Exercice 1: Diagramme de Bode

Question 1: Déterminer les coefficients caractéristiques et formes factorisées (quand il y a lieu) des fonctions de transfert proposées

$H_1(p) = \frac{100}{1+0{,}1p}$	$H_2(p) = \frac{100}{1+0{,}11p+0{,}001p^2}$	$H_3(p) = \frac{10}{1+0{,}1p+0{,}01p^2}$
$H_1(p) = \frac{K}{1+\mathrm{T}p}$ $\mathrm{K} = 100$ $\mathrm{T} = 0{,}1$	$H_2(p) = \frac{100}{1+0{,}11p+0{,}001p^2} = \frac{\mathrm{K}}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$ $\begin{cases} K = 100 \\ \omega_0 = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31{,}6 \\ z = \frac{31{,}6}{2}0{,}11 = 1{,}73 \end{cases}$ Factorisable car $z \geq 1$	$H_3(p) = \frac{10}{1+0{,}1p+0{,}01p^2}$ $\begin{cases} K = 10 \\ \omega_0 = \sqrt{100} = 10 \\ z = \frac{10}{2}0{,}1 = 0{,}5 \end{cases}$ Factorisable ? $z < 1$ donc non Sinon : $\Delta = 0{,}1^2 - 4*1*0{,}01 = -0{,}03$

Factorisation uniquement pour H_2

Méthode *: Vérifier si le dénominateur est factorisable en calculant son discriminant ou z.*

$$H_2(p) = \frac{100}{1+0{,}11p+0{,}001p^2}$$

$$\Delta = 0{,}11^2 - 4*0{,}001*1 = 0{,}0081 = 0{,}09^2$$

$$p_i = \frac{-0{,}11 \pm 0{,}09}{2*\mathbf{0{,}001}} = \begin{cases} \frac{-0{,}11+0{,}09}{2*\mathbf{0{,}001}} = \frac{-0{,}02}{2*0{,}001} = -10 \\ \frac{-0{,}2}{2*\mathbf{0{,}001}} = -100 \end{cases}$$

$$0{,}001p^2 + 0{,}11p + 1 = \mathbf{0{,}001}(p+100)(p+10) = (1+0{,}01p)(1+0{,}1p)$$

$$H_2(p) = \frac{100}{(1+0{,}01p)(1+0{,}1p)}$$

Attention *: Les erreurs souvent rencontrées ici sont de considérer le « a » de ap^2+bp+c valant 1 car on lit de gauche à droite $c+bp+ap^2$, à la fois dans le dénominateur des racines et dans la factorisation (mis en gras ci-dessus) – Ou vous oublier de vous ramener à la forme $(1+\cdots p)$ au dénominateur en passant 10^3 au numérateur ☹ et parfois en interprétant mal les 2 pulsations de coupure 100 ou 0,01 et 10 ou 0,1…*

