Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

Résultats préliminaires

1) $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (formule de STIRLING). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\varepsilon_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} - 1$. La suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n)\,.$$

2) Soient $\lambda > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Pour $x > 0$, $\lambda x + \mu - 1 \leqslant \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leqslant \lambda x + \mu$ et donc

$$1 + \frac{\mu - 1}{\lambda x} \leqslant \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} \leqslant 1 + \frac{\mu}{\lambda x}.$$

Puisque $1 + \dfrac{\mu-1}{\lambda x}$ et $1 + \dfrac{\mu}{\lambda x}$ tendent vers 1 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} = 1$ et donc que

$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x.$$

Ensuite, puisque $\lfloor \lambda x + \mu \rfloor$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, $\lceil \lambda x + \mu \rceil \underset{x\to+\infty}{=} \lfloor \lambda x + \mu \rfloor + O(1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x$.

3) La fonction Φ est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction Φ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, la fonction Φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ce qui équivaut au fait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\ dt$ converge, puisque Φ est positive sur $\mathbb{R}$.

4)

$$\begin{aligned}\zeta(x) = (1+x)\ln(1+x) &\underset{x\to0}{=} (1+x+o(x))\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to0}{=} (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to0}{=} x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Etude asymptotique d'une suite

5) Pour $k \in [\![0,n]\!]$, posons $u_k = P(X_n = k)$ ou encore $u_k = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} \times \frac{p^{k+1}q^{n-k-1}}{p^k q^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q},$$

puis $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} - 1 = \dfrac{(n-k)p - (k+1)q}{(k+1)q} = \dfrac{np - q - k(p+q)}{(k+1)q} = \dfrac{np - q - k}{(k+1)q}$ puis

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{u_{k+1}}{u_k} - 1\right) = \operatorname{sgn}((np-q) - k).$$

Si $k < np - q$, alors $u_k < u_{k+1}$ et si $k > np - q$, $u_{k+1} < u_k$.

- Si $np - q$ n'est pas entier, $u_0 < u_1 < \ldots < u_{x_n - 1} < u_{x_n}$ et $u_{x_n} > u_{x_n+1} > \ldots > u_n$. Dans ce cas, $\operatorname{Max}\{u_k,\ k \in [\![0,n]\!]\} = u_{x_n}$.

- Si $np-q$ est entier, $u_0 < u_1 < \ldots < u_{x_n-1} < u_{x_n}$ et $u_{x_n} = u_{x_n+1} > \ldots > u_n$. De nouveau, $\text{Max}\{u_k,\ k \in [\![0,n]\!]\} = u_{x_n}$.

Dans tous les cas, $p_n = P(X_n = x_n) = \text{Max}\{P(X_n = k),\ k \in [\![0,n]\!]\}$.

6) D'après la question 2), puisque $p > 0$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} np$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Ensuite, $n - x_n \underset{n\to+\infty}{=} n(1-p) + o(n)$ ou encore $n - x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nq$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - x_n) = +\infty$. Ensuite, d'après la formule de Stirling et puisque x_n et $n - x_n$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{npq}\,p_n &= \sqrt{npq}\binom{n}{x_n}p^{x_n}q^{n-x_n} = \sqrt{npq}\frac{n!}{x_n!\,(n-x_n)!}p^{x_n}q^{n-x_n}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{npq}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{e}{x_n}\right)^{x_n}\frac{1}{\sqrt{2\pi x_n}}\left(\frac{e}{n-x_n}\right)^{n-x_n}\frac{1}{\sqrt{2\pi(n-x_n)}}p^{x_n}q^{n-x_n}\\
&= \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi}\,x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}} \times \frac{n\sqrt{pq}}{\sqrt{x_n(n-x_n)}}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi}\,x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}} \times \frac{n\sqrt{pq}}{\sqrt{pnqn}} = \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi}\,x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}}.
\end{aligned}$$

