DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 2 heures

Sujet

Thermodynamique appliquée au corps humain

I. Équation de diffusion thermique

On considère un corps homogène (*figure* 1 , où les parties grisées représentent un isolant thermique) de section droite S , de longueur L . La conductivité thermique du milieu est notée λ .

On se place désormais, jusqu'à mention contraire en régime permanent.

La température du matériau ne dépend que de x et sera notée $T(x)$. Les parois parallèles à l'axe x sont isolées thermiquement et on note $\vec{j}(x)=j(x)\vec{u}_x$, le vecteur densité volumique de courant thermique et $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire.

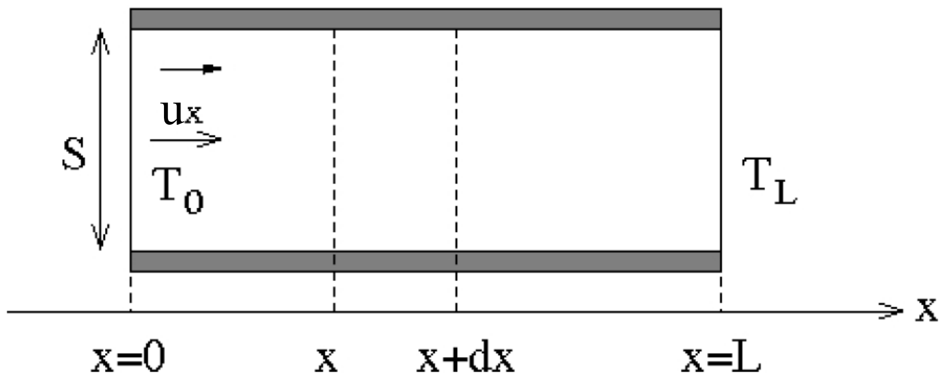


figure 1

1. Déterminer l'unité de $j(x)$ et rappeler sa signification physique.
2. Rappeler la loi de Fourier.
3. Déterminer l'unité de λ .
4. En effectuant un bilan énergétique pour un volume élémentaire de matériau compris entre les abscisses x et $x+dx$ entre les instants t et $t+dt$, établir l'équation vérifiée par $j(x)$. En déduire l'équation vérifiée par $T(x)$.
5. Donner les lois de variation $T(x)$ et $j(x)$ en supposant que les extrémités du matériau sont maintenues à températures constantes, $T(0)=T_0$ et $T(L)=T_L$. Si $T_0>T_L$ quel est le signe de j ? Justifier.

II. Résistances thermiques

A. Résistance thermique due à la conduction

On définit P_{th} , le flux thermique à travers la section droite S du matériau, c'est à dire l'énergie qui traverse la surface par unité de temps. On définit R_{th} , résistance thermique de conduction du matériau de longueur L et de surface S , par la relation $T_0 - T_L = R_{th} P_{th}$.

6. En écrivant la loi d'Ohm locale, préciser l'analogie qui existe entre le problème de la conduction électrique et celui de la conduction thermique. Quelle est la grandeur électrique équivalente à P_{th} ? Quelle est la grandeur électrique équivalente à $T(0) - T(L)$?

7. Comment sont reliés P_{th} et $j(x)$?

8. Démontrer l'expression de R_{th} en fonction de L , S et λ . Préciser l'unité de R_{th} .

B. Association de résistances thermiques

On associe deux corps A_1 et A_2 (*figure* 2 , où les parties grisées représentent un isolant thermique) de résistances thermiques R_{th1} et R_{th2} de même section S , l'un de conductivité thermique λ_1 est compris entre $x_0 = 0$ et $x_1 = L_1$ le second de conductivité thermique λ_2 est compris entre $x_1 = L_1$ et $x_2 = L_1 + L_2$. On note T_0 , T_1 et T_2 , les températures pour $x_0 = 0$, $x_1 = L_1$, $x_2 = L_1 + L_2$.

9. Justifier que la puissance thermique P_{th1} qui traverse A_1 est égale à la puissance thermique P_{th12} qui traverse A_2 . Indiquer alors, en la justifiant, une analogie avec un problème d'électrocinétique.

10. Établir l'expression de la résistance thermique R_{th} (qu'on définit par la relation: $T_0 - T_2 = R_{th} P_{th}$) de l'ensemble en fonction de R_{th1} et R_{th2} .

