Intégrale de Gauss, Fonctions Gamma et Bêta d'Euler

Partie I: Calcul de l'intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

On considère, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que g est dérivable et exprimer g'.
3. On note : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.
   Montrer que $\quad g'(x) = -2f'(x).f(x)$.
4. Intégrant l'expression précédente, calculer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.
5. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
6. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.
   En déduire la valeur de l'intégrale I.

Partie II: Propriétés de la fonction Γ

On définit la fonction Γ par $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

7. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   En déduire que l'ensemble de définition de la fonction Γ est $\mathbb{R}_+^*$
8. (a) Préciser le signe de Γ sur $\mathbb{R}_+^*$
   (b) Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \Gamma(x) = +\infty$
9. (a) Établir la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
   (b) En déduire une expression simple de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
10. (a) En utilisant le changement de variable $s \longmapsto s^2$. Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
    (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$
11. (a) Pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$
    (b) En déduire que Γ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
12. (a) Montrer que Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$
    (b) Montrer que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$
    (c) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$, puis en déduire l'existence d'un unique réel strictement positif x_0 tel que $\Gamma'(x_0) = 0$
    (d) Étudier les variations de Γ et la nature de la branche infinie en $+\infty$.
    Donner une allure de son graphe.

Intégrale de Gauss, Fonctions Gamma et Bêta d'Euler

Partie III: Fonction Γ et fonction β d'Euler

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge et notons $J_n(x)$ sa valeur

14. On pose $u_n(t) := \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0,n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$

    (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ u_n(t) \leqslant e^{-t}$

    (b) En déduire que : $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n(x)$

15. Pour a et b, réels strictement positifs, on pose $\beta(a,b) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{a-1}\, t^{b-1}\,\mathrm{d}t$

    (a) Justifier l'existence de $\beta(a,b)$.

    (b) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x \beta(n+1,x)$

16. (a) Simplifier $\beta(a+1,b) + \beta(a,b+1)$

    (b) Prouver que $\beta(a,b+1) = \dfrac{b}{a}\beta(a+1,b)$

    (c) En déduire $\beta(a+1,b)$ en fonction de $\beta(a,b)$

17. Prouver que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^x n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$

Intégrale de Gauss, Fonctions Gamma et Bêta d'Euler

Partie I: Calcul de l'intégrale de Gauss

1. Posons $h : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1] \longmapsto h(x,t) = \dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$.
   - $\forall t \in [0,1]$,l'application $x \mapsto h(x,t)$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+$
   - $\forall x \in \mathbb{R}^+$,l'application $t \mapsto h(x,t)$ est C^0 sur $[0,1]$
   - $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1], |h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ qui est continue sur $[0,1]$, donc intégrable

   On en déduit que l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 h(x,t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

2. On remarque que $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(t^2+1)x^2}$. Cette fonction est bien définie pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$
   - $\forall t \in [0,1]$,l'application $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est C^0 sur $[a,b]$
   - $\forall x \in [a,b]$,l'application $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est C^0 sur $[0,1]$
   - $\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,1], \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2x \leqslant 2b = \psi(t)$ qui est continue sur $[0,1]$, donc intégrable

   On en déduit que l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 h(x,t)dt$ est de classe C^1 sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}_+$. De plus

   $$\forall x \geqslant 0, g'(x) = \int_0^1 -2xe^{-(t^2+1)x^2}dt$$

3. Posons $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du$. f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $f'(x) = e^{-x^2}$.
   D'autre part, avec le changement de variable $u = xt$, on a

   $$g'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}dt = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du$$

   Finalement : $g'(x) = -2f'(x)f(x)$

4. On a donc $g'(x) = -\left(f^2\right)'(x)$ donc par intégration, il existe une constante K telle que $\forall x \geqslant 0, g(x) = -f^2(x)+K$.
   Pour $x = 0$ on obtient en particulier ,

   $$g(0) = K = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

   Finalement $g(x) = -\left(\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du\right)^2 + \dfrac{\pi}{4}$

