Cinétique d'un système de points matériels

Table des matières

1 Centre de masse ou d'inertie **2**

1.1 Masse d'un point matériel 2

1.2 Masse d'un système de points matériels 2

1.3 Centre de masse d'un système de points matériels 2

1.4 Propriétés du centre de masse 2

1.5 Cas d'un système continu 3

2 Résultante et moment cinétique **4**

2.1 Résultante cinétique 4

2.1.1 Cas d'un système discret de points matériels 4

2.1.2 Cas d'un système continue de points matériels 4

2.2 Moment cinétique 5

2.2.1 Cas d'un système discret de points matériels 5

2.2.2 Cas d'une distribution continue de points matériels 5

2.2.3 Théorème de transport du moment cinétique 5

3 Référentiel barycentrique-Théorème de Koenig **5**

3.1 Référentiel barycentrique 5

3.2 Théorème de Koenig relatif au moment cinétique 6

3.3 Energie cinétique des systèmes 6

3.4 Théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique 7

4 Notion de torseur **7**

4.1 Champ de vecteur antisymétrique 7

4.2 Torseur 7

1 Centre de masse ou d'inertie

1.1 Masse d'un point matériel

- Définition : la masse est une grandeur physique qui a les propriétés suivantes :
  - elle est strictement positive
  - elle est additive
  - elle est conservée au cours du temps
  - elle est invariante

1.2 Masse d'un système de points matériels

Considérons un système de N points matériels $S = \{P_1(m_1), P_2(m_2)...P_N(m_N)\}$
La masse du système S est donnée par

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{N} m_i}$$

1.3 Centre de masse d'un système de points matériels

- Définition : le centre de masse G d'un système de points matériels $S = \{P_1(m_1), P_2(m_2)...P_N(m_N)\}$ est le points géométrique G tel que

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{0}$$

- Autrement : il s'agit du barycentre des points matériels,pondérés par leur masse.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP_i}$$

1.4 Propriétés du centre de masse

- Coordonnées du centre de masse G
  - dans la base cartésienne $(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)$ le vecteur $\overrightarrow{OG}$

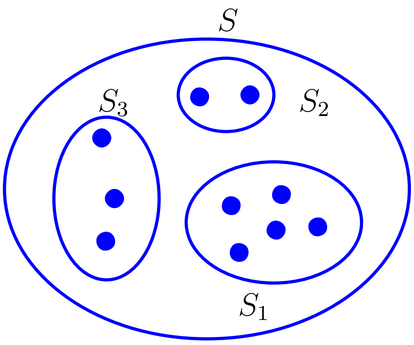
$$\boxed{\overrightarrow{OG} = x_G \overrightarrow{e}_x + y_G \overrightarrow{e}_y + z_G \overrightarrow{e}_z}$$

  - (x_i, y_i, z_i) les trois coordonnées de chaque point P_i du système.

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_G = \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{cases}$$

▶ Associativité du centre de masse

- le système S est formé de N' sous-système
- G_j : le centre de masse du sous-système S_j
- m_j : la masse du sous-système
- G : le centre de masse du système S
- $M = \sum_{j=1}^{N'} m_j$: la masse du système S

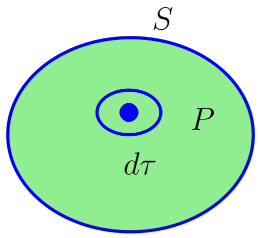


$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N'} m_j\overrightarrow{OG_j}$$

1.5 Cas d'un système continu

•masse volumique ρ

la masse volumique est donnée par



$$\rho(P) = \frac{dm}{d\tau}$$

dm : la masse de l'élément de volume $d\tau$

• la masse du système

$$M = \iiint_V dm$$

$$M = \iiint_V \rho(P)d\tau$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\iiint_V \overrightarrow{OP}dm = \frac{1}{M}\iiint_V \rho(P)\overrightarrow{OP}d\tau$$

• soient (x, y, z) : les coordonnées du point P

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{1}{M}\iiint_V \rho(P)xd\tau \\ y_G &= \dfrac{1}{M}\iiint_V \rho(P)yd\tau \\ z_G &= \dfrac{1}{M}\iiint_V \rho(P)zd\tau \end{cases}$$

2 Résultante et moment cinétique

2.1 Résultante cinétique

2.1.1 Cas d'un système discret de points matériels

Considérons un système discret (S)de N points matériels P_i de masse m_i de vitesse $\overrightarrow{v}_i$ dans un référentiel d'étude (R).
La quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_i$ d'un point matériel P_i de masse m_i et de vitesse $\overrightarrow{v}_i$ est

$$\boxed{\overrightarrow{p}_i = m_i \overrightarrow{v}_i}$$

• Définition : On définit la résultante cinétique (quantité du mouvement) $\overrightarrow{P}$ du système (S) par :

$$\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v}_i$$

- soit G le centre de masse du système (S) et O un point fixe du référentiel d'étude
- $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OP}_i$ et $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
- $\overrightarrow{v}_G = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \dfrac{d\overrightarrow{OP}_i}{dt} = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v}_i = \dfrac{\overrightarrow{P}}{M}$

