Cinématique d'un point matériel

Table des matières

La cinématique consiste à étudier et à décrire les mouvements indépendamment des causes qui les produisent . Les notions de vitesse,accélération,trajectoire,changement de référentiel,appartiennent à la cinématique .

1 Généralité

1.1 Repère d'espace R

- Solide (solide indéformable) : il s'agit d'un système matériel (S) dont les distances,entre deux points quelconques,restent invariables au cours du temps .

$$\boxed{\forall N, P \in (S) : d = ||\overrightarrow{NP}|| = cte}$$

- Repère d'espace : il s'agit d'un système de coordonnées (origine et trois axes) lié à un solide (S) de référence .
  - Exemple : repère cartésien (O,OX,OY,OZ) .

1.2 Repère du temps

- Un repère temporel nécessite une horloge et une origine des temps pour repérer parfaitement l'instant d'un événement .
- Le repérage suppose implicitement une orientation du temps du passé vers le future qui s'appuie sur l'irreversibilité fondamentale de l'évolution des phénomènes physiques .

1.3 Notion d'un référentiel

Définition : Un référentiel est un ensemble de repère de l'espace et d'un repère temporel

- Remarque : On confond le plus souvent en mécanique classique référentiel et repère spatial sans préciser le repère temporel
- Exemple : Référentiel terrestre : référentiel lie à la terre

1.4 Point matériel

Définition : Un point matériel est un point géométrique de masse m (caractéristique physique) repéré par ses trois coordonnées .

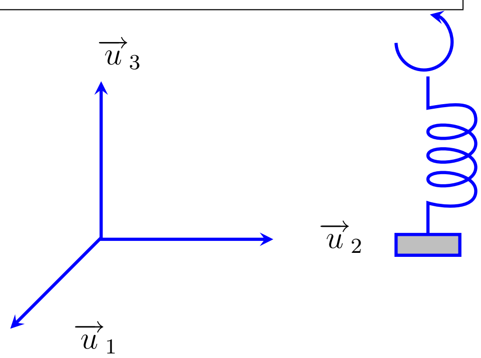
2 Différentes systèmes de coordonnées

2.1 Base orthonormée directe

Définition : Une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est dite orthonormé directe si :

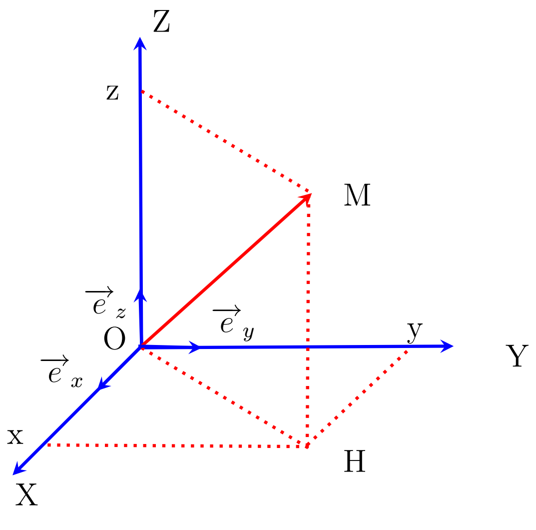
- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont unitaires : $||\vec{u}_1|| = ||\vec{u}_2|| = ||\vec{u}_3|| = 1$
- $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont orthogonaux entre eux
- Le sens de $\vec{u}_3$ est donné par la régle de tire-bouchon

• Régle
On visse suivant le sens qui amène $\vec{u}_1$ vers $\vec{u}_2$ et l'on progresse suivant $\vec{u}_3$ donc $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est directe .



