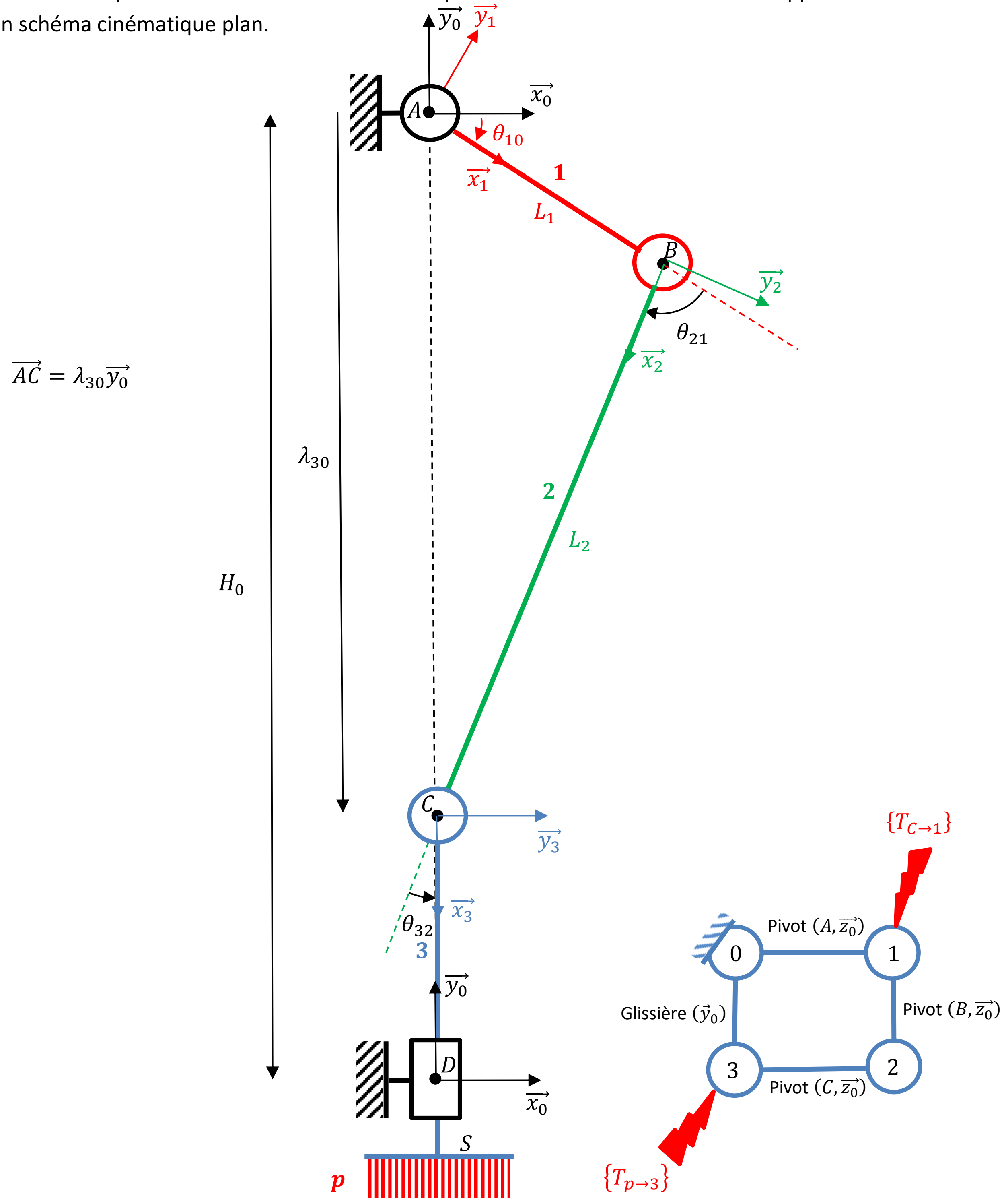
PFS

Exercice 1: Chaîne fermée – Système Bielle-Manivelle

On étudie le système Bielle-Manivelle modélisé précédemment dans l'année. On rappelle ci-dessous son schéma cinématique plan.



