Formulation locale des lois de l'éléctrostatique

Table des matières

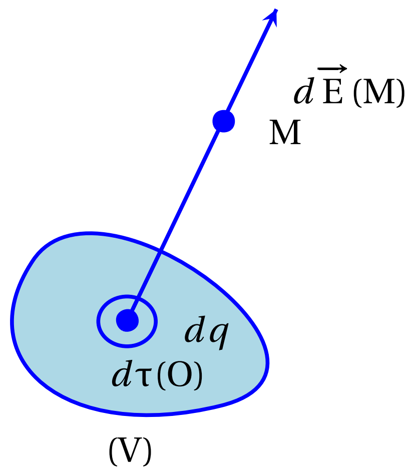
1 Formulation intégrale des Lois de l'éléctrostatique

1.1 Champ électrostatique

- Une charge q placée en un point O dans le vide crée en un point M,un champ électrostatique donné par

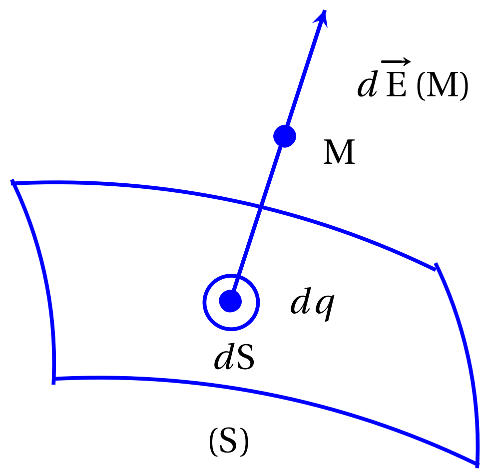
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2} \text{ avec : } \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \text{ et } OM = r$$

- pour une distribution volumique de charge



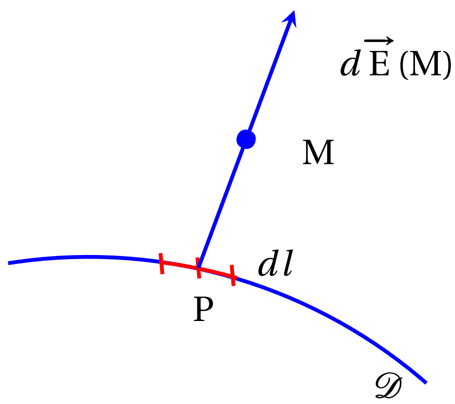
  - $dq = \rho d\tau$
  - ρ : densité volumique de charge
  - $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$
  - $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(O)\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}d\tau$

- Pour une distribution surfacique de charge



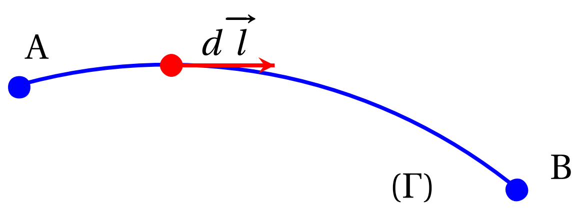
  - $dq = \sigma dS$
  - σ : densité surfacique de charge
  - $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$
  - $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \sigma(O)\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}dS$

- pour une distribution linéique de charge



  - $dq = \lambda dS$
  - λ : densité linéique de charge
  - $d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$
  - $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathscr{D}} \lambda(O)\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}dl$

1.2 Circulation du champ électrostatique



- circulation élémentaire : $d\mathscr{C} = \vec{E}.d\vec{l}$
- circulation du champ $\vec{E}$ entre A et B le long de Γ : $\mathscr{C}_A^B = \int_{A(\Gamma)}^{B} \vec{E}.d\vec{l}$

- cas d'une charge ponctuelle

- $\mathscr{C}_A^B = \int_A^B \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$
- sur une courbe fermée (contour) : $\mathscr{C} = \oint_\Gamma \vec{E}.d\vec{l} = 0$
- la circulation du champ électrostatique est conservative