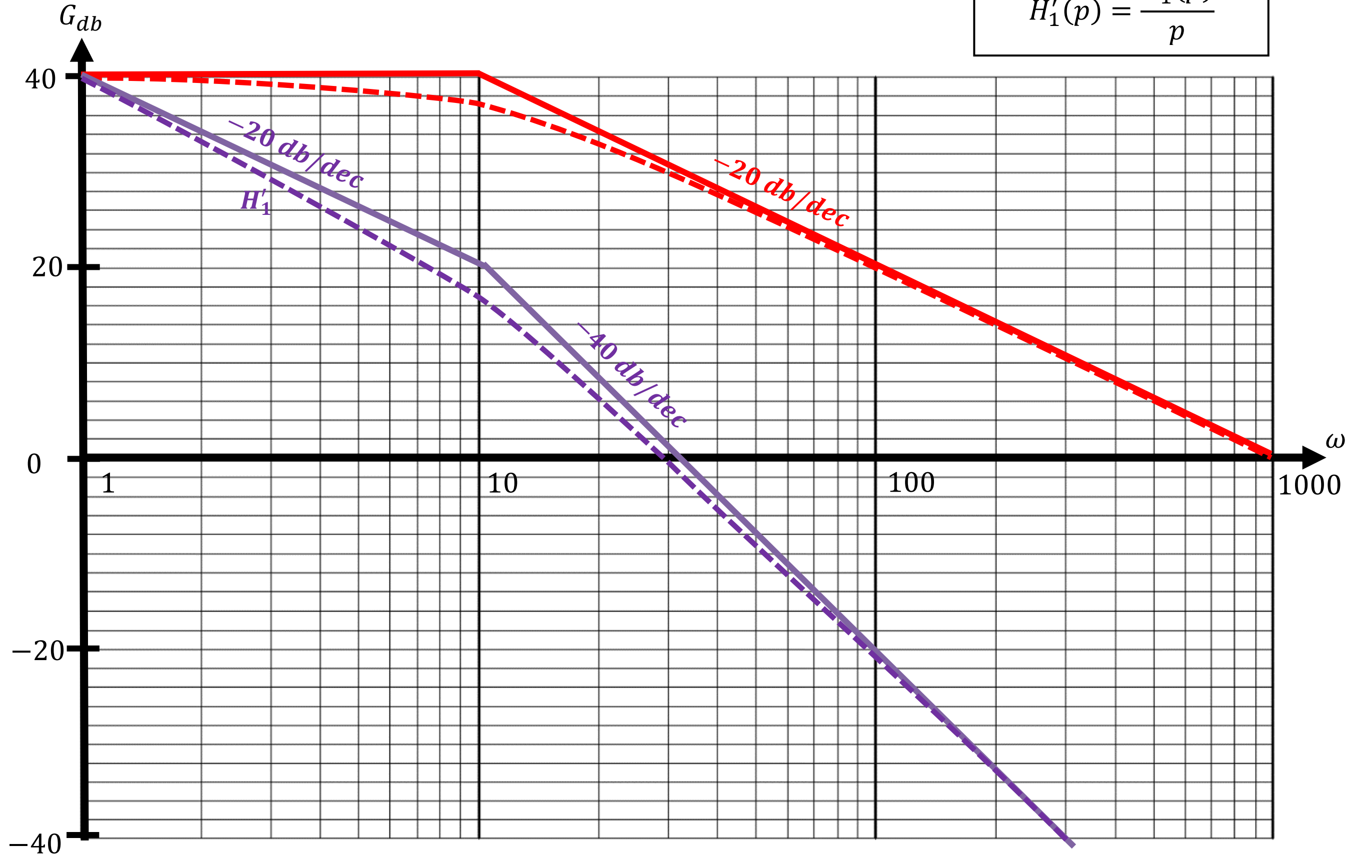
Question 2: Etablir les diagrammes de bode asymptotique des fonctions de transferts (des documents réponses sont proposés en fin de TD)

