Planche n° 1. Logique. Corrigé

Exercice n° 1

1) a) ($f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$) et ($f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$).

b) L'équation $f(x) = 0$ a (au moins) une solution si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$).
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.

c) (L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution si et seulement si $\exists!\ x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$).
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas exactement une solution si et seulement si
($\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$ ou $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2/\ (x \neq x'$ et $f(x) = f(x') = 0)$).

d) La fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$.
La fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.

2) a) f est l'identité de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
f n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq x$).

b) Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) = x$.
Le graphe de f ne coupe pas la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq x$.

c) f a au moins un point fixe si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) = x$.
f n'a pas de point fixe si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x$.

3) a) f est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x'))$.
f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2/\ (x \leqslant x'$ et $f(x) > f(x'))$.

b) f est monotone sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$\big(\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \leqslant f(x'))\big)$ ou $\big(\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x'))\big)$.
f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
$\big(\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant x'$ et $f(x) > f(x'))\big)$ et $\big(\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant x'$ et $f(x) < f(x'))\big)$.

Exercice n° 2

1) a) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non majorée $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}/\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$.

b) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2/\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.
($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non bornée $\Leftrightarrow$ (($\forall M \in \mathbb{R}/\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$) ou ($\forall m \in \mathbb{R}/\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n < m$)).

2) a) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \leqslant u_n$).
($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non décroissante $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} > u_n$).

b) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotone $\Leftrightarrow$ (($\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \geqslant u_n$) ou ($\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \leqslant u_n$)).
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non monotone $\Leftrightarrow$ (($\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} < u_n$) et ($\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} > u_n$)).

Exercice n° 3

1) a) ($f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) = M$) et ($f \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P}/\ f(M) \neq M$).

b) (f a au moins un point invariant $\Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P}/\ f(M) = M$) et ($f$ n'a pas de point fixe $\Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) \neq M$).

Constatez que les phrases $f(M) = M$ ou $f(M) \neq M$ **n'ont aucun sens** si elles ne sont pas accompagnées de quantificateurs.

2) $\forall M \in \mathscr{P}$, ($M \in \mathscr{C}(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$). La négation de cette phrase est très compliquée et n'a aucun intérêt : $\exists M \in \mathscr{P}/$ ($M \in \mathscr{C}(\Omega, R)$ et $\Omega M \neq R$) ou ($\Omega M = R$ et $M \notin \mathscr{C}(\Omega, R)$) (ce qui est faux) (pour nier, on a d'abord écrit : ($M \in \mathscr{C}(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R) \Leftrightarrow (M \in \mathscr{C}(\Omega, R) \Rightarrow \Omega M = R)$ et $(\Omega M = R \Rightarrow M \in \mathscr{C}(\Omega, R))$).

Exercice n° 4

1) Le contraire de $x \geqslant 3$ est $x < 3$.

2) Le contraire de $0 < x \leqslant 2$ (qui s'écrit plus explicitement $0 < x$ et $x \leqslant 2$) est (($x \leqslant 0$) ou $x > 2$).

Exercice n° 5

1) Oui. Dans les deux cas, chaque fois que l'on se donne un réel x_0, $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont tous deux nuls ou encore dans les deux cas, f est la fonction nulle et g est la fonction nulle.

2) Non. La deuxième affirmation implique la première mais la première n'implique pas la deuxième. La première phrase est la traduction avec des quantificateurs de l'égalité $fg = 0$. La deuxième phrase est la traduction avec quantificateurs de ($f = 0$ ou $g = 0$).

Voici un exemple de fonctions f et g toutes deux non nulles dont le produit est nul.

Soient $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x<0 \\ x \text{ si } x \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x>0 \\ x \text{ si } x \leqslant 0 \end{array}\right. \end{array}$.

Pour chaque valeur de x, on a soit $f(x)=0$ (quand $x \leqslant 0$), soit $g(x)=0$ (quand $x \geqslant 0$). On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x)=0$ ou $g(x)=0)$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x)=0$ ou enfin, $fg=0$. Cependant, $f(1)=1 \neq 0$ et donc $f \neq 0$, et $g(-1)=-1 \neq 0$ et donc $g \neq 0$. On n'a donc pas $(f=0$ ou $g=0)$ ou encore, on n'a pas $((\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=0))$.

Exercice n° 6

1) La proposition « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin(x)=x$ » est vraie. En effet, soit $x_0=0$. Alors $\sin(x_0)=x_0$.

2) La proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 \neq 0$ » est vraie. En effet, soit x un réel. $x^2+1 \geqslant 1$ et en particulier $x^2+1 \neq 0$. On a ainsi montré que pour tout réel x, $x^2+1 \neq 0$.

3) La proposition « $\forall x \in \mathbb{C},\ x^2+1 \neq 0$ » est fausse. Pour le démontrer, on démontre que sa négation est vraie. La négation de cette proposition est « $\exists x \in \mathbb{C},\ x^2+1=0$ ». Cette proposition est effectivement vraie car le complexe $x_0=i$ vérifie $x_0^2+1=0$.

