SESSION 2021

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^{2k}\ln(t)$ est continue sur $]0,1]$. De plus,

$$\sqrt{t} \times t^{2k}\ln(t) = t^{2k+\frac{1}{2}}\ln(t) \underset{t\to 0}{=} o(1)$$

car $2k + \dfrac{1}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $t^{2k}\ln(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)$ avec $-\dfrac{1}{2} > -1$. On en déduit que la fonction $t \mapsto t^{2k}\ln(t)$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite et donc sur $]0,1]$. Ceci montre l'existence de l'intégrale I_k.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_{\varepsilon}^{1} t^{2k}\ln(t)\ dt = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln(t)\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \times \frac{1}{t}\ dt = -\frac{\varepsilon^{2k+1}\ln(\varepsilon)}{2k+1} - \frac{1}{2k+1}\int_{\varepsilon}^{1} t^{2k}\ dt.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\varepsilon^{2k+1}\ln(\varepsilon)}{2k+1} = 0$ et donc, quand ε tend vers 0, on obtient

$$I_k = \int_{0}^{1} t^{2k}\ln(t)\ dt = -\frac{1}{2k+1}\int_{0}^{1} t^{2k}\ dt = -\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Q2. Pour $t \in]0,1[$, posons $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2-1}$ puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k(t) = -t^{2k}\ln(t)$.
Soit $t \in]0,1[$. Alors $\left|-t^2\right| < 1$ et donc

$$f(t) = -\frac{\ln(t)}{1-t^2} = -\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\ln(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t).$$

- Chaque fonction f_k, $k \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- La série de fonctions de terme général f_k, $k \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et la fonction f est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{0}^{1} |f_k(t)|\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{0}^{1} f_k(t)\ dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty.$

D'après un théorème d'intégration terme à terme,

- (La série de terme général $\displaystyle\int_{0}^{1} f_k(t)\ dt$ converge.)
- La fonction f est intégrable sur $]0,1[$.
- $\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\ dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{0}^{1} f_k(t)\ dt.$

Cette dernière égalité s'écrit explicitement

$$\int_{0}^{1}\frac{\ln(t)}{1-t^2}\ dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-I_k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Ensuite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\, dt = \frac{\pi^2}{8}.}$$

Remarque. On peut aussi montrer au préalable l'intégrabilité de la fonction f sur $]0,1[$. f est continue et positive sur $]0,1[$.
$\sqrt{t}f(t) = \dfrac{\sqrt{t}\ln(t)}{t^2-1} \underset{t\to 0}{\sim} -\sqrt{t}\ln(t) \underset{t\to 0}{=} o(1)$ et donc $f(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Donc, f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
$f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t-1} \times \dfrac{1}{t+1} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{2}$. f est prolongeable par continuité en 1 et en particulier intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.
Finalement, f est intégrable sur $]0,1[$.

EXERCICE II

Q3. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Ainsi, la fonction $\ln''$ est négative sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$.

Soit $(a,b,c) \in]0,+\infty[^3$. Par concavité de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, on a $\dfrac{\ln(a)+\ln(b)+\ln(c)}{3} \leqslant \ln\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$ ce qui s'écrit encore $\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$. Par croissance de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$. On a montré que

$$\boxed{\forall (a,b,c) \in]0,+\infty[^3,\ \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.}$$

Q4. La fonction f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ et pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{1}{x^2y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{1}{xy^2}.$$

Par suite, pour $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - \dfrac{1}{x^2y} = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{xy^2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x^2} \\ x\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 = 1 \\ y = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = 1.$$

La fonction f admet un et un seul point critique à savoir le point $(x_0,y_0) = (1,1)$.

Puisque f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant que produit d'ouverts de $\mathbb{R}$, si f admet un extremum local en un point de $]0,+\infty[^2$, ce point est un point critique de f.

