Math Prépas

Résumé de Cours MP

B. Seddoug

Professeur agrégé de mathématiques
aux CPGE d'Oujda

Première édition
2010-2011

Table des matières

Algèbre linéaire – Dualité 1

1. Matrices et applications linéaires

Matrice en tant qu'application linéaire

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application

$$\mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n;\ X \longmapsto MX$$

est linéaire. On définit alors comme pour les applications linéaires $\ker M$ et $\operatorname{Im} M$:

(1) $X \in \ker M \Longleftrightarrow X \in \mathbb{K}^p$ et $MX = 0$.

(2) $Y \in \operatorname{Im}(M) \Longleftrightarrow Y \in \mathbb{K}^n$ et $\exists X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = MX$. En particulier $\operatorname{rang}(M) = \dim \operatorname{Im}(M)$.

1.1. Matrice d'une application linéaire.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1\leq i\leq p}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de F et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

dont la j-ème colonne est formée par les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, c.à.d :

$$\forall j \in [\![1,p]\!] : u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i\ .$$

Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, c'est alors une matrice carrée.

Remarque 1.1. (1) Avec ces notations, si $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \in E$, et $y = u(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i \in F$, alors

$$Y = MX$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

représentent les matrices colonnes formées par les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et y dans $\mathcal{B}'$.

(2) L'application $u \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

(3) En plus si G est un autre $\mathbb{K}-ev$ et $\mathcal{B}''$ une base de G, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v).\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$$

pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. En particulier l'application

$$u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est un isomorphisme d'algèbre.

(4) Ce qui permet de déduire que, $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme et dans ce cas

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u^{-1}).$$

1.2. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (V_1, ..., V_p)$ une famille de p vecteurs de E, la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$telle que

$$\forall j \in [\![1,p]\!] : V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \ .$$

dont les colonnes sont formées par les coordonnées des éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.

Proposition 1.1. Avec les notations de la définition précédente on a :

$$\text{rang}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\right) = \text{rang}(\mathcal{C}).$$

En particulier $\mathcal{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.

1.3. Matrice de passage entre deux bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n. La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ est la la matrice carrée d'ordre n notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ définie par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2).$$

Remarque 1.2. On a aussi $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\mathrm{id}_E)$. Ce qui permet de déduire

Les formules de changement de bases

Si $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ désigne la matrice colonne formée par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et $X_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ celle formée par ses coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ alors on a la formule de changement de base

$$X_1 = PX_2 \quad .$$

et si F est un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, si on pose $M_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2}(u)$, $M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1}(u)$ et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}'_2}$, $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ on a la formule

$$M_2 = P^{-1} M_1 Q,$$

on dit alors que M_1 et M_2 sont équivalentes.

Proposition 1.2. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang .

Définition 1.1. En particulier si $E = F$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1'$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2'$ et $M_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)$, $M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$ alors

$$M_2 = P^{-1}M_1P,$$

on dit alors que M_1 et M_2 sont semblables.

1.4. Rang d'une application linéaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie, on pose $\operatorname{rang} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.

Théorème 1.1 (de factorisation). Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. tout supplémentaire de $\ker u$ est isomorphe $\operatorname{Im} u$. En particulier si $\dim E$ est finie, on a :

$$\dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im}(u) \qquad \text{(formule du rang)}$$

1.5. Déterminant (rappels)

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$ est par définition le scalaire :

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \text{ noté aussi } \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Développement selon ligne ou colonne

Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ alors

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \le j \le n$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne. De même

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \le i \le n.$$

- $\det(A_{i,j})$ s'appelle cofacteur d'indice (i,j), la matrice formée par ses cofacteurs s'appelle comatrice de A et se note $\operatorname{Com}(A)$. On montre que

$$A\,{}^t\!\operatorname{com}(A) = \det(A)I_n.$$

Remarque 1.3. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Propriétés

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(2) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas :
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$
et
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}(A)$$

(3) Si P est inversible alors $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soit $\mathcal{B}$ une base de E tel que $\dim E = n$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, d'une famille $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ de n vecteurs de E, le scalaire
$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$$

Proposition 1.3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\mathcal{B}'$ famille d'éléments de E tel que $\mathcal{C}\mathrm{ard}\mathcal{B}' = \dim E$, alors : $\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$, et dans ce cas on a :
$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$$

Déterminant d'un endomorphisme.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E, on pose alors
$$\det(u) = \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\right)$$
et on l'appelle le déterminant de u.

Proposition 1.4. Soit $u, v : E \longrightarrow E$ deux endomorphismes de E tel que $\dim E = n$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ famille d'éléments de E, on a les résultats suivants :

- $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.
- u est un automorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$, avec $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

2. Espace dual

2.1. Forme linéaire

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$.

Exemple de forme linéaire : Trace d'une matrice carrée.

On appelle trace de $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le nombre note $\mathrm{Tr}(A)$, défini par la relation suivante :
$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 2.1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriétés suivantes :
$$\mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda\,\mathrm{Tr}(B), \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \text{ et } \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A).$$

Représentation matricielle d'une famille finie de formes linéaires

Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E et φ une forme linéaire non nulle sur E, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E$:

$$\varphi(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p, \quad \text{où} \quad a_i = \varphi(e_i)$$

la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix}$ est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

En général si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ est une famille de formes linéaires, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

où $\begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est la matrice de φ_i, est appelée la matrice de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Liens avec les systèmes linéaires

L'ensemble de solutions du système linéaire

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,p}x_p & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n,1}x_1 & + \cdots + & a_{n,p}x_p & = 0 \end{cases}$$

n'est autre que l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)$.

Proposition 2.2. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\operatorname{rang}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \operatorname{rang}(\mathcal{S}) = \operatorname{rang}(M).$$

2.2. Bases duales

L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E, se note E^* et s'appelle le dual de E, c'est un $\mathbb{K}$-e.v de même dimension que E.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ base de E, donc

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p : x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i.$$

Les applications

$$\varphi_j : x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \longmapsto x_j$$

pour $j \in [\![1, p]\!]$ sont des formes linéaires, appelées formes linéaires coordonnées associées à la base $\mathcal{B}$.

Théorème 2.1 (base duale). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E, il existe une unique base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ de E^*, vérifiant :

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!] : \quad \varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} \qquad \text{(Symbole de Kronecker)}$$

On pose $\varphi_i = e_i^*$ et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_p^*)$ s'appelle la base duale de $\mathcal{B}$ dans E^*.

REMARQUE 2.1. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E, alors sa base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_p^*)$ dans E^*, est définie par la relation suivante :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{p} x_j e_j \in E : e_i^*(x) = x_i, \forall i \in [\![1, p]\!].$$

Ce qui permet d'écrire

$$x = \sum_{i=1}^{p} e_j^*(x) e_j \quad , \forall x \in E.$$

Autrement dit, e_i^* est la $i^{ème}$ forme linéaire coordonnée. Parfois on utilise le crochet de dualité $\langle \varphi, x \rangle$ aulieu de $\varphi(x)$ si $\varphi \in E^*$ et $x \in E$. Ainsi l'application

$$E^* \times E \longrightarrow \mathbb{K}; \quad (\varphi, x) \longmapsto \langle \varphi, x \rangle$$

est bilinéaire. On écrira alors

$$x = \sum_{j=1}^{p} \left\langle e_j^*, x \right\rangle e_j \quad , \forall x \in E.$$

Exemple Pratique : Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère $\mathcal{B} = (u, v, w)$ donnés par

$$u = (1, -1, 0)\,; \; v = (0, 0, 1)\,; \quad w = (1, 1, 1)$$

Pour déterminer la base duale, il suffit de calculer les coordonnées d'un vecteur $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans cette base. Pour celà, on note P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et sa matrice inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

permet d'écrire le vecteur $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{B}$:

$$X = \frac{1}{2}(x - y)\, u + \frac{1}{2}(-x - y + 2z)\, v + \frac{1}{2}(x + y)\, w$$

ce qui donne

$$u^* : (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{2}(x - y)$$
$$v^* : (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{2}(-x - y + 2z)$$
$$w^* : (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{2}(x + y)$$

les trois éléments de la base duale $\mathcal{B}^*$.

THÉORÈME 2.2 (base antéduale). Soit $(\varphi_1, \cdots, \varphi_p)$ une base de E^*, alors il existe une unique base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\varphi_i = \varepsilon_i^*$. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ s'appelle la base antéduale de $(\varphi_1, \cdots, \varphi_p)$.

REMARQUE 2.2. Dans la pratique, on connait les expressions des φ_i dans une base donnée $\mathcal{C}$, il suffit d'inverser leur matrice dans cette base pour trouver la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base antéduale cherchée :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{C}}\left(\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_p^*\right)\right)^{-1}.$$

2.3. Hyperplans et formes linéaires

La codimension $\operatorname{codim} F$ d'un sev F de E, est donnée par :

$$\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F.$$

DÉFINITION 2.1. On appelle hyperplan de E tout s.e.v H de E, de codimension 1 (en dimension finie tout s.e.v de dimension égale à $\dim E - 1$).

Propriétés caractéristiques des hyperplans

(1) Si H est un hyperplan de E et $x_0 \notin H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

(2) Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, alors $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.

(3) Inversement, si H est un hyperplan de E, alors il existe φ, une forme linéaire non nulle sur E, t.q $H = \ker \varphi$.

(4) Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E t.q $\ker \varphi = \ker \psi$, alors $\exists \lambda \neq 0$ t.q $\varphi = \lambda \psi$.

On dit que les hyperplans $H_i = \ker \varphi_i$, $1 \leq i \leq n$, sont indépendants si la famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est libre dans E^*.

THÉORÈME 2.3. Soient $H_1, \ldots, H_n$ des hyperplans de E, $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ est un s.e.v de E de codimension inférieure ou égale à n, avec égalité si et seulement si les H_i sont indépendants.

Espaces vectoriels normés 2

1. Norme et distance

Dans tout le chapitre on se place dans le cadre d'espaces vectoriels E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1. Définitions

Définition 1.1. On appelle norme dans E, une application N telle que :

(i) $\forall x \in E : N(x) \in \mathbb{R}_+$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$

(iii) $\forall (x, y) \in E^2 : N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

(iv) $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

E muni de N est appelé un **espace vectoriel normé** (evn). Sans la proporiété (iv), on dit que N est une semi norme.

- Souvent on note $\|x\|$ pour $N(x)$. On différencie le cas échéant diverses normes par des indices : $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, ...

Dans toute la suite on suppose que E est muni d'une norme $\| \ \|$.

Remarque 1.1. De la définition on déduit que

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| .$$

Définition 1.2. La distance entre les points x et y de E est

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Propriétés

On a les propriétés suivantes, qui résultent des axiomes définissant une norme.

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Distance d'un point à une partie de E

DÉFINITION 1.3. Soit $x \in E$ et $A \subset E$, $A \neq \varnothing$; alors on pose

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

PROPOSITION 1.1. Il existe une suite (a_n) dans A telle que

$$d(x, A) = \lim_{n \to \infty} d(x, a_n).$$

Boules

DÉFINITION 1.4. On définit les boules ouvertes et fermées de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}$ par :

- $B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}$
- $B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}$

$S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}$ est la sphère de centre a et de rayon r.

Partie bornée, application bornée

DÉFINITION 1.5. Une partie A de E est bornée si

$$\exists M > 0 \mid \forall x \in A : \|x\| \leq M.$$

Soit X un ensemble non vide, une application $f : X \longrightarrow E$ est bornée si

$$\exists M > 0 \mid \forall x \in X : \|f(x)\| \leq M.$$

REMARQUE 1.2. Il est facile de voir que la réunion, l'intersection de deux bornés est bornée. Et que l'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E est un $\mathbb{K} - ev$.

THÉORÈME 1.1. Soit X un ensemble non vide, , l'application

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E.

Normes équivalentes

DÉFINITION 1.6. On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes, s'il existe α, β réels strictement positifs tels que

$$\forall x \in E : \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

1.2. Evn produit

PROPOSITION 1.2. Si E et F sont deux evn, on définit sur $E \times F$ une norme, par

$$\forall (x, y) \in E \times F : \|(x, y)\| = \sup(\|x\|, \|y\|)$$

appelée norme produit sur $E \times F$.

Plus généralement, pour un produit de n espaces $E_1, ..., E_n$ on pose

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i :$$
$$\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} (\|x_i\|)$$

REMARQUE 1.3. La norme produit ci-dessus est notée $\| \ \|_\infty$. Deux autres normes sont définies sur le produit $\prod_{i=1}^{n} E_i$:

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \quad \text{et}$$
$$\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2}$$

En particulier, on définit sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) les trois normes suivantes, qui sont équivalentes, $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^2\right|\right)^{1/2}$$

1.3. Notions topologiques de base

Voisinages, Intérieur, adhérence, frontière

DÉFINITION 1.7. On dit qu'une partie $V \subset E$ est un **voisinage** de $a \in E$ si V contient une boule $B(a, r)$ $(r > 0)$. Dans ce cas $a \in V$ et on dit que a est un point **intérieur** à V.

On note $\mathring{V}$ l'ensemble de tous les points intérieurs à V et on l'appelle l'intérieur de V :

$$a \in \mathring{V} \Longleftrightarrow \exists r > 0 : B(a, r) \subset V$$

On dit que $a \in E$ est **adhérent** à V si toute boule $B(a,r)$ rencontre V.
On note $\overline{V}$ l'ensemble de tous les points adhérents à V et on l'appelle l'adhérence de V :

$$a \in \overline{V} \Longleftrightarrow \forall r > 0 : B(a,r) \cap V \neq \varnothing$$

Ainsi on a

$$\overset{\circ}{V} \subset V \subset \overline{V}$$

on appelle frontière de V l'ensemble $\mathrm{Fr}(V) = \overline{V} \setminus \overset{\circ}{V}$.

Ouverts, fermés

Définition 1.8. On dit que $U \subset E$ est ouvert si $\overset{\circ}{U} = U$. i.e :

$$\forall a \in U, \exists r > 0 : B(a,r) \subset U.$$

On dit que $V \subset E$ est fermé si $\overline{V} = V$ (ce qui signifie $\overline{V} \subset V$), i.e. $\forall a \in E$

$$[\forall r > 0, B(a,r) \cap V \neq \varnothing] \Longrightarrow a \in V$$

Exemples

(1) L'ensemble $\varnothing$ est par convention ouvert et fermé. Aussi E est à la fois ouvert et fermé.

(2) Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé. (Prouver cette dernière assertion).

(3) tout point, toute partie finie, est fermé(e).

(4) une sphère $S = \{x \in E \mid d(x,a) = r\}$ est fermée.

Proposition 1.3. L'intérieur du complémentaire est le complémentaire de l'adhérence. L'adhérence du complémentaire est le complémentaire de l'intérieur :

$$\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$$

et donc

$$A \quad \text{est un fermé si et seulement si} \quad A^c \quad \text{est un ouvert.}$$

Propriétés

(1) Toute réunion (même infinie) d'ouverts est ouverte.

(2) L'intersection de deux (ou même d'un nombre fini d') ouverts est ouverte.

(3) Toute intersection (même infinie) de fermés est fermée.

(4) La réunion de deux (ou même d'un nombre fini de) fermés est fermée.

(5) La frontière est toujours un fermé, et la frontière de A est aussi la frontière de son complémentaire.

2. Notion de convergence dans un evn

2.1. Suites dans un evn

Définition 2.1. La suite (u_n) converge vers ℓ si

$$d(u_n, \ell) = \|u_n - \ell\|$$

est une suite réelle qui converge vers 0, i.e

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 : \\ \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

Si ce n'est pas le cas, on dit que la suite diverge.

Théorème 2.1. Soit $E = F \times G$ un espace produit d'evn, muni de la norme produit. Alors une suite de E converge si et seulement si les suites de ses composantes convergent :

$$u_n = (v_n, w_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (a, b) \Longleftrightarrow \left(v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b\right)$$

Suites extraites

Définition 2.2. On appelle suite extraite (ou sous–suites) de la suite $(u_n)_n$ une suite de la forme $(u_{n_p})_p$ où $(n_p)_p$ est une suite d'entiers strictement croissante.

Remarque 2.1. Typiquement, on a les exemples des sous-suites paires et impaires (u_{2p}) et (u_{2p+1}). De même, les suites décalées (u_{n+1}) ou (u_{n+12}) sont des suites extraites.

Les suites extraites partagent les propriétés de leur ancêtre : toute sous-suite d'une suite bornée (resp. convergente) est bornée (resp. convergente).

Proposition 2.1. Les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) convergent vers une même limite ℓ, montrer que (u_n) converge.

Valeurs d'adhérence

Définition 2.3. ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si il existe une suite extraite (u_{n_p}) qui tend vers ℓ.

Proposition 2.2. Toute suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite. Et donc une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente.

Caractérisation séquentielle des fermés

(1) Un point adhérent à A est la limite d'une suite d'éléments de A.

(2) L'adhérence de A est donc l'ensemble des limites des suites convergentes de E (à valeurs dans) A.

(3) Un ensemble fermé A est donc tel que toute suite à valeurs dans A et qui converge dans E a sa limite dans A.

2.2. Limite et continuité en un point

Dans cette partie E et F sont deux $\mathbb{K}-evn$.

Définition 2.4. Soit X une partie de E et $f : X \longrightarrow F$, $a \in \overline{X}$. On dit que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = \ell \in F$ (ou que f converge en a) si

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in X : \\ \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon \end{gathered}$$

et on dit que f est continue en $a \in X$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = f(a)$. Et si f est continue en tout point de X, on dit qu'elle est continue sur X.

Théorème 2.2. Soit X une partie de E et $f : X \longrightarrow F$, $a \in \overline{X}$. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = \ell \in F$ si et seulement si pour toute suite (u_n) de X convergeant vers a, on a $(f(u_n))$ qui converge vers ℓ.

Remarque 2.2 (Image continue d'une suite). Si (u_n) converge vers la limite ℓ et si f, définie en tout point de la suite, est continue en ℓ, alors $\lim f(u_n) = f(\ell)$. En particulier Si une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ, et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Remarque 2.3. Les résultats sur les opérations des limites des fonctions numériques sont concervées.

Caractérisation de la convergence dans un espace produit

Proposition 2.3. Soit f une application de X dans $E \times F$ et a adhérent à X, alors f converge en a si et seulement si ses deux composantes convergent :

$$\lim_{x \to a} (f_1(x), f_2(x)) = (\lim_{x \to a} f_1(x), \lim_{x \to a} f_2(x))$$

2.3. Propriétés globales des fonctions continues

Définition 2.5. Si A est une partie de E, on appelle ouvert de A l'intersection de A avec un ouvert de E.

Théorème 2.3. Une application $f : A \subset E \longrightarrow F$ est continue sur E si et seulement si l'image inverse par f de tout ouvert de F est un ouvert de A.

Remarque 2.4. Donc de même, si f est continue, alors l'image inverse par f de tout fermé de F est un fermé de A.

Proposition 2.4. Si f est continue de A dans $\mathbb{R}$, alors les ensembles $\{f \leq m\}$ et $\{f = m\}$ sont fermés, et $\{f < m\}$ est ouvert.

Continuité et densité

Proposition 2.5. Si X est dense dans A et f est continue sur A dans l'evn F, alors $f(X)$ est dense dans $f(A)$.

Théorème 2.4. Deux applications continues sur A qui coïncident sur une partie dense de A sont égales sur A.

Remarque 2.5. On utilise souvent ce théorème sous une forme plus simple : si f et g coïncident sur $[a, b[$ et sont continues en b alors elles y sont égales.

Fonctions lipschitzienne

Définition 2.6. Soient E, F deux evn. L'application f de E dans F est dite lipschitzienne de rapport k si

$$\forall x, y \in E : \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$$

Proposition 2.6. Toute application lipschitzienne sur $D \subset E$ est uniformément continue sur D.

2.4. Fonctions de plusieurs variables réelles

$\mathbb{R}^d$ étant un evn, donc les théorèmes généraux sur les limites et continuité sont aussi valables pour les fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$, notamment :

- Limites et continuité d'une application composée.
- Continuité des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- ...

REMARQUE 2.6. La continuité d'une fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X &\longmapsto f(X) = (f_1(X), ..., f_n(X)) \end{aligned}$$

équivaut à la continuité de chacune de ses composantes réelles f_i. Il suffit alors de savoir justifier la continuité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonctions partielles

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x, y) \longmapsto f(x, y)$, $(a, b) \in U$ et $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$. On définit sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, la fonction

$$\varphi_v : t \longmapsto f\left((a, b) + tv\right) = f\left(a + tv_1, b + tv_2\right)$$

qu'on appelle fonction partielle de f en (a, b) suivant la direction de v.

La limite $\lim\limits_{t \to 0} \varphi_v(t)$, si elle existe, est appelée la limite de f suivant la direction v en (a, b). La proposition suivante est évidente.

PROPOSITION 2.7. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe alors il en est de même pour $\lim\limits_{t \to 0} \varphi_v(t)$, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

La réciproque étant évidemment fausse !

Topologie dans un EVN 3

1. Complétude

1.1. Suites de Cauchy

DÉFINITION 1.1. La suite (u_n) est de Cauchy dans E si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} :$$
$$\|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie que la suite $\left(\varepsilon_n = \sup\limits_{p \geq n} \|u_{n+p} - u_n\|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie et converge vers 0.

Propriétés

(1) Toute suite de Cauchy est bornée.

(2) Toute suite convergente est de Cauchy, mais la réciproque est fausse, comme on le voit par exemple dans $\mathbb{R}[X]$ muni d'une norme au choix.

DÉFINITION 1.2. Un evn est complet (ou une partie de celui-ci), si toute suite de Cauchy y est convergente.

Si un evn est complet, on dit que c'est un espace de Banach.

THÉORÈME 1.1. Tout evn de dimension finie est un Banach.

THÉORÈME 1.2. Soit E un evn complet (un Banach), l'espace des suites bornées de E, muni de la norme $\| \ \|_\infty$ sur les suites, est complet.

REMARQUE 1.1. Cette espace de Banach est parfois noté $\ell^\infty(E)$.

THÉORÈME 1.3. De même l'espace des applications continues de $[a, b]$ dans E est complet pour la norme $\| \ \|_\infty$.

PROPOSITION 1.1. Dans un Banach, les parties complètes sont exactement les fermés.

Critère de Cauchy pour les applications

THÉORÈME 1.4. Si E est un evn, F un Banach, et $a \in A \subset E$; $f : A \longrightarrow F$ admet une limite en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \mid \forall x, y \in A \cap B(a, r) :$$
$$\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

1.2. Prolongement d'applications lipschitziennes

THÉORÈME 1.5. Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ k-lipschitzienne $k > 0$, et F **complet**. Alors f est prolongeable sur $\overline{A}$, de manière unique, en une application k-lipschitzienne.

2. Compacité

2.1. Définition séquentielle

DÉFINITION 2.1. Un compact est une partie K de E telle que toute suite de K admette une sous-suite convergente (dans K).

Exemples

(1) Toute partie finie est un compact.

(2) Dans $\mathbb{R}$ tout segment $[a, b]$ est compact (BW).

(3) L'ensemble A constitué des valeurs d'une suite (u_n) et de la limite ℓ est compact.

2.2. Compacts et fermés

Proposition 2.1. Tout compact est fermé et borné.

Proposition 2.2. Tout fermé d'un compact est compact (i.e : l'intersection d'un compact avec un fermé est compact), et réciproquement toute partie compacte d'un compact y est fermée.

Proposition 2.3. Le produit de deux compacts est compact. Bien entendu, cela signifie ≪ un compact de l'espace produit muni de la norme produit ≫.

2.3. Compacts et continuité

Théorème 2.1. L'image continue d'un compact est un compact .

Proposition 2.4. Une application continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 2.1. Ceci montre l'existence de maxima et de minima de fonctions, sous la seule condition qu'elles soient continues sur une partie compacte adéquate.

Une généralisation parfois utile : pour une application continue de A compact dans E, il existe $a \in A$ tel que

$$\forall x \in A : \|f(x)\| \leq \|f(a)\|$$

(idem avec $\geq$ bien sûr).

Théorème 2.2 (de Heine). Toute application continue sur un compact K y est uniformément continue, c'est à dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x, y \in K :$$
$$\|x - y\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

(propriété plus forte que la continuité ordinaire).

Le cas de la dimension finie

Théorème 2.3. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Théorème 2.4. Tout evn de dimension finie est un Banach.

Théorème 2.5. En dimension finie les compacts sont les fermés bornés. En particulier la boule (fermée) unité est compact.

Théorème 2.6 (Bolzano-Weierstrass). En dimension finie, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Ce qui signifie aussi bien que les compacts sont les fermés bornés.

3. Connexité par arcs

On se place exclusivement en dimension finie.

Définition 3.1. On dit qu'une partie A de E est convexe si pour tout a, b dans A le segment

$$[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$$

est inclus dans E.

