

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Thermorégulation d'un cycliste.....	2
(1/4 à 1/3 Centrale MP 2006 non modifié).....	2
I. <u>Modélisation</u>	2
A. <u>Détermination du coefficient global de transfert thermique entre le corps et l'extérieur</u>	2
B. <u>Représentation du corps humain</u>	3
II. <u>Modèles physiques de thermorégulation</u>	3
A. <u>Premier modèle</u>	3
B. <u>Deuxième modèle</u>	3
C. <u>Troisième modèle</u>	4
Rayonnement gravitationnel par un système de deux étoiles à neutron.....	6
(1/3 E3A PC 2006 non modifié).....	6
I. <u>Point matériel en rotation autour d'un astre</u>	6
II. <u>Système binaire: point matériel fictif</u>	6
III. <u>Énergie mécanique du système</u>	7
IV. <u>Effondrement du système binaire</u>	7
V. <u>Aspect énergétique</u>	8
Modulation.....	9
(d'après 1/4 Centrale MP 1998 très modifié).....	9
I. <u>Indice de modulation</u>	10
II. <u>Spectre</u>	10
III. <u>Puissance</u>	11
IV. <u>Émetteurs voisins</u>	11
V. <u>Amplification</u>	12
A. <u>Impédance</u>	12
B. <u>Tension en sortie</u>	12

Thermorégulation d'un cycliste

(1/4 à 1/3 Centrale MP 2006 non modifié)

La thermorégulation est l'ensemble des phénomènes qui permettent au corps humain de conserver une température centrale constante, dans diverses conditions d'activité physique et malgré les variations de la température extérieure, dans une certaine limite.

La thermorégulation est due à des productions internes de chaleur (thermogenèse liée au métabolisme et à l'activité physique), et à des déperditions de chaleur au niveau de la respiration et de la peau (thermolyse). Pour que l'organisme fonctionne correctement, sa température interne doit rester dans une plage de température assez étroite, typiquement entre 36° C et 38° C .

Le but de ce problème est d'étudier comment le corps humain d'un cycliste est capable de réguler sa température.

Données numériques

Constante de Stefan : $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Puissance associée à la thermogenèse (liée au métabolisme)

- au repos : $P_M = 4,1 m^{0,75}$; m en kg, P_M en W
- effort modéré : le double de la puissance au repos
- effort important : le triple de la puissance au repos

Limites de température pour un fonctionnement normal du corps humain : de 36° C à 38° C

Surface de peau d'un corps humain : $S = 71,84 m^{0,425} h^{0,725}$ (S en cm², m en kg, h en cm)

Conductivité thermique des tissus humains faiblement irrigués : $\lambda = 0,3$ U.S.I.

Coefficient de transfert conducto-convectif peau/air intervenant dans la loi de Newton, en fonction de V , norme de la vitesse relative de l'air par rapport à la peau :

$$K_c = 5 + 5 V ; K_c \text{ en W K}^{-1} \text{ m}^{-2} ; V \text{ en m s}^{-1}$$

Masse du cycliste : $m = 80$ kg Taille du cycliste : $h = 1,80$ m

I. Modélisation

A. Détermination du coefficient global de transfert thermique entre le corps et l'extérieur

1. Rappeler la loi de Stefan pour le rayonnement thermique d'un corps noir, et donner sa signification énergétique.
2. En considérant que le corps humain se comporte comme un corps noir de température de surface T_s dans un environnement extérieur rayonnant comme un corps noir à la température T_a , montrer que la puissance surfacique échangée par le corps humain avec son environnement peut se mettre

sous la forme approchée $p_r = k(T_a - T_s)$ pour T_s peu différente de T_a , où k est un coefficient que l'on exprimera en fonction de σ et T_a . Calculer numériquement k pour $T_a = 298 \text{ K}$

3. On admettra que le coefficient k calculé précédemment pour 298 K varie peu pour les températures ambiantes qui seront considérées par la suite (typiquement entre 0° C et 40° C). En déduire que le coefficient de transfert total entre la peau et l'air (conduction -convection-rayonnement) est alors donné par la formule approchée $K_{cr} = 11 + 5V$ (en $\text{W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$)

B. Représentation du corps humain

4. Pour faciliter les calculs, on désire modéliser le corps humain par une sphère de rayon R . À l'aide des données numériques fournies, calculer la surface de peau du cycliste. En déduire le rayon R .

II. Modèles physiques de thermorégulation

A. Premier modèle

La température interne du corps est T_i tandis que la température ambiante extérieure est T_a . On supposera que les pertes thermiques ne se produisent que sur la surface extérieure, la vitesse de l'air par rapport à la sphère étant nulle.

5. Écrire la relation entre la puissance de thermogenèse P_M , K_{cr} , S , T_i et T_a
6. En déduire la plage de température ambiante T_a permettant la régulation thermique.
7. Faire l'application numérique pour l'organisme au repos. Conclusion ?

B. Deuxième modèle

Afin de réguler sa température, le corps humain est capable de limiter ou de favoriser la circulation sanguine dans ses couches périphériques (vasoconstriction ou vasodilatation), le sang étant le principal responsable de l'uniformisation de la température interne (homéothermie).

On considérera donc toujours le corps humain comme une sphère de même dimension que précédemment. Le volume est décomposé en deux zones :

- une zone centrale de rayon $R - e$, thermorégulée, dont la température est constante et égale à T_i ,
- une zone périphérique de transition d'épaisseur e constituée de tissus faiblement irrigués, siège uniquement d'une conduction thermique radiale.

8. Équation de la chaleur dans la zone de transition

- Rappeler la loi de Fourier de la conduction thermique. Préciser la direction du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th}
- En faisant un bilan énergétique pour la couche contenue entre les sphères de rayon r et $r + dr$, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(r, t)$ dans la zone de conduction (on pourra introduire toute donnée utile non explicitement fournie dans l'énoncé).

9. Dans le cas du régime permanent, montrer que $T = \frac{A}{r} + B$. Déterminer les constantes A et B en fonction de T_i, T_s, R et e .
10. On pose $\varepsilon = R - r$. En supposant que $e \ll R$, montrer que dans la zone de transition, $T(\varepsilon)$ est alors une fonction linéaire de ε (on vérifiera que les valeurs extrêmes de $T(\varepsilon)$ pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = e$ sont convenables).
11. En utilisant l'expression du flux thermique, exprimer P_M en fonction de R, λ, e, T_i et T_s .
12. Exprimer de même la relation donnant P_M en fonction de R, K_{cr}, T_s et T_a .
13. En déduire la relation donnant $T_i - T_a$ en fonction de P_M .
14. Dans les ouvrages de physiologie, on estime que le volume de la zone de conduction (zone de vasoconstriction/vasodilatation) peut représenter un pourcentage x compris entre 20% et 50% du volume total. Calculer e en fonction de R et de x . Faire l'application numérique pour les deux valeurs extrêmes de x .
15. On suppose l'air immobile par rapport à la peau.
- pour un organisme au repos, calculer les valeurs extrêmes de T_a pour lesquelles la régulation thermique est possible.
 - pour un organisme effectuant un effort modéré, calculer de même les valeurs extrêmes de T_a pour lesquelles la régulation thermique est possible.
16. On considère maintenant un cycliste effectuant un effort modéré en roulant à 18 km/h dans une atmosphère sans vent. Calculer les valeurs extrêmes de T_a pour lesquelles la régulation thermique est possible. La régulation est-elle possible si la température extérieure est de 30°C ?

C. Troisième modèle

Le dernier phénomène intervenant dans la thermorégulation est la transpiration. Dans le domaine de température considéré, l'évaporation de la sueur nécessite une enthalpie massique de changement de phase de l'ordre de $L_v = 2450 \text{ J/g}$.

Soit μ le débit massique de sueur produite par l'organisme (en g/heure). On supposera que l'évaporation est suffisamment rapide pour ne pas avoir d'accumulation de sueur sur la peau : la surface du corps reste donc pratiquement sèche.

