DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

On demande d'encadrer les réponses en couleur.

Guide d'onde TM

On donne $\varepsilon_0 = 8{,}842 \times 10^{-12}\, Fm^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, Hm^{-1}$

I. Généralités: propagation dans une structure métallique creuse.

On se place dans un système de coordonnées cartésiennes et on considère un guide d'onde formé d'un conducteur métallique creux, dont la cavité cylindrique a une section droite de forme a priori quelconque.

A. Métal parfait

Le métal est supposé parfait et l'intérieur du guide est constitué de vide.

1. Que sous-entend l'hypothèse métal « parfait » ? Que peut-on dire du champ électrique en tout point du métal parfait ? Justifier.
2. Qu'indique l'équation de Maxwell-Faraday en tout point du métal parfait ?

Dans toute la suite, on suppose que le champ magnétique est nul en tout point du métal parfait.

B. Vide

3. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et en déduire les équations de propagation pour les champs vectoriels électrique et magnétique dans le vide. On pose $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$; quelle est la signification physique de c ?
4. Écrire alors les six équations de propagation aux dérivées partielles obtenues en faisant intervenir les dérivées des composantes scalaires des champs.

C. Propagation avec ou sans pertes

On étudie la propagation, dans la cavité, d'une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω dans la direction de l'axe Oz et dans le sens des z croissants.

S'intéressant à une onde harmonique, on note les champs complexes $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sous la forme : $\underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U}}_0(x, y)\ \exp(-\gamma z)\ \exp(j\omega t)$ avec $j^2 = -1$. Le coefficient γ est appelé ici constante de propagation ; ce coefficient peut être réel, imaginaire pur ou complexe.

5. Quelle serait la forme de γ dans les trois cas suivants :
   - propagation sans pertes
   - propagation avec pertes
   - pas de propagation de l'onde électromagnétique.

Dans la suite on se place dans le cas d'une propagation sans pertes.

6. Dans le cas d'une propagation sans pertes selon les z croissants, si l'on pose $\gamma = jk$, k est-il un réel positif ou négatif ?

II. Modes TM

On utilisera dans la suite les expressions :

$\vec{\underline{E}}(x,y,z,t)=\vec{\underline{E}}_0(x,y)\exp(j(\omega t-kz))$ et

$\vec{\underline{B}}(x,y,z,t)=\vec{\underline{B}}_0(x,y)\exp(j(\omega t-kz))$.

7. Quel est l'effet de l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$ en notation complexe ? Quel est ici l'effet de l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial z}$ en notation complexe ?

On s'intéresse ici aux modes de propagation dits transverses magnétiques, notés TM , c'est-à-dire tels que $\underline{B}_{0z}(x,y)=0$; on suppose que $\underline{E}_{0z}(x,y)\neq 0$ contrairement au cas de l'onde plane. De même la constante k est dans la suite supposée différente du rapport $\dfrac{\omega}{c}$.

8. A l'aide des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, établir 4 équations permettant d'exprimer les valeurs complexes des composantes transverses $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$ d'une part et $\underline{B}_x$, $\underline{B}_y$ d'autre part, en fonction de celle de la composante longitudinale $\underline{E}_z$ et de ses dérivées partielles par rapport à x et y .

9. En déduire, avec précision, les expressions de $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{B}_x$, $\underline{B}_y$ en fonction de $\dfrac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$, k , ω , c .

10. En utilisant une des six équations de propagation établies précédemment, montrer que la composante longitudinale du champ électrique complexe satisfait l'équation suivante : $\dfrac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2}+K^2\underline{E}_z=0$ où K^2 est une constante que l'on exprimera.

11. Précédemment, on a utilisé 4 des 6 équations obtenues à partir des équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère. Qu'en est-il des deux autres équations non utilisées?

III. Cas d'une structure rectangulaire

On considère ici un guide d'onde de section rectangulaire de côtés a et b selon la figure ci-après, « Guide d’onde rectangulaire ».

A. Conditions aux limites

12. Quelles sont les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui sont toujours continues à la traversée d'une surface ? En déduire, pour les deux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, quelles composantes (tangentielles ou normales) doivent s'annuler dans le vide au voisinage immédiat du métal parfait.

13. A quelles conditions aux limites satisfait la composante longitudinale $\underline{E}_{0z}(x,y)$ sur les quatre portions de plan limitant la cavité ? Justifier.

B. Détermination des solutions

14.Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\underline{E}_{0z}(x,y)$?

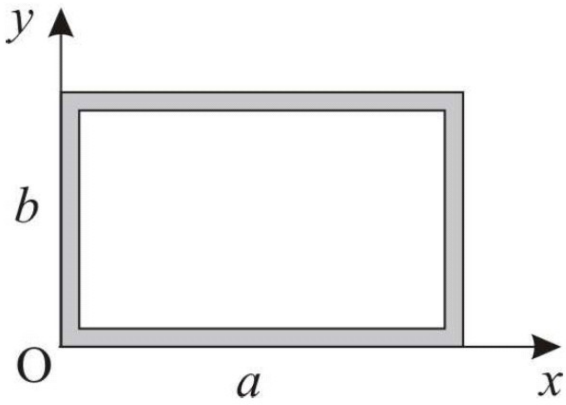


Figure: Guide d'onde rectangulaire

15.On cherche une solution de cette équation du type :

$$\underline{E}_{0z}(x,y)=(A'\sin(k_1 x)+B'\cos(k_1 x))\times(C'\sin(k_2 y)+D'\cos(k_2 y))$$

Quelle est la relation entre les deux coefficients k_1 et k_2 d'une part et k , ω et c ?

16.En utilisant deux des conditions aux limites établies précédemment, montrer que l'expression de $\underline{E}_{0z}(x,y)$ peut se simplifier en $\underline{E}_{0z}(x,y)=E_0\sin(k_1 x)\times\sin(k_2 y)$, E_0 étant une constante.

17.Montrer que les coefficients k_1 et k_2 s'expriment chacun en fonction d'un nombre entier arbitraire (respectivement n et m).

18.Quelle est alors l'expression de k en fonction de ω , c , n , m , a et b ?

19.Expliquer le terme « mode TM_{nm} ». Que déterminent physiquement les indices n et m ? Quelles sont les valeurs minimales que peuvent prendre ces indices ?

20.En déduire l'existence d'une fréquence de coupure pour une onde se propageant dans le guide en mode TM .

21.Déterminer les expressions des composantes transverses de $\underline{\vec{E}}$ et de $\underline{\vec{B}}$ pour le mode TM_{nm} (on pourra garder la notation k sans remplacer k par son expression).

22.Vérifier que les conditions aux limites sont bien assurées pour $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$.

23.Déterminer l'expression de la vitesse de phase de l'onde en fonction de ω , c , n , m , a et b . Commenter. Ce dispositif est-il dispersif ? Justifier.

24.Application numérique : pour un guide de dimensions $a=3\,cm$ et $b=2\text{cm}$ déterminer la fréquence de coupure f_C , d'une onde se propageant dans le guide. Calculer la vitesse de phase du mode $TM(n=1,m=1)$, lorsque la fréquence est égale à $2f_C$.

Émission et réception d'un signal électromagnétique

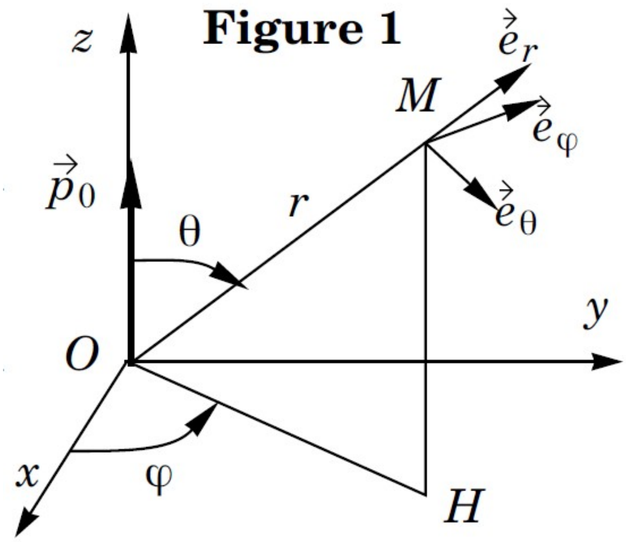
Le problème s'intéresse à une technique de navigation côtière à l'aide du signal émis par un radiophare. Un navire, à l'approche du port, doit nécessairement effectuer une navigation précise afin d'éviter les dangers de la côte (rochers, haut-fonds, courants, etc...). Par temps de brouillard, il n'est pas possible de repérer à vue les balises. Certains phares importants, par exemple le phare de Cordouan à l'entrée de la Gironde, émettent des signaux électromagnétiques codés que l'on peut détecter et ainsi positionner le navire par rapport au phare.

