DNS

Sujet

Champ électrostatique et charges ponctuelles

On donne permittivité du vide : $\varepsilon_0=8{,}854187817...\times 10^{-12}\,F.m^{-1}$. On adopte souvent une valeur approchée par $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx 9\,10^9$.

I. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle q est placée en un point P .

On considère une charge ponctuelle q_0 placée en M .On pose $\vec{r}=\overrightarrow{PM}$ et $\|\vec{r}\|=r$ (r désigne donc une norme).

1. Donner l'expression vectorielle de la force subie par M en fonction de q , q_0 , $\overrightarrow{r_{PM}}$, r , ε_0 (Loi de Coulomb).
2. Rappeler la définition du champ électrostatique $\vec{E}$ et en déduire l'expression, issue de la loi de Coulomb, du champ créé par la charge ponctuelle q au point M . Préciser sur un schéma le sens du champ selon que la charge est positive ou négative.
3. On travaille en coordonnées sphériques (r,θ,φ) de centre P . En utilisant l'expression connue du gradient en coordonnées sphériques

$\overrightarrow{grad}\, f(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$, retrouver l'expression du potentiel électrostatique $V(r,\theta,\varphi)$ créé par la charge ponctuelle q au point M . La tradition est de rendre nulle la constante d'intégration. En quels points le potentiel créé par une charge ponctuelle est-il alors considéré comme nul ?

4. L'énergie potentielle E_P dont dérive une force conservative $\vec{F}$ peut être définie à partir de l'expression $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}\, E_P$. En déduire soigneusement l'expression de l'énergie potentielle E_P de la charge q_0 en fonction du potentiel électrostatique créé par q . Préciser le raisonnement en ce qui concerne la constante arbitraire d'intégration.

II. Champ électrostatique créé par deux charges ponctuelles identiques

On travaille en coordonnées cartésiennes d'origine O . On considère une charge $q_1=q>0$ placée en P_1 $(x=a, y=0, z=0)$ et une autre charge ponctuelle identique $q_2=q$ placée en P_2 $(x=-a, y=0, z=0)$. On s'intéresse au champ en un point $M(x,y,z)$.

A. Allure des lignes de champ

5. Rappeler les résultats essentiels concernant la symétrie pour un vecteur polaire (ou « vrai vecteur ») tel que le champ $\vec{E}$: que peut-on dire si le point M appartient à un plan de symétrie (plan passant donc obligatoirement par le point M étudié...); que peut-on dire si le point M appartient à un plan d'antisymétrie ?

6. En appliquant les résultats rappelés à la question précédente, justifier la direction du champ :

   - en un point $M(x,y,z=0)$
   - en un point $M(x=0,y,z=0)$
   - en un point $M(x,y=0,z=0)$
   - au point O $(x=0, y=0, z=0)$

7. On étudie uniquement le champ dans le plan $z=0$.

   - En utilisant, en plus des résultats précédents, que près d'une charge, la configuration du champ tend (direction, sens, norme) vers celle créée par cette seule charge,

     préciser sur un schéma le sens des lignes de champ pour les deux axes Ox et Oy

     donner l'allure des autres lignes de champ

   - On sait que deux lignes de champ ne peuvent se croiser. Pourquoi ? N'y a-t-il pas un problème aux points P_1 , P_2 et O ?

B. Allure des équipotentielles

8. On reprend l'étude toujours dans le plan xOy mais en partant du potentiel.

   - Que vaut le potentiel noté $V(O)$ en O ?

- Près d'une charge, le potentiel tend vers celui créée par cette seule charge. En déduire la forme approchée des équipotentielles correspondant aux potentiels élevés.
- Vu de loin, le potentiel tend vers le potentiel créé par une charge ponctuelle. Où placer cette charge et quelle est sa valeur En déduire la forme approchée des équipotentielles correspondant aux potentiels faibles.
- Tracer qualitativement sur un schéma les équipotentielles dans le plan Oxy . Tracer notamment l'équipotentielle $V(O)$. Commenter.

9. Comment vérifier ici la cohérence entre l'allure des lignes de champ et l'allure des équipotentielles? Expliquer.

C. Étude du champ sur l'axe Ox

On étudie ici quantitativement le champ sur Ox .

10. Déterminer l'expression du potentiel sur Ox (trois cas). Vérifier la parité attendue pour $V(x)$.
11. En déduire le champ sur l'axe que l'on écrira $\vec{E}=E(x)\vec{u}_x$. Tracer l'allure de $E(x)$ en fonction de x . Commenter la parité de $E(x)$.

D. Étude du champ sur l'axe Oy

On étudie ici quantitativement le champ sur Oy .

12. Déterminer l'expression du potentiel sur Oy .
13. Déterminer le champ qu'on écrira $\vec{E}=E(y)\vec{u}_y$. Tracer l'allure de $E(y)$ en fonction de y .

E. Étude du champ au voisinage de l'origine

On étudie ici quantitativement le champ dans le plan Oxy en un point M proche de l'origine. On a donc $x/a \ll 1$ et $y/a \ll 1$. On travaille au deuxième ordre en x/a et en y/a et on écrit donc le potentiel sous la forme: $V(x,y)=A+B.x+C.y+D.x^2+F.y^2+G.x.y$.

Les grandeurs A, B, C, D, F, G sont à déterminer.

14. Le potentiel est-il une fonction paire de x , de y ? Justifier. Combien reste-t-il d'inconnues à déterminer ?
15. Donner l'expression de A .
16. Déterminer les autres inconnues en utilisant les études précédentes sur l'axe Ox et sur l 'axe Oy (on rappelle $x/a \ll 1$ et $y/a \ll 1$). En généralisant l'expression de $V(x,y)$ donnez finalement l'expression de $V(x,y,z)$ au voisinage du point O .
17. Le potentiel en électrostatique dans le vide doit vérifier l'équation de Laplace : $Laplacien(V)=0$ noté $\Delta V=0$ avec en coordonnées cartésiennes: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Montrer que l'expression obtenue pour V au voisinage de O vérifie cette propriété.
18. Déduire des résultats précédents l'expression du champ au voisinage de O .

F. Stabilité d'une charge au voisinage de l'origine

On considère un électron de charge $q_0 = -e$ et de masse m soumis à l'action des deux charges q . On rappelle que le force de pesanteur sur l'électron est négligeable par rapport aux forces électriques habituellement envisagées.

19.Quelle est la position d'équilibre de l'électron?

20.Appliquer le principe fondamental et projeter selon les trois axes pour obtenir les équations différentielles du mouvement. On posera : $\omega^2 = \dfrac{q\,e}{2\pi\varepsilon_0 m a^3}$.

21.Déduire des équations différentielles la stabilité de l'équilibre de l'électron selon Ox et dans le plan Oyz . L'équilibre est-il stable ?

III. Champ électrostatique créé par deux charges ponctuelles opposées (doublet)

On travaille en coordonnées cartésiennes d'origine O . On considère une charge $q > 0$ placée en P $(x = a, y = 0, z = 0)$ et une autre charge ponctuelle opposée $-q$ placée en N $(x = -a, y = 0, z = 0)$. On s'intéresse au champ en un point $M(x, y, z)$.

A. Allure des lignes de champ

22.En utilisant les symétries, que peut-on dire de la direction du champ

- en un point $M(x = 0, y, z)$
- en un point $M(x, y = 0, z = 0)$

23.Tracer l'allure des lignes de champ dans le plan $z = 0$ en justifiant . Préciser l'orientation.

B. Allure des équipotentielles

24.Déterminer l'équipotentielle $V = 0$.

25.Tracer l'allure des équipotentielles dans le plan Oxy . Préciser le signe des potentiels correspondants en justifiant la réponse.

26.Vérifier la cohérence entre les lignes de champ et les équipotentielles.

C. Étude du champ sur les axes

27.Déterminer directement (sans passer par le potentiel) l'expression du champ sur Ox . On écrira $\vec{E} = E\,\vec{u}_x$. Tracer E en fonction de x .

