Variables aléatoires discrètes sans mémoire

Partie I: Étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall m \in \mathbb{N}, P(X \geqslant m) > 0$.

On suppose également que X vérifie : $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant n)$. On pose $P(X=0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. On pose $q = 1 - p$. Montrer que $P(X \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.
2. Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant m)P(X \geqslant n)$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = P(X \geqslant n)$.
   (a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $P(X \geqslant n)$ en fonction de n et q.
   (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1)$.
   (d) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X = n) = q^n p$.
4. (a) Reconnaître la loi de la variable $X + 1$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Partie II: Taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y \geqslant n) > 0$. On définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = P_{(Y \geqslant n)}(Y = n)$.

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{P(Y = n)}{P(Y \geqslant n)}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \dfrac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)}$.
   (c) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \lambda_n < 1$.
   (d) Montrer par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$.
6. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geqslant n)$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} P(Y \geqslant n) = 0$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k) = +\infty$
   (d) Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.

Partie III: Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

7. Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la partie 1.
8. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geqslant n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$.
   (a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geqslant n)$ en fonction de λ et n.
   (c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}, P(Z \geqslant n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.

Variables aléatoires discrètes sans mémoire

Partie I: Étude d'une variable discrète sans mémoire.

1. Comme les valeurs de X sont entières, $\overline{[X \geqslant 1]} = (X = 0)$
   Donc $\mathrm{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p = q > 0$ par hypothèse.
   Et comme $q = 1 - p$ et que $p > 0$ alors $q < 1$.
   Conclusion : $\mathrm{P}(X \geqslant 1) = q$ et $0 < q < 1$.
2. On revient à la définition de la probabilité conditionnelle :
   $$\mathrm{P}_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n + m) = \frac{\mathrm{P}(X \geqslant n + m)}{\mathrm{P}(X \geqslant m)} = \mathrm{P}(X \geqslant n)$$
   Conclusion : Donc $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X \geqslant n + m) = \mathrm{P}(X \geqslant m)\,\mathrm{P}(X \geqslant n)$
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = P(X \geqslant n)$.
   (a) On a avec le couple $(n, 1)$ la relation : $\mathrm{P}(X \geqslant n + 1) = \mathrm{P}(X \geqslant 1)\,\mathrm{P}(X \geqslant n)$
   Donc $u_{n+1} = q \cdot u_n$
   Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q géométrique.
   (b) On a alors $u_n = q^n u_0 = q^n \mathrm{P}(X \geqslant 0) = q^n$
   Conclusion : Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X \geqslant n) = q^n$
   (c) Comme X ne prend que des valeurs entièers, $(X \geqslant n) = (X = n) \cup (X \geqslant n + 1)$
   et comme les deux sont incompatibles $\mathrm{P}(X \geqslant n) = \mathrm{P}(X \geqslant n + 1) + \mathrm{P}(X = n)$
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X = n) = \mathrm{P}(X \geqslant n) - \mathrm{P}(X \geqslant n + 1)$.
   (d) Et on trouve donc $\mathrm{P}(X = n) = q^n - q^{n+1} = q^n(1 - q) = q^n p$
   Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathrm{P}(X = n) = q^n p$
4. (a) La loi de $X + 1$ est donnée par :
   $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P}(X + 1 = n) = \mathrm{P}(X = n - 1) = q^{n-1}p$
   Conclusion : $X + 1$ suit une loi géomaétrique de paramètre p
   (b) Comme $\mathbf{E}(X + 1) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(X + 1) = \dfrac{q}{p^2}$
   et que $X = X + 1 - 1$ alors
   Conclusion : $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{p} - 1$ et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}$

Partie II: Taux de panne d'une variable discrète.

5. (a) Par définition de la probablité conditionnelle on a : $\lambda_n = \dfrac{\mathrm{P}(Y = n \cap Y \geqslant n)}{\mathrm{P}(Y \geqslant n)}$
   et comme $[Y = n] \cap [Y \geqslant n] = (Y = n)$ on a donc
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{\mathrm{P}(Y = n)}{\mathrm{P}(Y \geqslant n)}$.
   (b) On a alors
   $$\begin{aligned} 1 - \lambda_n &= 1 - \frac{\mathrm{P}(Y = n)}{\mathrm{P}(Y \geqslant n)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(Y \geqslant n) - \mathrm{P}(Y = n)}{\mathrm{P}(Y \geqslant n)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(Y \geqslant n + 1)}{\mathrm{P}(Y \geqslant n)} \end{aligned}$$
   car $(Y \geqslant n) = (Y = n) \cup (Y \geqslant n + 1)$ puisque Y ne prend que des valeurs entières.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \dfrac{\mathrm{P}(Y \geqslant n + 1)}{\mathrm{P}(Y \geqslant n)}$

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES SANS MÉMOIRE

(c) Comme $\mathrm{P}(Y \geqslant n) > 0$ pour tout entier n alors $1-\lambda_n > 0$ et $\lambda_n < 1$
Mais on peut avoir $\lambda_n = 0$ (par exemple pour une loi géométrique, $\lambda_0 = 0$)
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \lambda_n < 1$.