L'atmosphère terrestre a les propriétés électriques du vide :

$\varepsilon_0=(1/36\pi)10^{-9}\,F.m^{-1}$; $\mu_0=4\pi\,10^{-7}\,H.m^{-1}$

I. Rayonnement d'un dipôle oscillant

Un dipôle oscillant de moment dipolaire $\vec{p}(t)=\vec{p}_0\cos\omega t$ est placé à l'origine O de l'espace, le long de l'axe Oz ($\vec{p}_0=p_0\vec{e}_z$) . On étudie le rayonnement émis en un point M repéré par ses coordonnées sphériques r , θ , φ (voir *Figure* 1).



1. Sous certaines conditions, le champ magnétique créé au point M par le dipôle s'écrit : $\vec{B}(M,t)=\frac{\mu_0}{4\pi r c}\frac{d^2}{dt^2}[\vec{p}(t-\frac{r}{c})]\wedge\vec{e}_r$

   c est la vitesse de la lumière dans le vide. Cette formule est obtenue sous certaines conditions ; les préciser et dégager leur contenu physique.

2. En notation complexe $\underline{\vec{p}}(t)=\vec{p}_0\exp(j\omega t)$; donner alors $\underline{\vec{B}}(M,t)$ en notation complexe dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ en introduisant la norme du vecteur d'onde $k=\omega/c$.

3. Préciser la zone de rayonnement du phare si celui-ci émet un signal de fréquence $100\,kHz$.

Conclure.

4. Sachant que le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ possède localement la structure d'une onde plane progressive dans la direction $\vec{e_r}$, en déduire l'expression complexe $\underline{\vec{E}}(M,t)$.

5. Définir le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$ et préciser sa signification physique. Calculer $\vec{\Pi}(M,t)$ puis sa valeur moyenne dans le temps.

6. Calculer la puissance moyenne $<dP>$ rayonnée par le dipôle à travers la surface élémentaire de largeur angulaire $d\theta$ selon $\vec{e_\theta}$ et $d\varphi$ selon $\vec{e_\varphi}$, tracée sur la sphère de centre O et de rayon r $(r \gg \lambda)$. Interpréter physiquement ce résultat ainsi que la dépendance en $1/r$ du champ électromagnétique dans la zone de rayonnement. En déduire la puissance moyenne rayonnée.

II. Réception du signal

Le navire est suffisamment éloigné du radiophare pour considérer que l'onde électromagnétique reçue par le détecteur a localement la structure d'une onde plane progressive à polarisation rectiligne. L'expression complexe du champ électrique peut alors s'écrire $\underline{\vec{E}}(M,t)=E_0 \exp j(\omega t-k x)\ \vec{e_z}$

A. Amplitude du champ électromagnétique reçu

7. À partir des équations de Maxwell, établir l'équation de dispersion dans le vide.

8. Démontrer l'expression du champ $\vec{B}(M,t)$.

9. Calculer la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting en fonction de c, ε_0 et E_0.

Le navire est à $30\, milles\, marins$ du radiophare. Celui-ci émet une onde monochromatique de fréquence $100\, kHz$ avec une puissance moyenne $<P>=20\, kW$. On suppose que les caractéristiques d'émission du radiophare sont analogues à celles du dipôle oscillant étudié dans la première partie ($1\, mille\, marin=1852\, m$).

10. En déduire l'expression de l'amplitude E_0 du champ au niveau du détecteur. Application numérique.

B. Réception par un cadre détecteur

Le détecteur est un cadre carré de coté $a=10\, cm$ sur lequel on a enroulé $N=100$ spires de fil conducteur (voir $Figure\, 2$).

Lors de la réception de l'onde, il apparaît une force électromotrice induite e dans le cadre qui se comporte alors comme un générateur de tension. Le cadre étant supposé immobile, cette force électromotrice est égale à $e=N\times \oint_{\text{le long d'une spire}} \vec{E}.\vec{dl}$.

11. En partant d'une équation de Maxwell, montrer que cette force électromotrice peut s'écrire $e=-N\times\frac{d\Phi_B}{dt}$ où Φ_B désigne le flux de $\vec{B}$ à travers une spire.

12. Justifier qu'il apparaît en circuit ouvert une tension électrique aux bornes A et B du fil

enroulé sur le cadre.

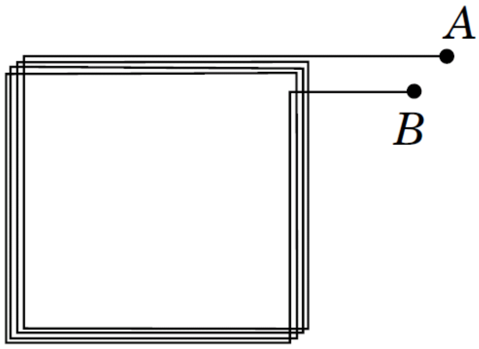


Figure 2 : cadre détecteur

On se propose d'exprimer la force électromotrice (f.e.m.) induite en partant de l'expression $e = -N \times \frac{d\Phi_B}{dt}$.

13.Vues les dimensions du cadre, que peut-on conclure sur la valeur du champ magnétique en tout point intérieur au cadre ? Justifier avec précision en comparant numériquement a et la longueur d'onde λ .

14.Quelle doit être l'orientation du cadre dans l'espace pour obtenir une force électromotrice d'amplitude la plus grande possible?

15.On adopte en fait l'orientation suivante(voir *Figure* 3). Déterminer alors la f.e.m. efficace e_{eff} en fonction de N , a , ω , c , E_0 .

16.Retrouver ce résultat par calcul direct à partir de la formule $e = N \times \oint_{\text{le long d'une spire}} \vec{E} . \vec{dl}$

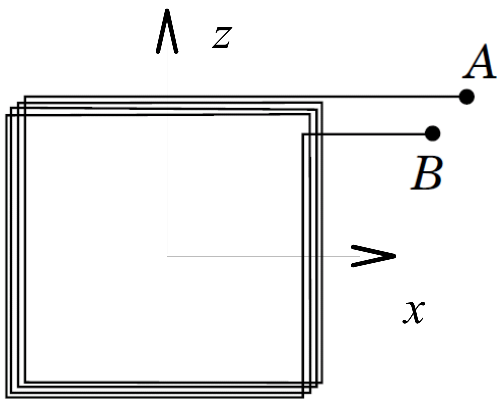


Figure 3 : orientation

17.Application numérique : Calculer la valeur efficace U de la tension obtenue entre les bornes A et B du détecteur.

Étude et utilisation du diagramme E - pH du chrome

Le diagramme potentiel-pH (ou E - pH) simplifié du chrome, fourni plus loin, est tracé à $298K$ et limité aux espèces ci-dessous:

Espèces dissoutes :

- Cr^{2+}_{aq} de couleur bleue,
- Cr^{3+}_{aq} de couleur verte,
- $Cr_2O_7^{2-}$ ion dichromate de couleur orangée,
- CrO_4^{2-} ion chromate de couleur jaune,
- $Cr(OH)_4^-$ ion chromite.

Espèces solides:

- Cr ,
- $Cr(OH)_3$ hydroxyde de chrome (III) , de couleur verte.

Les domaines de ces différentes espèces sont numérotés de 1 à 7 sur le tracé fourni. Ce diagramme est tracé pour une concentration en élément chrome (chrome atomique) en solution égale à $c_0=1{,}0.10^{-2}mol.L^{-1}$. Les droites (a) et (b) figurant sur ce tracé représentent les limites du domaine de stabilité thermodynamique de l'eau. Les coordonnées de quelques points particuliers du tracé (A, B, E, G) sont également fournies avec les autres données à la fin du texte.

I. Les différents domaines du diagramme

1. Équilibrer la demi-réaction: $Cr_2O_7^{2-}=CrO_4^{2-}$. S'agit-il de réaction acide-base, rédox, complexation, précipitation? Préciser le rôle de chacun des deux éléments du couple.
2. Calculer les valeurs du nombre d'oxydation de l'élément chrome pour les 7 espèces proposées .
3. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, identifier les différentes espèces numérotées de 1 à 7 sur le diagramme.