7) Soit $n > \text{Max}\left\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right\}$. On a alors $x_n = \lceil np - q\rceil \geqslant np - q > 0$ car $n > \frac{p}{q}$ et aussi $n - x_n > n - (np - q + 1) = (1-p)n - (1-q) = qn - p > 0$ car $n > \frac{q}{p}$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}} &= \exp\left(n\ln(n) + x_n\ln(p) + (n-x_n)\ln(q) - x_n\ln(x_n) - (n-x_n)\ln(n-x_n)\right)\\
&= \exp\left(-x_n\ln\left(\frac{x_n}{p}\right) - (n-x_n)\ln\left(\frac{n-x_n}{q}\right) + (x_n + n - x_n)\ln(n)\right)\\
&= \exp\left(-x_n\ln\left(\frac{x_n}{np}\right) - (n-x_n)\ln\left(\frac{n-x_n}{nq}\right)\right)\\
&= \exp\left(-np\left(\frac{x_n-np}{np}+1\right)\ln\left(\frac{x_n-np}{np}+1\right) - nq\left(\frac{n(p+q)-x_n}{nq}\right)\ln\left(\frac{n(p+q)-x_n}{nq}\right)\right)\\
&= \exp\left(-np\left(\frac{x_n-np}{np}+1\right)\ln\left(\frac{x_n-np}{np}+1\right) - nq\left(\frac{np-x_n}{nq}+1\right)\ln\left(\frac{np-x_n}{nq}+1\right)\right)\\
&= \exp\left(-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)\right).
\end{aligned}$$

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(np-q)-np \leqslant x_n - np \leqslant (np-q+1)-np$ ou encore $-q \leqslant x_n - np \leqslant p$ et donc $-\frac{q}{np} \leqslant \frac{x_n-np}{np} \leqslant \frac{1}{n}$. Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n-np}{np} = 0$ et de même $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{np-x_n}{nq} = 0$. D'après la question 4),

$$\begin{aligned}
&-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -np\left(\frac{x_n-np}{np} + \frac{(x_n-np)^2}{2n^2p^2} + o\left(\frac{(x_n-np)^2}{n^2}\right)\right) - nq\left(\frac{np-x_n}{nq} + \frac{(np-x_n)^2}{2n^2q^2} + o\left(\frac{(np-x_n)^2}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{(x_n-np)^2}{2np} - \frac{(x_n-np)^2}{2nq} + o\left(\frac{(x_n-np)^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)\right) = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{npq}\,p_n = \frac{e^0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{npq}\,p_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Convergence en loi

9) $Y_n(\Omega) = \{\tau_{n,k},\ k \in [\![0,n]\!]\}$ puis

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}\left(Y_n = \tau_{n,k}\right) = P\left(X_n = k\right) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

On sait que $\mathbb{E}\left(X_n\right) = np$ et $\mathbb{V}\left(X_n\right) = npq$. Donc

$$\mathbb{E}\left(Y_n\right) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\left(\mathbb{E}\left(X_n\right) - np\right) = 0$$

et

$$\mathbb{V}\left(Y_n\right) = \frac{1}{npq}\mathbb{V}\left(X_n - np\right) = \frac{1}{npq}\mathbb{V}\left(X_n\right) = 1.$$

Donc, Y_n est une variable aléatoire centrée réduite.

10) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau_{n,0} = -\dfrac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$ et $\tau_{n,n} = \dfrac{n(1-p)}{\sqrt{npq}} = \dfrac{\sqrt{nq}}{\sqrt{p}}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_{n,0} = -\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\tau_{n,0} \leqslant a$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_{n,n} = +\infty$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $\tau_{n,n} \geqslant b$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{npq}} = 0$ et que $b - a > 0$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_2$, $\dfrac{1}{\sqrt{npq}} \leqslant b - a$.

Soit $N = \text{Max}\{n_0, n_1, n_2\}$. Pour $n \geqslant N$, $[a,b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}]$ et $\dfrac{1}{\sqrt{npq}} \leqslant b - a$.

