Eléments de circuits linéaires en regime continu ou quasi-permanent

Table des matières

1 Dipôles passifs linéaires fondamentaux : R,L,C **2**
1.1 Conducteur ohmique ou résistor R 2
1.1.1 Loi d'Ohm 2
1.1.2 Modèle microscopique 2
1.1.3 Aspect énergétiques 3
1.1.4 Groupement de résistor 4
1.2 Condensateur 5
1.2.1 Aspect énergétique 5
1.2.2 Groupement des condensateurs ideaux 6
1.3 Bobine 7
1.3.1 Aspect énergetique pour une bobine ideale 7
1.3.2 Groupement de bobines ideales 7

2 Diviseur de tension ou de courant **8**
2.1 Pont diviseur de tension 8
2.2 Diviseur de courant 8

3 Dipôles actifs **9**
3.1 Source de tension (source indépendante de tension) 9
3.1.1 Source linéaire ideale 9
3.1.2 Modèle de Thevenin 9
3.2 Source de courant (source indépendante de courant) 9
3.2.1 Source ideale 9
3.2.2 Modèle de Norton 10
3.2.3 Equivalence Thevenin-Norton 10

4 Groupement de dipôles actifs lineaires **11**
4.1 Groupement serie : modélisation de Thevenin 11
4.2 Groupement parallèle : modèle de Norton 11

1 Dipôles passifs linéaires fondamentaux : R,L,C

1.1 Conducteur ohmique ou résistor R

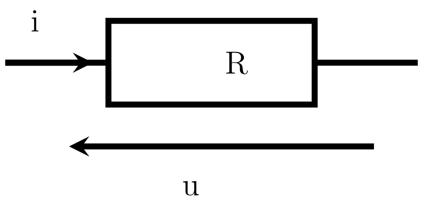
La resistance est constituée soit par un dépôt de carbone ou d'oxyde métallique sur un isolant soit par un enroulementd'un fil conducteur.

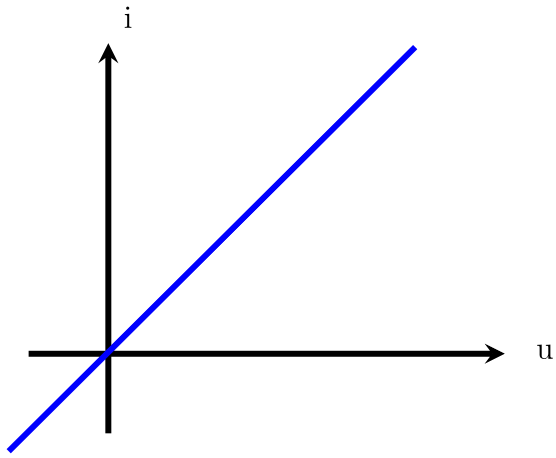
1.1.1 Loi d'Ohm

un conducteur ohmique ou résistor satisfait à la loi d'Ohm :

$$\boxed{u = r.i} \text{ ou } \boxed{i = G.u}$$

R : résistance en ohm (Ω)
$G = \dfrac{1}{R}$ conductance en Siemens(s)





Les caractéristiques statiques et dynamiques sont confondues . Il s'agit d'un dipôle symétrique .

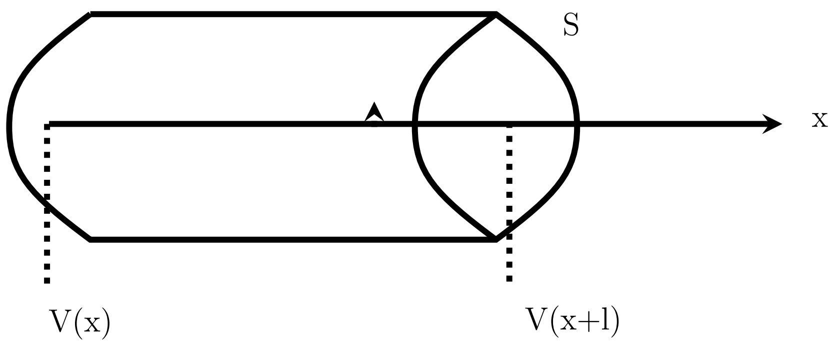
1.1.2 Modèle microscopique

La résistance R ne dépend que de la nature du conducteur et ses caractéristiques géométriques et pas de son état éléctrique (u,i) .
•Application : Résistance d'un conducteur cylindrique homogène
Soit un fil métallique cylindrique homogène d'axe (ox) de section s et de résistivité ρ , alimenté par un courant continu I .
• résistance R d'une longueur l du fil
On admet

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$$

et

$$\boxed{dV = -\overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl}}$$



La loi d'Ohm local

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \rho.\overrightarrow{j}}$$

$\overrightarrow{j}$: densité volumique de courant
$V(x) - V(x+l) = -\int_x^{x+l} dv = \int_x^{x+l} E.dx = \rho.j.l$ (en régime permanent E et j sont des constantes)
or $i = j.s \Rightarrow u = v_1 - v_2 = R.i$ avec $\boxed{R = \rho.\frac{l}{s}}$
•Résultat
Pout tout conducteur de section s constante on a :

$$\boxed{R = \rho.\frac{l}{s}}$$

avec R : résistance (Ω)
ρ : la résistivité $(\Omega.m)$
l : la longueur du conducteur (m)
s : la section du conducteur (m^2)
• Remarque : La résistance d'un conducteur métallique est une fonction croissante de la température.

