

Correction Concours national commun
Filière MP- Physique II

Part I

Partie 1 : Puits de potentiel quantique

1) Pour se trouver en $x < 0$ ou $x > a$, la particule doit vaincre un potentiel infini, chose impossible, donc la probabilité pour que la particule soit dans ce domaine est nulle soit donc

$$|\psi(x, t)|^2 = 0 \\ \Rightarrow \psi(x, t) = 0$$

$$2) \psi(x, t) = \varphi(x) \cdot e^{-i \frac{E \cdot t}{\hbar}} \quad i\hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)$$

$$\text{et } V(x) = 0$$

donne

$$\boxed{E \cdot \varphi(x) + \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \varphi''(x) = 0} \quad (1)$$

3) La solution de (1) est $\varphi(x) = B \cdot \cos(K \cdot x) + A \cdot \sin(K \cdot x)$ avec $K^2 = \frac{2 \cdot m \cdot E}{\hbar^2}$

Conditions aux limites :

$$\square \varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\square \varphi(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ka = n \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad K = \frac{n\pi}{a}$$

4) La condition de normalisation s'écrit :

$$\int_0^a |\varphi(x)|^2 dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^a (A \cdot \sin(\frac{n \cdot \pi}{a}))^2 dx = 1$$

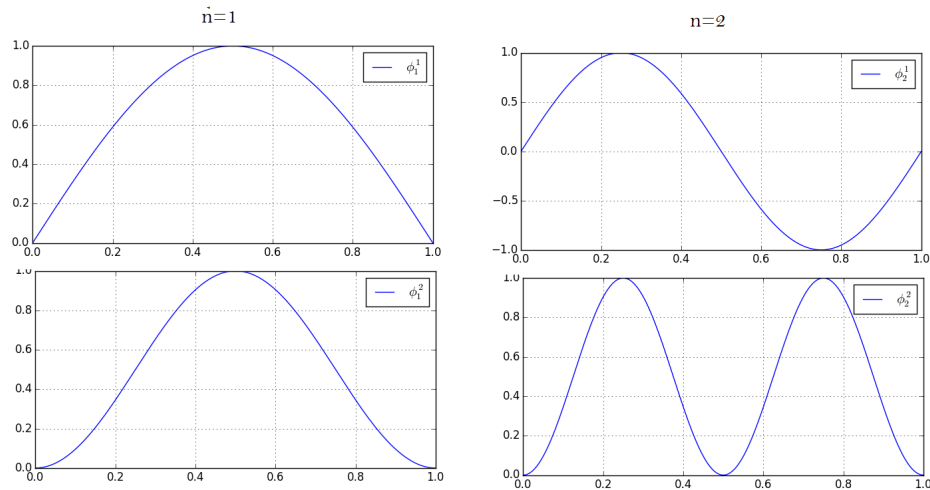
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^a A^2 (1 - \cos(2 \cdot \frac{n \cdot \pi}{a})) dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\int_0^a A^2 dx - \int_0^a \cos(2 \cdot \frac{n \cdot \pi}{a}) dx \right) = 1$$

\Rightarrow

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2}{a}}}$$

5) Allure de $\varphi(x)$ et $|\varphi(x)|^2$ pour $n = 1$ et $n = 2$



* Contrairement à la mécanique classique où toutes les positions entre 0 et a sont équiprobables, la mécanique quantique prévoit des positions plus probables que d'autres. Il y a même des positions **interdites** ($|\varphi(x)|^2 = 0$)

$$6) K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad E_n = \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \hbar \cdot n}{a} \right)^2$$

$$\text{D'autre part : } E_1 = \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\pi \cdot \hbar}{a} \right)^2 = \hbar \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\pi}{a} \right)^2$$

D'où

$$E_n = n^2 \hbar \cdot \omega$$

$$7) \Delta E = E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{3\hbar\omega}$$

