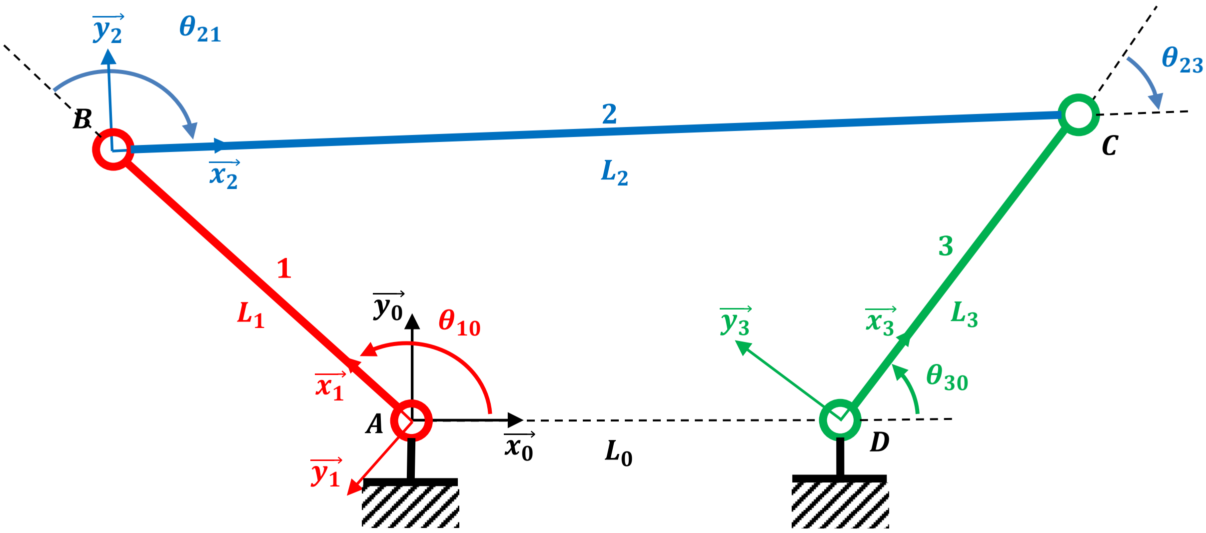
Fermeture géométrique

Exercice 1: Manège « Tapis Volant »



Cas général

Question 1: Ecrire la fermeture de chaîne géométrique du système et en déduire les 3 équations scalaires associées par projection dans la base 0

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$
$$L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} - L_3\overrightarrow{x_3} - L_0\overrightarrow{x_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0 \\ L_1 \cos\theta_{10} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \cos\theta_{30} - L_0 = 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \sin\theta_{30} = 0 \end{cases}$$

Question 2: Ecrire ces 3 équations en projection dans la base 2

$$\begin{cases} \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0 \\ L_1 \cos\theta_{12} + L_2 - L_3 \cos\theta_{32} - L_0 \cos(\theta_{01} + \theta_{12}) = 0 \\ L_1 \sin\theta_{12} - L_3 \sin\theta_{32} - L_0 \sin(\theta_{01} + \theta_{12}) = 0 \end{cases}$$

Question 3: Justifier le fait que le choix de la base 0 est propice à la détermination de la relation liant θ_{10} et θ_{30}

En projection dans 0, on remarque que l'on va pouvoir faire disparaître les termes en $(\theta_{21} + \theta_{10})$ et il ne restera plus que les deux paramètres intéressants, à savoir θ_{10} et θ_{30}

Dans la base 2 par exemple, ce n'est pas trivial…

Question 4: Mettre en place la relation entre θ_{10} et θ_{30} et les longueurs du système sous la forme $-a\cos\theta_{10}+b\cos\theta_{30}-c\cos(\theta_{30}-\theta_{10})+d=0$ où a,b,c et d seront explicités

$$L_1\overrightarrow{x_1}+L_2\overrightarrow{x_2}-L_3\overrightarrow{x_3}-\mathrm{L}_0\overrightarrow{x_0}=\vec{0}$$

$$\begin{cases}\theta_{10}+\theta_{21}+\theta_{32}+\theta_{03}=0\\ L_1\cos\theta_{10}+L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})-L_3\cos\theta_{30}-L_0=0\\ L_1\sin\theta_{10}+L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})-L_3\sin\theta_{30}=0\end{cases}$$

$$\cos(\theta_{21}+\theta_{10})=\frac{L_3\cos\theta_{30}+L_0-L_1\cos\theta_{10}}{L_2}$$
$$\sin(\theta_{21}+\theta_{10})=\frac{L_3\sin\theta_{30}-L_1\sin\theta_{10}}{L_2}$$

