Planche n° 6. Le binôme de Newton

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1. (IT)

Identités combinatoires (la difficulté va en augmentant graduellement de facile à assez difficile sans être insurmontable).

1) Calculer $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$.

2) Montrer que $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$ et trouver la valeur commune des deux sommes.

3) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

4) Montrer que $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$ et admettre que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients).

5) Calculer les sommes $0\times\binom{n}{0}+1\times\binom{n}{1}+\ldots+n\times\binom{n}{n}$ et $\dfrac{\binom{n}{0}}{1}+\dfrac{\binom{n}{1}}{2}+\ldots+\dfrac{\binom{n}{n}}{n+1}$ (considérer dans chaque cas un certain polynôme astucieusement choisi).

6) Montrer que $\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}\ldots+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p+1}$ où $0\leqslant p\leqslant n$. Interprétation dans le triangle de Pascal ?

7) (Identité de Vandermonde) Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$. Montrer que pour tout $k\in[\![0,n+m]\!]$,
$\displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]\\ i+j=k}}\binom{n}{i}\binom{m}{j}=\binom{n+m}{k}$ (adapter l'idée de la question 4)).

Exercice n° 2. (**)

Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans le développement de $(a-b+2c)^9$.

Exercice n° 3. (I)**

Développer $(a+b+c+d)^2$ et $(a+b+c)^3$.

Exercice n° 4. (***)

Soit $(n,a,b)\in\mathbb{N}^*\times]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Quel est le plus grand terme du développement de $(a+b)^n$?

Exercice n° 5. (**)

Résoudre dans N* l'équation $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=5n$.