Par exemple les boules sont convexe et tout sev (sea) de E est convexe.

Définition 3.2. Un arc joignant les points x et y dans la partie A est une application γ continue de $[0, 1]$ dans A, telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Une partie A est connexe par arcs si et seulement si pour tout couple de points (x, y) dans A, il existe un arc joignant x à y. En d'autres termes, on peut toujours tracer un chemin d'un point à un autre sans lever le crayon.

Proposition 3.1. Tout convexe est connexe par arcs.

Théorème 3.1. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème 3.2 (Image d'un connexe). Soit f une application continue de A, partie connexe par arcs de E, à valeurs dans F ; alors $f(A)$ est connexe par arcs. Dans le cas $F = \mathbb{R}$, $f(A)$ est donc un intervalle.

4. Continuité d'une application linéaire

Théorème 4.1. L'application $f \in \mathcal{L}(E;F)$ est continue si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

(1) f est continue en 0

(2) f est lipschitzienne

(3) $\exists M > 0 \mid \forall x \in E : \|f(x)\| \leq M\|x\|$

(4) f est bornée sur la boule unité.

Remarque 4.1. Comme on le voit, la continuité d'une application dépend de la norme. On s'en doute, elle reste la même avec des normes équivalentes.

Théorème 4.2. Toute application linéaire d'un evn de **dimension finie** dans un autre est continue.

4.1. Normes subordonnées

Théorème 4.3. Dans l'ev $\mathcal{L}_c(E;F)$ des applications linéaires continues de E dans F, l ' application

$$\begin{aligned} u \longmapsto & \sup\{\|u(x)\| \mid \|x\| = 1\} \\ & = \sup\{\|u(x)\| \mid \|x\| \leq 1\} \\ & = \sup\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \mid x \neq 0\right\} \end{aligned}$$

est une norme, qu'on note (pour différencier) $|\!|\!|u|\!|\!|$.

Remarque 4.2. Le sup étant le plus petit des minorants, donc $|\!|\!|u|\!|\!|$ est le plus petit réel vérifiant pour tout $x \in E$

$$\|u(x)\| \leq |\!|\!|u|\!|\!| \, \|x\|.$$

$\mathcal{L}_c(E;F)$ muni de cette norme est donc un evn.

Proposition 4.1. Dans l'ev $\mathcal{L}_c(E)$ la norme $|\!|\!| \ |\!|\!|$ est sous multiplicatice, i.e :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}_c(E) : |\!|\!|u \circ v|\!|\!| \leq |\!|\!|u|\!|\!| \, |\!|\!|v|\!|\!|$$

c'est donc une norme d'algèbre. En général si $u \in \mathcal{L}_c(F;G)$ et $v \in \mathcal{L}_c(E;F)$ on a

$$|\!|\!|u \circ v|\!|\!| \leq |\!|\!|u|\!|\!| \, |\!|\!|v|\!|\!|.$$

4.2. Exemples de normes subordonnées

Proposition 4.2. Pour tout $\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,d}(\mathbb{K}) \simeq (\mathbb{K}^d)^*$:

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{\|X\|_\infty = 1} |\sum_{i=1}^{d} a_i x_i | = \|(a_1, \dots, a_d)\|_1$$

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{\|X\|_1 = 1} |\sum_{i=1}^{d} a_i x_i | = \|(a_1, \dots, a_d)\|_\infty$$

$$\|\varphi\|_2 = \sup_{\|X\|_2 = 1} |\sum_{i=1}^{d} a_i x_i | = \|(a_1, \dots, a_d)\|_2$$

normes subordonnées aux normes $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_1$ usuelles sur $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^d$.

Proposition 4.3. Pour tout $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$:

$$\|M\|_\infty = \sup_{\|X\|_\infty = 1} \|MX\|_\infty = \max_{1 \le i \le d} \sum_{j=1}^{d} |a_{i,j}|$$

$$\|M\|_1 = \sup_{\|X\|_1 = 1} \|MX\|_1 = \max_{1 \le j \le d} \sum_{i=1}^{d} |a_{i,j}|$$

normes subordonnées aux normes usuelles $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_1$ sur $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 4.4. La norme $\| \ \|_2$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ est sous multiplicative et majore la norme $\| \ \|_2$ subordonnée à la norme $\| \ \|_2$ sur $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{K})$.

4.3. Application biliniéaire

On dit que $B : E \times F \longrightarrow G$ est bilinéaire si $\forall x, x' \in E;\ y, y' \in F;\ \lambda \in \mathbb{K}$:

$$B(x + \lambda x', y) = B(x, y) + \lambda B(x', y) \ \text{ et}$$
$$B(x, y + \lambda y') = B(x, y) + \lambda B(x, y')$$

Comme l'ensemble des applications linéaires, l'ensemble des applications biliéaires de $E \times F$ dans G est un $\mathbb{K} - ev$ pour les lois usuelles noté $\mathcal{L}(E, F; G)$.

Proposition 4.5. L'application bilinéaire B de $E \times F$ dans G est continue si et seulement si il existe une constante M telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F : \|B(x, y)\| \le M \|x\| \|y\|$$

Théorème 4.4. Si E et F sont de dimension finie toutes les applications bilinéaires sur $E \times F$ sont continues.

Séries dans un EVN 4

Vocabulaire

Les définitions d'une série, de sa convergence, de la somme, du reste, sont comme dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Les propriétés de linéarité subsistent.

- Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Cette série est notée $\sum u_n$ et S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

- On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_n$ converge. Sa limite S est alors appelée la somme de la série et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On introduit aussi $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ appelé reste de rang n de la série.

- La Condition de Cauchy pour la série $\sum u_n$ est celle des suites de ses sommes partielles :

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que} \\ \forall n \geq p \geq N : \left\| \sum_{k=p}^{n} u_k \right\| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

- Une série $\sum u_n$ d'éléments de E est dit absolument convergente si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.
- Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente d'éléments d'un espace de **Banach** alors elle est convergente et

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

- Une série convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.

1. Familles sommables

1.1. Commutative convergence

Soit $\sum u_n$ une série dans un Banach. On dit que $\sum u_n$ est **commutativement convergente** si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente de même somme que $\sum u_n$. Celà signifie que la série est convergente vers une même somme même si on permute l'ordre des termes dans la somme.

Théorème 1.1. Si une série $\sum u_n$ est absolument convergente dans un Banach E, alors elle est commutativement convergente.

1.2. Famille dénombrable absolument sommable

On considère une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un Banach E, I un ensemble dénombrable (dans la pratique $I = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$ ou $\mathbb{Z}$). Soit

$$\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I \quad \text{bijective}$$

La sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une généralisation de la convergence commutative des séries.

Définition 1.1. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est absolument sommable si la série $\sum\limits_{n\geq 0} \left\|u_{\sigma(n)}\right\|$ est convergente. Ceci étant alors indépendant de la bijection σ. On la note $\sum_{i\in I} u_i$.

Théorème 1.2. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un Banach E est **absolument sommable** si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall K \subset I \text{ (K fini)}, \ \sum_{k\in K} |u_k| \leq M.$$

Proposition 1.1 (Inégalité triangulaire). Si une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un Banach E est **absolument sommable** alors

$$\left\|\sum_{i\in I} u_i\right\| \leq \sum_{i\in I} \|u_i\|$$

1.3. Sommation par paquets

D'abord rappelons la sommation par **groupement de termes**.

- Pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N};\ p \longmapsto n_p$ strictement croissante, on associe la suite (v_p) définie par

$$v_0 = \sum_{k=0}^{n_0} u_k, \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^* : v_p = \sum_{k=n_{p-1}+1}^{n_p} u_k$$

de sorte que

$$v_0 = u_0 + \ldots + u_{n_0};\ v_1 = u_{n_0+1} + \ldots + u_{n_1}, \ldots$$

les sommes partielles de la série $\left(\sum v_p\right)$ forment alors une sous suite de celle des sommes partielles de $\sum u_n$. Donc,

Théorème 1.3. Si $\sum u_n$ est à termes positifs et si $\sum v_n$ converge pour un certain $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, alors $\sum u_n$ converge et a donc la même somme que $\sum v_n$.

Théorème 1.4 (Sommation par paquets). Si $(u_i)_{i\in I}$ est absolument sommable de somme s, alors pour toute partition $(I_k)_{k\in K}$ de I, on a :

(1) Pour tout $k \in K$, la famille $(u_i)_{i\in I_k}$ est absolument sommable de somme s_k.

(2) La famille $(s_k)_{k\in K}$ est absolument sommable de somme s, i.e :

$$\sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Remarque 1.1. Pour étudier la sommabilité d'une famille, on commence par montrer son absolue sommabilité puis choisir des paquets convenables permettant de calculer la somme.

- Un cas important est celui où $I = \mathbb{Z}$:

Théorème 1.5 (cas $I = \mathbb{Z}$). Une famille $(u_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ à élément dans un Banach est absolument sommable si et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{-n}$ sont absolument convergente. Dans ce cas :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}.$$

1.4. Cas $I = \mathbb{N}^2$: Suites doubles

Dans ce cas, en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

- $I_k = \{k\} \cup \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N} \cup \{k\}$, on a le théorème

Théorème 1.6 (Fubini). Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ **une suite double** à éléments dans un Banach. Si la famille $(u_{n,p})$ est absolument sommable alors

(1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_p u_{n,p}$ est absolument convergente de somme a_n.

(2) la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente. Et on a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right).$$

- oubien avec $I_k = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = k\right\}$:

Théorème 1.7. Si la famille $(u_{n,p})$ est absolument sommable alors la série de terme général

$$\sum_{p+q=n} \|u_{p,q}\|$$

est convergente, et on a

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} u_{p,q}.$$

- Ou enfin, avec $I_0 = \{(0,0)\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $I_k = [\![0,k]\!]^2 \setminus [\![0,k-1]\!]^2$:

Théorème 1.8. Si la famille $(u_{n,p})$ est absolument sommable alors

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} u_{n,p} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} u_{p,q}.$$

2. Série dans une algèbre normée

DÉFINITION 2.1. Une algèbre normée unitaire $\mathcal{A}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, unitaire, munie d'une norme **multiplicative**, c'est à dire que c'est aussi un evn avec une norme qui vérifie

$$\forall u, v \in \mathcal{A} : \|uv\| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Exemples

(1) $\mathcal{L}_c(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont est algèbre normée pour toute norme subordonnée à une norme vectorielle.

(2) $\mathcal{B}(A;\mathbb{C})$ est l'ensemble des applications bornées de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. C'est une algèbre normée unitaire pour la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathcal{A}} |f(t)|$$

Produit de Cauchy

PROPOSITION 2.1. Si E est une algèbre de Banach et si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série produit (de Cauchy) $\sum w_n$ $(w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}v_k)$ est absolument convergent et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Série géométrique

THÉORÈME 2.1. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. Pour tout $a \in \mathcal{A}$ vérifiant $\|a\| < 1$, la série géométrique $\sum a^n$ est absolument convergente, $1_\mathcal{A} - a$ est inversible et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (1_\mathcal{A} - a)^{-1}$$

Dans le cas particulier $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, E un evn, les séries $\sum T^n$, $T \in \mathcal{L}(E)$, sont dites de **Neumann**.

THÉORÈME 2.2. Le groupe des inversibles de l'algèbe $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ est un ouvert et l'application $a \longmapsto a^{-1}$ est continue sur $\mathcal{U}(\mathcal{A})$.

DÉFINITION 2.2. On appelle spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble

$$\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda I_n - M \notin GL_n(\mathbb{K})\}$$

c'est l'ensemble des valeurs propres de M.

Théorème 2.3. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} |\lambda| \leq \|M\|$$

c.à.d que $\mathrm{Sp}(M)$ est inclus dans la boule fermée de centre 0 est de rayon $\|M\|$ pour toute norme matricielle.

Série exponentielle

Théorème 2.4. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. Pour tout a élément de $\mathcal{A}$ la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge (absolument).

Sa somme est par définition l'exponentielle de a :

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$$

Par exemple :

$$\exp\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right) = I_n$$

et pour toute matrice diagonale

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

- $\exp(M)$ commute avec tout polynôme en M.
- $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $MN = NM$:

$$\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$$

- $\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$P^{-1}\exp(M)P = \exp(P^{-1}MP)$$

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le calcul de $\exp(A)$, passe par la réduction de la matrice A et la formule

$$\exp\begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp A_1 & & (**) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp A_r \end{pmatrix}$$

dans le cas de matrices triangulaires (par blocs), les A_i étant des blocs carrés.

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(\exp A) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$, avec en plus, pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

  $$AX = \lambda X \Longrightarrow \exp(A)X = \exp(\lambda)X$$

  ce qui permet d'avoir :

  $$\det[\exp(A)] = \exp(\mathrm{Tr}\, A)$$

Outils d'algèbre générale 5

1. Idéaux d'un anneau commutatif

DÉFINITION 1.1. Un idéal I est un sous-groupe additif, stable par multiplication par tout élément de l'anneau $\mathcal{A}$:
- $\forall x, y \in I : x - y \in I$
- $\forall a \in \mathcal{A}, \forall x \in I : ax \in I$

propriétés

(1) La somme (resp. l'intersection) d'une famille d'idéaux est un idéal.

(2) Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Idéaux de $\mathbb{Z}$

THÉORÈME 1.1. Tout idéal de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$, n entier naturel.

On déduit de ce résultat toutes les propriétés arithmétiques dans $\mathbb{Z}$:

PROPOSITION 1.1. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, on a :
- $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ avec $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$.
- $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ avec $m = \mathrm{PPCM}(a, b)$.

THÉORÈME 1.2 (Bezout). Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe u, v tels que $au + bv = 1$.

THÉORÈME 1.3 (Gauss). Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$; si a divise bc en étant premier avec c, alors a divise b.

Deux autres propositions :

Proposition 1.2 (Euclide). Si a est premier avec b et avec c, alors il est premier avec bc.

Proposition 1.3. Si a et b sont premiers entre eux et divisent tous deux c, alors ab divise c.

Congruence dans $\mathbb{Z}$

Définition 1.2. On dit que a est congru à b modulo n et on note $a \equiv b \pmod n$ si n divise $|b-a|$, i.e :

$$a \equiv b \pmod n \Longleftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}.$$

La relation $\pmod n$ est une relation d'équivalence, ses classes constituent l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi la classe de $a \in \mathbb{Z}$ est

$$\bar{a} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a exactement n éléments. C'est un anneau avec les lois définies par

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad , \quad \bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$$

Ses éléments neutres sont $\bar{0}$ et $\bar{1}$.

Théorème 1.4. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

En général, on note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Ces éléments inversibles sont précisément les générateurs du groupe **cyclique** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Fonction indicatrice d'Euler

Définition 1.3. le cardinal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est noté $\Phi(n)$, appelé indicateur d'Euler de n. Φ est appelée fonction indicatrice d'Euler. On convient que $\Phi(1) = 1$.
Par exemple, $\Phi(p) = p - 1$ pour p premier. Et en général, on a :

Proposition 1.4. Si $p \geq 2$ est premier alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$;

$$\Phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1) = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Théorème 1.5. Soient $m \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers **premiers entre eux**. Alors $\Phi(nm) = \Phi(m)\Phi(n)$.

Théorème 1.6. Pour tout $n = \prod_i p_i^{m_i} \geq 2$, les p_i premiers,

$$\Phi(n) = \prod_i p_i^{m_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{p \text{ premier, divisant } n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exemple $\Phi(n = 2^a 3^b) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}n$ si $a, b \in \mathbb{N}^*$.

2. Le cas de $\mathbb{K}[X]$

Curieusement, tout se passe comme dans $\mathbb{Z}$. C'est qu'on a la même propriété d'existence d'une division euclidienne :

2.1. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème 2.1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, B non nul. Alors il existe un et un seul couple (Q, R) tel que $A = B.Q + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

2.2. Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Théorème 2.2. $\mathbb{K}[X]$ est principal, i.e. les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont engendrés par un seul élément : ils sont de la forme $I = P.\mathbb{K}[X]$.

2.3. Propriétés arithmétiques de $\mathbb{K}[X]$

Comme dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$ étant principale, alors les Théorèmes de Gauss, Bezout, Euclide, . . . s'appliquent. PGCD et PPCM existent et sont uniques (à un élément inversible, càd une unité, càd une constante non nulle, près). Il y a factorisation unique en produit de facteurs irréductibles, unique à l'ordre près, en prenant les facteurs unitaires.Dans $\mathbb{Z}$ tout idéal est principal, on déduit donc :

Proposition 2.1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on a :
- $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = D\mathbb{K}[X]$ avec $D = \mathrm{PGCD}(A, B)$.
- $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X]$ avec $M = \mathrm{PPCM}(A, B)$.

Théorème 2.3 (Bezout). Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe U, V dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Théorème 2.4 (Gauss). Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$; si A divise BC en étant premier avec C, alors A divise B.

Des dizaines de propriétés arithmétiques, comme dans $\mathbb{Z}$, en découlent. En voici deux autres :

Proposition 2.2 (Euclide). Si A est premier avec B et avec C, alors il est premier avec BC.

Proposition 2.3. Si A et B sont premiers entre eux et divisent tous deux C, alors AB divise C.

Remarque 2.1. D'après le Théorème de D'Alembert-Gauss, les facteurs irréductibles sont :
- dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes de degré 1.
- $\mathbb{R}[X]$, les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle.

3. Fonction polynômiale

Racine d'un polynômes

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition 3.1. α est racine de P si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.

- On dit que α est racine de P de multiplicité $\mu \in \mathbb{N}^*$, si

$$(X-\alpha)^{\mu} \text{ divise } P \text{ et } (X-\alpha)^{\mu+1} \text{ ne divise pas } P.$$

- Si $P(\alpha) \neq 0$, on dit que α est de multiplicité 0.

Formules de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $n = \deg(P)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les formules suivantes sont équivalentes et s'appellent formule de Taylor :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k \tag{3.1}$$

$$P(X+\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}X^k \tag{3.2}$$

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}P^{(k)}(X) \tag{3.3}$$

une application de ces formules est la caractérisation suivante de la multiplicité :

Proposition 3.2. $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mu \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. α est racine de P de multiplicité μ si et seulement si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(\mu-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(\mu)}(\alpha) \neq 0.$$

Relations entre coefficients et racines

Le principale résultat généralise les relations :

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

si $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ (avec $a_2 \neq 0$) admettant les deux racines x_1 et x_2 (non nécessairement distinctes).

Proposition 3.3. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, de degré n, admettant les racines x_i, $1 \leq i \leq n$ (non nécessairement distinctes), alors

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \,. \qquad \text{(Formules de Newton)}$$

pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

3.1. Polynôme annulateur

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$–algèbre, pour tout $u \in \mathcal{A}$, on pose

$$u^0 = 1_{\mathcal{A}}, \; u^1 = u \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : u^{n+1} = u \times u^n$$

Et l'application $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}, u \longmapsto P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ est appelée fonction polynômiale dans $\mathcal{A}$

Proposition 3.4. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, l'application $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{A}$, $P \longrightarrow P(u)$ est un morphisme d'algèbre :

$$\begin{aligned} \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K} : (P + \lambda Q)(u) &= P(u) + \lambda Q(u) \\ (P \times Q)(u) &= P(u) Q(u) \end{aligned}$$

et de manière évidente $(P \circ Q)(u) = P(Q(u))$. Son image est noté $\mathbb{K}[u]$.

Théorème 3.1. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, le noyau

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$$

du morphisme d'algèbre $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{A}$, $P \longrightarrow P(u)$ est un idéal de $\mathcal{A}$, c'est un idéal principal, donc il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\} = \mathbb{K}[X] A.$$

3.2. Polynôme minimal

DÉFINITION 3.1. Si $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\} \neq \{0\}$,l'unique polynôme **unitaire** A tel que $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\} = \mathbb{K}[X]$ .A est appelé polynôme minimal de u. On le notera π_u. C'est le polynôme de **degré minimal** dans $\mathbb{K}[u] \setminus \{0\}$.

Exemples

(1) Si $a \in \mathbb{K}$ $(\mathcal{A} = \mathbb{K})$, $\pi_a = (X - a)$.

(2) Dans $\mathbb{C}$ (comme $\mathbb{R}$-algèbre), $\pi_i = X^2 + 1$.

(3) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\pi_{\lambda I_n} = X - \lambda$. Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice p alors $\pi_N = X^p$.

(4) Dans $\mathcal{L}(E)$ (E un $\mathbb{K} - ev$), si u est un projecteur (respectivement symétrie), $\pi_u = X^2 - X$ (resp $X^2 - 1$).

THÉORÈME 3.2. $u \in \mathcal{A}$ admet un polynôme annulateur non nul si et seulement si $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie, auquel cas $\dim \mathbb{K}[a] = \deg \pi_a$.

Réduction des endomorphismes 6

1. Généralités

1.1. Élements propres

Définition 1.1. On dit que $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, si $u(x) = \lambda x$.

- Dans ce cas $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est appelé sous espace propre de u associé à la valeur propre λ.
- L'ensemble des valeurs propres de u est appelé son spectre noté $\mathcal{S}p(u)$.

On définit de même les éléments propres d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de M s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$. $E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda X\}$.

Proposition 1.1. λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injective.

Proposition 1.2. Deux matrices semblables ont même spectre.

1.2. Polynôme minimal

Pour tout u dans $\mathcal{L}(E)$ ou dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, on définit $P(u)$ dans $\mathcal{L}(E)$ ou dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ par

$$P(u) = a_0 \mathrm{id} + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n$$

L'application : $P \longmapsto P(u)$ (pour u dans $\mathcal{L}(E)$ ou dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ fixé) est un morphisme d'algèbre entre $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{L}(E)$. En particulier

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X] : (P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

Théorème 1.1 (et définition). L'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En **dimension finie**, cet idéal est non réduit à $\{0\}$; tout polynôme annulateur est multiple du polynôme de degré minimal qui engendre cet idéal, qu'on appelle polynôme minimal de u, on le notera π_u (ou π_M).

Pour tout $a \in GL(E)$, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u &\longmapsto aua^{-1} \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres. En particulier, pour tout polynôme P on a

$$aP(u)a^{-1} = P(aua^{-1})$$

et donc $\pi_u = \pi_{aua^{-1}}$. Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

Théorème 1.2. Si $\lambda \in Sp(u)$ alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in Sp(P(u))$. En particulier toute valeur propre de u est racine de tout polynôme annulateur.

1.3. Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 1.3. Si P et Q sont premiers entre eux, on a

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

On en déduit alors que :

- Si $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$ (P_i 2 à 2 premiers entre eux) annule u alors E est somme directe des noyaux des $P_i(u)$.

2. Sous-espaces stables

Définition 2.1. Un sev F de E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$. Ce qui permet de définir un endomorphisme sur F induit par u, noté $u_{\|_F}$.

Proposition 2.1. Si u et v commutent, alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v. En particulier les s.e.p de u sont stables par v.

THÉORÈME 2.1. Soit E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, il existe une droite u-stable de E ; si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, il existe une droite ou un plan u-stable de E.

Matrices et sev stables

THÉORÈME 2.2. F est stable par u si et seulement si **dans une base adaptée à** F ($\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$), u admet une matrice triangulaire par blocs :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1}(u_{\|_F})$. Dans ce cas, on a :

$\pi_{u_{\|_F}}$ divise π_u. **Mieux encore** π_u est multiple de π_A et de π_B et un diviseur du produit de $\pi_A\pi_B$.

COROLLAIRE 2.1. Si $\dim E=n$, le polynôme minimal de u (ou $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est de degré inférieur ou égal à n.

THÉORÈME 2.3. $E=F_1\oplus\ldots\oplus F_s$ est somme directe de sev stables par u si et seulement si dans une base adaptée, la matrice de u est diagonale par blocs. i.e si $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\ldots\cup\mathcal{B}_s$ avec $\mathcal{B}_i$ base de F_i, alors

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_s \end{pmatrix}$$

où $A_i=\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_i}(u_{\|_{F_i}})$

3. Polynôme caractéristique

DÉFINITION 3.1. Le polynôme caractéristique de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}$ (resp. de $u\in\mathcal{L}(E)$) est $\chi_A(X)=\det(A-XI_n)$ (resp. $\chi_u(X)=\det(u-XId_E)$).

Les valeurs propres de u sont alors les racines de χ_u. Leurs nombre est inférieur ou égal à $\dim(E)$.

Exemples

(1) $\chi_{I_n}=(1-X)^n$ en général si $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ alors $\chi_A=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-X)$.

(2) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire, alors $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - X)$.

(3) $A = (1)_{1\leq i,j\leq n}$. $\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X-n)$. Prouver le ?

Propriétés

(1) Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique et donc même spectre.

(2) Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont exactement les racines de χ_A.

(3) $\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \ldots + \det A$.

(4) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres.

(5) Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc même spectre.

Si F est un sev de E stable par u, alors $\chi_{u_{\|F}}$ divise χ_u. Mieux, le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est égal au produit de χ_A et χ_B.

