

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

<u>Étude d'un lambdamètre</u>	2
<u>I. Interférences</u>	2
A. <u>Rayon lumineux</u>	2
1) <u>Chemin optique et phase du signal lumineux</u>	2
2) <u>Surface d'onde</u>	3
B. <u>Interférences entre deux sources ponctuelles</u>	3
C. <u>Figures d'interférences créées par deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes</u>	4
<u>II. Interféromètre de MICHELSON</u>	6
A. <u>Anneaux d'égale inclinaison</u>	7
B. <u>Réalisation d'interférogrammes</u>	8
1) <u>Source monochromatique idéale</u>	8
2) <u>Source délivrant deux ondes de pulsations voisines</u>	8
3) <u>Source à profil rectangulaire</u>	9
<u>III. Analyse spectrale d'interférogrammes</u>	10
<u>IV. Double interféromètre de MICHELSON : lambdamètre</u>	11
<u>Annexes</u>	13

Étude d'un lambdamètre

Le problème se décompose en trois parties corrélées entre elles : une théorie générale sur les interférences (première partie), l'interféromètre de Michelson (deuxième partie) et la conception d'un lambdamètre (troisième partie).

Les lambdamètres permettent de mesurer avec une excellente précision la longueur d'onde d'une source laser. Sans mettre en œuvre un lourd dispositif de spectroscopie, ils sont basés sur des principes d'interférométrie. Le principe du lambdamètre décrit dans ce problème est dérivé de l'interféromètre de Michelson.

La vitesse de la lumière dans le vide est notée $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

I. Interférences

Les grandeurs harmoniques seront représentées en notation complexe.

Une source lumineuse ponctuelle située en S émet, de manière pulsée, des trains d'ondes lumineuses supposées de même pulsation ω . Dans le modèle scalaire de la lumière, la fonction de l'onde monochromatique est caractérisée en un point M et à l'instant t par le signal lumineux ou vibration lumineuse : $s(M, t) = a \cos[\omega t - \varphi(M, t)]$, où a est l'amplitude supposée constante de l'onde et $\varphi(M, t)$ son retard de phase en M et à l'instant t par rapport au point de référence S .

Par convention, la grandeur complexe associée à la grandeur réelle $s(M, t)$ est le signal analytique : $\underline{s}(M, t) = a \exp[j(\omega t - \varphi(M, t))]$, où j est le nombre complexe pour lequel $j^2 = -1$. Le complexe conjugué de $\underline{s}(M, t)$ est noté $\underline{s}^*(M, t)$.

Le modèle des trains d'ondes suppose que la phase à la source φ_S reste constante pendant des intervalles de temps de durée constante τ_c entre lesquels elle change aléatoirement de valeur. L'onde émise durant cet intervalle de temps appelé temps de cohérence est nommée "train d'onde". Le train d'onde est ainsi limité dans le temps et se propage dans le vide à la célérité c . Ce temps de cohérence est la durée moyenne de passage des trains d'ondes en un point donné de l'espace. La phase de l'onde φ_S à la source S prend une nouvelle valeur aléatoire à chaque nouveau train d'onde.

A. Rayon lumineux

La lumière se propage de S à M le long d'un rayon lumineux avec pour vitesse au point P :

$v(P) = \frac{c}{n(P)}$, où $n(P)$ est l'indice de réfraction du milieu en P ; par définition, le chemin

optique (SM) entre les points S et M du rayon lumineux est : $(SM) = \int_S^M n(P) d\ell(P)$.

L'élément d'arc de la courbe suivie par la lumière est noté $d\ell(P)$; il est défini en P et est parcouru par la lumière à la vitesse de propagation $v(P)$ pendant la durée dt .

1) Chemin optique et phase du signal lumineux

L'onde se propage sans déformation, le signal $s(M, t)$ reproduit le signal de la source avec un retard $\tau(M)$.

1. Définir la durée de propagation $\tau(M)$ du signal depuis la source en utilisant une intégrale. En déduire que $\tau(M)$ s'écrit en fonction du chemin optique (SM) dont l'expression est donnée précédemment.
2. Calculer la pulsation du signal lumineux pour une longueur d'onde moyenne dans le vide pour la lumière visible égale à $\lambda_m = 600 \text{ nm}$.
3. Établir l'expression du retard de phase $\varphi_{P \rightarrow M} = \varphi(M, t) - \varphi(P, t)$ lié à la propagation entre P et M , en faisant intervenir le temps de propagation de P à M et d'autre(s) grandeur(s) caractéristique(s) de l'onde. En déduire $\varphi_{P \rightarrow M}$ en fonction du chemin optique (PM) et de la longueur d'onde λ_0 de l'onde étudiée dans le vide.

2) Surface d'onde

4. Définir une surface d'onde en optique (la source est ponctuelle). En partant de la définition de (SM) fournie plus haut, justifier le caractère d'onde sphérique associé au signal lorsque celui-ci se propage dans un milieu d'indice n constant. Énoncer le théorème de Malus.
5. Quel instrument d'optique permet d'obtenir une onde plane à partir d'une source ponctuelle ? Illustrer votre réponse à l'aide d'un schéma faisant apparaître les surfaces d'onde.

L'éclairement (ou intensité lumineuse) $\mathcal{E}(M)$ est mesuré par un détecteur quadratique placé en M sensible à la valeur moyenne temporelle de $s^2(M, t)$. Il est conventionnellement défini au point M (à une constante multiplicative près) par :

$$\mathcal{E}(M) = \langle s(M, t) \cdot s^*(M, t) \rangle = \langle |s(M, t)|^2 \rangle.$$

Cette moyenne temporelle est effectuée sur un temps de réponse τ_R du détecteur.

B. Interférences entre deux sources ponctuelles

L'éclairement $\mathcal{E}(M)$ résulte de la superposition en M de deux ondes issues de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 de longueurs d'ondes dans le vide différentes λ_1 et λ_2 . Elles sont notées respectivement :

$$s_1(M, t) = a_1 \cos[\omega_1 t - \varphi_1(M, t)] \quad \text{et} \quad s_2(M, t) = a_2 \cos[\omega_2 t - \varphi_2(M, t)]$$

6. Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ en fonction des intensités \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 de chacune des ondes, de leurs pulsations respectives ω_1 et ω_2 et du déphasage retard $\phi_{2/1}(M, t) = \varphi_2(M, t) - \varphi_1(M, t)$ de l'onde issue de S_2 par rapport à l'onde issue de S_1 . Identifier le terme d'interférences.
7. A quelle condition, relative au terme d'interférence, observe-t-on des interférences lumineuses en M ? Les ondes sont alors dites cohérentes. Que vaut l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ pour des ondes incohérentes ? Que peut-on dire dans ce cas de l'éclairement observé sur un écran ?
8. Il est impossible d'observer des interférences entre deux sources de pulsations différentes. Justifier avec précision.
9. Dans le cas général $\tau_R \gg \tau_C$ (on suppose les temps de cohérence temporelle des sources identiques). On se place ici dans le cas très particulier (l'expérience est difficilement réalisable) de deux sources monochromatiques de longueurs d'onde très proches et ayant un temps de cohérence très important (on supposera ici uniquement $\tau_C > \tau_R$). Quel phénomène pourra-t-

on observer. Justifier.

L'éclairement résulte maintenant de la superposition en M de deux ondes issues de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 de même longueur d'onde λ_0 . Elles sont notées respectivement : $s_1(M, t) = a_1 \cos[\omega_0 t - \varphi_1(M, t)]$ et $s_2(M, t) = a_2 \cos[\omega_0 t - \varphi_2(M, t)]$

10. Déterminer le déphasage $\phi_{2/1}(M, t) = \varphi_2(M, t) - \varphi_1(M, t)$ en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0 , de la différence de chemin optique notée $\delta_{2/1}(M) = (S_2 M) - (S_1 M)$ et des phases φ_{S1} et φ_{S2} des signaux émis aux points sources S_1 et S_2 . Pourquoi le déphasage $\phi_{2/1}(M, t)$ dépend-il du temps ?

11. Deux ondes de même pulsation ω_0 donnent-elles nécessairement des interférences ? Pour répondre à cette question, on reviendra à l'étude du terme d'interférences.

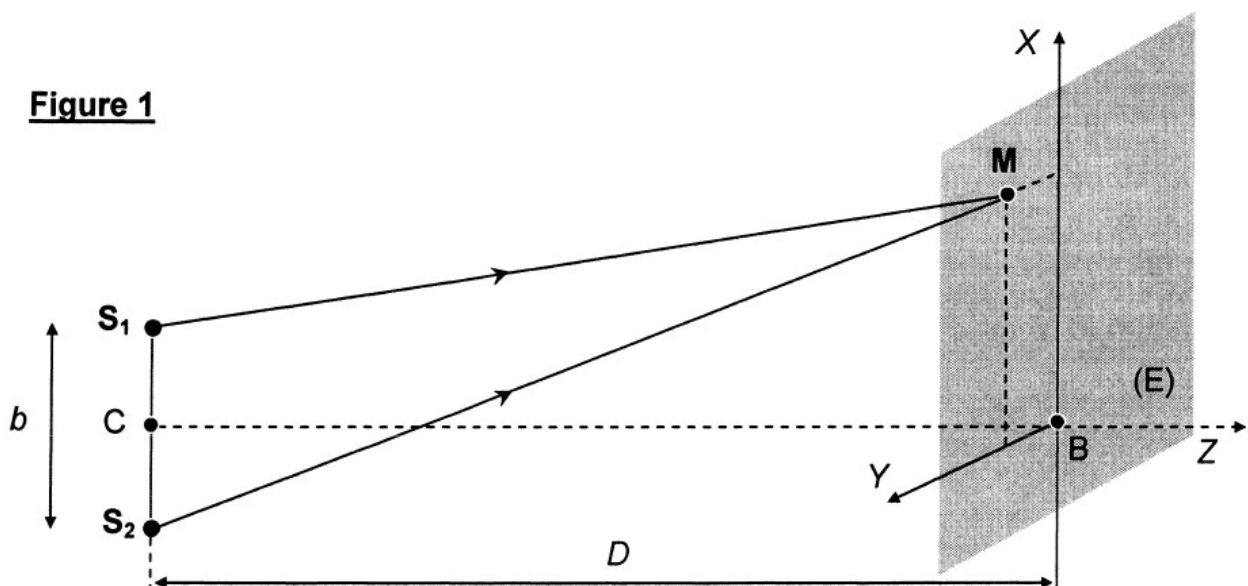
Pour des ondes lumineuses parfaitement cohérentes, l'évolution de l'éclairement est défini en fonction du déphasage $\phi_{2/1}(M)$ par : $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2}\cos(\phi_{2/1}(M))$

12. Tracer $\mathcal{E}(M)$ en fonction de $\phi_{2/1}(M)$. Exprimer et préciser sur le graphe les éclairements maximum \mathcal{E}_{MAX} et minimum \mathcal{E}_{MIN} en fonction de \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . Déterminer le contraste \mathcal{C} en fonction de \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 . Dans quelle situation le contraste est-il maximal ?

