Planche n° 2. Ensembles, relations, applications

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*T)

Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F) \Leftrightarrow E = F$.

Exercice n° 2 (T)**

A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que : $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice n° 3 (T)**

A et B sont des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1) $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \varnothing)$.

2) $A \Delta B = B \Delta A$.

3) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

4) $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$.

5) $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$.

Exercice n° 4 (IT)**

Soit $\mathscr{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathscr{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$

1) Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2) Pour chaque réel x, préciser le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x.

Exercice n° 5 (IT)**

Soit E un ensemble. Montrer que la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$. Cette relation d'ordre est-elle partielle ou totale ?

Exercice n° 6 (*IT)**

Dans chacun des cas suivants, montrer que f réalise une bijection (encore notée f) de I sur $J = f(I)$ à déterminer puis préciser f^{-1} :

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty, 2]$.

2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$, $I =]-2, +\infty[$.

3) $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$, $I = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

4) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, $I = \mathbb{R}$.

Exercice n° 7 (*IT)**

Soient E un ensemble puis A une partie de E. Pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on pose $\varphi_A(X) = X \cap A$ et $\psi_A(X) = X \cup A$. Montrer que

1) φ_A injective $\Leftrightarrow$ φ_A surjective $\Leftrightarrow A = E$.

2) ψ_A injective $\Leftrightarrow$ ψ_A surjective $\Leftrightarrow A = \varnothing$.

Exercice n° 8 (IT)**

Soient f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et g une application de F vers un ensemble G.
Montrer que : ($g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective) et ($g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective).

Exercice n° 9 (I)**

Soit f une application d'un ensemble non vide E dans lui-même telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice n° 10 (**)

Parmi $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ deux sont injectives et une est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice n° 11 (*IT)**

f est une application d'un ensemble E dans lui-même. Montrer que :

1) a) f est injective $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(X)) = X$.
b) f est injective $\Leftrightarrow \forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

2) f est surjective $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E),\ f\left(f^{-1}(X)\right) = X$.

Exercice n° 12 (*I) Théorème de Cantor :**

1) Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.

2) En considérant la partie $A = \{x \in E/\ x \notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas de bijection f de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice n° 13 (****) (Une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x, y) & \mapsto & y + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} \end{array}$. Montrer que f est une bijection. Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, le couple (x, y) dont il est l'image.

Planche n° 3. Raisonnement par récurrence

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (T)**

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

Exercice n° 2 (T)**

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$ (où $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$).

Exercice n° 3 (***)

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$ est divisible par au moins un nombre premier.

Exercice n° 4 (T)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n + 3^n$.

Exercice n° 5 (*I)**

1) Montrer par récurrence que, pour tout naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. En calculant la différence $(k+1)^2 - k^2$, trouver une démonstration directe de ce résultat.

2) Calculer de même les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ (et mémoriser les résultats). On donne les identités remarquables
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ et
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Exercice n° 6 (T)**

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Trouver une démonstration directe.

2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Trouver une démonstration directe.

Exercice n° 7 (****)

Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, H_n n'est jamais un entier (indication : montrer par récurrence que H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair en distinguant les cas où n est pair et n est impair).

Exercice n° 8 (***)

Déterminer toutes les applications injectives de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n.$$