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} k_n(t) = k &\Leftrightarrow k \leqslant \sqrt{npq}t + np < k+1 \Leftrightarrow \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leqslant t < \frac{k-np+1}{\sqrt{npq}} \\ &\Leftrightarrow \tau_{n,k} \leqslant t < \tau_{n,k+1} \quad (*). \end{aligned}$$

Donc, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in [\tau_{n,k}, \tau_{n,k+1}[$, $k_n(t) = k$ puis $e_n(t) = \tau_{n,k}$. Ceci montre que la fonction e_n est en escalier sur $\mathbb{R}$.

• Soient $(t,u) \in \mathbb{R}^2$ tel que $t \leqslant u$. $k_n(t) = \lfloor\sqrt{npq}t + np\rfloor \leqslant \sqrt{npq}t + np \leqslant \sqrt{npq}u + np$. $k_n(t)$ est un entier relatif inférieur ou égal à $\sqrt{npq}u + np$ et puisque $k_n(u)$ est le plus grand de ces entiers, on en déduit que $k_n(t) \leqslant k_n(u)$ puis $e_n(t) = \tau_{n,k_n(t)} \leqslant \tau_{n,k_n(u)} = e_n(u)$. Ceci montre que la fonction e_n est croissante sur $\mathbb{R}$.

• Soit $t \in \mathbb{R}$. L'encadrement $(*)$ appliqué à $k = k_n(t)$ s'écrit encore $e_n(t) \leqslant t < e_n(t) + \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.

• Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $e(t) = t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e_n(t) - e(t)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$ puis $\|e_n - e\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.
Mais alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|e_n - e\|_\infty = 0$. Ceci montre que la suite de fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément et en particulier simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $e\ :\ t \mapsto t$.

12) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^x \Phi(t)\ dt$. Ψ est continue sur $\mathbb{R}$ car Φ l'est. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)\ dt = \Psi\left(\tau_{n,k_n(b)+1}\right) - \Psi\left(\tau_{n,k_n(a)}\right).$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_{n,k_n(a)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e_n(a) = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_{n,k_n(b)+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(e_n(b) + \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\right) = b$.
Par continuité de Ψ sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)\ dt = \Psi(b) - \Psi(a) = \int_a^b \Phi(t)\ dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $a < b$, $k_n(a) \leqslant k_n(b)$ puis

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,dt &= \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} \int_{\tau_{n,k}}^{\tau_{n,k+1}} f_n(t)\,dt \\
&= \sqrt{npq} \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} \int_{\tau_{n,k}}^{\tau_{n,k+1}} P\left(Y_n = e_n(t)\right)\ dt \\
&= \sqrt{npq} \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} \int_{\tau_{n,k}}^{\tau_{n,k+1}} P\left(Y_n = \tau_{n,k}\right)\ dt \text{ (d'après 11))} \\
&= \sqrt{npq} \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} \left(\tau_{n,k+1} - \tau_{n,k}\right) P\left(Y_n = \tau_{n,k}\right) = \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} P\left(Y_n = \tau_{n,k}\right) \\
&= P\left(\tau_{n,k_n(a)} \leqslant Y_n \leqslant \tau_{n,k_n(b)}\right) = P\left(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)\right).
\end{aligned}$$

13) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
f_n\left(\tau_{n,k}\right) &= \sqrt{npq}\ P\left(Y_n = \tau_{n,k}\right) = \sqrt{npq}\ P\left(X_n = k\right) = \sqrt{npq} p^k q^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sqrt{npq}\ p^k q^{n-k} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\varepsilon_n\right) \left(\frac{e}{k}\right)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi k}\left(1+\varepsilon_k\right)} \left(\frac{e}{n-k}\right)^{n-k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-k)}\left(1+\varepsilon_{n-k}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{pqn^2}{k(n-k)}} \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \frac{1+\varepsilon_n}{\left(1+\varepsilon_k\right)\left(1+\varepsilon_{n-k}\right)}
\end{aligned}$$

14) Soit $t \in [a, b]$. $k_n(t) \underset{n \to +\infty}{\sim} np$ (car $1 + \dfrac{\sqrt{q}t}{\sqrt{np}} - \dfrac{1}{np} \leqslant \dfrac{k_n(t)}{np} \leqslant 1 + \dfrac{\sqrt{q}t}{\sqrt{np}}$) puis $(n - k_n(t)) \underset{n \to +\infty}{\sim} n(1-p) = nq$.

