Composition en fréquence d'un signal périodique

Table des matières

1 Composition en fréquence d'un signal périodique

1.1 Théorème de Fourier

• Enoncé : Toute fonction périodique de période T et de fréquence $f = \frac{1}{T}$ (pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$),continûment dérivable sauf en un nombre fini de points par période,peut être mise sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales,dont les pulsations sont des multiples entiers de $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Ce développement est appelé développement en série de Fourier du signal $S(t)$

- a_0 : valeur moyenne du signal $S(t)$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt$$

- les coefficients a_n et b_n sont donnés par

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin(n\omega t)dt$$

- le terme $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation $n\omega$ et s'appelle harmonique de rang n
- l'harmonique de rang 1 est appelé fondamental du signal
- l'harmonique de rang n : $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ peut se mettre sous la forme :

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

  avec :

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \; ; \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

  - C_n : l'amplitude de l'harmonique de rang n
  - φ_n : la phase à l'origine

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Parité d'un signal

- si le signal $S(t)$ est une fonction paire,les coefficients b_n du développement en série de fourier sont tous nuls

$$S(t) \text{ est paire} \Leftrightarrow b_n = 0$$

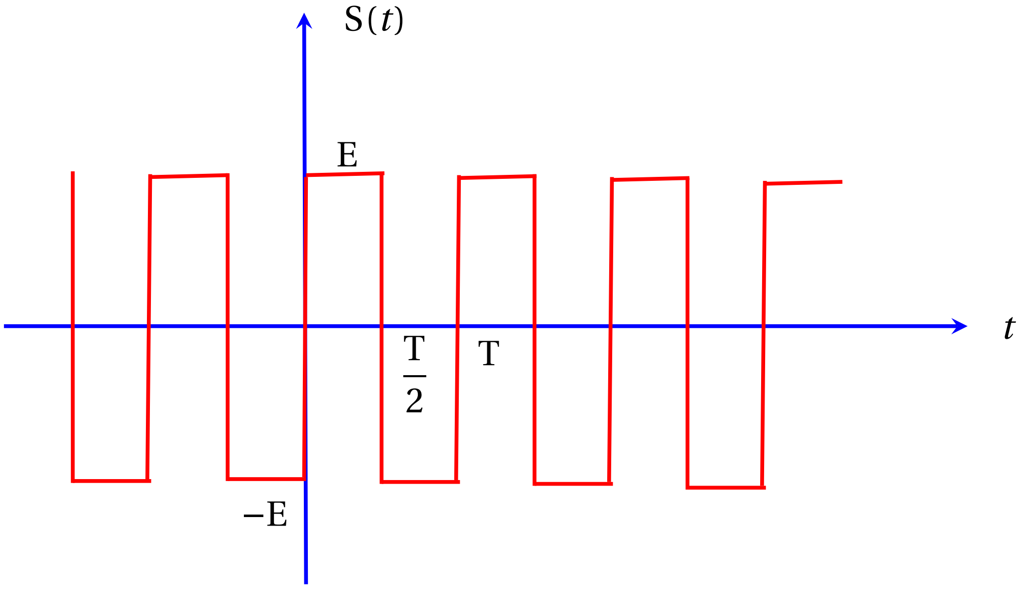
- si le signal $S(t)$ est une fonction impaire,les coefficients a_n du développement en série de Fourier sont tous nuls.

$$S(t) \text{ est impaire} \Leftrightarrow a_n = 0$$

1.2 Exemples

1.2.1 Signal carré

Considérons un signal carré $S(t)$,d'amplitude E,de période T,de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.