▶ Cas d'une distribution de charge
En utilisant le principe de superposition on montre que la propriété précédente reste valable pour une distribution de charge

1.3 Potentiel électrostatique

▶ le potentiel crée par une charge q à une distance r

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

▶ $d\mathscr{C} = \vec{E}.d\vec{l} = -dV$

▶ pour une distribution de charge

$$\boxed{V = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}}$$

▶ pour une distribution volumique de charge

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho d\tau}{r}}$$

▶ pour une distribution surfacique de charge

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma dS}{r}}$$

▶ pour une distribution linéique de charge

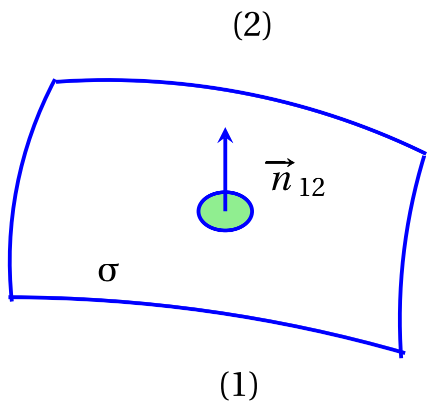
$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathscr{D}} \frac{\lambda dl}{r}}$$

1.4 Théorème de Gauss

• Enoncé : Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée (Σ) est égal à la charge située à l'intérieur (Q_{int}) de cette surface divisée sur ε_0.

$$\oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

1.5 Relations de passage d'un champ électrostatique



- les relations de passage pour un champ électrostatique

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

avec $\vec{n}_{1\to 2}$: vecteur unitaire dirigé de (1) vers (2)

- la composante normale du $\vec{E}$ subit une discontinuité de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à travers une surface chargé uniformément avec une densité σ

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- la composante tangentielle est continue

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

2 Formulation locale des lois de l'électrostatique

2.1 Forme locale de la circulation du champ électrostatique

•Théorème de STOKES-AMPERE : la circulation d'un champ vectoriel $\vec{A}$ le long d'un contour fermé (Γ) est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface (Σ) s'appuyant sur ce contour

$$\oint_\Gamma \vec{A}.d\vec{l} = \iint_\Sigma \overrightarrow{rot}\vec{A}.d\vec{S}$$

- la circulation du champ $\vec{E}$ sur un contour fermé (Γ)
$$\mathscr{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{E}.d\vec{l} = \iint_\Sigma \overrightarrow{rot}\vec{E}.d\vec{S} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$$

•Conclusion : l'équation $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$ traduit le caractère conservatif de la circulation du champ électrostatique.

- $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$: il existe un potentiel V tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

2.2 Forme locale du théorème de Gauss

•Théorème de GREEN-OSTROGRADSKI : le flux sortant d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$,à travers une surface fermée (Σ),est égal à l'intégrale,sur le volume (V) limité par cette surface,de sa divergence $div\overrightarrow{A}$:

$$\oiint_{\Sigma}\overrightarrow{A}.d\overrightarrow{S}=\iiint_{V}div\overrightarrow{A}.d\tau$$

- $\oiint_{\Sigma}\overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S}=\dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
- $\oiint_{\Sigma}\overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S}=\iiint_{V}div\overrightarrow{E}.d\tau$
- $Q_{int}=\iiint_{V}\rho d\tau$
- donc

$$\boxed{div\overrightarrow{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

•Conclusion : l'équation locale qui traduit le théorème de Gauss est

$$div\overrightarrow{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2.3 Equation de Poisson-Equation de Laplace

- $\overrightarrow{E}=-\overrightarrow{grad}V$
- $div\overrightarrow{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
- on définit le laplacien d'un champ scalaire V par : $\Delta V=div(\overrightarrow{grad}V)$
- on obtient l'équation de Poisson