Question 1: Déterminer le torseur $\{T_{p\to3}\}$ de l'action de la pression sur le piston au point C en fonction de F

Pression uniformément répartie sur une surface plane, on la modélise par un effort en son centre :

$$\{\mathcal{T}_{p\to3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_9}$$
$$F = pS$$

Question 2: Déterminer le torseur $\{T_{C\to1}\}$ du couple C sur la pièce 1

$$\{\mathcal{T}_{C\to1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$$
$$\forall P$$

Question 3: Proposer les torseurs statiques plans de chaque liaison du mécanisme étudié

Liaison	Torseur statique plan
L_{10} Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{1\to0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$
L_{21} Pivot d'axe (B, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$
L_{32} Pivot d'axe (C, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{3\to2}\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$
L_{03} Glissière de direction $\vec{z}$	$\{\mathcal{T}_{0\to3}\} = \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$ $\forall P$

La base 0 (ou 3 certes) étant obligatoire dans la liaison L_{03}, autant mettre tous les autres dans 3

Question 4: Faire le bilan du nombre d'équations et d'inconnues du problème plan afin de vérifier qu'il est solvable (isostatique : $h^{2D} = 0$)

$$I_s^{2D} = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$
$$E_s^{2D} = 3(P - 1) = 3 * (4 - 1) = 3 * 3 = 9$$
$$h^{2D} = m + I_s^{2D} - E_s^{2D} = 1 + 8 - 9 = 0$$

Le mécanisme étudié en plan est bien isostatique.

Question 5: Appliquer le PFS au solide 1 en B dans la base $\mathfrak{B}_0$ et en déduire un système de 3 équations

On isole la pièce 1 et on lui applique le PFS dans le référentiel terrestre supposé Galiléen :

$$\{\mathcal{T}_{0/1}\} + \{\mathcal{T}_{2/1}\} + \{\mathcal{T}_{C\to 1}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \{0\}$$

Au point B		
$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$	$\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_{01}}) = \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{R_{01}}) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{01}}$ $= \begin{bmatrix} -L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} -L_1 \cos\theta_{10} \\ -L_1 \sin\theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$	$\begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ (-L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B$
$\begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{21}\overrightarrow{x_0} + Y_{21}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B$

$$\begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ (-L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} X_{21}\overrightarrow{x_0} + Y_{21}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} (X_{01} + X_{21})\overrightarrow{x_0} + (Y_{01} + Y_{21})\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ (-L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01} + C)\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection dans $\mathfrak{B}_0$

$$\boxed{\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} = 0 \\ -L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01} + C = 0 \end{cases}}$$

Question 6: Appliquer le PFS au solide 2 en B dans la base $\mathfrak{B}_0$ et en déduire un système de 3 équations

On isole la pièce 2 et on lui applique le PFS dans le référentiel terrestre supposé Galiléen :

$$\{\mathcal{T}_{1/2}\} + \{\mathcal{T}_{3/2}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}}$$

Au point B		
$\begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$	$\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_{32}}) = \overrightarrow{M_C}(\overrightarrow{R_{32}}) + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_{32}}$ $= \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2} \wedge \begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) \\ L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= (L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32})\overrightarrow{z_0}$	$\begin{Bmatrix} X_{32}\overrightarrow{x_0} + Y_{32}\overrightarrow{y_0} \\ (L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B$
$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{12}\overrightarrow{x_0} + Y_{12}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

$$\begin{Bmatrix} X_{32}\overrightarrow{x_0} + Y_{32}\overrightarrow{y_0} \\ (L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} X_{12}\overrightarrow{x_0} + Y_{12}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} (X_{32} + X_{12})\overrightarrow{x_0} + (Y_{32} + Y_{12})\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ (L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32})\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection dans $\mathfrak{B}_0$

$$\boxed{\begin{cases} X_{32} + X_{12} = 0 \\ Y_{32} + Y_{12} = 0 \\ L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32} = 0 \end{cases}}$$

Question 7: Appliquer le PFS au solide 3 en C dans la base $\mathfrak{B}_0$ et en déduire un système de 3 équations

On isole la pièce 3 et on lui applique le PFS dans le référentiel terrestre supposé Galiléen :

$$\{\mathcal{T}_{p/3}\} + \{\mathcal{T}_{2/3}\} + \{\mathcal{T}_{0/3}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}}$$

Au point C		
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} F\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$
$\begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{23}\overrightarrow{x_0} + Y_{23}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$
$\begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{03}\overrightarrow{x_0} \\ N_{03}\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_C$

$$\begin{cases} (X_{23} + X_{03})\overrightarrow{x_0} + (F + Y_{23})\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ N_{03}\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection dans $\mathfrak{B}_0$

$$\boxed{\begin{cases} X_{23} + X_{03} = 0 \\ F + Y_{23} = 0 \\ N_{03} = 0 \end{cases}}$$

Question 8: Récapituler les 9 équations statiques du système Bielle-Manivelle en faisant apparaître en rouge les données et en bleu les actions inconnues de liaison

$$\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} = 0 \\ -L_1 \cos\theta_{10}\, Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10}\, X_{01} + \boldsymbol{C} = 0 \\ X_{32} + X_{12} = 0 \\ Y_{32} + Y_{12} = 0 \\ L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10})\, Y_{32} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})\, X_{32} = 0 \\ X_{23} + X_{03} = 0 \\ \boldsymbol{F} + Y_{23} = 0 \\ N_{03} = 0 \end{cases}$$

