Systèmes Linéaires Continus Invariants

SLCI2 - Réduction de modèle

Résumé

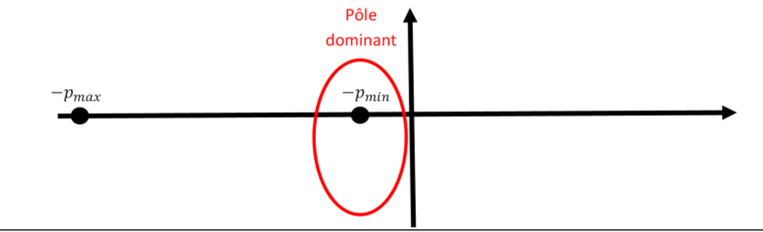
Programme PSI/MP 2022 (LIEN)		
Id	Compétence développée	Connaissances associées
B3-02	Préciser les limites de validité d'un modèle.	Point de fonctionnement. Non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation, seuil) et retard pur.
B2-08	Simplifier un modèle.	Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement. Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : – principe ; – justification ; – limites.

Réduction de modèles et réponse temporelle

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{\prod(1+T_i p)\prod\left(1+\frac{2z_i}{\omega_{0_i}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0_i}}^2}\right)}{\prod(1+T_i p)\prod\left(1+\frac{2z_i}{\omega_{0_i}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0_i}}^2}\right)}$$

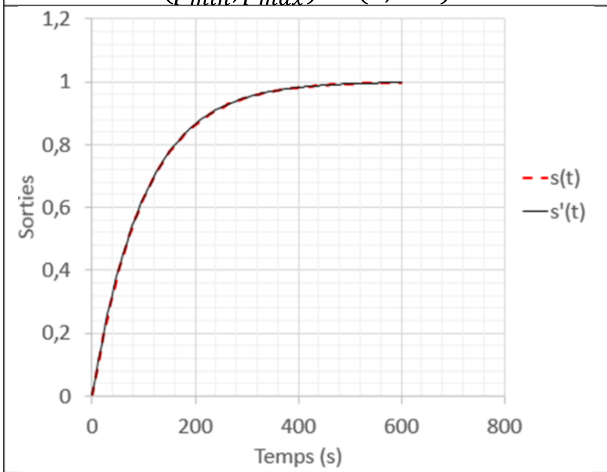
Le système est stable, il ne possède aucun pôle à partie réelle positive ou nulle. On définit le **pôle dominant** de la FT comme le pôle réel ou l'ensemble des pôles complexes conjugués de plus faible partie réelle en valeur absolue.

$$H(p) = \frac{K}{\left(1+\frac{p}{p_{min}}\right)\left(1+\frac{p}{p_{max}}\right)}$$

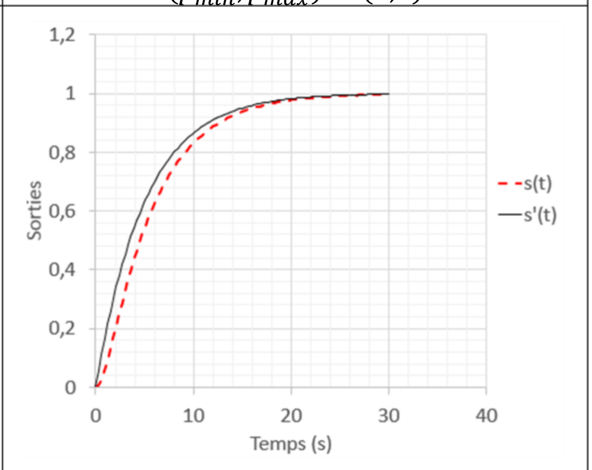


$$H(p) \approx \frac{K}{1+\frac{p}{p_{min}}} \quad ; \quad s(t) \approx KE_0\left(1-e^{-p_{min}t}\right) \quad ; \quad t_{r5\%} \approx 3T = \frac{3}{p_{min}}$$