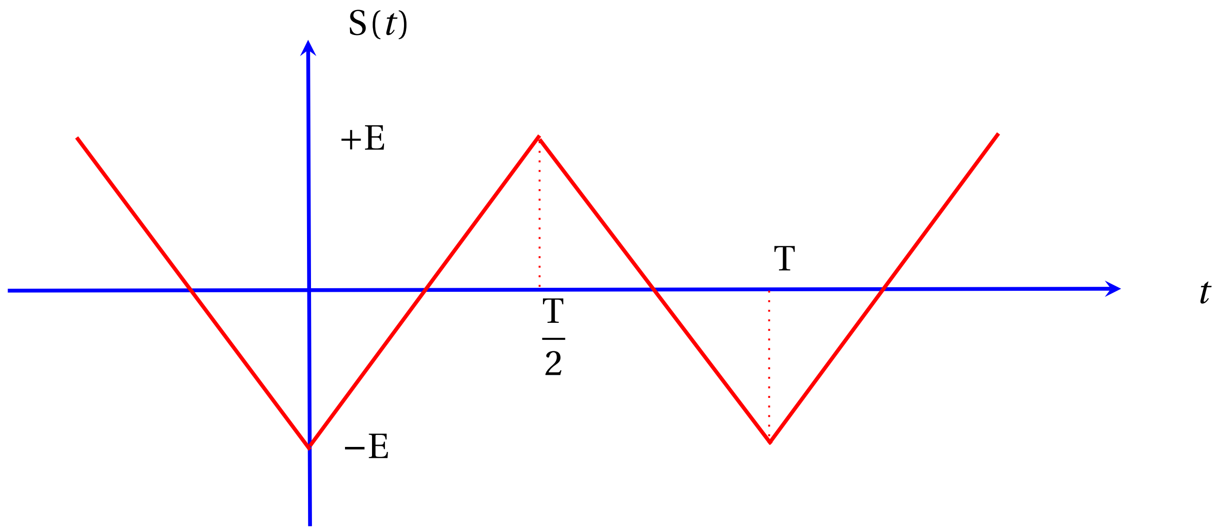
- $S(t)$: fonction impaire donc $a_n = 0$
- $< S(t) >= 0 = a_0$: signal alternatif
- $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} E\sin(n\omega t)dt + \int_{T/2}^{T} -E\sin(n\omega t)dt\right)$
- $b_n = \frac{2E}{T}\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} + \frac{2E}{T}\left[\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{T/2}^{T} = \frac{2E}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$

$$\boxed{b_{2p} = 0\,;\, b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi}}$$

$$\boxed{S(t) = \frac{4E}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin(2p+1)\omega t}{2p+1}}$$

1.2.2 Signal triangulaire

Considérons un signal triangulaire $S(t)$ de période T et d'amplitude E.



- la pente du signal vaut : $\pm\dfrac{4E}{T}$
- $S(t)$ est une fonction paire : $b_n = 0$
- $a_0 = 0$: signal alternatif
- $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T S(t)\cos(n\omega t)dt = \dfrac{2}{T}\left(\int_0^{T/2}\dfrac{4E}{T}t\cos(n\omega t)dt + \int_{T/2}^{T} -\dfrac{4E}{T}t\cos(n\omega t)dt\right)$
- $a_n = -\dfrac{4E}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi)) = -\dfrac{4E}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)$

$$\boxed{a_{2p} = 0; a_{2p+1} = -\frac{8E}{\pi^2(2p+1)^2}}$$

$$\boxed{S(t) = -\frac{8E}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)\omega t}{(2p+1)^2}}$$

1.3 Valeur moyenne et valeur efficace d'un signal périodique

Soit un signal périodique $S(t)$,de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$,sa décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$\boxed{S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(n\omega t + \varphi_n)}$$

- Valeur moyenne : la valeur moyenne S_{moy} du signal $S(t)$ est définie par

$$\boxed{S_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt = a_0}$$

- Valeur efficace : la valeur efficace d'un signal S_{eff} est par définition,égale à la racine carrée de la valeur moyenne du carrée de $S(t)$

$$\boxed{S_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T S^2(t)dt}$$

On montre facilement que

$$\boxed{S_{eff}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^2}{2}}$$

c'est la formule de Parseval

- Pour un signal sinusoïdal : $S(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$

$$S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$$

- Pour un signal sinusïdal décalé par une composante continue : $S(t) = a_0 + S_m \cos(\omega t + \varphi)$

$$S_{eff} = \sqrt{a_0^2 + \frac{S_m^2}{2}}$$

- Facteur de forme : par définition on appelle facteur de forme f d'un signal périodique $S(t)$,le rapport entre la valeur efficace et la valeur moyenne du signal

