

## Modélisation et contrôle optimal d'une épidémie

Passionné par l'application des mathématiques dans la vie quotidienne et sachant que plusieurs pays ont échoué à confronter la COVID-19 durant ces trois ans, je me suis motivé à modéliser la propagation d'une épidémie tout en suivant une méthode déterministe afin d'assurer un contrôle optimal de cette dernière.

Le sujet est relié au thème de la santé et de la prévention étant donné l'utilisation de la théorie du contrôle pour suggérer une stratégie efficace de minimisation du nombre d'individus infectés durant la pandémie tout en équilibrant la quantité nécessaire de vaccins nécessaires avec la disponibilité financière.

### Positionnement thématique (ETAPE 1)

*MATHEMATIQUES (Analyse), INFORMATIQUE (Informatique pratique).*

### Mots-clés (ETAPE 1)

Mots-Clés (en français)	Mots-Clés (en anglais)
<i>Épidémiologie</i>	<i>Epidemiology</i>
<i>Modèle SIR</i>	<i>SIR model</i>
<i>Contrôle optimal</i>	<i>Optimal control</i>
<i>Principe du maximum de Pontryagin's maximum</i>	<i>principle</i>
<i>Pontryagin</i>	<i>Shooting method</i>
<i>Méthode de tir</i>	

### Bibliographie commentée

L'épidémiologie est : "Etude de la distribution des maladies et des facteurs qui en déterminent la fréquence." (Monson) "Raisonnement et méthode appliqués à la description des phénomènes de santé, à l'explication de leur étiologie et à la recherche des méthodes d'intervention les plus efficaces." (Jenicek) L'épidémiologie dépasse donc le simple cadre de l'étude des épidémies et des maladies contagieuses. Elle étend son champ d'action à des phénomènes morbides plus complexes, en prenant en compte des facteurs de dispersion dans le temps et l'espace et le caractère multifactoriel des phénomènes étudiés. [1]

La modélisation épidémiologique repose principalement sur les modèles dits à compartiments. Il s'agit de diviser la population en plusieurs classes selon leur rapport à la maladie.

La modélisation est clairement un processus itératif. Le modèle n'est pas donné par l'examen du système ; il résulte au contraire d'une suite délicate de décisions et de révisions. La délimitation même du système est un choix qui évolue au cours du processus. À tout moment, la simulation permet d'explorer la gamme de comportements générés par les équations qui composent le modèle. C'est à travers la confrontation de ces comportements simulés avec la connaissance des comportements du système étudié que le modèle peut être modifié, affiné ou étendu en conséquence.

Conjointement, la compréhension du système s'améliore.

Au-delà de la compréhension des comportements des systèmes, les modèles permettent de tester et d'évaluer des stratégies d'action. S'agissant d'écosystèmes, des modèles appropriés peuvent ainsi aider à fixer des quotas de chasse ou de pêche. En épidémiologie, un modèle de propagation peut participer à la définition de stratégies de vaccination ou d'isolement des malades. [2]

La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable  $t$  qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. L'objectif de la théorie de contrôle est de stabiliser le système, c'est à dire, le rendre insensible à des perturbations ; c'est ce qu'on appelle la stabilisation, ou de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation ; c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal, etc.

L'application de la théorie du contrôle optimal regroupe un nombre de sujets et de domaines extrêmement vastes : économie, mécanique, médecine, chimie, robotique, aéronautique et biologie, etc. En effet, de nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : système de freinage ABS, assistance à la conduite, contrôle des flux routiers, photographie numérique, contrôle de procédés chimiques, chaînes industrielles de montage, systèmes médicaux automatisés, guidage aérospatiaux, etc. [3]

Nous nous intéressons à l'application de la théorie du contrôle optimal aux épidémies car aujourd'hui stopper les maladies infectieuses est plus que jamais un problème international et les mathématiques se sont révélées être un puissant outil, aussi bien d'aide à la décision que de prévision et de prévention.

On considère que la théorie moderne du contrôle optimal a commencé à la fin des années 1950 avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. D'une manière générale, un système dynamique à contrôler est un processus comprenant des entrées et des sorties. Les entrées du système (les contrôles) sont choisies de manière à optimiser un critère de performance. [4]

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire, ou "nonlinear programming"). Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir ("shooting method"), un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum. [5]

## Problématique retenue

On modélise généralement une épidémie par la méthode SIR considérant l'immunité absolue des personnes guéries. Or, l'expérience nous indique que cette hypothèse n'est pas réaliste pour une large gamme de maladies infectieuses. De plus, l'efficacité du processus de vaccination s'avère d'être primordiale pour contourner l'épidémie.

## Objectifs du TIPE

Mon objectif est la modélisation de la propagation des virus à l'aide du modèle déterministe SIR auquel plusieurs améliorations seront établies. Ainsi, mon étude rentre dans le cadre du contrôle optimal reposant principalement sur une commande de taux de vaccination sur laquelle le principe du maximum de Pontryagin est appliqué afin de déterminer le taux de vaccination nécessaire ainsi que la période optimale de distribution du vaccin pour contourner la maladie de manière idéale à travers la minimisation optimale à la fois du nombre de personnes infectées et du coût de vaccination (le financement).

## Références bibliographiques (ETAPE 1)

- [1] DR ABDOUN MERIEM : INTRODUCTION EN EPIDEMIOLOGIE : <https://fmedecine.univ-setif.dz/Cours/1%20INTRODUCTION%20EN%20EPIDEMIOLOGIE%20Cours%205eme%20Ann%C3%A9e%20pharmacie%20Pr%20ABDOUNE.pdf>
- [2] FRÉDÉRIC PROÏA : Application de la méthode SIR Modélisation et prédiction de courbes de charge individuelles : [https://www.math.univ-toulouse.fr/~agarivie/Telecom/slidesMAS/Proia\\_SIR\\_MAS.pdf](https://www.math.univ-toulouse.fr/~agarivie/Telecom/slidesMAS/Proia_SIR_MAS.pdf)
- [3] GRIB SARAH DEHBI LYDIA : Contrôle optimal d'une épidémie : <https://www.ummto.dz/dspace/bitstream/handle/ummto/2614/Grib%2C%20Sarah.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [4] LOÏC BOURDIN : Principe du Maximum de Pontryagin pour des problèmes de contrôle optimal non linéaires sur time scale. : <http://math.univ-lyon1.fr/~jera/2013/supports/bourdin.pdf>
- [5] DAVID SÉNÉCHAL : MÉTHODES NUMÉRIQUES ET SIMULATIONS : [https://www.physique.usherbrooke.ca/pages/sites/default/files/PHQ404\\_0.pdf](https://www.physique.usherbrooke.ca/pages/sites/default/files/PHQ404_0.pdf)

## DOT

- [1] *Documentation sur les outils mathématiques de modélisation et d'optimisation sous contraintes.*
- [2] *Etude du modèle SIR et les failles dans les conditions de son élaboration.*
- [3] *Amélioration du modèle SIR après quelques recherches.*
- [4] *Mise à niveau sur la théorie du contrôle et d'optimisation par l'étude du principe du maximum de PONTRYAGIN.*
- [5] *Application du principe du maximum de PONTRYAGIN sur le modèle amélioré.*
- [6] *Recours à la résolution numérique vu l'impossibilité de la résolution analytique.*
- [7] *Choix et étude de la méthode de tir comme méthode de résolution numérique.*
- [8] *Analyse des résultats obtenues.*

