DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: non autorisée

durée: 2 heures

Sujet

Orbitogramme de la Villette

I. Cinématique

On considère un référentiel galiléen associé au repère orthonormé $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, l'axe Oz est vertical ascendant. La position d'un point matériel M sera définie par ses coordonnées cylindriques, r avec $(r>0)$, θ et z .

On notera respectivement $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ les vecteurs unitaires déduits de $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ par rotation d'angle θ autour de Oz .

1. Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique.

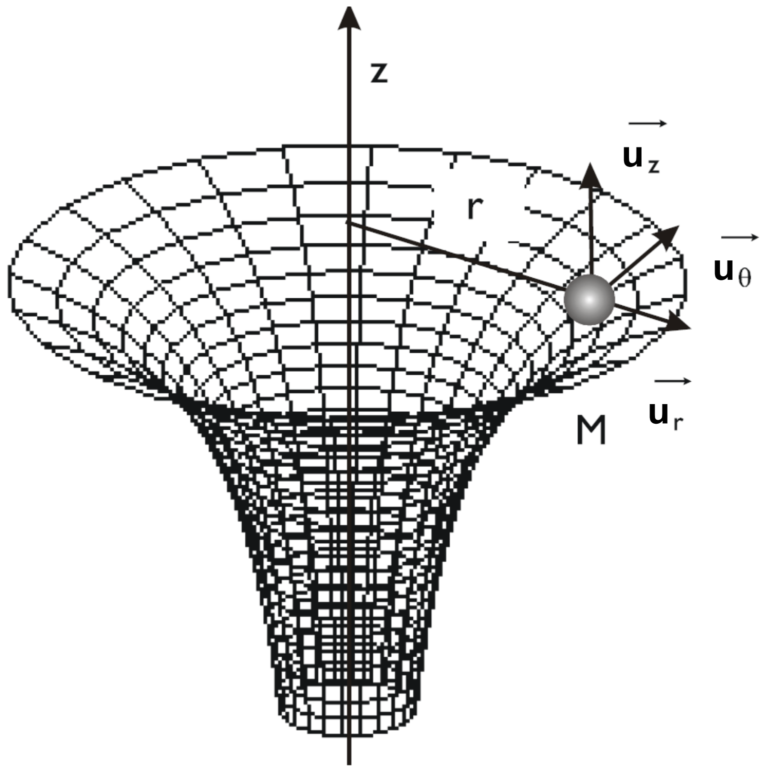
2. En déduire la vitesse $\vec{v}(M)$ dans cette même base.

3. En déduire l'accélération $\vec{a}(M)$ dans cette même base.

4. Montrer que $\vec{a}.\vec{u}_\theta$ peut s'écrire aussi : $\vec{a}.\vec{u}_\theta=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt})$.

II. Étude dynamique et énergétique

On étudie le mouvement d'une bille d'acier M , de masse m , assimilée à un point matériel sous l'action du champ de pesanteur $\vec{g}$, sur une surface de révolution. La surface sur laquelle roule la bille est engendrée par la révolution d'une portion d'hyperbole, $z=-\frac{k}{r}$, $k>0$.



A. Analogie gravitation

La bille se comporte sur cette surface comme un corps céleste soumis à une force de gravitation.

5. Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par un point M_1 de masse m_1 sur un point M_2 de masse m_2. On notera $r=M_1M_2$ la distance entre les points et $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$ le vecteur unitaire orienté de M_1 vers M_2.
6. Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle dont on établira l'expression. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

On revient à l'étude de la bille.

B. Forces

On néglige les frottements. La réaction du support sur la bille est donc normale au support. Elle est notée : $\vec{R}=R_r\vec{u}_r+R_\theta\vec{u}_\theta+R_z\vec{u}_z$.

7. Justifier sans calcul que $R_\theta=0$.
8. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille.

C. Energie

9. Préciser si les forces dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de l'énergie potentielle associée en fonction de la variable r uniquement . On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.
10. En déduire une intégrale première du mouvement.

