

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

# Systemes Linéaires Continus

## Invariants

**SLCI1 - Bode**

## Résumé



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

## Objectifs

Prévoir la réponse en régime permanent d'un système de fonction de transfert  $H(p)$  à une entrée sinusoïdale  $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$  avec  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad t_\varphi = \frac{\varphi}{\omega} < 0$$



$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)|e_0 \\ \varphi = \arg(H(j\omega)) \end{cases}$$

## Diverses représentations de $H(j\omega)$

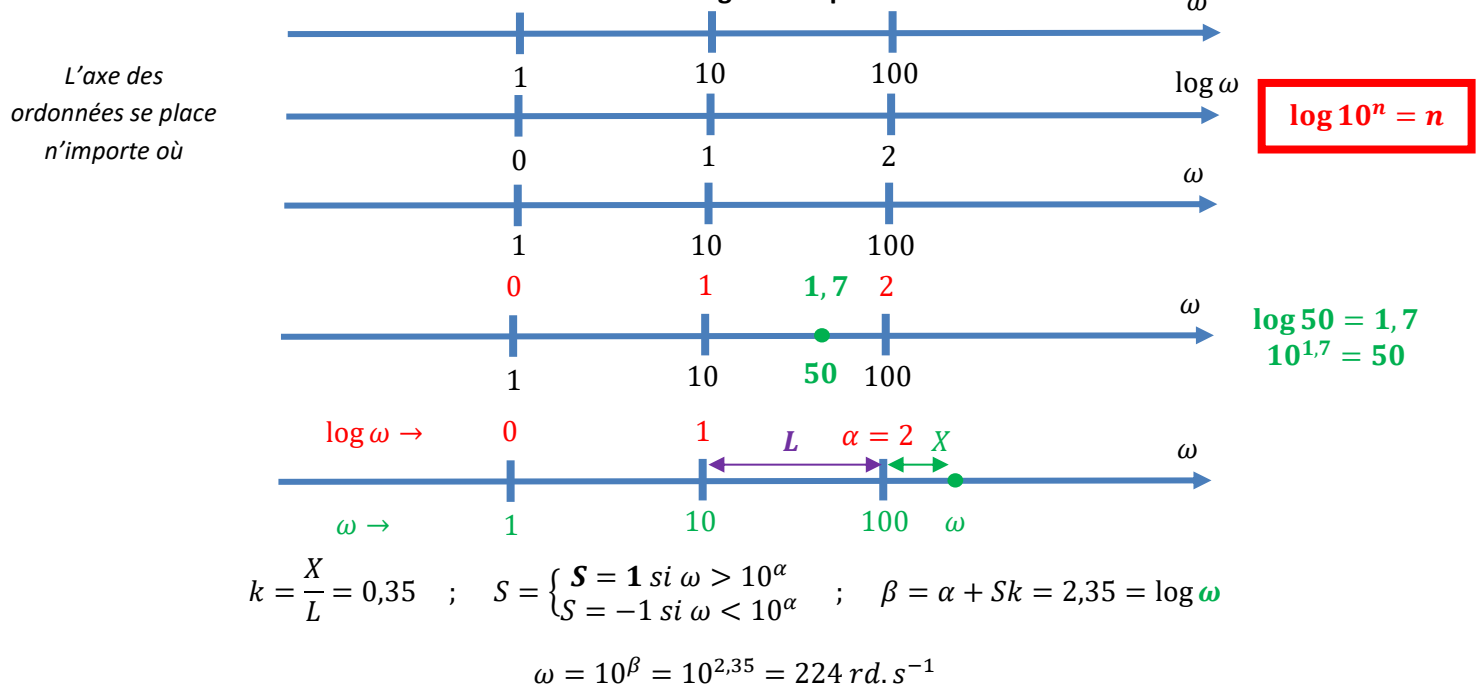
Bode	Black (-Nichols)	Nyquist
Abscisses : $\omega$ Ordonnées 1 : $G_{db}(\omega)$ Ordonnées 2 : $\varphi(\omega)$	Abscisses : $\varphi(\omega)$ Ordonnées : $G_{db}(\omega)$	Abscisses : $\text{Re}(H(j\omega))$ Ordonnées : $\text{Im}(H(j\omega))$
$G_{db}(\omega) = 20 \log H(j\omega) $ $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$		$H(j\omega) = \text{Re}(H(j\omega)) + j\text{Im}(H(j\omega))$

## Spécificités dans Bode

### Produit de fonctions

$H(p) = H_1(p)H_2(p)$	
$G_{db} = 20 \log H(j\omega) $ $= 20 \log H_1(j\omega)H_2(j\omega) $ $= 20 \log H_1(j\omega)  + 20 \log H_2(j\omega) $ $G_{db} = G_{1db} + G_{2db}$	$\arg H(j\omega)$ $= \arg(H_1(j\omega)H_2(j\omega))$ $= \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$

### Echelle logarithmique



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

## Systèmes du premier ordre

### Réponse harmonique générale

$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp} = \frac{K}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t) \quad ; \quad E(p) = e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$S(p) = \frac{Ke_0}{1 + T^2\omega^2} \left[ \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - \omega T \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \omega T \frac{1}{\frac{1}{T} + p} \right]$$

$$s(t) = \frac{Ke_0}{1 + T^2\omega^2} \omega T e^{-\frac{t}{T}} u(t) + \frac{Ke_0}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \sin(\omega T + \varphi) u(t) \quad ; \quad \varphi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

$$s(t) = \frac{Ke_0}{1 + T^2\omega^2} \omega T e^{-\frac{t}{T}} u(t) + s_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

Régime transitoire      Régime permanent

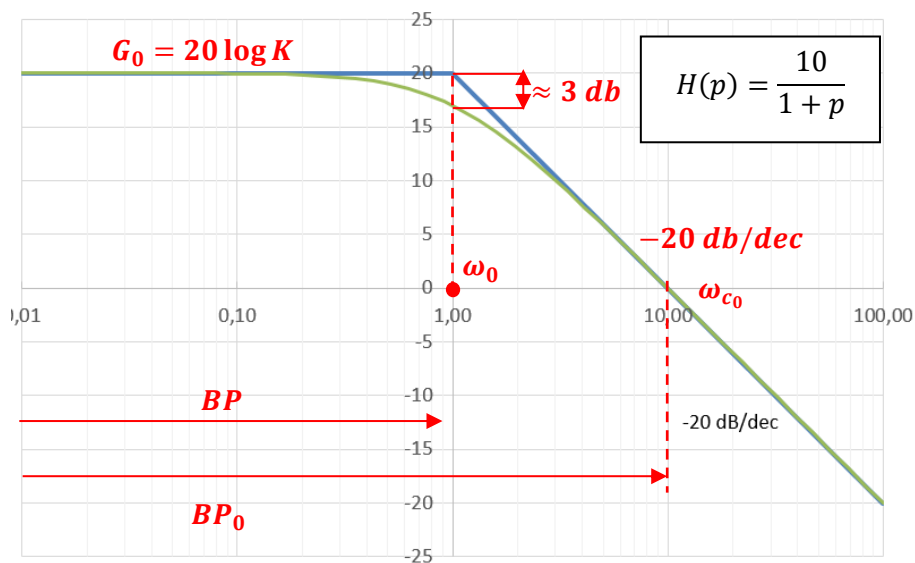
### Caractéristiques de la sortie en régime permanent

$$s(t) = |H(j\omega)| e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \quad ; \quad \varphi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

