- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

Problème I – Etude d'un pendule

On considère un pendule pesant (P), dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{e}_z$ uniforme, constitué :

- d'une tige (T) de forme cylindrique, de longueur $l = OC$, de dimension latérale négligeable devant sa longueur et de masse m_T. Le moment d'inertie de la tige par rapport à son extrémité est $J_T = \dfrac{m_T l^2}{3}$;
- d'un disque (D) de rayon a, de centre C et de masse m_D. Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution est $J_D = \dfrac{m_D a^2}{2}$.

Le disque (D) est solidaire à l'extrémité inférieure C de la tige (T).

Le pendule (P) est en mouvement de rotation, via une liaison pivot parfaite de centre O, autour de l'axe horizontal (Oy) passant par l'extrémité supérieure O de la tige (T) et perpendiculaire au plan de la figure 1.

La position du pendule (P) est repérée par l'angle θ que fait son axe de symétrie avec l'axe vertical (Oz) du référentiel terrestre $R(O,x,y,z,t)$ supposé galiléen.

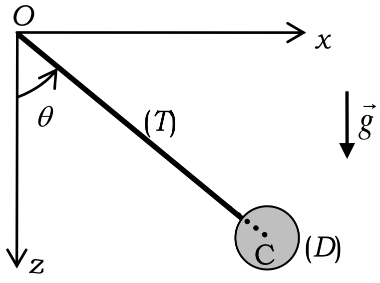

figure 1.1

A l'instant choisi comme origine des temps, le pendule est abandonné avec les conditions initiales $\theta(t=0)=\theta_0$ et $\dfrac{d\theta}{dt}(t=0)=0$. On associe au référentiel (R) la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On néglige tout frottement (sauf dans la question **16**) et on étudie le mouvement du pendule dans le plan vertical (Oxz).

1. Qu'appelle-t-on référentiel galiléen ?

2. Définir le référentiel terrestre. Citer une expérience historique qui a permis de mettre en évidence le caractère non galiléen de ce référentiel. Justifier que dans notre étude, ce référentiel peut être considéré galiléen.

3. Que signifie "liaison pivot parfaite de centre O " ? Quelles conséquences cela a-t-il ?

4. En utilisant le théorème d'Huygens, calculer le moment d'inertie J_P du pendule par rapport à l'axe de rotation (Oy).

5. Déterminer le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{(P/R)}$ du pendule et le vecteur vitesse $\vec{V}_{(G/R)}$ du cendre de masse G du pendule dans le référentiel (R).

6. Parmi les forces appliquées au pendule, il y a la poussée d'Archimède. Donner les caractéristiques de cette force. Cette force sera négligée dans la suite de l'étude. Justifier qu'il est légitime de la négliger.

7. Quelles sont les forces appliquées au pendule (P) ? Calculer le travail de chaque force. En déduire que le système étudié est conservatif et donner l'expression de son énergie potentielle E_p. On choisit l'origine des énergies potentielles $E_p(\theta = 0) = 0$.

8. Exprimer l'énergie cinétique E_c et l'énergie mécanique E_m du pendule dans le référentiel d'étude.

9. Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule. Le pendule étudié est-il un système linéaire ? Justifier.

10. Retrouver l'équation établie dans la question précédente en appliquant le théorème du moment cinétique scalaire au pendule (P).

11. Montrer que, lorsque l'énergie mécanique est telle que $0 < E_m < E_0$, le mouvement du pendule pesant est oscillatoire et ne peut avoir lieu que si $\theta \in \left[-\theta_m, +\theta_m\right]$. Donner l'expression de E_0. Exprimer la période $T(\theta_m)$ d'oscillation du pendule sous forme d'une intégrale en précisant les bornes d'intégration.

12. Représenter dans l'espace des phases $(\theta, \frac{d\theta}{dt})$ les trajectoires possibles pour diverses valeurs de l'énergie mécanique E_m. On distinguera les deux cas $E_m < E_0$ et $E_m > E_0$. Quelle est la nature du mouvement dans le cas $E_m > E_0$? Comment reconnaît-on, dans l'espace des phases, une position d'équilibre, stable ou instable ?