D. Moment cinétique

11. Exprimer le moment cinétique en O, $\vec{L}_o$, dans la base cylindrique. En déduire sa projection sur l'axe Oz
12. Rappeler le théorème du moment cinétique en un point fixe et donner la démonstration du théorème.
13. En déduire le théorème du moment cinétique en projection selon un axe fixe Oz donnant l'expression de la dérivée de L_{Oz}.
14. Déterminer $\vec{\mathscr{M}}_O$, moment des forces en O puis en déduire $\mathscr{M}_{Oz}$. Conclure.

E. Principe fondamental

15. Écrire le principe fondamental de la dynamique et faire la projection dans la base cylindrique.
16. En déduire (deuxième intégrale première du mouvement) que la quantité $r^2\frac{d\theta}{dt}$ est une constante notée C.

III. Discussion générale du mouvement

17.Déduire de ce qui précède une équation différentielle du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme: $E_m = \frac{1}{2}\, m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \alpha(r) + Ep_{eff}(r)$ où $\alpha(r)$ est positif et sans dimension et où $Ep_{eff}(r)$ est une énergie potentielle effective et E_m l'énergie mécanique totale. Expliciter $\alpha(r)$ et $Ep_{eff}(r)$

18.Tracer l'allure de la courbe $Ep_{eff}(r)$ pour C et k , m , g donnés. Indiquer les coordonnées des points particuliers. Montrer que $Ep_{eff}(r)$ passe par un minimum pour une valeur r_m de r que l'on exprimera en fonction des constantes.

19.En fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale E_0 du système, discuter le caractère lié ou libre du mouvement.

IV. Étude de quelques mouvements particuliers

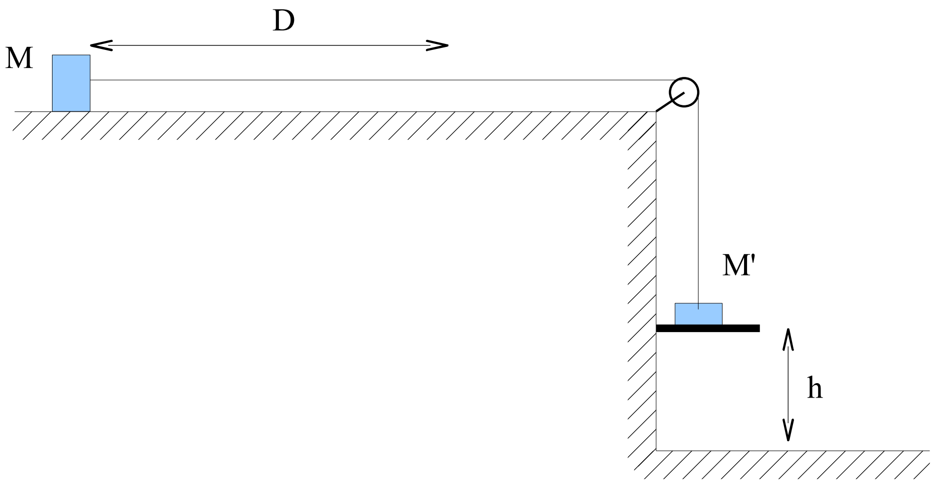
20.Pour quelle valeur de r a-t-on un mouvement circulaire ?. On lance la bille d'une distance r_0 avec une vitesse $\vec{v}_0$. Montrer que, quel que soit r_0 , on peut obtenir un mouvement circulaire horizontal. Préciser la direction et le module de $\vec{v}_0$ (en fonction de r_0 et des autres données du problème) pour obtenir le mouvement circulaire. Déterminer l'expression de la période du mouvement (en fonction de r_0 et des autres données du problème).

21.Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée r de r_0 alors que le mouvement était circulaire. La coordonnée r reste très proche de r_0 . Montrer, en partant d'un développement limité que $\varepsilon = r - r_0$ oscille avec une période dont on déterminera l'expression.

Petit exercice

Deux points matériels M et M' (masses m et m') sont reliés par un fil inextensible susceptible de glisser sur une poulie fixe. Initialement le fil est tendu et le point M' repose sur un support, à une hauteur h du sol. A l'instant $t=0$, un opérateur enlève le support et le point M se met à glisser sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement f .

