

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

Dans tout le problème

— On note pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

— On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Objet : Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de valeurs de la fonction ζ en des points entiers.

Partie I: Représentation intégrale de sommes de séries

1. (a) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}$ converge

(b) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $H_n = \ln n + A + o(1)$. En déduire que $H_n \sim \ln n$

2. Soit r un entier naturel.

Pour quelles valeurs de r , la série $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

3. (a) Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

(b) En déduire que la fonction

$$t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n

4. Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) et pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q dt \quad \text{et} \quad I_{p,q}^\varepsilon = \int_\varepsilon^1 t^p (\ln t)^q dt$$

(a) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p, q)

(b) Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in]0, 1[$, $I_{p,q}^\varepsilon = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^\varepsilon - \frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1}$

(c) En déduire que l'on a $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*$, $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$

(d) En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q .

5. Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$.

On suppose que pour tout x dans $] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument. Montrer que

$$\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) dt = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$$

6. (a) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geq 2$,

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt$$

(b) Établir que l'on a alors $S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

- (c) En déduire que $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1-t} dt$. puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$

Partie II: La fonction β 7. La fonction Γ

- (a) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$.

On admettra que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

- (b) Soit x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t} dt$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x

8. La fonction β et son équation fonctionnelle

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, on définit $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

- (a) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$
 (b) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$
 (c) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)$
 (d) En déduire que pour $x > 0$, $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$

Partie III: Relation entre la fonction β et la fonction Γ

On veut montrer que pour tout $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ relation qui sera notée (\mathcal{R})

9. Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation (\mathcal{R}) pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite de cette question on suppose $x > 1$ et $y > 1$

10. Montrer que $\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$

11. On note $F_{x,y}$ la primitive sur \mathbb{R}_+^* de $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)$$

12. Soit $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) du$.

Montrer que G est définie et continue sur \mathbb{R}_+

13. Montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$

14. Montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^*

15. Exprimer pour $a > 0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}

16. Déduire de ce qui précède la relation (\mathcal{R})

Partie IV: La fonction digamma

On définit la fonction ψ (appelée fonction digamma) sur \mathbb{R}_+^* comme étant la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$. Pour tout réel

$$x > 0, \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

17. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$

18. **Sens de variation de ψ**

(a) À partir de la relation (\mathcal{R}) , justifier que $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ est définie sur \mathbb{R}_+^{*2} .

Établir que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}(x, y) = \beta(x, y) (\psi(y) - \psi(x+y))$

(b) Soit $x > 0$ fixé. Quel est le sens de variation sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $y \mapsto \beta(x, y)$

(c) Montrer que la fonction ψ est croissante sur \mathbb{R}_+^*

19. **Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions**

(a) Montrer que pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier $n \geq 1$

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

(b) Soit n un entier ≥ 2 et x un réel $x > -1$. On pose $p = E(x) + 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x . Prouver que

$$0 \leq \psi(n+x+1) - \psi(n) \leq H_{n+p} - H_{n-1} \leq \frac{p+1}{n}$$

(c) En déduire que, pour tout réel $x > -1$

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

20. **Un développement en série entière**

On note g la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

(a) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-1, +\infty[$

Préciser notamment la valeur de $g^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k+1)$ pour tout entier $k \geq 1$

(b) Montrer que pour tout entier n et pour tout x dans $] -1, 1[$

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \zeta(2) |x|^{n+1}$$

Montrer que g est développable en série entière sur $] -1, 1[$

(c) Prouver que pour tout x dans $] -1, 1[$

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

Partie V: Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

Dans cette partie, on note B la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $B(x) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}(x, 1)$

21. Une relation entre B et ψ

Justifier que B est définie sur \mathbb{R}_+^* .

À l'aide de la relation trouvée au 18a établir que pour tout réel $x > 0$

$$xB(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 - (\psi'(1) - \psi'(1+x))$$

En déduire que B est de \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*

22. Expression de S_r à l'aide de la fonction B

(a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $B(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1} dt$

(b) Donner sans justification une expression, à l'aide d'une intégrale, de $B^{(p)}(x)$, pour tout entier naturel p et tout réel $x > 0$

(c) En déduire que pour tout entier $r \geq 2$, $S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \lim_{x \rightarrow 0^+} B^{(r-2)}(x)$

(d) Retrouver alors la valeur de S_2 déjà calculée au 6c

23. Soit φ la fonction définie $] -1, +\infty[$ par $\varphi(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 - (\psi'(1) - \psi'(1+x))$

(a) Montrer que φ est \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de définition et donner pour tout entier naturel $n \geq 2$ la valeur de $\varphi^{(n)}(0)$ en fonction des dérivées successives de ψ au point 1.

