

Modélisation de l'écoulement sanguin dans l'Anévrisme de l'Aorte Abdominal



Problématique :

**Comment peut-on modéliser physiquement et mathématiquement
l'écoulement sanguin dans
l'Anévrisme de l'Aorte Abdominal (AAA) ?**



GUIOUAZ ZAKARIA



THÈME : SANTÉ PRÉVENTION



ANNÉE SCOLAIRE : 2021/2022



SCEI : 24573



LE PLAN DE LA PRÉSENTATION

- ➔ Introduction
- ➔ Modélisation physique (SOLIDWORKS)
- ➔ Modélisation mathématique
- ➔ Résultats
- ➔ Discussion et conclusion



LE PLAN DE LA PRÉSENTATION

- ➔ Introduction
- ➔ Modélisation physique (SOLIDWORKS)
- ➔ Modélisation mathématique
- ➔ Résultats
- ➔ Discussion et conclusion



Définition :

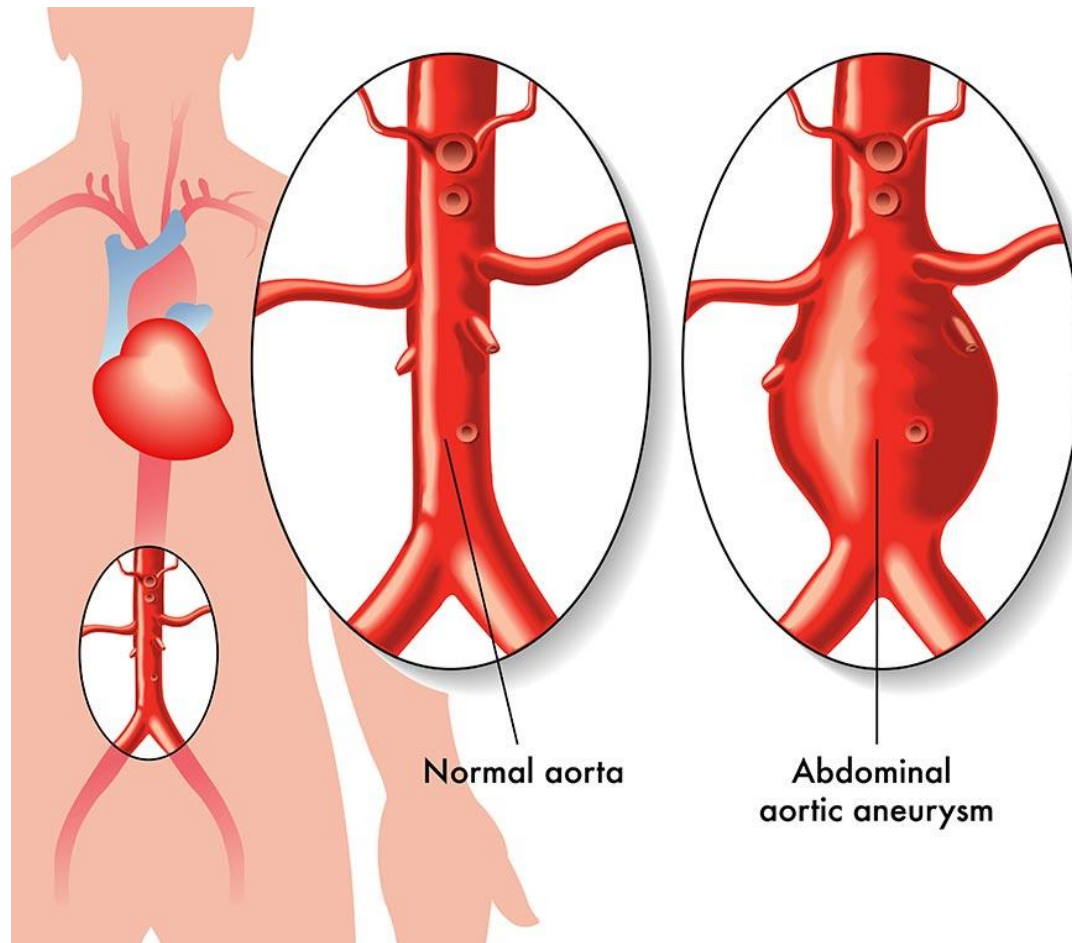


Figure 1 : Anévrisme de l'Aorte Abdominal



Les Causes et les risques :

