DS Sciences Physiques MathSpé

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Les calculatrices ***sont autorisées***

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Onde quasimonochromatique
Résonateur et guide d'ondes

Le problème d'électromagnétisme comprend deux parties indépendantes : une première partie « Onde quasi-monochromatique » comme approches mathématique et physique de l'onde monochromatique, suivie d'une seconde partie où deux plans conducteurs parallèles se comportent soit en « résonateur électromagnétique », soit en « guide d'ondes » pour une onde qui se propage à l'intérieur de ces plans.

Représentation des grandeurs scalaires : a, AB et vectorielles : $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{AB}$
En notation complexe ces grandeurs sont soulignées : $\underline{a}$, $\underline{AB}$, $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{AB}}$
Notation du produit scalaire $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})$ et vectoriel $(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})$ des deux vecteurs $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$.

Célérité des ondes dans le vide : $c=3\times10^8\,\mathrm{m.s^{-1}}$
Perméabilité du vide : $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H.m^{-1}}$
Permittivité du vide : $\varepsilon_0=\dfrac{1}{36\pi\times10^9}\,\mathrm{F.m^{-1}}$

1. Onde quasi-monochromatique

Une onde plane progressive monochromatique : $\underline{\Psi}(z,t)=\Psi_0.\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)}$ (où $\mathrm{j}^2=-1$) d'amplitude Ψ_0 en tout point, de pulsation ω et de vecteur d'onde k, se propage à la vitesse $v=\dfrac{\omega}{k}$ dans tout l'espace, la variable z prenant toutes les valeurs de l'intervalle $]-\infty,+\infty[$. Cette onde est mathématiquement acceptable si elle satisfait à l'équation de propagation des ondes et physiquement acceptable si l'énergie $W\approx\int_{-\infty}^{+\infty}|\underline{\Psi}(z,t)|^2\,\mathrm{d}z$ transportée par cette onde à chaque instant est finie.

1.1. L'onde $\underline{\Psi}(z,t)$ est-elle solution de l'équation des ondes ? Vérifie-t-elle la condition énergétique ?

1.2. On construit une nouvelle fonction $\underline{\Psi}'(z,t)=\underline{\Psi}_1(z,t)+\underline{\Psi}_2(z,t)$ en superposant deux ondes planes progressives monochromatiques de fréquences voisines, de même amplitude et se déplaçant ensemble à la même vitesse :

$$\underline{\Psi}_1(z,t)=A.\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t-k_1 z)}\ \text{ et }\ \underline{\Psi}_2(z,t)=A.\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_2 t-k_2 z)}\ \text{ avec }\begin{cases}\omega_1=\omega_0-\Delta\omega\\ \omega_2=\omega_0+\Delta\omega\end{cases}\ \text{ et }\begin{cases}k_1=k_0-\Delta k\\ k_2=k_0+\Delta k\end{cases}$$

1.2.1. Montrer que $\underline{\Psi}'(z,t)=\Psi_0'(z,t).\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t-k_0 z)}$ en exprimant $\Psi_0'(z,t)$ sous sa forme réelle. Quelle est l'expression de la vitesse V du maximum de l'amplitude de l'onde résultante $\underline{\Psi}'(z,t)$?

1.2.2. L'onde $\underline{\Psi}'(z,t)$ est-elle solution de l'équation des ondes ? Vérifie-t-elle la condition énergétique et en quoi diffère-t-elle de $\underline{\Psi}(z,t)$?

1.3. En superposant un plus grand nombre d'ondes monochromatiques de fréquences voisines et de même amplitude, on parvient à la notion de « paquet d'ondes » ou « d'onde quasi-monochromatique » où les vecteurs d'ondes k sont contenus dans un petit domaine Δk de valeur centrale k_0. L'onde résultante de la superposition de p ondes $\underline{\Psi}_p(z,t) = A.e^{j(\omega_p t - k_p z)}$ sera $\underline{\Psi}''(z,t) = \sum_p \underline{\Psi}_p(z,t) = A\sum_p e^{j(\omega_p t - k_p z)}$ avec k_p compris dans l'intervalle $\left[k_0 - \frac{\Delta k}{2} \,;\, k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right]$, ce qui revient à imposer à l'amplitude $A(k)$ une variation représentée sur la figure 1.

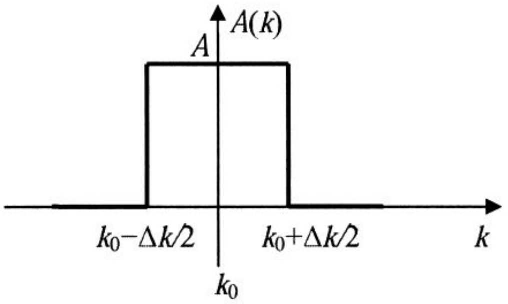


figure 1

En augmentant le nombre des ondes monochromatiques du paquet d'ondes, le vecteur d'onde finit par varier continûment sur le domaine d'extension Δk et l'expression de la fonction d'onde devient :

$$\underline{\Psi}''(z,t) = A\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} e^{j(\omega t - kz)}dk .$$

1.3.1. À l'aide d'un développement limité (à l'ordre 1) de la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ autour de $k = k_0$ avec $\omega_0 = \omega(k_0)$, exprimer $\omega(k)$ en fonction de k, k_0, v_φ (vitesse de phase) et v_g (vitesse de groupe), vitesses calculées en k_0.

1.3.2. En déduire que l'onde quasi-monochromatique s'écrit sous la forme :

$$\underline{\Psi}''(z,t) = \Psi_0''(z,t).e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}$$

où l'on exprimera $\Psi_0''(z,t)$.

1.3.3. Dans $\underline{\Psi}''(z,t)$, quel est le terme qui suscite le caractère monochromatique de l'onde ? Quelle relation doit-il exister entre la constante A et le domaine Δk pour obtenir une condition énergétique physiquement acceptable de $\underline{\Psi}''(z,t)$? Que peut-on conclure quant à la vitesse v_e de propagation de l'énergie ?

Donnée : $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = \pi$.

1.3.4. Pour une onde quelconque, montrer que v_g peut s'exprimer en fonction de v_φ, ω et $\frac{dv_\varphi}{d\omega}$.

Application : Dans le cas d'ondes électromagnétiques se propageant dans un guide d'ondes, la vitesse de phase est donnée par la loi de dispersion : $v_\varphi = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - c^2 a^2}}$.

Calculer v_g. Commentaire.

2. Onde entre deux plans parfaitement conducteurs.

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct Oxyz, on définit la base ($\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{e_z}$).
On dispose de deux plans métalliques parallèles au plan yOz et d'équations $x = 0$ et $x = a$. Dans l'espace vide entre ces plans conducteurs, on étudie la propagation d'une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω et polarisée rectilignement suivant Oy. Suivant le sens de propagation de l'onde, les deux plans métalliques joueront le rôle de « résonateur électromagnétique » (figure 2) ou de « guide d'ondes » (figure 3).

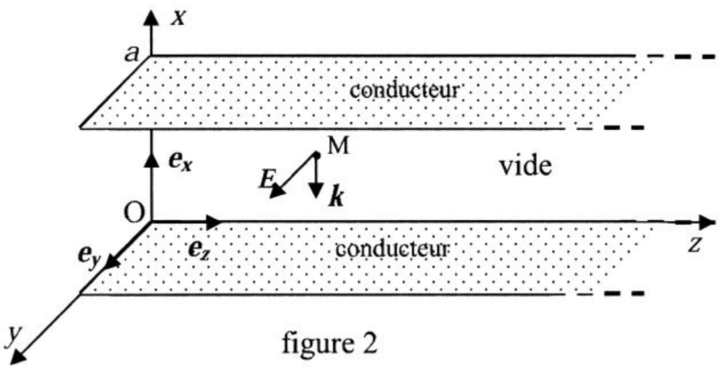


figure 2

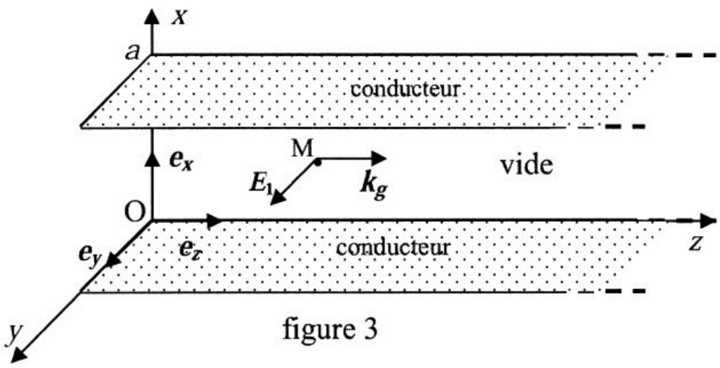


figure 3

2.1. Montrer que dans un conducteur parfait, en l'absence de champ statique, nous avons : $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$, $\rho = 0$ (champ électrique, champ magnétique, densité volumique de courant et densité volumique de charges).

2.2. Compléter les quatre relations de passage ci-après concernant les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ au niveau de la surface d'équation $x = 0$ entre le conducteur parfait (milieu 1) et le vide (milieu 2). Les composantes de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ seront indicées T (tangentielles) et N (normales) et nous poserons σ_s et $\boldsymbol{j_s}$ respectivement la densité surfacique de charges et le vecteur surfacique de courant.

Relations : **(1)** $\boldsymbol{E}_{T_2} - \boldsymbol{E}_{T_1} =$; **(2)** $\boldsymbol{E}_{N_2} - \boldsymbol{E}_{N_1} =$; **(3)** $\boldsymbol{B}_{T_2} - \boldsymbol{B}_{T_1} =$; **(4)** $\boldsymbol{B}_{N_2} - \boldsymbol{B}_{N_1} =$

2.3. Montage en « résonateur électromagnétique » (figure 2)

L'onde électromagnétique incidente ($\underline{\boldsymbol{E}_i}$, $\underline{\boldsymbol{B}_i}$), polarisée rectilignement et parallèlement à Oy, se propage vers le métal dans le sens du vecteur d'onde $\boldsymbol{k} = -k.\boldsymbol{e_x}$. En notation complexe, le champ électrique incident est donné par : $\underline{\boldsymbol{E}_i} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kx)}\boldsymbol{e_y}$.

2.3.1. Déterminer, à l'aide de l'équation de structure d'une onde plane, le champ magnétique incident $\underline{\boldsymbol{B}_i}$.

2.3.2. En utilisant les relations de passage des composantes du champ électrique, déterminer le champ $\underline{\boldsymbol{E}}_r(0, t)$ de l'onde réfléchie sur le plan conducteur d'équation $x = 0$, et en déduire les champs électrique $\underline{\boldsymbol{E}}_r$ et magnétique $\underline{\boldsymbol{B}}_r$ de l'onde réfléchie en tout point de l'espace.