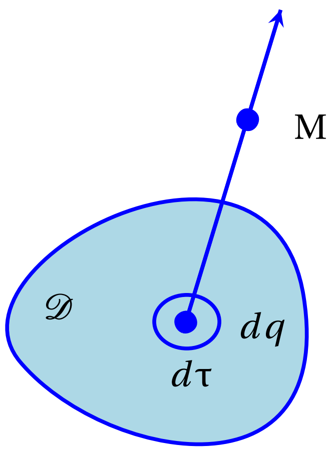
$$\boxed{\Delta V+\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0}$$

- dans une région vide de charge $\rho=0$ on obtient l'équation de Laplace

$$\boxed{\Delta V=0}$$

2.4 Résolution des lois locales

- $div\overrightarrow{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
- $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}=\overrightarrow{0}$
- $\Delta V+\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}=0$



- on admet la solution de l'équation de Poisson

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathscr{D}} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau}$$

- en coordonnées sphériques

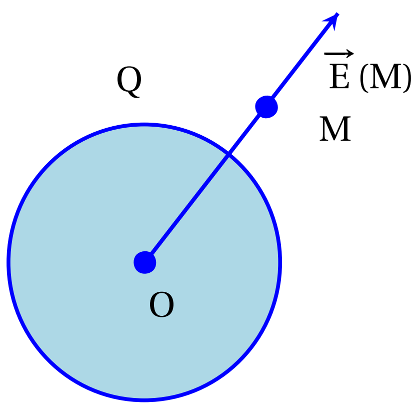
$$\boxed{\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{e}_r}{r^2}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}_M\left(\frac{1}{PM}\right) = -\frac{\vec{e}_{P\to M}}{PM^2}}$$

- $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}_M\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathscr{D}} \frac{\rho(P)d\tau}{PM}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathscr{D}} \frac{\rho(P)d\tau}{PM^2}\vec{e}_{P\to M}$

3 Applications

Considérons une sphère homogène chargée uniformément en volume avec une densité totale de charge ρ et de charge totale Q



- Théorème de Gauss
  - Σ : surface de Gauss est une sphère de rayon $OM = r$
  - $\oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
  - la symétrie sphérique $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$
  - $E(r).4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
  - $Q_{int} = \begin{cases} \rho\frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si M se trouve à l'intérieur de la sphère} \\ \rho\frac{4}{3}\pi R^3 & \text{si M se trouve à l'éxtérieur de la sphère} \end{cases}$
  - $\begin{cases} E_int = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \\ E_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$
- Equations locales
  - $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
  - en coordonnées sphériques

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(E_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}}$$

- la symétrie sphérique $\overrightarrow{E} = E(r)\overrightarrow{e}_r$
- donc $div\overrightarrow{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$
- si M se trouve à l'extérieur $\rho(M) = 0$ donc $\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} = 0$

  $E_{ext}(r) = \frac{A}{r^2}$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{ext}(r) = \frac{A}{r^2}\overrightarrow{e}_r}$$

- si M se trouve à l'intérieur $\rho(M) = \rho = cte$ donc $\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

  $r^2E_{int} = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + C_1$ avec : $\overrightarrow{E}(O) = \overrightarrow{0}$ donc $C_1 = 0$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_r}$$

- absence du charge surfacique : continuité de $\overrightarrow{E}$ à travers la surface de la sphére donc $\overrightarrow{E}_{int}(R) = \overrightarrow{E}_{ext}(R) \Rightarrow A = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{ext} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\overrightarrow{e}_r}$$

► Potentiel électrostatique

- $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$
- $E_r = E(r) = -\frac{dV}{dr}$
- pour $r \geqslant R$: avec $V(\infty) = 0$

  $\int_r^{\infty} dV = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} \Leftrightarrow V(\infty) - V(r) = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}}$$

- pour $r \leqslant R$

  $\int_r^{R} dV = -\int_r^{R}\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \Leftrightarrow V(R) - V(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$ avec : $V(R) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)}$$