Donc, $\sqrt{\dfrac{pqn^2}{k_n(t)\left(n - k_n(t)\right)}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{pqn^2}{pqn^2}} = 1$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} k_n(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n - k_n(t)) = +\infty$, les suites extraites $\left(\varepsilon_{k_n(t)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\varepsilon_{n-k_n(t)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0. Mais alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1+\varepsilon_n}{\left(1+\varepsilon_{k_n(t)}\right)\left(1+\varepsilon_{n-k_n(t)}\right)} = \dfrac{1+0}{(1+0)(1+0)} = 1$.

15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soit $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $\text{Max}\left\{\sqrt{\dfrac{q}{np}}, \sqrt{\dfrac{p}{nq}}\right\} \times |\tau_{n,k}| < 1$. Tout d'abord, $1 > |\tau_{n,k}| \sqrt{\dfrac{q}{np}}$ puis $\tau_{n,k}\sqrt{\dfrac{q}{np}} > -1$. De même, $-\tau_{n,k}\sqrt{\dfrac{p}{nq}} > -1$. Par suite, $\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right)$ et $\zeta\left(-\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)$ existent. Ensuite,

$$\begin{aligned}
-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right) &= -np\zeta\left(\frac{k-np}{np}\right) - nq\zeta\left(-\frac{k-np}{nq}\right) \\
&= -np\left(\frac{k-np}{np}+1\right)\ln\left(\frac{k-np}{np}+1\right) - nq\left(-\frac{k-np}{nq}+1\right)\ln\left(-\frac{k-np}{nq}+1\right) \\
&= -k\ln\left(\frac{k}{np}\right) - (-k+n(p+q))\ln\left(\frac{-k+n(p+q)}{nq}\right) \\
&= -k\ln\left(\frac{k}{np}\right) - (n-k)\ln\left(\frac{n-k}{nq}\right) = \ln\left(\frac{n^k p^k n^{n-k} q^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}}\right)
\end{aligned}$$

et donc $\dfrac{p^k q^{n-k}}{\left(\dfrac{k}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = \exp\left(-np\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)\right)$.

16) Vérifions que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)} = 0$. D'après le début de la question Q14,

$$\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)} = \frac{k_n(t)-np}{np} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{np+o(n)-np}{np} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

et

$$-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)} = \frac{-k_n(t)+np}{nq} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{-np+o(n)+np}{nq} \underset{n\to+\infty}{=} o(1).$$

On peut donc utiliser le développement limité de la question 4) : $-np\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k,(t)}\right) = -np\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}e_n(t)\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\dfrac{p}{nq}}e_n(t)\right)$ puis

$$\begin{aligned}-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}e_n(t)\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}e_n(t)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -np\left(\sqrt{\frac{q}{np}}e_n(t) + \frac{q\,(e_n(t))^2}{2np} + o\left(\frac{q\,(e_n(t))^2}{2np}\right)\right)\\ &\quad - nq\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}e_n(t) + \frac{p\,(e_n(t))^2}{2nq} + o\left(\frac{p\,(e_n(t))^2}{2nq}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2}(p+q)\,(e_n(t))^2 + o\left((e_n(t))^2\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{t^2}{2} + o(1) \text{ (d'après la question 11)).}\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} -np\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)}\right) - nq\zeta\left(-\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k,(t)}\right) = -\dfrac{t^2}{2}$ puis

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\left(\dfrac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)}\left(\dfrac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

17) Soit $t\in[a,b]$. D'après la question 11, $\tau_{n,k_n(t)} \leqslant t < \tau_{n,k_n(t)+1}$ puis pour tout $x\in\left[\tau_{n,k_n(t)},\tau_{n,k_n(t)+1}\right[$, $e_n(x) = \tau_{n,k_n(t)}$ (e_n est constante sur $\left[\tau_{n,k_n(t)},\tau_{n,k_n(t)+1}\right[$). En particulier, $e_n(t) = e_n\left(\tau_{n,k_n(t)}\right)$ puis $f_n(t) = f_n\left(\tau_{n,k_n(t)}\right)$.