### Diagramme de Bode en gain

$$G_{db} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K - 10 \log(1 + T^2\omega^2)$$



$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

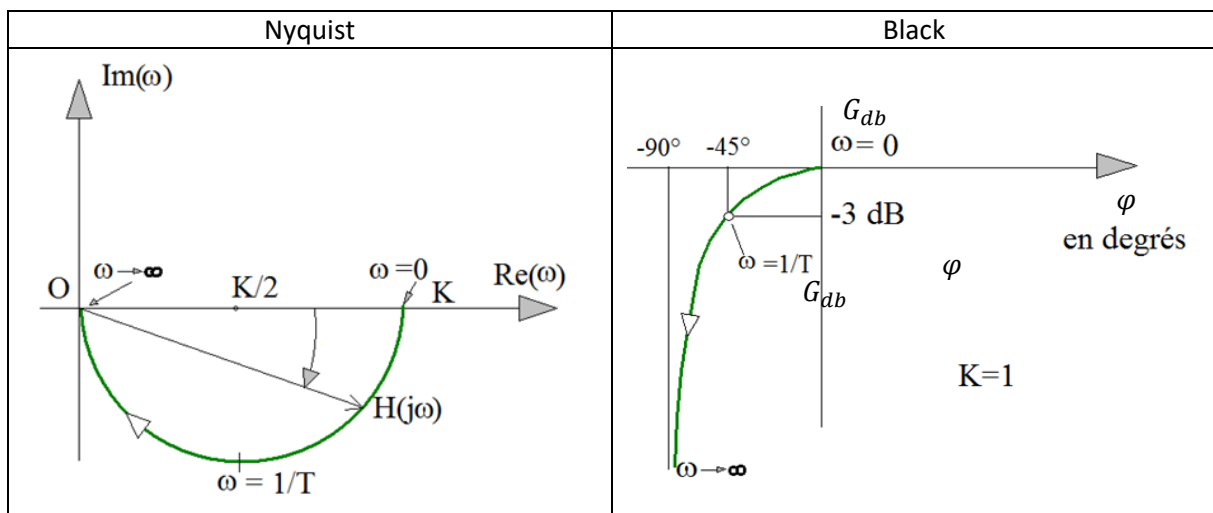
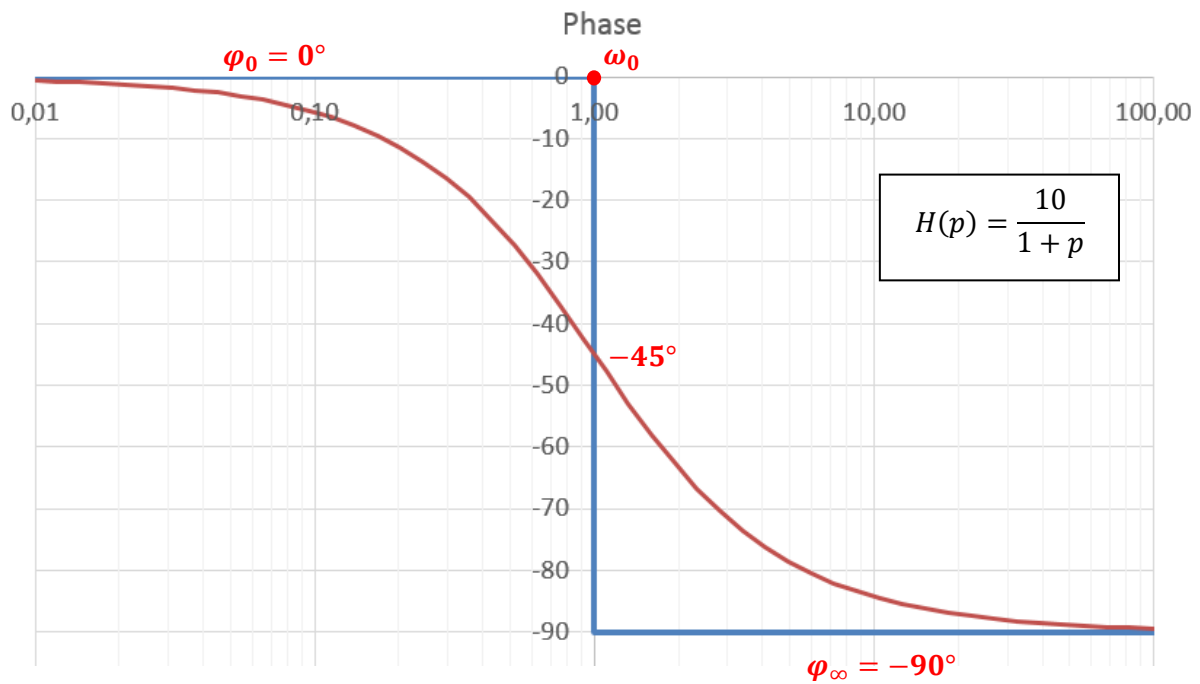
$$\omega_c \approx \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$\omega_{c0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$$

$$\omega_{c0}^{asympt} = \omega_0 K$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

