TD n°12
Ondes électromagnétiques dans les conducteurs

Exercice 1 : Paroi d'un four à micro-ondes

La paroi d'un four à micro-ondes est en aluminium de conductivité $\gamma = 2 \times 10^7\,\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Quelle doit être l'épaisseur de la paroi pour que l'amplitude d'une onde de fréquence $f = 2{,}5\,\text{GHz}$ soit réduite d'un facteur au moins 10^4 dans la paroi ?

Exercice 2 : Bilan énergétique dans un conducteur

Une onde de basse fréquence se propage dans un conducteur réel de conductivité γ. Le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \vec{u}_x$$

1. En utilisant une équation de Maxwell, trouver l'expression du champ magnétique.
2. Calculer la moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$ du vecteur de Poynting.
3. Calculer la moyenne temporelle $\langle \mathcal{P}_{v,J} \rangle$ de la puissance volumique dissipée par effet Joule.
4. Vérifier que $\text{div}\langle \vec{\Pi} \rangle + \langle \mathcal{P}_{v,J} \rangle = 0$ et interpréter.

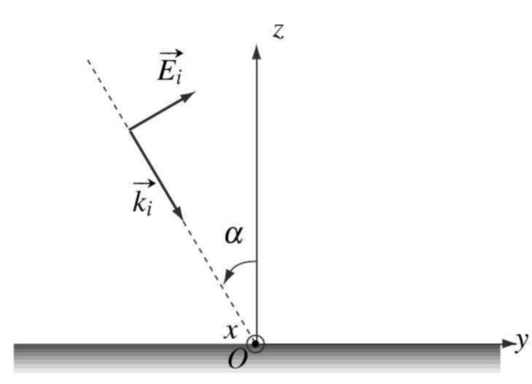
Exercice 3 : Réflexion d'une OPPM en incidence normale

Une OPPM de champ électrique noté $\vec{E}_i(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y + 2E_0 \cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{4}\right)\vec{u}_z$ se propage dans le vide et rencontre en $x = a$ un plan métallique parfaitement conducteur (le métal occupe le demi-espace $x > a$).
On rappelle qu'à la surface d'un conducteur parfait, le champ électrique doit être orthogonal à la surface.

Trouver le champ électrique de l'onde réflechie.

Exercice 4 : Réflexion d'une OPPM en incidence oblique (bonus)

Une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_i$, se propage dans le vide et arrive sur la surface d'un étal parfaitement conducteur avec un angle d'incidence α comme indique sur le schéma ci-dessous. Le métal occupe le demi-espace $z < 0$ et le vecteur $\vec{k}_i$ est contenu dans le plan (yOz).
Dans un premier temps, on suppose que le champ électrique $\vec{E}_i$ de l'onde incidente de norme E_0 est compris dans le plan d'incidence (yOz). On rappelle que le champ électrique (resp. magnétique) doit être orthogonal (resp. tangent) à la surface d'un métal conducteur parfait.



1. Exprimer le champ électrique incident $\vec{E}_i(M,t)$.
2. Montrer qu'il existe une onde réflechie. On admet qu'il s'agit d'une OPPM et que la direction de son vecteur d'onde $\vec{k}_r$ est donné par la loi de Descartes de l'optique géométrique. Représenter $\vec{k}_r$.
3. Montrer que le champ électrique $\vec{E}_r$ est tel que $\|\vec{E}_r(O,t)\| = \|\vec{E}_i(O,t)\|$.
   Astuce : Effectuer un bilan de puissance sur la surface.
4. Représenter $\vec{E}_r$ ainsi que les champs magnétiques $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$ des ondes incidente et réfléchie.
5. Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi $\vec{E}_r(M,t)$.
6. **Bonus :** Reprendre l'exercice dans le cas où le champ électrique incident est perpendiculaire au plan d'indidence, c'est-à-dire par exemple $\vec{E}_i(O,t=0) = E_0\vec{u}_x$.
7. **Bonus :** Quelles sont les composantes du champ électromagnétique qui subissent un déphasage de π à la réflexion sur le métal parfait ?

