Equations de Maxwell

Table des matières

1 Conservation de la charge électrique

1.1 Densité de charge et vecteur densité volumique de courant

- la densité de charge volumique en un point M d'un milieu est donnée par

$$\rho(M) = \frac{dq}{d\tau}$$

- la densité de charge pour un conducteur s'écrit sous la forme

$$\rho = \rho_m + \rho_f$$

  - ρ_m : densité des charges mobiles
  - ρ_f : densité des charges fixes

- si les charges mobiles d'un milieu se caractérisent par une vitesse $\vec{v}$ et une densité ρ_m,le vectur densité de courant volumique $\vec{j}$ associé à ce mouvement est :

$$\vec{j}(M) = \rho_m(M).\vec{v}(M)$$

1.2 Conservation de la charge éléctrique

- Principe de conservation de la charge

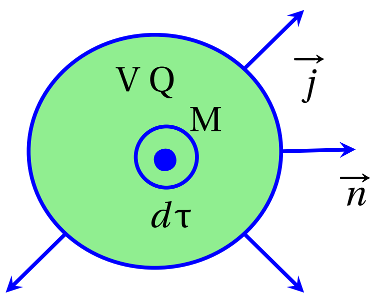
  •Enoncé : La charge totale d'un système fermé se conserve au cours du temps.

- Forme intégrale de la conservation de charge
  Considérons un système contenu dans le volume V de l'espace,fixe dans un référentiel d'étude
  - la charge de V à l'instant t

$$Q(t) = \iiint_V \rho(M,t)d\tau$$

  - la variation de la charge de V par unité de temps

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_V \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau$$



- la conservation de la charge : $\dfrac{dQ}{dt} = -I$ où I le courant sortant du volume V
- $Q = \iiint_V \rho(M,t)d\tau$ et $I = \oiint_\Sigma \vec{j}.dS\vec{n}$
- $\dfrac{d}{dt}\iiint_V \rho(M,t)d\tau = \iiint_V \dfrac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau$
- $\iiint_V \dfrac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau = -\oiint_\Sigma \vec{j}.dS\vec{n}$

• Conclusion : l'équation intégrale traduisant la conservation de charge d'un volume V fixe dans un référentiel fixe ($\mathscr{R}$) est donnée par

$$\iiint_V \frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t}d\tau = -\oiint_\Sigma \vec{j}.dS\vec{n}$$

- Forme locale de la conservation de charge
  - Green-Ostrogradski : $\oiint_{\Sigma} \vec{j}.dS\vec{n} = \iiint_{V} div\vec{j}\,d\tau$
  - $\iiint_{V}\left(\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + div\vec{j}(M,t)\right)d\tau = 0$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0}$$

2 Equations de Maxwell

2.1 Equation de Maxwell-Ampère

- l'équation de la conservation de la charge : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$
- l'équation $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \Rightarrow div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = \mu_0 div\vec{j} = 0 \Rightarrow div\vec{j} = 0$,cette équation est incompatible avec l'équation de la conservation de charge en régime variable
- pour surmonter ce problème il est nécessaire d'introduire un terme supplémentaire au second membre,appelé courant de déplacement noté $\vec{j}_D$
- l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)}$$

- cette forme est compatible avec la conservation de la charge électrique si $\mu_0 div(\vec{j} + \vec{j}_D) = div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = 0$ soit $div\vec{j}_D = \frac{\partial\rho}{\partial t}$
- $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = div\left(\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

$$\boxed{\vec{j}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

- l'équation de Maxwell-Ampère

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)}$$

2.2 Equations de Maxwell en régime variable

- En présence de charges,le champ électromagnétique satisfait aux quatres équations de Maxwell
  - équation de Maxwell-Faraday (M-F) :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

  - équation de Maxwell-flux (Maxwell-Thomson) (M-ϕ) :

$$\boxed{div\vec{B} = 0}$$

  - équation de Maxwell-Gauss (M-G) :

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- équation de Maxwell-Ampère (M-A) :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

▶ Equations de Maxwell dans le vide : $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$

- Maxwell-Gauss :

$$div\,\vec{E} = 0$$

- Maxwell-flux :

$$div\,\vec{B} = 0$$

- Maxwell -Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

- Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

▶ Forme intégrale des équations de Maxwell

- $div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \iiint_V div\,\vec{E}\,d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}d\tau \Leftrightarrow \oiint_\Sigma \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$
  la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss est le théorème de Gauss

$$\oiint_\Sigma \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- $div\,\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \iiint_V div\,\vec{B}.d\tau = 0 \Leftrightarrow \oiint_\Sigma \vec{B}.\vec{dS} = 0$ donc l'équation de Maxwell-flux traduit la conservation du flux magnétique
  la forme intégrale de l'équation de Maxwell-flux

$$\oiint_\Sigma \vec{B}.\vec{dS} = 0$$

- $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{E}.\vec{dS} = \iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\vec{dS} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d\phi}{dt}$ donc l'équation de Maxwell-Faraday traduit le phénomène d'induction
  l'équation intégrale de Maxwell-Faraday est