Dans la suite du problème, sauf précision contraire, les sources sont supposées parfaitement cohérentes.

C. Figures d'interférences créées par deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes

Deux sources lumineuses ponctuelles cohérentes S_1 et S_2 émettent dans le vide deux ondes monochromatiques de même longueur d'onde λ_0 , de même amplitude a_0 et en phase en leurs origines respectives S_1 et S_2 . Ces sources distantes de b sont symétriques par rapport à C (figure 1). L'éclairement obtenu sur l'écran en occultant l'une des deux sources, est noté \mathcal{E}_0 .



Un écran (E) d'observation est parallèle à la droite des sources et situé à une distance D de

celles-ci. La droite normale à l'écran passant par C définit l'axe du système et cet axe coupe l'écran en B . Les sources S_1 et S_2 sont dans le plan (BXZ) .

Le point M , de coordonnées $(X, Y, 0)$ dans le repère $BXYZ$, est un point de l'écran proche de B . Il est suffisamment éloigné des sources pour que $D \gg b$, $D \gg X$ et $D \gg Y$.

13. Comment réalise-t-on de telles sources ? Donner l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M en fonction de la différence de marche $\delta_{2/1}(M) = (S_2M) - (S_1M)$, de λ_0 et \mathcal{E}_0 ?

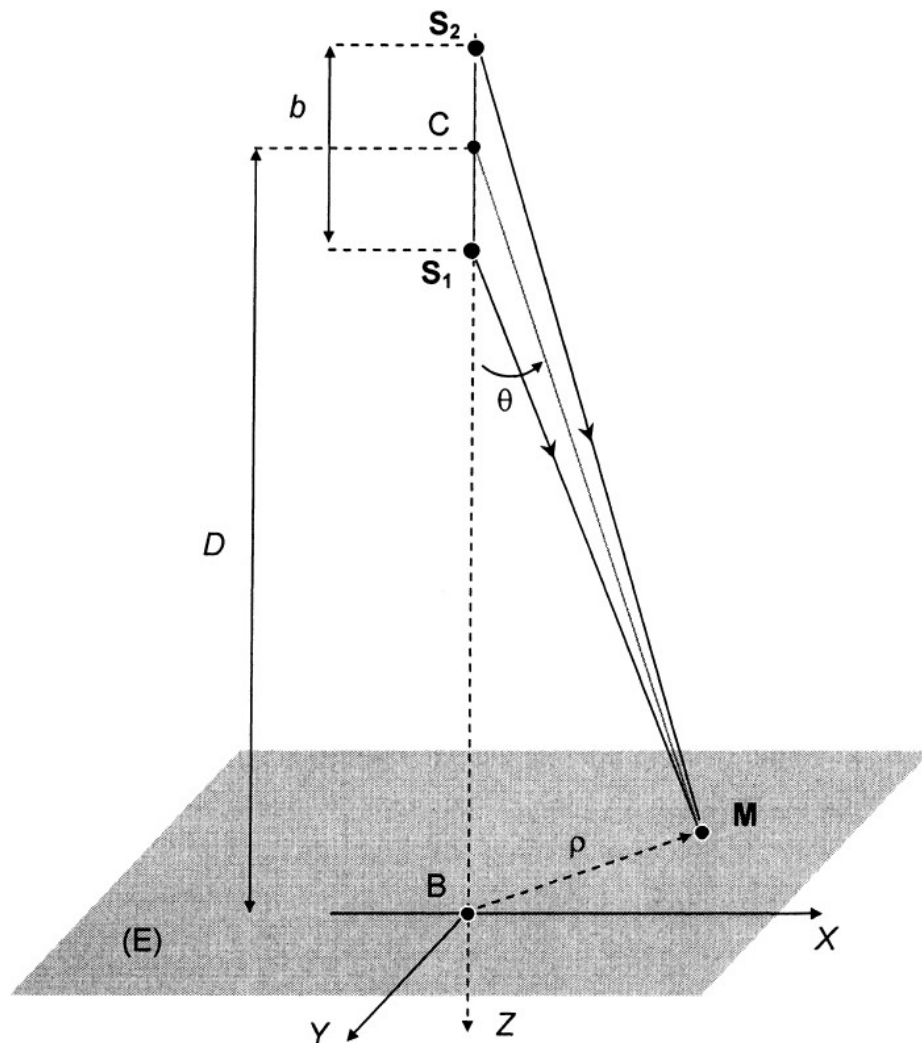
14. Démontrer l'expression approchée de la différence de marche $\delta_{2/1}(M) = (S_2M) - (S_1M)$. En déduire l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M de l'écran en fonction de X , b , D , λ_0 et \mathcal{E}_0 . Quelle est la forme des franges d'interférence observées ?

15. Définir l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M . Préciser, en justifiant, la valeur de $p(M)$:

- lorsque : la frange d'interférence en M est brillante,
- lorsque la frange d'interférence en M est sombre.

16. Définir et exprimer l'interfrange i en fonction de λ_0 , b et D .

Figure 2



L'écran (E) est maintenant placé perpendiculairement à la droite S_1S_2 en B supposé centre de l'écran (*figure 2*). Il est situé à une distance D du point milieu C entre les deux sources. Un point M du plan d'observation est défini par : $\rho = BM$, avec $D \gg b$ et $D \gg \rho$.

17. Démontrer l'expression approchée de la différence de marche $\delta_{2/1}(M) = (S_2M) - (S_1M)$ en fonction de b et de l'angle $\theta = (\vec{CB}, \vec{CM})$.

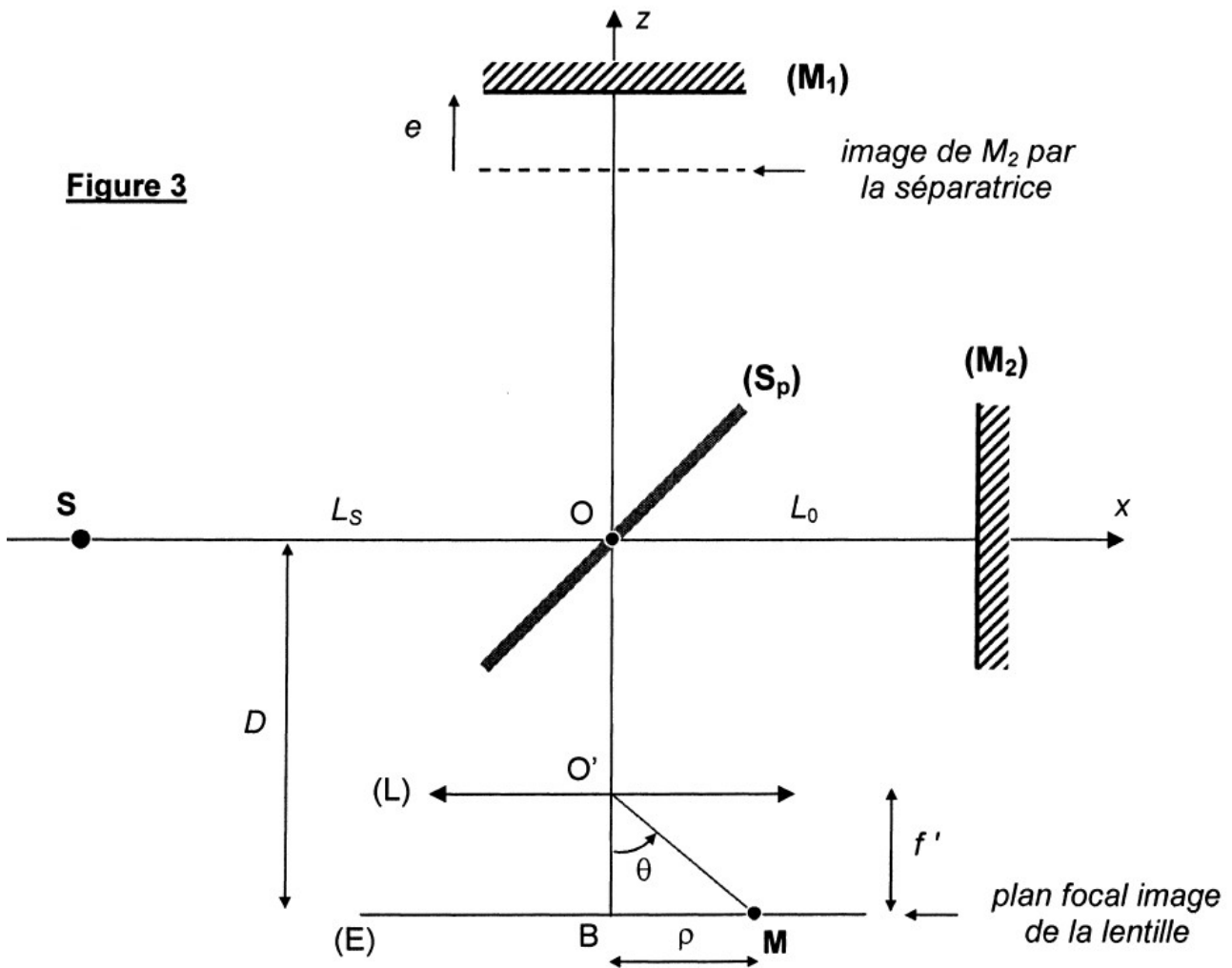
18. Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M de l'écran en fonction de θ , b , λ_0 et \mathcal{E}_0 , puis en fonction de ρ , D , b , λ_0 et \mathcal{E}_0 .

19. Justifier la forme des franges d'interférences obtenues. L'ordre d'interférence $p(M)$ en M est-il croissant ou décroissant à partir du centre B ? Justifier la réponse.

II. Interféromètre de MICHELSON

Les ondes se propagent dans le vide.

La *figure 3* correspond au schéma de principe de l'interféromètre de Michelson.



Les miroirs sont réglés de telle sorte que sont observés, par projection à l'aide d'une lentille convergente (L) , des anneaux d'interférence circulaires sur le plan d'observation (E) . Ce plan est situé dans le plan focal de la lentille (L) ; celle-ci est parfaitement stigmatique, de distance

focale image f' et son axe Oz coupe l'écran en B . On pose $OB=D$.

