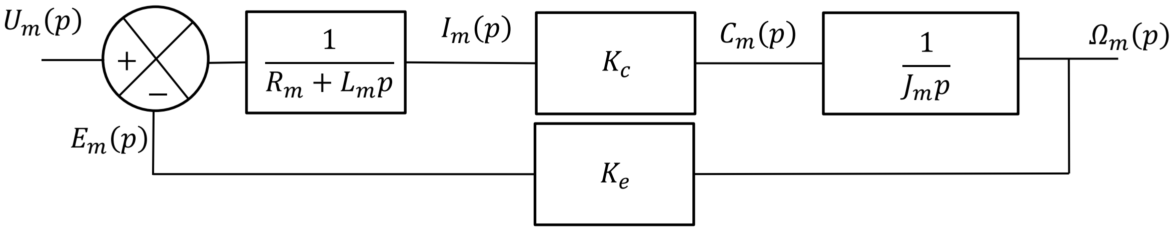
Antenne parabolique

Etude du moteur

Question 1: Exprimer ces équations dans le domaine de Laplace. Toutes les conditions initiales seront nulles, et considérées comme telles dans la suite de l'exercice.

(1)	$U_m(p) = E_m(p) + R_m I_m(p) + pL_m I_m(p)$
(2)	$E_m(p) = K_e \Omega_m(p)$
(3)	$C_m(p) = K_c I_m(p)$
(4)	$C_m(p) = pJ_m \Omega_m(p)$

Question 2: Réaliser le schéma bloc du moteur.



Question 3: Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$. Montrer que $H(p)$ peut se mettre sous la forme canonique d'un second ordre et déterminer les expressions littérales de ses coefficients en fonction des constantes fournies.

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$$

$$H(p) = \frac{\frac{Kc}{J_m p(R_m + L_m p)}}{1 + \frac{KeKc}{J_m p(R_m + L_m p)}} = \frac{\frac{1}{Ke}}{1 + \frac{R_m J_m}{KeKc} p + \frac{L_m J_m}{KeKc} p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{\omega}{\omega_0}^2 p^2}$$

$$K = \frac{1}{Ke} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{KeKc}{L_m J_m}} \quad ; \quad z = \frac{R_m J_m}{2\sqrt{KeKcL_m J_m}}$$

Question 4: Exprimer le coefficient d'amortissement du système en fonction de τ_e et τ_m.

$$z = \frac{R_m J_m}{2\sqrt{KeKcL_m J_m}} = \frac{R_m J_m}{KeKc} \frac{\sqrt{KeKc}}{2\sqrt{L_m J_m}} = \frac{1}{2} \frac{R_m J_m}{KeKc} \sqrt{\frac{KeKc}{L_m J_m}}$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{\tau_m}{\sqrt{\tau_e \tau_m}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_m}{\tau_e}}$$

Question 5: Conclure sachant que $\tau_e \ll \tau_m$

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_m}{\tau_e}} \gg 1$$

Le système ne présentera pas de dépassement à un échelon.

Question 6: Montrer alors que la fonction de transfert du moteur peut s'écrire $H(p) \approx \frac{K}{(1+\tau_e p)(1+\tau_m p)}$.

$$(1+\tau_e p)(1+\tau_m p) = 1 + (\tau_e + \tau_m)p + \tau_e\tau_m p^2 = 1 + \tau_m p + \tau_e\tau_m p^2 \; si \; \tau_e \ll \tau_m$$

