Problème de révision

Variables aléatoires discrètes sans mémoire
Énoncé

Partie I: Étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall m \in \mathbb{N}, P(X \geqslant m) > 0$.

On suppose également que X vérifie : $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant n)$. On pose $P(X=0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. On pose $q = 1-p$. Montrer que $P(X \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.
2. Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant m)P(X \geqslant n)$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = P(X \geqslant n)$.
   (a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $P(X \geqslant n)$ en fonction de n et q.
   (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1)$.
   (d) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X=n) = q^n p$.
4. (a) Reconnaître la loi de la variable $X+1$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Partie II: Taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y \geqslant n) > 0$. On définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = P_{(Y \geqslant n)}(Y=n)$.

5. (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{P(Y=n)}{P(Y \geqslant n)}$.
   (b) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}, 1-\lambda_n = \dfrac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)}$.
   (c) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \lambda_n < 1$.
   (d) Montrer par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geqslant n) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.
6. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(Y=k) = 1 - P(Y \geqslant n)$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} P(Y \geqslant n) = 0$.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty$
   (d) Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.

Partie III: Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

7. Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la partie 1.
8. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geqslant n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$.
   (a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geqslant n)$ en fonction de λ et n.
   (c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}, P(Z \geqslant n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.