Exercice 5 : Étude d'un guide d'onde

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique de pulsation ω entre deux plans métalliques $y=0$ et $y=a$ parfaitement conducteurs. Le milieu entre ces deux plans est le vide. Par hypothèse, le vecteur champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = f(y)\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

ou $f(y)$ et k sont respectivement une fonction et un paramètre dont nous allons chercher les expressions. On rappelle que le champ électrique à la surface d'un métal conducteur parfait est orthogonal à la surface de ce métal.

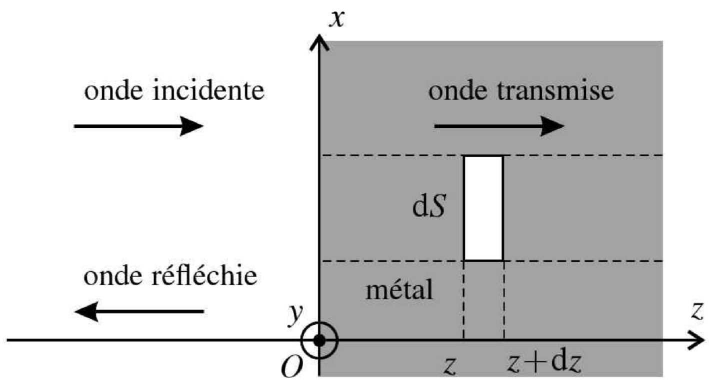
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction f.
2. Expliciter tous les types de solution selon le signe de la grandeur $k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}$.
3. Compte tenu des conditions aux limites vérifiées par le champ électrique sur les plans métalliques, montrer que $f(y)$ s'écrit :
   $$f(y) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$
   où E_0 est une constante et $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Pour n fixé (on parle du mode n), quelle est alors la relation de dispersion ? Quelle est la pulsation minimale ω_m que doit avoir une onde pour se propager entre les deux plans ?
5. Déterminer les vitesses de phase et de groupe pour le mode n en fonction de ω et ω_m.

Exercice 6 : Pression de radiation

Une OPPM de pulsation ω arrive en incidence normale sur la surface (plan $z = 0$) d'un métal de conductivité γ. Cette onde donne naissance à une onde réflechie et à une onde transmise dans le métal, dont le champ magnétique est, dans l'approximation des basses fréquences :

$$\vec{B}_t = B_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u}_y$$

avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.



1. Déterminer la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le métal en négligeant le courant de déplacement.

On considère que le métal contient des ions de charge $q_i = +e$ fixes et dont le nombre par unité de volume est n_i, ainsi que des électrons de charge $q_e = -e$, tous animés de la même vitesse $\vec{v}_e$ et dont le nombre par unité de volume est n_e.

2. Exprimer la force exercée par le champ électromagnétique $(\vec{E}_t, \vec{B}_t)$ sur un ion puis sur un électron.

3. Pourquoi a-t-on localement $n_e = n_i$?

4. Montrer que la force électromagnétique s'exercant sur un élement de volume du métal est : $\mathrm{d}_v\vec{F} = \vec{f}_v \mathrm{d}\tau$ avec $\vec{f}_v = \vec{j} \wedge \vec{B}_t$ la densité volumique de force électromagnétique.

5. Exprimer la moyenne temporelle $\langle \vec{f}_v \rangle$ en fonction de B_0, γ, δ et z.

On considère, à l'intérieur du métal, un petit parallélépipède de longueur dz et de base parallèle à l'interface de surface dS.

6. Exprimer la force moyenne $\langle \mathrm{d}_v\vec{F} \rangle$ qui s'exerce sur ce parallélépipède et en déduire la force $\mathrm{d}\vec{F}$ qui s'exerce sur toute la colonne de métal de section dS en fonction de B_0.

Dans la limite $\delta \to \infty$, on peut considérer que cette force s'applique en surface uniquement. On admet que le champ magnétique dans le vide est de la forme : $\vec{B}_{vide}(z,t) = B_0 \cos\left(\dfrac{\omega z}{c}\right)\cos(\omega t)\vec{u}_y$.

7. Exprimer alors la pression P_r correspondant à la force $\mathrm{d}\vec{F}$, appelée pression de radiation, en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$ dans le vide au niveau de la surface du métal.