Théorème 3.1 (Théorème de Cayley–Hamilton). Le polynôme minimal d'un endomorphisme divise son polynôme caractéristique. Ou encore : le polynôme caractéristique de u annule u. Ou enfin : $\chi_u(u) = 0$.

Théorème 3.2. Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$) sont les racines de son polynôme minimal (et son polynôme caractéristique).
En fait on a mieux : tout diviseur irréductible de χ_u divise π_u

Multiplicité d'une valeur propre

Définition 3.2. La multiplicité de la valeur propre λ est le plus grand entier m tel que $(X-\lambda)^m$ divise le polynôme caractéristique.

Théorème 3.3. Soit une vp λ de u, la dimension du sev propre $E = \ker(u - \lambda \mathrm{id})$ est inférieure (ou égale) à la multiplicité de λ dans χ_u.

Théorème 3.4. Le nombre des valeurs propres de u, comptées avec leur multiplicité, vaut au maximum n. Il vaut n exactement si et seulement si le polynôme χ_u est scindé. Dans ce cas, si $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}$, on a $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{p} m_i\lambda_i$ et $\det(u) = \prod_{i=1}^{p}{\lambda_i}^{m_i}$.

4. Diagonalisation

Définition 4.1. u est diagonalisable si et seulement si E est la somme (directe) des sev propres de u. Il revient au même de dire que E admet une base de vecteurs propres pour u, ou encore qu'il existe une base de E dans laquelle $\mathcal{M}at(u)$ est diagonale (d'où le nom !).

Remarque 4.1. Supposons que χ_u admette n vp distinctes. Alors u est diagonalisable.

Théorème 4.1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ les propositions suivantes sont équivalentes.

(1) u est diagonalisable

(2) Il existe un polynôme annulateur de u, scindé et à racines simples.

(3) Le polynôme caractéristique de u est scindé et la dimension de tout sous-espace propre de u est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

Remarques

(1) Dans (2) le polynôme annulateur n'est pas forcément le polynôme minimal ! On peut rajouter des racines qui n'ont rien à voir.

(2) En combinant (2) et (3), on a l'équivalence si $\chi_u = \prod_{i=1}^{s}(\lambda_i - X)^{m_i}$,

$$u \text{ est diagonalisable si et seulement si } \pi_u = \prod_{i=1}^{s}(\lambda_i - X).$$

Diagonalisation d'une matrice carrée.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si et seulement si il existe un changement de base qui la rende diagonale.

Evidemment : u est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque l'est !

5. Trigonalisation

Soit u un endomorphisme, il est trigonalisable si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si il existe un changement de base qui la rende triangulaire (supérieure).

Nous disposons alors d'un Théorème (et un seul ! ! !) qui caractérise les endomorphismes (resp. les matrices) trigonalisables.

Théorème 5.1. $u \in \mathcal{L}(E)$ est triangularisable si et seulement si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$. Même chose en remplaçant u par $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 5.1. Si le corps de base est $\mathbb{C}$, alors tout endomorphisme est trigonalisable. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Cas d'endomorphisme (et matrice) nilpotent(e)

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est nilpotent(e) s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$ (resp $A^k = 0$). Dans ce cas le plus petit k (il est $\leq n$) vérifiant l'égalité est dit indice de nilpotence.

Théorème 5.2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est nilpotent.

(ii) Le polynôme caractéristique de u est $(-X)^n$.

(iii) u est trigonalisable de spectre nul.

Remarque 5.1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est nilpotent(e) alors elle ne peut être diagonalisable que si elle est nulle, par contre elle est toujours trigonalisable.

Un cas important dans la pratique est celui des endomorphismes nilpotents d'indice $n = \dim E$:

Proposition 5.1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ $\dim E = n$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) vérifie $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$ (resp $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$) alors u (resp A) admet la matrice (resp semblable à la matrice)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans toute base $\left(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, u(x), x\right)$ où x est un vecteur vérifiant $u^{n-1}(x) \neq 0$.

Calcul différentiel 7

1. Fonctions d'une variable réelle

Dans cette section E est un $\mathbb{R}-ev$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ (dans la pratique E est $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), muni d'une norme quelconque (toutes les normes sont équivalentes). Les applications considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans E.

Définition 1.1. On dit que f est dérivable en $a \in I$, si

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right)$$

existe dans E. Cette limite (unique) est notée $f'(a)$. Ce qui équivaut à

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I. L'application

$$f' : x \longmapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)$$

est alors appelée la dérivée de f sur I.

Les dérivées successives sont définies comme pour les fonctions réelles. L'application $f \longmapsto f^{(k)}$ est linéaire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.1. Si $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ dans une base de E, alors f est dérivable en a si et seulement les fonctions (scalaires) f_i $(1 \leq i \leq p)$ le sont. Et dans ce cas $f'(a) = (f'_1(a), f'_2(a), \dots, f'_p(a))$.

Exemples

(1) $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t))$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$, f est dérivable si et si et seulement si $x_1, \dots, x_p$ le sont et

$$f'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_p(t)).$$

(2) $f(t) = (a_{i,j}(t)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, f est dérivable si et ssi les $a_{i,j}$ le sont et $f'(t) = (a'_{i,j}(t))$.

PROPOSITION 1.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$t \longmapsto \exp(tA)$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est l'application :

$$t \longmapsto \exp(tA)A = A\exp(tA)$$

Composition d'applications dérivable

(1) **Compostion par une application linéaire :** Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ dérivable et $u : E \longrightarrow F$ linéaire (E et F Banach). Alors $u \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow F$ est dérivable et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

(2) **Compostion quelconque :** Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow E$ dérivables. Alors $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est dérivable et $(g \circ f)' = f'(g \circ f)$.

1.1. Formule de Leibniz générale

La formule de Leibniz

$$(fg)' = f'g + fg'$$

se généralise au cas de fonctions vectorielles. Si E est une algèbre de Banach, donc muni d'un produit. Et en général :

THÉORÈME 1.1. Si $f, g : I \longmapsto E$ sont deux fonctions de classe C^n, (I intervalle de $\mathbb{R}$ et E une $\mathbb{R}$–algèbre de banach), alors le produit fg est aussi de classe C^n et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

formule toujours valables si $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : I \longmapsto E$.

REMARQUE 1.1 (Importante). En fait la formule de Leibniz se généralise à tout produit (multilinéaire) :

(1) Si $B : E \times F \longrightarrow G$ est bilinéaire (E F et G Banach). Si $f : I \longmapsto E$, $g : I \longmapsto F$ sont deux fonctions dérivables, alors le produit $B(f, g) : I \longmapsto G$ est aussi dérivable et on a :

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$$

en particulier si B est une forme bilinéaire sur E, l'application $t \longmapsto B(f(t), g(t))$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par **Exemple :**

(a) $t \longmapsto \lambda(t)f(t)$, $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$.

(b) $t \longmapsto f(t).g(t)$ produit scalaire dans $\mathbb{R}^p$. En particulier si $\|f\|_2^2 = cste$ alors $\left(\|f\|_2^2\right)' = (f.f)' = 2f'.f = 0$ c.à.d $f' \perp f$.

(c) $t \longmapsto f(t) \wedge g(t)$ produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.

(2) En général, pour une application multilinéaire comme l'application det dans une base B de E qui est une forme p–linéaire sur E ($\dim E = p$). Si $f_1, f_2, ..., f_p$ sont des applications dérivables sur I à valeur dans E alors l'application $\varphi : t \longmapsto \det_B(f_1(t), f_2(t), ..., f_p(t))$ est dérivable et on a

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{p} \det_B(f_1(t), ..., f'_k(t), ..., f_p(t)).$$

1.2. Inégalité des accroissements finis

Théorème 1.2 (Inégalité des accroissements finis). Soient $f : [a, b] \longrightarrow E$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que

$$\forall t \in]a, b[: \|f'(t)\| \leq g'(t).$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

Théorème 1.3. Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$, continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ telle que

$$\forall t \in]a, b[: \|f'(t)\| \leq M$$

alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

Théorème 1.4. Soit $f : I \longrightarrow E$, continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Alors

$$f \text{ est k-lipschitzienne si et seulement si } \forall t \in \overset{\circ}{I} : \|f'(t)\| \leq k.$$

On en déduit que pour toute application f dérivable sur l'intérieur de I, continue sur I, ona a :

$$f \text{ est constante sur } I \Longleftrightarrow f' \text{ est identiquement nulle.}$$

Théorème 1.5 (prolongement d'application dérivable). Soit E un espace vectoriel normé complet et $f :]a, b[\longrightarrow E$ dérivable, telle que la fonction f' admet une limite ℓ au point a. Alors f se prolonge en une application continue $\tilde{f} : [a, b[\longrightarrow E$. L'application $\tilde{f}$ est dérivable sur $[a, b[$ et $\tilde{f}'(a) = \ell$.

1.3. Formules de Taylor

Théorème 1.6 (Inégalité de Taylor-Lagrange). Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$ de classe C^n ; on suppose que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et que

$$\left\|f^{(n+1)}(t)\right\| \leq M$$

alors
$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème 1.7 (Formule de Taylor Young). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow E$, n fois dérivable au point a. Alors, au voisinage de a,

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((t-a)^n)$$

2. Fonctions de plusieurs variables réelles

Dans la suite, les fonctions considérés sont définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

2.1. Différentiabilité et différentielle d'une application

Définition 2.1. On dit qu'une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est différentiable en un point a de U, s'il existe une application linéaire appelée différentielle de f en a et notée $df(a)$ (ou df_a, $Df(a)$, $f'(a)$) telle que

$$\forall x \in U : f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + \|x-a\|\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Proposition 2.1. Toute application linéaire est différentiable, et égale à sa différentielle en tout point.

Proposition 2.2. Si $B : E \times F \longrightarrow G$ est bilinéaire alors elle différentiable et sa différentielle en $(a, b) \in E \times F$ est :

$$dB_{(a,b)} : (h, k) \longmapsto B(a, k) + B(h, b).$$

- Tous les produit usuels sont différentiables.

Proposition 2.3. Toute application différentiable est continue.

Opérations sur les différentielles

- Combinaisons linéaires : $d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$
- Composée : $d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a$. En particulier si f est linéaire $d(f \circ g)_a = f \circ dg_a$
- Conséquences : Produit et inverse.

Proposition 2.4. $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, ..., f_n)$ différentiable si et seulement si toutes les f_i le sont et $f' = (f'_1, ..., f'_n)$.

2.2. Dérivées partielles

Définition 2.2. On appelle dérivée $D_v f(a)$ de f en a suivant un vecteur non nul $v \in E$, la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

si elle existe. C'est la dérivée de la fonction de la variable réelle $t \mapsto f(a+tv)$ en 0.

Remarque 2.1. Les propriétés (somme, C.L, produit : tous les produits) sur les dérivées s'appliquent aussi aux dérivées directionnelles.

Proposition 2.5. Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ est différentiable en $a \in U$, alors f admet des dérivées dans tous les sens et$\partial_v f(a) = df_a(v)$ pour tout $v \in E$.

Définition 2.3. Si $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\partial_{e_i} f(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est appelée dérivée partielle de f d'indice i en a, on la note aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, si $(x_1, ..., x_p)$ désigne un point générique de $\mathbb{R}^p$.

2.3. Matrice jacobienne

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable en a. La matrice jacobienne de f en a est la matrice de la différentielle df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

où $f = (f_1, \cdots, f_n)$.

Dans le cas $p = n$, la matrice $J_f(a)$ est carrée, son déterminant est le **jacobien** de f en a.

Remarque 2.2.
- Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, à variable réelle alors

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \end{pmatrix} \quad \text{matrice colonne}$$

qu'on confond avec le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de associé.

- Si $f:\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, est numérique alors

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \cdots \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right) \quad \text{matrice ligne}$$

qu'on confond avec la forme linéaire associée. Dans ce cas le vecteur

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \cdots \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)$$

est appelé le **gradient** de f en a noté $\operatorname{grad} f(a)$ ou $\overrightarrow{\nabla f(a)}$.
- Les opérations sur les dérivées permettent d'avoir

$$J_{\lambda f+\mu g}(a) = \lambda J_f + \mu J_g \quad \text{et} \quad \nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$$
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f, g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

et aussi le gradient et la jacobienne de tous les "produits", par exemple :

$$J_{\lambda f}(a) = f(a) J_\lambda(a) + \lambda(a) J_f(a)$$
$$\text{où } \lambda : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Proposition 2.6. Si $f:\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable en a, alors

$$\forall h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p : df_a(h) = J_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \ldots \\ h_p \end{pmatrix}$$

en particulier Si $f:\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \overrightarrow{\nabla f(a)}.h \text{ produit scalaire.}$$

Composition d'applications différentiables

Théorème 2.1. Soient U ouvert de $\mathbb{R}^p$, V ouvert de $\mathbb{R}^q$, $f : U \longrightarrow V$, et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $b = f(a)$ alors

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a) \quad \text{produit matriciel.}$$

En particulier si $p = q = n$ et $f : U \longrightarrow V$ bijective avec f et f^{-1} différentiable, alors

$$J_{f^{-1}}(f(a)) = (J_f(a))^{-1}.$$

Composée des dérivées partielles

Avec les notations ci-dessus, on a :

(1) Dans le cas général :

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x_j}(a)=\left(\frac{\partial\left(g_i\circ f\right)}{\partial x_j}(a)\right)_{1\le i\le n}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial g_1}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\\ \dots\\ \sum_{k=1}^{q}\frac{\partial g_n}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\end{pmatrix}$$

c'est la $j^{\text{ième}}$ colonne de $J_{gof}(a)$.

(2) Dans les cas particuliers :

- $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^q=(f_1,\dots,f_q)$ et $g:\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(a)&=\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))f_k'(a)\\&=\overrightarrow{\nabla g(f(a))}.f'(a)\quad\text{produit scalaire}\end{aligned}$$

- $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^q=(f_1,\dots,f_q)$ et $g:\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $g=(g_1,\dots,g_n)$, alors $g\circ f=(g_1\circ f,\dots,g_n\circ f)$ et

$$(g_j\circ f)'(a)=\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(a))f_k'(a)$$

- $f:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^q=(f_1,\dots,f_q)$ et $g:\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial g\circ f}{\partial x_j}(a)&=\sum_{k=1}^{q}\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\\&=\overrightarrow{\nabla g(f(a))}.\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\quad\text{produit scalaire}\end{aligned}$$

 et donc

$$\overrightarrow{\nabla g\circ f(a)}=\overrightarrow{\nabla g(f(a))}J_f(a)$$

 Un cas particulier:

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{R}^2&\xrightarrow{f}&\mathbb{R}^2&\xrightarrow{g}&\mathbb{R}\\(u,v)&\longmapsto&(x,y)&\longmapsto&g(x,y)=g\circ f(u,v)\end{array}$$

 on a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(g\circ f\right)}{\partial u}(u,v)&=\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\&=\overrightarrow{\nabla g(x,y)}.\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\quad\text{produit scalaire}\end{aligned}$$

- $f:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ alors

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x_j}(a)=g'(f(a))\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

2.4. Applications de classe $\mathcal{C}^1$

On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si elle est différentiable sur U et toutes ses dérivées partielles sont continues sur U.

- **Exemples :**
  (1) Toutes les fonctions polynômiales sont de classe $\mathcal{C}^1$.
  (2) La fonctions $A \longmapsto A^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 2.7. L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ des applications de $\mathcal{C}^1$ sur U est un $\mathbb{R} - ev$.
En plus toute composée et tout "produit" de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 2.2 (Caractérisation). $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et toutes ses dérivées partielles sont continues. Dans ce cas l'application

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ x &\longmapsto df_x \end{aligned}$$

est continue et réciproquement.

2.5. Dérivées successives

- Si les dérivées partielles de $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont différentiables, on définit les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \text{si } i = j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_i}$$

et si les dérivées secondes sont différentiables, les dérivées partielles d'ordre 3 et ainsi de suites, avec la récurrence

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)}{\partial x_{i_1}} \quad \text{pour} \quad (i_1, \dots, i_k) \in [\![1, p]\!]^k$$

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si, $\forall (i_1, \dots, i_k) \in [\![1, p]\!]^k$, l'application

$$x \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x)$$

est définie et continue sur U.

- On note $\mathcal{C}^k(U; \mathbb{R}^n)$ avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.
- Tous les opérateurs de dérivations sont linéaires.

Théorème de Schwarz

Théorème 2.3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \forall x \in U : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

en général si f est de classe $\mathcal{C}^k$. Alors $\forall (i_1, ..., i_k) \in [\![1,p]\!]^k$, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_k$, $\forall x \in U$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(i_1)} ... \partial x_{\sigma(i_k)}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}}(x)$$

Remarque 2.3. Dans le cas de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ on note, par exemple, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ au lieu de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ et en général $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{k_1} ... \partial x_{i_s}^{k_s}}$ si on dérive k_j fois par rapport à i_j.

2.6. Inégalité des accroissements finis

Théorème 2.4. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, U un **ouvert convexe** de E et $f : U \longrightarrow F$ différentiable telle que

$$\forall x \in U : \|\!|df(x)|\!\| \leq M \text{ , } M \text{ un réel positif}$$

Alors pour tout $a, b \in U$: $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$.

On en déduit alors que si U un **ouvert convexe** et $f : U \longrightarrow F$ différentiable. Alors f est constante sur U si et seulement si df est nulle sur U.

3. Fonctions implicites et inversion locale

3.1. Théorème des fonctions implicites

Théorème 3.1 (Cas général). Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_p)$ et $f = (f_1, ..., f_p)$. Soit $(a, b) \in W$ tel que $f(a, b) = 0$ et

$$Q = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b) \right)_{1 \leq i,j \leq p} \quad \text{est inversible.}$$

Alors, il il existe des voisinages ouverts U de a et V de b, tels que

$$\forall x \in U, \exists ! y \in V \text{ tel que } f(x,y) = 0.$$

Si l'on pose $y = \varphi(x)$, φ est continue sur U et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage U_0 de a. En plus si f est de classe $\mathcal{C}^k$ alors φ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème 3.2 (Cas pratiques important).

- Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\Gamma = \{(x,y) \in W \mid f(x,y) = 0\}$. Pour tout $(a,b) \in \Gamma$ tel que
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0,$$
il existe deux intervalles ouverts I et J tels que $a \in I$, $b \in J$ et une application de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi : I \longrightarrow J$,telle que Γ soit son graphe. Dans ce cas $\varphi(a) = b$ et
$$\varphi'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$$

- Soit W un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in W \mid f(x,y,z) = 0\}$. Pour tout $(a,b,c) \in \Sigma$ tel que
$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$$
il existe deux ouverts U et J tels que $(a,b) \in U$, $c \in J$ et une application de classe $\mathcal{C}^1$, $\varphi : U \longrightarrow J$,telle que Σ soit son graphe. Dans ce cas $\varphi(a,b) = c$ et
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)}{\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}{\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}$$

3.2. Théorème d'inversion locale

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et V un ouvert de F. On dit que $f : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ si

(i) f est bijective de U sur V.

(ii) f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Dans ce cas
$$\forall y \in V, d(f^{-1})(y) = \left(df(f^{-1}(y))\right)^{-1}$$

- En plus si f est à la fois de classe $\mathcal{C}^k$ et un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme, alors f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^k$. On dit alors que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.
- Si E et F sont de dimensions finies, l'existence d'un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un ouvert de E sur un ouvert de F nécessite que $\dim E = \dim F$
- On peut calculer les dérivées partielles de f^{-1} à l'aide des matrices jacobiennes grâce à la formule :
$$J_{f^{-1}}(y) = \left(J_f(f^{-1}(y))\right)^{-1}$$

Théorème 3.3 (inversion locale). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$ tel que $df(a)$ soit un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ (autrement dit la matrice $J_f(a)$ est inversible). Alors il existe un ouvert U_0 contenant a et un ouvert V_0 contenant $f(a)$ tel que f induise un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U_0 sur V_0.

Théorème 3.4 (inversion globale). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que

(i) f est injective

(ii) $\forall x \in U$, $J_f(x)$ est une matrice inversible.

Alors $f(U) = V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur V.

4. Extrema des fonctions réelles

Les fonctions considérées dans cette section sont définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

Théorème 4.1 (Condition nécessaire d'extremum). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$. Si f admet en a un extremum local, alors

$$\forall i \in [\![1, p]\!] : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

Un point a, en lequel la conditon $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ est vérifiée, est appelé **point critique** ou **stationnaire.**

Théorème 4.2 (Formule de Taylor-Young). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$. Alors pour tout $h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) = & \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ & + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2\sum_{i<j}^{p} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \\ & + o\left(\|h\|^2\right). \end{aligned}$$

Définition 4.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$. On appelle différentielle seconde de f en a la fonction polynômiale de degré 2 :

$$\Phi_a : h = (h_1, \ldots, h_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2\sum_{i<j}^{p} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

de sorte que, grâce à la formule de Taylor-Young :

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{1}{2}\Phi_a(h)+o\left(\|h\|^2\right).$$

Théorème 4.3 (Condition suffisante d'extremum). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ tel que

$$\forall i \in [\![1,p]\!] : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0$$

alors :

(i) Si pour tout $h \neq 0$, $\Phi_a(h) > 0$, alors f admet un minimum local strict.

(ii) Si pour tout $h \neq 0$, $\Phi_a(h) < 0$, alors f admet un maximum local strict.

(iii) Si Φ_a change de signe alors alors f n'admet pas d'extremum en a (on dit dans ce cas que a est un point **selle** ou point **col** de a, par analogie avec une selle de cheval ou un col de montagne).

- **Cas particulier où** $p=2$: soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $(a,b) \in U$. Une condition nécessaire pour que f admette en (a,b) un extremum est que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

On pose

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b),\ \ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b),\ \ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

Les conditions du théorème s'écrivent :

(i) $rt-s^2>0$ et $r>0$, alors f admet en a un minimum local strict.

(ii) $rt-s^2>0$ et $r<0$, alors f admet en a un maximum local strict.

(iii) $rt-s^2<0$, alors f admet en a un point selle (pas d'extremum local en a).

(iv) $rt-s^2=0$, alors on ne peut pas conclure.

4.1. Extrema liés

- Soit n un entier ≥ 2 et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le problème d'extrema liés consiste, étant données des fonctions

$$f, g_1, \ldots, g_p : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classes } \mathcal{C}^1,\ \ (p \leq n)$$

et en supposant l'ensemble

$$\sum=\bigcap_{k=1}^{p}\{x \in U \mid g_k(x)=0\} \neq \varnothing,$$

à étudier les extrema locaux de f sur $\sum$. On dispose du théorème suivant sous la condition

$$\forall a \in \sum :\ \text{ la famille } \left(dg_1(a), \ldots, dg_p(a)\right) \text{ est libre}$$

Théorème 4.4. Avec les notations et hypothèses ci-dessus, si f présente un extremum local en $a \in \sum$. Alors il existe une (unique) famille $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ telle que

$$df(a) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k dg_k(a)$$

les λ_k sont alors appelés multiplicateurs de Lagrange.

Intégration de fonctions vectorielles 8

1. Intégration sur un segment

On va généraliser la notion d'intégrale à une classe plus large de fonctions définies sur $[a, b]$ **à valeur dans un evn** F **de dimension finie**, en utilisant la notion de convergence uniforme.

1.1. Fonctions réglées

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow E$ est réglée si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur I.

- Ainsi toute fonction en escalier est réglée.
- Des propriétés des opérations sur les fonctions et la convergence uniforme, on déduit :

La caractérisation suivante est plus pratique :

THÉORÈME 1.1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow F$ Banach. f est réglée si et seulement si elle admet des limite à droite en tout point de $[a, b[$ et à gauche en tout point de $]a, b]$.

Elle permet de voir que toute fonction monotone est réglée.

THÉORÈME 1.2. L'ensemble $\mathcal{L}([a, b]; E)$ des applications réglées de $[a, b]$ dans E (Banach) est un sev de $\mathcal{B}([a, b]; E)$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$ c'est un espace de Banach. Le sous-espace vectoriel des fonctions en escalier étant dense dans $\mathcal{L}([a, b]; F)$.

Dans le cas où I est un intervalle quelconque, on ne peut pas conclure qu'une fonction réglée est bornée. On définit alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}^\infty(I, \mathbb{K})$ ou $\mathcal{L}^\infty(I)$ des fonctions réglées bornées sur I, il est muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

- Que deviennent les fonctions continues (par morceaux) ! Elles sont réglées.

Pour les fonctions continues, on a un autre résultat d'approximations uniforme :

Théorème 1.3. Toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow F$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux sur $[a, b]$. i.e. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow F$ continue affine par morceaux telle que

$$\forall x \in [a, b] : \|f(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon.$$

1.2. Intégrale de fonctions réglées

Le résultat suivant permet de généraliser la notion d'intégrale aux fonctions réglées.