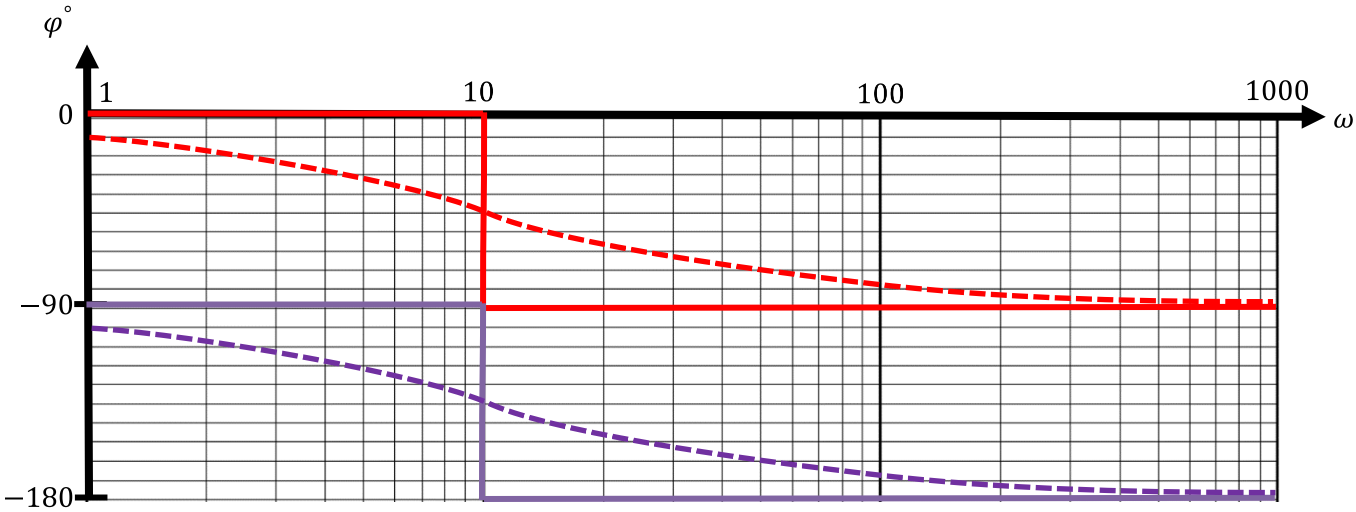
Question 3: Ajouter une allure des courbes réelles sur vos tracés

