Planche n° 2. Ensembles, relations, applications. Corrigé

Exercice n° 1

Si $E = F$, alors $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$. F est un élément de $\mathscr{P}(F)$ et donc F est un élément $\mathscr{P}(E)$. Mais alors $F \subset E$. En échangeant les rôles de E et F on a aussi $E \subset F$ et finalement $E = F$.

Exercice n° 2 Par distributivité de $\cup$ sur $\cap$,

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap B) \cup (B \cap C)) \cap (C \cup A)\\ &= ((A \cap C) \cup B) \cap (C \cup A) \text{ (car } B \cap B = B \text{ et } A \cap B \subset B \text{ et } B \cap C \subset B)\\ &= (A \cap C \cap C) \cup (A \cap C \cap A) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A)\\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (A \cap C)\\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).\end{aligned}$$

Exercice n° 3 Tous les résultats sont clairs si $E = \varnothing$. On suppose dorénavant $E \neq \varnothing$.

1) Si $A = B = \varnothing$ alors $A\Delta B = \varnothing = A \cap B$.

Si $A\Delta B = A \cap B$, alors $A\Delta B = A \cap B = \varnothing$ (car $(A\Delta B) \cap (A \cap B) = \varnothing$). Supposons par exemple $A \neq \varnothing$.
Soit $x \in A$. Si $x \in B$, $x \in A \cap B = \varnothing$ ce qui est absurde et si $x \notin B$, $x \in A\Delta B = \varnothing$ ce qui est absurde. Donc $A = \varnothing$ puis $B = \varnothing$ par symétrie des rôles.

Finalement, $A\Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

2) $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B\Delta A$.

3) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}x \in (A\Delta B)\Delta C &\Leftrightarrow x \text{ est dans } A\Delta B \text{ ou dans } C \text{ mais pas dans les deux}\\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in C \text{ et } x \notin A\Delta B)\\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in C \text{ et } x \notin A \text{ et } x \notin B)\\ &\quad\ \text{ou } (x \in C \text{ et } x \in A \text{ et } x \in B)\\ &\Leftrightarrow x \text{ est dans une et une seule des trois parties ou dans les trois.}\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de A, B et C, $A\Delta(B\Delta C)$ est également l'ensemble des éléments qui sont dans une et une seule des trois parties A, B ou C ou dans les trois. Donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$. Ces deux ensembles peuvent donc se noter une bonne fois pour toutes $A\Delta B\Delta C$.

4) $A = B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$ et $B \setminus A = \varnothing \Rightarrow A\Delta B = \varnothing$.
$A \neq B \Rightarrow \exists x \in E/\ ((x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)) \Rightarrow \exists x \in E/\ x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\Delta B \Rightarrow A\Delta B \neq \varnothing$.

5) $\Leftarrow$/ Immédiat.

$\Rightarrow$/ Si A et B sont vides, alors $A = B$. Sinon, l'une au moins des deux parties A ou B n'est pas vide. Supposons sans perte de généralité que A n'est pas vide. Soit x un élément de A.
Si $x \notin C$ alors $x \in A\Delta C = B\Delta C$ et donc $x \in B$ car $x \notin C$.
Si $x \in C$ alors $x \notin A\Delta C = B\Delta C$. Puis $x \notin B\Delta C$ et $x \in C$ et donc $x \in B$. Dans tous les cas, x est dans B. Tout élément de A est dans B et donc $A \subset B$.
Maintenant, si $B = \varnothing$, alors $A \subset B = \varnothing$ et donc $A = \varnothing = B$ et si $B \neq \varnothing$, en échangeant les rôles de A et B, on a aussi $B \subset A$ et finalement $A = B$.

Exercice n° 4

1ère solution.

Réflexivité. Pour tout réel x, on a $xe^x = xe^x$ et donc, pour tout réel x, on a $x\mathscr{R}x$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est réflexive.

Symétrie. Soient x et y deux réels tels que $x\mathscr{R}y$. On a donc $xe^y = ye^x$ puis $ye^x = xe^y$ et donc $y\mathscr{R}x$. On a montré que pour tous réels x et y, si $x\mathscr{R}y$ alors $y\mathscr{R}x$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est symétrique.

