CORRIGÉ DU DS N°7 – CCP PSI 2009 –

1 Étude de la fonction φ.

1.1. d est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout t, $d'(t) = 1 - \sin(t) \geqslant 0$. d est donc croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\forall t \geqslant 0,\ d(t) \geqslant d(0) \geqslant 0.$$

En particulier (quand on divise par $t > 0$ on ne change pas le sens des inégalités) :

$$\forall t > 0,\ \frac{1-\cos(t)}{t} \leqslant 1.$$

et bien sûr l'inégalité $\dfrac{1-\cos(t)}{t} \geqslant 0$ provient (pour $t > 0$) de la positivité des numérateur et dénominateur.

1.2. δ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t,\ \delta'(t) = t - \sin(t) \ \text{ et } \ \delta''(t) = 1 - \cos(t).$$

En particulier δ'' est positive, δ' croît et est positive sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall t \geqslant 0,\ \delta(t) \geqslant \delta(0) \geqslant 0$$

On conclut comme plus haut que

$$\forall t > 0,\ 0 \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

Au voisinage de 0^+, la fonction est bornée (on vient de le voir ; on montrerait aisément que la fonction est prolongeable par continuité par la valeur $1/2$) et donc intégrable.

Au voisinage de $+\infty$, c'est un $O(1/t^2)$ puisque $|1-\cos t| \leqslant 2$, et elle est donc aussi intégrable (théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives).

Elle est finalement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et son intégrale sur $\mathbb{R}_+$, étant absolument convergente, est convergente.

Si $x \geqslant 0$, $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est positive, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et dominée par $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ dont on vient de voir l'intégrabilité. Par comparaison, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(x)$ existe pour tout $x \geqslant 0$.

3.1. On a

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}(e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t})\,dt$$

Si $x_1 \leqslant x_2$, la fonction intégrée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc $\varphi(x_1) \geqslant \varphi(x_2)$. φ est ainsi décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est minorée (par 0) elle admet une limite finie en $+\infty$ (théorème de la limite monotone).

3.2. D'après 1.2 on a (les quantités écrites existent) :

$$\forall x > 0,\ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{\beta}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$$

4.1. Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \geqslant 0,\ t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- $\forall x \geqslant 0,\ \forall t > 0,\ \left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t^2}$. La fonction majorante est indépendante de x et est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème du cours sur la continuité d'une intégrale à paramètres permet alors d'affirmer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4.2. Il s'agit d'utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

- $\forall x \geqslant 0,\ t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto -\frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$;
- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $\forall a > 0,\ \forall x \geqslant a,\ \left|-\frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \alpha\mathrm{e}^{-at}$. La fonction dominante est indépendante de x et est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $a > 0$).

φ est ainsi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

4.3. D'après 1.1 on a (les quantités écrites existent) :

$$\forall x > 0,\ 0 \leqslant -\varphi'(x) \leqslant \alpha \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi'(x) = 0$$

4.4. Il s'agit à nouveau d'utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, appliqué à φ'.

- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (conséquence du théorème utilisé en 4.2) ;
- $\forall t > 0,\ x \mapsto -\frac{1-\cos(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}$;
- $\forall x > 0,\ t \mapsto (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $\forall a > 0,\ \forall x \geqslant a,\ \left|(1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant 2\mathrm{e}^{-at}$. La fonction dominante est indépendante de x et est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $a > 0$).

φ est ainsi de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0,\ \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

4.5. On a $1-\cos(t) = \mathscr{R}\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ et donc, d'après un résultat du cours sur les intégrales de fonctions à valeurs complexes :

$$\begin{aligned}
\forall a > 0, \int_0^a (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \mathscr{R}\mathrm{e}\left(\int_0^a (\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{t(\mathrm{i}-x)})\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\mathscr{R}\mathrm{e}\left[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x} + \frac{\mathrm{e}^{t(\mathrm{i}-x)}}{i-x}\right]_{t=0}^{t=a}
\end{aligned}$$

En faisant tendre a vers $+\infty$ pour $x > 0$ fixé, puisque $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{e}^{a(\mathrm{i}-x)} = \lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{e}^{-ax} \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}_{\text{bornée}} = 0$, on obtient

$$\forall x > 0,\ \varphi''(x) = \mathscr{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{i-x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

4.6. Il existe donc une constante c telle que

$$\forall x>0,\ \varphi'(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c=0$ et donc

$$\forall x>0,\ \varphi'(x)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

On remarque que

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi'(x)=-\infty$$

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, un corollaire des accroissements finis indique que φ n'est pas dérivable en 0 mais que sa courbe présente en 0 une demi-tangente verticale.

5.1. On a

$$x\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)=-x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

5.2. Une intégration par parties donne

$$\int_0^x\ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t=\left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x-2\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=x\ln(1+x^2)-2(x-\mathrm{Arctan}(x))$$

ce qui est une primitive de la fonction continue $t\mapsto\ln(1+t^2)$ sur $\mathbb{R}$ par théorème du cours.

