Fonctions holomorphes

Dans ce problème

- $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction, on note $\tilde{f}$ l'application définie sur $\tilde{\Omega}$ par $\tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$
- On pose $P : (x,y) \in \tilde{\Omega} \mapsto \Re e f(x+iy)$ et $Q : (x,y) \in \tilde{\Omega} \mapsto \Im m f(x+iy)$.
- Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on note : $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$

Partie I: Questions préliminaires

On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\psi(x,y) = x+iy$

1. Vérifier que l'application ψ est une bijection continue et que ψ^{-1} est aussi continue .
2. Justifier que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ alors $\tilde{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+iy \in \Omega\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Dans toute la suite de problème Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{C}$

Partie II: Fonctions holomorphes

Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction, on note $\tilde{f}$ l'application définie sur $\tilde{\Omega}$ par $\tilde{f}(x,y) = f(x+iy)$.
On pose $P : (x,y) \in \tilde{\Omega} \mapsto \Re e f(x+iy)$ et $Q : (x,y) \in \tilde{\Omega} \mapsto \Im m f(x+iy)$.

Définition 1 (Fonction $\mathbb{C}$-dérivable)**.**

- *On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega$ si* $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ *existe dans $\mathbb{C}$.*
  Auquel cas elle est notée $f'(z_0)$
- *On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω si elle $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. La fonction $z \longmapsto f'(z)$ est appelée la dérivée de f, notée f'.*
- *On dit que f est holomorphe, si elle est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω et f' est continue sur Ω.*
  On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

1. Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .
   (a) Montrer que f est holomorphe sur $\mathcal{D}(0,R)$ et on a $\forall z \in \mathcal{D}(0,R), f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.
   (b) Montrer que $z \longmapsto \exp(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\exp(z)' = \exp(z)$
2. La fonction $z \longmapsto \overline{z}$ est-elle $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$
3. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes
   (i) Montrer que f est holomorphe sur Ω
   (ii) $\tilde{f}$ est de $\mathcal{C}^1\left(\tilde{\Omega}, \mathbb{C}\right)$ et vérifie l'**équation d'Euler**
   $$\forall (x,y) \in \tilde{\Omega}, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x,y) = i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)$$
   (iii) P et Q sont $\mathcal{C}^1\left(\tilde{\Omega}, \mathbb{C}\right)$ et elles vérifient **Les équations de Cauchy-Riemann**
   $$\forall (x,y) \in \tilde{\Omega}, \quad \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$
4. Redémontrer que $z \longmapsto \exp(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

5. **Zéta de Riemann:**
On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ , \ \Re e(z) > 1\}$ et pour $z \in \Omega$ on pose

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

(a) Montrer que ζ est définie sur Ω

(b) Soit $x \in]1, +\infty[$, on définit $\zeta_x : y \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+iy}}$.
Montrer que ζ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

(c) Soit $y \in \mathbb{R}$, on définit $\zeta_y : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+iy}}$.
Montrer que ζ_y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

(d) Montrer que ζ est holomorphe sur Ω

6. **Fonction Gamma d'Euler:**
On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ , \ \Re e(z) > 0\}$ et pour $z \in \Omega$ on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

(a) Montrer que Γ est définie sur Ω

(b) Soit $x \in]0, +\infty[$, on définit $\Gamma_x : y \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1+iy} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.
Montrer que Γ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

(c) Soit $y \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma_y : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1+iy} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.
Montrer que Γ_y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

(d) Montrer que Γ est holomorphe sur Ω

Partie III: Fonctions analytiques

Définition 2 (Fonction analytique)**.**
On dit que f est analytique sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $r > 0$ et une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ tels que

$$\forall z \in \mathcal{D}(z_0, r), \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω

1. **Exemples**

(a) Montrer que toute fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$ est analytique sur $\mathbb{C}$

(b) Montrer que exp est analytique sur $\mathbb{C}$

2. Soit f une fonction analytique sur Ω.

(a) Montrer que f est holomorphe sur Ω.

