Planche n° 26. Matrices (partie I). Corrigé

Exercice n° 1

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$.

- L'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $J^n = 3^{n-1}J$. Alors,

$$J^{n+1} = J^n \times J = 3^{n-1}J \times J = 3^{n-1} \times 3J = 3^{(n+1)-1}J.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + J$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque les matrices I_3 et J commutent ($I_3 \times J = J \times I_3 = J$), la formule du binôme de Newton fournit :

$$\begin{aligned}
A^n = (I_3 + J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k \\
&= I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\right) J = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k}\right) J = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k} - 1\right) J \\
&= I_3 + \frac{(1+3)^n - 1}{3} J = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} J \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité reste vraie quand $n = 0$ ($A^0 = I_3$) et donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.}$$

3) a) On a vu que $J^2 = 3J$ ou encore $(A - I_3)^2 = 3(A - I_3)$. En développant, on obtient $A^2 - 2A + I_3 = 3A - 3I_3$ puis

$$A^2 - 5A + 4I_3 = 0.$$

b) On en déduit que $-A^2 + 5A = 4I_3$ puis que $A \times \frac{1}{4}(-A + 5I_3) = \frac{1}{4}(-A + 5I_3) \times A = I_3$. Par suite, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(-A + 5I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

4) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ puis, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. Ceci fournit plus explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2+2(4^n-1) \\ 4^n-1+2(4^n-1) \\ 4^n-1+2(4^n+2) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\times 4^n \\ 3\times 4^n-3 \\ 3\times 4^n+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n \\ 4^n-1 \\ 4^n+1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4^n,\ v_n = 4^n-1 \text{ et } w_n = 4^n+1.}$$

b) Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ puis $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$(S) \Leftrightarrow AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/4 \\ -1/4 \\ -9/4 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions du système proposé est $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{15}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{9}{4}\right)\right\}$.

Exercice n° 2

Soient x et y deux réels.

$$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x\cos y - \sin x \sin y & -(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} = A(x+y).$$

En particulier,

$$A(x)A(-x) = A(-x)A(x) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

et $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$.

On a aussi, pour n entier naturel non nul donné :

$$(A(x))^n = A(x)A(x)...A(x) = A(x + x + \ldots + x) = A(nx),$$

ce qui reste clair pour $n = 0$ car $A(x)^0 = I_2 = A(0)$. Enfin, pour n entier naturel non nul, $(A(x))^{-n} = (A(x)^{-1})^n = A(-x)^n = A(-nx)$. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ (A(x))^n = A(nx) = \begin{pmatrix} \cos(nx) & -\sin(nx) \\ \sin(nx) & \cos(nx) \end{pmatrix}.}$$

Exercice n° 3

1) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. $a_{i,j} = 1$ si et seulement si $i + j = n + 1$ ou encore $j = n + 1 - i$ et sinon, $a_{i,j}$ vaut 0. Donc,

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} = \delta_{n+1-i,j}.}$$

2) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de A^2 vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{n+1-i,k}\delta_{n+1-k,j} = \delta_{n+1-(n+1-i),j} = \delta_{i,j}.$$

Par suite, $A^2 = I_p$. Par suite, $A \in GL_p(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, A^n existe.

3) Mais alors, pour k entier relatif donné, $A^{2k} = \left(A^2\right)^k = (I_p)^k = I_p$ et $A^{2k+1} = A^{2k} \times A = A$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ A^{2k} = I_p \text{ et } A^{2k+1} = A.}$$

Exercice n° 4

Pour $x \in]-1,1[$, posons $M(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Posons ensuite $G = \{M(x),\ x \in]-1,1[\}$.
Soit alors $x \in]-1,1[$. Il existe un réel a (et un seul) tel que $x = \text{th} a$. On a

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \text{ch}\, a \begin{pmatrix} 1 & \text{th}\, a \\ \text{th}\, a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\, a & \text{sh}\, a \\ \text{sh}\, a & \text{ch}\, a \end{pmatrix}.$$

Posons, pour $a \in \mathbb{R}$, $N(a) = \begin{pmatrix} \text{ch}\, a & \text{sh}\, a \\ \text{sh}\, a & \text{ch}\, a \end{pmatrix}$. On a ainsi $\forall x \in]-1,1[,\ M(x) = N(a)$ où a est le réel tel que $x = \text{th}\, a$ ou aussi, $\forall a \in \mathbb{R},\ N(a) = M(\text{th}\, a)$. Par suite, $G = \{N(a),\ a \in \mathbb{R}\}$.

