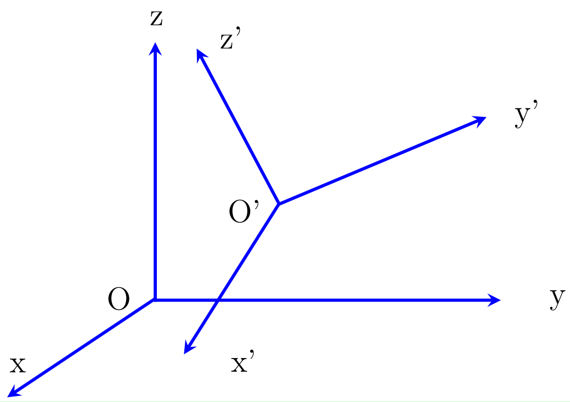
Dynamique dans un référentiel non galiléen

Table des matières

1 Généralité

- $R(O,x,y,z,t)$: référentiel galiléen fixe
- $R'(O',x',y',z',t')$: référentiel en mouvement par rapport à R

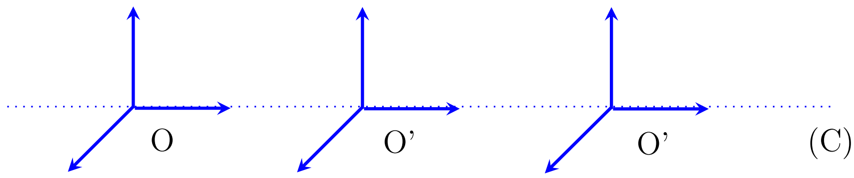


- le repère R,fixe dit repère absolu
- le mouvement d'un point matériel M par rapport à R est qualifié du mouvement absolu
- le repère R', en mouvement dit repère relatif
- le mouvement d'un point matériel M par rapport à R' est qualifié du mouvement relatif

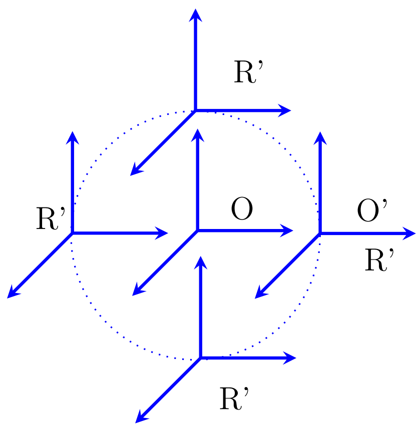
- En mécanique classique non relativiste $(v << C)$ le temps est absolu ,càd, ne dépend pas du référentiel donc $t = t'$.
- On distingue entre les mouvements relatifs suivants :
  - translation : les axes de R' restent parallèle à ceux de R donc les vecteurs de base de R' restent invariables au cours du temps

$$\overrightarrow{e}_x = \overrightarrow{e}_{x'}; \overrightarrow{e}_y = \overrightarrow{e}_{y'}; \overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{e}_{z'}$$

    On distingue entre deux types :
  - translation rectiligne : L'origine O' de R' décrit une courbe rectiligne



  - translation circulaire : l'origine O' de R' décrit un cercle



- mouvement de rotation

2 Etude cinématique

2.1 Vecteur rotation d'entraînement

Considérons deux référentiels

- un référentiel $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$
- un référentiel $R'(O',\vec{e}_{x'},\vec{e}_{y'},\vec{e}_{z'})$ en mouvement par rapport à R

• **Définition 1** : On appelle mouvement d'entrainement, le mouvement du référentiel R' par rapport à R

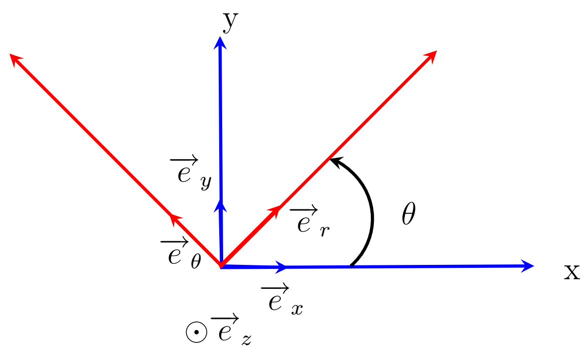
- le mouvement général de R' par rapport à R se décompose en :
  - un mouvement de translation par rapport à R caractérisé par le vecteur vitesse $\vec{v}(O'/R)=\left(\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R$
  - mouvement de rotation par rapport à R caractérisé par le vecteur rotation d'entrainement $\vec{\omega}(R'/R)$