11. En déduire la température T_1 en fonction de T_0 , T_2 et R_{th1} et R_{th2} .

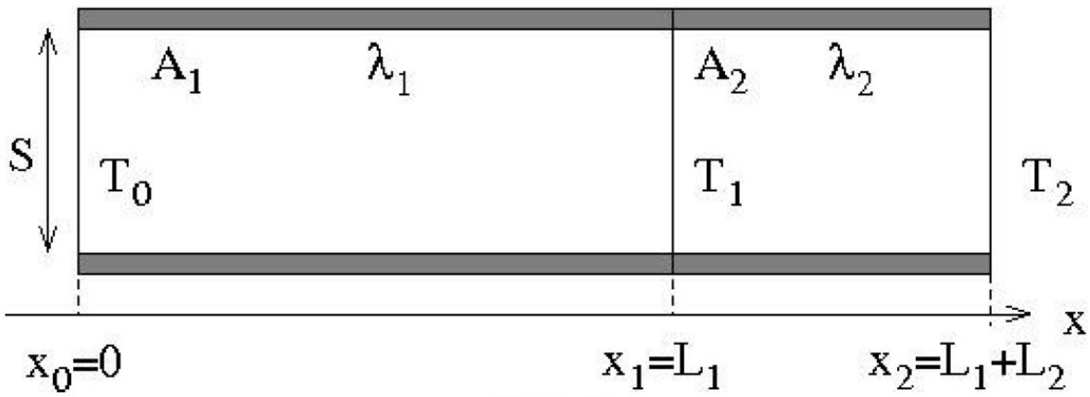


figure 2

Les deux corps A_1 de section S_1 et de longueur L_1 et A_2 de section S_2 et de longueur L_2 sont associés en « parallèle » (*figure* 3 ,où les parties grisées représentent un isolant thermique). On note T_0 la température sur les faces d'entrée pour $x_0 = 0$ et T_1 , la température sur les faces de sorties($x_1 = L_1$ pour A_1 et $x_2 = L_2$ pour A_2). Les corps A_1 et A_2 sont isolés latéralement.

12. Établir l'expression de la résistance thermique R_{th} (qu'on définit par la relation: $T_0 - T_1 = R_{th} P_{th}$, P_{th} étant la puissance thermique traversant l'ensemble des surfaces S_1 et S_2 à l'abscisse $x_0 = 0$) de l'ensemble en fonction de R_{th1} et R_{th2} . Indiquer, en la

justifiant, une analogie avec un problème d'électrocinétique.

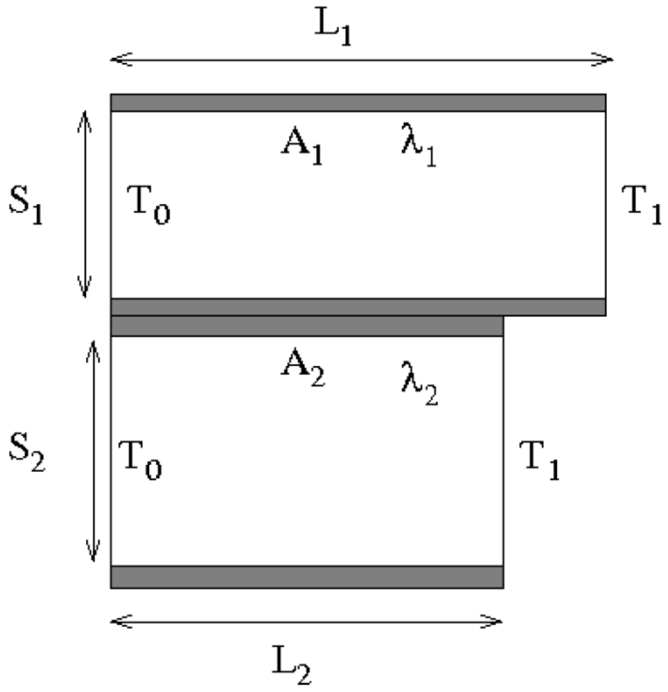


figure 3

C. Transfert convectif

Un corps de température T , plongé dans un fluide (ici, de l'air) à la température T_a , échange avec celui-ci par convection au niveau de sa surface S une puissance thermique P_{th} sortant algébriquement du corps: $P_{th}=\alpha S(T-T_a)$ avec $\alpha=4\,W.m^{-2}.K^{-1}$. On gardera cette valeur de α dans la suite du problème. Nous sommes toujours en régime permanent.

13.Par analogie au cas précédent, montrer que cet échange convectif est décrit par une résistance thermique de convection R_{thc} que l'on précisera.

D. Transfert radiatif

Un corps de température T , plongé dans un fluide (ici, de l'air) à la température T_a , échange avec celui-ci par rayonnement au niveau de sa surface S une puissance thermique P_{thr} sortant algébriquement du corps $P_{thr}=KS(T-T_a)$ avec $K=5\,W.m^{-2}.K^{-1}$ (relation approchée valable si l'écart de température est faible). Ce mécanisme provient du rayonnement infrarouge émis par le corps et les murs à une température donnée. On est toujours en régime permanent.

14.Par analogie avec le cas précédent montrer que cet échange radiatif est aussi décrit par une résistance thermique de rayonnement R_{thr} que l'on précisera.

