Exercice 1: Bode 2° ordre

Solution antérieure

Question 1: Donner la réponse en régime permanent du sismographe $z(t)$

$$z(t) = -6\cos(t) + 2\sin(t)\ \ \forall t > 0$$

Question 2: Montrer que cette réponse se met sous la forme $z(t) = U_0 A \sin(t+\varphi)$ où A et φ seront donnés

$$z(t) = -6\cos(t) + 2\sin(t) = \sqrt{(-6)^2+2^2}\left(\frac{-6}{\sqrt{(-6)^2+2^2}}\cos(t) + \frac{2}{\sqrt{(-6)^2+2^2}}\sin(t)\right)$$

$$z(t) = 2\sqrt{10}\left(\frac{-6}{2\sqrt{10}}\cos(t) + \frac{2}{2\sqrt{10}}\sin(t)\right)$$

$$z(t) = 2\sqrt{10}\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\cos(t) + \frac{1}{\sqrt{10}}\sin(t)\right)$$

$$z(t) = 2\sqrt{10}(\sin\varphi\cos(t) + \cos\varphi\sin(t))$$

$$\begin{cases}\sin\varphi = \dfrac{-3}{\sqrt{10}} \\ \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = -\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}} = -1{,}25\ rd = -71{,}6\ °$$

$$z(t) = 2\sqrt{10}\cos(t+\varphi) = 6{,}32\sin(t-1{,}25) = 10 * 0{,}632\sin(t-1{,}25) = AU_0\sin(t+\varphi)$$

$$\begin{cases}A = 0{,}632 \\ \varphi = -1{,}25\end{cases}$$

Etude harmonique

On considère un séisme de pulsation ω tel que :

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t) \,\forall t \geq 0$$

Question 3: Donner la forme de la réponse $z(t)$ en régime permanent

$$u(t) = U_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi) \,\forall t \geq 0$$

On rappel la fonction de transfert du sismographe dont les paramètres ont été fixés :

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 3p + 2}$$

Question 4: Déterminer les coefficients caractéristiques de ce sismographe

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{0{,}5p^2 + 1{,}5p + 1} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{{\omega_0}^2} = 0{,}5 \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{2} \\ \frac{2z}{\omega_0} = 1{,}5 \Leftrightarrow z = 0{,}75\omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 1 \\ z = 0{,}75\sqrt{2} \\ \omega_0 = \sqrt{2} = 1{,}41 \end{cases}$$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2} = \frac{1}{1 + \frac{2 * 0{,}75\sqrt{2}}{\sqrt{2}}p + \frac{1}{\sqrt{2}^2}p^2} = \frac{1}{1 + 1{,}5p + 0{,}5p^2}$$

