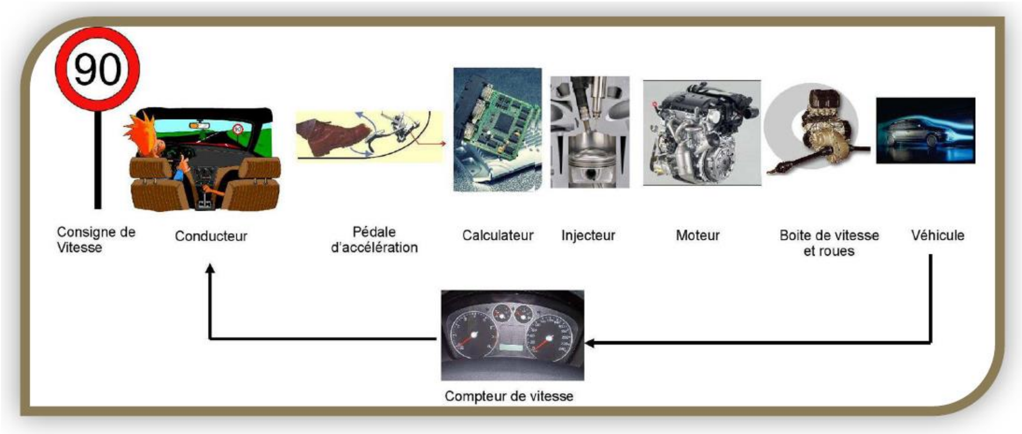
Systèmes Linéaires Continus Invariants

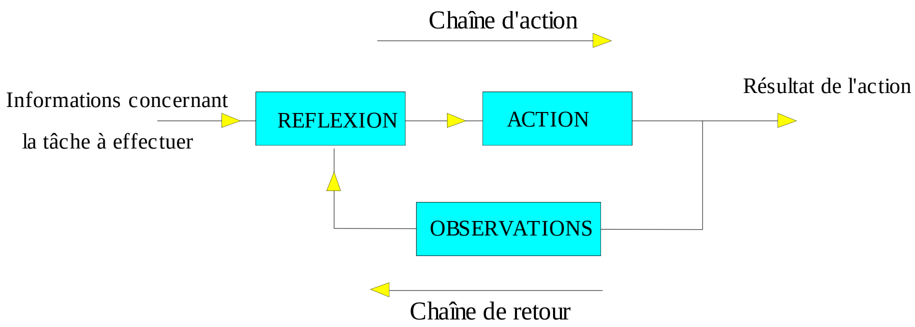
SLCI1 - Généralités

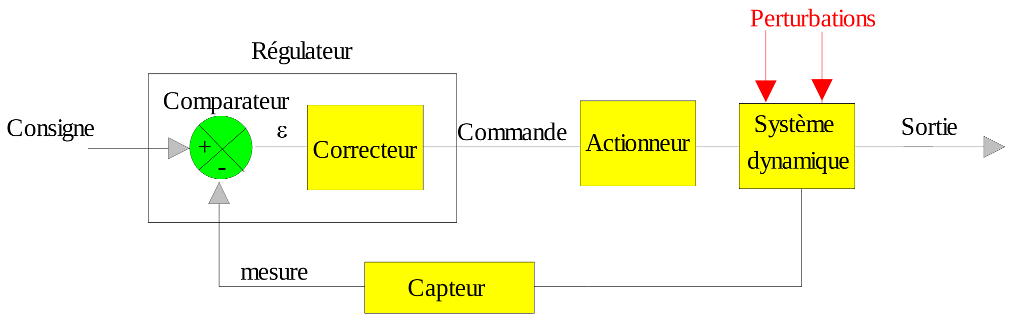
Résumé

Système asservi

MESURE – ECART – CORRECTION







Définitions	
SYSTEME en SLCI	Ensemble pouvant être décrit par des équations
CONTINU/ANALOGIQUE	Grandeurs connues à chaque instant
DISCRET/NUMERIQUE	Grandeurs mesurées en des points généralement espacés dans le temps
REGULATION	Consigne constante
SUIVI	Consigne variable
LINEAIRE	$L(\lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda L(e_1) + \mu L(e_2)$
INVARIANT	Même comportement à deux moments différents – Non-vieillissement
PERFORMANCES	Précision statique (entrée échelon) ou dynamique Rapidité – Stabilité – Dépassement
NON LINEARITES	Seuil – Saturation – Hystérésis – Courbure
ENTREES CLASSIQUES	Impulsion/Dirak – Echelon/Heaviside – Rampe – Sinusoïdale

Formalisme de Laplace

Définition

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\, dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t)$$

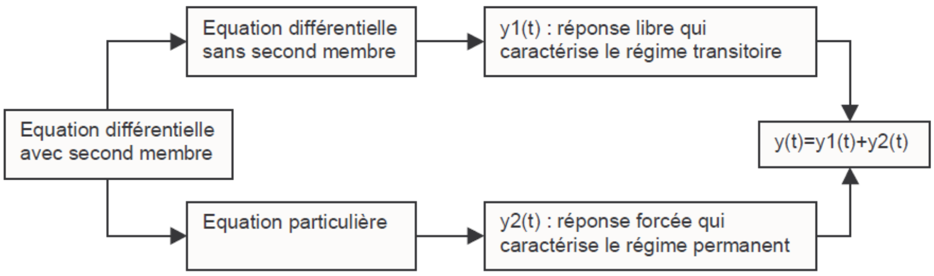
$$[F(p)] = [f(t)] * T$$

Utilité

Résolution d'équations différentielles du type :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \quad ; \quad m < n$$

Méthode temporelle classique

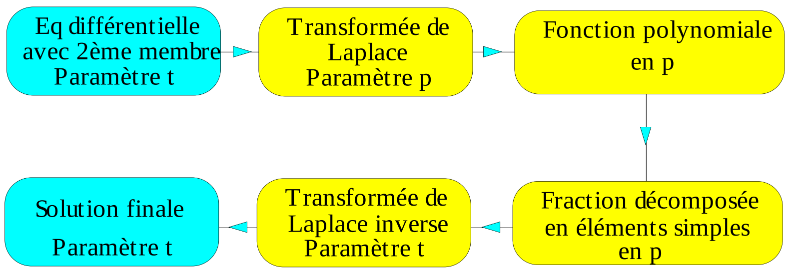


Méthode Laplace

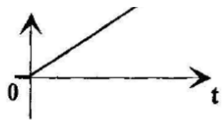
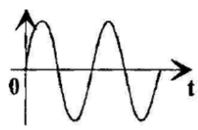
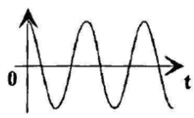
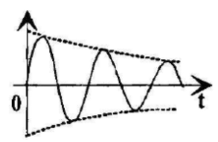
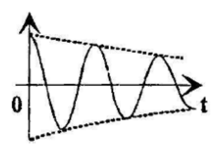
Mise en place d'une fraction de polynômes dans Laplace (CIN) :

$$S(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} E(p)$$

Remplacement de $E(p)$ par sa fonction dans Laplace, décomposition en éléments simplets et application des transformées de Laplace inverses.