L'accélération de la pesanteur est $\vec{g}$.



1. On considère la première phase du mouvement du point M , sur la distance h . Déterminer son accélération.
2. On considère la deuxième phase du mouvement du point M . Déterminer son accélération.
3. Quelle est la distance totale D parcourue par M depuis le début du mouvement jusqu'à l'arrêt.
4. En déduire f en fonction de m , m' , h et D .

Réponses

Orbitogramme de La Villette

1) $$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}}$$

2) $$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\\ &= \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z} + z\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt}\end{aligned}$$

avec $\vec{\omega}$ vecteur rotation de $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z})\,/(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} &= \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{u_r}\\ &= \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{u_r}\\ &= \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

3) $$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt}\\ &= \Big(\ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\underbrace{\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}}_{\to\ \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}\Big)\\ &+\Big(\dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\underbrace{\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}}_{\to\ -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}}\Big)\\ &+\Big(\ddot{z}\,\overrightarrow{u_z} + \dot{z}\cancel{\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt}}\Big)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} &= \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{u_\theta}\\ &= \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}\wedge\overrightarrow{u_\theta}\\ &= -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

4) $$\begin{aligned}\vec{a}\,\overrightarrow{u_\theta} &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\\ &= \frac{1}{r}\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}\,\vec{u_\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})}$$

5)

$$\boxed{\vec{F}_{1\to2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}}$$

avec G : constante de gravitation

6)

$$\vec{F}(r) = -\overrightarrow{grad}\,Ep(r)$$

Ici $F(r) = -\dfrac{dEp(r)}{dr}$

donc; $dEp = G\,m_1 m_2 \dfrac{dr}{r^2}$

$$\boxed{Ep = -\frac{G\,m_1 m_2}{r} + \cancel{cste}}$$

7) En un point M, le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie (qui contient l'axe de révolution Oz de la surface)

$\vec{R}$ en M appartient à ce plan de symétrie

$$\boxed{R_\theta = 0}$$

8) Les deux forces agissant sur le point sont:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{R} &= R_r\,\vec{u_r} + R_z\,\vec{u_z}\\ m\vec{g} &= -mg\,\vec{u_z}\end{aligned}}$$

9)

→ $\vec{R}$ ne travaille pas puisque l'on néglige les frottements ($\vec{R}\,\vec{v} = 0$)

→ le poids est une force conservative

$$m\vec{g} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$$

$$-mg = -\frac{dEp}{dz}$$

$$Ep = mgz + \text{constante}$$

$$= -\frac{mgk}{r} + \text{constante}$$

on fait :

$$\boxed{Ep = -\frac{mgk}{r}}$$

remarque :

De même que pour la gravitation, on avait

$$Ep = -\frac{G m_1 m_2}{r} \quad (\text{en } -\frac{1}{r})$$

Ici Ep est de la même forme :

$$Ep = -\frac{mgk}{r} \quad (\text{aussi en } -\frac{1}{r})$$

---

10) Les forces étant conservatives, il y a conservation de l'énergie mécanique totale Em : (intégrale première)

$$Em = \frac{1}{2} m v^2 + Ep$$

$$\boxed{Em = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{mgk}{r}}$$

---

11)

$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z} \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m\dot{r} \\ m r\dot{\theta} \\ m\dot{z} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = -mrz\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r} + m(z\dot{r} - r\dot{z})\overrightarrow{u_\theta} + mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}$$

$$\boxed{L_{Oz} = mr^2\dot{\theta}}$$

---

12) La dérivée du moment cinétique en un point fixe O, pour un

point matériel, est égal au moment des forces en O.

$$\boxed{O \text{ fixe} : \frac{d\overrightarrow{L}(O)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_F(O)}$$

démonstration :

$$\overrightarrow{L}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L}(O)}{dt} = (\overrightarrow{v} - \underbrace{\overrightarrow{v}(O)}_{\uparrow \text{nul}}) \wedge m\overrightarrow{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{v} \wedge m\overrightarrow{v}}_{\text{nul}} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_F(O)$$