13. A quelle condition l'énergie potentielle est harmonique ? Donner dans ce cas la loi de variation de θ en fonction du temps. Exprimer la pulsation ω_0 caractérisant le mouvement du pendule. Quelle est la longueur L du pendule simple équivalent qui permet de faire osciller un objet ponctuel de masse $m = m_D + m_T$ avec la même période que le pendule (P) ?

14. Proposer un montage simple permettant de relever automatiquement et de visualiser la position angulaire $\theta(t)$ du pendule sur l'écran d'un ordinateur.

15. Le montage de la question précédente permet d'obtenir le graphe de la figure 2. Commenter et justifier l'allure de $\theta(t)$. Quel est le régime d'évolution de l'oscillateur ?

16. Pour expliquer le résultat obtenu dans la question précédente, on reste dans le cadre de l'hypothèse de l'énergie potentielle harmonique et on se place dans le cas où les frottements de l'air sur le disque ne sont plus négligeables et sont modélisables par une force $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du disque dans le référentiel d'étude et α est une constante positive.

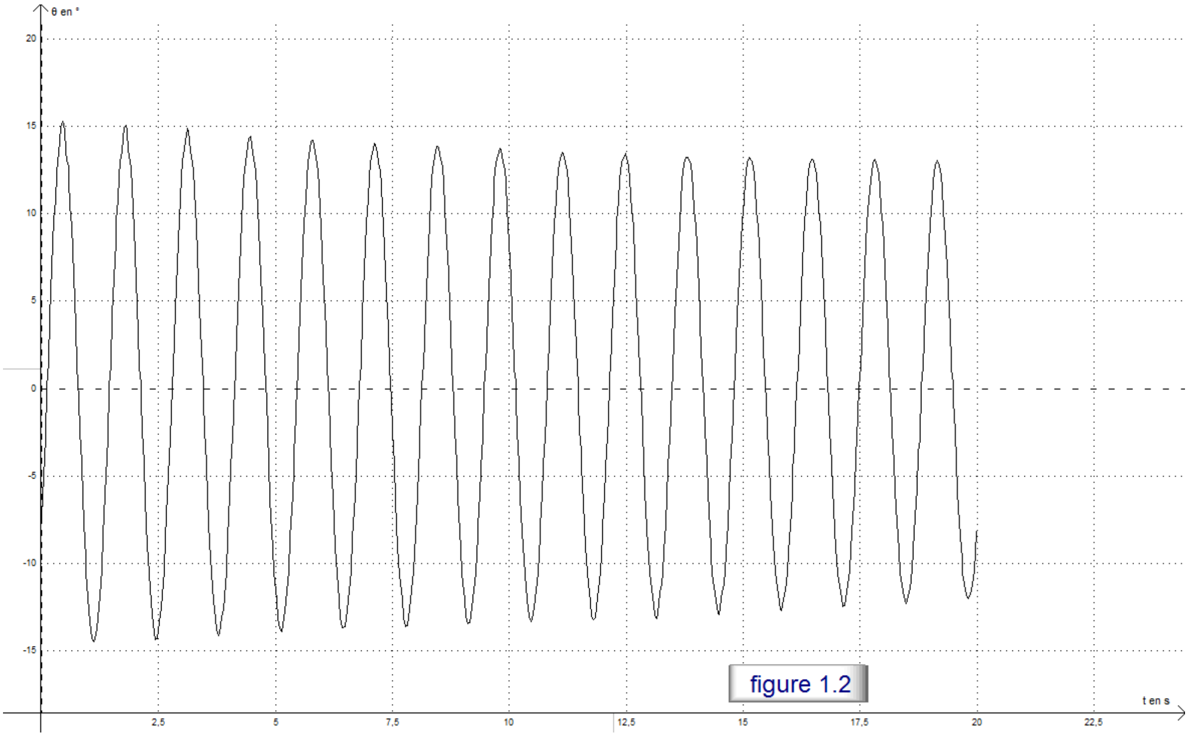

figure 1.2

16.1. Montrer que l'équation différentielle à laquelle obéit θ peut se mettre sous la forme : $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\beta\frac{d\theta}{dt}+\gamma\theta=0$. Exprimer β et γ et donner leur dimension.