Transitivité. Soient x, y et z trois réels tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. On a donc $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. On en déduit que

$$xe^z = xe^y e^{-y} e^z = ye^x e^{-y} e^z = ye^z e^{-y} e^x = ze^y e^{-y} e^x = ze^x$$

et donc $x\mathscr{R}z$. On a montré que pour tous réels x, y et z, si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, alors $x\mathscr{R}z$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est transitive.

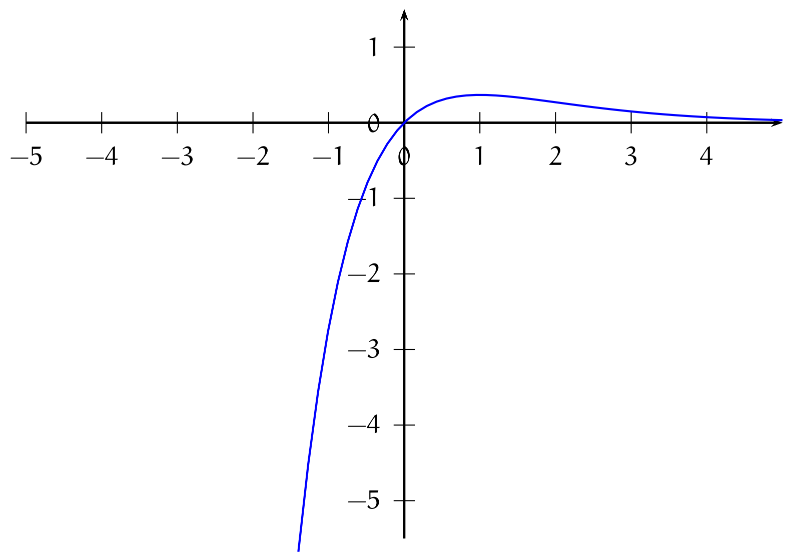
Finalement, la relation $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive et donc, la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2ème solution. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x \Leftrightarrow xe^{-x} = ye^{-y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ où pour tout réel t, $f(t) = te^{-t}$.

Avec cette remarque,
- la réflexivité devient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x)$ et donc $x\mathscr{R}x$.
- la symétrie devient : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x\mathscr{R}y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y\mathscr{R}x$.
- la transitivité devient : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z) \Rightarrow (f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

2) Soit x un réel. Déterminons le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x.

Etudions la fonction f. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f'(t) = (1-t)e^{-t}$. f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et tend vers 0 en $+\infty$. Le graphe de f est



L'étude de f montre alors que si $x \in]-\infty, 0] \cup \{1\}$, la classe de x est un singleton et si $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la classe de x est constituée de deux éléments distincts, x et un autre réel distinct de x (et qui a même image que x par f).

Exercice n° 5

Réflexivité. Pour tout élément A de $\mathscr{P}(E)$, on a $A \subset A$. Par suite, la relation $\subset$ est réflexive.

Anti-symétrie. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{P}(E)$ tels que $A \subset B$ et $B \subset A$. Alors $A = B$. Par suite, la relation $\subset$ est anti-symétrique.

Transitivité. Soient A, B et C trois éléments de $\mathscr{P}(E)$ tels que $A \subset B$ et $B \subset C$. Alors $A \subset C$. On en déduit que la relation $\subset$ est transitive.

Finalement, la relation $\subset$ est réflexive, anti-symétrique et transitive et donc, la relation $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$.

Si E contient au moins deux éléments distincts x et y, posons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. On a $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$. Donc, $\mathscr{P}(E)$ contient au moins deux éléments non comparables ou encore la relation $\subset$ est une relation d'ordre partiel.
Si E est vide ou un singleton, $\subset$ est une relation d'ordre totale sur $\mathscr{P}(E)$.

Exercice n° 6

1) Soient $x \in]-\infty, 2]$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0 \quad (E).$$

Le discriminant réduit de cette dernière équation est $\Delta' = 4 - (3 - y) = y + 1$.

- Si $y < -1$, alors $\Delta' < 0$ et l'équation (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. En particulier, $y \notin f(I)$.
- Si $y > -1$, alors $\Delta' > 0$ et l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes à savoir $x_1 = 2 + \sqrt{y+1} \notin I$ et $x_2 = 2 - \sqrt{y+1} \in I$. En particulier, $y \in f(I)$.
- Si $y = -1$, alors $\Delta' = 0$ et l'équation (E) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ à savoir $x = 2 = 2 - \sqrt{0} \in I$. En particulier, $y \in f(I)$.