### Diagramme de Bode en phase



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

## Systèmes du second ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

### Caractéristiques de la sortie en régime permanent

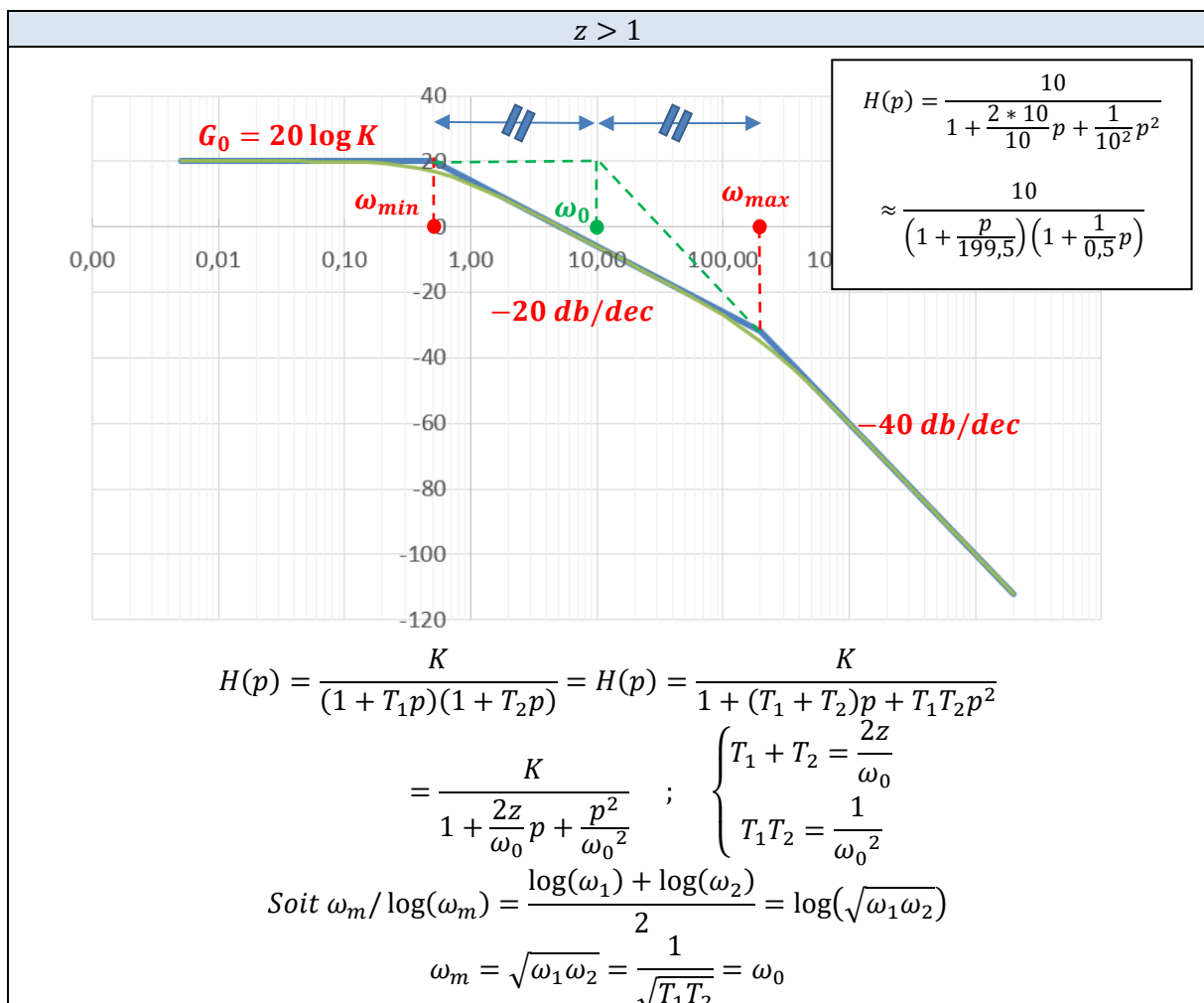