II. Constantes

4. Déterminer le potentiel standard $E°$ du couple $Cr^{3+}_{aq}/Cr^{2+}_{aq}$.
5. Déterminer le potentiel standard $E'°$ du couple $Cr^{2+}_{aq}/Cr(s)$.
6. Déterminer le produit de solubilité K_S de $Cr(OH)_3(s)$
7. Déterminer la constante globale de formation β_4 du complexe $Cr(OH)_4^-$.

8. Déterminer la constante d'acidité K_a du couple $\frac{1}{2}Cr_2O_7^{2-}/CrO_4^{2-}$ (c'est-à-dire ramenée à l'échange d'un H^+)

III. Frontières pour l'eau

9. Donner la demi-équation électronique correspondant au tracé de la droite (a) .

10. Donner la demi-équation électronique correspondant au tracé de la droite (b) .

IV. Expériences

A. Expérience I

Un volume $V_1=20{,}0\,mL$ d'une solution d'acide chlorhydrique (acide fort dans l'eau) de concentration $c_1=0{,}10\,mol.L^{-1}$ est placé dans un récipient maintenu à l'abri de l'air; on y introduit $m_1=10{,}4\,mg$ de chrome en poudre.

On observe un dégagement gazeux et le bleuissement de la solution. A la fin du dégagement gazeux, on obtient la solution S_1

11. Donner l'équation-bilan (1) de la réaction observée, en supposant qu'on n'a pas formation de Cr^{3+}

12. Donner l'expression de sa constante d'équilibre $K°_1$. Application numérique. Que peut-on conclure de la valeur numérique obtenue?

13. Faire le tableau d'avancement. Quel est le réactif limitant? Calculer le $pH=pH_1$ de la solution S_1 .

B. Expérience II:

La solution S_1 est laissée à l'air libre et soumise, par agitation magnétique, à l'action du dioxygène $O_2(g)$ de l'air; on observe un changement de teinte rapide du bleu au vert.

Après 15 minutes d'agitation, on obtient la solution S_2 .

14. Proposer une explication du changement de couleur observé et donner l'équation-bilan (2) de la réaction impliquant le réactif chromé de la solution S_1 .

15. Pourquoi peut-on prévoir thermodynamiquement que cette réaction est quantitative?

16. Calculer la concentration de l'espèce chimique chromée obtenue. Calculer le $pH=pH_2$ de la solution S_2 .

C. Expérience III:

On part à nouveau de solution S_1 bleue dans laquelle on ajoute progressivement de la soude diluée (base forte dans l'eau). On observe l'apparition d'un précipité de couleur verte.

17. Donner l'équation-bilan (3) de la réaction impliquant le réactif chromé de la solution S_1 .

18. Par quel nom désigne-t-on ce type de réaction.

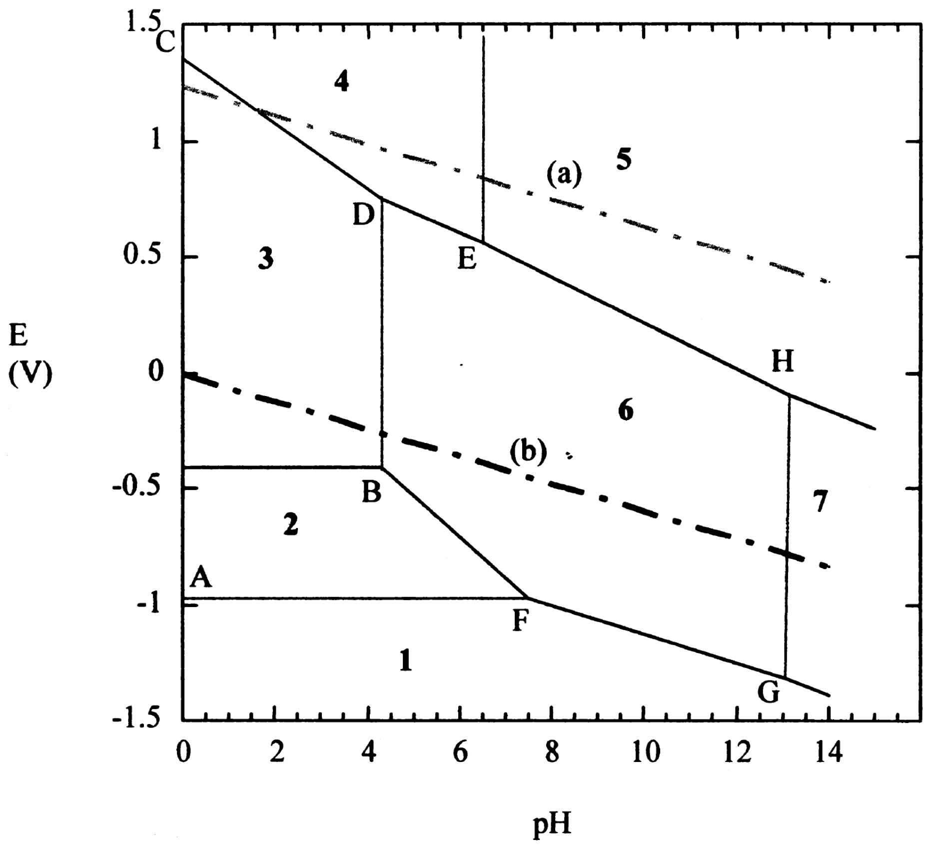
19.Déterminer l'équation littérale de la frontière BF en fonction de E_0 , K_S , K_e , c_0 et du pH . Application numérique.

20.Donner l'expression de sa constante d'équilibre $K°_3$. Application numérique.

21.Déterminer l'équation littérale de la frontière FG . Application numérique.

Données:

- A $25°C$, $\frac{RT}{\mathcal{F}}.\ln(10)=0{,}06\,V$
- $2H_2O=H_3O^+ + OH^-$ $\quad K_e=10^{-14}$
- Masse atomique molaire du chrome: $M(Cr)=52{,}0\,g.mol^{-1}$
- Potentiels redox standard: $E°(H^+/H_2(g))=0\,V$; $E°(O_2(g)/H_2O)=1{,}23\,V$



- Coordonnées de quelques points du diagramme ci-dessus:

$A(pH=0 ; E=-0{,}97\,V)$;

$B(pH=4{,}3 ; E=-0{,}41\,V)$;

$E(pH=6{,}5 ; E=0{,}56\,V)$;

$G(pH=13{,}1 ; E=-1{,}32\,V)$.

Réponses

Guide d'onde TM

1) métal parfait :

dont la conductivité σ est considérée comme infinie

On a $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (loi d'ohm)

La puissance volumique reçue par les charges est :

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}\,\vec{E}$$

$$\boxed{\frac{dP}{d\tau} = \sigma\,\vec{E}^2}$$

cette puissance doit rester finie or σ est infini

donc :

$\vec{E}$ est nul dans le métal parfait.

---

2) M.F. $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

donc

$$\vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$$

$\vec{B}$ est indépendant du temps dans un conducteur parfait : c'est un champ statique.

---

3) Dans le vide :

M.G.	$div\,\vec{E}$	$= 0$
M.flux	$div\,\vec{B}$	$= 0$
M.F.	$\overrightarrow{rot}\,\vec{E}$	$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
M.A.	$\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$	$= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

En prenant le rotationnel de l'équation de M.F.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\,\vec{B} \quad \text{puis avec M.A.}$$

$$= -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\underbrace{\text{div}\,\vec{E}}_{\text{nul}} - \Delta\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

D'où l'équation de propagation pour $\vec{E}$:

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Pour $\vec{B}$, on prend le rotationnel de M.A.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} \quad \text{puis avec M.F.}$$

$$= -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{B} - \Delta\vec{B} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

On pose : $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

> c est la vitesse de l'onde électromagnétique progressive dans le vide. C'est la vitesse de la lumière dans le vide

---

4)

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0}$$

Idem avec E_y

Idem avec E_z

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0}$$

Idem avec B_y

Idem avec B_z

---

5)

$$\underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U}_0}(x,y)\,\exp(-\gamma z)\,\exp(j\omega t)$$

> γ imaginaire : propagation sans pertes

Ex $\gamma = jk$

$$\underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U}_0}(x,y)\,\exp j(\omega t - kz)$$

> γ complexe : propagation avec pertes

Ex $\gamma = k'' + jk'$

$$\underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U_0}}(x,y)\ \exp(-k''z)\ \exp j(\omega t - k'z)$$

$$\boxed{\gamma \text{ réel} \quad : \text{ pas de propagation}}$$

Ex $\gamma = k$ (onde évanescente)

$$\underline{\vec{U}} = \underline{\vec{U_0}}(x,y)\ \exp(-kz)\ \exp(j\omega t)$$

---

6) $\boxed{k \text{ réel positif}}$

donc $\exp j(\omega t - kz)$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} > 0$$

