Variables sous-gaussiennes [Mines 2015]

Dans tout le problème, toutes les varibales considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Définition

Soit $\alpha > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X est *α-sous-gaussienne* si:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tX) \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

On rappelle la notation

$$\cosh(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$$

et pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

et on donne $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

   Indication : On pourra au préalable établir le développement de la fonction cosh *en série entière sur* $\mathbb{R}$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité:

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$$

3. Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $\left(\exp(tx)\mathbb{P}\left(X = x\right)\right)_{x \in X(\Omega)}$ de réels positifs est sommable.
   (b) Montrer que X est 1-sous-gaussienne.

4. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

   Indication : On pourra considérer la variable $Y = \dfrac{X}{\alpha}$

5. Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α- sous-gaussiennes, et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1$.
   Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.
   En déduire que si X est α-sous-gaussienne, alors $-X$ est α-sous-gaussienne

6. Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$.
   (a) En appliquant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant \lambda\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

   (b) En déduire que:

$$\mathbb{P}\left(|X| \geqslant \lambda\right) \leqslant 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

(c) Pour $t = \dfrac{\lambda}{\alpha^2}$, en déduire

$$\mathbb{P}\left(|X| \geqslant \lambda\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$$

7. Soit X une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X admet une espérance si, et seulement, si la série $\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\left(X \geqslant k\right)$ converge et que, dans ce cas :

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X \geqslant k\right)$$

Indication : On pourra considérer la famille la famille $\left(\mathbb{P}\left(X = n\right)\right)_{(n,k)\in I}$ *de réels positifs où* $I = \left\{(n,k) \in \mathbb{N}^{*2} \mid n \geqslant k\right\}$

8. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}\left(X \geqslant k\right)$ converge et que, dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X \geqslant k\right) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X \geqslant k\right)$$

Indication : On pourra pour cela considérer la partie entière $[X]$

9. Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$.

(a) On pose $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. Montrer que pout tout entier $k > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

Indication : On pourra distinguer les cas $k = 1$ *et* $k \geqslant 2$ *et utiliser le résultat de la question 6c*

(b) En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\dfrac{\beta^2X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$

10. Montrer que si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne, on a *l'inégalité d'Orlicz*:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leqslant 5$$

On pourra prendre $\beta = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$,

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$. Or $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $(2k)! \geqslant 2^k k!$ (récurrence simple), donc par positivité de t^{2k} on obtient
$$\cosh(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

2. La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Comme $x \in [-1,1]$, donc $\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2} \in [0,1]$ et de somme 1. D'après l'inégalité de Jensen
$$\exp(tx) = \exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$$

3. (a) Pour tout $x \in X(\Omega) \subset [-1,1]$, on utilise l'inégalité précédente, on obtient:
$$\exp(tx)\mathbb{P}(X=x) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t)\mathbb{P}(X=x) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)\mathbb{P}(X=x)$$
Les deux familles $\left(\frac{1+x}{2}\exp(t)\mathbb{P}(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ et $\left(\frac{1-x}{2}\exp(-t)\mathbb{P}(X=x)\right)_{x\in X(\Omega)}$ de réels positifs sont sommables de sommes respectives $\mathbb{E}\left(\frac{1+X}{2}\exp(t)\right) = \frac{1}{2}\exp(t)$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1-X}{2}\exp(-t)\right) = \frac{1}{2}\exp(-t)$, car X est centrée. Donc la famille $(\exp(tx)\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et
$$\sum_{x\in X(\Omega)} \exp(tx)\mathbb{P}(X=x) \leqslant \frac{\exp(t)+\exp(-t)}{2} = \cosh(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

   (b) Par le théorème du transfert $\exp(tX)$ admet une espérance et
$$\mathbb{E}(\exp(tX)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \exp(tx)\mathbb{P}(X=x) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

4. Lorsque X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, on pose $Y = \frac{X}{\alpha}$. La variable Y est bornée par 1 et centrée, donc elle 1-sous-gaussienne, ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{E}(\exp(t\alpha Y)) \leqslant \exp\left(\frac{(t\alpha)^2}{2}\right)$$
Ou encore $\mathbb{E}(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{t^2\alpha^2}{2}\right)$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Les variables aléatoires $\exp(t\mu_1 X_1), \cdots \exp(t\mu_n X_n)$ sont mutuellement indépendantes et chacune admet une espérance, donc $\prod_{i=1}^{n} \exp(t\mu_i X_i)$ admet une espérance et
$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(t\mu_i X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\exp(t\mu_i X_i))$$
Or pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable X_i est α-sous-gaussienne $E(\exp(t\mu_i X_i)) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right)$. Donc $\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i\right)$ admet une espérance et
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(t\mu_i X_i)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\exp(t\mu_i X_i)) \\
&\leqslant \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right) \\
&\leqslant \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)
\end{aligned}$$
Déduction: Pour $X_1 = X$ et $\mu_1 = -1$, on a $-X$ est α-sous-gaussienne