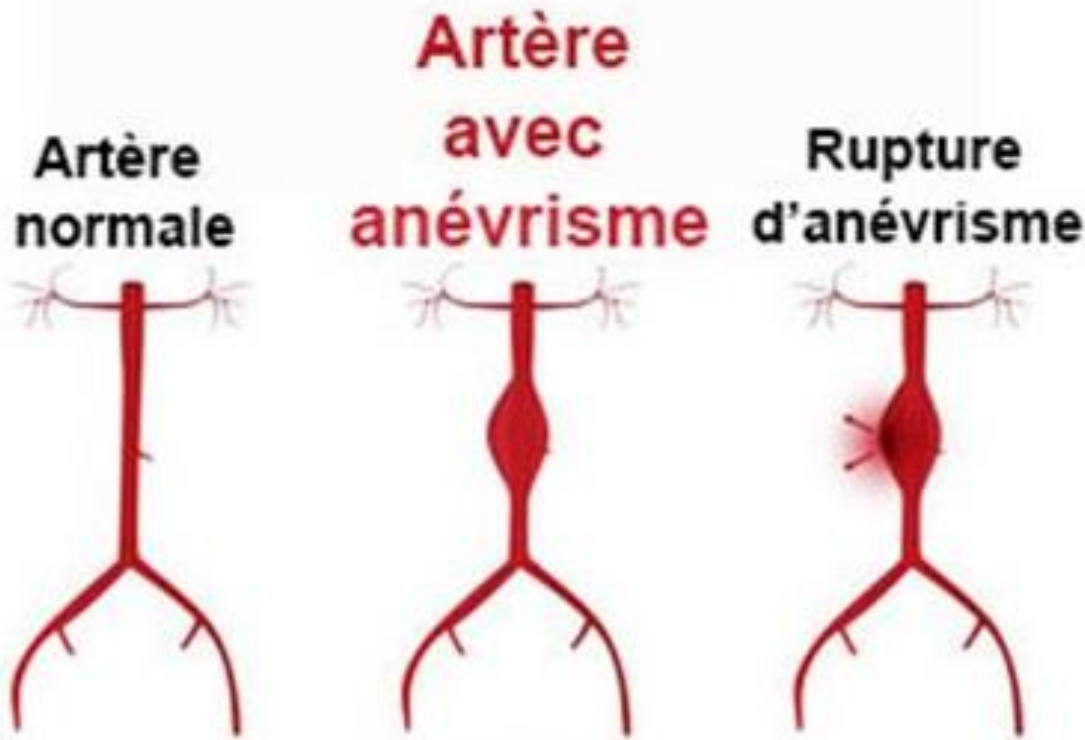


Figure 2 : Rupture de l'anévrisme

Les causes:

L'athérosclérose,
le tabagisme,
le cholestérol, l'âge,
l'hypertension, la
syphilis et certains
facteurs génétiques.

Les risques :

Menace de rupture,
mortelle dans plus
de 80% des cas.



LE PLAN DE LA PRÉSENTATION

- ➔ Introduction
- ➔ **Modélisation physique (SOLIDWORKS)**
- ➔ Modélisation mathématique
- ➔ Résultats
- ➔ Discussion et conclusion



Tableau des données :

