Exercice 1: Loi E/S – Fermeture de chaîne

Etude géométrique

Question 1: Etablir les 3 équations géométriques du problème dans la base 0

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$L_1 \overrightarrow{x_1} + L_2 \overrightarrow{x_2} - \lambda_{3/0} \overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$L_1 \cos\theta_{1/0}\, \overrightarrow{x_0} + L_1 \sin\theta_{1/0}\, \overrightarrow{y_0} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10})\, \overrightarrow{x_0} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})\, \overrightarrow{y_0} - \lambda_{3/0} \overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} L_1 \cos\theta_{10} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) = 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - \lambda_{30} = 0 \end{cases}$$

Ajoutons l'équation de fermeture angulaire :

$$(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_0}}) = 0$$

$$\theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \frac{\pi}{2} = 0$$

Soient 3 équations :

$$\begin{cases} L_1 \cos\theta_{10} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) = 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - \lambda_{30} = 0 \\ \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

Question 2: Etablir la relation entrée/sortie en position $\lambda_{30} = f(\theta_{10})$ – On justifiera le besoin d'avoir $L_2 \geq L_1$ ainsi que la présence de deux solutions avant de choisir la bonne

Méthode de somme des carrés :

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) = -\dfrac{L_1}{L_2} \cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) = \dfrac{\lambda_{30}}{L_2} - \dfrac{L_1}{L_2} \sin\theta_{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2(\theta_{21} + \theta_{10}) = \left[\dfrac{L_1}{L_2}\right]^2 \cos^2\theta_{10} \\ \sin^2(\theta_{21} + \theta_{10}) = \left[\dfrac{\lambda_{30}}{L_2} - \dfrac{L_1}{L_2} \sin\theta_{10}\right]^2 \end{cases}$$

$$\cos^2(\theta_{21} + \theta_{10}) + \sin^2(\theta_{21} + \theta_{10}) = 1$$

$$\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^2 \cos^2\theta_{10} + \left[\frac{\lambda_{30}}{L_2} - \frac{L_1}{L_2} \sin\theta_{10}\right]^2 = 1$$

Ne pas développer :

$${L_1}^2 \cos^2\theta_{10} + [\lambda_{30} - L_1 \sin\theta_{10}]^2 = {L_2}^2$$

$${L_2}^2 - {L_1}^2 \cos^2\theta_{10} = [\lambda_{30} - L_1 \sin\theta_{10}]^2$$

Pour passer à la racine, il faut :

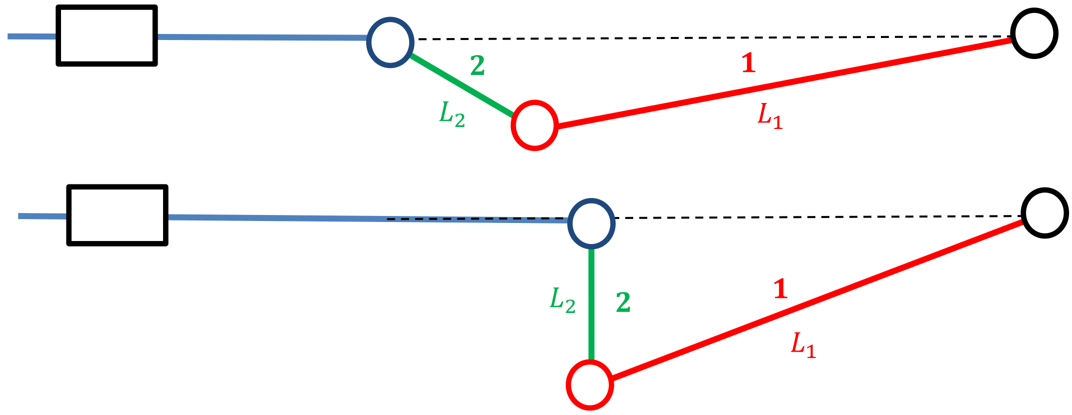
$$L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2\theta_{10} \geq 0$$

Soit :

$$L_2{}^2 \geq L_1{}^2 \cos^2\theta_{10}$$

Pour que $L_2{}^2 \geq L_1{}^2 \cos^2\theta_{10}$ quelque soit θ_{10}, il faut : $L_2 \geq L_1$

