Satellites artificiels

Ce problème propose l'étude de quelques propriétés des satellites artificiels terrestres. Dans le cadre de cette étude on considère un modèle simple se basant sur les hypothèses suivantes :

- le référentiel d'étude est le référentiel *géocentrique* $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ supposé *galiléen* ;
- la Terre de masse M_{T} est supposée sphérique de centre T et de rayon R_{T} ;
- le satellite artificiel sera assimilé à un point matériel S de masse m ;
- sauf mention explicite du contraire, le satellite est supposé soumis à la seule action de la Terre caractérisée par le champ de gravitation terrestre dont l'intensité à une distance r du centre T de la Terre est notée $G(r)$;

1ère partie
Étude générale

1.1. En quelle année, le Maroc a-t-il lancé son premier satellite artificiel ? Quel nom porte-t-il ? À quel usage principal est-il destiné ?

1.2. Exprimer l'intensité du champ de pesanteur terrestre $G(r)$ à la distance r du centre T de la Terre en fonction de r, R_{T} et $g_0 = G(R_{\mathrm{T}})$ qui désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

1.3. La mise sur orbite d'un satellite artificiel se fait à partir d'une fusée en un point S_0 situé à une distance r_0 du centre T de la Terre, $r_0 > R_{\mathrm{T}}$. La vitesse de lancement du satellite par rapport à $\mathcal{R}_{\mathrm{G}}$ est $\overrightarrow{v}_0$. On posera dans toute la suite

$$\alpha_0 = \frac{r_0 v_0^2}{g_0 R_{\mathrm{T}}^2} \qquad \text{et} \qquad \beta_0 = (\overrightarrow{TS}_0, \overrightarrow{v}_0)$$

1.3.1. Montrer que, après sa mise sur orbite, le satellite parcourt une trajectoire plane. Caractériser *complètement* le plan de la trajectoire.

1.3.2. *Dans toute la suite*, on repérera la position S du satellite dans le plan de sa trajectoire par :

- la distance r telle que $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{TS} = r\ \overrightarrow{u}_r$;
- l'angle $\theta = (\overrightarrow{TS}_0, \overrightarrow{TS})$ orienté de $\overrightarrow{TS}_0$ vers $\overrightarrow{TS}$.

On posera aussi

$$\overrightarrow{u}_\theta = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_r}{\mathrm{d}\theta} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_\theta$$

$(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z)$ constitue donc une base orthonormée directe. Faire un schéma représentatif dans le plan de la trajectoire du satellite montrant T, S_0, S, $\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{TS}_0$, $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{v}_0$, θ et β_0.

1.3.3. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}$ du satellite en T peut s'écrire $\overrightarrow{\sigma} = \sigma\ \overrightarrow{u}_z$ et donner l'expression de σ en fonction de m, r_0, v_0 et β_0.

1.4. On définit le vecteur de HAMILTON $\overrightarrow{H}$ du satellite artificiel par

$$\overrightarrow{H} = m\,\overrightarrow{v} - \frac{K}{\sigma^2}\left(\overrightarrow{\sigma} \times \frac{\overrightarrow{r}}{r}\right)$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel et K une constante réelle.

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{H}$ reste constant au cours du mouvement à condition de donner à K une expression particulière.

Dans toute la suite du problème, K a l'expression déterminée à la question 1.4. $\overrightarrow{H}$ est alors une constante du mouvement appelée intégrale première de LANDAU.

1.5. On appelle *hodographe* H du mouvement le lieu des points A tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{v}$, O étant un point quelconque de l'espace. Pour tracer H, on porte donc le vecteur $\overrightarrow{v}$ à partir d'un point O. L'hodographe du mouvement est le lieu des points décrit par l'extrémité du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ au cours du temps.

1.5.1. D'après les questions précédentes, exprimer $\overrightarrow{OA}$ et en déduire la forme de l'hodographe dans le cas du mouvement d'une particule dans un champ central de force en $1/r^2$?

1.5.2. Que peut-on dire à propos des directions permises pour le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ selon que le point O est à l'extérieur ou à l'intérieur de H ?

1.5.3. À quel type de trajectoire correspond chacun des cas cités à la question 1.5.2. ? On se rappellera pour cela des résultats de l'étude générale du mouvement d'une particule dans un champ central de force en $1/r^2$.

1.5.4. Donner la direction du vecteur de HAMILTON. Que vaut $\overrightarrow{H}$ dans le cas d'une trajectoire circulaire ?

1.6. On introduit le vecteur $\overrightarrow{\epsilon}$ défini par

$$\overrightarrow{\epsilon} = \frac{1}{K}\,\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{\sigma}$$

1.6.1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\epsilon}$ est une constante du mouvement. Dans quel plan se situe $\overrightarrow{\epsilon}$?