N°	VALEURS DU DIAMETRE (m)	VALEURS DE SECTIONS (m ²)
1	0.024901960784314	0.000400000000000
2	0.024411764705882	0.000400000000000
3	0.024509803921569	0.000394285714286
4	0.024901960784314	0.000400000000000
5	0.025882352941176	0.000394285714286
6	0.026862745098039	0.000400000000000
7	0.026372549019608	0.000428571428571
8	0.026372549019608	0.000451428571429
9	0.026862745098039	0.000457142857143
10	0.026372549019608	0.000457142857143
11	0.025882352941176	0.000451428571429
12	0.025882352941176	0.000451428571429
13	0.026372549019608	0.000451428571429
14	0.026568627450980	0.000457142857143
15	0.026666666666667	0.000502857142857
16	0.026666666666667	0.000508571428571
17	0.026666666666667	0.000514285714286
18	0.026862745098039	0.000514285714286
19	0.027843137254902	0.000508571428571
20	0.028823529411765	0.000531428571429

Figure 3 : Données relatives à l'Anévrisme de l'Aorte Abdominal

21	0.030784313725490	0.000571428571429
22	0.032745098039216	0.000600000000000
23	0.035686274509804	0.000685714285714
24	0.037647058823529	0.000771428571429
25	0.039117647058824	0.000874285714286
26	0.040098039215686	0.000971428571429
27	0.050392156862745	0.001028571428571
28	0.050931372549020	0.002038685714286
29	0.039117647058824	0.001057142857143
30	0.038627450980392	0.001028571428571
31	0.037647058823529	0.000988571428571
32	0.036176470588235	0.000942857142857
33	0.033725490196078	0.000851428571429
34	0.032254901960784	0.000742857142857
35	0.030784313725490	0.000657142857143
36	0.029803921568627	0.000565714285714
37	0.027352941176471	0.000514285714286
38	0.026372549019608	0.000428571428571
39	0.025882352941176	0.000400000000000
40	0.025980392156863	0.000394285714286
41	0.026078431372549	0.000388571428571
42	0.024901960784314	0.000400000000000

Figure 3 : Données relatives à l'Anévrisme de l'Aorte Abdominal



Modélisation physique :

Le modèle physique de l'Anévrisme de l'Aorte Abdominal est obtenu en utilisant le logiciel de simulation CAO (**SOLIDWORKS**), il est représenté dans la figure (4) ci-dessous :