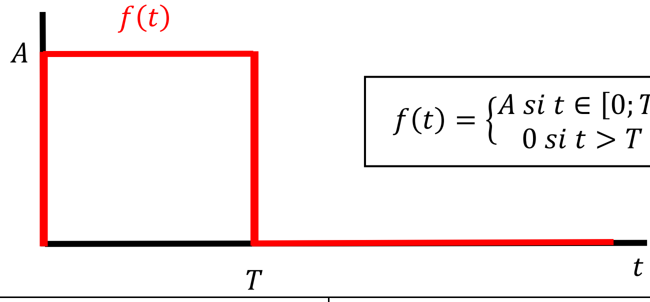


Transformées usuelles – Propriétés - Théorèmes

Allure	**Fonction $f(t)$**	**Transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$**	**Pôles de $F(p)$**
	$t \to \delta(t)$ Impulsion de DIRAC	1	RAS
	$t \to f(t) = u(t)$ Echelon unitaire	$F(p) = \frac{1}{p}$	0
	$t \to f(t) = tu(t)$ Rampe	$F(p) = \frac{1}{p^2}$	0 *Double*
	$t \to f(t) = t^n u(t)$ Fonction puissance	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	0 *D'ordre* $n+1$
	$t \to f(t) = e^{-at}u(t)$ Exponentielle	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$-a$
	$t \to f(t) = te^{-at}u(t)$ $t \to f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)} e^{-at}u(t)$	$F(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$ $F(p) = \frac{1}{(p+a)^n}$	$-a$ *Multiple*
	$t \to f(t) = \sin \omega t \, u(t)$ Sinus	$F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
	$t \to f(t) = \cos \omega t \, u(t)$ Cosinus	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
	$t \to f(t) = e^{-at} \sin \omega t \, u(t)$ Sinus amorti $t \to f(t) = ???$	$F(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$ $F(p) = \frac{\omega}{[(p+a)^2 + \omega^2]^n}$	$-a \pm j\omega$ *Multiple*
	$t \to f(t) = e^{-at} \cos \omega t \, u(t)$ Cosinus amorti $t \to f(t) = ???$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$ $F(p) = \frac{p+a}{[(p+a)^2 + \omega^2]^n}$	$-a \pm j\omega$ *Multiple*

$t \to f(t)$	$F(p)$
$t \to f'(t)$	$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0^+)$
$t \to f''(t)$	$\mathcal{L}(f''(t)) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$\begin{cases} t \to f'(t) \\ f(0^+) = 0 \end{cases}$	$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p)$
....	....
$t \to f^{(n)}(t)$	$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\begin{cases} t \to f^{(n)}(t) \\ f(0^+) = 0 \\ \dots \\ f^{(n-1)}(0^+) = 0 \end{cases}$	$\mathcal{L}(f^n(t)) = p^nF(p)$
$\begin{cases} t \to \int_0^t f(t)dt = f_p(t) \\ f_p(0^+) = 0 \end{cases}$ f_p primitive de f	$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{F(p)}{p}$
$t \to t^nf(t)$	$\mathcal{L}(t^nf(t)) = (-1)^nF^{(n)}(p)$
$t \to e^{-at}f(t)$	$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(p+a)$
Théorème du retard	$\mathcal{L}(f(t-T)) = e^{-Tp}F(p)$
Théorème de la valeur finale	$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0^+} pF(p)$
Théorème de la valeur initiale (si système stable – cf cours 2° année)	$\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \lim\limits_{p \to +\infty} pF(p)$
Equivalents $Q(p) \underset{0^+}{\sim} Q_{eq}^{0^+}(p)$ $Q(p) \underset{+\infty}{\sim} Q_{eq}^{+\infty}(p)$ $\lim\limits_{p \to 0^+} Q(p) = \lim\limits_{p \to 0^+} Q_{eq}^{0^+}(p)$ $\lim\limits_{p \to +\infty} Q(p) = \lim\limits_{p \to +\infty} Q_{eq}^{+\infty}(p)$	$\frac{b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0}{a_np^n + \cdots + a_1p + a_0} \underset{0^+}{\sim} \frac{b_0}{a_0}$ $\frac{b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0}{a_np^n + \cdots + a_1p + a_0} \underset{+\infty}{\sim} \frac{b_mp^m}{a_np^n} = \frac{b_m}{a_n}p^{m-n}$

Exemple de détermination d'une TL

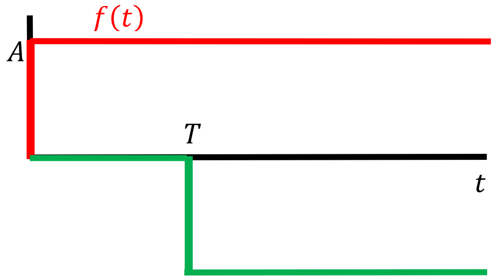


$$f(t) = \begin{cases} A \ si \ t \in [0;T] \\ 0 \ si \ t > T \end{cases}$$

<table>
<tr><th>Calcul</th><th>Méthode astucieuse</th></tr>
<tr><td>

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$
$$F(p) = \int_0^{T} f(t)e^{-pt}\,dt + \int_T^{++\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$
$$F(p) = A\int_0^{T} e^{-pt}\,dt = A\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^T$$
$$F(p) = \frac{A}{p}(1-e^{-pT})$$

</td><td>

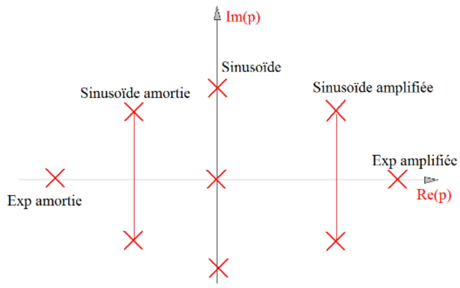


$$g(t) = Au(t)$$
$$f(t) = g(t) - g(t-T)$$
$$F(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p}e^{-pT} = \frac{A}{p}(1-e^{-pT})$$

</td></tr>
</table>

Pôles d'une FT et allure de la fonction temporelle associée

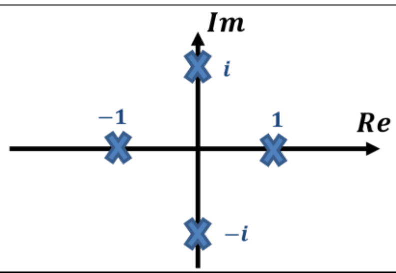
On place les pôles de la FT dans le plan complexe et on a :



<table>
<tr><th colspan="2">Exemple</th></tr>
<tr><td>

$$F(p) = \frac{10}{p^4-1}$$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$F(p) = \frac{10}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{10}{(p+1)(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$$
$$f(t) = u(t)[Ae^{-t} + Be^{t} + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)]$$

</td></tr>
</table>

Rappels sur la décomposition en éléments simples

Soit une fraction rationnelle $\frac{R(X)}{B(X)}$ telle que : $\deg R < \deg B$ (cf système causaux)

$$B(X) = a(X-r_1)^{m_1} \dots (X-r_m)^{m_p}(X^2+b_1X+c_1)^{n_1} \dots \left(X^2+b_qX+c_q\right)^{n_q}$$

C'est un produit de polynômes de degré 1 et de degré 2 non factorisables ($\Delta < 0$)

Alors :

$$\frac{R(X)}{B(X)} = \frac{R(X)}{a(X-r_1)^{m_1} \dots (X-r_m)^{m_p}(X^2+b_1X+c_1)^{n_1} \dots \left(X^2+b_qX+c_q\right)^{n_q}}$$

$$\frac{R(X)}{B(X)} = \sum_i \sum_k \frac{A_{ik}}{(X-r_i)^k} + \sum_j \sum_k \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{\left(X^2+b_jX+c_j\right)^k}$$

Exemples
$\frac{x^3-21x-7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$
$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$
$\frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$

Détermination des coefficients par mise au même dénominateur, passage aux limites, multiplication et remplacement par des valeurs particulières…

Même dénominateur	Multiplication + Annulation Fonctionne bien pour les pôles simples
$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ $= \frac{(A_1+B_1)x^2+(A_1+C_1-B_1)x+(A_1-C_1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$ $\begin{cases} A_1+B_1=1 \\ A_1+C_1-B_1=-6 \\ A_1-C_1=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} A_1 = 1-B_1 = -2 \\ B_1 = 2+1 = 3 \\ C_1 = 2-B_1 = -1 \end{cases}$	Multiplication par $(x-1)$ et en $x=1$ $\frac{x^2-6x-1}{(x^2+x+1)} = A_1 + (x-1)\frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$ $A_1 = -2$ Plus complexe pour les autres !

