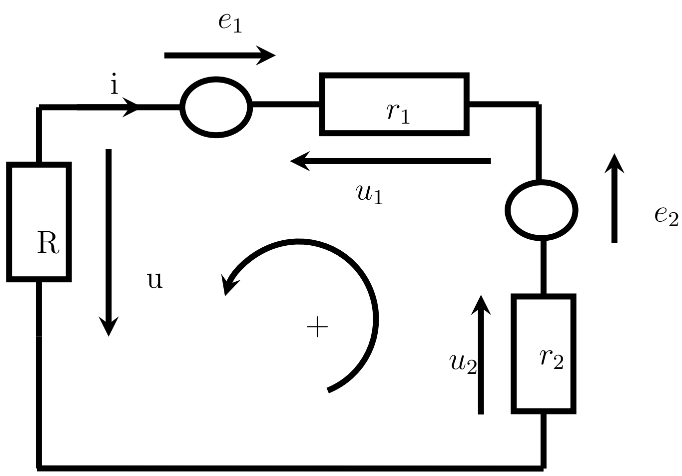
Théorèmes de base et modélisation des réseaux lineaires

Table des matières

Un réseau électrique est un système de dipôles électrocinétiques,reliées entre eux par des fils conducteurs de résistance négligeable . Ce réseau est dit lineaire lorsqu'il ne fait intervenir que des dipôles actifs (source de tension ou de courant) et passifs (résistances...) lineaires .

1 Réseau à une maille : Loi de Pouillet

Considérons la maille suivante :



Loi des mailles : $u + u_1 + u_2 - e_1 + e_2 = 0 \Rightarrow Ri + r_1 i + r_2 i - e_1 + e_2 = 0$

$$\boxed{i = \frac{e_1 - e_2}{R + r_1 + r_2}}$$

• Généralisation : Loi de Pouillet
Pour une maille comportant $D_k(e_k, r_k)$ générateurs et d'autres resistors R la loi de Pouillet s'écrit sous la forme :

$$\boxed{i = \frac{\sum_k \varepsilon_k e_k}{R + \sum_k r_k}}$$

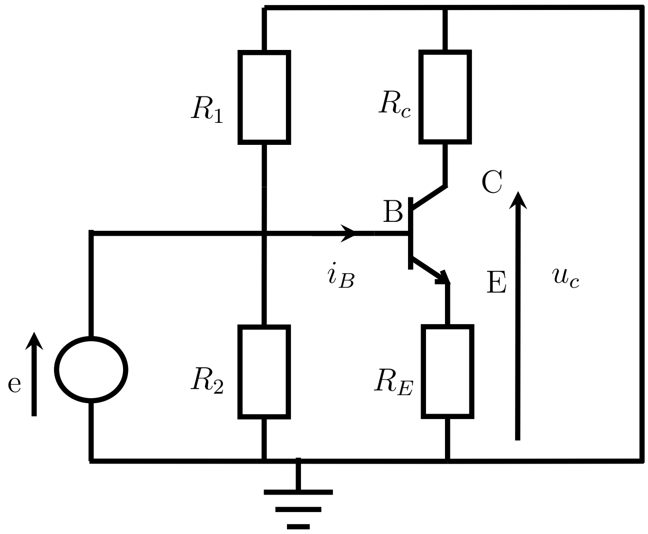
$\varepsilon_k = +1$ pour e_k suivant le sens de i
$\varepsilon_k = -1$ pour le cas contraire