Question 9: Résoudre le système afin d'exprimer toutes les inconnues de liaison en fonction de l'effort F ainsi que la relation liant C et F

$$\left\{\begin{aligned} X_{01} + X_{21} &= 0 \\ Y_{01} + Y_{21} &= 0 \\ -L_1\cos\theta_{10}\, Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10}\, X_{01} + C &= 0 \\ X_{32} + X_{12} &= 0 \\ Y_{32} + Y_{12} &= 0 \\ L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\, Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\, X_{32} &= 0 \\ X_{23} + X_{03} &= 0 \\ F + Y_{23} &= 0 \\ N_{03} &= 0 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} X_{01} &= -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})} F \\ Y_{01} &= -F \\ L_1\cos\theta_{10}\, F - L_1\sin\theta_{10} & \frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})} F + C = 0 \\ X_{12} &= -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})} F \\ Y_{12} &= -F \\ X_{32} &= \frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})} F \\ X_{03} &= \frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})} F \\ Y_{23} &= -F \\ N_{03} &= 0 \end{aligned}\right.$$

On a utilisé 8 équations pour déterminer les 8 inconnues du problème, donc $r_s = 8$

Il reste l'équation suivante, dans laquelle tout est connu :

$$L_1\cos\theta_{10}\, F - L_1\sin\theta_{10}\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})} F + C = 0$$

$$\boxed{C = -L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right] F}$$

Cette équation traduit une mobilité : $m = E_s - r_s = 9 - 8 = 1$. Comme il y a un mouvement possible, on met bien en relation l'effort qui peut induire un mouvement avec le couple transmis à travers cette mobilité.

Remarque : vérification à l'aide du TEC :

$$\{\mathcal{T}_{ext\to 1}\}\{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to 3}\}\{\mathcal{V}_{30}\} = 0$$

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}_0} \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{matrix}\right\}_A^{\mathfrak{B}_0} + \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_C^{\mathfrak{B}_0} \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{30} \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}_0} = 0$$

$$CR_{1/0} + FV_{30} = 0$$

$$C = -F\frac{V_{30}}{R_{10}}$$

En utilisant la relation cinématique obtenu précédemment :

$$V_{30} = L_1 R_{10}\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

$$C = -F\frac{L_1 R_{10}\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]}{R_{1/0}}$$

$$C = -L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right] F$$

Question 10: Vérifier l'exactitude de la relation entre C et F obtenu pour deux positions particulières $\theta_{10} = 0$ et $\theta_{10} = -\frac{\pi}{2}$

$\theta_{10} = 0$ $(\theta_{21} + \theta_{10}) = -\frac{3\pi}{4}$	$\theta_{10} = -\frac{\pi}{2}$ $(\theta_{21} + \theta_{10}) = -\frac{\pi}{2}$
$C_m = -L_1 F$ $X_{21} = F$ $Y_{21} = F$ toujours vrai	$C_m = 0$ $X_{21} = 0$ $Y_{21} = F$
$\boldsymbol{C} = -L_1 \left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})}\right] \boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{C} = -L_1 \left[\cos 0 - \frac{\sin 0}{\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}\right] \boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{C} = -L_1 \boldsymbol{F}$ $L_2 \cos -\frac{3\pi}{4} Y_{32} - L_2 \sin -\frac{3\pi}{4} X_{32} = 0$ $Y_{32} - X_{32} = 0$ $Y_{21} - X_{21} = 0$ $X_{21} = Y_{21} = F$	$\boldsymbol{C} = -L_1 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right] \boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{C} = 0$ $-L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01} + C = 0$ $-L_1 \cos -\frac{\pi}{2} Y_{01} + L_1 \sin -\frac{\pi}{2} X_{01} + C = 0$ $-L_1 X_{01} + C = 0$ $L_1 X_{21} + C = 0$ $X_{21} = -\frac{C}{L_1} = 0$

Question 11: Donner l'expression des torseurs de chaque liaison en fonction de F

Liaison	Torseur statique
L_{10} Pivot d'axe (A, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{1\to 0}\}$ $\begin{Bmatrix} \frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}F & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$
L_{21} Pivot d'axe (B, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{2\to 1}\}$ $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}F & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$
L_{32} Pivot d'axe (C, $\vec{z}$)	$\{\mathcal{T}_{3\to 2}\}$ $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}F & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$
L_{03} Glissière de direction $\vec{z}$	$\{\mathcal{T}_{0\to 3}\}$ $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$

Question 12: Déterminer le moment dans la liaison glissière en D

$$\{\mathcal{T}_{0\to 3}\}$$

$$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{H_0-\lambda_{30}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}F \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0}$$

$$\overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{M_C} + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{R}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ H_0-\lambda_{30} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{H_0-\lambda_{30}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}F \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$