Soit

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot c}{3\omega}$$

- AN $\lambda = 633nm$
- la longueur d'onde appartient au domaine visible

Part II

Partie 2 : Le dioxyde de carbone

1 Diagramme d'état

1.1

P_1	Point triple
P_2	Point critique
C_1	Courbe de sublimation
C_2	Courbe de rosée (vaporisation)
C_3	Courbe de solidification
E_1	État gazeux
E_2	État liquide
E_3	État solide
E_4	État fluide

1.2

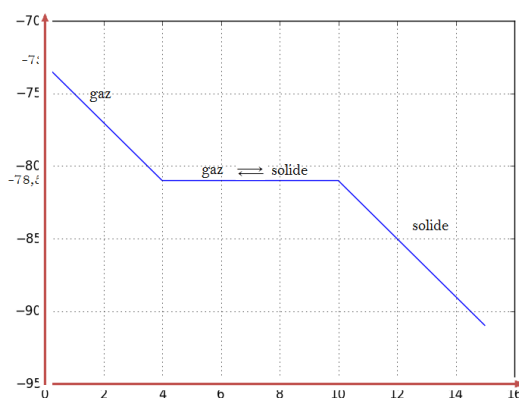
CO_2 est à l'état gazeux pour $\theta \geq -78,5^\circ C$

1.3

1.3.1

- ☐ Entre $-73^\circ C$ et $-78,5^\circ C$ refroidissent du gaz
- ☐ à $T = -78,5^\circ C$ Changement d'état gaz \rightarrow solide à température constante
- ☐ pour $T \leq -78,5^\circ C$: Refroidissement du CO_2 solide

1.3.2

2 Le CO_2 gaz réel

2.1

Avec $V_m = \frac{V}{n}$ et $(P + \frac{a}{V_m^2})(V_m - b) = RT$, on trouve pour n moles de gaz

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (2)$$

2.2

On suppose pour un gaz parfait(entre autre) :

- ☐ Hypothèse microscopique : Pas d'interaction entre ses molécules
- ☐ Hypothèse macroscopique : P,V,T,et n sont liées par la loi des gaz parfaits

2.3

su L'équation d'un gaz de Vander Waals pour lequel $a = 0$ s'écrit $P(V - nb) = nRT$

$$\Rightarrow V = nb + \frac{nRT}{P} \quad \text{ainsi } V \text{ tend vers } nb \text{ lorsque } P \text{ tend vers } l' + \infty$$

Alors que le volume d'un GP tend vers 0 pour P tend vers l'+∞.

$n.b$ est donc le volume minimal du gaz et correspond au volume propre de toutes les molécules du gaz et b (dit covolume) est le volume propre molaire (d'une mole de molécules).

2.4

Pour $b = 0$ on trouve pour un gaz de Vander Waals $P = \frac{nRT}{V} - \frac{an^2}{V^2}$ Qui vaut la pression d'un GP diminuée de la quantité $\frac{an^2}{V^2}$ (nommée pression moléculaire) qui traduit l'attraction exercée par les molécules du gaz sur les molécules en chemin vers les parois de l'enceinte contenant le gaz.

Ainsi la présence de ces interactions attractives entre molécules du gaz fait que la pression P ressentie par les parois de l'enceinte contenant le gaz, est plus faible que la pression qu'elles ressentiraient en l'absence d'attractions : molécule-molécule.

2.5

La relation (2) implique :

- ☐ P et $\frac{an^2}{V^2}$ ont même dimension donc l'unité de a est $Pa.m^6.mol^{-2}$
- ☐ V et nb ont même dimension donc l'unité de b est $m^3.mol^{-1}$
- ☐ La différence entre (a , b) et R : R est une constante universelle, valable pour tous les gaz. a et b sont spécifiques du gaz et varient d'un gaz à un autre