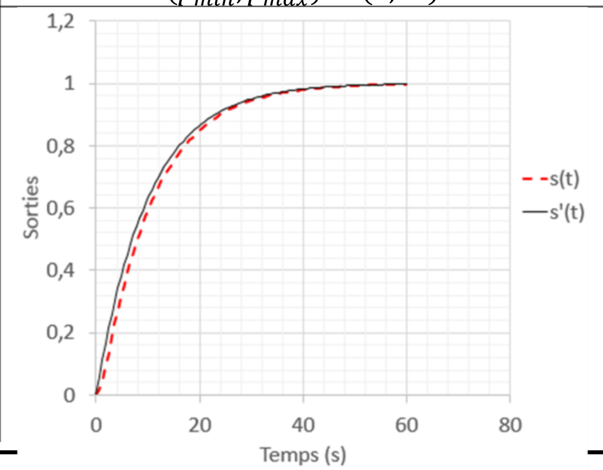
$(p_{min}, p_{max}) = (1,100)$



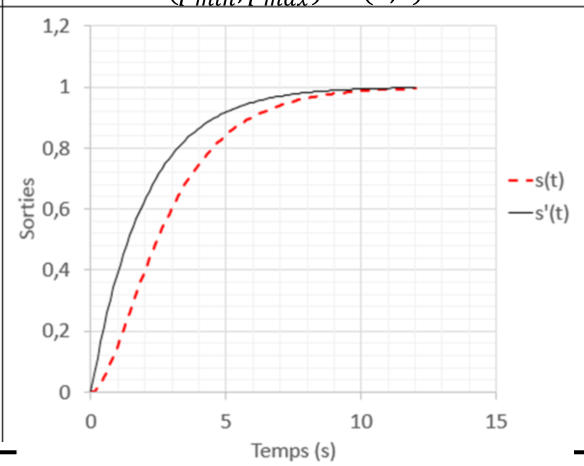
$(p_{min}, p_{max}) = (1,5)$



$(p_{min}, p_{max}) = (1,10)$

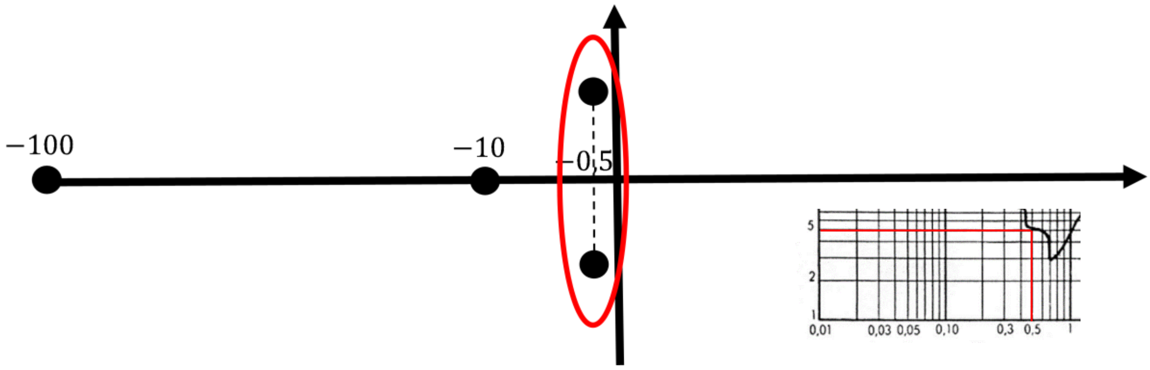


$(p_{min}, p_{max}) = (1,2)$

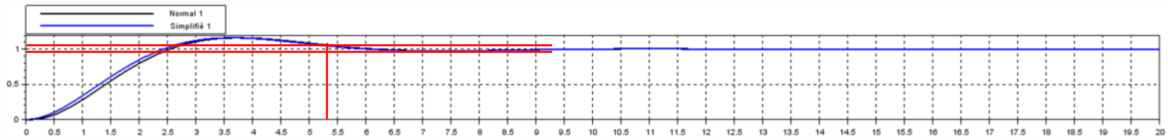


Réduction de modèles et réponse temporelle

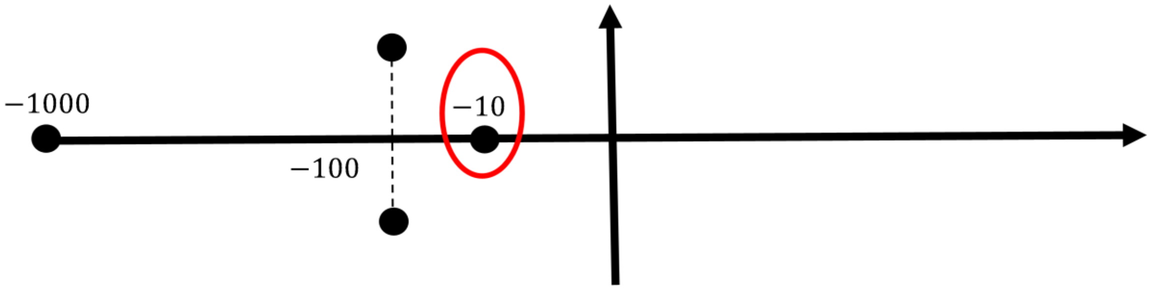
$$H(p) = \frac{1}{(1+0{,}1p)(1+0{,}01p)(1+p+p^2)}$$