III. Étude du corps humain

A. Homme nu en régime stationnaire

Nous allons étudier le maintien de l'homéothermie chez l'homme debout nu et au repos à l'exposition d'une température confortable. La surface du corps humain $S=1{,}5\,m^2$ est modélisable par une isotherme à $T=33\,°C$. La température de la pièce est prise à $T_a=23\,°C$. Nous nous plaçons en régime permanent.

Les échanges thermiques s'effectuent par:

- radiation (1)
- convection (2)
- évaporation (3)

Ces pertes sont compensées par la production métabolique. En moyenne, un homme produit $13000\,kJ$ par jour.

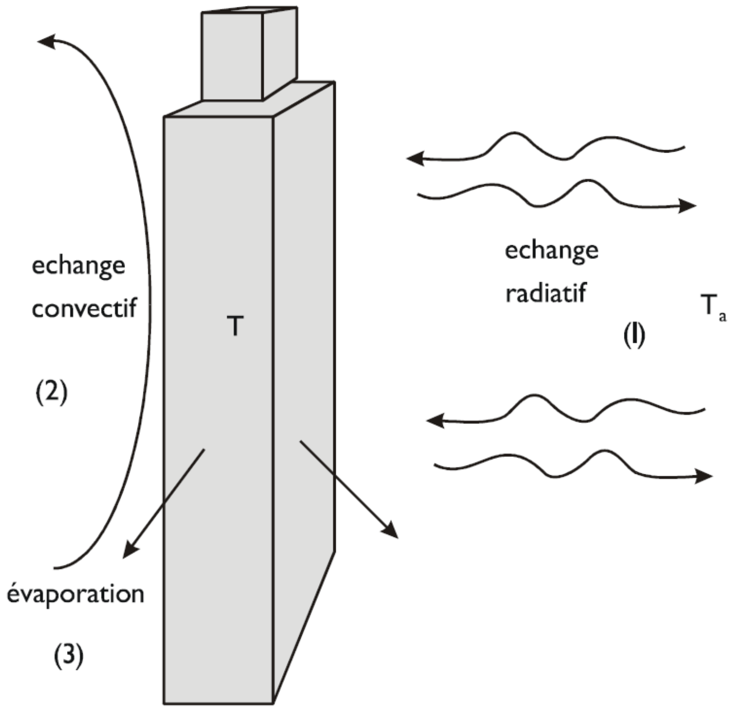


figure 4

15.Calculer la puissance P_M fournie par le métabolisme.

16.Calculer la résistance thermique de rayonnement R_{thr} pour un homme. Exprimer et calculer la puissance P_r émise par rayonnement.

17.Calculer la résistance thermique de convection R_{thc} pour un homme. Exprimer et calculer la puissance P_c émise par convection.

18.L'organisme émet toujours de l'eau par les voies respiratoires et sa surface cutanée. Calculer cette puissance P_E si la chaleur latente de changement d'état à la température de la peau est $L \approx 2400\,kJ.kg^{-1}$ et que la masse d'eau vaporisée est de $m=300\,g.jour^{-1}$.

19.À partir d'un bilan de puissance, en déduire la puissance résiduelle P_{res} servant à réchauffer l'air inspiré, etc...

20.Soit le circuit électrique de la $figure\,5$:

- Préciser l'équation reliant les différentes grandeurs électriques de ce circuit.

- Le système thermique étudié est équivalent au circuit électrique de la *figure* 5 ci-dessous. Indiquer dans un tableau les équivalents thermiques correspondants aux divers éléments électriques introduits sur le schéma électrique.

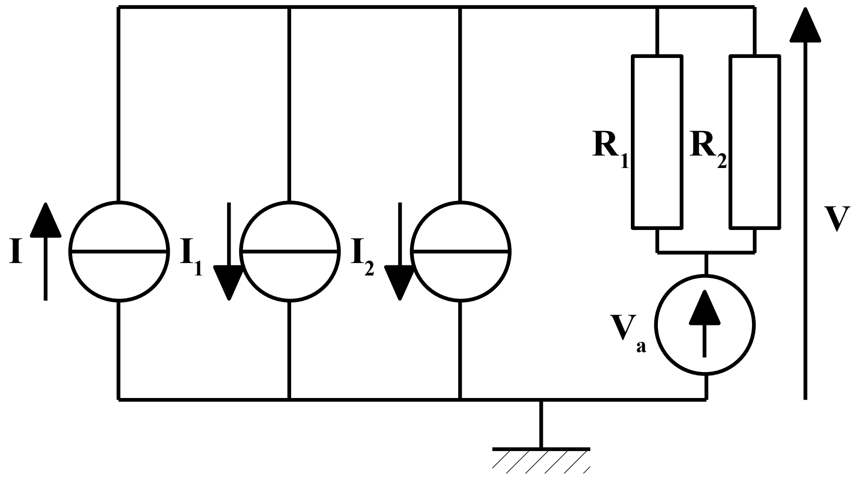


figure 5

B. Homme habillé en régime stationnaire

Un homme habillé a 80% de sa surface recouverte d'un vêtement. On néglige le rayonnement et la convection des vêtements, si bien que ne subsiste plus que la conduction au travers de ces vêtements.