2.6

2.6.1

On a $S(U, V) = n.S_m(U, V)$

En posant $U = n.U_m$, $V = n.V_m$, $U_0 = n.U_{0m}$, $S_0 = n.S_{0m}$ et $C_V = n.C_{Vm}$
On trouve

$$S(U, V) = S_0 + C_V \ln \left(\frac{U + \frac{an^2}{V}}{U_0 + \frac{an^2}{V_0}} \right) + nR \ln \left(\frac{V - nb}{V_0 - nb} \right) \quad (3)$$

2.6.2

$$dS = C_V \frac{d\left(U + \frac{an^2}{V}\right)}{U + \frac{an^2}{V}} + nR \frac{d(V - nb)}{V - nb}$$

$$\Rightarrow \boxed{dS = \frac{C_V}{U + \frac{an^2}{V}} \cdot dU + \left(\frac{-C_V an^2}{V^2 \left(U + \frac{an^2}{V}\right)} + \frac{1}{V - nb} \right) \cdot dV} \quad (4)$$

2.6.3

la première identité thermodynamique : $T \cdot dS = dU + P \cdot dV$ donne :

$$\boxed{dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} \cdot dV} \quad (5)$$

2.6.4

L'identification entre (4) et (5) donne :

$$\frac{C_V}{U + \frac{an^2}{V}} = \frac{1}{T}$$

Soit

$$\boxed{U = C_V \cdot T - \frac{an^2}{V}}$$

2.6.5

L'énergie interne est diminuée du terme $\frac{an^2}{V}$ (par rapport au cas du gaz parfait) à cause des interactions (attractives) entre les molécules

2.6.6**2.6.6.1**

□ Variation de la température

Une détente de Joule- Gay Lussac étant isoénergétique (évolution du gaz dans une enceinte à parois adiabatiques et indéformables)

. Soit $U_1 = U_2$

$$\Rightarrow nC_{Vm} \cdot T_1 - \frac{an^2}{V_1} = nC_{Vm} \cdot T_2 - \frac{an^2}{V_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{na}{C_{Vm}} \cdot \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \simeq -2,6K < 0} \quad (n = 2mol)$$

□ : Variation de l'entropie

D'après l'expression de S établie en 2.6.6.1 on a $\Delta S = S_2 - S_1 = nR \ln \left(\frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \right)$

Avec pour le CO_2 $a = 3,59 \text{ bar}^2 \text{l}^2 \text{mol}^{-2}$ et $b = 0,0427 \text{ l mol}^{-1}$

On trouve

$$\boxed{\Delta S = 11,7 \text{ JK}^{-1}}$$

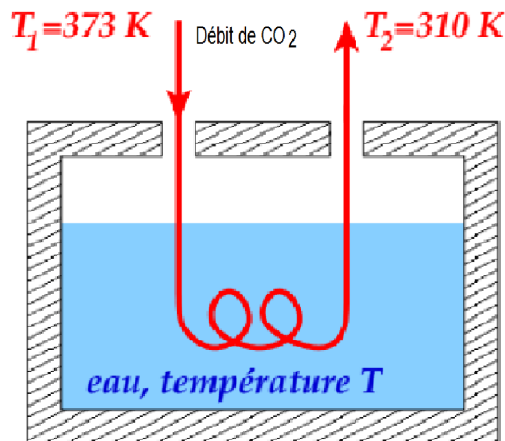
2.6.6.2 Pour un gaz parfait (pour lequel $a=0$ et $b=0$) on aura

$$\Delta T = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S = n \ln 2 = 11,5 J.K^{-1}$$

Lors d'une détente de Gay Lussac :

- La température d'un gaz parfait reste inchangée, un gaz réel se refroidit
- La transformation est irréversible pour les deux types de gaz

3 Mesure de la capacité thermique massique de CO_2 gazeux :



3.1 $dH = d(U + PV) = dU + PdV + VdP = \delta Q - PdV + PdV + VdP$
Soit à $P = Cte$ $dH = \delta Q$

D'où $\Delta H = Q_P$

3.2

la chaleur massique est donnée par $c_P = \frac{\partial C_P}{\partial m} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial T \partial m} \right)_P$