2.3.3. Exprimer le champ électrique total $\underline{\boldsymbol{E}}(x, t)$ et le champ magnétique total $\underline{\boldsymbol{B}}(x, t)$ à l'instant t en un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ de la cavité. En déduire le rapport des modules des champs complexes $\dfrac{E}{B}$ en fonction de c, k et x.

2.3.4. Montrer que la fréquence de l'onde dans cette cavité ne peut prendre que des valeurs discrètes f_N exprimées à l'aide de l'entier N.
Application numérique : Calculer la fréquence propre minimale de ce résonateur pour une distance $a = 3$ cm entre les plans métalliques.

Les résultats des quatre questions suivantes seront exprimés en fonction de ε_0, c, E_0, a et pour $N = 1$.

2.3.5. Déterminer le vecteur de Poynting $\boldsymbol{R}(x, t)$ de l'onde résultante et en déduire sa moyenne temporelle $<\boldsymbol{R}(x, t)>_t$. Commenter le résultat.

2.3.6. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique $u(x, t)$ puis sa moyenne temporelle $<u(x, t)>_t$ en fonction de ε_0 et E_0.

2.3.7. Déterminer le vecteur densité surfacique de courant $\boldsymbol{j}_s(t)$ qui parcourt à l'instant t la plaque métallique, à l'interface métal-vide, en $x = 0$.

2.3.8. En déduire, en fonction de ε_0 et E_0, la pression électromagnétique moyenne temporelle $< p >_t = \left\langle \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S} \right\rangle_t$ exercée par l'onde sur cette plaque, sachant que $\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{j}_s(t)\mathrm{d}S \times \dfrac{\boldsymbol{B}(0,t)}{2}$ est la force de Laplace exercée sur l'élément de surface $\mathrm{d}S$ du plan métallique d'équation $x = 0$.
Application numérique : On donne la valeur $E_0 = 100\ \mathrm{V.m^{-1}}$; calculer $<u(x, t)>_t$ et $<p>_t$.

2.4. Montage en « guide d'ondes » (figure 3)

On considère une onde électromagnétique ($\underline{\boldsymbol{E}}_1$, $\underline{\boldsymbol{B}}_1$), progressive, monochromatique, se propageant dans le vide entre deux plans conducteurs distants de a, suivant la direction de Oz et telle que le champ électrique reste parallèle aux deux plans. On impose que la forme de $\underline{\boldsymbol{E}}_1$ est : $\underline{\boldsymbol{E}}_1(x, z, t) = E_1(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_g z)}\boldsymbol{e}_y$.

2.4.1. Exprimer l'équation de Maxwell-Faraday et en déduire que $\underline{\boldsymbol{B}}_1$ est de la forme : $\underline{\boldsymbol{B}}_1(x, z, t) = \left[F(x)\boldsymbol{e}_x + \mathrm{j}G(x)\boldsymbol{e}_z \right] e^{\mathrm{j}(\omega t - k_g z)}$, sachant que l'on exclut de $\underline{\boldsymbol{B}}_1$ toute composante statique. Expliciter les fonctions $F(x)$ et $G(x)$. Justifier l'attribution du sigle « T.E » à cette onde.

2.4.2. Exprimer l'équation de Maxwell-Ampère et en déduire l'équation différentielle vérifiée par l'amplitude $E_1(x)$ du champ électrique. Les champs $\underline{\boldsymbol{E}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{B}}_1$ vérifient-ils les deux autres équations de Maxwell ? Justifier votre réponse.

2.4.3. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $E_1(x)$ et donner la solution dans le cas où $k_g < \dfrac{\omega}{c}$, sachant que le champ électrique $\boldsymbol{E_1}$ vérifie des conditions sur les plans conducteurs du guide d'ondes. On notera α l'amplitude de la solution obtenue pour $E_1(x)$ et on introduira un nombre entier N_1, non nul et positif, dénombrant N_1 « modes » de propagation.

2.4.4. Connaissant $E_1(x)$, déterminer les expressions, en représentations complexe et réelle, des champs électrique $\underline{\boldsymbol{E_1}}$ et magnétique $\underline{\boldsymbol{B_1}}$.

2.4.5. Exprimer k_g en fonction de ω, c, N_1 et a. Quelle est la fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle la propagation de l'onde n'existe pas ? Calculer numériquement f_c pour le mode $N_1 = 1$ et $a = 3$ cm.

Les résultats des cinq questions suivantes seront exprimés pour $N_1 = 1$.

2.4.6. On nomme f la fréquence de l'onde. Exprimer la vitesse de phase v_φ en fonction de c et du rapport $\dfrac{f_c}{f}$.

Application numérique : Calculer numériquement v_φ pour $f = 3\ f_c$.

2.4.7. Déterminer le vecteur de Poynting $\boldsymbol{R_1}(x, z, t)$ de l'onde résultante et en déduire sa moyenne temporelle $<\boldsymbol{R_1}(x, z, t)>_t$.

2.4.8. En déduire le flux énergétique moyen Φ_m à travers une surface S perpendiculaire à l'axe Oz et de largeur b suivant la direction Oy. On introduira la vitesse de phase v_φ dans le résultat de Φ_m.

2.4.9. Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_1(x, z, t)$ et sa moyenne temporelle $<u_1(x, z, t)>_t$.

2.4.10. Calculer l'énergie électromagnétique localisée en moyenne $\mathrm{d}W_m$, dans un volume d'épaisseur dz et limité par deux surfaces S perpendiculaires à Oz.
En déduire la vitesse de propagation de l'énergie moyenne v_e en fonction de v_φ à travers les surfaces S perpendiculaires à Oz. Commenter le résultat.

Représenter sur un même graphe v_e et v_φ en fonction du quotient des fréquences $\dfrac{f}{f_c}$.

Positionner sur le graphe les points représentatifs de v_e et v_φ correspondant à l'application numérique de la question 2.4.6.

Fin de l'énoncé

Grandes Ondes et Plasma

Données :

- vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,00 \times 10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$;
- Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}}$.

Partie I - Préliminaires

Les grandes ondes sont des ondes électromagnétiques appelées AM (ou encore GO ou LW). La fréquence de ces ondes varie de $150\ \mathrm{kHz}$ à $300\ \mathrm{kHz}$. Par exemple, la station *Europe 1* émet des ondes dont la fréquence caractéristique vaut $185\ \mathrm{kHz}$. Elles sont émises par quatre mats haubanés qui émettent au total une puissance moyenne $P = 2000\ \mathrm{kW}$. Dans toute la suite, on supposera que ces antennes rayonnent une onde électromagnétique plane et monochromatique de fréquence $f = 185\ \mathrm{kHz}$. On supposera, dans cette partie, que l'onde se propage dans l'air que l'on assimilera au vide.

I.A - Calculer la longueur d'onde associée à ce rayonnement électromagnétique.

I.B - On suppose que le champ électrique est polarisé suivant Oy, et que l'onde se propage suivant les z croissants. En appelant E_0 l'amplitude du champ électrique en O, donner une expression possible du champ électrique complexe $\vec{E}$ en convention $\exp(+j\omega t)$ $(j^2) = -1$ et en notant k la norme du vecteur d'onde. Donner, sans démonstration, l'expression de k en fonction de ω et c.

I.C - Donner le champ magnétique associé à cette onde.

I.D - Donner l'expression du vecteur de Poynting et en calculer sa valeur moyenne temporelle.

I.E - En supposant schématiquement que toute la puissance des antennes se retrouve sur une surface plane notée $S = 100\ \mathrm{km}^2$, établir l'expression de E_0 en fonction de P (puissance moyenne temporelle du rayonnement). Faire l'application numérique.

I.F - En fait les antennes rayonnent dans toutes les directions de l'espace. Critiquer alors le modèle précédent.

I.G - Le modèle de l'onde plane est-il tout de même correct à l'échelle des récepteurs radios couramment utilisés ? Justifier votre réponse.

Partie II - Propagation dans l'atmosphère

L'onde émise par l'antenne se propage dans l'atmosphère terrestre que l'on modélise schématiquement en deux couches (voir figure 1). Une première couche assimilable au vide partant du sol jusqu'à une altitude de $h = 100\ \mathrm{km}$ environ puis une deuxième couche appelée *ionosphère*, épaisse d'environ $200\ \mathrm{km}$:

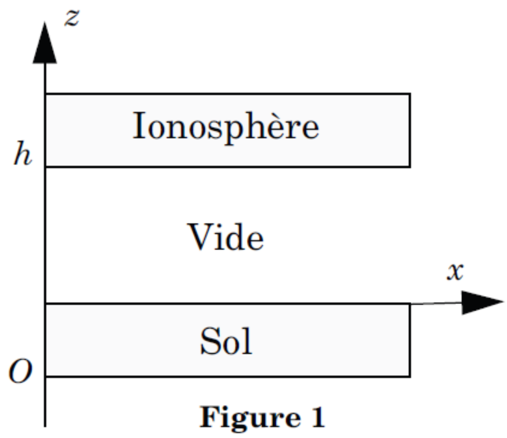


Figure 1

II.A - Réflexion ionosphérique des grandes ondes

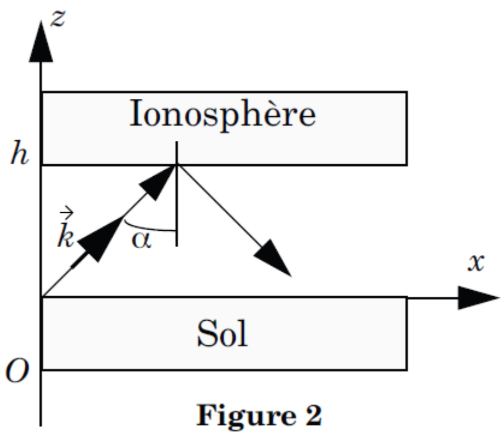


Figure 2

On désire étudier le comportement des grandes ondes lors de leur propagation entre l'ionosphère et le sol terrestre. On suppose *dans cette partie* que l'ionosphère a le même comportement qu'un miroir métallique parfait : l'onde émise au sol et se propageant dans le vide est parfaitement réfléchie par l'ionosphère.

II.A.1)On considère une onde plane, monochromatique, de pulsation ω qui se propage dans la partie « vide » de l'atmosphère. On suppose, comme indiqué sur la figure 2, que l'onde émise par l'antenne peut se mettre sous la forme suivante, avant sa réflexion sur l'ionosphère :

$$\vec{E} = E_0 \exp(j(\omega t - \vec{k}\vec{r}))\overrightarrow{u_y}$$, où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde.

Donner l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de ω, c et α dans le repère $(Oxyz)$.

II.A.2) Donner l'expression du champ magnétique associé au champ électrique.