D'après les questions 13, 14 et 16, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(\tau_{n,k_n(t)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\times 1\times e^{-\frac{t^2}{2}}\times 1 = \dfrac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \Phi(t)$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n\left(\tau_{n,k_n(t)}\right) = \Phi(t).$$

Pour tout réel $t\in[a,b]$, $f_n(t) = \sqrt{npq}\,P\left(Y_n = e_n(t)\right) = \sqrt{npq}\,P\left(X_n = k_n(t)\right) \leqslant \sqrt{npq}\,p_n$ (où p_n a été défini au début de la question 5)). D'après la question 8), la suite $\left(\sqrt{npq}\,p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et en particulier majorée. Soit M un majorant de cette suite. On a alors pour tout réel t de $[a,b]$, $0\leqslant f_n(t)\leqslant M$.

Ainsi,

- chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $[a,b]$,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction Φ sur $[a,b]$ et la fonction Φ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
- il existe une fonction φ continue par morceaux sur $[a,b]$ et intégrable sur $[a,b]$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in[a,b]$, $|f_n(t)|\leqslant\varphi(t)$ à savoir $\varphi\ :\ t\mapsto M$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \Phi(t)\,dt$.

18) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n = \mathbb{1}_{[\tau_{n,k_n(a)},\tau_{n,k_n(b)+1}]} \times f_n$ de sorte que, d'après la question 12),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)\right) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\ dt.$$

- Chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Soit $t \in \mathbb{R}$.
  - si $t \in]-\infty, a[$, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n(a) = a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour $n \geqslant n_0$, $t < e_n(a) = \tau_{n,k_n(a)}$.
  Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, $g_n(t) = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(t) = 0 = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\Phi(t)$.
  - De même, si $t \in]b + \infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(t) = 0 = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\Phi(t)$.
  - Si $t \in [a, b]$, alors $\tau_{n,k_n(a)} \leqslant t \leqslant \tau_{n,k_n(b)+1}$ et donc $g_n(t) = f_n(t)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(t) = \Phi(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)\Phi(t)$.

  Ainsi, la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $\mathbb{1}_{[a,b]}\Phi$ sur $\mathbb{R}$,
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|g_n| \leqslant |f_n| \leqslant \varphi$ (où φ a été définie à la question précédente).

D'après le théorème de convergence dominée,

- la suite $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\ dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}\Phi(t)\ dt = \int_a^b \Phi(t)\ dt.$

Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)\right) = \int_a^b \Phi(t)\ dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n(a) \leqslant a$ et $e_n(b) \leqslant b$. Ensuite, pour $n \geqslant N$ (où N a été défini à la question 10)), $e_n(b) > b - \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \geqslant b - (b - a) = a$. Ainsi, pour $n \geqslant N$, $e_n(a) \leqslant a \leqslant e_n(b) \leqslant b$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\left(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)\right) - \mathbb{P}\left(a \leqslant Y_n \leqslant b\right)\right| &= \left|\mathbb{P}\left(e_n(a) \leqslant Y_n < a\right) + \mathbb{P}\left(a \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)\right)\right. \\
&\quad \left. - \mathbb{P}\left(a \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)\right) - \mathbb{P}\left(e_n(b) < Y_n \leqslant b\right)\right| \\
&\leqslant \left|\mathbb{P}\left(e_n(a) \leqslant Y_n < a\right)\right| + \left|\mathbb{P}\left(e_n(b) < Y_n \leqslant b\right)\right| \\
&\leqslant \left|\mathbb{P}\left(\tau_{n,k_n(a)} \leqslant Y_n < \tau_{n,k_n(a)+1}\right)\right| + \left|\mathbb{P}\left(\tau_{n,k_n(b)} \leqslant Y_n < \tau_{n,k_n(b)+1}\right)\right| \\
&= \left|\mathbb{P}\left(Y_n = \tau_{n,k_n(a)}\right)\right| + \left|\mathbb{P}\left(Y_n = \tau_{n,k_n(b)}\right)\right| \\
&= \left|\mathbb{P}\left(X_n = k_n(a)\right)\right| + \left|\mathbb{P}\left(X_n = k_n(b)\right)\right| \\
&\leqslant 2p_n \text{ (où } p_n \text{ a été défini à la question 5)).}
\end{aligned}$$

