SESSION 2021

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

---

1 - Matrices de permutations

1) Soit $(\sigma, \sigma') \in (B_n)^2$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}[\omega(\sigma)\omega(\sigma')]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} [\omega(\sigma)]_{i,k}[\omega(\sigma')]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} \\ &= \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))} \text{ (terme obtenu quand } k = \sigma'(j)) \\ &= [\omega(\sigma \circ \sigma')]_{i,j}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(\sigma, \sigma') \in (B_n)^2$, $\omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma) \times \omega(\sigma')$.

2) $\omega\left(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\right) = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = I_n$.

Soit $\sigma \in B_n$. D'après 1), $\omega(\sigma) \times \omega\left(\sigma^{-1}\right) = \omega\left(\sigma \circ \sigma^{-1}\right) = \omega\left(\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}\right) = I_n$. Donc $\omega(\sigma) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(\omega(\sigma))^{-1} = \omega\left(\sigma^{-1}\right)$.
Enfin, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\left[\omega\left(\sigma^{-1}\right)\right]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{j,\sigma^{-1}(i)} = \left[{}^t\omega\left(\sigma\right)\right]_{j,i}$ et donc $(\omega(\sigma))^{-1} = \omega\left(\sigma^{-1}\right) = {}^t\,\omega(\sigma)$.
Donc $\omega(\sigma) \in O_n(\mathbb{R})$.

On peut aussi constater tout simplement que les colonnes de $\omega(\sigma)$ sont unitaires pour le produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et deux à deux orthogonales.

On a montré que $\omega\left(B_n\right) \subset O_n(\mathbb{R})$.

3) Soient $D = \mathrm{Diag}\left(d_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\sigma \in B_n$. On pose $D_\sigma = \mathrm{Diag}\left(d_{\sigma(i)}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$[D\omega(\sigma)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{i,k}[\omega(\sigma)]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} d_i \delta_{k,\sigma(j)} = d_i \delta_{i,\sigma(j)} \text{ (obtenu quand } k = i)$$

et

$$[\omega(\sigma)D_\sigma]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [\omega(\sigma)]_{i,k}\left[D_\sigma\right]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} d_{\sigma(j)} \delta_{k,j} = d_{\sigma(j)}\delta_{i,\sigma(j)} = d_i \delta_{i,\sigma(j)}.$$

Donc, $D\omega(\sigma) = \omega(\sigma)D_\sigma$.

4) Soit $(D, D') \in (D_n(\mathbb{R}))^2$.

Supposons qu'il existe $M \in \omega\left(B_n\right)$ telle que $D' = {}^t\,MDM$. Donc, D et D' sont orthogonalement semblable (d'après 2)) et en particulier, D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'.

Inversement, supposons que D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'. Alors, il existe $\sigma \in B_n$ telle que $D' = D_\sigma$. Soit $M = \omega(\sigma)$. D'après les questions 2) et 3), M est un élément de $\omega\left(B_n\right)$ tel que $D' = {}^tMDM$.

Fonctions de matrices symétriques

5) Soit $S \in S_n(I)$. Notons $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ le spectre de S (famille des valeurs propres de S). D'après le théorème spectral et par définition de $S_n(I)$, $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \subset I^n$, puis S est orthogonalement semblable à $D = \mathrm{Diag}\left(s_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Donc, il existe $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t\Omega\ \mathrm{Diag}\left(s_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \Omega$.

6) Notons $s'_1, \ldots, s'_p$, $1 \leqslant p \leqslant n$, les valeurs propres deux à deux distinctes de S. Soit $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} f\left(s'_i\right) \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq i}} \frac{X - s'_j}{s'_i - s'_j}$.

P est un polynôme tel que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $P(s'_i) = f(s'_i)$ et donc tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(s_i) = f(s_i)$.

7) L'ensemble des valeurs propres de S est $\{s_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et aussi $\{s'_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Soit P un polynôme tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(s_i) = f(s_i)$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(s'_i) = f(s'_i)$ puis

$$\begin{aligned} {}^t\Omega'\text{Diag}\left(f(s'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)\Omega' &= {}^t\Omega'\text{Diag}\left(P(s'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)\Omega' = P\left({}^t\Omega'\text{Diag}(s'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,\Omega'\right) \\ &= P\left({}^t\Omega\ \text{Diag}(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,\Omega\right) = {}^t\Omega\ \text{Diag}\left(f(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)\Omega. \end{aligned}$$

Ensuite, ${}^t\Omega\ \text{Diag}\left(f(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)\Omega$ est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle et donc ${}^t\Omega\ \text{Diag}\left(f(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right)\Omega \in S_n(\mathbb{R})$.

