Correction proposée par :
EL Amdaoui Mustapha
elamdaoui@gmail.com

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1.1. Par définition du polynôme caractéristique, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ -1 & X-1 & X-2 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & X-2 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 \\ -2 & 0 & X-2 \end{vmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & 0 \\ -2 & 2 & X-2 \end{vmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\
&= (X-2)^3
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$, c'est-à-dire que A possède une seule valeur propre $\lambda = 2$

1.2. Soit $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $x \in \ker(v - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ si, et seulement, si $(A - 2I_3)X = 0$. Or

$$\begin{aligned}
(A - 2I_3)X = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a + b - c &= 0 \\ a - b + c &= 0 \\ a &= 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\ker(v - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \textbf{Vect}\left((0,1,1)\right)$

1.3.
- La valeur propre 2 de A est d'ordre de multiplicité 3 et la dimension de son sous-espace propre est de dimension 1, donc elle n'est pas diagonalisable.
- χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors A est trigonalisable sur $M_3(\mathbb{R})$

1.4. On pose $u = v - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$

1.4.1. On a : $u^3 = (v - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^3 = \chi_v(v)$. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que $\chi_v(v) = 0$ et, par suite, $u^3 = 0$. Donc u est nilpotent

1.4.2. La matrice représentative de u^2 est $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, donc pour $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$x \in \ker(u^2) \Longleftrightarrow a + b - c = 0 \Longleftrightarrow c = a + b$$

Donc $\ker(u^2) = \textbf{Vect}\left((1,0,1),(0,1,1)\right)$.
$e_1 = (1,0,0) \notin \ker(u^2)$, car $u^2(e_1) = (0,2,2) \neq (0,0,0)$

1.4.3. Posons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\underset{\mathcal{B}_c}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dont le déterminant $-2 \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $T = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.4.4. On pose $N = A - 2I_3$; la matrice N est nilpotente et elle commute avec $2I_3$, alors par les propriétés de l'exponentielle

$$\exp(A) = \exp(2I_3 + N) = \exp(2I_3)\exp(N) = e^2\left(I_3 + N + \frac{N^2}{2}\right)$$

Avec les calculs précédents qui donnent les expressions de N et N^2

$$\exp(A) = e^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*** *** ***

Problème

1ère partie
Calcul du déterminant de Cauchy

2.1. Si deux des a_i sont égaux, Δ_n est nul car il s'agit d'un détermiant d'une matrice dont deux de ses lignes sont égales.

2.2. Les deux polynômes $\prod_{k=1}^{n-1}(X - b_k)$ et $\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)$ sont scindés et sans aucune racine commune, donc ils sont premiers entre eux

2.3. Décomposition en éléments simples de R

2.3.1. La fraction rationnelle $R = \dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(X - b_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)}$ est irréductible dont les pôles $-a_1, \cdots, -a_n$ qui sont deux à deux distincts, donc ils sont simples

2.3.2. On a $\deg(\mathrm{R}) = -1 < 0$. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $R = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{X + a_k}$. Les pôles sont simples, donc

$$\alpha_k = \left[(X + a_k)\,R\right]_{X=-a_k} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(-a_k - b_j)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(a_j - a_k)} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(a_k + b_j)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(a_k - a_j)}$$

2.4. Application au calcul de Δ_n

2.4.1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$; on pose L_i la i-ème ligne de la matrice $\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et B_n la matrice dont les lignes $L_1, \cdots, L_{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i$. D'une part

$$
\begin{aligned}
\det(B_n) &= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{a_i+b_1} & \cdots & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{a_i+b_{n-1}} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{a_i+b_n} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
\det(B_n) &= \det\left(L_1, \cdots, L_{n-1}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \det\left(L_1, \cdots, L_{n-1}, L_i\right) \quad \text{det est } n\text{-linéaire} \\
&= \alpha_n \det\left(L_1, \cdots, L_{n-1}, L_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\det\left(L_1, \cdots, L_{n-1}, L_i\right)}_{=0} \quad \text{det est alternée} \\
&= \alpha_n \Delta_n
\end{aligned}
$$

Par transitivité

$$
\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}
$$

2.4.2. Comme $b_1, \cdots, b_{n-1}$ sont les racines de R, alors pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $R(b_i) = 0$ et, par suite,

$$
\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & R(b_n) \end{vmatrix}
$$

puis on développe le déterminant du second membre de l'égalité précédente par rapport à la dernière ligne, on obtient

$$
\alpha_n \Delta_n = R(b_n) \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix} = R(b_n)\Delta_{n-1}
$$

