SESSION 2020

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathscr{B}$ une base de E puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ et donc tel que $A^p = 0$. X^p est annulateur de A. Les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont racines de ce polynôme et sont donc toutes nulles. Si on pose $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$, on sait que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(A^k\right) = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right) = (0, \ldots, 0)$ puis que

$$\mathrm{Tr}\left(u^k\right) = \mathrm{Tr}\left(A^k\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0.$$

2) Si $n = 1$, $\mathscr{N}_{\mathscr{B}} = \{0\}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(E)$, nilpotent de dimension $0 = \dfrac{1(1-1)}{2}$.
On suppose dorénavant $n \geqslant 2$. Posons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$,

$$u \in \mathscr{N}_{\mathscr{B}} \Leftrightarrow \Big(u(e_1) = 0 \text{ et } \forall i \in [\![2, n]\!],\ u(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant i-1}\Big).$$

0 est un élément de $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ et si $(u, v) \in \left(\mathscr{N}_{\mathscr{B}}\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $(\lambda u + \mu v)(e_1) = \lambda u(e_1) + \mu v(e_1) = 0$ puis pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $(\lambda u + \mu v)(e_i) = \lambda u(e_i) + \mu v(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant i-1}$ puis $\lambda u + \mu v \in \mathscr{N}_{\mathscr{B}}$. Ceci montre que $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(E)$.

L'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}$ est un isomorphisme. Donc

$$\dim\left(\mathscr{N}_{\mathscr{B}}\right) = \dim\left(\varphi\left(\mathscr{N}_{\mathscr{B}}\right)\right) = \dim\left(T_n^{++}(\mathbb{R})\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(car une base de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ est $\left(E_{i,j}\right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$).

Soient $u \in \mathscr{N}_{\mathscr{B}}$. Alors, $\mathrm{Sp}(u) = (0, \ldots, 0)$ puis $\chi_u = X^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $u^n = 0$ et donc u est nilpotent.

Finalement, dans tous les cas, $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(E)$, nilpotent, de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

3) Si $n = 1$, les éléments de $\mathscr{L}(E)$ sont les homothéties et il existe donc un et un seul élément de $\mathscr{L}(E)$ nilpotent, à savoir 0, qui est nilpotent d'indice 1. Dans ce cas, $\{\nu(u),\ u \in \mathscr{N}_{\mathscr{B}}\} = \{\nu(u),\ u \in \mathscr{N}(E)\} = \{1\}$.

Dorénavant, on suppose $n \geqslant 2$. Soit u un endomorphisme nilpotent. On a vu que $u^n = 0$. Donc, $\nu(u) \leqslant n$. Ceci montre que

$$\{\nu(u),\ u \in \mathscr{N}_{\mathscr{B}}\} \subset \{\nu(u),\ u \in \mathscr{N}(E)\} \subset [\![1, n]\!].$$

Réciproquement, soit $k \in [\![1, n]\!]$. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(e_1) = \ldots = u(e_{n-k}) = 0$ et pour $i \in [\![n-k+1, n]\!]$, $u(e_i) = e_{i-(n-k)}$. On a $u^k(e_1) = \ldots = u^k(e_n) = 0$ (par récurrence sur k) et donc $u^k = 0$. Mais $u^{k-1}(e_n) = e_1 \neq 0$ et donc $u^{k-1} \neq 0$. Par suite, $u \in \mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ et $\nu(u) = k$.

Ceci montre que $[\![1, n]\!] \subset \{\nu(u),\ u \in \mathscr{N}_{\mathscr{B}}\} \subset \{\nu(u),\ u \in \mathscr{N}(E)\} \subset [\![1, n]\!]$ et finalement que

$$\{\nu(u),\ u \in \mathscr{N}_{\mathscr{B}}\} = \{\nu(u),\ u \in \mathscr{N}(E)\} = [\![1, n]\!].$$

4) Supposons par l'absurde la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ liée. Il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p \setminus (0, \ldots, 0)$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x) = 0$. Soit $j = \mathrm{Min}\{i \in [\![0, p-1]\!] / \lambda_i \neq 0\}$. Par définition de j, $\displaystyle\sum_{i=j}^{p-1} \lambda_i u^i(x) = 0$. En prenant les images des deux membres de cette égalité par u^{p-1-j} et en tenant compte de $u^i(x) = 0$ pour $i \geqslant p$, on obtient $\lambda_j u^{p-1}(x) = 0$. Ceci est impossible car $\lambda_j \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Donc, la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre.

