DS Sciences Physiques MathSpé

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Mécanique....................2
I.Mise en équations....................2
II.Résolution....................4
III.Vérifications....................4
IV.Aspects énergétiques....................4
Optique....................5
I.Interférences avec deux miroirs....................5
II.Principe d'un monochromateur.....................6
III.Utilisation du monochromateur....................8
Thermochimie....................10
I.Réaction 1 de production de dihydrogène....................10
II.Réaction 2....................11

Mécanique

Soit un repère $Oxyz$ orthonormé. $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ désignent les vecteurs unitaires associés aux axes (Ox est horizontal, Oy vertical ascendant). Ce repère est lié au référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire supposé galiléen.

$\vec{g}$ désigne le vecteur accélération due à la pesanteur, soit $\vec{g}=-g\vec{u}_y$.

On considère un solide S , homogène, caractérisé par ses dimensions : longueur 2ℓ , hauteur $2h$, largeur b , sa masse M , son barycentre G . On note $X=X(t)$, l'abscisse du point G à un instant quelconque. À $t=0$, le point G se situe sur la verticale de O et l'extrémité droite du solide se situe à la verticale du point O_2 , la vitesse initiale du solide est $\dot{X}_0=\frac{dX}{dt}(0)>0$.

Le solide S se déplace sur un convoyeur à rouleaux. Chacun des rouleaux du convoyeur est constitué d'un cylindre homogène, de rayon r , d'axe de symétrie horizontal, le moment d'inertie relativement à cet axe sera noté J . Les axes des rouleaux sont parallèles, situés dans le même plan horizontal et distants de $2d$. On considère la situation pour laquelle le solide est en contact avec deux rouleaux, les rouleaux $n°1$ et $n°2$ de barycentres respectifs les points O_1 et O_2 (on suppose $2\ell>2d$). Le coefficient de frottement de S au contact d'un rouleau est noté μ , on ne fait pas de distinction entre les coefficients de frottement dynamique et statique.

Le rouleau $n°1$ peut tourner librement autour de son axe horizontal, la liaison étant supposée parfaite. On note son vecteur vitesse de rotation: $\vec{\omega}_1=\omega_1\vec{u}_z$. Le rouleau $n°2$ est entraîné en rotation par un moteur extérieur non figuré. On note son vecteur vitesse de rotation: $\vec{\omega}_2=\omega_2\vec{u}_z$. La vitesse de rotation $\omega_2>0$ est constante au cours du temps. Les points de contact du solide sur les rouleaux sont notés respectivement I_1 et I_2 . Les actions des rouleaux sur S appliquées en I_1 et I_2 sont notées $\vec{R}_1=T_1\vec{u}_x+N_1\vec{u}_y$ et $\vec{R}_2=T_2\vec{u}_x+N_2\vec{u}_y$.

Le rouleau $n°2$ va donc freiner le solide S et, à un instant $t=\tau$, S va s'immobiliser.

Pour les applications numériques, on donne:

$\ell=1{,}00\,m$, $d=0{,}80\,m$, $h=0{,}200\,m$, $r=0{,}200\,m$, $\mu=0{,}100$, $M=3{,}50\,10^3\,kg$, $J=20{,}0\,kg.m^2$, $g=9{,}81\,m.s^2$, $\dot{X}_0=0{,}442\,m.s^{-1}$.

Dans la suite du problème, on suppose toujours que le mouvement du solide S s'effectue sans glissement sur le rouleau $n°1$.

I. Mise en équations

1. Démontrer la relation traduisant le non glissement de S sur le rouleau $n°1$, relation liant r , ω_1 et $\dot{X}$ ($relation\,1$).

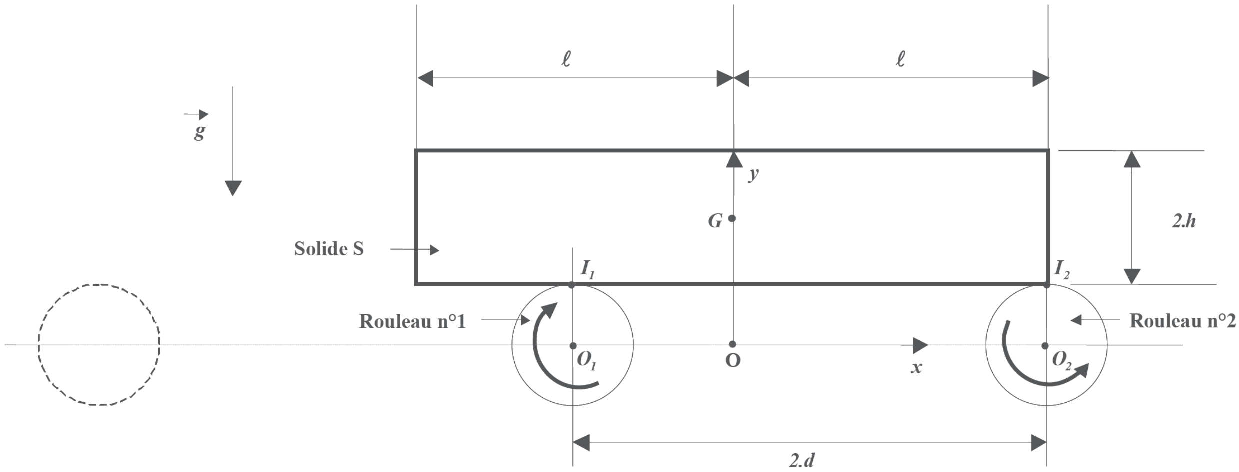


Schéma n°1 : vue dans le plan vertical Oxy à l'instant t = 0 [les flèches rondes indiquent le sens de rotation des rouleaux]

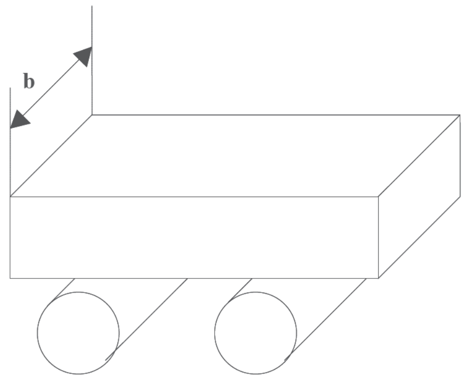


Schéma n°2 : vue dans l'espace à un instant t quelconque

2. Déterminer la vitesse de glissement de S sur le rouleau $n°2$ en fonction de r , ω_2 et $\dot{X}$. Dans ces conditions, quel est le signe de T_2 ? Écrire la relation liant T_2 et N_2 en supposant $N_2>0$ (*relation* 2).
3. Par utilisation du théorème de la résultante dynamique appliqué à S , obtenir deux relations liant N_1 , N_2 , T_1 , T_2 , M , $\ddot{X}=\dfrac{d^2X}{dt^2}$ (*relation* 3 et *relation* 4).
4. Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{GI_1}$ et $\overrightarrow{GI_2}$ en fonction de ℓ , h , d et X .
5. On note $\vec{\sigma}(G)$ le moment cinétique en G de S dans $\mathscr{R}$. Que vaut $\vec{\sigma}(G)$? Justifier avec précision.
6. En faisant appel au théorème du moment dynamique appliqué à S , établir une relation liant N_1 , T_1 , N_2 , T_2 , ℓ , h , d *et* X (*relation* 5). Préciser l'énoncé du théorème utilisé.

7. Le système étudié ici n'est plus le solide S mais le rouleau $n°1$. Exprimer le moment cinétique du premier rouleau relativement au point O_1 . En appliquant le théorème du moment dynamique au premier rouleau, donner une relation liant T_1 et $\frac{d\omega_1}{dt}$ ($relation\,6$).

II. Résolution

8. D'après les relations obtenues, établir l'équation différentielle pour la variable X . L'écrire sous la forme $\frac{d^2X}{dt^2}+\Omega^2 X=-\Omega^2\alpha$. Préciser l'expression de la pulsation Ω . Préciser aussi l'expression de α en fonction de ℓ et d .

9. Application numérique: calculer Ω et α .

10. Donner la solution de l'équation différentielle en fonction de $\dot{X}_0$, Ω , α et t .

11. À l'instant $t=\tau$, la vitesse de S s'annule pour la première fois. Établir l'expression de $\tan(\tau\Omega)$ en fonction de Ω , ℓ , d , $\dot{X}_0$.

III. Vérifications

12. Vérifier que $\tan(\tau\Omega)\approx 1$. Calculer la valeur maximale X_m de X au cours du mouvement. Montrer que l'extrémité gauche du solide ne dépasse pas la verticale de O_1 .

13. Établir les expressions de N_1 et de N_2 en fonction de X et des constantes. Montrer que N_1 est une fonction décroissante de X et N_2 une fonction croissante de X . Montrer qu'il n'y a pas basculement du solide S entre les instants $t=0$ et $t=\tau$.

14. Vérifier l'hypothèse de non glissement de S sur le rouleau $n°1$.

IV. Aspects énergétiques

15. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_C de l'ensemble (solide S + rouleau $n°1$ + rouleau $n°2$) en fonction de $\dot{X}$, M , J , r , ω_2 . Déterminer la variation d'énergie cinétique ΔE_C entre les instants $t=0$ et $t=\tau$. Application numérique.

16. Donner l'expression de la puissance P_2 de la réaction $\vec{R}_2$ exercée par le rouleau $n°2$ sur le solide S . En déduire l'expression de W_2 , travail reçu par le solide S de la part du rouleau $n°2$ entre les instants $t=0$ et $t=\tau$. Application numérique.