• **Définition 2** : le vecteur rotation d'entrainement $\vec{\omega}(R'/R)$ d'un référentiel $R'(O',\vec{e}_{x'},\vec{e}_{y'},\vec{e}_{z'})$ par rapport au référentie $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ caractérise la rotation de R' par rapport à R tel que :

- $\left(\dfrac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_R=\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{e}_{x'}$
- $\left(\dfrac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_R=\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{e}_{y'}$
- $\left(\dfrac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_R=\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{e}_{z'}$

- Exemple

  - $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$: repère absolu
  - $R'(O,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$: repère relatif



- $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont des vecteurs liés à R' donc sont fixes dans R' donc $\left(\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_{R'}=\left(\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_{R'}=\vec{0}$
- $\left(\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R=\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec $\vec{e}_\theta=\vec{e}_z\wedge\vec{e}_r$ donc

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right)_R=\dot{\theta}\vec{e}_z\wedge\vec{e}_r}$$

- $\left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_\theta}{dt}\right)_R = -\dot{\theta}\overrightarrow{e}_r$ avec $\overrightarrow{e}_r = -\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_\theta$ donc

$$\boxed{\left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_\theta}{dt}\right)_R = \dot{\theta}\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_\theta}$$

- le vecteur rotation d'entraînement est

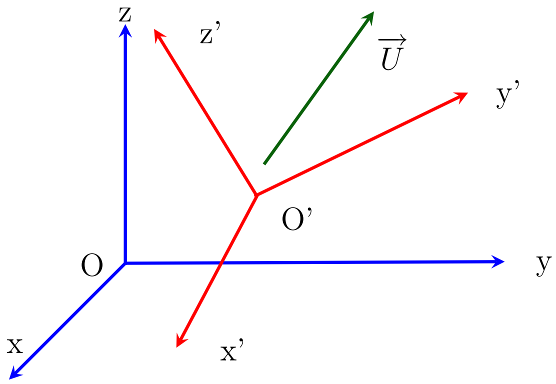
$$\boxed{\overrightarrow{\omega}(R'/R) = \dot{\theta}\overrightarrow{e}_z}$$

$$\boxed{\left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_r}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{e}_r \text{ et } \left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_\theta}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{e}_\theta}$$

- Propriétés
  - $\overrightarrow{\omega}(R'/R)$ est porté par l'axe de rotation
  - $\overrightarrow{\omega}(R'/R) = -\overrightarrow{\omega}(R/R')$
  - $\overrightarrow{\omega}(R_1/R_3) = \overrightarrow{\omega}(R_1/R_2) + \overrightarrow{\omega}(R_2/R_3)$: relation de Châles

2.2 Relation fondamentale de la dérivation

- $R(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$ repère absolu
- $R'(O', \overrightarrow{e}_{x'}, \overrightarrow{e}_{y'}, \overrightarrow{e}_{z'})$ repère relatif
- $\overrightarrow{\omega}(R'/R)$: vecteur rotation d'entraînement de R' par rapport à R
- $\overrightarrow{U} = U_{x'}\overrightarrow{e}_{x'} + U_{y'}\overrightarrow{e}_{y'} + U_{z'}\overrightarrow{e}_{z'}$: vecteur libre non liée à R'