Question 5: Proposer la forme factorisée de $H(p)$

$$\Delta = (1{,}5)^2 - 2 = 0{,}25$$

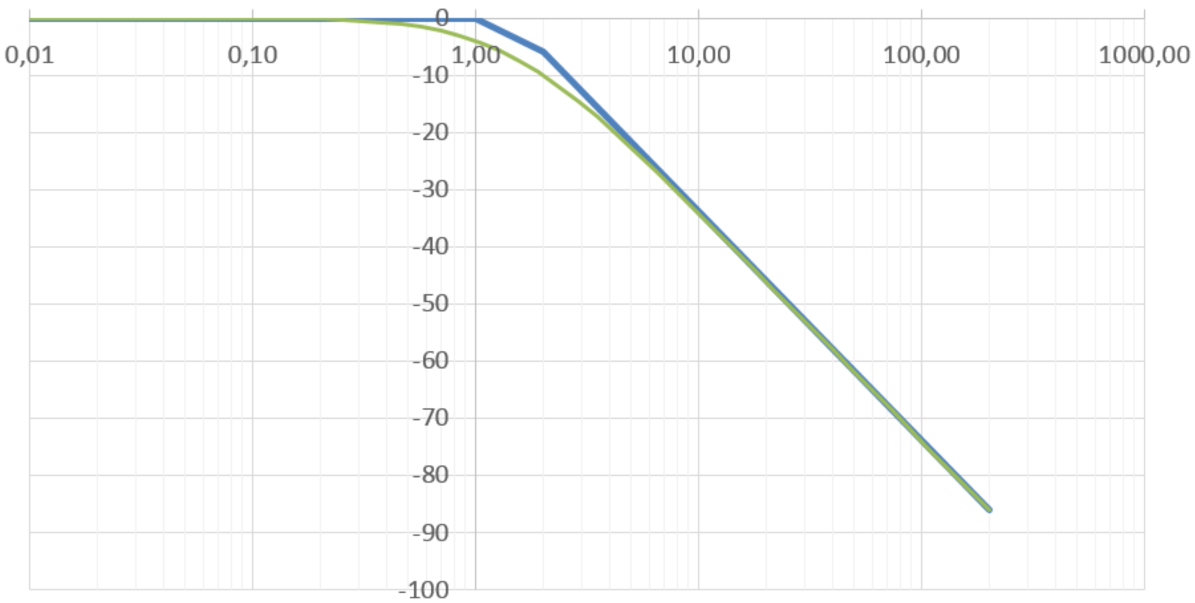
$$\begin{cases} p_1 = \frac{-1{,}5 - 0{,}5}{2 * 0{,}5} = -2 \\ \quad\frac{-1{,}5 + 0{,}5}{2 * 0{,}5} = -1 \end{cases}$$

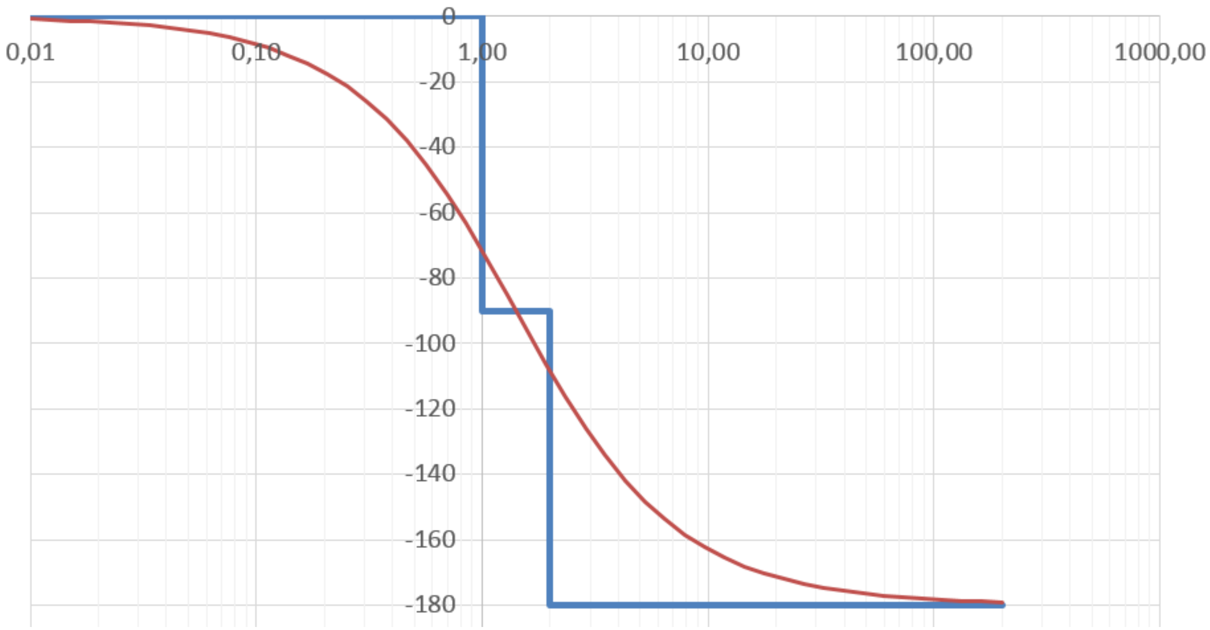
$$H(p) = \frac{1}{0{,}5(p+1)(p+2)} = \frac{1}{(1+p)\left(1 + \frac{1}{2}p\right)}$$