1.6.2. En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\epsilon}$, montrer que l'équation polaire de la trajectoire du satellite peut se mettre sous la forme

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

où p, e et θ_0 sont des constantes, $p > 0$ et $e > 0$. Exprimer p et e en fonction de σ, K et $\overrightarrow{\epsilon}$. Que représente θ_0 ?

1.6.3. Exprimer p en fonction de α_0, r_0 et β_0 et montrer que e est donnée par

$$e^2 = 1 + \alpha_0(\alpha_0 - 2)\sin^2\beta_0$$

1.7. On se propose de discuter la nature de la trajectoire du satellite en fonction des conditions de sa mise sur orbite.

1.7.1. Tracer les courbes représentatives de e en fonction de α_0 pour les valeurs suivantes de β_0 : 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ et $\pi/2$.

1.7.2. Discuter la nature de la trajectoire en fonction de la valeur de α_0 et en déduire la valeur de la vitesse de libération v_ℓ à l'altitude $z_0 = r_0 - R_{\mathrm{T}}$.

1.7.3. À quelles conditions sur α_0 et β_0 la trajectoire est-elle circulaire ? En déduire la vitesse du satellite sur son orbite circulaire de rayon R.

1.8. On considère le cas : $\alpha_0 = 1$ et $0 < \beta_0 < \pi/2$.

1.8.1. Quelle est la nature de la trajectoire ?

1.8.2. Déterminer θ_0 en fonction de β_0.

1.8.3. Montrer que S_0 est un sommet du petit axe de la trajectoire du satellite et positionner celle-ci en faisant un schéma *clair* et *soigné*.

2ème partie

Satellites circulaires

On considère le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R.

2.1. Satellites en orbite basse

2.1.1. En appliquant le théorème de la résultante cinétique au satellite, retrouver directement l'expression de sa vitesse v sur son orbite circulaire de rayon R.

2.1.2. En déduire la période de révolution T du mouvement du satellite. Retrouve-t-on la troisième loi de KEPLER ?

2.1.3. Y a-t-il une restriction concernant le plan de la trajectoire ainsi que le sens de rotation du satellite ? Pourquoi certains de ces satellites sont ils dits « satellites polaires » ?

2.2. Satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire est un satellite qui apparaît fixe à un observateur terrestre.

2.2.1. Quel est l'intérêt de tels satellites ? Citer un exemple d'application.

2.2.2. Exprimer l'altitude z_G à laquelle il faut placer le satellite pour qu'il soit géostationnaire en fonction de g_0, R_T et T_0 qui désigne la période de rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique.

2.2.3. Calculer numériquement z_G en prenant $\pi^2 \approx 10$, $g_0 \approx 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$, $R_T \approx 6\times 10^6\,\mathrm{m}$ et $T_0 \approx 9\times 10^4\,\mathrm{s}$. Pourquoi T_0 n'est-elle pas rigoureusement égale à la durée d'un jour ?

2.2.4. Préciser le plan de la trajectoire ainsi que le sens de rotation du satellite.

2.3. Transfert d'orbite

On veut transférer un satellite artificiel de masse m d'une orbite circulaire basse (C_B) de rayon R_B à une orbite géostationnaire (C_G) de rayon R_G. Pour cela on emprunte une orbite de transfert elliptique appelée ellipse de HOHMANN. Une telle ellipse (E_H) est tangente aux deux trajectoires (C_B) et (C_G) ; son périgée P est sur l'orbite basse alors que son apogée A est sur l'orbite géostationnaire. On appelle Δv_1 et Δv_2 les variations de vitesse qu'il faut communiquer au satellite pour le faire passer respectivement de (C_B) à (E_H) et de (E_H) à (C_G).

2.3.1. Quelle est la particularité des plans des trois trajectoires ? Représenter graphiquement C_B, C_G et E_H.

2.3.2. En exprimant la conservation de l'énergie et du moment cinétique sur l'orbite de transfert, exprimer les vitesses du satellite v_A à l'apogée et v_P au périgée sur l'orbite de transfert en fonction de g_0, R_T, R_B et R_G.

2.3.3. En déduire Δv_1 et Δv_2. Commenter.

2.3.4. Quelle est la durée minimale Δt de la phase de transfert sur l'ellipse de HOHMANN ?

2.3.5. Déterminer l'excentricité e_H de l'ellipse de HOHMANN.

3ème partie
Influence de l'atmosphère terrestre

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'influence de l'atmosphère terrestre sur la trajectoire d'un satellite artificiel en orbite circulaire basse. Pour cela on commence par développer un modèle de force de frottement avant de l'appliquer pour étudier le freinage du satellite par l'atmosphère.