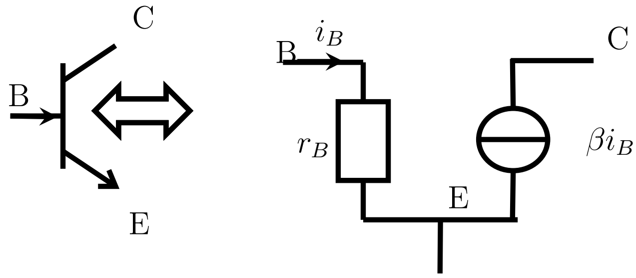
2 Réseau quelconque : Lois de kirchhoff

Pour déterminer i_k dans un réseau quelconque on utilise les lois de kirchhoff

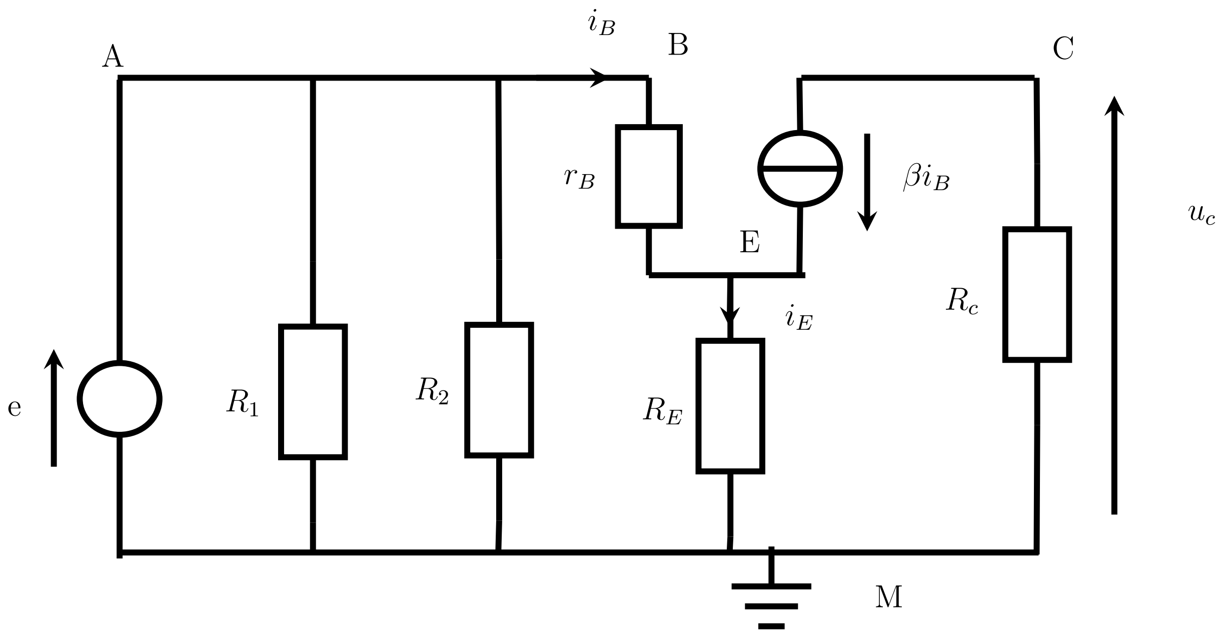
- Loi des Noeuds : $\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$
- Loi des mailles : $\sum_k \varepsilon_k u_k = 0$

• Application : Circuit comportant un transistor





•Exprimer la tension u_c en fonction de e, β, R_c, R_E et r_B



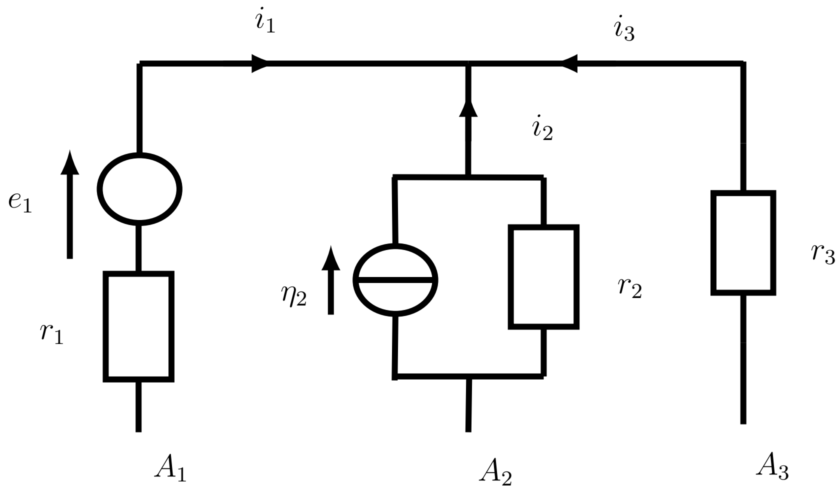
La loi des Noeuds au point E : $i_E = \beta i_B + i_B = (\beta + 1)i_B$
La maille $ABEMA$: $e = r_B i_B + R_E i_E = [r_B + (\beta + 1)R_E]i_B$
$u_c = -\beta i_B R_c$

