{//}$,les électrons surfaciques de la grille sont mis en mouvement d'oscillation et donnent naissance à une onde réflichie,l'onde transmise sera composée essentiellement de $\vec{E}_{\perp}$ et sera donc polarisée rectilignement et perpendiculaire aux fils de la grille métallique.

2.6 Superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie

- $\underline{\vec{E}}=\underline{\vec{E}}_i+\underline{\vec{E}}_r=\underline{\vec{E}}_0\left(\exp i(\omega t-kz)-\exp i(\omega t+kz)\right)=\underline{\vec{E}}_0\exp i\omega t\left(\exp i(-kz)-\exp ikz\right)$

$$\underline{\vec{E}}=2i\underline{\vec{E}}_0\sin(kz)\exp i\omega t$$

- en notation réelle avec $\underline{\vec{E}}_0=\vec{E}_0\exp i\varphi$

$$\vec{E}=2\vec{E}_0\sin(kz)\sin(\omega t+\varphi)$$

  il s'agit d'une onde stationnaire

- $\underline{\vec{B}}=\underline{\vec{B}}_i+\underline{\vec{B}}_r=\underline{\vec{B}}_{0i}\exp i(\omega t-kz)+\underline{\vec{B}}_{0i}\exp i(\omega t+kz)=2\vec{B}_{0i}\cos(kz)\exp i(\omega t+\varphi)$

$$\vec{B}_i=2\vec{B}_{0i}\cos(kz)\cos(\omega t+\varphi)$$

  il s'agit d'une onde stationnaire

2.7 Aspect énergétique

► Densité volumique d'énergie moyenne

$$< u >= \frac{1}{4}\left(\varepsilon_0 \left|\underline{\vec{E}}^2\right| + \frac{\left|\underline{\vec{B}}\right|^2}{\mu_0}\right) = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) + \frac{B_{0i}^2}{\mu_0}\cos^2(kz)$$

$$\vec{B}_{0i} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_0}{c}$$

$$\boxed{< u >= \varepsilon_0 E_0^2}$$

► Vecteur de Poynting moyenne

$$< \vec{\pi} >= \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*\right) = \vec{0}$$

Il n'y a pas de propagation de l'énergie en moyenne

2.8 Pression de radiation

Le champ électrique crée des courants localisés au voisinage de la surface du conducteur,ces courant subissent à leur tour l'action du champ électromagnétique.
Calculons la force $d^3\vec{F}$ éxercée sur un élement de volume $d\tau = dxdydz$

- $d^3\vec{F} = \left(\rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}\right) d\tau$
- $\rho = 0$ dans le métal donc : $d^3\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B}\, d\tau$
- dans le domaine de validité de la loi d'Ohm : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \vec{j} = \dfrac{\overrightarrow{rot}\vec{B}}{\mu_0}$
- $d^3\vec{F} = \dfrac{1}{\mu_0}\overrightarrow{rot}\vec{B} \wedge \vec{B}\, d\tau$
- $\vec{B} = B_x(z,t)\vec{e}_x + B_y(z,t)\vec{e}_y$
- après tout calcul on obtient

$$\boxed{d^3\vec{F} = -\frac{1}{\mu_0}\left(B_x\frac{\partial B_x}{\partial z} + B_y\frac{\partial B_y}{\partial z}\right) dxdydz\,\vec{e}_z}$$

- intégrons entre $z = 0$ et $z = a$ et en tenant compte de $B_x(a,t) = B_y(a,t) = 0$

$$\boxed{d^2\vec{F} = -\frac{1}{2\mu_0}\left(B_x^2(0,t) + B_y^2(0,t)\right) dxdy\,\vec{e}_z}$$

- $B_x^2(0,t) + B_y^2(0,t) = B^2(0,t)$

$$\boxed{d^2\vec{F} = -\frac{1}{2\mu_0}B^2(0,t)\, dS\,\vec{e}_z}$$

- la pression de radiation est définie par

$$\boxed{d^2\vec{F} = -P_r\,\overrightarrow{dS}}$$

- donc

$$\boxed{P_r = \frac{1}{2\mu_0}B^2(0,t)}$$

- la valeur moyenne de la pression de radiation
$$< P_r >= \frac{1}{2\mu_0} < B^2(0,t) >= \frac{1}{2}\varepsilon_0 < E^2(0,t) >= \varepsilon_0 E_0^2$$

$$\boxed{< P_r >= \varepsilon_0 E_0^2}$$