Question 6: Tracer le diagramme de Bode asymptotique du sismographe sur le document fourni

$$G_{dB} = 20log(K)$$

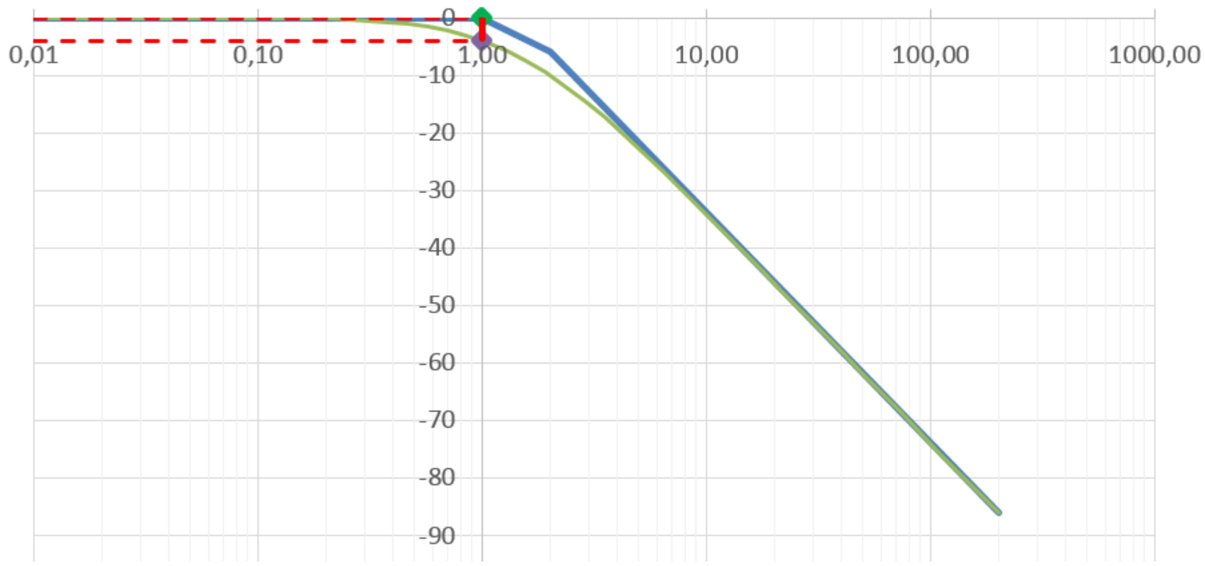
G_0	$\frac{1}{T_i}$	$\log\left(\frac{1}{T_i}\right)$
0	1 2	0 0,3