Exercice n° 7.

1) Puisque $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0$, il existe un réel x tel que $\sin(x) \neq 0$. Donc, la fonction sin n'est pas nulle.

2) Une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si cette fonction est dérivable en chaque réel. Donc, une fonction n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si cette fonction n'est pas dérivable en au moins un réel.
La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 et donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 8.

1) Soit $x_0=\dfrac{\pi}{2}$. Alors $\cos(x_0)=0$. Donc la proposition « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x=0$ » est vraie.
Soit $x_1=0$. Alors $\sin(x_1)=0$. Donc la proposition « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x=0$ » est vraie.
Puisque les deux propositions « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x=0$ » et « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x=0$ » sont vraies, la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x=0)$ » est vraie.

2) Supposons par l'absurde que la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x=0$ et $\sin x=0)$ soit vraie. Soit x_0 un réel tel que $\cos(x_0)=\sin(x_0)=0$. Alors, $\cos^2(x_0)+\sin^2(x_0)=0$. Ceci contredit le fait que pour tout réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.
Donc, la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x=0$ et $\sin x=0)$ est fausse.

Exercice n° 9.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tel que $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ ou encore tels que $a^2=2b^2$.
On peut poser $a=2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}\ldots$ et $b=2^{\alpha'}3^{\beta'}5^{\gamma'}\ldots$ où α, β, ... sont des entiers naturels.

$a=1$ est impossible car alors $2b^2 \geqslant 2 > a^2$ et en particulier $a^2 \neq 2b^2$. $b=1$ est impossible car pour $a \geqslant 2$, $a^2 \geqslant> 2 = 2b^2$. Donc, $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$.
L'égalité $a^2=2b^2$ s'écrit encore $2^{2\alpha}3^{2\beta}5^{2\gamma}\ldots = 2^{2\alpha'+1}3^{2\beta'}5^{2\gamma'}\ldots$ Par unicité de la décomposition en produit de facteur premier, on en déduit que l'exposant 2α est égal à l'exposant $2\alpha'+1$. Cette égalité est impossible car 2α est un entier pair et $2\alpha'+1$ est un entier impair.
Il était donc absurde de supposer $\sqrt{2}$ rationnel. On a montré que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice n° 10.

Soient k_0 et k_1 deux entiers naturels tels que $b=k_0a$ et $a=k_1b$. Alors, $b=k_0k_1b$ puis $k_0k_1=1$ car b n'est pas nul.
k_0 et k_1 ne sont donc pas nuls. Supposons par l'absurde que l'un des deux entiers naturels k_0 ou k_1 ne soit pas égal à 1. Alors, $(k_0 \geqslant 2$ et $k_1 \geqslant 1)$ ou $(k_0 \geqslant 1$ et $k_1 \geqslant 2)$. Dans les deux cas, on a $k_0k_1 \geqslant 2$ et en particulier $k_0k_1 \neq 1$.
On a montré par l'absurde que $k_0=k_1=1$. Mais alors, $a=b$.

Exercice n° 11.

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ ((\exists k \in \mathbb{N}/\ n=2k)$ ou $(\exists k \in \mathbb{N}/\ n=2k+1))$. Cette proposition est vraie car pour chaque n, l'une des deux propositions « n est pair » ou « n est impair » est vraie.

2) $(\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}/\ n=2k)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N}/\ n=2k+1))$. Cette proposition est fausse car chacune des deux propositions « tout entier naturel n est pair » et « tout entier naturel n est impair » est fausse.

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}/\ m>n$. Cette proposition est vraie. En effet, si n est un entier naturel, l'entier $m=n+1$ est strictement plus grand que n.

4) $\exists m \in \mathbb{N}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ m>n$. Cette proposition est fausse.

Exercice n° 12.

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists C \in \mathbb{R} / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = C$.
On peut donner une définition plus simple. f est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = f(0)$.

2) f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}, \ f(x) \neq f(0)$.

Exercice n° 13.

1) Faux. 9 est impair et 9 n'est pas premier. (L'implication de l'énoncé est : (n premier $\Leftarrow$ n impair) ou encore (n impair $\Rightarrow$ n premier).

2) Vrai. L'implication de l'énoncé est (pour $n \geqslant 3$) : (n premier $\Rightarrow$ n impair).

3) Faux. (L'implication de l'énoncé est : $(x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$).

4) Vrai. (L'implication de l'énoncé est : $(x^2 = 4 \Leftarrow x = 2)$ ou encore $(x = 2 \Rightarrow x^2 = 4)$).

5) Vrai. (L'implication de l'énoncé est : $(x > 3 \Rightarrow x > 2)$).

6) Faux. (L'implication de l'énoncé est : $(x > 3 \Leftarrow x > 2)$ ou encore $(x > 2 \Rightarrow x > 3)$).