Si $L_2 < L_1$:



On ne peut pas faire de tours de la pièce 1.
Donc, si $L_2 \geq L_1$:

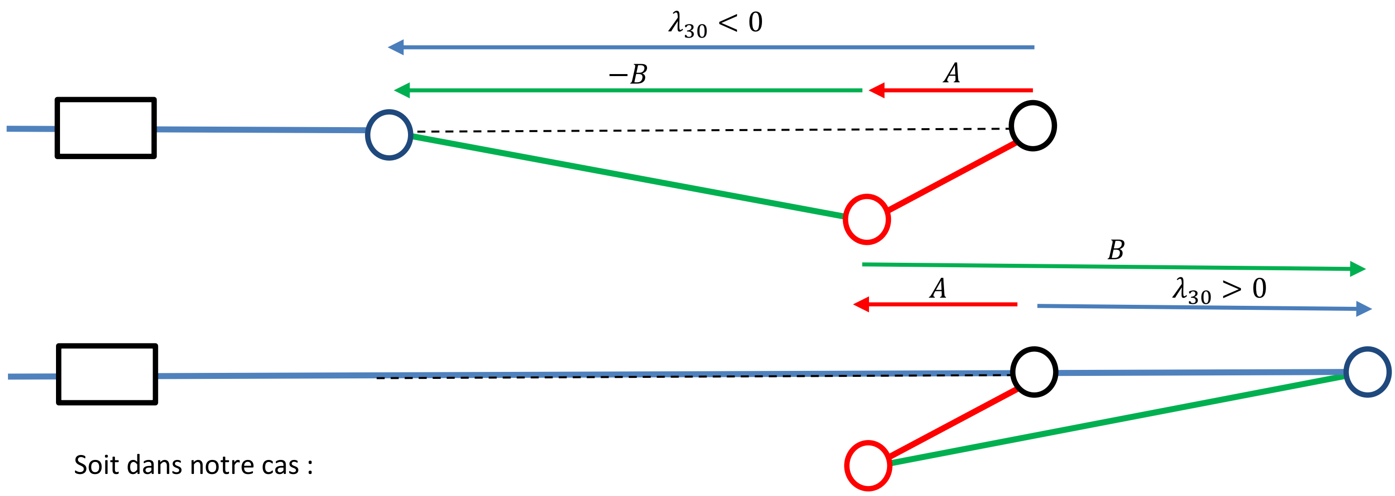
$$L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2\theta_{10} = [\lambda_{30} - L_1 \sin\theta_{10}]^2$$

$$\lambda_{30} - L_1 \sin\theta_{10} = \pm\sqrt{L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2\theta_{10}}$$

$$\lambda_{30} = L_1 \sin\theta_{10} \pm \sqrt{L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2\theta_{10}}$$

Il existe deux solutions à ce problème, dépendant de la façon dans laquelle a été monté le système.

$$\lambda_{30} = -A \pm \mathrm{B} \quad ; \quad (A, B) > 0$$



Soit dans notre cas :

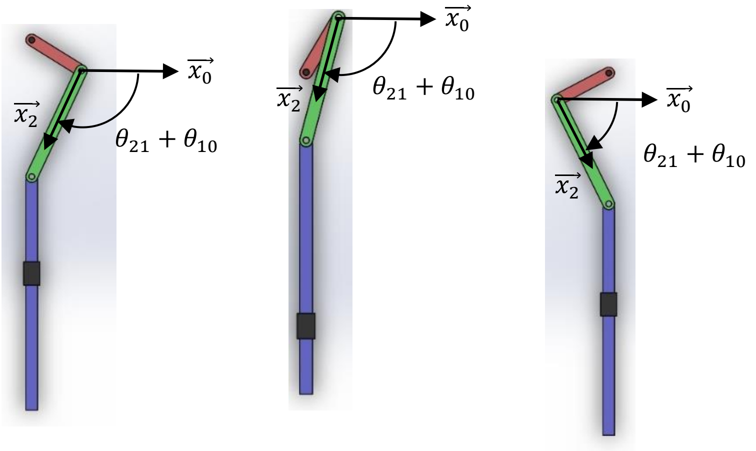
$$\boxed{\lambda_{30} = L_1 \sin\theta_{10} - \sqrt{L_2{}^2 - L_1{}^2 \cos^2\theta_{10}}}$$