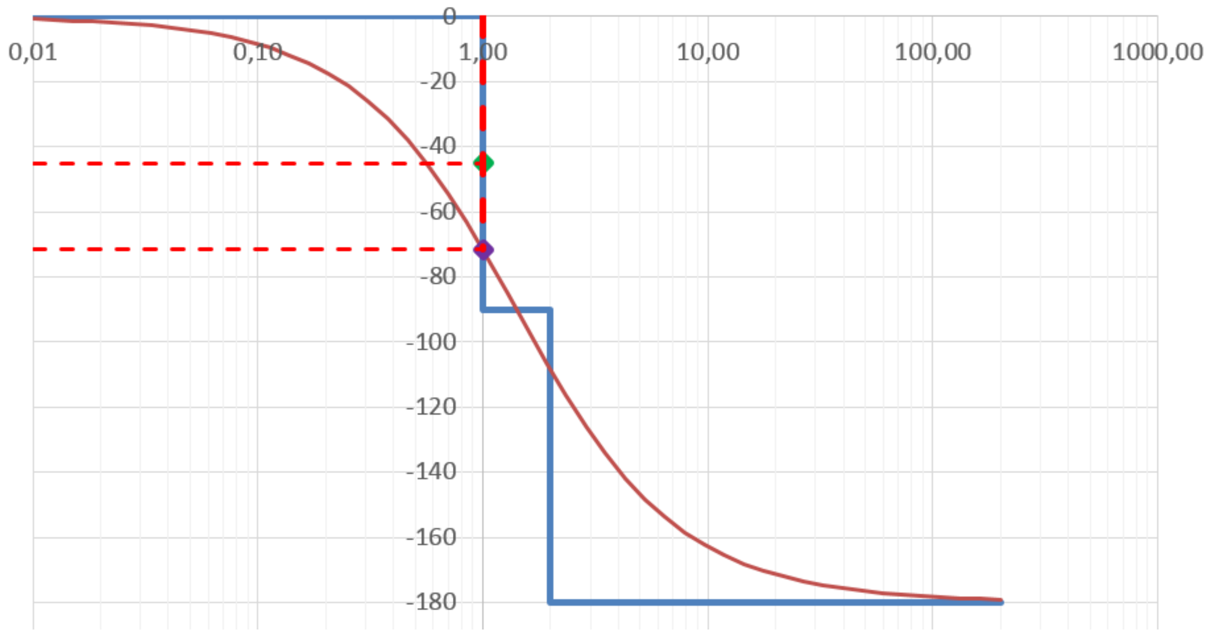




Réponse du sismographe au séisme étudié

Question 7: Déterminer une approximation de la réponse du sismographe au séisme étudié





$$20log(|H|) = G$$
$$|H| = 10^{\frac{G}{20}}$$
$$s_0 = |H|e_0$$

G	$\|H\|$	s_0	φ
0	1	U_0	$-\frac{\pi}{4} = -0{,}79\ rd$ $-45\ °$
$s(t) = U_0\ sin(t - 0{,}79)$			

Question 8: Déterminer précisément cette réponse par le calcul

$$H(p) = \frac{K}{ap^2 + bp + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 - a\omega^2) + jb\omega} \quad ; \quad |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{K}{(1 - a\omega^2) + jb\omega}\right) = -\arg\big((1 - a\omega^2) + jb\omega\big) = \arg\big((1 - a\omega^2) - jb\omega\big)$$

$$= \arg(A + jB) \quad ; \quad \begin{cases} A = 1 - a\omega^2 \\ B = -b\omega \end{cases}$$

$$\varphi = \mathrm{sign(B)} \cos^{-1}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = -\cos^{-1}\left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right)$$

$\lvert H(j\omega)\rvert$	G_{db}	s_0	φ
0,63	$-3{,}98$	$0{,}63U_0$	$-1{,}25\ rd$ $-71{,}57\ °$
$s(t) = 0{,}63U_0\ sin(t - 1{,}25)$			

Question 9: Comparer ce résultat à la solution obtenue par transformation de Laplace inverse

$$U_0 = 10$$

$$s(t) = 6{,}3\ sin(t - 1{,}25)$$

On retrouve exactement la même chose.

Question 10: Conclure sur ce résultat vis-à-vis du cahier des charges

Pour une entrée n'excédant pas $U_0 = 10\ mm$
La sortie appartient à : $z \in [0; 6{,}3]\ mm$
Le cahier des charges est respecté : $z \in [0; 20]\ mm$

Question 11: Par lecture graphique, donner la pulsation de l'onde sismique ω à partir de laquelle la précision de mesure devient incertaine

Valeur incertaine dès que : $z \leq 1\ mm$
Il faut donc : $|H(j\omega)| \geq \frac{1}{U_0} = 0{,}1$
Soit : $G > 20 \log 0{,}1 = -20$
Par lecture graphique :

$$\omega \approx 4{,}3\ rd.s^{-1}$$

Question 12: En conclure sur la plage de pulsations mesurables avec ce sismographe

$$\omega \in [0; 4{,}3]\ rd.s^{-1}$$

Sismographe dans le vide

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 0{,}02p + 2}$$

Question 13: Déterminer les coefficients caractéristiques du sismographe dans le vide