8) Soient $(\varphi, \psi) \in \left(\mathbb{R}^I\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Posons $S = {}^t\Omega\ \text{Diag}(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,\Omega$ où $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in I^n$ et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} u(\lambda\varphi + \mu\psi)(S) &= {}^t\Omega\ \text{Diag}\left((\lambda\varphi + \mu\psi)(s_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\Omega \\ &= \lambda{}^t\Omega\ \text{Diag}\left(\varphi(s_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\Omega + \mu{}^t\Omega\ \text{Diag}\left(\psi(s_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\Omega = (\lambda u(\varphi) + \mu u(\psi))(S). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, $u(\lambda\varphi + \mu\psi)(S) = (\lambda u(\varphi) + \mu u(\psi))(S)$ et donc $u(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda u(\varphi) + \mu u(\psi)$. u est linéaire.

Ensuite, $v = \text{Tr} \circ u$ est linéaire en tant que composée de deux applications linéaires.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}^I$ et $x \in I$. On prend $\Omega = I_n \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = xI_n = \text{Diag}(x, \dots, x)$.

$$u(\varphi)(xI_n) = {}^tI_n\ \text{Diag}\left(\varphi(x), \dots, \varphi(x)\right)_{1\leqslant i\leqslant n} I_n = \varphi(x)I_n.$$

9) Soit $\varphi \in \text{Ker}(u)$. Donc, pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, $u(\varphi)(S) = 0$ et en particulier, pour tout $x \in I$, $\varphi(x)I_n = u(\varphi)(xI_n) = 0$. Par suite, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = 0$ et donc $\varphi = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et donc φ est injective.

Si $n = 1$, $S_n(I) = I$ et $S_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^I$, pour tout $x \in I$, $u(\varphi)(x) = \varphi(x)$ et donc

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}^I,\ u(\varphi) = \varphi.$$

Dans ce cas, $u = \text{Id}_{\mathbb{R}^I}$ et en particulier u est surjective.

Soit maintenant $n \geqslant 2$. Pour tout φ de $\mathbb{R}^I$, pour tout $x \in I$, $u(\varphi)(xI_n) = xI_n \neq E_{1,1}$ (car $n \geqslant 2$). Donc, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^I$, $u(\varphi)$ ne peut être la fonction constante $\begin{array}{rccc} \psi : & S_n(I) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ & S & \mapsto & E_{1,1} \end{array}$. Donc, u n'est pas surjective.

En résumé, u est surjective si $n = 1$ et n'est pas surjective si $n \geqslant 2$.

10) Soit f une application polynomiale sur I. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) = P(x)$.
Soit $S \in S_n(I)$. Posons $S = {}^t\Omega\text{Diag}(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,\Omega$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in I^n$.

$$\begin{aligned} u(f)(S) &= {}^t\Omega\text{Diag}\left(f(s_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\Omega = {}^t\Omega\text{Diag}\left(P(s_i)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}\Omega = P\left({}^t\Omega\text{Diag}(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,\Omega\right) \\ &= P(S). \end{aligned}$$

Inversement, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $S \in S_n(I)$, $u(f)(S) = P(S)$. En particulier, pour tout x de I,

$$f(x)I_n = u(f)(xI_n) = P(xI_n) = P(x)I_n$$

et donc, pour tout $x \in I$, $f(x) = P(x)$. Ceci montre que f est polynomiale.

11) Montrons d'abord que pour tout $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\|A\|\|B\|$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$|[AB]_{i,j}| = \left|\sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |[A]_{i,k}|\,|[B]_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|\|B\| = n\|A\|\|B\|,$$

et en particulier, $\|AB\| = \text{Max}\{|[AB]_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\} \leqslant n\|A\|\|B\|$.

Soit alors $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement sur I vers une certaine fonction φ. Montrons que la suite $(u(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $S_n(I)$ c'est-à-dire que pour tout $S\in S_n(I)$, $u(\varphi_k)(S)$ tend vers $u(\varphi(S))$ dans l'espace $S_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|$.