De même, si on suppose la famille $\left(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y)\right)$ libre, on a en particulier $u^{q-1}(y) \neq 0$ et donc la famille $\left(y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y)\right)$ est libre. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{q-1}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} \mu_i u^i(y) = 0$. Si $p > q$, on prend l'image des deux membres par u^q (et on ne fait rien si $p = q$). Il reste

$$0 = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^{i+q}(x) = \sum_{i=q}^{p-1} \lambda_{i-q} u^i(x).$$

Puisque la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre, ceci fournit $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-q-1} = 0$ et il reste

$$\sum_{i=p-q}^{p-1} \lambda_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} \mu_i u^i(y) = 0,$$

ce qui reste vrai si $p = q$. On prend alors l'image des deux membres u^{q-1}. On obtient $\lambda_{p-q} u^{p-1}(x) + \mu_0 u^{q-1}(y) = 0$ et donc $\lambda_{p-q} = \mu_0 = 0$ par liberté de la famille $\left(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y)\right)$ et donc $\displaystyle\sum_{i=p-q+1}^{p-1} \lambda_i u^i(x) + \sum_{i=1}^{q-1} \mu_i u^i(y) = 0$. Puis on prend l'image par u^{q-2} et on obtient $\lambda_{p-q+1} = \mu_1 = 0 \ldots$ Par récurrence descendante, on obtient $\lambda_{p-q} = \mu_0 = \lambda_{p-q+1} = \mu_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = \mu_{q-1} = 0$ et donc la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{q-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y)\right)$ est libre.

5) Pour tout $x \in E$, en tenant compte de $p \geqslant 2$, $u^{p-1}(x) = u\left(u^{p-2}(x)\right) \in \mathrm{Im}(u)$ et donc $\mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right) \subset \mathrm{Im}(u)$.
Puisque $u^p = 0$, pour tout $x \in E$, $u\left(u^{p-1}(x)\right) = 0$ puis $u^{p-1}(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Donc, $\mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et finalement $\mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right) \subset \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$.

Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Soit $z \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$. Il existe $y \in E$ tel que $z = u(y)$ et de plus $u^2(y) = u(z) = 0$. Si la famille $\left(u^{p-1}(x), z\right) = \left(u^{p-1}(x), u(y)\right)$ est libre, d'après la question précédente, la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y)\right)$ est libre. Mais ceci est impossible car cette famille est de cardinal $p+2 \geqslant n+1 > n$. Donc, la famille $\left(u^{p-1}(x), z\right)$ est liée puis $z \in \mathrm{Vect}\left(u^{p-1}(x)\right) \subset \mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)$ et finalement que $\mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$.

De plus, ce qui précède montre que $\mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right) \subset \mathrm{Vect}\left(u^{p-1}(x)\right)$ et donc $\dim\left(\mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)\right) \leqslant 1$. Puisque $u^{p-1} \neq 0$, on a aussi $\dim\left(\mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)\right) \geqslant 1$ et finalement $\dim\left(\mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)\right) = 1$.

II. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

6) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Soit $a \in E$. Soient $(z_1, z_2) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a \otimes x)(\lambda z_1 + \mu z_2) = (a|\lambda z_1 + \mu z_2)\, x = \lambda\,(a|z_1)\, x + \mu\,(a|z_2)\, x = \lambda a \otimes x\,(z_1) + \mu a \otimes x\,(z_2)$$

et donc $a \otimes x \in \mathscr{L}(E)$.

Soient $(a, b) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $z \in E$,

$$((\lambda a + \mu b) \otimes x)(z) = ((\lambda a + \mu b)\,|z) x = \lambda(a|z)x + \mu(b|z)x = (\lambda a \otimes x + \mu b \otimes x)(z)$$

et donc $(\lambda a + \mu b) \otimes x = \lambda a \otimes x + \mu b \otimes x$. L'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \to & \mathscr{L}(E) \\ & a & \mapsto & a \otimes x \end{array}$ est linéaire.