Théorème 1.4. Soit $f : [a, b] \longrightarrow F$ une fonction réglée. Pour toute suite de fonctions en escalier $\varphi_n : [a, b] \longrightarrow F$ convergeant uniformément vers f, la suite $\left(\int_a^b \varphi_n\right)_n$ est convergente dans F. Sa limite dépend uniquement de f.

La limite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n$ est appelée l'intégrale de f sur $[a, b]$, qu'on note $\int_a^b f(t)dt$, i.e.

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt \text{ avec } \varphi_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [a, b].$$

- Bien entendu si $a > b$, on pose $\int_a^b f = -\int_b^a f$ et si $a = b$, on pose $\int_a^a f = 0$
- Il est clair que si f est en escalier la nouvelle définition coïncide avec l'ancienne.
- Remarquons que si $f = (f_1, ..., f_d) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$, alors f est réglée si et seulement si les f_i le sont et on a :

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, ..., \int_a^b f_d\right)$$

Propriétés

(1) L'application $\mathcal{L}([a, b]; F) \longrightarrow F : f \longmapsto \int_a^b f(t)dt$ est linéaire.

(2) $\forall u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\forall f \in \mathcal{L}([a, b]; F)$, E et F deux evn de dimension finie, alors $u \circ \varphi \in \mathcal{L}([a, b]; F)$ et

$$u\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b u \circ f(t)dt$$

(3) $\forall f \in \mathcal{L}([a, b]; F)$ alors $\|f\| \in f \in \mathcal{L}([a, b]; \mathbb{R})$ et

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| \, dt.$$

(4) $\forall f \in \mathcal{L}([a, b]; F)$, $\forall c \in [a, b]$, alors $f_{|[a,c]} \in \mathcal{L}([a, c]; F)$ et $f_{|[c,b]} \in \mathcal{L}([c, b]; F)$ et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

(5) Inégalité de la moyenne. $\forall f \in \mathcal{L}([a, b]; F)$:

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq (b - a) \, \|f\|_\infty.$$

1.3. Primitive et intégrale

Théorème 1.5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow E$ réglée. Pour tout $a \in I$, la fonction

$$F : I \longrightarrow E; \quad x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

est continue sur I et dérivable en tout point x où f est continue, et on a alors $F'(x) = f(x)$. En particulier si f est continue sur I, pour tout $a \in I$, la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f

- Comme pour les fonctions réelles, grâce au théorème des accroissements finis, si f est continue sur I, et F une primitive de f sur I, alors les primitives de f sont les fonctions $F + c$, avec $c \in F$.
- Le lien entre intégrale et primitive est alors établi :

Théorème 1.6. Si $f : [a, b] \longrightarrow E$, continue, alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \text{ pour toute primitive } F \text{ de } f.$$

- A partir de là, le calcul d'intégrale de fonctions vectorielles se ramène à la recherche de primitive. Ce qui permet de retrouver les téchnique usuelles de calcul : intégration par parties, changement de variable, ...

Et en général, on a le théorème :

Théorème 1.7 (Formule de Taylor avec reste intégral). Soit $f : I \longrightarrow E$, de classe C^{n+1}. Alors, $\forall a, b \in I$:

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

2. Intégration sur un intervalle quelconque

Dans toute la suite I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrêmités $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On considère des fonctions définies sur I à valeur dans $\mathbb{R}^d$, continues par morceaux (ou réglées), de sorte que pour tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$, l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)dt$ soit définie. Dans la suite, on se propose de généraliser la notion d'intégrale et d'intégrabilité à un intervalle I quelconque.

DÉFINITION 2.1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux et F une primitive de f sur I ($F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ pour un x_0 fixé dans I). On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ existent dans $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, on pose

$$\int_I f = \int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Si non on dit que l'intégrale est divergente.

2.1. Cas de fonctions positives

THÉORÈME 2.1. Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux **positive**. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convegente si et seulement si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, b[$. Dans ce cas

$$\int_a^b f(t)dt = \sup_{x\in[a,b[} \int_a^x f(t)dt.$$

THÉORÈME 2.2 (Critère de Cauchy). Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convegente si et seulement si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ vérifie le critère de Cauchy au voisinage de b, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in [a, b[\text{ tel que}$$
$$\forall x, y \in [A, b[: \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \varepsilon$$

2.2. Intégrales absolument convergentes

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convegente si $\int_a^b \|f(t)\| dt$ est convergente.

THÉORÈME 2.3. Toute intégrale absolument convergente est convergente, et dans ce cas

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

DÉFINITION 2.2. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue par morceaux est **intégrable** ou **sommable** sur I si l'intégrale $\int_I f$ est absolument convergente.

On note $\mathcal{L}^1\left(I, \mathbb{R}^d\right)$ l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continues par morceaux telles que l'integrale

$$\|f\|_1 = \int_I \|f(t)\| \, dt \text{ soit convergente.}$$

THÉORÈME 2.4. $\mathcal{L}^1\left(I, \mathbb{R}^d\right)$ est un $\mathbb{R} - ev$. L'application $f \longmapsto \|f\|_1$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^1\left(I, \mathbb{R}^d\right)$.

Fonctions à carré intégrable

On note $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(I)$ l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux telles que l'integrale

$$(\|f\|_2)^2 = \int_I |f(t)|^2 \, dt \text{ soit convergente.}$$

THÉORÈME 2.5. $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{C}$) $- ev$. L'application $f \longmapsto \|f\|_2$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$ qui vérifie en plus

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{C}), \ fg \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C}) \text{ et}$$
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad \text{(Inégalité de Cauchy Schwarz)}$$

Intégration par parties

La méthode d'intégration par parties basée sur la formule de dérivation d'un produit reste valable.

THÉORÈME 2.6. Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telles que $\lim_{x \to b^-} f(x)g(x)$ existe dans $\mathbb{C}$. Alors les deux intégrales

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt \text{ et } \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

sont de même nature et dans le cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Intégration par changement de variable

Théorème 2.7. Soient $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ (par morceaux) bijective (strictement monotone). Alors les deux intégrales

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \text{ et } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

sont de même nature et dans le cas de convergence, on a

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

2.3. Principe de comparaison

Comparaison de base

Théorème 2.8. Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux **positives** telles que

$$f \leq g \text{ sur un voisinage de } b.$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

comparaison asymptôtique

Théorème 2.9. Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux **positives** telles que

- Si $f(x) \underset{x \to b^-}{\sim} g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ sont de même nature. En plus,
  – Dans le cas de **convergence**
  $$\int_x^b f(t)dt \underset{x \to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)dt$$
  – Dans le cas de **divergence**
  $$\int_a^x f(t)dt \underset{x \to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)dt$$
- Si $f(x) \underset{x \to b^-}{=} O(g(x))$ (resp $o(g(x))$) alors

– $\int_a^b g(t)dt$ converge implique que $\int_a^b f(t)dt$ converge et

$$\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b^-}{=} O\left(\int_x^b g(t)dt\right) \text{ (resp } o\left(\int_x^b g(t)dt\right)\text{)}$$

– $\int_a^b f(t)dt$ diverge implique que $\int_a^b g(t)dt$ diverge et

$$\int_a^x f(t)dt \underset{x\to b^-}{=} O\left(\int_a^x g(t)dt\right) \text{ (resp } o\left(\int_x^b g(t)dt\right)\text{)}$$

- Un moyen efficace pour l'étude de convergence est la comparaison avec les intégrales de Riemann :
  – Si $b = +\infty$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge
  – Si $b \in \mathbb{R}$ et $f(t) \underset{t\to b^-}{=} O\left(\frac{1}{(b-t)^\alpha}\right)$ avec $\alpha < 1$, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- Dans le cas de fonction quelconque, la méthode d'éclatement qui consiste à écrire un DAS de f en b (comme pour les séries) est très pratique.

2.4. Comparaison série intégrale

Cas de fonctions réelles

Théorème 2.10. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante. On pose $x_n = f(n)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Alors :

(1) $\sum x_n$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

(2) La suite (u_n) définie par $u_n = S_n - \int_a^n f(t)dt$ (et donc la série $\sum \left(\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)\right)$) converge.

(3) Si $\sum x_n$ diverge alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_a^n f(t)dt$.

Cas de fonctions complexes

Théorème 2.11. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f' soit intégrable sur $[0, +\infty[$. Posons $w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$. Alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

Théorème 2.12. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soit intégrables sur $[0, +\infty[$. Alors la série $\sum f(n)$ est absolument convergente.

Remarque 2.1. dans le théorème le choix de $[0, +\infty[$ est juste pour commencer les indices à partir de zéro. On peut choisir un intervalle $[a, +\infty[$.

2.5. Quelques espaces fonctionnels

▶ La "norme" $\| \ \|_1$ sur $\mathcal{L}([a, b]; \mathbb{C})$ est définie par

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$$

appelée aussi la norme de convergence en moyenne.

En fait : il ne s'agit que d'une **semi-norme** sur $\mathcal{L}([a, b]; \mathbb{C})$. Par contre si on suppose les fonctions réglées "**normalisées**", c'est un terme du programme officiel des mathématiques de la classe MP des CPGE marocaines, de sorte que l'implication

$$\int_a^b |f(t)|\, dt = 0 \Longrightarrow f = 0$$

soit vraie pour tout $f \in \mathcal{L}([a, b]; \mathbb{C})$, dans ce cas $\| \ \|_1$ serait vraiment un evn. Celà suppose donc, qu'en tout point $x_0 \in]a, b[$ (de discontinuité de f), on pose

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right)$$

avec en a et en b,

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{et } f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

- Soit (f_n) une suite de fonctions réglées sur $[a, b]$ et $f \in \mathcal{L}([a, b]; E)$. On dit que (f_n) **converge en moyenne** vers f si $\|f_n - f\|_1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ dans l'evn $(\mathcal{L}([a, b]; E), \| \ \|_1)$.
- De même on dit que la série $\sum f_n$ converge en moyenne vers f si c'est le cas dans cet evn. De sorte que

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\| \ \|_1} f \Longrightarrow \begin{cases} \|f_n\|_1 \xrightarrow[n \to \infty]{\text{dans } \mathbb{R}} \|f\|_1 \\ \text{et} \\ \int_a^b f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{dans } \mathbb{C}} \int_a^b f \end{cases}$$

et aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f \text{ pour } \| \ \|_1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f \text{ dans } \mathbb{C}.$$

- On a l'inégalité de la moyenne :

$$\|f\|_1 \leq (b - a) \|f\|_\infty$$

On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ (I segment ou non, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) réglée est intégrable, si l'intégrale $\int_I |f|$ est convergente.

L'ensemble des fonctions réglées intégrables sur I est un $\mathbb{K} - ev$.

- L'espace vectoriel normé $\mathcal{L}^1(I)$ des fonctions réglées (normalisées) à valeurs complexes intégrables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \ \|_1$:

$$\|f\|_1 = \int_I |f| \, .$$

- L'espace vectoriel normé $\mathcal{L}^2(I)$ des fonctions réglées (normalisées) à valeurs complexes de carré intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, muni de la norme $\| \ \|_2$:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}.$$

cette norme est issue d'un produit scalaire, elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^2(I), \ f\overline{g} \in \mathcal{L}^1(I) \text{ et}$$
$$\left| \int_I f\overline{g} \right| \leq \|f\overline{g}\|_1 \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2 \, .$$

Equations différentielles 9

1. Rappels MPSI

1.1. Équations linéaires de premier ordre

C'est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (\mathcal{L}_1)$$

où a, b sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle *équation homogène* ou encore *équation sans second membre* associée, l'équation :

$$y' = a(x)y \qquad (\mathcal{H}_1)$$

a est une fonction continue sur I (intervalle) à valeur dans $\mathbb{K}$. On cherche donc les solutions défines et dérivables sur I.

Théorème 1.1. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_1)$ est l'ensemble des fonctions définies sur I par :

$$x \longmapsto \lambda e^{A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où A est une primitive de a sur I.

Théorème 1.2. Si y_p est une solution de $(\mathcal{L}_1)$; alors les solutions de $(\mathcal{L}_1)$ sont les fonctions :

$$y : x \longmapsto y_p(x) + \lambda e^{A(x)},\ \lambda \in \mathbb{K}.\ A \text{ étant primitive de } a \text{ sur } I.$$

Méthode de la variation de la constante

On pose $y(x) = z(x)e^{A(x)}$ et on cherche une condition sur z pour que y soit solution de $(\mathcal{L}_1)$.

PROPOSITION 1.1. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{L}_1)$ est l'ensemble des fonctions

$$y : x \longmapsto \left(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt + \lambda\right) e^{A(x)},\ \lambda \in \mathbb{K}.\ A \text{ étant primitive de } a \text{ sur } I \text{ et } x_0 \in I.$$

Le problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy associé à l'équation $(\mathcal{L}_1)$ au point $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème qu'on écrit

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_{\mathcal{C}})$$

Qui consiste à trouver les solutions de $(\mathcal{L}_1)$ qui prennent la valeur y_0 en x_0.

THÉORÈME 1.3. Pour toute donnée initiale $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})$ admet une solution unique.

1.2. Equations linéaires du second ordre

D'abord le cas à **coefficients constants**, il s'agit d'équation du type :

$$ay'' + by' + cy = d(x) \qquad ((\mathcal{L}_2))$$

où $a \neq 0$, b et c sont des scalaires de $\mathbb{K}$ et d une fonction continue d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (\mathcal{H}_2)$$

PROPOSITION 1.2. La fonction $x \longmapsto e^{rx}$ est une solution de $(\mathcal{H}_2)$ si, et seulement si, r est solution dans $\mathbb{K}$ de $r^2 + ar + b = 0$.

L'équation algébrique :

$$r \in \mathbb{K} : r^2 + ar + b = 0 \qquad (1.1)$$

est appelée *équation caractéristique* de $(\mathcal{H}_2)$.

Le cas complexe

THÉORÈME 1.4. Soit l'équation $(\mathcal{H}_2)$ avec $a \neq 0$, b et c sont dans $\mathbb{C}$, on note $\triangle$ le discriminant de (1.1).

(i) Si l'équation caractéristique (1.1) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 ($\triangle \neq 0$), alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

(ii) Si l'équation caractéristique (1.1) admet une racine double r ($\triangle = 0$), alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto (Ax + B)\, e^{rx}, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Passage du complexe au réel

PROPOSITION 1.3. Si y est une solution de $ay'' + by' + cy = 0$, alors $\overline{y}$ est une solution de $\overline{a}y'' + \overline{b}y' + \overline{c}y = 0$.
En particulier si $a, b, c \in \mathbb{R}$ et si y est une solution complexe de $(\mathcal{H}_2)$ alors $\mathrm{Re}(y)$ et $\mathrm{Im}(y)$ sont aussi solutions de $(\mathcal{H}_2)$.

Le cas réel

THÉORÈME 1.5. Soit l'équation $(\mathcal{H}_2)$ avec $a \neq 0$, b et c sont dans $\mathbb{R}$, on note $\triangle$ le discriminant de (1.1).

(i) Si l'équation caractéristique (1.1) admet deux racines distinctes r_1 et r_2 ($\triangle > 0$), alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si l'équation caractéristique (1.1) admet une racine double r ($\triangle = 0$), alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto (Ax + B)\, e^{rx}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(iii) Si l'équation caractéristique (1.1) n'admet pas de racines réelles ($\triangle < 0$) mais plutôt deux racines complexes conjuguées $z_1 = u + iv$ et $z_2 = u - iv$, alors les solutions de l'équation $(\mathcal{H}_2)$ sont les fonctions

$$y : x \longmapsto e^{ux}\,(A\cos(vx) + B\sin(vx))\,, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

THÉORÈME 1.6. Si y_p est une solution de $(\mathcal{L}_2)$; alors une fonction y est une solution de $(\mathcal{L}_2)$ si, et seulement si, $y - y_p$ est une solution de $(\mathcal{H}_2)$. Ce qui veut dire que les solutions de $(\mathcal{L}_2)$ sont les fonctions :

$$y : x \longmapsto y_p(x) + y_0(x), \; y_0 \text{ solution de } (\mathcal{H}_2).$$

Cas d'un second membre de la forme $P(x)$

Soit a, b et c dans $\mathbb{K}$ et P fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = P(x) \tag{$\mathcal{L}_P$}$$

PROPOSITION 1.4. Si $c \neq 0$, l'équation $(\mathcal{L}_P)$ admet une solution particulière polynômiale de même degré que P.

Cas d'un second membre de la forme $e^{\alpha x}P(x)$

Soit a, b et c dans $\mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et P fonction polynômiale à coefficients dans $\mathbb{K}$. On considère l'équation

$$ay'' + b\,y' + c\,y = e^{\alpha x}P(x) \qquad (\mathcal{L}_P E)$$

Proposition 1.5. L'équation $(\mathcal{L}_{PE})$ admet une solution particulière de la forme $e^{\alpha x}Q(x)$ où Q est polynômiale de degré

(i) égal à $\deg(P)$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique (1.1),

(ii) égal à $\deg(P)+1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique (1.1),

(iii) égal à $\deg(P)+2$ si α est racine double de l'équation caractéristique (1.1),

Remarque 1.1. Si le second membre est de la forme $P_1(x)\cos(\alpha x)$ (ou $P_2(x)\sin(\alpha x)$), on se ramène au cas précédent en remarquant que $\cos(\alpha x)$ est la partie réelle de $e^{i\alpha x}$.

Cas de coefficients non constants

Il s'agit du cas où $a \neq 0$, b, c et d sont des fonctions continues d'un intervalle I à valeurs réelles ou complexes.

- Dans toute la suite On suppose que a ne s'annule pas sur I, on dit que l'équation $(\mathcal{L}_2)$ est ***régulière***.
- Le problème de Cauchy associé à $(\mathcal{L}_2)$ en $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, est le problème qui consiste à trouver les fonctions y vérifiant

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(x) & \text{sur} \quad I, \\ y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = y_1. \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_{\mathcal{C}}2)$$

Théorème 1.7. Pour tout $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P}_{\mathcal{C}2})$ admet une unique solution.

Proposition 1.6. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ est un $\mathbb{K}-ev$ de dimension 2. Si Y_0 est une solution de $(\mathcal{L}_2)$ alors les solutions de $(\mathcal{L}_2)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto Y_0(x) + Y(x) \text{ où } Y \text{ est solution de } (\mathcal{H}_2)$$

- Dans ce cas tout Système fondamental de solutions contient deux solutions (h_1, h_2) non proportionnelles, le wronskien est alors donné par :.

$$\forall t \in I, \; w(h_1, h_2)(t) = \det \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2. Le wronskien $w(h_1, h_2)$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et deux applications proportionnelles ont un wronskien identiquement nul.

Proposition 1.7. Soient (h_1, h_2) un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H}_2)$; pour toute fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, il existe un unique couple (g_1, g_2) de fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, tel que$\forall t \in I$,

$$\begin{cases} f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \\ f'(t) = h_1'(t)g_1(t) + h_2'(t)g_2(t) \end{cases}$$

ou de manière équivalente :

$$\begin{cases} f(t) = h_1(t)g_1(t) + h_2(t)g_2(t) \\ h_1(t)g_1'(t) + h_2(t)g_2'(t) = 0 \end{cases}$$

- La méthode de variation *des* constantes consiste donc à rechercher les solutions y de $(\mathcal{L}_2)$ sous la forme :

$$y(x) = y_1(x)h_1(x) + y_2(x)h_2(x)$$

avec les conditions équivalentes :

$$y' = h_1'y_1 + h_2'y_2 \iff 0 = h_1y_1' + h_2y_2'$$

en dérivant

$$y'' = h_1''y_1 + h_2''y_2 + h_1'y_1' + h_2'y_2'$$

Ce qui permet de montrer que les fonctions inconnues y_1 et y_2 sont donc solutions du système linéaire

$$\begin{cases} h_1(x)y_1' + h_2(x)y_2' = 0 \\ h_1'(x)y_1' + h_2'(x)y_2' = \dfrac{1}{a}d(x) \end{cases}$$

d'où l'expression des fonctions y_1' et y_2' :

$$\begin{cases} y_1'(x) = -\dfrac{1}{a}\dfrac{d(x)h_2(x)}{h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)} \\[2ex] y_2'(x) = \dfrac{1}{a}\dfrac{d(x)h_1(x)}{h_1(x)h_2'(x) - h_1'(x)h_2(x)} \end{cases}$$

Ce qui permet de déterminer y_1 et y_2, et donc y après le calcul de deux primitives.

Réduction de l'équation homogène connaissant une solution ne s'annulant pas

On suppose $a = 1$. Si h une solution de $(\mathcal{H}_2)$ *qui ne s'annule pas sur* I ; on effectue le changement de fonction inconnue :

$$y = \frac{x}{h(t)} \quad \text{de sorte que } x = h(t)y$$

en dérivant on a

$$\begin{cases} x' = h'(t)y + h(t)y' \\ x'' = h''(t)y + 2h'(t)y' + h(t)y'' \end{cases}$$

En substituant x dans $(\mathcal{L}_2)$, on obtient su

$$h(t)y'' + (2h'(t) + b(t)h(t))\, y' = 0$$

et x est solution de $(\mathcal{L}_2)$ si, et seulement si, y est solution de

$$h(t)y'' + (2h'(t) + b(t)h(t))\, y' = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en la variable y', équation que l'on sait résoudre en calculant deux primitives :

$$\begin{cases} y' = z \\ z' + \left(2\dfrac{h'(t)}{h(t)} + b(t)\right) z = 0 \end{cases}$$

Remarque 1.3. Les deux intégrations successives donnent l'existence de deux constantes pour x, ce qui montre que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{L}_2)$ dépend de deux constantes.

1.3. Equations différentielles à variables séparées

Il s'agit d'équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :

$$f(y).y' = g(x) \tag{$\mathcal{E}_S$}$$

où g et f sont des fonctions définies respectivement sur deux intervalles I et J.

Une solution de $(\mathcal{E}_S)$ est la donnée d'un couple (Ω, y) où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I et y une fonction dérivable sur Ω à valeur dans J vérifiant

$$\forall x \in \Omega : f(y(x)).y'(x) = g(x).$$

Remarque 1.4. Evidemment l'enjeu est de trouver une solution définie sur l'intervalle Ω le plus grand possible, qu'on appelle *solution maximale.*

Dans la pratique, on écrit $y' = \dfrac{dy}{dx}$, puis, symboliquement $f(y)dy = g(x)dx$, on a :

$$\begin{aligned} f(y)dy = g(x)dx &\Longleftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx \\ &\Longleftrightarrow F(y(x)) = G(x) + k \end{aligned}$$

Il s'agit donc de trouver des intervalles U sur lesquels F est bijective , et ensuite d'exprimer y en fonction de x et de k :

$$F(y) = G(x) + k \Longleftrightarrow y = F^{-1}(G(x) + k),$$

sur chaque intervalle Ω où $G(x) + k \in F(U)$.

2. Équations différentielles linéaires

2.1. Systèmes différentiels linéaires du premier ordre

Il s'agit d'équation du type :

$$X' = AX + B \tag{2.1}$$

$A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ sont des applications continues. C'est donc un *système d'équations différentielles linéaires du premier ordre* :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{11}(t)\,x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)\,x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)\,x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)\,x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n(t) + b_n(t) \end{array}\right. \tag{2.2}$$

les a_{ij} et les b_i sont des fonctions continues à valeur complexe.

- Le Système différentiel

$$X' = AX \tag{2.3}$$

est appelé système homogène associé.

Problème de Cauchy

Théorème 2.1 (Cauchy linéaire). Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{array}\right. \tag{2.4}$$

admet une solution unique définie sur I.

Proposition 2.1. L'ensemble $\mathcal{S}_0(I)$ des solutions sur I du système homogène (2.3) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$. Pour tout $t_0 \in I$, l'application :

$$\Phi_{t_0} : \left|\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_0(I) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(t_0) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme d'ev. En particulier $\dim \mathcal{S}_0(I) = n$.

Si X_0 est une solution de (2.1), alors l'ensemble $\mathcal{S}(I)$ des solutions sur I du système (2.1) est $X_0 + \mathcal{S}_0(I)$ qui est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$.

Système fondamental de solutions du système différentiel

Définition 2.1. On appelle **système fondamental de solutions** de (2.1) toute base : $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $\mathcal{S}_0(I)$.