II.A.3) On cherche à déterminer les caractéristiques de l'onde après réflexion sur l'ionosphère. On postule un champ réfléchi sous la forme :

$$\overrightarrow{E'} = E'_0 \exp(j(\omega t - \overrightarrow{k'}\vec{r}))\overrightarrow{u_y} .$$

a) Pourquoi la pulsation de l'onde réfléchie est-elle inchangée ? On attend un argument physique.

b) Pourquoi la polarisation de l'onde réfléchie est-elle inchangée ? On attend un argument physique.

c) Sachant que la propagation s'effectue dans le vide, montrer la relation :

$$\|\vec{k}\| = \|\overrightarrow{k'}\|$$

d) Pour déterminer E'_0 et $\overrightarrow{k'}$, on admet que les conditions de passage du champ électrique, données par les équations de Maxwell, restent valables, et que le champ électromagnétique est nul dans l'ionosphère. Déterminer $\overrightarrow{k'}$; retrouver la loi de Descartes pour la réflexion.

e) Montrer que :

$$E'_0 = -E_0 \exp\left(-2j\frac{\omega}{c}h\cos(\alpha)\right) .$$

Commenter le signe de cette expression.

f) Donner l'expression finale du champ électrique réfléchi.

g) Donner aussi l'expression du champ magnétique associé.

h) Donner l'expression du champ électrique résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Commenter précisément son expression en mettant en évidence le caractère propagatif et le caractère stationnaire de cette onde.

II.A.4) Conclure sur la possibilité de recevoir les grandes ondes pour des récepteurs situés à plusieurs centaines de kilomètres de l'antenne émettrice. On s'aidera d'un schéma.

II.B - Détermination des conditions de réflexion de l'onde par l'ionosphère

On revient dans cette partie sur la compréhension des phénomènes permettant d'expliquer la réflexion ionosphérique de l'onde. Pour cela, on désire étudier le comportement de l'ionosphère pour les « grandes ondes ». Ainsi, on la modélise comme un plasma : c'est un milieu électriquement neutre, qui compte par unité de volume n électrons libres, de masse m et de charge $-e$, et n ions de charge $+e$ et de masse M. On supposera les ions immobiles car $M \gg m$ et les électrons comme non relativistes (c'est à dire que leurs vitesses restent très inférieures à la vitesse de la lumière).

On considère une onde électromagnétique plane, monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant Oy qui se propage dans l'ionosphère suivant la direction Oz dans le sens des $z > 0$ (voir figure 3) :

$$\vec{E} = E_0 \exp(j(\omega t - \vec{k}\vec{z}))\overrightarrow{u_y}$$

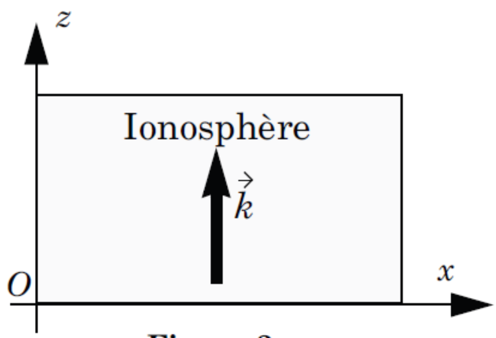


Figure 3

II.B.1) Donner l'expression complexe du champ magnétique $\vec{B}$ dans l'ionosphère en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday.

II.B.2) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un électron, on notera $\vec{v_e}$ sa vitesse.

II.B.3) En comparant les normes des forces magnétiques et électriques, montrer que l'influence du champ magnétique est négligeable devant celle du champ électrique. Dans toute la suite, on suppose que l'électron n'est soumis qu'au seul champ électrique précédent.

II.B.4) Calculer alors le vecteur densité de courant volumique $\vec{J} = -ne\vec{v_e}$ et mettre sa notation complexe sous la forme $\vec{J} = \underline{\sigma}\vec{E}$ où $\underline{\sigma}$ est la conductivité complexe. Montrer que :

$$\underline{\sigma} = \frac{ne^2}{jm\omega}$$

II.B.5) Calculer la puissance moyenne volumique cédée par le champ électromagnétique au plasma

$$P_{\text{cédée}} = \frac{1}{2}Re(\vec{J} \cdot \vec{E}^*)$$

où $Re(A)$ désigne la partie réelle de A et $\vec{E}^*$ le conjugué de $\vec{E}$. Commenter.

II.B.6) Écrire l'équation de Maxwell-Ampère en faisant bien apparaître le courant volumique et le courant de déplacement.

II.B.7) En utilisant les quatre équations de Maxwell, montrer la relation suivante liant la norme du vecteur d'onde et la pulsation ω :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \text{ où } \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

II.B.8) Que se passe-t-il si $\omega < \omega_p$? Montrer que k est alors imaginaire pur. Comment s'écrit le champ électrique ? Est-ce une onde progressive ? Conclure.

II.B.9) *Étude pour* $\omega > \omega_p$

a) Que se passe-t-il si $\omega > \omega_p$? Montrer qu'une onde plane monochromatique peut effectivement se propager. Donner la représentation graphique du module du vecteur d'onde k en fonction de la pulsation ω.

b) Donner les expressions de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.

c) Tracer schématiquement sur le même graphe ces deux vitesses en fonction de la pulsation ω.

d) Commenter le fait que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière c.

e) Que signifie physiquement la vitesse de groupe ? Pourquoi est-elle nécessairement inférieure à c ?

II.B.10) Commenter l'expression suivante : *le plasma se comporte comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure* $f_p = \omega_p/2\pi$ *: toute onde de fréquence inférieure à la fréquence de plasma* f_p *ne peut se propager dans l'ionosphère.*

II.C - Confrontation du modèle aux grandes ondes d'*Europe 1*

II.C.1) *Application numérique* : prenant $n = 10^{11}\ \mathrm{m}^{-3}$, $e = 1,6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$, $m = 9,1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$, calculer la fréquence de plasma moyenne de l'ionosphère $f_p = \omega_p/2\pi$.

II.C.2) En comparant la fréquence des grandes ondes d'*Europe 1* et la fréquence de plasma, montrer que les grandes ondes ne peuvent se propager dans l'ionosphère.

II.C.3) Que se passe-t-il alors pour une onde incidente, du type de celle d'*Europe 1*, issue de l'antenne précédente (partie II.A), lorsqu'elle arrive, en incidence quelconque sur l'ionosphère ?

II.C.4) À votre avis, quels sont les avantages et les inconvénients des grandes ondes comparées, par exemple, aux ondes *FM* qui, elles, ne sont par réfléchies par l'ionosphère ?

Réponses

CCP MP 2010

Onde quasimonochromatique

1.1. $\rightarrow$ L'équation des ondes de Le Rond d'Alembert s'écrit

$$\boxed{\Delta\underline{\Psi} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\underline{\Psi}}{\partial t^2} = 0}$$

$$(-jk)^2\underline{\Psi} - \frac{1}{v^2}(j\omega)^2\underline{\Psi} = 0$$

$$-k^2\underline{\Psi} + \frac{\omega^2}{v^2}\underline{\Psi} = 0$$

soit : $\omega^2 = k^2 v^2$

l'équation est vérifiée puisque

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$\rightarrow$ Condition énergétique :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\Psi}|^2 \, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^2 \, dz$$

est infini.

La condition énergétique n'est pas vérifiée.

1.2.1 $\underline{\Psi}'(z,t) = \underline{\Psi}_1(z,t) + \underline{\Psi}_2(z,t)$

$$= A\exp j(\omega_1 t - k_1 z) + A\exp j(\omega_2 t - k_2 z)$$

$$= A\exp j[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k)z]$$
$$+ A\exp j[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)z]$$

$$= A\left(\exp -j(\Delta\omega t - \Delta k z) + \exp j(\Delta\omega t - \Delta k z)\right)$$
$$\exp j(\omega_0 t - k_0 z)$$

$$= 2A\cos(\Delta\omega\, t - \Delta k\, z)\exp j(\omega_0 t - k_0 z)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\Psi}'(z,t) = \Psi_0'(z,t)\exp j(\omega_0 t - k_0 z) \\ \text{avec} \\ \Psi_0'(z,t) = 2A\cos(\Delta\omega . t - \Delta k . z) \end{array}}$$

Les deux ondes ayant la même vitesse, notée v, on peut écrire aussi

$$\Psi'(z,t) = 2A \cos\left[\Delta\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right] \exp j\left[\omega_0\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]$$ ou encore

$$\Psi'(z,t) = 2A \cos\left[\Delta\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right] \cos\left[\omega_0\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]$$

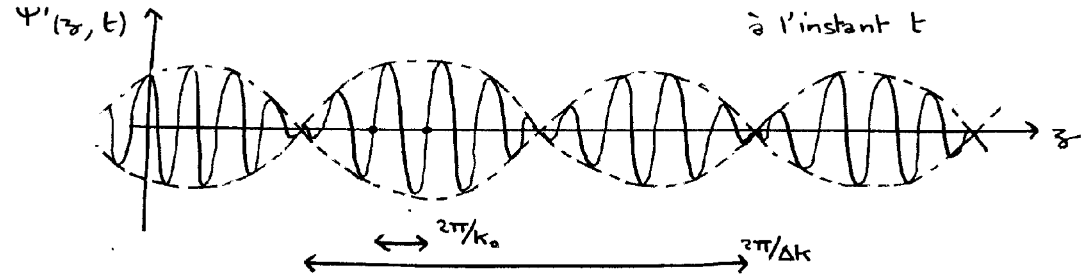
le texte donne, puisque les deux ondes sont de fréquences voisines

$$\Delta\omega \ll \omega$$

donc la période (dans le temps ou dans l'espace) du cosinus contenant $\Delta\omega$ est beaucoup plus grande que la période du cosinus contenant ω.

$\Psi'_0(z,t)$ correspond à une enveloppe pour le $\cos(\omega_0 t - k_0 z)$

(cf "battements")



Les maxima de l'enveloppe correspondent à

$$|\Psi'_0(z,t)| = 2A$$

$$\cos(\Delta\omega\, t - \Delta k\, z) = \pm 1$$

$$\Delta k\, z - \Delta\omega\, t = m\pi \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$z_{max} = \underbrace{\frac{\Delta\omega}{\Delta k}}_{V} t + m\frac{\pi}{\Delta k}$$

On trouve donc que la vitesse V du maximum est $V = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$.

La méthode la plus simple est sans doute de voir que le max (de l'enveloppe) se déplace à la vitesse de l'enveloppe.

Donc $V = \frac{dz}{dt}$ avec dz et dt tels que $\Psi'_0(z,t)$ reste constant.

$$\Delta\omega\, t - \Delta k\, z = \Delta\omega\,(t+dt) - \Delta k\,(z+dz)$$

$$\Delta\omega \, dt - \Delta k \, dz = 0$$

$$V = \frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{V = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = v}$$

Chaque onde se propage à la vitesse de phase v
le maximum de la somme des deux ondes se propage à la vitesse de groupe $V = v$ aussi.