Soit $S\in S_n(I)$. Posons $S={}^t\Omega\ \mathrm{Diag}\,(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\,\Omega$ où $\Omega\in O_n(\mathbb{R})$ et $(s_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in I^n$. Pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|u(\varphi_k)(S)-u(\varphi)(S)\| &= \left\|{}^t\Omega\ \mathrm{Diag}\,(\varphi_k(s_i)-\varphi(s_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\,\Omega\right\|\\ &\leqslant n^2\left\|{}^t\Omega\right\|\left\|\mathrm{Diag}\,(\varphi_k(s_i)-\varphi(s_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\right\|\|\Omega\|\leqslant n^2\left\|\mathrm{Diag}\,(\varphi_k(s_i)-\varphi(s_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\right\|\\ &= n^2\ \mathrm{Max}\{|\varphi_k(s_i)-\varphi(s_i)|\ 1\leqslant i\leqslant n\}\quad(*).\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. Pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, il existe un entier k_i tel que, pour tout $k\geqslant k_i$, $|\varphi_k(s_i)-\varphi(s_i)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{n^2}$.

Soit $K=\mathrm{Max}\{k_1,\ldots,k_n\}$. Pour $k\geqslant K$, on a $\|u(\varphi_k)(S)-u(\varphi)(S)\|\leqslant n^2\dfrac{\varepsilon}{n^2}=\varepsilon$.

Ainsi, $\forall\varepsilon>0$, $\exists K\in\mathbb{N}/\ \forall k\geqslant K$, $\|u(\varphi_k)(S)-u(\varphi)(S)\|\leqslant\varepsilon$. Donc, la suite $(u(\varphi_k)(S))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(\varphi)(S)$ dans l'espace $S_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|$. Ceci étant valable pour tout $S\in S_n(I)$, on a montré que la suite $(u(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $u(\varphi)$ sur $S_n(I)$.

Soit $S\in S_n(I)$. La suite $(u(\varphi_k)(S))_{k\in\mathbb{N}}$ vers $u(\varphi(S))$. Par continuité de la trace (sur $S_n(\mathbb{R})$ muni de $\|\ \|$), la suite $(\nu(\varphi_k)(S)))_{k\in\mathbb{N}}=(\mathrm{Tr}\,(u(\varphi_k))(S)))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Tr}\,(u(\varphi))(S))=\nu(\varphi)(S)$.
Donc la suite $(\nu(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\nu(\varphi)$ sur $S_n(I)$.

Supposons maintenant que la suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur I. Donc, il existe $k_0\in\mathbb{N}$, tel que pour $k\geqslant k_0$, $\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I}<+\infty$ et de plus la suite $(\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I})_{k\geqslant k_0}$ converge vers 0.

D'après $(*)$, pour toute $S\in S_n(I)$ et tout $k\geqslant k_0$,

$$\|u(\varphi_k)(S)-u(\varphi)(S)\|\leqslant n^2\ \mathrm{Max}\{|\varphi_k(s_i)-\varphi(s_i)|\ 1\leqslant i\leqslant n\}\leqslant n^2\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I},$$

puis $\mathrm{Sup}\{\|u(\varphi_k)(S)-u(\varphi)(S)\|,\ S\in S_n(I)\}\leqslant n^2\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I}$. Ceci montre que $\mathrm{Sup}\{\|u(\varphi_k)(S)-u(\varphi)(S)\|,\ S\in S_n(I)\}$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ et donc que la suite $(u(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $u(\varphi)$ sur $S_n(I)$ muni de la norme $\|\ \|$.

Enfin, en tenant compte de : $\forall(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $|\mathrm{Tr}(A-B)|\leqslant n\|A-B\|$, on a pour tout $k\geqslant k_0$,
$\mathrm{Sup}\{\|\nu(\varphi_k)(S)-\nu(\varphi)(S)\|,\ S\in S_n(I)\}\leqslant n^3\|\varphi_k-\varphi\|_{\infty,I}$, et donc $(\nu(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $u(\varphi)$ sur $S_n(I)$.

Norme et convexité

12) Soit $S\in S_n(\mathbb{R})$. Soient $\Omega\in O_n(\mathbb{R})$ et $D=\mathrm{Diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant n}\in D_n(\mathbb{R})$ telle que $S=\Omega D{}^t\Omega$. On suppose que la numérotation a été faite de sorte que $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$.