Question 3: En déduire les expressions des autres paramètres géométriques θ_{32} et θ_{21} en fonction du seul paramètre géométrique θ_{10} et des constantes – On souhaite une formule valable tout le temps

On part des 3 équations géométriques :

$$\begin{cases} L_1\cos\theta_{10} + L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = 0 \\ L_1\sin\theta_{10} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - \lambda_{30} = 0 \\ \theta_{10}+\theta_{21}+\theta_{32}+\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

On peut au choix utiliser un arccos, arcsin, ou arctan pour exprimer $\theta_{21}+\theta_{10}$. Compte tenu du mécanismes étudié, $\theta_{21}+\theta_{10}$ étant l'angle $(\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}})$, cet angle évolue dans l'intervalle $[-\pi, 0]$. On choisit dont l'arccos :



$$\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \Leftrightarrow \theta_{21}+\theta_{10} = -\cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right)$$

$$\boxed{\theta_{21} = -\theta_{10} - \cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right)}$$

On peut aussi montrer que son sinus est toujours négatif :

$$L_1\sin\theta_{10} + L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - \lambda_{30} = 0$$

$$L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10} = L_1\sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}} - L_1\sin\theta_{10}$$

$$\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\frac{1}{L_2}\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}$$

On utilise donc $-\cos^{-1}(\dots)$ pour le trouver.
Rien de plus simple ensuite :

$$\theta_{10}+\theta_{21}+\theta_{32}+\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\theta_{32} = -\frac{\pi}{2} - \theta_{10} - \theta_{21} = -\frac{\pi}{2} - \theta_{10} + \theta_{10} + \cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right)$$

$$\boxed{\theta_{32} = \cos^{-1}\left(-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}\right) - \frac{\pi}{2}}$$

Question 4: Exprimer $\tan(\boldsymbol{\theta_{21}}+\boldsymbol{\theta_{10}})$ en fonction du seul paramètre géométrique $\boldsymbol{\theta_{10}}$ et des constantes (utile dans la suite)

$$\begin{cases} \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) = -\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10} \\ \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) = \frac{\lambda_{3/0}}{L_2} - \frac{L_1}{L_2}\sin\theta_{10} = \frac{\lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10}}{L_2} \end{cases}$$

$$\tan(\theta_{21}+\theta_{10}) = \frac{\sin(\theta_{21}+\theta_{10})}{\cos(\theta_{21}+\theta_{10})} = \frac{\frac{\lambda_{30} - L_1\sin\theta_{10}}{L_2}}{-\frac{L_1}{L_2}\cos\theta_{10}} = \frac{L_1\sin\theta_{10} - \lambda_{30}}{L_1\cos\theta_{10}}$$

$$= \frac{L_1\sin\theta_{10} - \left(L_1\sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}\right)}{L_1\cos\theta_{10}} = \frac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_1\cos\theta_{10}}$$

$$\boxed{\tan(\theta_{21}+\theta_{10}) = \frac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_1\cos\theta_{10}}}$$

Question 5: Exprimer la relation $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{30} = \boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_{10})$, faisant intervenir les paramètres géométriques – On fera apparaître $\tan(\boldsymbol{\theta_{21}}+\boldsymbol{\theta_{10}})$ dans l'expression

$$\lambda_{30} = L_1\sin\theta_{10} - \sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10}L_1\cos\theta_{10} - \frac{-2\dot{\theta}_{10}{L_1}^2(-\sin\theta_{10})\cos\theta_{10}}{2\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10}L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{L_1\sin\theta_{10}\cos\theta_{10}}{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}\right]$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10}L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

Etude cinématique

Question 6: Proposer les 4 torseurs cinématiques des liaisons du mécanismes

$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$

Remarque :

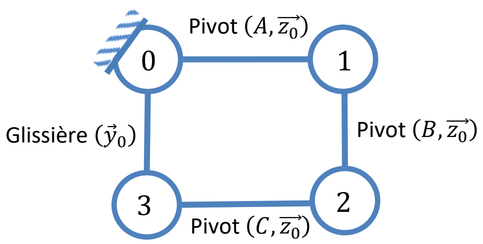
$$\vec{V}(C,3/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AC}}{dt}\right|_0 = \dot{\lambda}_{30}\overrightarrow{y_0}$$