(b) Conclure que, pour tout entier $r \geq 3$,

$$2S_r = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k)$$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

Partie I: Représentation intégrale de sommes de séries

1. (a) Pour $n \geq 2$, on a

$$a_n = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Soit $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$, la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ est convergente

- (b) La suite de terme général $S_n = \sum_{k=2}^n a_k$ est convergente. Or pour tout $n \geq 2$, $S_n + 1 = H_n - \ln n$, donc, en posant $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n + 1$, on obtient $H_n - \ln n = A + o(1)$. Ainsi $H_n = \ln n + A + o(1)$, puis $H_n \sim \ln n$

2. Soit $r \in \mathbb{N}$. On a $\frac{H_n}{(n+1)^r} \sim \frac{\ln n}{n^r}$, on distingue deux cas

- Si $r \leq 1$, alors $\frac{1}{n} = o \left(\frac{\ln n}{n^r} \right)$, donc la série diverge
- Si $r \geq 2$, on a $\frac{\ln n}{n^2} = o \left(\frac{1}{\sqrt{n^3}} \right)$, donc la série converge, par le critère de Riemann

Bref la série considérée converge si, et seulement, si $r \geq 2$

3. (a) Les fonctions considérées sont développables en série entière avec

$$\forall t \in [-1, 1[, \quad \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$$

et

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

Les deux séries $\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} t^n$ ont même rayon de convergence $R = 1$

- (b) Le produit de deux fonctions développables en série entière est développable en série entière dont le développement est fourni par le produit de Cauchy

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad -\frac{\ln(1-t)}{1-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$

4. (a) L'application $t \mapsto t^p (\ln t)^q$ est continue sur $]0, 1]$, avec $t^p (\ln t)^q = o \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$. Donc l'application considérée est intégrable sur $]0, 1]$, en particulier l'intégrale $I_{p,q}$ existe.

- (b) Les deux applications $t \mapsto \frac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t \mapsto (\ln t)^q$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, 1]$, alors par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I_{p,q}^\varepsilon &= \int_0^1 \left(\frac{t^{p+1}}{p+1} \right)' (\ln t)^q dt \\ &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} (\ln t)^q \right]_\varepsilon^1 - \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^p (\ln t)^{q-1} dt \\ &= -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^\varepsilon - \frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1} \end{aligned}$$

- (c) Les deux intégrales $I_{p,q-1}$ et $I_{p,q}$ sont convergentes, donc les fonctions $\varepsilon \in]0, 1[\mapsto I_{p,q-1}^\varepsilon$ et $\varepsilon \in]0, 1[\mapsto I_{p,q}^\varepsilon$ admettent des limites respectives $I_{p,q-1}$ et $I_{p,q}$ en 0^+ . Or $\frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$, alors par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

(d) Soit $p \in \mathbb{N}$. On montre par récurrence $q \in \mathbb{N}$ que $I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$

— Pour $q = 0$, on a bien $I_{p,0} = \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}$

— Soit $q \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente on a

$$I_{p,q+1} = -\frac{q+1}{p+1} I_{p,q} \stackrel{(HR)}{=} -\frac{q+1}{p+1} \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}} = \frac{(-1)^{q+1} (q+1)!}{(p+1)^{q+2}}$$

5. Il s'agit d'une application directe du théorème de la convergence dominée pour les séries :

— Pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : t \mapsto a_n t^n (\ln t)^{r-1}$ est continue et intégrable sur $]0, 1[$

— $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ de somme $t \mapsto (\ln t)^{r-1} f(t)$ qui est continue sur $]0, 1[$, car f est développable en série entière

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(t)| dt = |a_n| \int_0^1 t^n |\ln(t)^{r-1}| dt = \frac{|a_n|}{(n+1)^r} (r-1)!$. Par hypothèse $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument, donc la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n(t)| dt$ converge

D'après le théorème de convergence dominée on peut intervertir somme et intégrale. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n I_{n,r-1} \\ &= (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r} \end{aligned}$$

6. (a) L'application $f : t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$, vue en question 3, est développable en série entière sur $] -1, 1[$ avec