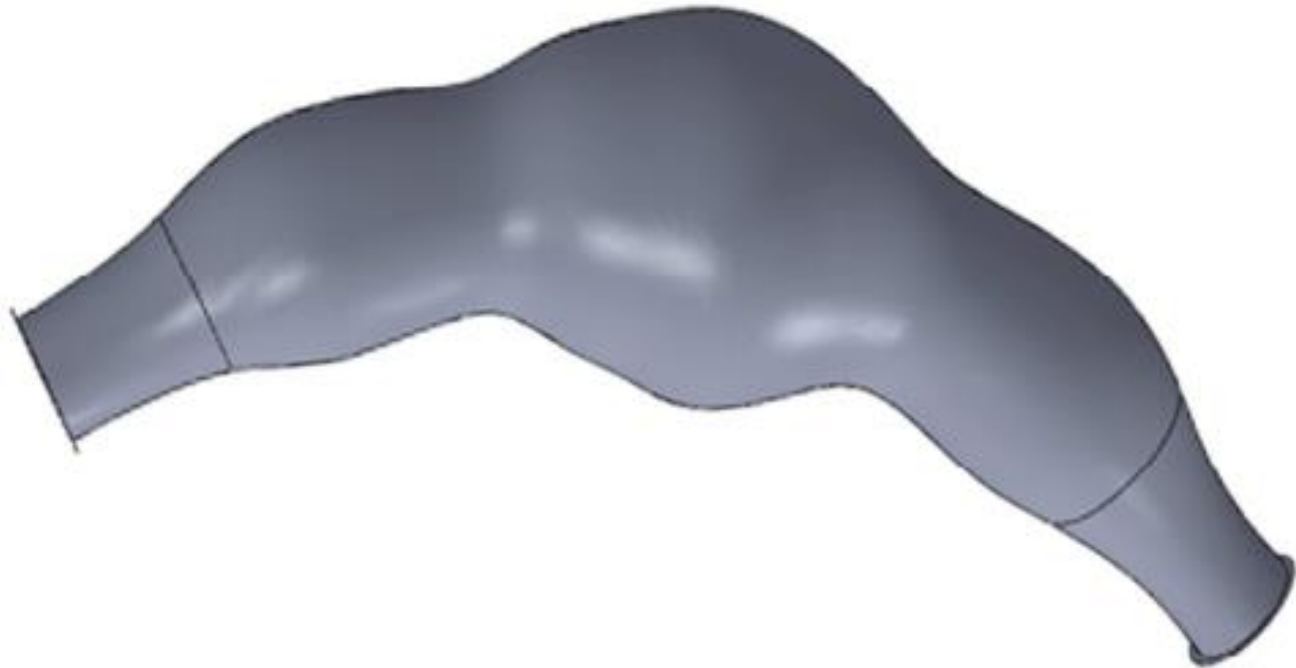


Figure 4 : L'Aorte Abdominal Anévrismée



LE PLAN DE LA PRÉSENTATION

- ➔ Introduction
- ➔ Modélisation physique (SOLIDWORKS)
- ➔ **Modélisation mathématique**
- ➔ Résultats
- ➔ Discussion et conclusion



Mise en équations de l'écoulement sanguin :

Dans le cas général, les équations de **Navier-Stokes** s'écrivent :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) - \mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}$$
$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Où :

\vec{u} : vitesse du fluide (en m/s)

ρ : masse volumique du fluide (en kg/m^3)

μ : viscosité dynamique du fluide (kg/ms)

p : champ de pression (en N/m^2)

\vec{f} : force extérieure (en N)



Hypothèses de l'étude :

Hypothèses :

- Le sang est un fluide newtonien et incompressible.
- L'écoulement est stationnaire.
- Force extérieur négligeable.

On utilise ainsi les équations de Stokes qui sont données comme suit:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= 0 \\ \mu \Delta \vec{u} &= \nabla p \end{aligned}$$

Simplification de l'étude :

En travaillant dans une direction, suivant y , les équations précédentes donnent :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Enfin, on trouve l'équation :

$$\frac{1}{\mu L} (P_2 - P_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Où :

P2 : la pression à l'entrée de l'artère (en N/m^2)

P1 : la pression à la sortie de l'artère (en N/m^2)

L : longueur de la conduite entre P1 et P2 (en m)



Définitions et théorème fondamental :

Le débit volumique est par définition :

$$D_v = \frac{V}{\Delta t} = \frac{S \times L}{\Delta t} = S \times v$$

Où :

D_v : débit volumique (en m^3 / s)

S : section de la conduite (en m^2)

v : Vitesse du fluide (en m / s)

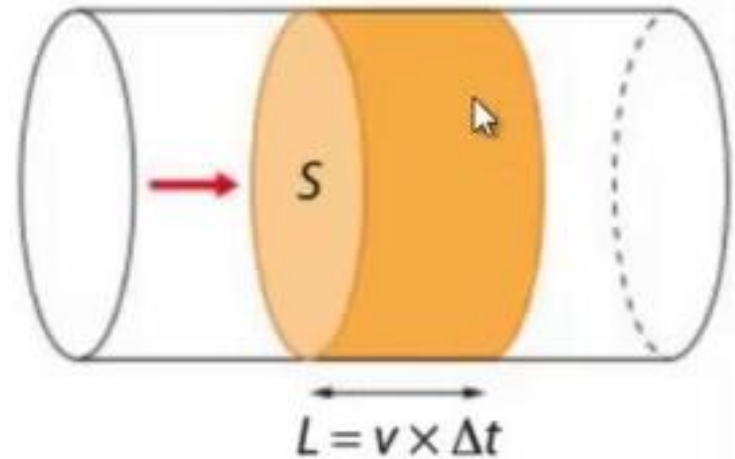


Figure 5 : Volume v traversant une section S

La conservation du débit volumique :

Soit un fluide en écoulement dans une **canalisation de section variable**, entrant par la limite (1) de section S_1 et sortant par la limite (2) de section S_2 :