17. Donner l'expression de la puissance P_m fournie par le moteur au rouleau $n°2$. En déduire l'expression de W_m , travail fourni par le moteur au rouleau $n°2$ entre les instants $t=0$ et $t=\tau$. Pour l'application numérique supposer que ω_2 correspond à un tour par seconde.

18. Quel est le travail dissipé en chaleur entre $t=0$ et $t=\tau$. Justifier avec précision en indiquant notamment le système thermodynamique étudié. Commenter.

Optique

L'indice de l'air est désigné par n_{air} . La notation λ désigne ici la longueur d'onde dans l'air.

I. Interférences avec deux miroirs

On considère un miroir de largeur infiniment fine selon x et de hauteur très grande selon y et de normale selon z . Un faisceau de lumière parallèle, issu d'une source monochromatique de longueur d'onde λ de direction perpendiculaire à l'axe y , tombe sur ce miroir sous l'incidence i_0 . Du fait de sa petite largeur, le miroir diffracte la lumière: il ne se contente pas de renvoyer un faisceau réfléchi dans la direction $-i_0$ selon les lois de Snell-Descartes, mais diffracte la lumière dans toutes les directions i . Enfin pour le miroir étudié de largeur infiniment fine et de hauteur très grande, la diffraction se fait selon x uniquement, de manière uniforme et pas du tout selon y . Dans la suite du problème on se contentera donc de travailler dans un plan xz .

On respectera le caractère algébrique des angles orientés comme l'indique la figure ci-dessous.

Les angles i_0 et i sont donc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

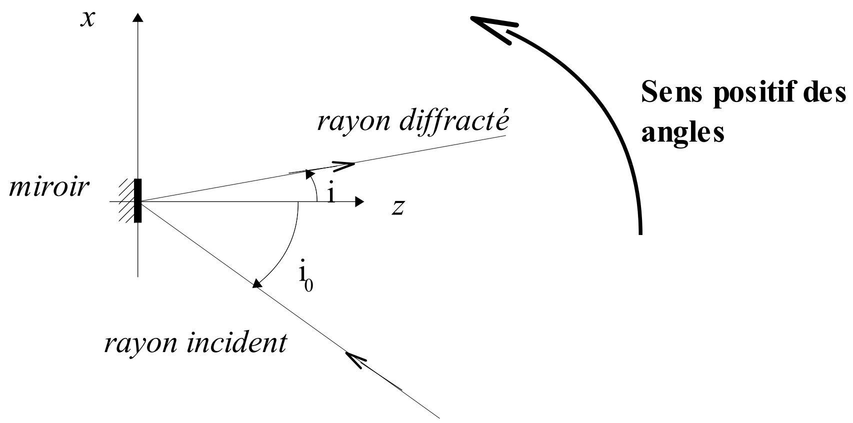


Figure 1

1. Indiquer le signe de i_0 sur la *Figure* 1 . Indiquer le signe de i .

On envisage désormais deux miroirs, identiques au miroir décrit précédemment, distants de a .

2. On suppose que le faisceau parallèle incident est normal au plan des deux miroirs (voir *Figure* 2). On étudie la lumière diffractée à l'infini dans la direction de l'angle i . Faire apparaître clairement sur un dessin, en justifiant avec précision la méthode, la différence de marche $\delta_{1/2}$ du rayon passé par le trait (ou miroir) $n°1$ par rapport au rayon passé par le trait $n°2$. Donner l'expression de $\delta_{1/2}$.

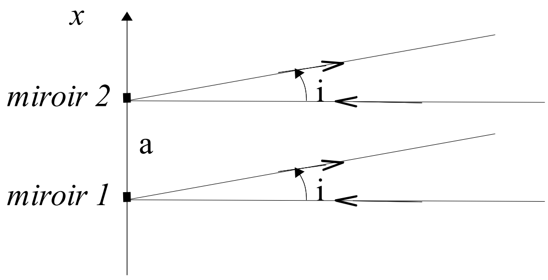


Figure 2

On suppose désormais et, pour toute la suite, que le faisceau parallèle incident arrive sous l'incidence i_0 (voir *Figure* 3).

3. Faire apparaître clairement sur un dessin les surfaces d'onde du faisceau incident et déterminer la nouvelle différence de marche $\delta_{1/2}$. On rappelle que les angles sont algébriques.

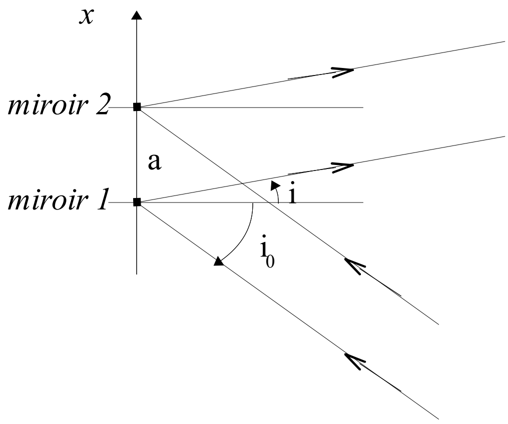


Figure 3

4. On désigne par $\Phi=2\pi p$ (avec p : ordre) le déphasage retard du rayon $n°1$ par rapport au rayon $n°2$. Donner l'expression de p en fonction de a , i_0 , i et λ (formule des réseaux) . A quelle(s) condition(s), obtient-on dans la direction i , un maximum?

5. L'onde à l'infini diffractée par le miroir $n°1$ est notée en complexe: $\underline{s}_1(t)=s_0\exp(j\omega t)$. Écrire $\underline{s}_2(t)$ sachant que les deux ondes ont même amplitude s_0 . Retrouver alors l'expression de l'intensité I dans la direction i à l'infini. L'écrire en fonction de I_0 (intensité de l'onde diffractée dans la direction $-i_0$) et de p (ordre d'interférences). Retrouver à quelle(s) condition(s), on obtient un maximum dans la direction i . Donner l'allure de la courbe $I(p)$. On rappelle que l'intensité de l'onde $\underline{s}(t)$ est définie par $\underline{s}(t)\underline{s}(t)^*$.

II. Principe d'un monochromateur.

On considère un réseau plan (R) comportant $n=1000\,mm^{-1}$ traits équidistants (miroirs du type précédent) par mm (voir *Figure* 4). Ce réseau par réflexion a une largeur totale $L=30\,mm$. La formule fondamentale du réseau, donnant, pour une longueur d'onde λ , un maximum d'intensité dans la direction i , à l'ordre p est la même que celle obtenue dans le cas étudié précédemment des deux traits.

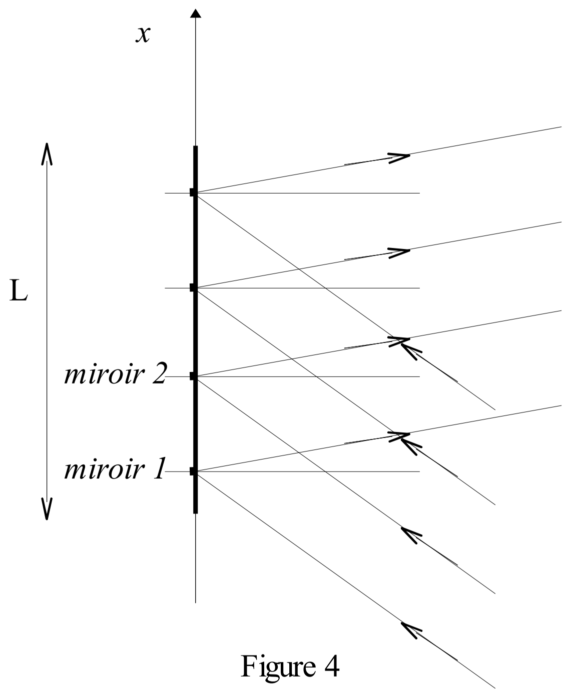


Figure 4

6. Les maxima sont dans les mêmes directions dans les deux cas : deux traits ou plusieurs milliers de traits. Commenter avec le plus de précision possible la différence entre ces deux cas justifiant l'utilisation du réseau (R) .

Le réseau précédent (R) est associé au système optique suivant : (F_1) et (F_2) sont deux fentes identiques coplanaires, très fines et (M_1) et (M_2) sont deux miroirs plans (voir *Figure* 5).

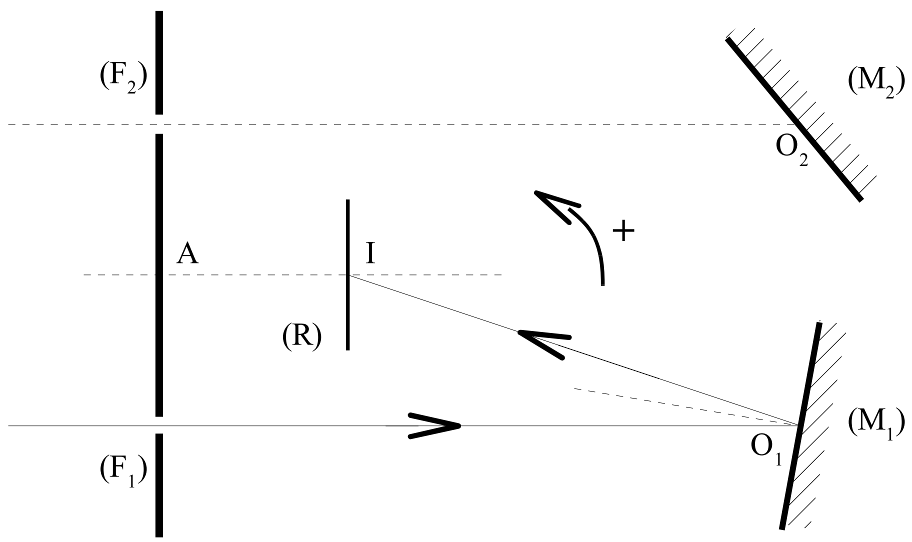


Figure 5

On donne: $F_1O_1 = F_2O_2 = 305\,mm$, $AI = 55\,mm$, $AF_1 = AF_2 = 38\,mm$.