Ceci montre déjà que $f(I) = [-1, +\infty[$.

De plus, l'étude précédente montre que pour tout $y \in f(I) = [-1, +\infty[$, il existe un réel x et un seul de $I =]-\infty, 2]$ tel que $y = f(x)$, à savoir $x = 2 - \sqrt{y+1}$. Donc, f réalise une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $[-1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]-\infty, 2],\ \forall y \in [-1, +\infty[,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y+1}.$$

On vient de trouver f^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1, +\infty[,\ f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}}.$$

2) Soient $x \in]-2, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow y(x+2) = 2x - 1 \Leftrightarrow x(-y+2) = 2y + 1 \quad (E).$$

- Si $y = 2$, cette équation s'écrit $0x = 5$. Dans ce cas, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $y \neq 2$,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

Il reste à étudier si, oui ou non, le réel x fourni appartient à $]-2, +\infty[$. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\frac{2y+1}{-y+2} - (-2) = \frac{2y+1}{-y+2} + 2 = \frac{2y+1+2(-y+2)}{-y+2} = \frac{5}{-y+2}.$$

Cette dernière expression est du signe de $-y+2$ et est donc strictement positive si et seulement si $y < 2$. Le réel $x = \dfrac{2y+1}{-y+2}$ est dans $]-2, +\infty[$ si et seulement si $y < 2$.

En résumé, pour $y \in \mathbb{R}$ donné, si $y \geqslant 2$, l'équation $f(x) = y$ n'a pas de solution dans $]-\infty, -2[$ et si $y < 2$, l'équation $f(x) = y$ a une solution et une seule sans $]-2, +\infty[$, à savoir $x = \dfrac{2y+1}{-y+2}$. Ceci montre que $f(I) =]-\infty, 2[$, que f est bijective de $]-2, +\infty[$ sur $]-\infty, 2[$ et que

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 2[,\ f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{-x+2}}.$$

3) Soient $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} - 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = y + 1.$$

Si $y < -1$, cette équation n'a pas de solution dans $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$. Si $y \geqslant -1$,

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 3 = (y+1)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(y+1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} + y - 1.$$

De plus, le réel $x = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}(y+1)^2$ appartient à $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$. Ainsi, dans le cas où $y \geqslant -1$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution et une seule dans $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$. Ceci montre que $f(I) = [-1, +\infty[$, que f est bijective de $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ sur $[-1, +\infty[$ et que

$$\boxed{\forall x \in [-1, +\infty[,\ f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1.}$$

4) f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant f(x) = \dfrac{x}{1+x} < \dfrac{1+x}{1+x} = 1$. Donc, $f([0, +\infty[) \subset [0, 1[$.

Pour $x \in]-\infty, 0]$, $1 - x > 0$ et donc $0 \geqslant f(x) = \dfrac{x}{1-x} > \dfrac{x-1}{1-x} = -1$. Donc, $f(]-\infty, 0]) \subset]-1, 0]$.

Finalement, $f(\mathbb{R}) \subset]-1, 1[$.

Vérifions alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

Soit $y \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $[0,+\infty[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y(1+x) \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq 1$, et positif, car $y \in [0,1[$. On a montré que :

$$\forall y \in [0,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1-y}).$$

Soit $y \in]-1,0[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]-\infty,0[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = y(1-x) \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq -1$, et strictement négatif, car $y \in]-1,0[$. On a montré que :

$$\forall y \in]-1,0[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x) \text{ (à savoir } x = \frac{y}{1+y}).$$

Finalement,

$$\forall y \in]-1,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x),$$

ce qui montre que $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$, que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. De plus, pour $y \in]-1,1[$ donné, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$ si $y \geqslant 0$ et $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$ si $y < 0$. Dans tous les cas, on a $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}.}$$

Exercice n° 7

1) Si $A = E$, pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $\varphi_A(X) = X \cap E = X$ et donc $\varphi_A = Id_{\mathscr{P}(E)}$. Dans ce cas, φ_A est injective et surjective.

