

FONCTIONS POLYNOMIALES DE PLUSIEURS VARIABLES

Notations

- Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On note $E^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans E .

Une application de \mathbb{R} dans E est dite *polynomiale* si elle est de la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k \cdot V_k$, où les V_k sont des vecteurs appartenant à E .

On note alors $E[x]$ le sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{R}}$ formé des fonctions polynomiales et $E_n[x]$ le sous-espace vectoriel de $E[x]$ formé des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

- Par ailleurs, soit f une application de \mathbb{R}^n dans E . On rappelle que pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $j \in [1, n]$, on peut définir l'application de \mathbb{R} dans E qui à x associe $f(u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_{j+1}, \dots, u_n)$. Cette application est appelée la $j^{\text{ème}}$ application partielle de f au point u .

- Enfin, si X est un ensemble fini, $|X|$ désignera son cardinal.

A - Fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 1 et fonctions affines

Soit g une application de \mathbb{R} dans E .

Définition 1 : On dira que g est une fonction **affine** si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2).$$

Soient x_0 et x_1 deux nombre réels *distincts*. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- A.1** Calculer (en fonction de x_0 , x_1 et x) les réels α et β vérifiant : $x = \alpha x_0 + \beta x_1$ et $\alpha + \beta = 1$.
- A.2** En supposant que l'application g est une fonction affine, déduire de la question précédente l'expression de $g(x)$ en fonction (uniquement) de $g(x_0)$, $g(x_1)$, x_0 , x_1 et x .
- A.3** Montrer que g est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1 si et seulement si c'est une fonction affine.
- A.4** Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$. On pose $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $g(0) = (1, 1)$, $g(1) = (3, 4)$ et on suppose encore que g est affine.

Représenter, dans \mathbb{R}^2 , $g(0)$, $g(1)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g\left(\frac{2}{3}\right)$, $g\left(-\frac{1}{3}\right)$ et l'ensemble $\{g(x), x \in \mathbb{R}\}$.

B - Fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et fonctions bi-affines symétriques.

Définition 2 : On définit \mathcal{A}_2 comme l'ensemble des applications f de \mathbb{R}^2 dans E qui sont **bi-affines**, c'est-à-dire telles que l'application partielle $f(u, \cdot)$ soit, pour tout u fixé, une fonction affine, et que l'application partielle $f(\cdot, v)$ soit, pour tout v fixé, une application affine.

- B.1** Montrer que \mathcal{A}_2 est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{R}^2}$.
- B.2** Montrer que :

$$f \in \mathcal{A}_2 \iff \exists (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in E^4 \text{ tel que } \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, f(u, v) = u v \mathbf{a} + u \mathbf{b} + v \mathbf{c} + \mathbf{d}.$$

Dans la fin de cette deuxième partie, on supposera que l'espace vectoriel E est de dimension finie d et on notera $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ une base de E .

- B.3** Pour tout j variant de 1 à d , on définit les quatre applications :

$$\begin{aligned} w_j^1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow E \\ (u, v) & \longmapsto \mathbf{e}_j \end{cases} & \quad w_j^2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow E \\ (u, v) & \longmapsto u \mathbf{e}_j \end{cases} \\ w_j^3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow E \\ (u, v) & \longmapsto v \mathbf{e}_j \end{cases} & \quad w_j^4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow E \\ (u, v) & \longmapsto u v \mathbf{e}_j \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que la famille $\{w_j^i, j \in [1, d], i \in [1, 4]\}$ est une base de \mathcal{A}_2 . En déduire la dimension de \mathcal{A}_2 .

Définition 3 : On définit maintenant \mathcal{AS}_2 comme le sous-ensemble de \mathcal{A}_2 des fonctions bi-affines **symétriques**, c'est-à-dire telles que : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, f(u, v) = f(v, u)$.

B.4 Montrer que \mathcal{AS}_2 est un sous-espace vectoriel de \mathcal{A}_2 . En donner une base et la dimension.

B.5 Soit ℓ l'application définie par

$$\ell : \begin{cases} \mathcal{AS}_2 & \longrightarrow & E_2[x] \\ f & \longmapsto & h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x, x) \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que ℓ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On notera flor_2 l'application réciproque de ℓ , qui à un élément F de $E_2[x]$ associe l'unique élément f de \mathcal{AS}_2 tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, x) = F(x)$ et on appellera f la **floraison** d'ordre 2 de F .

Soit $F \in E_2[x]$ et f sa floraison d'ordre 2.