Soit alors $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} N(a)N(b) &= \begin{pmatrix} \text{ch}\, a & \text{sh}\, a \\ \text{sh}\, a & \text{ch}\, a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{ch}\, b & \text{sh}\, b \\ \text{sh}\, b & \text{ch}\, b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\, a\, \text{ch}\, b + \text{sh}\, a\, \text{sh}\, b & \text{sh}\, a\, \text{ch}\, b + \text{sh}\, b\, \text{ch}\, a \\ \text{sh}\, a\, \text{ch}\, b + \text{sh}\, b\, \text{ch}\, a & \text{ch}\, a\, \text{ch}\, b + \text{sh}\, a\, \text{sh}\, b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(a+b) & \text{sh}(a+b) \\ \text{sh}(a+b) & \text{ch}(a+b) \end{pmatrix} = N(a+b). \end{aligned}$$

Montrons alors que G est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.

- $N(0) = I_2 \in G$ et donc G est non vide.
- $\forall a \in \mathbb{R},\ N(a) \times N(-a) = N(-a) \times N(a) = N(0) = I_2$ et donc, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $N(a) \in GL_2(\mathbb{R})$. Par suite, $G \subset \mathscr{GL}_2(\mathbb{R})$.
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ N(a)N(b) = N(a+b) \in G$ et $\forall a \in \mathbb{R},\ (N(a))^{-1} = N(-a) \in G$.

On a montré que G est un sous-groupe de $(\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ et donc que $(G, \times)$ est un groupe.

Exercice n° 5

1) $0_2 + 0I_2 + 0J \in E$. Ensuite, pour $(x,x',y,y') \in \mathbb{R}^4$, $(xI_2 + yJ) - (x'I_2 + y'J) = (x-x')I_2 + (y-y')J \in E$. Donc, E est un sous-groupe du groupe $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

2) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I$. Plus généralement, pour $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$,

$$M(x,y) \times M(x',y') = (xI_2 + yJ) \times (x'I_2 + y'J) = xx'I_2 + (xy' + yx')J + yy'J^2 = (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J\ (*).$$

Montrons alors que $(E, +, \times)$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

- On sait déjà que $(E, +)$ est un sous-espace groupe du groupe $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
- D'après $(*)$, la restriction de $\times$ à E est une loi interne dans E.
- L'élément pour $\times$ à savoir $I_2 = 1.I_2 + 0.J$ est dans E.
- D'après $(*)$, $\times$ est commutative dans E.

Donc, $(E, +, \times)$ est un sous-anneau commutatif de l'anneau $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

3) Soit $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} M(x,y) = M(x',y') &\Leftrightarrow x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y = x'+y' \text{ et } y = y' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'. \end{aligned}$$

4) Soit $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$. D'après le calcul de la question 2), $M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - yy', xy' + yx' + 2yy')$ puis puis

$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(x',y') = I_2 &\Leftrightarrow M(xx' - yy', xy' + yx' + 2yy') = M(1,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} xx' + yy' = 1 \\ yx' + (x+2y)y' = 0 \end{array}\right. \quad \text{(d'après la question 3)).} \end{aligned}$$

Le déterminant de ce dernier système d'inconnues x' et y' vaut $x(x+2y)+y^2=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$.

Si $y\neq -x$, ce système admet un et seule couple solution. Par suite, si $y\neq -x$, il existe $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ tel que $M(x,y)\times M(x',y')=I_2$. Dans ce cas, la matrice $M(x,y)$ est inversible dans E.
Si $y=-x$, le système s'écrit $\left\{\begin{array}{l}x(x'+y')=1\\-x(x'+y')=0\end{array}\right.$ et n'a pas de solution.

Les inversibles de l'anneau $(E,+,\times)$ sont les matrices $M(x,y)$ où x et y sont deux réels tels que $y\neq -x$.

5) a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}M(x,y)^2=I_2&\Leftrightarrow M\left(x^2-y^2,2xy+2y^2\right)=M(1,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\2y(x+y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x^2=1\end{array}\right.\text{ ou}\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\x+y=0\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=-1\end{array}\right..\end{aligned}$$

Dans E, l'équation $X^2=I_2$ admet exactement deux solutions à savoir I_2 et $-I_2$.

b) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$M(x,y)^2=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=0\\2y(x+y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x^2=0\end{array}\right.\text{ ou}\left\{\begin{array}{l}y=-x\\0=0\end{array}\right.\Leftrightarrow y=-x.$$

Dans E, l'équation $X^2=0$ admet pour solutions les matrices de la forme $\lambda(J-I)=\begin{pmatrix}0&\lambda\\0&0\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

c) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}M(x,y)^2=M(x,y)&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=x\\2y(x+y)=y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=x\\y(2x+2y-1)=0\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x^2=x\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=-x+\dfrac{1}{2}\\x^2-\left(-x+\dfrac{1}{2}\right)^2=x\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=0\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{4}=0\\y=-x+\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=0\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right..\end{aligned}$$

Dans E, l'équation $X^2=X$ admet exactement deux solutions à savoir 0 et I_2.

6) Posons $N=J-I=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. On a $N^2=0$ et plus généralement $N^k=0$ pour tout $k\geqslant 2$.

Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$M(x,y)=xI+yJ=xI+y(I+N)=(x+y)I+yN.$$

Puisque les matrices $(x+y)I$ et yN commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned}(M(x,y))^n=((x+y)I+yN)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x+y)^{n-k}I^{n-k}y^kN^k\\&=(x+y)^nI+ny(x+y)^{n-1}N=\begin{pmatrix}(x+y)^n&ny(x+y)^{n-1}\\0&(x+y)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice n° 6

Soit $A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A commute avec toute matrice, en particulier : $\forall(i,j)\in\{1,...,n\}^2,\ AE_{i,j}=E_{i,j}A$.
Maintenant, pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,

$$AE_{i,j}=\sum_{k,l} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&\dots&0&a_{1,i}&0&\dots&0\\ &&&a_{2,i}&&&\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ \vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ &&&&&&\\ 0&\dots&0&a_{n,i}&0&\dots&0\end{pmatrix}\\ \uparrow\\ j\end{array}$$

$$E_{i,j}A=\sum_{k,l} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l}=\sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}0&&\dots&\dots&\dots&&0\\ \vdots&&&&&&\vdots\\ 0&&\dots&\dots&\dots&&0\\ a_{j,1}&a_{j,2}&&\dots&&\dots&a_{j,n}\\ 0&&\dots&\dots&\dots&&0\\ \vdots&&&&&&\vdots\\ 0&&\dots&\dots&\dots&&0\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\\ \\ \\ \longleftarrow i\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

Puisque $AE_{i,j}=E_{i,j}A$, les coefficients situés ligne i, colonne j de ces deux matrices sont égaux. Donc, $a_{i,i}=a_{j,j}$. Ceci est vrai pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ et donc les coefficients diagonaux de A sont égaux.
D'autre part, en reprenant l'égalité $AE_{i,j}=E_{i,j}$, on obtient le fait que tous les $a_{k,i}$, $k\neq i$, et tous les $a_{j,l}$, $l\neq j$, sont nuls, et ceci pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Dit simplement, tous les coefficients non diagonaux de A sont nuls.

En résumé, si A commute avec toute matrice, ses coefficients non diagonaux sont nuls et ses coefficients diagonaux sont égaux. Par suite, il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $A=\lambda I_n$. Réciproquement, si A est une matrice scalaire, A commute avec toute matrice.

Exercice n° 7

Soient k et l deux entiers tels que $1\leqslant k\leqslant n$ et $1\leqslant l\leqslant n$. Le coefficient ligne k, colonne l de $A\overline{A}$ vaut :

$$\sum_{j=1}^{n}\omega^{(k-1)(j-1)}\omega^{-(j-1)(l-1)}=\sum_{j=1}^{n}\left(\omega^{k-l}\right)^{j-1}.$$

1er cas. Si $k=l$, $\omega^{k-l}=1$, et le coefficient vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}1=n$.

2ème cas. Si $k\neq l$. On a $-(n-1)\leqslant k-l\leqslant n-1$ avec $k-l\neq 0$ et donc, $k-l$ n'est pas multiple de n. Par suite, $\omega^{k-l}\neq 1$ et

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\omega^{k-l}\right)^{j-1}=\frac{1-\left(\omega^{k-l}\right)^{n}}{1-\omega}=\frac{1-1^{k-l}}{1-\omega}=0.$$

En résumé, $A\overline{A}=nI_n$. De même, $\overline{A}A=nI_n$. Donc A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{n}\overline{A}$.

Exercice n° 8

1) Posons $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ de sorte que $A=I+J$. On a $J^2=2J$ et donc, plus généralement : $\forall k\geqslant 1,\ J^k=2^{k-1}J$. Mais alors, puisque I et J commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit pour n entier naturel non nul donné :

$$\begin{aligned}A^n&=(I+J)^n=I+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}J^k=I+\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}\right)J=I+\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}\right)-1\right)J\\&=I+\frac{1}{2}\left((1+2)^n-1\right)J=I+\frac{1}{2}(3^n-1)J=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&3^n-1\\3^n-1&3^n+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n=0$. Donc,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+1&3^n-1\\3^n-1&3^n+1\end{pmatrix}.$$

Pour n entier naturel donné, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on a alors $X_{n+1} = A \times X_n$ et donc,

$$X_n = A^n \times X_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^n+1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3^n-1}{2}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} + v_{n+1} = 3(u_n + v_n)$. Donc, la suite $u + v$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 + v_0 = 1$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = 3^n \text{ (I)}.$$

De même, pour tout entier naturel n $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$. Donc, la suite $u + v$ est une suite constante. Puisque $u_0 - v_0 = 1$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - v_n = 1 \text{ (II)}.$$

En additionnant et en retranchant (I) et (II), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3^n+1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3^n-1}{2}.$$