Soient $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\Sigma$ puis $X'={}^t\Omega X=(x_i')_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors X' in S car

$${}^tX'X'={}^t\left({}^t\Omega X\right)\left({}^t\Omega X\right)={}^tX\Omega{}^t\Omega X={}^tXX=1.$$

Ensuite,

$${}^tXSX={}^tX\Omega D{}^t\Omega X={}^t\left({}^t\Omega X\right)D\left({}^t\Omega X\right)={}^tX'DX'=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i'^2.$$

Par suite, ${}^tXSX=\displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i'^2\leqslant\lambda_n\sum_{i=1}^n x_i'^2=\lambda_n{}^tX'X'=\lambda_n$ et de même ${}^tXSX\geqslant\lambda_1$. Ainsi,

$$\forall X\in\Sigma,\ \lambda_1\leqslant{}^tXSX\leqslant\lambda_n.$$

D'autre part, si X est une vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_1 (resp. λ_n), alors X est un élément de Σ tel que ${}^tXSX={}^tX(\lambda_1X)=\lambda_1{}^tXX=\lambda_1$ (resp. ${}^tXSX=\lambda_n$).

Ceci montre que $\mathrm{Min}\{{}^tXSX,\ X\in\Sigma\}$ (resp. $\mathrm{Max}\{{}^tXSX,\ X\in\Sigma\}$) existe dans $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{Min}\{{}^tXSX,\ X\in\Sigma\}=\lambda_1=\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S))$ (resp. $\mathrm{Max}\{{}^tXSX,\ X\in\Sigma\}=\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S))$).

13) $S_n(I)$ est une partie non vide de $S_n(\mathbb{R})$. Soient $(S,S') \in (S_n(I))^2$ et $\alpha \in [0,1]$. La matrice $(1-\alpha)S+\alpha S'$ est dans $S_n(\mathbb{R})$. Soit $X \in \Sigma$.

$$^tX((1-\alpha)S+\alpha S')X = (1-\alpha)^tXSX+\alpha^tXS'X \in [(1-\alpha)\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S))+\alpha\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S')),(1-\alpha)\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S))+\alpha\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S'))].$$

Maintenant, $\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S))$, $\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S'))$, $\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S))$ et $\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S'))$ sont quatre réels de I. Puisque les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$, on a $(1-\alpha)\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S))+\alpha\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S')) \in I$ et $(1-\alpha)\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S))+\alpha\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S')) \in I$ puis $[(1-\alpha)\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S))+\alpha\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S')),(1-\alpha)\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S))+\alpha\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S'))] \subset I$.

Ainsi, $\{^tX((1-\alpha)S+\alpha S')X,\ X \in \Sigma\} \subset I$. En particulier, d'après la question précédente, $\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}((1-\alpha)S+\alpha S')) \in I$ et $\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}((1-\alpha)S+\alpha S')) \in I$ et finalement $\mathrm{Sp}((1-\alpha)S+\alpha S') \subset I$ ou encore $(1-\alpha)S+\alpha S' \in S_n(I)$.

On a montré que $\forall (S,S') \in (S_n(I))^2$, $\forall \alpha \in [0,1]$, $(1-\alpha)S+\alpha S' \in S_n(I)$. Donc, $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

Montrons que ρ est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$. On note d'abord que pour toute $S \in S_n(\mathbb{R})$ et pour tout vecteur unitaire $X \in \Sigma$, $|^tXSX| \leqslant \rho(S)$.

- ρ est une application de $S_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour toute $S \in S_n(\mathbb{R})$, $\rho(S) \geqslant 0$.
- Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(S) = 0$. Alors, $\mathrm{Sp}(S) = \{0\}$. D'après le théorème spectral, S est semblable à $D = \mathrm{Diag}(0,\dots,0)$ et donc $S = 0$.
- Soient $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On sait que $\mathrm{Sp}(\alpha S) = \{\alpha\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\}$. Mais alors,

$$\rho(\alpha S) = \mathrm{Max}\{|\alpha||\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\} = |\alpha|\ \mathrm{Max}\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\} = |\alpha|\rho(S).$$

- Soient $(S,S') \in (S_n(\mathbb{R}))^2$. Soient λ une valeur propre de $S+S'$ et X un vecteur propre unitaire associé.

$$|\lambda| = \left|^tX(\lambda X)\right| = \left|^tX(S+S')X\right| \leqslant \left|^tXSX\right| + \left|^tXS'X\right| \leqslant \rho(S)+\rho(S')$$

  Ainsi, pour toute valeur propre λ de $S+S'$, $|\lambda| \leqslant \rho(S)+\rho(S')$ et en particulier, $\rho(S+S') \leqslant \rho(S)+\rho(S')$.