5.3. On en déduit, avec l'expression de φ', l'existence d'une constante c telle que

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ \varphi(x)&=x\ln(x)-x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+x-\arctan(x)+c\\&=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\arctan(x)+c.\end{aligned}$$

Avec 5.1 et 3.2 et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c=\pi/2$ et donc

$$\forall x>0,\ \varphi(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x+\frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right).$$

5.4. φ étant continue en 0, on obtient

$$\varphi(0)=\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$$

2 Étude de l'existence de J_m.

1. $t\mapsto\frac{\sin^m(t)}{t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et équivaut à t^{m-1} au voisinage de 0. Pour $m\geqslant 1$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 et finalement intégrable sur $[0,\pi/2]$-.

2. Une intégration par parties donne

$$\text{pour } 0<a<b,\ \int_a^b\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b+\int_a^b\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale du membre de droite ainsi que le terme « entre crochets » admettent des limites en 0 et $+\infty$. En opérant les passages à la limite $a\to 0$ et $b\to+\infty$, on a donc

$$J_1=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t=\varphi(0)=\frac{\pi}{2}$$

3. $t \mapsto e^{ikt}$ est continue sur $[\pi/2,+\infty[$ et $t \mapsto 1/t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle. On peut faire une intégration par parties pour obtenir :

$$\forall k \neq 0,\ \forall a \geqslant \pi/2,\ \int_{\pi/2}^{a} \frac{e^{ikt}}{t}\,dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ikt}\right]_{\pi/2}^{a} + \int_{\pi/2}^{a} \frac{e^{ikt}}{ikt^2}\,dt$$

Comme $\left|\frac{e^{ikt}}{ikt^2}\right| \leqslant \frac{1}{|k|t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, l'intégrale du membre de droite admet une limite quand $a \to \infty$. De plus, le terme « entre crochets » est de limite nulle en $+\infty$, puisque la fonction $t \mapsto e^{ikt}$ est bornée. On peut donc faire tendre a vers $+\infty$ pour obtenir l'existence de I_k.
Si $k = 0$ alors la fonction à considérer est $t \mapsto 1/t$ et c'est une fonction de Riemann non intégrable au voisinage de 0. Comme elle est positive, son intégrale n'existe pas. Finalement,

$$I_k \text{ existe si et seulement si } k \neq 0.$$

4.1. On a

$$\sin^m(t) = \frac{(e^{it} - e^{-it})^m}{(2i)^m} = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k e^{i(m-2k)t}$$

Par linéarité du passage à l'intégrale, on a donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[,\ \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin^m(t)}{t}\,dt = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k I_{m-2k}(x)$$

4.2. Si $m = 2p+1$, on obtient

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[,\ \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2^{2p+1}i(-1)^p}\sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}(-1)^k I_{2(p-k)+1}(x)$$

$2(p-k)+1$ étant impair est non nul et tous les termes de la somme admettent une limite quand $x \to +\infty$. On peut ainsi passer à la limite aussi dans le membre de gauche ce qui donne l'existence de $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}$. Avec la question 1, on a finalement l'existence de J_{2p+1}.

4.3. Pour $m = 2p$, on a cette fois

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[,\ \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2^{2p}(-1)^p}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-1)^k I_{2(p-k)}(x)$$

Dans le membre de droite, tous les termes admettent une limite quand $x \to +\infty$ sauf celui pour $k = p$ qui tend vers $+\infty$ (en rentrant le facteur dans la somme et puisque $I_0(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$). On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi/2}^{x} \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\,dt = +\infty$$

et J_{2p} n'existe pas.

3 Calcul de J_{2p+1}.

1.1. La fonction h_x est paire (le raccord se fait bien en $-\pi$) et ainsi,

$$\forall n,\ b_n(h_x) = 0$$

De plus

$$\forall n,\ a_n(h_x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\pi}t\right)\cos(nt)\,dt$$

Comme $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, le calcul de l'intégrale est aisé ($n \pm \frac{x}{\pi}$ est non nul par hypotèse sur x) et donne

$$\forall n,\ a_n(h_x) = 2\frac{(-1)^n x\sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2}$$

1.2. Comme h_x est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue, sa série de Fourier est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ vers h_x et donc (avec la convention de l'énoncé, c'est $a_0/2$ qui intervient dans la série de Fourier)

$$\forall t\in\mathbb{R},\ h_x(t)=\frac{\sin(x)}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x\sin(x)}{x^2-n^2\pi^2}\cos(nt).$$

Pour $t=0$, on obtient

$$\frac{\sin(x)}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x\sin(x)}{x^2-n^2\pi^2}=1.$$

2.1. f étant continue sur le segment $[-1,1]$ est bornée sur ce segment et

$$|\gamma_n|\leqslant\|f\|_\infty\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi}\frac{dt}{t}=\|f\|_\infty\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}+n\pi}{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}\right).$$

La quantité dans le logarithme est de limite 1 quand $n\to+\infty$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\gamma_n=0.$$