2.2 Coordonnées cartésiennes (x,y,z)

- $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont des vecteurs unitaires
- la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est orthonormée et directe
- les vecteurs de base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ne dépendent pas du point de l'espace considéré .
  Soit H la projection orthogonal de M sur le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$



▶ Vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\begin{cases} \overrightarrow{OH} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \\ \overrightarrow{HM} = z\vec{e}_z \end{cases}$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}$$

▶ Vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$

Supposons que le point M effectue un déplacement élémentaire de M à M' tel que

$\overrightarrow{OM'} = {}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} \left| \begin{array}{l} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{array} \right.$ avec $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z}$$

- Autrement :
  $d\overrightarrow{OM} = d(x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y + z\overrightarrow{e}_z) = dx\overrightarrow{e}_x + xd\overrightarrow{e}_x + dy\overrightarrow{e}_y + yd\overrightarrow{e}_y + dz\overrightarrow{e}_z + zd\overrightarrow{e}_z$
  $d\overrightarrow{e}_x = d\overrightarrow{e}_y = d\overrightarrow{e}_z = 0$ car les vecteurs sont indépendants du point M,donc sont fixes

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e}_x + dy\overrightarrow{e}_y + dz\overrightarrow{e}_z}$$

2.3 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

- Symétrie cylindrique

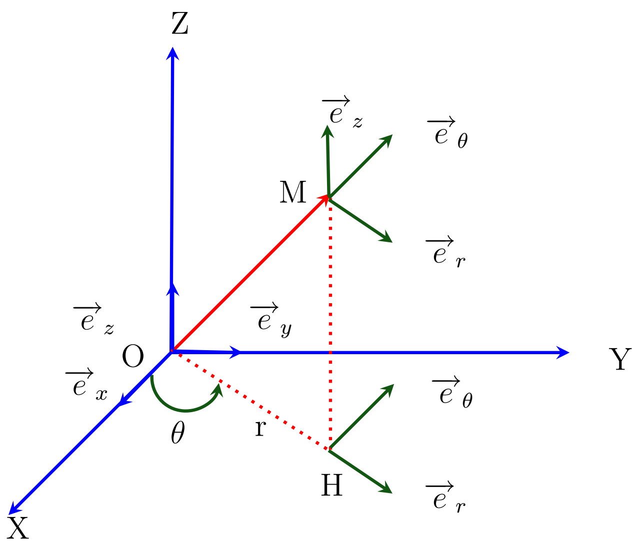
Définition : Une distribution de masse,présente une symétrie cylindrique d'axe (oz) s'elle est invariante par translation parrallélement à l'axe (oz),et si une rotation quelconque autour de (oz) laisse invariante la distribution .

- Pratiquement : Un problème possédant une symétrie cylindrique,il est necessaire de travailler avec les coordonnées cylindriques .

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\overrightarrow{e}_r + z\overrightarrow{e}_z}$$

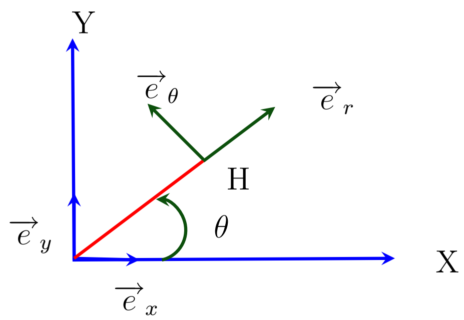
avec

- $r \in [0, +\infty[$
- $\theta \in [0, 2\pi]$
- $z \in]-\infty, +\infty[$



- Vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$

- $\overrightarrow{e}_r = \cos\theta\,\overrightarrow{e}_x + \sin\theta\,\overrightarrow{e}_y$
- $\overrightarrow{e}_\theta = -\sin\theta\,\overrightarrow{e}_x + \cos\theta\,\overrightarrow{e}_y$
- $\dfrac{d\overrightarrow{e}_r}{d\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e}_x + \cos\theta\,\overrightarrow{e}_y = \overrightarrow{e}_\theta$
- $\dfrac{d\overrightarrow{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\overrightarrow{e}_x - \sin\theta\,\overrightarrow{e}_y = -\overrightarrow{e}_r$



Résultat

- $\dfrac{d\overrightarrow{e}_r}{d\theta} = \overrightarrow{e}_\theta$
- $\dfrac{d\overrightarrow{e}_\theta}{d\theta} = -\overrightarrow{e}_r$