3.1. Modèle de force de frottement

On considère un satellite (S) animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ sur une orbite circulaire basse à une altitude $z \ll R_{\mathrm{T}}$. Le frottement subit par le satellite est dû aux chocs avec les molécules de l'atmosphère supposées identiques. Dans le cadre du modèle utilisé, on supposera ces chocs parfaitement *mous* et on négligera la vitesse initiale des particules de l'atmosphère.

3.1.1. Montrer qu'au cours du choc entre le satellite et une molécule de masse m' de l'atmosphère, la quantité de mouvement du satellite subit une variation $\Delta\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}_{\text{après}} - \overrightarrow{p}_{\text{avant}}$ donnée au 1er ordre par

$$\Delta\overrightarrow{p} \approx -m'\,\overrightarrow{v}$$

3.1.2. Montrer que tout se passe comme si le satellite était soumis de la part de l'atmosphère à une force de frottement $\overrightarrow{F}$ donnée par

$$\overrightarrow{F} = -k(z)\,v\,\overrightarrow{v}$$

où $v = ||\overrightarrow{v}||$. Pour cela on fera un bilan de quantité de mouvement entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ en comptant le nombre de chocs subis par le satellite que l'on pourra considérer comme une sphère de rayon a.
Exprimer $k(z)$ en fonction $\Sigma = \pi\,a^2$ et de la masse volumique $\mu(z)$ de l'atmosphère à l'altitude z. Que représente Σ ? Le résultat obtenu dépend-il en réalité de la forme du satellite ?

3.1.3. On suppose qu'à une altitude $z \ll R_{\mathrm{T}}$, la masse volumique de l'atmosphère est donnée par la loi

$$\mu(z) = \mu_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

Établir cette loi et exprimer les constantes μ_0 et H dans le cadre du modèle d'atmosphère isotherme constituée d'un gaz parfait. Que représente μ_0 ?

3.2. Freinage du satellite

Sous l'effet du frottement atmosphérique, le satellite de masse m perd de l'altitude. On suppose que le module de la force de frottement est petit devant celui de la force d'attraction terrestre de sorte que l'on puisse assimiler la trajectoire à un *cercle* de rayon R lentement décroissant.

3.2.1. En exprimant que la trajectoire reste approximativement circulaire entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, déterminer une relation approchée entre la variation d'altitude $\mathrm{d}z$ et la variation de vitesse $\mathrm{d}v$ du satellite.

3.2.2. En utilisant des arguments énergétiques, expliquer *qualitativement* pourquoi la vitesse du satellite *augmente* au cours de sa chute.

3.2.3. Exprimer la variation $\mathrm{d}E_M$ de l'énergie mécanique du satellite entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ en fonction de m, g_0, R_{T}, R et $\mathrm{d}z$.

3.2.4. Exprimer de même le travail $\mathrm{d}W$ des forces de frottement en fonction de Σ, μ, v et $\mathrm{d}t$.

3.2.5. En déduire que la variation d'altitude $\mathrm{d}z$ pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ vérifie une équation différentielle du type

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -B\,\mu\,v\,R$$

où B est une constante réelle positive que l'on exprimera en fonction de Σ et m.

3.2.6. En utilisant l'approximation de l'orbite basse, $z \ll R_{\mathrm{T}}$, donner une loi approchée de variation de l'altitude $z(t)$ en fonction du temps en faisant apparaître la quantité

$$\tau = \frac{m\,H}{2\,\Sigma\,\mu_0 R_{\mathrm{T}}\,\sqrt{g_0 R_{\mathrm{T}}}}$$

dont on précisera la dimension.

3.2.7. **Application numérique :** Calculer τ puis la durée de chute d'un satellite artificiel depuis l'altitude $h = 270\,\mathrm{km}$. On prendra $g_0 \approx 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $m = 10^3\ \mathrm{kg}$, $\mu_0 = 1,5\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, $H = 9\ \mathrm{km}$, $R_{\mathrm{T}} = 6 \times 10^6\ \mathrm{m}$ et $\Sigma = 10\ \mathrm{m^2}$. On donne $\exp 30 \approx 10^{13}$. Commenter le résultat obtenu.

3.2.8. Peut-on réellement négliger la vitesse d'agitation thermique v_{Th} des particules de l'atmosphère devant la vitesse du satellite ? On prendra $v_{\mathrm{Th}} = 0,5\ \mathrm{km.s^{-1}}$.

FIN DE L'ÉPREUVE