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 0{,}02p + 2} = \frac{1}{0{,}5p^2 + 0{,}01p + 1} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{{\omega_0}^2} = 0{,}5 \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{2} \\ \dfrac{2z}{\omega_0} = 0{,}01 \Leftrightarrow z = 0{,}005\omega_0 \end{cases}$$

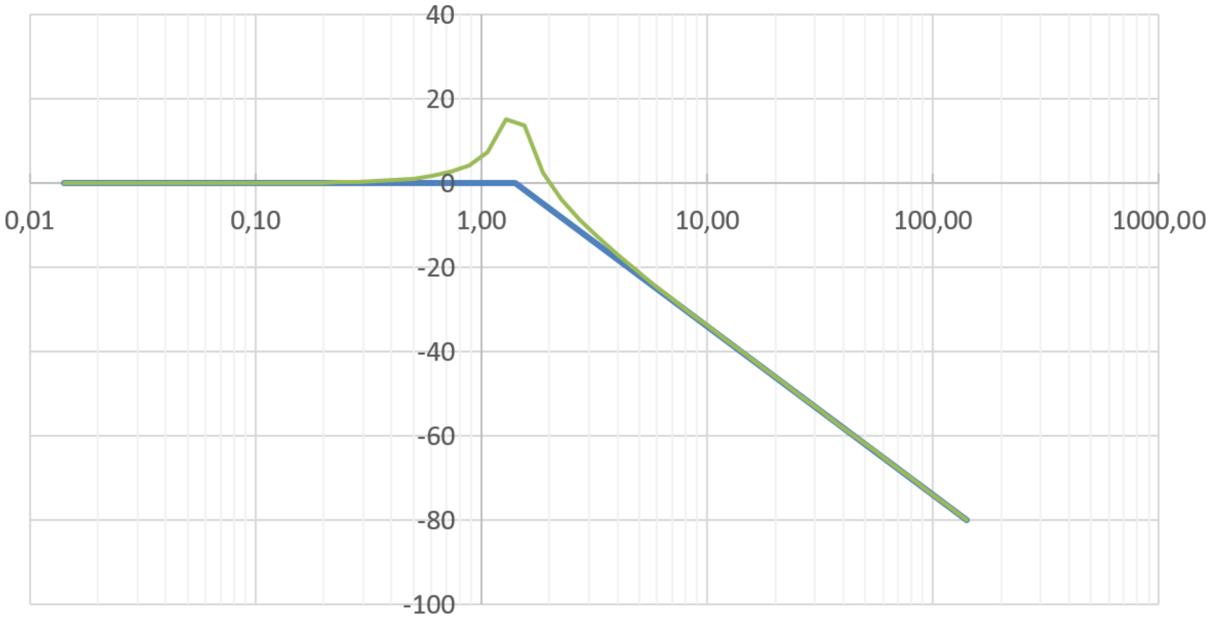
$$\begin{cases} K = 1 \\ z = 0{,}007 \\ \omega_0 = \sqrt{2} = 1{,}41 \end{cases}$$