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ pour tout $x \in] -1, 1[$. En outre, d'après la question 2, la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ converge puisque $r \geq 2$. On applique donc le résultat de la question 5 et on obtient la formule

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt$$

(b) Les fonctions $t \mapsto (\ln t)^{r-1}$ et $t \mapsto \frac{-(\ln(1-t))^2}{2}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. Avec

$$(\ln t)^{r-1} (\ln(1-t))^2 \underset{0^+}{\sim} t^2 (\ln t)^{r-1} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$$

$$(\ln t)^{r-1} (\ln(1-t))^2 \underset{1^-}{\sim} (t-1)^{r-1} (\ln(1-t))^2 \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{\quad} 0$$

Donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt &= \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \left(\frac{\ln(1-t)^2}{-2} \right)' dt \\ &= \underbrace{\left[(\ln t)^{r-1} \left(\frac{\ln(1-t)^2}{-2} \right) \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 ((\ln t)^{r-1})' \frac{\ln(1-t)^2}{-2} dt \\ &= \frac{r-1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} \ln(1-t)^2}{t} dt \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

- (c) Pour $r = 2$, on obtient $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(1-t))^2}{t} dt$. Via le changement de variable $t = 1 - u$ ($u \mapsto 1 - u$ est une bijection de \mathcal{C}^1 de $]0, 1[$ sur lui-même), on obtient

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u} du$$

On applique le résultat de la question 5, avec $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, les a_n valent 1 et $r = 3$. Alors

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln(u))^2}{1-u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} = \zeta(3)$$

Partie II: La fonction β 7. La fonction Γ

- (a) Soit $x > 0$. On a $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$

- **Au voisinage de 0 :** On a $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ donc intégrable en 0 car $1-x < 1$.
- **Au voisinage de $+\infty$:** On a $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable en $+\infty$.

On déduit que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

- (b) L'application $u \mapsto \frac{u}{\alpha}$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R}_+^* , donc les deux intégrales $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{\alpha^x} e^{-u} du$ sont de même nature et puisque la deuxième converge, alors la première l'est aussi et on a l'égalité des valeurs, c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t} dt = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}$$

8. La fonction β et son équation fonctionnelle

- (a) La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$.

En 0^+ : On a $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim t^{x-1}$, elle est intégrable en 0^+ car $1-x < 1$

En 1^- : On a $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim (1-t)^{y-1}$, elle est intégrable en 1^- car $1-y < 1$

Elle est donc intégrable sur $]0, 1[$, en particulier $\beta(x, y)$ existe

- (b) Égalité obtenue avec le changement de variable affine $t \mapsto u = 1 - t$, qui est une bijection de \mathcal{C}^1 de $]0, 1[$ sur lui-même.

- (c) Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto \frac{-(1-t)^y}{y}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$. Avec $t^x(1-t)^y \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$ et $t^x(1-t)^y \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{\quad} 0$. Donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned} \beta(x+1, y) &= \int_0^1 t^x \left(\frac{(1-t)^y}{-y} \right)' dt \\ &= \underbrace{\left[t^x \left(\frac{(1-t)^y}{-y} \right) \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (t^x)' \frac{(1-t)^y}{-y} dt \\ &= \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt = \frac{x}{y} \beta(x, y+1) \end{aligned}$$

Soit $\beta(x, y+1) = \frac{y}{x} \beta(x+1, y)$. D'autre part

$$\begin{aligned} \beta(x+1, y) + \beta(x, y+1) &= \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt + \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\ &= \int_0^1 t \cdot t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_0^1 (1-t) \cdot t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \beta(x, y) \end{aligned}$$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

Il vient donc $\beta(x, y) = \left(1 + \frac{y}{x}\right) \beta(x+1, y) = \frac{x+y}{x} \beta(x+1, y)$.

Enfin

$$\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$$

(d) D'après la formule précédente $\beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y+1)$ et par symétrie $\beta(x, y+1) = \beta(y+1, x) = \frac{y}{y+x} \beta(y, x)$, on remplace la dernière formule dans la première on obtient

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$$

Partie III: Relation entre la fonction β et la fonction Γ

9. On suppose que $\forall x, y > 1$, $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Soit $x, y > 0$, on a

$$\beta(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy} \beta(x+1, y+1)$$

Comme $x+1$ et $y+1$ sont strictement supérieurs à 1 :

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} = \frac{x\Gamma(x)y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)}$$

Après substitution et simplification : $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

10. $u \mapsto t = \frac{u}{1+u}$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$. Donc

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{u+1}\right)^{y-1} \frac{1}{(u+1)^2} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}} du \end{aligned}$$

11. $F_{x,y}$ est une fonction croissante et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $F_{x,y}(t) = \int_0^t e^{-u} u^{x+y-1} du \leq \Gamma(x+y)$.

