SESSION 2021

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE

Q1. On sait que pour toute $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

La base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel et donc

$$D_n(\mathbb{R})^{\perp} = \left(\text{Vect}\,(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}\right)^{\perp} = (E_{i,i})^{\perp}_{1\leqslant i\leqslant n} = \left(\text{Vect}\,(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n,\ i\neq j}\right)^{\perp}.$$

Donc, $D_n(\mathbb{R})^{\perp}$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$.

PROBLEME - Théorème de décomposition de Dunford

Partie I - Quelques exemples

Q2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. On peut écrire $A = D+N$ avec $D = A$ et $N = 0$. $D = A$ est diagonalisable et $N = 0$ est nilpotente car $0^1 = 0$. Par unicité, le couple de la décomposition de Dunford de A est $(A, 0)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. On peut écrire $A = D + N$ avec $D = 0$ et $N = A$. $D = 0$ est diagonalisable car diagonale et $N = A$ est nilpotente. Par unicité, le couple de la décomposition de Dunford de A est $(0, A)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable. On sait que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et donc A admet une décomposition de Dunford. On note que cette condition est automatiquement vérifiée si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux matrices proposées ne commutent pas et donc le couple proposé n'est pas le couple de la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\chi_A = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc A n'admet pas de décomposition de Dunford sur $\mathbb{R}$.

Q4. En développant suivant la deuxième colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)\left(X^2 + 2X + 1\right) = (X+1)^3.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $(A + I_3)^3 = \chi_A(A) = 0$. Soient alors $D = -I_3$ et $N = A + I_3$.
$D + N = A$. Ensuite, D est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ car diagonale et d'autre part, N est nilpotente car $N^3 = 0_3$. Enfin, $-I_3$ commute avec toute matrice et donc D et N commutent.

Le couple de la décomposition de DUNFORD de A est $(-I_3, A+I_3)$.

Q5. $N = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ puis $N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, N est nilpotente d'indice 2.

Les matrices D et N commutent. D'après le rappel de l'énoncé, $\exp(A) = \exp(D) \times \exp(N)$. On sait que

$$\exp(D) = \exp(\mathrm{diag}(-1,-1,-1)) = \mathrm{diag}\left(e^{-1}, e^{-1}, e^{-1}\right) = e^{-1} I_3.$$

D'autre part,

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k = I_3 + N = A + 2I_3.$$

Donc,

$$\exp(A) = e^{-1} I_3 \times (A + 2I_3) = e^{-1}(A + 2I_3) = e^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Q6. Soit $P = X(X-1)$. $P\left(A^2\right) = A^2\left(A^2 - I_n\right) = A^2(A - I_n) \times (A - I_n) = 0_n$. Donc, le polynôme P est annulateur de A^2. Puisque P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, la matrice A^2 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons alors $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

- $D + N = A^2 + A - A^2 = A$.
- D est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- $N^2 = \left(A - A^2\right)^2 = A^2(I_n - A)^2 = P(A) \times (A - I_n) = 0_n$ et donc, N est nilpotente d'indice inférieur ou égal à 2.
- Puisque deux polynômes en A commutent, les matrices D et N commutent.

Donc, le couple de la décomposition de DUNFORD de la matrice A est $\left(A^2, A - A^2\right)$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Q7. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-3)(X(X-2)+1) + 2(X-2+1) - (X-1) = (X-3)(X-1)^2 + (X-1) \\ &= (X-1)((X-1)(X-3)+1) = (X-1)\left(X^2 - 4X + 4\right) = (X-1)(X-2)^2.\end{aligned}$$

Le nombre 2 est valeur propre de A d'ordre 2. D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_3)) &= 3 - \mathrm{rg}(A - 2I_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 - 2 \text{ (car } (C_1, C_3) \text{ est libre et } C_2 = -C_1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

L'ordre de multiplicité de la valeur propre 2 n'est pas égal à la dimension du sous-espace propre associé. On sait alors que A n'est pas diagonalisable.