Applications de TLI (Transformées de Laplace Inverse)

$$s(t)=\mathcal{L}^{-1}\big(S(p)\big)$$

Exemple simple	Exemple plus complexe Cf forme canonique polynôme
$S(p)=\frac{1}{p-1}+\frac{4}{p+2}$	$S(p)=\frac{3p-2}{p^2+2p+2}$ $S(p)=\frac{3p-2}{(p+1)^2+1}$ $S(p)=\frac{3(p+1)-5}{(p+1)^2+1^2}$ $S(p)=3\frac{(p+1)}{(p+1)^2+1^2}-5\frac{1}{(p+1)^2+1^2}$
$s(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+(-1)}\right)+4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)$ $=(e^t+4e^{-2t})u(t)$	$s(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(3\frac{(p+1)}{(p+1)^2+1^2}-5\frac{1}{(p+1)^2+1^2}\right)$ $s(t)=[3e^{-t}\cos(t)-5e^{-t}\sin(t)]\,u(t)$

Forme canonique d'un polynôme

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$$

$$\alpha=-\frac{b}{2a}\quad;\quad\beta=f(\alpha)$$

Exemple d'une résolution d'équation

Equation	$\frac{d^2s(t)}{dt^2}-3\frac{ds(t)}{dt}+2s(t)=e(t)$ $e(t)=u(t)$
Dans Laplace	$p^2S(p)-3pS(p)+2S(p)=E(p)$ $(p^2-3p+2)S(p)=E(p)$ $\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{p^2-3p+2}$
Entrée Laplace	$E(p)=\frac{1}{p}$
Sortie Laplace	$S(p)=\frac{1}{p(p^2-3p+2)}$
Décomposition en ES	$S(p)=\frac{1}{p(p-1)(p-2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{(p-1)}+\frac{C}{(p-2)}$ $=[\dots]$ $S(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p}-\frac{1}{(p-1)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(p-2)}$
TLI	$s(t)=\left(\frac{1}{2}-e^t+\frac{1}{2}e^{2t}\right)u(t)$

Fonctions de transfert

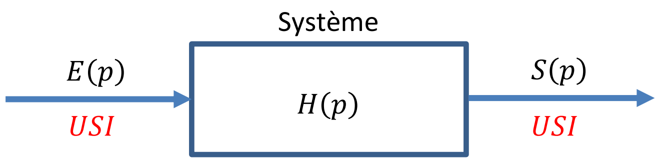
Equation différentielle du système

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e$$

Domaine de Laplace – CIN ou Heaviside : $e(0) = \frac{de(0)}{dt} = \frac{d^2 e(0)}{dt^2} = \cdots = 0$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$

Représentation par bloc



$S(p) = H(p)E(p)$

Forme canonique

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{p}{z_i}\right)}{\prod_{k=1}^{n-\alpha}\left(1 - \frac{p}{p_k}\right)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + n_1 p + \cdots + n_m p^m}{1 + d_1 p + \cdots + d_{n-\alpha} p^{n-\alpha}} \quad ; \quad \begin{cases} [d_1] = s \\ \vdots \\ [d_{n-\alpha}] = s^{(n-\alpha)} \end{cases}$$

z_i	0 de la FT (réels ou complexes)
p_i	Pôles de la FT (réels ou complexes)
α	Classe de la FT
n	Ordre de la FT
K	Gain statique : $[K] = \frac{[s(t)]}{[e(t)]} s^{-\alpha}$

Ecart statique

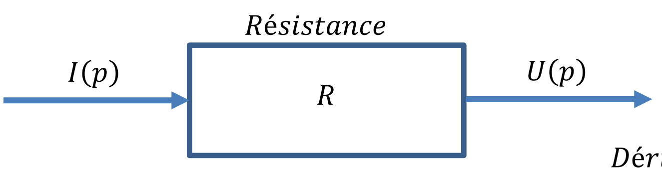
Quel que soit l'ordre de la FT, si le système est stable et ne tend pas vers 0 pour une entrée échelon, alors $\alpha = 0$ et :

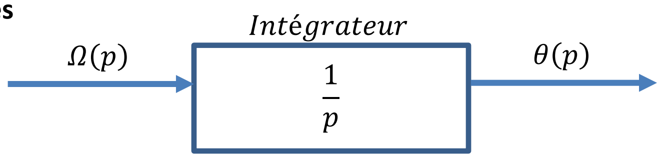
$$\varepsilon_s = \lim_{t \to +\infty} \big(E(p) - S(p)\big) = \lim_{p \to 0} E_0\big(1 - H^n(p)\big) = E_0\left[1 - \lim_{p \to 0}\big(H^n(p)\big)\right]$$

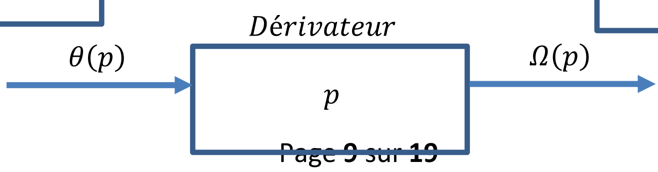
$$H^n(p) = \frac{K\left(\frac{b_m}{b_0} p^m + \cdots + \frac{b_1}{b_0} p + \mathbf{1}\right)}{\left(\frac{a_n}{a_0} p^n + \cdots + \frac{a_1}{a_0} p + \mathbf{1}\right)} \underset{0}{\sim} K$$