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d\phi}{dt}$$

- $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \Leftrightarrow \iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{B}.\vec{dS} = \iint_S \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\vec{dS}$,donc l'équation de Maxwell-Ampère traduit le théorème d'Ampère généralisé

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé} + \mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\vec{dS}$$

2.3 Equations de Maxwell dans un régime permanent

- Maxwell-Gauss :

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

- Maxwell-flux :

$$\boxed{div\vec{B} = 0}$$

- Maxwell -Faraday :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = 0}$$

- Maxwell-Ampère :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

3 Potentiels vecteur et scalaire

3.1 Définitions

- $div\vec{B} = 0$: $\vec{B}$ est un champ rotationnel,il dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}}$$

- $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial\overrightarrow{rot}\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

  donc le champ $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ dérive d'un potentiel scalaire V

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}V}$$

3.2 Choix de la jauge

- $\vec{A}$ est définit à un gradient près. Le potentiel V dépend du choix fait pour $\vec{A}$
- si on prend $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\psi$,alors V' est telle que

  $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}V + \overrightarrow{grad}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}V'$

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\psi \text{ et } V' = V - \frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

- en régime permanent le potentiel $\vec{A}$ est choisi en respectant la jauge de Coulomb

$$\boxed{div\vec{A} = 0}$$

- en régime variable le potentiel $\vec{A}$ est choisi en respectant la jauge de Lorentz

$$\boxed{div\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

3.3 Equations des potentiels

- $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
- $div\left(-\overrightarrow{grad}V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\Delta V - \dfrac{\partial}{\partial t} div\vec{A} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
- la jauge de Lorentz : $div\vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial V}{\partial t}$ avec $\boxed{\mu_0\varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}}$ ou c représente la vitesse de la lumière dans le vide

$$\boxed{\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

- $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$
- $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$
- $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{grad}V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$
- $\Delta\vec{A} - \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}$
- jauge de Lorentz : $div\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}}$$

3.4 Potentiels retardés

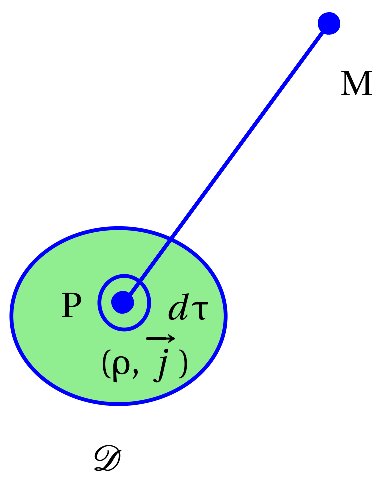
La solution générale des équations des potentiels

- l'équation relative à V

$$\boxed{V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathscr{D}} \frac{\rho\left(P, t - \dfrac{PM}{c}\right)}{PM}d\tau}$$

- l'équation relative à $\vec{A}$

$$\boxed{\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathscr{D}} \frac{\vec{j}\left(P, t - \dfrac{PM}{c}\right)}{PM}d\tau}$$



► ces solutins sont appelées potentiels retardés,car elles correspondent aux expressions trouvées en régime permanent,mais en faisant intervenir les sources à l'instant antérieur $t - \dfrac{PM}{c}$,où $\dfrac{PM}{c}$ représente le temps nécessaire à la propagation de l'information dans le vide de P à M. La valeur du champ en un point M ne fait intervenir que l'état de la source en P à l'instant $t - \dfrac{PM}{c}$

- l'évolution du potentiel est en retard par rapport à celle des sources,ce retard est la durée de propagation du signal $\tau_p = \frac{PM}{c}$

4 Approximation des régimes quasi-permanents (ARQP)où quasi-stationnaires (ARQS)

4.1 Aproximation des régimes quasi-permanents (ARQP)

• ARQP : Dans le cadre de l'ARQP,on considère que l'évolution de la source est suffisamment lente,c'est-à-dire la durée T caractéristique de cette évolution est très grande devant la durée de propagation τ_p du signal.

$$\tau_p << T$$

- $\tau_p = \frac{PM}{c} << T$ soit $PM << cT = l$,où l représente la distance parcourue par le signal pendant la durée caractéristique de variation des sources
- pour un signal sinusoïdal,de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ on a

$$\boxed{PM << \frac{c}{\nu} = \lambda}$$

λ : la longueur d'onde du signal dans le vide

- Exemples
  - un circuit électrique de dimensions inférieures à $1m$ ($r < 1m$) (le cas usuel dans les laboratoires),est alimenté par un générateur délivrant un signal de fréqence ν. L'ARQP est valable si $\lambda >> 1m \Leftrightarrow \nu << 300MHz$
  - dans le cas courant industriel,de fréquence $\nu = 50Hz$,l'ARQP est valables pour des circuits de dimensions importantes $r << \lambda$ avec $\lambda = \frac{c}{\nu} = 6000km$
- Dans le cadre de l'ARQP les potentiels prennent les mêmes valeurs qu'en régime permanent

$$\boxed{V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathscr{D}} \frac{\rho(P,t)}{PM}d\tau}$$

$$\boxed{\overrightarrow{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathscr{D}} \frac{\overrightarrow{j}(P,t)}{PM}d\tau}$$