1.2.2. → $\underline{\Psi_1}$ vérifie l'équation des ondes (avec $\omega_1 = k_1 v$)
$\underline{\Psi_2}$ vérifie l'équation des ondes (avec $\omega_2 = k_2 v$)
donc $\underline{\Psi'} = \underline{\Psi_1} + \underline{\Psi_2}$ vérifie l'équation des ondes (linéarité)

→ Condition énergétique.
Ici, on ne peut évoquer la linéarité puisque c'est $|\underline{\Psi}|^2$ qui intervient. Il faut faire le calcul.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\Psi'}|^2 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\Psi'} \, \underbrace{\underline{\Psi'}^*}_{\text{conjugué}} \, dz$$

$$= 4A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\cos^2(\Delta\omega t - \Delta k z)}_{\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos[2(\Delta\omega t - \Delta k z)]}{2}\right)} dz$$

$$= 2A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz$$

La condition énergétique n'est pas vérifiée puisque cette intégrale diverge.
Ici bien qu'à un certain instant l'énergie ne soit pas localisée uniformément dans l'espace, l'énergie totale diverge

---

1.3.1

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} (k - k_0)$$

$$= \omega_0 + \underset{\text{en } k_0}{v_g} (k - k_0)$$

avec $\underset{\text{en } k_0}{v_\varphi} = \dfrac{\omega_0}{k_0}$

$$\boxed{\omega(k) = v_\varphi k_0 + v_g (k - k_0)}$$

1.3.2.

$$\underline{\Psi}''(z,t) = A \int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} \exp j(\omega t - kz)\, dk$$

$$= A \int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} \exp j(\overbrace{v_\varphi k_0}^{\omega_0} t + v_g (k-k_0)t - k_0 z - (k-k_0) z)\, dk$$

$$= A \exp j(\omega_0 t - k_0 z) \underbrace{\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} \exp[j(k-k_0)(v_g t - z)]\, dk}_{\frac{\exp\left[j\frac{\Delta k}{2}(v_g t - z)\right] - \exp\left[-j\frac{\Delta k}{2}(v_g t - z)\right]}{j(v_g t - z)}}$$

$$= A \exp j(\omega_0 t - k_0 z) \quad \Delta k \ \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta k}{2}(v_g t - z)\right]$$

donc :

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\Psi}''(z,t) = \Psi_0''(z,t) \exp j(\omega_0 t - k_0 z) \\ &\text{avec} \\ &\Psi_0''(z,t) = A\ \Delta k \ \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta k}{2}(v_g t - z)\right] \\ &\qquad\qquad = A\ \Delta k \ \operatorname{sinc}\left[\frac{\Delta\omega\, t - \Delta k\, z}{2}\right] \end{aligned}}$$

1.3.3. $\rightarrow$ Le caractère monochromatique de l'onde est en lien avec :

$$\boxed{\begin{aligned} &\exp j(\omega_0 t - k_0 z) \\ &(\text{pulsation } \omega_0) \end{aligned}}$$

$\rightarrow$ Condition énergétique : on détermine

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\Psi}''(z,t)|^2\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\, \Delta k^2 \operatorname{sinc}^2\left[\frac{\Delta k}{2}(v_g t - z)\right] dz$$

On pose $u = \frac{\Delta k}{2}(v_g t - z)$

$du = -\frac{\Delta k}{2} dz$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} A^2\, \Delta k^2 \operatorname{sinc}^2 u \times -\frac{2}{\Delta k}\, du$$

$$= 2 A^2 \Delta k \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2 u\, du}_{\pi}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} W = 2\pi A^2 \Delta k \\ \text{fini si } A^2 \Delta k \text{ est fini} \end{array}}$$

→ Vitesse de l'énergie

L'énergie qui se trouve en z, t (en fait entre z et $z+dz$) est notée

$$dW = |\underline{\Psi}''(z,t)|^2 \, dz$$
$$= A^2 \, \Delta k^2 \, \text{sinc}^2\left[\frac{\Delta k}{2}(v_g t - z)\right] dz$$

Elle est fonction de $(v_g t - z)$

Cette même énergie se retrouve en $t+\delta t$ à la position $z+\delta z$ (avec donc $\delta z = v_E \; \delta t$) si

$$v_g(t+\delta t) - (z+\delta z) = v_g t - z$$
$$v_g \; \delta t - \underset{\substack{\uparrow \\ v_E \, \delta t}}{\delta z} = 0$$

On obtient donc

$$\boxed{v_E = v_g}$$

1.3.4.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k(\omega)}$$

En faisant par exemple une dérivée logarithmique :

$$\ln v_\varphi = \ln \omega - \ln k$$
$$\frac{dv_\varphi}{v_\varphi} = \frac{d\omega}{\omega} - \frac{dk}{k}$$
$$\frac{1}{v_\varphi}\frac{dv_\varphi}{d\omega} = \frac{1}{\omega} - \frac{dk/d\omega}{k}$$
$$\frac{\omega}{v_\varphi}\frac{dv_\varphi}{d\omega} = 1 - \frac{1/v_g}{1/v_\varphi}$$
$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_\varphi}\left(1 - \frac{\omega}{v_\varphi}\frac{dv_\varphi}{d\omega}\right)$$

$$\boxed{v_g = \frac{v_\varphi}{1 - \dfrac{\omega}{v_\varphi}\dfrac{dv_\varphi}{d\omega}}}$$

application :

Par exemple :
$$v_\varphi = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - c^2a^2}}$$
$$\ln v_\varphi = \ln c + \ln\omega - \frac{1}{2}\ln(\omega^2 - c^2a^2)$$
$$\frac{dv_\varphi}{v_\varphi} = \frac{d\omega}{\omega} - \frac{1}{2}\frac{2\omega\, d\omega}{\omega^2 - c^2a^2}$$
$$= \frac{d\omega}{\omega}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega^2 - c^2a^2}\right)$$
$$= \frac{d\omega}{\omega}\,\frac{-c^2a^2}{\omega^2 - c^2a^2}$$
$$\frac{\omega\, dv_\varphi}{v_\varphi\, d\omega} = \frac{-c^2a^2}{\omega^2 - c^2a^2}$$
$$v_g = \frac{v_\varphi}{1 + \dfrac{c^2a^2}{\omega^2 - c^2a^2}}$$
$$= \frac{v_\varphi}{\omega^2/(\omega^2 - c^2a^2)}$$
$$= \frac{v_\varphi}{v_\varphi^2/c^2}$$
$$\boxed{v_g\, v_\varphi = c^2}$$
$$\boxed{v_g = c\sqrt{1 - \frac{c^2a^2}{\omega^2}}}$$

On a $v_g < c$ et $v_\varphi > c$

Onde entre deux plans parfaitement conducteurs

2.1. → La puissance volumique apparue par effet Joule peut s'écrire

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j}\,\vec{E}$$

$$\boxed{\frac{dP_J}{d\tau} = \gamma\,\vec{E}^2}$$

or $\frac{dP_J}{d\tau}$ doit rester fini alors que γ est infini.

Il faut donc que dans le conducteur parfait.

$$\vec{E} = \vec{0}$$

→ Equation de Maxwell - Faraday

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{rot}\,\vec{E}}_{\text{nul dans le conducteur parfait}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

donc : $\vec{B}$ est indépendant du temps, il s'agit d'un champ magnétostatique.

Dans ce problème, on s'intéresse à une onde $(\vec{B} = \vec{B}(M,t))$

Dans le conducteur parfait, pas de $\vec{B}_{onde}$

$$\vec{B}_{onde} = \vec{0}$$

→ Equation de Maxwell - Ampère

$$\boxed{\underbrace{\overrightarrow{rot}\,\vec{B}}_{\text{nul}} = \mu_0\,\vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{nul}}}$$

donc : $\vec{j} = \vec{0}$

→ Equation de Maxwell - Gauss

$$\boxed{\underbrace{div\,\vec{E}}_{\text{nul}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

donc $\rho = 0$

2.2.

$$\boxed{\overrightarrow{E_{T_2}} - \overrightarrow{E_{T_1}} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E_{N_2}} - \overrightarrow{E_{N_1}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{e_x}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B_{T_2}} - \overrightarrow{B_{T_1}} = \mu_0 \overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{e_x}}$$
$$\boxed{\overrightarrow{B_{N_2}} - \overrightarrow{B_{N_1}} = \overrightarrow{0}}$$

2.3.1.
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\underline{E}_i} = -\frac{\partial \overrightarrow{\underline{B}_i}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{\underline{E}_i} = -j\omega \overrightarrow{\underline{B}_i}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$
$$= -(j k_x \overrightarrow{e_x} + j k_y \overrightarrow{e_y} + j k_z \overrightarrow{e_z})$$
$$= -j\vec{k}$$

$$\vec{k} = -k\,\overrightarrow{e_x}$$

donc on retrouve l'équation de structure :

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{B}_i} = \frac{\vec{k} \wedge \overrightarrow{\underline{E}_i}}{\omega}}$$

ici
$$= \frac{-k\overrightarrow{e_x} \wedge E_0 \exp j(\omega t + kx)\overrightarrow{e_y}}{\omega}$$
$$= -\frac{k}{\omega} E_0 \exp j(\omega t + kx)\,\overrightarrow{e_z}$$

en utilisant la relation de dispersion, connue, dans le vide soit $\omega = kc$

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{B}_i} = -\frac{E_0}{c} \exp j(\omega t + kx)\overrightarrow{e_z}}$$

2.3.2. Le plan $(M, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan d'antisymétrie. Le champ $\overrightarrow{E_r}(M,t)$ est donc perpendiculaire à ce plan donc selon $\overrightarrow{e_y}$

$$\overrightarrow{\underline{E}_i} = E_0 \exp j(\omega t + kx)\,\overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{\underline{E}_r} = \underline{E}_r \qquad \overrightarrow{e_y}$$

Le champ total dans le vide est $\overrightarrow{\underline{E}_i} + \overrightarrow{\underline{E}_r}$. C'est un champ tangentiel au plan conducteur parfait $x=0$. Il doit donc (continuité) être nul en $x=0$.

$$\overrightarrow{\underline{E}_i}(0,t) + \overrightarrow{\underline{E}_r}(0,t) = \vec{0}$$
$$E_0 \exp j\omega t\ \overrightarrow{u_y} + \overrightarrow{\underline{E}_r}(0,t) = \vec{0}$$
$$\boxed{\overrightarrow{\underline{E}_r}(0,t) = -E_0 \exp j\omega t\ \overrightarrow{u_y}}$$