$$\varepsilon_s = E_0(1 - K) \; ou \; (1 - K) \; en \; \%$$

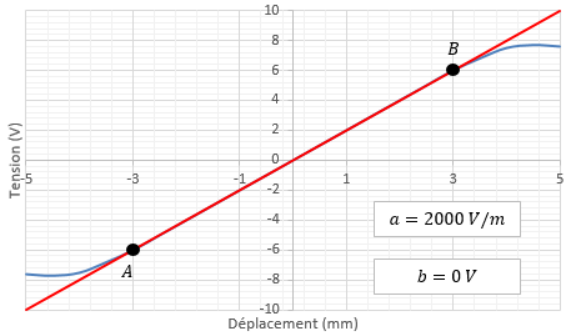
Exemples







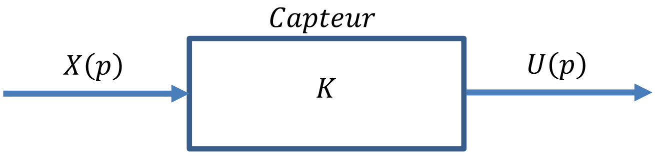
Linéarisation d'un comportement



$$U(p) = KX(p)$$

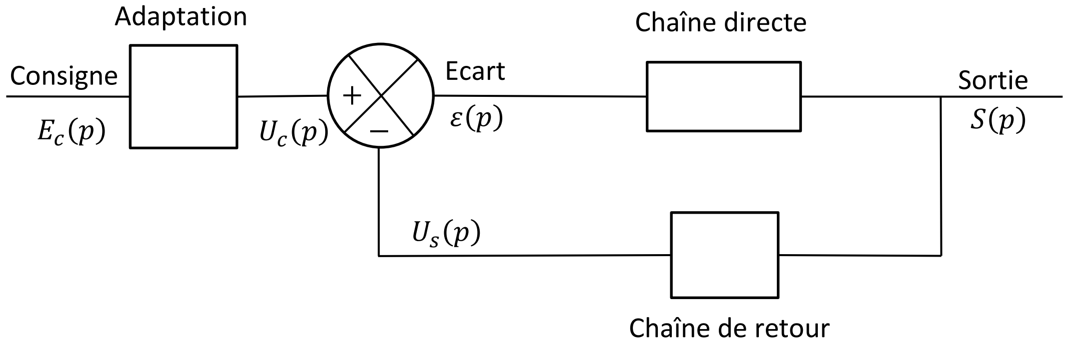
$$K = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-(-6)}{3-(-3)} = 2\ V.mm^{-1}$$
$$= 2000\ V.m^{-1}$$

ATTENTION aux unités !

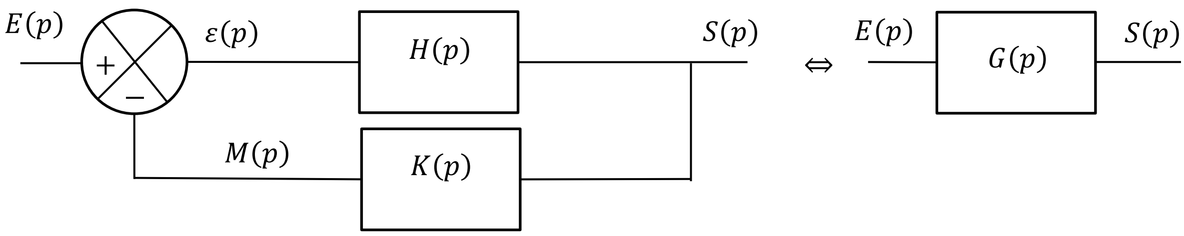


Représentation par schéma bloc

Forme générale

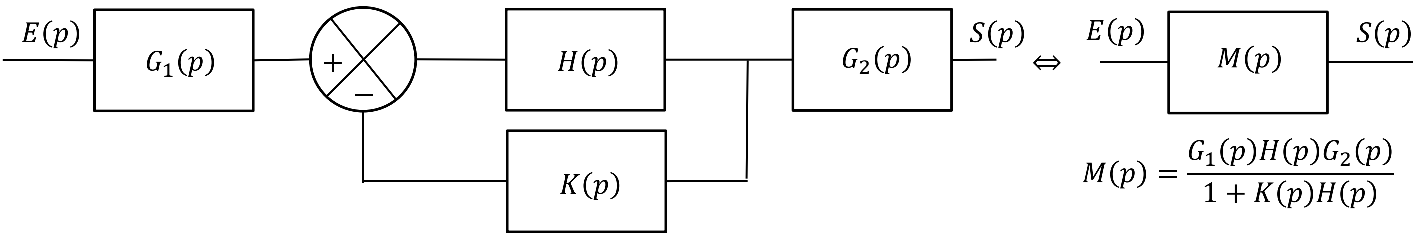


Formule de Black



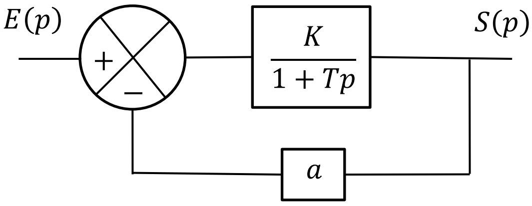
$$\boxed{FTBF(p) = G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1+K(p)H(p)} = \frac{Chaine\ directe(p)}{1+FTBO(p)}}$$

Unité d'une BO
$[FTBO(p)] = 1$



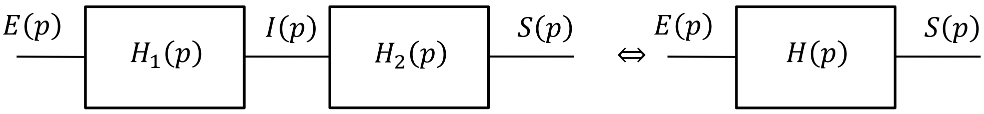
$$M(p) = \frac{G_1(p)H(p)G_2(p)}{1+K(p)H(p)}$$

Exemple d'application et mise sous forme canonique

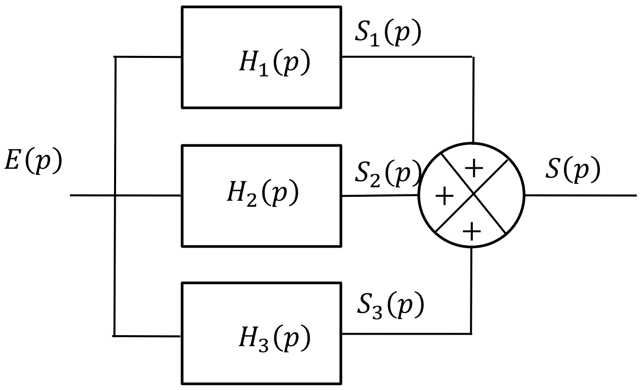


$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{\frac{K}{1+Tp}}{1+a\frac{K}{1+Tp}}=\frac{\frac{K}{1+aK}}{1+\frac{T}{1+aK}p}$$

