

## Planche n° 25. Structures

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable    T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice n° 1 (\*\*T)

Sur  $\mathbb{R}^2$ , on définit une loi  $*$  par

$$\forall (x, y), (x', y') \in (\mathbb{R}^2)^2, (x, y) * (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}).$$

- 1) Montrer que  $(\mathbb{R}^2, *)$  est un groupe non abélien.
- 2) Trouver les application  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$  soit un sous-groupe de  $(\mathbb{R}^2, *)$ .

### Exercice n° 2 (\*\*T)

Sur  $] -1, 1[$ , on définit une loi  $*$  par

$$\forall (x, y) \in ] -1, 1[^2, (x, y) * (x', y') = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Montrer que  $(] -1, 1[, *)$  est un groupe commutatif.

### Exercice n° 3 (\*IT)

- 1) Montrer que  $\mathbb{U}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  (où  $\mathbb{U}$  est l'ensemble des nombres complexes de module 1).
- 2) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\mathbb{U}_n$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{U}, \times)$  (où  $\mathbb{U}_n$  est l'ensemble des racines  $n$ -èmes de l'unité).

### Exercice n° 4 (\*\*T)

Sur  $E$  un ensemble.

- 1) Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta)$  est un groupe commutatif.
- 2) Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau commutatif.

### Exercice n° 5 (\*\*T)

Montrer que  $(\{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}, +, \times)$  est un corps commutatif.

### Exercice n° 6 (\*\*I) (Sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ )

- 1) Soient  $a$  un entier relatif puis  $G = a\mathbb{Z}$ . Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$ .
- 2) Réciproquement, montrer que tous les sous-groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  sont de la forme  $a\mathbb{Z}$  où  $a \in \mathbb{Z}$  (considérer, s'il existe,  $a = \min G \cap \mathbb{Z}_+^*$ ).

### Exercice n° 7 (\*\*\*\*I) (Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$ )

- 1) Montrer que les sous groupes du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  sont soit de la forme  $a\mathbb{Z}$ ,  $a$  réel donné, soit denses dans  $\mathbb{R}$ .  
Indication : pour  $G$  sous-groupe donné de  $(\mathbb{R}, +)$ , non réduit à  $\{0\}$ , considérer  $a = \inf (G \cap ]0; +\infty[)$  puis envisager les deux cas  $a = 0$  et  $a > 0$ .

(Rappel :  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si :  $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in G / |y - x| < \varepsilon)$ ).

- 2) **Application 1.** Montrer que  $\{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- 3) **Application 2** (groupe des périodes d'une fonction).
  - a) Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'ensemble des périodes de  $f$  est un sous groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  (ce sous-groupe est réduit à  $\{0\}$  si  $f$  n'est pas périodique).
  - b) Montrer qu'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  qui admet 1 et  $\sqrt{2}$  pour périodes, est constante sur  $\mathbb{R}$ .
  - c) Trouver une fonction dont le groupe des périodes est dense dans  $\mathbb{R}$  mais n'est pas égal à  $\mathbb{R}$ .