

PROBLÈME I (CCP PSI 2011)

Notations

On note :

$|z|$ le module du nombre complexe z .

J un intervalle de $[0, +\infty[$.

f une fonction définie sur J à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

g une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Sous réserve de son existence, on note $\tilde{f}_g(x) = \int_J f(t)g(xt) dt$ pour $x > 0$.

Chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\tilde{f}(x)$ au lieu de $\tilde{f}_g(x)$.

Objectifs

Pour différentes hypothèses sur la fonction f , sur l'intervalle J et pour deux choix de g , on se propose de déterminer la limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

Dans la partie **1**, on étudie un exemple explicite avec application à des calculs de sommes de séries.

Dans la partie **2**, on considère une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et l'objectif est d'obtenir la limite en $+\infty$ de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = |\sin(t)|$, lorsque f est de classe \mathcal{C}^1 ou lorsque f est continue par morceaux.

I. Une étude de séries

I.1. Étude de la fonction L

Pour tout x réel tel que la série entière $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ converge, on note $L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ sa somme.

1.1.1 Préciser le rayon de convergence de cette série entière, montrer que la fonction L est définie sur $] -1, 1]$ et expliciter $L(x)$ pour $x \in] -1, 1[$.

1.1.2 Montrer, avec soin, que la fonction L est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire que $L(1) = \ln(2)$.

I.2. Étude de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

On considère la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, a_{3p} = -\frac{2}{3p} \quad ; \quad \forall p \in \mathbb{N}, a_{3p+1} = \frac{1}{3p+1} \quad \text{et} \quad a_{3p+2} = \frac{1}{3p+2}$$

1.2.1 Montrer que

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{1 + \frac{h}{p}}.$$

1.2.2 Déterminer la limite de la somme $\sum_{k=1}^{3p} a_k$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ (on pourra considérer la fonction

$t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable). En déduire la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} a_k$ et préciser sa somme.

1.2.3 En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ converge et montrer que sa somme est égale à $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1.3 Étude des séries $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\alpha)}{k}$

Pour $t \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(t) = \frac{1}{e^{it} - 1}$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^n e^{ikt}$.

On désigne par α un nombre réel fixé dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera $\pi \leq \alpha < 2\pi$.

1.3.1 Montrer que $S_n(t) = \varphi(t)(e^{i(n+1)t} - e^{it})$.

1.3.2 Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^1([\pi, \alpha])$.

1.3.3 Montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{\alpha} e^{i(n+1)t} \varphi(t) dt$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

1.3.4 Expliciter $\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt$. Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$. Expliciter la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$.

1.3.5 Exprimer $e^{it} \varphi(t)$ en fonction de $\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ où $t \in [\pi, \alpha]$.

1.3.6 En déduire la convergence des séries $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\alpha)}{k}$. Expliciter leur somme respective. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu en **1.2.3** ?

II. Limite d'une intégrale

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ soit convergente. On désigne par g une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence) on note $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)g(xt) dt$ pour $x > 0$.

2.1 Existence de $\tilde{f}_g(x)$.

On suppose que la fonction g est bornée sur \mathbb{R}^+ .

Justifier l'existence de $\tilde{f}_g(x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que la fonction \tilde{f}_g est continue et bornée sur \mathbb{R}^{+*} .

2.2 Limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$.

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et à valeurs réelles.

Soit $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt$.

2.2.1. Justifier l'affirmation :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel positif A tel que $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$

2.2.2. Le nombre réel A étant fixé, montrer que l'intégrale $\int_0^A f(t)e^{ixt} dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

2.2.3. En déduire la limite de $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Dans toute la suite, on suppose $g(t) = |\sin(t)|$ et on note simplement

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)| dt$$

2.3 Étude pour une fonction f particulière

On suppose (dans cet exemple) que f désigne la fonction E définie par $E(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$, et donc $\tilde{E}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)| dt$ pour $x > 0$.

2.3.1. Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma) = \int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy$.

2.3.2. Montrer que pour $x > 0$,

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du$$

2.3.3. Exprimer pour $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.

2.3.4. Justifier, pour $x > 0$, la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} e^{-\frac{k\pi}{x}}$. Préciser sa somme.

2.3.5. Expliciter $\tilde{E}(x)$ pour $x > 0$. Déterminer la limite de $\tilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2.4 Étude générale

On désigne de nouveau par f une fonction quelconque continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge et on note

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)| dt \quad \text{pour } x > 0$$

2.4.1. Lemme préliminaire

Le résultat de cette question, dont la démonstration utilise les séries de Fourier, pourra être admis !

Pour tout réel t tel que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$ converge, on pose $h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$. Montrer que la fonction h est définie et continue sur \mathbb{R} . Justifier l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t)$$

2.4.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas \mathcal{C}^1

On suppose de plus que f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ . En utilisant les résultats obtenus dans la partie **2.2** et la question précédente, déterminer la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Le résultat est-il conforme à celui obtenu pour la fonction E ?

2.4.3. Cas d'une fonction continue par morceaux

2.4.3.1 Une limite.

Étant donnés deux nombres réels β et δ tels que $0 \leq \beta < \delta$, on considère, pour $x > 0$, l'intégrale $F(x) = \int_{\beta}^{\delta} |\sin(xt)| dt$. Montrer que $F(x) = \frac{1}{x} \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du$.

On pose p la partie entière de $\frac{\beta x}{\pi}$ et q celle de $\frac{\delta x}{\pi}$. Pour $x > \frac{\pi}{\delta - \beta}$, donner un encadrement de $F(x)$ en fonction de p, q et x .

En déduire que $F(x)$ tend vers $\frac{2}{\pi}(\delta - \beta)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

2.4.3.2 Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas d'une fonction continue par morceaux

Si J est un intervalle de \mathbb{R}^+ et si f est une fonction continue par morceaux sur J à valeurs réelles et telle que l'intégrale $\int_J |f(t)| dt$ existe, on note toujours

$$\tilde{f}(x) = \int_J f(t) |\sin(tx)| dt$$

Quelle est la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$:

- lorsque J est un segment et f une fonction en escalier ?
- lorsque J est un segment et f une fonction continue par morceaux ?
- lorsque $J = \mathbb{R}^+$ et f une fonction continue par morceaux ?