VRAI	FAUX
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_{30} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$ $\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\dot{\lambda}_{30} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_3}$	$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \dot{\lambda}_{30} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_3}$

Voilà un bon exemple de la raison pour laquelle il faut garder les notations UVW (pour les rotations en plan, tout étant orienté sur un même $\vec{z}$, PQR et $\dot{\theta}$ sont les mêmes certes…)

$$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} \quad ou\ \{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{03} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_3}$$

Question 7: Etablir le graphe des liaisons du mécanisme



Question 8: Etablir les 2 équations vectorielles de la fermeture cinématique du système en B

$$\{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{03}\} + \{\mathcal{V}_{32}\} = 0$$

$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_0} \\ -L_2R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B$	$\vec{V}(B,3/2) = \vec{V}(C,3/2) + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{32}}$ $= L_2\overrightarrow{x_2} \wedge R_{32}\overrightarrow{z_2} = -L_2R_{32}\overrightarrow{y_2}$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} R_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$	
$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ L_1R_{10}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_B$	$\vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}}$ $= -L_1\overrightarrow{x_1} \wedge R_{10}\overrightarrow{z_1} = L_1R_{10}\overrightarrow{y_1}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}_B$	

$$\begin{Bmatrix} (R_{32} + R_{21} + R_{10})\overrightarrow{z_0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} + L_1R_{10}\overrightarrow{y_1} - L_2R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Question 9: Etablir les 3 équations de la fermeture cinématique du système dans $\mathfrak{B}_0$

$$\boxed{\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \ (1) \\ -L_1 \sin\theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (2) \\ V_{03} + L_1 \cos\theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (3) \end{cases}}$$

Question 10: Déterminer les 3 inconnues R_{32}, R_{21} et V_{30} en fonction de l'unique inconnue cinématique R_{10} et des paramètres géométriques

R_{32} Equation (2)	$R_{32} = \dfrac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})} \boldsymbol{R_{10}}$
R_{21} Equation (1)	$R_{21} = -R_{32} - \boldsymbol{R_{10}}$ $R_{21} = -\dfrac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})} \boldsymbol{R_{10}} - \boldsymbol{R_{10}} = -\left[1 + \dfrac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})}\right] \boldsymbol{R_{10}}$ $R_{21} = -\boldsymbol{R_{10}} \dfrac{L_1 \sin\theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})}{L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})}$
V_{30} Equation (3)	$V_{03} = -L_1 \cos\theta_{10} \boldsymbol{R_{10}} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32}$ $V_{03} = -L_1 \cos\theta_{10} \boldsymbol{R_{10}} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) \dfrac{L_1 \sin\theta_{10}}{L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})} \boldsymbol{R_{10}}$ $V_{03} = L_1\boldsymbol{R_{10}} \left[\cos(\theta_{21} + \theta_{10}) \dfrac{\sin\theta_{10}}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})} - \cos\theta_{10}\right]$ $V_{30} = L_1\boldsymbol{R_{10}} \left[\cos\theta_{10} - \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) \dfrac{\sin\theta_{10}}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})}\right]$ $V_{30} = L_1\boldsymbol{R_{10}} \left[\cos\theta_{10} - \dfrac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})}\right]$

Question 11: Exprimer V_{30} en fonction de l'unique inconnue cinématique R_{10}, de l'unique paramètre géométrique variable θ_{10} et des constantes

$$\tan(\theta_{21}+\theta_{10}) = \frac{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}{L_1\cos\theta_{10}}$$

$$V_{30} = L_1 \boldsymbol{R_{10}}\left[\cos\theta_{10} - \frac{L_1\cos\theta_{10}\sin\theta_{10}}{\sqrt{{L_2}^2 - {L_1}^2\cos^2\theta_{10}}}\right]$$