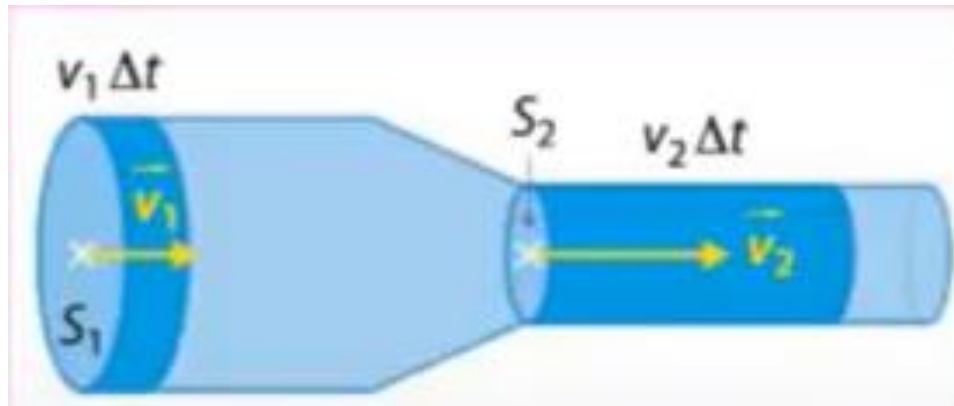


Figure 5 : Conservation du débit volumique

Puisque : $V_1 = V_2$ ou encore : $S_1 \times V_1 \times \Delta t = S_2 \times V_2 \times \Delta t$

Donc :

$$D_{V_1} = D_{V_2}$$

ou encore :

$$S_1 \times V_1 = S_2 \times V_2$$

Théorème fondamental :

Le théorème de la quantité de mouvement (loi de conservation de l'impulsion) :

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces agissant sur le fluide (sang) appliquées à une couche du sang est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du fluide (sang) :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Le principe des actions réciproques permet d'écrire : $\vec{F} = -\vec{F}'$

\vec{F}' : réaction du fluide sur la conduite (en N)

La réaction du fluide sur la conduite F' s'exprime
alors entre l'entrée de l'artère (1) et à la sortie de
l'artère (2) :

$$F' = \rho s v (V_1 - V_2)$$

Où :

ρ : masse volumique du sang (en kg/m^3)

s : section de l'artère (en m^2)

v : vitesse d'écoulement (en m/s)

V_1 : vitesse d'écoulement à l'entrée de l'artère (en m/s)

V_2 : vitesse d'écoulement à la sortie de l'artère (en m/s)

La pression pariétale :

La pression pariétale s'exprime à partir de la réaction du fluide sur la conduite comme suit :

$$p_r = \frac{F'}{S_p}$$

Où :

p_r : pression pariétale (en N/m^2)

S_p : section de l'artère (en m^2)

Les équations établies dans **le modèle mathématique** de l'Anévrisme de l'Aorte Abdominal sont :

$$\frac{1}{\mu L} (P_2 - P_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$p_r = \frac{\rho s v}{s_p} (V_1 - V_2) \quad (2)$$



Résolution des équations obtenues :

La résolution de l'équation (1) nécessite l'utilisation d'une méthode numérique, on utilisera donc :

La méthode des différences finies.

D'abord, on écrit l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{1}{\mu L} (P_2 - P_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g, \quad 0 < y < L$$

Le principe de la méthode est le suivant :