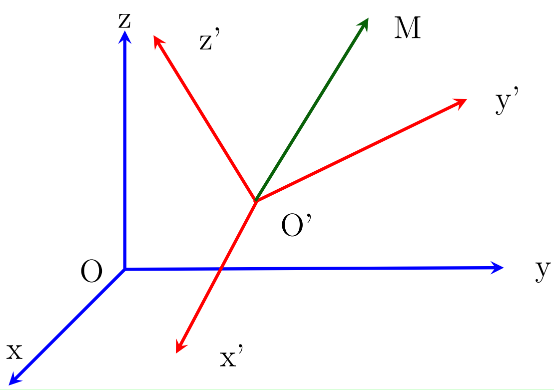
- $\left(\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_{R'} = \dfrac{dU_{x'}}{dt}\overrightarrow{e}_{x'} + \dfrac{dU_{y'}}{dt}\overrightarrow{e}_{y'} + \dfrac{dU_{z'}}{dt}\overrightarrow{e}_{z'}$
- $\left(\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_R = \dfrac{dU_{x'}}{dt}\overrightarrow{e}_{x'} + \dfrac{dU_{y'}}{dt}\overrightarrow{e}_{y'} + \dfrac{dU_{z'}}{dt}\overrightarrow{e}_{z'} + U_{x'}\left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_{x'}}{dt}\right)_R + U_{y'}\left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_{y'}}{dt}\right)_R +$ $U_{z'}\left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_{z'}}{dt}\right)_R$
- $$\left\{\begin{array}{rcl} \left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_{x'}}{dt}\right)_R & = & \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{e}_{x'} \\ \left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_{y'}}{dt}\right)_R & = & \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{e}_{y'} \\ \left(\dfrac{d\overrightarrow{e}_{z'}}{dt}\right)_R & = & \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{e}_{z'} \end{array}\right.$$
- on obtient la relation fondamentale de la dérivation

$$\left(\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_{R'} + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{U}$$

- Cas particulier
  - si $\overrightarrow{U}$ est lié à R' on retrouve :
  $$\left(\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{U}$$
  - pour le mouvement de translation $\overrightarrow{\omega}(R'/R) = \overrightarrow{0}$ on trouve
  $$\left(\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right)_{R'}$$
  la dérivation ne dépend pas du référentiel

2.3 Composition des vitesses

- $R(O, \overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$ repère absolu
- $R'(O', \overrightarrow{e}_{x'}, \overrightarrow{e}_{y'}, \overrightarrow{e}_{z'})$ repère relatif
- $\overrightarrow{\omega}(R'/R)$: vecteur rotation d'entraînement de R' par rapport à R
- M un point mobile dans R'
- $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y + z\overrightarrow{e}_z$
- $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{e}_{x'} + y'\overrightarrow{e}_{y'} + z'\overrightarrow{e}_{z'}$



- vitesse relative $\overrightarrow{v}_r$: C'est la vitesse du point M dans le référentiel relatif R' :
$$\overrightarrow{v}_r(M) = \overrightarrow{v}(M/R') = \dot{x}'\overrightarrow{e}_{x'} + \dot{y}'\overrightarrow{e}_{y'} + \dot{z}'\overrightarrow{e}_{z'}$$

- vitesse absolue $\overrightarrow{v}_a$: C'est la vitesse du point M dans le référentiel absolu R :
$$\overrightarrow{v}_a(M) = \overrightarrow{v}(M/R) = \dot{x}\overrightarrow{e}_x + \dot{y}\overrightarrow{e}_y + \dot{z}\overrightarrow{e}_z$$

- $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$
- $\overrightarrow{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R$
- $\overrightarrow{V}(M/R) = \overrightarrow{V}(O'/R) + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{V}(M/R') + \overrightarrow{V}_e(M/R)$

- vitesse relative $\overrightarrow{V}_r = \overrightarrow{V}(M/R') = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'}$
- vitesse d'entrainement : $\overrightarrow{V}_e = \overrightarrow{V}(O'/R) + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}$

• loi de composition des vitesses

$$\overrightarrow{V}_a = \overrightarrow{V}(M/R) = \overrightarrow{V}_r + \overrightarrow{V}_e$$

- $\overrightarrow{V}_a$: vitesse absolue du point M
- $\overrightarrow{V}_r$: vitesse relative du point M
- $\overrightarrow{V}_e$: vitesse d'entrainement du point M

▶ Vitesse d'entainement-Notion de point coïncident

• Point coïncident M_c : C'est un point fixe dans le référentiel R' relatif coïncidant avec le point M à l'instant t .