Question 12: Comparer la relation entrée/sortie obtenue par fermeture cinématique avec la relation issue de la fermeture géométrique dérivée

$$\{\mathcal{V}_{30}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{30}\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}_B \quad ; \quad \overrightarrow{AC} = \lambda_{30}\overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{V}(C,3/0) = \begin{cases} \left.\dfrac{d\overrightarrow{AC}}{dt}\right|_0 = \dot{\lambda}_{30}\overrightarrow{y_0} \\ V_{30}\overrightarrow{y_0} \end{cases} \Rightarrow \dot{\lambda}_{30} = V_{30}$$

Du fait des conventions choisies : $\Omega_{10} = \dot{\theta}_{10} \quad ; \quad V_{30} = \dot{\lambda}_{30}$

Ca n'est pas vrai si par exemple : $\overrightarrow{AC} = -\lambda_{30}\overrightarrow{y_0} = \lambda_{30}\overrightarrow{x_3}$ et/ou $\{\mathcal{V}_{30}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ U_{30}\overrightarrow{x_3} \end{Bmatrix}_B$

Donc :

$$V_{30} = L_1\Omega_{10}\left[\cos\theta_{1/0} - \frac{\sin\theta_{1/0}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

$$\dot{\lambda}_{30} = \dot{\theta}_{10}L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

Nous obtenons le même résultat qu'avec la fermeture géométrique 😊

Remarque : Ceux qui ont posé $\{\mathcal{V}_{30}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ U_{30}\overrightarrow{x_3} \end{Bmatrix}_B$ devraient avoir trouvé $V_{30} = -L_1\Omega_{10}\left[\cos\theta_{1/0} - \frac{\sin\theta_{1/0}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$, mais il montreront facilement que $\vec{V}(C,3/0) = -U_{30}\overrightarrow{y_0}$ et donc que $U_{30} = -\dot{\lambda}_{30}$

Question 13: Mettre le système sous forme matricielle, discuter de sa solvabilité et proposer une démarche de résolution matricielle

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \ (1) \\ -L_1 \sin\theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (2) \\ V_{03} + L_1 \cos\theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (3) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{K_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -L_1 \sin\theta_{10} & 0 & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 \\ L_1 \cos\theta_{10} & 0 & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -L_1 \sin\theta_{10} & 0 & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 \\ L_1 \cos\theta_{10} & 0 & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{21} \\ R_{32} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarque :

- $I_c = 8$ nombre d'inconnues cinématiques
- $E_c = 3\gamma$ nombre d'équations cinématiques, en plan 3 par chaine indépendantes fermées
- r_c rang de la matrice K_c
- Une équation qui « ne sert pas » à la détermination d'inconnues cinématiques traduit un degré d'hyperstatisme : $h = E_c - r_c$. Aucun mouvement n'est jamais permis dans la direction concernée
- S'il y a trop d'inconnues cinématiques, il faut fixer celles qui sont en trop, ce sont des mobilités : $m = I_c - r_c$

Pour résoudre, il faut modifier le système linéaire selon l'entrée choisie :

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} = -R_{10} \\ L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = L_1 \sin\theta_{10} R_{10} \\ V_{03} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = -L_1 \cos\theta_{10} R_{10} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 \\ 0 & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{21} \\ R_{32} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{10} \\ L_1 \sin\theta_{10} R_{10} \\ -L_1 \cos\theta_{10} R_{10} \end{bmatrix}$$

Etude statique complète

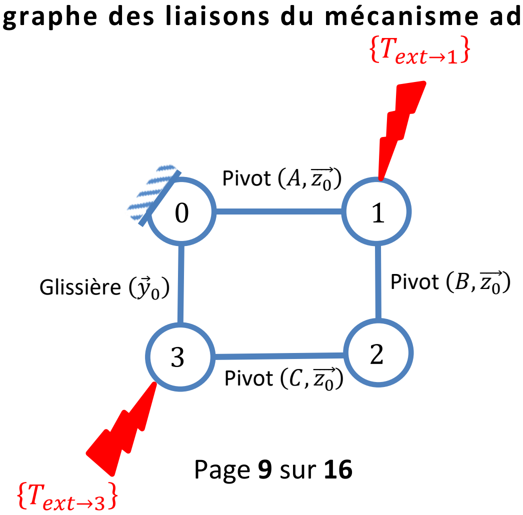
Question 14: Proposer les 4 torseurs des actions mécaniques des liaisons du mécanismes, et réalisez les choix de points et bases qui seront utiles pour la suite