Soit A une partie de E, distincte de E. Vérifions que φ_A n'est ni injective, ni surjective.
Puisque $A \neq E$, il existe un élément x_0 de E qui n'est pas dans A. Soient $B = \varnothing$ et $C = \{x_0\}$. On a

$$\varphi_A(B) = B \cap A = \varnothing = C \cap A = \varphi_A(C)$$

avec $B \neq C$. Donc, φ_A n'est pas injective. D'autre part, pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $A \cap X$ est contenue dans A et en particulier ne peut être égale à E. Donc, E n'a pas d'antécédent par φ_A. Ceci montre que φ_A n'est pas surjective.

En résumé, si $A = E$, φ_A est injective et surjective et si $A \neq E$, φ_A n'est ni injective, ni surjective. On a donc montré que : φ_A injective $\Leftrightarrow \varphi_A$ surjective $\Leftrightarrow A = E$.

2) Si $A = \varnothing$, pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $\psi_A(X) = X \cup \varnothing = X$ et donc $\psi_A = Id_{\mathscr{P}(E)}$. Dans ce cas, ψ_A est injective et surjective.

Soit A une partie de E, distincte de $\varnothing$. Vérifions que ψ_A n'est ni injective, ni surjective.
Puisque $A \neq \varnothing$, il existe un élément x_0 de A. Soient $B = \varnothing$ et $C = \{x_0\}$. Puisque x_0 est dans A, on a

$$\psi_A(B) = B \cup A = A = C \cup A = \psi_A(C)$$

avec $B \neq C$. Donc, ψ_A n'est pas injective. D'autre part, pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $A \cup X$ contient A et en particulier ne peut être égale à $\varnothing$. Donc, $\varnothing$ n'a pas d'antécédent par ψ_A. Ceci montre que ψ_A n'est pas surjective.

En résumé, si $A = \varnothing$, ψ_A est injective et surjective et si $A \neq \varnothing$, ψ_A n'est ni injective, ni surjective. On a donc montré que : ψ_A injective $\Leftrightarrow \psi_A$ surjective $\Leftrightarrow A = \varnothing$.

Autre solution : pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, (en notant $\overline{X}$ le complémentaire de X)

$$\psi_A(X) = X \cup A = \overline{\overline{X} \cap \overline{A}} = \overline{\varphi_{\overline{A}}\left(\overline{X}\right)} = \left(f \circ \varphi_{\overline{A}} \circ f\right)(X)$$

où f est l'application $X \mapsto \overline{X}$. f est une involution et en particulier f est une bijection de $\mathscr{P}(E)$ sur lui-même. D'après la question 1),

$$\psi_A \text{ injective} \Leftrightarrow \varphi_{\overline{A}} \text{ injective} \Leftrightarrow \overline{A} = E \Leftrightarrow A = \varnothing$$

et de même, ψ_A surjective $\Leftrightarrow A = \varnothing$.

Exercice n° 8

1) Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (car } g \text{ est une application)} \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } g \circ f \text{ est injective)}. \end{aligned}$$

On a montré que $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Donc f est injective.

2) Soit $z \in H$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe un élément x dans E tel que $g(f(x)) = z$. En posant $y = f(x)$, y est un élément de F tel que $g(y) = z$. On a montré : $\forall z \in G,\ \exists y \in F/\ g(y) = z$. Donc g est surjective.

Exercice n° 9

• Supposons f injective. Soit x un élément de E. Par hypothèse, $f(f(x)) = f(x)$. Puisque f est injective, on en déduit que $f(x) = x$.
Ainsi, pour tout x de E, $f(x) = x$ et donc $f = Id_E$. En particulier, f est bijective et en particulier, f est surjective.

• Supposons f surjective. Soit x_1 et x_2 deux éléments de E. Puisque f est surjective, il existe deux éléments y_1 et y_2 de E tels que $x_1 = f(y_1)$ et $x_2 = f(y_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow f(f(y_1)) = f(f(y_2)) \Rightarrow f(y_1) = f(y_2) \text{ (car } f \circ f = f) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Donc, f est injective puis f est bijective. On note de nouveau que puisque f est injective, nécessairement $f = Id_E$.

Autre solution. Soit $x \in E$. Puisque f est surjective, il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$. Mais alors, $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$. Ainsi, pour tout x de E, $f(x) = x$ et donc $f = Id_E$. En particulier, f est injective.