17. La transpiration ne modifiant pas de façon notable la conduction de la chaleur dans la zone périphérique, calculer la différence $T_i - T_s$.
18. En faisant un bilan thermique à la surface, exprimer $T_s - T_a$ en fonction de R, K_{cr}, P_M, L_v et μ .
19. Déduire des deux relations précédentes l'expression de μ en fonction de T_i, T_a, P_M et des données du problème.
20. Applications numériques : calculer la valeur minimale de μ en g/heure dans les cas suivants :
- corps au repos, $\theta_a = 30^\circ\text{C}$.

- cycliste fournissant un effort important, $\theta_a = 35^\circ\text{C}$, vitesse $V = 18 \text{ km/h}$.
- Les ouvrages de physiologie font état de débit de transpiration pouvant valoir jusqu'à plusieurs litres par heure dans des conditions extrêmes. Le modèle présenté ici vous paraît-il satisfaisant ?

21. Ce qui est présenté ici ne vaut que pour une atmosphère sèche. Dans une atmosphère humide, la vitesse de l'évaporation diminue quand la pression partielle de l'eau augmente, jusqu'à s'annuler quand cette pression devient égale à la pression de vapeur saturante à la température considérée. Expliquer quelle est l'influence du taux d'humidité de l'atmosphère sur la régulation thermique.

Rayonnement gravitationnel par un système de deux étoiles à neutron

(1/3 E3A PC 2006 non modifié)

Données physiques:

- constante de gravitation: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (S.I.)
- vitesse de la lumière dans le vide: $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹

Parmi les sources d'ondes gravitationnelles, l'effondrement d'un système binaire d'étoiles à neutrons est l'un des phénomènes que l'on pense détecter. Nous étudierons les aspects mécaniques de ce phénomène, dans le cadre simplifié de la dynamique Newtonienne.

Le référentiel d'étude (\mathcal{R}), est supposé galiléen.

I. Point matériel en rotation autour d'un astre

Considérons dans cette question un astre A de masse M supposé immobile dans (\mathcal{R}), autour duquel gravite un petit objet S de masse $m \ll M$. Désignons par G la constante de gravitation universelle et notons $r = AS$ et $\vec{e}_r = \frac{\vec{AS}}{r}$.

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation subie par S de la part de A . Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ qui sera exprimée en prenant l'origine de l'énergie potentielle à l'infini.
2. Montrer que le moment cinétique de S relativement au point A dans (\mathcal{R}), noté $\vec{L}_{A|(\mathcal{R})}$, est un vecteur constant. En déduire que la trajectoire de S est située dans un plan passant par A .
3. Admettons pour simplifier que le point S ait une trajectoire circulaire de rayon R , avec une vitesse angulaire de rotation ω . Exprimer ω en fonction de G , M et R .
4. Rappeler l'énoncé de la 3ème loi de KEPLER relative à la période de rotation des satellites autour d'une étoile. Démontrer explicitement cette loi dans le cas d'une trajectoire circulaire.
5. Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit $E = -\frac{GMm}{2R}$. Commenter le signe de cette énergie.

II. Système binaire: point matériel fictif

Considérons désormais l'ensemble formé par deux étoiles A_1 et A_2 , de masses identiques M , en interaction gravitationnelle. Cet ensemble est supposé mécaniquement isolé.

6. Justifier que le barycentre G des deux étoiles est animé dans (\mathcal{R}) d'un mouvement rectiligne uniforme (la norme de sa vitesse dans (\mathcal{R}) sera notée v_G). Définir le référentiel barycentrique

du système des deux étoiles. Ce référentiel est-il galiléen?

7. Montrer que, dans le référentiel barycentrique, le mouvement du point P défini par $\vec{GP} = \vec{A_1A_2}$ est celui d'un point matériel fictif qui est soumis à la même force que celle qui agit sur A_2 et dont on exprimera la masse μ en fonction de M .
 8. Dans le référentiel barycentrique, le point P est animé d'un mouvement circulaire de rayon R de centre G . Déterminer la vitesse angulaire ω de ce mouvement en fonction de G , M et R .
- Soit un système de deux étoiles à neutron de masses $M = 2.8 \cdot 10^{30}$ kg. Peu de temps avant l'effondrement, elles ont une période de rotation très faible $T = 0,1$ s.
9. Déterminer numériquement la distance qui sépare ces deux étoiles. Déterminer la norme de la vitesse v_A des étoiles dans le référentiel barycentrique.
 10. Décrire les trajectoires des deux points A_1 et A_2 dans le référentiel barycentrique. Illustrer à l'aide d'une représentation graphique.

III. Énergie mécanique du système

11. Exprimer l'énergie cinétique dans (\mathcal{R}) du système des deux étoiles en fonction de M , v_G et de l'énergie cinétique E_c^* du système dans son référentiel barycentrique.
12. Dans le cas où le mouvement de P est circulaire dans le référentiel barycentrique, exprimer l'énergie cinétique E_c^* du système des deux étoiles en fonction de ω , M et R .
13. Exprimer l'énergie mécanique E_m du système des deux étoiles dans le référentiel (\mathcal{R}) , en fonction de M , G , R et v_G .

IV. Effondrement du système binaire

Le système binaire des deux étoiles A_1 et A_2 est la source d'ondes gravitationnelles, qui transportent une certaine énergie. Un calcul de relativité générale montre que la puissance ainsi «rayonnée» s'écrit, dans le référentiel (\mathcal{R}) : $P_{og} = K M^2 R^4 \omega^6$ où K est une constante s'exprimant en fonction de G et c (vitesse de la lumière dans le vide) sous la forme: $K = \frac{8G}{5c^5}$. L'émission de ces ondes n'affecte pas la vitesse v_G du barycentre. Du point de vue mécanique, l'émission des ondes gravitationnelles peut être modélisée par une force non conservative agissant sur le système des deux étoiles, avec une puissance: $-P_{og}$.

14. Qu'est-ce qu'une force non conservative? Quelle relation existe-t-il entre $\frac{dE_m}{dt}$ et P_{og} ?
Quelle est la conséquence de cette perte d'énergie sur la distance R entre les deux étoiles?
15. Le rayon R de la trajectoire est désormais considéré comme une fonction $R(t)$ du temps et il est admis que l'expression E_m , de l'énergie mécanique déterminée précédemment reste valable.
Montrer que R varie selon une loi $\frac{dR}{dt} = -\frac{\alpha}{R^3}$ et exprimer α en fonction de K , G et M .

16. Au temps $t = 0$, la distance entre les étoiles est $R(t=0) = R_0$. Déterminer $R(t)$ en fonction de R_0 , t et α . Représenter graphiquement l'allure de la trajectoire de l'une des deux étoiles dans le référentiel barycentrique.
17. Les deux étoiles à neutron sont assimilées à des sphères de diamètre (très faible) $a = 20$ km. Déterminer, en fonction de R , a et α le temps t_c au bout duquel les deux étoiles entrent en contact. Exprimer en fonction de G , M et a la vitesse angulaire de rotation atteinte par le système à l'instant t_c . Application numérique: Calculer t_c et ω_c sachant que $R_0 = 4,6 \cdot 10^5 m$ et $M = 2,8 \cdot 10^{30} kg$.
18. Justifier que le modèle précédent n'est valable que si la condition $\left| \frac{dR}{dt} \right| \ll R\omega$ est réalisée. Cette condition est-elle vérifiée jusqu'à l'instant de contact?