De plus, pour le vecteur d'onde de cette onde réfléchie :

$$\vec{k_r} = -\vec{k_i} = -\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{k_r} = k\,\vec{e_x}}$$

$$\vec{E_r}(M,t) = \vec{E_r}(O,t)\ \exp -j\vec{k_r}\,\vec{OM}$$

$$= -E_0 \exp j\omega t\ \vec{u_y}\ \underbrace{\exp -(jk\,\vec{OM}\,\vec{e_x})}_{\exp -jkx}$$

finalement

$$\boxed{\vec{E_r}(x,t) = -E_0 \exp j(\omega t - kx)\ \vec{e_y}}$$

$$\vec{B_r} = \frac{\vec{k_r} \wedge \vec{E_r}}{\omega} = \frac{k\,\vec{e_x} \wedge -E_0 \exp j(\omega t - kx)\ \vec{e_y}}{\omega}$$

$$\boxed{\vec{B_r}(x,t) = -\frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - kx)\,\vec{e_z}}$$

2.3.3.

$$\vec{E} = \left(E_0 \exp j(\omega t + kx) - E_0 \exp j(\omega t - kx)\right)\vec{e_y}$$

$$= E_0\,(\exp jkx - \exp -jkx)\ \exp j\omega t\ \vec{e_y}$$

$$\boxed{\vec{E} = 2jE_0 \sin(kx)\exp(j\omega t)\ \vec{e_y}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -2E_0 \sin(kx)\ \sin(\omega t)\ \vec{e_y}}$$

$$\vec{B} = \left(-\frac{E_0}{c}\exp j(\omega t + kx) - \frac{E_0}{c}\exp j(\omega t - kx)\right)\vec{e_z}$$

$$= -\frac{E_0}{c}\,(\exp jkx + \exp -jkx)\ \exp j\omega t\ \vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{B} = -2\frac{E_0}{c}\cos(kx)\exp(j\omega t)\,\vec{e_z}}$$

$$\boxed{\vec{B} = -2\frac{E_0}{c}\cos(kx)\ \cos(\omega t)\ \vec{e_z}}$$

$$\frac{|E|}{|B|} = \frac{2E_0\,|\sin(kx)|}{2\frac{E_0}{c}\,|\cos(kx)|}$$

$$\boxed{\frac{|E|}{|B|} = c\ |\tan(kx)|}$$

2.3.4. $\vec{E}$ doit aussi s'annuler en $x = a$ d'où

$$\sin(ka) = 0$$

$$ka = N\pi \qquad (N \in \mathbb{R}^*)$$

avec $\omega = k c$ et $\omega = 2\pi f$

donc :

$$\frac{\omega a}{c} = N\pi$$

$$\boxed{f_N = N \frac{c}{2a}}$$

Fréquence propre minimale pour N = 1

$$f_{min} = \frac{c}{2a}$$

A.N.

$$= \frac{3.10^8}{2 \times 3\ 10^{-2}}$$

$$= 5\ 10^9 \text{ Hz}$$

$$\boxed{f_{min} = 5 \text{ GHz}}$$

2.3.5. Vecteur de Poynting :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

(il faut ici travailler en réels)

$$\vec{R} = \begin{matrix} -2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t)\ \vec{e_y} \wedge \\ -\frac{2E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t)\ \vec{e_z} \end{matrix} \Big/ \mu_0$$

$$\vec{R} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin(kx) \cos(kx) \sin(\omega t) \cos(\omega t)\ \vec{e_x}$$

$$\boxed{\vec{R} = \varepsilon_0 c E_0^2 \sin\left(2\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(2\frac{\pi}{a}ct\right) \vec{e_x}}$$

Moyenne temporelle (puisque $\langle \sin(2\omega t) \rangle_t = 0$)

$$\boxed{\langle \vec{R} \rangle_t = \vec{0}}$$

Les ondes sont des ondes stationnaires. Il n'y a donc pas de propagation d'énergie. (Selon $\vec{e_x}$, l'énergie est bloquée entre les deux plans.)

2.3.6. Densité volumique d'énergie électrique :

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0\ 4E_0^2 \sin^2(kx) \sin^2(\omega t)$$

Densité volumique d'énergie magnétique:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \frac{4E_0^2}{c^2} \cos^2(kx) \cos^2(\omega t)$$

avec $\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0$

Finalement

$$u = u_E + u_B$$

$k = \frac{\pi}{a}$ $\omega = \frac{\pi c}{a}$

$$\boxed{u = 2\varepsilon_0 E_0^2 \left(\sin^2(kx) \sin^2(\omega t) + \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) \right)}$$

Moyenne temporelle

$$\langle u \rangle_t = 2\varepsilon_0 E_0^2 \left(\sin^2(kx) \underbrace{\langle \sin^2(\omega t)\rangle}_{\frac{1}{2}} + \cos^2(kx) \underbrace{\langle \cos^2(\omega t)\rangle}_{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\boxed{\langle u \rangle_t = \varepsilon_0 E_0^2}$$

2.3.7.

En 2.2., on a trouvé :

$$\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{e_x}$$

En 2.1., on a trouvé

$$\overrightarrow{B_1} = \vec{0}$$

donc

$$\overrightarrow{B_2} = \mu_0 \overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{e_x}$$

On multiplie vectoriellement à gauche par $\overrightarrow{e_x}$

$$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{B_2} = \mu_0 \underbrace{\overrightarrow{e_x} \wedge (\overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{e_x})}_{\overrightarrow{j_S} \underbrace{(\overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_x})}_{1} - \overrightarrow{e_x} \underbrace{(\overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{j_S})}_{\text{nul}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{j_S} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{en } x=0}}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{e_x} \wedge -\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{j_S} = \frac{1}{\mu_0 c} 2E_0 \cos(\omega t) \overrightarrow{e_y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{j_S} = 2\varepsilon_0 c E_0 \cos\left(\frac{\pi c}{a} t\right) \overrightarrow{e_y}}$$

2.3.8.

$$\overrightarrow{df} = \overrightarrow{j_S}\, dS \wedge \frac{\overrightarrow{B}(0,t)}{2}$$

$$= 2\varepsilon_0 c E_0 \cos(\omega t)\, dS\, \overrightarrow{e_y} \wedge \frac{1}{2} \frac{(-2E_0)}{c} \cos \omega t\, \overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{df} = -2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi c}{a} t\right) dS\, \overrightarrow{e_x}}$$

$$<\overrightarrow{dF}>_t = - \varepsilon_0 E_0^2 \, dS \, \overrightarrow{e_x}$$
$$= - <p>_t \, dS \, \overrightarrow{e_x}$$

Cette force due à la pression de radiation pousse la plaque selon $-\overrightarrow{e_x}$, avec

$$\boxed{\begin{aligned} <p>_t &= \varepsilon_0 E_0^2 \\ &= <u>_t \end{aligned}}$$

Remarque: dimensions
$[p] = [F]/[S] = [M][a]/[S] = M L^{-1} T^{-2}$
$[u] = [W]/[V] = \dfrac{[F]\times[L]}{[V]} = M L^{-1} T^{-2}$

A.N.

$$<p>_{/S.I.}^{unité} = <u>_{/S.I.}^{unité} = \frac{1}{36\pi 10^9} \, 100$$

$$\boxed{<p> = 8{,}8 \; 10^{-8} \; Pa}$$
$$\boxed{<u> = 8{,}8 \; 10^{-8} \; J \, m^{-3}}$$

2.4.1. $$\overrightarrow{E_1} = E_1(x) \exp j(\omega t - k_g z) \overrightarrow{e_y}$$

On écrit M.F. donc :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E_1} = - \frac{\partial \overrightarrow{B_1}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{E_1} = - j\omega \overrightarrow{B_1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B_1} = \frac{j}{\omega} \left(\vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{E_1} \right)}$$

avec $$\underset{(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})}{\vec{\nabla}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ -jk_g \end{vmatrix} \wedge \overrightarrow{E_1} \begin{vmatrix} 0 \\ E_1(x,z,t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_1} = \left[j k_g E_1(x,z,t) \overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial x} E_1(x,z,t) \overrightarrow{e_z} \right] \frac{j}{\omega}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{B_1} = &- \frac{k_g}{\omega} E_1(x) \exp j(\omega t - k_g z) \overrightarrow{e_x} \\ &+ \frac{j}{\omega} \frac{dE_1(x)}{dx} \exp j(\omega t - k_g z) \overrightarrow{e_z} \end{aligned}}$$

par rapport à l'énoncé du sujet :

$$F(x) = - \frac{k_g}{\omega} E_1(x)$$
$$G(x) = \frac{1}{\omega} \frac{dE_1(x)}{dx}$$

L'onde se propage selon $\overrightarrow{e_z}$

et $\overrightarrow{E_1} \perp \overrightarrow{e_z}$ (onde transversale électrique)

$\overrightarrow{B_1}$ pas perpendiculaire à $\overrightarrow{e_z}$ (pas transversale magnétique)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'onde est T.E.}\\ \text{(transversale électrique)}\end{array}}$$

2.4.2. → On écrit M.A.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{\underline{E}}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{\underline{B}} = \frac{j\omega}{c^2}\,\overrightarrow{\underline{E}}$$

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}\\ 0\\ -jk_g\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}\underline{B_x}\\ 0\\ \underline{B_z}\end{array}\right. = \frac{j\omega}{c^2}\left|\begin{array}{l}0\\ \underline{E}\\ 0\end{array}\right.$$

$$\frac{\partial \underline{B_z}}{\partial x} + jk_g\,\underline{B_x} = \frac{j\omega}{c^2}\,\underline{E}$$

On multiplie par : $j\omega$

$$j\omega\frac{\partial \underline{B_z}}{\partial x} - k_g\omega\,\underline{B_x} = -\frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{E}$$

$$-\frac{d^2E_1(x)}{dx^2}\exp j(\ ) + k_g^2\,E_1(x)\exp j(\ ) = \frac{\omega^2}{c^2}\,E_1(x)\exp j(\ )$$

$$\boxed{\frac{d^2E_1(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right)E_1(x) = 0}$$

→ De M.A.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{B_1}} = \frac{j\omega}{c^2}\,\overrightarrow{\underline{E_1}}$$

on tire Maxwell-Gauss

$$div\,\overrightarrow{\underline{E_1}} = \frac{c^2}{j\omega}\,\underbrace{div\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{B_1}}}_{nul}$$

$$= 0$$

De M.F.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{E_1}} = -j\omega\,\overrightarrow{\underline{B_1}}$$

on tire Maxwell-flux

$$div\,\overrightarrow{\underline{B_1}} = -\frac{1}{j\omega}\,\underbrace{div\,\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{E_1}}}_{nul}$$

$$= 0$$

2.4.3. On pose $k_t^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$

$$k_t = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2}$$

L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d^2E_1(x)}{dx^2} + k_t^2\, E_1(x) = 0$$

$$\boxed{E_1(x) = A\cos(k_t x) + B\sin(k_t x)}$$

qui doit, en vue de la continuité du champ E tangentiel, s'annuler :