$$\cos^2(\theta_{21}+\theta_{10})=\frac{(L_3\cos\theta_{30}+L_0-L_1\cos\theta_{10})^2}{{L_2}^2}$$
$$\sin^2(\theta_{21}+\theta_{10})=\frac{(L_3\sin\theta_{30}-L_1\sin\theta_{10})^2}{{L_2}^2}$$

$$\cos^2(\theta_{21}+\theta_{10})+\sin^2(\theta_{21}+\theta_{10})=1$$

$$(L_3\cos\theta_{30}+L_0-L_1\cos\theta_{10})^2+(L_3\sin\theta_{30}-L_1\sin\theta_{10})^2-{L_2}^2=0$$

$$\begin{aligned}{L_3}^2\cos^2\theta_{30}+2L_3\cos\theta_{30}\,(L_0-L_1\cos\theta_{10})+(L_0-L_1\cos\theta_{10})^2+{L_3}^2\sin^2\theta_{30}\\ -2L_3\sin\theta_{30}\,L_1\sin\theta_{10}+{L_1}^2\sin^2\theta_{10}-{L_2}^2=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{L_3}^2\cos^2\theta_{30}+2L_3L_0\cos\theta_{30}-2L_3\cos\theta_{30}\,L_1\cos\theta_{10}+{L_0}^2-2L_0L_1\cos\theta_{10}+{L_1}^2\cos^2\theta_{10}\\ +{L_3}^2\sin^2\theta_{30}-2L_3\sin\theta_{30}\,L_1\sin\theta_{10}+{L_1}^2\sin^2\theta_{10}-{L_2}^2=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2L_0L_3\cos\theta_{30}-2L_1L_3(\cos\theta_{30}\cos\theta_{10}+\sin\theta_{30}\sin\theta_{10})-2L_0L_1\cos\theta_{10}+{L_0}^2+{L_1}^2-{L_2}^2+{L_3}^2\\ =0\end{aligned}$$
$$2L_0(L_3\cos\theta_{30}-L_1\cos\theta_{10})-2L_1L_3\cos(\theta_{30}-\theta_{10})+{L_0}^2+{L_1}^2-{L_2}^2+{L_3}^2=0$$

$$-2L_0L_1\cos\theta_{10}+2L_0L_3\cos\theta_{30}-2L_1L_3\cos(\theta_{30}-\theta_{10})+{L_0}^2+{L_1}^2-{L_2}^2+{L_3}^2=0$$

$$-a\cos\theta_{10}+b\cos\theta_{30}-c\cos(\theta_{30}-\theta_{10})+d=0$$
$$\begin{cases}a=2L_0L_1\\ b=2L_0L_3\\ c=2L_1L_3\\ d={L_0}^2+{L_1}^2-{L_2}^2+{L_3}^2\end{cases}$$

Question 5: Dériver cette relation et obtenir la relation cinématique entre $\dot{\theta}_{30}$ et $\dot{\theta}_{10}$

$$2L_0\left(-\dot{\theta}_{30}L_3\sin\theta_{30}+\dot{\theta}_{10}L_1\sin\theta_{10}\right)+\left(\dot{\theta}_{30}+\dot{\theta}_{01}\right)2L_1L_3\sin(\theta_{30}+\theta_{01})=0$$

$$-L_0L_3\sin\theta_{30}\,\dot{\theta}_{30}+L_0L_1\sin\theta_{10}\,\dot{\theta}_{10}+L_1L_3\sin(\theta_{30}+\theta_{01})\,\dot{\theta}_{30}-L_1L_3\sin(\theta_{30}+\theta_{01})\,\dot{\theta}_{10}=0$$

$$(L_1L_3\sin(\theta_{30}+\theta_{01})-L_0L_3\sin\theta_{30})\dot{\theta}_{30}+(L_0L_1\sin\theta_{10}-L_1L_3\sin(\theta_{30}+\theta_{01}))\dot{\theta}_{10}=0$$

$$\boxed{\dot{\theta}_{30}=\frac{L_1}{L_3}\frac{L_3\sin(\theta_{30}+\theta_{01})-L_0\sin\theta_{10}}{L_1\sin(\theta_{30}+\theta_{01})-L_0\sin\theta_{30}}\dot{\theta}_{10}}$$

