Théorème de Tchébycheff

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $[x]$ sa partie entière. Si $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égale à n, et $\pi(n) = \mathbf{Card}\,(\mathcal{P}(n))$. Enfin, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si p est premier, on note

$$v_p(n) = \sup\{\alpha \in \mathbb{N} \mid p^\alpha \mid n\} \text{ (valuation} p\text{-adique de } n)$$

1. Montrer que si n est un entier, $n \geqslant 2$, on a
$$\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < C_{2n}^n < 4^n$$
2. (a) Si $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $C_{2k+1}^k < 4^k$
   (b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $P_n = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}(n)} p < 4^n$
3. Montrer que si $n \geqslant 14$, $\pi(n) \leqslant \dfrac{n}{2} - 1$
4. Si $n \in \mathbb{N}$ et p est premier, montrer
$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right]$$
5. Soit p un nombre premier et $r \in \mathbb{N}^*$. Si $p^r \mid C_{2n}^n$, montrer que $p^r \leqslant 2n$. En déduire $C_{2n}^n \leqslant (2n)^{\pi(2n)}$
6. Soit $n > 2$. Soit p premier, $\dfrac{2n}{3} < p \leqslant n$. Montrer que $p \wedge C_{2n}^n = 1$
7. Soit $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{P} = \mathcal{P}(2n) \setminus \mathcal{P}(n)$ et $R_n = \displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}} p$. Si $n \geqslant 98$, montrer
$$\frac{4^{\frac{n}{3}}}{2\sqrt{n}(2n)^{\sqrt{\frac{n}{2}}}} < R_n < (2n)^{\pi(2n)-\pi(n)}.$$
8. Si $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 7$, montrer que $2^x \geqslant 18x$. Si $x \geqslant 5$, montrer que $2^x \geqslant 6x$. En déduire que si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 450$, $R_n > 2n$.
9. (a) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$, il existe au moins deux nombres premiers p tels $n < p < 2n$.
   (b) En déduire le théorème de Tchébycheff : Si n est un entier, $n \geqslant 4$, alors il existe au moins un nombre premier p vérifiant $n < p < 2n - 2$.