---

13) Oz est un axe fixe (O est fixe, $\overrightarrow{u_z}$ est constant)

O fixe donc : $\frac{d\overrightarrow{L}(O)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_F(O)$

$\overrightarrow{u_z}$ constant : $\overrightarrow{u_z} \frac{d\overrightarrow{L}(O)}{dt} = \overrightarrow{u_z}\, \overrightarrow{\mathcal{M}}_F(O)$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{u_z}\, \overrightarrow{L}(O)) = \mathcal{M}_{Oz}$$

$$\boxed{Oz \text{ fixe} : \frac{d}{dt}L_{Oz} = \mathcal{M}_{Oz}}$$

---

14) Ici

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{R} + \overrightarrow{r} \wedge m\overrightarrow{g}$$

$$\begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} R_r \\ 0 \\ R_z \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \left[z\, R_r + r\,(mg - R_z) \right] \overrightarrow{u_\theta}}$$

non nul donc $\overrightarrow{L}(O)$ n'est pas constant

$$\boxed{\mathcal{M}_{Oz} = 0 \quad (\text{forces " axiales "})}$$

donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} L_{Oz} = \text{constante} \\ m r^2 \dot{\theta} = \text{constante} \end{array}}$$

---

15)

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} /\vec{u_r} & R_r & = & m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ /\vec{u_\theta} & 0 & = & m\,\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \\ /\vec{u_z} & R_z - mg & = & m\ddot{z} \end{array}}$$

---

16) De la projection selon $\vec{u_\theta}$, on obtient $r^2\dot{\theta} = \text{cste}$ (intégrale première)

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = C}$$

on avait déjà obtenu cette relation par conservation de L_{Oz} pour des forces axiales (cf 14))

---

17) En 10), on avait

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{mgk}{r}$$

En fonction de r et $\dot{r}$

$$\longrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

$$\longrightarrow \quad z = -\frac{k}{r}$$

$$\dot{z} = \frac{k}{r^2}\dot{r}$$

donc:

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} + \frac{k^2}{r^4}\dot{r}^2\right) - \frac{mgk}{r}$$

$$\boxed{E_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(1+\frac{k^2}{r^4}\right)}_{\alpha(r)}\dot{r}^2 + \underbrace{m\left(\frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{gk}{r}\right)}_{E_{P_{eff}(r)}}}$$

---

18)

$$E_{P_{eff(r)}} = \frac{m}{r}\left(\frac{C^2}{2r} - gk\right)$$

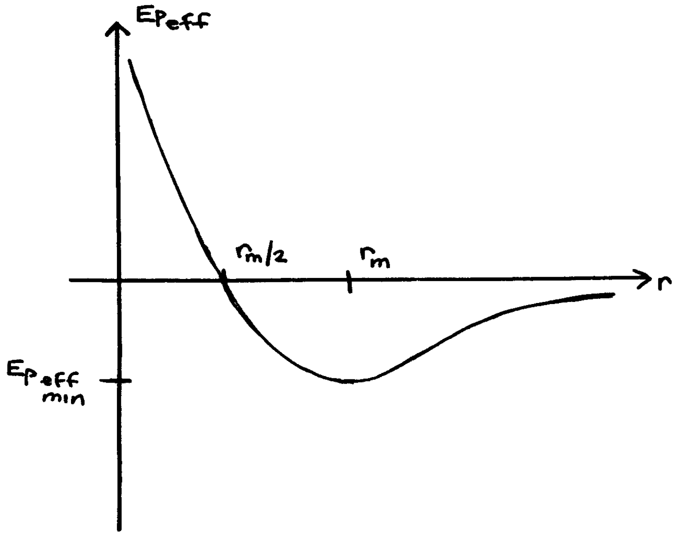
- nul pour $r = \dfrac{C^2}{2gk}$
- $\rightarrow 0_-$ si $r \rightarrow \infty$
- $\rightarrow +\infty$ si $r \rightarrow 0$