La fente (F_1) émet un mince faisceau parallèle de longueur d'onde $\lambda = 500\,nm$. Ce faisceau est réfléchi par (M_1) et atteint le réseau sous l'incidence i_0 .

7. Exprimer i_0 . Application numérique: calculer i_0 en degrés.

8. On veut déterminer le nombre de maxima donnés par le réseau éclairé par $\lambda = 500\,nm$ sous l'angle i_0 déterminé ci-dessus. Résoudre la double inégalité permettant d'obtenir les valeurs possibles pour p . En déduire le nombre de maxima observables ici. Calculer les angles i correspondants en degrés.

9. Reprendre la question précédente pour une autre valeur de longueur d'onde: $\lambda = 550\,nm$.

10. Comment le réseau se comporte-t-il, quelle que soit la longueur d'onde, si on considère le faisceau incident et le faisceau diffracté à l'ordre zéro. A quel système optique simple le réseau est-il ici équivalent.

11. On règle le réseau pour que le faisceau diffracté à l'ordre zéro dans la région centrale du réseau, passe, après réflexion sur (M_2) , par la fente (F_2) . Comment faut-il disposer (M_2) ?

III. Utilisation du monochromateur

On tourne le réseau ($Figure\,6$) d'un angle α (angle compté algébriquement), autour d'un axe passant par I et orthogonal au plan de figure de sorte que le faisceau correspondant à l'ordre $p = 2$ passe par (F_2) . On continue à désigner par i_0 la valeur calculée à la $question\,7$. La longueur d'onde est $\lambda = 500\,nm$. Dans toute la suite, on se limite au spectre d'ordre 2 en ne tenant plus compte des autres ordres présents.

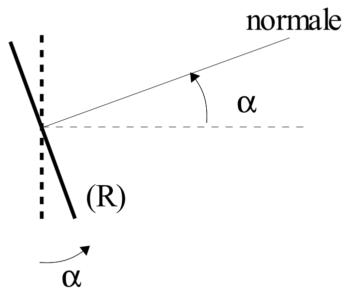


Figure 6

12. Prévoir qualitativement le sens de rotation du réseau. Expliquer. L'angle α est-il positif ou négatif ?

13. Exprimer le nouvel angle (angle orienté) entre le faisceau incident sur le réseau et la normale au réseau en fonction de i_0 et α .Exprimer aussi l'angle (angle orienté) entre le faisceau diffracté passant finalement par F_2 et la normale au réseau en fonction de i_0 et α .

14. En utilisant la formule des réseaux ($question\,4$), écrire la relation entre i_0 , α , p , a et λ . En déduire l'expression de α . Calculer sa valeur numérique.

La fente (F_1) émet maintenant une lumière polychromatique de longueurs d'ondes extrêmes $450\,nm$ et $650\,nm$. On conserve le réglage précédent.

15. Montrer que le faisceau atteignant (F_2) est purement monochromatique. Comment

sélectionner une longueur d'onde donnée ?

16. Calculer les valeurs des rotations extrêmes α_1 et α_2 à effectuer pour transmettre les longueurs d'onde extrêmes.

17. Le système est réglé dans les conditions de la *question* 14 . On suppose que la fente (F_2) n'est plus infiniment fine mais possède la largeur $\ell=0{,}1\,mm$. Montrer alors que le système n'est plus un monochromateur parfait et calculer l'intervalle $\Delta\lambda$ en nm, autour de la longueur d'onde $\lambda=500\,nm$, caractérisant l'ensemble des longueurs d'onde transmises.

Thermochimie

Données

Tous les composés seront assimilés à des gaz parfaits.

Constante des gaz parfaits : $R=8{,}3145\ \ J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$

Pression standard : $P°=1\,bar=10^5\,Pa$

Composé	$H_2O(g)$	$CH_4(g)$	$CO(g)$	$H_2(g)$	$CO_2(g)$
Enthalpie libre molaire standard $G°(1100\,K)$ $(kJ\,mol^{-1})$	$-472{,}02$	$-309{,}28$	$-347{,}00$	$-162{,}30$	$-656{,}65$
Enthalpie molaire standard $H°(1100\,K)$ $(kJ\,mol^{-1})$	$-211{,}63$	$-28{,}58$	$-85{,}50$	$+23{,}71$	$-354{,}68$

I. Réaction 1 de production de dihydrogène

Le vaporeformage du méthane issu du gaz naturel est réalisé à $T_1=1\,100\,K$ sous une pression égale à $5\,bar$ en faisant réagir le méthane avec de la vapeur d'eau en présence d'un catalyseur à base de nickel. L'équation bilan de la réaction équilibrée mise en jeu est :

$$CH_4(g)+H_2O(g)=CO(g)+3\,H_2(g) \qquad [1]$$

1. Calculer l'enthalpie libre standard à T_1 de la réaction $[1]$.
2. Déduire de la question précédente sa constante d'équilibre : $K_1°(T_1)$.
3. Exprimer la constante d'équilibre $K_1°(T_1)$, en fonction des pressions partielles à l'équilibre, des composés intervenant dans l'équation bilan.
4. Calculer l'enthalpie standard de la réaction $[1]$ à la température T_1 .
5. Calculer l'entropie standard de la réaction $[1]$ à la température T_1 .
6. Cette réaction est-elle exothermique ou endothermique ? Justifier.
7. Expliquer pourquoi le signe de l'entropie standard de réaction était prévisible.
8. En justifiant votre réponse, indiquer qualitativement l'influence, à pression constante, de la température sur l'avancement à l'équilibre de la réaction $[1]$.
9. En justifiant votre réponse, indiquer qualitativement l'influence, à température constante, de la pression totale sur l'avancement à l'équilibre de la réaction $[1]$.

II. Réaction 2

Le monoxyde de carbone formé et l'eau présente dans le réacteur réagissent pour donner du dioxyde de carbone et du dihydrogène selon l'équation bilan ci-dessous :

$$CO(g)+H_2O(g)=CO_2(g)+H_2(g) \quad [2]$$

10.Calculer la constante d'équilibre $K_2°(T_1)$ de cette réaction.

On introduit dans un réacteur isotherme ($T_1=1\,100\,K$) et isobare ($P_T=5\,bar$) $1\,mole$ de méthane et $3\,moles$ de vapeur d'eau.

11.On ne tient compte que de la réaction $[1]$ et l'avancement de la réaction $[1]$ est noté ξ_1 . Donner l'expression des quantités de matière n_{CH_4} , n_{H_2O} , n_{CO} , n_{H_2} à la sortie du réacteur en fonction de l'avancement ξ_1 .

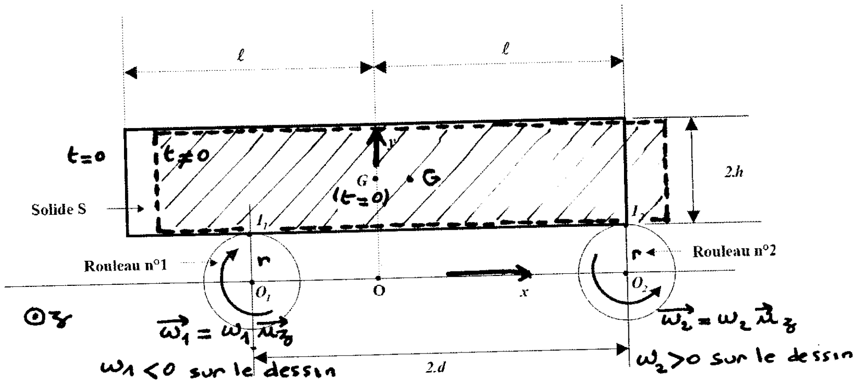
12.On va alors, ces valeurs étant considérées comme des valeurs initiales, tenir compte, dans un deuxième temps, de la réaction $[2]$ dont l'avancement est noté ξ_2 pour obtenir les expressions correctes. Exprimer les quantités de matière n_{CH_4} , n_{H_2O} , n_{CO} , n_{H_2} , n_{CO_2} à la sortie du réacteur en fonction des avancements ξ_1 et ξ_2 .

13.Exprimer les quotients réactionnels des réactions en fonction notamment des nombres de moles... etc. On donne à la sortie du réacteur $\xi_1=0{,}965\,mole$ et $\xi_2=0{,}300\,mole$ mole, calculer les quotients réactionnels Q_1 et Q_2 des réactions $[1]$ et $[2]$.

14.Calculer les rapports $\frac{Q_1}{K_1}$ et $\frac{Q_2}{K_2}$ et en déduire la valeur de l'affinité de la réaction $[1]$ et celle de la réaction $[2]$ et commenter les résultats obtenus.