V. Aspect énergétique

19. Déterminer la puissance gravitationnelle rayonnée, $P_{og}(t)$ en fonction de t , α , R_0 , K , M et G . Représenter graphiquement $P_{og}(t)$.
20. Une fois le contact réalisé, l'émission de l'onde gravitationnelle cesse. Exprimer la puissance maximale, notée $P_{og,max}$ rayonnée par le système sous forme d'onde gravitationnelle, en fonction de K , G , M et a . Comparer à la puissance électromagnétique totale émise par notre Soleil $P_{sol} = 4,5 \cdot 10^{26} W$.
21. Déterminer l'énergie totale E_{og} rayonnée sous forme gravitationnelle entre les instants $t = 0$ et t_c , en fonction de G , M , R_0 et a .
-

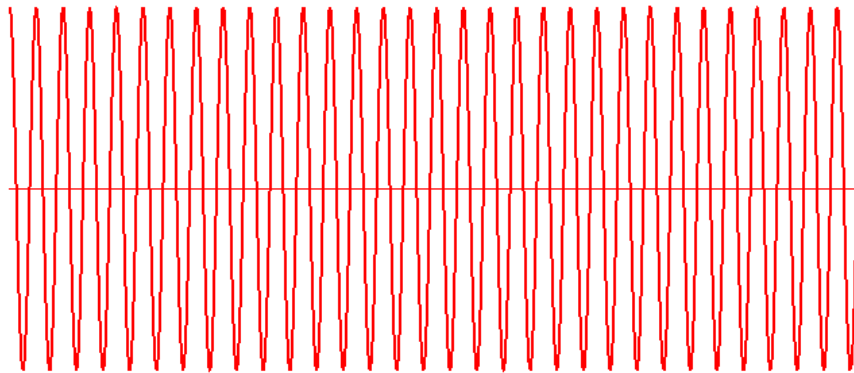
Modulation

(d'après 1/4 Centrale MP 1998 très modifié)

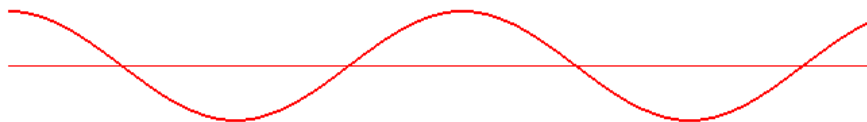
La transmission hertzienne de signaux basse fréquence (ex: signal sonore correspondant à un concert) est impossible: la portée d'un émetteur en basse fréquence est très faible, de plus on ne pourrait distinguer les signaux de deux émetteurs distincts.

La modulation est le procédé permettant de transposer les caractéristiques d'un signal dans des domaines où la propagation ou le traitement sont possibles. La démodulation est l'opération inverse.

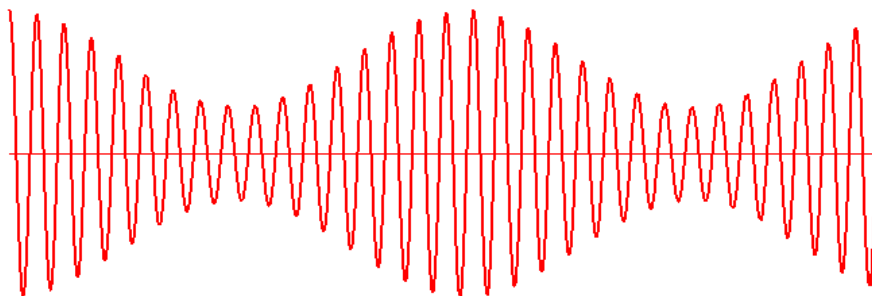
porteuse en fonction du temps:



signal de modulation en fonction du temps:



signal modulé en fonction du temps:



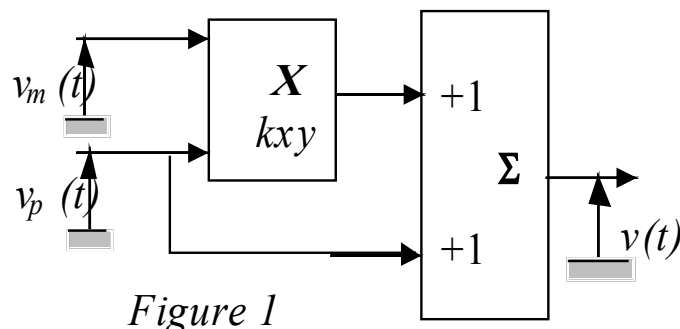
Les méthodes de modulation partent d'un signal sinusoïdal de fréquence élevée appelé porteuse. En modulation d'amplitude on fait en sorte que l'amplitude varie proportionnellement au signal de départ, appelé signal modulant. Le résultat s'appelle signal modulé.

Le champ électromagnétique rayonné par une antenne doit donc être modulé pour qu'il puisse véhiculer des informations.

I. Indice de modulation

On suppose d'abord que le signal de modulation est sinusoïdal $v_m(t) = V_m \cos(\omega_m t)$. Ce signal module la porteuse $v_p(t) = V_p \cos(\omega_p t)$ qui est la tension appliquée à l'antenne en l'absence de modulation. La porteuse est fournie par un oscillateur haute fréquence dont la fréquence d'oscillation $f_p = \omega_p / 2\pi$ ($f_p \gg f_m = \omega_m / 2\pi$) est particulièrement stable.

1. La modulation s'effectue à l'aide d'un circuit (figure 1) comprenant un multiplieur de constante multiplicative k (si on met en entrée les deux tensions x et y , la tension obtenue en sortie est $k \times (x \cdot y)$) et un additionneur (la tension en sortie est la somme des deux tensions en entrée). Montrer que le signal modulé est de la forme $v(t) = V_p (1 + m \cos(\omega_m t)) \cos(\omega_p t)$ où m est l'indice de modulation que l'on explicitera.



2. Afin de mesurer l'indice de modulation du signal porteur, on réalise les deux oscillogrammes représentés (figure 2). Quels sont les modes de l'oscilloscope utilisés pour la réalisation de chacun de ces oscillogrammes? Justifier rapidement l'aspect des oscillogrammes.
3. Pour l'enveloppe supérieure de la courbe, exprimer les tensions extrémales: V_1 et V_2 en fonction de m et V_p . En déduire l'expression de l'indice de modulation en fonction des tensions extrémales V_1 et V_2 . Le calculer ensuite numériquement avec $V_1 = 2V$ et $V_2 = 18V$.

II. Spectre

4. Écrire $v(t)$ sous la forme d'une somme de trois fonctions sinusoïdales en fonction de f_p, f_m, V_p, m, t (on remarquera qu'il suffit pour cela de savoir transformer un produit de deux fonctions sinusoïdales en somme de fonctions sinusoïdales).
5. Déterminer le spectre de fréquences (en amplitude) du signal modulé $v(t)$ et le représenter (diagramme en bâton des amplitudes des trois cosinus en fonction de la fréquence). Donner les valeurs numériques des amplitudes.

6. En déduire, pour ce type de modulation, la largeur du spectre de fréquences nécessaire à la transmission d'un signal sinusoïdal de fréquence f_m .