(b) Montrer que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

(c) Montrer que f admet un développement de Taylor au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$. Autrement dit,

$$\forall z_0 \in \Omega, \exists r > 0, \forall z \in \mathcal{D}(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

3. Soit $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une application définie par une série entière dont le rayon de convergence R est non nul. Soit z_0 un point de l'intérieur du disque de convergence de module r_0 et soit $r \in]0, R-r_0[$. Soit $z \in D(z_0, r)$
   (a) Montrer que la famille $\left(\dfrac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^q (z-z_0)^p\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable
   (b) Montrer que
   $$\forall z \in \mathcal{D}(z_0, R-|z_0|), \quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$
   (c) Déduire que f est analytique sur $D(0,R)$

Partie IV: Analyticité des fonctions holomorphes

Soit f une fonction holomorphe sur Ω, $z_0 \in \Omega$ et $R>0$ tel que $D(z_0,R)\subset\Omega$

1. Soit $\varphi_n :]0,R[\longrightarrow \mathbb{C}$ définie par: $\varphi_n(r)=\dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$
   (a) Montrer que φ_n est de $\mathcal{C}^1$ sur $]0,R[$ et expliciter φ_n'
   (b) Montrer que φ_n est constante sur $]0,R[$. On pose alors $a_n=\dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$
2. Quitte à considérer $z \longmapsto f(z_0+z)$, on suppose que $z_0=0$. Soit z un point du disque D de centre 0 et de rayon R tel que $|z|<r<R$. Considérons la fonction $g:[0;1]\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par :
   $$g(\lambda)=\int_0^{2\pi}\frac{f[(1-\lambda)z+\lambda re^{i\theta}]-f(z)}{re^{i\theta}-z}re^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
   (a) Montrer que g est définie et dérivable sur $[0,1]$, puis montrer que g est nulle sur $[0,1]$
   (b) Justifier l'égalité
   $$f(z)\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-z}f\left(re^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta$$
   (c) En utilisant la somme d'une série géométrique, montrer que
   $$2\pi f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-z}f\left(re^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$
   (d) Déduire que f est analytique sur Ω

Partie V: Applications

1. **Théorème de Liouville:**
   Soit f est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, on écrit $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
   (a) Montrer que
   $$\forall r\in\mathbb{R}_+^*, \quad |a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n} \quad \text{où } M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$$
   (b) Montrer que si f est bornée, alors f est constante.
2. **Théorème de D'Alembert-Gauss:**
   Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. On suppose que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{P}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
   (b) Montrer que $\dfrac{1}{P}$ est bornée
   (c) Déduire

FONCTIONS HOLOMORPHES

Partie I: Questions préliminaires

On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\psi(x,y) = x + iy$

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$, donc ψ est bijective et

$$\psi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \longmapsto & (\mathcal{R}e(z), \mathrm{Im}(z)) \end{array} \right.$$

ψ et ψ^{-1} sont linéaires et $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions 2, donc elles sont continues

2. $\tilde{\Omega} = \psi^{-1}(\Omega)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, donc il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Dans toute la suite de problème Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{C}$

Partie II: Fonctions holomorphes

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .

(a) Soit $z \in \mathcal{D}(0,R)$. Le disque $\mathcal{D}(0,R)$ étant ouvert, donc $\exists r \in]0,R[$ tel que $z \in \mathcal{D}(0,r)$. Soit $h \in \mathbb{C}^*$ tel que $z + h \in \mathcal{D}(0,r)$. On a

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left((z+h)^n - z^n\right) = h \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^k z^{n-1-k}$$

donc

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^k z^{n-1-k}$$

Donc

$$\left| a_n \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^k z^{n-1-k} \right| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z+h|^k |z|^{n-1-k} \leq n|a_n| r^{n-1}$$

Les deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence R donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n| r^{n-1}$ converge, d'où la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \sum\limits_{k=0}^{n-1} (z+h)^k z^{n-1-k}$ converge normalement sur $\mathcal{D}(0,r)$.