Réponses

Convoyeur à rouleaux



Tous les grandeurs sont a priori relatives à $\mathcal{R}$

1) $\overrightarrow{v}_{\text{glissement } S/\text{rouleau }1} = \overrightarrow{v}(I_1 \in S) - \overrightarrow{v}(I_1 \in R_1)$

$$= \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} - (\underbrace{\cancel{\overrightarrow{v}_{O_1}}}_{\text{nul}} + \underbrace{\overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{O_1 I_1}}_{\omega_1 \overrightarrow{u_z} \wedge r\,\overrightarrow{u_y}})$$

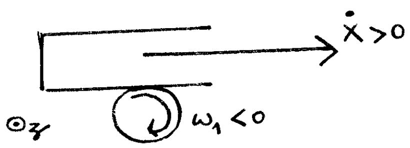
$$= (\dot{x} + r\,\omega_1)\,\overrightarrow{u_x}$$

Le non glissement implique

$$\boxed{\dot{x} = -r\omega_1} \quad (1)$$

remarque

$\dot{x}$ étant positif, on aura $\omega_1 < 0$



Ce signe était intuitif.
Le dessin fourni représentait d'ailleurs $\omega_1 < 0$

2) En remplaçant l'indice 2 par l'indice 1, on trouve :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{\text{glissement } S/\text{rouleau }2} = \underbrace{(\dot{x} + r\omega_2)}_{v_{g_2}}\,\overrightarrow{u_x}}$$

or $\quad v_{g_2} = \underbrace{\dot{x}}_{>0} + \underbrace{r\omega_2}_{>0}$ est positif.

Dans le cas de glissement, la loi de Coulomb donne

1) $\left|\frac{T}{N}\right| = \mu$

2) $\vec{R}\,\vec{v_g} \leq 0$ soit

$T\,v_g \leq 0$

Ici :

$\longrightarrow$ $T_2\,v_{g2} \leq 0$

avec :

$v_{g2} > 0$

donc :

$$\boxed{T_2 \leq 0}$$

$\longrightarrow$ de plus

$\left|\frac{T_2}{N_2}\right| = \mu$

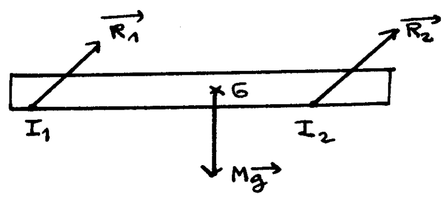
$T_2 = \pm\,\mu\,N_2$

et puisque N_2 est supposé positif et que T_2 est négatif

$$\boxed{T_2 = -\mu N_2} \quad (2)$$

---

3)



(en fait $T_2 < 0$)

Théorème de la résultante dynamique appliqué à S

$$\vec{R_1} + \vec{R_2} + M\vec{g} = M\vec{a_G}$$

$/\vec{u_x}$ $$\boxed{T_1 + T_2 = M\frac{d^2X}{dt^2}} \quad (3)$$

$/\vec{u_y}$ $$\boxed{N_1 + N_2 - Mg = 0} \quad (4)$$

---

4) $$\vec{GI_2} = \vec{OI_2} - \vec{OG}$$

$/\vec{u_x}$ $\quad \ell - X$

$/\vec{u_y}$ $\quad r - (r+h)$

$$\boxed{\overrightarrow{GI_2} = (\ell - X)\,\overrightarrow{u_x} - h\,\overrightarrow{u_y}}$$

et
$$\overrightarrow{GI_1} = \overrightarrow{GI_2} + \overrightarrow{I_2I_1}$$
$$= \overrightarrow{GI_2} - 2d\,\overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\overrightarrow{GI_1} = (\ell - X - 2d)\,\overrightarrow{u_x} - h\,\overrightarrow{u_y}}$$

---

5) En utilisant le théorème de König

$$\vec{\sigma}(O)_{/R} = \underbrace{\vec{\sigma}^*}_{\text{moment cinétique dans le référentiel barycentrique}} + \overrightarrow{OG} \wedge M\,\vec{v}(G)_{/R}$$

Ici
$$\vec{\sigma}(G)_{/R} = \vec{\sigma}^* + \underbrace{\overrightarrow{GG}}_{\text{nul}} \wedge M\,\vec{v}(G)_{/R}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(G)_{/R} = \vec{\sigma}^*}$$

De plus, S est en translation / R donc dans R^* (ref barycentrique) tous les points de S sont immobiles. Toutes les quantités de mvt sont donc nulles et donc $\vec{\sigma}^*$

$$\boxed{\vec{\sigma}_{(G)}{}^{\text{solide }S} = \vec{0}}$$

---

6) Théorème du moment dynamique (ou cinétique)

La dérivée du moment cinétique dans R galiléen, en un point fixe O de R (ou au point G du système étudié) est égale à la somme des moment des actions extérieures en O (respectivement : en G)

Ici on utilise le théorème en G.

$$\overrightarrow{GI_1} \wedge \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{GI_2} \wedge \overrightarrow{R_2} + \underbrace{\overrightarrow{GG}}_{\text{nul}} \wedge M\vec{g} = \frac{d}{dt}\underbrace{\vec{\sigma}(G)}_{\text{nul}}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & \ell - X - 2d & T_1 & \ell - X & T_2 & 0 \\ & -h & N_1 & -h & N_2 & 0 \\ \overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

donc, selon $\overrightarrow{u_z}$, on trouve

$$\boxed{(\ell - X)\,N_2 + (\ell - X - 2d)\,N_1 + h\,(T_1 + T_2) = 0} \quad (5)$$

---

7) On étudie le rouleau 1.

Ce rouleau est soumis à son poids, à la réaction d'axe supposée parfaite, à l'action de S sur le rouleau 1 qui vaut donc $(-\overrightarrow{R_1})$.

Les deux premiers moments sont nuls, on écrit le théorème du moment cinétique en O_1 fixe au rouleau :

$$\overrightarrow{O_1 I_1} \wedge (-\overrightarrow{R_1}) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_1}(O_1)$$

$$\begin{array}{c|c|c} & 0 & -T_1 \\ & r & -N_1 \\ \overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z} & 0 & 0 \end{array}$$

avec $\boxed{\overrightarrow{\sigma_1}(O_1) = J\,\omega_1\,\overrightarrow{u_z}}$

Selon $\overrightarrow{u_z}$: $\boxed{r\,T_1 = J\,\frac{d\omega_1}{dt}}$ (6)

---

8) de (6) : $T_1 = \frac{J}{r}\,\frac{d\omega_1}{dt}$

avec (1) $\boxed{T_1 = -\frac{J}{r^2}\,\frac{d\dot{X}}{dt}}$

de (3) : $T_2 = M\frac{d\dot{X}}{dt} - T_1$

$$\boxed{T_2 = \left(M + \frac{J}{r^2}\right)\frac{d\dot{X}}{dt}}$$

de (2) : $N_2 = -\frac{T_2}{\mu}$

$$\boxed{N_2 = -\frac{1}{\mu}\left(M + \frac{J}{r^2}\right)\frac{d\dot{X}}{dt}}$$

de (4) : $N_1 = Mg - N_2$

$$\boxed{N_1 = Mg + \frac{1}{\mu}\left(M + \frac{J}{r^2}\right)\frac{d\dot{X}}{dt}}$$

finalement, avec (5)

$$(\ell - X)(N_1 + N_2) - 2d\,N_1 + h\,(T_1 + T_2) = 0$$

$$(\ell - X)\,Mg - 2d\left(Mg + \frac{1}{\mu}\left(M + \frac{J}{r^2}\right)\frac{d\dot{X}}{dt}\right) + h\,M\frac{d\dot{X}}{dt} = 0$$

$$Mg\,(\ell-2d) - Mg\,X - \left[\frac{2d}{\mu}\left(M+\frac{J}{r^2}\right) - \ell M\right]\ddot{X} = 0$$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{Mg}{\frac{2d}{\mu}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)-\ell M}\,X = -\frac{Mg}{\frac{2d}{\mu}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)-\ell M}\,(2d-\ell)}$$

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = -\Omega^2\alpha$$

avec :

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{g}{\frac{2d}{\mu}\left(1+\frac{J}{Mr^2}\right)-\ell}}}$$

$$\boxed{\alpha = (2d-\ell)}$$

---

9) Application numérique

$$\Omega = \sqrt{\frac{9{,}81}{\frac{2\times 0{,}8}{0{,}1}\left(1+\frac{20}{35\,10^3\,(0{,}2)^2}\right)-0{,}2}}$$

$$\boxed{\Omega = 0{,}736\ \text{rad}\ s^{-1}}$$

$$\alpha = 2\times 0{,}8 - 1$$

$$\boxed{\alpha = 0{,}60\ m}$$

---

10)
$$\ddot{X} + \Omega^2 X = -\Omega^2\alpha$$

$$\boxed{X = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) - \alpha}$$

C.I En $t=0$, on a $X=0$ et $\dot{X}=\dot{X}_0$

donc :

$\rightarrow$ $0 = A - \alpha$

$\rightarrow$ $\dot{X}_0 = B\,\Omega$

finalement :

$$\boxed{X = -\alpha\,(1-\cos\Omega t) + \frac{\dot{X}_0}{\Omega}\sin\Omega t}$$

---

11) $$\dot{X} = -\alpha\Omega \sin\Omega t + \dot{X}_0 \cos\Omega t$$

La vitesse s'annule en τ avec :

$$0 = -\alpha\Omega \sin\Omega\tau + \dot{X}_0 \cos\Omega\tau$$

$$\boxed{\tan(\Omega\tau) = \frac{\dot{X}_0}{\alpha\Omega}}$$

τ étant la première valeur possible, on a :

$$\tau = \frac{1}{\Omega} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\dot{X}_0}{\alpha\Omega}\right)$$