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta y^2} = g_i$$



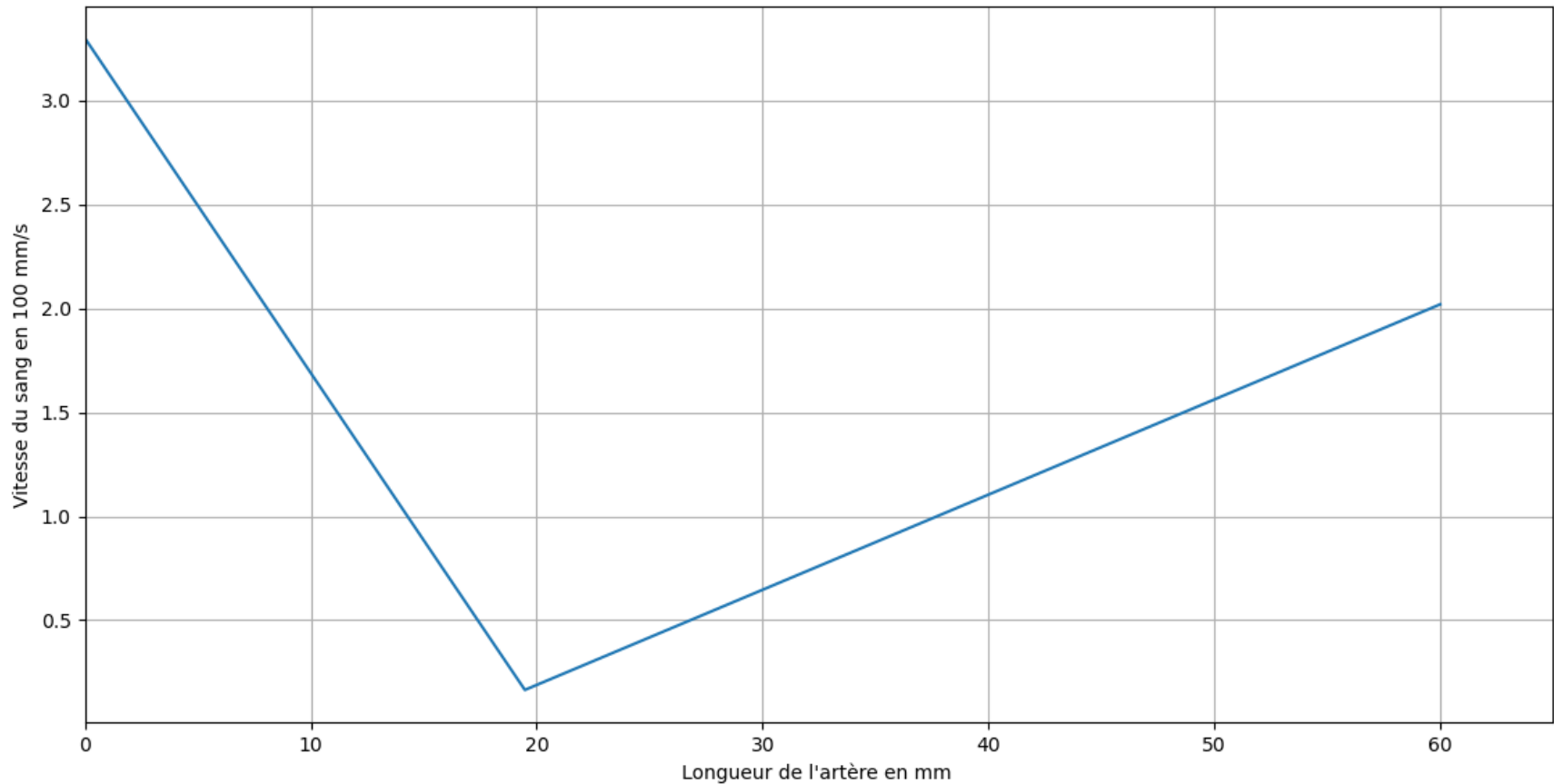
LE PLAN DE LA PRÉSENTATION

- ➔ Introduction
- ➔ Modélisation physique (SOLIDWORKS)
- ➔ Modélisation mathématique
- ➔ Résultats
- ➔ Discussion et conclusion



Résultats et interprétation :

Figure 6 : Variation de la vitesse dans l'artère en fonction de la longueur



Traçons la pression artérielle en fonction de la longueur de l'artère, l'équation (2) devient :

$$p_r = \frac{F'}{s_P} = \frac{\rho s_i v_i}{\Pi d_i y_i} (V_1 - V_2)$$

Où :