$$\boxed{u_c = -\frac{\beta R_c}{r_B + (\beta + 1)R_E} e}$$

3 Potentiel de noeud-théorème de Millman

3.1 Loi des noeuds en termes de potentiels

Considérons le montage suivant :



(e_1, r_1) générateur de tension
(η_2, r_2)générateur de courant
v_N le potentiel au noeud N (commune entre les 3 branches)
v_k le potentiel au noeud A_k
on a $v_1 - v_N = r_1 i_1 - e_1$
$i_1 = g_1(e_1 + v_1 - v_N)$
$i_2 = \eta_2 + g_2(v_2 - v_N))$
$i_3 = g_3(v_3 - v_N)$
la loi des noeuds au pt$N$: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$
$\Rightarrow g_1(v_1 - v_N) + g_2(v_2 - v_N) + g_3(v_3 - v_N) + g_1 e_1 + \eta_2 = 0$

• Généralisation

Pour n branches (d'indice k) parvenant en N et comportant éventuellement des sources de tension ou de courant la relation se généralise

$$\boxed{\sum_k g_k[(V_k - V_N) + \varepsilon_k e_k] + \sum_k \varepsilon_k \eta_k = 0}$$

$\varepsilon_k = +1$ si e_k ou η_k orienté vers N .

3.2 Théorème de Millman

Il s'agit d'une variante de la loi de des noeuds en terme de potentiel
$(\sum_k g_k)V_N = \sum_k g_k(V_k + \varepsilon_k e_k) + \sum_k \varepsilon_k \eta_k$

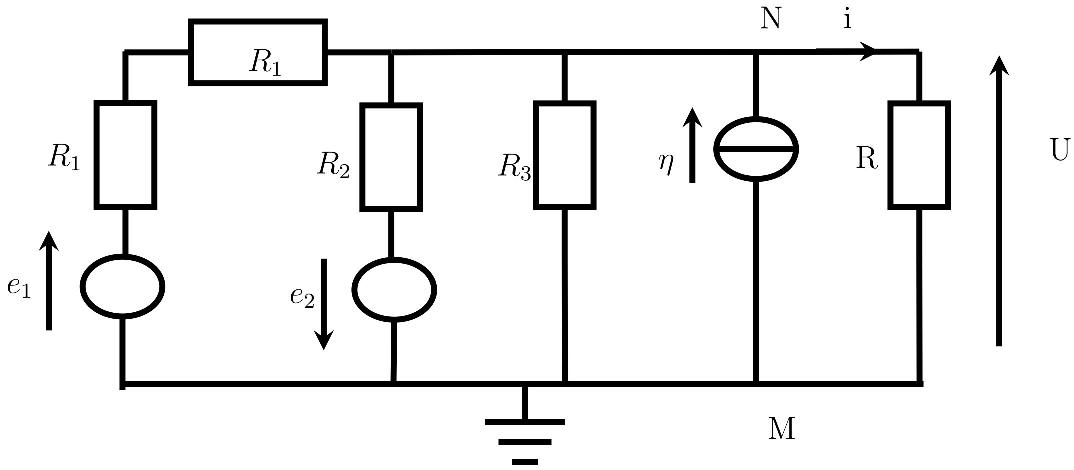
$$\boxed{V_N = \frac{\sum_k g_k(V_k + \varepsilon_k e_k) + \sum_k \varepsilon_k \eta_k}{\sum_k g_k}}$$

$\varepsilon_k = 1$ si $e_k$ou η_k orientés vers N
En pratique les points A_k sont reliés à la masse $V_k = 0$ donc le théorème de Millman devient :

$$\boxed{V_N = V_N - V_{masse} = \frac{\sum_k g_k \varepsilon_k e_k + \sum_k \varepsilon_k \eta_k}{\sum_k g_k}}$$