16.2. Montrer que la solution de cette équation différentielle peut se mettre sous la forme : $\theta(t)=f(t).\exp(-t/\tau)$ où τ est une constante que l'on exprimera en fonction des données. Sans chercher à expliciter la fonction $f(t)$, décrire brièvement les différents régimes du mouvement du pendule.

16.3. A quelle(s) condition(s) sur α aura-t-on $f(t)=c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)$? Exprimer alors les constantes c_1, c_2 et ω en fonction des données. On suppose cette condition vérifiée dans la suite.

16.4. Que devient l'allure du portrait de phase tracé dans la question **12** si l'on tient compte de la force de frottement $\vec{F}=-\alpha\vec{v}$?

17. Le pendule (P) est assimilé maintenant à un pendule simple de masse m ponctuelle montée sur une tige indéformable de longueur $L=O'A$ et de masse négligeable. Ce pendule est fixé via une liaison pivot parfaite sur un chariot (C) de masse M et de centre d'inertie O'. Le chariot (figure 1.3) est un solide libre de se déplacer sans aucun frottement sur le plan horizontal (Oxy) le long de l'axe (Ox). Le pendule est libre d'effectuer un mouvement de rotation dans le plan vertical (Oxz) autour de l'axe $(O'y)$. Sa position est repérée par l'angle θ que fait la tige $(O'A)$ avec l'axe vertical $(O'z)$ du référentiel terrestre $R(O,x,y,z,t)$ supposé galiléen. On repère la position du chariot (C) par l'abscisse x_C de O' et celle de la masse m par l'abscisse x_A.

A l'instant choisi comme origine des temps, le chariot et le pendule sont abandonnés avec les conditions initiales $\theta(t=0)=\theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}(t=0)=0$, $x_c(t=0)=x_0$ et $\frac{dx_c}{dt}(t=0)=0$.

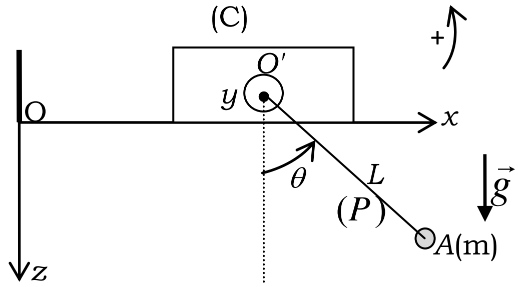

figure 1.3

17.1. Quelle relation y a-t-il entre les deux coordonnées x_A et x_C ?

17.2. En appliquant le théorème de la résultante cinétique au système $(\Sigma)=\{(P),(C)\}$ dans le référentiel terrestre $R(O,x,y,z,t)$, établir une intégrale première du mouvement. Commenter.

17.3. Exprimer l'énergie cinétique $E_c(\Sigma)$, l'énergie potentielle $E_p(\Sigma)$ et l'énergie mécanique $E_m(\Sigma)$ du système (Σ). Justifier que $E_m(\Sigma)$ est une constante du mouvement.

17.4. On pose $\lambda=\dfrac{m}{m+M}$ et $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{L}}$. A partir des équations établies dans les deux questions précédentes, établir l'équation différentielle vérifiée par θ.

17.5. On cherche pour solution des petites oscillations sinusoïdales du type $\theta(t)=A\cos(\Omega t+\Phi)$. En faisant les approximations convenables, linéariser l'équation différentielle du mouvement du pendule et déterminer la pulsation des petites oscillations. Soumettre le résultat à des critères de pertinence en distinguant les deux cas $M \gg m$ et $M \ll m$.