$$s(t) = |H(j\omega)|e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} ; \quad \varphi = -\cos^{-1} \left( \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \right)$$

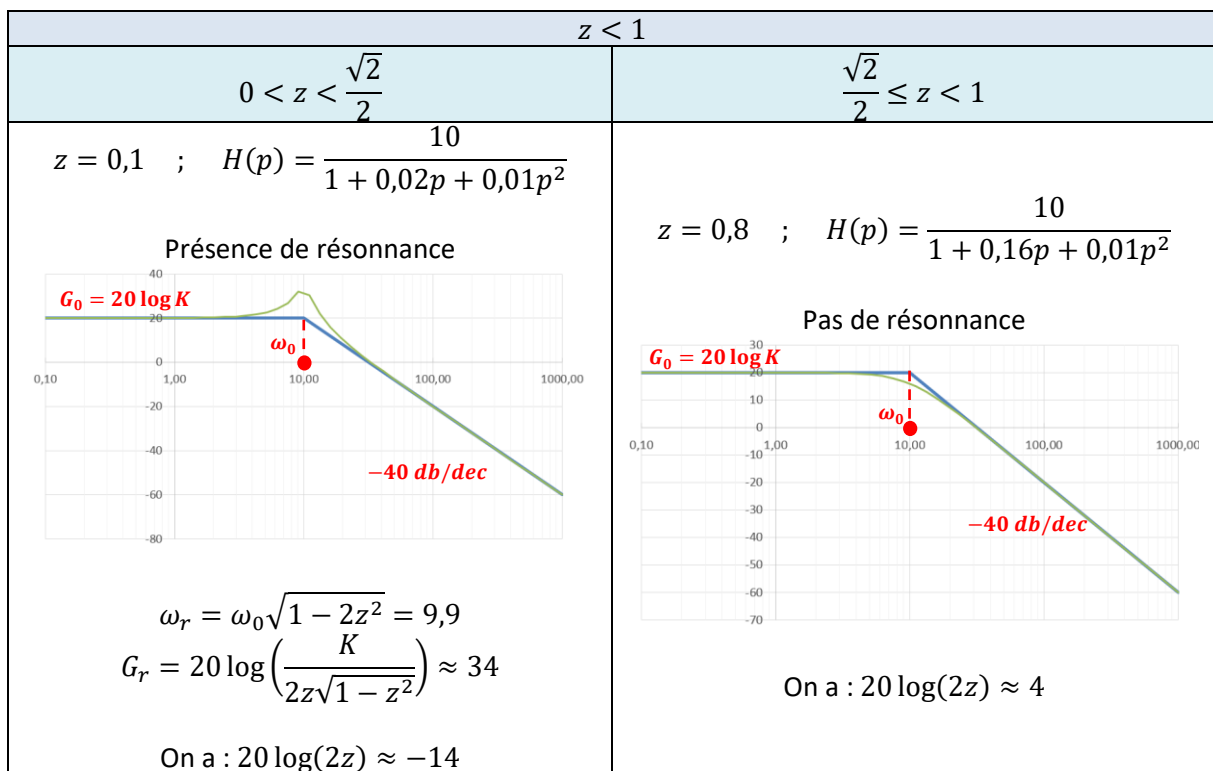
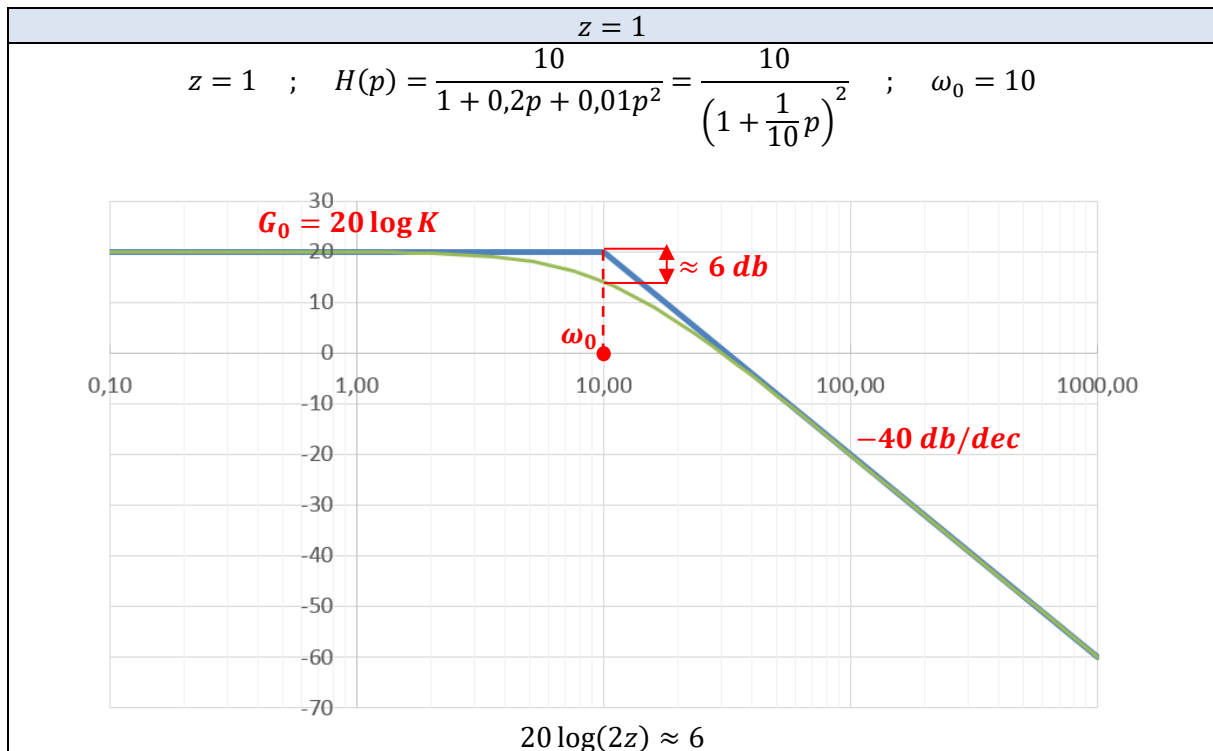
### Diagramme de Bode en gain