– en $x=0$:

$$0 = A$$

– en $x=a$:

$$0 = B\sin(k_t a)$$

Il faut donc, sauf à annuler totalement la solution, que

$$\sin(k_t a) = 0$$

$$k_t a = N_1 \pi \qquad (N_1 \text{ entier, non nul, positif})$$

$$\boxed{k_t = N_1 \frac{\pi}{a}}$$

$$\boxed{E_1(x) = \alpha \sin\frac{N_1\pi x}{a}}$$

2.4.4. pour le mode N_1 :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E_1}} = \alpha \sin\frac{N_1\pi x}{a}\exp j(\omega t - k_g z)\,\overrightarrow{e_y}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{B_1}} &= -\frac{k_g}{\omega}\alpha\sin\frac{N_1\pi x}{a}\exp j(\omega t - k_g z)\,\overrightarrow{e_x}\\ &+\frac{j}{\omega}\frac{N_1\pi}{a}\alpha\cos\frac{N_1\pi x}{a}\exp j(\omega t - k_g z)\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned}}$$

En réels :

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{E_1} &= \alpha\sin\frac{N_1\pi x}{a}\cos(\omega t - k_g z)\,\overrightarrow{e_y}\\ \overrightarrow{B_1} &= -\frac{k_g}{\omega}\alpha\sin\frac{N_1\pi x}{a}\cos(\omega t - k_g z)\,\overrightarrow{e_x}\\ &-\frac{1}{\omega}\frac{N_1\pi}{a}\alpha\cos\frac{N_1\pi x}{a}\sin(\omega t - k_g z)\,\overrightarrow{e_z}\end{aligned}}$$

2.4.5. Expression de k_g :

<u>On suppose</u> que l'onde se propage selon les z croissants, donc $k_g > 0$

D'après 2.4.3. on a l'équation de dispersion :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_g^2 + k_t^2$$

Pour le mode N_1 :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_g^2 + \frac{N_1^2 \pi^2}{a^2}$$

$$\boxed{k_g = + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{N_1^2 \pi^2}{a^2}}}$$

Cette onde progressive n'existe que si

$$\omega > \frac{N_1 \pi c}{a}$$

$$f > \underbrace{\frac{N_1 c}{2a}}_{f_c}$$

$$\boxed{f_c = \frac{N_1 c}{2a}}$$

A.N.
$$= \frac{1 . \ 3\ 10^8}{2 . \ 3\ 10^{-2}}$$

$$\boxed{f_{c\ \text{mode} 1} = 5 \text{ GHz}}$$

On retrouve ici la fréquence de coupure obtenue en 2.3.4.

2.4.6. mode 1

$$k_g = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

$$= \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_g}$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}}$$

A.N.
$$= \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}}$$

$$= 1,06\ c$$

$$\boxed{v_\varphi = 3,18\ 10^8\ m s^{-1}}$$

2.4.7.
$$\overrightarrow{R_1} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ E_{1y} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_{1x} \\ 0 \\ B_{1z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{E_{1y} B_{1z}}{\mu_0} \vec{e_x} - \frac{E_{1y} B_{1x}}{\mu_0} \vec{e_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R_1} = & -\frac{\alpha^2}{\mu_0 \omega} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - k_g z) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e_x} \\ & + \frac{\alpha^2}{\mu_0 \omega} k_g \left(\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right)^2 \left(\cos(\omega t - k_g z)\right)^2 \vec{e_z} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\langle \vec{R_1} \rangle_t = \frac{\alpha^2}{2\mu_0 \omega} k_g \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{e_z}}$$

2.4.8.

$$\Phi_m = \iint_{\substack{\text{section} \\ a \times b}} \langle \vec{R_1} \rangle_t \, dx \, dy \, \vec{e_z}$$

$$= b \int_{x=0}^{a} \langle \vec{R_1} \rangle_t \, dx \, \vec{e_z}$$

$$= b \frac{\alpha^2}{2\mu_0 \omega} k_g \underbrace{\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx}_{\int_0^a \frac{1}{2} dx - \int_0^a \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx}$$

$$\frac{a}{2} \qquad \underbrace{- \frac{1}{2} \frac{a}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi a}{a}\right) - \sin(0)\right]}_{\text{nul}}$$

cf (valeur moyenne dans l'espace de $\sin^2$ sur une période du $\sin^2$) $= \frac{1}{2}$

$$\Phi_m = \frac{a b \, \alpha^2 k_g}{4 \mu_0 \omega}$$

En faisant intervenir $v_\varphi = \frac{\omega}{k_g}$

$$\boxed{\Phi_m = \frac{a b \, \alpha^2}{4 \mu_0 v_\varphi}}$$

2.4.9.

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \alpha^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2(\omega t - k_g z)$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \left[\frac{k_g^2}{\omega^2} \alpha^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2(\omega t - k_g z) + \frac{1}{\omega^2} \frac{\pi^2}{a^2} \alpha^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2(\omega t - k_g z) \right]$$

$$u_1 = u_E + u_B$$

$$\langle u_1 \rangle_t = \langle u_E \rangle_t + \langle u_B \rangle_t$$

$$\boxed{\langle u_1 \rangle_t = \frac{1}{4} \varepsilon \alpha^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \alpha^2 \frac{c^2}{\omega^2} \left(k_g^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right)}$$

2.4.10.

$$dW_m = dz \iint_{\substack{\text{section} \\ a \times b}} \langle u_1 \rangle_t \, dx \, dy$$

$$= dz \; b \int_{x=0}^{a} \langle u_1 \rangle_t \, dx$$

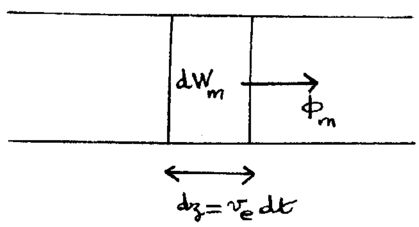
En utilisant la remarque faite en 2.4.8, on peut faire (puisque on intègre ici $\sin^2 \frac{\pi x}{a}$ et $\cos^2 \frac{\pi x}{a}$ sur une période a)

$$\langle u_1 \rangle_{t,x} = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \alpha^2 + \frac{1}{8} \varepsilon_0 \alpha^2 \frac{c^2}{\omega^2} \underbrace{\left(k_g^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \right)}_{\substack{\frac{\omega^2}{c^2} \\ \text{cf dispersion}}}$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_0 \alpha^2$$

$$\boxed{dW_m = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \alpha^2 \, a b \, dz}$$

Cette énergie qui se déplace à la vitesse v_e selon z va traverser la surface ab pendant dt avec $dz = v_e \, dt$



$$dW_m = \phi_m \, dt$$

$$\frac{1}{4} \varepsilon \alpha^2 \, a b \, v_e \, dt = \phi_m \, dt$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{\mu_0} \alpha^2 \, a b \, \frac{dt}{v_\varphi}$$

$$v_e \; v_\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

$$\boxed{v_e \; v_\varphi = c^2}$$

A la question 1.3.4. on avait trouvé

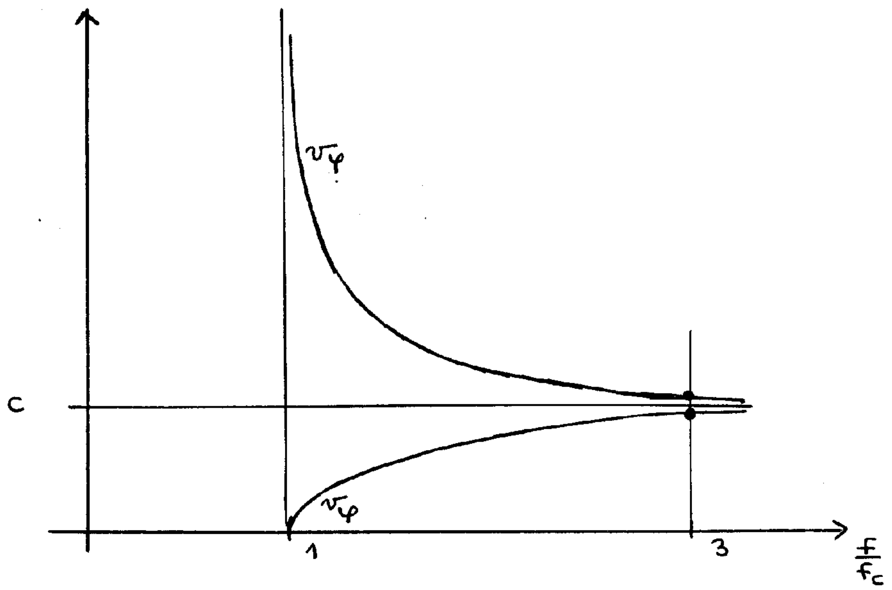
$$v_g \; v_\varphi = c^2$$

donc $\boxed{v_e = v_g}$

graphe :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$$v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



Centrale TSI 2010

Préliminaires

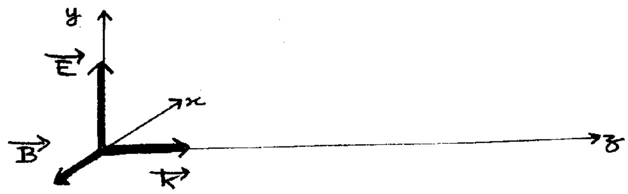
IA

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$$

A.N. $= \dfrac{3\ 10^8}{185\ 10^3}$

$$\boxed{\lambda = 1{,}62\ \text{km}}$$

IB



$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_o}\ \exp j(\omega t - \vec{k}\vec{r})\ \vec{u_y}$$

$\underline{E_o} \to E_o \exp -j\varphi$; $\vec{k} = k\ \vec{u_z}$

Pour simplifier, on choisit φ nul

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = E_o\ \exp j(\omega t - kz)\ \vec{u_y}}$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

IC M.F.

$$\overrightarrow{rot}\ \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega\ \underline{\vec{B}}$$

$$-j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega\ \underline{\vec{B}}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}}$$

$$= \frac{k\ \vec{u_z} \wedge \underline{E}\ \vec{u_y}}{\omega}$$

$$= \frac{1}{c}\ \underline{E}\ (-\vec{u_x})$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = -\frac{E_o}{c}\ \exp j(\omega t - kz)\ \vec{u_x}}$$

ID Vecteur de Poynting

$$\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_o}$$

On doit travailler en réels

$$\overrightarrow{\pi} = \frac{1}{\mu_0} E_0 \cos(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_y} \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz)\, (-\overrightarrow{u_x})$$

$$\boxed{\overrightarrow{\pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_z}}$$

puis

$$\boxed{\langle \overrightarrow{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\, \overrightarrow{u_z}}$$

I E

$$P = \iint_{\text{surface}} \langle \overrightarrow{\pi} \rangle\, \overrightarrow{dS}$$

$$= \iint_S \langle \pi \rangle\, dS$$

$$= \langle \pi \rangle\, S$$

$$= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\, S$$

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{S}}}$$

A.N.

$$= \left(\frac{2 \,.\, 4\pi 10^{-7} \,.\, 3.10^8 \,.\, 2\, 10^6}{100 \quad 10^6} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{E_0 = 3{,}88 \text{ V m}^{-1}}$$

I F L'onde est en réalité sphérique.