28.Déterminer directement (sans passer par le potentiel) l'expression du champ sur Oy . On écrira $\vec{E} = E\,\vec{u}_x$. Tracer E en fonction de y . Commenter ici l'utilisation du potentiel sur l'axe Oy afin de déterminer le champ sur cet axe.

D. Étude du potentiel au voisinage de l'origine

29.Déterminer (choix libre pour la méthode) l'expression de $V(x, y, z)$ au voisinage du point O en travaillant au deuxième ordre en x/a en y/a et en z/a .

30.Montrer que $V(x,y,z)$ vérifie l'équation de Laplace $\Delta V=0$ au voisinage de O .

IV. Champ électrostatique créé par quatre charges ponctuelles en carré

Quatre charges $q>0$ sont placées dans le plan Oxy en $(a,0,0),(-a,0,0),(0,a,0),(0,-a,0)$.

31.Donner si possible l'allure de quelques lignes de champ et de quelques équipotentielles dans le plan Oxy . Expliquer rapidement. (Quelques indications : Il y a ici 2×4 axes de symétries. On peut se demander si le point évident de champ nul est, au niveau potentiel, un maximum, un minimum ou un point col...En déduire l'existence de 4 autres points de champ nul, à préciser au niveau potentiel).

32.Écrire l'expression a priori du potentiel, au voisinage du centre O , au deuxième ordre en $x/a, y/a, z/a$ sous la forme : $V(x,y)=K_0+K_1 x+K_2 y+K_3 z \ldots etc$ en faisant intervenir 10 inconnues.

33.Simplifier dans un premier temps l'expression proposée en comparant le rôle des coordonnées x et y . Simplifier en utilisant les symétries du problème (cf parités de la fonction $V(x,y,z)$). Combien reste-t-il d'inconnues à ce niveau ?

34.Écrire la relation entre les inconnues restantes issue de l'équation de Laplace. Déterminer finalement l'expression du potentiel au voisinage de O en déterminant les inconnues par l'étude du cas particulier $y=0, z=0, x\ll a$.

On considère désormais une charge ponctuelle q_0 de masse m soumise à l'action des quatre charges q . On admettra qu'elle reste toujours au voisinage de O .

35.Quelle est la position d'équilibre de la charge q_0 .

36.Écrire les équations différentielles du mouvement de q_0 .

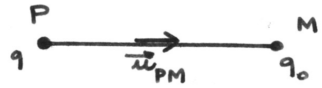
37.En déduire la stabilité de l'équilibre selon Oz et dans le plan Oxy . A quelle condition sur le signe de q_0 l'équilibre dans le plan Oxy est-il stable. La charge est astreinte désormais à rester dans le plan Oxy . Quelle est son énergie potentielle. Retrouver en utilisant cette notion la condition de stabilité. Cette condition est supposée réalisée.

38.Déterminer le mouvement dans le plan de la particule de charge q_0 avec pour conditions initiales $x=x_0$, $y=0$ et une vitesse initiale $v_x=0$ et $v_y=v_0$. A quelle condition sur x_0, v_0 , l'hypothèse (mouvement au voisinage de O) est-elle vérifiée ? A quelle condition la trajectoire est-elle circulaire ?

39.Ces conditions étant toutes réalisées, on observe que $r(t)$ (distance à l'origine) décroît très lentement car la charge q_0 rayonne une puissance $P=\frac{\mu_0}{6\pi c}\left(q_0\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2$ ($\vec{v}$: vitesse , μ_0 : perméabilité magnétique du vide, c : vitesse de la lumière). On pourra supposer que la trajectoire est à chaque instant assimilable à une trajectoire circulaire. Déterminer $r(t)$ (travailler par l'énergie).

Réponses

1) Loi de Coulomb :



$$\overrightarrow{F}_{P\to M} = \frac{q\,q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_{PM}^2}\,\overrightarrow{u}_{PM}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{P\to M} = \frac{q\,q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_{PM}^3}\,\overrightarrow{r}_{PM}}$$

---

2) La force subie par la charge q_0 en M peut s'écrire

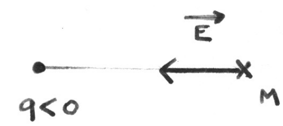
$$\boxed{\overrightarrow{F} = q_0\,\overrightarrow{E}(M)}$$

$\overrightarrow{E}(M)$ désignant le champ en M créé par les autres charges.

En comparant avec 1) :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{q\,\overrightarrow{r}_{PM}}{4\pi\varepsilon_0 r_{PM}^3}}$$

(champ créé radial centrifuge)



(champ créé radial centripète)

---

3) $$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

$$\begin{array}{c|c} & \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ & 0 \\ \overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi} & 0 \end{array} = \begin{array}{|c} -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ -\dfrac{\partial V}{r\,\partial\theta} \\ -\dfrac{\partial V}{r\sin\theta\,\partial\varphi} \end{array}$$

donc

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$$

V ne dépend donc que de r

$$V = V(r)$$

avec

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{dV(r)}{dr}$$

finalement

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \cancel{cste}$$

(choisie nulle)

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Le potentiel est choisi nul à l'infini.
(cf : très loin de la charge source, les effets tendent vers zéro)

---

4)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

donc :

$$q_0 \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, \frac{E_p}{q_0}$$

or

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

finalement

$$\overrightarrow{grad}\, \frac{E_p}{q_0} = \overrightarrow{grad}\, V$$

$$\frac{E_p}{q_0} = V + cste$$

$$E_p = q_0 V + cste'$$

On choisit aussi E_p nul à l'infini (comme V) donc la constante est nulle

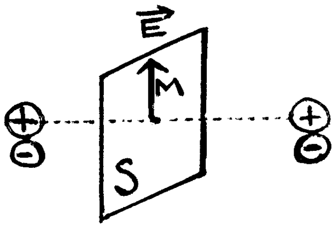
$$\boxed{E_p = q_0 V}$$

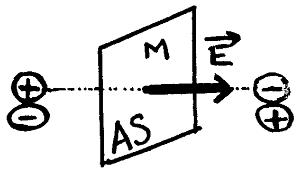
(énergie potentielle d'une charge q_0 dans le potentiel électrostatique V)

---

5) Si le point M appartient à un plan de symétrie de la distribution, $\vec{E}(M)$ appartient au plan de symétrie.
Si le point M appartient à un plan d'antisymétrie de la

distribution, $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan d'antisymétrie.





---

6) $\rightarrow$ $M \in$ plan Oxy plan de symétrie donc

$$\boxed{\vec{E}(M) = E_x\,\vec{u_x} + E_y\,\vec{u_y}}$$

$\rightarrow$ $M \in$ plan Oxy plan de symétrie
$M \in$ plan Oyz plan de symétrie

$$\boxed{\vec{E}(M) = E_y\,\vec{u_y}}$$

$\rightarrow$ $M \in$ plan Oxy plan de symétrie
$M \in$ plan Oxz plan de symétrie

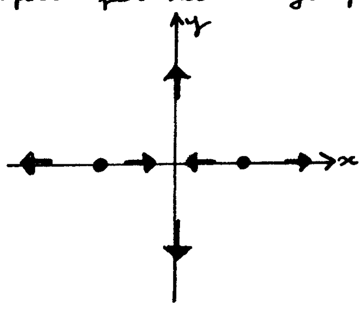
$$\boxed{\vec{E}(M) = E_x\,\vec{u_x}}$$

$\rightarrow$ $M \in$ plans Oxy, Oyz, Oxz 3 plans de symétrie orthogonaux donc $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de ces trois plans.