$$G_{db}(\omega_0) = G_0 - 20 \log(2z)$$

$$\text{Si } K > 1: \omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{(1 - 2z^2) + \sqrt{(1 - 2z^2)^2 + (K^2 - 1)}}$$



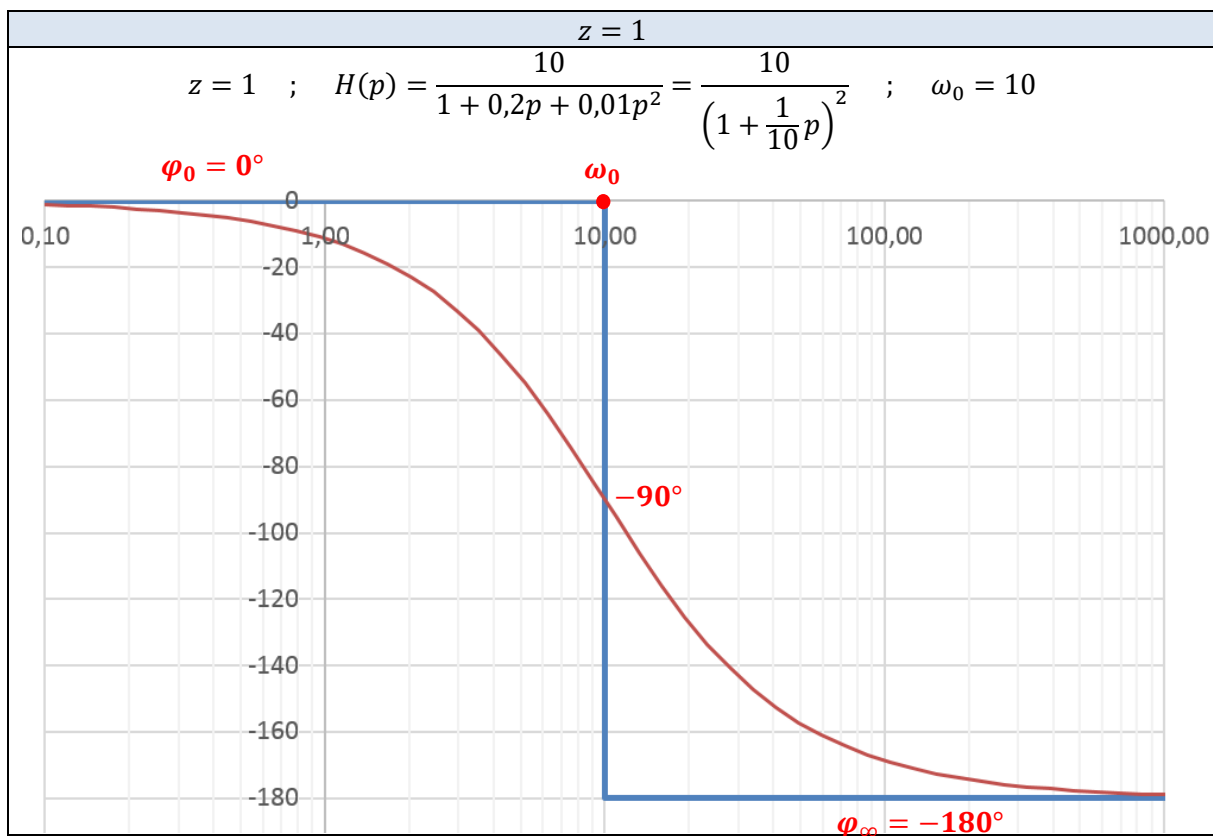
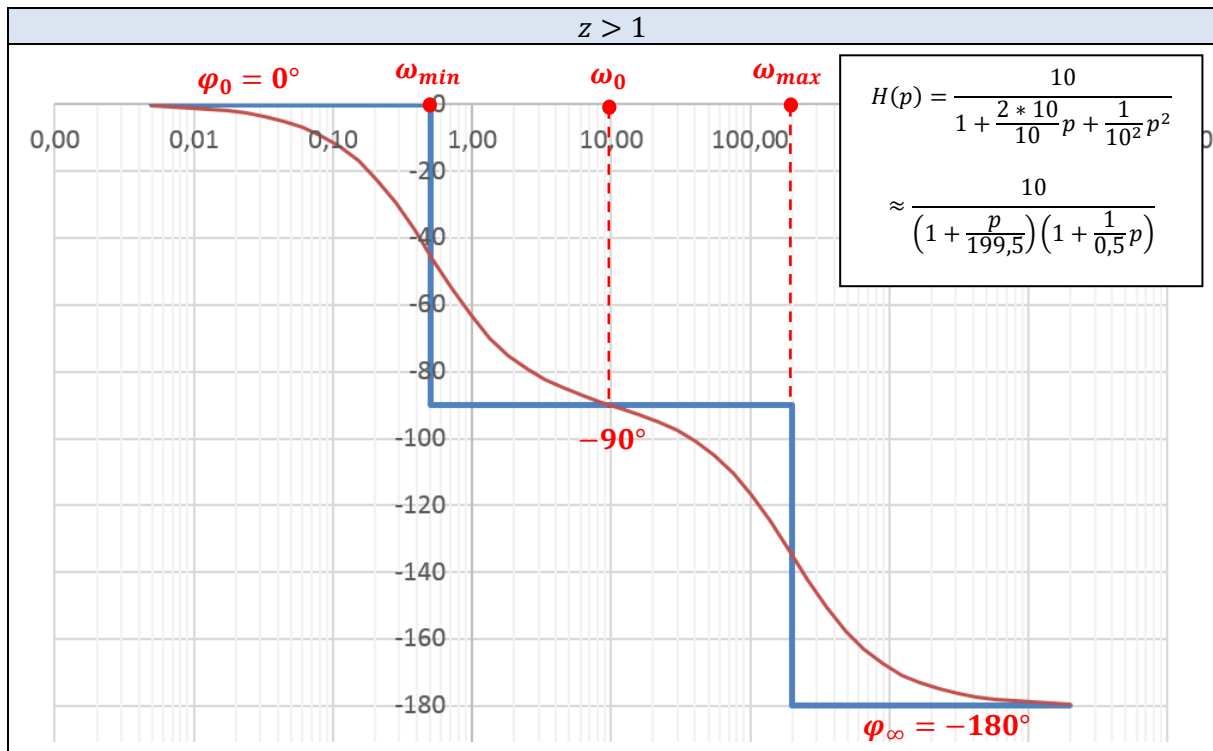
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