5. Soit (x_n) une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Posons $f_n(t) = \dfrac{e^{-(t^2+1)x_n^2}}{t^2+1}$
   - la suite de fonctions f_n converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle
   - $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ fonction intégrable sur $[0,1]$

   On en déduit grâce au **théorème de convergence dominée** que

   $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x_n^2}}{t^2+1}dt = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-(t^2+1)x_n^2}}{t^2+1})dt = 0$$

   Puis, par la **caractérisation séquentielle de la limite**, on obtient bien

   $$\lim_{x\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}dt = 0$$

Intégrale de Gauss, Fonctions Gamma et Bêta d'Euler

6. On en déduit, de la question précédente, que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\int_0^x e^{-u^2}du\right)^2=\dfrac{\pi}{4}$,
donc $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x e^{-u^2}du=\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$ d'où
$$I=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Partie II: Propriétés de la fonction Γ

On définit la fonction Γ par $x\longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

7. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc intégrable sur tout segment de $]0,+\infty[$. Le problème se pose alors en 0 et $+\infty$.
   - **Au voisinage de 0 :** On a $t^{x-1}e^{-t}\sim t^{x-1}=\frac{1}{t^{1-x}}$ donc intégrable si, et seulement, si $1-x<1$ si, et seulement, si $0<x$.
   - **Au voisinage de $+\infty$:** On a $t^{x-1}e^{-t}=o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable en $+\infty$.

   On déduit que $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement, si $x>0$.
8. (a) Γ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$

   (b) Pour $x>0$, on a
   $$\Gamma(x)\geqslant\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\geqslant e^{-1}\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{ex}$$
   Or $\dfrac{1}{ex}\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0^+}\Gamma(x)=+\infty$
9. (a) $t\longmapsto t^x$ et $t\longmapsto e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et le produit $t\longmapsto t^xe^{-t}$ admet des limites nulles en 0 et en $+\infty$. Par intégration par parties
   $$\begin{aligned}\Gamma(x+1)&=\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=\left[-t^xe^{-t}\right]_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=x\Gamma(x)\end{aligned}$$

   (b) Par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \Gamma(n)=(n-1)!$
10. (a) En utilisant le changement de variable $s\longmapsto s^2$ qui est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$
    $$\Gamma\left(\frac12\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$$

    (b) Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, on montre que $\Gamma\left(n+\frac12\right)=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$
    - Pour $n=0$, $\Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt{\pi}$;
    - Soit $n\geqslant0$, on suppose que $\Gamma\left(n+\frac12\right)=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$. On a :

    $$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac32\right)&=\Gamma\left(n+\frac12+1\right)\\&=\left(n+\frac12\right)\Gamma\left(n+\frac12\right)\\&=\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}\\&=\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

INTÉGRALE DE GAUSS, FONCTIONS GAMMA ET BÊTA D'EULER

11. (a) Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $h : t \longmapsto (\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

   - En $+\infty$: $(\ln t)^k\, t^{x+1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc $h(t) = \circ\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
   - En 0 : Pour $\delta \in]1-x, 1[$, $t^\delta h(t) \sim t^{\delta+x-1}(\ln t)^k \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$, donc $h(t) = \circ\left(\dfrac{1}{t^\delta}\right)$

   Ceci prouve la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varphi(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ donc $\forall x, t > 0$, $\dfrac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}(x,t) = (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}$.

   Soit $0 < a < b$. L'application $\dfrac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}$ est continue sur $[a,b]\times]0,+\infty[$.

   On a $\forall x \in [a,b], \forall t \in]0,+\infty[, \left|\dfrac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}\right| \leqslant |\ln t|^n(t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t}$ (Condition de domination) avec $t \mapsto |\ln t|^n(t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   Donc l'application Γ est $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \Gamma^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

12. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t > 0$, d'où la convexité stricte de Γ

   (b) On a $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = \lim_{x\to 0^+}\Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$.