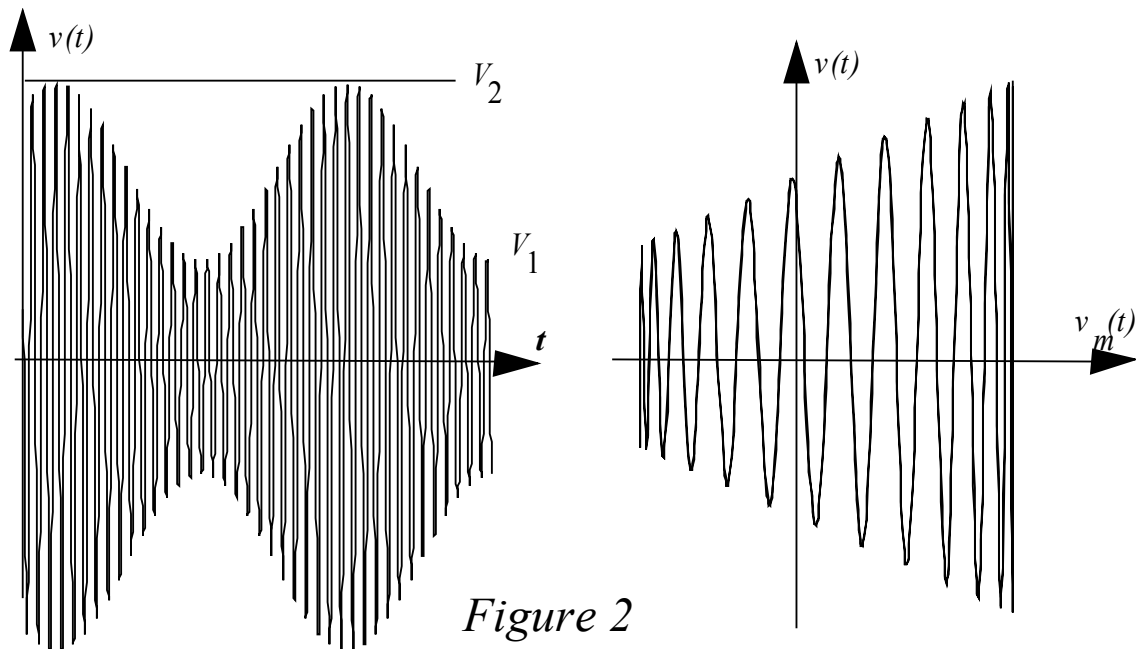


Figure 2

III. Puissance

Le signal est transmis à l'antenne émettrice caractérisée par une résistance R_o appelée résistance de rayonnement. On montre que la puissance rayonnée par l'antenne a la même expression que la puissance Joule qui serait dissipée dans une résistance R_o .

7. Écrire la puissance rayonnée (il s'agit de la puissance moyenne dans le temps; il suffit de faire la somme des trois puissances moyennes correspondant à chacun des trois termes de $v(t)$ - relation de Parseval -)
8. En absence de modulation ($m = 0$), la puissance rayonnée par l'antenne est $P = 2100\text{kW}$, quelle puissance P_i rayonne cette antenne quand l'indice de modulation m a la valeur calculée précédemment (formule littérale puis application numérique)

IV. Émetteurs voisins

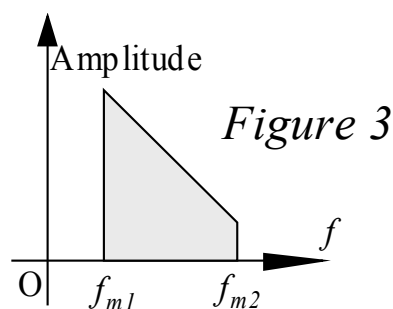


Figure 3

Plus généralement, le signal de modulation occupe une plage de fréquences $[f_{m1}, f_{m2}]$ (figure 3).

9. Représenter le spectre de fréquences du signal modulé. En radiodiffusion $f_{m1} = 300\text{Hz}$ et $f_{m2} = 4,5\text{ kHz}$, quelle est la largeur de la plage de fréquences occupée par le signal modulé?
10. Quel écart minimal de fréquence Δf_p doit-il exister entre les fréquences porteuses de deux émetteurs pour que leurs émissions ne soient pas mutuellement brouillées?

V. Amplification

En fait, le signal modulé doit être amplifié avant d'être appliqué à l'antenne. Pour cela, on intercale entre la sortie du modulateur délivrant le signal $v(t)$ et l'antenne, un amplificateur sélectif dont le circuit équivalent est donné figure 4.

On modélise la sortie de l'amplificateur par un générateur de courant de transconductance donnée: g (g est une constante réelle dans la bande de fréquences utilisées) c'est à dire que le courant obtenu en sortie est proportionnel à la tension d'entrée $v(t)$ et vaut : $g v(t)$. Le circuit (R,L,C) est accordé sur la fréquence f_p du signal porteur ($LC\omega_p^2 = 1$). Le facteur de qualité du circuit (R,L,C) parallèle est $Q = R/(L\omega_p)$ où la résistance R inclut, pour l'essentiel, la résistance de rayonnement.

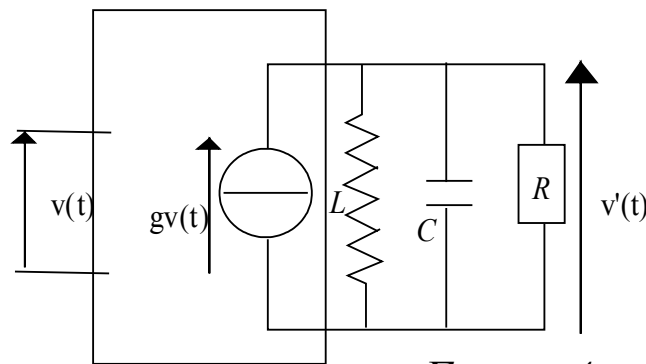


Figure 4

A. Impédance

11. Exprimer l'admittance complexe \underline{Y} du circuit (RLC) parallèle en fonction de R , Q , ω/ω_p .
12. On considère désormais des pulsations ω telles que $\omega = \Delta\omega + \omega_p$ avec $|\Delta\omega| \ll \omega_p$. Donner l'expression de $\underline{Y}(j\omega)$ au premier ordre en $\Delta\omega/\omega_p$ en fonction de R , Q , $\Delta\omega/\omega_p$.
13. En déduire les expressions du module Z et de l'argument φ de \underline{Z} en fonction de R , Q , $\Delta\omega/\omega_p$.

B. Tension en sortie

14. Ecrire la tension de sortie de l'amplificateur pour une tension d'entrée sinusoïdale $V \cos(\omega t)$ de pulsation ω proche de ω_p .
15. En déduire la tension $v'(t)$ à la sortie de l'amplificateur sous la forme: $v'(t) = V'_p (1 + m' \cos(\omega_m t + \varphi')) \times \cos(\omega_p t)$, expression dans laquelle on explicitera V'_p , φ' et le nouvel indice de modulation m' .
16. Le signal amplifié $v'(t)$ est-il une image non déformée du signal modulé $v(t)$, lorsque la pulsation ω_m du signal de modulation varie entre ω_{m1} et ω_{m2} ? (Commenter le retard et l'atténuation des

composantes).

17. On suppose $Q \ll \frac{\omega_p}{\omega_m}$ et l'on travaille au premier ordre dans l'expression de $v'(t)$. Montrer que les problèmes précédents sont alors résolus.
-

Réponses

Thermorégulation d'un cycliste

- 1) Le flux émis par un corps noir dépend de sa température de surface et est indépendant de la nature du corps noir. Ce rayonnement est identique au rayonnement thermique d'équilibre

Le flux surfacique émis est :

$$\varphi_e = \sigma T^4$$

σ : constante de Stefan

- 2) - puissance surfacique reçue (et donc absorbée) $\varphi_a = \sigma T_a^4$
 - " " émise $\varphi_e = \sigma T_s^4$

- bilan radiatif (attention: compté positivement ici selon les conventions habituelles de la thermo c'est à dire, on compte positivement ce qui est reçu)

$$P_r = \varphi_{\text{extérieur} \rightarrow \text{système}} = \sigma (T_a^4 - T_s^4)$$

- de plus T_s est proche de T_a donc

$$P_r = \sigma (T_a^4 - (T_a + \varepsilon)^4) \quad \text{avec } \varepsilon = T_s - T_a$$

ext \rightarrow syst

$$\approx \sigma (T_a^4 - (T_a^4 + 4\varepsilon T_a^3)) \quad \text{au premier ordre en } \varepsilon$$

$$P_r \approx -4\sigma T_a^3 \varepsilon$$

$$P_r = \underbrace{4\sigma T_a^3}_{\text{W.m}^{-2}} (T_a - T_s)_{\text{K}}$$

$$\begin{aligned} \text{A.N. } k &= 4\sigma T_a^3 \\ &= 4 \cdot 5,7 \cdot 10^{-8} (298)^3 \end{aligned}$$

$$k = 6,03 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$$

- 3) On doit tenir compte du rayonnement et de la conduction-convection donc :

$$P_{\text{cr}} = P_r + P_c$$

ext \rightarrow syst (rayonnement) (conduction-convection)

$$= k (T_a - T_s) + K_c (T_a - T_s)$$

$$= K_{cr} (T_a - T_s)$$

avec

$$K_{cr} = k + K_c$$

A.N.

$$= 6,03 + (5 + 5 V)$$

$$K_{cr} = 11 + 5 V$$

$$/Wm^2K^{-1}$$

4)

A.N.

$$S_{/cm^2} = 71,84 \, m^{0,425} / kg \, h^{0,725} / cm$$

$$= 71,84 \, 80^{0,425} \, 180^{0,725}$$

$$= 19964 \, cm^2$$

$$S = 2,00 \, m^2$$

$$R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

A.N.

$$= \sqrt{\frac{2}{4\pi}}$$

$$R = 0,40 \, m$$

5) En régime stationnaire, en considérant comme limite au système une sphère de rayon légèrement supérieur à R , pendant dt

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}_{produit} + \dot{Q}_{regu}$$

$$0 = P_M dt + S K_{cr} (T_a - T_i) dt$$

(cf stationnaire)

$$P_M = S K_{cr} (T_i - T_a)$$

relation "évidente" qui traduit que la puissance produite par le corps humain doit être évacuée par rayonnement et conduction-convection.