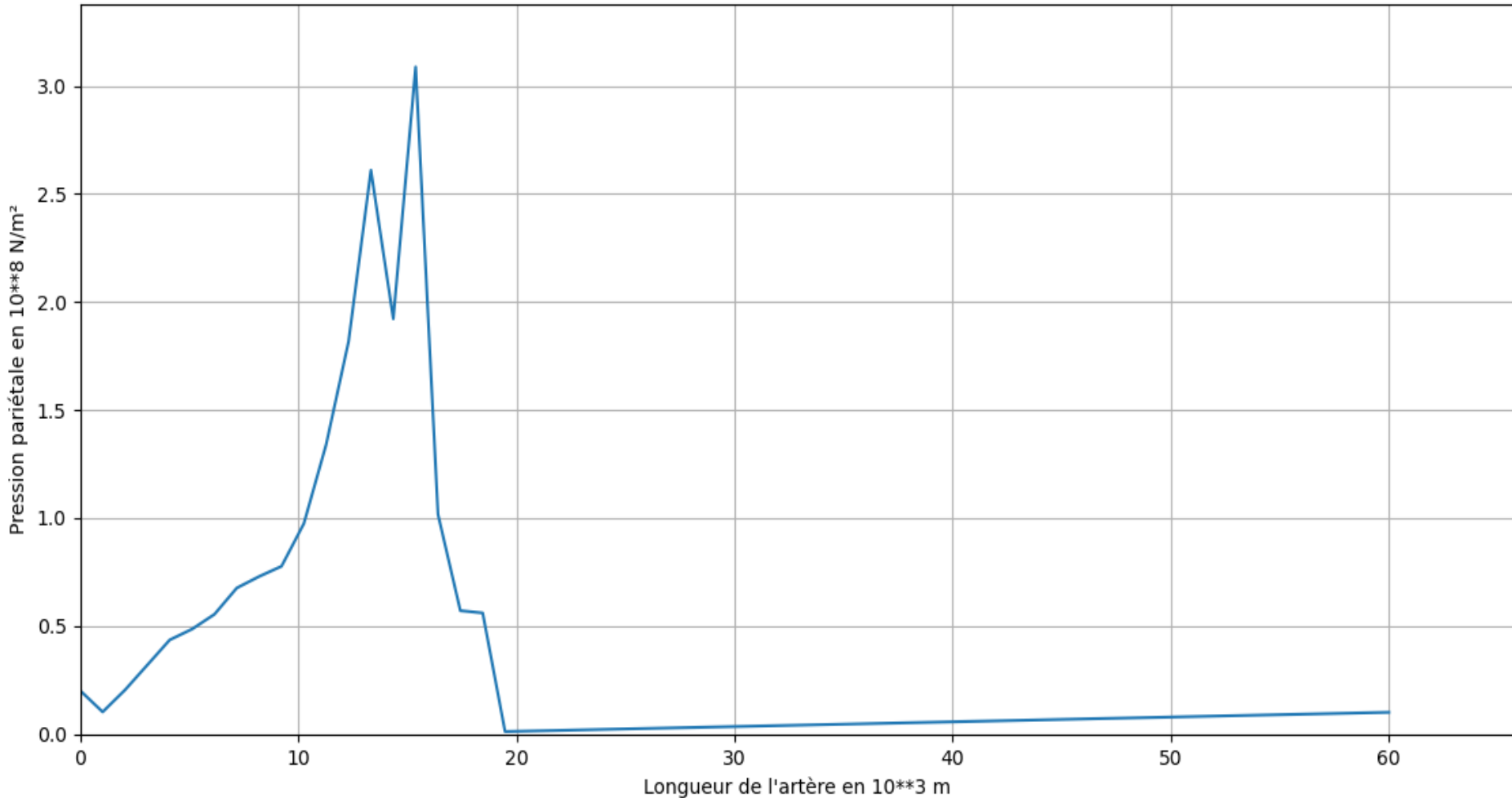
y_i : longueur de l'artère au pas (en m)

d_i : diamètre de l'artère au pas y_i (en m)

s_i : section de l'artère au diameter d_i (en m^2)

v_i : vitesse d'écoulement au pas y_i (en m/s)

Figure 7 : Variation de la pression pariétale dans l'artère en fonction de la longueur





LE PLAN DE LA PRÉSENTATION

- ➔ Introduction
- ➔ Modélisation physique (SOLIDWORKS)
- ➔ Modélisation mathématique
- ➔ Résultats
- ➔ Discussion et conclusion

Avantage :

- Importance de cette **modélisation**.

