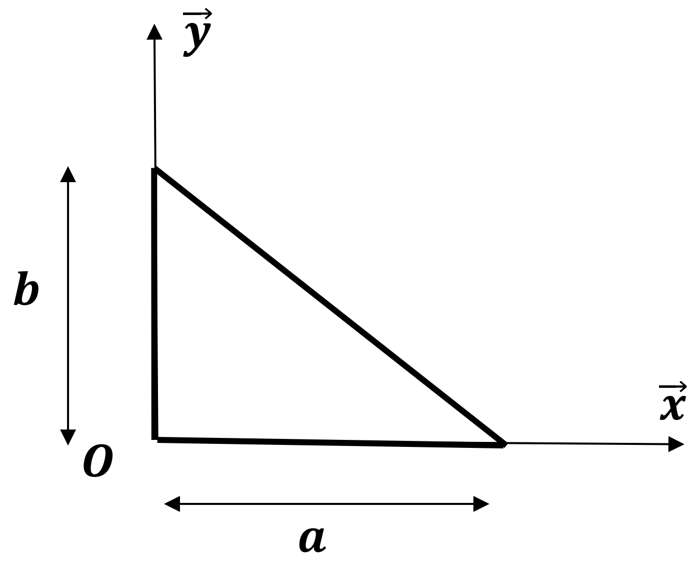
Exercice 1: Surface et centre d'un triangle



Question 1: Choisir le système de coordonnées adapté au problème et poser l'élément de surface associé

Coordonnées cartésiennes

$$dS = dxdy$$

Question 2: Donner les intervalles de variation de chaque paramètre pour décrire la surface étudiée

Deux solutions :

$$x \in [0, a] \;\&\; y \in \left[0, \frac{b}{a}(a - x)\right]$$
$$y \in [0, b] \;\&\; x \in \left[0, \frac{a}{b}(b - y)\right]$$

Question 3: Déterminer la surface du triangle par calcul intégral en fonction de a et b

$$S \int_S dS = \int_{x=0}^{a} \left(\int_{y=0}^{y(x)} dy \right) dx = \int_{y=0}^{b} \left(\int_{x=0}^{x(y)} dx \right) dy$$
$$y(x) = b - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}(a - x)$$
$$S = \int_{x=0}^{a} \left(\int_{y=0}^{\frac{b}{a}(a-x)} dy \right) dx = \int_{x=0}^{a} \left(\frac{b}{a}(a - x) \right) dx = \frac{b}{a}\left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{b}{a}\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{b}{a}\frac{a^2}{2}$$
$$S = \frac{ab}{2}$$

Question 4: Déterminer les coordonnées X_G et Y_G du centre géométrique du triangle en fonction de a et b

$$S = \frac{ab}{2}$$

$$X_G = \frac{1}{S}\int_S x dS = \frac{1}{S}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\frac{b}{a}(a-x)} x dy dx = \frac{1}{S}\int_{x=0}^{a} x\left(\frac{b}{a}(a-x)\right)dx = \frac{b}{aS}\int_{x=0}^{a}(ax-x^2)dx$$

$$X_G = \frac{b}{aS}\left[a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{b}{aS}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right) = \frac{ba^3}{aS}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{2ba^2}{ab6} = \frac{1}{3}a$$

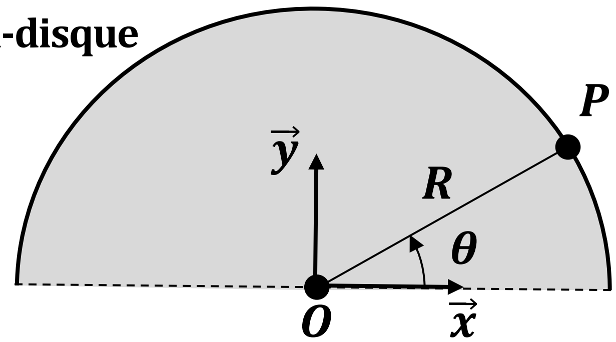
$$Y_G = \frac{1}{S}\int_S y dS = \frac{1}{S}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\frac{b}{a}(a-x)} y dy dx = \frac{1}{S}\int_{x=0}^{a}\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}(a-x)\right)^2 dx = \frac{b^2}{2a^2S}\int_{x=0}^{a}(a-x)^2 dx$$

$$Y_G = \frac{b^2}{2a^2S}\int_{x=0}^{X}(a^2-2xa+x^2)dx = \frac{b^2}{2a^2S}\left[a^2x-x^2a+\frac{x^3}{3}\right]_0^X = \frac{2b^2}{2a^2ab}\frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}b$$

$$\begin{cases} X_G = \frac{1}{3}a \\ Y_G = \frac{1}{3}b \end{cases}$$

Rq : pour cette seconde intégrale, il est plus simple d'inverser les bornes en intégrant y de 0 à b et x de 0 à $x(y)$

Exercice 2: Surface et centre d'un demi-disque



Question 1: Choisir le système de coordonnées adapté au problème et poser l'élément de surface associé

