Planche n° 13. Fonctions trigonométriques. Corrigé

Exercice n° 1

1) La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire. On l'étudie et on construit son graphe sur $[0,\pi]$. On obtient ensuite son graphe complet par réflexion d'axe (Oy), ce qui fournit son graphe sur $[-\pi,\pi]$, puis par translations de vecteur $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction f_1 est dérivable sur $[0,\pi]$ et pour tout x de $[0,\pi]$

$$f_1'(x) = -2\sin(x) - 2\sin(2x) = -2\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = -2\sin(x)(1+2\cos(x)).$$

La fonction sinus s'annule en 0 et π et est strictement positive sur $]0,\pi[$. Donc la fonction f_1' est du signe de $-1-2\cos(x)$ sur $]0,\pi[$. Ensuite, pour $x \in]0,\pi[$,

$$-1-2\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3},$$

et

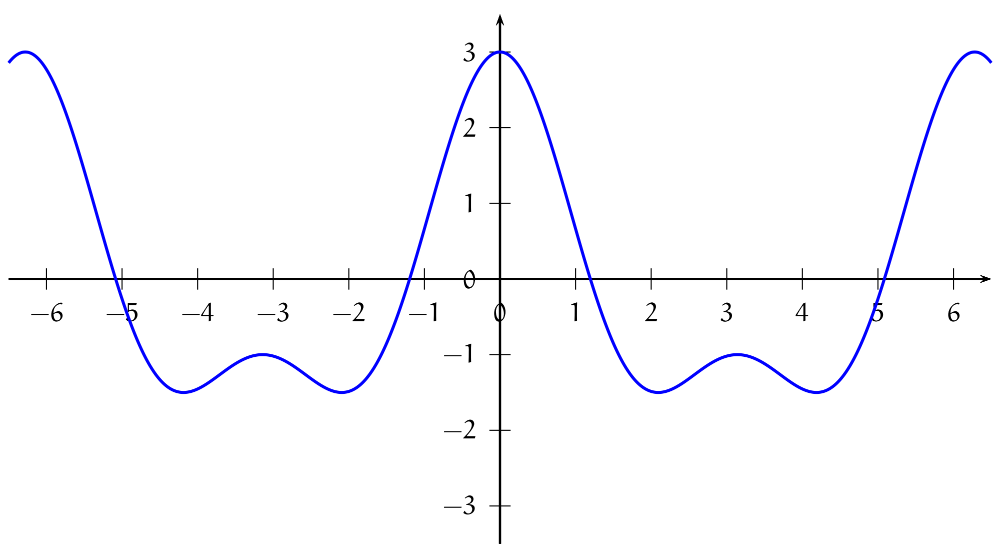
$$-1-2\cos(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{2\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } \cos \text{ sur } [0,\pi].)$$

Ainsi, la fonction f_1' est strictement négative sur $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$, strictement positive sur $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ et s'annule en 0, $\frac{2\pi}{3}$ et π.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_1 sur $[0,\pi]$:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f_1'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f_1	3	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1

Graphe de f_1.



2) Pour tout réel x, $2-\cos(x) \neq 0$ et donc, la fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire. On l'étudie sur $[0,\pi]$.

La fonction f_2 est dérivable sur $[0,\pi]$ et pour tout x de $[0,\pi]$

$$f_2'(x) = \frac{\cos(x)(2-\cos(x)) - \sin(x)(\sin(x))}{(2-\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x)-1}{(2-\cos(x))^2}.$$

La fonction f_2' est du signe de $2\cos(x) - 1$ sur $[0,\pi]$. Ensuite, pour $x \in [0,\pi]$,

$$2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3},$$

et

$$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction cos sur } [0,\pi].)$$

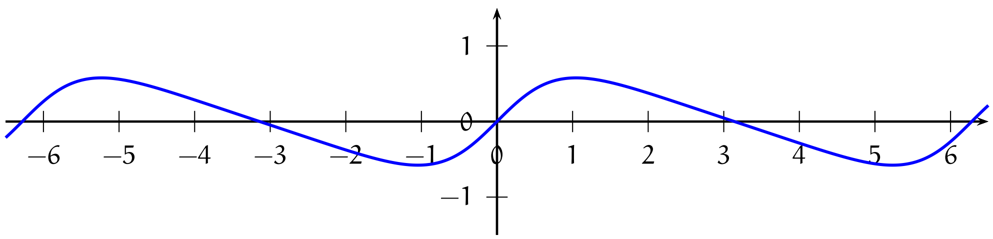
Ainsi, la fonction f_2' est strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{3}$. On note que

$$f_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57\ldots$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_2 :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

Graphe de f_2.



3) f_3 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, paire et 2π-périodique. f_3 est continue sur D en tant que somme de fonctions continues sur D. On étudie f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_3(x) = \tan x + \cos x$ et si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_3(x) = -\tan x + \cos x$.