17.6. Décrire qualitativement le mouvement du chariot en fonction de la position du pendule.

17.7. Déterminer l'expression de la coordonnée $x_C(t)$ en fonction du temps.

17.8. Comment est modifiée l'expression de $x_C(t)$ si l'on suppose initialement $\dfrac{d\theta}{dt}(t=0)=\dot{\theta}_0\neq 0$, les autres conditions initiales restant inchangées.

17.9. A l'instant $t=0$, le chariot (C) est placé contre un obstacle (butoir vertical) fixé en $x=0$. A cet instant, on écarte le pendule d'un angle θ_0 $(-\dfrac{\pi}{2}<\theta_0<0)$ et on le lâche sans vitesse initiale. A partir de quel instant le chariot quitte-il l'obstacle ? Déterminer alors l'expression de $x_C(t)$. Décrire le mouvement du chariot.

Problème II – Rayonnement thermique

1. A l'aide d'un spectromètre, on réalise l'acquisition du spectre de deux lampes, la première à incandescence (ampoule électrique à filament, figure 2.1) et la deuxième à halogène (figure 2.2).

1.1. Commenter les deux spectres obtenus. Justifier qu'une lampe à incandescence émet une lumière de nature « thermique ».

1.2. Dans quel domaine spectral est située la valeur de la longueur d'onde $\lambda_m=820\ nm$ correspondant au maximum de la répartition spectrale de l'énergie émise par la lampe à incandescence ? Pourquoi le filament nous semble-t-il cependant blanc ?

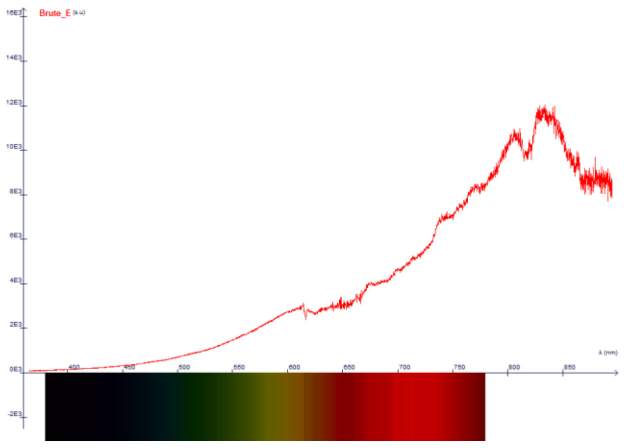

figure 2.1

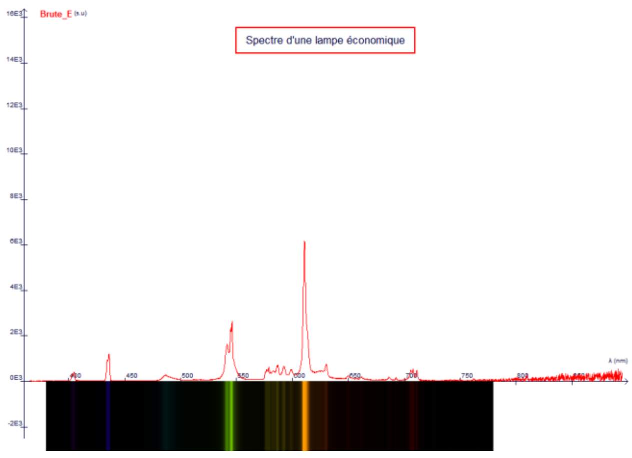

figure 2.2

1.3. Evaluer la valeur approximative de la température normale T de fonctionnement du filament. On rappelle la loi de Wien : $\lambda_m T = 2898\,\mu m.K$.

2. En 1896, Wien proposait pour la puissance surfacique rayonnée par unité de longueur d'onde λ par un corps noir en équilibre à la température T la forme suivante : $\varphi_{\lambda,W}(T,\lambda) = \dfrac{dP}{d\lambda} = \dfrac{\alpha_1}{\lambda^5}\exp(-\dfrac{\alpha_2}{\lambda T})$ où α_1 et α_2 sont deux constantes positives et k_B est la constante de Boltzmann. Tracer l'allure de $\varphi_{\lambda,W}(T,\lambda)$ en fonction de la longueur d'onde λ à température donnée et la comparer à la courbe expérimentale obtenue ci-dessus (figure 2.1).