6) T_i varie entre $T_{i\min} = 36^\circ C$ et $T_{i\max} = 38^\circ C$

donc il y a régulation si :

$$T_{i\min} < \frac{P_M}{5K_{cr}} + T_a < T_{i\max}$$

$$T_{i\min} - \frac{P_M}{5K_{cr}} < T_a < T_{i\max} - \frac{P_M}{5K_{cr}}$$

7)

A.N.

$$P_M = 4,1 \text{ m}^{0,75}$$

$$\frac{P_M}{W} = 4,1 \text{ s}^{0,75}$$

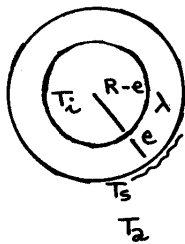
$$P_M = 109,7 \text{ W}$$

$$36 - \frac{109,7}{2 \cdot 11} < T_a < 38 - \frac{109,7}{2 \cdot 11}$$

$$31^\circ\text{C} < T_a < 33^\circ\text{C}$$

plage trop réduite et faisant intervenir des températures élevées uniquement. Le modèle est incorrect.

8)



→ Loi de Fourier

$$\vec{j}_{ch} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$$

\vec{j}_{ch} est radial (selon \vec{ur})

→ Bilan pour la couche entre r et $r+dr$ dans la zone de transition où il y a uniquement de la conduction

$$\frac{dU}{2Vcst} = \cancel{\delta^2 Q_{\text{produit}}} + \delta^2 Q_{\text{reçu}}$$

$$\mu c \frac{dV}{dt} \frac{\delta T}{\delta t} = 0 + \left[j_{(r)} 4\pi r^2 - j_{(r+dr)} 4\pi (r+dr)^2 \right] dt$$

↑
 $4\pi r^2 dr$

avec μ : masse volumique
 c : chaleur massique

$$\mu c 4\pi r^2 dr \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{\partial}{\partial r} (k 4\pi r^2) dr dt$$

$$\mu c 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi \lambda \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r})$$

$$\boxed{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0}$$

2) En régime permanent $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cste}$$

$$= -A$$

$$T = \frac{A}{r} + B$$

Conditions aux limites

$$T_s = \frac{A}{R} + B$$

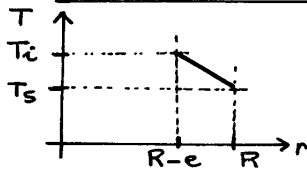
$$T_i = \frac{A}{R-e} + B$$

d'où

$$A = \frac{R(R-e)}{e} (T_i - T_s)$$

$$B = \frac{R T_s - (R-e) T_i}{e}$$

10) → En supposant $e \ll R$, on peut s'attendre à ce que T devienne linéaire dans la zone de transition (comme si la courbure devenait négligeable) et on doit trouver:



$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{r - R}{(R-e) - R}$$

$$T = (T_i - T_s) \frac{R-r}{e} + T_s$$

→ En r avec $\varepsilon = R-r$, on aura

$$T = \frac{A}{R-\varepsilon} + B$$

$$= \frac{A}{R} \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{R}} + B$$

$$\boxed{T \approx \frac{A}{R} (1 + \frac{\varepsilon}{R}) + B}$$

au premier
ordre en ε
(ordre minimum
possible ici)

$$= \underbrace{\left(\frac{A}{R} + B \right)}_{T_s} + \frac{A \varepsilon}{R^2}$$

puis $A = \frac{R^2}{e} \left(1 - \frac{e}{R}\right) (T_i - T_s)$
ou néglige

finalement :

$$T = T_s + \frac{(T_i - T_s)}{e} (R - r)$$

11) Comme en 5), le bilan sur une sphère de rayon r dans la zone de transition montre que la puissance qui passe correspond à la puissance P_M produite pour $r < R - e$.

Donc

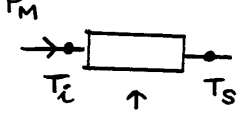
$$\begin{aligned} P_M &= 4\pi r^2 j(r) \\ &= -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} \\ &= 4\pi \lambda A \end{aligned}$$

(ce qui est bien une constante)

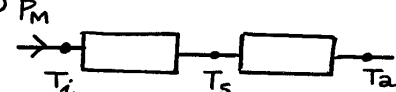
$$P_M \approx \frac{4\pi R^2}{e} (T_i - T_s)$$

résultat attendu

$P_M = j_{\text{surface}} S$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $-\lambda \left(\frac{\Delta T}{\Delta r}\right)_{\text{surface}} \quad 4\pi R^2$
 \downarrow
 linéarité dans le cadre de l'approximation $\frac{dT}{dr} = \frac{\Delta T}{\Delta r}$

P_M
 \rightarrow 
 $T_i \quad T_s$
 vu l'approx, la résist de conduction entre les 2 sphères vaut $\approx e/\lambda S$

12) P_M



$T_i \quad T_s \quad T_a$

P_M part ensuite vers le milieu extérieur par rayonnement et conduction-convection.

$$P_M = K_{cr} 4\pi R^2 (T_s - T_a)$$

13)

$$(T_i - T_a) = \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{K_{cr}}\right) \frac{P_M}{S}$$

14) On a:
$$x = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R-e)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$= 1 - \left(\frac{R-e}{R}\right)^3$$

$$e = R (1 - (1-x)^{1/3})$$

A.N.	$x=0,2$	$\frac{e}{R} = 7,2\%$	$e_{\text{MIN}} = 2,9 \text{ cm}$
	$x=0,5$	$\frac{e}{R} = 20,6\%$	$e_{\text{MAX}} = 8,3 \text{ cm}$

(remarquer que dans les résultats précédents, on a supposé $\frac{e}{R} \ll 1$)

15) On avait $(T_i - T_a) = \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{K_{cr}}\right) \frac{P_M}{S}$

$$T_{i\text{MIN}} - \frac{P}{S} \left(\frac{e_{\text{MAX}}}{\lambda} + \frac{1}{K_{cr}}\right) < T_a < T_{i\text{MAX}} - \frac{P_M}{S} \left(\frac{e_{\text{MIN}}}{\lambda} + \frac{1}{K_{cr}}\right)$$

A.N. organisme au repos $P_M = 109,7 \text{ W}$ $K_{cr} = 11$

$$36 - \frac{109,7}{2} \left(\frac{8,3 \cdot 10^{-2}}{0,3} + \frac{1}{11}\right) < T_a < 38 - \frac{109,7}{2} \left(\frac{2,9 \cdot 10^{-2}}{0,3} + \frac{1}{11}\right)$$

$$16,0^\circ\text{C} < T_a < 27,8^\circ\text{C}$$

organisme avec effort modéré $P_M = 219,3 \text{ W}$ $K_{cr} = 11$

$$-4^\circ\text{C} < T_a < 17,6^\circ\text{C}$$

16) A.N. organisme avec effort modéré enroulant ($V = 5 \text{ ms}^{-1}$)

$$P_M = 219,3 \text{ W} \quad K_{cr} = 11 + 5V = 36$$

$$36 - \frac{219,3}{2} \left(\frac{8,3 \cdot 10^{-2}}{0,3} + \frac{1}{36}\right) < T_a < 38 - \frac{219,3}{2} \left(\frac{2,9 \cdot 10^{-2}}{0,3} + \frac{1}{36}\right)$$