- $d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e}_r + rd\overrightarrow{e}_r + dz\overrightarrow{e}_z + zd\overrightarrow{e}_z$ avec $d\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e}_r + rd\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + dz\,\overrightarrow{e}_z}$$

la composante suivant :

- $\overrightarrow{e}_r$: radiale
- $\overrightarrow{e}_\theta$: orthoradiale
- $\overrightarrow{e}_z$: axiale

▶ On peut passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes :

- $x = r\cos\theta$
- $y = r\sin\theta$
- $z = z$

•Remarque : Lorsque le mouvement se fait dans le plan $z = cte$ on parle des coordonnées polaires (r,θ) : $\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e}_r + rd\theta\,\overrightarrow{e}_\theta}$

▶ La base des coordonnées cylindriques est locale .

2.4 Coordonnées sphériques (r,θ,φ)

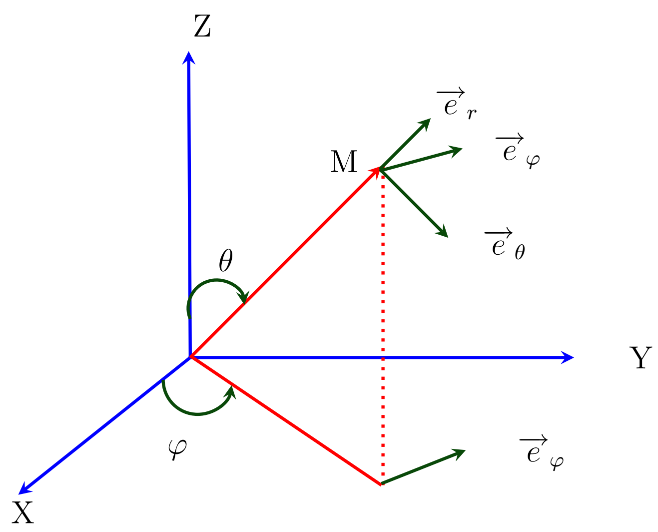
▶ Symétrie sphérique

> Définition : Une distribution est dite à symétrie sphérique s'elle est invariante par rotation autour de tout axe passant par le centre de symétrie .

▶ Vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e}_r}$$

- $r \in [0,+\infty[$
- $\theta \in [0,\pi]$
- $\varphi \in [0,2\pi]$



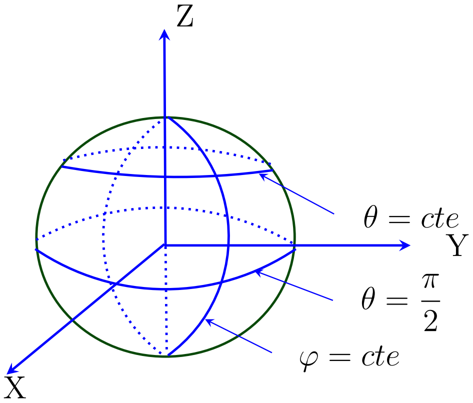
▶ Vecteur déplacement élementaire

On montre que

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e}_r + rd\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\overrightarrow{e}_\varphi}$$

•Remarque

- le plan correspond à $\varphi = cte$ est le plan méridien
- le plan correspond à $\theta = cte$ est plan parrallèle
- le plan correspond à $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ est le plan équatoriel

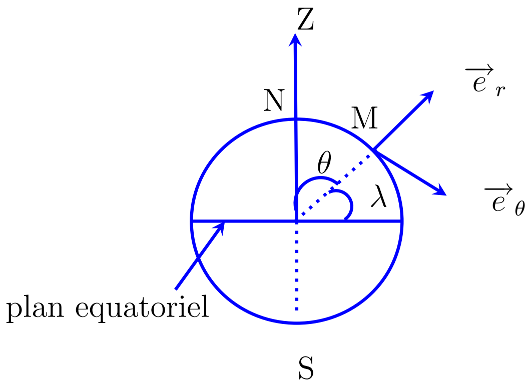


▶ On peut passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes :

- $x = r\sin\theta\cos\varphi$
- $y = r\sin\theta\sin\varphi$
- $z = r\cos\theta$

▶ Cas particulier : Repère terrestre

- $(M, \overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_\varphi)$ repère terrestre
- $\overrightarrow{e}_\theta$ vers le sud
- $\overrightarrow{e}_\varphi$ vers l'est
- $\lambda = \dfrac{\pi}{2} - \theta$: latitude



3 Vitesse et accélération d'un point matériel

3.1 Trajectoire d'un point matériel

Définition : la trajectoire d'un point matériel est une courbe représentant l'ensemble des positions $M(t)$ occuppées par le point matériel au cours de son mouvement .

• Exemple : Considérons les équations paramètriques en coordonnées cartésiennes

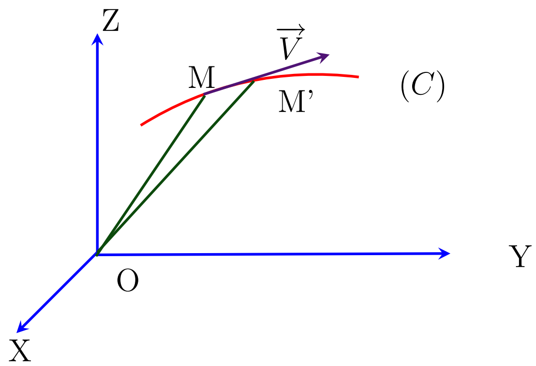
$$\begin{cases} x(t) &= r\cos\omega t \\ y(t) &= r\sin\omega t \\ z(t) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

c'est l'équation du trajectoire : cercle de rayon r et de centre $O(0,0)$

3.2 Vitesse d'un point matériel dans un référentiel R donné

3.2.1 Définition

Soient M et M' les positions d'un mobile aux instants voisins t et $t+\Delta t$ dans un référentiel d'étude R d'origine O .



Définition : On définit la vitesse $\overrightarrow{V}(M/R)$ du point M par rapport à R par

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}]}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

unité : $m.s^{-1}$

- la vitesse $\overrightarrow{V}$ est portée par la tengente en M .

3.2.2 Vitesse en coordonnées cartésiennes

- $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{e}_x + y(t)\overrightarrow{e}_y + z(t)\overrightarrow{e}_z$
- $\overrightarrow{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\overrightarrow{e}_x + \dfrac{dy}{dt}\overrightarrow{e}_y + \dfrac{dz}{dt}\overrightarrow{e}_z$: on pose $\left\{\begin{array}{lllll} \dot{x} & = & \dfrac{dx}{dt} & = & v_x \\ \dot{y} & = & \dfrac{dy}{dt} & = & v_y \\ \dot{z} & = & \dfrac{dz}{dt} & = & v_z \end{array}\right.$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{x}\overrightarrow{e}_x + \dot{y}\overrightarrow{e}_y + \dot{z}\overrightarrow{e}_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R) = v_x\overrightarrow{e}_x + v_y\overrightarrow{e}_y + v_z\overrightarrow{e}_z}$$

3.2.3 Vitesse en coordonnées cylindriques

- $d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e}_r + rd\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + dz\,\overrightarrow{e}_z$
- $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\overrightarrow{e}_r + r\dfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e}_\theta + \dfrac{dz}{dt}\overrightarrow{e}_z$: on pose $\left\{\begin{array}{lllllll} v_r & = & \dfrac{dr}{dt} & = & \dot{r} & = & \text{vitesse radiale} \\ v_\theta & = & r\dfrac{d\theta}{dt} & = & r\dot{\theta} & = & \text{vitesse orthoradiale} \\ v_z & = & \dfrac{dz}{dt} & = & \dot{z} & & \end{array}\right.$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{r}\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{e}_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R) = v_r\overrightarrow{e}_r + v_\theta\overrightarrow{e}_\theta + v_z\overrightarrow{e}_z}$$