12. L'application $\varphi : (a, u) \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$ est continue sur \mathbb{R}_+^2 et vérifie

$$\forall (a, u) \in \mathbb{R}_+^2, \quad |\varphi(a, u)| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$$

Où $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . D'après le théorème de convergence dominée G est définie et continue sur \mathbb{R}_+

13. Soit (a_n) une suite de réels positifs de limite $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a_n)$ qui est continue sur \mathbb{R}_+ . La suite (f_n)

converge simplement vers $f : u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$ qui est continue sur \mathbb{R}_+ et

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad |f_n(u)| \leq \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y)$$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

Où $u \mapsto \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . D'après le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} G(a_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a_n) \, du \\ &= \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a_n) \, du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \Gamma(x+y) \, du \\ &= \beta(x,y) \Gamma(x+y) \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} G(a_n) = \beta(x,y) \Gamma(x+y)$. Ceci vrai pour toute suite (a_n) de réels positifs de limite $+\infty$, donc par la caractérisation séquentielle de la limite G admet $\beta(x,y) \Gamma(x+y)$ limite en $+\infty$

14. Soit $[c, d] \subset \mathbb{R}_+^*$

— Pour tout $a \in [c, d]$, l'application $u \mapsto \varphi(a, u) = \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+

— φ admet une dérivée partielle par rapport à a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} : (a, u) \mapsto a^{x+y-1} u^{x-1} e^{-(1+u)a}$$

qui est continue sur $[c, d] \times \mathbb{R}_+$

— Pour tout $(a, u) \in [c, d] \times \mathbb{R}_+$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, u) \right| \leq d^{x+y-1} u^{x-1} e^{-(1+u)c}$$

où $u \mapsto u^{x-1} e^{-(1+u)c}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+

D'après le théorème de convergence dominée la fonction G est de classe \mathcal{C}^1 sur $[c, d]$. En déduire que G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* puisque elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $[c, d]$ inclus dans \mathbb{R}_+^*

15. Soit $a > 0$. D'après la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} G'(a) &= \int_0^{+\infty} a^{x+y-1} u^{x-1} e^{-(1+u)a} \, du \\ &= a^{x+y-1} e^{-a} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-ua} \, du \\ &= a^{x+y-1} e^{-a} \frac{\Gamma(x)}{a^x} = a^{y-1} e^{-a} \Gamma(x) \end{aligned}$$

16. Soit $\varepsilon, a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon \leq a$, alors

$$G(a) - G(\varepsilon) = \Gamma(x) \int_{\varepsilon}^a t^{y-1} e^{-t} \, dt$$

Par continuité de G et de sa nullité en 0 on a $G(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} G(0) = 0$. D'autre part, $G(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \beta(x,y) \Gamma(x,y)$.

Ainsi

$$\beta(x,y) \Gamma(x,y) = \Gamma(x) \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} \, dt = \Gamma(x) \Gamma(y)$$

D'où la relation (\mathcal{R})

Partie IV: La fonction digamma

17. Soit $\Psi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(\Gamma(x))$. Pour $x > 0$, on a

$$\Psi(x+1) = \ln(\Gamma(x+1)) = \ln(x\Gamma(x)) = \Psi(x) + \ln(x)$$

Par dérivation $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$. Soit $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

18. Sens de variation de ψ

- (a) Par les théorèmes généraux $\beta : (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} \mapsto \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ admet une dérivée partielle par rapport à y , donc

$\frac{\partial \beta}{\partial y}$ est définie sur \mathbb{R}_+^{*2} .