Soit $c_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P$

3.3

3.3.1

$\delta Q = \delta m \cdot (h_2 - h_1)$ Soit $\delta Q = d_m \cdot (h_2 - h_1) dt$

3.3.2

$dh = c_P dT$, car il s'agit d'une transformation isobare

$$\frac{\delta Q}{dt} = d_m c_P (T_2 - T_1) < 0$$

Le gaz cède de l'énergie thermique au calorimètre et à ses accessoires

3.4

3.4.1

Bilan thermique : (Calorimètre - Accessoires - Contenance) entre les instants t et $t+dt$:

$\hookrightarrow C dT = -\delta Q_{pertes} - \delta Q_{gaz} = 0$ (6) (régime stationnaire $T = T_2$)

$$\Rightarrow \frac{\delta Q_{pertes}}{dt} = -\frac{\delta Q_{gaz}}{dt}$$

$$\Rightarrow d_m c_P (T_2 - T_1) = k(T - T_0)$$

$$\Rightarrow \quad c_P = \frac{k}{d_m} \cdot \frac{T - T_0}{T_2 - T_1}$$

3.4.2

Désormais, on coupe le courant gazeux, (6) devient :

$$CdT = -\delta Q_{pertes} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} + \frac{k}{C} \cdot (T - T_0) = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C}{k}; \quad \text{la solution s'écrit :}$$

$$T(t) = T_0 + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Avec les conditions aux limites $T(0) = T_2$ on aura :

$$T(t) = T_0 + (T_2 - T_0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3.4.3

$$T(\Delta t) = T_0 + (T_2 - T_0) \cdot e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \Delta T = T(\Delta t) - T_2 = (T_2 - T_0) \cdot (e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} - 1)$$

\Rightarrow

- $k = \frac{C}{\tau} = \frac{-C}{\Delta T} \cdot \ln(1 + \frac{\Delta T}{T_2 - T_0}) = 1,39 JK^{-1}s^{-1}$

- $c_P = \frac{k}{d_m} \cdot \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_2} = 798 JK^{-1}Kg^{-1}$

3.5

Les mouvements susceptibles de contribuer à la chaleur massique :

- ☐ - Le mouvement de translation du centre de masse de la molécule : 3 degrés de liberté quantiques quadratiques.
- ☐ - Les rotations : 2 degrés de liberté quantiques quadratiques (car la molécule CO_2 est linéaire + atomes ponctuels (GP) \Rightarrow rotation propre non envisagée).
- ☐ Éventuellement une vibration : la température de déclenchement de la vibration de CO_2 est à partir de $\Theta = 960K$ (\Rightarrow deux degrés de libertés quantiques quadratiques)

3.6

La capacité thermique molaire à pression constante est :

- Sans tenir compte de la vibration $C_{Vm} = \frac{5}{2}R$

soit $C_{Pm} = C_{Vm} + R = \frac{7}{2}R$ Sachant que $c_P = \frac{C_{Pm}}{M(CO_2)}$ on a $c_P = 661 JK^{-1}Kg^{-1}$

- Avec la vibration $C_{Pm} = \frac{9}{2}R$ ce qui donne $c_P = 885 JK^{-1}Kg^{-1}$

La valeur expérimentale de est située entre les deux valeurs précédentes l'approche classique basée sur le théorème d'équipartition est à revoir. Cependant on peut supposer que les molécules du gaz entrent en mouvement considéré (translation -rotation -vibration) de façon progressive lorsque T augment