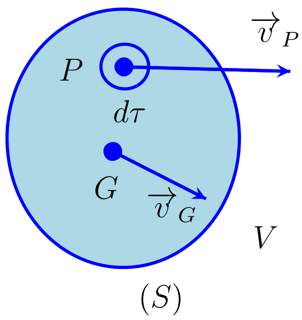
$$\boxed{\overrightarrow{P} = M\overrightarrow{v}_G}$$

•Conclusion : La résultante cinétique d'un système de points matériels ne dépend que de la vitesse du centre de masse et de la masse totale du système.

2.1.2 Cas d'un système continue de points matériels

soit (S) un système matériel continu tridimensionnel

- P : centre de masse des éléments infinitésimaux $d\tau$
- $\rho(P)$: champ de masse volumique
- $\overrightarrow{v}(P)$: vitesse du point P dans le référentiel d'étude



- ▶ la quantité de mouvement $\overrightarrow{dp}$ de l'élement de volume $d\tau$ de masse dm est

$$\boxed{\overrightarrow{dp} = dm\overrightarrow{v}(P)}$$

- ▶ la résultante cinétique du système (S)

$$\boxed{\overrightarrow{P} = \iiint_V \overrightarrow{v}(P)dm = \iiint_V \rho(P)\overrightarrow{v}(P)d\tau}$$

- ▶ en fonction de la vitesse du centre de masse

$$\boxed{\overrightarrow{P} = M\overrightarrow{v}_G}$$

2.2 Moment cinétique

2.2.1 Cas d'un système discret de points matériels

- le moment cinétique d'un point matériel $P_i(m_i)$ de vitesse $\overrightarrow{v}_i$ du système (S) en un point A est donné par

$$\overrightarrow{L}_A = \overrightarrow{AP}_i \wedge \overrightarrow{p}_i = \overrightarrow{AP}_i \wedge m_i \overrightarrow{v}_i$$

- le moment cinétique en A du système (S) est

$$\overrightarrow{L}_A = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AP}_i \wedge \overrightarrow{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AP}_i \wedge m_i \overrightarrow{v}_i$$

- A s'appelle le point de réduction

2.2.2 Cas d'une distribution continue de points matériels

le moment cinétique en A du système (S) est

$$\overrightarrow{L}_A = \iiint_V \overrightarrow{AP} \wedge d\overrightarrow{p} = \iiint_V \rho(P)\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v}(P)d\tau$$

2.2.3 Théorème de transport du moment cinétique

- $\overrightarrow{L}_B = \iiint_V \rho(P)\overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{v}(P)d\tau$
- $\overrightarrow{L}_A = \iiint_V \rho(P)\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v}(P)d\tau$
- $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$
- $\overrightarrow{L}_B = \iiint_V \rho(P)\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{v}(P)d\tau + \iiint_V \rho(P)\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v}(P)d\tau$
- $\overrightarrow{L}_B = \overrightarrow{BA} \wedge \iiint_V \rho(P)\overrightarrow{v}(P)d\tau + \overrightarrow{L}_A = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{P} + \overrightarrow{L}_A$

$$\overrightarrow{L}_B = \overrightarrow{L}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{P}$$

3 Référentiel barycentrique-Théorème de Koenig

3.1 Référentiel barycentrique

•Définition : le référentiel barycentrique (R^*) du système (S) relativement au référentiel d'étude (R) est le référentiel d'origine le centre de masse du système G et en translation par rapport à (R)

•Conséquences :

- $\overrightarrow{v}^*_G = \overrightarrow{v}(G/R^*) = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{a}^*_G = \overrightarrow{a}(G/R^*) = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{\omega}(R^*/R) = \overrightarrow{0}$
- la résultante cinétique dans (R^*) est nulle : $\overrightarrow{P}^* = \overrightarrow{0}$

- le moment cinétique barycentrique ($\vec{L}^*$) est indépendant du point de réduction
- $\vec{v}(P/R) = \vec{v}^*(P) + \vec{v}(G/R)$
- $\vec{a}(P/R) = \vec{a}^*(P) + \vec{a}(G/R)$