21.Dans le schéma précédent, il est alors nécessaire d'introduire une résistance supplémentaire R_3 pour modéliser la présence des vêtements. Indiquer pourquoi il faut modifier les valeurs des résistances R_1 et R_2. On notera R_1' et R_2' les nouvelles valeurs des résistances remplaçant R_1 et R_2.

22.Donner le lien de R_1' et R_2' avec R_1 et R_2.

23.Modifier le schéma de la *figure* 5 pour tenir compte de ces résistances.

24.Exprimer et calculer la résistance thermique des vêtements R_{vet} conduisant à la même puissance du métabolisme dans une pièce à la température $T_a'=20\,°C$. On suppose que sauf les grandeurs évoquées, toutes les autres grandeurs modélisant le système thermique conservent la même valeur numérique.

C. Homme nu en régime variable

On revient à l'homme nu. La pression de la pièce est supposée constante et égale à $P_0=10^5\,Pa$. On tient compte de la capacité thermique à pression constante, C du corps humain. On admet que les relations $R_{th}P_{th}=\Delta T$ restent valables en régimes lentement variables.

25.En faisant un bilan énergétique entre deux instants t et $t+dt$, sur le corps humain à une température uniforme, $T(t)$, préciser:

- la variation d'enthalpie, dH en fonction de C et T.

- le transfert thermique dû au rayonnement δQ_r en fonction de R_{thr} , T_a , T et du temps t .
- le transfert thermique dû à la convection δQ_c en fonction de R_{thc} , T_a , T et du temps t .
- les transferts thermiques dus au métabolisme, à l'évaporation et les pertes résiduelles en fonction des puissances respectives et du temps t .

On prêtera attention au sens des transferts.

26.En déduire que l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ s'écrit : $\frac{dT}{dt}=A(T-T_a)+B$.

27.On introduit une constante de temps τ . Exprimer τ en fonction de la capacité thermique à pression constante, C et des résistances thermiques de convection R_{thc} et de rayonnement R_{thr} .

28.Exprimer B en fonction des différentes puissances précédemment définies.

29.Redessiner le schéma de la *figure* 5 en le modifiant pour tenir compte de cette capacité C .

30.Sachant qu'un corps dans l'eau se refroidit $25\,fois$ plus vite que dans l'air, exprimer puis calculer la résistance convective $R_{thc\,eau}$ du corps humain dans l'eau. On admettra que la résistance de rayonnement n'est pas modifiée.

IV. Étude expérimentale

Pour vérifier que le corps humain est le siège d'un transfert thermique, on enferme $N=10$ personnes dans une pièce parallélépipédique pendant $2\,heures$ et on enregistre la température de la pièce au cours du temps en présence et en l'absence de ces mêmes personnes. La température des murs est égale à celle de l'air de la pièce. La puissance émise par <u>une</u> personne est du type $P=\beta(T_{peau}-T)$. De même, une partie de l'énergie de la pièce est perdue par fuites avec l'extérieur. Cette puissance perdue P_f est modélisée par $P_f=\beta'(T-T_{ext})$. La pression de la pièce est supposée constante et égale à $P_0=10^5\,Pa$.

31.Exprimer et calculer C_{pa} la capacité thermique à pression constante de l'air de la pièce sachant que les dimensions sont $\ell=7,5\,m$, $L=10\,m$ et $h=4\,m$. L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique pour lequel $\gamma=1,4$. La température sera prise égale à $20\,°C$ et on admettra que C_{pa} restera constant dans la suite du problème.

On admet que la capacité thermique des murs et des objets est d'environ $C_m=3\,10^5\,J.K^{-1}$ et celle des personnes est négligée. De plus, on considère qu'à chaque instant t , la température $T(t)$ des murs et de la pièce est uniforme.

32.En faisant un bilan énergétique entre deux instants t et $t+dt$, sur la pièce à une température uniforme, $T(t)$, préciser:

- la variation d'enthalpie, dH en fonction de C_m , C_{pa} et T ,
- le transfert thermique reçu, δQ_1 dû aux pertes en fonction de β' , T_{ext} , T et du temps t ,

- le transfert thermique reçu, δQ_2 dû aux N personnes en fonction de β , N , T_{peau} et du temps t .

33.En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température de la pièce sous la forme $\frac{dT}{dt}+\frac{T}{\tau}=\frac{T_{\infty}}{\tau}$

- en présence de N personnes,
- en l'absence de ces même personnes.