4 Utilisation de CO_2 comme fluide frigorigène :

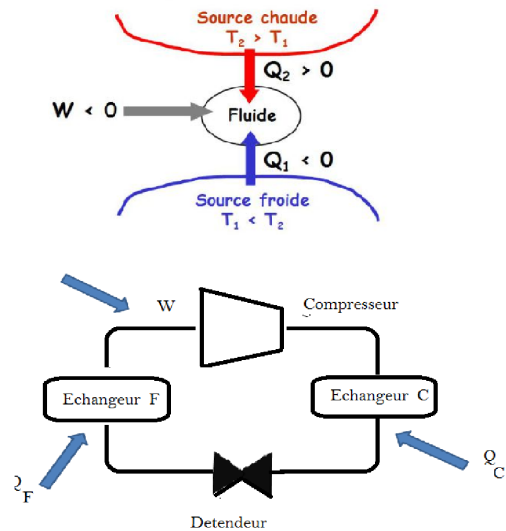
4.1 Fonctionnement d'une machine frigorifique :

Dans une machine frigorifique (MF)

-le fluide entre sous forme gazeuse dans le compresseur (où il est comprimé vers un état $:T_C, P_C$ en absorbant un travail $W > 0$) état où il est plus chaud que la source chaude à laquelle il cède alors de la chaleur $Q_C < 0$;

- puis repasse par un détendeur (où il est relaxé vers un état $:T_F, P_F$ état où il est plus frais que la source froide et lui emprunte en conséquence de la chaleur $Q_F > 0$.

L'efficacité de la MF se définit par .



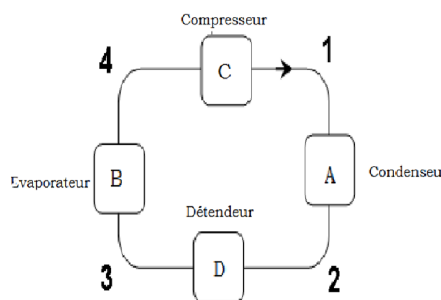
$$e = \frac{\text{Energie utile}}{\text{Energie déployée}} = \frac{Q_F}{W}$$

4.2 Étape D:

$$\Delta h = w_u + q_{th} = 0 + 0 = 0$$

il s'agit donc d'une détente isoenthalpique (détente de Joule-Thomson).

4.3



4.4

état	P en bar	T en °C	h en $(kJ.Kg^{-1})$	s en $(kJ.K^{-1}.Kg^{-1})$
1	80	80	490	1,925
2	80	18	246	1,15
3	25	-10	246	1,2
4	25	-10	440	1,9

4.5

L'échange thermique se fait avec la source chaude pendant la transformation : $1 \rightarrow 2$

L'échange thermique se fait avec la source froide pendant la transformation : $3 \rightarrow 4$

4.6

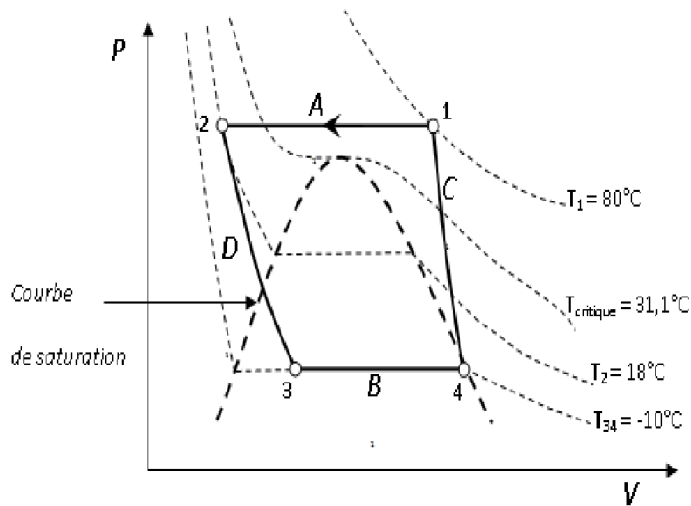
$T_C = T_2 = 18^\circ\text{C}$ (température à laquelle s'achève le contact avec la source chaude)

$T_F = T_3 = T_4 = -10^\circ\text{C}$ (températures auxquelles se fait l'échange avec la source froide).

$T_A = T_1 = 80^\circ\text{C}$ (température à la fin de la compression après quoi le gaz s'est échauffé).