Pour $x, y > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma'(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)^2} \\ &= \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ &= \psi(y)\beta(x, y) - \psi(x+y)\beta(x, y) \\ &= \beta(x, y) (\psi(y) - \psi(x+y)) \end{aligned}$$

- (b) Soit $y, y' > 0$ tels que $y < y'$, pour tout $t \in]0, 1[$ l'application $z \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (1-t)^z$ est strictement décroissante, donc $(1-t)^{y'} \leq (1-t)^y$, en multipliant par t^{x-1} puis en intégrant : $\beta(x, y') \leq \beta(x, y)$. Ainsi l'application considérée est décroissante

- (c) Pour $x, y > 0$, le signe de $\psi(y) - \psi(x+y)$ est celui de $\frac{\partial \beta}{\partial x}(x, y)$ qui est négative, donc ψ est croissante

19. Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions

- (a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\psi(k+1) - \psi(k) = \frac{1}{k}$ et $\psi(k+x+1) - \psi(k+x) = \frac{1}{x+k}$. En sommant de k allant de 1 à n , alors par télescopage

$$\psi(n+1) - \psi(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \psi(x+n+1) - \psi(x+1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$$

Soit $\psi(1) = \psi(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $\psi(x+1) = \psi(n+x+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k}$. Enfin, par différence

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

- (b) L'inégalité de gauche est assurée par la croissance de ψ . En outre, $n+x+1 \leq n+p+1$, donc

$$\psi(n+x+1) - \psi(n) \leq \psi(n+p+1) - \psi(n) = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} = H_{n+p} - H_{n-1}$$

Pour tout $k \in \llbracket n, n+p \rrbracket$, $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}$, donc

$$H_{n+p} - H_{n-1} = \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} \leq \frac{p+1}{n}$$

Ainsi

$$0 \leq \psi(n+x+1) - \psi(n) \leq H_{n+p} - H_{n-1} \leq \frac{p+1}{n}$$

- (c) Soit $x > -1$. D'après les encadrements précédents $\psi(n+x+1) - \psi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors de l'égalité

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

on tire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+x} \right)$ ainsi sa somme $\psi(1+x) - \psi(1)$. Donc

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

20. Un développement en série entière

(a) Pour $n \geq 2$, on pose $u_n : x \in [-1, +\infty[\mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$

— u_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-1, +\infty[$ et

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} k!}{(n+x)^{k+1}}$$

— La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge simplement de somme g

— Pour tout segment $[a, b] \subset [-1, +\infty[$ et $k \geq 1$, on a $\forall x \in [a, b]$:

$$\left| u_n^{(k)}(x) \right| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leq \frac{k!}{(n+a)^{k+1}} \sim \frac{k!}{n^{k+1}}$$

Donc g est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-1, +\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [-1, +\infty[, \quad g^{(k)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} k!}{(n+x)^{k+1}}$$

En particulier $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad g^{(k)}(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} k!}{n^{k+1}} = (-1)^{k+1} k! (\zeta(k+1) - 1)$

(b) g est de \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[\subset [-1, +\infty[$ et $\forall t \in] -1, 1[$,

$$\left| g^{(n+1)}(t) \right| = \left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2} (n+1)!}{(k+t)^{n+2}} \right| \leq (n+1)! \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)^{n+2}} \leq (n+1)! \zeta(2)$$

L'inégalité de Taylor Lagrange fournit donc

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \zeta(2) |x|^{n+1}$$

Pour tout $x \in] -1, 1[$, $|x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la série de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge de somme g . Ceci montre que g est développable en série entière sur $] -1, 1[$

(c) Soit x dans $] -1, 1[$, on écrit

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = \psi(1) + 1 - \frac{1}{1+x} + g(x)$$

D'une part $1 - \frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^n$ et d'autre part, vu que $g(0) = 0$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (\zeta(n+1) - 1) x^n$$

Ainsi l'égalité

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$$

Partie V: Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

21. Une relation entre B et ψ

β admet une dérivée partielle en tout point (x, y) de \mathbb{R}_+^{*2} et

$$\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y) (\psi(y) - \psi(x + y))$$

Une autre fois par les théorèmes généraux $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à y en tout point (x, y) et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) (\psi(y) - \psi(x + y)) + \beta(x, y) (\psi'(y) - \psi'(x + y)) \\ &= \beta(x, y) (\psi(y) - \psi(x + y))^2 + \beta(x, y) (\psi'(y) - \psi'(x + y)) \end{aligned}$$

En particulier

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, 1) = \beta(x, 1) \left((\psi(1) - \psi(x + 1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(x + 1)) \right)$$

Avec $\beta(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$, on obtient

$$xB(x) = (\psi(1 + x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1 + x))$$