D'après le théorème d'interversion limite-somme on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^k z^{n-1-k} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{h\to 0} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^k z^{n-1-k} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{h\to 0} (z+h)^k z^{n-1-k} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \end{aligned}$$

d'où f est holomorphe sur $\mathcal{D}(0,R)$ et on a $\forall z \in \mathcal{D}(0,R), f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

(b) $z \longmapsto \exp(z)$ est développable en série entière de rayon de convergence $R = +\infty$, donc elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \exp(z)$$

2. $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, et pour tout réel $t \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(z_0+t)-f(z_0)}{t}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0}\frac{f(z_0+it)-f(z_0)}{it}=-1$$

Donc la fonction $z \longmapsto \overline{z}$ n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$

3.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x_0+h,y_0+k)\in\tilde{\Omega}$. On a

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_0+h,y_0+k) &= f(x_0+h+i(y_0+k))\\ &= f(z_0+(h+ik)) = f(z_0)+(h+ik)f'(z_0)+o(|h+ik|)\\ &= \tilde{f}(x_0,y_0)+hf'(z_0)+ikf'(z_0)+\circ\left(\|(h,k)\|_2\right)\end{aligned}$$

L'application $(h,k)\mapsto hf'(z_0)+if'(z_0)k$ est linéaire donc $\tilde{f}$ est différentiable en (x,y) et on a

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)=f'(z_0) \text{ et } \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0)=if'(z_0).$$

Donc $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\tilde{\Omega}$. En particulier

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $\tilde{f}$ est de $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{\Omega}$ et $\tilde{f}=P+iQ$ donc P et Q sont de $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{\Omega}$ et on a

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}+i\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}+i\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial y}\\ &= \frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}+i\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

Avec $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x}+i\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial y}=0$ on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}\ .$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Soit $z_0\in\Omega$ et $h+ik\in\mathbb{C}$ tel que $z_0+h+ik\in\Omega$. On a

$$\begin{aligned}f(z_0+(h+ik)) &= P(x_0+h,y_0+k)+iQ(x_0+h,y_0+k)\\ &= P(x_0,y_0)+iQ(x_0,y_0)+h\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)+i\left(h\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\\ &\quad +o(\|(h,k)\|_2)\\ &= f(z_0)+h\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)-k\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)+i\left(h\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)\right)+o(\|(h,k)\|_2)\\ &= f(z_0)+(h+ik)\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)\right)+o(|h+ik|)\end{aligned}$$

On déduit que f est $\mathbb{C}$ -dérivable en z_0 et on a $f'(z_0)=\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$. De cette égalité montre que

$$f'=\frac{\partial P}{\partial x}\circ\psi^{-1}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\circ\psi^{-1}$$

est donc continue sur Ω

4. Les deux applications $P:(x,y)\longmapsto \Re e(\exp(z))=e^x\cos(y)$ et $Q:(x,y)\longmapsto \Im m(\exp(z))=e^x\sin(y)$ sont de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifient

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}\ .$$

Donc $z\longmapsto \exp(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

5. **Zéta de Riemann:**
On pose $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\ ,\ \Re e(z)>1\}$ et pour $z\in\Omega$ on pose

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}$$

(a) Soit $z\in\Omega$, alors $\Re e(z)>1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\left|\dfrac{1}{n^z}\right|=\dfrac{1}{n^{\Re e(z)}}$. Par comparaison avec la série de Riemann, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^z}$ est absolument convergente, donc elle converge. Ainsi ζ est définie sur Ω

(b) Soit $x\in\,]1,+\infty[$. On pose $f_n: y\longmapsto \dfrac{1}{n^{x+iy}}$

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'application f_n est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad f_n'(y)=\frac{-i\ln n}{n^{x+iy}}$$

- La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolument sur $\mathbb{R}$, donc elle est simplement
- Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}$, alors pour tout $y\in[a,b]$, on a:

$$|f_n'(y)|=\frac{\ln n}{n^x},\ \text{donc}\ \parallel f_n'\parallel_\infty=\frac{\ln n}{n^x}$$

et la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^x}$ converge car $x>1$

On conclut par le théorème de dérivation terme à terme que ζ_x est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad \zeta_x'(y)=-i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^{x+iy}}$$

(c) Soit $y\in\mathbb{R}$. On pose $g_n: x\longmapsto \dfrac{1}{n^{x+iy}}$

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'application g_n est de $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x\in\,]1,+\infty[\,,\quad g_n'(x)=\frac{-\ln n}{n^{x+iy}}$$

- La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge absolument sur $]1,+\infty[$, donc elle est simplement
- Soit $[a,b]\subset\,]1,+\infty[$, alors pour tout $x\in[a,b]$, on a:

$$|g_n'(x)|=\frac{\ln n}{n^x}\leqslant\frac{\ln n}{n^a}$$

et la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^a}$ converge car $a>1$, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n'$ converge normalement sur $[a,b]$, donc elle converge uniformement