Liaison	Torseur statique
L_{10} Pivot $(A,\overrightarrow{z_0})$	$\{\mathcal{T}_{1\to 0}\} = \begin{Bmatrix} X_{10} & 0 \\ Y_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$
L_{21} Pivot $(B,\overrightarrow{z_0})$	$\{\mathcal{T}_{2\to 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$
L_{32} Pivot $(C,\overrightarrow{z_0})$	$\{\mathcal{T}_{3\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$
L_{03} Glissière $(\overrightarrow{y_0})$	$\{\mathcal{T}_{0\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$

Concernant le choix de la base : La base 0 est choisie car dans les 3 isolements à réaliser, l'isolement de la pièce 3 conduit à avoir un torseur uniquement valable dans la base 0 (ou 3), les pivots elles pouvant être définies dans n'importe quelle base contenant l'axe z (mais attention, les composantes se projettent d'une base à l'autre). Choisir $\mathfrak{B}_0$ pour la pièce 3 (la glissière $\{\mathcal{T}_{0\to 3}\}$ est définie dans $\mathfrak{B}_0$) conduira logiquement à définir le torseur $\{\mathcal{T}_{2\to 3}\}$ dans $\mathfrak{B}_0$ puisque, donc ensuite pour l'isolement de 2, le torseur $\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}$ dans $\mathfrak{B}_0$, puis enfin dans l'isolement de 1, le torseur $\{\mathcal{T}_{0\to 1}\}$ dans $\mathfrak{B}_0$ aussi.
Concernant le choix des points : Pour chaque pivot, en plan, le seul point sur l'axe est possible sous forme canonique. Pour la glissière, tout point du plan est possible (forme canonique), mais attention, le torseur n'est pas le même en tout point. Il faut donc faire le bon choix pour simplifier le travail dans la suite. Quand on isolera 3, la liaison pivot étant définie en C, il sera pratique que la glissière soit définie en C aussi. Enfin attention, si alors quand on a la valeur numérique de N_{03}, on veut le moment dans la glissière en D, il faudra déplacer le moment de C à D.

$$\{\mathcal{T}_{0\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0} \neq \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} \quad !!!$$

Question 15: Etablir le graphe des liaisons du mécanisme adapté à l'étude statique



Question 16: Déterminer les 3 équations issues de l'isolement de la pièce 1 en B dans $\mathfrak{B}_0$

$$\{\mathcal{T}_{01}\} + \{\mathcal{T}_{21}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to 1}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \{0\}$$

$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$	$\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_{01}}) = \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{R_{01}}) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{01}}$ $= \begin{bmatrix} -L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} -L_1 \cos\theta_{10} \\ -L_1 \sin\theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$	$\begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ (-L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B$
$\begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{21}\overrightarrow{x_0} + Y_{21}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B$

$$\begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ (-L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} X_{21}\overrightarrow{x_0} + Y_{21}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} (X_{01} + X_{21})\overrightarrow{x_0} + (Y_{01} + Y_{21})\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ (-L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01} + C)\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} = 0 \\ -L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01} + C = 0 \end{cases}}$$

Question 17: Déterminer les 3 équations issues de l'isolement de la pièce 2 en B dans $\mathfrak{B}_0$

$$\{\mathcal{T}_{12}\} + \{\mathcal{T}_{32}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}}$$

$\begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$	$\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_{32}}) = \overrightarrow{M_C}(\overrightarrow{R_{32}}) + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_{32}}$ $= \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2} \wedge \begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) \\ L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= (L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21} + \theta_{10})\,X_{32})\overrightarrow{z_0}$	$\begin{Bmatrix} X_{32}\overrightarrow{x_0} + Y_{32}\overrightarrow{y_0} \\ (L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B$
$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{12}\overrightarrow{x_0} + Y_{12}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

$$\begin{Bmatrix} X_{32}\overrightarrow{x_0} + Y_{32}\overrightarrow{y_0} \\ (L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32})\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} X_{12}\overrightarrow{x_0} + Y_{12}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} (X_{32} + X_{12})\overrightarrow{x_0} + (Y_{32} + Y_{12})\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ (L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32})\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X_{32} + X_{12} = 0 \\ Y_{32} + Y_{12} = 0 \\ L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32} - L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32} = 0 \end{cases}}$$

