Planche n° 20. Normes matricielles. Suites et séries matricielles

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (***)

Déterminer $s = \mathrm{Sup}\left\{\dfrac{\|AB\|}{\|A\|\|B\|},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\}$ quand $\|\ \|$ est **1)** $\|\ \|_1$, **2)** $\|\ \|_2$, **3)** $\|\ \|_\infty$.

Exercice n° 2 (**)

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant k(A)N(B)$.

Exercice n° 3 (*)

Existe-t-il une norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) = N(A)N(B)$.

Exercice n° 4 (I)**

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (a réel strictement positif donné).

Exercice n° 5 (***)

Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, $p \geqslant 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathrm{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$ (disque unité ouvert).
(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$
(3) La série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge.

Pour $(1) \Rightarrow (3)$, on admettra que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple de matrices (D,N) tel que : $A = D + N$, D est diagonalisable, N est nilpotente et $ND = DN$ (décomposition de Dunford). De plus, $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice n° 6 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Convergence et somme de la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 7 (I)**

On munit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit A un élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| < 1$. Montrer que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge puis que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I-A)^{-1}$.

En déduire que $\|(I-A)^{-1} - (I+A)\| \leqslant \dfrac{\|A\|^2}{1-\|A\|}$.

Exercice n° 8 (I)**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice n° 9 (I)**

Calculer $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, si **1)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice n° 10 (**)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Calculer $\ln(I_3 + tA) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} A^n$ en précisant les valeurs de t pour lesquelles la série converge.

Exercice n° 11 (***)

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, calculer $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(I_n + \dfrac{A}{p}\right)^p$.

Exercice n° 12 (**)

Montrer que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.