Où encore $B(x) = \frac{(\psi(1 + x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1 + x))}{x}$, donc par les théorèmes généraux B est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*

22. Expression de S_r à l'aide de la fonction B

- (a) Soit $x > 0$, on considère la fonction $f : (y, t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[\mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. Une telle fonction admet des dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 par rapport à y , avec

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, t) = \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, t) = (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

telles que

- Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, les applications $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ et $t \mapsto \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sont continues et intégrables sur $]0, 1[$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : (y, t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[\mapsto \ln^2(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue
- Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, pour tout $(y, t) \in [a, b] \times]0, 1[$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, t) \right| \leq (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{a-1}$$

L'application $\varphi : t \in]0, 1[\mapsto (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{a-1}$ est continue positive

- En 0, on a $\varphi(t) \sim t^{x+1}$, donc elle est prolongeable par continuité en 0
- En 1⁻, on a $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{(1-t)^\delta}\right)$, où $\delta \in]1-a, 1[$

Donc elle est intégrable, ainsi par le théorème de dérivation sous signe intégrale,

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, y) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

En particulier

$$B(x) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, 1) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1} dt$$

- (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$B^{(p)}(x) = \int_0^1 (\ln(t))^p (\ln(1-t))^2 t^{x-1} dt$$

LES FONCTIONS EULÉRIENNES

(c) Il suffit de démontrer, pour tout $r \geq 2$, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$.

Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto (\ln(t))^p (\ln(1-t))^2 t^{x_n-1}$.

La suite (f_n) , de fonctions continues sur $]0, 1[$, converge simplement vers $t \mapsto \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t}$ qui est continue sur $]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| = |\ln(t)|^p (\ln(1-t))^2 t^{x_n-1} \leq \frac{|\ln(t)|^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t}$$

L'application $\varphi : t \mapsto \frac{|\ln(t)|^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t}$ est continue positive sur $]0, 1[$

— En 0, on a $\varphi(t) \sim t |\ln(t)|^{r-2} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$, donc elle est prolongeable par continuité en 0

— En 1^- , on a :

$$\varphi(t) \underset{1^-}{\sim} (1-t)^{r-2} \ln(1-t)^2 \underset{1^-}{=} \circ \left(\frac{1}{\sqrt{1-t}} \right)$$

Une telle fonction φ est intégrable sur $]0, 1[$. D'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B^{(r-2)}(x_n) = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$$

Enfin, par la caractérisation séquentielle de la limite, $B^{(r-2)}$ admet une limite en 0 et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} B^{(r-2)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$$

(d) D'après la question précédente $S_2 = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} B(x)$. D'après les questions 21 et 20, $\lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = -\psi''(1)$ et $\psi''(1) = -2\zeta(3)$. Ainsi $S_2 = \zeta(3)$

23. (a) L'application $x \mapsto \psi(1+x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$, donc, par les théorèmes généraux, φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$. Pour tout $n \geq 2$, par la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(0) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\psi(1+x) - \psi(1))^{(k)}(0) (\psi(1+x) - \psi(1))^{(n-k)}(0) - \psi^{(n)}(1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \psi^{(k)}(1) \psi^{(n-k)}(1) - \psi^{(n+1)}(1) \end{aligned}$$

(b) Soit $r \geq 3$, par la formule de Leibniz $\varphi^{(r-1)}(x) = x B^{(r-1)}(x) + (r-1) B^{(r-2)}(x)$.

Cette formule permet de donner $\lim_{x \rightarrow 0^+} B^{(r-2)}(x) = \frac{1}{r-1} \varphi^{(r-1)}(0)$. Avec

$$\begin{aligned} \varphi^{(r-1)}(0) &= \sum_{k=1}^{r-2} C_{r-1}^k \psi^{(k)}(1) \psi^{(r-1-k)}(1) - \psi^{(r)}(1) \\ &= \sum_{k=1}^{r-2} C_{r-1}^k (-1)^{k+1} \zeta(k+1) (-1)^{r-k} \zeta(r-k) - (-1)^{r+1} r! \zeta(r+1) \\ &= (-1)^{r+1} (r-1)! \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1) \zeta(r-k) - (-1)^{r+1} r! \zeta(r+1) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2S_r &= \frac{(-1)^r}{(r-2)!} \frac{\varphi^{(r-1)}(0)}{r-1} \\ &= r \zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1) \zeta(r-k) \end{aligned}$$