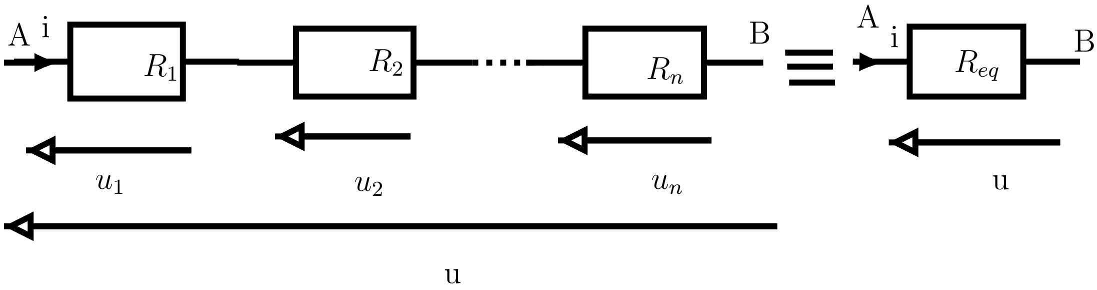
1.1.3 Aspect énergétiques

Le passage d'un courant dans un résistor se manifeste par un échauffement du milieu conducteur, ce phénomène est appelé effet Joule,qui s'interprète par l'échanges énergétiques entre les électrons mobiles (accélerés par le champ électrique) et les ions fixes du réseau à la suite des collisions.
La puissance consommée par le résistor s'écrit :

$$\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = u.i = R.i^2 = \frac{u^2}{R}}$$

1.1.4 Groupement de résistor

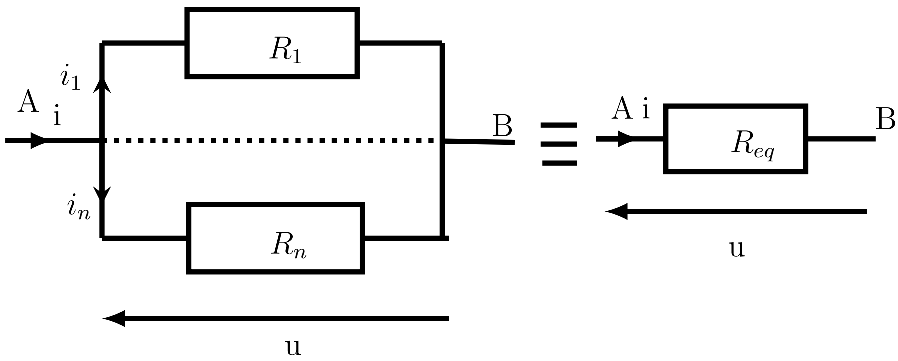
1. Groupement en serie



$u = \sum_{k}^{n} u_k = \sum_{k} R_k.i = R_{eq}.i$ avec R_{eq} la résistance équivalente entre A et B .

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{k}^{n} R_k}$$

2. Groupement prallèle

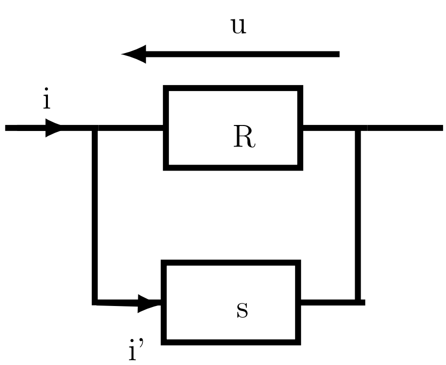


La loi des noeuds : $i = \sum_{k}^{n} i_k = \sum_{k}^{n} \frac{u}{R_k} = \frac{u}{R_{eq}}$

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$$

•Application : Shunt

Un shunt est une résistance de faible valeur s que l'on monte en parallèle avec une résistance R



$i = G_{eq}.u = (\frac{1}{R} + \frac{1}{s})u$ or $s << R \Rightarrow \frac{1}{R} << \frac{1}{s}$

$$\boxed{i \approx \frac{u}{s} = i'}$$

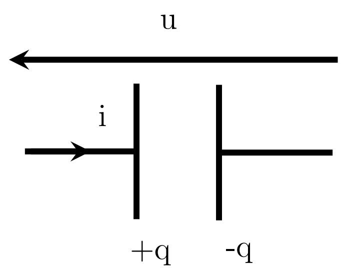
Donc le shunt sert en pratique à protéger un appareil électrique (galvanomètre) en limitant l'intensité à la valeur maximale supportée par l'appareil.