▶ $\overrightarrow{V}(M_c/R') = \overrightarrow{0}$ donc

$$\overrightarrow{V}(M_c/R) = \overrightarrow{V}(O'/R) + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{V}_e(M/R)$$

• conclusion : la vitesse d'entrainement d'un point matériel M représente la vitsse absolue d'un point M_c fixe dans R' et qui coïncide avec le point M à l'instant t .

▶ Cas particuliers

- Dans le cas d'un mouvement de translation : $\overrightarrow{\omega}(R'/R) = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{V}(M/R) = \overrightarrow{V}(M/R') + \overrightarrow{V}(O'/R)$$

- si $O = O'$ alors $\overrightarrow{V}_e(M) = \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{V}(M/R) = \overrightarrow{V}(M/R') + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{OM}$$

- si $O = O'$ et si M est lié à R'

$$\overrightarrow{V}(M/R) = \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{OM}$$

c'est une rotation pure autour de $\overrightarrow{\omega}$

2.4 Composition des accélérations

- Accélération absolue $\overrightarrow{a}$: accélération d'un point matériel M dans un référentiel absolue R

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{V}(M/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \ddot{x}\overrightarrow{e}_x + \ddot{y}\overrightarrow{e}_y + \ddot{z}\overrightarrow{e}_z$$

- Accélération relative $\overrightarrow{a}_r$: accélération d'un point matériel M dans un référentiel relative R'

$$\overrightarrow{a}_r = \overrightarrow{a}(M/R') = \left(\frac{d\overrightarrow{V}(M/R')}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right)_{R'} = \ddot{x}'\overrightarrow{e}_{x'} + \ddot{y}'\overrightarrow{e}_{y'} + \ddot{z}'\overrightarrow{e}_{z'}$$

- $\overrightarrow{V}(M/R) = \overrightarrow{V}(M/R') + \overrightarrow{V}(O'/R) + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}$
- $\overrightarrow{a}(M/R) = \left(\dfrac{d\overrightarrow{V}(M/R')}{dt}\right)_R + \left(\dfrac{d\overrightarrow{V}(O'/R)}{dt}\right)_R + \dfrac{d\overrightarrow{\omega}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$
  $+ \overrightarrow{\omega} \wedge \left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R$
- $\left(\dfrac{d\overrightarrow{V}(M/R')}{dt}\right)_R = \left(\dfrac{d\overrightarrow{V}(M/R')}{dt}\right)_{R'} + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{V}(M/R')$
- $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}$
- $\overrightarrow{a}(M/R) = \overrightarrow{a}(M/R') + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{V}(M/R') + \overrightarrow{a}(O'/R) + \dfrac{d\overrightarrow{\omega}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} +$
  $\overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \left[\left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}\right]$
- $\overrightarrow{a}(M/R) = \overrightarrow{a}(M/R') + \overrightarrow{a}(O'/R) + \dfrac{d\overrightarrow{\omega}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge (\overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge$
  $\overrightarrow{O'M}) + 2\overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{V}(M/R')$
  donc

  $$\boxed{\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(M/R) = \overrightarrow{a}(M/R') + \overrightarrow{a}_{ent} + \overrightarrow{a}_c}$$

  c'est la loi de composition des accélérations
- $\overrightarrow{a}(M/R)$: accélération absolue
- $\overrightarrow{a}(M/R') = \overrightarrow{a}_r$: accélération relative
- $\overrightarrow{a}_{ent}$: accélération d'entrainement

  $$\boxed{\overrightarrow{a}_{ent} = \overrightarrow{a}(O'/R) + \dfrac{d\overrightarrow{\omega}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge (\overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M})}$$

  l'accélération d'entrainement d'un point matériel M est l'accélération absolue d'un point M_c fixe dans R' et qui coincide avec le point M à l'instant t .
- $\overrightarrow{a}_c$: accélération de Coriolis

  $$\boxed{\overrightarrow{a}_c = 2\overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{V}(M/R')}$$

  l'accélération de Coriolis disparait lorsque :
  - $\overrightarrow{\omega}(R'/R) = \overrightarrow{0}$: le référentil R' est en translation par rapport à R
  - $\overrightarrow{V}_r = \overrightarrow{V}(M/R') = \overrightarrow{0}$: le point M est à l'équilibre dans