$\chi_u = \chi_A = (X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de u d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON. Puisque les polynômes $X-1$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux car sans racine commune dans $\mathbb{C}$, le théorème de décomposition des noyaux permet d'affirmer que

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\left((u - 2\mathrm{Id})^2\right).$$

Q8. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z)\in E_1(u)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x-y+z=0\\2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\ ((\mathrm{I})-(\mathrm{II}))\\-y+z=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\z=y\end{array}\right..$$

Donc, $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}\,(e_1)$ où $e_1=(0,1,1)$.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z)\in E_2(u)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y+z=0\\2x-2y+z=0\\x-y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x\\z=0\end{array}\right..$$

Donc, $\mathrm{Ker}(u-2\mathrm{Id})=\mathrm{Vect}\,(e_2)$ où $e_2=(1,1,0)$.

$(A-2I_3)^2=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$. Donc, $\mathrm{Ker}\left((u-2\mathrm{Id})^2\right)$ est le plan d'équation $-x+y=0$. Le vecteur e_2 est dans ce plan. Le vecteur $e_3=(0,0,1)$ est un vecteur de ce plan non colinéaire à e_2. Donc, (e_2,e_3) est une base du plan $\mathrm{Ker}\left((u-2\mathrm{Id})^2\right)$.

La matrice de la famille $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ dans la base canonique $\mathscr{B}_0=(i,j,k)$ de $\mathbb{R}^3$ est $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

$\det(P)=1\times\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=-1\neq0$ et donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Par construction, $u(e_1)=e_1$, $u(e_2)=2e_2$. Enfin, la dernière colonne de A fournit $u(e_3)=u(k)=i+j+2k=e_2+2e_3$. Donc,

$$B=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Q9. Posons $D'=\mathrm{diag}(1,2,2)$ et $N'=E_{2,3}$ de sorte $B=D'+N'$ où D' est diagonale, N' est nilpotente (d'indice 2). Un calcul par blocs montre que D' et N' commutent. On pose alors $D=PD'P^{-1}$ et $N=PN'P^{-1}$. Les formules de changement de bases fournissent

$$A=PBP^{-1}=P(D'+N')P^{-1}=PD'P^{-1}+PN'P^{-1}=D+N.$$

D est semblable à une matrice diagonale réelle et est donc diagonalisable. N est semblable à une matrice nilpotente et est donc nilpotente. D' et N' commutent et donc D et N commutent. La décomposition de DUNFORD de A est donc (D,N).

Déterminons explicitement D et N. $P=\mathscr{P}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}}$ et donc $P^{-1}=\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_0}$. Or,

$$\left\{\begin{array}{l}e_1=j+k\\e_2=i+j\\e_3=k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}k=e_3\\j=e_1-e_3\\i=-e_1+e_2+e_3\end{array}\right..$$

Donc, $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$. Par suite,

$$D=PD'P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

puis $N = A - D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q10. Soit $F = \dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$. F est sous forme irréductible et sa partie entière est nulle. Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{(X-2)^2}.$$

• $a = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)F(x) = \dfrac{1}{(1-2)^2} = 1$.
• $c = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2F(x) = \dfrac{1}{2-1} = 1$.
• $0 = \lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = a + b$ et donc $b = -a = -1$.

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $(X-1)(X-2)^2$, on obtient

$$1 = (X-2)^2 - (X-1)(X-2) + (X-1) = (-X+3)(X-1) + (X-2)^2.$$

Les polynômes $U = -X+3$ et $V = 1$ conviennent.

Q11. En évaluant l'égalité précédente en u, on obtient $p + q = U(u)\circ(u - \mathrm{Id}) + V(u)\circ(u - 2\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Id}$ ou encore, pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $p(x) + q(x) = x$. On note que $p = (u - 2\mathrm{Id})^2 = u^2 - 4u + 4\mathrm{Id}$ et $q = (-u + 3\mathrm{Id})\circ(u - \mathrm{Id}) = -u^2 + 4u - 3\mathrm{Id}$.

Soit p' la projection sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\left((u - 2\mathrm{id})^2\right)$. Soit $x \in E$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, $p(x) = (u - 2\mathrm{Id})((u - 2\mathrm{id})(x)) = (u - 2\mathrm{id})(-x) = -(-x) = x = p'(x)$ et si $x \in \mathrm{Ker}\left((u - 2\mathrm{Id})^2\right)$, $p(x) = 0 = p'(x)$.