Exprimer dans les deux cas les expressions de τ et T_{∞} en fonction de C_{pa} , C_m , N , β , β' , T_{peau} et T_{ext} .

34.En déduire l'expression de la température (On ne demande pas de déterminer les constantes d'intégration)

- en présence de N personnes
- en l'absence des personnes.

35.La modélisation des températures enregistrées exprimées en $°C$ donne:

$\theta=24{,}6-4{,}6\exp(-\frac{t}{1700})$ en présence de personnes,

$\theta=21{,}0-1{,}0\exp(-\frac{t}{2400})$ en l'absence de personnes. Le temps est exprimé en secondes.

- En déduire β et β' , T_{ext} et T_{peau} .
- Comparer aux résultats de la troisième partie et conclure.

Réponses

1) $$\boxed{j(x) \text{ en } W\,m^{-2}}$$

C'est la densité volumique de courant thermique.
le flux de $\vec{j}$ à travers une surface représente la puissance thermique traversant S.

---

2) $$\boxed{\vec{j} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T}$$

---

3) $$[\lambda] = \frac{[j]}{[\overrightarrow{grad}\,T]}$$

$$= \frac{[\text{Puissance}]\;L^{-2}}{\theta \quad L^{-1}}$$

$$= [\text{Puissance}]\;L^{-1}\;\theta^{-1}$$

$$\boxed{\lambda \text{ en } W\,m^{-1}\,K^{-1}}$$

---

4) $$\underbrace{d^2H_{P\,constant}}_{\text{nul car régime stationnaire}} = \delta^2Q_{reçu} + \underbrace{\delta^2Q_{produit}}_{\text{nul car pas de sources}}$$

$$0 = j(x)\,S\,dt - j(x+dx)\,S\,dt$$

le flux de $\vec{j}$ est conservatif

$$\boxed{\begin{array}{c} j(x) \text{ est uniforme} \\ j(x) = \text{constante } j \end{array}}$$

$$-\lambda\frac{dT}{dx} = j$$

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -\frac{j}{\lambda}}$$

$$T = -\frac{j}{\lambda}x + B$$

$$\boxed{T = A\,x + B} \quad (\text{avec } A = -\frac{j}{\lambda})$$

---

5) C. L. en $x=0$ $T_0 = A \times 0 + B$

en $x = L$ $T_L = A \times L + B$

donc $A = \dfrac{T_L - T_0}{L}$ et $B = T_0$

$$\boxed{T = \frac{T_L - T_0}{L}\, x + T_0}$$

$$j = -\lambda \frac{T_L - T_0}{L}$$

$$\boxed{j = \frac{\lambda}{L}(T_0 - T_L)}$$

si $T_0 > T_L$ $j > 0$

dans le sens des températures décroissantes

(cf la "chaleur" s'écoule <u>spontanément</u>

<u>du chaud vers le froid</u>)

---

6) loi d'Ohm : $\vec{j}_{elec} = \gamma\, \vec{E}$

↑conductivité électrique

$$\boxed{\vec{j}_{elec} = -\gamma\, \overrightarrow{grad}\, V}$$

loi de Fourier :

$$\vec{j}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$$

thermique	électricité
$\vec{j}_Q$	$\vec{j}_{elec}$
λ	γ
T	V
P_{th} (puissance) ⟷	I intensité
$(T(0) - T(L))$ ⟷	$(V(0) - V(L))$

---

7) $$\boxed{P_{th} = j(x)\ S}$$

---

8)

$$P_{th} = j\,S = \frac{\lambda}{L}(T_0 - T_L)\,S$$

$$T_0 - T_L = R_{th}\,P_{th}$$

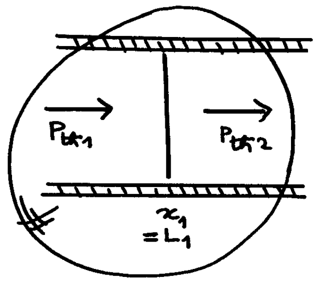
avec

$$\boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}}$$

$$\boxed{R_{th} \text{ en } K\,W^{-1}}$$

---

9)



Pendant dt, pour le système envisagé

$$\underbrace{dH}_{\substack{\text{nul} \\ \text{(régime stationnaire)}}} = \delta Q_{reçu} + \underbrace{\delta Q_{produit}}_{\substack{\text{nul} \\ \text{(pas de sources)}}}$$

$\delta Q_{reçu} \rightarrow P_{th1}\,dt - P_{th2}\,dt$

donc

$$0 = (P_{th1} - P_{th2})\,dt$$

$$\boxed{P_{th1} = P_{th2}}$$

analogie : l'intensité qui traverse deux résistances électriques en série est la même (cf. loi des noeuds)

