Lycée Ibn Timiya

Devoir Surveillé N°: 2

MATHÉMATIQUES

Durée: 4H

Attention:

- **Les différents parties de l'épreuve doivent se rédiger sur des feuilles de composition séparées.**
- **Il est strictement interdit de quitter la salle pendant le déroulement du DS.**
- **Il est strictement interdit d'emprunter des accessoires de votre collègue.**
- **Garder le silence complet dans la salle.**

Informations:

- ***Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ des questions abordées.***

- ***Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.***

Soient $A, B \in E = M_n(\mathbb{R})$.
Soit $f_{A,B}$ l'endomorphisme de E défini par:

$$f_{A,B} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & AM - MB \end{array} \right.$$

On rappelle que:

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ désigne le spectre de A dans $\mathbb{K}$
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f_{A,B})$ désigne le spectre de $f_{A,B}$ dans $\mathbb{K}$
- $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$
- Pour tout $i, j, k, \ell \in [\![1, n]\!]$, on a $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$ avec δ est le symbole de Kronecker

Partie I: Diagonalisation de $f_{A,B}$

1. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement, si ${}^tB$ l'est
2. Montrer que l'application $f_{A,B}$ est linéaire.
3. (a) Montrer que si X est un vecteur propre de A et Y un vecteur propre de ${}^tB$ alors $X{}^tY$ est un vecteur propre de $f_{A,B}$
   (b) En déduire l'inclusion $\{\lambda - \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\} \subset \mathrm{Sp}(f_{A,B})$
4. Soit $\alpha \in \mathrm{Sp}(f_{A,B})$ et M un vecteur propre de $f_{A,B}$ associé à la valeur propre α
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$
   (b) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A) M = MP(B + \alpha I_n)$
   (c) On suppose que le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit
   $$\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$
      i. Montrer que $M\chi_A(B + \alpha I_n) = 0$ et en déduire que la matrice $\chi_A(B + \alpha I_n)$ n'est pas inversible.
      ii. En déduire qu'il existe $a \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $B - (a - \alpha) I_n$ ne soit pas inversible.
5. Conclure que si le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors $\mathrm{Sp}(f_{A,B}) \subset \{\lambda - \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}$
6. **Applications:** On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
   (a) Montrer que $f_{A,B}$ est nilpotent si, et seulement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$ sont nilpotentes.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $f_{A,B}$ soit nul
7. Soient $(Y_1, \cdots, Y_p)$ une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Z_1, \cdots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} Y_i{}^tZ_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \cdots, Z_p$ sont tous nuls.
8. Montrer que si A et B sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$ et on désigne par $(X_1, \cdots, X_n)$ et $(Y_1, \cdots, Y_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et ${}^tB$
   (a) Montrer que la famille $\left(X_i{}^tY_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$
   (b) Montrer que $f_{A,B}$ est diagonalisable.
9. On suppose que $f_{A,B}$ est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$

(a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, justifier que $\overline{\lambda} - \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f_{A,B})$

(b) En déduire que χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{R}$

(c) Soit M (resp X) un vecteur propre de $f_{A,B}$ (resp B) associé à une valeur propre α (resp μ). Calculer $A(MX)$ en fonction de MX

(d) Montrer que pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$, l'application linéaire $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$, $M \longmapsto MX$ est surjective

(e) En déduire que A est diagonalisable

10. (a) Soit $T : E \longrightarrow E$, $M \longmapsto {}^tM$.
Montrer que T est un automorphisme d'espaces vectoriels de E

(b) Calculer $T \circ f_{A,B} \circ T^{-1}$ et déduire que $f_{-{}^tB,-{}^tA}$ et $f_{A,B}$ sont semblables.

(c) Conclure que $f_{A,B}$ est diagonalisable si, et seulement, si A et B le sont.

Partie II: Étude via les translations

Dans la suite on note les endomorphismes de E suivants:

$$g_A : M \longmapsto AM \quad \text{et} \quad d_B : M \longmapsto MB$$

11. (a) Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(g_A) = g_{P(A)}$ et $P(d_B) = d_{P(B)}$

(b) En déduire que g_A (resp d_B) est diagonalisable si, et seulement, si A (resp B) l'est

12. Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel F de dimension finie tels que u et v commutent.