Définition 2.2. On appelle **wronskien** d'une famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de solutions de (2.1), l'application

$$W : \left| \begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \det(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \end{array} \right.$$

Théorème 2.2. Soient $t_0 \in I$ et une famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de solutions de (2.1). Le wronskien est donné par :

$$\forall t \in I : W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr}(A(s))\, ds\right). \qquad \text{(formule de Liouville)}$$

- On déduit de la formule de Liouville qu'un wronskien d'une famille de solution de (2.1) est soit la fonction nulle oubien il ne s'annule en aucun point de I et que donc, on a :

Proposition 2.2. Soit $t_0 \in I$. une famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de solutions de (2.1) est un système fondamental de solutions de (2.1) si et seulement si la famille $(\varphi_1(t_0), ..., \varphi_n(t_0))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Méthode de la variation des constantes

Proposition 2.3. Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de (2.1). Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$ il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^n$ tel que

$$\forall t \in I : \varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \varphi_i(t).$$

Théorème 2.3 (Méthode de variation des constantes). Si le second membre de l'équation (2.1) est

$$b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

alors une application $\psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$ est une solution de (2.1) si, et seulement si,

$$\lambda_i' = \alpha_i \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

- La méthode de variation des constantes consiste alors à écrire un second membre b comme combinaison linéaire des φ_i (à l'aide des relations (??)), puis à déterminer des primitives de fonctions scalaires.

2.2. Systèmes différentiels linéaires autonomes du premier ordre

Il s'agit du cas

$$X' = AX + B \tag{2.5}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une application continue.

Exponentielle de matrices

On a déjà défini l'exponentielle de matrice et étudier ces propriétés :

- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$$
exp(M) commute avec tout polynôme en M.
- $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $MN = NM$:
$$\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$$
- $\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
$$P^{-1}\exp(M)P = \exp(P^{-1}MP)$$
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le calcul de exp$(A)$, passe la réduction de la matrice A et la formule
$$\exp\begin{pmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp A_1 & & (**) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp A_r \end{pmatrix}$$
dans le cas de matrices triangulaires (par blocs), les A_i étant des blocs carrés.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(\exp A) = \exp(\mathrm{Sp}(A))$, avec en plus, pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:
$$AX = \lambda X \Longrightarrow \exp(A)X = \exp(\lambda)X$$
ce qui permet d'avoir :
$$\det[\exp(A)] = \exp(\mathrm{Tr}\, A)$$
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application
$$\varphi_A : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t \longmapsto \exp(tA) \end{array} \right.$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$ est pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_A^{(k)}(t) = A^k \varphi_A(t) = \varphi_A(t) A^k$$
ce qui permet d'énnoncer :

Théorème 2.4. Pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ par

$$X : t \longmapsto \exp((t - t_0)A)X_0$$

est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Dans ce cas un système fondamental de solution du système homogène est donné par les fonctions

$$\varphi_j : t \longmapsto \exp(tA)E_j;\ 1 \le j \le n$$

$(E_1, ..., E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

- La méthode de variation de la constante permet de chercher une solution du système (2.5) sous la forme

$$\psi(t) = \exp((tA)\lambda(t)$$

où $\lambda : t \longmapsto \exp(-tA)\psi(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, à valeur dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Ce qui permet d'énnoncer :

Théorème 2.5. Pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $t_0 \in I$, l'application définie de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ par

$$X : t \longmapsto \exp((t - t_0)A)X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t - s)A)B(s)\,ds$$

est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

3. Équations différentielles non linéaires

Soit E un evn sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, Ψ est une application d'un ouvert U de $\mathbb{R} \times E$ dans E. Tous les intervalles considérés auront au moins deux éléments. On notera $\|\ \ \|$ une norme de E.

- On appelle solution de l'équation différentielle d'ordre un :

$$y' = \Psi(x, y) \tag{3.1}$$

tout couple (I, φ) d'une fonction φ définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeur dans E telle que

$$\forall x \in I : (x, \varphi(x)) \in U \text{ et } \varphi'(x) = \Psi(x, \varphi(x)).$$

PROPOSITION 3.1. Si est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, alors toute solution de (3.1) est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

- Soit $(x_0, y_0) \in U$. On appelle problème de Cauchy pour l'équation (3.1) associé à la condition initiale $y(x_0) = y_0$, le problème
$$\begin{cases} y' = \Psi(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.2}$$
qui consiste à déterminer les solutions (I, φ) de (3.1) qui vérifient en plus la condition
$$x_0 \in I \text{ et } \varphi(x_0) = y_0.$$

Équation intégrale

PROPOSITION 3.2. Une fonction φ est solution du problème de Cauchy (3.2) sur I si et seulement si
$$\forall x \in I : \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \Psi(t, \varphi(t))dt.$$

Equations différentielles

3.1. Équations différentielles scalaires du premier ordre

Dans cette section, on se limite au cas où $E = \mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\Psi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit alors que (3.1) est une *équation différentielle scalaire du premier ordre.*

DÉFINITION 3.1. On appelle **solution maximale** de (3.1) toute solution qui n'est la restriction d'aucune autre solution.

Si $U =]a, b[\times \mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$, on appelle **solution maximale à droite** de (3.1) toute solution (I, φ) qui ne peut être prolongée à droite de la borne sup de I.

THÉORÈME 3.1 (Cauchy global). On suppose Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Le problème (3.2) admet une unique solution maximale $y_{max} :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$. Et toute autre solution est la restriction de y_{max} à un sous-intervalle de $]\alpha, \beta[$.

- Le théorème précise que la solution maximale est définie sur un **intervalle ouvert** et qu'elle ne peut pas être prolongée (dans le cas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) en α, β, c.à.d que si $(]\alpha, \beta[, \varphi)$ est solution maximale à droite de l'équation (3.1) alors $\lim\limits_{x \to \beta^-} \varphi(x)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 3.2. Soit $U =]a, b[\times \mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. On appelle **solution globale** de (3.1), toute solution définie sur I tout entier.

- Les équations différentielles linéaires admettent des solutions globales.

3.2. Systèmes différentiels autonomes du premier ordre

Dans ce cas où $E = \mathbb{R}^2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et

$$\Psi : \left| \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (f(x,y), g(x,y)) \end{array} \right.$$

de classe $\mathcal{C}^1$. On dit alors que (3.1) est un *système différentiel autonome du premier ordre en dimension 2.* Il s'écrit :

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{3.3}$$

Définition 3.3. Soient un ouvert U de $\mathbb{R}^2$,

$$v : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (f(x,y), g(x,y)) \end{array}$$

On appelle **courbe intégrale** du champ de vecteurs v, tout arc paramétré (à difféomorphisme près) $\gamma = (\Omega, \varphi = (x,y))$ où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ est solution du système différentiel autonome du premier ordre (3.3) associé à v : c'est à dire

$$\begin{cases} \forall t \in I : (x(t), y(t)) \in U \\ x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

- Le problème de Cauchy (3.2), associé à la condition initiale $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ avec $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$, s'écrit

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Proposition 3.3. Si $\varphi : I \longmapsto U$ est une solution maximale de (3.3) alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_a : \left| \begin{array}{rcl} a + I & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \varphi(t-a) \end{array} \right.$$

est aussi une solution maximale.

- Les deux chemins φ et φ_a ont même image dans U, c'est à dire qu'il définissent la même courbe intégrale.

Théorème 3.2 (Cauchy global). On suppose Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Pour tout $(t_0, (x_0, y_0)) \in \mathbb{R} \times U$, le problème (3.4) admet une unique solution maximale $y_{max} :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$. Et toute autre solution est la restriction de y_{max} à un sous-intervalle de $]\alpha, \beta[$.

- Le théorème précise que la solution maximale est définie sur un **intervalle ouvert** et qu'elle ne peut pas être prolongée (dans le cas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) en α, β.

Algèbre bilinéaire 10

1. Formes bilinéaires et Formes quadratiques

Dans toue la suite $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1. Soient E, F deux $\mathbb{K}-ev$. On appelle forme bilinéaire sur $E \times F$ toute application, $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$, vérifiant

(i) $\forall x \in E$, l'application : $f_x : F \longrightarrow \mathbb{K}$, $y \longmapsto f(x,y)$ est linéaire,

(ii) $\forall y \in F$, l'application : $f_y : E \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto f(x,y)$ est linéaire.

Elle est dite symétrique si

$$\forall (x,y) \in E \times E : f(x,y) = f(y,x).$$

Proposition 1.1. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F;\mathbb{K})$ des formes bilinéaires sur $E \times F$ est un $\mathbb{K}-ev$ pour les opérations usuelles. C'est un sev de l'espace vectoriel des applications de $E \times F$ dans $\mathbb{K}$. En dimensions finies,

$$\dim \mathcal{L}(E,F;K) = \dim E \times \dim F.$$

- Si $E = F$, on dit simplement forme bilinéaire sur E, et on notera $\mathcal{L}_2(E)$, leur ensemble ; c'est un $\mathbb{K}-ev$. Si $\dim E = n$ alors $\dim \mathcal{L}_2(E) = n^2$.

Définition 1.2. Soit $f \in \mathcal{L}_2(E)$ symétrique. L'application $q : E \longmapsto \mathbb{K}$, $x \longmapsto q(x) = f(x,x)$ est appelé forme quadratique associée à f.

Proposition 1.2. Avec les notations ci-dessus, on a :

(i) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

(ii) $\forall x,y \in E : q(x+y) = q(x) + 2f(x,y) + q(y)$ identité de polarisation

(iii) $\forall x,y \in E : q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y))$ identité de la médiane.

- Réciproquement la propriété (ii) permet de déterminer f en fonction de q :

Définition 1.3. On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$, vérifiant :

(i) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

(ii) L'application $f : (x, y) \longmapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Dans ce cas, q est la forme quadratique associée à f. On dit que f est la forme polaire de q.

1.1. Matrice d'une forme bilinéaire

Avec les notations ci-dessus, la matrice

$$(f(e_i, \varepsilon_j))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

est appelée la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on la notera $\mathcal{M}at(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, la matrice $(f(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est appelée matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on la notera $\mathcal{M}at(f, \mathcal{B})$.

Si f est symétrique la matrice $(f(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique, elle est appelée aussi la matrice de la forme quadratique q associée à f. On la notera de même $\mathcal{M}at(q, \mathcal{B})$.

Proposition 1.3. Si $\mathcal{M}at(q, \mathcal{B}) = (a_{ij})$ symétrique, alors

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E : q(x) = \sum_{1\leq i\leq n} a_{ii}(x_i)^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j.$$

Exemples

(1) $E = \mathbb{K}^3$, $q(x_1, x, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$,

$$\mathcal{M}(q, \mathcal{B}ase\ \mathcal{C}anonique) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$f(x, y) = x_1y_1 - x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2$.

(2) En général si $E = \mathbb{K}^n$,

- si $q(x) = x_k^2$, $f(x, y) = x_ky_k$.
- Si $q(x) = x_ix_j$, $f(x, y) = \frac{1}{2}(x_iy_j + x_jy_i)$.

Ecriture matricielle

- Si $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \in E$, $y = \sum_{j=1}^{p} y_j\varepsilon_j \in F$,

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{p} a_{ij}y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix}$$

On pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{pmatrix}$$

les matrices coordonnées de x et y.

PROPOSITION 1.4. Avec les notations ci-dessus on a

$$\forall (x, y) \in E \times F : f(x, y) = {}^tXMY$$

et si M symétrique et q la forme quadratique associée à f

$$\forall x \in E : q(x) = {}^tXMX$$

Changements de bases

THÉORÈME 1.1. Soit E une $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Pour toute forme bilinéaire f sur E, on a la formule de changement de bases :

$$\mathcal{M}at(f, \mathcal{B}') = {}^tP\mathcal{M}at(f, \mathcal{B})P.$$

1.2. Rang d'une forme bilinéaire symétrique

On appelle rang d'une forme quadratique q sur E (ou de forme bilinéaire symétrique associée) le rang de sa matrice dans une base.

On dit qu'une forme quadratique q est **non dégénérée** si sa matrice est inversible ,(ou que son rang est maximal).

1.3. Orthogonalité

On considère un $\mathbb{K}-ev$ E muni d'une forme quadratique q de forme polaire f.

DÉFINITION 1.4. On dit que deux vecteurs u et v de E son $q-$orthogonaux si $f(u, v) = 0$.

Si A est une partie non vide de E, on appelle orthogonal de A (par rapport à q) l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A : f(x, y) = 0\}.$$

On appelle noyau de q (ou f) noté $\ker(q)$, le sev

$$\ker(q) = E^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in E : f(x, y) = 0\}$$

PROPOSITION 1.5. La forme quadratique q est non dégénérée si et seulement si $\ker(q) = \{0\}$.

Propriétés élémentaires de l'othogonalité

(1) $\{0\}^{\perp} = E$, En général l'othogonal d'une partie A, $A^{\perp}$ est un sev de E.

(2) Si $A \subset B$ alors $A^{\perp} \supset B^{\perp}$. et $A^{\perp} = (\operatorname{vect}(A))^{\perp}$.

(3) $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} \supset A$, même si A est un sev de E, on ne peut affirmer l'égalité, (voir plus loin).

Cas de forme quadratique non dégénérée

Théorème 1.2. Si q est une forme quadratique non dégénérée. Alors pour tout sev F de E, on a :

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E \quad \text{et} \quad \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F.$$

Remarque 1.1. On n'a pas toujours $F \cap F^{\perp}$, pour dire que la somme est directe.

Exemple : $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, non dégénérée sur $\mathbb{R}^2$, mais $(\mathbb{R}(1,1))^{\perp} = (\mathbb{R}(1,1))$.

Définition 1.5. On dit qu'un vecteur $u \in E$ est isotrope si $q(u) = 0$. On dit qu'un sev F de E est isotrope si $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$.

Théorème 1.3. Si F est sev non isotrope, et q est une forme quadratique non dégénérée alors $F \oplus F^{\perp} = E$.

2. Réduction des formes quadratiques

2.1. Familles et bases orthogonales

Soit q une forme quadratique sur E. Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de E est dite $q - orthogonale$ si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Proposition 2.1. Toute famille de vecteurs non isotropes $q - orthogonale$ est libre.

Théorème 2.1. Si q est une forme quadratique sur E, alors E admet aumoins une base $q - orthogonale$. Si en plus q est non dégénérée, E possède une base q-orthonormale.

2.2. Décomposition en carrés

Théorème 2.2. Soit q est une forme quadratique sur E. le rang de q est r si et seulement si il existe r formes linéaires $\varphi_1, ..., \varphi_r$ linéairement indépendantes et r scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_r$ non nuls telles que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\varphi_i(x)\right)^2$$

Corollaire 2.1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétrique. Il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M = {}^tPDP$.

Remarque 2.1 (Pratique). Pour avoir une base $q-\mathit{orthogonale}$ à partir d'une réduite en carrés $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\varphi_i(x)\right)^2$, il "suffit" de déterminer la base antéduale d'une base $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de E^* obtenue par complétion de la famille $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$.

Théorème 2.3 (Cas complexe). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $\text{rang}(q) = r$, si et seulement si il existe r formes linéaires $\varphi_1, ..., \varphi_r$ linéairement indépendantes telles que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \left(\varphi_i(x)\right)^2$$

Corollaire 2.2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ symétrique. Il existe une matrice P inversible telle que

$$M = {}^tPJ_rP.$$

avec $J_r = \text{diag}(\overbrace{1, ..., 1}^{r \text{ fois}}, 0, ..., 0)$ et $r = \text{rang}(M)$. En particulier si M inversible $M = {}^tPP$.

Description de l'algorithme de Gauss

L'algorithme de Gauss permet de déterminer de manière récurrente "une" réduite en carrés d'une forme quadratique avec des formes linéaires linéairement indépendantes.

Supposons que $q(x)$ est donnée par son expression polynômiale dans une base de $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E :

$$q\left(x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{1 \le i \le n} a_{ii} \left(x_i\right)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

- S'il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$, soit $a_{nn} \neq 0$ pour simplifier les notations. On écrit $q(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} q(x) = a_{nn} \left(x_n\right)^2 + 2x_n \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} \left(x_i\right)^2 \\ + 2 \sum_{1 \le i < j \le n-1} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{nn}\left((x_n)^2 + 2x_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i\right)^2\right) \\
&- a_{nn}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}\,(x_i)^2 \\
&+ 2 \sum_{1\le i<j\le n-1} a_{ij} x_i x_j
\end{aligned}
$$

$$
= a_{nn}\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i\right)^2 + p(x_1, \dots, x_{n-1})
$$

on pose alors $\varphi_n(x) = \left(x_n + \sum_{1\le i\le n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i\right)$, puis on continue avec p forme quadratique sur $\mathbb{K}^{n-1}$.

- Si non $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} = 0$, il existe alors $i < j$ tels que $a_{ij} \neq 0$, soit $\neq 0$, pour simplifier les notations. On écrit $q(x)$ sous la forme

$$
\begin{aligned}
q(x) = 2a_{n-1,n} x_{n-1} x_n + 2x_n &\sum_{1\le i\le n-2} a_{in} x_i \\
+ 2x_{n-1} \sum_{1\le i\le n-2} a_{i,n-1} x_i &+ 2 \sum_{1\le i<j\le n-2} a_{ij} x_i x_j
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
&2a_{n-1,n}\left(x_n x_{n-1} + x_n \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{in}}{a_{n-1,n}} x_i + x_{n-1} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}} x_i\right) \\
&+ 2 \sum_{1\le i<j\le n-2} a_{ij} x_i x_j
\end{aligned}
$$

et en factorisant

$$
\begin{aligned}
&2a_{n-1,n}\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}} x_i\right)\left(x_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{in}}{a_{n-1,n}} x_i\right) \\
&- \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}} x_i \sum_{i=1}^{n-2} \frac{a_{in}}{a_{n-1,n}} x_i + 2 \sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} x_i x_j \\
&= 2a_{n-1,n} \psi_n \psi_{n-1} + p(x_1, \dots, x_{n-2})
\end{aligned}
$$

et en remarquant que

$$
2\psi_n \psi_{n-1} = \frac{1}{2}\left((\psi_n + \psi_{n-1})^2 - (\psi_n - \psi_{n-1})^2\right)
$$

on a

$$
\begin{aligned}
q(x) = \frac{a_{n-1,n}}{2}\,(\varphi_n(x))^2 - \frac{a_{n-1,n}}{2}\,(\varphi_{n-1}(x))^2 \\
+ p(x_1, \dots, x_{n-2})
\end{aligned}
$$

- On vérifie sans trop de peine que les formes linéaires issues de l'algorithme de Gauss sont linéairement indépendantes.

Exemple $q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$.

Réponse:

$$\begin{aligned} x_1^2-x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3 &= x_1^2+2x_1x_2-x_3^2-4x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2)^2-x_2^2-4x_2x_3-x_3^2 \\ &= (x_1+x_2)^2-(x_2+2x_3)^2+3x_3^2 \end{aligned}$$

alors $\varphi_1(x)=x_1+x_2$, $\varphi_2(x)=x_2+2x_3$, $\varphi_3(x)=x_3$. ▪

2.3. Formes quadratiques réelles

On suppose que E est un $\mathbb{R}-ev$ de dimension n, pratiquement $E=\mathbb{R}^n$.

Formes positives, négatives

On dit qu'une forme quadratique sur E est positive si $q(x)\geq 0$, $\forall x\in E$.
De même q est négative si $q(x)\leq 0$, $\forall x\in E$.

Théorème 2.4. Si q est une forme quadratique **positive** sur E. Alors $\mathrm{rang}(q)=r$ si et seulement si il existe r formes linéaires φ_1, ..., φ_r linéairement indépendantes telles que

$$q(x)=\sum_{i=1}^{r}(\varphi_i(x))^2$$

En particulier toute matrice $M\in GL_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que

$$\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}):{}^tXMX\geq 0$$

est congruente à I_n, c.à.d, s'écrit sous la forme ${}^tPP$ avec P inversible.

Définition 2.1. On dit qu'une forme quadratique réelle q est **définie positive** si $\forall x\in E\setminus\{0\}:q(x)>0$, i.e.

$$\forall x\in E:q(x)\geq 0\quad\text{et}\quad q(x)=0\Longleftrightarrow x=0$$

Théorème 2.5. Soit q forme quadratique **positive** (ou négative) de forme polaire f. Alors $\forall x,y\in E:$

$$(f(x,y))^2\leq q(x)q(y)\quad(\textit{inégalité de Schwarz})$$

Théorème 2.6. Soit q une forme quadratique **positive** (ou négative) sur un $\mathbb{R}-ev$ E de dimension finie. q est non dégénérée si et seulement si elle est définie positive (ou définie négative).

- En général si q est **positive** (ou négative), alors

$$E^{\perp} = \{x \in E \mid q(x) = 0\}.$$

Signature

- On a déjà vu qu'une forme quadratique Φ sur $\mathbb{R}-ev$ admet une réduite en carrés de la forme $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\varphi_i(x))^2$. Quitte à faire entrer les $|\lambda_i|$ avec les φ_i, on peut écrire

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{p} (\varphi_i(x))^2 - \sum_{i=1}^{q} (\psi_i(x))^2 \text{ avec } r = p + q.$$

Ce qui signifie qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, ., e_p, \varepsilon_1, ., \varepsilon_q, .)$ $\Phi-\mathrm{orthogonale}$ dans laquelle la matrice de Φ est

$$\begin{pmatrix} I_p & & (0) \\ & -I_q & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$$

Théorème 2.7 (Théorème d'inertie de Sylvester). Avec les notations ci-dessus le couple (p, q) d'entiers ne dépend que de la forme quadratique et non de la base $\Phi-\mathrm{orthogonale}$ choisie.

Définition 2.2. Le couple d'entiers (p, q), tels que

$$p = \mathrm{card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid \Phi(e_k) > 0\} \text{ et}$$
$$q = \mathrm{card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid \Phi(e_k) < 0\}$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base $\Phi-\mathrm{orthogonale}$ de E, est appelé la signature de la forme quadratique Φ.
On a alors $\mathrm{rang}(\Phi) = p + q$.

Espaces euclidiens 11

1. Espace préhilbertien

1.1. Produit scalaire

Cas réel

Soit E un $\mathbb{R}-ev$. On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire symétrique définie positive.

Exemples

(1) Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$: $(x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

(2) Produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$(f, g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$$

(3) Produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$(P, Q) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i)$$

où $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé.

(4) Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(M, N) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tMN)$.

Cas complexe

Soit E un $\mathbb{C} - ev$. On dit que $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme **sesquilinéaire** sur E si

- $\forall x \in E$, l'application $y \longmapsto f(x, y)$ est linéaire sur E,
- $\forall y \in E$, l'application $x \longmapsto f(x, y)$ est **semi-linéaire** sur E, i.e :
  - $\forall x, x' \in E : f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$.
  - $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda x, y) = \overline{\lambda} f(x, y)$.

Une forme sesquilinéaire $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite **hermitienne** si

$$\forall x, y \in E : f(y, x) = \overline{f(x, y)}$$

dans ce cas $\forall x \in E : f(x, x) \in \mathbb{R}$.

On dit qu'une forme sesquilinéaire hermitienne $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est **positive** (resp **définie positive**) si

$$\forall x \in E : f(x,x) \geq 0$$
$$(\text{resp } \forall x \in E \setminus \{0\} : f(x,x) > 0)$$

Théorème 1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Si f est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive (ou négative) alors

$$\forall x, y \in E : |f(x,y)|^2 \leq f(x,x)f(y,y)$$

avec égalité si et seulement si (x,y) liée.

Soit E un $\mathbb{C}-ev$. On appelle produit scalaire (hermitien) sur E, toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

C'est une forme non dégénérée.

Exemples

(1) Produit scalaire hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$:

$$(x,y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

(2) Produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$:

$$(f,g) \longmapsto \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$$

(3) Produit scalaire sur $E = \mathbb{C}_n[X]$:

$$(P,Q) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \overline{P(x_i)} Q(x_i)$$

où $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixé.

(4) Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(M,N) \longmapsto \mathrm{Tr}({}^t\overline{M}N)$.

Définition 1.1. On appelle espace préhilbertien réel (resp complexe) un couple (E, Φ) d'un $\mathbb{R}-ev$ (resp $\mathbb{C}-ev$) E et d'une forme bilinéaire symétrique (resp sesquilinéaire hermitienne) définie positive.

Un espace Euclidien (resp Hermitien) est un préhilbertien réel (resp complexe) de dimension finie.

Norme euclidienne

THÉORÈME 1.2. Si (E, Φ) est un espace préhilbertien, l'application

$$x \longmapsto \sqrt{\Phi(x, x)}$$

est une norme sur E.

- On utilise les notations

$$(u \mid v), \langle u \mid v\rangle, \langle u, v\rangle \text{ ou simplement } u.v$$

pour désigner un produit scalaire et $\| \ \|$ pour la norme euclidienne.
- La distance associée à la norme sur E est dite distance euclidienne.
- L'**inégalité de Cauchy–Schwarz** s'écrit :

$$\forall u, v \in E : |(u \mid v)| \leq \|u\| \, \|v\|$$

Identités de polarisation

- Cas réel

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$$

$$4\,(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

- Cas hermitien

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x \mid y)$$

$$4\,\mathrm{Re}\,(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

$$4\,(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2$$

Identité du parallélogramme

- Cas réel et hermitien

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

qui exprime le fait que la somme des carrés des distances des deux diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des distances des quatres cotés.