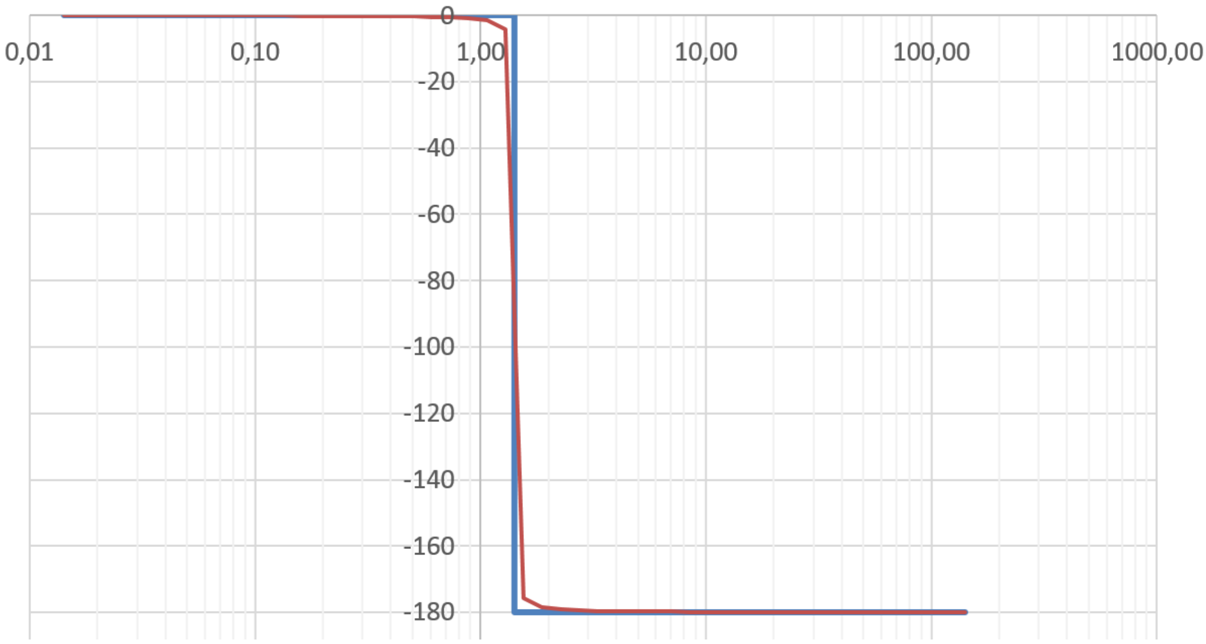
$$\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2} = \frac{1}{1 + \frac{2 * 0{,}007}{1{,}41}p + \frac{1}{1{,}41^2}p^2}$$

Question 14: Tracer le diagramme de Bode asymptotique du sismographe sur le document fourni