L'amplitude décroît en $\frac{1}{r}$ dans la zone de rayonnement.

$$E = \frac{\alpha}{r} \cos(\omega t - kz)$$

(en supposant ici une onde isotrope, ce qui n'est pas vrai a priori)

I G Localement, l'onde a effectivement une structure d'onde plane.

le plan d'onde correspondant au plan tangent.

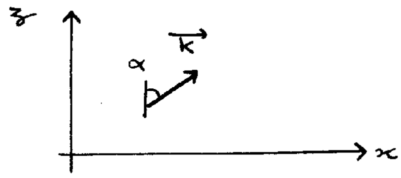
(onde quasiplane), les dimensions du récepteur sont sans doute "petites" par rapport à r et à λ.

Propagation dans l'atmosphère

Réflexion ionosphérique

II.A.1.

$$\vec{E} = \overbrace{E_0 \exp j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}^{\underline{E}} \ \vec{u_y}$$



$$\vec{k} = k_x \ \vec{u_x} + k_z \ \vec{u_z}$$
$$= k \ (\sin\alpha \ \vec{u_x} + \cos\alpha \ \vec{u_z})$$

On a rappelé en IB que dans le vide $\omega = kc$

$$\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c}(\sin\alpha \ \vec{u_x} + \cos\alpha \ \vec{u_z})}$$

II.A.2. On a retrouvé en IC que pour une OPPM ds le vide

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$
$$= \frac{1}{c}(\sin\alpha \ \vec{u_x} + \cos\alpha \ \vec{u_z}) \wedge \underline{E} \ \vec{u_y}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{E}}{c} \ (\sin\alpha \ \vec{u_z} - \cos\alpha \ \vec{u_x})}$$

II.A.3.

a) L'onde incidente en arrivant sur l'ionosphère va faire osciller (en régime forcé) les particules chargées à la pulsation ω.
On obtient donc des dipôles oscillants à la pulsation ω qui vont émettre une onde réfléchie de pulsation ω identique
L'onde réfléchie aura la même pulsation que l'onde incidente.

II A 3

b) L'onde incidente est polarisée selon $\vec{u_y}$ de sorte que tout plan $(M, \vec{u_x}, \vec{u_z})$ est un plan d'antisymétrie.

Si M est un point de l'ionosphère, le moment dipolaire $\vec{p}$ induit en M sera perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie.
Le champ réfléchi en un point M dans le vide, vrai vecteur, sera perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie donc selon $\vec{u_y}$.

Le champ réfléchi a même polarisation que le champ incident.
(perpendiculaire au plan d'incidence, qui est un plan d'antisymétrie)

II A 3

c) Pour l'onde incidente $\omega^2 = k^2 c^2$ (dispersion pour OPPM dans le vide)

Pour l'onde réfléchie $\omega'^2 = k'^2 c^2$

or $\omega = \omega'$

donc :

$\|\vec{k'}\| = \|\vec{k}\|$

II . A . 3.

d) On admet que le champ électromagnétique est nul dans l'ionosphère
– en réalité, il y a une <u>onde évanescente</u> –

En $z = h$, la composante tangentielle de $\vec{E}$ total dans le vide doit être nulle.

$$E_0 \exp j(\omega t - \vec{k}\vec{r}) + \underline{E}'_0 \exp j(\omega t - \vec{k}'\vec{r}) = 0$$

$$\boxed{E_0 \exp j(\omega t - k_x x - k_z h) = -\underline{E}'_0 \exp j(\omega t - k'_x x - k'_y y - k'_z h) \quad \forall x, \forall y, \forall t \text{ et } z = h}$$

donc (cf $\forall x$) : $\boxed{k'_x = k_x = \frac{\omega}{c} \sin\alpha}$

(cf $\forall y$) : $\boxed{k'_y = 0}$

et puisque $k'^2 = k^2$

$$\underbrace{k'^2_x}_{\text{égal à } k_x^2} + \underbrace{k'^2_y}_{\text{nul}} + k'^2_z = k_x^2 + k_z^2$$

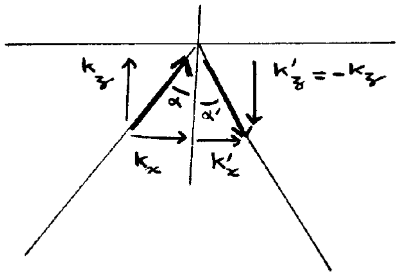
$$k'^2_z = k_z^2 \quad \begin{cases} \text{soit } k'_z = k_z \\ \text{soit } k'_z = -k_z \end{cases}$$

Avec $k'_z = k_z$ on retrouve l'onde incidente. Il faut donc choisir

$$\boxed{k'_z = -k_z = -\frac{\omega}{c}\cos\alpha}$$

On retrouve la loi de Descartes :

- le "rayon" réfléchi se trouve ds le plan d'incidence (cf $k'_y = 0$)
- l'angle de réflexion = - angle d'incidence (cf $k'_x = k_x$, $k'_z = -k_z$)



donc :

$\alpha' = -\alpha$

II A.3.

c) L'équation de continuité du E tangentiel devient finalement :

$$E_0 \exp -jk_z h = -\underline{E'_0} \exp jk_z h$$

$$\underline{E'_0} = -E_0 \exp -2jk_z h$$

avec $k_z = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$

$$\boxed{\underline{E'_0} = -E_0 \exp -2j\frac{\omega}{c}\cos\alpha\, h}$$

Le signe moins est en lien avec le fait que la reflexion entraine (ici) un déphasage de π pour $\vec{E}$. Ou, exprimé différemment : le coefficient de reflexion pour $\vec{E}$ vaut : -1

$$r_E = \frac{\underline{E'}(x,y,h,t)}{\underline{E}(x,y,h,t)}$$

$$= \frac{-E_0 \exp(-2jk_z h) \exp j(\omega t - k_x x + k_z h)}{E_0 \exp j(\omega t - k_x x - k_z h)}$$

$$r_E = -1$$

II A 3

f)

$$\underline{\vec{E}'} = -E_0 \exp(-2jk_z h) \exp j(\omega t - k_x x + k_z z)\, \vec{u_y}$$

$$= -E_0 \exp j(\omega t - k_x x - k_z(2h - z))\, \vec{u_y}$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}'} = -E_0 \exp j\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sin\alpha\, x - \frac{\omega}{c}\cos\alpha\,(2h - z)\right) \vec{u_y}}$$

II A 3

g) Pour cette OPPM, on a

$$\underline{\vec{B}}' = \frac{\vec{k}' \wedge \underline{\vec{E}}'}{\omega}$$

$$= \frac{(k'_x \vec{u_x} + k'_z \vec{u_z}) \wedge \underline{E}' \vec{u_y}}{\omega}$$

$$= \frac{k'_x \underline{E}'}{\omega} \vec{u_z} - \frac{k'_z \underline{E}'}{\omega} \vec{u_x}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}}' = -\frac{E_0}{c} (\cos\alpha\, \vec{u_x} + \sin\alpha\, \vec{u_z}) \exp j(\omega t - \frac{\omega}{c} \sin\alpha\, x - \frac{\omega}{c} \cos\alpha (2h - z))}$$

II A.3.

h)

$$\underline{\vec{E}}_{total} = \underline{\vec{E}}_{incident} + \underline{\vec{E}}'_{réfléchi}$$

$$= E_0 \exp j(\omega t - k_x x - k_z z)\ \vec{u_y}$$
$$- E_0 \exp j(\omega t - k_x x - k_z (2h - z))\ \vec{u_y}$$

$$= E_0 \exp j(\omega t - k_x x)\ \exp -j k_z h\ (\exp j k_z (h - z) - \exp -j k_z (h - z))\ \vec{u_y}$$

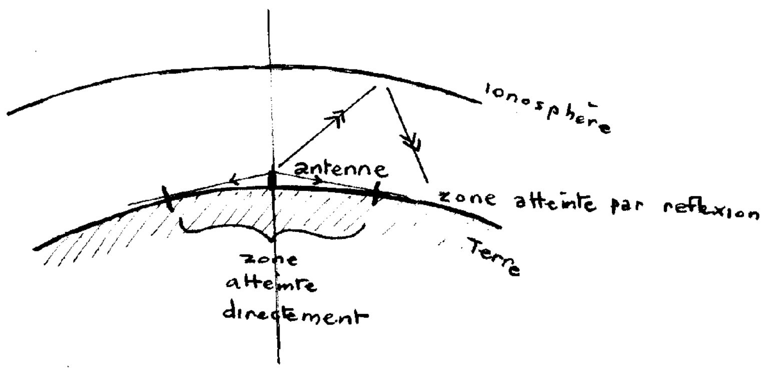
$$= E_0 \exp j(\omega t - k_x x - k_z h)\ \ 2j \sin k_z(h - z)\ \vec{u_y}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \underline{\vec{E}}_{total} = 2j E_0 \sin k_z(h-z)\ \exp j(\omega t - k_x x - k_z h)\ \vec{u_y} \\ \text{avec } k_z = \frac{\omega}{c} \cos\alpha \\ k_x = \frac{\omega}{c} \sin\alpha \end{array}}$$

Le facteur $\exp j(\omega t - k_x x - k_z h)$ traduit une onde <u>progressive</u> selon x à la vitesse $v_\varphi = \frac{\omega}{k_x}$

Le facteur $\sin[k_z(h-z)]$ traduit une onde <u>stationnaire</u> selon z avec des noeuds pour $k_z(h - z) = n\pi$

II A <u>4)</u>



→ La rotondité de la terre interdit aux zones plus loin que l'horizon d'être atteintes directement par les ondes

→ La réflexion sur l'ionosphère permettra d'atteindre des zones au delà de l'horizon.