Pour $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$\frac{1}{3}f(x,y) = \frac{1}{3}\left(x + y + \frac{1}{xy}\right) \geqslant \sqrt[3]{xy\frac{1}{xy}} = 1$$

puis $f(x,y) \geqslant 3 = f(1,1)$. Donc,

$$\boxed{f \text{ admet un minimum global en } (1,1) \text{ et ce minimum global est égal à } 3.}$$

Remarque. Les calculs de dérivées partielles et la détermination du point critique ne servent à rien.

PROBLEME

Partie I - Algorithmique : calcul de zêta aux entiers impairs

Q5. *Algorithmique.*

```
def factorielle(n):
    fact=1
    for i in range(2,n+1):
        fact =fact*i
    return fact
```

Q6. $\displaystyle\binom{30}{10} = \frac{30!}{10!\,20!}$. Le nombre de multiplications effectuées lorsque l'on exécute *binom*$(30, 10)$ est

$$29 + 19 + 9 + 1 = 58$$

(et une division). On peut réduire à 20 multiplications au plus (et plus précisément 18 multiplications) si on écrit :

$$\binom{30}{10} = \frac{30 \times 29 \times \cdots \times 21}{10!}.$$

Si on remplace / par // on obtient un flottant et non plus un entier.

Q7. Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

```
def binom_rec(n,p):
    if not (0<=p<=n):
        return 0
    if p in (0,n):
        return 1
    return n*binom_rec(n-1,p-1)//p
```

Q8.

```
def bernoulli(n):
    b=[1]
    for i in range(1,n+1):
        S=0
        for k in range(i):
            S += binomial(i + 1,k)*b[k]
        b.append(-S/(i + 1))
    return b[n]
```

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Q9. Soit $a > 1$.

$$n^{\frac{a+1}{2}} \times \frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{a-1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$$

car $\dfrac{a-1}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que

$$\frac{\ln(n)}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\right).$$

La série de RIEMANN de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge car $\dfrac{a+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$. On en déduit que la série de terme général $\dfrac{\ln(n)}{n^a}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge.

Q10. Soit $a > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et pour $x \geqslant a$, $f_n'(x) = -\dfrac{\ln(n)}{n^x}$. Ensuite, pour tout $x \geqslant a$,

$$|f_n'(x)| = \frac{\ln(n)}{n^x} \leqslant \frac{\ln(n)}{n^a},$$

puis $\|f_n'\|_{[a,+\infty[} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n^a} < +\infty$. La série numérique de terme général $\dfrac{\ln(n)}{n^a}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge d'après la question précédente et il en est de même de la série numérique de terme général $\|f_n'\|_{[a,+\infty[}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Mais alors, la série de fonction de terme général f_n', $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[a, +\infty[$.

Ainsi,

- La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction ζ sur $[a, +\infty[$.
- Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$.
- La série de fonctions de terme général f_n', $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction ζ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, on a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]1, +\infty[\text{ et } \forall x > 1,\ \zeta(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}.}$$

En particulier, la fonction ζ' est négative sur $]1, +\infty[$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est décroissante sur }]1, +\infty[.}$$

Q11. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, a une limite $\ell_n = \dfrac{1}{n}$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures. Si la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers la fonction ζ sur $]1, +\infty[$, le théorème d'interversion des limites impose à la série de terme général $\ell_n = \dfrac{1}{n}$ de converger. Par contraposition, puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [2, +\infty[$, $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ puis

$$\|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge et il en est de même de la série de terme général $\|f_n\|_{\infty,[2,+\infty[}$, $n \geqslant 1$. Par suite, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[2, +\infty[$.

Ainsi,

- chaque fonction fonction f_n a une limite quand x tend vers $+\infty$, à savoir $\ell_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geqslant 2 \end{cases}$,
- la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers ζ sur $[2, +\infty[$.

D'après le théorème d'interversion des limites,

- (la série de terme général ℓ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge),
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x)$ existe dans $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ell_n$.