• Application

Exprimer l'intensité i traversant la résistance de charge R en fonction des composantes du réseau



Théorème de Millman $u = V_N - V_M = \dfrac{\dfrac{e_1}{2R_1} - \dfrac{e_2}{R_2} + \eta}{\dfrac{1}{2R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R}} = Ri$

$$\boxed{i = \frac{1}{R}\frac{\dfrac{e_1}{2R_1} - \dfrac{e_2}{R_2} + \eta}{\dfrac{1}{2R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R}}}$$

4 Modélisation des réseaux lineaires : théorèmes de bases

4.1 superposition des états-théorème d'Helmoltz

L'état éléctrique d'un réseau lineaire comportant une distribution quelconque de sources (tension ou courant) est obtenu en superposant les états associés à chaque source supposée seule dans le réseau .

- l'intensité du courant circulant dans une branche est la somme des intensités produites par chaque source supposée seule (on éteint les autres sources) .
- la tension aux bornes d'un dipôle est la somme des tensions produites par chaque source supposée seule .

• Remarque : En pratique on éteint une source indépendante (libre) de manière suivante :

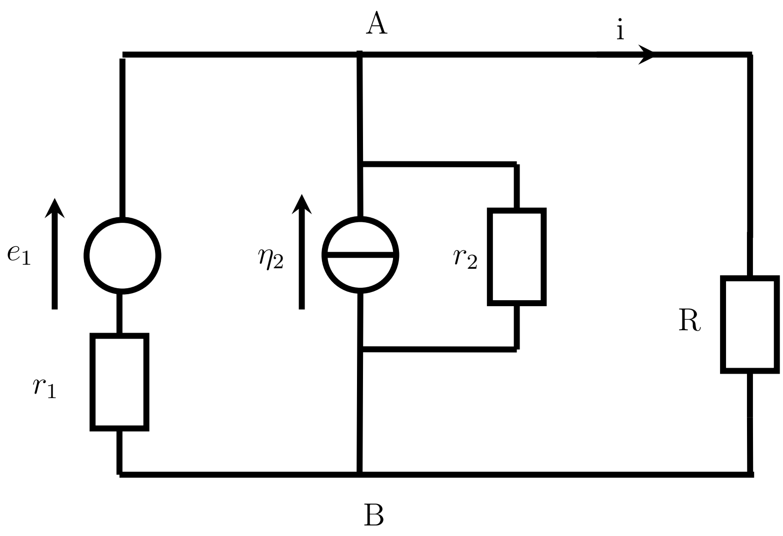
- source de tension est remplacée par un court circuit (fil conducteur)
- source de courant est remplacée par un circuit ouvert(coupe-circuit)

• Application

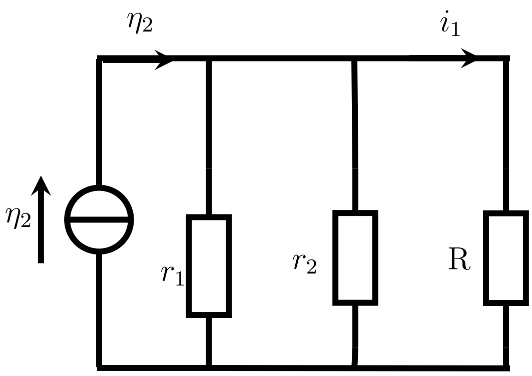
Exprimer l'intensité i du courant circulant dans la résistance R en superposant deux états éléctriques du réseau .