B.6 Déduire de la question **A.2** :

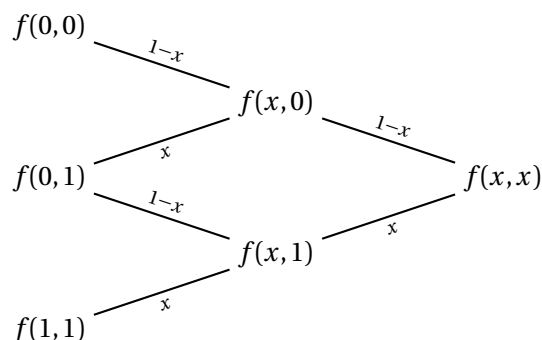
$f(u, 0)$ en fonction de $f(0, 0)$ et de $f(1, 0)$

$f(u, 1)$ en fonction de $f(0, 1)$ et de $f(1, 1)$

$f(u, v)$ en fonction de $f(u, 0)$ et de $f(u, 1)$.

Donner l'expression de $F(x)$ en fonction de $x, f(0, 0), f(0, 1), f(1, 1)$.

B.7 Expliquer comment le tableau triangulaire suivant schématise un algorithme de calcul de $F(x)$ à partir de $f(0, 0), f(0, 1), f(1, 1)$:



B.8 On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on pose $A_0 = (0, 1)$, $A_1 = (4, 4)$ et $A_2 = (1, -5)$.

Soit F la fonction polynomiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 définie par $F(x) = x^2 A_2 + x A_1 + A_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dessiner l'ensemble des points $F(x)$, lorsque x décrit l'intervalle $[-1, 1]$.

Calculer f , puis les points $P_0 = f(0, 0)$, $P_1 = f(1, 0)$, $P_2 = f(1, 1)$ et les placer sur le dessin précédent.

Retrouver pratiquement le point $F\left(\frac{2}{3}\right)$ à l'aide de ces points.

Dans la suite, on supposera que $E = \mathbb{R}$.

C - Fonctions polynomiales de degré quelconque et fonctions multi-affines symétriques.

Définition 4 : On définit \mathcal{AS}_n comme étant l'ensemble des applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} qui sont :

- multi-affines, *i.e.* telles que toutes les applications partielles sont affines ;
- symétriques, *i.e.* telles que : $f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = f(u_1, \dots, u_n)$ pour toute permutation σ de $[1, n]$ (*i.e.* on obtient la même valeur quel que soit l'ordre des arguments).

Soit $f \in \mathcal{A}\mathcal{S}_n$.

Pour $v \in [0, n]$ et $j \in [0, v]$, on utilisera la notation $f(0^{n-v-j} 1^j x^v)$ pour désigner l'image par f d'un n -uplet (u_1, \dots, u_n) dans lequel apparaît $n - v - j$ fois l'élément 0, j fois l'élément 1 et v fois l'élément x (quel que soit l'ordre dans lequel ces éléments apparaissent dans le n -uplet, puisque f est symétrique).

Ainsi, avec $n = 6$, $j = 2$, $v = 3$, $f(1, 0, x, x, 1, x)$ s'écrit $f(0^1 1^2 x^3)$; de même $f(0, 1, 1, 0, 0, 0)$ s'écrit $f(0^4 1^2 x^0)$.

C.1 Montrer que $\mathcal{A}\mathcal{S}_n$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Pour k variant de 1 à n , on définit l'application ε_k de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} par :

$$\varepsilon_k(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\substack{X \subset [1, n] \\ |X| = k}} \prod_{i \in X} u_i$$

et on pose $\varepsilon_0(u_1, \dots, u_n) = 1$.

Les ε_k sont les *fonctions symétriques élémentaires* des u_i .

C.2 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\varepsilon_k(x, \dots, x)$.

b) (☛) Montrer que la famille $(\varepsilon_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}\mathcal{S}_n$. Quelle est la dimension de $\mathcal{A}\mathcal{S}_n$? Dans la suite, on notera \mathcal{E} cette base de $\mathcal{A}\mathcal{S}_n$.

NB : Cette dernière question est délicate. On pourra admettre le résultat.

C.3 Soit ℓ l'application linéaire définie par

$$\ell : \begin{cases} \mathcal{A}\mathcal{S}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ f \longmapsto h : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x, \dots, x) \end{cases} \end{cases}$$

Écrire sa matrice dans la base \mathcal{E} de $\mathcal{A}\mathcal{S}_n$ et la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. En déduire que ℓ est bijective.

On notera flor_n l'application réciproque de ℓ , qui à un polynôme F de $\mathbb{R}_n[x]$ associe l'unique élément f de $\mathcal{A}\mathcal{S}_n$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x, \dots, x) = F(x)$ et on appellera f la **floraison** d'ordre n de F .