2.4.3. • Calcul de Δ_2. On a :

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_2+b_1)(a_1+b_2)} \\ &= \frac{a_1b_1+a_2b_2-a_1b_2-a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)} \\ &= \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}\end{aligned}$$

• On démontre l'égalité par récurrence sur $n \geqslant 2$

– Pour $n=2$, l'inégalité est vérifiée

– Soit $n \geqslant 2$, on suppose que $\Delta_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}$. On fait appel à l'inégalité trouvée à la question **2.4.2.**, alors $\Delta_{n+1} = \dfrac{R(b_{n+1})}{\alpha_{n+1}}\Delta_n$. Or $R(b_{n+1}) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(b_{n+1}-b_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(b_{n+1}+a_k)}$ et $\alpha_{n+1} = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}+b_j)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}-a_j)}$, alors

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(b_{n+1}-b_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(b_{n+1}+a_k)} \times \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}-a_j)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(a_{n+1}+b_j)} \times \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)} \\ &= \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}(a_i+b_j)}\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence

2ème partie
Matrice et déterminant de Gram

3.1. Soit $u_1, u_2 \in E$, on a $|G(u_1,u_2)| = \begin{vmatrix}(u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2)\end{vmatrix} = \|u_1\|^2\|u_2\|^2 - (u_1|u_2)^2$ est positif ou nul d'après l'inégalité de *Schwarz* et il est nul si, et seulement si, la famille (u_1,u_2) est liée.

3.2. $G(u_1,\cdots,u_p)$ est symétrique car le produit scalaire l'est : $\forall i,j \in [\![1,p]\!], \quad (u_i|u_j) = (u_j|u_i)$

3.3 Cas d'une famille liée

3.3.1. Rappelons que le déterminant d'une matrice ne change pas si on ajoute à une ligne (colonne) un combinaison linéaire des autres lignes (colonnes), alors, par bilinéarité du produit scalaire, on obtient

$$\begin{aligned}
|G(w_1,\cdots,w_p)| &= \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & \cdots & (u_1|w_i) & \cdots & (u_1|u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_i|u_1) & \cdots & (w_i|w_i) & \cdots & (w_i|u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_p|u_1) & \cdots & (u_p|w_i) & \cdots & (u_p|u_p) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & \cdots & (u_1|w_i) & \cdots & (u_1|u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_i|u_1) & \cdots & (u_i|w_i) & \cdots & (u_i|u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_p|u_1) & \cdots & (u_p|w_i) & \cdots & (u_p|u_p) \end{vmatrix} \quad L_i \leftarrow L_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} \lambda_j L_j \\
&= \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & \cdots & (u_1|u_i) & \cdots & (u_1|u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_i|u_1) & \cdots & (u_i|u_i) & \cdots & (u_i|u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_p|u_1) & \cdots & (u_p|u_i) & \cdots & (u_p|u_p) \end{vmatrix} \quad L_i \leftarrow C_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \lambda_j C_j \\
&= |G(u_1,\cdots,u_p)|
\end{aligned}$$

3.3.2. Si la famille $(u_1,\cdots,u_p)$ est liée, alors l'un des vecteurs u_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des u_j avec $j \neq i$ sous la forme $u_i = \sum\limits_{j\neq i} \lambda_j u_j$. D'après la question **3.3.2.**, on a

$$\begin{aligned}
|G(u_1,\cdots,u_p)| &= \left| G(u_1,\cdots,u_{i-1},u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \lambda_j u_j, u_{i+1},\cdots,u_p) \right| \\
&= |G(u_1,\cdots,u_{i-1},0,u_{i+1},\cdots,u_p)| = 0
\end{aligned}$$

Le dernier déterminant est nul car sa i-ème colonne est nulle

3.4. Cas d'une famille libre

3.4.1. $(e_1,\cdots,e_p)$ étant une base orthonormale de **Vect**$(u_1,\cdots,u_p)$, alors

$$\forall i,j \in [\![1,p]\!], \quad (u_i|u_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} b_{k,j}$$

3.4.2. Les deux matrices ${}^tBB$ et $G(u_1,\cdots,u_p)$ sont carrées d'ordre p. Le coefficient $c_{i,j}$ de position de (i,j) de la matrice ${}^tBB$ vaut