L'interféromètre supposé idéal est constitué :

- d'une lame semi-réfléchissante dite séparatrice (S_p) qui réfléchit la moitié de la lumière qu'elle reçoit ; l'origine O du repère est centrée sur la séparatrice qui fait un angle invariable de $\pi/4$ avec les axes Ox et Oz ; les déphasages introduits par la séparatrice ne sont pas pris en compte car ils sont compensés par une lame compensatrice (non représentée sur la *figure 3*) réglée parallèlement à la séparatrice
- de deux miroirs réglables (M_1) et (M_2) parfaitement plans, perpendiculaires au plan de la figure et dont les orientations fixes font un angle égal à $\pi/4$ par rapport à l'orientation de la lame séparatrice (S_p) ; le miroir (M_1) est susceptible de subir un mouvement de translation parallèlement à la direction Oz alors que le miroir (M_2) reste fixe, la distance qui le sépare de l'origine O est notée L_0 .

Seules seront considérées des ondes ayant été réfléchies une et une seule fois sur la lame séparatrice. A partir de la situation de référence où (M_1) est confondu avec l'image de (M_2) par la séparatrice (S_p), le miroir (M_1) subit une translation de longueur e comptée positivement si le miroir s'éloigne de la séparatrice.

A. Anneaux d'égale inclinaison

L'éclairement obtenu sur l'écran en occultant l'une des deux sources est noté \mathcal{E}_0 .

La source ponctuelle S monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , est placée à la distance finie $L_s=SO$ de la séparatrice. Le système optique constitué de (S_p), (M_1) et (M_2) donne deux images S_1 et S_2 de la source S . S_1 correspond aux rayons qui rencontrent (M_1) et S_2 aux rayons qui rencontrent (M_2).

La lentille (L) est stigmatique et n'introduit aucune différence de marche.

20. Préciser les coordonnées de S_1 et S_2 dans le repère Oxz . En déduire l'expression de $\overrightarrow{S_1 S_2}$ en fonction de e .

21. La distance qui sépare les points M et B sur l'écran (E) est notée $\rho=BM$. Avec la condition $\rho \ll f'$, exprimer la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de e et de l'angle $\theta=(\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'M})$ puis en fonction de ρ , e et f' ($\delta(M)$ est défini de telle façon qu'il s'agit d'une grandeur positive. On précisera donc ici la définition adoptée pour $\delta(M)$). Illustrer la démonstration par un schéma explicatif faisant apparaître S_1 , S_2 , (L) et (E). Déterminer, en fonction de e , la différence de marche $\Delta=\delta(B)$ obtenue en B pour $\rho=0$.

22. Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ obtenu en M en fonction de ρ , e , f' , λ_0 et \mathcal{E}_0 . En déduire que la figure d'interférence projetée sur (E) est constituée d'anneaux concentriques centrés sur B .

23. Le centre B des anneaux correspond à un maximum d'intensité. Quel est l'ordre d'interférence p_0 , supposé entier, au centre des anneaux ? Donner l'expression du rayon ρ_k du $k^{\text{ième}}$ anneau brillant compté à partir du centre en fonction de f' , λ_0 , p_0 et de son ordre d'interférence p_k .

24. Déterminer l'expression de ρ_k en fonction de f' , λ_0 , p_0 et k . Déterminer ρ_k en fonction de k et de ρ_1 , le rayon du premier anneau compté à partir du centre.
25. Quel est le phénomène observé sur l'écran quand l'interféromètre est réglé au contact optique (c'est-à-dire quand $e=0$) ?
26. Décrire, en la justifiant, l'évolution des anneaux lorsque la valeur de l'épaisseur e de la lame d'air est progressivement augmentée :
- les anneaux semblent-ils "entrer" ou "sortir" du centre ?
 - y a-t-il un nombre croissant ou décroissant d'anneaux visibles sur l'écran ?
27. Une lame à faces parallèles d'indice n_{lame} et d'épaisseur $e_{\text{lame}} = 8 \mu\text{m}$ est ajoutée devant et parallèlement au miroir mobile (M_1). Pour une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$, un brusque déplacement de 16 anneaux brillants au centre est alors observé. Évaluer numériquement l'indice de la lame n_{lame} .
28. Est-il indispensable, dans ce montage, de placer l'écran (E) dans le plan focal de la lentille (L) pour observer des interférences ? En serait-il de même si une source étendue était utilisée ?

B. Réalisation d'interférogrammes

Le miroir (M_1) est mobile entre $e=0$ et $e=L_{\text{max}}$ ($L_{\text{max}} > 0$).

Un détecteur ponctuel est placé au centre B du système d'anneaux. Il délivre un signal électrique $u(\Delta)$ proportionnel à l'éclairement qu'il reçoit ; ce signal dépend de la différence de marche Δ .

L'accroissement de e par translation du miroir (M_1) entraîne une variation du chemin optique en B de $\Delta=0$ à $\Delta=\Delta_{\text{max}}$ et, par conséquent, un défilement des anneaux. Le déplacement de (M_1) est contrôlé par un dispositif informatique qui enregistre dans le même temps l'éclairement $\mathcal{E}(\Delta)$ en B . On appelle interférogramme $\mathcal{E}(\Delta)$ l'enregistrement de l'évolution de l'éclairement \mathcal{E} en fonction de Δ .

L'éclairement obtenu sur l'écran en occultant l'une des deux sources est noté \mathcal{E}_0 .

1) Source monochromatique idéale

L'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle, monochromatique, de longueur d'onde λ_0 et de pulsation ω_0 .

29. Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}(\Delta)$ en fonction de Δ , ω_0 , \mathcal{E}_0 et de la célérité de la lumière c .
30. Représenter l'interférogramme $\mathcal{E}(\Delta)$ en fonction de Δ et indiquer ses paramètres caractéristiques.
31. Le miroir (M_1) se déplace à la vitesse constante V . Exprimer \mathcal{E} au centre du système d'anneaux en fonction du temps et montrer qu'un scintillement de fréquence ν dont on donnera l'expression est visible au centre B des anneaux. Ce scintillement est détecté au moyen d'une photodiode.
- 2) Source délivrant deux ondes de pulsations voisines

La source émet, avec la même intensité, deux ondes monochromatiques de pulsations ω_1 et ω_2 voisines de la pulsation moyenne $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, avec $\delta\omega = (\omega_2 - \omega_1) \ll \omega_0$.

32. Déterminer l'éclairement $\mathcal{E}(\Delta)$ en fonction de Δ , ω_0 , \mathcal{E}_0 , c et de l'écart $\delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$. Montrer que son expression diffère de l'éclairement précédent par le facteur $\gamma(\Delta)$ appelé degré de cohérence temporelle qui sera précisé.

33. Exprimer le contraste $\mathcal{C}(\Delta)$ des franges d'interférence. Représenter $\mathcal{C}(\Delta)$ en fonction de Δ , en indiquant les paramètres caractéristiques de l'interférogramme.

Lors du déplacement du miroir (M_1), le contraste varie périodiquement et s'annule en des points dits "points d'anticoïncidence" ; il y a alors brouillage de la figure d'interférence.

L'interféromètre est éclairé par une lampe à vapeur de sodium de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ (valeur adoptée pour faciliter les calculs). Lors de la translation du miroir (M_1), un éclairement uniforme de l'écran est observé – il correspond à une anticoïncidence – pour deux valeurs successives de l'épaisseur e de la lame d'air obtenue entre (M_1) et l'image de (M_2) par la séparatrice. Entre ces deux annulations de la visibilité des franges, 1000 scintillements sont comptabilisés par la photodiode en B .

34. Déterminer numériquement l'écart $\delta\lambda$ entre les deux longueurs d'onde du doublet ainsi que δe , la longueur de déplacement du miroir (M_1). (*On rappelle que $\delta\omega \ll \omega_0$ et $\delta\lambda \ll \lambda_0$. On peut donc, puisque l'on travaille au premier ordre, retrouver la relation entre $\delta\omega$ et $\delta\lambda$ en partant d'un calcul différentiel. On remarquera cependant que $\delta\omega$ et $\delta\lambda$ désignent ici deux grandeurs positives*)

3) Source à profil rectangulaire

Pour simplifier les calculs, la source lumineuse est supposée présenter un spectre rectangulaire de largeur spectrale $\delta\omega$. L'intensité véhiculée dans chaque bras du Michelson, indépendamment l'un de l'autre, s'écrit : $d\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\delta\omega} d\omega$ si $\omega \in \left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2} \right]$ (avec $\delta\omega \ll \omega_0$) et elle est nulle partout ailleurs.

35. Déterminer, par un calcul intégral, l'éclairement $\mathcal{E}(\Delta)$ en fonction de Δ , ω_0 , \mathcal{E}_0 , c et $\delta\omega$. Quelle est l'expression du degré de cohérence temporelle $\gamma(\Delta)$?

36. Exprimer le contraste $\mathcal{C}(\Delta)$ des franges d'interférence. Représenter $\mathcal{C}(\Delta)$. Indiquer les paramètres caractéristiques de l'interférogramme.

37. On admet que les franges d'interférence restent bien contrastées jusqu'à la première annulation du contraste c'est à dire tant que Δ vérifie la relation : $|\Delta| \leq \Delta_C$. Exprimer Δ_C en fonction de c et $\delta\omega$, puis en fonction de λ_0 et $\delta\lambda$. (*On pourra retrouver la relation entre $\delta\omega$ et $\delta\lambda$ en se basant sur un calcul différentiel. On remarquera que les deux grandeurs sont ici positives*).

Δ_C est appelé longueur de cohérence.

Chaque train d'ondes possède une phase à l'origine φ_s aléatoire au cours du temps. Il est limité dans le temps par sa durée de cohérence τ_C et dans l'espace par sa longueur de cohérence

$$\Delta_C = c \tau_C .$$

38. Précisez la signification de Δ_C et commenter la condition d'interférences $|\Delta| \leq \Delta_C$.

39. L'interféromètre de Michelson est éclairé par une lampe basse pression de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et de largeur de raie $\delta \lambda = 10^{-2} \text{ nm}$. Évaluer sa longueur de cohérence. Répondre à cette même question dans le cas d'un laser de longueur d'onde $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ et dont la largeur de raie vaut $\delta \lambda = 10^{-6} \text{ nm}$. Que dire de la longueur de cohérence d'une source parfaitement monochromatique ? Commenter.

III. Analyse spectrale d'interférogrammes

Partant d'un interférogramme, un système informatique calcule numériquement la transformée $F(\omega)$ de l'éclairement $\mathcal{E}(\Delta)$. Cette transformée est définie par l'intégrale :

$$F(\omega) = \int_0^{\Delta_{\max}} \mathcal{E}(\Delta) \cos\left(\frac{\omega \Delta}{c}\right) d\Delta$$

40. Calculer $F(\omega)$ dans le cas d'une source idéale monochromatique de pulsation ω_0 :

$$\mathcal{E}(\Delta) = \mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\omega_0 \Delta}{c}\right) \right] .$$

41. Représenter l'allure de la courbe $F(\omega)$. Montrer qu'elle présente trois pics dont on précisera :

- les amplitudes en fonction de \mathcal{E}_0 et Δ_{\max} ;
- la largeur $\delta \omega_{\text{base}}$ de leurs bases (voir annexe) en fonction de Δ_{\max} et de c .