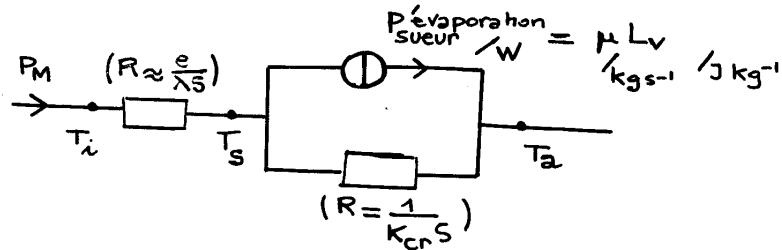
$$2,9^\circ\text{C} < T_a < 24,5^\circ\text{C}$$

Selon ce deuxième modèle, à 30°C , la régulation thermique n'est jamais possible (pour aucun des trois exemples choisis)

17) cf 11)

$$T_i - T_s = \frac{e}{\lambda S} P_M$$

- 18) P_M est évacué soit par rayonnement + conducto-convection
soit par évaporation de sueur



$$P_M = \mu L_v + K_{cr} S (T_s - T_a)$$

$$T_s - T_a = \frac{P_M - \mu L_v}{K_{cr} S}$$

(si μ est exprimé en g/h et L_v en J/g, il faut écrire

$$T_s - T_a = \frac{P_M - \frac{\mu L_v}{3600}}{K_{cr} S})$$

19) $T_i - T_a = \frac{P_M}{S} \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{K_{cr}} \right) - \frac{\mu L_v}{K_{cr} S}$

$$\mu = \frac{K_{cr}}{L_v} \left[P_M \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{K_{cr}} \right) - S (T_i - T_a) \right]$$

↳ $L_v/3600$ avec les unités du texte

- 20) Pour trouver μ_{MIN} on prendra e_{MIN} et T_{iMAX}
A.N.

→ $\theta_a = 30^\circ C$, corps au repos

$$\mu_{gh^{-1}} = \frac{3600 \times 11}{2450} \left[109,7 \left(\frac{0,029}{0,3} + \frac{1}{11} \right) - 2 (38 - 30) \right]$$

$$\mu = 71,4 \text{ g h}^{-1}$$

→ $\theta_a = 35^\circ C$, effort important, $V = 5 \text{ m s}^{-1}$

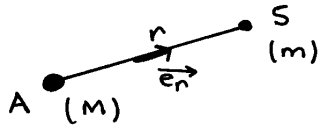
$$\mu_{gh^{-1}} = \frac{3600 \times 36}{2450} \left[329 \left(\frac{0,029}{0,3} + \frac{1}{36} \right) - 2 (38 - 35) \right]$$

$$\mu = 1820 \text{ g h}^{-1} \quad (\text{correct})$$

- 21) La sueur permet donc de réguler. En atmosphère déjà humide, la régulation sera donc plus difficile.

Système de deux étoiles à neutron

1)



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$

A est fixe dans R donc seule la force sur S travaille

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \text{avec} \quad d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$= -\frac{GMm}{r^2} dr$$

$$-dE_p = -\frac{GMm}{r^2} dr$$

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + \text{cte} \quad (\text{nul à l'infini})$$

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

2) A est fixe, on peut donc écrire le th du moment cinétique en un point fixe:

$$\frac{d\vec{L}(A)}{dt} = \vec{M}_{\vec{F}}(A)$$

$$= \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}(A)}{dt} = \vec{0} \quad (\text{force centrale})$$

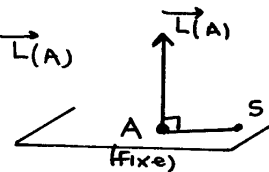
$$\vec{L}(A) = \text{constante}$$

$$= \vec{AS} \wedge m\vec{v}(S)$$

$$\vec{AS} \perp \vec{L}(A)$$

donc

S appartient au plan passant par A perpendiculaire à $\vec{L}(A)$



3) On applique le principe fondamental à S

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{1}{e_r} - \frac{GMm}{R^2} = -m\omega^2 R$$

$$\frac{1}{e_\theta} \quad 0 = mR \frac{d\omega}{dt}$$

donc :

$$\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

- 4) 3^e loi de Kepler : le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'ellipse.

Dans le cas de la trajectoire circulaire on doit trouver T^2 proportionnel à R^3

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

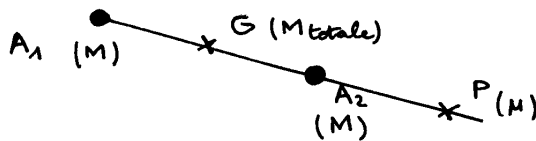
$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad E &= E_p + E_c \\ &= -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \quad \text{on remplace } \omega^2 \\ &= -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} \frac{GMm}{R} \end{aligned}$$

$$E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$$

Cette énergie est négative ce qui correspond à un état lié

6)



Théorème de la résultante cinétique au système $A_1 + A_2$

$$\underbrace{\vec{F}_{ext}}_{\substack{\text{nul} \\ \text{(système isolé)}}} = (2M) \frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

d'où

$$\vec{v}_G / R = \text{constante}$$

G a un mouvement rectiligne uniforme

remarque : on peut retrouver

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{d\vec{P}_2}{dt} \\ \vec{F}_{2 \rightarrow 1} &= \frac{d\vec{P}_1}{dt} \\ \hline 0 &= \frac{d\vec{P}_{\text{totale}}}{dt} \quad \text{avec } \vec{P}_{\text{totale}} = 2M\vec{v}_G\end{aligned}$$

Le référentiel barycentrique est centré en G
et a des axes de direction fixe par rapport à R .
Il est en translation par rapport à R .

Ici, puisque $\vec{v}_G/R = \text{cte}$, ce référentiel est galiléen

7) Dans R ,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= M \frac{d^2 \vec{OA}_2}{dt^2} \\ \vec{F}_{2 \rightarrow 1} &= M \frac{d^2 \vec{OA}_1}{dt^2}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}(\vec{GP}) &= \frac{d^2}{dt^2}(\vec{A_1A_2}) \\ &= \frac{d^2 \vec{OA_2}}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{OA_1}}{dt^2} \\ &= \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{M} - \frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{M} \\ &= \frac{2}{M} \vec{F}_{1 \rightarrow 2}\end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{M}{2} \frac{d^2 \vec{GP}}{dt^2} \\ \vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= \frac{M}{2} \vec{a}_{P/R^*} \\ \mu &= \frac{M}{2}\end{aligned}$$

8) Si P est en mouvement circulaire dans R^* , on peut écrire $\vec{a}_P = -\omega^2 R \vec{e}_r$

donc

$$\begin{aligned}-\frac{G M M}{R^2} \vec{e}_r &= -\left(\frac{M}{2}\right) \omega^2 R \vec{e}_r \\ \omega^2 &= \frac{2 G M}{R^3}\end{aligned}$$

9) Donc $T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2}$

$$= \frac{4\pi^2 R^3}{2G_M}$$

$$R = \left(\frac{G_M T^2}{2\pi^2} \right)^{1/3}$$

A.N. $= \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,8 \cdot 10^{30} \cdot 0,1^2}{2\pi^2} \right)^{1/3}$

$$R = 456 \text{ km}$$

Les étoiles font un cercle de rayon $\frac{R}{2}$

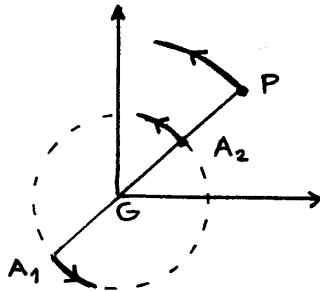
$$v_A = \frac{R}{2} \omega$$

$$v_A = \frac{R\pi}{T}$$

A.N. $= \frac{456 \cdot 10^3 \pi}{0,1}$

$$v_A = 14,32 \cdot 10^3 \text{ km s}^{-1}$$

10) Les trajectoires de A_1 et A_2 sont les cercles de rayon $R/2$ homothétiques du cercle décrit par P.