1.2 Condensateur

Un condensateur est constitué de deux armatures qui se font en face et qui portent des charges opposées $+q$ et $-q$. La charge q est proportionnelle à la tension u appliquée entre les armatures :

$$\boxed{q = C.u}$$

C la capacité en $Farad$ (F)



Dans le cadre de l'A.R.Q.P et pour un condensateur ideal

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du}{dt}}$$

1.2.1 Aspect énergétique

La puissance électrique instantanée $P = u.i = C.u.\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}C.u^2) = \frac{dE_e}{dt}$

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2}C.u^2}$$

E_e représente l'énergie emmagasinée dans un condensateur ideal . Cette énergie est continue par conséquent la tension aux bornes du condensateur idéal (de même pour q) est toujours continue .

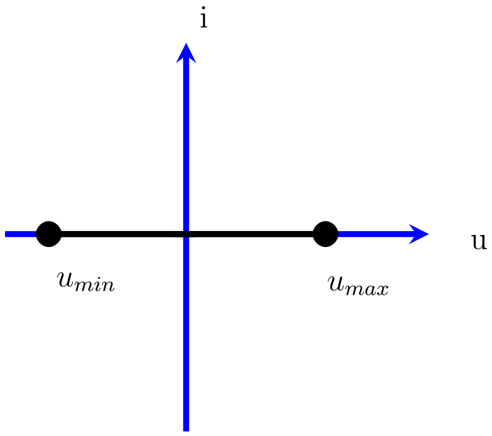
• Remarque : En régime continue $u = cte \Rightarrow i = C.\frac{du}{dt} = 0$ le condensateur ideal se comporte comme un coupe circuit (circuit ouvert) .

• Application : Caractéristique statique et dynamique d'un condensateur

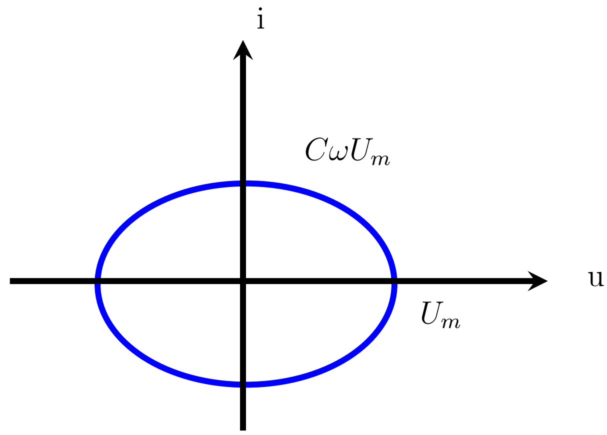
En statique $i = 0, \forall u$

En régime harmonique : $u(t) = U_m \cos(\omega t) \Rightarrow i = C.\frac{du}{dt} = -C\omega U_m \sin(\omega t)$

$(\frac{u}{U_m})^2 + (\frac{i}{C\omega U_m})^2 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$



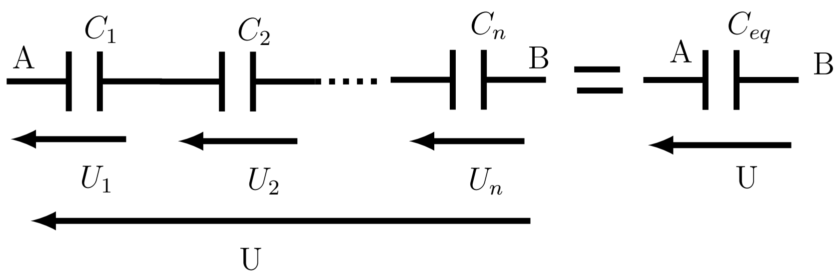
caractéristique statique



caractéristique dynamique

1.2.2 Groupement des condensateurs ideaux

1. Groupement série

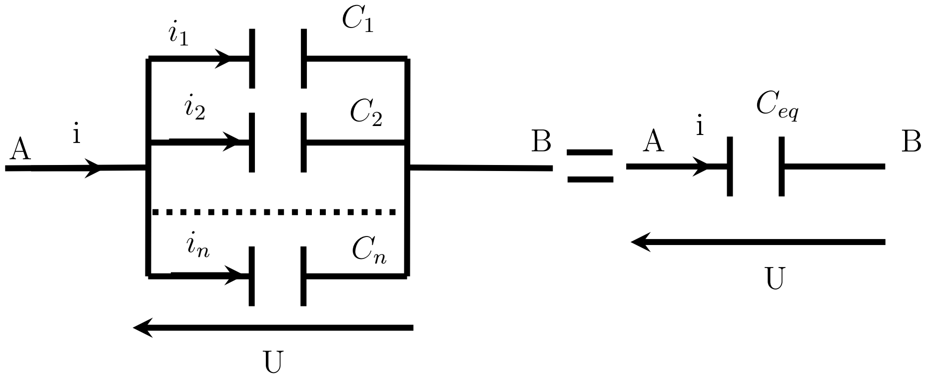


le courant traversant ces condensateurs $i = C_k \dfrac{du_k}{dt} = C_{eq}\dfrac{du}{dt}$