3.2.4 Vitesse en coordonnées sphériques

- En coordonnées sphériques $d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e}_\varphi$
- $\overrightarrow{V}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\overrightarrow{e}_r + r\dfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e}_\theta + r\sin\theta\dfrac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{e}_\varphi$

$$\text{on pose}\begin{cases} v_r = \dfrac{dr}{dt} = \dot{r} \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r\sin\theta\dfrac{d\varphi}{dt} = r\sin\theta\dot{\varphi} \end{cases}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{r}\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R) = v_r\overrightarrow{e}_r + v_\theta\overrightarrow{e}_\theta + v_\varphi\overrightarrow{e}_\varphi}$$

3.3 Accélération d'un point matériel dans un référentiel donné

3.3.1 Définition

Définition : L'accélération d'un point M par rapport à un référentiel R est défini par

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{V}(M/R)}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/_R}$$

- unité de l'accélération est $m.s^{-2}$

3.3.2 Accélération en coordonnées cartésiennes

- $\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{x}\overrightarrow{e}_x + \dot{y}\overrightarrow{e}_y + \dot{z}\overrightarrow{e}_z$
- $\overrightarrow{a}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{V}(M/R)}{dt} = \ddot{x}\overrightarrow{e}_x + \ddot{y}\overrightarrow{e}_y + \ddot{z}\overrightarrow{e}_z$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{e}_x + \ddot{y}\overrightarrow{e}_y + \ddot{z}\overrightarrow{e}_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{e}_x + a_y\overrightarrow{e}_y + a_z\overrightarrow{e}_z}$$

avec :

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \ddot{z} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

3.3.3 Accélération en coordonnées cylindriques

- $\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{r}\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{e}_z$
- $\overrightarrow{a}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{V}(M/R)}{dt} = \ddot{r}\overrightarrow{e}_r + \dot{r}\dfrac{d\overrightarrow{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta + r\dot{\theta}\dfrac{d\overrightarrow{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\overrightarrow{e}_z$
  - ▶ $\dfrac{d\overrightarrow{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\overrightarrow{e}_r}{d\theta} = \dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta$
  - ▶ $\dfrac{d\overrightarrow{e}_\theta}{dt} = \dot{\theta}\dfrac{d\overrightarrow{e}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e}_r$

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{e}_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R) = a_r\overrightarrow{e}_r + a_\theta\overrightarrow{e}_\theta + a_z\overrightarrow{e}_z}$$

avec : $\left\{\begin{array}{lcl} a_r & = & \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta & = & 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ a_z & = & \ddot{z} \end{array}\right.$

3.3.4 Accélération en coordonnées sphériques

- $\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{r}\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi$
- on montre que

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R) = a_r\overrightarrow{e}_r + a_\theta\overrightarrow{e}_\theta + a_\varphi\overrightarrow{e}_\varphi}$$

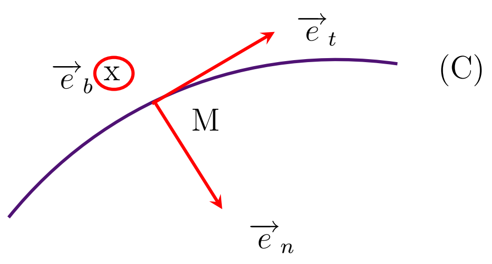
avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_r & = & \dot{r} - r[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta] \\ a_\theta & = & 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ a_\varphi & = & 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\sin\theta\ddot{\varphi} \end{array}\right.$$

3.4 Repère de Frenet

3.4.1 Définition

•Repère de Frenet $(M, \overrightarrow{e}_t, \overrightarrow{e}_n, \overrightarrow{e}_b)$: son origine est confondu avec le point matériel,le vecteur unitaire $\overrightarrow{e}_t$ est tangentiel au trajectoire en point M et dirigé suivant le sens du mouvement,le vecteur unitaire $\overrightarrow{e}_n$ est normale à $\overrightarrow{e}_t$ et dirigé suivant la cavité du trajectoire,le vecteur $\overrightarrow{e}_b$ est défini par $\overrightarrow{e}_b = \overrightarrow{e}_t$ x $\overrightarrow{e}_n$