11) D'après le théorème de Koenig

$$E_{c/R} = E_{c \text{ de la masse en } G} + E_c^*$$

$$= \frac{1}{2} (2M) v_G^2 + E_c^*$$

$$E_{c/R} = M v_G^2 + E_c^*$$

$$\begin{aligned}
 12) \quad E_c^* &= 2 \times \left(\frac{1}{2} M v_{A/R^*}^2 \right) \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} M \frac{R^2}{4} \omega^2 \\
 \boxed{E_c^* &= \frac{1}{4} M R^2 \omega^2}
 \end{aligned}$$

remarque

$$\begin{aligned}
 E_c^* &= \frac{1}{2} M v^2 \leftarrow v \text{ relative de } 2/1 \text{ ou} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{M}{2} (R\omega)^2 \text{ de } P \text{ dans } R^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad E_m &= E_c + E_p \\
 &= M v_G^2 + \frac{1}{4} M R^2 \omega^2 - \frac{G M^2}{R} \\
 &= M v_G^2 + \frac{1}{4} M R^2 \frac{2 G M}{R^3} - \frac{G M^2}{R} \\
 \boxed{E_m &= M v_G^2 - \frac{G M^2}{2 R}}
 \end{aligned}$$

14) \rightarrow une force non conservative travaille sur un contour fermé.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

($\vec{F} \cdot d\vec{l}$ n'est pas une différentielle exacte
il n'y a pas d'énergie potentielle)

\rightarrow La puissance rayonnée entraîne une diminution de l'énergie.

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = - P_{\text{og}}}$$

\rightarrow La vitesse de G n'étant pas affectée, il faut que $-\frac{G M^2}{2 R}$ diminue donc $\frac{1}{R}$ augmente et R diminue

$$\begin{aligned}
 15) \quad \frac{dE_m}{dt} &= - P_{\text{og}} \\
 \frac{d}{dt} \left(- \frac{G M^2}{2 R} \right) &= - K M^2 R^4 \omega^6 \\
 &\quad \quad \quad \rightarrow \left(\frac{2 G M}{R^3} \right)^3
 \end{aligned}$$

(la trajectoire est assimilée à chaque instant à un cercle

pour le point P)

$$\frac{G M^2}{2} \frac{1}{R^2} \frac{dR}{dt} = - \frac{8 K G^3 M^5}{R^5}$$

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = - \underbrace{16 K G^2 M^3}_{\alpha} \frac{1}{R^3}}$$

16)

$$\frac{dR}{dt} = - \frac{\alpha}{R^3}$$

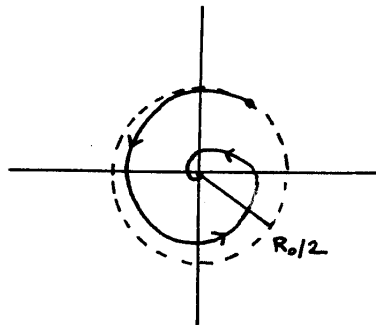
$$R^3 dR = - \alpha dt$$

$$\frac{R^4}{4} = - \alpha t + \text{cste}$$

$$\text{C.I.} \quad \frac{R_0^4}{4} = \text{cste}$$

$$R^4 = R_0^4 - 4 \alpha t$$

$$\boxed{R = R_0 \left(1 - \frac{4 \alpha t}{R_0^4} \right)^{1/4}}$$



17) Au contact, $R = a$ donc

$$t_c = \frac{R_0^4 - a^4}{4 \alpha}$$

$$\omega_c = \left(\frac{2 G M}{a^3} \right)^{1/2}$$

$$\text{A.N.} \quad \alpha = 6,86 \cdot 10^{19} \text{ m}^4 \text{s}^{-1}$$

$$t_c = 163 \text{ s}$$

$$\omega_c = 6833 \text{ rad s}^{-1}$$

18) On a assimilé la trajectoire à chaque instant à un cercle

ceci implique que (pour le point P)

$$v_{\text{radiale}} \ll v_{\text{tangentielle}}$$

$$\left| \frac{dR}{dt} \right| \ll R\omega$$

A.N. au contact :

$$R\omega = a\omega = 20 \cdot 10^3 \cdot 6833 = \underline{140 \cdot 10^3 \text{ km s}^{-1}}$$

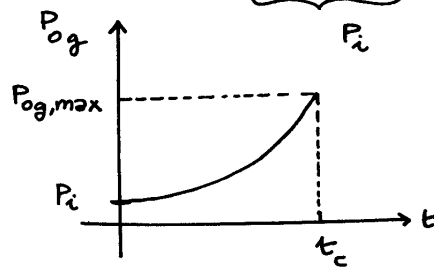
$$-\frac{dR}{dt} = \frac{a}{a^3} = \frac{686 \cdot 10^{19}}{(20 \cdot 10^3)^3} = \underline{8,6 \cdot 10^3 \text{ km s}^{-1}}$$

on peut estimer que

$$8,6 \ll 140$$

19) On avait $P_{0g} = \frac{8 K \gamma^3 M^5}{R^5}$

$$P_{0g} = \frac{8 K \gamma^3 M^5}{R_0^5} \left(1 - \frac{4\alpha t}{R_0^4}\right)^{-5/4}$$



20) $P_{0g,max}$ en t_c tel que $\frac{a}{R_0} = \left(1 - \frac{4\alpha t_c}{R_0^4}\right)^{1/4}$

$$P_{0g,max} = P_i \left(\frac{R_0}{a}\right)^5$$

$$P_{0g,max} = \frac{8 K \gamma^3 M^5}{a^5}$$

A.N. $= 5,6 \cdot 10^{48} \text{ W}$

($\gg P_{\text{soleil}} = 4,5 \cdot 10^{26} \text{ W}$)

21)

$$\begin{aligned} E_{0g} &= \int_0^{t_c} P_{0g} dt \\ &= P_i \int_0^{t_c} \left(1 - \frac{4\alpha t}{R_0^4}\right)^{-5/4} dt \end{aligned}$$

on pose $u = 1 - \frac{4\alpha t}{R_0^4}$

$$du = -\frac{4\alpha}{R_0^4} dt$$

$$\begin{aligned} E_{og} &= P_i \times -\frac{R_0^4}{4\alpha} \int_{1-\frac{4\alpha t_c}{R_0^4} = \left(\frac{a}{R_0}\right)^4}^{1-\frac{4\alpha t}{R_0^4}} u^{-5/4} du \\ &= -\frac{c M^2}{8 R_0} \left[\frac{u^{-1/4}}{-1/4} \right]_1^{(a/R_0)^4} \\ &= \frac{c M^2}{2 R_0} \left(\frac{R_0}{a} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{og} \approx \frac{c M^2}{2a}}$$

Si on considère E_m^* initiale $\left(-\frac{c M^2}{2R}\right)$ comme négligeable
on obtient donc :

$$E_{\text{rayonné}} = -E_m^* \text{ finale}$$

$$\left(\text{cf } \underbrace{E_m^* \text{ initiale}}_{\text{négligeable}} - E_m^* \text{ finale} = E_{\text{rayonné}} \right)$$

Modulation d'amplitude

$$\begin{aligned}
 1) \quad v(t) &= k v_m(t) v_p(t) + v_p(t) \\
 &= v_p(t) (1 + k v_m(t)) \\
 &= V_p \cos(\omega_p t) (1 + k V_m \cos(\omega_m t))
 \end{aligned}$$

donc :

$$m = k V_m$$

2) → sur le premier oscillogramme : mode balayage monocourbe
on voit que le signal de fréquence f_p est modulé en amplitude par le signal de fréquence f_m