Question 18: Déterminer les 3 équations issues de l'isolement de la pièce 3 en C dans $\mathfrak{B}_0$

$$\{\mathcal{T}_{ext\to 3}\} + \{\mathcal{T}_{23}\} + \{\mathcal{T}_{03}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{03} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}}$$

$$\begin{cases} (X_{23} + X_{03})\overrightarrow{x_0} + (F + Y_{23})\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ N_{03}\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X_{23} + X_{03} = 0 \\ F + Y_{23} = 0 \\ N_{03} = 0 \end{cases}}$$

Question 19: En déduire le système de 9 équations du problème statique

$$\boxed{\begin{cases} X_{01} + X_{21} = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} = 0 \\ -L_1 \cos\theta_{10} Y_{01} + L_1 \sin\theta_{10} X_{01} + \boldsymbol{C} = 0 \\ X_{32} + X_{12} = 0 \\ Y_{32} + Y_{12} = 0 \\ L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) Y_{32} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) X_{32} = 0 \\ X_{23} + X_{03} = 0 \\ \boldsymbol{F} + Y_{23} = 0 \\ N_{03} = 0 \end{cases}}$$

Question 20: Mener la résolution de ce système pour trouver les 8 inconnues de liaison et la relation entre F et C

Un conseil pour cette résolution :

- F et C ne sont pas considérés comme des inconnues
- Entourer une inconnue dans l'équation qui a permis de la déterminer
- La souligner dans toutes les autres équations pour dire « Elle est maintenant connue »
- A la fin, il restera une équation dans laquelle tout est connu traduisant la mobilité du mécanisme (pour que ça soit statique, si F change, C change…)

$$\left\{\begin{array}{c} X_{01}+X_{21}=0 \\ Y_{01}+Y_{21}=0 \\ -L_1\cos\theta_{10}\,Y_{01}+L_1\sin\theta_{10}\,X_{01}+\boldsymbol{C}=0 \\ X_{32}+X_{12}=0 \\ Y_{32}+Y_{12}=0 \\ L_2\cos(\theta_{21}+\theta_{10})\,Y_{32}-L_2\sin(\theta_{21}+\theta_{10})\,X_{32}=0 \\ X_{23}+X_{03}=0 \\ \boldsymbol{F}+Y_{23}=0 \\ N_{03}=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} X_{01}=-\dfrac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} \\ Y_{01}=-\boldsymbol{F} \\ L_1\cos\theta_{10}\,\boldsymbol{F}-L_1\sin\theta_{10}\dfrac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{C}=0 \\ X_{12}=-\dfrac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} \\ Y_{12}=-F \\ X_{32}=\dfrac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} \\ X_{03}=\dfrac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F} \\ Y_{23}=-\boldsymbol{F} \\ N_{03}=0 \end{array}\right.$$

Il reste l'équation suivante, dans laquelle tout est connu :

$$L_1\cos\theta_{10}\,\boldsymbol{F}-L_1\sin\theta_{10}\frac{1}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{C}=0$$

$$\boxed{C=-L_1\left[\cos\theta_{10}-\frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]F}$$

Cette équation traduit une mobilité. Comme il y a un mouvement possible, on met bien en relation l'effort qui peut induire un mouvement avec le couple transmis à travers cette mobilité.

Question 21: Mettre le système sous forme matricielle, discuter de sa solvabilité et proposer une démarche de résolution numérique

Mise sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} & -L_1 \cos\theta_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) & L_2 \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ X_{32} \\ Y_{32} \\ X_{03} \\ N_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{C} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{F} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarque :

- $I_s = 8$ nombre d'inconnues statiques
- $E_s = 3 * (p-1)$ nombre d'équations statiques, en plan 3 par solide sans le bâti
- r_s rang de la matrice K_s
- Une équation qui « ne sert pas » à la détermination d'actions de liaisons (diminution de r_s) et met en relation les actions extérieures traduit une mobilité. Ainsi, $m = E_s - r_s$
- S'il y a trop d'inconnues statiques, on définit $h = I_s - r_s$ l'hyperstatisme