On conclut par le théorème de dérivation terme à terme que ζ_y est de $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x \in \,]1,+\infty[\,, \quad \zeta_y'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^{x+iy}}$$

(d) $\tilde{\zeta}$ est de $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{\Omega}$, car elle admet des dérivées partielles continues, avec

$$\forall (x,y) \in \,]1,+\infty[\, \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x}(x,y) & = \zeta_y'(x) \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}(x,y) & = \zeta_x'(y) \end{cases} \text{ et } \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial y} = i\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x}$$

Donc ζ est holomorphe sur Ω

6. **Fonction Gamma d'Euler:**
On pose $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ , \ \Re e(z) > 0\}$ et pour $z \in \Omega$ on pose

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

(a) Soit $z \in \Omega$, alors $\Re e(z) > 0$. L'application $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$

- **En** 0**:** On a $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-\Re e(z)}}$ et $1-\Re e(z) < 1$, donc $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable en 0
- **En** $+\infty$**:** On a $\left|t^2 t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{\Re e(z)+1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Par comparaison avec l'intégrale de Riemann, la fonction considérée est intégrable en $+\infty$

Donc Γ est bien définie sur Γ

(b) Soit $x \in \,]0,+\infty[$. On pose $f : (y,t) \in \mathbb{R} \times \,]0,+\infty[\, \longmapsto t^{x-1+iy}e^{-t}$

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto t^{x-1+iy}e^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$
- L'application f admet une dérivée partielle par rapport à y et

$$\forall (y,t) \in \mathbb{R} \times \,]0,+\infty[\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(y,t) = it^{x-1+iy}\ln(t)e^{-t}$$

En outre $(y,t) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(y,t)$ est continue par rapport à y et continue par morceaux rapport à t

- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors pour tout $y \in [a,b]$ et $t \in \,]0,+\infty[$, on a:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(y,t)\right| = |\ln(t)|\, t^{x-1}e^{-t} = \varphi(t)$$

L'application φ est continue

  - **En** 0**:** On a $\varphi(t) = \circ\left(\dfrac{1}{t^a}\right)$ avec $0 < a < 1-x$, donc $t \longmapsto \varphi(t)$ est intégrable en 0
  - **En** $+\infty$**:** On a $\left|t^2\ln(t)\varphi(t)\right| = t^{x+1}\ln(t)e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Par comparaison avec l'intégrale de Riemann, la fonction φ est intégrable en $+\infty$

On conclut par le théorème de dérivation sous-signe intégrale Γ_x est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \Gamma_x'(y) = i\int_0^{+\infty} t^{x-1+iy}\ln(t)e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

(c) Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $g : (x,t) \in \,]0,+\infty[^2 \longmapsto t^{x-1+iy}e^{-t}$

- Pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, l'application $t \longmapsto t^{x-1+iy}e^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$
- L'application g admet une dérivée partielle par rapport à x et

$$\forall (x,t) \in \,]0,+\infty[^2\,, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = t^{x-1+iy}\ln(t)e^{-t}$$

En outre $(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par rapport à x et continue par morceaux rapport à t

- Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, alors pour tout $x \in [a,b]$ et $t\,]0,+\infty[$, on a:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |\ln(t)|\, t^{x-1}e^{-t} \leqslant \Phi(t)$$

Avec $\Phi(t) = \begin{cases} |\ln(t)|\, t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leqslant 1 \\ |\ln(t)|\, t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$ est continue

  - **En** 0**:** On a $\Phi(t) = \circ\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $0 < \alpha < 1-a$, donc $t \longmapsto \Phi(t)$ est intégrable en 0
  - **En** $+\infty$**:** On a $\left|t^2\ln(t)\Phi(t)\right| = t^{b+1}\ln(t)e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Par comparaison avec l'intégrale de Riemann, la fonction Φ est intégrable en $+\infty$

On conclut par le théorème de dérivation sous-signe intégrale Γ_y est de $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\quad \Gamma_y'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1+iy}\ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

(d) $\tilde{\Gamma}$ est de $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{\Omega}$, car elle admet des dérivées partielles continues, avec

$$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2\,,\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial x}(x,y) & = \Gamma_y'(x) \\ \dfrac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial y}(x,y) & = \Gamma_x'(y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial y} = i\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial x}$$