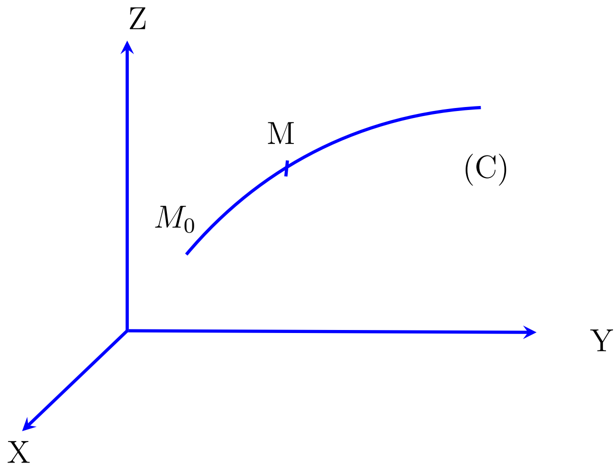


- $(\overrightarrow{e}_t, \overrightarrow{e}_n, \overrightarrow{e}_b)$: trièdre de Frenet

3.4.2 Abscisse curviligne

Considérons un point matériel de masse m qui se déplace le long de (C)

- à l'instant t_0 le point matériel M se trouve en $M_0(x_0, y_0, z_0)$
- à l'instant $t = t_0 + dt$ la point matériel M se trouve en un point $M'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$



▶ On appelle abscisse curviligne s du point matériel M le long de (C) à partir de M_0,la longuer d'arc $\boxed{s = \widehat{M_0M}}$.

▶ l'abscisse curvilgne élémentaire ds est

$$\boxed{ds = M_0M' = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}$$

▶ l'abscisse curviligne s

$$\boxed{s = \int_{M_0}^{M} ds}$$

- Rayon de corbure R

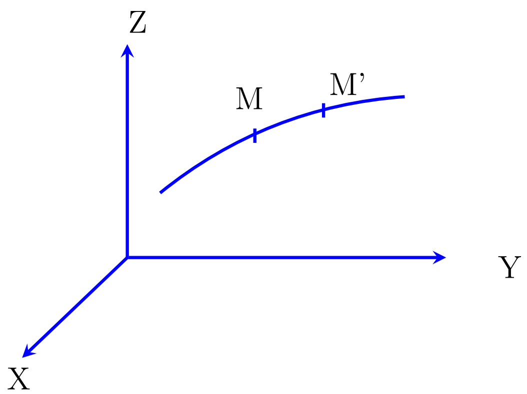
▶ $d\overrightarrow{OM} = ||d\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{e}_t = ||\overrightarrow{MM'}||\overrightarrow{e}_t$

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = ds\overrightarrow{e}_t}$$

$$\boxed{\overrightarrow{e}_t = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}}$$

▶ On définit le rayon de corbure R en M par

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{e}_t}{ds} = \frac{\overrightarrow{e}_n}{R}}$$



3.4.3 Expression de la vitesse dans le trièdre de Frenet

$$\overrightarrow{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{e}_t$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{e}_t}$$

★ Remarque : La vitesse de M par rapport au référentiel de Frenet est nulle .