Coordonnées cylindriques : $dS = rdrd\theta$

Question 2: Donner les intervalles de variation de chaque paramètre pour décrire la surface étudiée

$$r \in [0, R] \quad ; \quad \theta \in [0, \pi]$$

Question 3: Déterminer la surface du demi-disque par calcul intégral en fonction de R

$$S = \int_S dS = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} rdrd\theta = \int_{r=0}^{R} rdr \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^\pi = \frac{\pi R^2}{2}$$

Question 4: Déterminer les coordonnées X_G et Y_G du centre géométrique du demi-disque en fonction de R

Compte tenu de l'axe de symétrie $(O, \vec{y})$, $X_G = 0$

$$y = r \sin\theta$$

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_S ydS = \frac{1}{S}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta\, rdrd\theta = \frac{1}{S}\int_{r=0}^{R} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{S}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi$$

$$Y_G = \frac{1}{S}\frac{2R^3}{3} = \frac{2}{\pi R^2}\frac{2R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

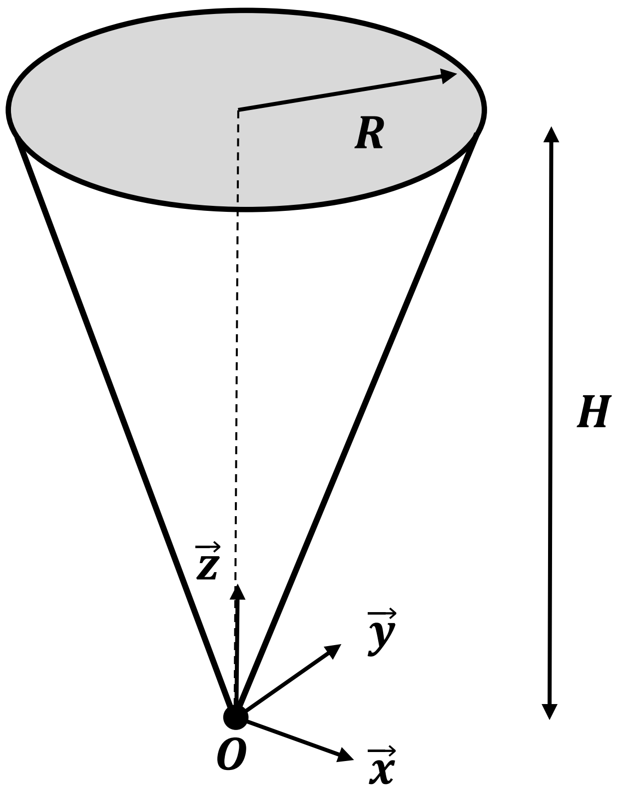
$$\begin{cases} X_G = 0 \\ Y_G = \dfrac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

Remarque : Calcul cartésien pas trop dur ici grâce au carré qui apparaît…

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_S ydS = \frac{1}{S}\int_{x=-R}^{R}\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} ydxdy = \frac{1}{S}\int_{x=-R}^{R}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{1}{2S}\int_{x=-R}^{R}(R^2-x^2)dx$$

$$Y_G = \frac{1}{2S}\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{1}{2S}\left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right] = \frac{1}{S}\left[R^3 - \frac{R^3}{3}\right] = \frac{1}{S}\frac{2R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

Exercice 3: Volume et centre d'un cône



Question 1: Choisir le système de coordonnées adapté au problème et poser l'élément de volume associé

Coordonnées cylindriques

$$dS = rdrd\theta dz$$

Question 2: Donner les intervalles de variation de chaque paramètre pour décrire le volume étudié

$$z \in [0, H]$$
$$r \in \left[0, z\frac{R}{H}\right]$$
$$\theta \in [0, \pi]$$

Question 3: Déterminer le volume du cône par calcul intégral en fonction de R et H

$$V = \int_V dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\left(\int_{r=0}^{z\frac{R}{H}} rdr\right)dzd\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^{H}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{z\frac{R}{H}} dz = 2\pi\int_{z=0}^{H} z^2\frac{R^2}{2H^2}dz$$
$$V = \pi\frac{R^2}{H^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^H = \pi\frac{R^2}{H^2}\frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Question 4: Déterminer les coordonnées X_G, Y_G et Z_G du centre géométrique du cône en fonction de R et H

Compte tenu de l'axe de révolution, $X_G = Y_G = 0$

$$Z_G = \frac{1}{V}\int_V z dV = \frac{1}{V}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\left(\int_{r=0}^{z\frac{R}{H}} r dr\right) z dz d\theta = \frac{1}{V}\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^{H}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{z\frac{R}{H}} z dz$$

$$Z_G = \frac{1}{V}\frac{\pi R^2}{H^2}\int_{z=0}^{H} z^3 dz = \frac{1}{V}\frac{\pi R^2}{H^2}\frac{H^4}{4}$$

$$Z_G = \frac{3}{\pi R^2 H}\frac{\pi R^2}{H^2}\frac{H^4}{4} = \frac{3}{4}H$$

$$\begin{cases} X_G = 0 \\ Y_G = 0 \\ Z_G = \dfrac{3}{4}H \end{cases}$$