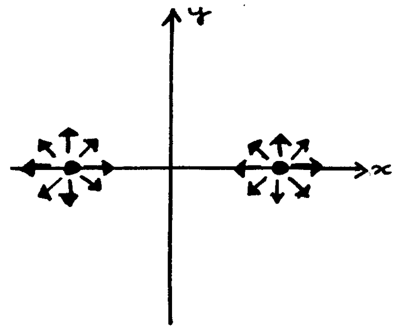
$$\boxed{\vec{E}(M) = \vec{0}}$$

---

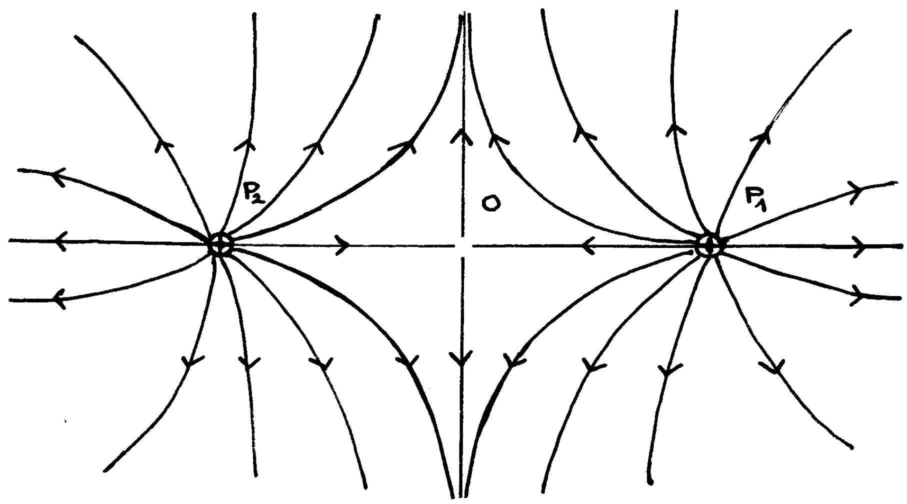
7) sur les axes (sens imposé par la charge plus proche)



près des charges :



tracé qualitatif des lignes de champ



En un point, <u>la ligne de champ est tangente à $\vec{E}$</u> en ce point. Il ne peut donc y passer deux lignes de champ.

→ En P_1 et P_2 lignes de champ qui <u>se croisent</u>.
(cf <u>$\vec{E}$ non défini</u> – infini – dû au modèle de la charge ponctuelle).

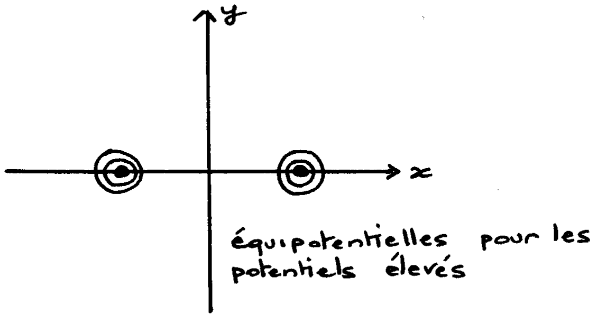
→ En O les lignes de champ <u>ne se croisent pas</u> véritablement
(cf <u>$\vec{E}$ nul</u> en O)

---

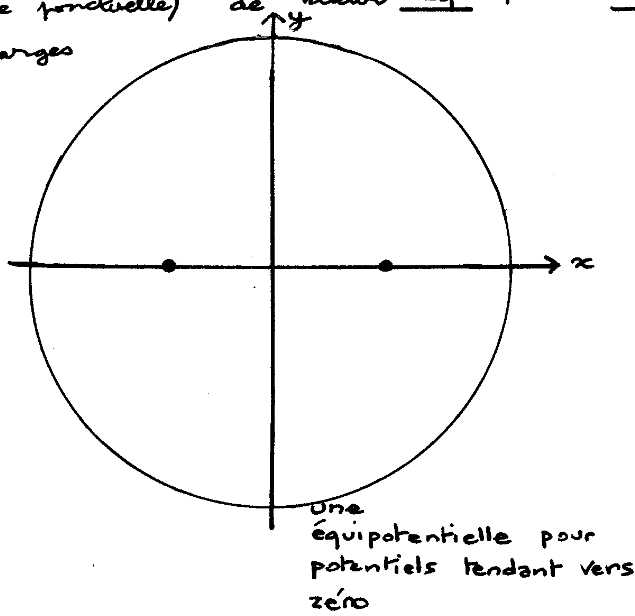
8) → $V(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

$$\boxed{V(O) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

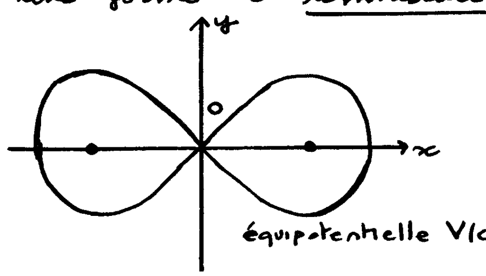
→ très près des charges le potentiel est grand et tend vers le potentiel d'une seule charge $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Dans le plan, les équipotentielles sont donc proches de cercles quasiment centrés sur les charges.



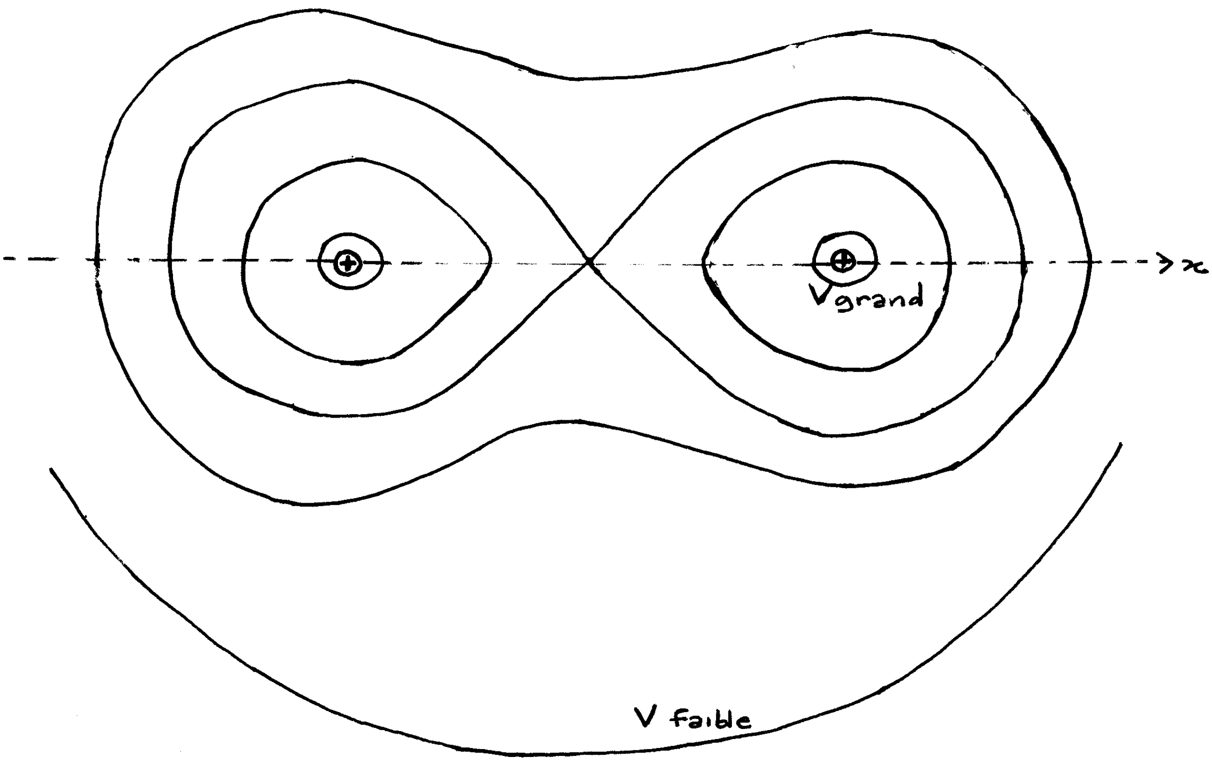
→ vu de très loin la distribution se comporte comme un monopôle (= charge ponctuelle) de valeur 2q placé au barycentre O des deux charges