Donc Γ est holomorphe sur Ω

Partie III: Fonctions analytiques

1. **Exemples**

(a) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Par la formule de Taylor

$$\forall z_0, z \in \mathbb{C}^2,\quad P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{P^n(z_0)}{n!}z^n$ est de rayon infini car son terme général s'annule à partir d'un certain rang, donc P est analytique sur $\mathbb{C}$

(b) On sait que $\mathcal{R}c\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}\right) = +\infty$. Alors pour $z_0 \in \mathbb{C}$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \exp(z_0)\exp(z-z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\exp(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Ce qui montre que exp est analytique sur $\mathbb{C}$

2. Soit f une fonction analytique sur Ω.

(a) Soit $z_0 \in \Omega$. Par hypothèse l'application $F : h \longmapsto f(z_0+h)$ est développable en série entière sur un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}$, soit

$$F(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$$

pour $h \in D(0,r)$. Donc F est indéfiniment dérivable et vérifie

$$F^{(n)}(0) = n!a_n\ :$$

Par translation on en déduit que f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur un voisinage de z_0 et que

$$f^{(n)}(z_0) = F^{(n)}(0) = n!a_n$$

(b) D'après la question précédente f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.

(c) Les a_n sont donnés dans la question **??**

3. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une application définie par une série entière dont le rayon de convergence R est non nul. Soit z_0 un point de l'intérieur du disque de convergence de module r_0 et soit $r \in]0, R - r_0[$. Soit $z \in D(z_0, r)$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} \left| \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^q (z-z_0)^p \right| &\leqslant \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} \frac{(p+q)!}{p!q!} |a_{p+q}| r_0^q r^p \\
&\leqslant |a_n| (r+r_0)^n
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence R et $r + r_0 < R$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n (r+r_0)^n$ est absolument convergente. Par le critère suffisant de sommabilité, la famille $\left(\frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^q (z-z_0)^p \right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est donc sommable

(b) Pour $p \in \mathbb{N}$, on a:

$$f^{(p)}(z_0) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0 + z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{p+q=n} \frac{(p+q)!}{p!q!} z_0^p (z-z_0)^q \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^p (z-z_0)^q
\end{aligned}$$

La famille $\left(\frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^q (z-z_0)^p \right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, alors par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} z_0^p (z-z_0)^q \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^p}{p!} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} z_0^q \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^p}{p!} f^{(p)}(z_0)
\end{aligned}$$

$$\forall z \in \mathcal{D}(z_0, R - |z_0|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

(c) Pour tout $z_0 \in \mathcal{D}(0, R)$, le rayon de convergence de la série $\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} z^p$ est supérieur ou égal à $R - |z_0|$ et $\forall z \in \mathcal{D}(z_0, R - |z_0|), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$. Donc f est analytique sur $D(0, R)$

Partie IV: Analyticité des fonctions holomorphes

1. Soit $\varphi_n :]0, R[\longrightarrow \mathbb{C}$ définie par: $\varphi_n(r) = \dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$

   (a) Soit $h_n : (r, \theta) \in]0, R[\times [0, 2\pi] \longmapsto f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}$

   - Pour tout $r \in]0, R[$, l'application $\theta \longmapsto f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc elle est intégrable
   - h_n admet une dérivée selon r et
   $$\frac{\partial h_n}{\partial r}(r, \theta) = f'\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{i(1-n)\theta}$$
   Qui est continue sur $]0, R[\times [0, 2\pi]$
   - Soit $[a, b] \subset]0, R[$, alors pour tout $r \in [a, b]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a:
   $$\left|\frac{\partial h_n}{\partial r}(r, \theta)\right| \leqslant M$$
   Avec $M \max\limits_{|z|\leqslant b} |f'(z)|$. En outre l'application constante $\theta \longmapsto M$ est intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$

   Donc par le théorème de dérivation sous signe intégrale $r \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$ est de $\mathcal{C}^1$ sur $]0, R[$ et, par suite, φ_n est de $\mathcal{C}^1$ sur $]0, R[$ comme produit de deux fonctions de $\mathcal{C}^1$ et
   $$\varphi_n'(r) = \frac{-n}{2\pi r^{n+1}}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f'\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{i(1-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

   (b) Par une intégration par parties effectuée à la deuxième intégrale du second membre donne
   $$\begin{aligned}
   \int_0^{2\pi} f'\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{i(1-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{-i}{2\pi r^{n+1}}\int_0^{2\pi} \left[f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)\right]' e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
   &= \left[f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\right]_0^{2\pi} + \frac{i}{2\pi r^{n+1}}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right)(-in)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
   &= \frac{n}{2\pi r^{n+1}}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta
   \end{aligned}$$
   Ce qui fournit $\varphi_n'(r) = 0$, puis φ_n est constante sur $]0, R[$.