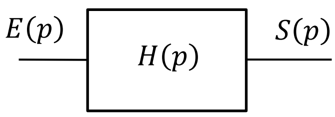
Opérations



$$H(p)=H_1(p)H_2(p)$$

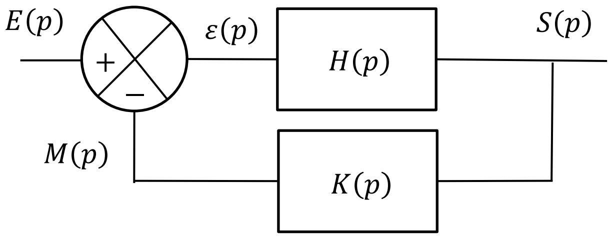


$\Leftrightarrow$

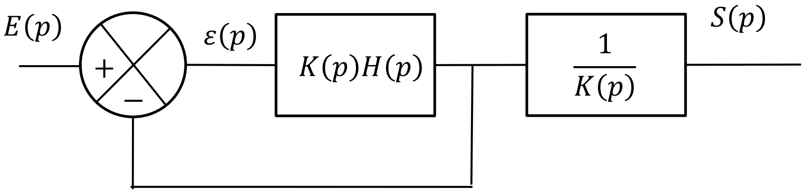


$$H(p)=H_1(p)+H_2(p)+H_3(p)$$

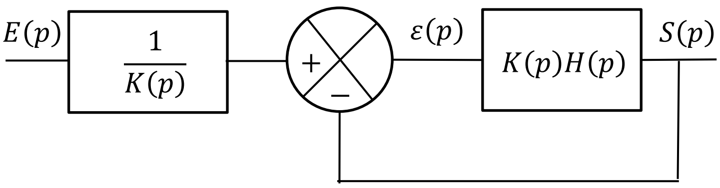
Retour unitaire



$$G(p)=\frac{H(p)}{1+K(p)H(p)}$$

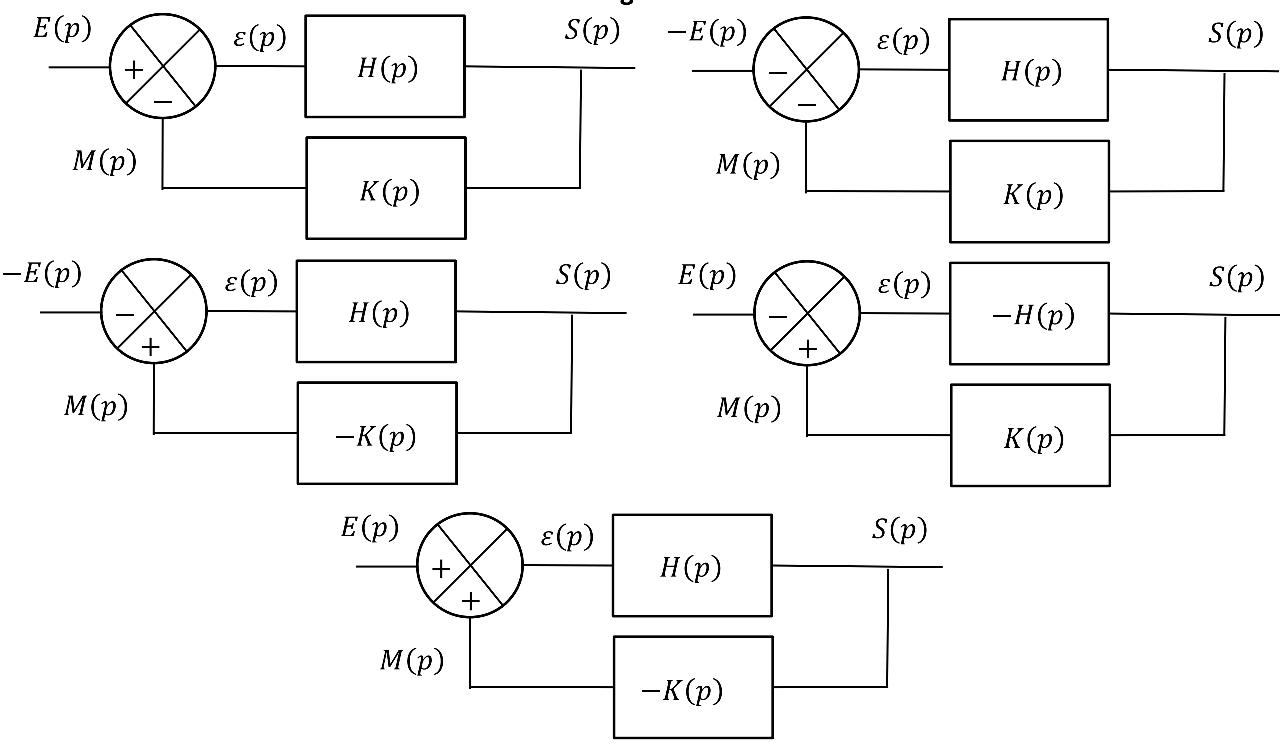


$$G'(p)=\frac{1}{K(p)}\frac{K(p)H(p)}{1+K(p)H(p)}$$
$$=G(p)$$

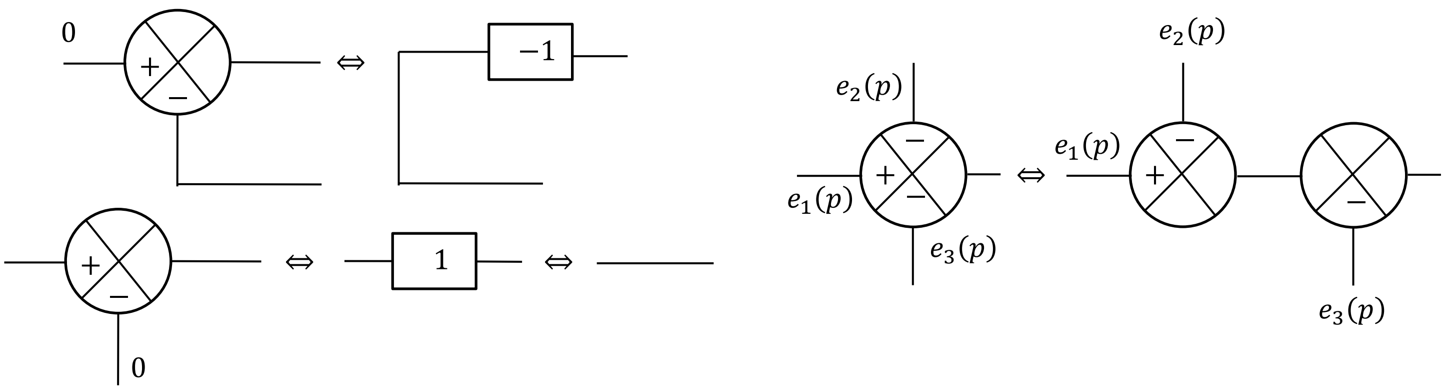


$$G''(p)=\frac{K(p)H(p)}{1+K(p)H(p)}\frac{1}{K(p)}$$
$$=G(p)$$

Signes



Transformations diverses



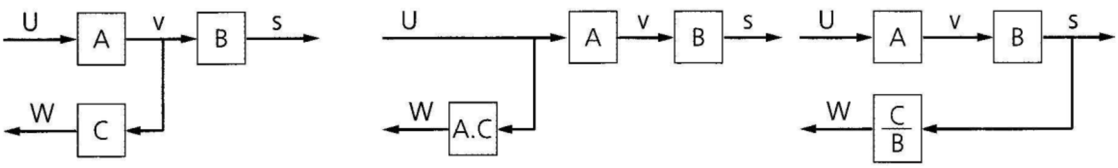


Schéma de départ | Déplacement vers l'amont | Déplacement vers l'aval

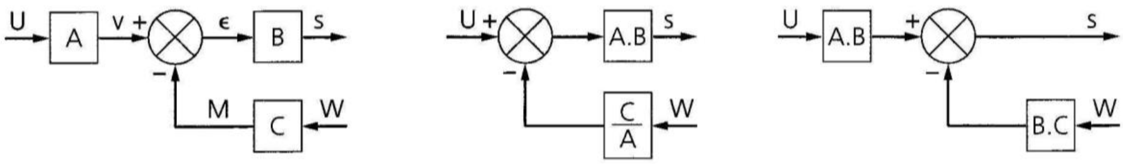
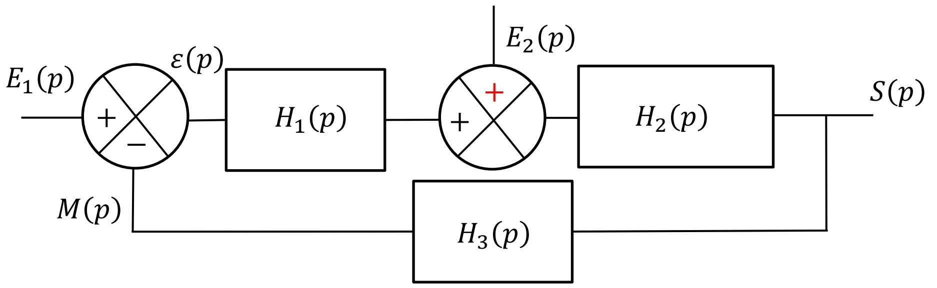