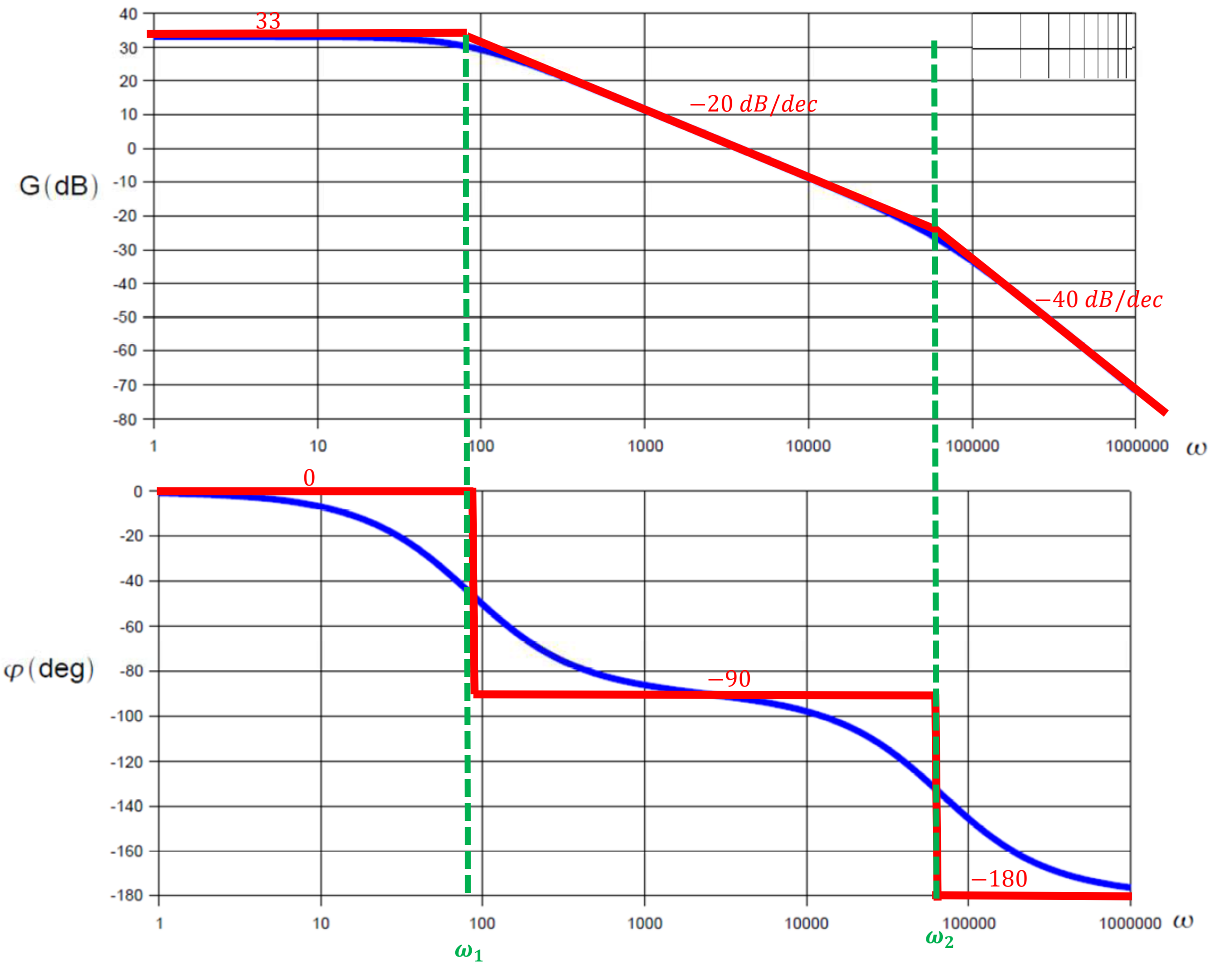
$$1 + \tau_m p + \tau_e\tau_m p^2 = 1 + \frac{R_m J_m}{k_e k_c}p + \frac{L_m}{R_m}\frac{R_m J_m}{k_e k_c}p^2 = 1 + \frac{R_m J_m}{k_e k_c}p + \frac{L_m J_m}{k_e k_c}p^2$$

$$H(p) = \frac{\frac{1}{Ke}}{1 + \frac{R_m J_m}{KeKc}p + \frac{L_m J_m}{KeKc}p^2} \approx \frac{\frac{1}{Ke}}{(1+\tau_e p)(1+\tau_m p)}$$

Question 7: Tracer les asymptotes sur le tracé ci-dessus, identifier les constantes inconnues et préciser sur les diagrammes l'ensemble des caractéristiques connues à ce stade (pulsations, pentes, valeurs).

Le système a un gain $K_{BF} = \frac{1}{Ke}$. Ke est donné dans l'énoncé, mais on peut vérifier que tout est bon.

$$K_{BF} = \frac{1}{Ke} = \frac{1}{0,022} = 45 \quad ; \quad 20\log 45 = 33$$



On identifie les pulsations sur le diagramme :

$$\omega_1 = 10^{1+0,91} \approx 80\ rad.s^{-1}$$

$$\tau_m = \frac{1}{\omega_1} = 0,0125$$

$$\omega_2 = 10^{4+0,81} \approx 65\ 000\ rad.s^{-1}$$

Question 8: Justifier à postériori que $\tau_e \ll \tau_m$ et en déduire J_m et L_m.