$u = \sum_k u_k \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \sum_k \dfrac{du_k}{dt} = \sum_k \dfrac{i}{C_k} = \dfrac{i}{C_{eq}}$ Donc

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_k \frac{1}{C_k}}$$

2. Groupement parallèle



$$i = \sum_k i_k = \sum_k (C_k \frac{du}{dt}) = (\sum_k C_k)\frac{du}{dt} = C_{eq}\frac{du}{dt}$$

$$\boxed{C_{eq} = \sum_k C_k}$$

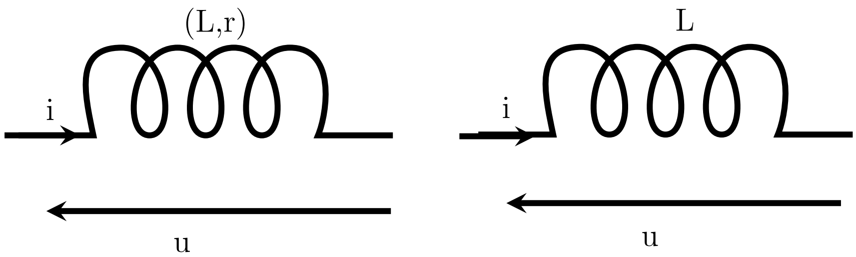
1.3 Bobine

C'est un enroulement d'un fil conducteur avec ou sans noyau , la bobine sans noyau présnte une inductance $L = cte$
Pour une bobine

$$\boxed{u = r.i + L\frac{di}{dt}}$$

L :inductance en Henry (H)
r : résistance en Ohm (Ω)
Pour une bobine ideal

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt}}$$



Bobine Bibine ideale

1.3.1 Aspect énergetique pour une bobine ideale

La puissance instantannée : $P = u.i = Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2) = \frac{dE_m}{dt}$

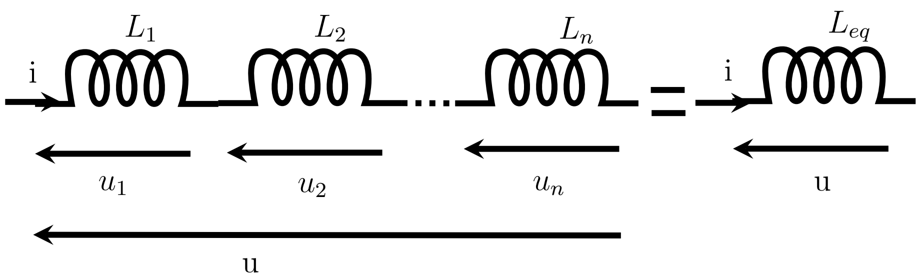
$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}Li^2}$$

E_m représente l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine ideale . Le bilan énergetique exige la continuité de E_m par conséquent l'intensité d'un courant i traversant une bobine ideale reste toujours continue .

• Remarque : En régime continu $i = cte \Rightarrow u = L\frac{di}{dt} = 0$ donc la bobine ideale se comporte comme un court-circuit .
La cractéristique dynamique d'une bobine est une ellipse .

1.3.2 Groupement de bobines ideales

1. Groupement série



$$u=\sum_k u_k=\sum_k(L_k\frac{di}{dt})=(\sum_k L_k)\frac{di}{dt}=L_{eq}\frac{di}{dt}$$

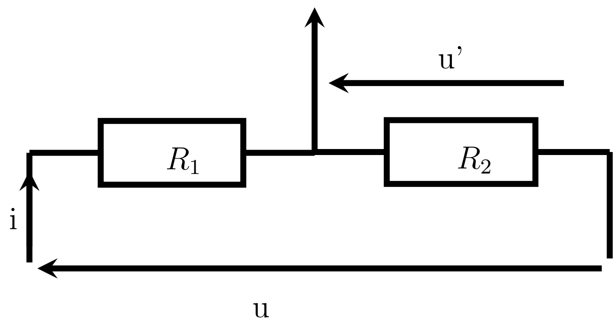
$$\boxed{L_{eq}=\sum_k L_k}$$

2. Groupement prallèle
   On montre que

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}}=\sum_k \frac{1}{L_k}}$$

2 Diviseur de tension ou de courant

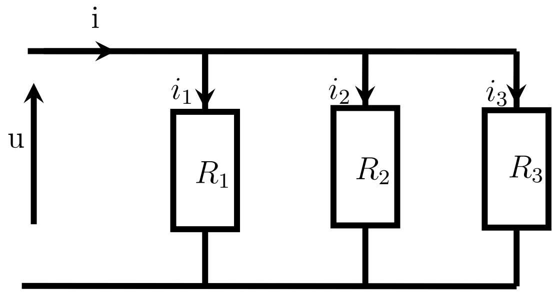
2.1 Pont diviseur de tension



$$\frac{u}{R_1+R_2}=\frac{u'}{R_2}$$

$$\boxed{u'=\frac{R_2}{R_1+R_2}u}$$

2.2 Diviseur de courant



$i_k=\dfrac{u}{R_k}\Rightarrow i_1=\dfrac{u}{R_1},i_2=\dfrac{u}{R_2},i_3=\dfrac{u}{R_3}$