On a montré que ρ est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$.

Continuité des fonctions de matrices symétriques

14) On munit $\mathbb{R}[X]$ d'une norme quelconque.

L'application $\alpha : \begin{array}{ccc} S_n(R) & \to & (\mathbb{R}_1[X])^{n^2} \\ S & \mapsto & (\delta_{i,j}X-[S]_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \end{array}$ (l'ensemble des couples (i,j) étant ordonné par l'ordre lexicographique) est continue sur $S_n(R)$ car somme de l'application constante $S \mapsto (\delta_{i,j}X)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et de l'application linéaire $S \mapsto -([S]_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sur l'espace $S_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

Soit $\sigma \in B_n$. L'application $\beta_\sigma : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_1[X])^{n^2} & \to & (\mathbb{R}_1[X])^n \\ (P_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} & \mapsto & \left(P_{\sigma(i),i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \end{array}$ est continue sur $(\mathbb{R}_1[X])^{n^2}$ car linéaire.

Donc, l'application $\beta_\sigma \circ \alpha\ :\ S \mapsto \left(\delta_{\sigma(i),i}X-[S]_{\sigma(i),i}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est continue sur $S_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}_1[X])^n$.

L'application $\gamma_\sigma : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_1[X])^n & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (P_1,\dots,P_n)_{1\leqslant i\leqslant n} & \mapsto & \varepsilon(\sigma)P_1\times\dots\times P_n \end{array}$ est continue sur $(\mathbb{R}_1[X])^n$ car n-linéaire.

Donc, l'application $\gamma_\sigma \circ \beta_\sigma \circ \alpha\ :\ S \mapsto \varepsilon(\sigma)\left(\delta_{\sigma(1),1}X-[S]_{\sigma(1),1}\right)\times\dots\times\left(\delta_{\sigma(1),1}X-[S]_{\sigma(1),1}\right)$ est continue sur $S_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Mais alors, $\chi = \displaystyle\sum_{\sigma\in B_n} \gamma_\sigma \circ \beta_\sigma \circ \alpha$ est continue sur $S_n(\mathbb{R})$ en tant que somme d'applications continues sur $S_n(\mathbb{R})$.

15) Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $\Lambda_k = \mathrm{Sp}_\uparrow(M_k) = (\lambda_{1,k},\dots,\lambda_{n,k})$.

La suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $S_n(\mathbb{R})$ et en particulier bornée. Soit A un majorant de la suite $(\rho(M_k))_{k\in\mathbb{N}}$. Donc, $\forall (k,i) \in \mathbb{N}\times[\![1,n]\!]$, $|\lambda_{i,k}| \leqslant A$.

Mais alors, la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraite une suite $\left(\Lambda_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers un certain $\Lambda = (\mu_1,\dots,\mu_n) \in \mathbb{R}^n$.

Puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_{1,\varphi(k)} \leqslant \lambda_{2,\varphi(k)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n,\varphi(k)}$, quand k tend vers $+\infty$, on obtient $\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$. Ainsi, Λ est une valeur d'adhérence croissante de la suite $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

16) Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} M_k = M$, par continuité de χ, $\lim\limits_{k\to+\infty} \chi_{M_k} = \chi_M$. En particulier, $\lim\limits_{k\to+\infty} \chi_{M_{\alpha(k)}} = \chi_M$ ou encore avec les notations de la question précédente et en posant $\mathrm{Sp}_\uparrow(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

$$(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n) = \chi_M = \lim_{k\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(X - \lambda_{i,\alpha(k)}\right) = (X-\mu_1)\ldots(X-\mu_n).$$

Puisque $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est croissant, on a nécessairement $\mathrm{Sp}_\uparrow(M) = (\mu_1, \ldots, \mu_n) = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{Sp}_\uparrow\left(M_{\alpha(k)}\right)$.

On a montré que $\lim\limits_{k\to+\infty} \Lambda_{\alpha(k)} = \mathrm{Sp}_\uparrow(M)$.

17) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $S_n(\mathbb{R})$, convergente, de limite M. La question précédente montre que la suite $\left(\mathrm{Sp}_\uparrow(M_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence, à savoir $\mathrm{Sp}_\uparrow(M)$, dans l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On sait alors que la suite $\left(\mathrm{Sp}_\uparrow(M_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Sp}_\uparrow(M)$.

Ainsi, pour tout suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente de limite M, la suite $\left(\mathrm{Sp}_\uparrow(M_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Sp}_\uparrow(M)$. On sait alors que $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue en M.

Finalement, puisque $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue en chaque $M \in S_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_\uparrow$ est continue sur $S_n(\mathbb{R})$.

18)

- Pour toute $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\|M\| \leqslant 1$. Donc, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$. Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & (M, {}^tM) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M,N) & \mapsto & MN \end{array}$. f est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'application linéaire sur un espace de dimension finie et g est continue sur $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ en tant qu'application bilinéaire sur un espace de dimension finie. Donc, $h = g \circ f$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Puisque $O_n(\mathbb{R}) = h^{-1}(\{I_n\})$, $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Ainsi, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

19) Soit $\varphi \in C^0(I, \mathbb{R})$. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $S_n(I)$, convergente de limite M. On fait l'hypothèse supplémentaire que $M \in S_n(I)$ (ce qui sera le cas si I est compact). Montrons que la suite $u(\varphi)(M_k)$ converge vers $u(\varphi)(M)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $M_k = \Omega_k D_k {}^t\Omega_k$ où $\Omega_k \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_k = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Sp}_\uparrow(M_k)\right) = (\lambda_{1,k}, \ldots, \lambda_{n,k})$. Posons aussi $\mathrm{Sp}_\uparrow(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ puis $D = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Sp}_\uparrow(M)\right) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

D'après la question 17), $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{Sp}_\uparrow(M_k) = \mathrm{Sp}_\uparrow(M)$ et en particulier $\lim\limits_{k\to+\infty} D_k = D$. D'autre part, la suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite du compact $O_n(\mathbb{R})$. On peut en extraire une suite $\left(\Omega_{\alpha(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers une certaine matrice $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. On a alors

$$M = \lim_{k\to+\infty} M_k = \lim_{k\to+\infty} M_{\alpha(k)} = \Omega D {}^t\Omega = \Omega \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, {}^t\Omega$$

et donc, par continuité de φ sur I et donc en λ_1, …, λ_n (avec l'hypothèse supplémentaire)

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} u(\varphi)\left(M_{\alpha(k)}\right) &= \lim_{k\to+\infty} {}^t\Omega_{\alpha(k)} \mathrm{Diag}\left(\varphi\left(\lambda_{1,\alpha(k)}\right), \ldots, \varphi\left(\lambda_{n,\alpha(k)}\right)\right) \Omega_{\alpha(k)} = \Omega' \mathrm{Diag}\left(\varphi(\lambda_1), \ldots, \varphi(\lambda_n)\right) {}^t\Omega \\ &= u(\varphi)(M).\end{aligned}$$

Soit maintenant $\left(u(\varphi)\left(M_{\beta(k)}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite convergente quelconque de la suite $\left(u(\varphi)(M_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Le travail précédent appliqué à cette suite montre que sa limite est nécessairement $u(\varphi)(M)$. Donc, la suite $\left(u(\varphi)(M_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ a une et une seule valeur d'adhérence. Enfin, toujours en supposant I compact, chacune des suites $\left(\varphi(\lambda_{i,k})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc, la suite $\left(u(\varphi)(M_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée (pour la norme ρ).

La suite $\left(u(\varphi)\left(M_{\beta(k)}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée et admet une et une seule valeur d'adhérence, à savoir $u(\varphi)(M)$. Donc, la suite $\left(u(\varphi)\left(M_{\beta(k)}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(\varphi)(M)$.

Ainsi, pour toute suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S_n(I)$, convergente de limite M, la suite $u(\varphi)(M_k)$ converge vers $u(\varphi)(M)$. On en déduit que $u(\varphi)$ est continue en M. Finalement, $u(\varphi)$ est continue sur $S_n(I)$.

Par continuité de la trace, $v(\varphi) = (\mathrm{Tr}\circ u)(\varphi)$ est aussi continue sur $S_n(I)$.