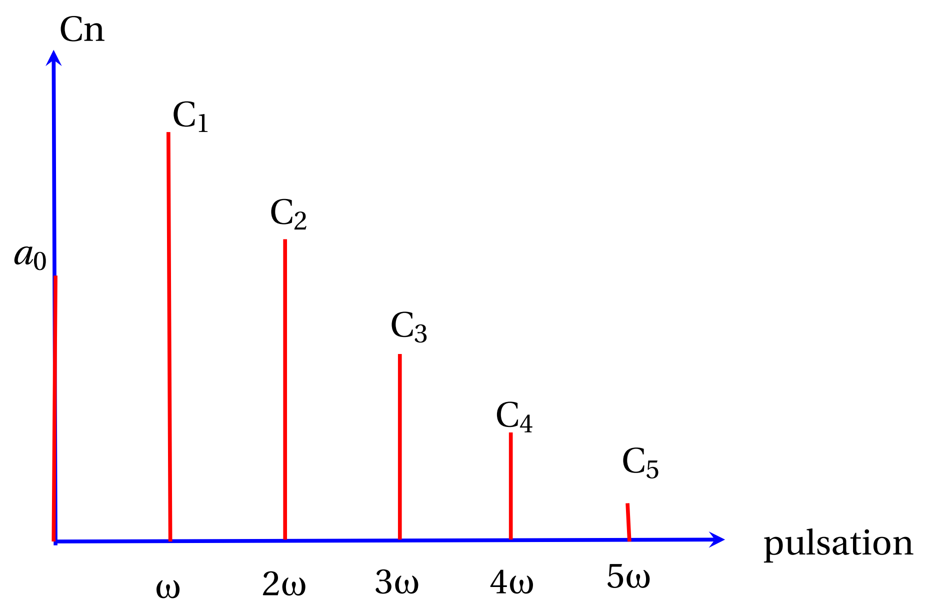
$$f = \frac{S_{eff}}{S_{moy}} = \frac{\sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2}}{a_0}$$

  - pour un signal continu : $f = 1$
  - pour un signal périodique de valeur moyenne nulle f n'est pad défini