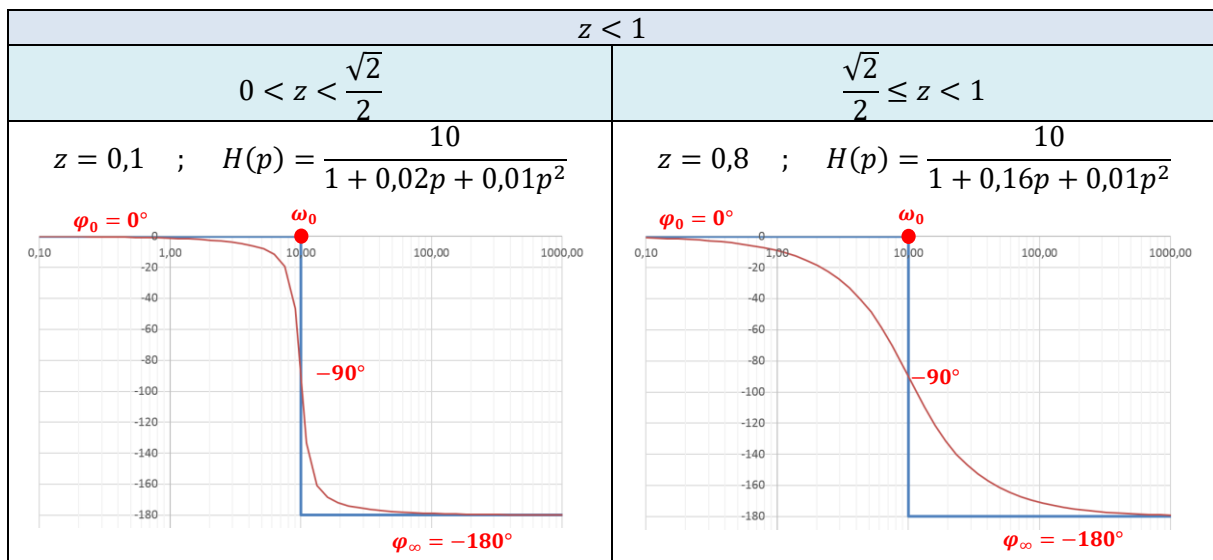


Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

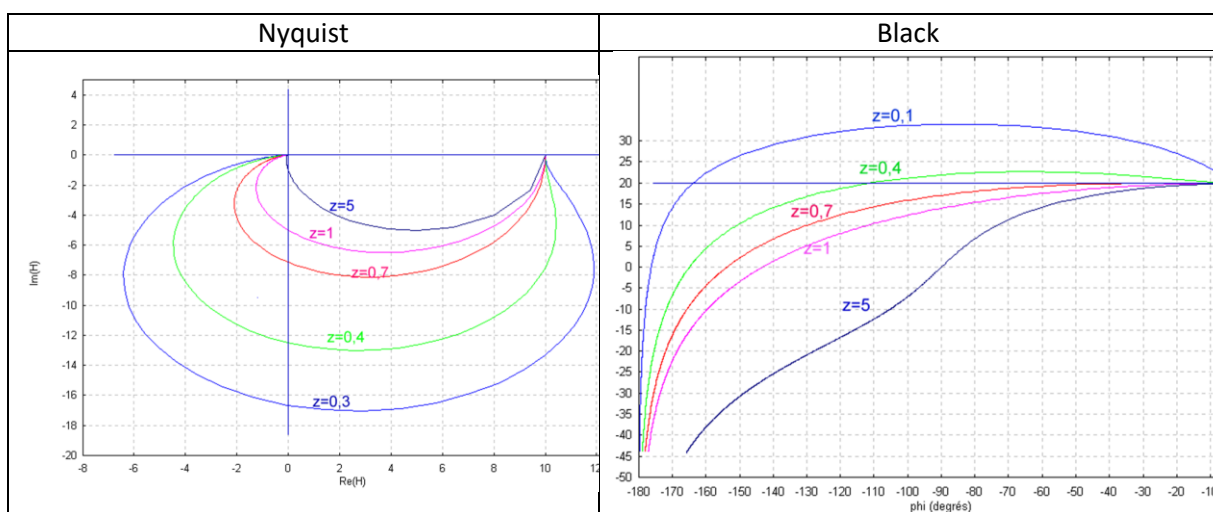
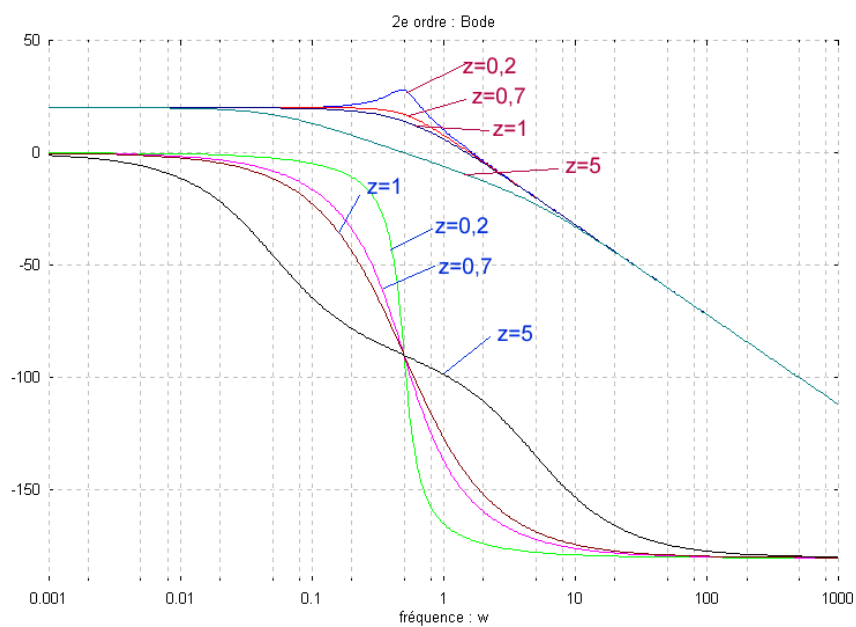
### Diagramme de Bode en phase

$$\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$$





### Bilan





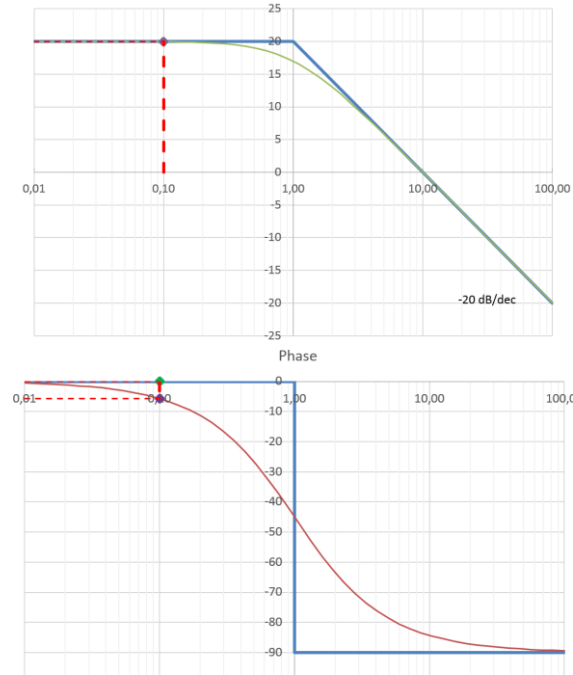
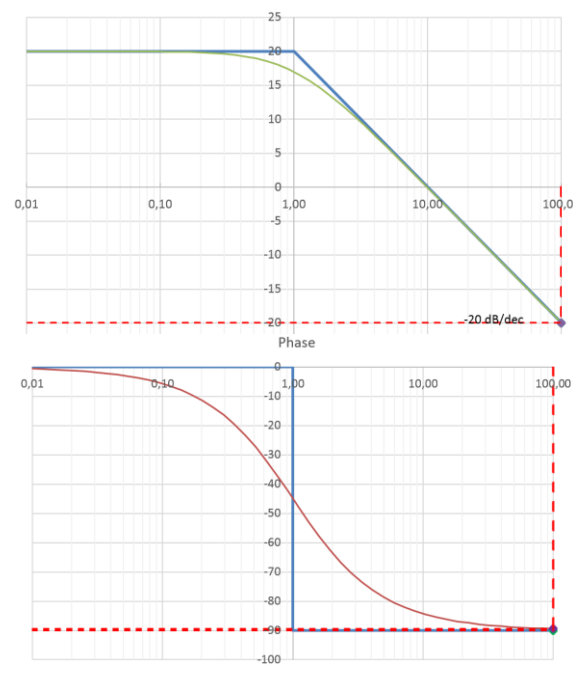
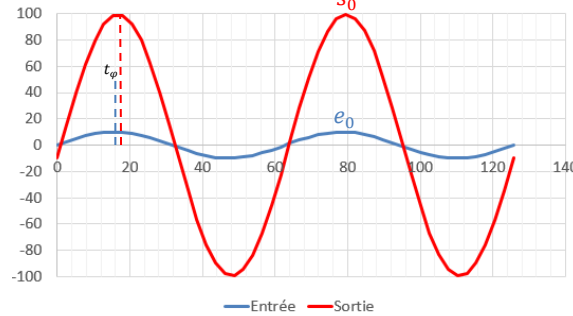
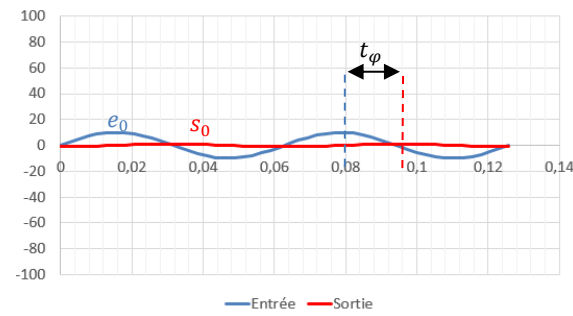
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