Remarque. Si on sait que f est bijective, on peut simplifier par f :

$$f \circ f = f \Rightarrow f \circ f \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} \Rightarrow f = Id_E.$$

Exercice n° 10

On peut supposer sans perte de généralité que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et que $h \circ f \circ g$ est surjective. D'après le n° 9, puisque $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$ est injective, h est injective et puisque $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$ est surjective, h est surjective.
Déjà h est bijective. Mais alors, h^{-1} est surjective et donc $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$ est surjective en tant que composée de surjections. Puis h^{-1} est injective et donc $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ est injective. $f \circ g$ est donc bijective.
$f \circ g$ est surjective donc f est surjective. $g \circ h \circ f$ est injective donc f est injective. Donc f est bijective. Enfin $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ est bijective en tant que composée de bijections.

Exercice n° 11

1) a) • Supposons f injective.
Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a toujours $X \subset f^{-1}(f(X))$. $(x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X)))$.
Réciproquement, soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(X)) &\Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists x' \in X/\ f(x) = f(x') \Rightarrow \exists x' \in X/\ x = x' \text{ (puisque } f \text{ est injective)} \\ &\Rightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Finalement, $f^{-1}(f(X)) \subset X$ et donc $f^{-1}(f(X)) = X$.

• Supposons que pour tout X de $\mathscr{P}(E)$, $f^{-1}(f(X)) = X$. Soit $x \in X$. Par hypothése, $f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ ce qui signifie que $f(x)$ a un et un seul antécédent à savoir x. Par suite, tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f et f est injective.

b) • Supposons f injective. Soit $(X, Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$. On a toujours $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ $(X \cap Y \subset X \Rightarrow f(X \cap Y) \subset f(X)$ et de même, $f(X \cap Y) \subset f(Y)$ et finalement, $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y))$.
Réciproquement, soit $y \in F$. $y \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow \exists (x, x') \in X \times Y/\ y = f(x) = f(x')$. Mais alors, puisque f est injective, $x = x' \in X \cap Y$ puis $y = f(x) \in f(X \cap Y)$. Finalement, $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$ et donc $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

• Supposons que pour tout $(X,Y) \in (\mathscr{P}(E))^2$, on a $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $X = \{x_1\}$ et $Y = \{x_2\}$. Par hypothèse $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ ce qui fournit

$$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\}.$$

En particulier, $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \varnothing$ ce qui impose $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \varnothing$ puis $x_1 = x_2$. Donc f est injective.

2) • Supposons f surjective. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a toujours $f\left(f^{-1}(X)\right) \subset X$ (l'image d'un antécédent d'élément de X est dans X).
Réciproquement, soit y un élément de X. Puisque f est surjective, y a un antécédent x par f qui est par définition un élément de $f^{-1}(X)$. Mais alors, y qui est l'image de x appartient à $f\left(f^{-1}(X)\right)$. On a montré que $X \subset f\left(f^{-1}(X)\right)$ est finalement que $f\left(f^{-1}(X)\right) = X$

• Supposons que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $f\left(f^{-1}(X)\right) = X$. Soient y un élément de E puis $X = \{y\}$. Par hypothèse, $f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$. y est donc l'image d'un élément de $f^{-1}(\{y\})$ et en particulier y a un antécédent par f. On a montré que tout élément y de E a un antécédent par f dans E et donc f est surjective.

Exercice n° 12

1) Il y a l'injection triviale $\begin{array}{rccc} f: & E & \to & \mathscr{P}(E) \\ & x & \mapsto & \{x\} \end{array}$.

2) Soit f une application quelconque de E dans $\mathscr{P}(E)$. Montrons que f ne peut être surjective.
Soit $A = \{x \in E / \ x \notin f(x)\}$. Montrons que A n'a pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde que A a un antécédent a. Dans ce cas, où est a ?

$$a \in A \Rightarrow a \notin f(a) = A,$$

ce qui est absurde et

$$a \notin A \Rightarrow a \in f(a) = A,$$

ce qui est absurde. Finalement, A n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective. On a montré le théorème de Cantor : pour tout ensemble E (vide, fini ou infini), il n'existe pas de bijection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Exercice n° 13

f est bien une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ car, pour tout couple (x,y) d'entiers naturels, l'un des deux entiers $x+y$ ou $x+y+1$ est pair et donc, $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ est bien un entier naturel (on peut aussi constater que $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + (x+y)$ est entier pour $x + y \geqslant 1$).
Remarque. La numérotation de $\mathbb{N}^2$ a été effectuée de la façon suivante :

	0	1	2	3	...	x	...
0	0	1	3	6			
1	2	4	7				
2	5	8					
3	9						
$\vdots$							
y							
$\vdots$							

Sur une parallèle à la droite d'équation $y = -x$, la somme $x + y$ est constante. Il en est de même de l'expression $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ et quand on descend de 1 en y, on avance de 1 dans la numérotation.