42. Que devient $F(\omega)$ lorsque Δ_{\max} devient très grand ?

43. En déduire, sans calcul, l'allure de la courbe $F(\omega)$ obtenue pour une source émettant deux ondes de pulsations ω_1 et ω_2 voisines de la pulsation moyenne ω_0 et de même intensité ($\omega_2 > \omega_1$).

Un spectromètre a pour fonction de séparer deux radiations de pulsations voisines ω_1 et ω_2 . Il permet d'accéder à ces pulsations, de mesurer leur écart fréquentiel $\delta \omega_R = \omega_2 - \omega_1$ ainsi que les intensités relatives des deux radiations. Le paramètre le plus important pour caractériser cet appareil est son pouvoir de résolution : il estime la capacité du spectromètre à séparer deux pulsations très voisines.

Le critère "d'éloignement" adopté pour évaluer l'ordre de grandeur de la limite de résolution du spectromètre est le critère de Rayleigh : le plus petit écart mesurable est obtenu lorsque deux pics de deux radiations différentes sont distants d'une demi-largeur de base (voir annexe), autrement dit lorsque le maximum principal de l'un correspond à la première annulation de l'autre.

44. Estimer le plus petit écart spectral $\Delta \omega_R = \omega_2 - \omega_1$ qui puisse être observé par ce dispositif en fonction de c et Δ_{\max} .

45. Le pouvoir de résolution \mathcal{R} du spectromètre est défini par : $\mathcal{R} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega_R}$. Montrer que le pouvoir de résolution \mathcal{R} du spectromètre est fixé par le nombre N_{\max} de maxima d'intensité

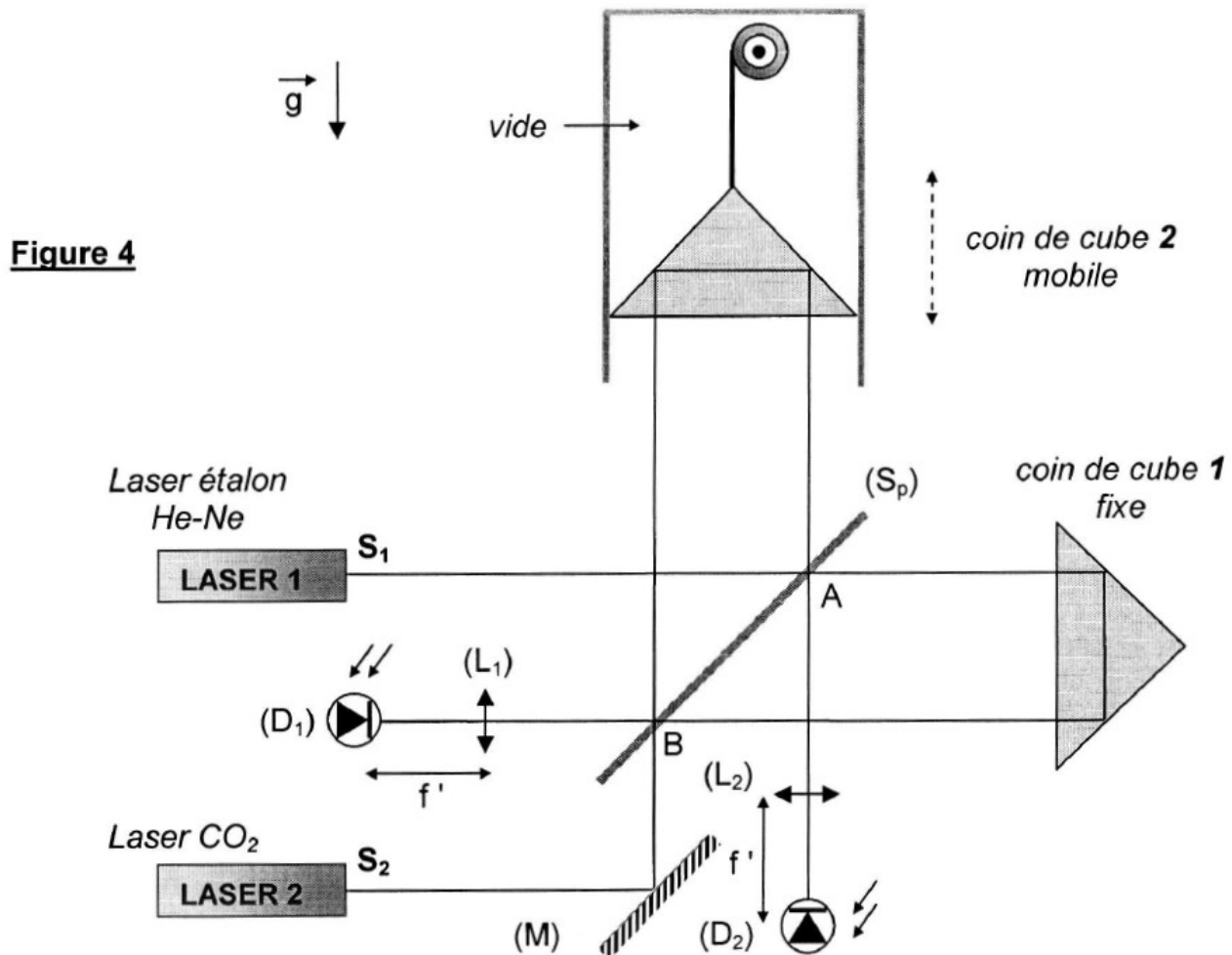
enregistrés par le détecteur lors de la course finie de l'interféromètre. Commenter.

IV. Double interféromètre de MICHELSON : lambdamètre

Le lambdamètre (*figure 4*) a été élaboré pour mesurer rapidement la longueur d'onde d'un laser stabilisé. Il se présente comme un double interféromètre de Michelson qui compare la longueur d'onde inconnue d'un laser stabilisé avec la longueur d'onde connue d'un laser de référence : le laser Hélium-Néon stabilisé sur la raie d'absorption « *i* » de l'iode à $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$

Le lambdamètre ne nécessite qu'une séparatrice (S_p), deux coins de cube identiques et un miroir réglable (M). Tous les angles de réflexion sont égaux à $\pi/4$.

Les « coins de cube » sont des réflecteurs qui ont la propriété de renvoyer la lumière dans la même direction que celle de réception. Ils sont en verre d'indice $n=1,5$ et les trois angles au sommet font chacun 90° avec une précision meilleure que la seconde d'arc. Un rayon lumineux tombant sur une des trois faces du coin va se réfléchir trois fois successivement et donc se décaler faiblement en position pour ressortir parallèlement à sa direction incidente.



Le coin de cube 2 est mobile, il se déplace verticalement dans une enceinte où le vide est réalisé. Il est suffisamment lourd pour rendre les frottements négligeables lors de la translation. Il est attaché à

la poulie d'un moteur pas à pas par l'intermédiaire d'un fil et guidé dans un tube en inox. Les concepteurs ont cherché à se rapprocher le plus possible de la chute libre.

Les longueurs de cohérence du laser étalon et du laser CO_2 stabilisé sont respectivement de l'ordre de $300m$ et $30km$.

46. Le rayon issu du *laser 1* arrive en A sur la lame semi-réfléchissante : représenter sur un schéma les trajets optiques des deux rayons qui vont interférer.

L'anneau central de la figure d'interférences est détecté par la photodiode (D_1) .

47. Le rayon issu du *laser 2* arrive en B sur la lame semi-réfléchissante : représenter sur un schéma les trajets optiques des deux rayons qui vont interférer.

L'anneau central de la figure d'interférences est détecté par la photodiode (D_2) .

48. Comparer les différences de marche pour le *laser 1* et le *laser 2* respectivement aux centres (D_1) et (D_2) des deux figures d'interférences.

Le *laser 1* est le laser étalon de longueur d'onde $\lambda_1 = 632,8nm$. Le *laser 2* est un laser CO_2 stabilisé dont la longueur d'onde λ_2 est à déterminer. Lors de la chute du *coin de cube 2*, un compteur évalue à $p_1 = 3\,160\,556$ le nombre de scintillements détectés par (D_1) et, dans le même temps, $p_2 = 188\,679$ scintillements sont détectés par (D_2) .

49. A l'aide de ces mesures, évaluer λ_2 (en μm).

50. Citer deux avantages de l'utilisation des coins de cubes pour le fonctionnement du λ damètre. Pourquoi le vide a-t-il été établi sur la longueur de déplacement du coin de cube ? Commenter le pouvoir de résolution du double interféromètre ainsi constitué.

51. Calculer la hauteur de chute e du coin de cube mobile. Comparer à la longueur de cohérence des lasers et commenter.

52. Déterminer la durée t_{chute} de la chute supposée libre du coin de cube, sachant que l'intensité du champ de pesanteur est $g = 10m.s^{-2}$. Commenter.

53. Le comptage des franges s'effectue à la frange près. En considérant que la longueur d'onde étalon λ_1 est connue sans incertitude, indiquer l'incertitude relative sur l'évaluation de λ_2 . Commenter.

