SESSION 2019

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE I

Q1 Puisque pour tout réel $t \in]0, +\infty[$, on a $e^{-t} < 1$, la fonction f est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Etude en 0 à droite. $\dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t \times 1}{-(-t)} = 1$. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 à droite et en particulier, la fonction f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

Etude en $+\infty$. $t^2 f(t) = \dfrac{t^3 e^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^3 e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées.

Donc, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On en en déduit que la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.}$$

Pour $t \in]0, +\infty[$, $0 < e^{-t} < 1$ puis

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t\left(1 - e^{-t}\right)} = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, posons $f_n(t) = te^{-(n+1)t}$ de sorte que $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Dit autrement, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $]0, +\infty[$. De plus, toutes les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$. Vérifions que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ dt < +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{n+1} e^{-(n+1)t}$ et $t \mapsto t$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}
\int_0^A te^{-(n+1)t}\ dt &= \left[t\left(-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\right)\right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\ dt \\
&= \frac{1}{n+1}\left(-Ae^{-(n+1)A} + \left[-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^A\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(-Ae^{-(n+1)A} - \frac{1}{n+1}e^{-(n+1)A} + \frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $n + 1 > 0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} Ae^{-(n+1)A} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ dt = \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\ dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(En particulier, chaque fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$). On en déduit que la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\ dt$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

En résumé,

- chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers la fonction f sur $]0, +\infty[$ et de plus, la fonction f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme,

- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$, $n \in \mathbb{N}$, converge,
- la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$,
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$.

La dernière égalité fournit explicitement

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt &= \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \frac{\pi^2}{6}.}$$

EXERCICE II

Q2 Soit $t \in [-1, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $|p_n t^n| = p_n |t|^n \leqslant p_n$. La série numérique de terme général p_n, $n \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme 1). On en déduit que la série numérique de terme général $p_n t^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et donc converge. On en déduit encore que $G_X(t)$ existe. Finalement, G_X est définie sur $[-1, 1]$ au moins et en particulier sur $]-1, 1[$.

Avec les notations et les hypothèses de l'énoncé, montrons que pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$.

1ère méthode. Pour tout réel $t \in]-1, 1[$, $G_{X_1}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)\, t^n$ et $G_{X_2}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)\, t^n$. Les deux séries entières précédentes ont un rayon de convergence au moins égal à 1. En effectuant le produit de Cauchy de ces deux séries entières sur $]-1, 1[$, on obtient pour $t \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned}G_{X_1}(t) G_{X_2}(t) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)\, t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)\, t^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)\, P(X_2 = n - k)\right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k))\right) t^n \text{ (car les variables } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 + X_2 = n)\, t^n = G_S(t).\end{aligned}$$

2ème méthode. Soit $t \in]-1,1[$. Les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et donc les variables t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes. Par suite,

$$\begin{aligned} G_S(t) &= E\left(t^{X_1+X_2}\right) = E\left(t^{X_1}t^{X_2}\right) \\ &= E\left(t^{X_1}\right)E\left(t^{X_2}\right) \text{ (car } t^{X_1} \text{ et } t^{X_2} \text{ sont indépendantes)} \\ &= G_{X_1}(t)G_{X_2}(t). \end{aligned}$$

Q3 Pour $i \in [\![1,n]\!]$, notons X_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu au i-ème tirage. On a donc $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et de plus les variables X_i, $i \in [\![1,n]\!]$, sont mutuellement indépendantes.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. La loi de probabilité de la variable X_i est donnée par : $P(X_i = 0) = \dfrac{1}{4}$, $P(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_i = 2) = \dfrac{1}{4}$.
La fonction génératrice de la variable X_i est définie pour $t \in]-1,1[$ (et même $t \in \mathbb{R}$) par :

$$G_{X_i}(t) = P(X_i = 0) + P(X_i = 1)\,t + P(X_i = 2)\,t^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2t + t^2\right) = \frac{1}{4}(t+1)^2.$$

Puisque les variables X_i sont mutuellement indépendantes, pour $t \in]-1,1[$ (et même $t \in \mathbb{R}$),

$$G_S(t) = G_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = \frac{1}{4^n}(t+1)^{2n}.$$

D'après la formule du binôme de Newton, pour $t \in]-1,1[$,

$$G_S(t) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}t^k = \sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{k}t^k.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit la loi de probabilité de la variable S_n :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(S_n = k) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{k} \text{ si } 0 \leqslant k \leqslant 2n \text{ et } P(S_n = k) = 0 \text{ si } k > n.}$$

On note que $\forall k \in [\![0,2n]\!]$, $P(S_n = k) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{k} = \dbinom{2n}{k}\dfrac{1}{2^k}\dfrac{1}{2^{2n-k}} = \dbinom{2n}{k}\dfrac{1}{2^k}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{2n-k}$.
Donc, $S_n \sim \mathscr{B}\left(2n, \dfrac{1}{2}\right)$.