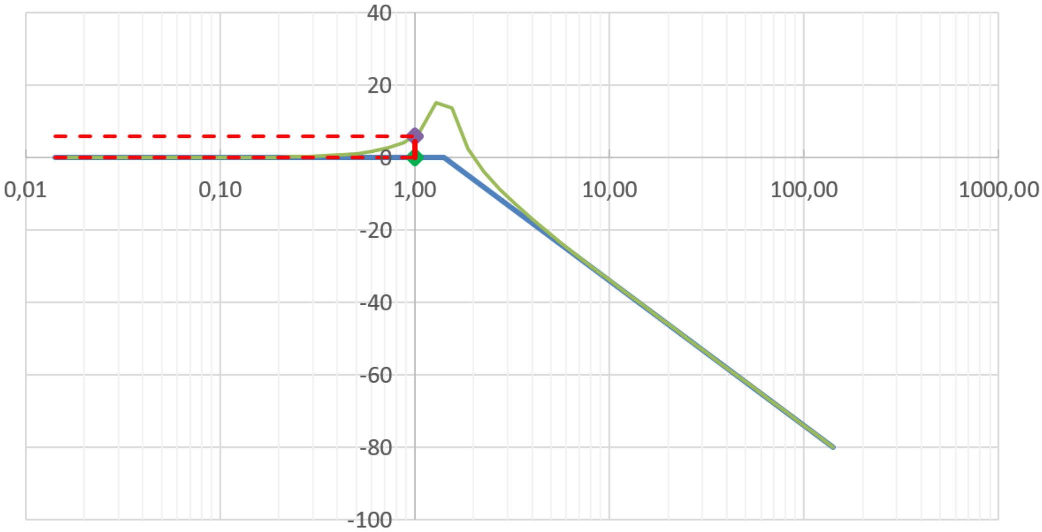
$$G_{dB} = 20log(K)$$

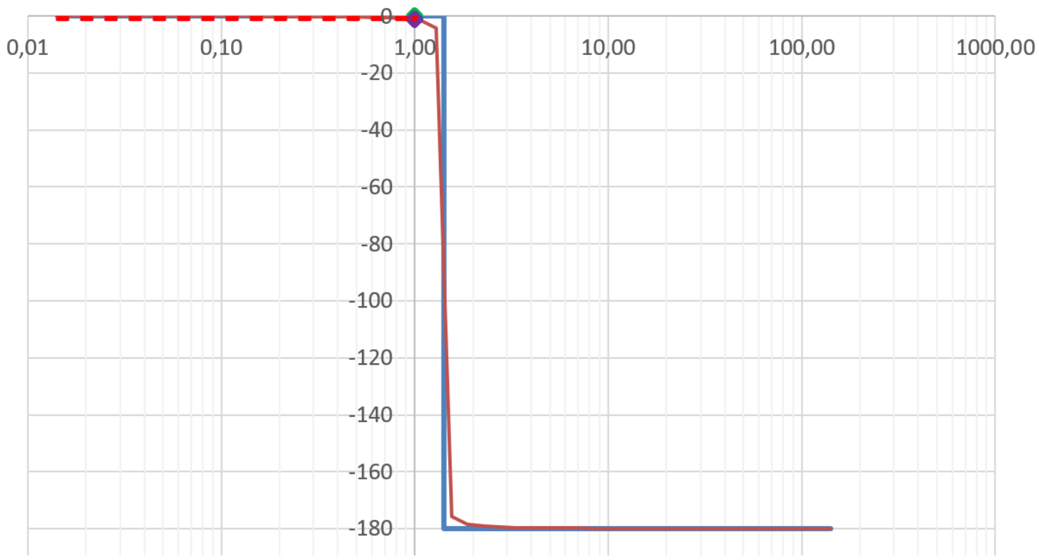
G_0	$\frac{1}{T_i}$	$\log\left(\frac{1}{T_i}\right)$
0	1,41	0,15





Question 15: Déterminer une approximation de la réponse du sismographe au séisme étudié





$$20log(|H|) = \mathrm{G}$$
$$|H| = 10^{\frac{G}{20}}$$
$$s_0 = |H| e_0$$

G	$\|H\|$	s_0	φ
6,02	2	$2U_0$	$-\frac{\pi}{4} = -0{,}02\ rd$ $-1{,}15\ °$
$s(t) = 2U_0 \sin(t - 0{,}02)$ $s(t) = 20 \sin(t - 0{,}02)$			

Question 16: Conclure sur ce résultat vis-à-vis du cahier des charges

Pour une entrée n'excédant pas $U_0 = 10\ mm$
La sortie appartient à : $z \in [0; 20]\ mm$
Le cahier des charges est respecté : $z \in [0; 20]\ mm$

Question 17: Que se passe-t-il si la pulsation du séisme $\boldsymbol{\omega}$ se rapproche de $\mathbf{1,4}\ \boldsymbol{rd.s^{-1}}$

On se rapproche de la résonnance

$$\begin{cases} G_r = 20\log\left(\dfrac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}\right) = 36{,}99 \quad ; \quad |H| = 10^{\frac{G_r}{20}} = 70{,}7 \\ \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2} = 1{,}4\ rd.s^{-1} \end{cases}$$

L'amplitude du signal sera amplifiée, multipliée par un coefficient valant 70,7

$$U_{max} = 70{,}7U_0 = 707\ mm = 70{,}7\ cm$$

Le cahier des charges n'est plus respecté.

On va détériorer le sismographe.

Question 18: Par lecture graphique, donner la plage de pulsations de l'onde sismique $\boldsymbol{\omega}$ mesurable par ce sismographes dans le vide

$$0{,}1 \leq |H| \leq 2$$
$$0 \leq G \leq 6{,}02$$

$$\omega \in [0; 1]U[2; 4{,}5]\ rd.s^{-1}$$