Détermination des conditions de réflexion

IIB1 Le calcul est le même qu'en IC (sauf que dans le plasma, on n'a plus a priori $\omega = kc$)

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = -E_0 \frac{k}{\omega} \exp j(\omega t - kz) \, \vec{u_x}}$$

IIB2

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v_e}}{dt}$$

$$\boxed{-e(\vec{E} + \vec{v_e} \wedge \vec{B}) = m \frac{d\vec{v_e}}{dt}}$$

IIB3

$$\frac{\|\vec{F}_{magnétique}\|}{\|\vec{F}_{électrique}\|} = \frac{e \|\vec{v_e}\| \|\vec{B}\| \, |\sin(\vec{v_e}, \vec{B})|}{e \quad \|\vec{E}\|}$$

$$< \frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \|\vec{v_e}\|$$

Si on suppose, le plasma dilué, on néglige les forces entre les charges (question IIB2), on aura comme dans le vide $\|\vec{B}\|$ de l'ordre de grandeur de $\frac{\|\vec{E}\|}{c}$

$$\boxed{\frac{\|\vec{F_m}\|}{\|\vec{F_e}\|} \lesssim \frac{\|\vec{v_e}\|}{c} \ll 1}$$

IIB4 Donc

$$-e\vec{E} = m \frac{d}{dt}\vec{v_e}$$

On s'intéresse à la solution de cette équation différentielle. (Ici d'ailleurs égale, puisque pas d'amortissement, à la solution "en régime forcé" dès le départ).

On travaille en complexes :

$$-e\underline{\vec{E}} = m \frac{d\underline{\vec{v_e}}}{dt}$$

$$= jm\omega \, \underline{\vec{v_e}}$$

$$\underline{v_e} = j \frac{e}{m\omega} \underline{\vec{E}}$$

La densité de courant vaut

$$\underline{\vec{J}} = n(-e) \underline{\vec{v_e}}$$

$$= \underbrace{-j \frac{ne^2}{m\omega}}_{\underline{\sigma}} \underline{\vec{E}}$$

$$\boxed{\underline{\sigma} = -j \frac{ne^2}{m\omega}}$$

II B 5 La puissance moyenne volumique reçue par le plasma

$$P_{\text{cédée}} = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e (\underline{\vec{J}} \, \underline{\vec{E}}^*)$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{R}_e (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{imaginaire pur}}}{\underline{\sigma}} \underbrace{\underline{\vec{E}} \, \underline{\vec{E}}^*}_{\text{réel } |\underline{E}|^2})$$

$$\boxed{P_{\text{cédée}} = 0}$$

Le plasma n'absorbe rien.

Il est transparent pour l'onde

II B 6

$$\boxed{\text{M.A.} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 (\underbrace{\vec{J}}_{\substack{\text{courant} \\ \text{volumique} \\ \text{conduction}}} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\substack{\text{courant} \\ \text{volumique} \\ \text{déplacement}}})}$$

II B 7 On cherche l'équation de dispersion dans le plasma :

M.F.
$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$$

$$-j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

M.A.
$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{J}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

$$-j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \left(\mu_0 \underline{\sigma} + \frac{j\omega}{c^2}\right) \underline{\vec{E}}$$

on reporte l'expression de $\underline{\vec{B}}$

$$-j\vec{k}\wedge\left(\frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}\right) = \left(\mu_0\sigma + \frac{j\omega}{c^2}\right)\vec{E}$$

$$-\frac{j}{\omega}\left(\vec{k}\underbrace{(\vec{E}\cdot\vec{k})}_{\text{nul}} - \vec{E}(\vec{k}^2)\right) = \left(\mu_0\sigma + \frac{j\omega}{c^2}\right)\vec{E}$$

remarque : de M.A. écrit sous la forme

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = (\ldots)\,\vec{E}$$

on tire

$$div\,\vec{E} = 0 \quad (\text{cf } \rho = 0 \text{ dans M.G})$$

soit

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0$$

$$-j\vec{k}\vec{E} = 0$$

$$\frac{j}{\omega}k^2\vec{E} = -j\frac{ne^2}{m\omega}\mu_0\vec{E} + j\frac{\omega}{c^2}\vec{E}$$

$$\frac{k^2}{\omega} = -\frac{ne^2\mu_0}{m\omega} + \frac{\omega}{c^2}$$

$$k^2 = -\frac{ne^2\mu_0}{m} + \frac{\omega^2}{c^2}$$

On pose alors :

$$\frac{\omega_p^2}{c^2} = \frac{ne^2\mu_0}{m} \quad \text{soit} \quad (\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1)$$

$$\boxed{\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

L'équation de dispersion s'écrit finalement :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}}$$

II B 8 Si $\omega < \omega_p$ $k^2 < 0$

k est alors imaginaire pur

$$k = \pm j\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}$$

noté ici :

$$k = \pm j\alpha$$

La solution pour $\vec{E}$ est la combinaison de ces deux solutions:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_{01} \exp j(\omega t - (+j\alpha) z) \, \vec{u_y} + \underline{E}_{02} \exp j(\omega t - (-j\alpha) z) \, \vec{u_y}$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{E}_{01} \exp(\alpha z) \exp j\omega t \, \vec{u_y} + \underline{E}_{02} \exp(-\alpha z) \exp j\omega t \, \vec{u_y}}$$

Il n'y a plus de propagation. On obtient des ondes évanescentes.
Dans le cas où z peut devenir très grand (ici couche de plasma de 200 km) le terme en $\exp(\alpha z)$ devient très grand.
Dans le cas limite, (z devient infini) on doit annuler la solution en $\exp \alpha z$ qui n'a pas de sens physique.
Finalement :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{E}_{02} \exp(-\alpha z) \exp j\omega t \, \vec{u_y}}$$

Conclusion : si $\omega < \omega_p$ il n'y a pas de propagation dans le plasma.
Toute l'énergie est réfléchie.
On remarquera qu'en II A 3 d) on a supposé qu'en cas de réflexion, le champ était nul dans l'ionosphère. Ce n'est pas exact puisqu'il y existe une onde évanescente.

II B 9 a) Si $\omega > \omega_p$ $k^2 > 0$

k est alors réel

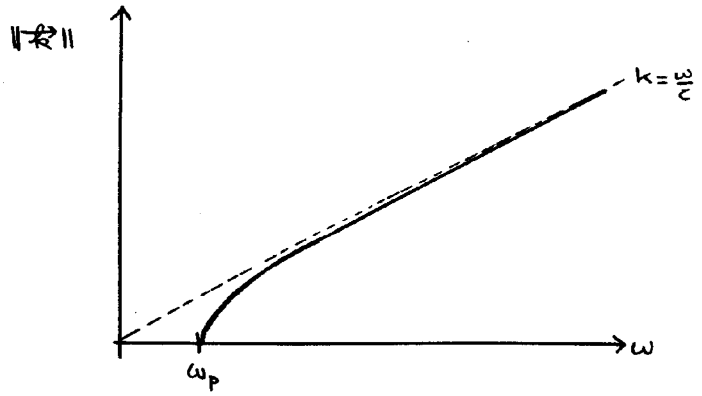
$$k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{E}_{01} \exp j\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} z\right) \vec{u_y} + \underline{E}_{02} \exp j\left(\omega t + \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} z\right) \vec{u_y}}$$

La deuxième partie de cette solution correspond à une onde réfléchie qui serait née au niveau de l'interface à 200 km.

avec

$$\boxed{\|\vec{k}\| = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}}$$



II B 9) b) (En considérant ici l'onde vers les z croissants uniquement)

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}$$

$$= \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}\, c$$

$$\boxed{v_\varphi = c\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}}$$

et v_{groupe} est donné par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

En différenciant la relation de dispersion

$$\omega^2 - \omega_p^2 = k^2 c^2$$

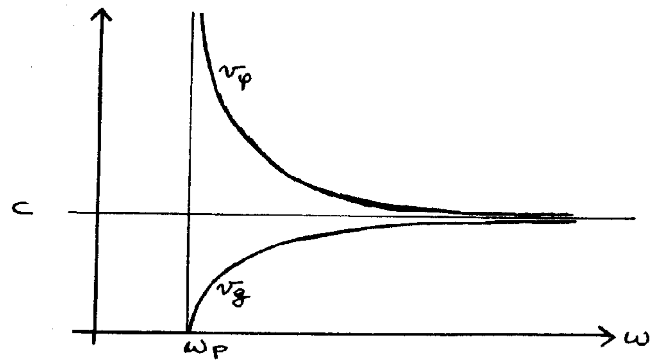
$$2\omega\, d\omega = 2k\, dk\, c^2$$

$$\frac{\omega}{k}\,\frac{d\omega}{dk} = c^2$$

$$\boxed{v_\varphi \cdot v_g = c^2}$$

$$\boxed{v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

II B 9) c)



II B 9) d) $v_\varphi > c$

- ceci ne pose pas de problème.
C'est la vitesse de groupe, la vitesse de l'énergie, la vitesse de l'information qui ne peuvent dépasser c.
- une onde rigoureusement monochromatique n'existe pas. Ne serait-ce que parce qu'elle a un début et une fin dans la réalité.
- à $v_\varphi > c$, on fait correspondre un indice $n < 1$

II B 9 e) La vitesse de groupe c'est la vitesse du maximum d'un paquet d'ondes.
(toute information sera décrite par un paquet d'ondes et sa vitesse sera inférieure à c)
un paquet d'ondes, c'est aussi un paquet d'énergie.
La masse-énergie ne peut aller plus vite que c.

II B 10) On a vu :

$f > f_p$ propagation

$f < f_p$ pas de propagation

C'est bien là le comportement d'un filtre passe-haut.

II C 1)

$$\omega_p^2 = \frac{n e^2}{m \varepsilon_0}$$

$$\boxed{f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n e^2}{m \varepsilon_0}}}$$

$\left(\frac{1}{\varepsilon_0} = \mu_0 c^2 = 4\pi 10^{-7} (3\ 10^8)^2 = 36\pi\ 10^9\right)$

A.N. $$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10^{11}\ (1{,}6\ 10^{-19})^2}{9{,}1\ 10^{-31}\ \frac{1}{36\pi\ 10^9}}}$$

$$\boxed{f_p = 2{,}84 \quad \text{MHz}}$$

II C 2) $$f_{\substack{\text{europe 1}\\ \text{GO}}} = 0{,}185 \text{ MHz} < f_p$$

Donc pas de propagation dans l'ionosphère.

II C 3) il y aura réflexion

II C 4) Fréquences, longueurs d'ondes

→ grâce à la réflexion ionosphérique, le problème indique que la portée d'un émetteur G.O. sera plus grande. (on peut remarquer que ce problème décrit plutôt à ce propos, le comportement des ondes courtes, chères aux radio-amateurs)

→ La F.M. sera réservée à des émissions plus locales. (ce qui permet d'avoir des réseaux locaux sans encombrer les fréquences). Quand on voyage, il faut changer de fréquence pour suivre un programme ...

(dans le même ordre d'idée, λ est de l'ordre de 3 m en F.M. Les ondes FM vont buter sur les obstacles. Alors que les G.O. $\lambda = 1,6$ km vont contourner les obstacles plus petits que λ sans difficulté)

Autres

Avantages liés à la modulation de fréquence (FM) par rapport aux GO : modulation d'amplitude (AM). Meilleure qualité dans la restitution du son en FM, moins de sensibilité aux parasites. On peut prévoir qu'avec la radio numérique, la diffusion AM va regagner en qualité.