Soit $a \in E$. Puisque $x \neq 0$

$$a \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow a \otimes x = 0 \Rightarrow \forall z \in E,\ (a|z)x = 0 \Rightarrow \forall z \in E,\ a|z = 0 \Rightarrow a \in E^{\perp} = \{0\} \Rightarrow a = 0.$$

Donc, φ est injective puis φ réalise un isomorphisme de E sur $\mathrm{Im}(\varphi)$ qui est donc de dimension n. Soit $u \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Donc, il existe $a \in E$ tel que $u = a \otimes x$. Mais alors, pour tout $z \in E$, $u(z) = (a \otimes x)(z) = (a|z)x \in \mathrm{Vect}(x)$ et donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x)$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \{u \in \mathscr{L}(E) / \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x)\} = \Phi$.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E de premier vecteur x. Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $u \in \Phi$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \ldots & \alpha_n \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j E_{1,j}$. L'ensemble de ces matrices est un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n (car

de base $(E_{1,j})_{1\leqslant j\leqslant n})$ et donc $\dim(\Phi) = n$, l'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans $\mathscr{B}$ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Ainsi, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \Phi$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\Phi) < +\infty$. Donc, $\mathrm{Im}(\varphi) = \Phi = \{u \in \mathscr{L}(E)/\ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x)\}$. φ réalise donc un isomorphisme de E sur $\{u \in \mathscr{L}(E)/\ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x)\}$.

7) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Posons $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(a \otimes x)(e_i) = (a|e_i)\, x = a_i x$$

et donc, la i-ème coordonnée de $(a \otimes x)(e_i)$ dans la base $\mathscr{B}$ est $a_i x_i$. Puisque la trace de $a \otimes x$ est la somme de ces nombres, on obtient

$$\mathrm{Tr}(a \otimes x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (a|x) \text{ (car } \mathscr{B} \text{ est orthonormée).}$$

III. Deux lemmes

8) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ puis $\left(\left(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)}\right), \left(g_0^{(k)}, \dots, g_k^{(k)}\right)\right) \in \left((\mathscr{L}(E))^k\right)^2$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} t^i g_i^{(k)}$.
Soit $j \in [\![0, k]\!]$. En dérivant l'égalité précédente j fois puis en évaluant en $t = 0$, on obtient $j!f_j^{(k)} = j!g_j^{(k)}$ puis $f_j^{(k)} = g_j^{(k)}$.
Ceci montre l'unicité de $\left(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)}\right)$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $\left(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)}\right) \in (\mathscr{L}(E))^k$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}$ où de plus $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

- $(u+tv)^1 = u+tv = f_0^{(1)} + tf_1^{(1)}$ où $f_0^{(1)} = u = u^1$ et $f_1^{(1)} = v = \sum_{i=0}^{0} u^i v^{1-i}$. L'affirmation est donc vraie quand $k = 1$.

- Soit $k \geqslant 1$. Supposons qu'il existe $\left(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)}\right) \in (\mathscr{L}(E))^k$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}$ où de plus $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$. Alors, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}(u+tv)^{k+1} &= (u+tv)^k(u+tv) = \left(\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}\right)(u+tv) \\ &= \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} u + \sum_{i=0}^{k} t^{i+1} f_i^{(k)} v = f_0^{(k)} u + \sum_{i=1}^{k} t^i \left(f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v\right) + t^{k+1} f_k^{(k)} v \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} t^i f_i^{(k+1)}\end{aligned}$$

  où $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u = u^{k+1} \in \mathscr{L}(E)$ puis pour $i \in [\![1, k]\!]$, $f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v \in \mathscr{L}(E)$ et $f_{k+1}^{(k+1)} = f_k^{(k)} v \in \mathscr{L}(E)$.
  De plus,

$$f_1^{(k+1)} = f_1^{(k)} u + f_0^{(k)} v = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{(k+1)-1-i} + u^k v = \sum_{i=0}^{(k+1)-1} u^i v u^{(k+1)-1-i}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

9) Puisque $\mathcal{V}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(E)$, pour tout réel t, $u + tv \in \mathcal{V}$. Par définition de p, pour tout réel t,

$$\sum_{i=0}^{p-1} t^i f_i^{(p)} = (u+tv)^p = 0_{\mathscr{L}(E)} = \sum_{i=0}^{p-1} t^i 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Par unicité, on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = f_1^{(p)} = 0$.