(d) Par récurrence :
Pour $n=1$: $\prod_{k=0}^{1-1}(1-\lambda_k) = 1-\lambda_0 = \dfrac{\mathrm{P}(Y \geqslant 1)}{\mathrm{P}(Y \geqslant 0)} = \mathrm{P}(Y \geqslant 1)$ car $\mathrm{P}(Y \geqslant 0) = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P}(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$

alors $\prod_{k=0}^{n}(1-\lambda_k) = (1-\lambda_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k) = \dfrac{\mathrm{P}(Y \geqslant n+1)}{\mathrm{P}(Y \geqslant n)}\mathrm{P}(Y \geqslant n) = \mathrm{P}(Y \geqslant n+1)$
Donc, par récurrence,

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$

6. (a) La probabilité du contraire est : $1-\mathrm{P}(Y \geqslant n) = \mathrm{P}(Y < n)$
et comme Y ne prend que des valeurs entières : $1-\mathrm{P}(Y \geqslant n) = \mathrm{P}(Y \leqslant n-1)$

Et comme $(Y \leqslant n-1) = \bigcup_{k=0}^{n-1}(Y=k)$ (incompatibles) alors

Conclusion : $1-\mathrm{P}(Y \geqslant n) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(Y=k)$

(b) Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(Y=k) = 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(Y=k) = 1$

et $\mathrm{P}(Y \geqslant n) = 1-\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(Y=k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Conclusion : $\lim_{n\to\infty} P(Y \geqslant n) = 0$.

(c) On a vu que $\mathrm{P}(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$

Donc $\ln(\mathrm{P}(Y \geqslant n)) = \sum_{k=0}^{n-1}\ln(1-\lambda_k)$

Et comme $\mathrm{P}(Y \geqslant n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\ln(\mathrm{P}(Y \geqslant n)) \to -\infty$ donc $\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1-\lambda_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et

Conclusion : $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty$

(d) On pense au théorème de comparaison.
On a $\ln(1+x) \sim x$ quand $x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Mais il faudrait pour celà que $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ quand $n \to +\infty$. Et on a vu que dans le cas d'une loi géométrique, ce n'était pas le cas (λ_n constant)
On distingue deux cas :

— si $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $-\ln(1-\lambda_k) \sim \lambda_k \geqslant 0$ et par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 0}\lambda_k$ diverge également.

— Si $\lambda_n \not\to 0$ alors la série $\sum_{k\geqslant 0}\lambda_k$ diverge (condition nécessaire de convergence)

Variables aléatoires discrètes sans mémoire

Conclusion : la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda_n$ diverge

Partie III: Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

7. On avait $\mathrm{P}(X \geqslant n) = q^n$ et $\mathrm{P}(X = n) = q^n p$

   Donc $\lambda_n = \dfrac{\mathrm{P}(X = n)}{\mathrm{P}(X \geqslant n)} = p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Conclusion : le taux de panne est constant égal à p

8. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geqslant n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$.

   (a) Comme on est dans les hypothèses de la partie 3, on a $\lambda = \dfrac{\mathrm{P}(Z = n)}{\mathrm{P}(Z \geqslant n)}$

   — Si $\lambda = 0$ alors $\mathrm{P}(Z = n) = 0$ pour tout entier n. (et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Z = n) \neq 1$). Donc $\lambda > 0$

   — Si $\lambda = 1$ alors $\mathrm{P}(Z = n) = \mathrm{P}(Z \geqslant n)$ donc $\mathrm{P}(Z \geqslant n+1) = 0$ ce qui contredit $\mathrm{P}(Z \geqslant n) > 0$ pour tout entier n.

   Conclusion : Donc $0 < \lambda < 1$

   (b) On a vu que, pour $n \geqslant 1$ on avait $\mathrm{P}(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k) = (1-\lambda)^{n-1+1}$

   et donc $\mathrm{P}(Z = n) = \mathrm{P}(Z \geqslant n) - \mathrm{P}(Z \geqslant n+1) = (1-\lambda)^n - (1-\lambda)^{n+1} = (1-\lambda)^n \lambda$ et $\mathrm{P}(Z = 0) = 1 - \mathrm{P}(Z \geqslant 1) = \lambda$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{P}(Z = n) = (1-\lambda)^n \lambda$

   soit la même loi que X pour $p = \lambda$.

   (c) Donc, si la loi est celle de X, le taux de panne est constant, et réciproqement

   Conclusion : Les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.