$i=\sum_k i_k=(\sum_k G_k)u=G_{eq}u$ avec $G=\dfrac{1}{R}$

$$\boxed{i_k=\frac{G_k}{G_{eq}}i}$$

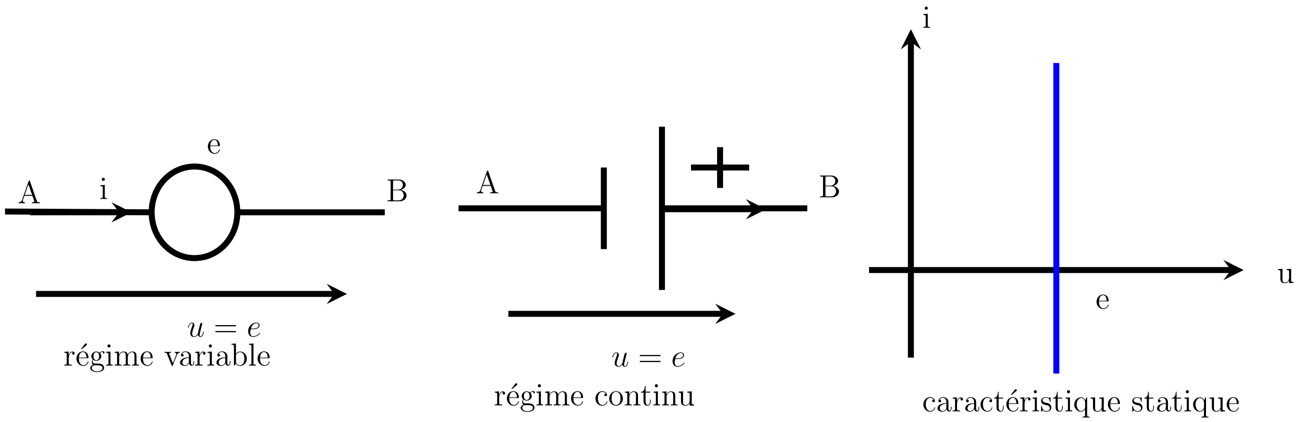
Donc $i_1=\dfrac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}i\,;i_2=\dfrac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}i\,;i_3=\dfrac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}i$

3 Dipôles actifs

3.1 Source de tension (source indépendante de tension)

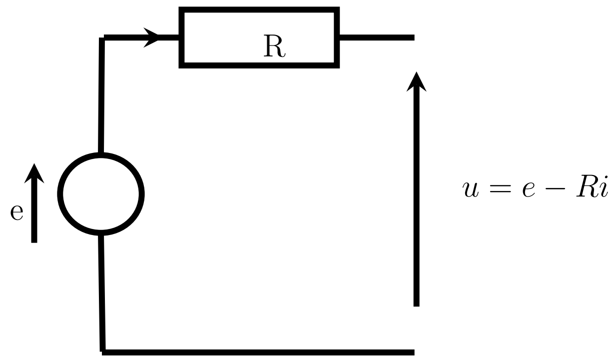
3.1.1 Source linéaire ideale

Elle présente une force électromotrice constante $e = cte$ quelque soit le courant



3.1.2 Modèle de Thevenin

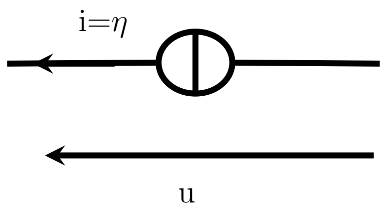
Il tient compte les effets dissipatifs au sein de la source

