Planche n° 11. Exponentielles et logarithmes

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**)

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice n° 2 (I)**

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice n° 3 (I)**

1) Etudier brièvement la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.

2) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Exercice n° 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1) **(**)** $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$ **2)** **(**)** $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$
3) **(***)** $\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0$ **4)** **(**)** $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Exercice n° 5 (***)

Trouver $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercice n° 6

Construire le graphe des fonctions suivantes :

1) **(***I)** $f_1(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0, +\infty[$).

2) **(**)** $f_2(x) = \log_2\left(1 - \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 5x + 6\right)\right)$.

Exercice n° 7 (**)

Montrer que $\forall x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Planche n° 12. Fonctions puissances

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (T)**

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes puis étudier leur dérivabilité :

1) $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

2) $f_2 : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1}$.

2) $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^3-x^4}$.

Exercice n° 2 (*T)

Donner la dérivée des fonctions suivantes :

$$\textbf{1)}\ \sqrt{x^2+1} \quad \textbf{2)}\ \sqrt[3]{x^3+1} \quad \textbf{3)}\ \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^2+x+1}\right)^3}$$

$$\textbf{4)}\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \textbf{5)}\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Exercice n° 3 (T)**

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-1}{\sqrt{3x+15}-3}$.

Exercice n° 4 (***)

Etude complète de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. On étudiera en particulier la dérivabilité de f en 0 à gauche. D'autre part, on montrera que la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et que la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

Exercice n° 5 (**)

Etudier le signe de $\sqrt{x^2+1}-x$ et $\sqrt{x^2+1}+x$.

Exercice n° 6 (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{4\cos^2 x+1}+16.2^{4\sin^2 x-3}=20$.

Planche n° 13. Fonctions trigonométriques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*IT)**

Etude complète et graphe des fonctions suivantes :

1) $f_1\ :\ x \mapsto 2\cos(x) + \cos(2x)$ **2)** $f_2\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$

3) $f_3\ :\ x \mapsto |\tan(x)| + \cos(x)$ **2)** $f_4\ :\ x \mapsto \dfrac{2\sin(x) + 1}{2\cos(x) + 1}$

Exercice n° 2 (*I)**

Calculer $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x\ dx$ et $J = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x\ dx$.

Exercice n° 3 (*T)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{(1+i)x}$. Montrer que pour tout réel x, $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$.

Planche n° 14. Fonctions trigonométriques réciproques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*IT)**

Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes :

$$\sin(\operatorname{Arcsin} x),\ \operatorname{Arcsin}(\sin x),\ \cos(\operatorname{Arccos} x),\ \operatorname{Arccos}(\cos x),\ \tan(\operatorname{Arctan} x),\ \operatorname{Arctan}(\tan x).$$

Exercice n° 2 (IT)

1) (**) Calculer $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$ pour x élément de $[-1; 1]$.

2) (**) Calculer $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$ pour x réel non nul.

3) (**) Calculer $\cos(\operatorname{Arctan} a)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} a)$ pour a réel donné.

4) (***) Calculer, pour a et b réels tels que $ab \neq 1$, $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ en fonction de $\operatorname{Arctan} \dfrac{a+b}{1-ab}$ (on étudiera d'abord $\cos(\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b)$ et on distinguera les cas $ab < 1$, $ab > 1$ et $a > 0$, $ab > 1$ et $a < 0$).

Exercice n° 3 (*I)**

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin} \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos} \sqrt{t}\, dt$.

Exercice n° 4 (***)

Simplifier les expressions suivantes :

1) $f_1(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

2) $f_2(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

3) $f_3(x) = \operatorname{Arcsin} \sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

4) $f_4(x) = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2x^2} - \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{x+1} + \operatorname{Arctan} \dfrac{x-1}{x}$.

Exercice n° 5 (I)**

Calculer $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{8}$.

Exercice n° 6 (*I)**

Calculer $u_n = \operatorname{Arctan} \dfrac{2}{1^2} + \operatorname{Arctan} \dfrac{2}{2^2} + \ldots + \operatorname{Arctan} \dfrac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. (Utiliser le n° 2.4))

Exercice n° 7 (***) (Mines de DOUAI 1984)

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2 - 1) \operatorname{Arctan} \frac{1}{2x-1},$$

et on appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?

2) Exprimer, sur $\mathscr{D} \setminus \{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.

3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g.

4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice n° 8 (**)

Simplifier les expressions suivantes

$$\textbf{1)}\ \sin(2\operatorname{Arcsin} x) \quad \textbf{2)}\ \cos(2\operatorname{Arccos} x) \quad \textbf{3)}\ \sin^2\left(\frac{\operatorname{Arccos} x}{2}\right)$$

Exercice n° 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) (*) $\cos x = \dfrac{1}{3}$

2) (*) $\sin(2x) = -\dfrac{1}{4}$

3) (*) $\tan(x) = 3$

4) (***) $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

5) (***) $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2})$

6) (***) $2\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

7) (***) $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Planche n° 15. Trigonométrie hyperbolique

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*IT)

Etablir pour ch, sh et th les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

Exercice n° 2 (**)

Etudier $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x) - x$. Montrer en particulier que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x - \ln 2$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$ (on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$. Construire le graphe de f et la droite $\mathscr{D}$.

Exercice n° 3 (**)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{sh}(2 + x) + \operatorname{sh}(2 + 2x) + \ldots + \operatorname{sh}(2 + 100x) = 0$.

Exercice n° 4 (I)**

1) Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\operatorname{th} x = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$.

2) En déduire la valeur de $u_n = 2^0 \operatorname{th}\left(2^0 x\right) + 2^1 \operatorname{th}\left(2^1 x\right) + \ldots + 2^n \operatorname{th}\left(2^n x\right)$ pour n entier naturel et x réel non nul donnés puis calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice n° 5 (*I)** (définition de argsh, argch et argth)

1) a) Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh la fonction réciproque (argument sinus hyperbolique).

b) Construire le graphe de argsh.

c) Déterminer une expression simple de l'argument sinus hyperbolique d'un nombre (ou encore résoudre l'équation $\operatorname{argsh} x = y$ d'inconnue x et de paramètre y).

d) Etudier la dérivabilité de argsh et déterminer sa dérivée.

2) a) Montrer que ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser. On note argch la fonction réciproque (argument cosinus hyperbolique).

b) Construire le graphe de argch.

c) Déterminer une expression simple de l'argument cosinus hyperbolique d'un nombre.

d) Etudier la dérivabilité de argch et déterminer sa dérivée.

3) a) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. On note argth la fonction réciproque (argument tangente hyperbolique).

b) Construire le graphe de argth.

c) Déterminer une expression simple de l'argument tangente hyperbolique d'un nombre.

d) Etudier la dérivabilité de argth et déterminer sa dérivée.

Exercice n° 6 (**)

Simplifier les expressions suivantes

1) $\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

2) $\dfrac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}$.

3) $\operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y$.

Exercice n° 7 (T)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\operatorname{ch} x = 2$

2) $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice n° 8 (**)

Calculer $\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(ak+b)$, $((a,b) \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{N})$.

Exercice n° 9 (***)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ en discutant en fonction des paramètres réels a, b et c (pénible).