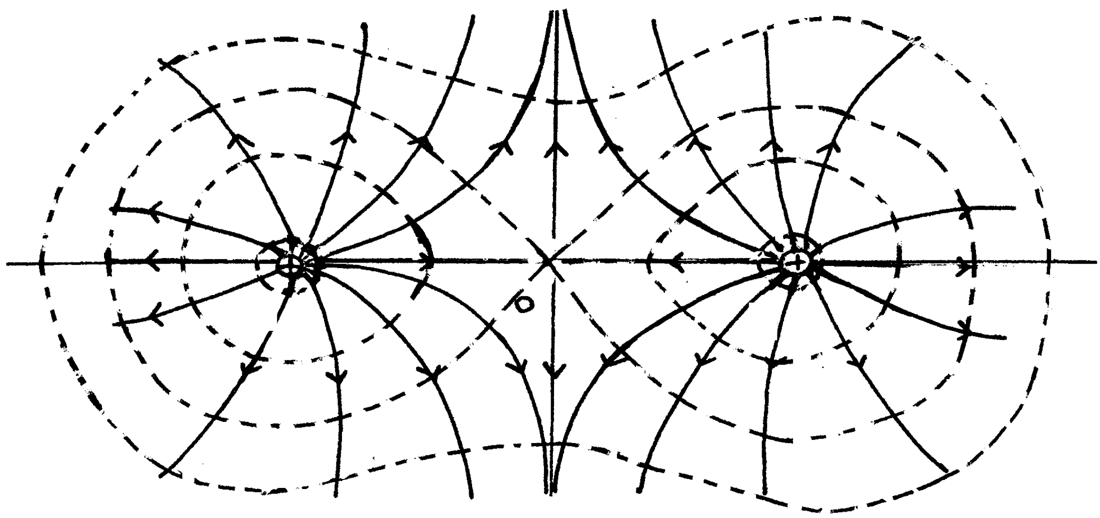
→ il doit exister une équipotentielle "de passage" entre les équipotentielles entourant une seule charge et celles entourant les deux charges.
Cette équipotentielle particulière passe en O ($V = V(O)$).
Elle aura une forme de lemniscate



Finalement, on peut prévoir les équipotentielles suivantes :



9) Les lignes de champ doivent être perpendiculaires aux équipotentielles. Elles doivent aller des potentiels croissants vers les potentiels décroissants. (cf $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$)

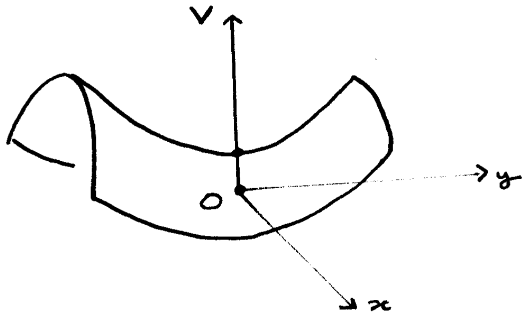


remarque :

En O, $V(x,y)$ est stationnaire. La surface $V(x,y)$ au voisinage est une surface "en selle de cheval" (ou point col)

V est minimum selon x

V est maximum selon y



---

10)
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\|\overrightarrow{P_1M}\|} + \frac{1}{\|\overrightarrow{P_2M}\|}\right)$$

avec $\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP_1}$

$$(\vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z}) \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x-a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x+a|}\right)}$$

$x>a$
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a}\right)$$
$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2x}{x^2-a^2}\right)}$$

$-a<x<+a$
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a}\right)$$
$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a}{a^2-x^2}\right)}$$

$x<-a$
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$
$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2x}{x^2-a^2}\right)}$$

vérification de parité ($V(x)$ doit être paire)

$|x| < a \qquad V = \dfrac{2aq}{4\pi\varepsilon_0(a^2-x^2)}$ (paire)

$|x| > a \qquad V = \dfrac{2|x|q}{4\pi\varepsilon_0(x^2-a^2)}$ (paire)

---

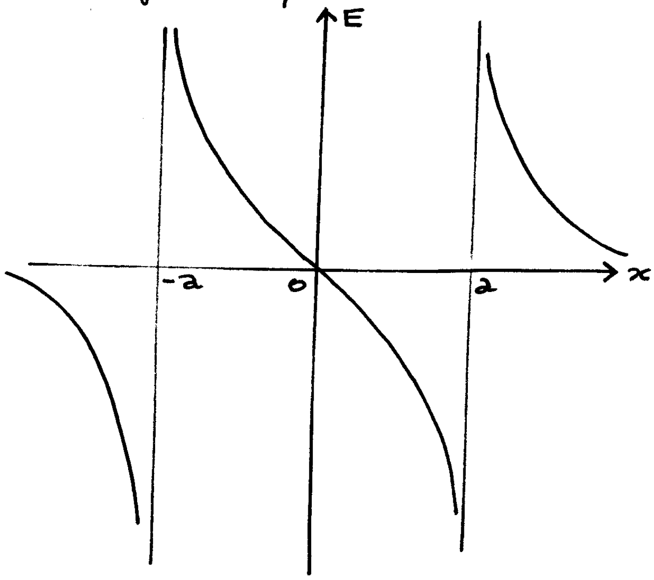
11) On a établi ci dessus, l'expression de $V(x, y=0, z=0)$.
on peut en déduire $E_x(x, y=0, z=0) = -\dfrac{dV(x)}{dx}$ mais on n'a pas accès à $E_y(x, y=0, z=0)$
ni $E_z(x, y=0, z=0)$
puisque l'expression $V(x)$ ne nous donne pas la possibilité de calculer $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ ni $\dfrac{\partial V}{\partial z}$.
c'est ici sans importance puisque l'on a établi par symétrie que sur l'axe Ox, $\vec{E}$ est selon $\vec{u_x}$

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

On trouve :

$$\boxed{\begin{array}{ll} x > a & E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2} \\ -a < x < a & E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{-4ax}{(x^2-a^2)^2} \\ x < -a & E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{-2(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2} \end{array}}$$

$E(x)$ est une fonction impaire comme prévisible
(la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire)



---

12)

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\|\overrightarrow{P_1M}\|} + \frac{1}{\|\overrightarrow{P_2M}\|}\right)$$

avec $\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP_1}$

$$(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})\left|\begin{matrix}0\\y\\0\end{matrix}\right. \quad \left|\begin{matrix}a\\0\\0\end{matrix}\right. \qquad \left|\begin{matrix}-a\\y\\0\end{matrix}\right.$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)$$

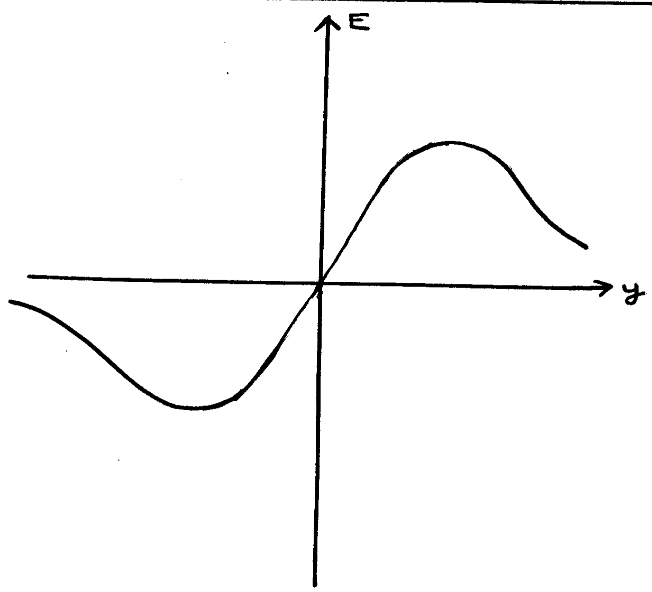
$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{\sqrt{a^2+y^2}}}$$