THÉORÈME DE TCHÉBYCHEFF

1. D'après l'identité du binôme,
$$C_{2n}^n < \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = (1+1)^{2n} = 4^n$$
Montrons l'autre égalité par récurrence
   — Pour $n=2$, c'est vrai car $C_4^2 = 6 > \dfrac{4^2}{2\sqrt{2}}$
   — Soit $n \geqslant 2$. Supposons le résultat vrai pour n et montrons le pour $n+1$. On écrit
$$C_{2n+2}^{n+1} = 2\frac{2n+1}{n+1}C_{2n}^n > \frac{2(2n+1)}{2(n+1)\sqrt{n}}4^n = \frac{2n+1}{2\sqrt{4n(n+1)}\sqrt{n+1}}4^{n+1}$$
   et il suffit alors de voir que $4n(n+1) < (2n+1)^2 = 1 + 4n(n+1)$
2. (a) On écrit
$$2C_{2k+1}^k = C_{2k+1}^k + C_{2k+1}^{k+1} < \sum_{n=0}^{2k+1} C_{2k+1}^n = 2^{2k+1} = 2.4^k$$
   (b) Procédons par récurrence sur n.
   — Pour $n=2$ c'est vrai car $P_2 = 2 < 4^2$
   — Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$.
     — Si n est pair, alors $P_n = P_{n-1} < 4^{n-1} < 4^n$.
     — Sinon n est impair. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Pour tout nombre premier p tel que $k+2 \leqslant p \leqslant 2k+1$, p divise $k!C_{2k+1}^k = (k+1)\cdots(2k+1)$. Or p est premier avec $k!$, donc d'après le théorème de Gauss, $p \mid C_{2k+1}^k$. Si N désigne le produit des nombres premiers p tels que $k+2 \leqslant p \leqslant 2k+1$, on a donc $N \mid C_{2k+1}^k$, donc $N \leqslant C_{2k+1}^k < 4^k$. Or $P_{k+1} < 4^{k+1}$. Donc $P_{2k+1} = NP_{k+1} < 4^k.4^{k+1} = 4^{2k+1}$
3. On vérifie facilement que $\pi(14) = 6 = \dfrac{14}{2} - 1$.
Supposons $n \geqslant 15$. Parmi $1, 2, \cdots, n$, les $E\left(\frac{n}{2}\right) - 1$ nombres paires $4, 6, \cdots, 2E\left(\frac{n}{2}\right)$ sont composés. Par ailleurs $1, 9$ et 15 ne sont pas premiers. On trouve donc au moins $\left(E\left(\dfrac{n}{2}\right) - 1\right) + 3 = E\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2$ nombres composés parmi $1, 2, \cdots, n$. Donc
$$\pi(n) \leqslant n - \left(E\left(\frac{n}{2}\right) + 2\right) \leqslant n - \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n}{2} - 1$$
4. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $v_p(k)$ s'interprète comme l'exposant de p dans la décomposition de k en facteurs premiers. Donc $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^n v_p(k)$. Le symbole de Kronecker défini par $\delta_k^i = 1$ si $p^i \mid k$, $\delta_k^i = 0$ sinon, nous sera utile pour éclaircir notre discours. On a bien sûr $v_p(k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \delta_k^i$, de sorte que
$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^n v_p(k) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_k^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^n \delta_k^i\right)$$
Pour tout i, $\displaystyle\sum_{k=1}^n \delta_k^i$ représente le nombre d'entiers k, $1 \leqslant k \leqslant n$ tels que $p^i \mid k$. Ces entiers sont de la forme ℓp^i où $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \leqslant \dfrac{n}{p^i}$, donc au nombre de $E\left(\dfrac{n}{p^i}\right)$. Donc $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} E\left(\frac{n}{p^i}\right)$
5. Si $x \in \mathbb{R}$, les inégalités
$$2x - 1 < E(2x) \leqslant 2x \quad \text{et} \quad x - 1 < E(x) \leqslant x$$
entraînent $-1 < E(2x) - 2E(x) < 2$, et comme $E(2x) - 2E(x)$ est un entier, $0 \leqslant E(2x) - 2E(x) \leqslant 1$.
Par ailleurs, $p^r \mid C_{2n}^n$ donc
$$r \leqslant v_p\left(C_{2n}^n\right) = v_p\left((2n)!\right) - v_p\left(n!\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(E\left(\frac{2n}{p^k}\right) - 2E\left(\frac{n}{p^k}\right)\right)$$

— Si $p^r > 2n$, $E\left(\frac{2n}{p^r}\right) = E\left(\frac{n}{p^r}\right) = 0$ donc

$$r \leqslant v_p(C_{2n}^n) = \sum_{p^k \leqslant 2n} \left(E\left(\frac{2n}{p^k}\right) - 2E\left(\frac{n}{p^k}\right)\right) \leqslant \sum_{p^k \leqslant 2n} 1$$

— Si $p^r > 2n$, ce dernier terme est strictement inférieur à r, absurde. Donc $p^r \leqslant 2n$

Donc

$$C_{2n}^n = \prod_{p \in \mathcal{P}(2n)} p^{v_p(C_{2n}^n)} \leqslant \prod_{p \in \mathcal{P}(2n)} 2n = (2n)^{\pi(2n)}$$

6. On a $\frac{2n}{p} < 3$ et $n > p \geqslant 1$, donc $E\left(\frac{2n}{p}\right) \leqslant 2$ et $E\left(\frac{n}{p}\right) \geqslant 1$. Donc $E\left(\frac{2n}{p}\right) - 2E\left(\frac{n}{p}\right) = 0$.
Ceci étant, si $n \geqslant 5$, pour tout entier $k \geqslant 2$ on a $p^k > \frac{4n^2}{9} > 2n$, donc $E\left(\frac{2n}{p^k}\right) = E\left(\frac{n}{p^k}\right) = 0$. Donc

$$v_p\left(C_{2n}^n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(E\left(\frac{2n}{p^k}\right) - 2E\left(\frac{n}{p^k}\right)\right) = 0$$

d'où le résultat si $n \geqslant 5$. Si $n = 3$ ou $n = 4$, on doit avoir $p = 3$. Or $C_6^3 = 20$ et $C_8^4 = 70$ ne sont pas divisibles par 3. On a donc le résultat pour tout $n \geqslant 3$