---

7)
$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega \\ \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -jk \end{array}}$$

---

8) $\underline{B}_z$ est supposé nul

Equation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ -jk \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{vmatrix} = -j\omega \begin{vmatrix} \underline{B}_x \\ \underline{B}_y \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{lr} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + jk\,\underline{E}_y = -j\omega\,\underline{B}_x & (1) \\ -\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} - jk\,\underline{E}_x = -j\omega\,\underline{B}_y & (2) \end{array}}$$

$$\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

Equation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{B}} = \frac{1}{c^2} j\omega \underline{\vec{E}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ -jk \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \underline{B}_x \\ \underline{B}_y \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{j\omega}{c^2} \begin{vmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcll} jk\,\underline{B}_y & = & \frac{j\omega}{c^2}\,\underline{E}_x & (4) \\ -jk\,\underline{B}_x & = & \frac{j\omega}{c^2}\,\underline{E}_y & (5) \end{array}}$$

$$\frac{\partial \underline{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{B}_x}{\partial y} = \frac{j\omega}{c^2}\,\underline{E}_z \qquad (6)$$

Les 4 équations demandées sont (1) (2) (4) (5)

---

9) Avec (2) et (4), on obtient :

$$-\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} - jk\,\underline{E}_x = -j\omega \underline{B}_y$$

$$\hookrightarrow \underline{B}_y = \frac{\omega}{kc^2}\,\underline{E}_x$$

$$\boxed{\underline{E}_x = \frac{-jk\,\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}}$$

Avec (1) et (5), on obtient :

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + jk\,\underline{E}_y = -j\omega\,\underline{B}_x$$

$$\hookrightarrow \underline{B}_x = -\frac{\omega}{kc^2}\,\underline{E}_y$$

$$\boxed{\underline{E}_y = \frac{-jk\,\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}}$$

et cf (4) et (5)

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{B}_x = \dfrac{j\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \\[2ex] \underline{B}_y = \dfrac{-j\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \end{array}}$$

---

10) On a

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + (-jk)^2 \underline{E}_z - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2 \underline{E}_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} - k^2 \underline{E}_z + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{E}_z = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}_{K^2} \underline{E}_z = 0}$$

---

11) L'équation (3) non utilisée donne :

$$\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-jk\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-jk\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\right) = 0$$

$$0 = 0$$

L'équation (6) non utilisée donne :

$$\frac{\partial \underline{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{B}_x}{\partial y} = \frac{j\omega}{c^2}\underline{E}_z$$

$$\frac{-j\frac{\omega}{c^2}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} - \frac{\frac{j\omega}{c^2}}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} = \frac{j\omega}{c^2}\underline{E}(z)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\underline{E}(z) = 0$$

on retrouve l'équation de propagation vue en 10).

---

12)

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{E} \text{ tangentiel est continu} \\ \vec{B} \text{ normal est continu}\end{array}}$$

à la traversée d'une surface.

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans le métal parfait

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Dans le vide, au voisinage du métal parfait} \\ \vec{E} \text{ tangentiel est nul} \\ \vec{B} \text{ normal est nul}\end{array}}$$

---

13) $\underline{E}_{0z}(x,y)$ a une direction parallèle aux quatre faces du guide. Il va donc s'annuler au niveau des conducteurs parfaits.

$$\boxed{\begin{array}{ll} x=0 & \underline{E}_{0z}(0,y)=0 \\ x=a & \underline{E}_{0z}(a,y)=0 \\ y=0 & \underline{E}_{0z}(x,0)=0 \\ y=b & \underline{E}_{0z}(x,b)=0 \end{array}}$$

---

14)
$$\underline{E}_z = \underline{E}_{0z}(x,y)\exp j(\omega t - kz)$$

On avait :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial y^2} + \underbrace{K^2}_{\frac{\omega^2}{c^2}-k^2} \underline{E}_z = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \underline{E}_{0z}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_{0z}(x,y)}{\partial y^2} + K^2 \underline{E}_{0z}(x,y) = 0}$$

---

15)
$$\underline{E}_{0z} = (A' \sin k_1 x + B' \cos k_1 x) \times (C' \sin k_2 y + D' \cos k_2 y)$$

On reporte dans 14) avec donc :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_{0z}}{\partial x^2} = -k_1^2\, \underline{E}_{0z}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_{0z}}{\partial y^2} = -k_2^2\, \underline{E}_{0z}$$

donc

$$-k_1^2 - k_2^2 + \underbrace{K^2}_{\frac{\omega^2}{c^2}-k^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + k_1^2 + k_2^2}$$

---

16) • $\underline{E}_{0z}(0,y)=0$

soit : $B'\,(C' \sin k_2 y + D' \cos k_2 y) = 0$

$$\boxed{B' = 0}$$

- $\underline{E}_{0z}(x,0) = 0$

soit : $(A' \sin k_1 x + B' \cos k_1 x)\, D' = 0$

$$\boxed{D' = 0}$$

finalement

$\underline{E}_{0z} = A' \sin k_1 x \quad C' \sin k_2 y$

et en posant $A'C' = E_0$

$$\boxed{\underline{E}_{0z} = E_0 \sin k_1 x \sin k_2 y}$$

---

17) • $\underline{E}_{0z}(a, y) = 0$

$E_0 \sin k_1 a \sin k_2 y = 0$

donc :

$\sin k_1 a = 0$

$k_1 a = n\pi \qquad (n : \text{entier})$

$$\boxed{k_1 = \frac{n\pi}{a}}$$

- $\underline{E}_{0z}(x, b) = 0$

$E_0 \sin k_1 x \sin k_2 b = 0$

donc :

$\sin k_2 b = 0$

$k_2 b = m\pi \qquad (m : \text{entier})$

$$\boxed{k_2 = \frac{m\pi}{b}}$$

---

18) On avait en 15)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_1^2 - k_2^2$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

k est positif (propagation selon les z croissants)

$$\boxed{k = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}}$$

---

19) TM = transversal magnétique
La propagation se fait selon $\vec{u_z}$
$\vec{B}$ est perpendiculaire à la direction de propagation
(B_z est nul)

TM_{nm} On obtient une onde stationnaire selon x
et une onde stationnaire selon y
→ en introduisant λ_x tel que $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_x}$

$$\frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{n\pi}{a}$$

$$a = n\,\frac{\lambda_x}{2}$$

n est le nombre de "fuseaux" selon x

→ $$b = m\,\frac{\lambda_y}{2}$$

m est le nombre de "fuseaux" selon y

les valeurs minimales de m et n sont 1 et 1
(si soit m, soit n est nul $\underline{E_z} = 0$

---

20) Le mode TM_{nm} existe si $k^2 > 0$

$$\omega > \pi c \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^{1/2}$$

Donc, on a pour ce mode une pulsation de coupure

$$\boxed{\omega_{c\,nm} = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}}$$

La pulsation de coupure la plus faible est pour le mode fondamental $n=1$ $m=1$. C'est la pulsation de coupure pour une onde se propageant en mode TM

$$\boxed{\omega_c = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

$$\boxed{f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

---

21) finalement pour le mode TM_{nm}

$$\boxed{\underline{E_z} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp j(\omega t - kz)}$$

$$\boxed{\underline{E_x} = \frac{-jk}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} E_0 \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp j(\omega t - kz)}$$

$$\boxed{\underline{E}_y = -\frac{j\,k}{\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)} E_0 \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp j(\omega t - kz)}$$

$$\boxed{\underline{B}_z = 0}$$

$$\boxed{\underline{B}_x = \frac{j\,\omega/c^2}{\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)} E_0 \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp j(\omega t - kz)}$$

$$\boxed{\underline{B}_y = \frac{-j\,\omega/c^2}{\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)} E_0 \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \exp j(\omega t - kz)}$$

---

22) $\underline{E}_z$ tangentiel en $x=0$ et en $x=a$ doit s'annuler.
(déjà vu : cf $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$)

$\underline{E}_z$ tangentiel en $y=0$ et en $y=b$ doit s'annuler.
(déjà vu : cf $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$)

$\underline{E}_x$ tangentiel en $y=0$ et en $y=b$ s'annule grâce au $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

$\underline{E}_y$ tangentiel en $x=0$ et en $x=a$ s'annule grâce au $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

$\underline{B}_x$ normal en $x=0$ et en $x=a$ s'annule grâce au $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

$\underline{B}_y$ normal en $y=0$ et en $y=b$ s'annule grâce au $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

---

23) onde progressive en $\exp j(\omega t - kz)$

donc $\overrightarrow{v_\varphi} = \frac{\omega}{k} \overrightarrow{u_z}$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)}}$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2}\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)}}}$$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_{c\,mm}^2}{\omega^2}}}$$

<u>Commentaires :</u>

1) $v_\varphi > c$

2) v_φ dépend de ω.
Le dispositif est donc dispersif même si on ne considère qu'un seul mode.