Etude en $\frac{\pi}{2}$. $\lim\limits_{x \to \pi/2} |\tan x| = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x = 0$. Donc, $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = +\infty$. La courbe représentative de la fonction f_3 admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.

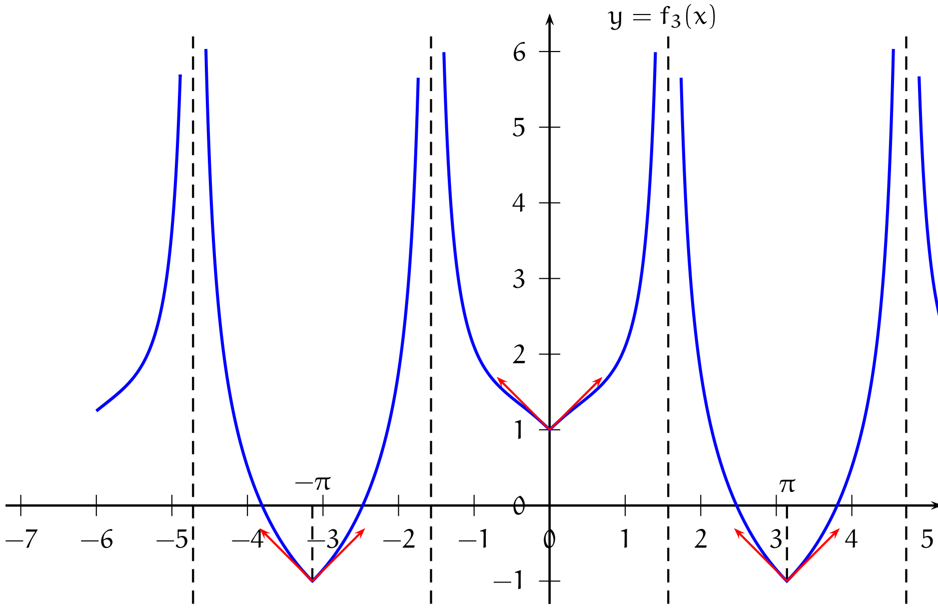
Dérivabilité et dérivée. f_3 est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$ et pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_3'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$.
f_3 est dérivable à droite en 0 et $(f_3)_d'(0) = 1$. Par symétrie, f_3 est dérivable à gauche en 0 et $(f_3)_g'(0) = -1$. f_3 n'est pas dérivable en 0.
De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_3)_g'(\pi) = -1$ et $(f_3)_d'(\pi) = 1$, et n'est donc pas dérivable en π.

Variations. f_3 est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Puis, pour x élément de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 1 - 1 = 0.$$

La fonction f_3' est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc la fonction f_3 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Graphe de f_3.



4) La fonction f_4 est 2π-périodique. On l'étudie sur $[-\pi, \pi]$. Pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$2\cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}.$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $f_4(x)$ existe si et seulement si $x \neq -\frac{2\pi}{3}$ et $x \neq \frac{2\pi}{3}$. On étudie la fonction f_4 sur $D = \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

Etude en $\frac{2\pi}{3}$. Quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $2\cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs supérieures et quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs supérieures, $2\cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs inférieures. D'autre part, quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$, $2\sin(x) + 1$ tend vers $\sqrt{3} + 1$ qui est strictement positif. On en déduit que

$$\lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^-} f_4(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^+} f_4(x) = -\infty.$$

Etude en $-\frac{2\pi}{3}$. Quand x tend vers $-\frac{2\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $2\cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs supérieures, $2\cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs supérieures. D'autre part, quand x tend vers $-\frac{2\pi}{3}$, $2\sin(x) + 1$ tend vers $-\sqrt{3} + 1$ qui est strictement négatif. On en déduit que