---

12) Application numérique :

$$\tan(\Omega\tau) = \frac{0,442}{0,6 \quad 0,736}$$

$$= 1,0002$$

$$\simeq 1$$

$$\boxed{\Omega\tau \simeq \frac{\pi}{4}}$$

Puisque $\dot{X} > 0$ tant que $t < \tau$, la valeur maximale de X est en $t = \tau$. Donc pour X_{max}

$$X_m = -\alpha(1-\cos\Omega\tau) + \frac{\dot{X}_0}{\Omega}\sin(\Omega\tau)$$

$$= -\alpha\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\dot{X}_0}{\Omega}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= -\alpha\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\dot{X}_0}{\Omega}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -0,6\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0,6\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{X_m = 0,249 \text{ m}}$$

on doit vérifier que

$$X_m < \underbrace{2l - 2d}_{0,40\text{ m}}$$

il y a donc toujours contact avec le rouleau 1

---

13) On a trouvé (question 8)

$\longrightarrow$ $N_2 = -\frac{1}{\mu}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\frac{d\dot{X}}{dt}$ < 0 car freinage

$= +\frac{1}{\mu}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\Omega^2(\alpha+X)$

N_2 est donc une fonction croissante de X

$\longrightarrow$ $N_1 = Mg - N_2$

N_1 est donc une fonction décroissante de X

Pour qu'il n'y ait pas de basculement, N_2 et N_1 doivent rester positifs

$\longrightarrow$ il suffit de vérifier que N_2 est positif en $t=0$

$N_2(t=0) = \frac{1}{\mu}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\Omega^2\alpha > 0$ (évident)

$\longrightarrow$ il suffit de vérifier que N_1 est positif en $t=\tau$

$$\begin{aligned} N_1(t=\tau) &= Mg - N_2(t=\tau) \\ &= Mg - \frac{1}{\mu}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\Omega^2(\alpha+X_m) \\ &= 3{,}5\ 10^3 \times 9{,}81 - \frac{1}{0{,}1}\left(3{,}5\ 10^3+\frac{20}{(0{,}2)^2}\right)(0{,}736)^2(0{,}6+0{,}249) \\ &= 15{,}9\ 10^3\ \text{N} \quad > 0 \end{aligned}$$

Donc, pas de basculement de S

---

14) Vérification du non glissement de S sur le rouleau 1.

Il faut $\left|\frac{T_1}{N_1}\right| \leq \mu$

d'après 8) avec $\frac{d\dot{X}}{dt} = -\Omega^2(\alpha+X)$

$$\frac{\frac{J}{r^2}\left|\frac{d\dot{X}}{dt}\right|}{Mg+\frac{1}{\mu}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\frac{d\dot{X}}{dt}} \leq \mu$$

$$\frac{\frac{J}{r^2}\Omega^2(\alpha+X)}{Mg-\frac{1}{\mu}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\Omega^2(\alpha+X)} \leq \mu$$

Il suffit de vérifier dans les conditions les plus défavorables.
(le numérateur est maximal pour $X = X_m$
le dénominateur est minimal pour $X = X_m$)

$$\frac{J}{r^2}\Omega^2(\alpha+X_m) \overset{?}{\leqslant} \mu \; Mg - \left(M+\frac{J}{r^2}\right)\Omega^2(\alpha+X_m)$$

$$\cancel{M}\,\Omega^2(\alpha+X_m) \overset{?}{\leqslant} \mu \cancel{M} g$$

on doit vérifier que :

$$\boxed{\mu g \geqslant \Omega^2(\alpha+X_m)}$$

A.N.

$$0{,}1 \times 9{,}81 \overset{?}{\geqslant} (0{,}736)^2\,(0{,}6 + 0{,}249)$$

$$0{,}98 > 0{,}46$$

exact

---

15)

$$E_{c\,\text{solide + rouleau 1 + rouleau 2}} = \frac{1}{2}M v^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2 + \frac{1}{2}J\omega_2^2$$

$$v^2 \to \dot{X}^2 \qquad \omega_1^2 \to \left(-\frac{\dot{X}}{r}\right)^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}J\omega_2^2}$$

$$\Delta E_{c\,\text{entre 0 et }\tau} = E_c(\tau) - E_c(0)$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2}J\omega_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\dot{X}_0^2 + \frac{1}{2}J\omega_2^2\right)$$

$$\boxed{\Delta E_c = -\frac{1}{2}\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\dot{X}_0^2}$$

A.N.

$$= -\frac{1}{2}\left(3{,}5\;10^3 + \frac{20}{(0{,}2)^2}\right)(0{,}442)^2$$

$$\boxed{\Delta E_c = -391 \text{ J}}$$

---

16)

$$P_{2\,\text{rouleau 2}\to S} = \overrightarrow{R_2}\;\overrightarrow{v}_{I_2 \in S}$$

remarque

et non pas

$$\overrightarrow{R_2}\;\overrightarrow{v}_{\text{glissement S/rouleau 2}}$$

qui désigne la puissance totale des actions de contact en I_2

Cette réponse est différente dans la mesure où $\overrightarrow{v}_{I_2 \in rouleau\, 2} \neq \overrightarrow{0}$

$$\boxed{P_2 = T_2\, \dot{X}}$$

$$= \left(M+\frac{J}{r^2}\right) \frac{d\dot{X}}{dt}\, \dot{X}$$

ce qui correspond au travail élémentaire

$$\delta W_2 = P_2\, dt$$
$$= \left(M+\frac{J}{r^2}\right) \dot{X}\, d\dot{X}$$
$$= \frac{1}{2}\left(M+\frac{J}{r^2}\right) d(\dot{X}^2)$$

et entre $t=0$ et $t=\tau$

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(M+\frac{J}{r^2}\right) \int_{t=0}^{t=\tau} d(\dot{X}^2)$$

$$\boxed{W_2 = -\frac{1}{2}\left(M+\frac{J}{r^2}\right) \dot{X}_0^{\,2}}$$

on constate :

$$= \Delta E_c$$
$$= -391\ J$$

---

17) <u>Le rouleau 2 est soumis</u> :

- à son poids, appliqué en O_2. Le poids a donc un moment nul par rapport à l'axe de rotation. De plus, le poids ne travaille pas.
- au couple de moment $\overrightarrow{\Gamma}_{moteur}$ exercé par le moteur sur le rouleau 2. Ce couple fournit un travail positif.
- à la réaction $-\overrightarrow{R_2}$ exercée en I_2, qui fournit un travail négatif.

<u>On peut appliquer le théorème du moment dynamique au rouleau 2</u> au point fixe O_2. La vitesse de rotation étant constante, le moment cinétique est constant et le moment dynamique est nul.

$$\overrightarrow{\Gamma}_{moteur} + \overrightarrow{O_2 I_2} \wedge -\overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -T_2 \\ -N_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_m + T_2 r = 0$$

$$\Gamma_m = -T_2 r \quad (>0)$$

ce résultat était prévisible.

Puissance fournie par le moteur

$$P_m = \vec{\Gamma_m}\,\vec{\omega_2}$$

$$= \Gamma_m\,\omega_2$$

$$\boxed{P_m = -T_2\,r\,\omega_2}$$

(>0)

remarque :

On pouvait écrire ce résultat directement.
le rouleau 2 tournant à vitesse constante, le théorème de la puissance cinétique appliqué au rouleau donne

$$\underbrace{\cancel{\frac{dE_c}{dt}}}_{\text{nul}} = P_m + \vec{R}_{S\to\text{rouleau}2}\,\vec{v}_{I_2\in\text{rouleau}2} + \underbrace{\cancel{P_{\text{poids}}}}_{\text{nul}}$$

$$0 = P_m + (-\vec{R_2})\,(\vec{\omega_2}\wedge\vec{O_2 I_2})$$

$$0 = P_m + (-T_2)\,(-r\omega_2)$$

Travail fourni par le moteur entre $t=0$ et $t=\tau$

$$P_m = -T_2\,r\,\omega_2$$

$$= -\left(M+\frac{J}{r^2}\right)\frac{d\dot{X}}{dt}\,r\,\omega_2$$

$$\delta W_m = -\left(M+\frac{J}{r^2}\right) r\,\omega_2\,d\dot{X}$$

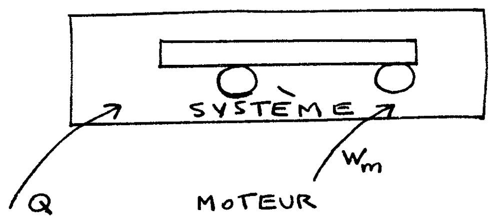
$$W_m = -\left(M+\frac{J}{r^2}\right) r\,\omega_2 \int_{t=0}^{t=\tau} d\dot{X}$$

$$\boxed{W_m = \left(M+\frac{J}{r^2}\right) r\,\omega_2\,\dot{X}_0}$$

A.N. $$= \left(3{,}5\,10^3 + \frac{20}{(0{,}2)^2}\right) 0{,}2\ 2\pi\ 0{,}442$$

$$\boxed{W_m = 2{,}22\ \text{kJ}}$$

18) Le système étudié est l'ensemble : solide + rouleau 1 + rouleau 2



on écrit le premier principe

$$\Delta(E_c + \underbrace{E_p}_{\Delta E_p = 0} + U) = \underbrace{W}_{W_m} + Q$$

on suppose que les parties du syst sont de volume cst et ne changent pas de température donc $\Delta U = 0$

$$\underbrace{\Delta E_c}_{W_2} = W_m + Q$$

(W_2 vu précédemment)

Finalement

$$\boxed{Q = W_2 - W_m}$$

A.N.

$$= -391 - 2222$$

$$\boxed{Q = -2{,}61 \text{ kJ}}$$

une partie de ces 2,61 kJ peut en fait servir à échauffer les rouleaux et le solide. Le reste étant évacué à l'extérieur.

