Nom

Interrogation
Récursivité

Note

Exercice 1: Codes très simples

Cet exercice très simple va me permettre de voir si vous avez compris la récursivité.

Question 1: Créez une fonction récursive Produit(a,b) qui renvoie le produit de deux entiers naturels a et b en utilisant uniquement des sommes, la possibilité de retirer 1 à un entier, et la comparaison d'un entier à 0

```
>>> Produit(5,6)
30
>>> Produit(0,5)
0
```

1-1

Question 2: Créez une fonction récursive Division(a,b) qui renvoie le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b≠0 en imposant la méthode consistant à enlever b à a autant de fois qu'il est possible de le faire

```
>>> Division(10,5)
(2, 0)

>>> Division(11,5)
(2, 1)

>>> Division(14,5)
(2, 4)
```

1-2

Exercice 2: Suppression de doublons

Soit une liste d'entiers triée par ordre croissant présentant des valeurs identiques.

Question 1: Proposer une fonction non récursive permettant de supprimer les doublons de la liste sans la modifier et de complexité en O(n)

2-1

Question 2: Proposer une fonction récursive permettant de réaliser le même travail avec la même complexité en O(n)

```
def Doublons_Rec(L):
    if len(L) == 1:
        return L
    else:
        "A compléter"
```

2-2

Exercice 3: Complexité d'algorithmes récursifs

Soit la suite définie par :

$$u_0 = 1, n \geq 1, u_{n+1} = \begin{cases} u_n + 1 \; si \; u_n < 1 \\ \frac{u_n}{2} \; sinon \end{cases}$$

On propose le code suivant :

```
def rec(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        Un_m1 = rec(n-1)
        if Un_m1 < 1:
            Un = Un_m1 + 1
        else:
            Un = Un_m1 / 2
        return Un
```

Question 1: Donner et démontrer la complexité de la fonction rec proposée

3-1

On propose maintenant le code que certains d'entre vous auraient pu réaliser :

```
def rec(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        if rec(n-1) < 1:
            Un = rec(n-1) + 1
        else:
            Un = rec(n-1) / 2
        return Un
```

Question 2: Donner et démontrer la complexité de la nouvelle fonction rec proposée

3-2

cc BY NC SA

Question 3: Compléter le tableau suivant en précisant la complexité dans chaque cas

1	Auto-appel 1 fois au rang n-1 $C(n) = C(n-1) + O(n^{\alpha})$		
2	Auto-appel γ>1 fois au rang n-1 γ constant $C(n) = \gamma C(n-1) + O(n^{\alpha})$		
31	Auto-appel 1 fois au rang n/2 $C(n) = C\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^{\alpha})$	$\alpha = 0$	
32		$\alpha \geq 1$	
41	Auto-appel γ>1 fois au rang n/γ γ constant $C(n) = \gamma C\left(\frac{n}{\gamma}\right) + O(n^{\alpha})$	$\alpha = 0$	
42		$\alpha = 1$	
43		$\alpha \geq 2$	
5	Auto-appel aux rangs n-1 et n-2 $C(n) = aC(n-1) + bC(n-2) + O(1)$		

3-3

Question 4: Pour chacun des algorithmes proposés, donner le cas du tableau précédent, la valeur des paramètres $(\alpha, \gamma \dots)$ et la complexité

Algorithme	Cas	Paramètres	Complexité $C(n)$

`def f(n):`
`  if n==1:`
`  return 1`
`  else:`
`  S = 0`
`  a = f(n-1)`
`  for i in range(10):`
`  S += a/n`
`  return S`			

`def f(n):`
`  if n==1:`
`  return 1`
`  else:`
`  n1 = n//2`
`  n2 = n-n//2`
`  S = f(n1) + 2*f(n2)`
`  for i in range(n):`
`  S += i`
`  return S`			

`def f(n):`
`  if n==1:`
`  return 1`
`  else:`
`  return f(n-1)`			

`def f(n):`
`  if n==1:`
`  return 1`
`  else:`
`  S = f(n-1) + f(n-1) + f(n-1)`
`  for i in range(n):`
`  S += i`
`  return S`			

`def f(n):`
`  if n==1:`
`  return 1`
`  else:`
`  S = f(n-1) + f(n-1)`
`  for i in range(n):`
`  S+= i`
`  return S`			

`def f(n):`
`  if n==1:`
`  return 1`
`  else:`
`  S = f(n-1)`
`  for i in range(n):`
`  S+= i`
`  return S`			

`def f(n):`
`  if n==1:`
`  return 1`
`  else:`
`  N = n//2`
`  return 2*f(N)`			

`def f(n):`
`  if n==1:`
`  return 1`
`  else:`
`  return f(n-1) + 2*f(n-2)`			

`def f(n):`
`  if n==1:`
`  return 1`
`  else:`
`  return f(n-1) + f(n-1)`			

3-4

CC BY NC SA