---

24) A.N. $f_c = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{1/2}$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3.10^8\ m s^{-1}$

$$= \frac{3.10^8}{2}\left(\frac{1}{(3.10^{-2})^2} + \frac{1}{(2.10^{-2})^2}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{f_c = 9{,}01\ \text{GHz}}$$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\, c$$

$$\boxed{v_\varphi = 3{,}46\ 10^8\ m s^{-1}}$$

Emission et réception d'un signal électromagnétique

1) → condition évidente puisque l'on parle de dipôle. Le domaine dans lequel bougent les charges est d'extension "petite". Si a désigne l'extension du domaine : $\underline{a \ll r}$
(approximation dipolaire)

→ on a supposé aussi que, pour une charge en P, le déphasage retard dû à la propagation de P à M était $\frac{2\pi r_{PM}}{\lambda} \approx \frac{2\pi r_{OM}}{\lambda}$.
cela suppose : $\underline{a \ll \lambda}$
(approximation non relativiste car elle suppose $v_{charge} \ll c$)

→ il s'agit du champ lointain (on étudie dans la "zone de rayonnement")
soit $\underline{\lambda \ll r}$

on peut résumer à deux choses

$$\boxed{a \ll \lambda \quad \text{et :} \quad \lambda \ll r}$$

---

2)

$$\overrightarrow{P}(t) = \overrightarrow{P_0} \exp(j\omega t)$$

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{d^2}{dt^2}\left[\overrightarrow{P}(t-\tfrac{r}{c})\right] \wedge \overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \frac{d^2}{dt^2}\left[P_0 \exp j\omega(t-\tfrac{r}{c}) \ \overrightarrow{e_z}\right] \wedge \overrightarrow{e_r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r c} (j\omega)^2 \ P_0 \ \exp j\omega(t-\tfrac{r}{c}) \ \underbrace{\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r}}_{\overrightarrow{e_\varphi} \sin\theta}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{-\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} P_0 \sin\theta \ \exp j(\omega t - kr) \overrightarrow{e_\varphi}}$$

---

3) Dans la zone de rayonnement (fréquence ω)

$$r \gg \lambda$$

$$\boxed{r \gg \frac{c}{\omega} \qquad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

A.N. $\gg \frac{3.10^8}{10^5}$

$$\boxed{r \gg 3\ \text{km} = \lambda}$$

L'expression obtenue n'est pas valable très près du phare (par exemple, en imaginant un rapport 10) il faut se trouver à une trentaine de km du phare.

---

4) → Puisque on a localement une structure d'onde plane :

avec $\vec{k} = k\,\vec{e_r} = \frac{\omega}{c}\,\vec{e_r}$

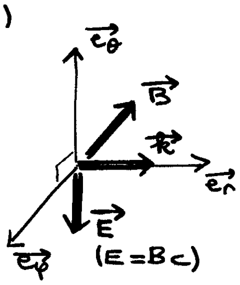
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (\text{M.A.})$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \frac{1}{c^2}\,j\omega\vec{E}$$

$$-j\vec{k}\wedge\vec{B} = \frac{1}{c^2}\,j\omega\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{c^2}{\omega}\,\vec{B}\wedge\vec{k}$$

$$= \frac{c^2}{\omega}\,\vec{B}\wedge\frac{\omega}{c}\,\vec{e_r}$$



$$\boxed{\vec{E} = c\left(\vec{B}\wedge\vec{e_r}\right)}$$

$$\longrightarrow \quad = c\left(-\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi r c}\,p_0 \sin\theta \exp j(\omega t - kr)\,\vec{e_\varphi}\right)\wedge\vec{e_r}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi r}\,p_0 \sin\theta \exp j(\omega t - kr)\,\vec{e_\theta}}$$

---

5) Pour déterminer $\vec{\Pi}$ on travaille en réels :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi r c}\,p_0 \sin\theta \cos(\omega t - kr)\,\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi r}\,p_0 \sin\theta \cos(\omega t - kr)\,\vec{e_\theta}$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}}$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\mu_0\,\omega^4}{16\pi^2 r^2 c}\,p_0^2 \sin^2\theta \cos^2(\omega t - kr)\,\vec{e_r}}$$

$\vec{\Pi}$ représente le vecteur densité volumique de courant d'énergie : c'est le vecteur flux surfacique de puissance électromagnétique.

Valeur moyenne dans le temps :

$$<\vec{\pi}> = \frac{\mu_0 \omega^4}{16\pi^2 r^2 c} P_0^2 \sin^2\theta \underbrace{< \cos^2(\omega t - kr) >}_{\frac{1}{2}} \vec{e_r}$$

$$\boxed{<\vec{\pi}> = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} P_0^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2} \vec{e_r}}$$

---

5) $$<dP> = <\vec{\pi}>\ \vec{dS}$$

$$\vec{dS} = r\, d\theta\ r \sin\theta\ d\varphi\ \vec{e_r}$$

$$= <\pi>\ dS$$

$$\boxed{<dP> = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} P_0^2 \sin^3\theta\ d\theta\ d\varphi}$$

Cette puissance élémentaire est indépendante de r.
La décroissance des champs en $\frac{1}{r}$ entraîne la décroissance en $\frac{1}{r^2}$ de $<\pi>$ et donc (puisque la surface est en r^2) la conservation de l'énergie totale de l'onde.

On intègre sur θ entre 0 et π
et sur φ entre 0 et 2π

$$<P> = \frac{\mu_0 \omega^4 P_0^2}{32\pi^2 c} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta}_{} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$- \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (1-\cos^2\theta)\, d\cos\theta$$

$$- \left[\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \frac{1}{3}\left[\cos^3\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$2 \quad + \frac{1}{3} \times -2$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\boxed{<P> = \frac{\mu_0\ \omega^4\ P_0^2}{12\ \pi\ c}}$$

---

7)

M.F. $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

M.A. $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

donc

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$$

$$\overrightarrow{grad}\,div\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

M.G. $div\,\vec{E} = 0$

L'équation de propagation dans le vide est

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

en projection selon $\vec{e_z}$, avec $\vec{k} = k\,\overrightarrow{e_x}$

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$(-jk)^2 E - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2 E = 0$$

d'où équation de dispersion :

$$\omega^2 = k^2\,c^2$$

$$\boxed{\omega = k\,c}$$

---

8)

M.F. $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\,\underline{\vec{B}}$$

$$-j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\,\underline{\vec{B}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$$

$$= \frac{k}{\omega}\overrightarrow{e_x}\wedge E_0\exp j(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_z}$$

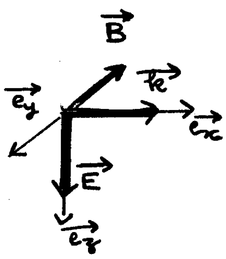
$$\boxed{\underline{\vec{B}} = -\frac{E_0}{c}\exp j(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_y}}$$

---

9)

$$\langle\vec{\pi}\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}_e\left(\frac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$$

$$\boxed{\langle\vec{\pi}\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\,\overrightarrow{e_x}}$$



---

10) Données :

→ 1) $\langle P \rangle = \dfrac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12 \pi c} = 20 \; 10^3 \text{ W}$

→ 2) $\langle \vec{\Pi} \rangle_{max}$ dans la direction donnée par $\vec{e_x}$ correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($\sin\theta = 1$)

C'est la valeur maximale de Π

$$= \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32 \pi^2 c r^2} \vec{e_x}$$

avec $r = 30$ milles marins

$= 30 \times 1852$ m

($r \gg \lambda$ on est effectivement dans la zone de rayonnement)