Lemme. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! p \in \mathbb{N} / \ \dfrac{p(p+1)}{2} \leqslant n < \dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on pourrait se contenter de constater que la suite des nombres triangulaires $\left(\dfrac{p(p+1)}{2}\right)_{p \geqslant 0}$ est strictement croissante. Néanmoins, on va faire mieux et fournir explicitement p en fonction de n.

Soient n et p deux entiers naturels.

$$\begin{aligned}\frac{p(p+1)}{2} \leqslant n < \frac{(p+1)(p+2)}{2} &\Leftrightarrow p^2+p-2n \leqslant 0 \text{ et } p^2+3p+2-2n > 0\\
&\Leftrightarrow p \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \text{ et } p > \frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2} = -1+\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\\
&\Leftrightarrow p \leqslant \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} < p+1 \Leftrightarrow p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right).\end{aligned}$$

Le lemme est démontré car $E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ est un entier naturel.

Montrons que f est surjective (et au passage, déterminons l'antécédent d'un entier n donné).

Soient n un entier naturel et $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ (p est un entier naturel). On pose $\left\{\begin{array}{l} x+y=p\\ y=n-\frac{p(p+1)}{2}\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} y=n-\frac{p(p+1)}{2}\\ x=p-y=\frac{p(p+3)}{2}-n\end{array}\right.$. Tout d'abord, $y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n-\frac{p(p+1)}{2}+\frac{p(p+1)}{2} = n$. Mais il reste encore à vérifier que x et y ainsi définis (qui sont à l'évidence des entiers relatifs) sont bien des entiers naturels. Puisque $\frac{p(p+1)}{2}$ est un entier naturel et que $n \geqslant \frac{p(p+1)}{2}$, y est bien un entier naturel. Ensuite, $\frac{p(p+3)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}+p$ est aussi un entier naturel et de plus,

$$\frac{p(p+3)}{2}-n \geqslant \frac{p(p+3)}{2}-\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}-1\right) = 0,$$

et x est bien un entier naturel. Ainsi, pour n naturel donné, en posant $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ puis $x = \frac{p(p+3)}{2}-n$ et $y = n-\frac{p(p+1)}{2}$, x et y sont des entiers naturels tels que $f((x,y)) = n$. f est donc surjective.

Montrons que f est injective. Pour cela, on montre que si x et y sont des entiers naturels vérifiant $y+\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n$, alors nécessairement, $x+y=p$ (et donc $y = n-\frac{p(p+1)}{2}$ puis $x = \frac{p(p+3)}{2}-n$).
Soient donc x et y deux entiers naturels. On a :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \leqslant \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y = n < \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+(x+y+1) = \frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2},$$

et le lemme montre que $x+y=p$. L'unicité du couple (x,y) est donc démontrée. f est une application injective et surjective et donc f est bijective. Sa réciproque est $\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^2\\ n & \mapsto & \left(\frac{p(p+3)}{2}, n-\frac{p(p+1)}{2}\right)\end{array}$ où $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$.

Planche n° 3. Raisonnement par récurrence. Corrigé

Exercice n° 1

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$.

- Pour $n = 0$, $2^0 = 1 > 0$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $2^n > n$ ou encore plus précisément, $2^n \geqslant n+1$ (puisque 2^n est un entier) et montrons que $2^{n+1} > n+1$.

$$\begin{aligned}2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geqslant 2(n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= n+1+n+1 \\ &> n+1.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n.}$$

Exercice n° 2

Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 4,\ n! \geqslant n^2$.