Améliorations - Etudes possibles :

- Prise en considération des **autres paramètres**.
- Caractère **non Newtonien et compressible** du sang.
- **Déformation** de l'anévrisme.
- Prise en considération des **forces extérieur** (force de gravitation ...)



Conclusion



**MERCI POUR
VOTRE
ATTENTION**



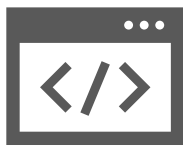
Annexe 1 : Code python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # LES PARAMÈTRE PHYSIQUE
5 mu = 0.004*10**-3      # Viscosité du sang
6 L = 60                 # Longueur de L'Aorte Abdominal Anévrismée
7 P1 = 0.1*10**2         # Pression à la sortie
8 P2 = 0.2*10**2         # Pression à l'entrée
9 v0 = 330               # Vitesse moyenne du sang à l'entrée
10 vL = 202              # Vitesse moyenne du sang à la sortie
11
12 # LES PARAMÈTRE NUMÉRIQUE
13 N = 20                 # Nœuds (Nombre de points de la grille)
14 h = 0.5/N+1           # Pas
15 K = 1/h**2            # Coefficient égale à l'inverse de deltya y au carré
```

```

17      ### PROGRAMME PRINCIPAL ###
18  A = np.zeros((N-1,N-1))
19  B , y = np.zeros(N-1) , np.zeros(N-1)
20  for i in range(1,N):
21      y[i-1] = i*h
22  A[0][0] , B[0] = -2*K , ((P2-P1)/mu*y[0]) - K*v0
23  for j in range(1,N-1):
24      A[j][j] = -2*K
25      A[j-1][j] , A[j][j-1] = K , K
26      B[j] = (P2-P1)/mu*y[j]
27  v = np.dot(np.linalg.inv(A),B)
28  Y , V = np.zeros(N+1) , np.zeros(N+1)
29  for i in range(0,len(y)):
30      Y[i+1] = y[i]
31  for i in range(0,len(v)):
32      V[i+1] = v[i]
33  Y[-1] , V[0] , V[-1] = L , v0 , vL
34  plt.plot(Y,V)
35  plt.grid()
36  plt.xlim(0,65)
37  plt.xlabel("Longueur de l'artère en mm ")
38  plt.ylabel("Vitesse du sang en 100 mm/s")
39  plt.show()

```



Annexe 2 : Code python

```
44 # LES PARAMÈTRE PHYSIQUE
45 rhô = 1050*10**-3      # La masse volumique du sang
46 V1 = 300               # Vitesse moyenne du sang à l'entrée
47 V2 = 202               # Vitesse moyenne du sang à la sortie
48 s =
    np.array([400.00,394.28,394.28,428.57,457.14,451.42,451.42,502.85,514.28,508.57,571.42,685.71,874
.28,1028.57,1057.14,988.57,851.42,657.14,514.28,400.00,388.57]) # Les valeurs de sections
49 d =
    np.array([24.901,24.509,25.882,26.372,26.862,25.882,26.372,26.666,26.666,27.843,30.784,35.686,39.
117,50.392,39.117,37.647,33.725,30.784,27.352,25.882,26.078]) # Les valeurs de diamètres
```

```
51 ##### PROGRAMME PRINCIPAL #####
52 p = np.zeros(len(V))
53 for i in range(1,len(p)-1):
54     p[i] = (rhô*s[i]*V[i])*(V1-V2)/np.pi*d[i]*Y[i]
55 p[0] , p[-1] = 0.2*10**2 , 0.1*10**2
56 plt.clf()
57 plt.plot(Y,p)
58 plt.grid()
59 plt.xlabel("Longueur de l'artère en 10**3 m ")
60 plt.ylabel("Pression pariétale en 10**8 N/m²")
61 plt.show()
```