---

10)

$$T_0 - T_1 = R_{th1}\underbrace{P_{th1}}_{P_{th}}$$

$$T_1 - T_2 = R_{th2}\underbrace{P_{th2}}_{P_{th}}$$

$$T_0 - T_2 = (T_0 - T_1) + (T_1 - T_2)$$

$$R_{th}\ P_{th} = R_{th1}\ P_{th} + R_{th2}\ P_{th}$$

$$\boxed{R_{th} = R_{th1} + R_{th2}}$$

---

11)

$$T_0 - T_1 = R_{th1}\ P_{th}$$

$$T_0 - T_2 = (R_{th1} + R_{th2}) P_{th}$$

En faisant le rapport (cf "diviseurs de tension")

$$\frac{T_0 - T_1}{T_0 - T_2} = \frac{R_{th1}}{R_{th1} + R_{th2}}$$

soit

$$T_1 = T_0 - \frac{R_{th1}}{R_{th1} + R_{th2}} (T_0 - T_2)$$

$$\boxed{T_1 = \frac{R_{th2}}{R_{th1} + R_{th2}} T_0 + \frac{R_{th1}}{R_{th1} + R_{th2}} T_2}$$

---

12)

$$T_0 - T_1 = R_{th1}\ P_{th1}$$

$$T_0 - T_1 = R_{th2}\ P_{th2}$$

d'où :

$$P_{th} = P_{th1} + P_{th2}$$

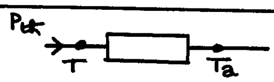
$$\frac{1}{R_{th}} (T_0 - T_1) = \frac{1}{R_{th1}} (T_0 - T_1) + \frac{1}{R_{th2}} (T_0 - T_1)$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}}$$

Il s'agit du problème de deux résistances en parallèle en électricité (même tension et $I = I_1 + I_2$)

---

13) on peut écrire



$$(T - T_a) = \frac{1}{\alpha S}\ P_{th}$$

$$\boxed{R_{thc} = \frac{1}{\alpha S}}$$

---

14) Idem avec K remplace α

$$\boxed{R_{thr} = \frac{1}{KS}}$$

---

15)

$$P_M = \frac{dE_M}{dt}$$

$$= \frac{E_M}{t} \qquad (P_M \text{ supposé constante})$$

$$= \frac{13\ 10^6\ J}{24 \times 3600\ s}$$

$$\boxed{P_M = 150{,}5\ W}$$

---

16)

$$R_{thr} = \frac{1}{KS}$$

$$= \frac{1}{5\ \ 1{,}5}$$

$$\boxed{R_{thr} = \frac{1}{7{,}5} = 0{,}133\ KW^{-1}}$$

$$P_r = \frac{T - T_a}{R_{thr}}$$

$$= 7{,}5\ (33 - 23)$$

$$\boxed{P_r = 75\ W}$$

---

17)

$$R_{thc} = \frac{1}{\alpha S}$$

$$= \frac{1}{4\ \ 1{,}5}$$

$$\boxed{R_{thc} = \frac{1}{6} = 0{,}167\ KW^{-1}}$$

$$P_c = \frac{T - T_a}{R_{thc}}$$

$$= 6\ (33 - 23)$$

$$\boxed{P_c = 60\ W}$$

---

18)

$$P_E = \frac{dm}{dt} L$$

$$= \frac{0{,}3}{24 \times 3600}\ 2{,}4\ 10^6$$

$$\boxed{P_E = \frac{25}{3} = 8{,}33\ W}$$

---

19)

$$\boxed{P_M = P_r + P_c + P_E + P_{res}}$$

d'où $P_{res} = 150{,}5 - 75 - 60 - 8{,}33$

$$\boxed{P_{res} = 7{,}13 \text{ W}}$$

---

20) On écrit que la somme des courant arrivant au noeud supérieur est nulle.

$$I - I_1 - I_2 + (V_A - V)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0$$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + (V - V_A)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

à comparer avec le bilan thermique

$$P_M = P_E + P_{res} + (T - T_A)\left(\frac{1}{R_{thr}} + \frac{1}{R_{thc}}\right)$$

d'où les equivalences évidentes :

I	P_M
I_1	P_E
I_2	P_{res}
V	T
V_A	T_A
R_1	R_{thr}
R_2	R_{thc}

---

21) La puissance émise par convection et par rayonnement est modifiée. <u>La surface à prendre en compte ne vaut plus que 20% de S</u>. Les résistances R_1 et R_2 sont remplacées par R'_1 et R'_2