PROBLÈME

Partie I - Propriétés

Q4 Soit $x \in]-1,1[$. Alors, $x^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puis $1 - x^n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ ou encore $1 - x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{1}{1-x^n}\right| \leqslant 1 + 1 = 2$.

Pour $n \geqslant n_0$, on a $\left|a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}\right| = |a_n|\,|x|^n\left|\dfrac{1}{1-x^n}\right| \leqslant 2\,|a_n|\,|x|^n$. Puisque $R_a = 1$ et que $x \in]-1,1[$, la série numérique de terme général $a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, est absolument convergente. Mais alors, la série numérique de terme général $2\,|a_n|\,|x|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge puis la série numérique de terme général $\left|a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}\right|$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.

Ainsi, la série numérique de terme général $a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge.

Pour $n \geqslant 1$, posons $a_n = \dfrac{1}{n^2}$. La règle de d'Alembert montre que $R_a = 1$. Pour $x_0 = 2 \notin]-1,1[$, on a

$$a_n\frac{x_0^n}{1-x_0^n} = \frac{1}{n^2}\frac{2^n}{1-2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$

et la série de terme général $a_n\dfrac{x_0^n}{1-x_0^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.

Q5 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$, posons $l_n(x) = a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

Soit $b \in]0,1[$. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $x \in [-b,b]$, $x^n \leqslant b^n$ puis $1 - x^n \geqslant 1 - b^n > 0$ et donc $|1-x^n| \geqslant 1 - b^n$. Par suite, pour tout $x \in [-b,b]$,

$$|l_n(x)| = \left|a_n \frac{x^n}{1-x^n}\right| = |a_n| \frac{|x|^n}{|1-x^n|} \leqslant |a_n| \frac{b^n}{1-b^n} = \left|a_n \frac{b^n}{1-b^n}\right| = |l_n(b)|,$$

puis $\|l_n\|_{\infty,[-b,b]} \leqslant |l_n(b)|$. Puisque la série numérique de terme général $|l_n(b)|$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, il en est de même de la série numérique de terme général $\|l_n\|_{\infty,[-b,b]}$. On a montré que la série de fonctions de terme général l_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[-b,b]$ et en particulier, la série de fonctions de terme général l_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[-b,b]$.

Q6 Soit $b \in]0,1[$. Chaque fonction l_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $[-b,b]$ en tant que fraction rationnelle définie sur $[-b,b]$. De plus, la série de fonctions de terme général l_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers la fonction f sur $[-b,b]$. La fonction f est donc continue sur $[-b,b]$. Ceci étant vrai pour tout $b \in]0,1[$, on a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur }]-1,1[.}$$

Soit $b \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction l_n est de classe C^1 sur $[-b,b]$ et pour tout $x \in [-b,b]$,

$$l_n'(x) = a_n \frac{nx^{n-1}(1-x^n) - x^n\left(-nx^{n-1}\right)}{(1-x^n)^2} = a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}.$$

Pour tout $x \in [-b,b]$, comme à la question précédente, $|l_n'(x)| \leqslant n|a_n| \dfrac{b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ et donc

$$\|l_n'\|_{\infty,[-b,b]} \leqslant n|a_n| \frac{b^{n-1}}{(1-b^n)^2} = \frac{1}{b} n|a_n| \frac{b^n}{(1-b^n)^2}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - b^n = 1$, pour n suffisamment grand, on a $1 - b^n \geqslant \dfrac{1}{2}$ et donc pour n suffisamment grand,

$$\|l_n'\|_{\infty,[-b,b]} \leqslant \frac{2}{b} n|a_n| \frac{b^n}{1-b^n}.$$

Si on pose $(a_n') = (na_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on sait que $R_{a'} = R_a = 1$. Comme à la question précédente, la série numérique de terme général $\dfrac{2}{b} n|a_n| \dfrac{b^n}{1-b^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge puis la série de fonctions de terme général l_n', $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément sur $[-b,b]$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général l_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers f sur $[-b,b]$,
- chaque fonction l_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^1 sur $[-b,b]$,
- la série de fonctions de terme général l_n', $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $[-b,b]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[-b,b]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $b \in]0,1[$, on a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ et } f' = \sum_{n=1}^{+\infty} l_n'.}$$

Plus explicitement, pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2} = a_1 \frac{1}{(1-x)^2} + a_2 \frac{2x}{(1-x^2)^2} + \dots$ En particulier, $f'(0) = a_1$.

$$\boxed{f'(0) = a_1.}$$

Q7 La famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $A = (\mathbb{N}^*)^2$ car pour tout couple $(k,p) \in A$, il existe un entier naturel non nul n et un seul tel que $kp = n$. Puisque la suite double $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est sommable, le théorème de sommation par paquets permet d'affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{(n,p)\in A} u_{n,p} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right).$$

Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n x^{np}| = |a_n| \sum_{p=1}^{+\infty} (|x|^n)^p = |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ (série géométrique de premier $|x|^n$ et de raison $|x|^n \in]-1,1[$).