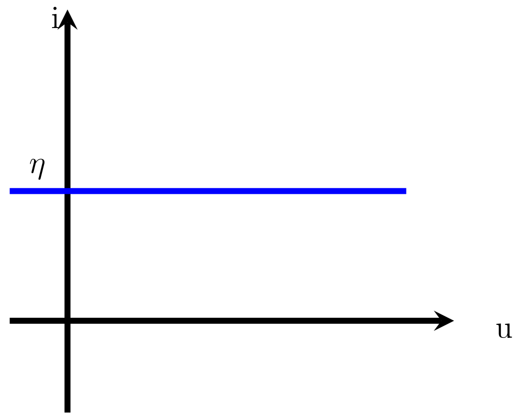


3.2 Source de courant (source indépendante de courant)

3.2.1 Source ideale

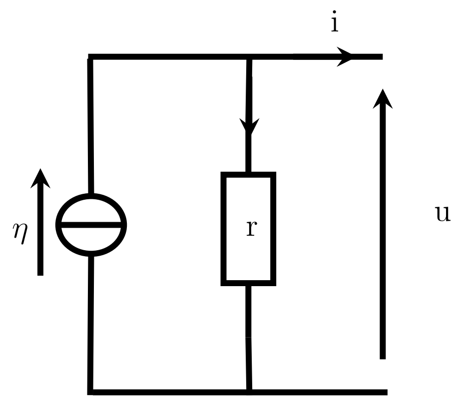
Elle présente un courant constant quellque soit la tension u à ses bornes $i = \eta = cte, \forall u$





3.2.2 Modèle de Norton

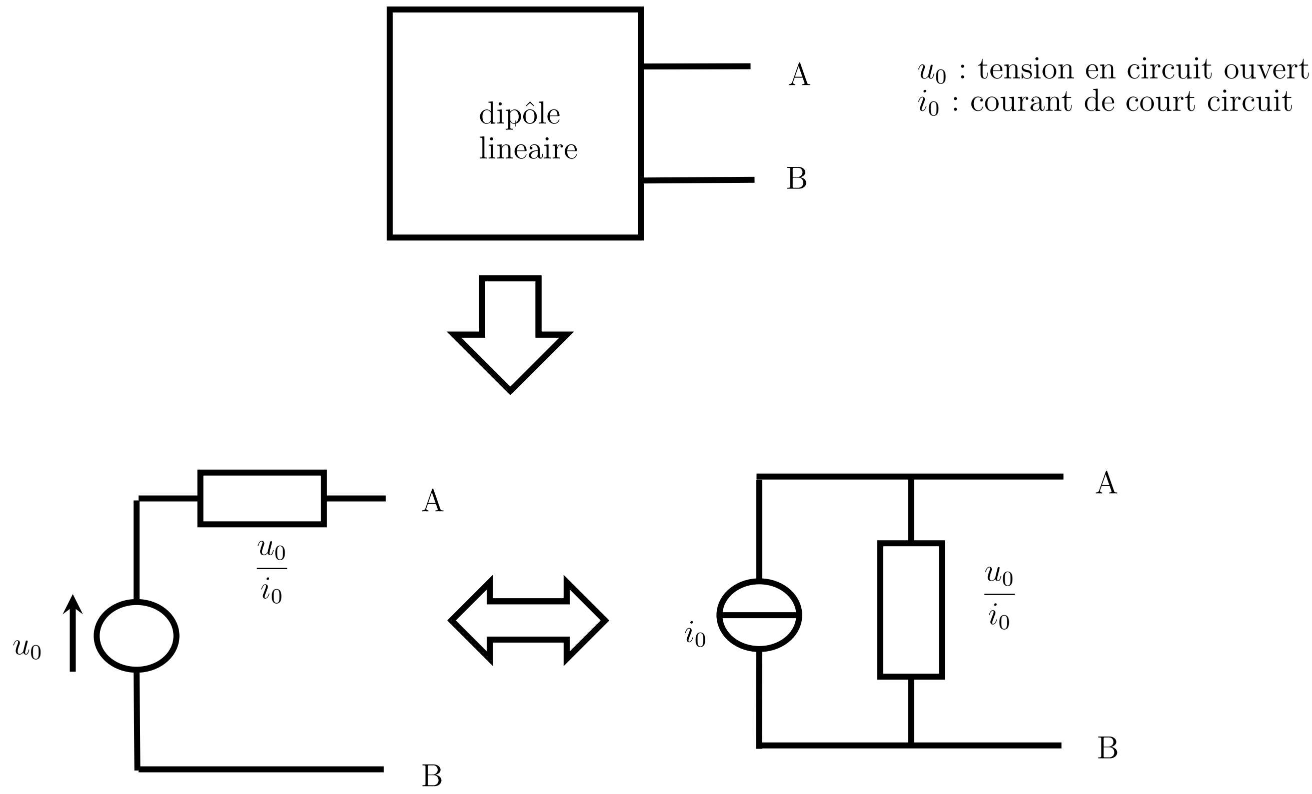
Il tient compte des effets dissapatifs



$$\boxed{i = \eta - \frac{u}{r} = \eta - gu}$$

3.2.3 Equivalence Thevenin-Norton

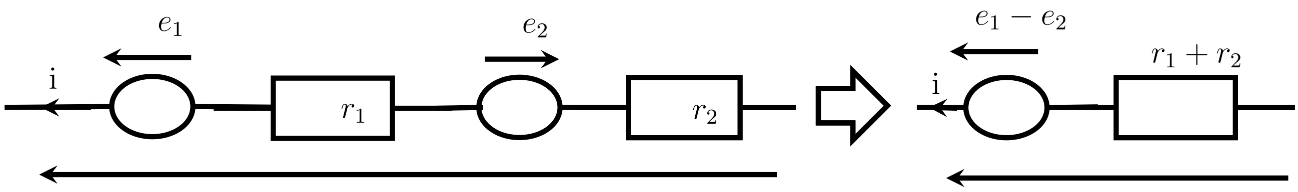
En général :
Les deux modèles obtenus sont équivalent et l'on exploitera l'un ou l'autre suivant la nature du circuit exterieur connecté.