On cherche l'extremum

$$\frac{d\,Ep_{eff}}{dr} = m\left(-\frac{C^2}{r^3} + \frac{gk}{r^2}\right)$$

nul pour

$$\boxed{\begin{aligned} r_m &= \frac{C^2}{gk} \\ Ep_{eff\,min} &= -\frac{mgk}{2\,r_m} = -\frac{mg^2k^2}{2C^2} \end{aligned}}$$



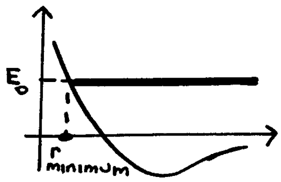
19)

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{noté } E_0}}{E_m} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2}_{\text{positif}}\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{positif}}}{\alpha(r)} + Ep_{eff}(r)$$

donc

$$\underline{E_0 \geq Ep_{eff}(r)}$$

a) si $E_0 \geq 0$

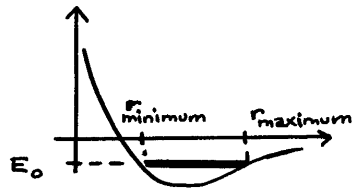


$r \in [\,r_{minimum}\,, +\infty\,]$

non borné

mouvement libre (ou de diffusion)

b) si $0 > E_0 \geqslant Ep_{eff\,min}$



$r \in [r_{minimum}, r_{maximum}]$
borné
mouvement lié

2°) → Le mouvement est circulaire s'il n'y a qu'une seule valeur possible pour r (avec $z = -\frac{k}{r}$ = cste donc la trajectoire est horizontale) $\quad r = r_m = \frac{C^2}{gk}$

→ En fonction des conditions initiales :

- $\dot{z}_0 = 0$ (la vitesse initiale est horizontale)
- $\vec{v_0} = \underbrace{r_0 \dot{\theta}_0}_{v_0} \vec{u_\theta}$
- donc

$$C = r_0^2 \dot{\theta}_0 = r_0 v_0$$

en reportant dans l'expression de r_m

$$r_0 = \frac{(r_0 v_0)^2}{gk}$$

$$\boxed{\vec{v_0} = \sqrt{\frac{gk}{r_0}}\ \vec{u_\theta}}$$

→ La période est $\quad T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}$

$$\boxed{T_0^2 = \frac{4\pi^2 r_0^3}{gk}}$$

La carré de la période est proportionnel au cube du rayon (cf. analogie avec la gravitation)

---

21) On travaille par l'énergie qu'il faut donc écrire au voisinage de r_0.

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(1+\frac{k^2}{r^4}\right) \dot{r}^2 + E_{P_{eff}}(r)$$

→ au voisinage de r_0, au deuxième ordre en $\varepsilon = (r - r_0)$

$$E_{P_{eff}}(r) = E_{P_{eff}}(r_0) + \underbrace{\cancel{\frac{r-r_0}{1!}\left(\frac{dE_P}{dr}\right)_{r_0}}}_{\text{nul}} + \frac{(r-r_0)^2}{2!}\underbrace{\left(\frac{d^2E_P}{dr^2}\right)_{r_0}}_{\frac{mgk}{r_0^3}}$$

→ puisque $\dot{r}^2$ est déjà un terme du deuxième ordre, dans $\alpha(r)$ on fait $r = r_0$

$$\boxed{\underset{(r \text{ proche de } r_0)}{E_m} = \frac{1}{2} m \left(1+\frac{k^2}{r_0^4}\right) \dot{r}^2 + E_{P_{eff}}(r_0) + \frac{(r-r_0)^2}{2} \frac{mgk}{r_0^3}}$$

→ comme traditionnellement, on dérive par rapport au temps :