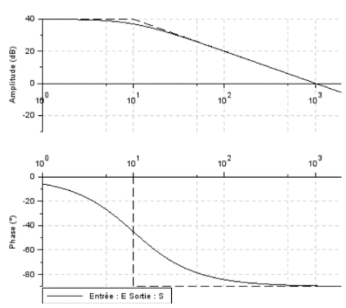
Document réponse 1

$$H_1(p) = \frac{100}{1+0{,}1p}$$

$$H_1'(p) = \frac{H_1(p)}{p}$$

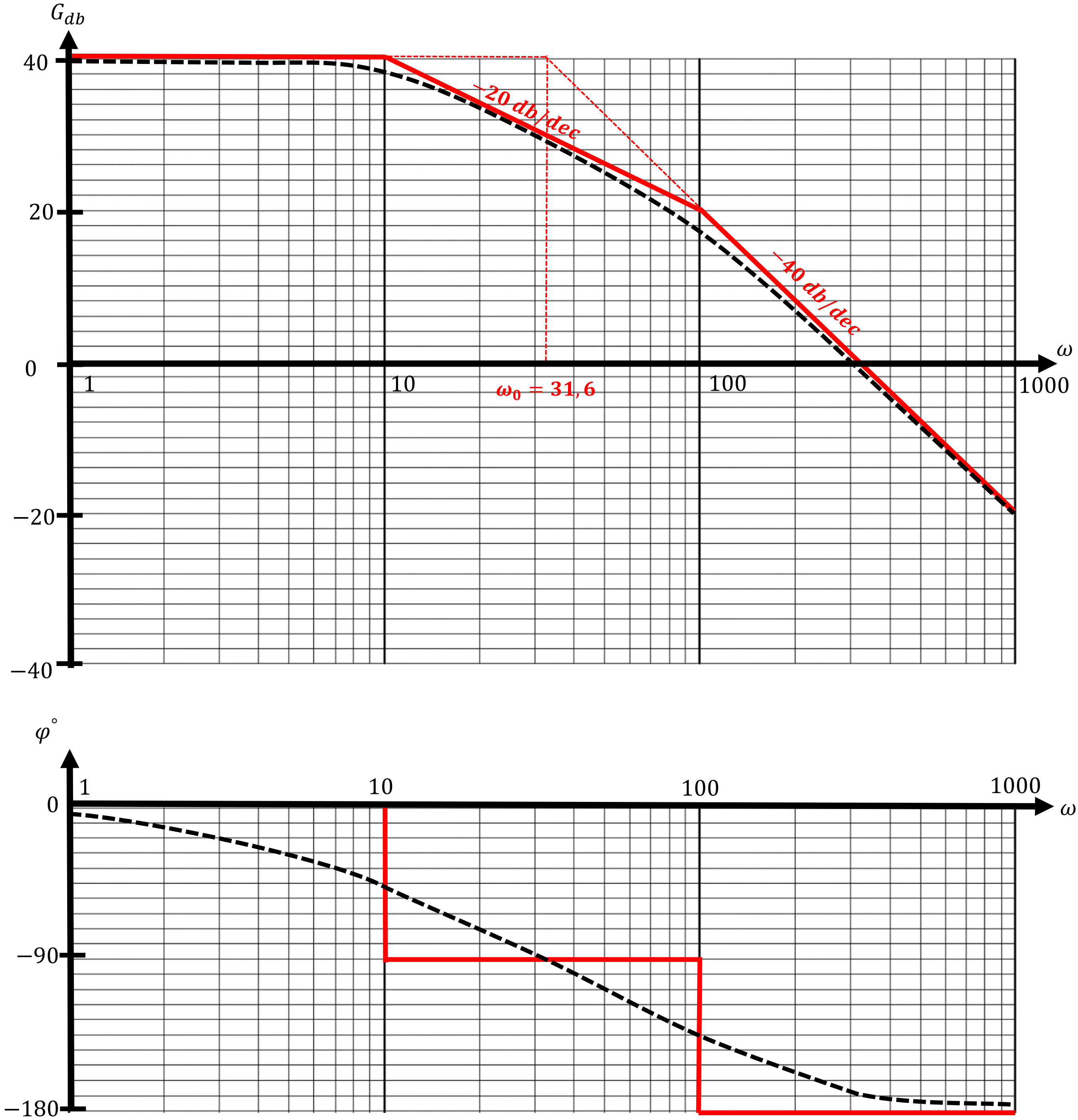




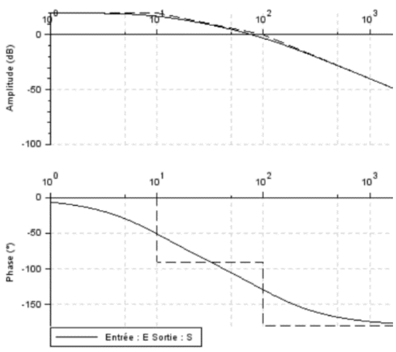


Document réponse 2

$$H_2(p) = \frac{100}{1 + 0{,}11p + 0{,}001p^2}$$

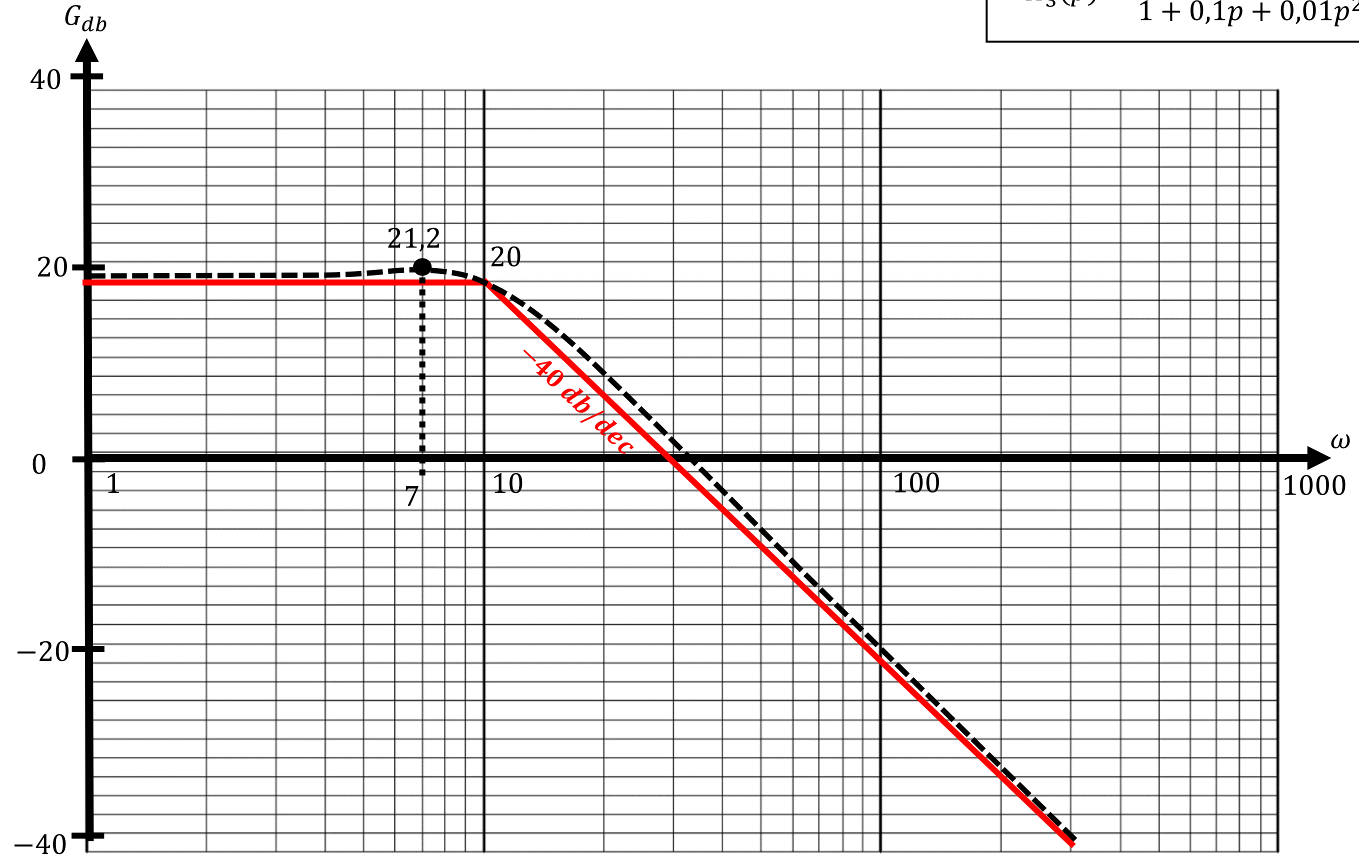


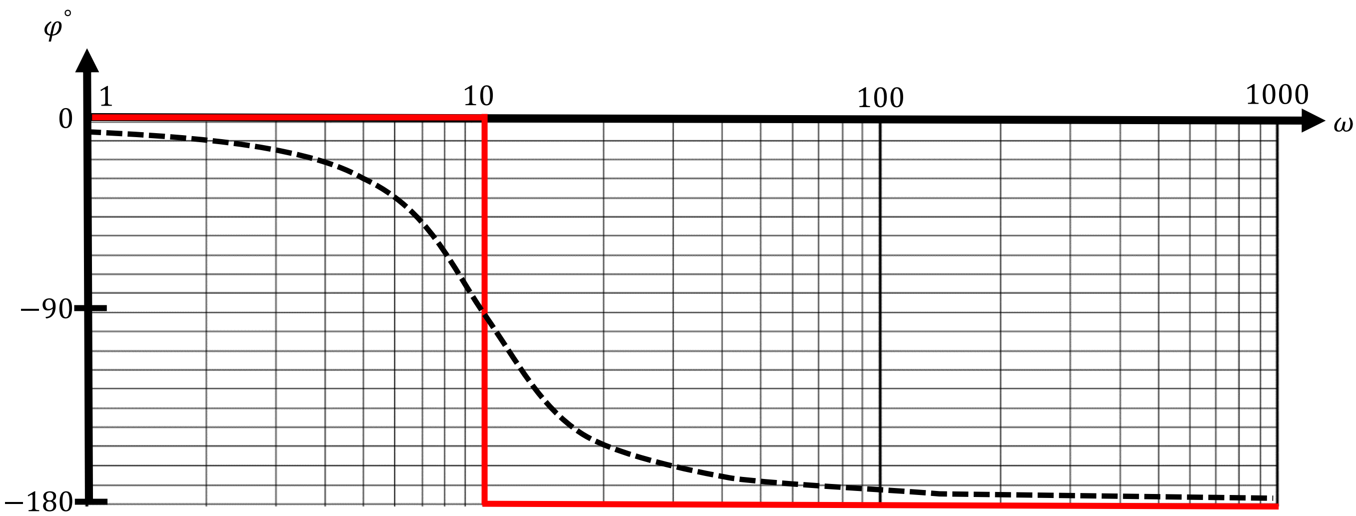
Attention : je vois trop souvent des élèves qui quand ils cherchent à placer 50, partent de 0 dans leur tête et qui compte donc 10, 20, 30… à partir de la graduation après 10. Ils décalent donc tout vers la droite d'une graduation. Après 10, il faut compter à partir de 20 !



Document réponse 3

$$H_3(p) = \frac{10}{1 + 0{,}1p + 0{,}01p^2}$$