Cas du manège

Question 6: Simplifier la relation géométrique dans le cas du manège

$$2L_0(L_3\cos\theta_{30}-L_1\cos\theta_{10})-2L_1L_3\cos(\theta_{30}+\theta_{01})+{L_0}^2+{L_1}^2-{L_2}^2+{L_3}^2=0$$
$$2LL'(cos\,\theta_{30}-cos\,\theta_{10})-2L^2\,cos(\theta_{30}+\theta_{01})+{L'}^2+L^2-{L'}^2+L^2=0$$
$$2LL'(cos\,\theta_{30}-cos\,\theta_{10})-2L^2\,cos(\theta_{30}+\theta_{01})+2L^2=0$$
$$L'(cos\,\theta_{30}-cos\,\theta_{10})-L\,cos(\theta_{30}+\theta_{01})+L=0$$

$$\boxed{L'(cos\,\theta_{30}-cos\,\theta_{10})+L[1-cos(\theta_{30}-\theta_{10})]=0}$$

Question 7: Résoudre l'équation obtenue et déterminer θ_{30} en fonction de θ_{10}

Merci Roberto Pinciroli (collègue de Maths) pour les méthodes de résolution qui suivent ;)

$$L'(cos\,\theta_{30}-cos\,\theta_{10})+L[1-cos(\theta_{30}-\theta_{10})]=0$$
$$\theta_{30}=y\quad;\quad\theta_{10}=x$$
$$L'(cos\,y-cos\,x)+L[1-cos(y-x)]=0$$

$$cos\,x-cos\,y=-2\,sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$1-cos(y-x)=cos(0)-cos(y-x)=2\,sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{y-x}{2}=2\,sin^2\frac{y-x}{2}$$

$$-2L'\,sin\frac{y+x}{2}\sin\frac{y-x}{2}+2L\,sin^2\frac{y-x}{2}=0$$
$$\sin\frac{y-x}{2}\left[-L'\,sin\frac{y+x}{2}+L\,sin\frac{y-x}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\frac{y-x}{2}=0\\-L'\,sin\frac{y+x}{2}+L\,sin\frac{y-x}{2}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y-x}{2} = k\pi \\ -L'\left(sin\dfrac{y}{2}cos\dfrac{x}{2} + cos\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\right) + L\left(sin\dfrac{y}{2}cos\dfrac{x}{2} - cos\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ -L' \, sin\dfrac{y}{2}cos\dfrac{x}{2} - L' \, cos\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x}{2} + L\, sin\dfrac{y}{2}cos\dfrac{x}{2} - L\, cos\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ (L-L')\, sin\dfrac{y}{2}cos\dfrac{x}{2} - (L+L')\, cos\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \begin{cases} L = L' \Rightarrow cos\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{x}{2} = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \dfrac{(L-L')\, sin\frac{y}{2}cos\frac{x}{2} - (L+L')\, cos\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$x = \pi \Rightarrow (L-L')\, sin\frac{y}{2}cos\frac{x}{2} - (L+L')\, cos\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow cos\frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \pi$$

$$y = \pi \Rightarrow (L-L')\, sin\frac{y}{2}cos\frac{x}{2} - (L+L')\, cos\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi$$

$$\Leftrightarrow (x = \pi \ \Leftrightarrow y = \pi) \Leftrightarrow (x \neq \pi \ \Leftrightarrow y \neq \pi)$$