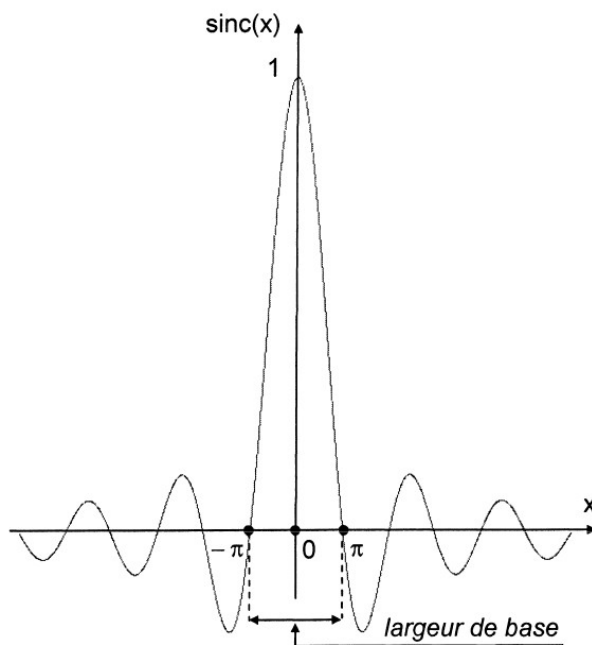
Annexes

Formules trigonométriques :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left[\frac{a+b}{2} \right] \cos \left[\frac{a-b}{2} \right]$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \left[\frac{a+b}{2} \right] \sin \left[\frac{a-b}{2} \right]$$

$$2 \cos a \cdot \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$



Réponses

1) $dl(P) = v(P) d\tau$

$$\tau(M) = \int_S^M \frac{dl(P)}{v(P)}$$

On remplace $v(P)$ par son expression en fonction de l'indice en P

$$\begin{aligned} \tau(M) &= \int_S^M \frac{dl(P)}{c/n(P)} \\ &= \frac{1}{c} \int_S^M n(P) dl(P) \end{aligned}$$

$$\tau(M) = \frac{(SM)}{c}$$

2) $\omega = kc$ (k : vecteur d'onde)

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} c$$

A.N.

$$= \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{600 \cdot 10^{-9}}$$

$$\omega = 3,14 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$$

3) L'onde en P reproduit l'onde en M avec un temps de retard noté $\tau_{PM} = \tau(M) - \tau(P)$ cf $\Delta(M, t) = a \cos(\omega(t - \tau_{PM}) - \varphi(M))$

Le déphasage retard $\varphi_{PM} = \varphi(M) - \varphi(P)$ supplémentaire vaut

$$\varphi_{PM} = \omega \tau_{PM} \quad \text{ou :}$$

$$\varphi_{PM} = \frac{2\pi}{T} \tau_{PM}$$

En reportant l'expression de ω et celle de τ

$$\varphi_{PM} = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \frac{(PM)}{c}$$

$$\varphi_{PM} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (PM)$$

4) On appelle surface d'onde une surface équiphas

(ensemble des points M tels que $(SM) = \text{cte}$

ensemble des points M tels que $\tau(M) = \text{cte}$)

$$\begin{aligned}
 (SM) &= \int_S^M n(P) dl(P) \\
 &= n \quad SM \quad \text{dans un milieu homogène}
 \end{aligned}$$

donc pour la surface d'onde

$$\begin{aligned}
 (SM) &= \text{cte} \\
 SM &= \frac{\text{cte}}{n}
 \end{aligned}$$

SM est une constante. Les points M se trouvent sur une sphère

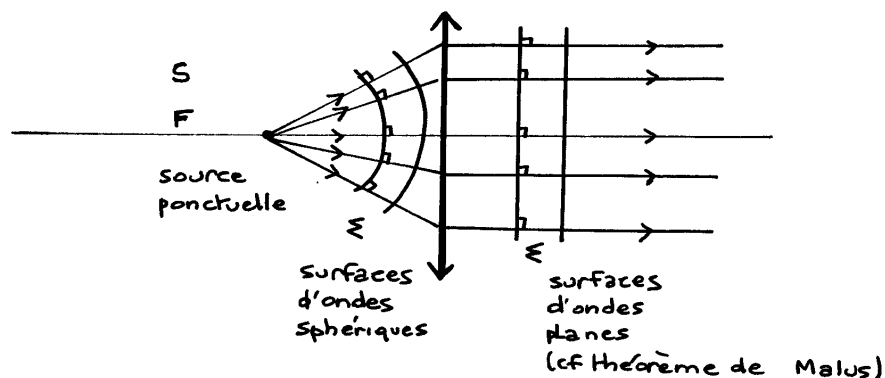
Le théorème de Malus :

Les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'ondes.

5)

La lentille est un transformateur de phase

(l'épaisseur de verre traversée dépend du point envisagé donc la phase est modifiée)



La source ponctuelle doit être placée en un foyer objet (principal ou secondaire) de la lentille

6) On travaille en complexes :

$$\begin{aligned}
 \underline{A} &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\
 &= a_1 \exp j(\omega_1 t - \varphi_1(M, t)) + a_2 \exp j(\omega_2 t - \varphi_2(M, t)) \\
 \underline{A} \underline{A}^* &= \underline{A}_1 \underline{A}_1^* + \underline{A}_2 \underline{A}_2^* + \underbrace{(\underline{A}_1 \underline{A}_2^* + \underline{A}_1^* \underline{A}_2)}_{2 \operatorname{Re}(\underline{A}_1^* \underline{A}_2)} \\
 &= a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos((\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_2(M, t) + \varphi_1(M, t))
 \end{aligned}$$

$$I_{(M)} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t - \phi_{2,1}(M, t)) \rangle$$

En l'absence d'interférences, on aura $I_0 = I_1 + I_2$.
Le terme traduisant les interférences est donc le terme complémentaire obtenu :

$$\text{terme d'interférences : } 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \langle \cos((\omega_2 - \omega_1)t - \phi_{2,1}(M, t)) \rangle$$

7) Il y a des interférences si le terme d'interférences n'est pas nul en tout point au voisinage de M.

Pour des ondes incohérentes :

$$I_{(M)} = I_1 + I_2 = a_1^2 + a_2^2$$

L'éclairement sur l'écran est uniforme

8) Si les deux sources sont de pulsations différentes, pendant τ_R (même en supposant $\phi_{2,1}$ indépendant du temps) le cosinus prend des valeurs différentes entre -1 et +1.

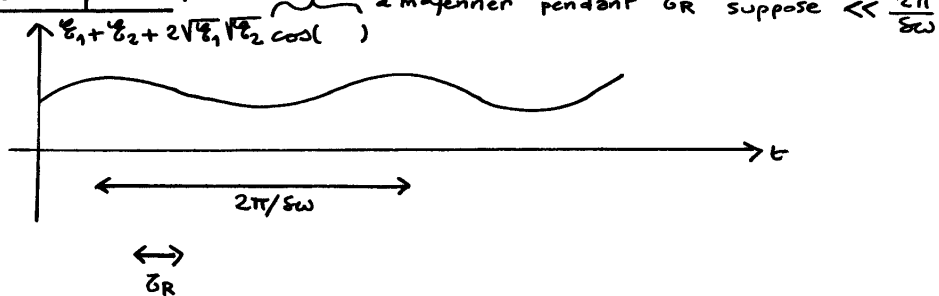
Si de plus $\phi_{2,1}$ varie lui aussi avec une période de l'ordre de τ_c avec $\tau_R \gg \tau_c \gg T$ on aura

$$\langle \cos() \rangle_{\tau_R} = 0$$

9) Pendant τ_c la phase $\phi_{2,1}$ reste constante.

Le $\cos((\omega_2 - \omega_1)t - \phi)$ varie avec une période $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

Il s'agit du phénomène de battement entre deux ondes de pulsations proches.



On observe des "battements optiques" avec des renforcements périodiques de la lumière.

$$\begin{aligned}
 10) \quad \varphi_2(M, t) &= \varphi_{S_2} + \varphi_{S_2 M} \\
 &= \varphi_{S_2} + \frac{2\pi}{\lambda_0} (S_2 M) \quad \text{et de même} \\
 \varphi_1(M, t) &= \varphi_{S_1} + \frac{2\pi}{\lambda_0} (S_1 M)
 \end{aligned}$$

$$\Phi_{2/1}(M, t) = (\varphi_{S_2} - \varphi_{S_1}) + \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{2/1}(M)$$

Ce déphasage dépend du temps puisque φ_{S_2} et φ_{S_1} dépendent du temps de manière aléatoire.

11) Dans le cas de deux ondes de même pulsation : ω_0 , le terme d'interférences vaut

$$\begin{aligned}
 &2 \sqrt{\varphi_1} \sqrt{\varphi_2} < \cos \Phi_{2/1}(M, t) > \\
 &= 2 \sqrt{\varphi_1} \sqrt{\varphi_2} < \cos (\underbrace{\varphi_{S_2} - \varphi_{S_1}}_{\text{ce terme dépend du temps}} + \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{2/1}(M)) >
 \end{aligned}$$

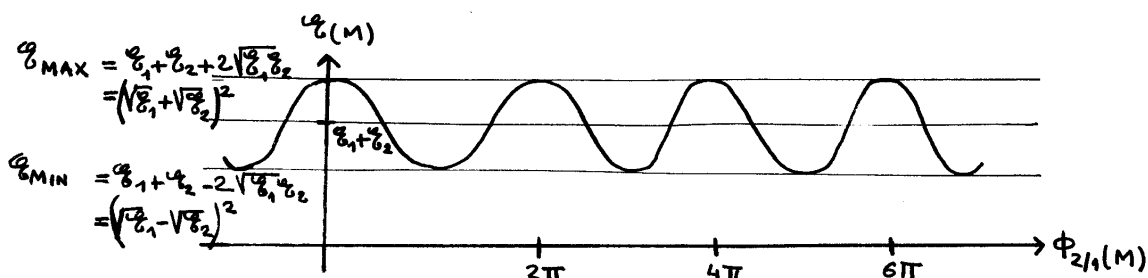
Le terme $(\varphi_{S_2} - \varphi_{S_1})$ dépend du temps. Il change de valeur au moins tous les T_c . Donc le cosinus prend des valeurs différentes et à nouveau

$$< \cos() >_{\delta_R} = 0$$

Pour avoir des interférences, il faut restreindre la variation aléatoire de $(\varphi_{S_2} - \varphi_{S_1})$ en fonction du temps.

Il doit y avoir cohérence en phase entre les deux sources.

$$12) \quad \varphi(M) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2 \sqrt{\varphi_1} \sqrt{\varphi_2} \cos(\Phi_{2/1}(M))$$



Expression du contraste

$$C = \frac{I_{\text{MAX}} - I_{\text{MIN}}}{I_{\text{MAX}} + I_{\text{MIN}}}$$

$$C = \frac{2 \sqrt{I_1} \sqrt{I_2}}{I_1 + I_2}$$

Si on considère la définition du contraste, $C = \frac{1 - I_{\min}/I_{\max}}{1 + I_{\min}/I_{\max}}$,
il est évident que le contraste maximal correspond à $I_{\min}/I_{\max} = 0$
et que ce contraste vaut alors 1.

$$\begin{array}{l} C_{\max} = 1 \quad \text{pour} \\ I_{\min} = 0 \quad \text{soit} \\ I_1 = I_2 \end{array} \quad (\text{sources de même amplitude})$$

13) Pour réaliser deux sources cohérentes, on part d'une seule source dont on fabrique deux images.