→ 3) $\langle \vec{\Pi} \rangle$ cf onde quasiplane s'écrit aussi

$$= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e_x}$$

On cherche $|E_0|$

Avec 1) et 2)

$$\frac{\langle P \rangle}{\langle \Pi \rangle_{max}} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12 \pi c} \; \frac{32 \pi^2 c r^2}{\mu_0 \omega^4 p_0^2}$$

$$= \frac{8}{3} \pi r^2$$

Avec 3)

$$\frac{\langle P \rangle}{\frac{1}{2} E_0^2/\mu_0 c} = \frac{8}{3} \pi r^2$$

$$E_0^2 = 3 \mu_0 c \frac{\langle P \rangle}{4 \pi r^2}$$

$$\boxed{|E_0| = \sqrt{\frac{3 \mu_0 c \; \langle P \rangle}{4 \pi r^2}}}$$

A.N. $$= \sqrt{\frac{3 \,.\, 4\pi \, 10^{-7} \,.\, 3 \, 10^8 \,.\, 20 \, 10^3}{4\pi \; (30 \times 1852)^2}}$$

$$\boxed{|E_0| = 24 \; 10^{-3} \text{ V m}^{-1}}$$

11) Maxwell - Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\iint_{\substack{\text{surface}\\ \text{d'1 spire}}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\,\vec{dS} = -\iint_{\substack{\text{surface}\\ \text{d'1 spire}}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\vec{dS}$$

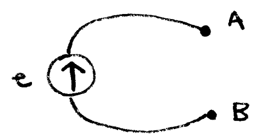
$$\oint_{\substack{\text{contour d'1}\\ \text{spire}}} \vec{E}\,\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_{\substack{\text{surface d'1}\\ \text{spire}}} \vec{B}\,\vec{dS}$$

(en utilisant le théorème de Stokes)

$$\boxed{\oint \vec{E}\,\vec{dl} = -\frac{d\phi_B}{dt}}$$

---

12)



Puisqu'il apparait une f.e.m. e, on aura

$$\boxed{u = V_A - V_B = e}$$

---

13)

$a = 10$ cm

$\lambda = 3$ km

donc $\boxed{a \ll \lambda}$

Le champ B est uniforme à l'échelle du cadre

---

14) Le flux vaut donc (en désignant par $\vec{S}$ le vecteur surface pour une spire)

$$\phi_{1\,\text{spire}} = \iint_{1\,\text{spire}} \vec{B}\,\vec{dS}$$

$$= \vec{B}\,\vec{S}$$

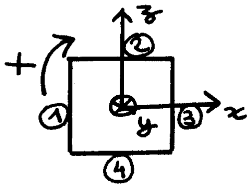
Ce flux devra être le plus grand possible : $\vec{B}$ colinéaire à $\vec{S}$

donc $\vec{S}$ doit être selon $\vec{e_y}$

Le cadre doit se trouver dans le plan xz

---

15)



$$\underset{\substack{B\\1\,spire}}{\phi} = -\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\ a^2$$

$$-\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{E_0\omega a^2}{c}\sin(\omega t - kx)$$

$$\boxed{e = -\frac{N E_0 \omega a^2}{c}\sin(\omega t - kx)}$$

$$\boxed{e_{eff} = \frac{N E_0 \omega a^2}{c\sqrt{2}}}$$

---

16) Si on tient compte d'un $\vec{E}$ uniforme $\vec{E} = E\,\vec{e_z}$ la circulation sera nulle. On se doit ici d'être plus précis.
x désigne ici l'abscisse du centre du cadre.

$$\underset{1\,spire}{\oint} \vec{E}\,\vec{dl} = \int_{\text{côté }1} + \underbrace{\int_{\text{côté }2}}_{\substack{\text{nul}\\ \vec{E}\perp\vec{dl}}} + \int_{\text{côté }3} + \underbrace{\int_{\text{côté }4}}_{\substack{\text{nul}\\ \vec{E}\perp\vec{dl}}}$$

$$= E(t, x-\tfrac{a}{2})\,a \qquad - E(t, x+\tfrac{a}{2})\,a$$

avec (développement)

$$E(t, x+\tfrac{a}{2}) = E(t,x) + \frac{a}{2}\frac{\partial E}{\partial x}(t,x)$$
$$E(t, x-\tfrac{a}{2}) = E(t,x) - \frac{a}{2}\frac{\partial E}{\partial x}(t,x)$$

$$\underset{1\,spire}{\oint} \vec{E}\,\vec{dl} = -a^2\frac{\partial E}{\partial x}$$
$$= -a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(E_0\cos(\omega t - kx)\right)$$
$$= -a^2 E_0\, k \sin(\omega t - kx)$$
$$= -\frac{E_0\omega a^2}{c}\sin(\omega t - kx)$$

On retrouve le même résultat.

---

17) A.N.

$$U_{eff} = e_{eff}$$
$$= \frac{N E_0\, 2\pi\nu\, a^2}{c\sqrt{2}}$$

$$= \frac{100 \times 24\ 10^{-3} \times 2\pi \times 10^{5} \times (0,1)^2}{3 .\ 10^{8}\ \sqrt{2}}$$

$$\boxed{U_{eff} = 36\ 10^{-6}\ V}$$

E - pH du chrome

1) $\boxed{Cr_2O_7^{2-} + H_2O = 2\,CrO_4^{2-} + 2H^+}$

(on garde la notation H^+ pour cette demi réaction)

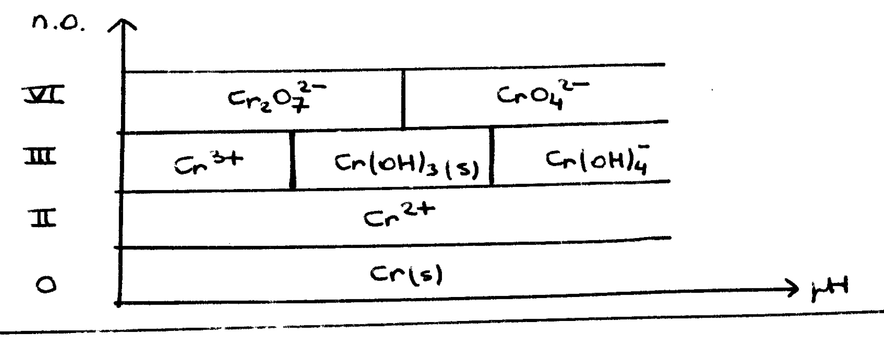
Réaction acide base
$Cr_2O_7^{2-}$ $(+H_2O)$ est l'acide
CrO_4^{2-} est la base

---

2)

	n.o. Cr
Cr^{2+}	2
Cr^{3+}	3
$Cr_2O_7^{2-}$	6
CrO_4^{2-}	6
$Cr(OH)_4^-$	3
$Cr(s)$	0
$Cr(OH)_3\,(s)$	3

diagramme primitif

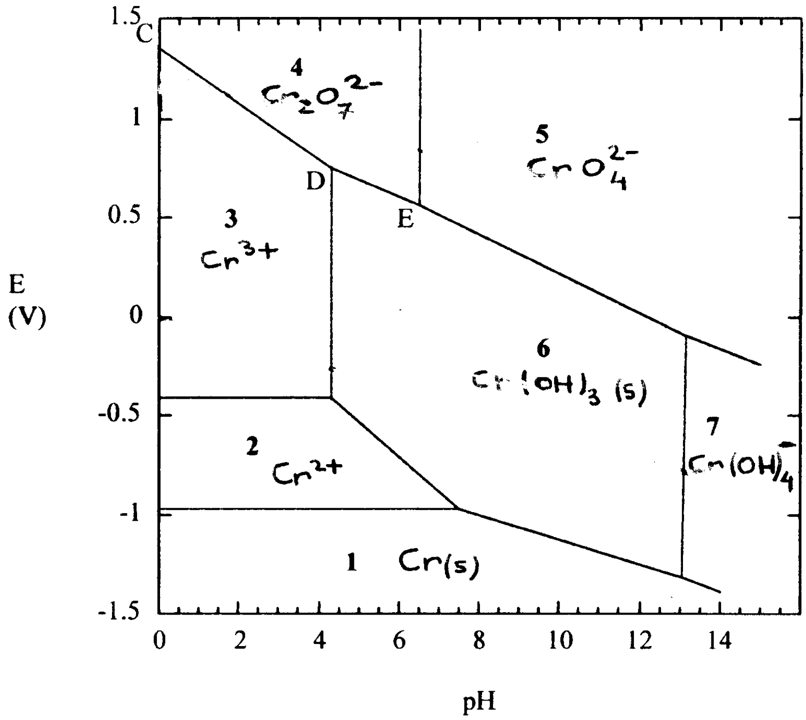


(pour n.o. = VI $Cr_2O_7^{2-}$ est l'acide et CrO_4^{2-} la base

pour n.o. = III Cr^{3+} (acide) avec $3OH^-$ donne $Cr(OH)_3\,(s)$ (ampholyte) qui avec OH^- donne $Cr(OH)_4^-$)