- Etat 1 $(e_1 = 0, \eta_2)$ correspond au courant i_1
- Etat 2 $(e_1, \eta_2 = 0)$ correspond au courant i_2

$$\boxed{i = i_1 + i_2}$$

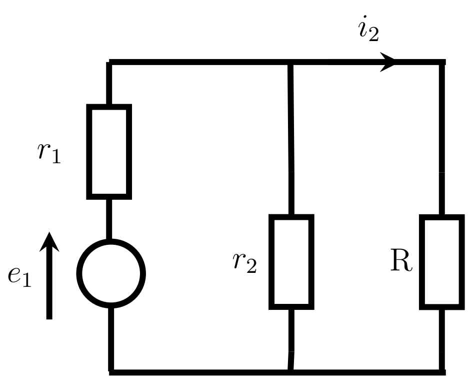


- si on éteint la source e_1 on obtient un diviseur de courant

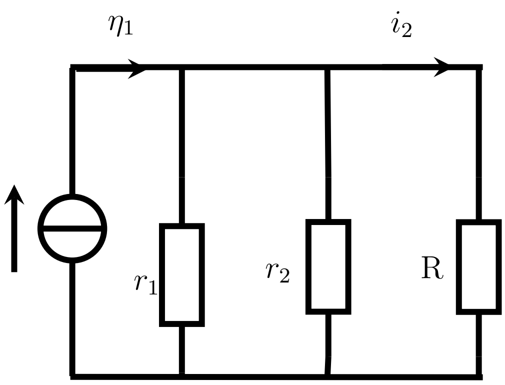


$$\boxed{i_1 = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} i}$$

- pour l'état 2 on utilise le modèle de Norton



$\Longleftrightarrow$ $\eta_1 = \frac{e_1}{r_1}$



$$\boxed{i_2 = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \frac{e_1}{r_1}}$$

Donc

$$\boxed{i = i_1 + i_2 = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}(\frac{e_1}{r_1}+\eta_2)}$$

4.2 Théorème de Thevenin

Un réseau dipôlaire lineaire,entre deux bornes A et B,peut être modélisé par une source de tension ou générateur de Thevenin .

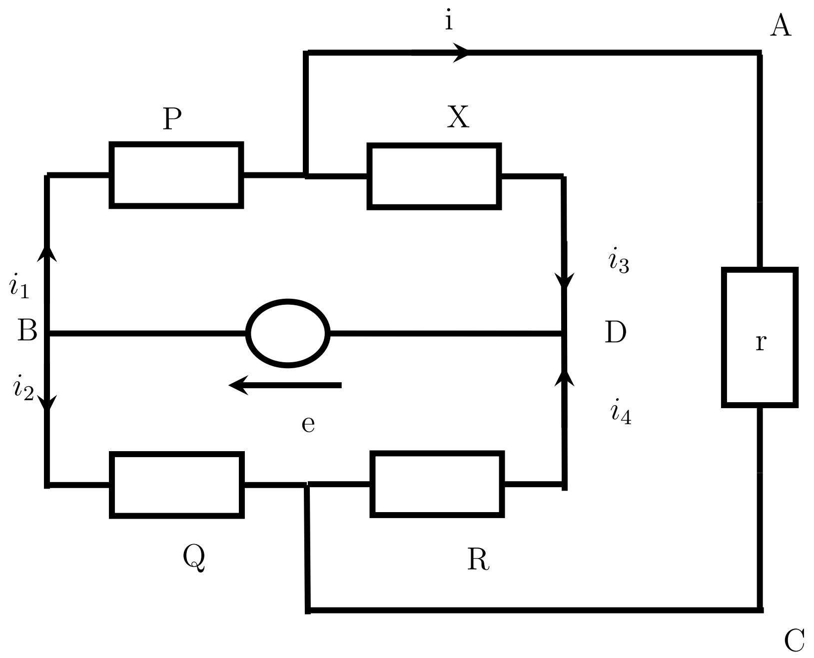
- de f.e.m e_{eq} égale à la tension en circuit ouvert entre A et B : $e_{eq} = (u_{AB})_0$
- de résistance interne égale à la résistance équivalente R_{eq} du réseau dipôlaire passif (aprés extinction des sources) entre A et B .