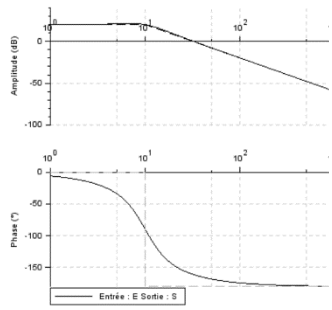


$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2z^2} = 10\sqrt{1 - \frac{2}{2^2}} = 10\sqrt{0{,}5} \approx 7$$

Attention *: Ne pas confondre ω_r avec $\omega_n = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$, pseudo pulsation de la réponse à un échelon d'un second ordre. Dites-vous cela : 1 pour la formule vue en premier en 1° année (temporel) puis 2 pour le fréquentiel*

$$G_r = 20\log(|H(j\omega_r)|) = 20\log\left(\frac{10}{\sqrt{(1 - 0{,}01\omega_r^{\,2}) + (0{,}1\omega_r)}}\right) \approx 21{,}2$$

$$G_{\omega_0} = G_0 - 20\log(2z) = G_0 - 20\log(1) = G_0 = 20$$



Question 4: Déterminer les marges de stabilité des systèmes en BF pour les BO 1, 1' et 2

$H_1(p) = \frac{100}{1+0{,}1p}$	
Marge de gain infinie	
ω_{c_0}	$\Delta\varphi$
$\lvert H_1(j\omega_{c_0})\rvert = 1$ $100 = \sqrt{1+\frac{{\omega_{c_0}}^2}{100}}$ $10000 = 1+\frac{{\omega_{c_0}}^2}{100}$ $9999 = \frac{{\omega_{c_0}}^2}{100}$ ${\omega_{c_0}}^2 = 999900$ $\omega_{c_0} \approx 999{,}95\ rd.s^{-1}$	$\varphi_{\omega_{c_0}} = \arg\left(\frac{100}{1+\frac{\omega_{c_0}}{10}j}\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -\arg\left(1+\frac{\omega_{c_0}}{10}j\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega_{c_0}}{10}\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -1{,}56\ rd = -89{,}43°$ $\Delta\varphi = 180 + \varphi_{\omega_{c_0}} = 90{,}57°$