La matrice n'est pas inversible, il y a 8 colonnes pour 9 lignes.
Il faut se rendre compte qu'aucune action de liaison ne peut être déterminé sans la connaissance d'un effort extérieur. Il faut donc supposer F ou C connu, l'autre inconnu, pour se ramener à un système de 9 inconnues (9 colonnes) inversible. Supposons que l'on connaisse F, alors la méthode est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} & -L_1 \cos\theta_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_2 \sin(\theta_{21}+\theta_{10}) & L_2 \cos(\theta_{21}+\theta_{10}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ X_{21} \\ Y_{21} \\ X_{32} \\ Y_{32} \\ X_{03} \\ N_{03} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\boldsymbol{F} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il reste plus qu'à inverser ce système.

Etude statique par stratégie d'isolements

Question 22: Justifier le fait que $\overrightarrow{R_{21}} = R_{21}\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{R_{32}} = R_{32}\overrightarrow{x_2}$

Solide 2 soumis à 2 glisseurs…

Question 23: Justifier le fait que $Y_{32} = F$ et déterminer l'expression de R_{32}

On isole 3 : TRS sur $\overrightarrow{y_0}$: $F + Y_{23} = 0$

$$Y_{32} = R_{32}\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{y_0} = R_{32}\cos\left(\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_0}}\right) = R_{32}\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta_{21} + \theta_{10})\right) = R_{32}\sin(\theta_{21} + \theta_{10})$$

$$R_{32} = \frac{Y_{32}}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})} = \frac{F}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})}$$

Question 24: En déduire la relation entre F et C

On isole 1 : TMS en A sur $\overrightarrow{z_0}$: $C + \overrightarrow{M_A\left(\overrightarrow{R_{21}}\right)}.\overrightarrow{z_0} = 0$

$$\overrightarrow{M_A\left(\overrightarrow{R_{21}}\right)} = \overrightarrow{M_A(R_{21}\overrightarrow{x_2})} = \overrightarrow{AB} \wedge R_{21}\overrightarrow{x_2} = L_1\overrightarrow{x_1} \wedge R_{32}\overrightarrow{x_2} = L_1 R_{32}\sin\theta_{21}\,\overrightarrow{z_0}$$

$$C + L_1\frac{\sin\theta_{21}}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})}F = 0$$

MAIS en fait, pour pouvoir comparer à notre solution précédente, il faut faire autrement !

<table>
<tr><td>Soit continuer avec $\theta_{21} = (\theta_{21} + \theta_{10}) + \theta_{01}$ puis :
$$\sin\theta_{21} = \sin\left((\theta_{21} + \theta_{10}) + \theta_{01}\right) = \cos\theta_{10}\sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - \sin\theta_{10}\cos(\theta_{21} + \theta_{10})$$</td></tr>
<tr><td>Soit tout projeter dans 0 :
$$\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix}\cos\theta_{10}\\ \sin\theta_{10}\\ 0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix}\cos(\theta_{21} + \theta_{10})\\ \sin(\theta_{21} + \theta_{10})\\ 0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} = \cos\theta_{10}\sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - \sin\theta_{10}\cos(\theta_{21} + \theta_{10})$$</td></tr>
</table>

$$C + L_1\frac{\cos\theta_{10}\sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - \sin\theta_{10}\cos(\theta_{21} + \theta_{10})}{\sin(\theta_{21} + \theta_{10})}F = 0$$

D'où :

$$C + L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})}\right]F = 0$$

$$\frac{C}{F} = -L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21} + \theta_{10})}\right]$$

Etude dynamique (5/2)

Question 25: Retrouver la relation statique entrée/sortie à l'aide du TEC et de la relation cinématique entrée/sortie

$$\{\mathcal{T}_{ext\to 1}\}\{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to 3}\}\{\mathcal{V}_{30}\} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{30} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0} = 0$$

$$CR_{1/0} + FV_{30} = 0$$

$$C = -F\frac{V_{30}}{R_{10}}$$

En utilisant la relation cinématique obtenu précédemment :

$$V_{30} = L_1 R_{10}\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]$$

$$C = -F\frac{L_1 R_{10}\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]}{R_{1/0}}$$

$$C = -L_1\left[\cos\theta_{10} - \frac{\sin\theta_{10}}{\tan(\theta_{21}+\theta_{10})}\right]F$$