On peut travailler soit par division de front d'onde
soit par division d'amplitude

on aura en partant de 12) et en utilisant $\varphi_{S_2} - \varphi_{S_1} = 0$ cf 10)

$$I(M) = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0}\sqrt{I_0} \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{2/1}(M)$$

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta_{2/1}(M)}{\lambda_0} \right)$$

$$\begin{array}{l} 14) \quad \vec{S_1M} \left| \begin{array}{l} X - \frac{b}{2} \\ Y - 0 \\ 0 - D \end{array} \right. \quad \vec{S_2M} \left| \begin{array}{l} X + \frac{b}{2} \\ Y \\ -D \end{array} \right. \\ \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z} \end{array}$$

$$\|\vec{S_1M}\| = \left(D^2 + \left(X - \frac{b}{2}\right)^2 + Y^2 \right)^{1/2}$$

$$\|\vec{S_2M}\| = \left(D^2 + \left(X + \frac{b}{2}\right)^2 + Y^2 \right)^{1/2}$$

$$\|\vec{S_1M}\| = D \left(1 + \frac{X^2}{D^2} + \frac{Y^2}{D^2} + \frac{b^2}{4D^2} - \frac{bX}{D^2} \right)^{1/2}$$

on travaille au deuxième ordre en $\frac{X}{D}, \frac{Y}{D}, \frac{b}{D}$

$$\|\vec{S_1M}\| \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{X^2}{D^2} + \frac{1}{2} \frac{Y^2}{D^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{4D^2} - \frac{1}{2} \frac{bX}{D^2} \right)$$

de même

$$\|\vec{S_2M}\| \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{X^2}{D^2} + \frac{1}{2} \frac{Y^2}{D^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{4D^2} + \frac{1}{2} \frac{bX}{D^2} \right)$$

$$S_{2/1}(M) = (S_2 M) - (S_1 M)$$

puisque l'on se trouve dans le vide ($n=1$)

$$= \|\vec{S_2 M}\| - \|\vec{S_1 M}\|$$

$$= D \frac{bX}{D^2}$$

$$S_{2/1}(M) = \frac{bX}{D}$$

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi bX}{\lambda_0 D} \right)$$

Puisque l'éclairement ne dépend que de X , les franges ont donc pour équation $X = cte$. Ce sont des franges rectilignes

15) On pose

$$P = \frac{S_{2/1}(M)}{\lambda_0} = \frac{bX}{\lambda_0 D}$$

donc

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi P \right)$$

frange brillante : si $\cos 2\pi P = +1$ ($I(M) = 4I_0$)

$$P = m \quad m \in \mathbb{Z}$$

frange sombre : si $\cos 2\pi P = -1$ ($I(M) = 0$)

$$P = m + \frac{1}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$$

16) L'interfrange correspond à la période spatiale de $I(X)$.

C'est donc le ΔX correspondant à $\Delta P = 1$

$$i = \frac{\lambda_0 D}{b}$$

17) En utilisant par exemple un calcul vectoriel :

$$\vec{S_1 M} = \vec{CM} - \vec{CS_1}$$

$$\vec{S_1 M}^2 = \vec{CM}^2 - 2 \vec{CM} \vec{CS_1} + \vec{CS_1}^2$$

$$= \|\vec{CM}\|^2 \left(1 - 2 \frac{\vec{CM} \vec{CS_1}}{\|\vec{CM}\|^2} + \frac{\|\vec{CS_1}\|^2}{\|\vec{CM}\|^2} \right)$$

au premier ordre en $\frac{\|\vec{CS}_1\|}{\|\vec{CM}\|}$

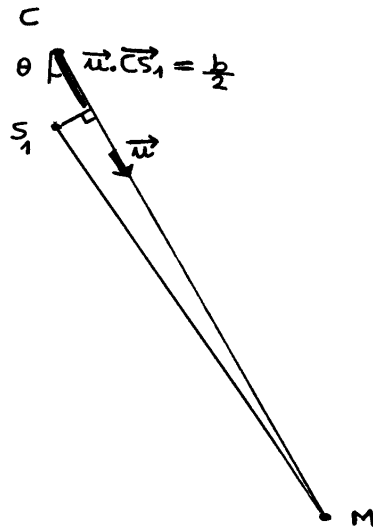
$$\|\vec{S}_1M\|^2 \simeq \|\vec{CM}\|^2 \left(1 - 2 \frac{\vec{u}_{CM} \cdot \vec{CS}_1}{\|\vec{CM}\|} \right)$$

$$\|\vec{S}_1M\| \simeq \|\vec{CM}\| \left(1 - \frac{\vec{u}_{CM} \cdot \vec{CS}_1}{\|\vec{CM}\|} \right)$$

finalement :

$$\|\vec{S}_1M\| \simeq \|\vec{CM}\| - \vec{u}_{CM} \cdot \vec{CS}_1$$

$$\|\vec{S}_2M\| \simeq \|\vec{CM}\| - \vec{u}_{CM} \cdot \vec{CS}_2$$



$$\|\vec{S}_1M\| = \sqrt{D^2 + p^2} - \frac{b}{2} \cos \theta$$

$$\|\vec{S}_2M\| = \sqrt{D^2 + p^2} + \frac{b}{2} \cos \theta$$

$$S_{2/1}(M) = \|\vec{S}_2M\| - \|\vec{S}_1M\| \text{ puisque } n=1$$

$$S_{2/1}(M) = b \cos \theta$$

18)

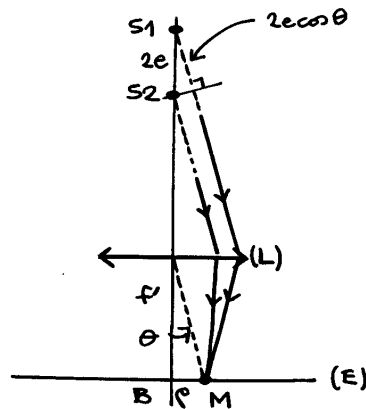
$$I_b(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi b \cos \theta}{\lambda_0} \right)$$

$$\text{avec } \cos \theta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + p^2}}$$

$$I_b(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi b D}{\lambda_0 \sqrt{D^2 + p^2}} \right)$$

- pas de déphasage à prendre en compte à cause de la séparatrice)

figure



expression de δ

$$\|\vec{S_1M}\| - \|\vec{S_2M}\| = 2e \cos \theta$$

$$\delta_{1/2}(M) = 2e \cos \theta$$

(formule ici rigoureuse
alors que le résultat en 17) : $b \cos \theta$
n'était qu'approché)

$$\begin{aligned} \delta_{1/2}(M) &= 2e \frac{f'}{\sqrt{f'^2 + p^2}} \\ &= 2e \frac{1}{(1 + \frac{p^2}{f'^2})^{1/2}} \quad \text{avec } \frac{p}{f'} \ll 1 \end{aligned}$$

$$\delta(M) \simeq 2e \left(1 - \frac{p^2}{2f'^2}\right)$$

En B on a $p=0$

$$\Delta = \delta(B) = 2e$$

(résultat révisé)

23)

$$I_0(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{2e(1 - \frac{p^2}{2f'^2})}{\lambda_0}\right)\right)$$

$I_0(M)$ est fonction de p donc la figure d'interférence
est constituée d'anneaux centrés sur B.

23) ordre au centre :

$$P_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$$

ordre (général) :

$$P = \frac{2e}{\lambda_0} \left(1 - \frac{r^2}{2f^2}\right)$$

$$= P_0 \left(1 - \frac{r^2}{2f^2}\right)$$

k-ième anneau :

$$P_k = P_0 \left(1 - \frac{r_k^2}{2f^2}\right)$$

$$r_k = f\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{P_k}{P_0}}$$

24) L'ordre décroît si e augmente.Pour le premier anneau brillant, on a $P_1 = P_0 - 1$ k-ième " " $P_k = P_0 - k$

$$r_k = \frac{f\sqrt{2}}{\sqrt{P_0}} \sqrt{k}$$

$$r_1 = \frac{f\sqrt{2}}{\sqrt{P_0}}$$

$$r_k = r_1 \sqrt{k}$$

(Les rayons croissent en \sqrt{k} .)

Ils sont donc de plus en plus serrés quand on s'éloigne du centre.

25) Au contact optique $e=0$ et d'après la formule 22)

$$I(M) = I_0 \quad \forall r$$

Sur l'écran, l'éclairement est uniforme.

On n'observe plus d'anneaux.

26) A $P = \frac{2e \cos \theta}{\lambda_0}$ constant, si e augmente, $\cos \theta$ doit→ diminuer donc θ augmente. Les anneaux s'éloignent ducentre en semblant sortir de ce centre. (On peut utiliser laformule $P_k = \frac{f\sqrt{2}}{\sqrt{P_0}} \sqrt{k}$. Si $e \uparrow$ $P_0 \uparrow$ $\frac{1}{P_0} \uparrow$ et $P_k \uparrow$)

→ En utilisant la formule 24)

(valable uniquement quand le centre est brillant)

le rayon du k ième anneau brillant, si le centre est brillant est: $P_k = p_1 \sqrt{k}$

avec p_1 inversement proportionnel à $\sqrt{P_0}$ soit à $\sqrt{2e}$

Si e augmente (le centre étant redevenu brillant)

P_k a diminué

le rayon maximal de l'écran étant fixé, on verra donc davantage d'anneaux

remarque: le nombre d'anneaux

visibles diminue donc lorsque l'on se rapproche de la teinte plate.

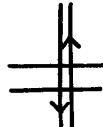
(prévisible ?)

27) On ne s'intéresse ici qu'aux rayons correspondant à $\theta = 0$

on avait donc pour le centre de la figure :

$$\delta_{1/2} = 2e \quad \text{et} \quad P = \frac{2e}{\lambda_0}$$

La lame modifie le trajet 1 en ajoutant un chemin optique supplémentaire, par rapport au trajet dans le vide, égal à $2e_{\text{lame}}(n-1)$ puisque la lame est traversée 2 fois.



$$\begin{aligned} \delta'_{1/2} &= 2e + 2e_{\text{lame}}(n-1) \\ P' &= \frac{2e}{\lambda_0} + \frac{2e_{\text{lame}}(n-1)}{\lambda_0} \end{aligned}$$

La variation de l'ordre d'interférence au centre est :

$$\Delta P = \frac{2e_{\text{lame}}(n-1)}{\lambda_0}$$

A.N.

$$\Delta P = 16$$

$$n-1 = \frac{\Delta P \lambda_0}{2e_{\text{lame}}}$$

$$= \frac{16 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}$$

$$= 0,5$$

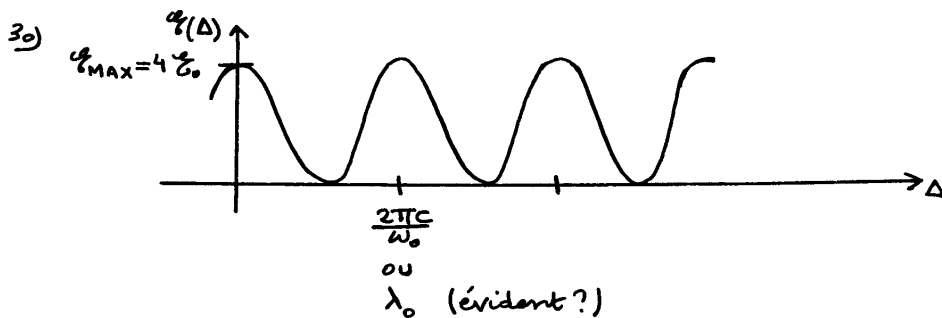
$$n = 1,5$$

- 28) La source étant supposée ponctuelle, les interférences sont non localisées. Quelle que soit la position de l'écran, on observe les interférences (qui apparaissent dans le plan conjugué du plan image).
- Dans le cas d'une source étendue les interférences sont localisées à l'infini. Il faut placer l'écran dans le plan conjugué d'un objet à l'infini c'est à dire dans le plan focal image.