1.2. Orthogonalité

Un produit scalaire étant une forme bilinéaire (ou sesquilinéaire), on définit donc les notions d'orthogonalité qui vérifient toutes les propriétés du cas général, et bien entendu d'autre propriétés liées au fait qu'un produit scalaire et une forme définie positive.

On suppose dans la suite que E est un espace préhilbertien réel ou complexe. On a donc les résultats déjà établis pour une forme quadratique.

PROPOSITION 1.1. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre, en particulier toute famille orthonormale de E est libre.

THÉORÈME 1.3. Si E est de dimension finie (euclidien ou hermitien), alors E possède une base orthonormale.

THÉORÈME 1.4. Si E est de dimension finie, alors toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

THÉORÈME 1.5 (Gram-Schmidt). Si E est de dimension finie, alors pour toute base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de E il existe une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ orthonormale vérifiant

$$\forall k \in [\![1, n]\!] : \mathrm{vect}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$$

c.à.d la matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est triangulaire supérieure.

Algorithme de Gram-Schmidt:

- On pose $\varepsilon_1 = v_1 / \|v_1\|$.
- Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on suppose construit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$; puis on pose

$$\varepsilon'_{k+1} = -\sum_{j=1}^{k} (v_{k+1} \mid \varepsilon_j)\, \varepsilon_j + v_{k+1} \text{ et } \varepsilon_{k+1} = \varepsilon'_{k+1} / \|\varepsilon'_{k+1}\|.$$

EXEMPLE Dans $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. On trouve

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$$
$$\varepsilon_2 = (1, -1, 0) + (-1, 1, 1) = (0, 0, 1)$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(0, 0, 1) + (1, 1, 1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

avec la matrice de passage

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ecriture d'un vecteur dans une b.o.n

THÉORÈME 1.6. Si une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$ de E est orthogonale alors $\left\| \sum_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$.

THÉORÈME 1.7. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est b.o.n de E alors pour tout $x \in E$

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, e_i \quad \text{et} \quad \underbrace{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x \mid e_i)|^2}_{\text{Formule de Parseval}}$$

PROPOSITION 1.2. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors

$$F^{\perp} \cap F = \{0\}$$

THÉORÈME 1.8. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors

$$E = F \oplus F^{\perp} \quad \text{et} \quad \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$$

Projecteur orthogonal

Si $E = F \oplus F^{\perp}$ (c'est le cas si $\dim F < \infty$), la projection p_F sur F parallélement à $F^{\perp}$ est appelée la projection orthogonale sur F.

PROPOSITION 1.3. Dans ce cas si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de F alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, e_i \quad \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} |(x \mid e_i)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{(Inégalité de Bessel)}$$

D'après ce qui prècede on a :

THÉORÈME 1.9. Pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$. C'est à dire que $\inf\limits_{z \in F} \|z - x\|$ est atteint en l'unique point $p_F(x)$ et

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + (d(x, F))^2$$

Matrice et déterminant de Gram

La matrice de Gram $G(v_1, \ldots, v_p)$ d'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ d'éléments de E (euclidien réel) est la matrice

$$G(v_1, \ldots, v_p) = ((v_i \mid v_j))_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

et son déterminant est appelé déterminant de Gram de $(v_1, \ldots, v_p)$, noté $\text{Gram}(v_1, \ldots, v_p)$.

Théorème 1.10. Avec le notations ci-dessus, $G = {}^tAA$ où A est la matrice de $(v_1, \dots, v_p)$ dans une base orthonormale de E et $\operatorname{rang}(G) = \operatorname{rang}(A)$.

Théorème 1.11. Une matrice symétrique $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si elle est la matrice de Gram d'une base de E.

Théorème 1.12. F sev de E (euclidien réel), $(e_1, \dots, e_p)$ base de F. Pour tout $x \in E$:

$$(d(x,F))^2 = \frac{\operatorname{Gram}(e_1, \dots, e_p, x)}{\operatorname{Gram}(e_1, \dots, e_p)}$$

Exemples dans $\mathbb{R}^3$

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{Gram}(u,v) = \|u \wedge v\|^2$$

et donc on a :

$$d(x, \mathbb{R}u) = \frac{\|u \wedge x\|}{\|u\|} \text{ et}$$

$$d(x, \operatorname{vect}(u,v)) = \frac{|\operatorname{Det}(u,v,x)|}{\|u \wedge v\|} = \frac{|(u \wedge v \mid x)|}{\|u \wedge v\|}$$

ici $\operatorname{Det}(u,v,x)$ désignent le déterminant dans une b.o.n.d.

2. Enomorphisme dans un espace euclidien

Dans toute la suite on travaille dans E un espace euclidien (préhilbertien réel de dimension finie).

Théorème 2.1 (Théorème de Riesz). Si E est un espace euclidien (de dimension finie) Pour toute forme linéaire φ sur E il existe un unique $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E : \varphi(x) = (a \mid x) .$$

2.1. Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 2.2. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E : (x \mid u(y)) = (u^*(x) \mid y)$$

u^* est appelé adjoint de u. Dans ce cas on a aussi

$$\forall x, y \in E : (u(x) \mid y) = (x \mid u^*(y))$$

Propriétés

(1) L'application $u \longmapsto u^*$ est linéaire (semi-linéaire dans le cas complexe) sur $\mathcal{L}(E)$.

(2) Pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u^*)^* = u$ et $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

(3) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a
- $\ker(u^*) = \operatorname{Im}(u)^\perp \qquad \operatorname{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$.
- $\ker(u^*u) = \ker(u) \qquad \operatorname{Im}(u^*u) = \operatorname{Im}(u^*)$. En particulier u et u^* ont même rang.

Théorème 2.3. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$, $\det u^* = \det u$; $\operatorname{Tr} u^* = \operatorname{Tr} u$ et $\chi_{u^*} = \chi_u$.

Définition 2.1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $M^* = {}^t\overline{M}$ est appelée **matrice adjointe** (ou transconjuguée) de M. i.e. si $M = (a_{ij})$ et $M^* = (b_{ij})$ alors $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. On dira alors que M est **hermitienne** si $M^* = M$. Dans le cas de matrice réelle c'est les notions de transposée et de matrice symétrique.

- Les propriétés suivantes sont alors évidentes, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(M+N)^* = M^* + N^* \qquad (\lambda M)^* = \overline{\lambda} M^*$$

$$(MN)^* = N^* M^* \qquad (M^*)^* = M$$

$$\det M^* = \overline{\det M}; \quad \operatorname{Tr} M^* = \overline{\operatorname{Tr} M} \text{ et } \chi_{M^*} = \overline{\chi_M}$$

et si $M \in GL_n(\mathbb{C})$, $M^* \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$$(M^*)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^*$$

Endomorphisme autoadjoint

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique (ou autoadjoint), si $u^* = u$, i.e :

$$\forall x, y \in E : (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$$

On dit qu'il est antisymétrique si $u^* = -u$, i.e :

$$\forall x, y \in E : (u(x) \mid y) = -(x \mid u(y))$$

Proposition 2.1. $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une **b.o.n** est symétrique.

Proposition 2.2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est u-stable alors $F^{\perp}$ est u^*-stable.

Théorème 2.4 (Théorème spectral). Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormale.

Endomorphisme positif

Soit un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathcal{L}(E)$

- On dit que u est positif si

$$\forall x \in E : (u(x) \mid x) \geq 0$$

- On dit que u est défini positif si

$$\forall x \neq 0 : (u(x) \mid x) > 0$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

- On dit que M est positive si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : {}^tXMX \geq 0,$$

- On dit que M est définie positive si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} : {}^tXMX > 0,$$

On note par $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) le sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques positives (resp définies positives).

Théorème 2.5. Soit un endomorphisme autoadjoint $u \in \mathcal{L}(E)$. u est positif (resp défini positif) si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$).

Théorème 2.6. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, u^*u est autoadjoint positif et

$$\|u\|_2 = \|u^*\|_2 = \sqrt{\|u^*u\|_2}.$$

2.2. Automorphismes orthogonaux

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit orthogonal si :

$$\forall (x, y) \in E^2 : (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y) .$$

Dans ce cas on a

$$\forall x \in E : \|u(x)\| = \|x\|$$

ce qui signifie que u est une **isométrie** donc un **automorphisme** de E.

- On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux sur E, remarquons que $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$.

Théorème 2.7. $\mathcal{O}(E)$ est un sous groupe de $GL(E)$, appelé le groupe orthogonal de E.

Théorème 2.8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est un automorphisme orthogonal
(ii) u transforme toute b.o.n en b.o.n.
(iii) $\forall x \in E : \|u(x)\| = \|x\|$
(iv) $u^*u = uu^* = I_E$

Proposition 2.3. Pour tout $u \in \mathcal{O}(E)$, $|\det u| = 1$, i.e. $\det u \in \{-1; 1\}$ et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1; 1\}$.

Théorème 2.9. L'ensemble $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det u = 1\}$ est un sous groupe de $\mathcal{O}(E)$, il est appelé le groupe spécial orthogonal de E.

Symétrie orthogonale, réflexion

Soit F un sev de E. La symétrie autour de F parallélement à $F^\perp$ est appelée symétrie orthogonale par rapport à F. On la notera s_F.

- On a donc

$$s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$$

- Si $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ est une b.o.n de F,

$$s_F(x) = 2\sum_{i=1}^{p} (x \mid \varepsilon_i)\, \varepsilon_i - x$$

Proposition 2.4. Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

Définition 2.2. Soit H un hyperplan de E. La symétrie orthogonale par rapport H est appelée réflexion d'hyperplan H.

les réflexions sont des endomorphismes orthogonaux négatifs (i.e de déterminant -1).

- Si $H = \{u\}^{\perp}$ avec $\|u\| = 1$,

$$s_H(x) = x - 2\,(x \mid u)\,u$$

2.3. Matrices orthogonales

Théorème 2.10. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) ${}^t\!MM = I_n$ (oubien $M\,{}^t\!M = I_n$), i.e : $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = {}^t\!M$.
(ii) Les colonnes de M forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$.
(iii) Les lignes de M forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$.
Une matrice est dite orthogonale si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes (i),(ii) ou (iii).

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 2.5. Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det M = \pm 1$ et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1; 1\}$.

On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$) l'ensembles des matrices orthogonales de déterminant 1 (respectivement -1).

- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est appelé le groupe orthogonal d'ordre n et $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal.

On déduit du théorème spectral que

Théorème 2.11. Toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique est diagonalisable et il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que

$$M = {}^t\!PDP = P^{-1}DP.$$

Théorème 2.12 (Diagonalisation simultannée). Soit E un espace euclidien, q une forme quadratique sur E. Il existe une base orthonormée pour le produit scalaire et orthogonale pour q.

Suites et séries de fonctions 12

1. Convergence des suites et séries de fonctions

Dans toute la suite, on considère des suites ou des séries de fonctions

$$f_n,\quad g_n,\quad u_n,\quad \dots\quad : X \longrightarrow E,\quad x \longmapsto f_n(x)$$

où X est un ensemble non vide (généralement X est une partie d'un evn F) et E un evn de dimension finie (dans la pratique $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais aussi $\mathbb{R}^p$ ou un espace de matrices). La convergence d'une série de fonctions $\sum f_n(x)$ étant par définition celle de la suite des sommes partielles $\sum f_k(x)$.

1.1. Convergence simple

- La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur X vers f (on écrit $f_n \xrightarrow{CS} f$), si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ dans F. i.e.

$$\forall x \in X : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{c.à.d :}$$

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X vers f si pour tout $x \in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge vers $f(x)$ dans F. i.e.

$$\forall x \in X : \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{c.à.d :}$$

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N : \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x) \right\| \leq \varepsilon$$

- Pour une série de fonctions, on définit aussi la convergence absolue. On dit que $\sum f_n(x)$ converge absolument si la série $\sum \|f_n(x)\|$ converge pour tout $x \in X$.

Si f est complet (c'est le cas si $\dim F < \infty$), la convergence absolue implique la convergence simple.

Exemples :

(1) La suite $(f_n(x) = x^n)$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f donnée par :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}.$$

et la série $\sum x^n$ ne converge pas en 1, et converge simplement vers $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

(2) Les suites de fonctions $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $g_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$ et $h_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}$ convergent simplement toutes vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

(3) La série de fonctions $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge simplement vers la fonction exp sur $\mathbb{R}$.

1.2. Convergence uniforme

- La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur X vers f (on écrit $f_n \xrightarrow{cu} f$), si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \forall x \in X : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

Important : remarquer l'emplacement de $(\forall x \in X)$ dans la définition.
De manière équivalente : (f_n) converge uniformément sur X vers f **si et seulement si** la suite numérique de terme général

$$\sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|$$

est définie à partir d'un certain rang et vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \forall x \in X : \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x) \right\| \leq \varepsilon$$

oubien

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \left\| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x) \right\| = 0.$$

le $\sup\limits_{x\in X} \left\| \sum f_k(x) - f(x) \right\|$ étant défini à partir d'un certain rang.

Plan d'étude d'une suite de fonctions

- Exemples :

(1) Avec $h_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}$, on a $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \dfrac{\sin x}{n} \right| = \dfrac{1}{n}$, donc $h_n \xrightarrow{cu} 0$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Les suites de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $g_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ ne convergent pas uniformément sur $\mathbb{R}$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sin\frac{x}{n}\right| = 1 \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{n}\right| = +\infty.$$

▶ Dans la pratique, il est rare que l'on puisse calculer le sup. Il est suffisant de donner une majoration de la forme

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0.$$

et ce uniformément, autrement dit indépendamment de $x \in X$.

▶ Un moyen d'étudier la convergence uniforme est la convergence simple, le résultat suivant est évident.

Proposition 1.1. Si (f_n) (resp $\sum f_n$) converge uniformément vers f sur X, alors (f_n) (resp $\sum f_n$) converge aussi simplement vers f sur X. En d'autres termes, la CU est une propriété plus forte que la CS.

Théorème 1.1. Si (f_n) converge simplement vers f sur X, elle converge uniformément sur X si et seulement si pour toute (x_n) de points de X, $\lim_{n\to+\infty}\|f_n(x_n) - f(x_n)\| = 0$.

▶ Dans la pratique, on exhibe souvent une suite telle que $\|f(x_n) - f_n(x_n)\|$ reste supérieur à une quantité fixée pour dire que (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

- **Exemples :**

(1) $f_n(x) = nx^n(1-x)$ sur $[0, 1]$. $f_n \xrightarrow{CS} 0$ mais avec $x_n = 1-\frac{1}{n}$, on a $\lim f_n(x_n) = \lim(1 - \frac{1}{n})^n = e^{-1} \neq 0$.

(2) Même chose et même suite $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ avec la suite de fonctions (x^n) sur $[0, 1[$.

Critère de Cauchy uniforme

Définition 1.1. On dit la suite de fonctions $f_n : X \longrightarrow F$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n, p \geq N, \forall x \in X : \\ \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$$

ou de manière équivalente

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n, p \geq N : \sup_{x\in X}\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$$

Pour une série de fonctions $\sum f_n$, le critère s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall q \geq p \geq N, \forall x \in X : \left\| \sum_{n=p}^{q} f_n(x) \right\| \leq \varepsilon$$

Théorème 1.2. Si F est complet, alors une suite (ou série) de fonctions $f_n : X \longrightarrow F$ est uniformément convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.

Norme de la convergence uniforme

- Sur le $\mathbb{R} - ev$ des application bornées $\mathcal{B}(X;F)$ de X dans f, on définit la norme

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

appelée norme de la convergence uniforme. On a alors le théorème :

Théorème 1.3. Si F est complet alors $(\mathcal{B}(X;F), \| \ \|_\infty)$ est un Banach. Ce qui signifie que si une suite de fonctions bornées $(f_n : X \longrightarrow F)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme alors elle converge vers une fonction f bornée sur X.

1.3. Propriétés avec les opérations

Par définition des deux modes de convergence de suites et série de fonctions, on a :

Théorème 1.4. Soit (f_n) et (g_n) deux suites d'applications de X dans F qui convergent simplement (resp. uniformément) vers f et g. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)$ converge simplement (resp. uniformément) vers $\alpha f + \beta g$.

- Le résultat analogue pour les séries de fonctions est une conséquence triviale.
- Par contre pour le produit seule la convergence simple passe. La convergence uniforme n'est pas stable par produit

Proposition 1.2. Soit (f_n) et (g_n) deux suites d'applications de X dans F qui convergent simplement vers f et g. Alors la suite $(f_n \times g_n)$ converge simplement vers $f \times g$. Si en plus les fonctions (f_n) et (g_n) sont **bornées** et convergent uniformément alors $(f_n \times g_n)$ converge uniformément vers $f \times g$.

1.4. Convergence normale d'une série de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur X. On dit que la série $\sum f_n(x)$ converge normalement sur X si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Remarque 1.1. Pratiquement, on ne peut pas calculer les normes $\|f_n\|_\infty$, on essaie donc de trouver une suite (α_n) positive telle que

$$\forall x \in X : \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \quad \text{et} \quad \sum \alpha_n \quad \text{converge.}$$

Théorème 1.5. Si F est complet (c'est le cas si $\dim F < \infty$). Alors toute série de fonctions de X dans F qui converge normalement, converge absolument et uniformément sur X.

- Pour les séries de fonction réelles alternées, on a aussi le critère :

Théorème 1.6. Si $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que

(i) Pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante.

(ii) La suite $f_n \xrightarrow{CU} 0$ sur X.

Alors $\sum(-1)^n f_n(x)$ converge uniformément sur X.

1.5. Interversion des limites

Dans cette section, X est une partie d'un evn (pratiquement $X \subset \mathbb{R}^p$, les f_n sont des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles).

Théorème 1.7 (Théorème d'interversion des limites). Si $f_n : X \longrightarrow F$ ($\dim F < \infty$), et $a \in \overline{X}$ telles que

(i) $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur X,

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \ell_n$ existe dans F.

Alors la suite $(\ell_n)_n$ **est convergente** de limite $\ell \in F$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, c.à.d.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)$$

- Si $F = \mathbb{R}$, et $a = \pm\infty$, un raisonnement semblable permet d'étendre le résultat précédent.
- Les résultats qui suivent (Théorèmes **1.8–1.13**) ne sont alors que conséquence du Théorème **1.7**, précédent.

Théorème 1.8. Si $f_n : X \longrightarrow F$ ($\dim F < \infty$), et $a \in X$ telles que
(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en a,
(ii) Il existe un voisinage U de a tel que $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur U.
Alors f est continue en a.

Théorème 1.9. Si $f_n : X \longrightarrow F$ ($\dim F < \infty$), telles que
(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur X,
(ii) $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur X.
Alors f est continue sur X.

Théorème 1.10. Si X est compact, l'ensemble $\mathcal{C}^0(X; F)$ des applications continues de X dans F muni de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.

Et pour les séries

On a les mêmes résultats d'interversion des deux symbôles $\lim\limits_{x\to a}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$:

Théorème 1.11. Si $f_n : X \longrightarrow F$ ($\dim F < \infty$), et $a \in \overline{X}$ telles que
(i) $\sum f_n$ converge uniformément sur X.
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \ell_n$ existe dans F.
Alors la suite $\sum \ell_n$ **est convergente** dans F et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right).$$

- Si $F = \mathbb{R}$, et $a = \pm\infty$, on a aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)$$

sous l'hypothèse de convergence uniforme.

Théorème 1.12. Si $f_n : X \longrightarrow F$ ($\dim F < \infty$), et $a \in X$ telles que la série $\sum f_n$ converge simplement sur X et est de somme f. Si
(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en a,
(ii) Il existe un voisinage U de a tel que $\sum f_n$ converge uniformément sur U.
Alors f est continue en a.

THÉORÈME 1.13. Si $f_n : X \longrightarrow F$ ($\dim F < \infty$), suite d'applications continues telles que $\sum f_n$ converge uniformément sur X et est de somme f. Alors f est continue sur X.

Intégrale de la limite d'une suite de fonctions

THÉORÈME 1.14. Soit (f_n) une suite de fonctions réglées sur $[a, b]$ à valeur dans E (evn de dimension finie). Si $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $[a, b]$ alors f est réglée et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

De même si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est réglée est

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt\right).$$

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions

THÉORÈME 1.15. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans E (evn de dimension finie). On suppose que

(i) $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur I,

(ii) La suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g,

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$. En plus $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur tout segment inclus dans I.

De même si on suppose que

(iii) la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et f sa somme

(iv) la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I et g sa somme

alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$, i.e.

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

En plus $\sum f_n \xrightarrow{CU} f$ sur tout segment inclus dans I.

1.6. Théorème de convergence dominée

THÉORÈME 1.16. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions réglées sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. On suppose que

(i) $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur I et que f est réglée.

(ii) Il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I : |f_n(x)| \leq \varphi(x) \text{ (hypothèse de domination)}$$

alors les f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

Remarque 1.2. En fait sous les même hypothèses, on a

$$f_n \xrightarrow{\|\ \|_1} f \text{ et donc } \lim_{n\to\infty} \int_I |f_n| = \int_I |f|.$$

1.7. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème 1.17. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions réglées sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. On suppose que

(i) $\sum f_n \xrightarrow{CS} f$ sur I et que f est réglée.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{L}^1(I)$ et $\sum \int_I |f_n|$ converge

alors f est intégrable sur I, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ converge et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

2. Séries entières

Définition 2.1. Soit (a_n) une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série entière d'une variable complexe z associée à (a_n) la série de fonctions de terme général $a_n z^n$. On appelle **domaine de convergence** D de la série entière l'ensemble des z tels que la série converge.

Exemples

(1) Polynôme

(2) $\sum \dfrac{z^n}{n!}$, $\sum \dfrac{z^n}{n}$, $\sum z^n$ ...

2.1. Rayon de convergence

THÉORÈME 2.1 (Théorème d'Abel). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. il existe un unique élément $R \in [0, +\infty]$ tel que la série $\sum a_n z^n$ soit absolument convergente si $|z| < R$ et que la suite $(a_n z^n)_n$ ne soit pas bornée si $|z| > R$ et donc $\sum a_n z^n$ divergente.

R est alors appelé le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, qu'on notera $RC(\sum a_n z^n)$.

REMARQUE 2.1. On ne peut rien dire si $|z| = R$.

- Dans la pratique pour calculer $RC(\sum a_n z^n)$ on utilise les règles de D'Alembert. et de Cauchy :

THÉORÈME 2.2. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, avec $L \in [0, +\infty]$, alors $RC(\sum a_n z^n) = \dfrac{1}{L}$ (avec $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$).

THÉORÈME 2.3. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ deux séries entières, de rayon de convergence respectifs R_1 et R_2, alors leurs séries somme et produit associées aux suites $a_n + b_n$ et $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ont pour rayon de convergence

$$\begin{array}{lcll} R & = & \min(R_1, R_2) & \text{si } R_1 \neq R_2 \\ R & \geq & \min(R_1, R_2) & \text{si } R_1 = R_2 \end{array}$$

Dans ce cas pour tout $|z| < R$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_n z^n \right)$$

Exemple : la fonction exponentielle

Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{1}{n!} z^n$ est infini, et pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \text{vérifie} \ \ \exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$$

2.2. Somme d'une série entière

THÉORÈME 2.4 (Lemme d'Abel). une série entière de disque de convergence D est normalement convergente sur tout compact de D ; la somme de la série entière est continue sur D.

Série entière dérivée

Définition 2.2. La série entière dérivée de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)\, a_{n+1} z^n$. On peut donc définir la dérivée d'ordre $k \geq 1$, comme étant $\sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.

Théorème 2.5. Une série entière et sa série dérivée (et donc toutes ses dérivées) ont même rayon de convergence.

Formules et Inégalités de Cauchy

Théorème 2.6. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de RC $R > 0$ et de somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. Alors pour tout $r \in]0, R[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \text{ (formules de Cauchy)}$$

et si on pose $M(r) = \sup_{|z|\leq r} |f(z)|$ (existe car f continue) , on a

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \text{ (inégalités de Cauchy)}$$

2.3. Séries entières dans le domaine réel

- Dans le cas de la variable réelle (**les a_n sont toujours des complexes**) l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum a_n x^n$ converge est l'intervalle $]-R, R[$, il est appelé l'intervalle de convergence.
- S'appuyant sur le Théorème 2.5 et les résultats sur les série de fonctions, on peut donc énnoncer :

Théorème 2.7. La somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ d'intervalle de convergence $I =]-R, R[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la dérivée d'ordre p de la somme f est

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

c.à.d. qu'**on peut dériver terme à terme une série entière**. En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

- Avec les mêmes arguments, on peut justifier l'intégration terme à terme d'une série entière :

THÉORÈME 2.8. Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ sur $I =]-R, R[$. Alors pour tout $x \in I$:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Fonction développable en série entière

DÉFINITION 2.3. Soient $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est développable en série entière en x_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$, de $RC > 0$ telle que
$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, sur un intervalle $]x_0-\eta, x_0+\eta[\subset I$.
Dans ce cas, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]x_0-\eta, x_0+\eta[$, et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $x_0 \in I$. On appelle **développement de Taylor** de f en x_0 la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

THÉORÈME 2.9. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $x_0 \in I$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est développable en série entière en x_0.
(ii) Il existe $x \in I \setminus \{x_0\}$ tel que la série de Taylor de f en x_0 converge.
(iii) Il existe $x \in I \setminus \{x_0\}$tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt \right) = 0.$$

Dans ce cas les convergence en (ii) est normale et en (iii) uniforme sur un intervalle de la forme $[x_0-\eta, x_0+\eta]$.