<u>remarques</u>

1) <u>justification de $W_2 = \Delta E_c$</u>

— Pour cela on considère le système (solide + rouleau 1)

— ΔE_c est la variation de E_c de ce système puisque le rouleau 2 a une énergie cinétique cste

— La puissance totale des actions de contact (solide + rouleau 1) est nulle car $P_{totale_1} = \overrightarrow{R_1}\, \underbrace{\overrightarrow{v}_{glissement\ s/rouleau\ 1}}_{nulle}$

— Le poids ne travaille pas

— Seule $\overrightarrow{R_2}$ travaille.

Donc $\Delta E_C = W_2$

2) d'où vient Q ?

— On considère le système (solide + rouleau 1 + rouleau 2)

— Ce sont les frottements qui dégradent l'énergie mécanique avec création d'entropie, évacuée sous forme de chaleur.

— On peut s'intéresser à la puissance totale des actions de contact (solide + rouleau 2)

$$P_{\substack{totale_2 \\ (frottements)}} = \overrightarrow{R_2}\ \overrightarrow{v}_{glissement\ s/rouleau\ 2}$$

$$= T_2\,(\dot{X} + r\omega_2)$$

$$P_{\substack{thermique \\ produite}} = T_2\,\dot{X} \quad + T_2\, r\omega_2$$

$$P_{thermique} = P_2 \quad - P_m$$

d'où

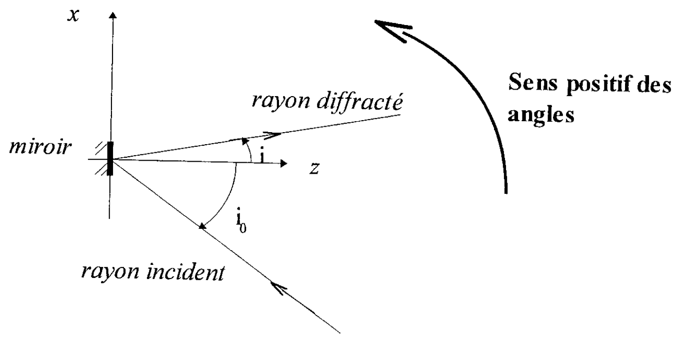
$$Q = W_2 - W_m$$

— Pour le système, on pouvait écrire, en restant alors dans le domaine de la mécanique et sans faire de thermo :

$$\Delta E_C = W_m + \underbrace{\underbrace{W_{\substack{forces\ intérieures \\ de\ frottement\ en\ 2}}}_{W_2 - W_m}}_{ou\ Q}$$

Monochromateur

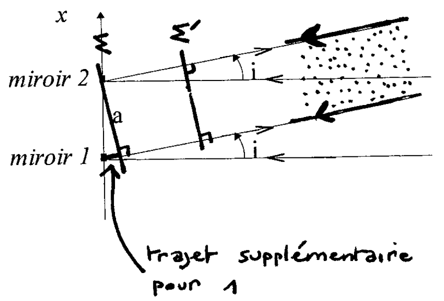
1)



$$\boxed{\begin{array}{c} i > 0 \\ i_0 < 0 \end{array}}$$

---

3) Pas de différence de marche au niveau du faisceau incident.
Pour obtenir la différence de marche entre les deux rayons diffractés



1°) on imagine un faisceau de lumière arrivant sous l'angle i. On inverse donc le sens de la lumière

2°) pour ce faisceau en sens inverse Σ' et Σ sont des plans d'ondes (Th de Malus)
Le trajet 1 est plus grand que le trajet 2 avec sur la figure

$$\delta_{1/2} = n_{air}\ a\ \sin|i|$$

3°) on revient au problème de départ.
Σ' et Σ ne sont plus des surfaces d'ondes (cf discontinuité entre 1 et 2) mais on a toujours sur la figure

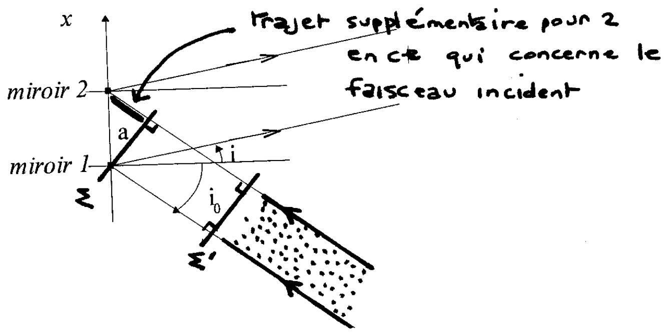
$$\delta_{1/2} = n_{air}\ a\ \sin|i|$$

Finalement, en remarquant que sur la figure de travail $i > 0$, on aura, dans le cas général, (cf ici $|i| = i$)

$$\boxed{\delta_{1/2} = n_{air}\ a\ \sin i}$$

---

3)



Σ et Σ' sont des surfaces d'ondes pour le faisceau incident.
donc, sur cette figure, le trajet 1 étant plus petit

$$\delta_{1/2 \text{ faisceau incident}} = -n_{air}\, a \sin|i_0|$$

mais i_0 est négatif sur cette figure ($|i_0| = -i_0$)

$$\boxed{\delta_{1/2 \text{ faisceau incident}} = n_{air}\, a \sin i_0}$$

finalement

$$\boxed{\delta_{1/2} = n_{air}\, a\, (\sin i + \sin i_0)}$$

---

4)

$$\phi(i)_{\text{retard de } 1/2} = \frac{2\pi}{\lambda_{vide}} \delta_{1/2}$$

$$P(i) = \frac{\delta_{1/2}}{\lambda_{vide}}$$

$$= \frac{n_{air}\, a\, (\sin i + \sin i_0)}{\lambda_{vide}}$$

$$\boxed{P(i) = \frac{a}{\lambda}(\sin i + \sin i_0)}$$

(en posant $\lambda_{air} = \dfrac{\lambda_{vide}}{n_{air}} = \lambda$)

On obtient un maximum dans la direction i si les deux rayons diffractés par les miroirs 1 et 2 sont en phase, ce qui impose $\phi(i) = m\, 2\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$

soit encore $P(i) = m$

$$\boxed{\text{maximum si } p \in \mathbb{Z}}$$

---

5) L'onde 1 est en retard de ϕ par rapport à 2

où :

L'onde 2 est en avance de ϕ par rapport à 1

D'où :

$$\begin{aligned}
\underline{s}_1(t) &= s_0 \exp j\omega t \\
\underline{s}_2(t) &= s_0 \exp j(\omega t + \phi) \\
\underline{s}(t) &= \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t) = s_0 \exp j\omega t\,(1+\exp j\phi) \\
I &= (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)(\underline{s}_1 + \underline{s}_2)^* \\
&= s_0^2\,(1+\exp j\phi)(1+\exp -j\phi) \\
&= s_0^2\,(1+1+\exp j\phi + \exp -j\phi) \\
&= s_0^2\,(2+2\cos\phi) \\
&= 2 s_0^2\,(1+\cos\phi)
\end{aligned}$$

Dans la direction $i = -i_0$ (cf direction correspondant à la réflexion ordinaire prévue par l'optique géométrique), on aurait

$$\begin{aligned}
\phi &= 2\pi \frac{a}{\lambda}(\sin -i_0 + \sin i_0) \\
&= 0 \\
I_0 &= 4 s_0^2
\end{aligned}$$

c'est à dire un maximum (prévisible puisque c'est la direction prévue par l'optique géométrique). Finalement, avec cette notation :

$$I = \frac{I_0}{2}(1+\cos\phi)$$

$$\boxed{I = \frac{I_0}{2}(1+\cos 2\pi p)}$$

ou $\quad I = I_0 \cos^2\frac{\phi}{2}$

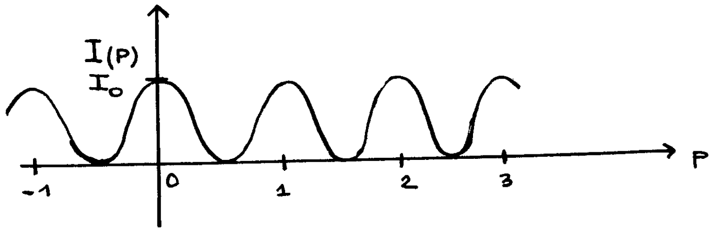
On retrouve bien l'existence d'un maximum pour i tel que

$\underline{p \in \mathbb{Z}}$ donc $\cos\phi = 1$

$\qquad I = I_0$

Les valeurs de p sont limitées car il faut tenir compte de $\sin i$ compris entre -1 et $+1$

$$\boxed{\begin{gathered} p \in \mathbb{Z} \\ \frac{a}{\lambda}(-1+\sin i_0) \leqslant p \leqslant \frac{a}{\lambda}(1+\sin i_0) \end{gathered}}$$



---

6) Si on augmente le nombre de traits

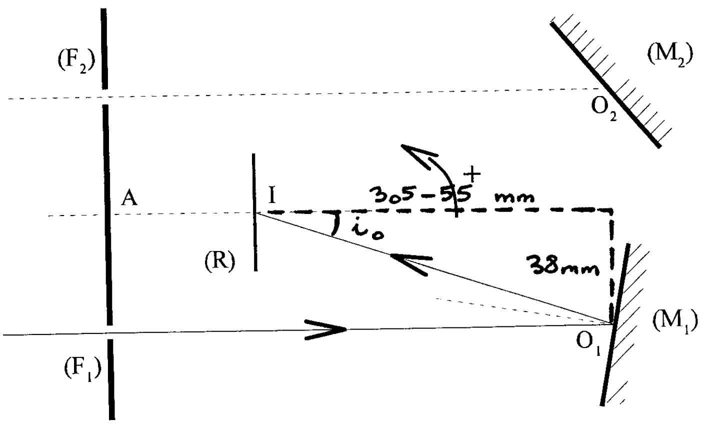
→ Les raies brillantes seront <u>plus lumineuses</u>.
(pour N traits : $I_{max} = N^2 \, I_{1\,raie}$)

→ Les raies brillantes sont beaucoup <u>plus fines</u>.