29)

$$I(\Delta) = 2 I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi \Delta}{\lambda_0} \right)$$

$$I(\Delta) = 2 I_0 \left(1 + \cos \frac{\omega_0 \Delta}{c} \right)$$



31) on a $\Delta = 2e$
 $= 2 \sqrt{t}$

Au centre:

$$I(t) = 2 I_0 \left(1 + \cos \frac{2 \omega_0 \sqrt{t}}{c} \right)$$

dont la période est telle que

$$\frac{2 \omega_0 \sqrt{t}}{c} T = 2\pi$$

$$v = \frac{\omega_0 \sqrt{t}}{\pi c} = \frac{v}{\lambda_0/2}$$

On observe donc des scintillements à cette fréquence.

- 32) Il y a incohérence entre des ondes de pulsations différentes. on doit donc sommer les éclairissements.

$$I_0 = I_{\omega_1} + I_{\omega_2}$$

On suppose que :

$$\text{et } \left. \begin{aligned} \varphi_{01} + \varphi_{02} &= \varphi_0 \\ \varphi_{01} &= \varphi_{02} \end{aligned} \right\} \varphi_{01} = \varphi_{02} = \frac{\varphi_0}{2}$$

finallement :

$$\begin{aligned} \varphi(\Delta) &= \varphi_0 (1 + \cos \frac{\omega_1 \Delta}{c}) + \varphi_0 (1 + \cos \frac{\omega_2 \Delta}{c}) \\ &= 2\varphi_0 + \varphi_0 (\cos \frac{\omega_1 \Delta}{c} + \cos \frac{\omega_2 \Delta}{c}) \\ &= 2\varphi_0 + \varphi_0 2 \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1) \Delta}{2c} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1) \Delta}{2c} \end{aligned}$$

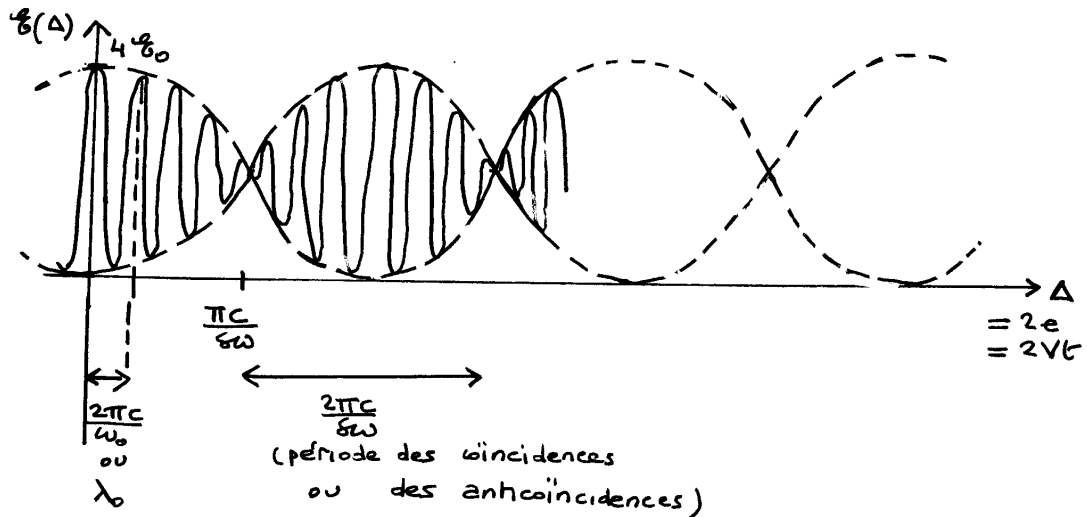
$$\boxed{\varphi(\Delta) = 2\varphi_0 \left(1 + \underbrace{\cos \left(\frac{\delta\omega}{2} \frac{\Delta}{c} \right)}_{\delta(\Delta)} \cos \left(\omega_0 \frac{\Delta}{c} \right) \right)}$$

$$\boxed{\delta(\Delta) = \cos \left(\frac{\delta\omega}{2} \frac{\Delta}{c} \right)}$$

$$33) \quad \varphi(\Delta) = \frac{\varphi_{\text{MAX}(\Delta)} - \varphi_{\text{MIN}(\Delta)}}{\varphi_{\text{MAX}(\Delta)} + \varphi_{\text{MIN}(\Delta)}}$$

avec $\varphi_{\text{MAX}(\Delta)} = 2\varphi_0 (1 + |\delta(\Delta)|)$
 $\varphi_{\text{MIN}(\Delta)} = 2\varphi_0 (1 - |\delta(\Delta)|)$

$$\boxed{\varphi(\Delta) = |\gamma(\Delta)|}$$



$$34) \quad \begin{array}{l} \text{nombre de franges} \\ \text{entre deux} \\ \text{anti-coïncidences} \end{array} = \frac{\left(\frac{2\pi c}{\delta\omega} \right)}{\left(\frac{2\pi c}{\omega_0} \right)}$$

$$\boxed{N = \frac{\omega_0}{\delta\omega}}$$

remarque

$$\omega = 2\pi c \frac{1}{\lambda}$$

Si λ varie de $d\lambda$

ω varie de $d\omega$

Calcul différentiel (plus rapide par les logarithmes)

$$\ln \omega = \ln(2\pi c) - \ln \lambda$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = - \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Ici avec $\delta\omega (>0)$

$\delta\lambda (>0)$

pour des variations "petites", on pourra approcher le résultat par le calcul différentiel (calcul au 1er ordre)

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = + \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}$$

$$N = \frac{\lambda_0}{\delta\lambda}$$

A.N.

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \frac{\lambda_0}{N} \\ &= \frac{600 \cdot 10^{-9}}{1000} \end{aligned}$$

$$\delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$$

La variation de Δ pour N interférences vaut $N \times \left(\frac{2\pi c}{\omega_0}\right)$ ou $N \lambda_0$ correspondant à

$$\delta e = N \frac{\lambda_0}{2}$$

A.N.

$$\delta e = 1000 \frac{600 \cdot 10^{-9}}{2}$$

$$\delta e = 0,3 \text{ mm}$$

35) Pour une raie rectangulaire

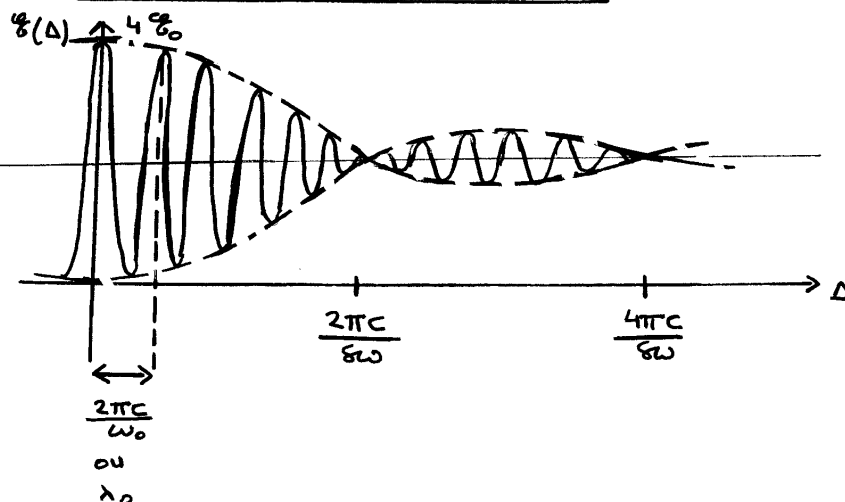
$$\begin{aligned}
 \varphi(\Delta) &= \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} d\varphi_0 \\
 &= \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} 2 d\varphi_0 (1 + \cos \frac{\omega \Delta}{c}) \\
 &= \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \frac{\varphi_0}{\delta\omega} d\omega (1 + \cos \frac{\omega \Delta}{c}) \\
 &= \frac{2\varphi_0}{\delta\omega} \left[\delta\omega + \frac{[\sin \frac{\omega \Delta}{c}]_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}}}{\frac{\Delta}{c}} \right] \\
 &= 2\varphi_0 \left[1 + \frac{\sin(\frac{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}}{c} \Delta) - \sin(\frac{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}{c} \Delta)}{\frac{\delta\omega \Delta}{c}} \right] \\
 &= 2\varphi_0 \left[1 + \frac{2 \sin \frac{\delta\omega \Delta}{2c} \cos \frac{\omega_0 \Delta}{c}}{\frac{\delta\omega \Delta}{c}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\varphi(\Delta) = 2\varphi_0 \left[1 + \underbrace{\text{sinc}\left(\frac{\delta\omega \Delta}{2c}\right)}_{\delta(\Delta)} \cos \frac{\omega_0 \Delta}{c} \right]$$

$$\delta(\Delta) = \text{sinc}\left(\frac{\delta\omega}{2c} \Delta\right)$$

36)

$$C(\Delta) = |\delta(\Delta)|$$



37)

$$\Delta_c = \frac{2\pi c}{\delta\omega}$$

remarque

$$\omega = 2\pi c \frac{1}{\lambda}$$

$$d\omega = -2\pi c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

Ici on fait

$$\delta\omega = 2\pi c \frac{\delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

$$\Delta_c = \frac{2\pi c}{2\pi c \frac{\delta\lambda}{\lambda_0^2}}$$

$$\Delta_c = \frac{\lambda_0^2}{\delta\lambda}$$

38) $\rightarrow \Delta_c$ représente la longueur occupée dans l'espace par le train d'onde.

φ_s garde la même valeur sur toute la longueur du train d'onde.

\rightarrow La différence de marche Δ doit rester inférieure à Δ_c sinon les deux trains d'ondes qui arrivent en B sont incohérents (ils correspondent à des φ_s différents c'est à dire un $\varphi_{s2} - \varphi_{s1}$ aléatoire : voir questions 10 et 11)

39)

$$\Delta_c = \frac{\lambda_0^2}{\delta\lambda}$$

A.N.

$$= \frac{(600 \cdot 10^{-9})^2}{10^{-2} \cdot 10^{-8}}$$

$$\Delta_c = 3,6 \text{ cm}$$

Lampe B.P.

