CALCULS DE DÉTERMINANTS

Dans tout le problème a, b, c désignent des réels et n un entier supérieur à 1.

Partie I

Soit Δ_n le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante: les éléments de la diagonale principale sont égaux à a, ceux au dessus de la cette diagonale valent b et enfin ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi : $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}$

1. Calculer Δ_2 et Δ_3
2. (a) Calculer Δ_n dans les cas $a = c$ et $a = b$
   (b) Calculer Δ_n dans le cas où $b = c$
3. On suppose $b \neq c$ et $n \geqslant 3$.
   (a) Établir que
   $$\Delta_n = (2a - b - c)\Delta_{n-1} - (a - b)(a - c)\Delta_{n-2}$$
   Indication : *On pourra par exemple opérer avec les deux dernières colonnes puis faire la même manipulation sur les lignes.*
   (b) Donner l'expression du terme général de la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$

Partie II

Dans cette partie $a_1, \cdots, a_n$ désignent n réels. On désire calculer le déterminant D_n de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante : Les coefficients diagonaux sont les $a_1, \cdots, a_n$, les coefficients au dessus de la diagonale sont égaux à b tandis que ceux en dessous de la diagonale valent c.

Ainsi $D_1 = a_1$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix}$ et $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}$

4. Dans un premier temps, nous supposons $b \neq c$. On pose $D_n(x)$, le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de la matrice définissant D_n.
   Ainsi $D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ c + x & \cdots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}$
   (a) Montrer que $D_n : x \longmapsto D_n(x)$ est une fonction affine, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) = \alpha x + \beta$.
   (b) Calculer α et β en évaluant $D_n(x)$ pour des valeurs judicieuses de x .
   (c) En déduire l'expression de D_n
5. On désire calculer D_n dans le cas où $b = c$
   (a) On fixe le paramètre c et on fait varier le paramètre b dans $\mathbb{R}$. Établir que D_n apparaît alors comme une fonction continue de la variable b variant dans $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire la valeur de D_n dans le cas où $b = c$.

CALCULS DE DÉTERMINANTS

Partie I

1. $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = a^2 - bc$ et $\Delta_3 = a^3 + b^2c + bc^2 - 3abc$
2. (a) Dans le cas $a = c$. Avec les opérations $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, \cdots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

donc Δ_n est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure, soit $\Delta_n = a\,(a-b)^{n-1}$
Dans le cas $a = b$, en transposant et on obtient $\Delta_n = a\,(a-c)^{n-1}$

(b) L'opération $C_1 \longleftarrow C_1 + \cdots + C_n$ donne

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 1 & a & b & & \vdots \\ 1 & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

Puis les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \cdots L_n \leftarrow L_n - L_1$ donnent

$$\Delta_n = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a-b & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)\,(a-b)^{n-1}$$

3. (a) Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$ et $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ on obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c & 0 \\ b & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c & 0 \\ b & \cdots & b & a & c-a \\ 0 & \cdots & 0 & b-a & (2a-b-c) \end{vmatrix}$$

En développant suivant la dernière colonne :

$$\Delta_n = (2a-b-c)\Delta_{n-1} - (c-a) \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c & c \\ b & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c & c \\ b & \cdots & b & a & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b-a \end{vmatrix} = (2a-b-c)\Delta_{n-1} - (c-a)(b-a)\Delta_{n-2}$$

La relation demandée est achevée

(b) La suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (2a-b-c)r + (a-b)(a-c) = 0$. En reconnaissant somme et produit des racines, les solutions de cette equation caractéristique sont $a-b$ et $a-c$, elles sont distinctes car $b \neq c$ et donc le terme général de (Δ_n) est de la forme $\Delta_n = \alpha(a-b)^n + \beta(a-c)^n$.
Pour $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha(a-b) + \beta(a-c) = a \\ \alpha(a-b)^2 + \beta(a-c)^2 = a^2 - bc \end{cases} \iff \alpha = \frac{c}{c-b} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{b-c}$$

d'où

$$\Delta_n = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$$

Partie II

4. (a) En retranchant la première colonne à toutes les autres colonnes, on fait disparaître les x des colonnes $C_2, \cdots, C_n$, On obtient

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1+x & b-a_1 & \cdots & \cdots & b-a_1 \\ c+x & a_2-c & b-c & \cdots & b-c \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b-c \\ c+x & 0 & \cdots & 0 & a_n-c \end{vmatrix}$$

On utilise la linéarité par rapport à la première colonne, on obtient donc

$$D_n(x) = x\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & b-a_1 & \cdots & \cdots & b-a_1 \\ 1 & a_2-c & b-c & \cdots & b-c \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b-c \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n-c \end{vmatrix}}_{=\alpha} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b-a_1 & \cdots & \cdots & b-a_1 \\ c & a_2-c & b-c & \cdots & b-c \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b-c \\ c & 0 & \cdots & 0 & a_n-c \end{vmatrix}}_{=\beta}$$

Ainsi D_n est une fonction affine de x

(b) Pour $x=-b$, on a $D_n(-b) = \begin{vmatrix} a_1-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & a_2-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c-b & \cdots & c-b & a_n-b \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i-b) = -\alpha b+\beta$

Pour $x=-c$, on a $D_n(-c) = \begin{vmatrix} a_1-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & a_2-c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-c \\ 0 & \cdots & 0 & a_n-c \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i-c) = -\alpha c+\beta$

On en déduit

$$\alpha = \frac{D_n(-b)-D_n(-c)}{c-b} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i-b) - \prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$$

et

$$\beta = \frac{cD_n(-b)-bD_n(-c)}{c-b} = \frac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b) - b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$$

(c) $D_n = D_n(0) = \beta = \dfrac{c\prod_{i=1}^{n}(a_i-b) - b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$

5. (a) $b :\mapsto D_n(b)$ est un polynôme en b. Ainsi la continuité de D_n

CALCULS DE DÉTERMINANTS

(b) Pour $b \neq c$, on a $D_n = D_n(0) = \beta = \dfrac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i-b) - b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b}$, donc

$$\begin{aligned}
D_n &= \lim_{b\to c} \frac{c\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i-b) - b\prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{c-b} \\
&= \lim_{b\to c} \prod_{i=1}^{n}(a_i-b) - b\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i-b) - \prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{b-c}
\end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\lim_{b\to c}\prod_{i=1}^{n}(a_i-b) = \prod_{i=1}^{n}(a_i-c)$ et $\displaystyle\lim_{b\to c}\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i-b) - \prod_{i=1}^{n}(a_i-c)}{b-c} = -\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_i-c)$.

Finalement, quand $b=c$:

$$D_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i-c) + c\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_i-c)$$