2 Représentation spéctrale

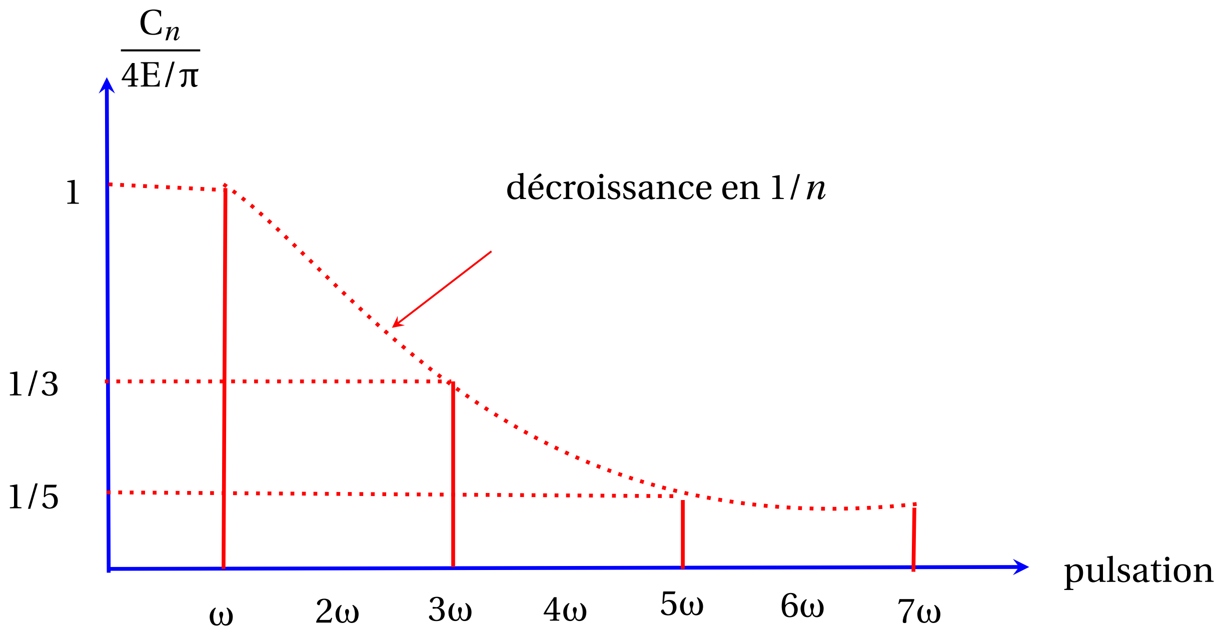
2.1 Spectre d'un signal périodique

•Définition : le spectre en fréquence d'un signal est une représentation de celui-ci dans l'espace des fréquences. On obtient cette représentation en portant sur un diagramme,en ordonnée l'amplitude C_n des harmoniques et en abscisse les pulsations correspondantes.

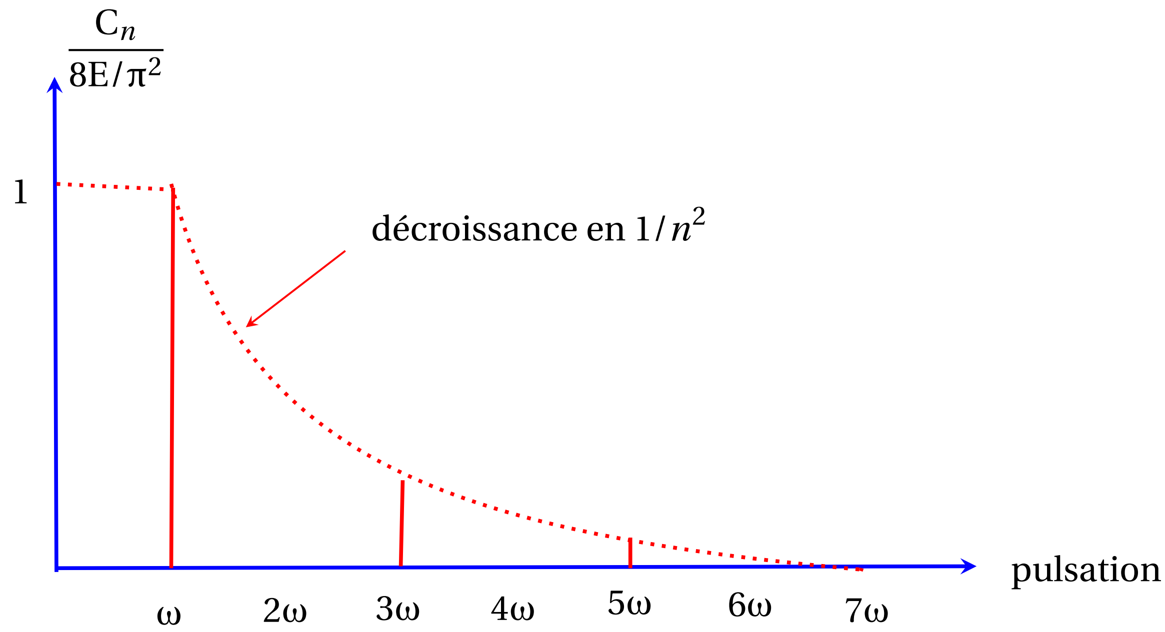


2.2 Exemples

- Signal carré



► Signal triangulaire



2.3 Série à coefficients complexes

La série de Fourier peut être également écrit en utilisant les nombres complexes

$$\boxed{S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega t}}$$

les coefficients $\underline{C}_k$ sont calculés par

$$\boxed{\underline{C}_k = \frac{1}{T}\int_{(T)} S(t) e^{-jk\omega t} dt}$$

- $\underline{C}_0 = a_0$: réel
- pour $k > 0$, $\underline{C}_k = \dfrac{a_k - jb_k}{2}$ et $\underline{C}_{-k} = \underline{C}^*_k$
- $\varphi_k = \arg(\underline{C}_k)$

2.4 Interprétation énergétique

$$\boxed{S_{eff}^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\underline{C}_k|^2}$$

On constate que la puissance du signal résultant est bien ici la somme des puissances de chacune des termes.