Ainsi, l'endomorphisme p coïncide avec la projection p' sur les deux sous-espaces supplémentaires $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}\left((u - 2\mathrm{id})^2\right)$. On en déduit que $p = p'$. p est donc la projection sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\left((u - 2\mathrm{id})^2\right)$. Enfin, puisque $q = \mathrm{Id} - p$, q est la projection sur $\mathrm{Ker}\left((u - 2\mathrm{id})^2\right)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Q12. $d = p + 2q = \mathrm{Id} + q(= -u^2 + 4u - 2\mathrm{Id})$. $q(e_1) = 0$, $q(e_2) = e_2$ et $q(e_3) = e_3$. Donc, $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_2$ et $u(e_3) = 2e_3$. La matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) est donc $D' = \mathrm{diag}(1, 2, 2)$. En particulier, d est diagonalisable.

Posons $n = u - d = u^2 - 3u + 2\mathrm{Id} = (u - \mathrm{Id})\circ(u - 2\mathrm{Id})$. Puisque des polynômes en u commutent, $n^2 = (u - \mathrm{Id})^2(u - 2\mathrm{Id})^2 = (u - \mathrm{Id})\circ(u - \mathrm{Id})(u - 2\mathrm{Id})^2 = 0$.

Ainsi, en posant $d = -u^2 + 4u - 2\mathrm{Id}$ et $n = u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}$, $d + n = u$, d est diagonalisable, n est nilpotent et enfin n et d commutent en tant que polynômes en u. En passant aux matrices, le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A est $\left(-A^2 + 4A - 2I_3, A^2 - 3A + 2I_3\right)$.

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q13. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Soit $x \in E_{\lambda_i}(u)$. Alors $u(x) = \lambda_i(x)$ puis $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda_i v(x)$ et donc $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$. Ceci montre que $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, notons v_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par v. v est diagonalisable et donc il existe un polynôme non nul P, scindé sur $\mathbb{K}$, à racines simples tel que $P(v) = 0$. Par restriction, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $P(v_i) = 0$. Donc, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, v_i est diagonalisable.

Pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, notons $\mathscr{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ constituée de vecteurs propres de v_i et donc de v. Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_p$. Puisque u est diagonalisable, on sait que $E = \bigoplus\limits_{1\leqslant i\leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$ et donc que $\mathscr{B}$ est une base de E (adaptée à la décomposition précédente).

Par construction, $\mathscr{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de u qui sont aussi vecteurs propres de v. Donc, il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.

Q14. En appliquant le résultat de la question précédente aux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B, on obtient le fait que A et B sont simultanément diagonalisables. Donc, il existe $(D, D') \in (D_n(\mathbb{K}))^2$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$. Mais alors, $A - B = P(D - D')P^{-1}$ avec $D - D' \in D_n(\mathbb{K})$. Ceci montre que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q15. On suppose A et B nilpotentes. Donc, il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que, pour tout $k \geqslant p$, $A^k = 0$ et pour tout $k \geqslant q$, $B^k = 0$. Puisque de plus les matrices A et B commutent, la formule du binôme de Newton fournit

$$(A - B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} (-1)^{p+q-k-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-k-1}.$$

Dans cette somme, si $k \geqslant p$, $A^k = 0$ et donc $(-1)^{p+q-k-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-k-1} = 0$.

Sinon, $k < p$ ou encore $k \leqslant p - 1$ et donc $p + q - k - 1 \geqslant p + q - (p - 1) - 1 = q$. Dans ce cas, $B^{p+q-k-1} = 0$ puis $(-1)^{p+q-k-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-k-1} = 0$. Finalement, tous les termes de la somme sont nuls et donc $(A-B)^{p+q-1} = 0$.

On a montré que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q16. Soit A une matrice diagonalisable et nilpotente. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \text{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in D_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. D'autre part, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Mais

$$A^p = \left(PDP^{-1}\right)^p = PD^pP^{-1} = P\ \text{diag}\,(\lambda_i^p)_{1 \leqslant i \leqslant n}\ P^{-1}.$$

Puisque P et P^{-1} sont inversibles et donc simplifiables,

$$\begin{aligned} A^p = 0 &\Rightarrow P\ \text{diag}\,(\lambda_i^p)_{1 \leqslant i \leqslant n}\ P^{-1} = 0 \Rightarrow \text{diag}\,(\lambda_i^p)_{1 \leqslant i \leqslant n} \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i^p = 0 \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow A = 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, la matrice nulle est à la fois diagonalisable (car diagonale) et nilpotente (d'indice 1). Il existe une matrice et une seule à la fois diagonalisable et nilpotente, à savoir la matrice nulle.

