

DM N°3 (pour le 18/10/2013)

Étude de séries semi-convergentes.

Définitions et notations

On rappelle les points suivants de Maple :

- La liste contenant l'unique élément a est notée $[a]$.
- Le couple (a, b) sera représenté par la liste $[a, b]$.
- Pour ajouter l'élément x (qui peut être un couple) en queue de la liste L on invoque : $L := [\text{op}(L), x]$

On dira qu'une série à termes réels est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2) .

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x . On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et on se propose de construire une bijection s de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$.

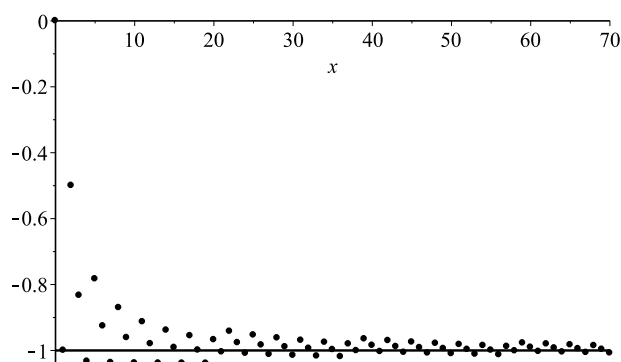
I.A. On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n \geq 0}$, $(q_n)_{n \geq 0}$, $(s_n)_{n \geq 1}$ et une suite $(S_n)_{n \geq 0}$ de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0$, $S_0 = 0$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $S_n > x$ alors : $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$
sinon : $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$
Dans les deux cas : $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I.A.1. Écrire une fonction suite qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie l'affichage de la liste $[s_1, s_2, \dots, s_n]$.

I.A.2. En modifiant la fonction précédente de façon à ce quelle retourne le dessin simultanément de la liste des points de coordonnées $(n, S_n)_{n \leq 70}$ et de la droite horizontale d'ordonnée x (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient pour $x = -1$, $n = 70$ le dessin suivant :



Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n \geq 0}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

I.B. On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $s(n) = s_n$. Prouver, pour $n \geq 1$, les propriétés suivantes :

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$$

$$p_n + q_n = n$$

$$S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)}$$

En déduire que s est injective.

I.C.

I.C.1. Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

I.C.2. On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ croît vers $+\infty$.

a) On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée. Utiliser le I.C.1) pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b) Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

I.C.3. Justifier rapidement que (q_n) tend vers $+\infty$.

I.C.4. Déduire de ce qui précède que s est une bijection de \mathbf{N}^* sur lui-même.

I.D.

I.D.1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$$

I.D.2. En déduire que pour tout naturel N , il existe un entier $n > N$ tel que

$$|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$$

I.D.3. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$.

I.D.4. Soit $n \geq n_0$. On note $v_n = \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|)$.

Démontrer que $(v_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I.D.5. Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

I.E.

I.E.1. Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

I.E.2. Donner un développement analogue pour $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ .

I.E.3.

a) Justifier, pour tout naturel n tel que $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, l'égalité :

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

b) En déduire que :

$$S_n = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_n}{n-p_n} \right) - \ln 2 + o(1).$$

c) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n .

d) Déterminer la limite de :

$$\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \dots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Partie II - Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

II.A. Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1) .

II.B. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.B.1. Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite.

II.B.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge.

On note $U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel N , la relation :

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P_2) .

II.C. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge. Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (P_1) .

II.D. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge. Pour cela on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$.
- Pour $n \geq 1$:
$$\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} & \text{et } \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} & \text{si } A_{n-1} \geq p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} & \text{et } \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans tous les cas : $A_n = A_{n-1} + a_n \varepsilon_n$.

II.D.1. Dans cette question seulement on suppose que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{9}{4(n+1)}$.

Déterminer les 6 premiers termes des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Écrire une procédure exemple qui prend en argument l'entier n et retourne la liste :

$$[[0, p_0, \varepsilon_0, A_0], [1, p_1, \varepsilon_1, A_1], \dots, [n, p_n, \varepsilon_n, A_n]]$$

II.D.2.

a) Démontrer que pour tout naturel N , il existe un entier $n > N$ tel que : $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min \{ n \in \mathbb{N} / n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1} \} \end{cases} \quad \text{pour } k \geq 0$$

b) Dans le cas général, calculer $p_{n_k}, \varepsilon_{n_k}$.

Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ diverge.

c) Déterminer n_1, n_2 et n_3 pour l'exemple de la question III.D.1).

II.D.3. Dans cette question seulement on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n+1}$.

a) Écrire une fonction `indexer` qui prend en argument l'entier n et qui retourne la liste

$$[[0, n_0], [1, n_1], \dots, [q, n_q]]$$

où q est le plus grand des entiers k tel que $n_k \leq n$. Par exemple l'appel de `indexer(10000)` retourne :

$$[[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 51]]$$

b) Soit $k \geq 3$ un indice tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'inégalité :

$$k-1 \leq A_{n_{k-1}} \leq k-1 + \frac{1}{2^{k-1} n_k}$$

En déduire que $n_{k+1} - 2 > n_k$.

c) Calculer explicitement la différence $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$ en fonction de k, n_k et n_{k+1} . En déduire, pour $k \geq 3$, l'inégalité :

$$\frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1} \right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right).$$

d) Déduire des deux questions précédentes, pour $k \geq 3$, l'inégalité :

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln \left(1 + \frac{1}{n_{k+1}} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n_k} \right).$$

e) En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $(\ln n_k - 2^k)$; puis prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n_k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C \exp(2^k).$$

En déduire que :

$$A_{n_k} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}$$

puis que :

$$A_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n)}{\ln 2}.$$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

II.E. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

II.E.1. Prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

II.E.2. En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

II.F. Soit maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.

II.F.1. Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

II.F.2. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$.

II.F.3. Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.F.4. Caractériser les suites vérifiant (P_2) .