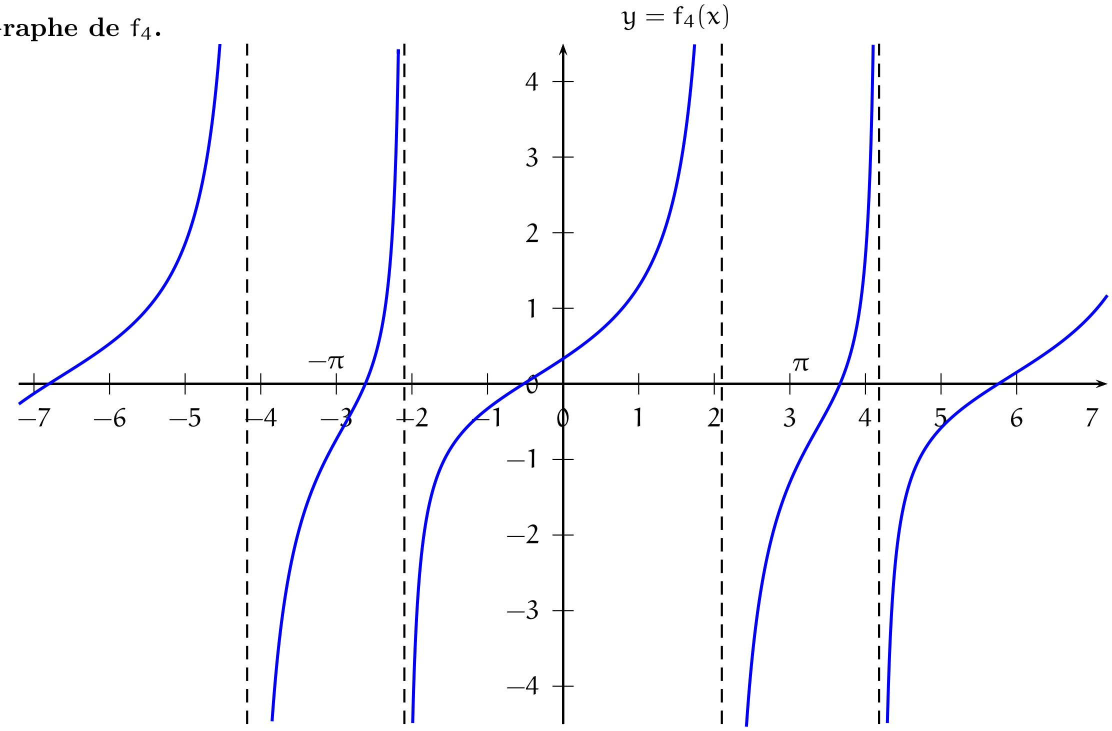
$$\lim_{x \to -\frac{2\pi}{3}^-} f_4(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\frac{2\pi}{3}^+} f_4(x) = -\infty.$$

Dérivée. La fonction f_4 est dérivable sur D et pour tout x de D,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{(2\cos(x))(2\cos(x) + 1) - (2\sin(x) + 1)(-2\sin(x))}{(2\cos(x) + 1)^2} = \frac{4 + 2\cos(x) + 2\sin(x)}{(2\cos(x) + 1)^2} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right)}{(2\cos(x) + 1)^2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{(2\cos(x) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout x de D, $4 + 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 4 - 2\sqrt{2} > 0$ et donc la fonction f_4' est strictement positive sur D. La fonction f_4 est donc strictement croissante sur $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[$ et sur $\left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ (mais pas sur $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$).

Graphe de f_4.



Exercice n° 2

1) Pour x réel , on a :

$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)^4\left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)^6\\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix}-2e^{8ix}-3e^{6ix}+8e^{4ix}+2e^{2ix}-12+2e^{-2ix}+8e^{-4ix}-3e^{-6ix}-2e^{-8ix}+e^{-10ix})\\ &= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)\\ &= -\frac{1}{512}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6).\end{aligned}$$

(**Remarque.** La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc obligatoire. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix}, e^{-4ix},... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix}, e^{4ix},...) Par suite,

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{512}\left(\left[\frac{\sin 10x}{10}-\frac{\sin 8x}{4}-\frac{\sin 6x}{2}+2\sin 4x+\sin 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}-6\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{512}\left(-\frac{1}{4}\times\sqrt{3}+2\left(-\sqrt{3}\right)-\pi\right)=\frac{9\sqrt{3}+4\pi}{2048}.\end{aligned}$$

2) Pour x réel, on a

$$\begin{aligned}\cos^4 x\sin^7 x = \cos^4 x\sin^6 x\times\sin x &= \cos^4 x(1-\cos^2 x)^3\sin x\\ &= \cos^4 x\sin x-3\cos^6 x\sin x+3\cos^8 x\sin x-\cos^{10} x\sin x.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{3} + \frac{\cos^{11} x}{11}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= -\frac{1}{5} \times \frac{1}{32}(1-9\sqrt{3}) + \frac{3}{7} \times \frac{1}{128}(1-27\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{512}(1-81\sqrt{3}) + \frac{1}{11} \times \frac{1}{2048}(1-243\sqrt{3}) \\
&= \frac{1}{2^{11} \times 3 \times 5 \times 7 \times 11}(-14784(1-9\sqrt{3}) + 7920(1-27\sqrt{3}) - 1540(1-81\sqrt{3}) + 105(1-243\sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2\ 365\ 440}(-8299 + 18441\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Exercice n° 3

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$n et pour tout réel x,

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = \left((1+i)^2 - 2(1+i) + 2\right) e^{(1+i)x} = (1 + 2i - 1 - 2 - 2i + 2)e^{(1+i)x} = 0.$$