10) Soit $k \in \mathbb{N}$. $\mathrm{Tr}\left(f_1^{(k+1)}\right) = \mathrm{Tr}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} u^i v u^{k-i}\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \mathrm{Tr}\left(u^i v u^{k-i}\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \mathrm{Tr}\left(u^{k-i} u^i v\right) = (k+1)\mathrm{Tr}\left(u^k v\right)$.
D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u + tv \in \mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$ et donc, d'après la question 1, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = \mathrm{Tr}\left((u+tv)^{k+1}\right) = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \mathrm{Tr}\left(f_i^{(k+1)}\right).$$

En particulier, le coefficient de t est nul ce qui fournit $0 = \mathrm{Tr}\left(f_1^{(k+1)}\right) = (k+1)\mathrm{Tr}\left(u^k v\right)$ et finalement $\mathrm{Tr}\left(u^k v\right) = 0$. Ceci établit la validité du lemme A.

11) Soit $y \in E$. Pour tout entier naturel non nul k, $\left(u + \dfrac{1}{k}v\right)^{p-1}(y) = u^{p-1}(y) + \dfrac{1}{k} f_1^{(p-1)}(y) + \displaystyle\sum_{i=2}^{p-1} \dfrac{1}{k^i} f_i^{(p-1)}(y)$ puis

$$f_1^{(p-1)}(y) = \lim_{k\to+\infty} k\left(\left(u + \frac{1}{k}v\right)^{p-1}(y) - u^{p-1}(y)\right).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, puisque $u + \dfrac{1}{k}v \in \mathcal{V}$ et $u \in \mathcal{V}$, $k\left(\left(u + \dfrac{1}{k}v\right)^{p-1}(y) - u^{p-1}(y)\right) \in K(\mathcal{V})$. $K(\mathcal{V})$ est un fermé de l'espace de dimension finie E en tant que sous-espace de E. Donc, la limite de la suite convergente $\left(k\left(\left(u + \dfrac{1}{k}v\right)^{p-1}(y) - u^{p-1}(y)\right)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $K(\mathcal{V})$ est encore un élément de $K(\mathcal{V})$ ou encore $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

Ensuite, $uf_1^{(p-1)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} u^j v u^{p-1-j} = f_1^{(p)} - vu^{p-1} = -vu^{p-1}$ d'après la question 9. Soit alors $x \in \mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u^{p-1}(y)$ puis

$$v(x) = v\left(u^{p-1}(y)\right) = -u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right) = u\left(-f_1^{(p-1)}(y)\right) \in u\left(K(\mathcal{V})\right)$$

12) Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. Soit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)$. Soit $y \in K(\mathcal{V})$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.

- $y = \lambda_0 x + u^0(y_0)$ avec $\lambda_0 = 0$ et $y_0 = y \in K(\mathcal{V})$. Le résultat est donc vrai quand $k = 0$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons qu'il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.
Puisque $y_k \in K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, il existe $\mu_k \in \mathbb{R}$ et $v_k \in \mathcal{V}$ tel que $y_k = \mu_k x + v_k(x)$ de sorte que

$$y = \lambda_k x + u^k\left(\mu_k x + v_k(x)\right) = \lambda_k x + \mu_k u^k(x) + u^k\left(v_k(x)\right).$$

Si $k = 0$, $\lambda_k x + \mu_k u^k(x) = \lambda_{k+1} x$ avec $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \mu_k$. Si $k \geqslant 1$, puisque $x \in \mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)$ et que $u^p = 0$, on a $u^k(x) = 0$ et donc $\lambda_k x + \mu_k u^k(x) = \lambda_{k+1} x$ avec $\lambda_{k+1} = \lambda_k$. Dans tous les cas, il existe $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$y = \lambda_{k+1} x + u^k\left(v_k(x)\right).$$

Ensuite, puisque $x \in \mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)$ et $v_k \in \mathcal{V}$, $v_k(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ d'après la question 11. Donc, il existe $y_{k+1} \in \mathcal{K}(\mathcal{V})$ tel que $v_k(x) = u\left(y_{k+1}\right)$ puis

$$y = \lambda_{k+1} x + u^{k+1}\left(y_{k+1}\right).$$

Le résultat est démontré par récurrence.

