# POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

On définit une suite de polynômes $(P_n)$ de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\begin{cases} \bullet \quad P_0 = 1; \\ \bullet \quad P_1 = X; \\ \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n. \end{cases}$$

$P_n$ s'appelle le $n$-ième polynôme de Chebychev.

## Partie I

1. Montrer que $\deg(P_n) = n$. Calculer le coefficient dominant de $P_n$.
2. Montrer que $P_n$ est pair si $n$ est pair et impair si $n$ est impair
3. Calculer $P_n(1)$,$P_n(-1)$ et $P_n(0)$
4. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha) \tag{1}$$
5. Montrer que $P_n$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation (1)
6. Déterminer toutes les racines de $P_n$.
7. Déterminer toutes les racines de $P'_n$

   ***Indication*** **:** *Dériver (1)*

## Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :
- Le coefficient de $X^n$ est $2^{n-1}$
- $P([-1,1]) \subset [-1,1]$ .

On note $Q = P_n - P$, et pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

8. Calculer $P_n(x_k)$
9. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Comparer les signes de $Q(x_k)$ et de $Q(x_{k+1})$.
10. (a) Montrer que :
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad Q(x_k) = 0 \Rightarrow Q'(x_k) = 0$$
    (b) Montrer par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ la proposition suivante
$$\begin{cases} \bullet \quad \text{Si } Q(x_k) = 0, \text{ alors } Q \text{ admet au moins } k+1 \text{ racines comptées avec multiplicité dans } [x_k, 1]; \\ \bullet \quad \text{Si } Q(x_k) \neq 0, \text{ alors } Q \text{ admet au moins } k \text{ racines comptées avec multiplicité dans } [x_k, 1] \end{cases}$$
    (c) En déduire que $Q$ possède au moins $n$ racines (comptées avec leur ordre de multiplicité )dans $[-1, 1]$, puis que $Q = 0$

## Partie III

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire quelconque

11. Démontrer que $\inf\{|P(x)|/x \in [-1,1]\} \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$

    ***Indication*** **:** *Raisonner par l'absurde : Poser* $k = \deg(P)$ *et considérer le polynôme* $Q = 2^{n-1}X^{n-k}P$

12. Á quelle condition y-a-t-il égalité ?

**POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV**

## Partie I

1. $P_0$ est de degré 0 et de coefficient dominant 1. Montrons par une récurrence double sur $n \geqslant 1$ que le monôme de plus haut degré de $P_n$ est $2^{n-1}X^n$.
   — Pour $n = 1$ ou $n = 2$ la propriété est vérifiée, vu que $P_2 = 2XP_1 - P_0 = 2X^2 - 1$
   — Soit $n \geqslant 1$. On suppose que les monômes du plus haut degré de $P_n$ et $P_{n+1}$ sont respectivement $2^{n-1}X^n$ et $2^nX^{n=1}$. Par définition de $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ et vu que $\deg(2XP_{n+1}) = n + 2$ et $\deg(P_n) = n$, alors on en déduit que le terme dominant de $P_{n+2}$ est celui de $2P_{n+1}$, c'est-à-dire $2^{n+1}X^{n+2}$.
2. Par récurrence sur $n$ on montre que $P_{2n}$ est pair et $P_{2n+1}$ est impair
   — $P_0$ est pair et $P_1$ est impair.
   — Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $P_{2n}$ est pair et que $P_{2n+1}$est impair. Il vient alors :

   $$P_{2n+2}(-X) = -2P_{2n+1}(-X) - P_{2n}(-X) = 2XP_{2n+1}(X) - P_{2n}(X) = P_{2n+2}(X)$$

   Cela prouve que $P_{2n+2}$ est pair. Sachant que $P_{2n+1}$ est impair et $P_{2n+2}$ est pair on démontre de la même façon que $P_{2n+3}$ est impair.

   **Remarque :** *On peut démontrer par récurrence double que* $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$

3. Par un récurrence double sur $n$ on montre que : $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$
   — $P_0 = 1$ et $P_1 = X$ donc $P_0(1) = P_0(-1) = 1$,$P_1(1) = 1$ et $P_1(-1) = -1$
   — Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, $P_{n+1}(1) = 1$ et $P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$. Par définition de $P_{n+2}$, il vient que

   $$P_{n+2}(1) = 2P_{n+1}(1) - P_n(1) = 1$$

   et

   $$P_{n+1}(-1) = 2(-1)P_{n+1}(1) - P_n(1) = 2(-1)^{n+2} - (-1)^n = (-1)^{n+2}$$

   Montrons cette fois par une récurrence simple sur $n$ que , $P_{2n}(0) = (-1)^n$ et $P_{2n+1}(0) = 0$
   — $P_0(0) = 1$ et $P_1(0) = 0$
   — Soit $n \geqslant 0$. Supposons que , $P_{2n}(0) = (-1)^n$ et $P_{2n+1}(0) = 0$. Il vient alors :

   $$P_{2n+2}(0) = -P_{2n}(0) = 0 \quad \text{et} \quad P_{2n+3}(0) = -P_{2n+1}(0) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

4. Par une récurrence double
   — Pour $n = 0$ et $n = 1$ : $P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$.
   — Soit $n \geqslant 0$. Supposons $P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$ et $P_{n+1}(\cos(\alpha)) = \cos((n + 1)\alpha)$. On écrit :

   $$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(\alpha)) &= 2\cos(\alpha)P_{n+1}(\cos(\alpha)) - P_n(\cos(\alpha)) \\ &= 2\cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \\ &= \cos((n+2)\alpha) \end{aligned}$$

5. Soit $Q$ un élément de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la propriété (1). On a alors :
   $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (P_n - Q)(\cos(\alpha)) = 0$ .On en déduit ,$\forall t \in [-1, 1]\,, (P_n - Q)(t) = 0$.
   Cela signifie que le polynôme $P_n - Q$ a une infinité de racines ,c'est donc le polynôme nul. Ainsi $P_n$ est bien l'unique élément de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant (1).
6. Soit $n \geqslant 1$.

   $$\cos(n\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$$

   On en déduit que tous les réels de la forme $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ sont des racines de $P_n$.