Ceci fournit explicitement

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

Q13. Soit $x > 1$. On sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{n^x} \geqslant \dfrac{1}{t^x}$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que

$$\frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^x}(n+1-n) = \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\ dt \geqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

En additionnant membre à membre ces inégalités pour n variant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = I(x).$$

De même, pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n^x} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$ et en sommant ces inégalités, on obtient $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = I(x)$.
En ajoutant 1 aux deux membres de cette inégalité, on obtient $\zeta(x) \leqslant I(x) + 1$. On a montré que

$$\forall x > 0,\ I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x) + 1.$$

Pour $x > 1$, $I(x) = \left[-\dfrac{1}{(x-1)t^{x-1}}\right]_1^{+\infty} = \dfrac{1}{x-1}\left(1 - \displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{x-1}}\right) = \dfrac{1}{x-1}$ et donc, pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \frac{1}{x-1} + 1 = \frac{x}{x-1}$$

puis $1 \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant x$. Les deux membres de cet encadrement tendent vers 1 quand x tend vers 1 et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to1} (x-1)\zeta(x) = 1$. On en déduit que

$$\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Q14.

- Pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{a=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{(ab)^x}\right| = \frac{1}{b^x} \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{\zeta(x)}{b(x)} < +\infty$.
- $\displaystyle\sum_{b=1}^{+\infty} \left(\sum_{a=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{(ab)^x}\right|\right) = \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{\zeta(x)}{b(x)} = \zeta(x) \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{b(x)} = (\zeta(x))^2 < +\infty$.

On en déduit que la famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et on peut donc écrire

$$\sum_{(a,b)\in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{b=1}^{+\infty} \left(\sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{(ab)^x}\right) = \sum_{b=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{b^x} \sum_{a=1}^{+\infty} \frac{1}{a^x}\right) = \zeta(x) \sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{b(x)} = (\zeta(x))^2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $A_n = \{(a, b) \in A /\ ab = n\}$. Chaque A_n est non vide car contient $(n, 1)$ et pour chaque (a, b), il existe un entier n et un seul tel que $(a, b) \in A_n$, à savoir $n = ab$. Donc, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de A.

D'après le théorème de sommation par paquets,

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b)\in A_n} \frac{1}{(ab)^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} \sum_{(a,b)\in A_n} 1\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A'_n = \{a \in \mathbb{N}^* / \ a|n\}$. Il existe une bijection de A'_n sur A_n, à savoir $\begin{array}{ccc} A'_n & \rightarrow & A_n \\ a & \mapsto & \left(a, \dfrac{n}{a}\right) \end{array}$.

Donc, $\text{card}\,(A_n) = \text{card}\,(A'_n) = d_n$. Finalement,

$$\forall x > 1,\ \zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.$$

Partie III - Produit eulérien

Q15. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. $P\,(X \in a\mathbb{N}^*) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(ka)^s} = \frac{1}{a^s} \times \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{a^s}$.

Q16. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tel que $a_1 \times \dots \times a_n | N$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i | a_1 \times \dots \times a_n$ et $a_1 \times \dots \times a_n | N$. Par transitivité de la relation $|$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i | N$.

La réciproque est claire quand $n = 1$.

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, pour tous entiers naturels non nuls $a_1, \dots, a_n$, deux à deux premiers entre eux, $(a_1 | N \text{ et } \dots \text{ et } a_n | N \Rightarrow a_1 \times \dots \times a_n | N) \quad (\mathscr{P}_n)$.

- Soient a et b deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux tels que $a|N$ et $b|N$. Il existe $(q_1, q_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $N = q_1 a = q_2 b$. b divise $q_1 a$ et $a \wedge b = 1$. D'après le théorème de Gauss, $b | q_1$. Donc, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q_1 = bq$. Mais alors, $N = q_1 a = qab$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Ceci montre que $ab | N$. On a montré que $(\mathscr{P}_2)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons $(\mathscr{P}_n)$. Soient $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$, $n+1$ entiers naturels non nuls et deux à deux premiers entre eux tels que $a_1 \times \dots \times a_n \times a_{n+1} | N$. On sait que $a_{n+1} \wedge \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$. D'après le cas $n = 2$, $a_{n+1} | N$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i | N$, puis par hypothèse de récurrence, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $a_i | N$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Soient $a_1 = 6 = 2 \times 3$, $a_2 = 10 = 2 \times 5$ et $a_3 = 15 = 3 \times 5$. $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3) = 6 \wedge 5 = 1$. Donc, les entiers a_1, a_2 et a_3 sont premiers dans leur ensemble. a_1, a_2 et a_3 divisent $N = 2 \times 3 \times 5 = 30$. Mais $a_1 \times a_2 \times a_3 = 900$ ne divise pas 30. Le résultat est donc faux si on suppose seulement $a_1, \dots, a_n$ premiers dans leur ensemble.