(pour N traits, entre deux maxima, il y a N − 2 maxima secondaires équidistants trop faibles pour être visibles. Plus il y a de traits, plus l'accord pour obtenir un maximum est précis)

---

7)



$$\tan(i_0) = \frac{AF_1}{F_1O_1 - AI}$$

$$= \frac{38\ 10^{-3}}{305\ 10^{-3} - 55\ 10^{-3}}$$

$$= 0{,}152$$

$|i_0| = 8{,}64°$

$$\boxed{i_0 = -\ 8°39'}$$

---

8) Nbre de maxima observables connaissant i_0

$$p = \frac{a}{\lambda}(\sin i + \sin i_0)$$

donc

$$-1 \leq \sin i = p\,\frac{\lambda}{a} - \sin i_0 \leq +1$$

$$\boxed{\frac{a}{\lambda}(-1+\sin i_0) \leq p \leq \frac{a}{\lambda}(1+\sin i_0)}$$

(déjà vu en 5))

A.N.

avec $a = \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{(1000\ \text{mm}^{-1})}$

$\boxed{a = 10^{-3}\ \text{mm}}$

$$\frac{10^{-6}}{0{,}5\ 10^{-6}}(-1+\sin(-8°39')) \leq p \leq \frac{10^{-6}}{0{,}5\ 10^{-6}}(1+\sin(-8°39'))$$

$$\boxed{-2{,}30 \leq p \leq 1{,}70}$$

Il y a donc 4 maximums observables

$$\boxed{p = -2,\ -1,\ 0,\ +1}$$

pour les valeurs suivantes

p	$\sin i = p\frac{\lambda}{a} - \sin i_0$	i
-2	$-0{,}850$	$-58°11'$
-1	$-0{,}350$	$-20°28'$
0	$+0{,}150$ $(-\sin i_0)$	$8°39'$ $(-i_0)$
$+1$	$0{,}650$	$40°34'$

---

9) Idem pour $\lambda = 0{,}550$ nm.

On trouve

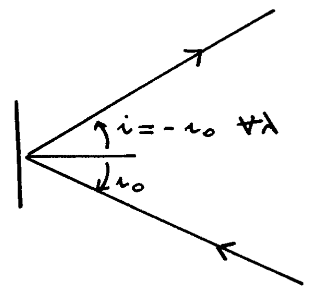
$$\boxed{-2{,}09 \leq p \leq 1{,}54}$$

4 maximums aussi pour cette longueur d'onde

p	i
−2	−71° 45′
−1	−23° 34′
0	8° 39′ (i_0)
+1	44° 27′

---

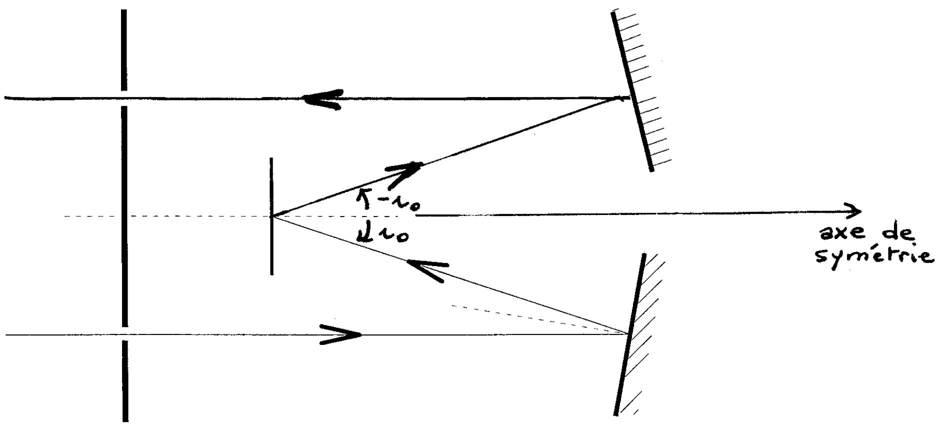
10) A l'ordre zéro



Le réseau se comporte comme un <u>miroir plan</u>.

---

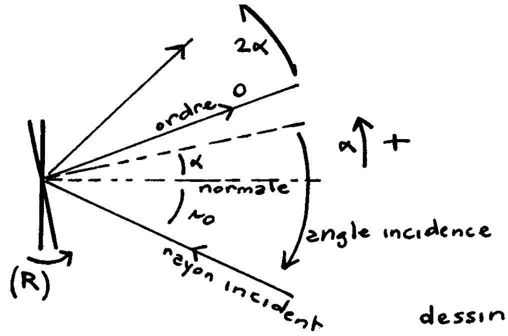
11)



La figure pour l'ordre zéro sera symétrique par rapport à la médiatrice du réseau. (M2) est alors symétrique de (M1) par rapport à cet axe.

---

12)



dessin avec $\alpha > 0$

→ si on tourne le reseau d'un angle α positif, l'ordre zéro tourne dans le même sens (de 2α)

→ pour recupérer l'ordre 2, il faut tourner dans l'autre sens

$$\boxed{\alpha < 0}$$

puisque les ordres 1, 2 ... correspondent à des i supérieurs.

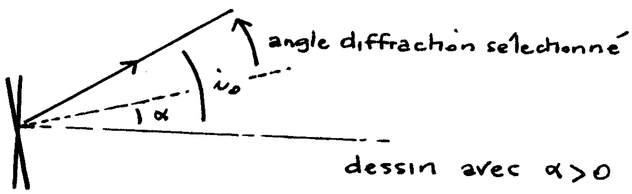
---

13) L'angle d'incidence avec la normale au réseau

$-(\underbrace{|\alpha|}_{+\alpha} + \underbrace{|i_o|}_{-i_o})$ sur la figure ci-dessous

$$\boxed{\text{angle d'incidence} = i_o - \alpha}$$

L'angle du rayon diffracté avec l'horizontale est $|i_o|$



dessin avec $\alpha > 0$

L'angle du rayon diffracté avec la normale au réseau est

$|i_o| - |\alpha|$ sur la figure

$$\boxed{\text{angle diffraction} = -(i_o + \alpha)}$$

---

14) La formule des réseaux vue en 4) :

$$p = \frac{a}{\lambda}(\sin i + \sin i_o)$$

devient $(p = 2)$

$$p = \frac{a}{\lambda}\left(\sin[-(i_o+\alpha)] + \sin[(i_o-\alpha)] \right)$$

$$p = \frac{a}{\lambda}\left(-\sin(i_0+\alpha) + \sin(i_0-\alpha)\right)$$

$$= \frac{a}{\lambda}\ 2\ \sin(-\alpha)\ \cos(i_0)$$

et en remplaçant p par sa valeur

$$\boxed{\sin\alpha = -\frac{\lambda}{a\cos i_0}}$$

A.N. $$= -\frac{0{,}5\ 10^{-6}}{10^{-6}\ 0{,}989}$$

$$= -0{,}506$$

$$\boxed{\alpha = -30^\circ 23'}$$

---

15) Pour un α_0 donné, on sélectionne la longueur d'onde λ_0 donnée par la relation précédente.

$$\boxed{\lambda_0 = -a \sin\alpha_0 \cos i_0}$$

On sélectionne en tournant le réseau pour que l'angle soit égal à α_0.

---

16)

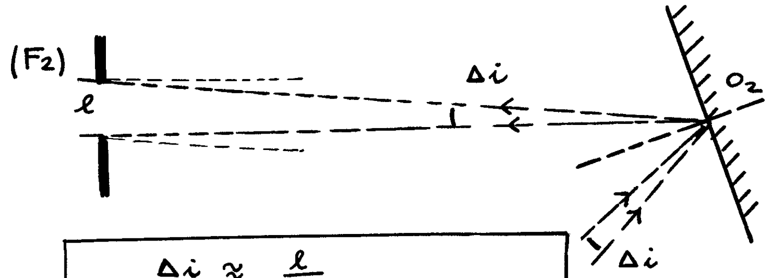
λ	$\sin\alpha$	α
450 nm	-0,455	$\boxed{-27^\circ 05'}$
500 nm	-0,506	$-30^\circ 23'$
650 nm	-0,657	$\boxed{-41^\circ 06'}$

---

17) Si la fente de sortie n'est plus infiniment fine, la lumière qui sort n'est plus rigoureusement monochromatique.