- Pour $n = 4$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ et $4^2 = 16$. Puisque $24 \geqslant 16$, l'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 4$.
- Soit $n \geqslant 4$. Supposons que $n! \geqslant n^2$ et montrons que $(n+1)! \geqslant (n+1)^2$.

$$\begin{aligned}(n+1)! &= (n+1) \times n! \\ &\geqslant (n+1) \times n^2 \text{ (par hypothèse de récurrence)}.\end{aligned}$$

Or, $(n+1) \times n^2 - (n+1)^2 = (n+1)(n^2 - n - 1) = (n+1)(n(n-1) - 1) \geqslant 5 \times (4 \times 3 - 1) = 55 \geqslant 0$ et donc $(n+1) \times n^2 \geqslant (n+1)^2$ puis $(n+1)! \geqslant (n+1)^2$.

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 4,\ n! \geqslant n^2.}$$

Exercice n° 3

Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 2$, n est divisible par au moins un nombre premier.

- 2 est divisible par 2 qui est un nombre premier. La propriété à démontrer est donc vraie quand $n = 2$.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, k est divisible par au moins un nombre premier et montrons que $n+1$ est divisible par au moins un nombre premier.

Si $n+1$ est un nombre premier, $n+1$ admet au moins un diviseur premier à savoir lui-même. Sinon, $n+1$ n'est pas premier. Dans ce cas, il existe deux entiers a et b éléments de $[\![2, n]\!]$ tels que $n+1 = a \times b$. Par hypothèse de récurrence, l'entier a est divisible par au moins un nombre premier p. L'entier p divise l'entier a et l'entier a divise l'entier $n+1$. Donc le nombre premier p divise l'entier $n+1$.
Dans tous les cas, l'entier $n+1$ est divisible par au moins un nombre premier.

On a montré par récurrence que tout entier supérieur ou égal à 2 est divisible par au moins un nombre premier.

Exercice n° 4

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n + 3^n$.

- $(-2)^0 + 3^0 = 2 = u_0$ et $(-2)^1 + 3^1 = 1 = u_1$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = (-2)^n + 3^n$ et que $u_{n+1} = (-2)^{n+1} + 3^{n+1}$ et montrons que $u_{n+2} = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}$.

$$\begin{aligned}u_{n+2} &= u_{n+1} + 6u_n \\ &= \left((-2)^{n+1} + 3^{n+1}\right) + 6\left((-2)^n + 3^n\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (-2+6) \times (-2)^n + (3+6) \times 3^n = 4 \times (-2)^n + 9 \times 3^n \\ &= (-2)^2 \times (-2)^n + 3^2 \times 3^n = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (-2)^n + 3^n.}$$

Exercice n° 5

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Pour $n = 1$, $\dfrac{1 \times (1+1)}{2} = 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} k$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

On peut donner plusieurs démonstrations directes.

1ère demonstration. Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^2 - k^2\right) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ ce qui s'écrit $(n+1)^2 - 1 = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k + n$ ou encore $2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$ ou enfin $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2ème demonstration. On écrit

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & S\\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & S \end{array}$$

et en additionnant (verticalement), on obtient $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1)$ d'où le résultat. La même démonstration s'écrit avec le symbole sigma :

$$2S = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1).$$

3ème demonstration. On compte le nombre de points d'un rectangle ayant n points de large et $n+1$ points de long. Il y en a $n(n+1)$. Ce rectangle se décompose en deux triangles isocèles contenant chacun $1 + 2 + \ldots + n$ points. D'où le résultat.

$$\begin{array}{ccccccccc} * & & * & * & \dots & & & \dots & * \\ * & * & & \ddots & & & & & \vdots \\ * & * & * & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & * & * & * \\ \vdots & & & & & \ddots & & * & * \\ * & \dots & & & \dots & * & * & & * \end{array}$$

4ème démonstration. Dans le triangle de Pascal, on sait que pour n et p entiers naturels donnés, $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$. Donc, pour $n \geqslant 2$ (le résultat est clair pour $n = 1$),

$$1+2+\ldots+n = 1+\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{1} = 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\binom{k+1}{2}-\binom{k}{2}\right) = 1+\binom{n+1}{2}-1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^3-k^3 = 3k^2+3k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$:

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1 = \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) = (n+1)^3-1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n\right) = \frac{1}{6}(2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+n\right),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^4-k^4 = 4k^3+6k^2+4k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$, on a

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1 = \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right) = (n+1)^4-1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n\right) = \frac{1}{4}((n+1)^4-(n+1)(n(2n+1)+2n+1))\\ &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4-(n+1)^2(2n+1)\right) = \frac{(n+1)^2\left((n+1)^2-(2n+1)\right)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2.}$$