3.4.4 Expression de l'accélération d'un point M dans le trièdre de Frenet

- $\overrightarrow{V} = \dfrac{ds}{dt}\overrightarrow{e}_t$
- $\overrightarrow{a} = \dfrac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{e}_t + \dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\overrightarrow{e}_t}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{e}_t + \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\dfrac{d\overrightarrow{e}_t}{ds}$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{e}_t + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\overrightarrow{e}_n}{R}}$$

- $V = \dfrac{ds}{dt}$

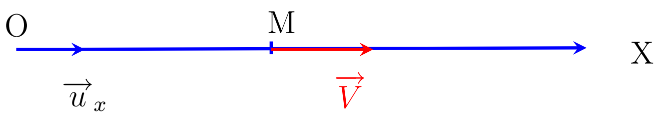
$$\boxed{\overrightarrow{a} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{e}_t + \frac{V^2}{R}\overrightarrow{e}_n = a_T\overrightarrow{e}_T + a_N\overrightarrow{e}_N}$$

$$\begin{cases} a_T &= \dfrac{dV}{dt} &= \text{accélération tangentielle} \\ \\ a_N &= \dfrac{V^2}{R} &= \text{accélération normale} \end{cases}$$

4 Exemples de mouvement

4.1 Mouvement rectiligne uniforme

Considérons un point M qui se déplace le long d'axe (ox)



- le mouvement de M est rectiligne uniforme si $\boxed{\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}}$
- à $t = 0 : M \left| \begin{array}{l} x_0 \\ v_0 \end{array} \right.$

  $a = \dfrac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cte = v_0 = \dfrac{dx}{dt}$

$$\boxed{x(t) = v_0 t + x_0}$$

4.2 Mouvement rectiligne d'accélération constante

- Le point matériel M se déplace rectilignement avec une accélération constante a_0 et une vitesse initiale v_0.
- le mouvement est accéléré si $||\overrightarrow{v}||$ croît $\Rightarrow ||\overrightarrow{v}||^2$ croît donc

  $\dfrac{d||\overrightarrow{v}||^2}{dt} = 2\overrightarrow{v}.\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = 2\overrightarrow{v}\overrightarrow{a} > 0$

$$\boxed{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{a} > 0}$$

- le mouvement est retardé si $||\overrightarrow{v}||$ décroît $\Rightarrow ||\overrightarrow{v}||^2$ décroît donc

  $\dfrac{d||\overrightarrow{v}||^2}{dt} = 2\overrightarrow{v}.\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = 2\overrightarrow{v}\overrightarrow{a} < 0$

$$\boxed{\vec{v}\,.\,\vec{a} < 0}$$

▶ équation du mouvement

- $a_0 = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow v(t) = a_0 t + cte$: avec $v(0) = v_0 = cte$

$$\boxed{v(t) = a_0 t + v_0}$$

- $v = \dfrac{dx}{dt} = a_0 t + v_0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + cte$: avec $x(0) = x_0 = cte$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0}$$

▶ équation indépendante du temps

$$t = \frac{v - v_0}{a_0} \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}a_0\left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)^2 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)$$

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a_0(x - x_0)}$$

4.3 Mouvement rectiligne sinusoïdal

Définition : Considérons un point matériel se déplçant sur l'axe (ox) ,on dit que le mouvement de M est sinusoïdal rectiligne si l'abscisse x du point matériel est relié à son accélération par une relation de type : $\boxed{a = -kx}$ avec $k = cte$ donc l'équation du mouvement s'écrit :

$$\boxed{\ddot{x} + kx = 0}$$

• Solution de l'équation du mouvement

la solution s'écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

- $\omega = \sqrt{k}$: pulsation du mouvement : $rad.s^{-1}$ et $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
- X_m : amplitude
- φ : phase à l'origine
- la vitesse $v = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$
- φ et X_m sont déterminés à partir des conditions initiales
  $\begin{cases} x(0) & = & X_0 \\ \dot{x}(0) & = & V_0 \end{cases}$
  $x(0) = X_0 = X_m \cos\varphi$ et $V_0 = -\omega X_m \sin\varphi$

$$\boxed{X_m = \sqrt{X_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}}}$$