En particulier, pour $k = p$, en tenant compte de $u^p = 0$, on a $y = \lambda_p x \in \mathrm{Vect}(x)$. Ceci montre que $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}(x)$.

Puisque $x \in \mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right)$ et que $u^p = 0$, on a $u(x) = 0$. Soit alors $v \in \mathcal{V}$. D'après la question précédente,

$$v(x) \in u(K(\mathcal{V})) \subset u(\mathrm{Vect}(x)) = \mathrm{Vect}(u(x)) = \{0\}$$

et donc $v(x) = 0$. Ceci montre le lemme B.

IV. Démonstration du théorème de Gerstenhaber

13) • L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \to & E \\ v & \mapsto & v(x) \end{array}$ est linéaire. Donc, $\mathcal{W} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}x = \mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E.

• L'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \to & \mathscr{L}(H) \\ u & \mapsto & \overline{u} \end{array}$ est linéaire. Donc, $\overline{\mathcal{V}} = \mathrm{Im}(\psi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(H)$ et $\mathcal{Z} = \mathrm{Ker}(\psi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$.

14) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{W})$ puis

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathrm{Ker}(\psi)) + \dim(\mathrm{Im}(\psi)) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\overline{\mathcal{V}}).$$

15) D'après la question 6, l'application $\Phi : a \mapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E sur $\{u \in \mathscr{L}(E)/ \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x)\}$. Soit $u \in \mathcal{Z}$. Alors, pour tout $z \in H$, $\pi(u(z)) = 0$ et donc $u(z) \in H^\perp = \mathrm{Vect}(x)$. Par suite, $\mathcal{Z}$ est un sous-espace de $\{u \in \mathscr{L}(E)/ \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(x)\}$. Soit $L = \Phi^{-1}(\mathcal{Z})$. Alors, L est un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathcal{Z} = \Phi(L) = \{a \otimes x, \ a \in L\}$. De plus, Φ étant un isomorphisme, $\dim(L) = \dim(\mathcal{Z})$.

Soit $a \in L$. D'après la question 7, $(a|x) = \mathrm{Tr}(a \otimes x) = 0$ (d'après la question 1 car $a \otimes x \in \mathcal{N}$). Donc, $\forall a \in L$, $(a|x) = 0$ et ceci montre que $x \in L^\perp$.

16) Soient $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$. Soit $v = a \otimes x \in \mathcal{Z} \subset \mathcal{V}$. Pour tout $y \in E$,

$$u \circ v(y) = u\left(a \otimes x(y)\right) = u((a|y)x) = (a|y)u(x) = a \otimes u(x)(y)$$

et donc $u \circ v = a \otimes (u(x))$. Puisque u et v sont dans $\mathcal{V}$, le lemme A et la question 7 permettent d'affirmer que

$$0 = \mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(a \otimes u(x)) = (a|u(x)).$$

Donc, pour tout $u \in \mathcal{V}$ et tout $a \in L$, $u(x) \in a^\perp$ puis pour tout $u \in \mathcal{V}$, $u(x) \in L^\perp$ et finalement $\mathcal{V}x \subset L^\perp$.

De même, pour $k \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, (en remplaçant u par u^k), $0 = \mathrm{Tr}(u^k \circ v) = \left(a|u^k(x)\right)$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$, $u^k(x) \in L^\perp$.

17) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si, par l'absurde, $\lambda x \in \mathcal{V}x$, alors il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Puisque $x \neq 0$, λ est une valeur propre non nulle de u. Ceci contredit le fait qu'un endomorphisme nilpotent admet 0 pour unique valeur propre. Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda x \notin \mathcal{V}$.