4.3 Théorème de Norton

Un réseau dipôlaire lineaire,entre A et B,peut être modélisé par une source de courant ou générateur de Norton :

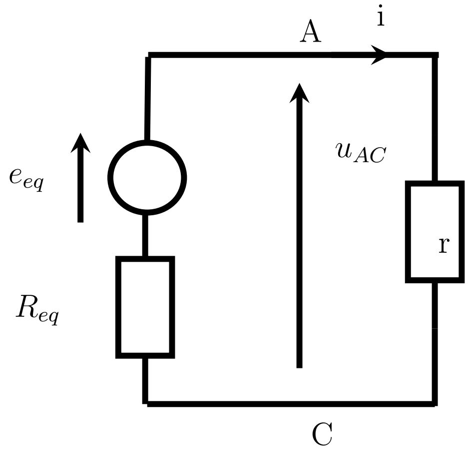
- de C.e.m η_{eq} égale au courant de court-circuit,entrant en B dans le réseau,A et B étant reliées par un fil conducteur.
- de conductance $G_{eq} = \dfrac{1}{R_{eq}}$ (R_{eq} en parallèle avec la source libre) .

4.4 Application : pont de Wheatston

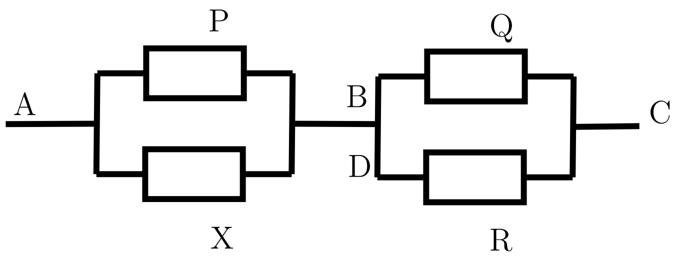


Le pont de Wheatston est dit équilibré lorsque le courant i qui circule dans le galvanomètre de résistance r est nul .

4.4.1 Modélisation du pont par le générateur de Thevenin (e_{eq}, R_{eq})



- Calcul de e_{eq} $e_{eq} = (u_{AC})_0$ le circuit est ouvert entre A et C (en enlève la branche AC)
  $i_2 = i_4$ et $i_1 = i_3$
  $e = (P+X)i_1 = (Q+R)i_2$
  $e_{eq} = -Pi_1 + Qi_2 = e(\dfrac{Q}{Q+R} - \dfrac{P}{P+X}) = e\dfrac{XQ-RP}{(Q+R)(P+X)}$ c'est la f.e.m de Thevenin
- Calcul de R_{eq}

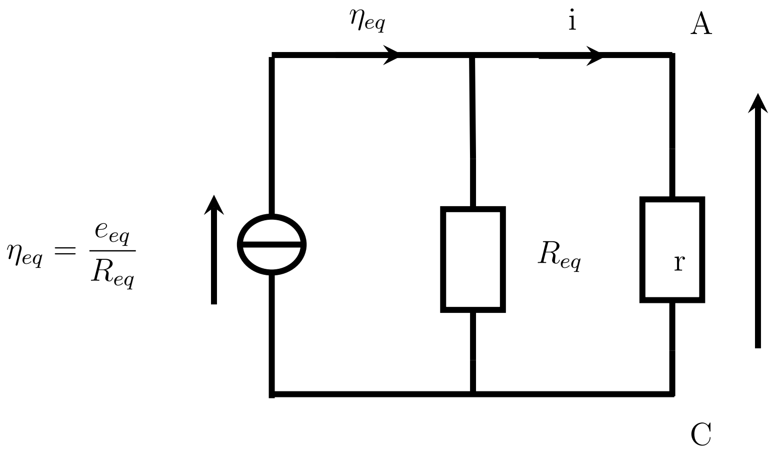


$R_{eq} = (P//X) + (Q//R) \Rightarrow R_{eq} = \dfrac{PX}{P+X} + \dfrac{RQ}{R+Q}$
Le courant $i = \dfrac{e_{eq}}{R_{eq}+r}$ loi de Pouillet
l'équilibre du pont exige $i = 0 \Rightarrow R_{eq} = 0$ donc

$$\boxed{XQ = PR}$$

• Utilité du pont : le pont permet de déterminer la valeur de la résistance X inconue

4.4.2 Modélisation de Norton



$i = \dfrac{e_{eq}}{R_{eq} + r}$

$i = 0 \Rightarrow XQ = PR$