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} b_{k,j} = (u_i|u_j)$$

Donc ${}^tBB = G(u_1,\cdots,u_p)$

3.4.3 D'après la question précédente **3.4.2.**, on a

$$|G(u_1,\cdots,u_p)| = \det\left({}^tBB\right) = \det(B)^2$$

La liberté de la famille $(u_1,\cdots,u_p)$ montre que $(u_1,\cdots,u_p)$ est une base de l'espace **Vect**$(u_1,\cdots,u_p)$ et par conséquent B est inversible puisqu'il s'agit d'une matrice de passage. On conclut donc $|G(u_1,\cdots,u_p)| = \det({}^tBB) = \det(B)^2 > 0$

3.5. Application au calcul de la distance à un sous-espace vectoriel

3.5.1. Soit $x \in E$. Remarquons que pour tout vecteur $y \in F$ on a : $(y,x) = (y|P_F(x))$ et par le théorème de Pythagore $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$, de sorte que

$$\begin{aligned}
|G(v_1,\cdots,v_n,x)| &= \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_i|v_1) & \cdots & (v_i|v_n) & (v_i|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \cdots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) \\ (P_F(x)|v_1) & \cdots & (P_F(x)|v_n) & \|P_F(x)\|^2 + \|x-P_F(x)\|^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_i|v_1) & \cdots & (v_i|v_n) & (v_i|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \cdots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) \\ (P_F(x)|v_1) & \cdots & (P_F(x)|v_n) & \|P_F(x)\|^2 \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_i|v_1) & \cdots & (v_i|v_n) & (v_i|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \cdots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) \\ (P_F(x)|v_1) & \cdots & (P_F(x)|v_n) & \|P_F(x)\|^2 + \|x-P_F(x)\|^2 \end{vmatrix} \\
&= |G(v_1,\cdots,v_n,P_F(x))| + \|x-P_F(x)\|^2 . |G(v_1,\cdots,v_n)|
\end{aligned}$$

3.5.2. F étant un sous-espace de dimension finie, alors

$$\mathrm{d}(x,F) = \|x - P_F(x)\|$$

Or, d'après la question **3.5.1.**, $|G(v_1,\cdots,v_n,x)| = \|x-P_F(x)\|^2\, |G(v_1,\cdots,v_n)|$, donc

$$\mathrm{d}(x,F) = \|x - P_F(x)\| = \sqrt{\frac{|G(v_1,\cdots,v_n,x)|}{|G(v_1,\cdots,v_n)|}}$$

3.6. Un exemple de matrice de Gram

3.6.1. Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $B = \underset{\mathcal{B}_c}{\mathrm{Mat}}\,(v_1,\cdots,v_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux valent 1, alors elle est inversible et , en conséquent, $(v_1,\cdots,v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$

3.6.2. La famille $\mathcal{B}_c$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique $< .,. >$, alors

$$< v_i, v_j >= \min(i,j)$$

La matrice $A_n = (< v_i, v_j >)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est de Gram

3.6.3
- La matrice A_n est réelle symétrique, alors par le théorème spéctral elle est orthogonalement diagonalisable
- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_n)$ et $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre unitaire qui est associé à λ, alors $A_nX = \lambda X$, puis ${}^tXA_nX = \lambda$. D'autre part $A_n = {}^tBB$, donc ${}^tXA_nX = {}^tX^tBBX = \|BX\|^2 > 0$, car B est inversible et $XX \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Bref $\lambda = \|BX\|^2 > 0$

3ème partie
Application au calcul d'un minimum

4.1. $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \to \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est bien définie.
Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et $P,Q,R \in \mathbb{R}[X]$.

- **Symétrie** : $(P|Q)=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 Q(t)P(t)\mathrm{d}t=(Q|P)$
- **Binlinéarité** : $(P|\lambda Q+\mu R)=\displaystyle\int_0^1 P(t)\left(\lambda Q(t)+\mu R(t)\right)\mathrm{d}t=\lambda\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t+\mu\int_{-1}^1 P(t)R(t)\mathrm{d}t$.
  La symétrie assure que $(.|.)$ est linéaire par rapport à la première variable
- **Positivité** : $(P|P)=\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$
- **Définie** : Si $(P|P)=0$ alors $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\mathrm{d}t=0$. Or la fonction $t\to P^2(t)$ est continue positive sur $[0,1]$ donc c'est la fonction nulle et puisque le polynôme P admet alors une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