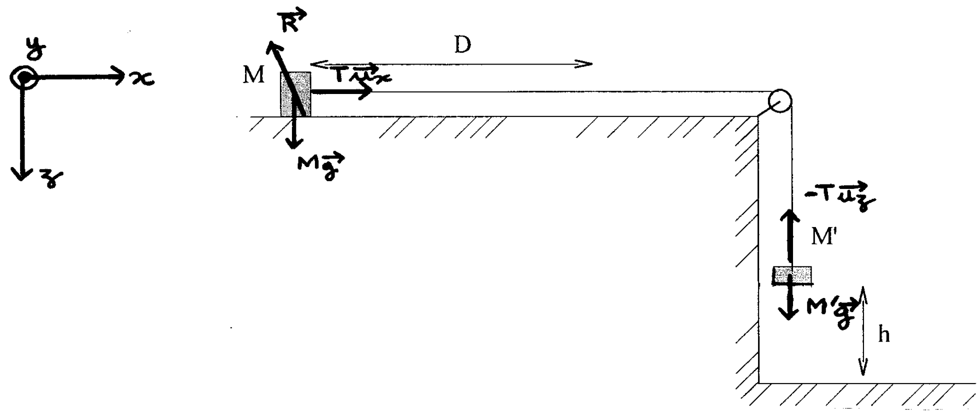
$$0 = m\left(1+\frac{k^2}{r_0^4}\right) \dot{r}\,\ddot{r} + (r-r_0)\,\dot{r}\,\frac{mgk}{r_0^3}$$

$\dot{r} = 0$ est une solution parasite.

$$\boxed{\ddot{r} + \underbrace{\frac{gk/r_0^3}{1+k^2/r_0^4}}_{\omega^2}(r-r_0) = 0}$$

$$\boxed{T = \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{gk}}}_{T_0}\sqrt{1+\frac{k^2}{r_0^4}}}$$

Coefficient de frottement



1) Première phase, fil tendu

• pour M

$$M\vec{g} + T\vec{u_x} + \vec{R} = M\frac{dv}{dt}\vec{u_x}$$

$/\vec{u_x}$ $\quad T + R_x = M\frac{dv}{dt}$

$/\vec{u_z}$ $\quad Mg + R_z = 0$

donc $R_z = -Mg$

donc (loi de Coulomb)

$R_x = -fMg$

finalement

$$\boxed{T - fMg = M\frac{dv}{dt}}$$

• pour M'

$$M'\vec{g} - T\vec{u_z} = M'\frac{dv}{dt}\vec{u_z}$$

$/\vec{u_z}$ $\quad \boxed{M'g - T = M'\frac{dv}{dt}}$

La somme des deux équations donne :

$$M'g - fMg = (M+M')\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{(M'-fM)}{M+M'}g}$$

---

2) Deuxième phase, fil non tendu

M' a touché le sol

M continue sur sa lancée grâce à la vitesse acquise.

Il n'y a plus de tension donc :

$$-fMg = M\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = -fg}$$

---

3) $\longrightarrow$ La distance parcourue par M pendant la première phase est h

La vitesse à la fin de la première phase est notée v_0

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{(cste)}$$

$$\begin{cases} v = at \\ x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

donc

$$v = \sqrt{2ax}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2\frac{(M'-fM)}{(M+M')}g\,h}} \quad (1)$$

$\longrightarrow$ Pour la deuxième phase :

$$\frac{dv}{dt} = a' \quad \text{(cste)}$$

$$v = a't' + v_0 \quad \text{(nul à la fin)}$$

$$x = \frac{1}{2}a't'^2 + v_0t' + h$$

donc

$$D = \frac{1}{2}a'\left(-\frac{v_0}{a'}\right)^2 + v_0\left(-\frac{v_0}{a'}\right) + h$$

$$= -\frac{v_0^2}{2a'} + h$$

$$\boxed{D = \frac{v_0^2}{2fg} + h} \quad (2)$$

$$= \frac{M'-fM}{M'+M}\,\frac{h}{f} + h$$

$$\boxed{D = \frac{h\,M'(1+f)}{(M'+M)\,f}}$$

---

4) On en déduit

$$\boxed{f = \frac{M' h}{D(M+M') - M' h}}$$

(on pourra remarquer que les relations (1) et (2) s'obtiennent rapidement par le théorème de l'énergie sans devoir appliquer le P.F.D.)