D'après la question 8), $2p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi npq}}$ et en particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\mathbb{P}\left(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)\right) - \mathbb{P}\left(a \leqslant Y_n \leqslant b\right)\right| = 0$ puis que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(a \leqslant Y_n \leqslant b\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)\right) = \int_a^b \Phi(t)\ dt.$$

Applications

19) Soit $T > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, puisque la variable aléatoire Y_n est centrée et réduite et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(-T \leqslant Y_n \leqslant T\right) &\geqslant \mathbb{P}\left(-T < Y_n < T\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| < T\right) = 1 - \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geqslant T\right) \\
&\geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{T^2} = 1 - \frac{1}{T^2}
\end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, la question 18) fournit

$$\int_{-T}^{T} \Phi(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(-T \leqslant Y_n \leqslant T\right) \geqslant 1 - \frac{1}{T^2}.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(-T \leqslant Y_n \leqslant T\right) \leqslant 1$ puis, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_{-T}^{T} \Phi(t)\ dt \leqslant 1$. En résumé,

$$\forall T > 0,\ 1 - \frac{1}{T^2} \leqslant \int_{-T}^{T} \Phi(t)\ dt \leqslant 1.$$

Quand T tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\ dt = 1,$$

(et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \sqrt{2\pi}$).

20) La totalité des raisonnements des questions 17) et 18) tient en remplaçant l'intervalle $[a, b]$ par l'intervalle $]-\infty, b]$ ou l'intervalle $[a, +\infty[$. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant b\right) = \int_{-\infty}^{b} \Phi(t)\ dt$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(Y_n \geqslant a\right) = \int_{a}^{+\infty} \Phi(t)\ dt$ (ce qui reste vrai quand $a = -\infty$ puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\ dt = 1$).

Généralisations

21) Puisque φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que φ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, φ' garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Donc ou bien $\varphi' > 0$ sur $\mathbb{R}$, ou bien $\varphi' < 0$.

Supposons $\varphi' > 0$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus, φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après les questions 17) et 18), pour $(\alpha, \beta) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$ tel que $\alpha \leqslant \beta$ (avec la convention $\varphi^{-1}(-\infty) = -\infty$ et $\varphi^{-1}(+\infty) = +\infty$),

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\alpha \leqslant Z_n \leqslant \beta\right) &= \mathbb{P}\left(\alpha \leqslant \varphi \circ Y_n \leqslant \beta\right) = \mathbb{P}\left(\varphi^{-1}(\alpha) \leqslant Y_n \leqslant \varphi^{-1}(\beta)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\to} \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \Phi(u)\ du \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \Phi\left(\varphi^{-1}(t)\right) \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}\ dt \text{ (en posant } t = \varphi(u) \text{ et donc } u = \varphi^{-1}(t) \text{ puis } du = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}\ dt).
\end{aligned}$$

La fonction $\Psi = \dfrac{\Phi \circ \varphi^{-1}}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$ convient.

Si $\varphi < 0$, on applique le travail précédent à la fonction fonction $-\varphi$ ce qui montre de nouveau l'existence de ψ.