Les variations sont très faibles. On travaille au premier ordre, ce qui revient à utiliser les relations issues d'un calcul différentiel.

Les rayons qui sortent par F2 correspondent à un Δi



$$\boxed{\Delta i \approx \frac{\ell}{O_2F_2}}$$

A.N. $= \dfrac{0{,}1\ 10^{-3}}{305\ 10^{-3}}$

$= 0{,}33\ 10^{-3}$ rad

Il faut lier Δi et $\Delta\lambda$

$$\lambda = \frac{a}{p}(\sin i + \sin i_0)$$

$$d\lambda = \frac{a}{p}\cos i\ di$$

avec des valeurs absolues :

$$\Delta\lambda \approx \left|\frac{a}{p}\cos i\ \Delta i\right|$$

$$\boxed{\Delta\lambda \approx \frac{a}{p}\cos(i_0+\alpha)\ \Delta i}$$

A.N. $= \dfrac{10^{-6}}{2}\cos(-8°39' - 30°23') \times 0{,}33\ 10^{-3}$

$$\boxed{\Delta\lambda \approx 0{,}13\ \text{nm}}$$

---

remarque : L'énergie émise par un réseau plan pour le spectre d'ordre 2 est très faible (cf diffraction). Les monochromateurs sont réalisés à partir d'autres types de réseaux.

Vaporeformage du méthane

1) $CH_4(g) + H_2O(g) = CO(g) + 3H_2(g)$

$$\Delta_r G^\circ_{(1100K)} = G^\circ_{CO(1100K)} + 3G^\circ_{H_2(1100K)} - G^\circ_{CH_4(1100K)} - G^\circ_{H_2O}(1100K)$$
$$= -347{,}00 - 3\times 162{,}30 + 309{,}28 + 472{,}02$$

$$\boxed{\Delta_r G^\circ(1100K) = -52{,}60 \ \text{kJ.mol}^{-1}}$$

---

2) $$\Delta_r G^\circ_{(T_1)} = -RT_1 \ln K_1^\circ(T_1)$$
$$\ln K_1^\circ(T_1) = -\frac{\Delta_r G^\circ(T_1)}{RT_1}$$
$$= -\frac{-52{,}60\ 10^3}{8{,}3145 \times 1100}$$
$$= 5{,}75$$

$$\boxed{K_1^\circ(1100K) = 315}$$

---

3) $$\boxed{K_1^\circ(T_1) = \frac{P_{CO\,eq}\,(P_{H_2\,eq})^3}{P_{CH_4\,eq}\ P_{H_2O\,eq}}\ \frac{1}{P^{\circ 2}}}$$

---

4) $$\Delta_r H^\circ(1100K) = H^\circ_{CO}(1100K) + 3H^\circ_{H_2(1100K)} - H^\circ_{CH_4(1100K)} - H^\circ_{H_2O}(1100K)$$
$$= -85{,}50 + 3\times 23{,}71 + 28{,}58 + 211{,}63$$

$$\boxed{\Delta_r H^\circ(1100K) = 225{,}84 \ \text{kJ.mol}^{-1}}$$

---

5) $$\Delta_r G^\circ_{(T)} = \Delta_r H^\circ_{(T)} - T\ \Delta_r S^\circ_{(T)}$$
$$\Delta_r S^\circ(T_1) = \frac{\Delta_r H^\circ(T_1) - \Delta_r G^\circ(T_1)}{T_1}$$
$$\Delta_r S^\circ(1100K) = \frac{225{,}84 - (-52{,}60)}{1100}$$

$$\boxed{\Delta_r S^\circ(1100K) = 0{,}253 \ \text{kJ.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}}$$

---

6) $$\Delta_r H^\circ(1100K) > 0$$

$\boxed{\text{La réaction est endothermique}}$

---

7) L'entropie de réaction est positive.
La réaction augmente le nombre de moles de gaz de 2 à 4 donc une augmentation du "désordre", donc une augmentation d'entropie.

---

8) La formule de Van't Hoff :

$$\frac{d\ln K^\circ(T)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ(T)}{RT^2}$$

indique que si $\Delta_r H^\circ(T) > 0$ et $dT > 0$ alors $\ln K^\circ(T)$ augmente. D'où la loi de Van't Hoff (modération) :

Si on élève la température, il y a déplacement de l'équilibre chimique (ou rupture d'équilibre chimique) dans le sens endothermique.

Ici la réaction est endothermique.

Si T augmente, déplacement vers la droite →   Si T diminue, déplacement vers la gauche ←

---

9) La loi de modération de Le Chatelier indique

Si on augmente la pression, il y a déplacement de l'équilibre chimique (ou rupture d'équilibre chimique) dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz (cf diminution du volume)

Ici le nombre de moles de gaz augmente de 2 à 4

Si P augmente, déplacement vers la gauche ←   si P diminue, déplacement vers la droite →

---

10)
$$CO(g) + H_2O(g) = CO_2(g) + H_2(g)$$

$$\Delta_r G^\circ_2(1100K) = G^\circ_{H_2(1100K)} + G^\circ_{CO_2(1100K)} - G^\circ_{CO(1100K)} - G^\circ_{H_2O(1100K)}$$

$$= -162{,}30 - 656{,}65 + 347{,}00 + 472{,}02$$

$$= 0{,}07 \text{ kJ mol}^{-1}$$

$$K^\circ_2(1100K) = e^{-\frac{\Delta_r G^\circ_2(1100K)}{RT_1}}$$

$$= e^{-\frac{0,07 \times 1000}{8,3145 \times 1100}}$$

$$\boxed{K_2^0(1100K) = 0,992}$$

---

11) S'il n'y avait que l'équilibre 1, les nombres de moles pour la réaction à l'avancement ξ_1 seraient :

$$\begin{array}{ccccccc} CH_4(g) & + & H_2O(g) & = & CO(g) & + & 3H_2(g) \\ n^0_{CH_4} - \xi_1 & & n^0_{H_2O} - \xi_1 & & \xi_1 & & 3\xi_1 \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \\ 1 & & 3 & & & & \end{array}$$

---

12) On tient compte des deux équilibres simultanés. On corrige en tenant compte de ξ_2

$$\begin{array}{ccccccc} CH_4(g) & + & H_2O(g) & = & CO(g) & + & 3H_2(g) \\ n^0_{CH_4} - \xi_1 & & n^0_{H_2O} - \xi_1 - \xi_2 & & \xi_1 - \xi_2 & & 3\xi_1 + \xi_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} CO(g) & + & H_2O(g) & = & CO_2(g) & + & H_2(g) \\ \xi_1 - \xi_2 & & n^0_{H_2O} - \xi_1 - \xi_2 & & \xi_2 & & 3\xi_1 + \xi_2 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n_{CH_4} &= n^0_{CH_4} - \xi_1 \\ n_{H_2O} &= n^0_{H_2O} - \xi_1 - \xi_2 \\ n_{CO} &= \xi_1 - \xi_2 \\ n_{H_2} &= 3\xi_1 + \xi_2 \\ n_{CO_2} &= \xi_2 \end{aligned}}$$

---

13) Le nombre total de moles de gaz, nécessaire pour déterminer les fractions molaires, est :

$$\boxed{n_T = n^0_{CH_4} + n^0_{H_2O} + 2\xi_1}$$

A.N.

à la sortie du réacteur :

$$\boxed{\begin{aligned} n_{CH_4} &= 0{,}035 \\ n_{H_2O} &= 1{,}735 \\ n_{CO} &= 0{,}665 \\ n_{H_2} &= 3{,}195 \\ n_{CO_2} &= 0{,}300 \\ n_T &= 5{,}930 \end{aligned}}$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{n_{CO}\ n_{H_2}^3}{n_{CH_4}\ n_{H_2O}} \frac{1}{n_T^2} \frac{P^2}{P^{o2}}}$$

$$\boxed{Q_2 = \frac{n_{CO_2}\ n_{H_2}}{n_{CO}\ n_{H_2O}}}$$

A.N.

$$Q_1 = \frac{0{,}665\ \ 3{,}195^3}{0{,}035\ \ 1{,}735} \frac{1}{5{,}93^2} \frac{5^2}{1^2}$$

$$\boxed{Q_1 = 254}$$

$$Q_2 = \frac{0{,}300\ \ 3{,}195}{0{,}665\ \ 1{,}735}$$

$$\boxed{Q_2 = 0{,}831}$$

---

14)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{Q_1}{K_1} &= 0{,}807 \\ \frac{Q_2}{K_2} &= 0{,}837 \end{aligned}}$$

Puisque pour chacune de ces réactions $Q < K$ on peut affirmer (pas de rupture d'équilibre en phase homogène) que <u>ces deux réactions se poursuivent encore dans le sens étudié</u> à la sortie, l'équilibre n'étant pas atteint quand on arrête la réaction.

L'affinité de chacune de ces réactions est encore <u>positive</u> à la sortie.

$$-A = \Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln Q$$

$$0 = \Delta_r G^\circ + RT \ln K$$

donc

$$\boxed{A = -RT \ln \frac{Q}{K}}$$

A.N.

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= +1{,}56 \quad kJ.mol^{-1} \\ A_2 &= +1{,}63 \quad kJ.mol^{-1} \end{aligned}}$$