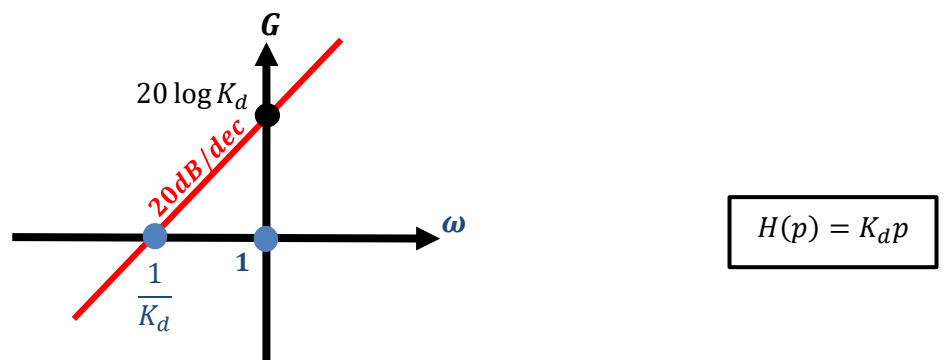
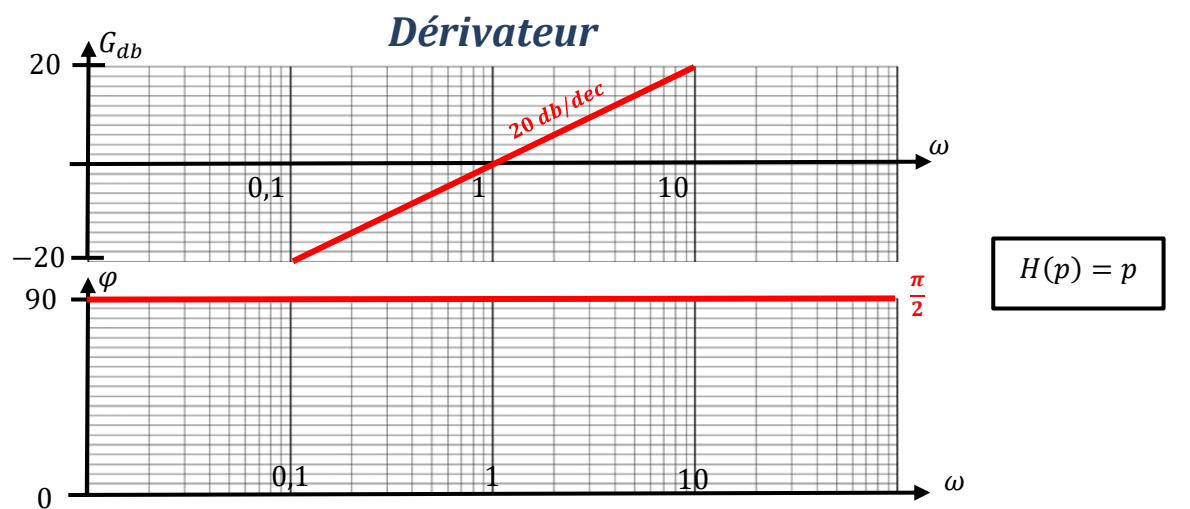
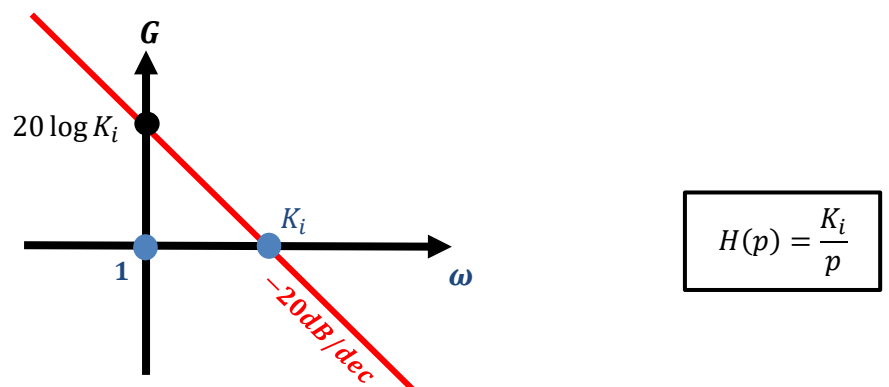
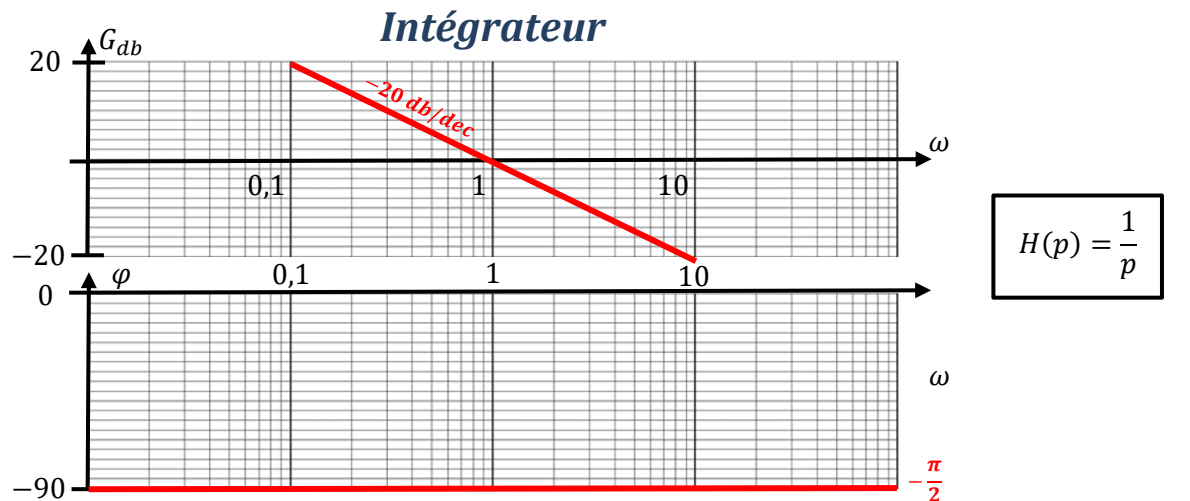
## Utilisation d'un diagramme de Bode

$$G_{db} = 20 \log |H(j\omega)| \Leftrightarrow |H(j\omega)| = 10^{\frac{G_{db}}{20}}$$

$$H(p) = \frac{10}{1+p}$$

Prenons deux entrées de pulsations différentes

<p><math>e(t) = 10 \sin 0,1t</math></p> 	<p><math>e(t) = 10 \sin 100t</math></p> 
$\begin{cases}  H(j\omega)  \approx 10^{\frac{20}{20}} \approx 10 \\ \varphi \approx -5^\circ \approx -0,08 \text{ rd} \\  t_\varphi  = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{0,08}{0,1} = 0,8 \text{ s} \end{cases}$	$\begin{cases}  H(j\omega)  \approx 10^{\frac{-20}{20}} \approx 0,1 \\ \varphi \approx -90^\circ \approx -1,57 \text{ rd} \\  t_\varphi  = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{1,57}{100} = 0,0157 \text{ s} \end{cases}$
<p><math>s^{gr}(t) = 100 \sin(0,1t - 0,08)</math></p> 	<p><math>s^{gr}(t) = \sin(100t - 1,57)</math></p> 
$\begin{cases}  H(j\omega)  = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 9,95 \\ \varphi = -\tan^{-1} \omega T = -0,1 \text{ rd} \\  t_\varphi  = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{0,1}{0,1} = 1 \text{ s} \end{cases}$	$\begin{cases}  H(j\omega)  = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 0,1 \\ \varphi = -\tan^{-1} \omega T = -1,56 \text{ rd} \\  t_\varphi  = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{1,56}{100} = 0,0156 \text{ s} \end{cases}$
<p><math>s(t) = 99,5 \sin(0,1t - 0,1)</math></p>	<p><math>s(t) = \sin(100t - 1,56)</math></p>



