TD n°2
Thermodynamique statistique

Données
Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$
Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$

Exercice 1 : Atmosphère adiabatique

On considère l'atmosphère assimilée à un gaz parfait de masse molaire M, en équilibre dans le champ de pesanteur g supposé uniforme. On suppose que la pression P ne dépend que de l'altitude z et on note P_0 la pression en $z = 0$. Le modèle de l'atmosphère adiabatique suppose qu'on a la relation :

$$PV^\gamma = cste$$

où γ est l'indice adiabatique du gaz ($\gamma = 1{,}4$).

1. Montrer que la température vérifie une loi de la forme :

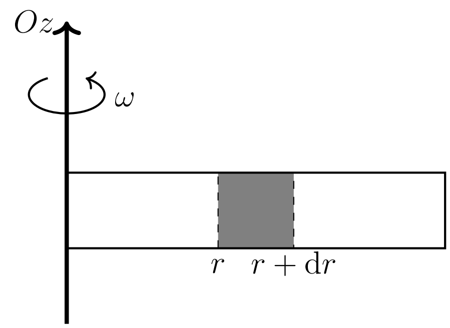
$$T(z) = T_0(1 - az)$$

et déterminer l'expression de a en fonction de γ, M, g, T_0 et R.

2. Déterminer la loi d'évolution de la pression en fonction de la température, puis en fonction des constantes du problème.

3. Comparer cette loi d'évolution avec la loi obtenue dans le cas de l'atmoshpère isotherme.

Exercice 2 : Centrifugeuse



Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon R et de longueur L, tournant autour d'un axe vertical Oz à la vitesse angulaire constante ω. Un gaz supposé parfait est contenu dans le cylindre. Le but est d'étudier la densité particulaire $n^*(r)$ de gaz dans le cylindre en fonction de la distance r à l'axe Oz lorsque ce gaz est en équilibre relatif dans le cylindre. Les molécules de gaz sont identiques, de masse m et le système est thermostaté à la température T. On note $P(r)$ et $\rho(r)$ la pression et la masse volumique du gaz à la distance r de l'axe de rotation.
Dans le référentiel du cylindre, non galiléen, un système de masse μ et à la position r subit, en plus des autres forces, une force (centrifuge) de la forme $\vec{f} = \mu\omega^2 r\vec{u}_r$.

1. Faire un bilan des forces qui s'appliquent à une tranche de gaz de masse M comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$, dans le référentiel lié au cylindre. Exprimer la résultante des forces de pression sous la forme d'une dérivée de $P(r)$.

2. De la condition d'équilibre relatif de la tranche de fluide, déduire la densité $n^*(r)$ des molécules dans le cylindre. On notera n_0^* la densité particulaire sur l'axe de rotation.

3. Montrer que $n^*(r)$ obéit à une statistique de Boltzmann.

Exercice 3 : Niveaux d'énergie dégénérés

On considère un système de N particules indépendantes pouvant exister dans 4 états quantiques : un état pour lequel l'énergie est nulle, et les trois autres états pour lesquels l'énergie vaut ε. Le système est en contact avec un thermostat à la température T de sorte que la probabilité pour une particule d'être dans un état quantique est proportionnelle au facteur de Bolzmann à l'énergie correspondante.

1. Exprimer la probabilité de trouver une particule :
  a) dans l'état quantique d'énergie nulle puis dans un état quantique d'énergie ε.
  b) dans le niveau d'énergie nulle puis dans le niveau d'énergie ε.

2. En déduire les populations des différents niveaux d'énergie. Quelle est la condition pour avoir en moyenne plus de particules à l'énergie ε qu'à l'énergie nulle ?

3. Déterminer l'énergie moyenne du système, étudier les cas limites.

Exercice 4 : Système à trois niveaux

On considère un système en équilibre avec un thermostat à la température T. Les $N \gg 1$ atomes qui le constituent peuvent occuper trois niveaux d'énergie, $\varepsilon_- = -\varepsilon$, $\varepsilon_0 = 0$ et $\varepsilon_+ = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

1. Calculer les nombres moyens d'atomes N_i dans les trois états. Étudier les cas limites.

2. Exprimer l'énergie moyenne $\overline{e}$ d'un atome. Tracer son évolution en fonction de la température, commenter.

3. Déterminer la capacité thermique $C_v(T)$ et décrire son évolution en fonction de la température.

Exercice 5 : Capacité thermique des solides

Afin de pouvoir calculer la capacité thermique d'un solide, on utilise le modèle d'Einstein (établi en 1907). Dans le cas unidimensionnel, les atomes sont alignés selon un axe (par exemple Ox) et effectuent de petits mouvement de vibration autour de leurs positions d'équilibre respectives. Chaque atome se comporte comme un oscillateur hamonique de pulsation propre ω. En théorie quantique (voir en fin d'année), l'énergie d'un oscillateur hamonique est quantifiée et les différents niveaux d'énergie ont pour expression : $\varepsilon_k = \hbar\omega\left(k + \dfrac{1}{2}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Le solide considéré ici est en équilibre thermique avec un thermostat à la température T.

1. Exprimer la probabilité p_k pour qu'un atome soit dans l'état d'énergie ε_k.

2. Montrer que l'énergie moyenne d'un atome est : $\overline{e} = \dfrac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\dfrac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)$

(coth est la cotengente hyperbolique). On donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\alpha n} = \frac{1}{4\sinh^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{pour} \quad \alpha > 0$$

3. Évaluer la capacité thermique molaire $C_{v,m}$ du solide.

4. Quelle est la limite de $C_{v,m}$ à haute température ? Quelle loi retrouve-t-on ?

5. Quelle est la limite de $C_{v,m}$ à basse température ? Commenter.

6. Tracer l'allure de $C_{v,m}$ en fonction de T