---

3) de façon évidente :



---

4) Frontière 3 / 2

Cr^{3+} / Cr^{2+}

$$Cr^{3+} + e^- = Cr^{2+}$$

$$E = E^0_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} + \frac{0{,}05}{1} \log \frac{[Cr^{3+}]}{[Cr^{2+}]}$$

à la frontière $[Cr^{3+}] = \frac{c_0}{2}$

$[Cr^{2+}] = \frac{c_0}{2}$

$$\boxed{E_{\text{frontière}} = E^0_{Cr^{3+}/Cr^{2+}}}$$

A.N.

$$\boxed{E^0_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} = -0{,}41 \text{ V}}$$

---

5) Frontière 2 / 1

$$Cr^{2+} + 2e^- = Cr(s)$$

$$E = E^\circ_{Cr^{2+}/Cr(s)} + \frac{0{,}06}{2} \log [Cr^{2+}]$$

à la frontière $[Cr^{2+}] = c_0$

$$E_{\text{frontière}} = E^\circ_{Cr^{2+}/Cr(s)} - 0{,}03 \; pc_0$$

$$\boxed{E^\circ_{Cr^{2+}/Cr(s)} = E_{\text{frontière}} + 0{,}03 \; pc_0}$$

A.N.

$$= -0{,}97 + 0{,}03 \times 2$$

$$\boxed{E^\circ_{Cr^{2+}/Cr(s)} = -0{,}91 \text{ V}}$$

---

6) Frontière 3 / 6

Cr^{3+} / $Cr(OH)_3$ (s)

A la frontière, début de précipitation de l'hydroxyde

$$Cr^{3+} + 3 \; HO^- = Cr(OH)_3 \; (s)$$

avec la constante (de la réaction inverse)

$$K_s = [Cr^{3+}] \, [HO^-]^3$$
$$= [Cr^{3+}] \; Ke^3 / h^3$$

à la frontière, puisqu'il y a début de précipité, l'équilibre existe

$$[Cr^{3+}] = c_0$$

$$\boxed{pK_s = pc_0 + 3 \, pK_e - 3 \, pH_{\text{frontière}}}$$

A.N.

$$= 2 + 3 \times 14 - 3 \times 4{,}3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} pK_s = 31{,}1 \\ K_s = 10^{-31{,}1} = 8 \; 10^{-32} \end{array}}$$

---

7) Frontière 6 / 7

$Cr(OH)_3 \, (s)$ / $Cr(OH)_4^-$

A la frontière, fin de la redissolution de l'hydroxyde.

(3) $Cr(OH)_3(s) + OH^- = Cr(OH)_4^-$ K ?

→ On exprime la constante de la réaction, en fonction des autres constantes (connues ou recherchées)

(1) $Cr(OH)_3 = Cr^{3+} + 3\,OH^-$ (K_S) $\Delta_rG_1^\circ = -RT\ln K_S$

(2) $Cr^{3+} + 4\,OH^- = Cr(OH)_4^-$ (β_4) $\Delta_rG_2^\circ = -RT\ln \beta_4$

avec (3) = (1) + (2)

$$\Delta_rG_3^\circ = \Delta_rG_1^\circ + \Delta_rG_2^\circ$$

$$-RT\ln K = -RT\ln K_S - RT\ln\beta_4$$

$$\boxed{K = K_S\,\beta_4}$$

→ avec

$$K = \frac{[Cr(OH)_4^-]}{[OH^-]} = \frac{[Cr(OH)_4^-]\,h}{K_e}$$

A la frontière, fin de redissolution :

$$[Cr(OH)_4^-] = c_o$$

$$\underbrace{pK}_{pK_S - \log\beta_4} = pc_o + pH_{\text{frontière}} - pK_e$$

$$pK_S - \log\beta_4 = pc_o + pH_{\text{frontière}} - pK_e$$

$$\boxed{\log\beta_4 = pK_S - pc_o - pH_{\text{frontière}} + pK_e}$$

A.N. $= 31{,}1 - 2 - 13{,}1 + 14$

$$\boxed{\begin{aligned}\log\beta_4 &= 30\\ \beta_4 &= 10^{30}\end{aligned}}$$

8) Frontière 4 / 5

$Cr_2O_7^{2-}$ / CrO_4^{2-}

1/2 Réaction ramenée à 1 H^+

$$\frac{1}{2}\ Cr_2O_7^{2-} + \frac{1}{2}\ H_2O = CrO_4^{2-} + H^+$$

ou

Réaction :

$$\frac{1}{2}\ Cr_2O_7^{2-} + \frac{3}{2}\ H_2O = CrO_4^{2-} + H_3O^+$$

avec la constante :

$$K_a = \frac{[CrO_4^{2-}]\ h}{[Cr_2O_7^{2-}]^{1/2}}$$

à la frontière

$$c_0 = \underbrace{[CrO_4^{2-}]}_{c_0/2} + \underbrace{2\ [Cr_2O_7^{2-}]}_{c_0/2}$$

$$K_a = \frac{c_0/2\ \ h_{frontière}}{(c_0/4)^{1/2}}$$

$$K_a = \sqrt{c_0}\ \ h_{frontière}$$

$$\boxed{pK_a = \frac{1}{2}\ pc_0 + pH_{frontière}}$$

A.N. $= \frac{1}{2} \times 2 + 6{,}5$

$$\boxed{\begin{array}{ll} pK_a = 7{,}5 & \\ K_a = 10^{-7,5} & = 3\ 10^{-8} \end{array}}$$

---

9) Couple $O_{2\,(g)} / H_2O$

$$\boxed{O_2(g) + 4\,H^+ + 4e^- = 2\,H_2O}$$

---

10) couple $H_2O / H_2(g)$ c'est à dire $H^+/H_2(g)$

$$\boxed{2\,H^+ + 2e^- = H_2(g)}$$

---

11) Il n'y a pas de domaine commun entre Cr et H_2O.
On pourrait s'attendre à obtenir Cr^{3+} (domaine commun avec H_2O). L'énoncé indique que l'on obtient Cr^{2+}.

(1) $H^+/H_2(g)$ $\quad 2H^+ + 2e^- = H_2(g)$
(2) $Cr^{2+}/Cr(s)$ $\quad Cr^{2+} + 2e^- = Cr(s)$

(1)-(2) = (3) $\quad 2H^+ + Cr(s) = Cr^{2+} + H_2(g)$

réaction : $\boxed{2H_3O^+ + Cr(s) = Cr^{2+} + H_2(g) + 2H_2O}$

---

12) (1) − (2) = (3)

$$\Delta_rG^\circ_1 - \Delta_rG^\circ_2 = \Delta_rG^\circ_3 \quad \text{noté } K^\circ_1$$

$$-2\mathcal{F}E^\circ_{H^+/H_2(g)} + 2\mathcal{F}E^\circ_{Cr^{2+}/Cr(s)} = -RT\ln K^\circ$$

On retrouve la formule connue

$$\boxed{\log K^\circ_1 = \frac{2}{0{,}06}\left(E^\circ_{H^+/H_2(g)} - E^\circ_{Cr^{2+}/Cr(s)}\right)}$$

A.N.
$$= \frac{2}{0{,}06}\left(0 + 0{,}91\right)$$
$$= 30{,}3$$

$$\boxed{K^\circ_1 = 10^{30{,}3} = 2\ 10^{30}}$$

Cette constante est "très grande".
La réaction peut être supposée quantitative.