$H_1'(p) = \frac{100}{p(1+0{,}1p)}$	
Marge de gain infinie	
ω_{c_0}	$\Delta\varphi$
$\lvert H_1(j\omega_{c_0})\rvert = 1$ $100 = \omega_{c_0}\sqrt{1+\frac{{\omega_{c_0}}^2}{100}}$ $10000 = {\omega_{c_0}}^2+\frac{{\omega_{c_0}}^4}{100}$ ${\omega_{c_0}}^4 + 100{\omega_{c_0}}^2 - 1000000 = 0$ $X = {\omega_{c_0}}^2$ $X^2 + 100X - 1000000 = 0$ $\Delta = 10000 + 4 * 1000000 \approx 4010000$ On garde la solution positive : $X = \frac{-100+\sqrt{4010000}}{2} = 951{,}25$ $\omega_{c_0} = \sqrt{X} \approx 30{,}8\ rd.s^{-1}$	Il faut évidemment profiter de la factorisation $\varphi_{\omega_{c_0}} = \arg\left(\frac{100}{j\omega_{c_0}\left(1+\frac{\omega_{c_0}}{10}j\right)}\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -\frac{\pi}{2} - \arg\left(1+\frac{\omega_{c_0}}{10}j\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_{c_0}}{10}\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -2{,}83\ rd = -162{,}04°$ $\Delta\varphi = 180 + \varphi_{\omega_{c_0}} = 17{,}96°$

$H_2(p) = \frac{100}{1+0{,}11p+0{,}001p^2}$	
Marge de gain infinie	
ω_{c_0}	$\Delta\varphi$
$\lvert H_2(j\omega_{c_0})\rvert = 1$ $100 = \sqrt{\left(1-0{,}001{\omega_{c_0}}^2\right)^2 + 0{,}11^2{\omega_{c_0}}^2}$ $10000 = 1 - 0{,}002{\omega_{c_0}}^2 + 0{,}001^2{\omega_{c_0}}^4 + 0{,}11^2{\omega_{c_0}}^2$ $1 - 10000 + (0{,}11^2 - 0{,}002){\omega_{c_0}}^2 + 0{,}001^2{\omega_{c_0}}^4 = 0$ $0{,}000001{\omega_{c_0}}^4 + 0{,}0101{\omega_{c_0}}^2 - 9999 = 0$ $X = {\omega_{c_0}}^2$ $0{,}000001X^2 + 0{,}0101X - 9999 = 0$ $\Delta = 0{,}0101^2 + 4 * 0{,}000001 * 9999 \approx 0{,}04$ On garde la solution positive : $X = \frac{-0{,}0101+\sqrt{0{,}04}}{2 * 0{,}000001} = 95072$ $\omega_{c_0} = \sqrt{X} \approx 308\ rd.s^{-1}$	$\varphi_{\omega_{c_0}} = \arg\left(\frac{100}{\left(1-0{,}001{\omega_{c_0}}^2\right)+\left(0{,}11\omega_{c_0}\right)j}\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -\arg\left(\left(1-0{,}001{\omega_{c_0}}^2\right)+\left(0{,}11\omega_{c_0}\right)j\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = \arg\left(\left(1-0{,}001{\omega_{c_0}}^2\right)-\left(0{,}11\omega_{c_0}\right)j\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -\cos^{-1}\left(\frac{\left(1-0{,}001{\omega_{c_0}}^2\right)}{\sqrt{\left(1-0{,}001{\omega_{c_0}}^2\right)^2+0{,}11^2{\omega_{c_0}}^2}}\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -2{,}79\ rd = -160{,}17°$ $\Delta\varphi = 180 + \varphi_{\omega_{c_0}} = 19{,}83°$ Pour faire plus simple, on peut passer par l'expression numérique dès le départ $\varphi_{\omega_{c_0}} = \arg\left(\frac{100}{-94{,}07+33{,}92j}\right) = \arg(-94{,}07 - 33{,}92j)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -\cos^{-1}\left(\frac{-94{,}07}{\sqrt{94{,}07^2+33{,}92^2}}\right) = -2{,}79\ rd$