Donc, $\mathrm{Vect}(x) \cap \mathcal{V}x = \{0\}$ ou encore la somme $\mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$ est directe. De plus, $\mathrm{Vect}(x)$ et $\mathcal{V}x$ sont des sous-espaces de $L^\perp$ d'après les deux questions précédentes. Par suite,

$$n = \dim(L) + \dim\left(L^\perp\right) \geqslant \dim(L) + \dim(\mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x) = \dim(L) + \dim(\mathrm{Vect}(x)) + \dim(\mathcal{V}x)$$

et donc

$$\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) \leqslant n - \dim(\mathrm{Vect}(x)) = n - 1.$$

18) Soit $u \in \mathcal{W}$. Alors, $u \in \mathcal{V}$ et $u(x) = 0$. Pour $y \in E$, posons $y = y_1 + z$ avec $y_1 \in \mathrm{Vect}(x)$ et $z \in H$.

$$u(y) = u\left(y_1\right) + u(z) = u(z) = u(\pi(y)).$$

Donc, $u \circ \pi = u$.

Soit alors $z \in H$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\overline{u})^k(z) = \pi\left(u^k(z)\right)$.

- $\pi\left(u^0(z)\right) = \pi(z) = z$ car $z \in H$ et donc $\pi\left(u^0(z)\right) = (\overline{u})^0(z)$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $(\overline{u})^k(z) = \pi\left(u^k(z)\right)$. Alors,

$$\begin{aligned}
(\overline{u})^{k+1}(z) &= \overline{u}\left((\overline{u})^k(z)\right) \\
&= \overline{u}\left(\pi\left(u^k(z)\right)\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \pi\left(u\left(\pi\left(u^k(z)\right)\right)\right) = \pi\left(u\left(u^k(z)\right)\right) \text{ (car } u \circ \pi = u) \\
&= \pi\left(u^{k+1}(z)\right).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $z \in \mathsf{H}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\overline{u})^k(z) = \pi\left(u^k(z)\right)$.

Soit $u \in \mathcal{W}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. Alors, $\overline{u}^p = \pi \circ u^p = 0$ et donc $\overline{u}$ est nilpotent. Ainsi, tout élément de $\overline{\mathcal{V}}$ est nilpotent. Donc, $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(\mathsf{H})$ d'après la question 13, nilpotent d'après ce qui précède.

19)

$$\begin{aligned}
\dim(\mathcal{V}) &= \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim\left(\overline{\mathcal{V}}\right) \text{ (d'après la question 14)} \\
&= \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathsf{L}) + \dim\left(\overline{\mathcal{V}}\right) \text{ (d'après la question 15)} \\
&\leqslant n - 1 + \dim\left(\overline{\mathcal{V}}\right) \text{ (d'après la question 17)} \\
&\leqslant n - 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \text{ (car } \dim(\mathsf{H}) = n-1 \text{ et par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n-1)}{2}.
\end{aligned}$$

20) $\dim\left(\overline{\mathcal{V}}\right) = \dim(\mathcal{V}) - (\dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathsf{L})) \geqslant \dim(\mathcal{V}) - (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$. Puisque d'autre part, $\dim\left(\overline{\mathcal{V}}\right) \leqslant \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$, on en déduit que $\dim\left(\overline{\mathcal{V}}\right) = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$.

Ensuite, on sait d'après la question 17 que la somme $\mathrm{Vect}(x) + \mathcal{V}x$ est directe. Donc,

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim(\mathsf{L}) &= 1 + \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathsf{L}) = 1 + \dim(\mathcal{V}) - \dim\left(\overline{\mathcal{V}}\right) \\
&= 1 + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = n.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ est un sous-espace de $\mathsf{L}^{\perp}$ tel que $\dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) = n - \dim(\mathsf{L}) = \dim\left(\mathsf{L}^{\perp}\right) < +\infty$. Donc, $\mathsf{L}^{\perp} = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. Mais alors, d'après la question 16, pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $v^k(x) \in \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

21) $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent de $\mathscr{L}(\mathsf{H})$ où H est de dimension $n-1$. Par hypothèse, de récurrence, il existe une base $\mathsf{B}_{\mathsf{H}} = (e_2, \ldots, e_n)$ de H dans laquelle tout élément de $\overline{\mathcal{V}}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte. Puisque d'autre part, $\dim\left(\overline{\mathcal{V}}\right) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = \dim\left(\mathsf{T}_n^{++}(\mathbb{R})\right)$, $\overline{\mathcal{V}}$ est exactement l'espace des endomorphismes de H représenté dans B_{H} par une matrice triangulaire supérieure stricte.