Intégrales à paramètre 13

Dans ce petit chapitre, nous étudions des conditions de continuité et de dérivabilité de fonctions définies par une intégrale sur un intervalle quelconque.

1. Théorèmes généraux

- Dans cette section I est un intervalle de $\mathbb{R}$, A une partie de $\mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N}^*)$ et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continue, telle que
$$\forall x \in A,\ \text{la fonction } t \longmapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur } I,$$
si I est un segment $[a,b]$ cette condition est vérifiée d'office.
- On définit sur A la fonction g par
$$\forall x \in A : g(x) = \int_I f(x,t)dt.$$
On s'intéresse aux propriétés de g.

1.1. Continuité sous le signe $\int$

Théorème 1.1. La fonction g est continue dans A, dans l'une ou l'autre des deux situations suivantes :

(1) L'intervalle I est un segment $[a,b]$.

(2) f est à valeurs réelles ou complexes et il existe φ une fonction continue positive intégrable sur I, telle que
$$\forall (x,t) \in A \times I : |f(x,t)| \leq \varphi(t) \ \text{ hypothèse de domination.}$$

Remarque 1.1. On déduit donc que l'application
$$(u,v,x) \longmapsto \int_u^v f(x,t)dt$$
est continue sur $I \times\ I \times\ A$, sous la seule hypothèse de continuité de f.

Remarque 1.2. On a la même conclusion si on suppose seulement que l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte contenue dans A.

1.2. Dérivabilité sous le signe $\int$

Ici on suppose que A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et on suppose en plus que f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $A \times I$.

Théorème 1.2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ dans A, et

$$\forall x \in A : g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

dans l'une ou l'autre des deux situations suivantes :

(1) L'intervalle I est un segment $[a,b]$.

(2) f est à valeurs réelles ou complexes et il existe φ_0 et φ_1 deux fonctions continues positives intégrables sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I : |f(x,t)| \leq \varphi_0(t) \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_1(t)$$

Remarque 1.3. Par une récurrence facile, si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, continues sur $A \times I$, tel que I segment ou que toutes les dérivées de f vérifient l'hypothèse de domination alors g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A, et

$$g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt.$$

1.3. Intégration sous le signe $\int$

Théorème 1.3 (formule de Fubini). Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $A \times [a,b]$, alors pour tout segment $[c,d]$ inclus dans A :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dx\right) dt.$$

2. Exemples

2.1. Fonction Γ

Théorème 2.1. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction

$$t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$. La fonction

$$\Gamma : \left| \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 2.1. Pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(n+1) = n!$$

et

$$\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Proposition 2.2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Proposition 2.3 (Formule de Stirling).

$$\Gamma(x+1) = \underset{x \to +\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \text{ et donc } n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

2.2. Transformée de Laplace

Théorème 2.2. Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : |f(t)| \leq Ce^{at}$$

alors pour tout

$$z \in \Pi(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > a\}$$

la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction

$$\mathcal{L}(f) : \left| \begin{array}{rcl} \Pi(f) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \end{array} \right.$$

appelée, **transformée de Laplace** de f, est continue sur $\Pi(f)$.

Exemples de Transformée de Laplace

(1) Pour la fonction

$$Y : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

dite fonction de Heaviside, on a

$$\mathcal{L}(Y) : z \longmapsto \frac{1}{z} \text{ définie pour } \operatorname{Re}(z) > 0$$

et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\left(t \longmapsto Y(t)e^{i\omega t}\right) : z \longmapsto \frac{1}{z - i\omega} \text{ définie pour } \operatorname{Re}(z) > 0$$

et grace aux formules d'Euler et la *linéarité évidente de la transformée de Laplace*, on a respectivement

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)\cos\omega t) : z \longmapsto \frac{z}{\omega^2 + z^2}$$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)\sin\omega t) : z \longmapsto \frac{\omega}{\omega^2 + z^2}$$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)\cosh\omega t) : z \longmapsto -\frac{z}{\omega^2 - z^2}$$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)\sinh\omega t) : z \longmapsto -\frac{\omega}{\omega^2 - z^2}$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)t^n) : z \longmapsto \frac{n!}{z^{n+1}}$$

en général, on définit ***la fonction factoriel*** à l'aide de la fonction Γ, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > -1$, par

$$z! = \Gamma(z+1)$$

de sorte que pour tout $\nu \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathcal{L}(t \longmapsto Y(t)t^\nu) : z \longmapsto \frac{\nu!}{z^{\nu+1}} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}.$$

Propriétés de la transformée de Laplace

(1) Sous les hypothèses du théorème précédent, si on pose, on a

$$\mathcal{L}\left(t \longmapsto e^{ct}f(t)\right) : z \longmapsto \mathcal{L}(f)(z - c)$$

pour tout $c \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}(t \longmapsto f(t - \tau)) : z \longmapsto e^{-\tau z}\mathcal{L}(f)(z)$$

pour tout $\tau \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\mathcal{L}(t \longmapsto f(\lambda t)) : z \longmapsto t \longmapsto \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}(f)\left(\frac{1}{\lambda}z\right).$$

(2) Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, alors pour tout $z \in \Pi(f)$:

$$\mathcal{L}(f)(z) = z\mathcal{L}(F)(z) - F(0)$$

de sorte que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, continue en 0, alors

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0)$$

et en général si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, continue, avec toutes ses dérivées, en 0 alors

$$\mathcal{L}\left(f^{(k)}\right)(z) = z^k\mathcal{L}(f)(z) - \sum_{p=1}^{k} z^{k-p} f^{(p-1)}(0).$$

(3) Le ***produit de convolution*** de deux fonctions f et g (continues par morceaux sur $\mathbb{R}$) est la fonction

$$f * g : x \longmapsto \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

Proposition 2.4. La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions f et g est donnée par

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g)$$

et est défini sur $\Pi(f) \cap \Pi(g)$.

Séries de Fourier 14

1. L'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme associé à son produit scalaire.

- La théorie des espaces vectoriels normés de dimension finie prouve alors la proposition suivante :

Proposition 1.1. Si E est un espace euclidien ou hermitien, alors E est un espace de Hilbert.

Si I est un ensemble dénombrable ($I = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}^2$), on note $\ell^2(I, \mathbb{K})$ (ou $\ell^2(I)$) l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments dans $\mathbb{K}$, de *carré sommable*, c'est à dire des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que la famille $\left(|x_i|^2\right)_{i\in I}$ soit sommable.

Dans le cas $I = \mathbb{Z}$, on a :

Proposition 1.2. Une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est à carré sommable si et seulement si les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} \left|x_n^2\right|$ et $\sum\limits_{n\geq 1} |x_{-n}|^2$ sont convergentes. C'est à dire

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n\geq 1} \left(|x_n|^2 + |x_{-n}|^2\right) \text{ converge} \right\}$$

- Si $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$, on pose

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i\in I} |x_i|^2}$$

et dans le cas $I = \mathbb{Z}$, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, on a :

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|x_n|^2 + |x_{-n}|^2\right)}$$

ce qui définit une norme sur $\ell^2(I)$, qui en fait un espace de Banach. En fait il s'agit d'une norme euclidienne :

Théorème 1.1. Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont de carré sommable alors $(x_iy_i)_{i\in I}$ est sommable. $\ell^2(I)$ est un $\mathbb{K}-ev$, c'est un s.e.v de $\mathbb{K}^I$ et l'application

$$((x_i),(y_i)) \longmapsto ((x_i) \mid (y_i)) = \sum_I \overline{x_i}y_i$$

est un produit scalaire sur $\ell^2(I)$, qui en fait un espace de Hilbert, la norme euclidienne associée est $\| \ \|_2$ ci-dessus.

2. Espace préhilbertien $\mathcal{L}(\mathbb{T})$

Définition 2.1. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est périodique si elle possède une période $T > 0$. Dans ce cas f est entièrement déterminée par sa restriction à tout intervalle de la forme $[a, a+T[$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.1. Soit $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{C}$ réglée, telle que $g(0) = g(T)$. Il existe une unique fonction f, T-périodique sur $\mathbb{R}$, qui coincide avec g sur $[0,T]$.

Dans toute la suite, on ne considère que des fonctions 2π-périodiques. Cela ne restreint pas la généralité, on ramènera, si l'on veut, l'étude d'une fonction f, T-périodique, à celle de la fonction 2π-périodique g en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x).$$

- On dit qu'une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes vérifie la **condition de Dirichlet** en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to a^-} f(t) + \lim_{t\to a^+} f(t)\right) \\ &\overset{\text{notation}}{=} \frac{1}{2}\left(\lim f(a^-) + \lim f(a^+)\right). \end{aligned}$$

  Cette condition est vérifiée en tout point de continuité de f.

On dira qu'une fonction f est **normalisée** si elle vérifie la condition de Dirichlet en tout point $t \in \mathbb{R}$.

- On notera $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ le $\mathbb{C}-ev$ des fonctions réglées normalisées 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes.

Proposition 2.2. Toute fonction réglée normalisée 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée intégrable sur tout intervalle $[a, a+2\pi]$ et

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Théorème 2.1. L'application

$$(f,g) \longmapsto (f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}(\mathbb{T})$. On notera $\| \ \|_2$ la norme associée :

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{T}), \qquad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}.$$

- On munit $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ des deux autres normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ définie pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, par

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|.$$

de sorte que

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{T}) : \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \qquad \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|f\|_1 = (1 \mid |f|)$, on a

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{T}) : \|f\|_1 \leq \|f\|_2 .$$

- Dans toute la suite on notera, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$e_n : t \longmapsto e^{int}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n et S_n les fonctions

$$C_n : t \longmapsto \cos(nt) \text{ et } S_n : t \longmapsto \sin(nt),$$

ce sont des fonctions 2π-périodiques.

Proposition 2.3. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale. La famille $(1; C_n; S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthogonale, avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \|C_n\|_2 = \|S_n\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- On notera $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ le sev de $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ engendré par la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{T}) = \text{vect}\,(e_k; -n \leq k \leq n) = \text{vect}\,(1, C_k, S_k; 1 \leq k \leq n)$$

celui des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, il est de dimension $2n+1$.

Proposition 2.4. Pour tout $f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{T})$, on a

$$f = \sum_{k=-n}^{n} (e_k \mid f)\, e_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)dt\right) e_k$$

oubien

$$
\begin{aligned}
f &= (1 \mid f) + 2\sum_{k=1}^{n} \left((C_k \mid f)\, C_k + (S_k \mid f)\, S_k\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\, f(t)dt\right) C_k \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kt)\, f(t)dt\right) S_k
\end{aligned}
$$

- Pour tout $f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{T})$, les scalaires

  $$c_k = (e_k \mid f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)dt$$

  pour $k \in [\![-n, n]\!]$, sont les *coefficients exponentiels* de f, de sorte que

  $$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

  La formule de Parseval donne

  $$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2\,.$$

  De même les scalaires

  $$a_k = 2\,(C_k \mid f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\, f(t)dt$$

  pour $k \in [\![0, n]\!]$, et

  $$b_k = 2\,(S_k \mid f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kt)\, f(t)dt$$

  pour $k \in [\![1, n]\!]$,sont les *coefficients trigonométriques* de f, de sorte que

  $$\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\right).$$

  Dans ce cas, la formule de Parseval s'écrit

  $$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right).$$

Série trigonométrique

On appelle série trigonométrique toute série de fonctions sous forme exponentielle :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}\right)$$

oubien sous forme trigonométrique :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right)$$

3. Coefficients de Fourier d'une fonction

Définition 3.1. On appelle coefficients de Fourier exponentiels d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, réglée 2π-périodique, les scalaires

$$c_n(f) = (e_n \mid f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)dt$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La famille $\hat{f} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelée famille des coefficients de Fourier de f. somme partielle $S_N(f)$

De même les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ données par

$$a_n(f) = 2(C_n \mid f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)dt$$

$$b_n(f) = 2(S_k \mid f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)dt$$

sont appelées suites des coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Enfin la série trigonométrique

$$c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}\right)$$

oubien

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

est appelée série de Fourier de f. Ses sommes partielles sont alors appelée sommes de Fourier de f.

Proposition 3.1. Si la série trigonométrique

$$\left(c_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}\right)\right)$$

converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors les coefficients de Fourier de f sont les c_n.

Propriétés des coefficients de Fourier

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, réglée 2π-périodique,

(1) Si on note a_n, b_n et c_n ses coefficients de Fourier On a

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{matrix} \tag{3.1}$$

(2) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$, et si f est réelle : $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$.

(3) Si $\widetilde{f} = f \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$ alors $c_{-n}(\widetilde{f}) = c_n(f)$. En particulier

- Si f est une fonction paire, on a

$$b_n(f) = 0 \text{ et } a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt)\, f(t)dt$$

- Si f est une fonction impaire, on a

$$a_n(f) = 0 \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt)\, f(t)dt$$

(4) L'application $f \longrightarrow \hat{f}$ est linéaire de plus $\hat{f}$ est bornée est

$$\left\|\hat{f}\right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt = \|f\|_1 .$$

(5) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors elle admet une dérivée f' 2π-périodique, continue par morceaux normalisée. Et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

En général si f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux alors

$$\forall n \in \mathbb{Z} : c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f).$$

Inégalité de Bessel

La théorie des espaces préhilbertien permet d'énnocer :

Théorème 3.1. Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, le polynôme trigonométrique $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{T})$ et on a

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + d(f, \mathcal{P}_n(\mathbb{T}))^2$$

l'inégalité de Bessel s'écrit alors

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Théorème 3.2. Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, les séries numériques

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n\geq 1} \left(|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2\right)$$

et

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{n\geq 1} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$$

sont convergentes et ont même somme inférieure ou égale à $\|f\|_2^2$.

4. Convergence d'une série trigonométrique

Convergence quadratique

Théorème 4.1. La série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$ converge en moyenne quadratique vers f :

$$\|f - S_n(f)\|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par suite la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, où e_n désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(t) = e^{int}$, est une base hilbertienne de $\mathcal{L}(\mathbb{T})$. **La formule de Parseval** s'écrit :

$$\|f\|_2^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2\right)$$

oubien

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)$$

Proposition 4.1. L'application $f \longrightarrow \hat{f}$ de $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie (donc injective). En particulier $f = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z} : c_n(f) = 0$.

Comportement asymptotique des coefficients de Fourier

Théorème 4.2. Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{|n| \to +\infty} c_n(f) = 0.$$

En général si f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et $\mathcal{C}^k$ par morceaux

$$c_n(f) = o\left(|n|^{-k}\right).$$

Remarque 4.1. Les relations **(3.1)** permettent d'avoir les mêmes propriétés pour les suites $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$.

Critère de convergence normale

Théorème 4.3. La série trigonométrique

$$c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, les séries numériques

$$\sum_{n\geq 1} (|c_{-n}| + |c_n|) \text{ et } \sum_{n\geq 1} (|a_n| + |b_n|),$$

qui sont de même nature, sont convergentes.

Théorème 4.4. Si une fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement (donc uniformément) et sa somme est égale à f.

Théorème 4.5 (Weierstrass). Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, continue 2π-périodique est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques.

Théorème de Dirichlet

Théorème 4.6. Si une fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction : $t \longmapsto \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$.

Courbes et surfaces 15

1. Courbes paramétrées

Dans toute la suite, on considère le plan affine euclidien $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ qu'on identifie à $\mathbb{C}$, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ou l'espace affine euclidien $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, tout deux seront notés $\mathbb{R}^d$ (i.e. $d = 2$ ou $d = 3$). Tout point de $\mathbb{R}^d$ sera représenté par ses coordonnées (x, y) (ou (x, y, z)) dans ce repère $\mathcal{R}$.

Définition 1.1. On appelle courbe paramétrée (ou arc paramaétré) sur $\mathbb{R}^d$ toute applicatin $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que l'arc est de classe $\mathcal{C}^k$ $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ si γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

L'ensemble $\Gamma = \{M(t) = \gamma(t) \mid t \in I\}$ est appelé image ou support de l'arc.

Si I est un segment on dit que l'arc est fini ou un chemin.

Interprétation cinématique

Si le point $M(t)$ de coordonées $f(t)$ désigne la position d'un mobile (à l'instant t).

- Le support Γ de l'arc désigne alors la trajectoire du mobile,
- $\vec{v}(t) = \dfrac{\overrightarrow{df}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ la vitesse du mobile et
- $\vec{\gamma}(t) = \dfrac{\overrightarrow{d^2f}}{dt^2} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}$ son accélération.
- On dit que le point $M(t_1) \in \Gamma$ est multiple (double, triple, ...), s'il existe $t_2 \neq t_1$ $(t_2, t_3, ..)$ deux à deux distincts tels que $f(t_1) = f(t_2) = \dots$. Un point qui n'est pas multiple est dit simple. On dit que l'arc Γ est simple si tous ses points son simples.
- On dit que le point $M(t_0) \in \Gamma$ est régulier si $\overrightarrow{M'(t_0)} \neq \vec{0}$. Un point qui n'est pas régulier est dit stationnaire. Si tous les points sont réguliers, on dit que l'arc est régulier.

  Dans le cas où le point $M(t_0)$ est régulier la droite $M(t_0) + \mathbb{R}\overrightarrow{M'(t_0)}$ est la **tangente** à Γ en $M(t_0)$.
- On dit que le point $M(t_0) \in \Gamma$ est bi-régulier si la famille $\left(\overrightarrow{M'(t_0)}, \overrightarrow{M''(t_0)}\right)$ est libre. Si tous les points sont bi-réguliers, on dit que l'arc est bi-régulier.

Dans le cas où le point $M(t_0)$ est bi-régulier le plan $M(t_0)+\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{M'(t_0)}, \overrightarrow{M''(t_0)}\right)$ est le **plan osculateur** à Γ en $M(t_0)$.

1.1. Arcs équivalents

Soient $\Gamma : (I, f)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, J intervalle de $\mathbb{R}$ et $\theta : J \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^k$. On dit que θ est un changement de paramètre admissible de Γ si θ' ne s'annule pas sur J (i.e. θ est strictement monotonne et donc bijective).

Dans ce cas l'arc $(J, g = f \circ \theta)$ admet le même support Γ et on dit que (J, g) est un paramétrage admissible de Γ et que (I, f) et (J, g) sont $\mathcal{C}^k$-équivalents.

Si θ est strictement croissante les arcs sont dits de même orientation.

Théorème 1.1. Deux arcs finis, simples et réguliers de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^d$ sont $\mathcal{C}^k$-équivalents si et seulement s'ils ont même image.

1.2. Courbes planes définies implicitement

- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, si l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$$

n'est pas vide, on l'appelle la courbe définie implicitement par l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

On dit que la courbe $\mathcal{C}$ est régulière si f est sans points critiques sur U. Dans ce cas le théorème des fonctions implicites permet de montrer que $\mathcal{C}$ admet un paramétrage cartésien local en tout point.

Si $A = (a, b)$ est un point de $\mathcal{C}$, l'équation de la tangente en A est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$

Exemple : Coniques

C'est le cas où la courbe $\mathcal{C}$ est donnée par une fonction f polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{C} : Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1.1}$$

avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, qu'on suppose non vide.

Proposition 1.1. Il existe un repère orthonormé dans lequel l'équation de la conique est de la forme

$$\mathcal{C} : ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \tag{1.2}$$

c.à.d ne contient le terme en xy.

Dans la pratique : on utilise un changement de repère

$$\begin{cases} x = \cos\theta . x' - \sin\theta . y' \\ y = \sin\theta . x' + \cos\theta . y' \end{cases}$$

qui signifie une rotation d'angle θ du repère, le coefficient du terme $x'y'$ s'écrit

$$2(B-A)(\cos\theta\sin\theta) + 2C\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$= (B-A)\sin 2\theta + 2C\cos 2\theta$$

donc pour que terme $x'y'$ disparaisse, il suffit de prendre

$$\begin{array}{rcc} \theta = \dfrac{\pi}{4} & \text{si} & A = B \\ \theta = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{2C}{A-B}\right) & \text{si} & \text{non} \end{array}$$

Puis à l'aide d'un changement d'origine, on aboutit (en éliminant les cas triviaux) à une équation de l'une des 3 formes suivantes :

(1) Ellipse : $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$

(2) Hyperbole : $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$

(3) Parabole : $Y^2 = 2pX$

2. Etude métrique des courbes

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un chemin de classe $\mathcal{C}^k$, k assez grand.

2.1. Abscisse curviligne

Le point $M(t_0) = M_0$ étant choisi commme origine. On appelle abscisse curviligne du point $M(t)$, la quantité :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{k=1}^{d} \left(x'_k(t)\right)^2\right)^{1/2}$$

Longueur d'une courbe

Si $I = [a, b]$, on appelle longueur de γ la quantité :

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Propriétés de l'abscisse curviligne

- $|s(t) - s(t')| = \mathcal{L}(M(t), M(t'))$, longueur de la courbe entre $M(t)$ et $M(t')$.

- Si $r \mapsto t(r)$ est strictement croissante, alors

$$\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du = \int_{r_0}^{r} t'(u)\|\gamma'(t(u))\| du = \int_{r_0}^{r} \|g'(u)\| du$$

avec $g(u) = \gamma(t(u))$. s est le même que l'on prenne γ ou g comme paramétrage.
Si $r \mapsto t(r)$ est strictement décroissante, alors :

$$\int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\| du = \int_{r_0}^{r} -t'(u)\|\gamma'(t(u))\| du = -\int_{u_0}^{u} \|g'(u)\| du$$

s change de signe selon que l'on prenne γ ou g comme paramétrage. Le signe de l'abscisse curviligne dépend d'une orientation arbitraire du paramétrage. s dépend également évidemment de l'origine choisie du paramétrage.

- $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ ou encore $\dfrac{ds}{dt} = \left\|\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|$.

Donc, sauf aux points où $f'(t)$ s'annule (points stationnaires), s est une fonction strictement croissante de t et continue. Elle est donc bijective. On peut donc effectuer un changement de paramètre en prenant l'abscisse curviligne elle-même au lieu de t. Il s'agit d'un changement de paramétrage admissible.

Si $x = s(t)$, le nouveau paramètre est x, on a :

$$g(x) = \gamma(s^{-1}(x)) \text{ i.e : } M(t) = M(s^{-1}(x))$$

D'où $g'(x) = (s^{-1})'(x)\gamma'[s^{-1}(x)] = \dfrac{1}{s'[s^{-1}(x)]}\gamma'[s^{-1}(x)]$.On en déduit

$$\|g'(x)\| = 1.$$

En général, on note $s = s(t)$ pour alléger les notations, la relation précédente s'écrit alors :

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\right\| = 1$$

On dit que l'arc (I, γ) est normal si pour tout $t \in I$, $\|\gamma'(t)\| = 1$.

THÉORÈME 2.1. Tout chemin régulier de classe $\mathcal{C}^k$ est $\mathcal{C}^k$-équivalent à un chemin normal.

2.2. Repère de Frenet

Les courbes sont de classes $\mathcal{C}^2$ ou plus. Les points sont supposés biréguliers (pas de point stationnaires, pas de point de rebroussement, pas depoint d'inflexion ...). On considère alors un paramètrage normal $M(s)$ de Γ.

Important : *L'arc étant régulier donc l'abscisse curviligne est un paramètre admissible. Si t est un paramètre de l'arc s est une fonction de t et réciproquement de sorte que s et t sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre. Par conséquent,*

$$s'(t) = \frac{1}{t'(s)} \text{ ou bien } \frac{ds}{dt} = \frac{1}{dt/ds}$$

ce qui explique les facilités de calcul des dérivées dans toute la suite.

- Le vecteur normé tangent à l'arc Γ au point $M(s)$ est alors défini par :

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}.$$

Remarque 2.1. Pour la physique, t est le temps, $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ est la vitesse vectorielle $\vec{v}$, $\dfrac{ds}{dt}$ la vitesse scalaire v, par définition de l'abscisse curviligne s $\left(\text{i.e} : \dfrac{ds}{dt} = \left\|\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|\right)$, on a :

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \text{ ou encore } \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{T}.$$

La relation $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\vec{T}$ exprime simplement que $\vec{v} = v\vec{T}$.

- Avec $\left\|\vec{T}\right\|^2 = 1$, on a

$$\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

le vecteur non nul $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ est donc orthogonal à $\vec{T}$.