Cas particuliers

mouvement de translation

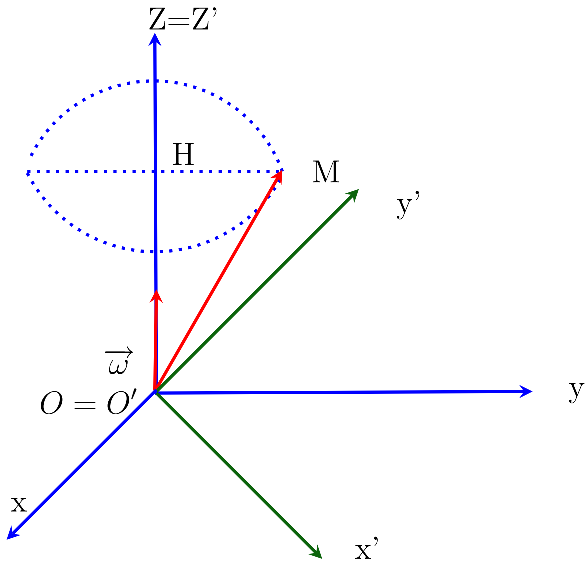
- $\overrightarrow{\omega}(R'/R) = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$
- $\overrightarrow{V}(M/R) = \overrightarrow{V}(O'/R) + \overrightarrow{V}(M/R')$
- $\overrightarrow{a}(M/R) = \overrightarrow{a}(O'/R) + \overrightarrow{a}(M/R')$

- $\overrightarrow{a}_e = \overrightarrow{a}(O'/R)$; $\overrightarrow{a}_r = \overrightarrow{a}(M/R')$ et $\overrightarrow{a}_c = \overrightarrow{0}$

▶ mouvement de rotation autour d'un axe fixe Oz

la rotation se fait autour de l'axe commun $Oz = O'z'$
H : la projection orthogonale de M sur Oz
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$

$$\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{e}_z$$



$$\overrightarrow{a}_e = \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{\omega}^2 \overrightarrow{HM}$$

si la rotation est uniforme $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{cte}$

$$\overrightarrow{a}_e = -\overrightarrow{\omega}^2 \overrightarrow{HM}$$

▶ Remarque : $\overrightarrow{a}_e \neq \dfrac{d\overrightarrow{V}_e}{dt}$

3 Dynamique dans un référentiel non galiléen

3.1 Principe de la relativité galiléen

- Un référentiel galiléen est-il unique ?
- Considérons un point matériel M isolé dans deux référentiels galiléens R et R'
- $\overrightarrow{a}(M/R) = \overrightarrow{0}$: M est isolé dans R
- $\overrightarrow{a}(M/R') = \overrightarrow{0}$: M est isolé dans R'
- la loi de composition des accélérations $\overrightarrow{a}(M/R) = \overrightarrow{a}(M/R') + \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_c$ donc

$$\overrightarrow{a}_e + 2\overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{V}(M/R') = \overrightarrow{0}$$

cette relation doit être réalisée pour toutes positions et toutes vitesses du point M,ceci impose :

  - ▶ $\overrightarrow{\omega}(R'/R) = \overrightarrow{0}$: R' est en translation par rapport à R
  - ▶ $\overrightarrow{a}_e = \overrightarrow{0}$: la translation est rectiligne uniforme

• Conclusion : Toutes les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme par rapport à l'un d'autre eux .

- la loi de composition des accélération,si la particule M n'est pas isolée,donne pour les deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre : $\vec{a}(M/R) = \vec{a}(M/R')$ donc $m\vec{a}(M/R) = m\vec{a}(M/R')$

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F'}}$$

$\vec{F}$: résultant des forces appliquées sur M dans R
$\vec{F'}$: résultant des forces appliquées sur M dans R'

• Principe de relativité galiléenne : Les lois fondamentales de la mécanique sont invariantes par changement de référentiel galiléen .

3.2 Lois de la dynamique dans un référentiel non galiléen

3.2.1 Principe fondamental de la dynamique en référentiel non galiléen

Considérons un point matérel M de masse m soumise à la résultante des forces $\vec{F}$ dans un référentiel galiléen R. Soit R' un référentiel non galiléen en mouvement quelconque par rapport à R .