D'après la question 3 et par définition de $\overline{\mathcal{V}}$, il existe $u \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ tel que $\overline{u}$ est nilpotent d'indice $n-1$. Mais alors, $\pi \circ u^{n-2} = \overline{u}^{n-2} \neq 0$ et donc u est d'indice de nilpotence supérieur ou égal à $n-1$. Ceci montre que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$.

Supposons de plus $\mathcal{V}x = \{0\}$. Puisque $e_1 = x$ est un vecteur non nul de $\mathsf{H}^{\perp}$, la famille $\mathsf{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n) = \{x\} \cup \mathsf{B}_{\mathsf{H}}$ est une base de E.
Puisque $\mathcal{V}x = \{0\}$, pour tout $u \in \mathcal{V}$, $u(x) = 0$ et donc, pour tout $u \in \mathcal{V}$, la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}}(u)$ est nulle. Mais alors, pour tout $u \in \mathcal{V}$, $\mathrm{Mat}_{\mathsf{B}}(u)$ est triangulaire supérieure stricte.

22) Par définition du nilindice p de $\mathcal{V}$, il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ (avec $p - 1 \geqslant 1$) et donc tel que $\mathrm{Im}\left(u^{p-1}\right) \neq \{0\}$. On peut donc choisir un élément x dans $\mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$, ce que l'on fait.

Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Si $v^{p-1} = 0$, on a immédiatement $\mathrm{Im}\left(v^{p-1}\right) \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. Supposons maintenant $v^{p-1} \neq 0$. Donc, v est de nilindice égal à $p \geqslant n-1$. D'après la question 5, $\mathrm{Im}\left(v^{p-1}\right) = \mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Ker}(v)$ et de plus $\dim\left(\mathrm{Im}\left(v^{p-1}\right)\right) = 1$. Soit $j = \mathrm{Max}\left\{i \in [\![1, p-1]\!] / \ v^i(x) \neq 0\right\}$. $v^j(x)$ est dans $\mathrm{Im}(v)$ car $j \geqslant 1$ et $v^j(x) \in \mathrm{Ker}(u)$ car $v\left(v^j(x)\right) = v^{j+1}(x) = 0$ (par définition de j). Ainsi, $v^j(x)$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}\left(v^{p-1}\right)$ et finalement $\mathrm{Im}\left(v^{p-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(v^j(x)\right)$. D'après la question 20, $v^j(x) \in \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ et on a donc montré que $\mathrm{Im}\left(v^{p-1}\right) \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

23) Si $v(x) \neq 0$, alors $\mathrm{Im}\left(v^{p-1}\right) \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ d'après la question précédente. On suppose dorénavant $v(x) = 0$. Pour tout réel non nul t, $(v + tv_0)(x) = tv_0(x) \neq 0$. Pour tout réel non nul t, $v + tv_0$ est donc un élément de $\mathcal{V}$ ne s'annulant pas en x. D'après la question 22, pour tout réel non nul t, $\mathrm{Im}\,(v + tv_0)^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

Maintenant, $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ est un sous-espace de l'espace E qui est de dimension finie. Donc, $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ est un fermé de E.

Soit $y \in E$. Pour tout réel non nul t, $(v + tv_0)^{p-1}(y) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. Quand t tend vers 0, puisque $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ est un fermé de E, on obtient $v^{p-1}(y) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. On a montré que pour tout $y \in E$, $v^{p-1}(y) \in \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ et donc encore une fois, $\text{Im}\left(v^{p-1}\right) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24) Donc, s'il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$, alors pour tout $v \in \mathcal{V}$, $\text{Im}\left(v^{p-1}\right) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ puis $\mathcal{V}^\bullet \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ et finalement $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. D'après le lemme B, pour tout $v \in \mathcal{V}$, $v(x) = 0$ ce qui contredit $v_0(x) \neq 0$.

Donc, il n'existe pas d'élément v_0 de $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$ ou encore pour tout $v \in \mathcal{V}$, $v(x) = 0$. Ceci achève la démonstration du théorème de Gerstenhaber.