---

13) On connait $V(x=0, y, z=0)$. On pourra déterminer $E_y\,(x=0,\ y,\ z=0)$. Cela suffit puisque l'étude des symétries a montré que sur l'axe y, le champ était selon $\overrightarrow{u_y}$

$$E = -\frac{dV}{dy}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y}{(a^2+y^2)^{3/2}}\overrightarrow{u_y}}$$



---

14)

$$V(x,y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Fy^2 + Gxy$$

au voisinage de O

V est une fonction paire de x donc $B=0$ $G=0$

V " " y de plus donc $C=0$

finalement

$$\boxed{V(x,y) = A + Dx^2 + Fy^2}$$

il reste trois inconnues A, D, F à déterminer

---

15) Si $x=0$ et $y=0$, on a $V = A$.
A représente donc $V(0)$.

$$\boxed{A = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}}$$

---

16) → Sur Ox, au voisinage de l'origine, au deuxième ordre :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{a^2-x^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{a^2}\frac{1}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}x^2$$

On retrouve A
on obtient

$$\boxed{D = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}}$$

→ Sur Oy, au voisinage de l'origine, au deuxième ordre :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{y}{a}\right)^2\right)^{1/2}}$$

$$\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a}\left(1-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}\right)$$

On obtient

$$\boxed{F = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}}$$

Finalement

$$\boxed{V(x\ll a, y\ll a, z=0) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\frac{x^2}{a^2}-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}\right)}$$

Dans ce problème, y et z jouent le même rôle donc :

$$\boxed{V(x \ll a,\ y \ll a,\ z \ll a) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{y^2+z^2}{a^2}\right)}$$

---

17) on doit vérifier l'équation de Laplace.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}\ \frac{2}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a} \times -\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a} \times -\frac{1}{a^2}$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\Delta V = 0}$$

---

18)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u_y} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(-2x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} + z\,\vec{u_z}\right)}$$

---

19)

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = -e\vec{E}$$

A l'équilibre $\vec{F}$ est nul. La position d'équilibre correspond donc à $\vec{E} = \vec{0}$ soit $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$$\boxed{\text{Equilibre à l'origine } O}$$

---

20) principe fondamental :

$$-e\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} + \frac{e}{m}\vec{E} = \vec{0}$$

$/x$ $$\ddot{x} - \frac{e}{m}\frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^3}x = 0$$

$/y$ $$\ddot{y} + \frac{e}{m}\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^3}y = 0$$

$/z$ $$\ddot{z} + \frac{e}{m}\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^3}z = 0$$

on pose

$$\omega^2 = \frac{qe}{2\pi\varepsilon_0 m a^3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{x} - 2\omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \end{array}}$$

---

21) Pour les déplacements au voisinage de l'équilibre en O :

- selon y, oscillations de pulsation ω (donc stabilité selon y)
- selon z, oscillations de pulsation ω (donc stabilité selon z)

$$\boxed{\text{stabilité dans le plan } Oyz}$$

- selon x, l'équation différentielle admet des solutions en $e^{\omega\sqrt{2}t}$ et en $e^{-\omega\sqrt{2}t}$ (ou encore en $\mathrm{ch}(\omega\sqrt{2}t)$ et $\mathrm{sh}(\omega\sqrt{2}t)$). Le point s'échappe s'il ne se trouve pas en $x=0$. (instabilité selon x)

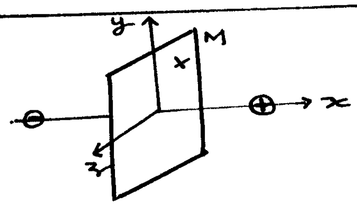
$$\boxed{\text{instabilité selon } Ox}$$

remarque

Puisque $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, on ne peut avoir $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ positifs. Il y a au minimum un axe selon lequel E_P est maximum (dérivée seconde négative) donc instabilité d'une position d'équilibre.

---

22)



→ M ∈ plan Oyz plan d'antisymétrie donc $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan.

$$\boxed{\vec{E}(M) = E_x \, \vec{u}_x}$$

→ M sur l'axe Ox

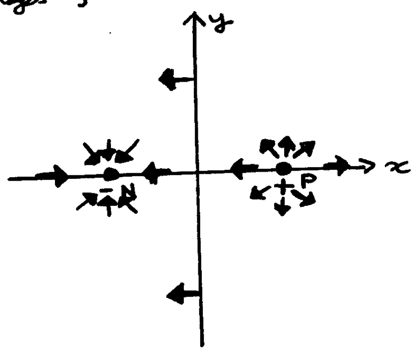
M ∈ plan Oxz plan de symétrie

M ∈ plan Oxy plan de symétrie

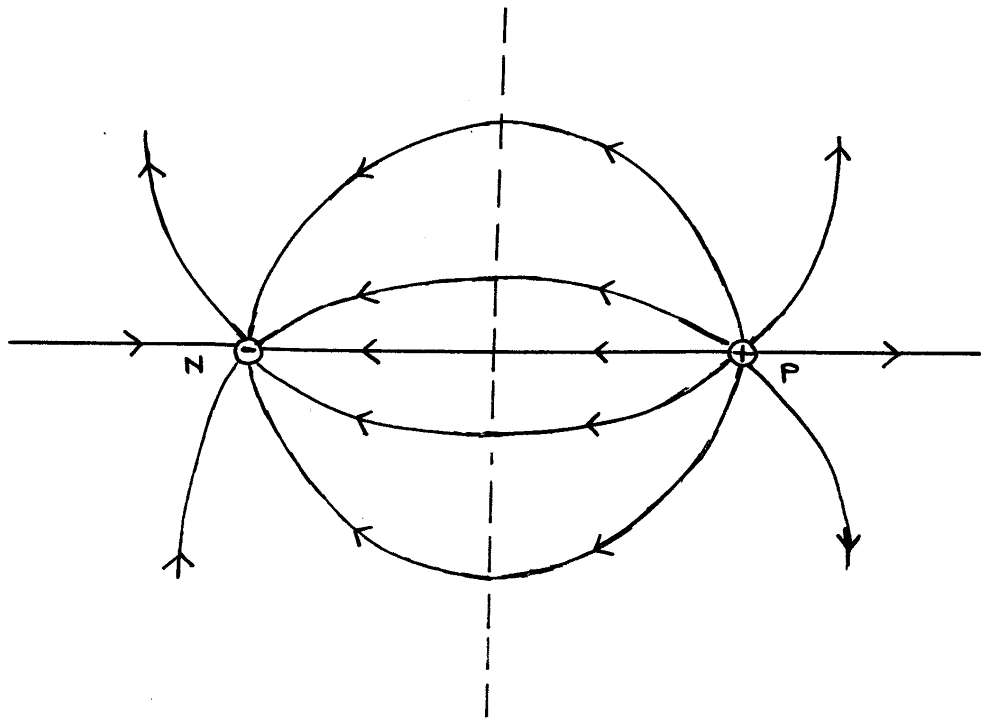
$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E_x \, \overrightarrow{u_x}}$$

---

23) – sur les axes
– près des charges } sens imposé par la charge



tracé qualitatif des lignes de champ du doublet



(à grande distance, l'ensemble ne se comporte pas comme un <u>monopôle</u> ($q_{total} = 0$) mais comme un <u>dipôle</u> ($\overrightarrow{p} = q\,2a\,\overrightarrow{u_x}$))

---

24) dans le plan yOz :