Définition 2.1. La **courbure** de l'arc Γ au point $M(s)$ est le scalaire :

$$c = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|$$

de sorte que le vecteur $\vec{N}$ défini par

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c\vec{N}$$

soit unitaire et orthogonal à $\vec{T}$.

- en dimension 2, le **repère de Frenet** au point $M(t)$ est par définition le repère mobile $\left(M(t), \vec{T}, \vec{N}\right)$.

La quantité $R = \dfrac{1}{c}$ s'appelle **rayon de courbure**.

Calcul de la courbure avec un paramètre quelconque

Avec un paramètrage $M(t)$ quelconque on a :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{T} \text{ et } \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{R}\vec{N}$$

Remarque 2.2. On reconnaît dans l'expression précédente celle de l'accélération vectorielle

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

d'un point mobile, somme de l'accélération tangentielle $\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} = \frac{dv}{dt}\vec{T}$ et de l'accélération normale $\frac{v^2}{R}\vec{N}$.

- En **dimension** 2, d'après la relation précédente, donnant l'expression de l'accélération dans le repère de Frenet, on déduit que :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \frac{1}{R}$$

En coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$R = \frac{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3}{x'y'' - x''y'}$$

En coordonnées polaires, où $r = r(\theta)$, c.à.d $\overrightarrow{OM} = r(\theta)\vec{u}_\theta$, avec $\vec{u}_\theta = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$, et $\vec{u}'_\theta = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$, on a :

$$R = \frac{\left(\sqrt{r'^2 + r^2}\right)^3}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

- En **dimension** 3, on a :

$$R = \frac{\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|^3}{\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right\|}$$

- Si on suppose les courbes bi-régulières de classe $\mathcal{C}^3$ ou plus. On définit le troisième vecteur de Frenet

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

de sorte que le repère de Frenet en M, $\left(M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right)$, soit orthonormé direct. Avec les relations :

$$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}, \quad \vec{N} = R\frac{d\overrightarrow{T}}{ds},$$

on a

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \vec{N} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}$$

DÉFINITION 2.2. La **torsion** de l'arc Γ au point $M(s)$ est le scalaire :

$$\gamma = \left\|\frac{d\overrightarrow{B}}{ds}\right\| \text{ de sorte que } \frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \gamma\vec{N}$$

Avec $\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T}$, on a

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{ds} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge c\vec{N} = -\gamma \vec{B} - c\vec{T}$$

On résume les relations entre les différentes quantités précédentes dans les **formules de Frenet** :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c\vec{N} \qquad \frac{d\vec{N}}{ds} = -c\vec{T} - \gamma\vec{B} \qquad \frac{d\vec{B}}{ds} = \gamma\vec{N}$$

3. Notion de surface

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ d'un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. On appelle nappe cartésienne associée à f, la nappe paramétrée :

$$\Phi : \left| \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, y, f(x,y)) \end{array} \right.$$

on dit alors que Σ est la surface (ou nappe) d'équation $z = f(x,y)$, on écrit $\Sigma : z = f(x,y)$.

Plan tangent à une nappe cartésienne

Plan tangent à une nappe cartésienne en $A = (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$:

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Surfaces définies implicitement

- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, si l'ensemble

  $$\mathcal{C} = \{M(x,y,z) \in U \mid f(x,y,z) = 0\}$$

  n'est pas vide, on l'appelle la surface définie implicitement par l'équation

  $$f(x,y,z) = 0.$$

On dit que la nappe $\mathcal{C}$ est régulière si f et sans points critiques sur U. Dans ce cas le théorème des fonctions implicites permet de montrer que $\mathcal{C}$ admet un paramétrage cartésien local en tout point. Si $A = (a,b,c)$ est un point de $\mathcal{C}$, l'équation du plan tangent en A est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(A)(z-c) = 0$$

Exemple : Quadriques

C'est le cas où la surface Σ est donnée par une fonction f polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \Sigma : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ +2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec A, B, C, D, E, F ne sont pas tous nuls.

Le premier membre de l'équation (3.1) de Σ est un polynôme du second degré, somme d'une forme quadratique, d'une forme linéaire et d'une constante. On écrira vectoriellement cette équation sous la forme

$$\Sigma : q(x, y, z) + 2\ell(x, y, z) + J = 0 \tag{3.2}$$

où les matrices de q et ℓ dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix}$$

La forme quadratique q s'appelle la forme quadratique principale de Σ et son rang, le rang de Σ. On notera φ la forme bilinéaire symétrique polaire de q.

Proposition 3.1. Il existe un repère orthonormé dans lequel Σ possède une équation sans termes croisés de la forme :

$$\Sigma : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \tag{3.3}$$

En effet: Il s'agit d'une base orthonormée dans laquelle la matrice de q est diagonale, celle-ci existe d'après le théorème spectral. ▪

En travaillant l'équation (3.3) comme dans le cas des coniques, et en discutant selon le rang et la signature de la forme quadratique, on aboutit (en éliminant les cas triviaux) à une équation de l'une des 9 formes suivantes :

(1) Ellipsoïde : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(2) Hyperboloïde à une nappe : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) Hyperboloïde à deux nappes : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) Cône du second degré : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

(5) Paraboloïde elliptique : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$

(6) Paraboloïde hyperbolique : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$

(7) Cylindre elliptique : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(8) Cylindre hyperbolique : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(9) Cylindre parabolique : $x^2 - 2py = 0$

*Utiliser la commande **implicitplot3d** de* Maple *pour visualiser les différents quadriques.*

Formes différentielles 16

1. Forme différentielle de degré 1

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, dans la pratique $n = 2$ ou $n = 3$.

On appelle **Forme différentielle** de degré 1 sur $\mathcal{U}$ toue application ω définie sur $\mathcal{U}$ à valeur dans le dual de $\mathbb{R}^n$.

- Si ω est une forme différentielle, alors pour tout $x \in \mathcal{U}$, $\omega(x)$ est une forme linéaire, qui s'écrit sous la forme

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, e_i^*$$

$\mathcal{B}^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ désigne la base duale de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, les applications

$$a_i : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \omega_i(x) \end{array} \right. , \quad 1 \leq i \leq n,$$

sont alors les coordonnées de ω dans $\mathcal{B}^*$, on a donc :

Proposition 1.1. ω est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ω_i est de classe $\mathcal{C}^k$.

Notation différentielle

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ e_i^* n'est autre que la forme linéaire coordonnée :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

on la note dx_i, de sorte

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \cdots + \omega_n dx_n$$

Un exemple de forme différentielle est donné par les différentielles d'applications différentielles à valeur réelle :

Proposition 1.2. Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$. La différentielle

$$df : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{U} & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ x & \longmapsto & df_x \end{array} \right.$$

de f est une forme différentielle de degré 1 de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Les composantes de df_x sont les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $1 \leq i \leq n$:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \ .$$

Ce qui permet de définir la notion de primitive d'une forme différentielle :

1.1. Formes différentielles exactes

On dit qu'une forme différentielle ω est **exacte** s'il existe une application $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\omega = df$. On dit alors que f est une **primitive** de ω, si $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$, alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!] : \omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Déterminer f revient donc à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles.

Formes différentielles fermées

Si $\omega = df$ est une forme exacte de calsse $\mathcal{C}^1$, alors grâce au théorèmes de Schwarz, on a pour tout $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

On dit qu'une forme différentielle $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$ est fermée, si pour tout $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

On a donc la proposition :

Proposition 1.3. Toute forme différentielle exacte de classe $\mathcal{C}^1$ est fermée.

1.2. Intégrale d'une 1-forme différentielle

Soient $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$ une forme différentielle continue sur $\mathcal{U}$ et

$$\gamma : \left| \begin{array}{rcl} [a, b] & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ t & \longmapsto & (x_1(t), ..., x_n(t)) \end{array} \right.$$

un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 1.1. On appelle Intégrale de la forme différentielle ω suivant le chemin fini γ, le réel :

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \omega_i(\gamma(t))\, x_i'(t)\, dt.$$

PROPOSITION 1.4. Si $\omega = df$ est une forme exacte de calsse $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, alors pour tout arc $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{U}$, on a

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

On appelle **lacet** dans $\mathcal{U}$ tout chemin $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{U}$ fermé, c.à.d vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$.

THÉORÈME 1.1. Soit $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe par arcs. Une forme continue ω sur $\mathcal{U}$ est exacte si et seulement si l'intégrale de ω suivant tout lacet dans $\mathcal{U}$ est nulle.

On dit que l'ouvert $\mathcal{U}$ est **étoilé** s'il existe un point $A \in \mathcal{U}$ tel que pour tout point M de $\mathcal{U}$ le segment $[AM]$ est inclu dans $\mathcal{U}$.

THÉORÈME 1.2 (Poincaré). Toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé $\mathcal{U}$ est exacte.

Changement de paramètre

PROPOSITION 1.5. Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{U}$, est un chemin de classe $\mathcal{C}^k$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ est un changement de paramètre admissible de classe $\mathcal{C}^k$, alors

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma\circ\varphi} \omega \text{ oubien } \int_\gamma \omega = -\int_{\gamma\circ\varphi} \omega$$

selon que φ est croissante ou décroissante.

Linéarité

PROPOSITION 1.6. Si ω et υ sont deux formes différentielles continues sur $\mathcal{U}$ et γ un arc paramétré de $\mathcal{U}$, on a alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_\gamma (\alpha\omega + \beta\upsilon) = \alpha \int_\gamma \omega + \beta \int_\gamma \upsilon.$$

Relation de Chasles

PROPOSITION 1.7. Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathcal{U}$ est un chemin paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, $c \in [a, b]$ et ω une forme différentielle continue sur $\mathcal{U}$, alors

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_{|[a,c]}} \omega + \int_{\gamma_{|[c,d]}} \omega.$$

- La relation de Chasles permet d'étendre immédiatement la notion d'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur un arc paramétré au cas des arcs paramétrés continus et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Inégalité de la moyenne

Proposition 1.8. Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathcal{U}$ est un chemin paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ et ω une forme différentielle continue sur $\mathcal{U}$, alors

$$\left|\int_\gamma \omega\right| = \sup_{x\in \mathrm{Im}(\gamma)} \|\omega(x)\| \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$ n'est autre que la longueur de l'arc γ.

2. Champs de vecteurs

2.1. Définitions – exemples

Dans toute la suite $n = 2$ ou $n = 3$ et $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

- On appelle champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$, toute application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{F} : \begin{array}{rcl} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & \vec{F}(M) \end{array},$$

  les éléments de $\mathcal{U}$ sont considérs comme points.
- Une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ est par fois appelée champ de scalaires.
- Soit f un champ de scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, on appelle *gradient* de f le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ ou $\vec{\nabla} f$ définit sur $\mathcal{U}$ par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

  si $n = 2$ la composante $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ est ignorée.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, on appelle *laplacien* de f le champ scalaire Δf défini sur $\mathcal{U}$ par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

  si $n = 2$ la quantité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ est ignorée.
- Soit $\vec{F} : (x,y,z) \longmapsto (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ où P, Q et R sont des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
  (1) On appelle *divergence* de $\vec{F}$ le champ scalaire $\mathrm{div}\vec{F}$ défini sur $\mathcal{U}$ par :

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

  si $n = 2$ la composante z et la quantité $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ sont ignorées.
  (2) On appelle *rotationnel* de $\vec{F}$ le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F}$ défini sur $\mathcal{U}$ par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Formules d'analyse vectorielle

Soient f, g des champs scalaires et $\vec{F}, \vec{G}$ des champs vectoriels de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les formules suivantes :

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f+\lambda g) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f) + \lambda\overrightarrow{\text{grad}}\,(g)$
  $\text{div}\left(\vec{F}+\lambda\vec{G}\right) = \text{div}\left(\vec{F}\right) + \lambda\text{div}\left(\vec{G}\right)$
  $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{F}+\lambda\vec{G}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{F}\right) + \lambda\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{G}\right)$
- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}\,(g) + g\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$
  $\text{div}\left(f\vec{F}\right) = f\text{div}\left(\vec{F}\right) + \overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\,.\vec{F}$
  $\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\vec{F}\right) = f\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{F}\right) + \overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\wedge\vec{F}$
- $\text{div}\left(\vec{F}\wedge\vec{G}\right) = \left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{F}\right)\right).\vec{G} - \vec{F}.\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{G}\right)\right).$
  Si de plus les champs sont de classe $\mathcal{C}^2$, on a :
- $\Delta(f+\lambda g) = \Delta f + \lambda\Delta g$
- $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\,.\overrightarrow{\text{grad}}\,(g) + g\Delta f$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\right) = \vec{0}$, $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{F}\right)\right) = 0$,
  $\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\overrightarrow{\text{grad}}\,(g)\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f)\wedge\overrightarrow{\text{grad}}\,(g)\,.$

Potentiel scalaire

Définition 2.1. Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}$, on dit que $\vec{F}$ *dérive d'un potentiel* s'il existe un champ scalaire f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$. Dans ce cas f est appelé potentiel scalaire de $\vec{F}$.

Théorème 2.1. Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
(i) Si $\vec{F}$ admet un potentiel scalaire, alors $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$.
(ii) Réciproquement, si $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$ et si $\mathcal{U}$ est étoilé alors $\vec{F}$ admet un potentiel scalaire.

2.2. Circulation, intégrale curviligne

Définition 2.2. Soit $\Gamma = ([a,b], t \longmapsto M(t))$ un arc paramétré orienté de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, dont le support est inclus dans $\mathcal{U}$, et soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs continu sur $\mathcal{U}$. L'intégrale

$$\int_a^b \vec{F}(M(t))\,.\overrightarrow{M'(t)}dt$$

est appelée *intégrale curviligne*, ou *circulation* de $\vec{F}$ sur Γ, on la note : $\oint_\Gamma \vec{F}(M)\,\overrightarrow{dM}$.

Remarque 2.1. Si $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, on note aussi cette intégrale

$$\int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P(x,y)x' + Q(x,y)y'\}\, dt$$

Proposition 2.1. Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel f (i.e : $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$) alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\,(M)\,\overrightarrow{dM} = f(B) - f(A),$$

A et B sont respectivement origine et extrémité de Γ.

Remarque 2.2. Si la courbe Γ est fermée, alors la circulation sur Γ de tout champ de vecteurs dérivant d'un potentiel est nulle.

Formule de Green-Riemann

Soit D un domaine élémentaire de $\mathbb{R}^2$. On suppose que le bord ∂D de D est la réunion de courbes de classe $\mathcal{C}^1$ que l'on oriente de telle façon que le vecteur normal soit dirigé vers l'intérieur de D. On admet la formule de Green-Riemann suivante :

Proposition 2.2. Si $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ (contenant D), alors :

$$\oint_{\partial D} \vec{F}\,(M)\,\overrightarrow{dM} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Application au calcul d'aire

Pour trouver l'aire de D, qui vaut $\iint_D dxdy$, il suffit de trouver deux fonctions P et Q telles que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, prendre par exemple $P = 0$, $Q = x$ et $\vec{F} = (0, x)$.

Intégrales doubles 17

1. Fubini

Définition 1.1. Soit $D = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur D, à valeurs réelles. On définit

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$$

Le ***le théorème de Fubini*** énonce que le rôle des deux variables est symétrique, c'est-à dire que l'on peut aussi écrire :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

- Dans le cas où $f(x, y) = g(x)h(y)$, il est évident que

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)dxdy = \int_a^b g(x)dx. \int_c^d h(y)dy.$$

- On étend aussi cette définition au cas où le domaine d'intégration D est de la forme :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

appelé ***domaine élémentaire, simple du plan euclidien*** $\mathbb{R}^2$, φ et ψ sont continues. En posant :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

- La méthode générale de calcul de $\iint_D f(x, y)dxdy$ consiste donc à intégrer d'abord par rapport à une variable, y par exemple, les bornes dépendant de x puis à intégrer par rapport à l'autre variable.
- Pour les fonctions continues, on peut intervertir l'ordre d'intégration (*théorème de Fubini*) dans le cas de domaines simples.

2. Propriétés

(1) **Linéarité par rapport au domaine :** Si D et D' sont disjoints on a :

$$\iint_{D\cup D'} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D'} f(x,y)dxdy$$

(2) **Linéarité :** Pour f, g continues sur D et λ réel on a :

$$\iint_D (f+\lambda g)\,dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \lambda \iint_D g(x,y)dxdy.$$

(3) **Monotonie :** Pour f, g continues sur D on a :

$$f \leq g \Longrightarrow \iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

En particulier si $f \geq 0$: $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

3. Changement de variables

On admet le théorème suivant qui donne la formule de changement de variable en général :

Théorème 3.1. Soit D et Δ deux domaines simples de $\mathbb{R}^2$. Si Ψ est un difféomorphisme de Δ sur D, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue, alors

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_\Delta f \circ \Psi(u,v)\,|J_\Psi(u,v)|\,dudv$$

$J_\Psi(u,v)$ désigne le jacobien de Ψ en (u,v).

Cas affine :

On pose

$$\begin{cases} x = au + bv + c \\ y = a'u + b'v + c \end{cases}$$

alors on a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(au+bv+c, a'u+b'v+c)\,|ab'-a'b|\,dudv$$

Où $\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in D\right\}$.

Coordonnées polaires :

Il s'agit de la formule de changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Dans ce cas on a :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

Où $\Delta = \{(r,\theta) : (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\}$.

Fonctions holomorphes 18

Dans tout ce petit chapitre Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Si z_0 est un complexe et r est réel strictement positif, $D(z_0, R)$ désignera la boule **ouverte** de $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon r. L'ensemble $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ x+iy \in \Omega\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de Ω par l'application linéaire, et donc continue, $(x,y) \longmapsto x+iy$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ peut être confondue avec la fonction $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}, \ (x,y) \longmapsto f(x+iy)$, on notera en particulier, lorsque $z = x+iy$

$$f'(z)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(z) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

respectivement la différentielle et les dérivées partielles de la fonctions $\widetilde{f}$ au point (x,y). On adoptera les notations du calcul différentiel. Si f est différentiable en $z_0 \in \Omega$ alors

$f'(z_0).h$ désignera la différentielle de f en z_0 appliquée au vecteur h ; et se référant à la base $(1,i)$ de $\mathbb{C}$ on peut donc écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0).1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = f'(z_0).i$$

1. Fonctions holomorphes

1.1. Définitions, condition de Cauchy – Riemann

Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

(1) soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si la fonction :

$$z \longmapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},\ z \in \Omega \backslash \{z_0\}$$

admet une limite dans $\mathbb{C}$ en z_0. cette limite est alors notée $f'(z_0)$.

(2) On dit que f est holomorphe sur Ω si et seulement si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω est sa fonction dérivée $f' : z \longmapsto f'(z)$ est continue sur Ω.

Théorème 1.1. Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

(1) soit $z_0 \in \Omega$. f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si

$$\begin{cases} \text{f est différentiable en } z_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) \text{ (Condition de Cauchy–Riemann)} \end{cases}$$

(2) f est holomorphe sur Ω si et seulement si

$$\begin{cases} \text{f est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega \text{ (en tant que fct des 2 variables x et y)} \\ \forall z \in \Omega,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) \end{cases}$$

Proposition 1.1. Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On note P et Q les parties réelle et imaginaire de f.

$$\forall z \in \Omega\,,\ f(z) = P(z) + iQ(z)$$

f est holomorphe sur Ω si et seulement si

$$\begin{cases} \text{P et Q sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial x} \end{cases}$$

Remarque 1.1. Si f est holomorphe sur Ω alors la matrice jacobienne de f et son jacobien en un point $z \in \Omega$ dans la base $(1, i)$ sont

$$J_f(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(z) & -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(z) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(z) & \dfrac{\partial P}{\partial x}(z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_f(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(z)^2 + \frac{\partial Q}{\partial x}(z)^2$$

Noter que sauf si $f'(z) = 0$, on a toujours $J_f(z) \neq 0$. Noter aussi que $J_f(z) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(z)^2 + \dfrac{\partial P}{\partial y}(z)^2 = \|\nabla P(z)\|^2 = \|\nabla Q(z)\|^2$ et donc que si jamais ∇P (ou ∇Q) est partout nul sur Ω alors f' est nulle sur Ω.

1.2. Propriétés

Soient deux fonctions $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

(1) Si f et g sont holomorphes alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f + \lambda g$ est holomorphe sur Ω et

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$$

(2) Si f et g sont holomorphes sur Ω alors fg est holomorphe sur Ω et

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(3) On suppose que g ne s'annule pas sur Ω. Si f et g sont holomorphes sur Ω alors $\dfrac{f}{g}$ est holomorphe sur Ω et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

En particulier $\frac{1}{g}$ est holomorphe sur Ω et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

Remarque 1.2. Comme pour les fonctions réelles, on a les propriétés :

(1) Si f et g sont des fonctions holomorphes, la formule de Leibiniz reste valable :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (fg)^{(p)} = \sum_{k=1}^{p} C_k^p f^{(k)} g^{(p-k)}$$

(2) Soit Δ un autre ouvert de $\mathbb{C}$. Soit des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(\Omega) \subset \Delta$. Si f est holomorphe sur Ω et g est holomorphe sur Δ alors $g \circ f$ est holomorphe sur Ω et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

(3) On suppose que Ω est **connexe par arcs**. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. f est constante sur Ω si et seulement si f' est nulle sur Ω.

(4) Inégalité des accroissements finis. On suppose que Ω est convexe. Soit une fonction f holomorphe sur Ω. Pour tous $a, b \in \Omega$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{t \in [0,1]} \|f'\left((1-t)a + tb\right)\|$$

Proposition 1.2. Soit une fonction holomorphe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

(1) Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(I) \subset \Omega$.
Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I,\ (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t))$$

(2) Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{C},\ (s,t) \longmapsto \Phi(s,t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\Phi(V) \subset \Omega$.
Alors $f \circ \Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et pour tout $(s,t) \in V$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f \circ \Phi}{\partial s}(s,t) = f'\left(\Phi(s,t)\right) \dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t) \\[2ex] \dfrac{\partial f \circ \Phi}{\partial t}(s,t) = f'\left(\Phi(s,t)\right) \dfrac{\partial f}{\partial t}(s,t) \end{cases}$$

1.3. Exemples fondamentaux

(1) Toute fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$ est holomorphe. La dérivée correspond au polynôme dérivé.

(2) La fonction exponentielle est holomorphe et égale à sa dérivée.

(3) Les fonctions trigonométriques définies pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\cos' z = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{iz}) = -\sin z \quad \text{et} \quad \sin' z = \cos z$$

2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, fonctions analytiques

2.1. Définitions et premières propriétés

Soit une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

(1) f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω si et seulement si f est holomorphe sur Ω ; f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. On définit alors la suite des fonctions dérivées successives $(f^{(n)})_n$ de f par

$$f^{(0)} = f; \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

(2) f est dite analytique sur Ω, si et seulement pour tout $z_0 \in \Omega$, f est "développable en série entière sur un voisinage de z_0", c'est à dire

$$\forall z_0 \in \Omega,\ \exists r > 0,\ \exists (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ D(z_0, r) \subset \Omega$$

$$\text{et } \forall z \in D(z_0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Proposition 2.1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit f sa somme sur le disque ouvert $D(0, R)$

(1) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D(0, R)$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\forall z \in D(0, R),\ f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) z^{n-p}$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

(3) Pour tout $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta \qquad \text{(Formules de Cauchy)}$$

Corollaire 2.1. Soit f une fonction analytique sur Ω

(1) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

(2) Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ et

$$\forall z \in D(z_0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

alors

- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
- $\forall \rho \in]0, r[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$

2.2. Analycité d'une fonction holomorphe

Théorème 2.1. Toute fonction holomorphe sur Ω est analytique sur Ω. Plus précisément, soit f une fonction holomorphe sur Ω et soit $z_0 \in \Omega$. Posons

$$R = \sup\{r > 0 \mid D(z_0, r) \subset \Omega\}$$

avec la convention $R = +\infty$ si ce dernier ensemble n'est pas majoré. Alors il existe une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in D(z_0, R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Corollaire 2.2. Toute fonction f holomorphe sur Ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. En particulier f' est aussi holomorphe sur Ω.

Proposition 2.2. Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si f ne s'annule pas sur $D(0, R)$, alors $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur $D(0, R)$.

2.3. Principe des zéros isolés

Lemme 2.1. On suppose que Ω est connexe par arcs. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z_0) = 0$$

Alors f est nulle sur Ω.

Théorème 2.2 (Principe des zéros isolés). On suppose que l'ouvert Ω est connexe par arcs. Soit f une fonction holomorphe sur Ω qu'on suppose non partous nulle sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$. Si z_0 est un zéro de f, alors il existe $r > 0$ tel que

$$D(z_0, r) \subset \Omega \quad \text{et} \quad (\forall z \in D(z_0, r) \backslash \{z_0\},\ f(z) \neq 0)$$

On dit que les zéros de f sont des points isolés de Ω.