   On déduit qu'au voisinage de 0 : $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

   (c) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Les conditions du théorème de Rolle sont vérifiées, d'où l'existence d'un réel strictement positif $x_0 \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Or la fonction Γ' est strictement croissante, donc l'unicité de x_0

   (d) Soit $a > 1$. On a

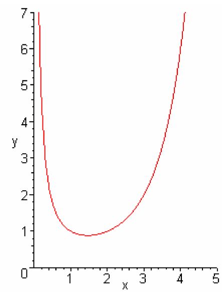
$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\ &\geqslant \int_a^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\\ &\geqslant a^{x-1}\int_a^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t\\ &\geqslant a^{x-1}e^{-a} \to +\infty\end{aligned}$$

   On déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x) = +\infty$.

   D'autre part

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}\Gamma(x-1) = +\infty$$

   Par conséquence Γ admet une branche parabolique en $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.



Partie III: Fonction Γ et fonction β d'Euler

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \longmapsto \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0,n]$. En 0, on a $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ qui a une intégrale convergente car $x > 0$. Donc $J_n(x)$ converge

14. On pose $u_n(t) := \begin{cases}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0,n]\\ 0 & \text{si } t > n\end{cases}$

   (a) Pour $t \in [0,n]$, on a $u_n(t) = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}$. On utilise l'inégalité de Bernoulli pour $s > -1$: $\ln(1+s) \leqslant s$ pour obtenir $u_n(t) \leqslant e^{-t}$. Lorsque $t > n$, on a $u_n(t) = 0 \leqslant e^{-t}$

Intégrale de Gauss, Fonctions Gamma et Bêta d'Euler

(b) Posons $\varphi_n : t \longmapsto u_n(t)t^{x-1}$. La suite (φ_n), des fonctions continues par morceaux sur $]0,+\infty[$, converge simplement vers l'application $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ qui est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. D'après la question précédente :

$$\forall t \in]0,+\infty[\,,\quad |\varphi_n(t)| \leqslant t^{x-1}e^{-t}$$

Où $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc, d'après le TCVD, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n(x)$

15. Pour a et b, réels strictement positifs, on pose $\beta(a,b) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{a-1}\, t^{b-1}\,\mathrm{d}t$

(a) $t \longmapsto (1-t)^{a-1}\, t^{b-1}$ est positive et continue sur $]0,1[$.

- En 0 : $(1-t)^{a-1}\, t^{b-1} \sim t^{b-1}$ qui est intégrable car $b>0$
- En 1 : $(1-t)^{a-1}\, t^{b-1} \sim (1-t)^{a-1}$ qui est intégrable car $a>0$

D'où l'existence de cette intégrale.

(b) Avec le changement $s = tn$, on obtient

$$\begin{aligned} n^x\beta(n+1,x) &= n^x\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^n \left(1-\frac{s}{n}\right)^n s^{x-1}\,\mathrm{d}s \\ &= J_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x\beta(n+1,x)$

16. (a) On a :

$$\begin{aligned} \beta(a+1,b)+\beta(a,b+1) &= \int_0^1 \Big((1-t)^a\, t^{b-1} + (1-t)^{a-1}\, t^b\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-t)^{a-1}\, t^{b-1}\,\mathrm{d}t = \beta(a,b) \end{aligned}$$

(b) Par intégration par parties $\beta(a,b+1) = \dfrac{b}{a}\beta(a+1,b)$

(c) On déduit $\beta(a+1,b)\left(1+\frac{b}{a}\right) = \beta(a,b)$ donc $\beta(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b}\beta(a,b)$

17. On a $\beta(n+1,x) = \dfrac{n}{n+x}\beta(n,x)$. Par récurrence, on obtient

$$\beta(n+1,x) = \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\beta(1,x)$$

avec $\beta(1,x) = \dfrac{1}{x}$ d'où le résultat