2.2. Le changement de variable $u=t-n\pi$ donne (compte-tenu de l'imparité de f)

$$\gamma_n=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{f((-1)^n\sin(u))}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u=(-1)^n\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{f(\sin(u))}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u.$$

Par ailleurs, en posant $v=-u$, on a

$$\int_{-\pi/2}^{0}\frac{f(\sin(u))}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u=-\int_0^{\pi/2}\frac{f(\sin(v))}{-v+n\pi}\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit que

$$\gamma_n=(-1)^n\int_0^{\pi/2}\left(\frac{f(\sin(u))}{u+n\pi}-\frac{f(\sin(u))}{-u+n\pi}\right)\mathrm{d}u=(-1)^n\int_0^{\pi/2}\frac{-2uf(\sin(u))}{(u+n\pi)(-u+n\pi)}\,\mathrm{d}u$$

ou encore

$$\gamma_n=(-1)^n\int_0^{\pi/2}\frac{2uf(\sin(u))}{u^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}u=\mu_n.$$

2.3. On a

$$\forall t\in[0,\pi/2],\ |u_n(t)|\leqslant\frac{\pi\|f\|_\infty}{n^2\pi^2-\pi^2/4}$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente (c'est un $\mathrm{O}(1/n^2)$). On a donc convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0,\pi/2]$ (ce qui entraîne la convergence simple sur cet ensemble).

2.4. Comme les u_n sont continues, la convergence normale donc uniforme permet de dire que que $\mathrm{S}\in\mathscr{C}^0([0,\pi/2])$.

2.5. Comme la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur le *segment* $[0,\pi/2]$, on est dans le cas simple d'interversion. $\sum\mu_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n=\int_0^{\pi/2}\mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.6. Soit $x \geqslant \pi/2$ et n_x l'unique entier tel que $x \in \left[\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi, \frac{\pi}{2} + n_x\pi\right[$. On a alors, par la relation de Chasles,

$$\int_{\pi/2}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n_x} \gamma_k + \int_{\frac{\pi}{2}+(n_x-1)\pi}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Quand $x \to +\infty$, $n_x \to +\infty$ et $\sum_{k=1}^{n_x} \gamma_k \to \int_0^{\pi/2} \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$. Par ailleurs,

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}+(n_x-1)\pi}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty \int_{\frac{\pi}{2}+(n_x-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n_x\pi} \frac{\mathrm{d}t}{t} = |f\|_\infty \ln\left(\frac{\frac{\pi}{2} + n_x\pi}{\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi/2}^{x} \frac{f(\sin(t))}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$$

2.7. $t \mapsto \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et prolongeable par continuité en 0 (limite $f'(0)$ car $\frac{f(u)}{u} = \frac{f(u)-f(0)}{u-0} \to f'(0)$ quand $u \to 0$). Cette fonction est donc intégrable sur $[0,\pi/2]$.

$t \mapsto \frac{f(\sin(t))}{t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et prolongeable par continuité en 0 (par la même valeur $f'(0)$ car $t \sim sin(t)$ au voisinage de 0). Cette fonction est donc intégrable sur $[0,\pi/2]$.

2.8. On déduit des questions précédentes que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{t} + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{t} + \int_0^{\pi/2} \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad g(t) = \mathrm{S}(t) + \frac{f(\sin(t))}{t} - \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}.
\end{aligned}$$

g est continue sur $]0,\pi/2]$ et prolongeable par continuité en 0 avec $g(0) = \mathrm{S}(0) - f'(0) = -f'(0)$.

3.1. Pour $f = \mathrm{I}d_{[-1,1]}$ (qui vérifie les bonnes hypothèses) on a (question 1.2) :

$$\forall t \in]0,\pi/2],\ \mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t\sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(t)}{t}$$

et avec la question précédente,

$$\mathrm{J}_1 - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\sin(t)}{t} + \frac{\sin(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{\sin(t)}\right)\mathrm{d}t = 0$$

c'est à dire

$$\mathrm{J}_1 = \frac{\pi}{2}.$$

3.2. On utilise cette fois $f(t) = t^3$. On obtient

$$\mathrm{S}(t) = \sin^2(t) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t\sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = \sin^2(t) - \frac{\sin^3(t)}{t}$$

puis avec 2.8 (comme en 3.1, les termes se simplifient)

$$\mathrm{J}_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

3.3. On utilise plus généralement $f(t) = t^{2p+1}$. On obtient :

$$S(t) = \sin^{2p}(t)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2} = \sin^{2p}(t) - \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}$$

puis avec 2.8 (comme en 3.1, les termes se simplifient)

$$J_{2p+1} = \int_0^{\pi/2}\sin^{2p}(t)\,dt.$$

Une intégration par parties donne alors

$$J_{2p+1} = (2p-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)\sin^{2p-2}(t)\,dt = (2p-1)(J_{2p-1}-J_{2p+1})$$

ou encore

$$J_{2p+1} = \frac{2p-1}{2p}J_{2p-1}$$

et on montre enfin grâce à une récurrence que

$$\forall p\in\mathbb{N},\ J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