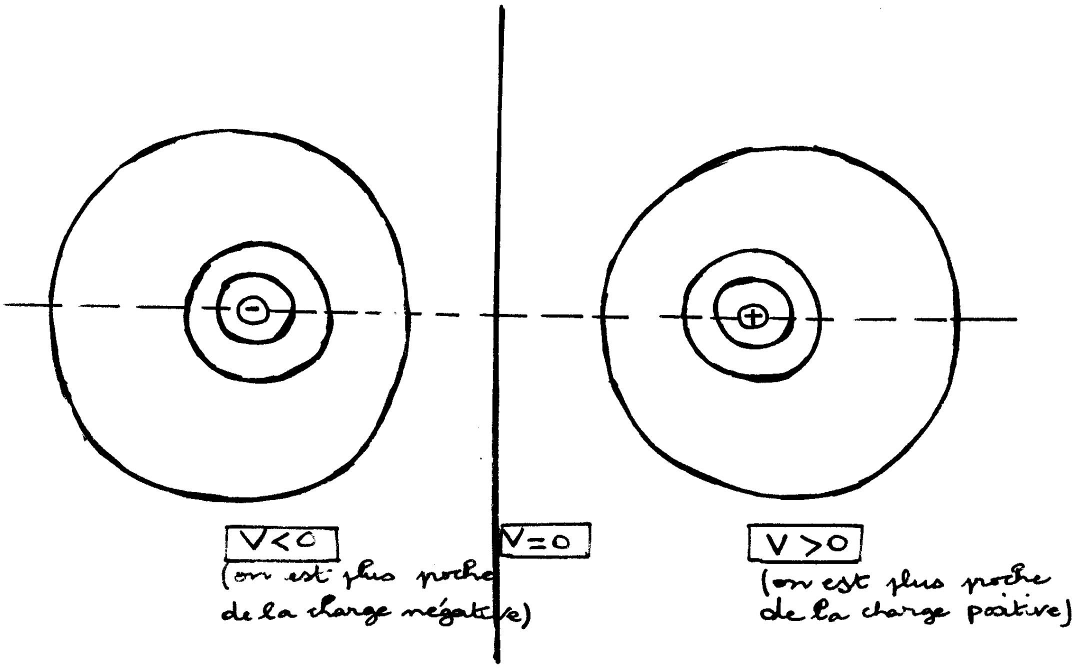
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+y^2+z^2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+y^2+z^2}}$$

$$= 0$$

$$\boxed{\text{L'équipotentielle } V=0 \text{ correspond au plan médiateur c'est à dire au plan } Oyz}$$

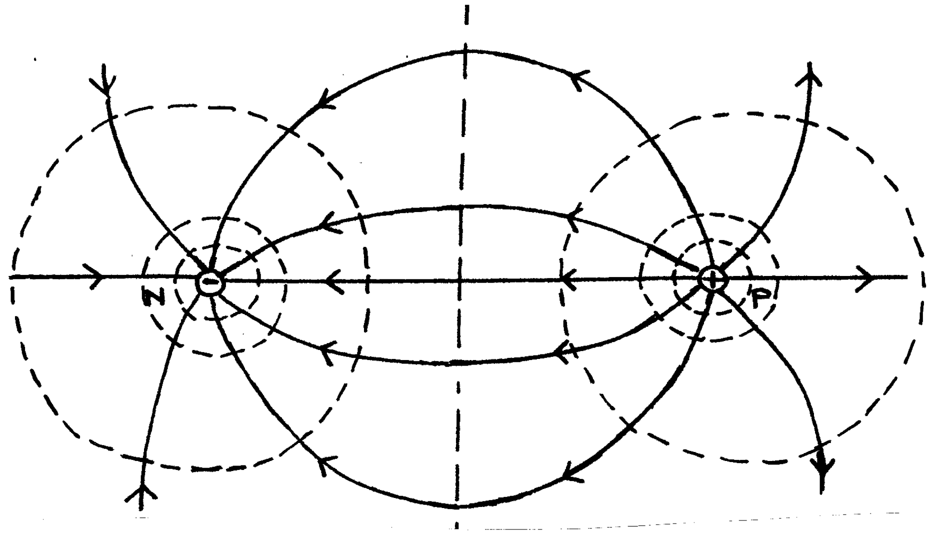
---

25) Les équipotentielles tendent vers des cercles (dans le plan Oxy) près des charges ponctuelles.



---

26) Les lignes de champ doivent être orthogonales aux équipotentielles.



27)

$$\overset{-q}{N} \qquad O \qquad \overset{q}{P} \qquad M \quad x$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{NM}}{\|\overrightarrow{NM}\|^3}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-a}{|x-a|^3} - \frac{x+a}{|x+a|^3}\right)\overrightarrow{u_x}}$$

trois cas :

<u>$x > a$</u>

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-a}{(x-a)^3} - \frac{x+a}{(x+a)^3}\right)\overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\overrightarrow{u_x}}$$

<u>$-a < x < a$</u>

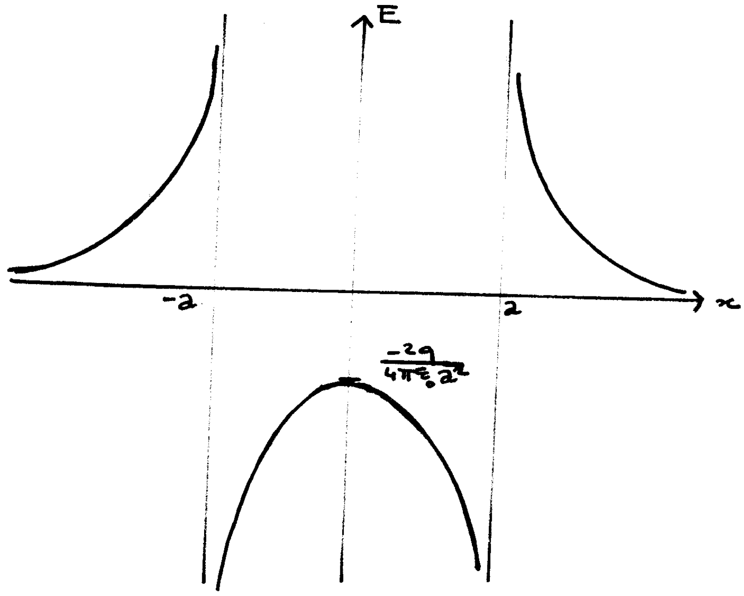
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right)\overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2}\overrightarrow{u_x}}$$

<u>$x < -a$</u>

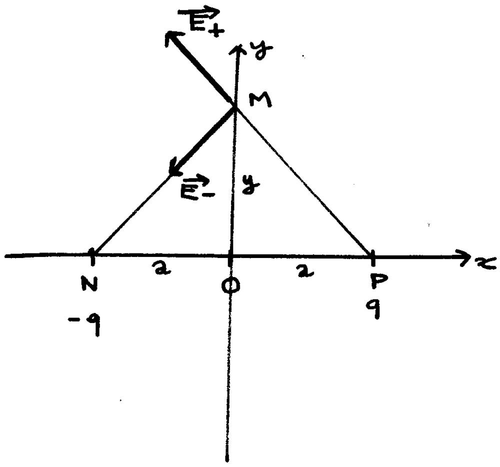
$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-4ax}{(x^2-a^2)^2}\overrightarrow{u_x}}$$

On remarque que E est une fonction <u>paire</u> de x



---

28)



$$\vec{PM}\begin{vmatrix} -a \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{NM}\begin{vmatrix} a \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{NM}}{\|\vec{NM}\|^3}$$

$/\vec{u_x}$ $$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-a}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2a}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$/\vec{u_y}$ $$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= 0$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{-2aq}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+y^2)^{3/2}}\vec{u_x}}$$

Le potentiel sur Oy est facile à déterminer (il est d'ailleurs nul)
On connait donc $V(x=0,\ y,\ z=0)$ – et non pas $V(x,y,z)$ –
Or le champ est selon $\vec{u_x}$, il vaut

$$\vec{E}_{\text{axe } Oy} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x}\right)_{x=0,\ y,\ z=0}.$$

La connaissance de $V(y)$ <u>ne permet pas de mener le calcul</u>.