6. (a) Soit $t>0$. L'événement $[X \geqslant \lambda] = [\exp(tX) \geqslant \exp(t\lambda)]$. La variable $\exp(tX)$ est positive et admettant une espérance. D'après l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\exp(tX) \geqslant \exp(t\lambda)\right) &\leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\exp(tX)\right)}{\exp(t\lambda)} \\ &\leqslant \exp\left(\frac{t^2\alpha^2}{2} - t\lambda\right)\end{aligned}$$

(b) La variable $-X$ est aussi α-sous-gaussienne et que $[|X| \geqslant \lambda] = [X \geqslant \lambda] \cup [-X \geqslant \lambda]$ où $[X \geqslant \lambda]$ et $[-X \geqslant \lambda]$ sont des événements incompatibles, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X| \geqslant \lambda\right) &= \mathbb{P}\left(X \geqslant \lambda\right) + \mathbb{P}\left(-X \geqslant \lambda\right) \\ &\leqslant 2\exp\left(\frac{t^2\alpha^2}{2} - t\lambda\right)\end{aligned}$$

(c) Ceci vrai pour tout $t>0$. En particulier pour $t = \dfrac{\lambda}{\alpha^2}$, on obtient $\dfrac{t^2\alpha^2}{2} - t\lambda = -\dfrac{\lambda^2}{2\alpha^2}$ et l'inégalité désirée

7. Notons

$$I = \left\{(n,k) \in \mathbb{N}^{*2} \mid n \geqslant k\right\}$$

et considérons la famille $\left(\mathbb{P}\left(X=n\right)\right)_{(n,k)\in I}$ de réels positifs. Pour $(n,k) \in \in\mathbb{N}^{*2}$, on pose

$$I_n = \left\{(n,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid n \geqslant q\right\}$$

et

$$J_k = \left\{(p,k) \in \mathbb{N}^{*2} \mid p \geqslant k\right\}$$

X admet une espérance, si et seulement si la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}\left(X=n\right)$ est convergente, si et seulement si la famille $\left(\mathbb{P}\left(X=n\right)\right)_{(n,k)\in I}$ est sommable, si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la famille $\left(\mathbb{P}\left(X=n\right)\right)_{(n,k)\in J_k}$ est sommable de somme $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)$ et la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(X \geqslant k)$ est convergente. Au quel cas, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{(n,k)\in I} \mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k)$$

8. Les variables X et $[X]$ sont positives et vérifient $[X] \leqslant X < [X]+1$. Par domination, X admet une espérance si, et seulement, si $[X]$ admet une espérance si, et seulement si la série $\sum \mathbb{P}\left([X] \geqslant k\right)$ converge. Mais $[[X] \geqslant k] = [X \geqslant k]$, d'où l'équivalence est assurée.
Pour les inégalités, on tient compte de la croissance et la linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}\left([X]\right) \leqslant \mathbb{E}\left(X\right) \leqslant \mathbb{E}\left([X]\right) + 1$$

où, d'après les données, $\mathbb{E}\left([X]\right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X] \geqslant k\right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X \geqslant k\right)$

9. (a) L'inégalité est triviale si $k=1$: La probabilité d'un événement est inférieure ou égale à 1.
Si $k \geqslant 2$, on a $\left[\exp\left(\dfrac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right] = \left[|X| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right]$ et d'après la question 6 avec $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}$, on a bien

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2} \geqslant k\right)\right) &= \mathbb{P}\left(|X| \geqslant \frac{\sqrt{2}\sqrt{\ln k}}{\beta}\right) \\ &\leqslant 2\exp\left(-\frac{\ln k}{\alpha^2\beta^2}\right) = 2\exp\left(\ln\left(k^{\alpha^{-2}\beta^{-2}}\right)\right) \\ &= 2k^{-\eta}\end{aligned}$$

Où $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$.

(b) Lorsque $\alpha\beta < 1$, alors $\eta > 1$, la série de Riemann $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^{-\eta}$ converge et, par le critère de comparaison, la série ATP $\sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\left(\exp\left(\dfrac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right)$ converge, donc la variable aléatoire $\exp\left(\dfrac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \\ &\leqslant 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-\eta} = 1 + 2\zeta(\eta) \end{aligned}$$

10. Si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne. Pour $\beta = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$, on a $\alpha\beta < 1$ et $\eta = 2$. D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) \\ &\leqslant 1 + 2\zeta(2) \leqslant 5 \end{aligned}$$