3. En 1900, Rayleigh et Jeans proposaient un modèle classique dans lequel la puissance surfacique $\dfrac{dP}{d\lambda}$ rayonnée par unité de longueur d'onde λ par un corps noir en équilibre à la température T est donnée par $\varphi_{\lambda,RJ}(T,\lambda) = \dfrac{\alpha_3}{\lambda^4}$ où α_3 est une constante positive.

3.1. Tracer l'allure de $\varphi_{\lambda,RJ}(T,\lambda)$ en fonction de la longueur d'onde λ à température donnée et la comparer à la courbe expérimentale obtenue ci-dessus (figure 2.1).

3.2. Cette loi découverte par Rayleigh et Jeans "colle" très bien à basse fréquence (domaine infrarouge). Pourquoi le physicien Ehrenfest l'a-t-il qualifiée de "catastrophe ultra- violette" ?

4. Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, Planck propose la loi démontrant la relation entre la puissance surfacique spectrale d'un corps noir et sa température T en fonction de la fréquence ν du rayonnement qu'il émet. La puissance P rayonnée par l'unité de surface d'un corps noir est répartie sur l'ensemble des longueurs d'onde possibles avec, pour répartition selon la fréquence ν :

$$\varphi_\nu(T,\nu) = \frac{dP}{d\nu} = AT^3\frac{x^3}{\exp(x)-1} \quad \text{avec } x = \frac{h\nu}{k_B T} \text{ et } A \text{ est une constante.}$$

4.1. Qu'appelle-t-on un corps noir ? D'où vient le terme "noir" ?

4.2. La constante A peut être écrite sous la forme de produit de la constante de Planck h, de la vitesse de la lumière dans le vide c et de la constante de Boltzmann k_B : $A = \delta(c)^{\alpha}(h)^{\beta}(k_B)^{\gamma}$ où α, β, γ et δ sont des constantes sans dimensions. A partir d'une analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs de α, β et γ.

4.3. Etablir la loi de Stefan. En déduire la valeur de la constante δ sachant que la constante de Stefan est $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3} = 5,67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$. On donne : $\displaystyle\int_{x=0}^{+\infty} \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$. Donner l'expression de la puissance surfacique $\varphi_\lambda(T,\lambda) = \dfrac{dP}{d\lambda}$ rayonnée par unité de longueur d'onde λ.

4.4. Montrer que l'expression de la puissance surfacique $\varphi_\lambda(T,\lambda)$ permet de retrouver $\varphi_{\lambda,RJ}(T,\lambda)$ et $\varphi_{\lambda,W}(T,\lambda)$ respectivement aux basses et aux hautes fréquences. En déduire les constantes α_1, α_2 et α_3.

4.5. La loi de déplacement de Wien a été mise au point expérimentalement avant la découverte de la loi de Planck. Redémontrer cette loi en vérifiant que la longueur d'onde d'émission maximale d'un corps varie bien en $\dfrac{1}{T}$. On donne la solution $x_0 \approx 4,97$ de l'équation $\exp(x_0)(5-x_0) = 5$.

4.6. La longueur d'onde λ_m correspondant au maximum du spectre solaire est $\lambda_m = 530\,nm$. Préciser la couleur correspondant à cette longueur d'onde et la valeur de la température T_S de surface du Soleil, assimilé à un corps noir. En justifiant la réponse, indiquer si le Soleil peut être en équilibre thermique à cette température.

4.7. Vérifier à partir de la loi de Planck qu'à longueur d'onde donnée l'émission d'un corps est une fonction croissante de T.

4.8. On caractérise la puissance surfacique spectrale $\varphi_\lambda(T,\lambda)$ par l'intervalle $\Delta\lambda$, dit largeur "d'équivalence", définie par $\Delta\lambda.\varphi_\lambda(T,\lambda_m) = \sigma T^4$. Montrer que l'intervalle $\Delta\lambda$ est proportionnel à λ_m.