Schéma de départ | Déplacement vers l'amont | Déplacement vers l'aval

Théorème de superposition

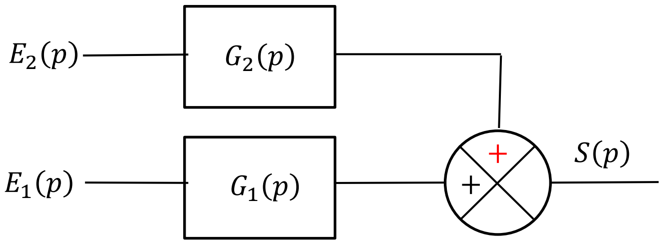


$$S(p) = \frac{H_2(p)H_1(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_1(p) + \frac{H_2(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_2(p)$$

$$S(p) = G_1(p)E_1(p) + G_2(p)E_2(p)$$

D'une manière générale, on a :

$$G_i(p) = \frac{Chaîne\ directe\ après\ E_i}{1 + FTBO(p)}$$

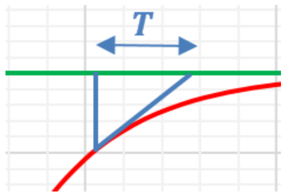


Systèmes du premier ordre

Généralités

$$s(t)+T\frac{ds(t)}{dt}=Ke(t)\quad ;\quad (K,T)>0\quad ;\quad \omega_0=\frac{1}{T}\quad ;\quad [T]=s$$

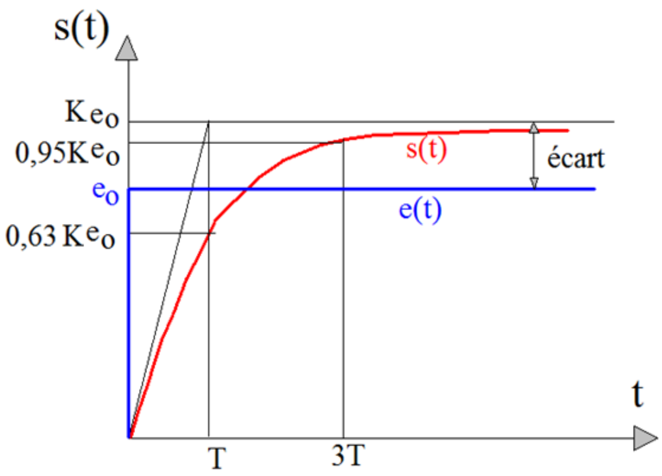
$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{\color{red}{\mathbf{1}}+Tp}$$



Réponse à un échelon

$$s(t)=Ke_0\left[1-e^{-\frac{t}{T}}\right]u(t)$$

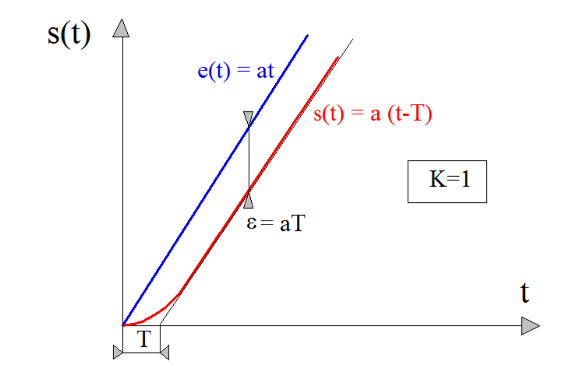
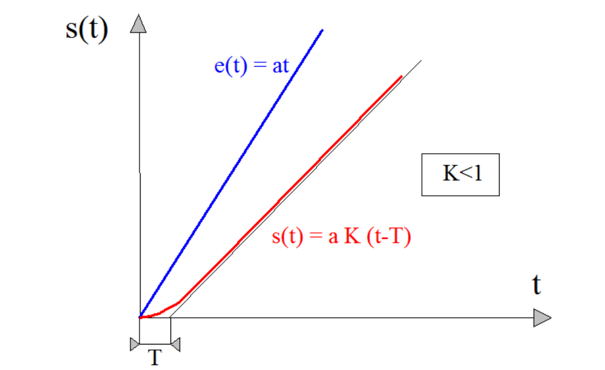
$$s(T)=0{,}63s_\infty\quad ;\quad \varepsilon_s=e_0(1-K)\quad ;\quad s'(0)=\frac{Ke_0}{T}\quad ;\quad t_{r5\%}\approx 3T\quad ;\quad s_\infty=Ke_0$$



Réponse à une rampe

$$s(t)=Ka\left[t-T\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right]u(t)$$

$$Asymptote: y(t)=Ka(t-T)\quad ;\quad \varepsilon_s=e_0(1-K)\quad ;\quad s'(0)=0\quad ;\quad \varepsilon_v=\begin{cases}aT\ si\ K=1\\ \pm\infty\ si\ K\neq 1\end{cases}$$

 	
$K=1$	Exemple si $K<1$

Systèmes du second ordre

Généralités

$$s(t)+\frac{2z}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}=Ke(t) \quad ; \quad (K,\omega_0,z)>0$$

z	Coefficient d'amortissement	1
K	Gain statique	$\frac{[s(t)]}{[e(t)]}$
ω_0	Pulsation propre non amortie	$rd.s^{-1}$

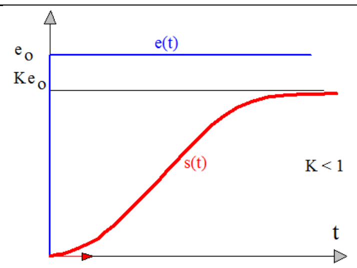
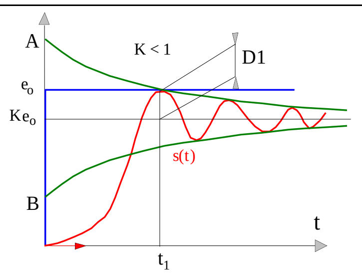
$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