Pour $k \geqslant 1$, $(k+1)^5-k^5 = 5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$. Donc, pour $n \geqslant 1$,

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1 = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^5-k^5) = (n+1)^5-1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^4 &= \frac{1}{5}\left((n+1)^5-1-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2-\frac{5}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{5}{2}n(n+1)-n\right)\\ &= \frac{1}{30}(6(n+1)^5-15n^2(n+1)^2-10n(n+1)(2n+1)-15n(n+1)-6(n+1))\\ &= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4+9n^3+n^2-n) = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{gathered}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{gathered}}$$

Exercice n° 6

1) Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

- Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ et la formule proposée est vraie pour $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.}$$

Démonstration directe. Pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)},$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

2) Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

- Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times (1+3)}{4 \times (1+1)(1+2)}$ et la formule proposée est vraie pour $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)((n+1)+3)}{4((n+1)+1)((n+2)+1)}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.}$$

Démonstration directe. Pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),$$

et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

Exercice n° 7

Montrons par récurrence que, pour $n \geqslant 2$, H_n peut s'écrire sous la forme $\frac{p_n}{q_n}$ où q_n est un entier pair et p_n est un entier impair (la fraction précédente n'étant pas nécessairement irréductible mais n'étant à coup sûr pas un entier).

- Pour $n = 2$, $H_2 = \frac{3}{2}$ et H_2 est bien du type annoncé.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, on ait $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k est un entier pair et montrons que $H_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ où p_{n+1} est un entier impair et q_{n+1} est un entier pair.

(Recherche. L'idée $H_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)p_n + q_n}{(n+1)q_n}$ ne marche à coup sur que si $(n+1)p_n + q_n$ est impair ce qui est assuré si $n+1$ est impair et donc si n est pair).

1er cas. Si n est pair, on peut poser $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $H_{n+1} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{2k+1} = \frac{(2k+1)p_n + q_n}{(2k+1)q_n}$.
$(2k+1)$ est p_n sont impairs et donc $(2k+1)p_n$ est impair puis $(2k+1)p_n + q_n$ est impair car q_n est pair. D'autre part, q_n est pair et donc $(2k+1)q_n$ est pair. H_{n+1} est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair.

2ème cas. Si n est impair, on pose $n = 2k-1$ où $k \geqslant 2$ (de sorte que $2k-1 \geqslant 3$).

$$\begin{aligned}H_{n+1} &= \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}\\ &\text{(en séparant les fractions de dénominateurs pairs des fractions de dénominateurs impairs)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2}H_k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}.\end{aligned}$$

Maintenant, en réduisant au même dénominateur et puisque un produit de nombres impairs est un nombre impair, on voit que $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$ est du type $\frac{K}{2K'+1}$ où K et K' sont des entiers. Ensuite, puisque $2 \leqslant k \leqslant 2k-1 = n$, par hypothèse de récurrence, $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k un entier pair. Après réduction au même dénominateur, on obtient

$$H_{n+1} = \frac{p_k}{q_k} + \frac{K}{2K'+1} = \frac{(2K'+1)p_k + Kq_k}{q_k(2K'+1)}.$$

Kq_k est un entier pair et $(2K'+1)p_k$ est un entier impair en tant que produit de deux nombres impairs. Donc le numérateur est bien un entier impair et puisque $qk(2K'+1)$ est un entier pair, H_{n+1} est encore une fois de la forme désirée.

On a montré par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 2$, H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair et en particulier H_n n'est pas un entier.

Exercice n° 8

Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $f(n) \leqslant n$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.

- $f(0)$ est un entier naturel tel que $f(0) \leqslant 0$. Donc, $f(0) = 0$. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(k) = k$. $f(n+1)$ est un entier naturel inférieur ou égal à $n+1$. Donc, $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$. Mais f est injective et donc, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(n+1) \neq f(k)$ ou encore $f(n+1) \neq k$. Par suite, $f(n+1) \notin [\![0, n]\!]$. En résumé, $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!] \setminus [\![0, n]\!]$ et donc $f(n+1) = n+1$.

On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$. Donc, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Réciproquement, $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $f(n) \leqslant n$. Le problème posé admet une solution et une seule, à savoir $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