- P.F.D dans R : $\vec{F} = m\vec{a}(M/R)$
- $\vec{a}(M/R) = \vec{a}(M/R') + \vec{a}_e + \vec{a}_c$
- $\vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c = m\vec{a}(M/R')$
- donc

$$\boxed{\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{a}(M/R')}$$

- $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$: force d'inertie d'entrainement
- $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$: force d'inertie de Coriolis

• Conclusion : la relation fondamentale de la dynamique dans référentiel non galiléen R' s'écrit sous la forme :

$$\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{a}(M/R')$$

▶ Cas particuliers

- ▶ R' en mouvement de translation par rapport à R
  - $\vec{\omega}(R'/R) = \vec{0}$ donc $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{V}(M/R') = \vec{0}$
  - $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$
  - $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}(O'/R)$
- ▶ R' en Rotation uniforme autour d'un axe fixe Oz : $O \equiv O'$ et $\vec{\omega}(R'/R) = \omega\vec{e}_z$
  - H la projection orthogonale de M sur Oz
  - $\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{HM}$
  - $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM}$

▶ Remarque

- si le point matériel est en équilibre dans R' : $\overrightarrow{V}(M/R') = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{F}_{ic} = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{ie} = \overrightarrow{0}}$$

- les forces d'inertie sont des pseudo-forces car d'une part elles ne résultent pas d'une interaction et d'autre part elles ne sont pas invariantes par changement de référentiel,ce sont des forces de repère .

3.3 Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen

Soit R' un référentiel non galiléen. Le moment cinétique $\overrightarrow{L}_{O'}$ en O' du point matériel M de masse m dans le référentiel non galiléen R' est défini par

$$\boxed{\overrightarrow{L}_{O'} = \overrightarrow{O'M} \wedge m\overrightarrow{V}(M/R')}$$

- $\left(\dfrac{d\overrightarrow{L}_{O'}}{dt}\right)_{R'} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} \wedge m\overrightarrow{V}(M/R') + \overrightarrow{O'M} \wedge m\overrightarrow{a}(M/R')$
- $\left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{V}(M/R')$
- $\left(\dfrac{d\overrightarrow{L}_{O'}}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{O'M} \wedge (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic})$
- le théorème du moment cinétique en O',point fixe de R',est applicable au point matériel M de masse m à condition de faire intervenir les forces d'inertie

$$\boxed{\left(\dfrac{d\overrightarrow{L}_{O'}}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\overrightarrow{F}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'}(\overrightarrow{F}_{ic})}$$

$\overrightarrow{F}$: résultante des forces appliquées sur M

3.4 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

- force de Coriolis : $\overrightarrow{F}_{ic} = -m\overrightarrow{a}_c(M) = -2m\overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{V}(M/R')$
- $\delta W(\overrightarrow{F}_{ic}) = \overrightarrow{F}_{ic}.d\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{F}_{ic}.\overrightarrow{V}(M/R')dt = -2m(\overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{V}(M/R')).\overrightarrow{V}(M/R')dt$ donc

$$\boxed{W(\overrightarrow{F}_{ic}) = 0}$$

La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas

- la puissance de la force de Coriolis : $\mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ic}) = \overrightarrow{F}_{ic}.\overrightarrow{V}(M/R') = 0$
- l'énergie cinétique de M dans R' : $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2(M/R')$
- $\left(\dfrac{dE_c}{dt}\right)_{R'} = m\overrightarrow{V}(M/R')\overrightarrow{a}(M/R') = \overrightarrow{V}(M/R')(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic})$
$= \mathcal{P}(\overrightarrow{F}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ie}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ic})$

- Théorème de la puissance cinétique

$$\left(\frac{dE_c}{dt}\right)_{R'} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ie})$$

- la variation de l'énergie cinétique :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_2) - \mathcal{E}_c(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\overrightarrow{F})dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{ie})dt$$