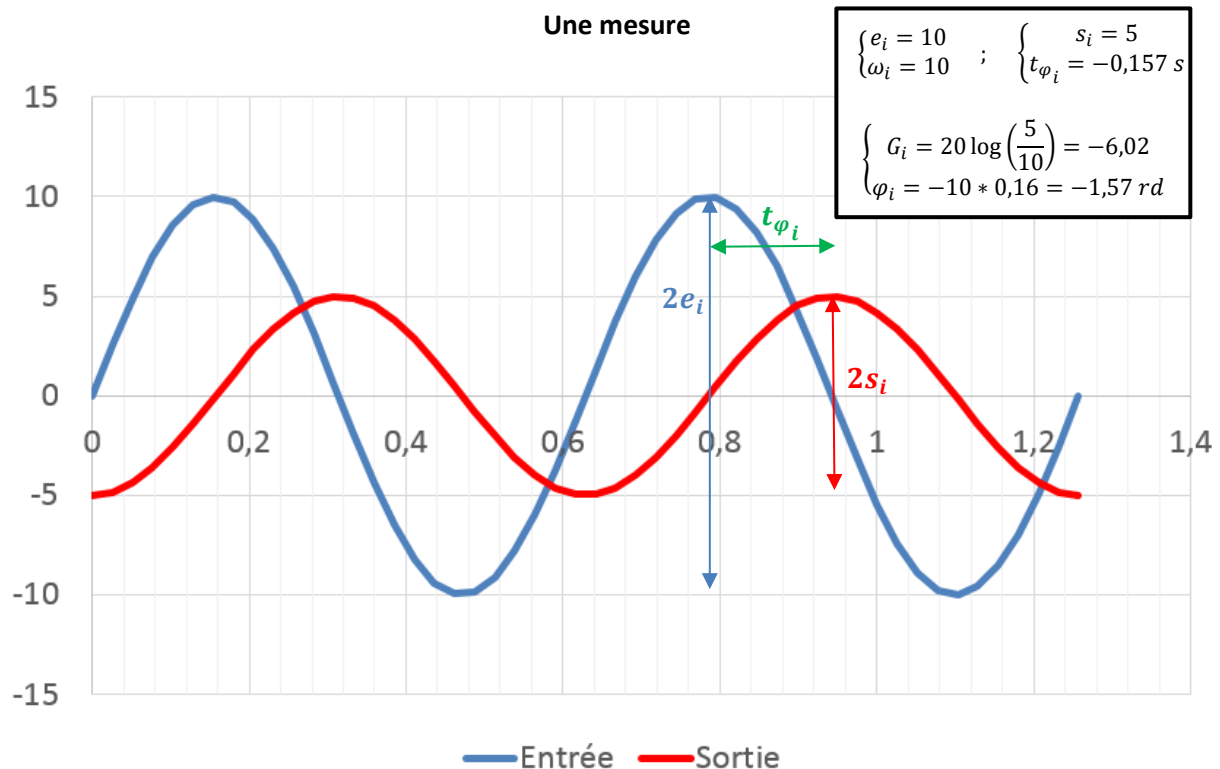
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

## Identification

### Principe

Imposer des entrées	$e(t) = e_i \sin(\omega_i t) \quad ; \quad \begin{cases} e_i \\ \omega_i \end{cases} \text{ choisis}$
Mesurer les sorties	$s(t) = s_i \sin(\omega_i(t + t_{\varphi_i}))$
Calculer les points des diagrammes de gain et de phase pour $\omega_i$	$\begin{cases} G_i = 20 \log\left(\frac{s_i}{e_i}\right) \\ \varphi_i = \omega_i t_{\varphi_i} < 0 \end{cases}$
Tracer les diagrammes de Bode en gain et phase	$\begin{cases} G_i = f(\omega_i) \\ \varphi_i = f(\omega_i) \end{cases}$
Identifier les caractéristiques du système	

Imposé	Pulsation	$\omega_1$	$\omega_2$	...	$\omega_n$
	Amplitude entrée	$e_1$	$e_2$	...	$e_n$
Mesuré	Amplitude sortie	$s_1$	$s_2$	...	$s_n$
	Déphasage temporel	$t_{\varphi_1}$	$t_{\varphi_2}$	...	$t_{\varphi_n}$
Calculé	Gain	$G_1$	$G_2$	...	$G_n$
	Phase	$\varphi_1$	$\varphi_2$	...	$\varphi_n$



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Résumé

### Identification

Identification de l'ordre du système		
Pente du gain aux hautes pulsations	Phase aux hautes pulsations	Ordre du système
$-20 \text{ db/dec}$	$\varphi_{\infty} = -90^\circ$	$1^\circ \text{ ordre}$
$-40 \text{ db/dec}$	$\varphi_{\infty} = -180^\circ$	$2^\circ \text{ ordre}$

Identification des coefficients du système	
$1^\circ \text{ ordre}$ $H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$	$2^\circ \text{ ordre}$ $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$
Trouver $G_0$ : Asymptote horizontale	
Calculer $K = 10^{\frac{G_0}{20}}$	
Trouver $\omega_c$ : Intersection des 2 asymptotes de gain ; $\varphi = -45^\circ$	Trouver $\omega_0$ : Intersection des 2 asymptotes de gain ( $\omega \rightarrow 0$ & $\omega \rightarrow \infty$ ) ; $\varphi = -90^\circ$ Mesurer $G(\omega_0)$
Calculer : $T = \frac{1}{\omega_c}$	Calculer $z = \frac{10^{\frac{G_0 - G(\omega_0)}{20}}}{2}$

On peut utiliser la résonance d'un second ordre si présente :

$$\begin{cases} G_r = 20 \log \left( \frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}} \right) \\ \omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{K^2}{10^{10} G_r}}}{2}} \\ \omega_0 = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-2z^2}} \end{cases}$$