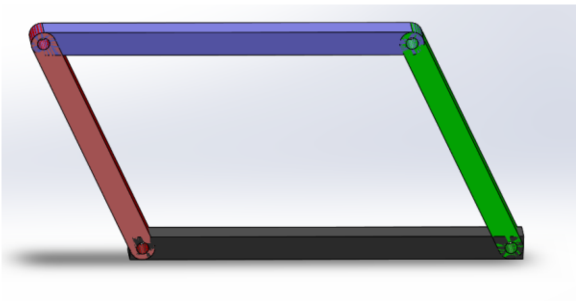
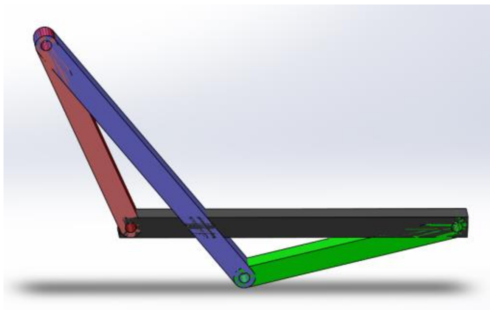
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \begin{cases} L = L' \Rightarrow cos\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{x}{2} = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \begin{cases} x = y = \pi + 2k\pi \\ \dfrac{(L-L')\, sin\frac{y}{2}cos\frac{x}{2} - (L+L')\, cos\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}cos\frac{y}{2}} = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \begin{cases} L = L' \Rightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \begin{cases} x = y = \pi + 2k\pi \\ \dfrac{(L-L')\, sin\frac{y}{2}}{cos\frac{y}{2}} - \dfrac{(L+L')\sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}} = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \begin{cases} L = L' \Rightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \begin{cases} x = y = \pi + 2k\pi \\ (L-L')\, tan\dfrac{y}{2} - (L+L')\tan\dfrac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow tan\dfrac{y}{2} = \dfrac{L+L'}{L-L'}\tan\dfrac{x}{2} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \begin{cases} L = L' \Rightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \begin{cases} x = y = \pi + 2k\pi \\ \frac{y}{2} = \tan^{-1}\left[\frac{L+L'}{L-L'}\tan\frac{x}{2}\right] + k\pi \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y = x + 2k\pi} \\ \begin{cases} L = L' \Rightarrow \begin{cases} y = \pi + 2k\pi \\ x = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ L \neq L' \Rightarrow \begin{cases} x = y = \pi + 2k\pi \\ y = 2\tan^{-1}\left[\frac{L+L'}{L-L'}\tan\frac{x}{2}\right] + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$y = x + 2k\pi$	$y = 2\tan^{-1}\left[\frac{L+L'}{L-L'}\tan\frac{x}{2}\right]$
	

Question 8: Simplifier la relation cinématique liant $\dot{\theta}_{30}$ et $\dot{\theta}_{10}$ dans le cas de la solution liée au manège

$$\dot{\theta}_{30} = \frac{L_1L_3\sin(\theta_{30}+\theta_{01}) - L_0L_1\sin\theta_{10}}{L_1L_3\sin(\theta_{30}+\theta_{01}) - L_0L_3\sin\theta_{30}}\dot{\theta}_{10}$$

$$\theta_{30} = \theta_{10} = \theta$$

On sait déjà qu'en dérivant cette relation, on aura :

$$\dot{\theta}_{30} = \dot{\theta}_{10}$$

Mais sinon :

$$\dot{\theta}_{30} = \frac{L^2\,sin(\theta-\theta) - L'L\,sin\,\theta}{L^2\,sin(\theta-\theta) - L'L\,sin\,\theta}\dot{\theta}_{10}$$

$$\dot{\theta}_{30} = \dot{\theta}_{10}$$

Question 9: Faire le bilan du nombre d'équations et d'inconnues du système initial et en déduire s'il est possible d'exprimer tous les paramètres géométriques $\boldsymbol{\theta_{21}}$, $\boldsymbol{\theta_{32}}$ et $\boldsymbol{\theta_{30}}$ en fonction de l'entrée $\boldsymbol{\theta_{10}}$

On a 3 équations et 4 inconnues dont l'une est l'entrée, le système est solvable.

Question 10: En utilisant l'équation de fermeture angulaire, en déduire la relation liant $\boldsymbol{\theta_{21}}$ et $\boldsymbol{\theta_{23}}$ dans le cas du manège

$$\theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0$$
$$\theta_{10} = \theta_{30} = -\theta_{03}$$
$$\theta_{21} + \theta_{32} = 0$$
$$\theta_{21} = \theta_{23}$$

Soit finalement :

$$\theta_{21} = \theta_{23}$$

Question 11: En reprenant les équations issues de la relation de Chasles, donner finalement la relation liant les 4 angles du manège

$$\begin{cases} L\cos\theta_{12} + L' - L\cos\theta_{32} - L'\cos(\theta_{01} + \theta_{12}) = 0 \\ L\sin\theta_{12} - L\sin\theta_{32} - L'\sin(\theta_{01} + \theta_{12}) = 0 \end{cases}$$

$$\theta_{12} = \theta_{32}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L' - L'\cos(\theta_{01} + \theta_{12}) = 0 \\ -L'\sin(\theta_{01} + \theta_{12}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta_{01} + \theta_{12}) = 1 \\ \sin(\theta_{01} + \theta_{12}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \theta_{01} + \theta_{12} = 0 + 2k\pi$$
$$\theta_{01} = \theta_{21} + 2k\pi$$

Soit finalement :

$$\theta_{21} = \theta_{23} \quad ; \quad \theta_{01} = \theta_{21} \quad ; \quad \theta_{30} = \theta_{10}$$

$$\theta_{12} = \theta_{32} = \theta_{10} = \theta_{30}$$