- Théorème de l'énergie cinétique

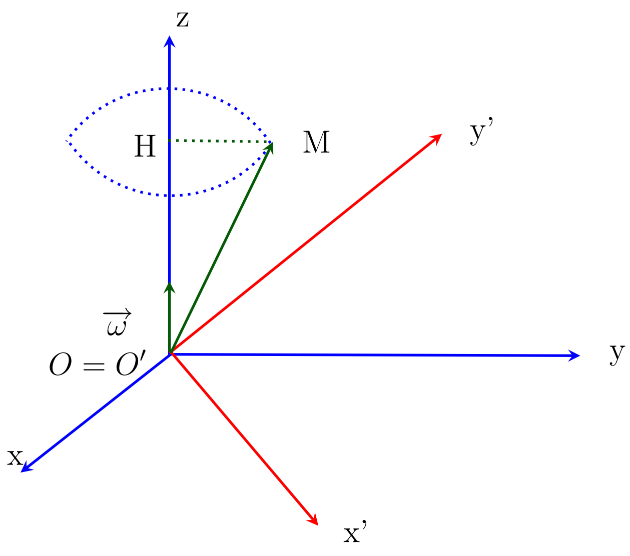
$$\Delta\mathcal{E}_c = W(\overrightarrow{F}) + W(\overrightarrow{F}_{ie})$$

3.5 Energie mécanique d'un point matériel dans un référentiel non galiléen R'

3.5.1 Energie potentielle d'entraînement centrifuge

- la force d'inertie d'entraînement travaille mais en général non conservative .
- dans le cas ou le référentelle R' est en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) du référentiel galiléen R,on peut définir une énergie potentielle d'entraînement centrifuge .

- R(Ox,y,z) repère absolu galilén
- R'(O,x,y,z) repère relatif non galiléen
- $\overrightarrow{\omega}(R'/R) = \omega\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{cte}$
- $\overrightarrow{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{HM}$
- $\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{a}_e = m\omega^2\overrightarrow{HM}$
- $\delta W = \overrightarrow{F}_{ie}.\overrightarrow{dOM} = m\omega^2.\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{dOM}$
  $= m\omega^2\overrightarrow{HM}(\overrightarrow{dOH} + \overrightarrow{dHM})$
  $= m\omega^2 d\left(\frac{\overrightarrow{HM}^2}{2} + cte\right)$
- $\overrightarrow{HM} = r\overrightarrow{e}_r$



$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + cte$$

3.5.2 Théorème de l'énergie mécanique

On note par $\overrightarrow{F}^{nc}$: la résultante des forces non conservative dans un référentiel non galiléen

• Théorème de puissance mécanique

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_m(M/R')}{dt}\right)_{R'} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F}^{nc})$$

• Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta\mathcal{E}_m(M/R') = W(\overrightarrow{F}^{nc}(M/R'))$$

• Remarque : si $\overrightarrow{F}_{ie}$ ne dérive pas de l'énergie de l'énergie potentielle ,on la classe dans les forces non conservatives.

4 Application : Poids d'un point matériel

4.1 Référentiel géocentrique-Référentiel terrestre

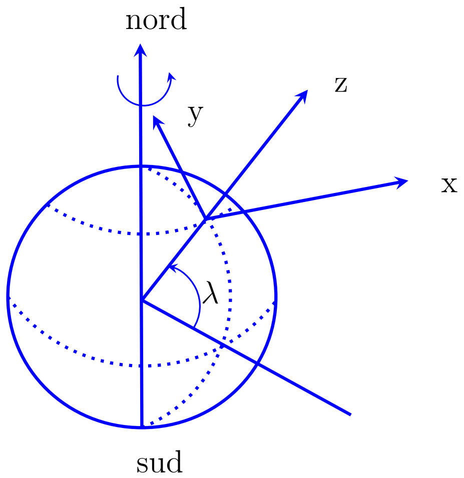
• Référentiel géocentrique : c'est un référentiel de centre confondu avec le centre de la terre et les axes sont parallèle à ceux de Copernic.

- le référentiel géocentrique $R_G(G, \overrightarrow{e}_{xg}, \overrightarrow{e}_{yg}, \overrightarrow{e}_{zg})$ est en mouvement de translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic $R_C(C, \overrightarrow{e}_{xc}; \overrightarrow{e}_{yc}, \overrightarrow{e}_{zc})$ avec une accélération $\overrightarrow{a}(G/R_c)$ donc le référentiel géocentrique n'est pas galiléen.
- Dans le cas où la durée de l'éxpérience est trés petite devant la période du mouvement de la terre ($T = 365j$) le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen.