Finalement $(.|.)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

4.2. Calcul d'une distance

4.2.1 Par définition du produit scalaire

$$\left(P_{n_i}|P_{n_j}\right)=\int_0^1 P_{n_i}(t)P_{n_j}(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{n_i+n_j}\mathrm{d}t=\frac{1}{n_i+n_j+1}$$

4.2.2. Pour $i\in[\![1,p]\!]$, on pose $a_i=n_i$ et $b_i=n_i+1$, alors $G\left(P_{n_1},\cdots,P_{n_p}\right)=\left(\dfrac{1}{a_i+b_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. On appelle l'égalité obtenue à la question **2.4.3**, alors :

$$\left|G\left(P_{n_1},\cdots,P_{n_p}\right)\right|=\frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant p}\left(n_j-n_i\right)^2}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant p}\left(n_i+n_j+1\right)}$$

4.2.3. Puisque les n_i sont deux à deux distincts, alors $\left|G\left(P_{n_1},\cdots,P_{n_p}\right)\right|>0$. Le résultat de la question **3.3.2** affirme, par contraposée, que $\left(P_{n_1},\cdots,P_{n_p}\right)$ est libre

4.2.4 Posons $n_{p+1}=r$, alors

$$\begin{aligned}\left|G\left(P_{n_1},\cdots,P_{n_p},P_{n_{p+1}}\right)\right| &= \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant p+1}\left(n_j-n_i\right)^2}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant p+1}\left(n_i+n_j+1\right)}\\ &= \underbrace{\frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant p}\left(n_j-n_i\right)^2}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant p}\left(n_i+n_j+1\right)}}_{=\left|G\left(P_{n_1},\cdots,P_{n_p}\right)\right|}\times\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{p}\left(n_{p+1}-n_i\right)^2}{\displaystyle\prod_{i=1}^{p+1}\left(n_i+n_{p+1}+1\right)\times\prod_{j=1}^{p}\left(n_{p+1}+n_j+1\right)}\end{aligned}$$

Avec $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}\left(n_{p+1}-n_i\right)^2=\prod_{i=1}^{p}\left(r-n_i\right)^2$ et

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{p+1}\left(n_i+n_{p+1}+1\right)\times\prod_{j=1}^{p}\left(n_{p+1}+n_j+1\right) &= \left(2n_{p+1}+1\right)\prod_{k=1}^{p}\left(n_{p+1}+n_k+1\right)^2\\ &= (2r+1)\prod_{k=1}^{p}\left(r+n_k+1\right)^2\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\left|G\left(P_{n_1},\cdots,P_{n_p},P_{n_{p+1}}\right)\right|}{\left|G(P_{n_1},\cdots,P_{n_p})\right|}=\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\left(r-n_k\right)^2}{(2r+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\left(r+n_k+1\right)^2}$$

Par la question **3.5.2.** on conclut que

$$\mathrm{d}\left(P_r, \mathcal{W}_p\right) = \sqrt{\frac{\left|G\left(P_{n_1}, \cdots, P_{n_p}, P_{n_{p+1}}\right)\right|}{\left|G(P_{n_1}, \cdots, P_{n_p})\right|}} = \frac{1}{\sqrt{2r+1}} \prod_{k=1}^{p} \frac{|r-n_k|}{r+n_k+1}$$

4.3. Application au calcul d'un minimum

4.3.1. Remarquons que l'application $(a_1, \cdots, a_n) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ vers $F = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \cdots, X^n\right)$ et pour le produit scalaire défini dans le début de cette partie, on a :

$$\forall (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \psi(a_1, \cdots, a_n) = \left\| 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \right\|^2$$

On sait que $\mathrm{d}\left(1, F\right)$ est atteinte en un unique point qui est le projeté orthogonal de 1 sur F,

$$\begin{aligned} \left\|1 - P_F(1)\right\|^2 = \mathrm{d}\left(1, F\right)^2 &= \inf \left\{ \left\| 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k X^k \right\|^2 \ ,\ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \\ &= \inf \left\{ \psi(x_1, \cdots, x_n)\ ,\ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \end{aligned}$$

D'où l'existence d'un unique $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\psi(a_1, \cdots, a_n) = \inf \left\{ \psi(x_1, \cdots, x_n)\ ,\ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

4.3.2. D'après la question **4.2.4**, on a :

$$\begin{aligned} \psi(a_1, \cdots, a_n) &= \mathrm{d}(1, F)^2 \\ &= \frac{\left|G\left(P_1, \cdots, P_n, P_0\right)\right|}{\left|G(P_1, \cdots, P_n)\right|} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$