2. Quitte à considérer $z \longmapsto f(z_0 + z)$, on suppose que $z_0 = 0$. Soit z un point du disque D de centre 0 et de rayon R tel que $|z| < r < R$. Considérons la fonction $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :
   $$g(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{f[(1-\lambda)z + \lambda re^{i\theta}] - f(z)}{re^{i\theta} - z} re^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

   (a) La fonction $(\lambda, t) \longmapsto \dfrac{f[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}] - f(z)}{re^{it} - z} re^{it}$ étant continue et dérivable par rapport à λ (z est fixé et le dénominateur ne s'annule pas) donc g est continue, dérivable et sa dérivée est donnée par :
   $$g'(\lambda) = \int_0^{2\pi} f'[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}]re^{it}\,\mathrm{d}t$$
   mais
   $$\int_0^{2\pi} f'[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}]re^{it}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f[(1-\lambda)z + \lambda re^{it}]}{i\lambda}\right]_0^{2\pi} = 0$$
   Donc g est constante sur $[0, 1]$ et comme $g(0) = 0$, la fonction g est nulle sur $[0, 1]$

(b) Comme $g(1)=0$, alors
$$\int_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{it}\right)-f(z)}{re^{it}-z} re^{it}\,\mathrm{d}t = 0$$
ou encore
$$f(z)\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-z} f\left(re^{it}\right)\,\mathrm{d}t$$

(c) pour $r>|z|$, on a :
$$\frac{re^{it}}{re^{it}-z} = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{re^{it}}\right)^n$$
et cette série converge normalement pour tout $t\in\mathbb{R}$. On peut donc l'intégrer terme à terme, ce qui donne
$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-z}\,\mathrm{d}t = 2\pi$$
Enfin, la fonction $t\longmapsto f\left(re^{it}\right)$ est bornée, donc on peut intégrer terme à terme la série
$$\frac{re^{it}}{re^{it}-z} f\left(re^{it}\right) = f\left(re^{it}\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{re^{it}}\right)^n f\left(re^{it}\right)$$
On obtient ainsi l'égalité :
$$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}-z} f\left(re^{it}\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n e^{int}}\,\mathrm{d}t$$

(d) L'égalité précédente donne
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n e^{int}}\,\mathrm{d}t$$
On sait d'après une question précédente que $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^n e^{int}}\,\mathrm{d}t$ est indépendante de r. On déduit donc que f est analytique sur Ω

Partie V: Applications

1. **Théorème de Liouville:**
Soit f est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, on écrit $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

(a) Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$, on a
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
Donc
$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \qquad \text{où } M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$$

(b) Pour $n\geqslant 1$, on a $|a_n|\leqslant \dfrac{M}{r^n}$ où M un majorant de f. En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $a_n=0$, ce qui montre que $f=a_0$ est constante.

2. **Théorème de D'Alembert-Gauss:**
Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. On suppose que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$

(a) $\dfrac{1}{P}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ et $\left(\dfrac{1}{P}\right)' = -\dfrac{P'}{P^2}$ qui est continue sur $\mathbb{C}$, donc $\dfrac{1}{P}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

(b) $|P(z)| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty$, donc $\left|\dfrac{1}{P(z)}\right| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$. Par définition, il existe $R>0$ tel que $\forall z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>R$ on a $\left|\dfrac{1}{P(z)}\right| \leqslant 1$. La fonction $\dfrac{1}{P}$ est continue sur le compact $\overline{D}(0,R)$, donc elle est bornée et soit m un majorant de $\left|\dfrac{1}{P}\right|$ sur le compact $\overline{D}(0,R)$. En fin soit $M=\max(1,m)$. On a bien $\left|\dfrac{1}{P}\right| \leqslant M$, donc elle est bornée

(c) Par le théorème de Liouville $\dfrac{1}{P}$ est constante, ce qui est absurde