$$\tau_m = \frac{1}{\omega_1} = 0{,}0125$$
$$\tau_e = \frac{1}{\omega_2} = 1{,}5.10^{-5}$$
$$\frac{\tau_e}{\tau_m} = \frac{1{,}5.10^{-5}}{0{,}0125} = \frac{12}{1000}$$
$$\tau_e \ll \tau_m$$

$$\tau_e = \frac{L_m}{R_m} = 1{,}25.10^{-5}\,s$$
$$L_m = \tau_e R_m = 1{,}5.10^{-5} * 9{,}1 = 1{,}1.10^{-4} = 0{,}14\,mH$$

$$\tau_m = \frac{R_m J_m}{k_e k_c} = 0{,}0125$$
$$J_m = \frac{\tau_m k_e k_c}{R_m} = \frac{0{,}0125 * 0{,}022 * 0{,}022}{9{,}1} = 0{,}6.10^{-6}\,kg.m^2$$

Question 9: Justifier le fait que la fonction $\omega_m(t)$ aura une pente à l'origine horizontale.

$$U_m(p) = \frac{U_0}{p}$$

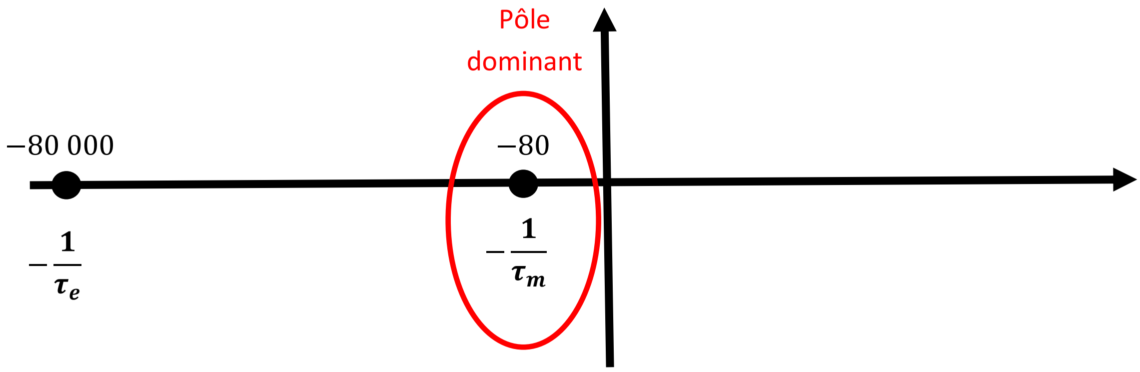
Réponse d'un système du second ordre à un échelon : on sait que la pente à l'origine est nulle.

$$\Omega_m(p) = H(p)U_m(p) = H(p)\frac{U_0}{p}$$
$$\mathcal{L}\big(\omega_m{}'(t)\big) = p\Omega_m(p) = H(p)U_0$$

$$\omega_m{}'(0) = \lim_{p\to+\infty} p\mathcal{L}\big(\omega_m{}'(t)\big) = \lim_{p\to+\infty} pH(p)U_0$$
$$\omega_m{}'(0) = \lim_{p\to+\infty} \frac{pKU_0}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{\omega}{\omega_0}^2 p^2} = \lim_{p\to+\infty} \frac{pKU_0}{\frac{\omega}{\omega_0}^2 p^2} = 0$$

Question 10: Justifier le fait que le moteur puisse être assimilé à un système du premier ordre pour étudier sa réponse indicielle

Etude des pôles :



Le pôle dominant est $-\frac{1}{\tau_m}$, donc on peut proposer une réduction de modèle pour $H(p)$:

$$H(p) = \frac{K}{(1+\tau_e p)(1+\tau_m p)} \underset{t_{r_{5\%}}}{\sim} \frac{K}{1+\tau_m p}$$

Question 11: Déterminer l'expression analytique de $\boldsymbol{\omega_m(t)}$ en fonction de $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{\tau_m}$ et $\boldsymbol{U_0}$.

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau_m p}$$

$$\Omega_m(p) = \frac{K}{1+\tau_m p} E(p) = \frac{K}{1+\tau_m p}\frac{U_0}{p} = KU_0 \frac{1}{p(1+\tau_m p)}$$

$$\Omega_m(p) = KU_0\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_m}{1+\tau_m p}\right) = KU_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau_m}+p}\right)$$

$$\omega_m(t) = KU_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right)u(t)$$

Question 12: Montrer que le moteur n'excède pas sa valeur limite de rotation de $\boldsymbol{8000\ tr.min^{-1}}$.