• Référentiel terrestre : c'est un référentiel de centre lié à la surface de la terre et muni d'une base orthonormée directe $(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$ telle que :

- $\overrightarrow{e}_x$ est orienté vers l'est
- $\overrightarrow{e}_y$ est orienté vers le nord
- $\overrightarrow{e}_z$ est orienté suivant la verticale du point M

- le référentiel terrestre est en mouvement de rotation uniforme avec une vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{cte}$ suivant l'axe des pôles sud-nord,donc le référentiel terrestre est non galiléen.
- dans l'hypothèse précédente on peut considérer le référentiel terrestre comme galiléen .



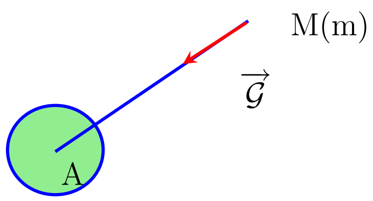
4.2 Champ gravitationnel

- tout corps A de masse m_A crée en tout point M de l'éspace un champ de gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}_A(M)$
- la force exercée par le corps A sur un point matériel M de masse m est

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\rightarrow M} = m\overrightarrow{\mathcal{G}}_A(M)}$$

- si le corps A est de forme sphérique

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{G}}_A(M) = -G\frac{m_A}{r^2}\overrightarrow{e}_r}$$



4.3 Poids d'un corps

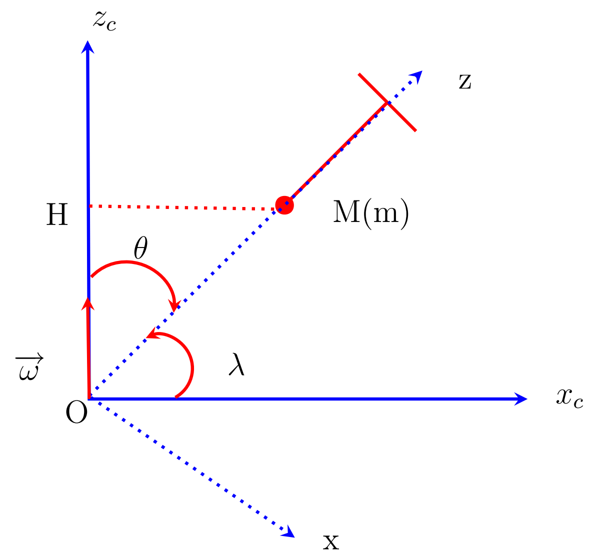
- Définition expérimentale : le poids $\overrightarrow{P}$ d'un corps ou la force de pesanteur est défini expérimentalement comme l'opposé de la force qui le maintient en équilibre dans un référentiel terrestre.

- Considérons un point matériel suspendu à un fil,le pods est la force qui compense la tension $\overrightarrow{T}$ du fil

$$\boxed{\overrightarrow{P} = -\overrightarrow{T}}$$

le point M est soumis aux forces suivantes

- $\overrightarrow{F}_{grav} = m\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M)$: force gravitationnelle
- $\overrightarrow{T}$: tension du fil
- $\overrightarrow{F}_{ie}$: force d'inertie d'entrainement
- $\overrightarrow{F}_{ic}$: force d'inertie de Coriolis



- $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{e}_{zc}$: le mouvement de rotation est uniforme
- P.F.D dans R_T : $m\overrightarrow{a}(M/R_T) = \overrightarrow{F}_{grav} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic}$
- $\overrightarrow{V}(M/R_T) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{F}_{ic} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{\omega} \wedge (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = m\omega^2\overrightarrow{HM}$
- $\overrightarrow{T} + m\omega^2\overrightarrow{HM} + m\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{T} = -m(\overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) + \omega^2\overrightarrow{HM}) = -m\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{P}$

$$\boxed{\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\mathcal{G}}_T(M) + \omega^2\overrightarrow{HM}}$$

- $\overrightarrow{\mathcal{G}}_T$: est centripète (dirrigé vers le centre de la terre)
- $\overrightarrow{g}$: n'est pas centripète