Q17. Soit $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de $(a_1, \dots, a_n)$.

$$\begin{aligned}
P\left((X \in b_1\mathbb{N}^*) \cap \dots \cap (X \in b_r\mathbb{N}^*)\right) &= P\left((b_1 | X) \cap \dots (b_r | X)\right) \\
&= P\left(b_1 \times \dots \times b_r | X\right) \text{ (d'après Q16)} \\
&= \frac{1}{(b_1 \times \dots \times b_r)^s} \text{ (d'après Q15)} \\
&= \frac{1}{b_1^s} \times \dots \times \frac{1}{b_r^s} = P\left(X \in b_1\mathbb{N}^*\right) \times \dots \times P\left(X \in b_r\mathbb{N}^*\right).
\end{aligned}$$

Ceci montre que les événements $(X \in a_1\mathbb{N}^*)$, ..., $(X \in a_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Q18. Soit $s > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les nombres $p_1, \dots, p_n$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après la question précédente, les événements $(X \in p_1\mathbb{N}^*)$, ..., $(X \in p_n\mathbb{N}^*)$, sont indépendants. On sait qu'il en est de même des événements $\left(\overline{X \in p_1\mathbb{N}^*}\right)$, ..., $\left(\overline{X \in p_n\mathbb{N}^*}\right)$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - P\left(X \in p_k\mathbb{N}^*\right)\right) &= \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{X \in p_k\mathbb{N}^*}\right) \\
&= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{X \in p_k\mathbb{N}^*}\right) \text{ (par indépendance)} \\
&= P\left(B_n\right).
\end{aligned}$$

Q19. La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion (car, pour $\omega \in \Omega$, si $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des entiers $p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$, alors en particulier, $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des entiers $p_1, \dots, p_n$). Par continuité décroissante, la suite $(P(B_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right).$$

Maintenant, il existe un et un seul entier naturel non nul qui n'est divisible par aucun nombre premier à savoir l'entier 1. Donc, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = (X = 1)$ (ou encore, pour $\omega \in \Omega$, $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \Leftrightarrow X(\omega) = 1$). Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(s)}$ ou encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$ ou enfin

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_k^s}}.$$

Q20. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$. On sait que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} p_k = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{p_k} = 0$. On en déduit que $\displaystyle -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_k} > 0$. La série de terme général $\displaystyle -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ est de même nature que la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{p_k}$ et donc, par hypothèse, la série de terme général $\displaystyle -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ est convergente.

Ainsi, la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel L. Mais alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(e^{\ln(u_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel strictement positif $l = e^L$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle 1 - \frac{1}{p_k} > 0$ car $p_k \geqslant 2$ et donc $u_n > 0$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_{n+1}}} > 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant l$.

Soit $s > 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k \leqslant p_k^s$ puis $\displaystyle 1 - \frac{1}{p_k} \leqslant 1 - \frac{1}{p_k^s}$ et donc $\displaystyle\frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_k^s}} \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_k}}$. Par suite, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_k^s}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_k}} = u_n \leqslant l.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_k^s}} \leqslant l$.

Ainsi, pour tout $s > 1$, $l \geqslant \zeta(s)$. D'après la question Q13, $\displaystyle\lim_{s\to1} \zeta(s) = +\infty$ et donc, quand s tend vers 1, on obtient $l = +\infty$. Ceci contredit l'hypothèse faite et donc la série de terme général $\displaystyle\frac{1}{p_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge.