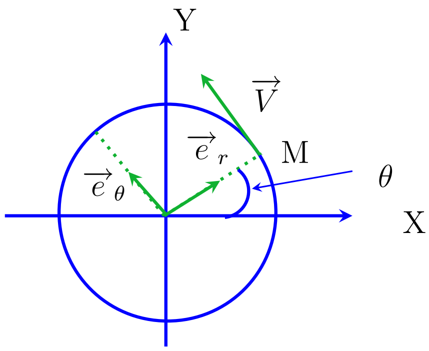
$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{V_0^2}{\omega X_0}}$$

4.4 Mouvement circulaire

- Le mouvement de M est circulaire si la trajectoire décrit par M est circulaire .
- On définit la vitesse angulaire de M par

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}}$$

- le mouvement est circulaire uniforme si $\omega = cte$
- Pour étudier ce mouvement il est préférable d'utiliser la base polaire $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta)$



- $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e}_r$: avec R le rayon du cercle

- $\overrightarrow{V} = \frac{\overrightarrow{OM}}{dt} = R\frac{d\overrightarrow{e}_r}{dt} = R\omega\overrightarrow{e}_\theta$: avec $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

$$\boxed{\overrightarrow{V} = R\omega\overrightarrow{e}_\theta}$$

- $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = R\dot{\omega}\overrightarrow{e}_\theta + R\omega\frac{d\overrightarrow{e}_\theta}{dt}$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = R\dot{\omega}\overrightarrow{e}_\theta - R\omega^2\overrightarrow{e}_r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = a_r\overrightarrow{e}_r + a_\theta\overrightarrow{e}_\theta}$$

$$\begin{cases} a_r = -R\omega^2 & \text{accélération radiale} \\ a_\theta = R\dot{\omega} & \text{accélération orthoradiale} \end{cases}$$

- $\omega = cte = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \omega.t + \theta_0$

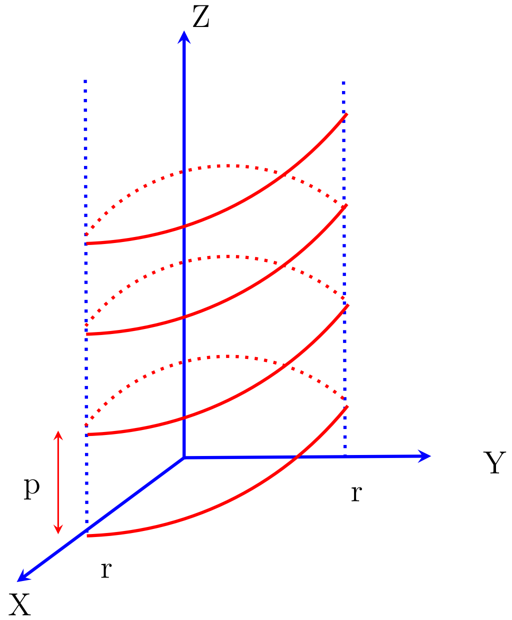
  $a_\theta = 0$ donc $\boxed{\overrightarrow{a} = a_r\overrightarrow{e}_r = -R\omega^2\overrightarrow{e}_r}$

4.5 Mouvement hélicoïdal

▶ Les équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = r\cos\omega t \\ y(t) = r\sin\omega t \\ z(t) = \alpha t \end{cases}$: avec α, ω, r sont des constantes

- dans le plan xoy le mouvement est circulaire uniforme de centre O de rayon r et une vitesse angulaire ω.
- suivant oz le mouvement est rectiligne uniforme de vitesse α .

Conclusion : le mouvement hélicoïdal est la superposition du mouvement rectiligne uniforme et le mouvement circulaire uniforme



- la vitesse $\overrightarrow{V} = \dot{x}\overrightarrow{e}_x + \dot{y}\overrightarrow{e}_y + \dot{z}\overrightarrow{e}_z = r\omega(-\sin\omega t\overrightarrow{e}_x + \cos\omega t\overrightarrow{e}_y) + \alpha\overrightarrow{e}_z$
  $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + \alpha^2} = cte$
- le pas d'hélice : $p = z(t+T) - z(t) = \alpha T$

$$\boxed{p = \frac{2\pi}{\omega}\alpha}$$