(Exemples pour ceux qui ont du mal à suivre¹ :

— pour $n = 2$, si $F(x) = ax^2 + bx + c$, on a $f(u, v) = auv + b\left(\frac{u+v}{2}\right) + c$

— pour $n = 3$, si $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on a $f(u, v, w) = auvw + b\left(\frac{uv + vw + wu}{3}\right) + c\left(\frac{u + v + w}{3}\right) + d$
etc..)

C.4 Soit $F \in \mathbb{R}_n[x]$ et f sa floraison d'ordre n .

Pour $v \in \{0, \dots, n\}$ et $j \in \{0, \dots, n - v\}$, on pose $P_j^v(x) = f(0^{n-v-j} 1^j x^v)$.

Montrer que les points $P_j^v(x)$ vérifient la relation de récurrence $P_j^v(x) = (1 - x)P_j^{v-1}(x) + xP_{j+1}^{v-1}(x)$.

Schématiser l'algorithme de calcul de $F(x)$ à partir des points $P_j = P_j^0(x)$, $j = 0, \dots, n$, par un tableau triangulaire à n niveaux (généralisant celui de la question B.7).

Dans la suite, on appellera un tel tableau «tableau de Casteljau²» et les points P_j les «points de Bézier³» de F .

C.5 Soit $F \in \mathbb{R}_n[x]$. Écrire un programme MAPLE permettant de calculer $F(x)$ à partir des points de Bézier de F .

1. Ces exemples ne sont pas dans l'énoncé original...

2. du nom de l'ingénieur chez Citroën qui l'a introduit, ainsi que l'algorithme qui en découle, Paul de Faget de Casteljau. Les travaux de P. de Casteljau sont restés au secret chez Citroën de 1959 à 1975.

3. du nom de l'ingénieur chez Renault, Pierre Bézier, qui a conçu les courbes qui portent son nom et qui sont utilisées en CAO et dans la synthèse d'images. Le tracé de ces courbes est accéléré par l'algorithme de De Casteljau. Voir aussi Centrale MP 2006 et Centrale PC 1999

D - Polynômes de Bernstein.

Dans cette partie, on va définir les polynômes de Bernstein, et démontrer certaines de leurs propriétés, grâce au concept de floraison et à l'algorithme de Casteljau, sans utiliser l'expression analytique de ces polynômes.

D.1 a) Soit $i \in [0, n]$. On considère :

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ F & \longmapsto P_i = f(0^{n-i} 1^i x^0) \text{ où } f = \text{flor}_n(F) \end{cases}$$

Montrer que φ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

b) On définit :

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ F & \longmapsto (\varphi_0(F), \dots, \varphi_n(F)) \end{cases}$$

Montrer, en utilisant la question C.4, que l'application ψ est injective. En déduire que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit $(e_i)_{i \in [0, n]}$ la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Pour $i \in [0, n]$, on désignera par B_i^n l'image réciproque par l'application ψ du vecteur e_i . On pourra noter b_i^n la floraison d'ordre n du polynôme B_i^n .

D.2 Que peut-on dire de la famille $(B_i^n)_{i \in [0, n]}$?

Quels sont les points de Bézier de B_i^n ?

Par quel terme désigne-t-on la famille $(\varphi_i)_{i \in [0, n]}$ par rapport à la famille $(B_i^n)_{i \in [0, n]}$?

D.3 Montrer que : $\forall F \in \mathbb{R}_n[x], \quad F = \sum_{i=0}^n \varphi_i(F) B_i^n$.

En déduire : $\sum_{i=0}^n B_i^n = 1$.

D.4 En déduire, grâce au tableau de Casteljau permettant de calculer $B_i^n(x)$ que

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq B_i^n(x) \leq 1$$

D.5 Soit $F \in \mathbb{R}_n[x]$, f sa floraison d'ordre n , P_j les points de Bézier de F , et les points $P_j^Y(x)$ définis comme dans la question C.4.

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

On définit l'application \tilde{f} de \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R} par : $\tilde{f}(u_1, \dots, u_{n-1}) = f(u_1, \dots, u_{n-1}, a)$.

Montrer que \tilde{f} appartient à \mathcal{AS}_{n-1} .

On pose $\tilde{F} = \text{flor}_{n-1}^{-1}(\tilde{f})$. Comparer $\tilde{F}(a)$ et $F(a)$.

Démontrer l'égalité : $\tilde{F}(a) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i^1(a) B_i^{n-1}(a)$.

En utilisant la relation de récurrence établie à la question C.4 et en prenant la convention $B_{-1}^{n-1}(x) = 0$ et $B_n^{n-1}(x) = 0$, démontrer la relation :

$$\forall i \in [0, n], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_i^n(x) = (1-x) B_i^{n-1}(x) + x B_{i-1}^{n-1}(x).$$

D.6 Montrer que : $\forall i \in [0, n], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad B_i^n(x) = \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i$.

FIN