A.N.

$$= \frac{(600 \cdot 10^{-9})^2}{10^{-6} \cdot 10^{-9}}$$

$$\Delta_c = 360 \text{ m}$$

laser

Pour une source parfaitement monochromatique $\delta\lambda = 0$

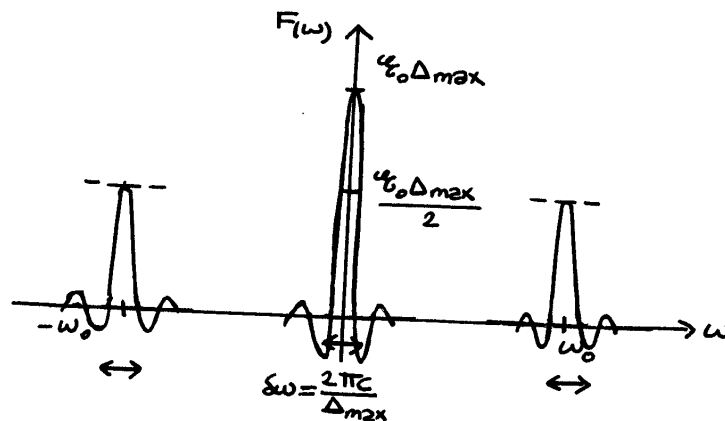
$$\Delta c_{\text{monochr}} = \infty$$

40)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\Delta_{\max}} \omega_0 (1 + \cos \frac{\omega_0 \Delta}{c}) \cos \frac{\omega \Delta}{c} d\Delta \\ &= \omega_0 \int_0^{\Delta_{\max}} \left(\cos \frac{\omega \Delta}{c} + \underbrace{\cos \frac{\omega \Delta}{c} \cos \frac{\omega_0 \Delta}{c}}_{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{(\omega + \omega_0) \Delta}{c} + \cos \frac{(\omega - \omega_0) \Delta}{c} \right)} \right) d\Delta \end{aligned}$$

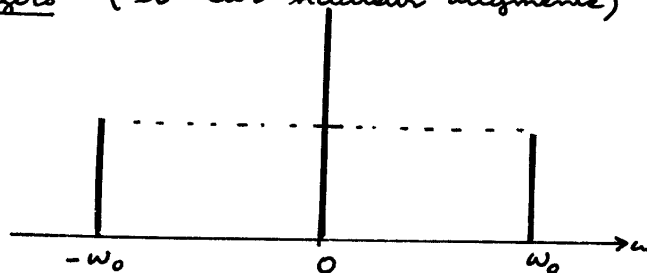
$$F(\omega) = \omega_0 \Delta_{\max} \left(\text{sinc} \frac{\omega \Delta_{\max}}{c} + \frac{1}{2} \text{sinc} \frac{(\omega + \omega_0) \Delta_{\max}}{c} + \frac{1}{2} \text{sinc} \frac{(\omega - \omega_0) \Delta_{\max}}{c} \right)$$

41)



Les 3 largeurs à la base sont identiques.

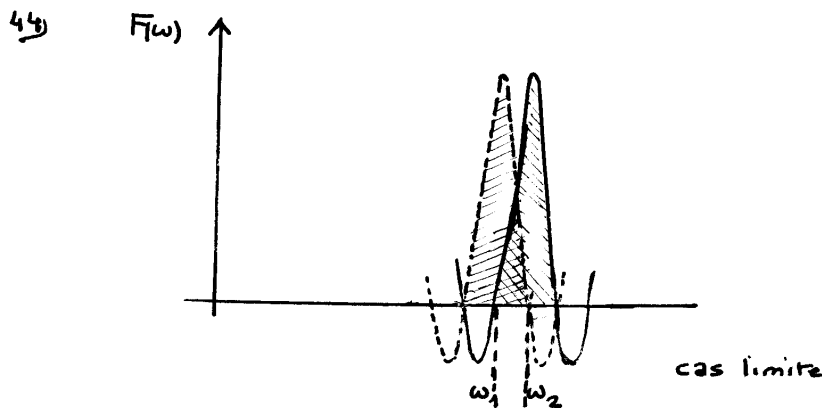
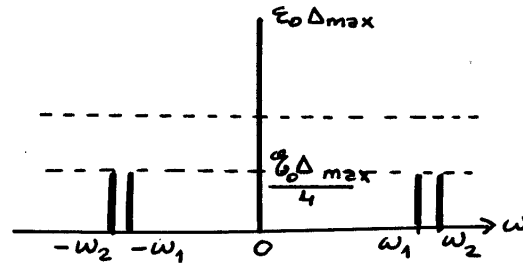
42) Si Δ_{\max} devient très grand, la largeur des pics tend vers zéro (et leur hauteur augmente) (cf "Dirac")



43) Cas d'un doublet ω_1 et ω_2

on aura $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$

d'où $F = F_1 + F_2$



Il y a séparation d'après le critère de Rayleigh si

$$\omega_2 - \omega_1 \geq \frac{\mathcal{E}_0}{2}$$

$$\Delta\omega \geq \frac{\pi c}{\Delta_{max}}$$

$$\Delta\omega_R = \frac{\pi c}{\Delta_{max}}$$

45)

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_R}$$

$$= \frac{\omega_0 \Delta_{max}}{\pi c}$$

On a vu en 33) que entre deux max d'intensité,

Δ variait de $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$.

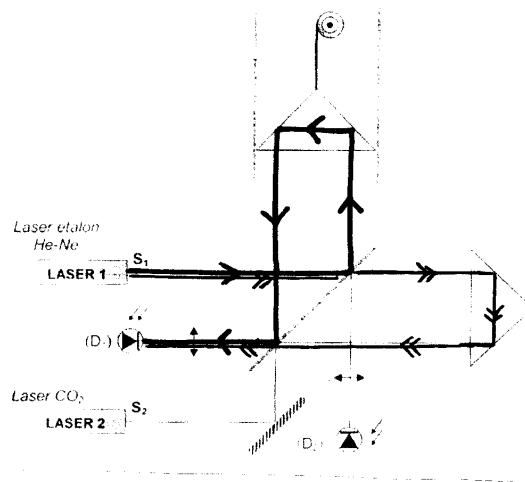
Le nombre de max

$$N_{max} = \frac{\Delta_{max}}{(2\pi c/\omega_0)}$$

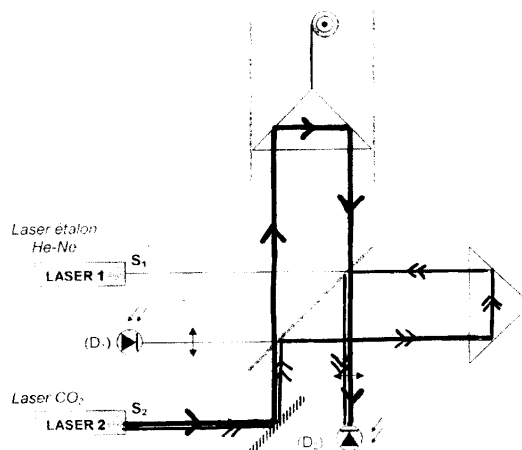
$$\mathcal{R} = 2 N_{\max}$$

\mathcal{R} augmente avec Δ_{\max} donc avec N_{\max}
 Plus la course du miroir est importante,
 plus la résolution est meilleure.

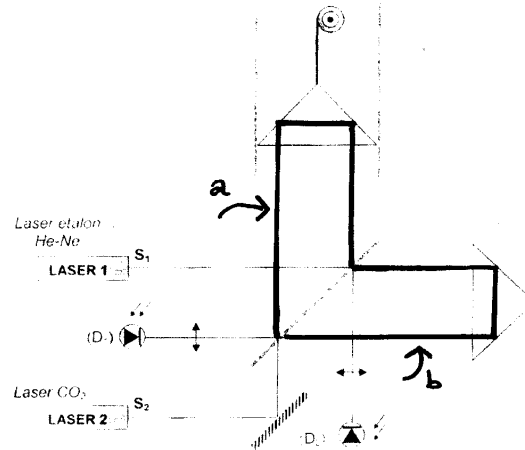
46)



47)



48)



Sauf les trajets identiques, pour les rayons laser 1 la différence vient des trajets a et b
 c'est la même chose pour les rayons laser 2 (la seule modification est le sens de parcours de la lumière)

Les deux différences de marche Δ pour laser 1 en D1 et pour laser 2 en D2 sont égales.

49) En désignant ici par Δ la variation de la différence de marche causée par la chute, on aura

$$\Delta = P_1 \lambda_1 = P_2 \lambda_2$$

$$\lambda_2 = \frac{P_1}{P_2} \lambda_1$$

$$\text{A.N.} \quad = \frac{3160556}{188679} 632,8 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 10,60 \mu\text{m}$$

(il s'agit d'un laser infrarouge)

50) Utilisation des coins de cube :

- le rayon incident ressort parallèlement à sa direction initiale (alors que dans le cas d'un miroir cela n'est

Vrai qu'en incidence rigoureusement normale.

Réalisation du vide

Nécessaire sinon il faudrait faire des corrections pour tenir compte de l'indice de l'air dans le calcul de la différence de marche. Ce qui réduirait la précision de la mesure.

Pouvoir de résolution

On a vu en 45) qu'il était en lien avec la course (et le nombre de scintillements détectés)
Les valeurs de P_1 et P_2 indiquent une résolution élevée.

51)

$$\Delta = 2e$$

donc

$$e = \frac{P_1 \lambda_1}{2}$$

$$\text{A.N.} = \frac{3160556 \times 632,8 \cdot 10^{-9}}{2}$$

$$e = 1,0 \text{ m}$$

(très grand... La résolution sera élevée)

On a bien, en prenant la valeur numérique Δ_{laser} de 39)

$$\Delta = 2e < \Delta_{\text{laser}}$$

52) Durée de la chute

$$e = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$$

A.N.

$$t = 0,45 \text{ s}$$

Le déplacement est à la fois bien plus grand et bien plus rapide que pour une manipulation avec un interféromètre de Michelson.

53)

$$\lambda_2 = \frac{P_1}{P_2} \lambda_1$$

Calcul différentiel

(utilisable pour des petites variations)

$$\ln \lambda_2 = \ln P_1 - \ln P_2 + \ln \lambda_1$$

on différencie :

$$\frac{d\lambda_2}{\lambda_2} = \frac{dP_1}{P_1} - \frac{dP_2}{P_2}$$

Ici on aura

$$\underbrace{\frac{\Delta \lambda_2}{\lambda_2}}_{\text{incertitude relative sur } \lambda_2} = \frac{\Delta P_1}{P_1} + \frac{\Delta P_2}{P_2}$$

$$\text{A.N.} \quad \frac{\Delta \lambda_2}{\lambda_2} = \frac{1}{3\,160\,556} + \frac{1}{188\,679}$$

$$\boxed{\frac{\Delta \lambda_2}{\lambda_2} = 6 \cdot 10^{-6}}$$

(ou $6 \cdot 10^{-8} \%$)

La mesure est alors d'une très grande précision.