(a) Justifier que les sous-espaces propres de u sont stables par v

(b) Montrer que l'endomorphisme induit v_λ par v sur chaque sous-espace propre F_λ de u est diagonalisable

(c) En déduire que u et v sont diagonalisables dans une même base

13. Retrouver ainsi le résultat de 8)

14. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer $f_{A,B}^p$ en fonction des $g_{A^k} d_{B^{p-k}}$ où $k \in [\![0,p]\!]$

(b) Retrouver que si A et B sont nilpotentes alors $f_{A,B}$ l'est

Partie III: Rang de la composée des translations

15. Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u, v \in \mathcal{L}(F)$.
On note $A_{u,v} = \{uav, \quad a \in \mathcal{L}(F)\}$

(a) Vérifier que $A_{u,v}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F)$

(b) Soit $b \in A_{u,v}$, montrer que $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(b) \quad$ et $\quad \mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(u)$

(c) Inversement soit $b \in \mathcal{L}(F)$ tel que $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(b) \quad$ et $\quad \mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(u)$

- Si $v = 0$, on prend $a = 0$
- Si $v \neq 0$, on pose $r = \mathrm{rg}(v)$ et soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base $\mathrm{Im}(v)$, que l'on complète en $(e_1, \cdots, e_n)$ de F. Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on pose v_i un antécédent de e_i par v et u_i un antécédent par u de $b(v_i) \in \mathrm{Im}(u)$. On définit $a \in \mathcal{L}(F)$ par les relations $a(e_i) = u_i$ si $i \in [\![1,r]\!]$ et $a(e_i) = 0$ si $i > r$.

Montrer que $b = uav$

(d) Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(v)$ dans F. Montrer que les espaces vectoriels $A_{u,v}$ et $\mathcal{L}(G, \mathrm{Im}(u))$ sont isomorphes. En déduire $\dim(A_{u,v}) = \mathrm{rg}(u) \times \mathrm{rg}(v)$

16. **Etude d'une application:**
Dans la suite, on considère $\varphi_{A,B}$ l'endomorphisme de E défini par $\varphi_{A,B} = g_A d_{{}^tB}$ ainsi

$$\varphi_{A,B} : M \longmapsto AM{}^tB$$

(a) Vérifier que $\varphi_{A,B} \circ \varphi_{C,D} = \varphi_{AC,BD}$

(b) En déduire $\mathrm{rg}(\varphi_{A,B}) = \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B)$

(c) A quelle condition $\varphi_{A,B}$ est-il inversible, donner son inverse

(d) A quelle condition $\varphi_{A,B}$ est-il nul?

Partie IV: Produit de Kronecker

On ordonne la base canonique de E par ligne:

$$\mathcal{B} = (E_{11}, \cdots, E_{1n}, E_{21}, \cdots, E_{2n}, \cdots, E_{n1}, \cdots, E_{nn})$$

17. Montrer que $\underset{\mathcal{B}}{\operatorname{Mat}}(\varphi_{A,B}) = A \otimes B$ où

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

18. Vérifier que, si on ordonne la base canonique de E par colonne:

$$\mathcal{B}' = (E_{11}, \cdots, E_{n1}, E_{12}, \cdots, E_{n2}, \cdots, E_{n1}, \cdots, E_{nn})$$

On obtient

$$\underset{\mathcal{B}'}{\operatorname{Mat}}(\varphi_{A,B}) = B \otimes A$$

19. Établir pour A, B, C et $D \in E$:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

20. Soit $A, B \in E$, calculer les déterminants des matrices $I_n \otimes B$, $A \otimes I_n$ et $A \otimes B$

21. Montrer que si A et B sont diagonalisables alors $A \otimes B$ l'est aussi.

22. Diagonaliser la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

23. Montrer que si A et B sont trigonalisables alors $A \otimes B$ est trigonalisable et si on pose $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ et $\chi_B = \prod_{i=1}^{n}(X - \mu_i)$, calculer $\chi_{A\otimes B}$ en fonction des λ_i et μ_j

24. Vérifier que $\underset{\mathcal{B}}{\operatorname{Mat}}(f_{A,B}) = A \otimes I_n - I_n \otimes {}^tB$

25. Déduire la trace de $f_{A,B}$