→ sur le deuxième oscillogramme : mode XY

$$y = v(t)$$

$$x = v_m(t) \quad (\text{entre } -V_m \text{ et } +V_m)$$

donc

$$y = V_p \cos(\omega_p t) (1 + k x)$$

$$\begin{cases} V_1 = V_p & (1 + k (-V_m)) \\ V_2 = V_p & (1 + k (+V_m)) \end{cases}$$

$$3) \quad V_1 = V_p (1 - m)$$

$$V_2 = V_p (1 + m)$$

$$\frac{1+m}{1-m} = \frac{V_2}{V_1}$$

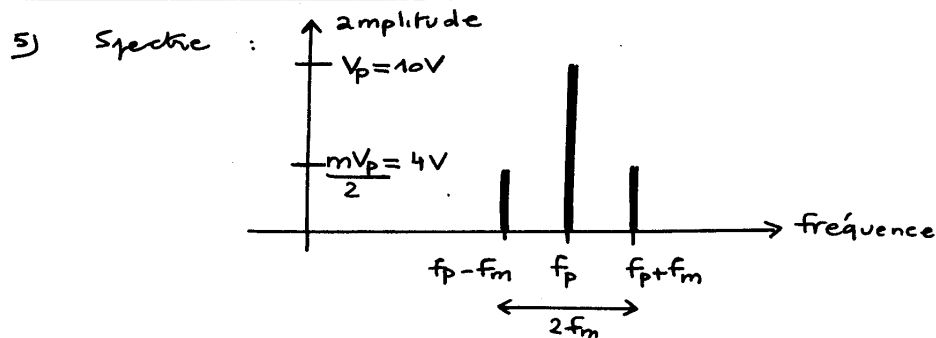
$$m = \frac{\frac{V_2}{V_1} - 1}{\frac{V_2}{V_1} + 1}$$

A.N $m = 0,8$

$$V_p = 10V$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad v(t) &= V_p \cos(\omega_p t) + m V_p \cos(\omega_p t) \cos(\omega_m t) \\
 &= V_p \cos(\omega_p t) + \frac{m V_p}{2} [\cos((\omega_p + \omega_m)t) + \cos((\omega_p - \omega_m)t)]
 \end{aligned}$$

$$v(t) = V_p \cos(2\pi f_p t) + \frac{mV_p}{2} \cos(2\pi(f_p + f_m)t) + \frac{mV_p}{2} \cos(2\pi(f_p - f_m)t)$$



- 6) Pour transmettre le signal, il faut transmettre les fréquences entre $f_p - f_m$ et $f_p + f_m$ soit une largeur de spectre

$$2f_m$$

sautour de f_p

- 7) Puissance rayonnée

($\frac{U^2}{R_0}$ en continu, $\frac{U_{eff}^2}{R_0} = \frac{U_{max}^2}{2R_0}$ en alternatif)

$$P_t = \frac{m^2 V_p^2 / 4}{2 R_0} + \frac{V_p^2}{2 R_0} + \frac{m^2 V_p^2 / 4}{2 R_0}$$

$$P_t = \frac{V_p^2}{2 R_0} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

- 8) En l'absence de modulation :

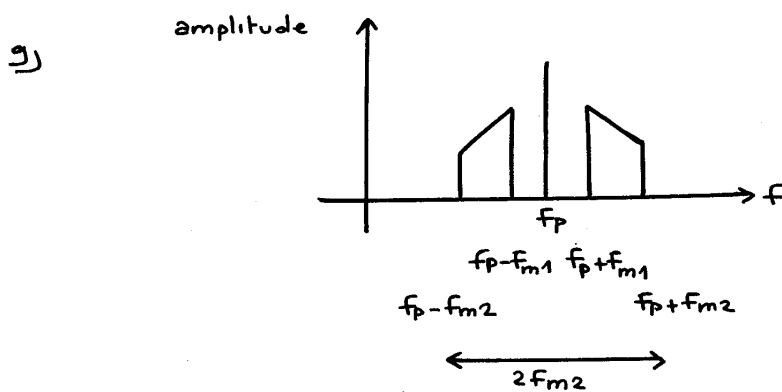
$$P = \frac{V_p^2}{2 R_0}$$

donc

$$\frac{P_t}{P} = \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

A.N.

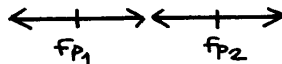
$$P_t = 2770 \text{ kW}$$



Largeur de la plage de fréquences : $2f_{m2}$

A.N. 9 kHz

10)



Les émissions ne sont pas brouillées si

$$\Delta f_p > 2f_{m2}$$

$\Delta f_p > 9 \text{ kHz}$

11)
$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

avec pour le circuit parallèle $Q = \frac{R}{L\omega_p} = RC\omega_p$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \left(1 + jQ \frac{\omega}{\omega_p} + \frac{1}{j} Q \frac{\omega_p}{\omega} \right)$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \right)$$

12) $\omega = \Delta\omega + \omega_p$ avec $|\Delta\omega| \ll \omega_p$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \left(1 + jQ \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_p} - \frac{1}{1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_p}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{R} \left(1 + jQ \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_p} - \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_p} \right) \right) \right)$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} \left(1 + jQ \frac{2\Delta\omega}{\omega_p} \right)$$

au premier ordre :

$$13) \quad |Y| = \frac{1}{R} \sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\Delta\omega^2}{\omega_p^2}}$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\Delta\omega^2}{\omega_p^2}}}$$

$$\text{Arg}(Y) = \text{Arctan}\left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_p}\right)$$

$$\varphi = -\text{Arctan}\left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_p}\right)$$

$$14) \quad \text{Si } v = V \cos(\omega t) \quad (\omega \text{ proche de } \omega_p)$$

$$v' = g Z \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v' = g \frac{R}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\omega - \omega_p}{\omega_p}\right)^2}} V \cos\left(\omega t - \text{Arctan}\left(2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_p}\right)\right)$$

15) Ici

$$v'(t) = g R V_p \left(\cos(\omega_p t) \right.$$

$$+ \frac{m}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2}}} \cos\left((\omega_p - \omega_m)t + \text{Arctan}\left(\frac{2Q\omega_m}{\omega_p}\right)\right)$$

$$+ \frac{m}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2}}} \cos\left((\omega_p + \omega_m)t - \text{Arctan}\left(\frac{2Q\omega_m}{\omega_p}\right)\right)$$

$$v'(t) = g R V_p \left(\cos(\omega_p t) \right.$$

$$+ m \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2}}} \cos(\omega_p t) \cos\left(\omega_m t - \text{Arctan}\left(\frac{2Q\omega_m}{\omega_p}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} v'(t) &= g R V_p \cos(\omega_p t) \left(1 + \frac{m}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2}}} \cos(\omega_m t - \text{Arctan}\left(\frac{2Q\omega_m}{\omega_p}\right)) \right) \\ &= V'_p \cos(\omega_p t) \left(1 + \frac{m}{m'} \cos(\omega_m t + \varphi') \right) \end{aligned}$$

amplification si $gR > 1$

15) ω_m varie entre ω_{m1} et ω_{m2}

→ L'atténuation est fonction de ω_m cf $m' = \frac{m}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2}}}$

→ Le retard $\theta = \frac{\text{Arctan}\left(2\frac{Q\omega_m}{\omega_p}\right)}{\omega_m}$ dépend aussi de ω_m

Le signal est donc déformé

17.) si $Q \ll \frac{\omega_p}{\omega_m}$ soit $\frac{Q\omega_m}{\omega_p} \ll 1$

alors • $m' = m \left(1 + 2Q^2 \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2}\right)$

$$\boxed{m' = m} \quad \left(\text{au premier ordre en } \frac{Q\omega_m}{\omega_p}\right)$$

$$\bullet \quad \theta = \frac{2Q\omega_m}{\omega_p}$$

$$\boxed{\theta = \frac{2Q}{\omega_p}} \quad \begin{array}{l} \text{indépendant de } \omega_m \\ \text{(au premier ordre en } \frac{Q\omega_m}{\omega_p} \text{)} \end{array}$$

Alors le signal n'est plus déformé