---

29) En choisissant la même méthode qu'en II E

$$\underset{(x,y,z=0)}{V} = A + Bx + Cy + Dx^2 + Fy^2 + Gxy$$

V fonction impaire de x $(A=0,\ C=0,\ D=0,\ F=0)$

V fonction paire de y $(G=0)$

donc $\boxed{\underset{(x,y)}{V} = B\,x}$

Pour déterminer B on utilise l'expression de V sur l'axe Ox au voisinage du centre :

$$\underset{(-a<x<a,\,y=0)}{V} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a-x)} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(a+x)}$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}\;\frac{x/a}{1-(x/a)^2}$$

$$\simeq \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}\;x/a$$

au deuxième ordre en x/a

donc $B = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$

$$\boxed{\underset{(x,y)}{V} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\,x}$$

Idem pour $V_{(x,y,z)}$

3o) On a évidemment

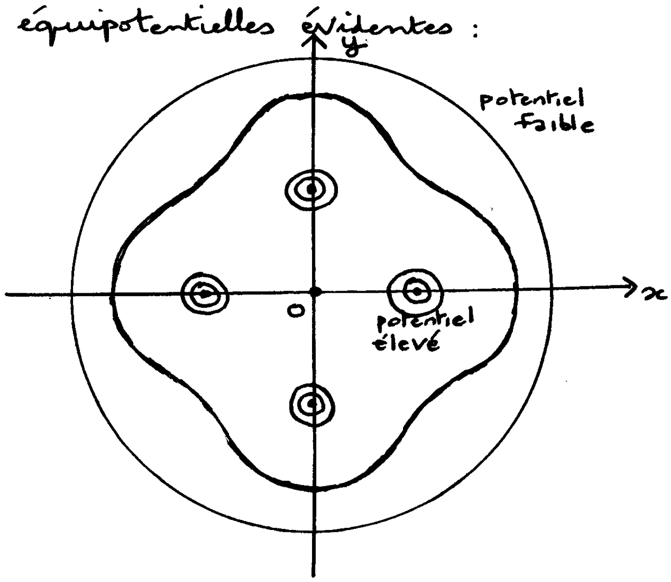
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= \frac{d^2 V}{dx^2}$$

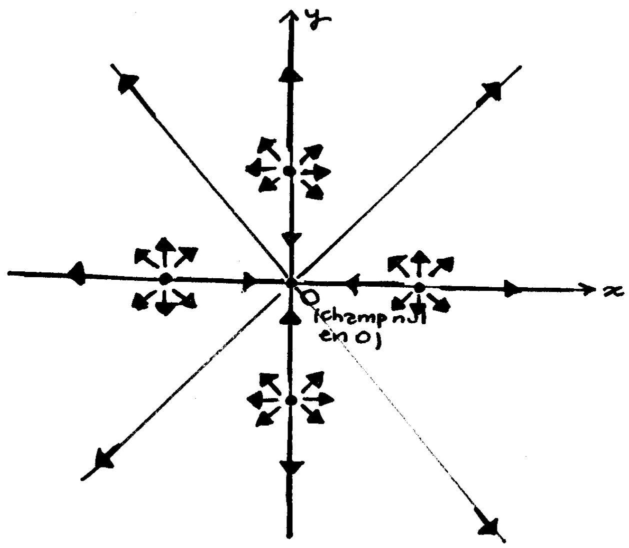
$$\boxed{\Delta V = 0}$$

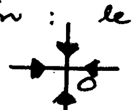
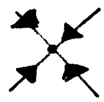
---

31) quelques équipotentielles évidentes :



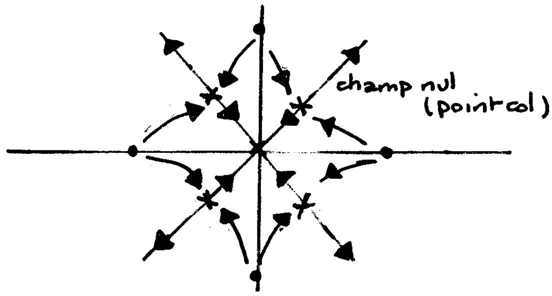
quelques lignes de champ évidentes :



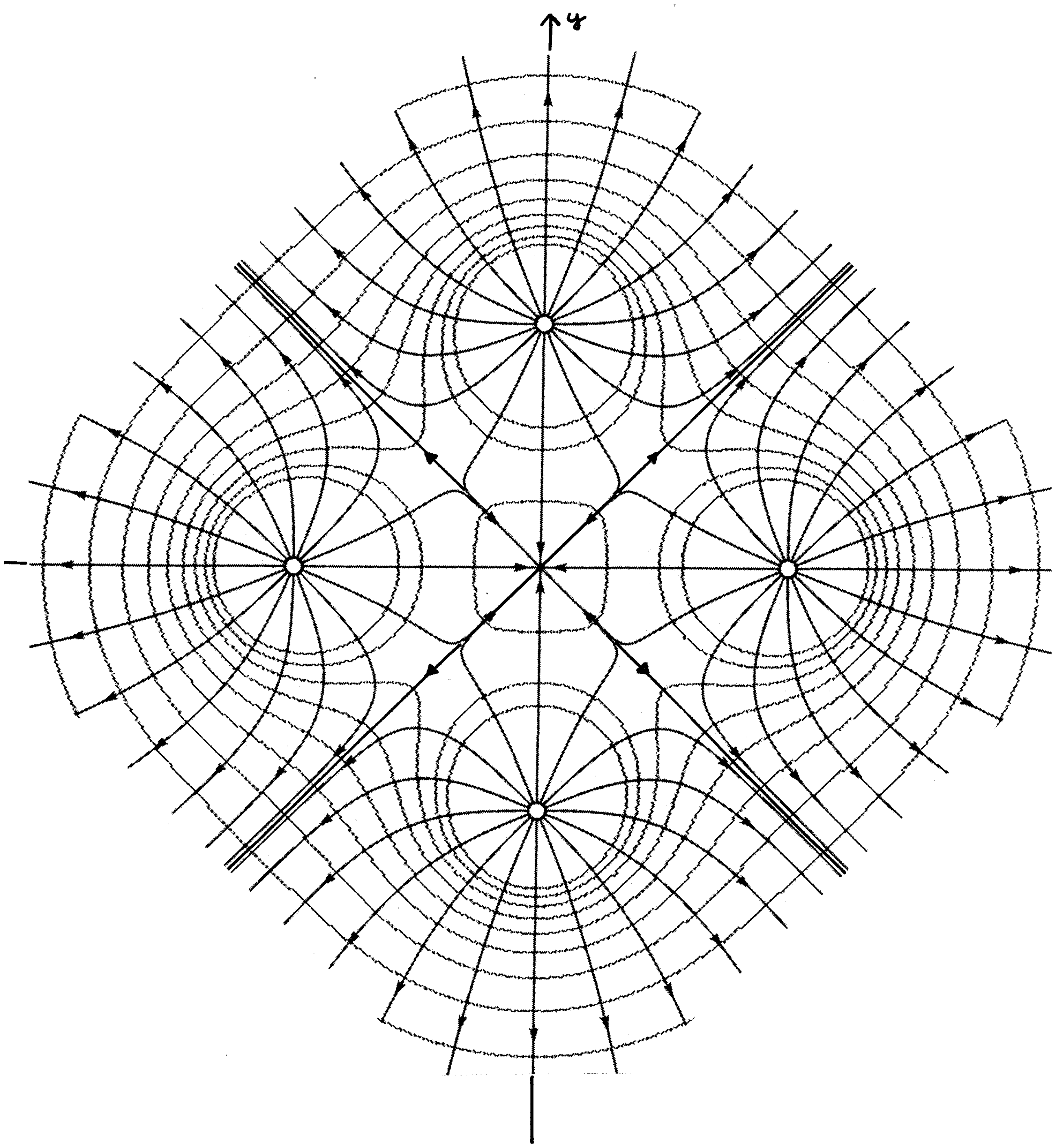
un peu de réflexion : le point O est-ici un <u>minimum</u> de potentiel : (cf ) donc pour l'orientation des 4 lignes de champ non définies plus haut, on aura :  .

