Théorème de Stone Weierstrass

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le polynôme B_n de degré $\leqslant n$ par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On note par ailleurs $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et on fixe $\varepsilon > 0$

1. Justifier l'existence d'un réel $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour couple $(x,y) \in [0,1]^2$ vérifiant

$$|x-y| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

2. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, donner une expression simple des quantités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k y^{n-k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^k y^{n-k}.$$

3. Pour $x \in [0,1]$, on pose $r_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = 1,\ \sum_{k=0}^{n} k r_k(x) = nx,\ \sum_{k=0}^{n} k(k-1) r_k(x) = n(n-1)x^2.$$

En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$

4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x).$$

5. Pour $x \in [0,1]$, on note $J(x) = \{0 \leqslant k \leqslant n;\ |k-nx| \leqslant n\eta_\varepsilon\}$. Prouver que :

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\in J(x)}}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leqslant \varepsilon.$$

6. Prouver que :

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\notin J(x)}}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leqslant 2M \sum_{\substack{k=0\\ k\notin J(x)}}^{n} \frac{(k-nx)^2}{n^2\eta_\varepsilon^2} r_k(x),$$

puis que

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\notin J(x)}}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \leqslant \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}.$$

7. En déduire que la suite de polynômes B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
8. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : si f est continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Indication **:** *Prendre* $g : x \in [0,1] \longmapsto f(a + x(b-a))$

9. **Application :** Soit a, b réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b x^n f(x) \mathrm{d}x = 0$$

Montrer que f est nulle

Théorème de Stone Weierstrass

1. Théorème de Heine
2. D'après la formule du binôme :
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = (x+y)^n.$$
On dérive les deux membres de cette égalité par rapport à x, puis on multiplie par x :
$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}.$$
De même, en dérivant deux fois :
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^k y^{n-k} = n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}.$$
3. On spécialise les résultats précédents pour $y = 1-x$. On obtient :
$$\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = 1$$
$$\sum_{k=0}^{n} k r_k(x) = nx,$$
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) r_k(x) = n(n-1)x^2.$$
On a de plus :
$$(k-nx)^2 = k(k-1) + k(1-2nx) + n^2x^2.$$
En reportant les calculs précédents, on trouve donc :
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 r_k(x) = nx(1-x).$$
4. Remarquons que
$$f(x) = f(x)\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) r_k(x).$$
On a donc :
$$|f(x) - B_n(x)| \quad \leqslant \quad \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x).$$
5. Si $|k-nx| \leqslant n\eta_\varepsilon$, on a en particulier :
$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \eta_\varepsilon \implies \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$
En utilisant que $\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = 1$, on en déduit le résultat.
6. Remarquons que si $|k-nx| \geqslant n\eta_\varepsilon$, on a alors
$$1 \leqslant \frac{(k-nx)^2}{n^2\eta_\varepsilon^2}.$$
On déduit :
$$\begin{aligned}\sum_{k\in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) \quad &\leqslant \quad \frac{2M}{n^2\eta_\varepsilon^2}\sum_{k\in J^c}(k-nx)^2 r_k(x)\\ &\leqslant \quad \frac{2M}{n^2\eta_\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x)\\ &\leqslant \quad \frac{2M}{n^2\eta_\varepsilon^2} nx(1-x)\\ &\leqslant \quad \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2},\end{aligned}$$

Théorème de Stone Weierstrass

où la dernière inégalité vient du fait que le maximum de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est atteint en $\dfrac{1}{2}$ et vaut $\dfrac{1}{4}$.

7. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question 4, on a l'inégalité

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x).$$

η_ε est donné par l'uniforme continuité. On fixe ensuite n_0 suffisamment grand tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon.$$

On a alors, pour $n \geqslant n_0$ et $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) \\
&\leqslant \underbrace{\sum_{k \in J(x)^c} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x)}_{\leqslant \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}} + \sum_{k \in J(x)} \underbrace{\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|}_{\leqslant \varepsilon} r_k(x) \\
&\leqslant \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2} + \varepsilon \sum_{k \in J(x)} r_k(x) \leqslant \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2} + \varepsilon \underbrace{\sum_{k=0}^{n} r_k(x)}_{=1} \\
&\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\forall n \geqslant n_0$, on a $\| f - B_n \|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.
Ceci prouve bien la convergence uniforme de la suite $(B_n)_{n \geqslant 0}$ vers f.

8. Posons $g(x) = f(a + (b-a)x)$, pour $x \in [0,1]$. La suite (B_n) de polynômes de Bernstein associée à g converge uniformément vers g sur $[0,1]$. Posons $Q_n(x) = B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, pour $x \in [a,b]$. (Q_n) est encore une suite de fonctions polynomiales, et il est trivial de vérifier que (Q_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

9. Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$\int_a^b P(x) f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

La fonction $\overline{f} : x \longmapsto \overline{f(x)}$ est elle aussi continue sur $[a,b]$. Donc, d'après théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers $\overline{f}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$, en écrivant

$$\left| |f(x)|^2 - f(x)P_n(x) \right| = \left| f(x) \left(\overline{f(x)} - P_n(x) \right) \right|$$

et il en résulte que la suite $(fP_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|f|^2$ sur $[a,b]$. D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors :

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) P_n(x) \, \mathrm{d}x$$

Donc

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[a,b]$ díntégrale nulle, donc $|f| = 0$, ainsi la nullité de f