Planche n° 16. Calculs de primitives et d'intégrales

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1. (T) (utilisation d'un formulaire de primitives)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

1) $3x^3 - 7x\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^7} + \dfrac{2}{x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{4x^3} + \dfrac{1}{4x^4}$ **2)** $(x-1)e^{x^2-2x}$

3) $\dfrac{x}{(x^2-1)^3}$ **4)** $(x^2+3)\sqrt{x^3+9x-5}$

5) $\dfrac{2x+1}{\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)^2}$ **6)** $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

7) $\dfrac{1}{1+4x^2}$ **8)** $\dfrac{1}{4+x^2}$

9) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ **10)** $\dfrac{1}{x\ln x}$

11) $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ **12)** $\dfrac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}$

13) $\dfrac{\sin^2(x/2)}{(x-\sin x)^3}$ **14)** $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \ln x$

Exercice n° 2. (T) (intégration par parties pour trouver des primitives)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

1) $\ln x$ **2)** $x\ln x$ **3)** $\ln(x+1)$ **4)** $\operatorname{Arcsin} x$ **5)** $\operatorname{Arctan} x$
6) $\operatorname{Arccos} x$ **7)** xe^{-x} **8)** $\left(x^2-3x+1\right)e^x$ **9)** $(1-x)e^{-2x}$ **10)** $\ln(1+x^2)$
11) $e^{\operatorname{Arccos} x}$ **12)** $\cos x \ln(1+\cos x)$ **13)** $\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ **14)** $x^n \ln x$ $(n \in \mathbb{N})$
15) $e^{ax}\cos(\alpha x)$ $((a,\alpha) \in (\mathbb{R}^*)^2)$ **16)** $\sin(\ln x)$ et $\cos(\ln x)$ **17)** $x^2e^x\sin x$ **18)** $\sqrt{1-x^2}$

Exercice n° 3. (T) (primitives de fonctions du type $x \mapsto 1/(ax^2+bx+c)$)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

1) $\dfrac{1}{2x^2+5x+2}$ **2)** $\dfrac{1}{4x^2-4x+1}$ **3)** $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ **4)** $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ **5)** $\dfrac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}$, $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

Exercice n° 4. (T) (fractions rationnelles en sinus, cosinus et tangente)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

1) $\dfrac{1}{\sin x}$ **2)** $\dfrac{1}{\cos x}$ **3)** $\dfrac{1}{\tan x}$ **4)** $\dfrac{1}{2+\sin^2 x}$
5) $\dfrac{\cos(3x)}{\sin x + \sin(3x)}$ **6)** $\dfrac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

Exercice n° 5. (I)

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$. Calculer I et J.

Exercice n° 6. (T) (ch, sh et th ...)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

1) $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ **2)** $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ **3)** $\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$ **4)** $\operatorname{ch}^3 x$
5) $\operatorname{ch}^4 x$ **6)** $\dfrac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x}$ **7)** $\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$ **8)** $\dfrac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{ch} x}$
9) $\dfrac{1}{1-\operatorname{ch} x}$

Exercice n° 7. (T) (avec des racines)

Calculer les primitives des fonctions suivantes sans se soucier de l'intervalle :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ (transformation canonique).

2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ (quantité conjuguée puis poser $u=\sqrt{1+x}$ et $v=\sqrt{1-x}$).

3) $\dfrac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ (poser $u=x^6$ et $v=\sqrt{1+u}$).

Exercice n° 8. (I)

Calculer les intégrales suivantes (a, b réels donnés, p et q entiers naturels donnés)

1) $\displaystyle\int_{1/a}^{a}\frac{\ln x}{x^2+1}\,dx$ $(a>0)$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(px)\cos(qx)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(px)\sin(qx)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(px)\sin(qx)\,dx$ $((p,q)\in\mathbb{N}^2)$.

3) $\displaystyle\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$

4) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|)\,dx$

5) $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}x\,dx$

6) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}$

Exercice n° 9.

Calculer $f(x)=\displaystyle\int_0^1\operatorname{Max}(x,t)\,dt$. Représenter graphiquement la fonction f.

Exercice n° 10. (I) (Intégrales de Wallis)

Pour n entier naturel, on pose $W_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$.

1) Calculer W_0 et W_1.

2) Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2}.

3) En déduire W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n.

Exercice n° 11. (I)

Pour n entier naturel, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$.

1) Calculer I_0 et I_1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_n en fonction de n.

2) Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\ (n\in\mathbb{N}^*)\ \text{et}\ v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