On doit donc prévoir <u>4 autres points de champ nul</u> .

(le calcul les donne à 0,55 a de O)



Ces quatre points de stationnarité du potentiel dans le plan Oxy ne sont ni des max, ni des min mais des <u>points cols</u>.



32)
$$\boxed{\begin{aligned} V(x,y,z) = \ & K_0 \\ & + K_1 x + K_2 y + K_3 z \\ & + K_4 x^2 + K_5 y^2 + K_6 z^2 \\ & + K_7 yz + K_8 xz + K_9 xy \end{aligned}}$$

soit dix coefficients K_0 à K_9

---

33) → x et y jouent le même rôle donc $K_1 = K_2$, $K_4 = K_5$ et $K_7 = K_8$

$$V(x,y,z) = K_0 + K_1 (x+y) + K_3 z + K_4 (x^2+y^2) + K_6 z^2 + K_7 (x+y) z + K_9 xy$$

→ la fonction est paire en x, en y et en z

donc $K_1 = 0$, $K_3 = 0$, $K_7 = 0$, $K_9 = 0$

$$\boxed{V(x,y,z) = K_0 + K_4 (x^2+y^2) + K_6 z^2}$$

il reste trois inconnues : K_0 , K_4 , K_6

---

34) → Le potentiel doit vérifier l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

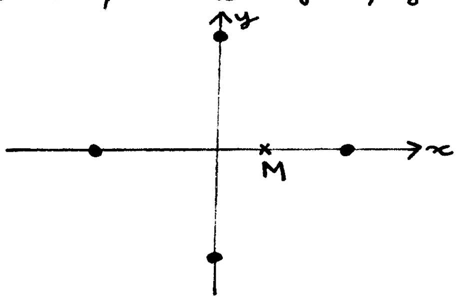
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$2K_4 + 2K_4 + 2K_6 = 0$$

$$K_6 = -2K_4$$

$$\boxed{V(x,y,z) = K_0 + K_4 (x^2 + y^2 - 2z^2)}$$

→ On étudie le cas particulier $y=0$, $z=0$, $x \ll a$



$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} + \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

il faut faire les D.L. au deuxième ordre en $\frac{x}{a}$.

Pour aller plus vite, je groupe les deux premiers :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a}{a^2-x^2} + \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{a}\frac{1}{1-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{2}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}\right)$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}\right)$$

$$\simeq \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\frac{x^2}{a^2} + 1 - \frac{x^2}{2a^2}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}x^2}$$

Finalement on arrive donc à

$$\boxed{V(x,y,z) = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}(x^2+y^2-2z^2)}$$

---

35) Détermination de $\vec{E}$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

$$E_x = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}x$$

$$E_y = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}y$$

$$E_z = +\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}z$$

La force sur q_0 est $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Elle s'annule quand $\vec{E}$ est nul donc pour $x=y=z=0$

$$\boxed{\text{Position d'équilibre en } O.}$$

---

36) $$q_0\vec{E} = m\vec{a}$$

d'où

$$\ddot{x} + \frac{2qq_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}x = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{2qq_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}y = 0$$

$$\ddot{z} - \frac{4qq_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3 m}z = 0$$

37) Si l'équilibre est stable selon xy, il sera instable selon z et réciproquement.

On suppose : $q q_0 > 0$

soit ici : $\boxed{q_0 > 0}$

On pose : $\boxed{\omega^2 = \frac{q q_0}{2\pi\varepsilon_0 m a^3}}$

Les équations différentielles deviennent :

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 0 \\ \ddot{z} - 2\omega^2 z &= 0 \end{aligned}}$$

Les oscillations montrent la stabilité selon x et y.
(il y aura instabilité selon z)

<u>Aspect énergétique</u> : on fait $z = 0$ et $q q_0 > 0$

$$E_P = q_0 V = \frac{q q_0}{\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\, \underbrace{r^2}_{\to (x^2+y^2)}$$

$$= E_p(0) + \frac{1}{2} k\, r^2$$

E_P est <u>minimal</u> en O

Le problème est celui d'un <u>oscillateur spatial isotrope</u>.

Le ressort équivalent a pour constante.

$$\boxed{k = \frac{q q_0}{2\pi\varepsilon_0 a^3}}$$

Les oscillations autour de l'équilibre ont une pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

---

38)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$
$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

donc $x = A \cos\omega t + B \sin\omega t$

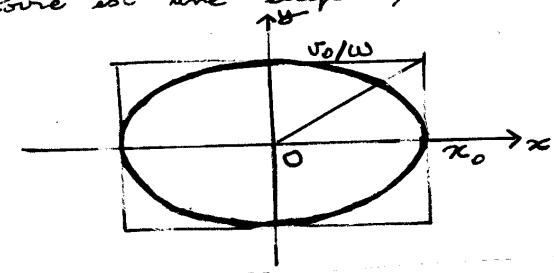
C.I. $\left| \begin{array}{l} x_0 = A \\ 0 = \qquad B\omega \end{array}\right.$

et $y = C \cos\omega t + D \sin\omega t$

C.I. $\left| \begin{array}{l} 0 = C \\ v_0 = \qquad D\omega \end{array}\right.$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_o \cos \omega t \\ y &= \frac{v_o}{\omega} \sin \omega t \end{aligned}}$$

La trajectoire est une ellipse, centrée en O.



L'ellipse est inscrite dans un rectangle de côtés $2x_o$ et $2\frac{v_o}{\omega}$.

L'approximation mouvement au voisinage de O est vérifiée si

$$\boxed{x_o^2 + \frac{v_o^2}{\omega^2} \ll a^2}$$

La trajectoire est circulaire de centre O si grand axe et petit axe sont égaux soit :

$$\boxed{v_o = a\,\omega}$$

---

39) <u>rappel</u> :

Pour un oscillateur harmonique :

$$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{E_m}{2}$$

(égalité entre les valeurs moyennes dans le temps)

Ici pour un mouvement circulaire, à chaque instant $E_c = E_p = \frac{E_m}{2}$

cf $x = r \cos \omega t$

$y = r \sin \omega t$

$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m\, r^2 \omega^2$ $\rightarrow m\omega^2$

$E_p = \frac{1}{2} k\, r^2 \quad = \frac{1}{2} k\,(x^2+y^2) = \frac{1}{2} k\, r^2$

L'énergie de l'oscillateur diminue à cause de la puissance rayonnée. Pendant dt

$$\boxed{dE_m = -P_{rayonnée}\ dt}$$

avec, le mvt étant toujours assimilé à un mouvement circulaire tangent : $E = 2E_c$

$$2\,dE_c = -P\ dt$$

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{P}{2}$$

$$= -\frac{\mu_0 q_0^2}{6\pi c}\vec{a}^2$$

avec $\vec{a}^2 = \left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$

accel normale

accel tangentielle négligée ... cf v diminue lentement car le mvt reste quasiment circulaire uniforme cf : $\boxed{v = r\omega}$

$$mv\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu_0 q_0^2}{6\pi c}\frac{v^4}{r^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu_0 q_0^2}{6\pi c m}\frac{v^3}{r^2}$$

$$= -\underbrace{\frac{\mu_0 q_0^2}{6\pi c m}\omega^2}_{\frac{1}{\tau}}\ v$$

$$v = v_0\ e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{r = r_0\ e^{-t/\tau}}$$

avec $\tau = \dfrac{12\pi^2 m^2 a^3 \varepsilon_0^{1/2}}{q_0^3\, q\ \ \mu_0^{3/2}}$