---

22) Les résistances concernées sont <u>inversement proportionnelles à S</u>

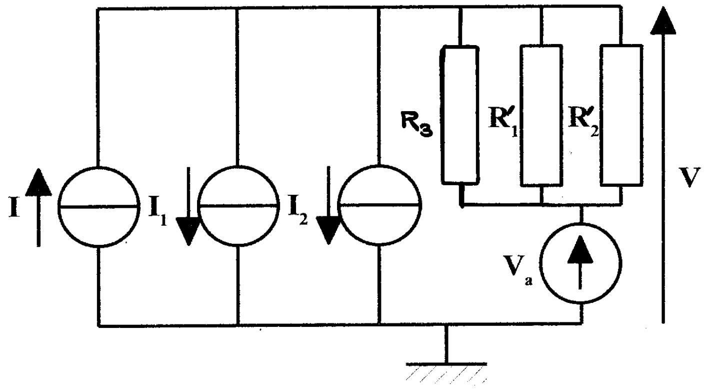
donc

$$\boxed{\begin{aligned} R'_1 &= 5\,R_1 \\ R'_2 &= 5\,R_2 \end{aligned}}$$

car S divisé par 5

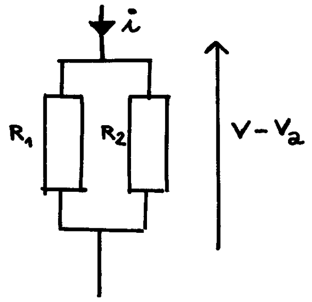
---

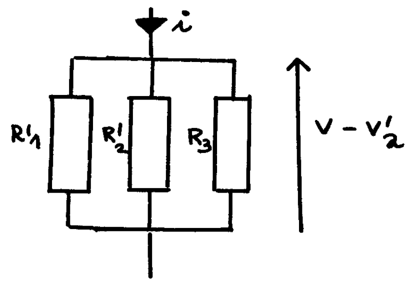
23) La résistance R_3 modélisant la conduction à travers les vêtements est à placer <u>en parallèle</u> sur R'_1 et R'_2



---

24) Il faut écrire que l'intensité est la même dans les deux situations suivantes :





soit en utilisant la notation de conductance $G = \frac{1}{R}$

$$(G_1 + G_2)(V - V_a) = (G'_1 + G'_2 + G_3)(V - V'_a)$$

$$G_3 = (G_1 + G_2)\frac{(V - V_a)}{(V - V'_a)} - (G'_1 + G'_2)$$

$$G_3 = (G_1 + G_2)\left[\frac{V - V_a}{V - V'_a} - \frac{1}{5}\right]$$

Ici

$$\boxed{\frac{1}{R_{ver}} = \left(\frac{1}{R_{thr}} + \frac{1}{R_{thc}}\right)\left[\frac{T - T_a}{T - T'_a} - \frac{1}{5}\right]}$$

A.N. $\frac{1}{R_{ver}} = (7{,}5 + 6)\left[\frac{33 - 23}{33 - 20} - \frac{1}{5}\right]$

$$= 7{,}68 \ \mathrm{W\,K^{-1}}$$

$$\boxed{R_{ver} = 0{,}130 \ \mathrm{K\,W^{-1}}}$$

---

25)

$$\boxed{\begin{aligned} dH &= +C \frac{dT(t)}{dt} dt \\ \delta Q_r &= -\frac{1}{R_{thr}} (T_{(t)} - T_a)\, dt \\ \delta Q_c &= -\frac{1}{R_{thc}} (T_{(t)} - T_a)\, dt \\ \delta Q_M &= +P_M\, dt \\ \delta Q_E &= -P_E\, dt \\ \delta Q_{res} &= -P_{res}\, dt \end{aligned}}$$

---

26)

$$C \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{R_{thr}} (T - T_a) - \frac{1}{R_{thc}} (T - T_a) - P_E - P_{res} + P_M$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \underbrace{-\left(\frac{1}{R_{thr}} + \frac{1}{R_{thc}}\right) \frac{1}{C}}_{A} (T - T_a) + \underbrace{\frac{1}{C} (P_M - P_E - P_{res})}_{B}}$$

---

27)

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{1}{R_{thr}} + \frac{1}{R_{thc}}\right) \frac{1}{C}$$

$$\boxed{\tau = \frac{R_{thr}\, R_{thc}}{R_{thr} + R_{thc}}\, C}$$

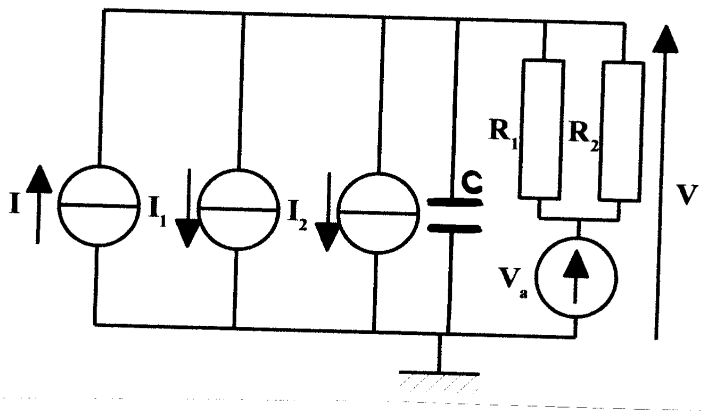
---

28)

$$\boxed{B = \frac{P_M - P_E - P_{res}}{C}}$$

---

29)