On sait qu'on tend vers KU_0

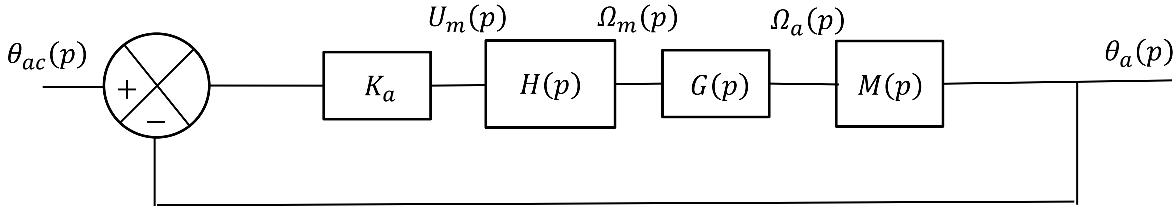
$$U_0 = 18\ V$$
$$K = 45$$

$$\lim_{t\to+\infty} \omega_m(t) = \lim_{p\to 0} p\Omega_m(p) = \lim_{p\to 0}\left(p\frac{K}{1+\tau_m p}\frac{U_0}{p}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{KU_0}{1+\tau_m p}\right) = KU_0$$

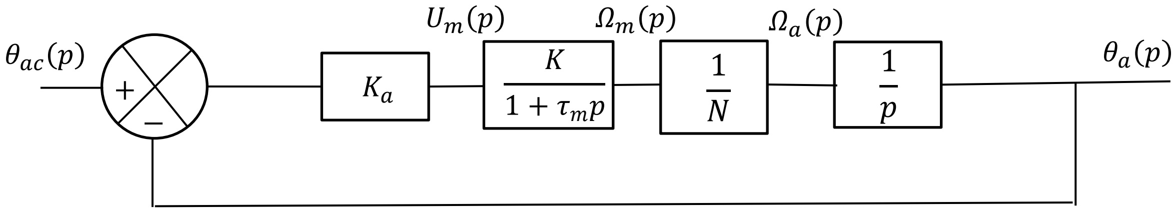
$$\lim_{t\to+\infty} \omega_m(t) = 45 * 18 = 810\ rad.s^{-1} = 810 * \frac{60}{2\pi} = 7735\ tr.min^{-1} < 8000\ tr.min^{-1}$$

Schéma bloc du système

Question 13: Déterminer l'expression de $G(p)$ et $M(p)$



$$G(p) = \frac{\Omega_a(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{N}$$
$$M(p) = \frac{\theta_a(p)}{\Omega_a(p)} = \frac{1}{p}$$



Question 14: Déterminer la fonction de transfert $\frac{\theta_a(p)}{\theta_{ac}(p)}$, montrer que c'est une fonction du second ordre, et déterminer l'expression littérale de son gain K_T, de son coefficient d'amortissement z_T et de sa pulsation propre ω_{0_T}.

$$\frac{\theta_a(p)}{\theta_{ac}(p)} = \frac{\frac{K_a K}{(1+\tau_m p)Np}}{1 + \frac{K_a K}{(1+\tau_m p)Np}} = \frac{K_a K}{(1+\tau_m p)Np + K_a K}$$
$$\frac{\theta_a(p)}{\theta_{ac}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{N}{K_a K}p + \frac{N\tau_m}{K_a K}p^2} = \frac{K_T}{1 + \frac{2z_T}{\omega_{0_T}}p + \frac{p^2}{{\omega_{0_T}}^2}}$$

$$K_T = 1$$
$$\omega_{0_T} = \sqrt{\frac{K_a K}{N\tau_m}}$$
$$z_T = \frac{1}{2}\omega_{0_T}\frac{N}{K_a K} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_a K}{N\tau_m}}\frac{N}{K_a K} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{K_a K \tau_m}}$$

Validation des performances

Question 15: Montrer que le système vérifie le critère d'écart de positionnement du cahier des charges.

3 solutions :

- Théorème de la valeur finale
- Gain de 1
- FTBO de classe 1 et retour unitaire, donc $K_T = 1$, l'écart statique est nul.

Le cahier des charges précise un écart de $\pm 0{,}1°$.

Question 16: Déterminer K_a pour que le système puisse satisfaire le critère de temps de réponse du cahier des charges.

Temps de réponse le plus faible, il faut $z_T = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{K_a K \tau_m}} = z_T$$

$$K_a = \frac{N}{4K\tau_m {z_T}^2} = \frac{23328}{4 * 45 * 0{,}012 * \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{23328}{2 * 45 * 0{,}012} = 21\,600\ V.rad^{-1}$$