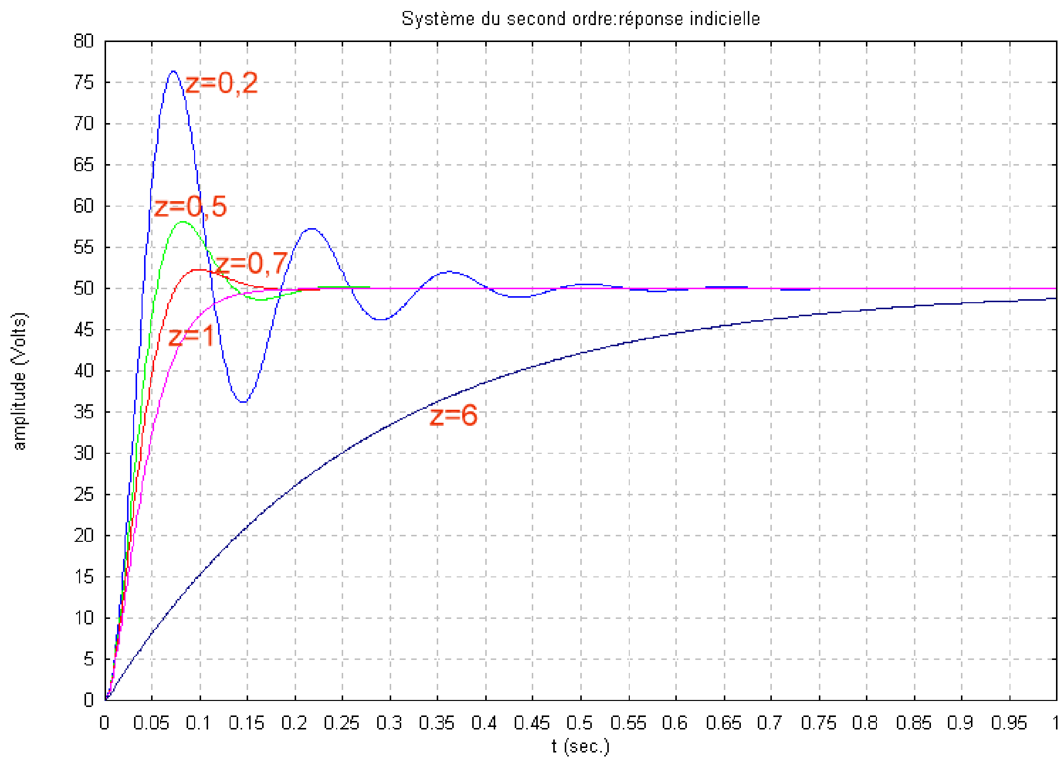
Particularités de la FT selon z

$\Delta>0 \Leftrightarrow z>1$	$\Delta=0 \Leftrightarrow z=1$	$\Delta<0 \Leftrightarrow z<1$
$H(p)=\frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$ $min(\omega_i)<\omega_0<max(\omega_i)$	$H(p)=\frac{K}{(1+Tp)^2}$ $T=\frac{1}{\omega_0}$	$H(p)=\frac{K{\omega_0}^2}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}$ $a=z\omega_0 \quad ; \quad \omega_n=\omega_0\sqrt{1-z^2}$

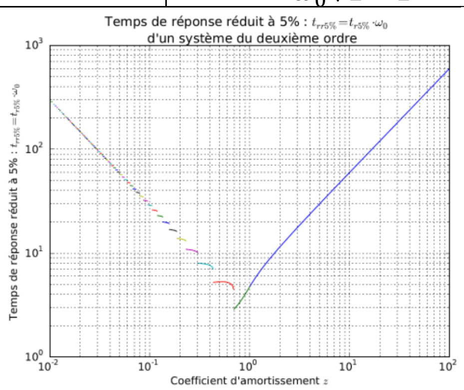
Réponse à un échelon

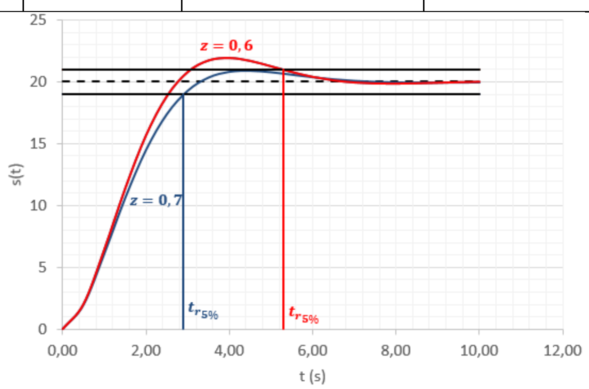
$$\varepsilon_s=e_0(1-K) \quad ; \quad s_\infty=Ke_0 \quad ; \quad s'(0)=0$$

$\Delta>0 \Leftrightarrow z>1$	$\Delta=0 \Leftrightarrow z=1$	$\Delta<0 \Leftrightarrow z<1$
$Ke_0\left[1+\frac{1}{T_2-T_1}\left[T_1e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\right]$	$Ke_0\left[1-e^{-\frac{t}{T}}\left(1+\frac{t}{T}\right)\right]$	$Ke_0\left[1-\frac{e^{-z\omega_0t}}{\sqrt{1-z^2}}\sin(\omega_nt+\phi)\right]$ $\omega_n=\omega_0\sqrt{1-z^2};\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$ $t_1=\frac{\pi}{\omega_n}=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}=\frac{T_n}{2}$ $s(t_1)=Ke_0\left[1+e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}\right]$ $D_{i\%}=\frac{s(t_i)-s_\infty}{s_\infty}=e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}\epsilon[0;1]$ $D_1=D_{1\%}s_\infty$
Régime apériodique	**Régime apériodique critique**	**Régime pseudopériodique**
Sans dépassement		**Avec dépassement**
		



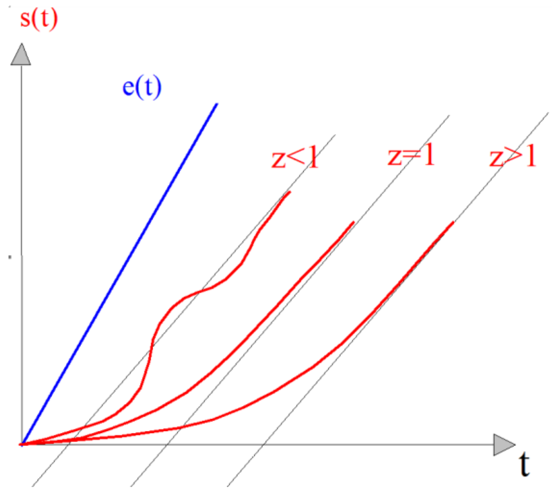
<table>
<tr><td colspan="3">$z < 1$</td><td>$z = 1$</td><td>$z > 1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Régime pseudo périodique
$\omega_n = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$</td><td>Régime apériodique critique</td><td>Régime apériodique</td></tr>
<tr><td>$z < 0,7$</td><td>$z \approx 0,7$
$0,6901$
Résoudre $D_{1\%} = 0,05$</td><td>$z > 0,7$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Régime oscillant</td><td>Régime LE PLUS RAPIDE
Présence d'un dépassement
$D_{1\%} \approx 5\%$
$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1 - z^2}}$</td><td>Régime oscillant</td><td>Le plus rapide sans dépassement</td><td>Régime amorti Lent</td></tr>
</table>





$$tr_{5\%}\omega_0 = k(z) \quad ; \quad k(0,7) \approx 3 \quad ; \quad k(1) \approx 5$$

Réponse à une rampe



Asymptote à l'infini		
$z > 1$	$z = 1$	$z < 1$
$s(t) \underset{+\infty}{\sim} Kb(t - T_1 - T_2)$	$s(t) \underset{+\infty}{\sim} Kb(t - 2T)$	$s(t) \underset{+\infty}{\sim} Kb\left(t - \frac{2z}{\omega_0}\right)$