---

30)

$$\left.\begin{aligned} \tau_{eau} &= \frac{C}{G_{thr} + G_{thc\,eau}} \\ \tau_{air} &= \frac{C}{G_{thr} + G_{thc}} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\tau_{air}}{\tau_{eau}} = \frac{G_{thr} + G_{thceau}}{G_{thr} + G_{thc}}$$

$$G_{thceau} = \frac{\tau_{air}}{\tau_{eau}} \left(G_{thr} + G_{thc} \right) - G_{thr}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{thceau}} = \frac{\tau_{air}}{\tau_{eau}} \left(\frac{1}{R_{thr}} + \frac{1}{R_{thc}} \right) - \frac{1}{R_{thr}}}$$

A.N. $= 25 \; (7,5 + 6) - 6$

$= 331,5 \; W\,K^{-1}$

$$\boxed{R_{thceau} = 3,02 \; 10^{-3} \; K\,W^{-1}}$$

---

31)

$$C_{pa} = n \, C_{p\,molaire}$$

$$= n \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$

avec $P_o V = n R T$

$$\boxed{C_{pa} = \frac{P_o V}{T} \frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

(avec $V = \ell L h$)

A.N. $$= \frac{10^5 \quad 7,5 \times 10 \times 4 \quad 1,4}{293,15 \quad 0,4}$$

$$\boxed{C_{pa} = 3,58 \; 10^5 \; J\,K^{-1}}$$

---

32) Système : la pièce

$$\boxed{\begin{aligned} dH &= +(C_m + C_{pa}) \frac{dT}{dt} dt \\ \delta Q_1 &= -\beta' (T - T_{ext}) \, dt \\ \delta Q_2 &= +N\beta \, (T - T_{peau}) \, dt \end{aligned}}$$

---

33)

$$dH = \delta Q_1 + \delta Q_2$$

$$(C_m + C_{pa}) \frac{dT}{dt} = -\beta' (T - T_{ext}) + N\beta \, (T_{peau} - T)$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{(\beta' + N\beta)}{C_m + C_{pa}} T = \frac{\beta' T_{ext} + N\beta T_{peau}}{C_m + C_{pa}}}$$

(pour trouver l'équation en l'absence de personnes, il suffit de faire $N=0$)

	τ	T_∞
en presence de personnes	$\dfrac{C_m+C_{pa}}{\beta'+N\beta}$	$\dfrac{\beta' T_{ext} + N\beta T_{peau}}{\beta'+N\beta}$
en l'absence de personnes	$\dfrac{C_m+C_{pa}}{\beta'}$	T_{ext}

34)

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}$$

$$\boxed{T = A\, e^{-t/\tau} + T_\infty}$$

35) Le résultat numérique donne

	τ	T_∞
en présence de personnes	avec 1700	24,6
en l'absence de personnes	sans 2400	21,0

donc : $\boxed{T_{ext} = 21\,°C \quad (294\,K)}$

$$\tau_{sans} = \frac{C_m + C_{pa}}{\beta'} = 2400$$

$$\boxed{\beta' = 274 \quad W K^{-1}}$$

$$\frac{\tau_{sans}}{\tau_{avec}} = 1 + N\frac{\beta}{\beta'} = \frac{2400}{1700}$$

donc

$$\frac{N\beta}{\beta'} = 0{,}412$$

$$\boxed{\beta = 11{,}3 \quad W K^{-1}}$$

$$T_{\infty\,avec} = \frac{\beta' T_{ext} + N\beta\, T_{peau}}{\beta' + N\beta}$$

$$T_{peau} = \left(\frac{\beta'}{N\beta}+1\right) T_{\infty\,avec} - \frac{\beta'}{N\beta} T_{ext}$$

$$\boxed{T_{peau} = 33{,}3 \quad °C}$$

→ La valeur obtenue pour T_{peau} est bien de l'ordre de 33°C

→ β devrait correspondre à G du corps humain.

On avait :

homme nu :
$$G = G_{thr} + G_{thc}$$
$$= 7{,}5 + 6$$
$$= 13{,}5 \text{ W K}^{-1}$$

homme habillé : (80%)
$$G = G'_{thr} + G'_{thc} + G_{vet}$$
$$= \frac{1}{5}(7{,}5 + 6) + 7{,}7$$
$$= 10{,}4 \text{ W K}^{-1}$$

Ici
$$G = 11{,}3 \text{ W K}^{-1}$$

On peut donc imaginer que, par cette belle journée où la température extérieure est assez clémente (21°C), les personnes enfermées sont vêtues de manière plutôt estivale...