---

13)

	$2\ H_3O^+$	$+\ Cr(s)$	$=\ Cr^{2+}$	$+\ H_2(g)$	$+\ 2H_2O$
moles initial	$c_1V_1 = 2.10^{-3}$ mol	$\frac{m_1}{M} = 0{,}2\ 10^{-3}$			
moles avancement ξ	$c_1V_1 - 2\xi$	$\frac{m_1}{M} - \xi$	ξ	ξ	

Le réactif limitant est Cr(s)

$$\boxed{\xi_{final} = \frac{m_1}{M} = 0{,}2\ 10^{-3}\ \text{mole}}$$

La concentration finale en H_3O^+ est

$$[H_3O^+] = \frac{c_1V_1 - 2\,\xi_{final}}{V_1}$$

$$= \frac{2\,10^{-3} - 2 \times 0{,}2\,10^{-3}}{20\,10^{-3}}$$

$$= 0{,}08 \text{ mol L}^{-1}$$

Le pH final

$$pH_1 = -\log[H_3O^+]$$

$$\boxed{pH_1 = 1{,}10}$$

---

14) Cr^{2+} s'oxyde en Cr^{3+} en présence de $O_2(g)$ de l'air.
(domaines Cr^{2+} et O_2 disjoints)

(1) $O_2(g) / H_2O$ $\quad O_2(g) + 4\,H^+ + 4e^- = 2\,H_2O$

(2) Cr^{3+} / Cr^{2+} $\quad Cr^{3+} + e^- = Cr^{2+}$

(1) − 4 × (2) = (3) $\quad O_2(g) + 4\,Cr^{2+} + 4\,H^+ = 2H_2O + 4\,Cr^{3+}$

réaction : $\boxed{O_2(g) + 4\,Cr^{2+} + 4\,H_3O^+ = 6\,H_2O + 4\,Cr^{3+}}$

---

15) Les frontières du domaine de Cr^{2+} et de celui de $O_2(g)$ diffèrent de 1,5 V au moins.
Cette différence importante peut laisser prévoir une réaction quantitative.

---

16)

	$O_2(g)$	$+\ 4\,Cr^{2+}$	$+\ 4\,H_3O^+$	$=\ 6\,H_2O$	$+\ 4\,Cr^{3+}$
moles initial	—	$0{,}2\ 10^{-3}$	$1{,}6\ 10^{-3}$		
moles avancement ξ		$0{,}2\ 10^{-3} - 4\xi$	$1{,}6\ 10^{-3} - 4\xi$		4ξ

Le réactif limitant est Cr^{2+}

$$\boxed{\xi_{final} = 0{,}05\ 10^{-3} \text{ mole}}$$

Concentration finale en Cr^{3+}

$$[Cr^{3+}] = \frac{4\,\xi_{final}}{V_1}$$

$$\boxed{[Cr^{3+}] = 0{,}01 \text{ mol L}^{-1}}$$

Concentration finale en H_3O^+

$$[H_3O^+] = \frac{1{,}6\ 10^{-3} - 4\,\xi_{final}}{V_1}$$

$$= 0{,}07 \text{ mol L}^{-1}$$

Le pH final :

$$pH_2 = -\log [H_3O^+]$$

$$\boxed{pH_2 = 1{,}15}$$

---

17) Le chrome au degré d'oxydation (II) n'est stable qu'aux pH inférieurs à 8 environ.
Le fait d'augmenter le pH entraine donc une réaction redox de <u>dismutation</u> : formation du précipité vert de $Cr(OH)_3$ (+III) et de $Cr_{(s)}$ (0).

(1) $Cr^{2+} / Cr(s)$ $\qquad Cr^{2+} + 2e^- = Cr(s)$

(2) $Cr(OH)_3(s) / Cr^{2+}$ $\qquad Cr(OH)_3(s) + 3\,H^+ + e^- = Cr^{2+} + 3\,H_2O$

(1) − (2)×2 $\qquad 3\,Cr^{2+} + 6\,H_2O = Cr(s) + 2\,Cr(OH)_{3(s)} + 6\,H^+$

Pour écrire la réaction, on complète avec des OH^- (milieu basique)

$$3\,Cr^{2+} + 6\,H_2O + 6\,OH^- = Cr(s) + 2\,Cr(OH)_{3\,(s)} + 6\,H_2O$$

$$\boxed{3\,Cr^{2+} + 6\,OH^- = Cr(s) + 2\,Cr(OH)_3\ (s)}$$

---

18) réaction de <u>dismutation</u> :

$3\,Cr^{2+}$ (II) $\rightarrow$ $2\,Cr(OH)_3$ (III)

$3\,Cr^{2+}$ (II) $\rightarrow$ $Cr(s)$ (0)

19) frontière $Cr(OH)_{3\,(s)} / Cr^{2+}$

$$Cr^{3+} + e^- = Cr^{2+}$$

$$E = E^0_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} + \frac{0{,}06}{1} \log \frac{[Cr^{3+}]}{[Cr^{2+}]}$$

convention de frontière :

→ $[Cr^{3+}]$ en présence de $Cr(OH)_3$ (s)

donc $[Cr^{3+}] = \dfrac{K_S}{[OH^-]^3} = \dfrac{K_S\, h^3}{K_e^3}$

→ $[Cr^{2+}] = c_0$

$$E_{\text{frontière}} = E^0_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} + \frac{0{,}06}{1}\left(-pK_S - 3pH + 3pK_e + pc_0\right)$$

$$\boxed{E_{\text{frontière}} = \underbrace{\left(E^0_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} + 0{,}18\, pK_e - 0{,}06\, pK_S\right)}_{E^0_{Cr(OH)_3/Cr^{2+}}} - 0{,}18\, pH + 0{,}06\, pc_0}$$

A.N. $E^0_{Cr(OH)_3/Cr^{2+}} = E^0_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} + 0{,}18\, pK_e - 0{,}06\, pK_S$

$= -0{,}41 + 0{,}18 \times 14 - 0{,}06 \times 31{,}1$

$= 1{,}06$ V

$E_{\text{frontière}} = E^0_{Cr(OH)_3/Cr^{2+}} + 0{,}06\, pc_0 - 0{,}18\, pH$

$= 1{,}06 + 0{,}06 \times 2 - 0{,}18\, pH$

$$\boxed{E_{\text{frontière}}/V = 1{,}18 - 0{,}18\, pH}$$

(remarque : on peut vérifier que le point B donné $B(pH = 4{,}3\ ;\ E = -0{,}41\ V)$ vérifie bien l'équation obtenue)

20) Cste d'équilibre K_3^o (cf 17)

$$
\begin{array}{llll}
(1) & Cr^{2+} + 2e^- & = Cr(s) & \Delta_r G_1^o = -2\mathcal{F} E^o_{Cr^{2+}/Cr(s)} \\
(2) & Cr(OH)_3(s) + 3H^+ + e^- & = Cr^{2+} + 3H_2O & \Delta_r G_2^o = -\mathcal{F} E^o_{Cr(OH)_{3(s)}/Cr^{2+}} \\
(3) & H_2O & = H^+ + OH^- & \Delta_r G_3^o = -RT \ln K_e \\
\hline
(4) & 3Cr^{2+} + 6OH^- & = Cr(s) + 2Cr(OH)_3(s) &
\end{array}
$$

$$\Delta_r G_4^o = -RT \ln \underbrace{K}_{\text{noté } K_3^o}$$

avec

$(4) = (1) - 2\times(2) - 6\times(3)$

$$-RT\ln K_3^o = -2\mathcal{F}E^o_{Cr^{2+}/Cr_{(s)}} + 2\mathcal{F}E^o_{Cr(OH)_{3(s)}/Cr^{2+}} + 6RT\ln K_e$$

$$\boxed{\log K_3^o = \frac{2}{0{,}06}\left(E^o_{Cr^{2+}/Cr_{(s)}} - E^o_{Cr(OH)_{3(s)}/Cr^{2+}}\right) + 6\,pK_e}$$

A.N.

$$= \frac{2}{0{,}06}\left(-0{,}91 - 1{,}06\right) + 6\times 14$$

$$= 18{,}3$$

$$\boxed{K_3^o = 10^{18{,}3} = 2{,}2\ 10^{18}}$$

réaction quantitative.

---

21) Frontière $Cr(OH)_3(s)$ / Cr

$$Cr^{3+} + 3e^- = Cr(s)$$

$$E = E^o_{Cr^{3+}/Cr(s)} + \frac{0{,}06}{3}\log[Cr^{3+}]$$

avec :

$\longrightarrow$ $3\,E^o_{Cr^{3+}/Cr(s)} = 1\,E^o_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} + 2\,E^o_{Cr^{2+}/Cr(s)}$

$E^o_{Cr^{3+}/Cr(s)} = -0{,}74\ V$

$\longrightarrow$ $[Cr^{3+}]_{\text{frontière}} = \dfrac{K_s\ h^3}{K_e^3}$

$$\boxed{E_{frontière} = E^{\circ}_{Cr^{3+}/Cr(s)} + \frac{0,06}{3}(-pK_s - 3pH + 3pKe)}$$

A.N. $= -0,74 + \frac{0,06}{3}(-31,1 - 3pH + 3 \times 14)$

$$\boxed{E_{frontière}/V = -0,53 - 0,06\ pH}$$

(**remarque** : on peut vérifier que le point G donné $G(pH = 13,1 \ ; \ E = -1,32V)$ vérifie bien l'équation obtenue)