Convexité des fonctions de matrices symétriques

20) Soit $U \in \mathscr{U}_S$. Soit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U = {}^t\Omega S\Omega$. Notons $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de Ω.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a $[U]_{k,k} = {}^tC_k\,(SC_k) = {}^tC_kSC_k$ où de plus $C_k \in \Sigma$. D'après la question 12), $[U]_{k,k} \in [\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S)), \mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S))]$. De plus, par définition de $S_n(I)$, $\mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(S))$ et $\mathrm{Max}(\mathrm{Sp}(S))$ sont dans I. Donc, puisque I est un intervalle, $[U]_{k,k} \in I$.

Posons $S = \Omega_0 D^t\Omega_0$ où $\Omega_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathrm{Sp}_\uparrow(S)$.
Soient $U \in \mathscr{U}_S$ puis $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U = {}^t\Omega S\Omega = ({}^t\Omega\Omega_0)\,D\,({}^t\Omega\Omega_0)$. Notons C_1, ..., C_n, les colonnes de ${}^t\Omega\Omega_0$ et pour $j \in [\![1, n]\!]$, posons $C_j = (c_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$. Puisque la matrice ${}^t\Omega\Omega_0$ est orthogonale,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f([U]_{k,k}) &= \sum_{k=1}^{n} f\left({}^tC_kDC_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i,k}^2\lambda_i\right)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{i,k}^2 f(\lambda_i)\right) \text{ (car } \forall i\in[\![1,n]\!],\ c_{i,k}^2\geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} c_{i,k}^2 = 1 \text{ et f est convexe sur I)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{i,k}^2\right) f(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\\
&= v(f)(S).
\end{aligned}
$$

De plus, pour $\Omega = \Omega_0$ de sorte que $U = D$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f([U]_{k,k}) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) = v(f)(S)$.

Ceci montre que $\mathrm{Max}\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f([U]_{k,k}),\ U \in \mathscr{U}_S\right\} = v(f)(S)$.

21) Soient $(A, B) \in (S_n(I))^2$ et $t \in [0, 1]$. Alors, $(1-t)A+tB \in S_n(I)$ d'après la question 13). Posons $(1-t)A+tB = \Omega D^t\Omega$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D_n(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
v(f)((1-t)A+tB) &= \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\left[{}^t\Omega((1-t)A+tB)\Omega\right]_{k,k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} f\left((1-t)\left[{}^t\Omega A\Omega\right]_{k,k} + t\left[{}^t\Omega B\Omega\right]_{k,k}\right)
\end{aligned}
$$

D'après la question 20), pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[{}^t\Omega A\Omega]_{k,k}$ et $[{}^t\Omega B\Omega]_{k,k}$ sont dans I. Puisque f est convexe sur I,

$$
\begin{aligned}
v(f)((1-t)A+tB) &= \sum_{k=1}^{n} f\left((1-t)\left[{}^t\Omega A\Omega\right]_{k,k} + t\left[{}^t\Omega B\Omega\right]_{k,k}\right)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} (1-t)f\left(\left[{}^t\Omega A\Omega\right]_{k,k}\right) + tf\left(\left[{}^t\Omega B\Omega\right]_{k,k}\right)\\
&= (1-t)\sum_{k=1}^{n} f\left(\left[{}^t\Omega A\Omega\right]_{k,k}\right) + t\sum_{k=1}^{n} f\left(\left[{}^t\Omega B\Omega\right]_{k,k}\right)\\
&\leqslant (1-t)\,v(f)(A) + t\,v(f)(B) \text{ (d'après la question 20) et puisque } t\geqslant 0 \text{ et } 1-t\geqslant 0).
\end{aligned}
$$

22) D'après la question 21), si f est convexe sur I, alors $v(f)$ est convexe sur $S_n(I)$.

Réciproquement, supposons $v(f)$ convexe sur $S_n(I)$. En particulier, pour tout $(x, y) \in I^2$ (de sorte que xI_n et yI_n sont dans $S_n(I)$) et tout réel $t \in [0, 1]$,

$$\nu(f)\left((1-t)xI_n + tyI_n\right) \leqslant (1-t)\nu(f)\left(xI_n\right) + t\nu(f)\left(yI_n\right)$$

ou encore

$$nf((1-t)x + ty) \leqslant n(1-t)f(x) + ntf(y)$$

ou enfin

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Donc, f est convexe sur I.