4 Groupement de dipôles actifs lineaires

4.1 Groupement serie : modélisation de Thevenin

Considérons un groupement de deux générateurs :



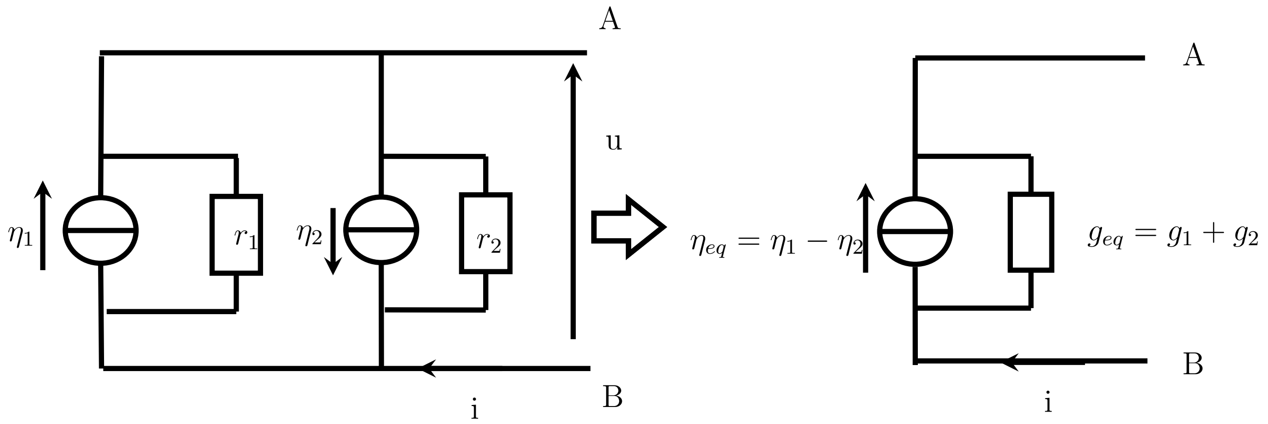
$u = (e_1 - e_2) - (r_1 + r_2)i$ u

Plus généralement,un groupement de générateurs $D_k(e_k, r_k)$ est équivalent à un générateur D_{eq} de :

- f.e.m $\boxed{e_{eq} = \sum_k \varepsilon_k e_k}$ avec :
  $\varepsilon_k = +1$ pour e_k suivant le sens de u
  $\varepsilon_k = -1$ pour le cas contraire
- de résistance interne : $\boxed{r_{eq} = \sum_k r_k}$

4.2 Groupement parallèle : modèle de Norton

Quand les générateurs sont montés en parallèle on utilise en pratique le modèle de Norton

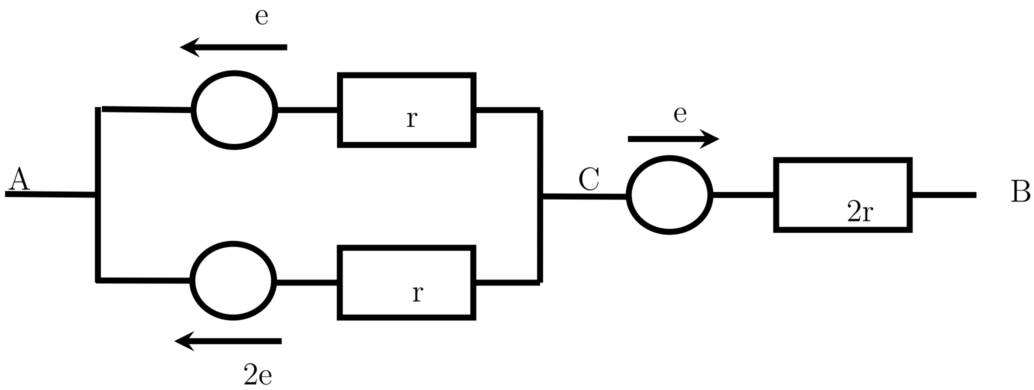


$i = \eta_1 - g_1 u - \eta_2 - g_2 u$ avec $(g_k = \dfrac{1}{r_k})$
donc pour un groupement de générateurs (η_k, g_k)