4.9. Justifier sans calcul le fait que l'essentiel de la puissance émise par un corps noir est rayonnée dans un intervalle spectral centré sur λ_m dont la largeur est de l'ordre de $\Delta\lambda$.

5. On souhaite établir la relation température-résistance du filament d'une ampoule électrique.

Dans une lampe à incandescence, le filament de tungstène traversé par un courant électrique est porté à une haute température et émet un rayonnement électromagnétique polychromatique, dont la répartition spectrale est fonction de la température T et obéit à la loi de Planck.

On assimile le filament à un cylindre de longueur $l = 40\,cm$, de rayon $r = 0,02\,mm$ et de résistivité électrique ρ.

On néglige l'absorption du rayonnement par le verre de l'ampoule ni des éventuels courants de chaleur dans le gaz inerte contenu dans l'ampoule.

5.1. La température T est une grandeur macroscopique. A quelle grandeur microscopique est-elle attachée ?

5.2. Justifier le choix du tungstène comme métal adapté pour faire des ampoules.

5.3. Exprimer la résistance électrique R du filament en fonction de la résistivité ρ, de r et de l .

5.4. A 300 K, la résistivité du filament de tungstène est $\rho = 7{,}1.10^{-8}\ SI$ et sa température de fusion vaut $T_{fus} = 3683\ K$. La tension d'alimentation aux bornes du filament est $U = 220\ V$. Calculer numériquement la puissante P_J dissipée par effet Joule. Commenter. Expliquer pourquoi le filament et le verre de l'ampoule s'échauffent.

5.5. On se place en régime permanent. En effectuant un bilan de puissance pour le filament de tungstène, calculer numériquement la température d'équilibre du filament. Commenter.

5.6. Des mesures expérimentales de la variation de la résistivité ρ d'un filament de lampe à incandescence en tungstène ont été faites par Jones et Langmuir. Le comportement de la résistivité en fonction de la température est modélisé par l'équation $\rho = a \cdot T^2 + b \cdot T$ où T est la température en Kelvin, $a = 2{,}50.10^{-14}\ SI$ et $b = 2{,}30.10^{-10}\ SI$.

5.6.1. Montrer que la température d'équilibre du filament est solution de l'équation $T^4 = \dfrac{B}{a \cdot T^2 + b \cdot T}$. Exprimer numériquement la constante B .

5.6.2. Calculer la valeur numérique réelle de la température T du filament. Conclure.

5.7. Quel est l'intérêt de choisir une longueur $l = 40\ cm$ de filament ? Comment réaliser une telle longueur dans l'ampoule ?

5.8. On définit le rendement de la lampe par $\eta = \dfrac{P_v}{P_t} = \dfrac{\text{puissance rayonnée dans le visible}}{\text{puissance totale rayonnée}}$.

Le filament d'une ampoule électrique d'éclairage est porté à la température T_1.

Exprimer sous forme du rapport de deux intégrales le rendement η de la lampe. On rappelle que les longueurs d'onde du rayonnement visible s'étendent environ de $\lambda_1 = 0{,}4\ \mu m$ à $\lambda_2 = 0{,}8\ \mu m$.

Calculer numériquement la puissance P_v rayonnée par la lampe dans le visible et le rendement η de la lampe à la température du filament $T_1 = 2500\ K$.

Commenter et justifier le résultat obtenu.

On donne $\displaystyle\int_{x_1=7,2}^{2x_1} \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx = 0{,}43$; $h = 6{,}63.10^{-34} J.s$; $k_B = 1{,}38.10^{-23} J.K^{-1}$; $c = 3.10^8 m.s^{-1}$.

5.9. En justifiant, indiquer vers quel domaine d'ondes se déplace le maximum d'intensité lumineuse de la lampe lorsque la température passe de T_1 à $T_2 > T_1$. Quelle sera la conséquence de l'augmentation de la température sur le rendement de la lampe ?