3.2 Théorème de Koenig relatif au moment cinétique

- $\vec{L}_A$: moment cinétique du système (S),au point de réduction A,dans (R)
- $\vec{L}_A^*$: moment cinétique du système (S),au point de réduction A,dans (R^*)
- $\vec{L}_A = \iiint_V \overrightarrow{AP} \wedge \rho(P)\vec{v}(P)d\tau$
- $\vec{L}_A^* = \iiint_V \overrightarrow{AP} \wedge \rho(P)\vec{v}^*(P)d\tau$
- $\vec{v}(P/R) = \vec{v}^*(P) + \vec{v}_G$
- $\vec{L}_A = \iiint_V \overrightarrow{AP} \wedge \rho(P)(\vec{v}_G + \vec{v}^*(P))d\tau$
  $= \iiint_V \overrightarrow{AP} \wedge \rho(P)\vec{v}_G d\tau + \iiint_V \overrightarrow{AP} \wedge \rho(P)\vec{v}^*(P)d\tau$
  $= \left(\iiint_V \overrightarrow{AP}\rho(P)d\tau\right) \wedge \vec{v}_G + \vec{L}^*$
  $= M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_G + \vec{L}^* = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} + \vec{L}^*$

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}^* + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}}$$

ce résultat constitue le théorème de Koenig relative au moment cinétique

- en remplaçant G par A on obtient

$$\boxed{\vec{L}_G = \vec{L}^*}$$

•Résultat : Il y a égalité entre le moment cinétique barycentrique et le moment cinétique en G dans (R)

3.3 Energie cinétique des systèmes

- énergie cinétique d'un point matériel P_i de masse m_i et de vitesse $\vec{v}_i = \vec{v}(P_i/R)$

$$\boxed{\mathcal{E}_{ci} = \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2}$$

- énergie cinétique du système (S)

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^{N}\mathcal{E}_{ci} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2}$$

- Cas d'un système continu

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \iiint_{(S)} \frac{1}{2}\vec{v}^2(P)dm(P)}$$

3.4 Théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique

- $\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}_i^2$
- $\mathcal{E}_c^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}_i^{*2}$
- $\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{v}_i^* + \overrightarrow{v}_G$
- $\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\overrightarrow{v}_i^* + \overrightarrow{v}_G)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}_i^{2*} + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v}_i^* \right) . \overrightarrow{v}_G + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) \overrightarrow{v}_G^2$
- $\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v}_i^* = \overrightarrow{0}$
- $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} M \overrightarrow{v}_G^2}$$

c'est le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique

4 Notion de torseur

4.1 Champ de vecteur antisymétrique

▶ Champ de vecteur

•Définition : On appelle champ de vecteur l'application qui fait correspondre,à tout point A de l'espace affine $\mathcal{E}$,un vecteur d'un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de même dimension que $\mathcal{E}$.

▶ Champ antisymétrique

•Définition : Un champ de vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$ est antisymétrique s'il existe un vecteur $\overrightarrow{R}$ appelé résultante,tel que,quels que soient les points A et B on a

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R}$$

4.2 Torseur

•Définition : On appelle torseur $[T]$ l'ensemble d'un champ antisymétrique $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$ et de son vecteur $\overrightarrow{R}$,on le note par $[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_A]$

- $\overrightarrow{R}$: résultante du torseur
- $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A$: moment du torseur

▶ Torseur cinétique $[T_c]$

On définit le torseur cinétique du système (S) de centre de masse G dans le référentiel R par :

- sa résultante : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{v}_i = M\overrightarrow{v}_G$
- son moment est le moment cinétique en un point A : $\overrightarrow{L}_A = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\overrightarrow{v}_i$

▶ Torseur dynamique $[D]$

On définit le torseur dynamique du système (S) de centre de masse G dans le référentiel R par :

- sa résultante dynamique : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{D} = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{a}_i = M\overrightarrow{a}_G$
- son moment est le moment Dynamique en un point A : $\overrightarrow{N}_A = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\overrightarrow{a}_i$

Si le point A est fixe alors

$$\frac{d[P_A]}{dt} = [D_A]$$

▶ Propriétés

- $[\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{\mathcal{M}}_{1,A}] = [\overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2,A}] \Leftrightarrow \overrightarrow{R}_1 = \overrightarrow{R}_2$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{1,A} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2,A}$
- la somme de deux torseurs $[\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{\mathcal{M}}_{1,A}]$ et $[\overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2,A}]$ est un torseur $[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_A]$ tel que $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_1 + \overrightarrow{R}_2$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{1,A} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{2,A}$
- $\lambda[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathcal{M}}] = [\lambda\overrightarrow{R}, \lambda\overrightarrow{\mathcal{M}}]$
- le comoment de deux torseurs est invariant scalaire (ne dépend pas du point considéré)

$$\overrightarrow{R}_1.\overrightarrow{\mathcal{M}}_{2,A} + \overrightarrow{R}_2.\overrightarrow{\mathcal{M}}_{1,A} = \overrightarrow{R}_1.\overrightarrow{\mathcal{M}}_{2,A'} + \overrightarrow{R}_2.\overrightarrow{\mathcal{M}}_{1,A'}$$