   Si $k \in [\![0, n-1]\!]$ les réels $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ sont deux à deux distincts et tous dans l'intervalle $[0, \pi]$. Or la fonction cosinus est injective sur cet intervalle .

   On en déduit $n$ racines distincts du polynôme $P_n$, à savoir les réels : $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Le polynôme $P_n$ est de degré $n$, cela constitue toutes ses racines.

**Polynômes de Tchebychev**

7. $P'_0 = 0$ ,$P'_1 = 1$ n'ont pas de racines .On suppose maintenant $n \geqslant 2$.
En dérivant la formule (1) on obtient :$-\sin(\alpha)P'_n(\cos(\alpha)) = -n\sin(n\alpha)$.
$\sin(n\alpha) = 0$ si et seulement, si $\alpha = \dfrac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$. Si $k$ n'est pas un multiple de $n$ alors $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \neq 0$ et $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ est une racine de $P'_n$. Les réels $\dfrac{k\pi}{n}$ ,$1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont deux à deux distincts et tous dans l'intervalle $]0,\pi[$. On en déduit comme précédemment que les nombres $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, avec $1\leqslant k \leqslant n-1$, constituent toutes les racines de $P'_n$.

## Partie II

8. En utilisant la relation (1) on a :

$$P_n(x_k) = P_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

9. Si $k$ est pair, alors $Q(x_k) = 1 - P(x_k)$ et donc $Q(x_k) \geqslant 0$. De même si $k$ est impair $Q(x_k) = -1 - P(x_k)$, par conséquent $Q(x_k) \leqslant 0$. On en déduit :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad Q(x_k)Q(x_{k+1}) \leqslant 0$$

10. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et si $Q(x_k) = 0$, alors $P(x_k) = \mp 1$, donc $P$ admet est un extremum local en $x_k$, et par conséquent, $P'(x_k) = 0$. Comme $P'_n(x_k) = 0$, on a donc :$Q(x_k) = 0 \Rightarrow Q'(x_k) = 0$
 (b) — Pour $k = 1$. On sait que $Q(x_0)Q(x_1) \leqslant 0$. Le théoréme des valeurs intermediaires montre alors qu'il y a au moins une racine de $Q$ dans l'intervalle $[x_1, x_0]$.
 Supposons $Q(x_1) = 0$. On a donc également $Q'(x_1) = 0$ et par conséquent, il y a au moins deux racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) de $Q$ supérieures ou égales à $x_1$.
 — Supposons la propriété vraie pour $1 \leqslant k < n-1$.
 - Si $Q(x_{k+1}) = 0$ en appliquant le raisonnement précédent $x_{k+1}$est une racine double de Q et l'on a bien k+2 racines supérieures à $x_{k+1}$.
 - Si $Q(x_{k+1}) \neq 0$ et si $Q(x_k) \neq 0$ alors l'hypothèse de récurrence et le théorème des valeurs intermédiaires montrent que $Q$ admet au moins $k+1$ racines dans $[x_{k+1}, 1]$
 - Enfin si $Q(x_{k+1}) \neq 0$ et $Q(x_k) = 0$ alors l'hypothèse de récurrence montre qu'il y a déjà $k+1$ racines dans $[x_k, 1] \subset [x_{k+1}, 1]$
 (c) Si $Q(x_{n-1}) = 0$, alors $Q$ admet au moins $n$racines dans $[x_{n-1}, 1] \subset [-1, 1]$ et si $Q(x_{n-1}) \neq 0$, alors $Q$ admet au moins $n-1$ racines $[x_{n-1}, 1]$, et au moins une racine dans $[x_n, x_{n-1}[$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Finalement $Q$ possède au moins $n$ racines dans $[-1, 1]$. Or $P$ et $P_n$ ont le même terme dominant : $2^{n-1}X^n$. Ainsi $\deg(Q) \leqslant n-1$. Comme il a au moins $n$ racines, on en déduit qu'il est nul.

## Partie III

11. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ polynôme unitaire tel que $\sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}(|P(x)|) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Soit $k = \deg(P)$ et $Q = 2^{n-1}X^{n-k}P$. On a alors :

$$\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}(|Q(x)|) = 2^{n-1}\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left(\left|x^{n-k}P(x)\right|\right) \leqslant 2^{n-1}\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}(|P(x)|) < 1.$$

Le polynôme $Q$ est de degré $n$ , de coefficient dominant $2^{n-1}$ et vérifie $\forall x \in [-1, 1]$, $Q(x) \in ]-1, 1[ \subset [-1, 1]$. Donc, d'après la question 10 , $Q = P_n$, ce qui est impossible car $\sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}(|P(x)|) = 1$

## Polynômes de Tchebychev

12. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire tel que $\sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} (|P(x)|) = \frac{1}{2^{n-1}}$

    — Si $n = 1$, on vérifie que seul le polynôme $P_1$ convient.

    — Si $n \geqslant 2$. Si $\deg(P) \neq n$, alors $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on sait que dans ce cas $\sup\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} (|P(x)|) \geqslant \dfrac{1}{2^{n-2}} > \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
    On en déduit $\deg(P) = n$, puis $2^{n-1}P = P_n$

    Bref il y a donc égalité si, et seulement, si $P = \dfrac{1}{2^{n-1}} P_n$