Erreur de poursuite $\boldsymbol{\varepsilon_v = \lim_{t \to +\infty} [e(t) - s(t)]}$		
$z > 1$	$\lim_{t\to+\infty} [bt - Kb(t - T_1 - T_2)]$ $\lim_{t\to+\infty} [bt(1 - K) + Kb(T_1 + T_2)]$	$\varepsilon_v = \begin{cases} b(T_1 + T_2) \; si \; K = 1 \\ \infty \; si \; K \neq 1 \end{cases}$
$z = 1$	$\lim_{t\to+\infty} [bt - Kb(t - 2T)]$ $\lim_{t\to+\infty} [bt(1 - K) + 2KbT]$	$\varepsilon_v = \begin{cases} 2bT \; si \; K = 1 \\ \infty \; si \; K \neq 1 \end{cases}$
$z < 1$	$\lim_{t\to+\infty} \left[bt - Kb\left(t - \frac{2z}{\omega_0}\right)\right]$ $\lim_{t\to+\infty} \left[bt(1 - K) + Kb\frac{2z}{\omega_0}\right]$	$\varepsilon_v = \begin{cases} b\frac{2z}{\omega_0} \; si \; K = 1 \\ \infty \; si \; K \neq 1 \end{cases}$

$$K = 1 \Rightarrow \varepsilon_v \; constante$$
$$K \neq 1 \Rightarrow \varepsilon_v = \pm\infty$$

Identification

$$H(p)=\frac{K}{a_n p^n+\cdots+a_1 p+a_0}$$

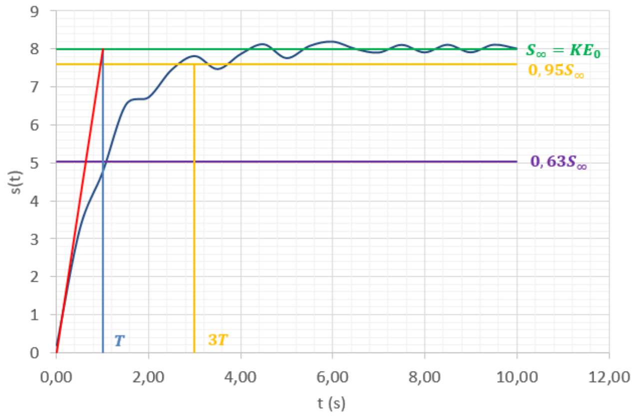
A une entrée échelon, la tangente à l'origine est : $\begin{cases}\frac{KE_0}{a_n}\ si\ n=1\\ 0\ si\ n>1\end{cases}$

Echelon – 1° ordre

Tangente à l'origine non nulle – Pas de dépassement/oscillations

$$H(p)=\frac{K}{1+Tp}$$

$s_\infty=Ke_0$
La pente à l'origine coupe la valeur s_∞ en $t=T$
Toute tangente en un point coupe l'asymptote finale T secondes plus tard
$s(T)=0{,}63s_\infty$
$s(3T)=0{,}95s_\infty$
et toute autre valeur de $s(t)$ pour $t=kT$

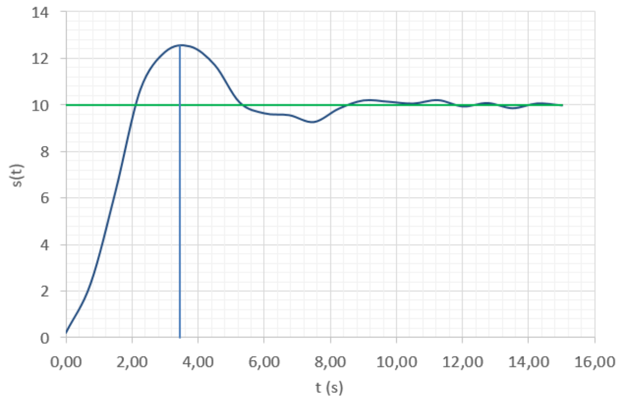


Echelon – 2° ordre – z<1

Tangente à l'origine nulle – Dépassements/oscillations

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}$$

$s_\infty=Ke_0$
$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$
$D_{1\%}=e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}\Leftrightarrow z=\frac{\lvert\ln D_{1\%}\rvert}{\sqrt{\left(\ln D_{1\%}\right)^2+\pi^2}}$
$t_1=\frac{\pi}{\omega_n}=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}\Leftrightarrow \omega_0=\frac{\pi}{t_1\sqrt{1-z^2}}$



Echelon – 2° ordre – z>1 – Pour info

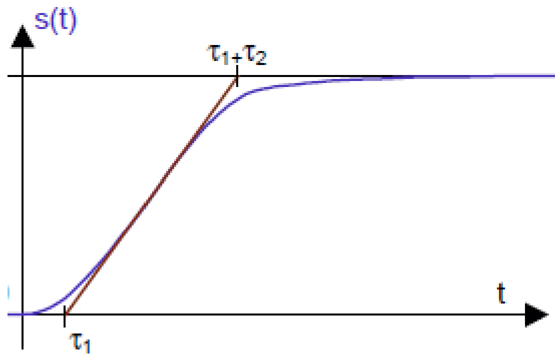
Poser $z(t) = Ke_0 - s(t)$. Choisir T, t_1, t_2 des temps quelconques tels que l'on connaisse la courbe de réponse en t_1, t_2, $T - t_1$ et $T - t_2$. Calculer :

$$x_1 = \frac{z(t_1 - T)}{z(t_1)} \quad ; \quad x_2 = \frac{z(t_2 - T)}{z(t_2)} \quad ; \quad y_1 = \frac{z(t_1 - 2T)}{z(t_1)} \quad ; \quad y_2 = \frac{z(t_2 - 2T)}{z(t_2)}$$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad a_2 = y_2 - a_1 x_2$$

Déterminer les racines X_1 et X_2 du polynôme suivant : $X^2 + a_1 X + a_2 = 0$; Alors $\begin{cases} T_1 = \frac{T}{\ln X_1} \\ T_2 = \frac{T}{\ln X_2} \end{cases}$

Dans le cas particulier où $T_1 \ll T_2$:

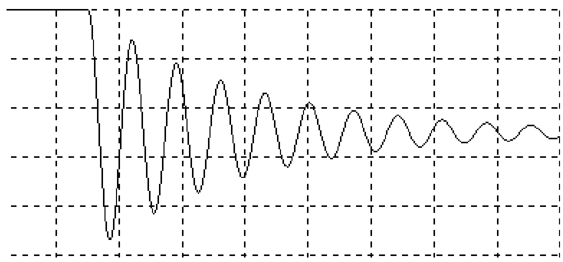


Oscillations libres d'un 2° ordre

Condition de fonctionnement de la méthode : Voir au moins 5 oscillations, ie $z \leq 0{,}1 \ll 1$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}\mathrm{p} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\mathrm{p}^2} \quad ; \quad s + \frac{2z}{\omega_0}\dot{s} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\ddot{s} = 0 \quad ; \quad s(0) = S_0 \quad ; \quad s'(0) = 0$$

$$s(t) = e^{-z\omega_0 t} C \cos(\omega_n t + \varphi) \quad ; \quad \omega_n = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$$



En supposant $z << 1$, on a $\omega_0 \approx \omega_n$ que l'on identifie directement sur la courbe.

Pour identifier z, on utilise le décrément logarithmique. Soient T_1 et T_2 deux temps écartés de N périodes $T = \frac{2\pi}{\omega_n} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$. On a $T_2 - T_1 = N\frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\cos(\omega_n T_2 + \varphi) = \cos(\omega_n T_1 + \varphi)$

$$\Rightarrow \frac{s(T_1)}{s(T_2)} = \frac{e^{-z\omega_0 T_1}}{e^{-z\omega_0 T_2}} = e^{-z\omega_0(T_1 - T_2)} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\omega_0 N \frac{2\pi}{\omega_0}} \ln\frac{s(T_1)}{s(T_2)} = \frac{1}{2\pi N} \ln\frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$