Fonction caractéristique
Énoncé

On considère la file d'attente à une caisse de supermarché. Il y a un serveur et un nombre places infini. Les clients sont servis selon la discipline "premier arrivé, premier servi". On appelle "système", l'ensemble des clients en attente et du client en service. On considère $(A_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ où A_n représente le nombre de clients arrivés pendant le service du client n.

On définit la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ comme suit

$$X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \\ X_n - 1 + A_{n+1} & \text{si } X_n > 0 \end{cases}$$

On suppose que les variables aléatoires $(A_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes et de même loi, de loi commune celle d'une variable aléatoire A. On suppose que

- A est à valeurs entières
- $\mathbb{P}(A \geqslant n) > 0$ pour tout entier n,
- A a une espérance finie, on note $\rho = \mathbb{E}[A]$.

Partie I: Fonction caractéristique

Dans cette section X représente une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa fonction caractéristique ϕ_X par

$$\phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \end{cases}$$

1. Montrer que Φ_X est bien définie
2. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique.
3. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que X et Y ont même loi. on pourra montrer que
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(t) e^{-ikt} \, dt$$
pour tout entier k.
4. Si $\mathbb{E}[X] < +\infty$, montrer que ϕ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\phi_X'(0)$.
5. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $Z = Y - 1$ où Y est de loi géométrique de paramètre $p \in \,]0, 1[$.

Partie II: Remarques préliminaires

6. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que X_n représente le nombre de clients dans le système au moment du départ du client n.
7. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant M) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$?
   (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(A_n \leqslant M) = 1$
   (b) Déduire une contradiction
8. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $X_{n+1} - X_n \geqslant -1$.
9. Justifier que, pour tout $n \geqslant 0$, les variables aléatoires X_n et A_{n+1} sont indépendantes.

Partie III: Convergence

10. Etablir l'identité suivante pour X une variable aléatoire à valeurs entières:
$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{itX}\chi_{\{X>0\}}\right] = \phi_X(t) - \mathbb{P}(X=0)$$

11. Pour tout entier n, établir la relation suivante:
$$\phi_{X_{n+1}}(t) = \phi_A(t)\left[\mathrm{e}^{-it}\phi_{X_n}(t) + \left(1-\mathrm{e}^{-it}\right)\mathbb{P}(X_n=0)\right]$$

On suppose dorénavant que $0<\rho<1$. On admet qu'alors la suite $\left(\mathbb{P}(X_n=0)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite, notée α. On suppose que A n'est pas arithmétique, c'est-à-dire que $|\phi_A(t)|<1$ pour $t\notin\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

On pose
$$\begin{array}{rcl}\theta:[-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ 0 & \longmapsto & 1\\ t & \longmapsto & \alpha\dfrac{\phi_A(t)\left(1-\mathrm{e}^{-it}\right)}{1-\phi_A(t)\mathrm{e}^{-it}} \quad \textbf{pour} \ \ t\neq 0\end{array}$$

12. Etablir le développement limité à l'ordre 1, de ϕ_A au voisinage de 0.
13. Que doit valoir α (en fonction de ρ) pour que θ soit continue en 0?
14. On fixe $\varepsilon>0$. Pour tout $t\in[-\pi,\pi]\backslash\{0\}$, identifier $\beta_t\in[0,1[$ tel que pour tout entier n suffisamment grand, on ait l'identité suivante:
$$\left|\phi_{X_{n+1}}(t)-\theta(t)\right| \leq \beta_t\left|\phi_{X_n}(t)-\theta(t)\right| + \varepsilon$$
15. Montrer que la suite de fonctions $\left(\Phi_{X_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers θ.

Partie IV: Application

On admet que θ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire à valeurs entières Y: $\theta(t)=\mathbb{E}\left[e^{itY}\right]$ pour tout $t\in[-\pi,\pi]$. On suppose que
$$\phi_A(t) = \frac{1}{1+\rho-\rho e^{it}}$$

16. Identifier la loi de A.
17. Montrer que ϕ_A vérifie les hypothèses requises.
18. Calculer θ et identifier la loi de Y.