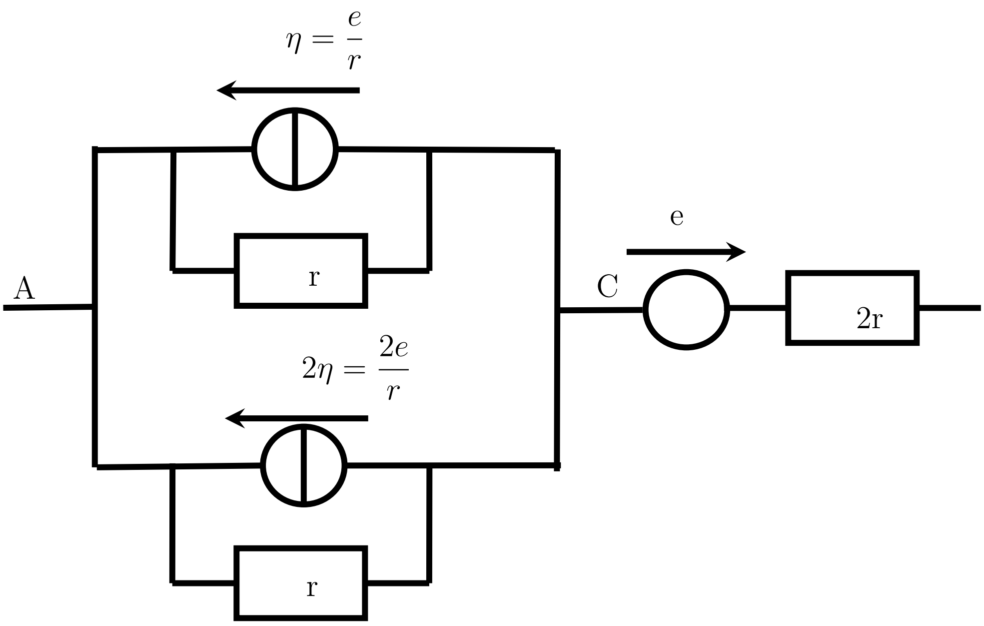
$$\boxed{i = \sum_k \varepsilon_k \eta_k + (\sum_k g_k) u}$$
$$\boxed{\eta_{eq} = \sum_k \varepsilon_k \eta_k}$$
$$\boxed{g_{eq} = \sum_k g_k = \sum_k \frac{1}{r_k}}$$

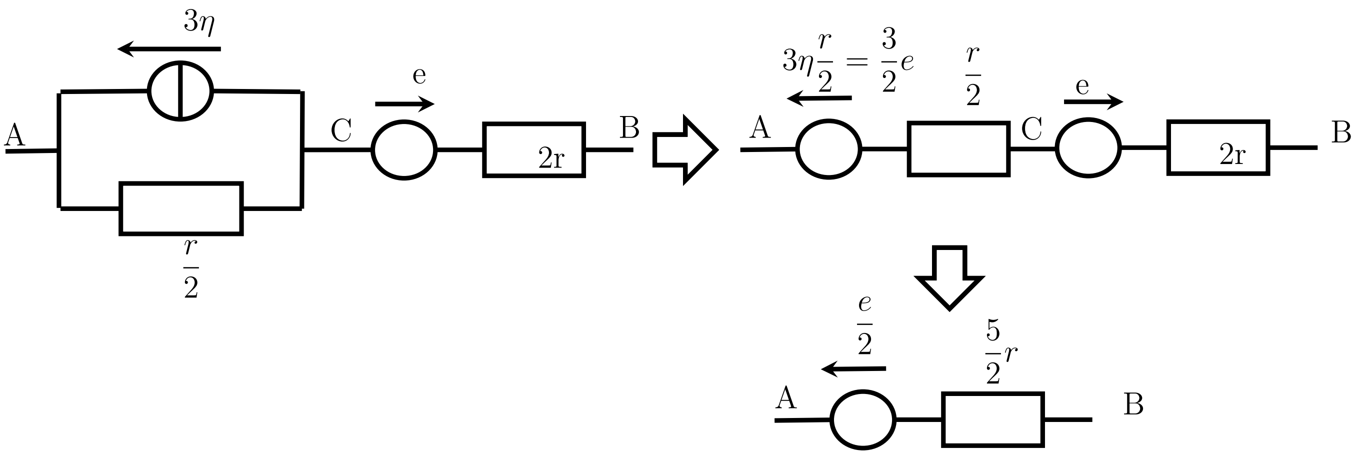
avec :
ε_k =1 si η_k orienté suivant i
$\varepsilon_k = -1$ dans le cas contraire

• Application : modélisation d'un groupement mixte



entre A et C les dipôles actifs sont en parallèle on doit utiliser le modèle de Norton


$\eta = \frac{e}{r}$
r
A
C
e
2r
B
$2\eta = \frac{2e}{r}$
r


3η
A
$\frac{r}{2}$
C
e
2r
B
$3\eta\frac{r}{2} = \frac{3}{2}e$
$\frac{r}{2}$
A
C
e
2r
B
$\frac{e}{2}$
$\frac{5}{2}r$
A
B