4.2 Equations de Maxwell dans le cadre de l'ARQP

- Dans le cadre de l'ARQP,le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction
  - Pour un conducteur : $\frac{||\overrightarrow{j}||}{||\overrightarrow{j}_D||} = \frac{\gamma E}{\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}} = \frac{\gamma E}{\varepsilon_0 \frac{E}{T}} = \frac{\gamma T}{\varepsilon_0}$

- pour le cuivre : $\gamma = 6.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$ on trouve $\dfrac{||\vec{j}||}{||\vec{j}_D||} = \dfrac{6.10^7 T}{8,85.10^{-12}} \approx 6,8.10^{18} T$ donc le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction

▶ les équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQP

- Maxwell-Gauss :

$$\boxed{div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

- Maxwell-Faraday

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

- Maxwell-flux

$$\boxed{div\,\vec{B} = 0}$$

- Maxwell-Ampère

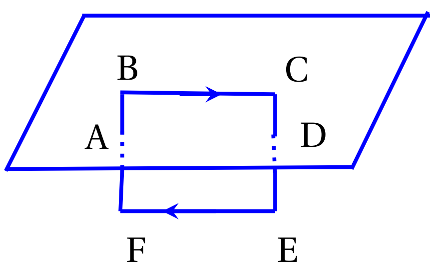
$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

5 Relations de passage en régime variable

Considérons une surface chargée avec une densité surfacique σ et parcourue par un courant surfacique $\vec{j}_s$

▶ Discontinuité de champ électrique à travers une surface chargé avec une densité σ

Considérons un contour (C) rectangulaire ABCDEF orthogonal à la surface,le contour d'étendue assez petite pour que le champ $\vec{E}$ à travers sa partie supérieure (respectivement inférieure) soit uniforme,égal à $\vec{E}_+(M)$ (respectivement $\vec{E}_-(M)$)

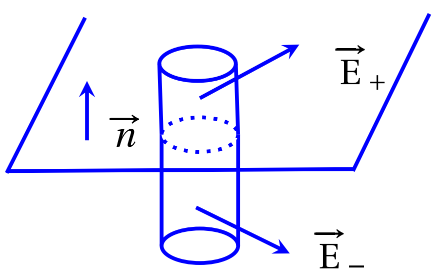


- $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,la formule de Stokes donne : $\displaystyle\oint_{(C)} \vec{E}.\vec{dl} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{dS} = -\frac{d\phi}{dt}$
- $\displaystyle\oint_{(C)} \vec{E}.\vec{dl} = \vec{E}_+\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \vec{E}_-\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}\right) = \overrightarrow{BC}\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$
- lorsque la hauteur FB du rectangle tend vers 0,le flux de $\vec{B}$ tens vers 0,donc

$$\boxed{\overrightarrow{BC}\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right) = 0}$$

$\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$ est parallèle à la normale $\vec{n}$ à la surface chargée

- $div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$,la formule de Green donne : $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$



- $\displaystyle\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$, avec S la section du cylindre
- $\displaystyle\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = S.\vec{n}\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right)$

- le flux de $\vec{E}$ à travers la surface latéralle lorsque la hauteur du cylindre tend vers 0 est nul

$$\boxed{\vec{E}_+ - \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$

► Discontinuité de $\vec{B}$ à travers une répartition superficielle de courants $\vec{j}_s$

- $div\vec{B} = 0$
- en procédant comme pour $\vec{E}$ on trouve

$$\boxed{\left(\vec{B}_+ - \vec{B}_-\right)\vec{n} = 0}$$

donc la composante normale de $\vec{B}$ est continue

- $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$
- l'application de la formule de Stokes sur un petit contour comme précédent on trouve
$\overrightarrow{BC}\left(\vec{B}_+ - \vec{B}_-\right) = \mu_0\iint_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS} + \frac{1}{c^2}\iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$
- lorsque la hauteur du rectangle tend vers 0, $\iint_{(S)} \vec{j}.\overrightarrow{dS}$ tend vers $\vec{j}_s\left(\vec{n}\wedge\overrightarrow{BC}\right)$
et le flux de $\vec{E}$ à travers la surface du contour tens vers 0

$$\boxed{\vec{B}_+ - \vec{B}_- = \mu_0\vec{j}_s\wedge\vec{n}}$$