Problème de révision

Démonstrations probabilistes de la Formule de Stirling Énoncé

Ce problème propose deux démonstrations probabilistes de la formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

Partie I: Première preuve

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ et pour tout $n \geqslant 1$ on pose $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.
On admet que S_n^* converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$

1. Énoncer le théorème central limite
2. (a) Montrer, par récurrence sur n, que S_n est de loi $\Gamma(n+1,1)$.
   (b) En déduire que la densité de S_n^* s'écrit $g_n(x) = a_n h_n(x)$, avec
   $$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}}{n!}$$
   et
   $$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sqrt{n}x}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \chi_{]-\sqrt{n},+\infty[}$$
3. En utilisant le théorème central limite, montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$
4. En utilisant le théorème de la convergence dominée, montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$
5. En déduire la formule de Stirling :
   $$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Partie II: Deuxième preuve

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de poisson de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$

6. Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$
   (a) Caractériser la loi de X
   (b) Donner l'espérance, la variance et la fonction génératrice de X
7. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de poisson de paramètres respectifs λ et μ. Quelle est la loi de $X+Y$
8. Montrer que S_n est de loi $\mathcal{P}(n)$.
9. Montrer que S_n^* converge en loi vers $S = \mathcal{N}(0,1)$. En déduire que
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(S_n^* > t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}(S > t)$$

10. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$

   (a) Montrer que $\mathbb{P}\left(S_n^* > t\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}\left(S_n^{*2}\right)}{t^2}$

   (b) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_n^* > t\right)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(S > t\right)\,\mathrm{d}t$$

11. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(S > t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

12. En appliquant le TCVD pour les séries à la série du terme général $\mathbb{P}\left(S_n = k\right)\chi_{\left]0,\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right[}$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_n^* > t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}e^n}\frac{n^{n+1}}{n!}$$

13. En déduire la formule de Stirling