Q17. Posons $A = D+N = D'+N'$ où D et D' sont diagonalisables, N et N' sont nilpotentes, $DN = ND$ et $D'N' = N'D'$ et de plus D et N sont des polynômes en A.

$D'A = D'(D' + N') = D'^2 + D'N' = D'^2 + N'D' = (D' + N')D' = AD'$ et donc D' commute avec A. Mais alors, D' commute avec tout polynôme en A et en particulier, D' et D commutent. De même, N' et N commutent.

D'après la question Q14, $D-D'$ est diagonalisable. D'après la question Q15, $N'-N$ est nilpotente. Donc, $D-D' = N'-N$ est à la fois diagonalisable et nilpotente. D'après la question Q16, $D - D' = N' - N = 0$ et donc, $D = D'$ et $N = N'$. Ceci établit l'unicité de la décomposition de Dunford.

Partie IV - Continuité de l'application $A \mapsto D$

Q18. On rappelle que $n \geqslant 2$. Soient $A = \text{diag}(0, 1, 2, \dots, n-1) + E_{1,2}$ et $B = \text{diag}(0, -1, -2, \dots, -(n-1))$. A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ car son polynôme caractéristique, à savoir $\chi_A = X(X-1)\dots(X-(n-1))$ est à racines simples. B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ car B est diagonale.

Mais, d'après la question Q16, $A + B = E_{1,2}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ car $A + B$ est nilpotente et non nulle. Ceci montre que $\mathscr{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C}$. L'application $f\ :\ M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie. On sait alors que f est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (muni de n'importe quelle norme).

Q19. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme sous-multiplicative $\|\ \|_1$ ($\|A\|_1 = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$).

Soient $A \in \mathscr{M}_n(C)$ et $\varepsilon > 0$. On sait que A est trigonalisable et donc il existe $T \in \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$. Posons $\text{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sont les coefficients diagonaux de T).

Puisque $\left[0, \dfrac{\varepsilon}{n\|P\|_1 \left\|P^{-1}\right\|_1}\right]$ est infini, on peut trouver $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \left[0, \dfrac{\varepsilon}{n\|P\|_1 \left\|P^{-1}\right\|_1}\right]^n$ tel que les nombres $\lambda_i + \varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, soient deux à deux distincts. Soient $T' = T + \text{diag}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Puisque $\chi_{T'} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - (\lambda_i + \varepsilon_i))$, $\chi_{T'}$ est à racines simples et donc T' est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il en est de même de la matrice $A' = PT'P^{-1}$. De plus,

$$\begin{aligned}\|A' - A\|_1 &= \left\|P(T' - T)P^{-1}\right\|_1 \leqslant \|P\|_1 \left\|P^{-1}\right\|_1 \|\text{diag}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\|_1 \\ &= \|P\|_1 \left\|P^{-1}\right\|_1 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \leqslant \|P\|_1 \left\|P^{-1}\right\|_1 \times n \frac{\varepsilon}{n\|P\|_1 \left\|P^{-1}\right\|_1} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A' \in \mathscr{D} / \ \|A - A'\|_1 \leqslant \varepsilon$. Ceci montre que $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Q20. D'après la question Q1, si A est diagonalisable, le couple de la décomposition de Dunford de A est $(A, 0)$. Donc, $\forall A \in \mathscr{D}$, $\varphi(A) = A$.

Soit $A = E_{1,2}$. La décomposition de Dunford de A est $(0, A)$ (car A est nilpotente) et donc $\varphi(A) = 0 \neq A$.
Puisque $\mathscr{D}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}$, convergente, de limite A. Si, par l'absurde, φ est continue en $E_{1,2}$,

$$\varphi(A) = \varphi\left(\lim_{p\to+\infty} A_p\right) = \lim_{p\to+\infty} \varphi(A_p) = \lim_{p\to+\infty} A_p = A,$$

ce qui est faux. Donc, φ n'est pas continue en $A = E_{1,2}$ puis φ n'est pas continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