4.7

Cycle en digramme de Clapeyron (P, V) :



Les courbes isothermes dans la zone de stabilité de l'état super-critique sont des Hyperboles car si l'on adopte le modèle du gaz parfait $P = \frac{RT}{M} \cdot \frac{1}{V}$

Dans la zone d'équilibre (liquide gaz) la variance étant égale à $V = N + 2 - R - S - \phi = 1$

En imposant la pression, le changement d'état (liquide \rightarrow gaz) se fait nécessairement à température constante

d'où le palier.

Dans les domaines de stabilité du liquide et du gaz les courbes décroissent car si le volume augmente, la pression diminue (dilatation isotherme \Rightarrow abaissement de la pression) : Le décroissance est plus abrupte à l'état liquide qu'à l'état gazeux car le liquide est difficilement compressible.

4.8

$$q_F = \Delta h_{3 \rightarrow 4} = h_4 - h_3 = 440 - 246 = 194 \text{ kJ.kg}^{-1} (q_F > 0: \text{comme prévu})$$

$$q_C = \Delta h_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1 = 246 - 490 = -244 \text{ kJ.kg}^{-1} (q_C < 0: \text{comme prévu})$$

4.9

$$\omega_{comp} = \Delta h_{4 \rightarrow 1} = h_1 - h_4 = 494 - 440 = 50 \text{ kJ.kg}^{-1} (\omega_{comp} > 0 : \text{récepteur})$$

4.10

le travail mise en jeu au cours du cycle est positif, $q_F > 0$ et $q_C < 0$ donc il s'agit d'une pompe à chaleur

4.11

□ l'efficacité de la machine (frigorifique) est $e = \frac{q_F}{\omega_{comp}} = 3,88 \simeq 3,9$

□ Dans le cas d'un cycle de Carnot $e = \frac{T_F}{T_C - T_F} \simeq 9,4$

L'efficacité d'un cycle réel est bien supérieure à celle d'un cycle de Carnot

□ Si la machine fonctionnait en pompe à chaleur (source chaude = centre d'intérêt)

Alors

$$e = \frac{-q_C}{\omega_{comp}} = 4,9$$

alors que pour un cycle de Carnot $e = \frac{T_C}{T_C - T_F} = 10,4$

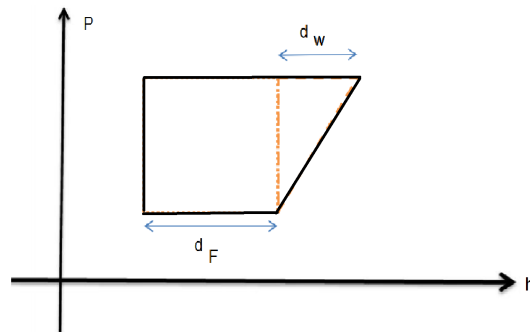
Pour améliorer l'efficacité on doit veiller à ce que :

- i) Les échanges thermiques dans les échangeurs soient les plus parfaits possibles
- ii) La détente soit faite sur la courbe de saturation (pour augmenter la chaleur extraire de la source froide et bénéficier ainsi de la totalité de la chaleur latente à T_F).
- iii) La compression soit la plus proche possible de l'isoenthalpique (étagée)

4.12

Dans le digramme des frigoristes (P,h), on peut évaluer efficacité en faisant le rapport des segments

d_ω et d_F



En effet $d_\omega = \omega_{comp}$ et $d_F = q_F$

$$e = \frac{q_F}{\omega_{comp}} = \frac{d_F}{d_\omega}$$

4.13

$$s_{cre} = \Delta s(cycle) - s_{change} = -s_{change}$$

$$\text{soit } s_{cre} = -\frac{q_C}{T_C} - \frac{q_F}{T_F} = 100 \text{ JK}^{-1} \text{ Kg}^{-1} > 0$$

. le cycle bien irréversible