D'autre part, la série numérique de terme général $a_n \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est absolument convergente. Donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n x^{np}|\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n} < +\infty.$$

Ceci montre que la suite $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

Soit $x \in]-1,1[$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\sum_{p=1}^{+\infty} (x^n)^p\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Puisque la suite $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable, d'après le résultat du début de la question,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k|n} a_k x^{k\times\frac{n}{k}}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k|n} a_k\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{d|n} a_d\right) x^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \sum_{d|n} a_d.}$$

Partie II - Exemples

Q8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \displaystyle\sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} a_d$. De plus, $R_a = 1$. D'après la question Q7,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.}$$

Q9 Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant |a_n| = \varphi(n) \leqslant n$. Donc, si pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $b_n = 1$ et $c_n = n$, on a $R_c \leqslant R_a \leqslant R_b$. Il est connu que $R_b = R_c = 1$ et on a donc montré que

$$\boxed{R_a = 1.}$$

Les diviseurs de $12 = 2^2 \times 3$ sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12 puis

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12,$$

(les entiers non nuls inférieurs ou égaux à 12 et premiers à 12 sont 1, 5, 7 et 12). La formule proposée est donc vraie quand $n = 12$.

Soit $x \in]-1,1[$. D'après la question Q7,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{d|n}\varphi(d)\right)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'(x) \\ &= x\left(\frac{1}{1-x}\right)'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

Q10 Pour tout réel $x \in]-1,1[$, posons $f(x) = \ln(1+x)$. On sait que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, posons $f_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Pour tout x de $[0,1[$, la suite $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante (en tant que produit de deux suites positives et décroissantes) et de limite nulle. Donc, pour tout $x \in [0,1[$, la série de terme général $(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est une série alternée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour tout $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right| \\ &\leqslant \left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

puis $\|R_n\|_{\infty,[0,1[} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Puisque $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\|R_n\|_{\infty,[0,1[}$. Ceci montre que la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1[$.

Ainsi,

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n a une limite en 1 à gauche à savoir $\ell_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$,
- la série de fonctions de termes général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $[0,1[$.

D'après le théorème d'interversion des limites,

- la série de terme général ℓ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge,

(• f a une limite réelle en 1 à gauche,)

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n$.

Plus explicitement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ln(1+x) = \ln(2).$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).}$$

Q11 Pour tout réel $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $\dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, posons $f_n(x) = a_n \dfrac{x^{n-1}}{1-x^n} = (-1)^n \dfrac{x^{n-1}}{1-x^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2^n} \leqslant x^n \leqslant \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ puis $\dfrac{1}{2} \leqslant 1 - x^n \leqslant \dfrac{3}{2}$ et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1-x^n} \leqslant 2$. On en déduit encore que pour $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$,

$$\left|a_n \frac{x^n}{1-x^n}\right| = \frac{|x|^n}{1-x^n} \leqslant 2 \times \frac{1}{2^n}.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_{\infty,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et donc uniformément vers la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$.

D'autre part, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, a une limite ℓ_n en 0 à savoir $\ell_n = \begin{cases} a_1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geqslant 2 \end{cases}$. D'après le théorème d'interversion des limites, (la série de terme général ℓ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge), la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ a une limite réelle en 0 et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n$. Plus précisément,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = a_1 = -1.$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = a_1 = -1$. On retrouve le résultat de la question Q6.

Q12 Pour tout réel $x \in]-1,1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1+x+\ldots+x^{n-1}}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$, posons $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{1+x+\ldots+x^{n-1}}$. Pour tout $x \in]0,1[$, la suite $\left(\dfrac{x^n}{1+x+\ldots+x^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante (en tant que produit de deux suites positives et décroissantes), de limite nulle. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{1+x+\ldots+x^{k-1}}\right| \\
&\leqslant \left|(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2+\ldots+x^n}\right| = \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2+\ldots+x^n} \\
&\leqslant \frac{x^{n+1}}{x^n+\ldots+x^n} = \frac{x^{n+1}}{nx^n} = \frac{x}{n} \\
&\leqslant \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|R_n\|_{\infty,]0,1[} \leqslant \frac{1}{n}$. Puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers la fonction $x \mapsto (1-x)f(x)$ sur $]0,1[$. D'après le théorème d'interversion des limites,

$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

et donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{\ln(2)}{1-x}.}$$