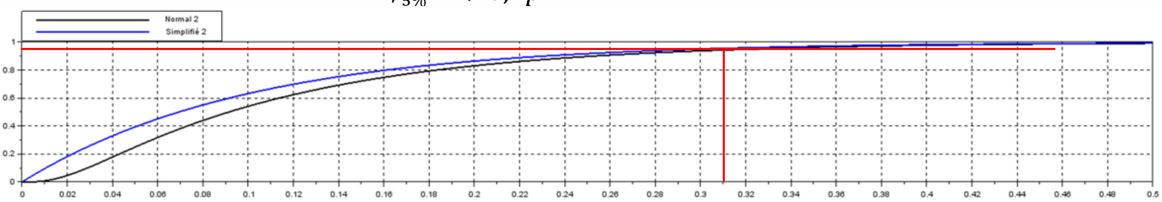
$$H(p) \underset{t_{r5\%}}{\approx} \frac{1}{(1+p+p^2)} \quad ; \quad \omega_0 = 1 \quad ; \quad z = 0{,}5 \quad ; \quad t_{r5\%} \approx \frac{5}{\omega_0} = 5\,s$$



$$H(p) = \frac{1}{(1+0{,}1p)(1+0{,}001p)(1+0{,}02p+0{,}0001p^2)}$$



$$H(p) \underset{t_{r5\%}}{\approx} \frac{1}{1+0{,}1p} \quad ; \quad t_{r5\%} \approx 3T = 0{,}3\,s$$



Réduction de modèles et diagramme de Bode

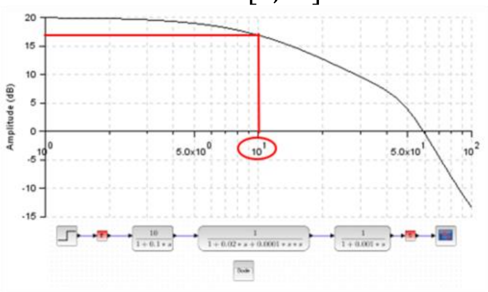
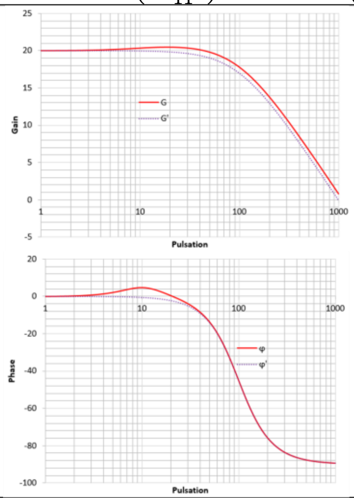
$$H(p)=\frac{K}{p^\alpha}\frac{\prod(1+T_ip)\prod\left(1+\frac{2z_i}{\omega_{0i}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0i}}^2}\right)}{\prod(1+T_ip)\prod\left(1+\frac{2z_i}{\omega_{0i}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0i}}^2}\right)}$$

$$G=G_0+G_1^n+G_2^n-G_1^d-G_2^d-G_\alpha \quad ; \quad \varphi=\varphi_1^n+\varphi_2^n-\varphi_1^d-\varphi_2^d-\varphi_\alpha$$

Avec n pour numérateur, d pour dénominateur, 1 pour premier ordre, 2 pour second ordre, $G_0=20\log K$, $G_\alpha=\alpha 20\log\omega$, $\varphi_\alpha=\alpha\frac{\pi}{2}$

Sur le diagramme de Bode, lorsque l'on ne s'intéresse qu'à une plage de pulsations du type $[0,\omega_e]$, on peut négliger tous les gains et toutes les phase négligeables dans cette plage.

Exemple	
$H(p)=K\frac{\left(1+\frac{1}{10}p\right)}{\left(1+\frac{1}{100}p\right)\left(1+\frac{1}{1000}p\right)}$	
$\omega_e=50\,rd/s$	$\omega_e=500\,rd/s$
$H(p)\underset{\omega<\omega_e}{\approx}K\left(1+\frac{1}{10}p\right)$	$H(p)\underset{\omega<\omega_e}{\approx}K\frac{\left(1+\frac{1}{10}p\right)}{\left(1+\frac{1}{100}p\right)}$

Applications	
$\frac{H(p)}{\frac{10}{(1+0{,}1p)(1+0{,}001p)(1+0{,}02p+0{,}0001p^2)}}$	$H(p)=K\frac{\left(1+\frac{1}{10}p\right)}{\left(1+\frac{1}{11}p\right)\left(1+\frac{1}{100}p\right)}$
Est-ce que sa bande passante respecte le critère $BP=[0,5]$	On peut simplifier $\frac{\left(1+\frac{1}{10}p\right)}{\left(1+\frac{1}{11}p\right)}$: $H(p)\underset{\forall\omega}{\approx}\frac{K}{\left(1+\frac{1}{100}p\right)}$
Pour les 1° ordres : $\omega_{c_1}=10,\omega_{c_2}=1000$ Pour le second ordre : $\omega_0=100$ $H(p)\underset{\omega<10}{\approx}\frac{10}{(1+0{,}1p)}$ $BP=[0,10]$ 	
Critère vérifié	Il y a un effet sur la réponse temporelle