Stone Weierstrass et applications [CNC-2016]

Soit n un entier naturel, on note $[\![0,n]\!]=\{0,\cdots,n\}$, on appelle polynôme de Bernstein de degré n les polynômes réels $B_{n,k}=C_n^k X^k(1-X)^{n-k}, k\in[\![0,n]\!]$. Dans ce problème, on voudrait démontrer le théorème de Weierstrass par deux méthodes et donner quelques applications de ce théorème. Dans toute la suite, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée

Partie I: Théorème de Weierstrass

Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $P_n(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par,

$$P_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)$$

1. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$

   (b) En déduire que, pour tout $x\in[0,1]$, $0\leqslant B_{n,k}(x)\leqslant 1$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2B_{n,k}$

3. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in[\![0,n]\!]$, exprimer $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$ (On étudiera les trois cas : $(k\neq 0$ et $k\neq n)$, $(k=0)$ puis $(k=n)$)

   (b) Etablir que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, $(P_n(f))'(x)=n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k}(x)$

   (c) En déduire que si f est croissante sur $[0,1]$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $P_n(f)$ est croissante sur $[0,1]$.

4. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon>0$

   (a) Pour tout $x\in[0,1]$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)$

   (b) Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que,
   pour tout $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, $|x-y|\leqslant\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.
   (On vous demande de redémontrer le théorème de Heine pour l'application f continue sur le segment $[0,1]$)

   (c) Soit $x\in[0,1]$, on pose $A=\left\{k\in[\![0,n]\!]\,;\left|x-\frac{k}{n}\right|\leqslant\alpha\right\}$ et $B=\left\{k\in[\![0,n]\!]\,;\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha\right\}$

      i. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$

      ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in B}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\leqslant\frac{2M}{n\alpha^2}x(1-x)\leqslant\frac{M}{2n\alpha^2}$, avec $M=\displaystyle\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$

   (d) En déduire que, pour tout $x\in[0,1]$, $|P_n(f)(x)-f(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{M}{2n\alpha^2}$, avec $M=\displaystyle\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$

   (e) En déduire que la suite $(P_n(f))_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5. Plus généralement, soit $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue, $(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a<b$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n(g))_{n\geqslant 0}$ qui converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

Partie II: Une démonstration probabiliste du théorème de Stone Weierstrass

Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue et $n\in\mathbb{N}^*$

6. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et x, $x\in[0,1]$, on pose pour out $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n=\dfrac{S_n}{n}$

(a) Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n

(b) Justifier que, pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - x| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{1}{4n\delta^2}$

7. On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose pour tout $x \in [0,1]$, $C_n(f)(x) = \mathbb{E}(Y_n)$. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.

   (a) Vérifier que $x \longmapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0,1]$.

   (b) D'après le théorème de Heine, comme f est continue sur $[0,1]$, alors il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]$, $|x_1 - x_2| \leqslant \beta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. (On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat).

      i. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \beta}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n} \right) \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

      ii. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| > \beta}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n} \right) \right| \leqslant \dfrac{M}{2n\beta^2}$, avec $M = \displaystyle\sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$

   (c) En déduire que la suite $(C_n(f))_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Partie III: Application

Dans toute la suite de ce problème, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, on pose $I = [a,b]$.

8. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

   (a) Montrer que la fonction f est nulle sur I.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$

   (c) En déduire qu'il existe une fonction réelle ϕ, continue sur $[0, +\infty[$ et non nulle, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$

9. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes telle que $\displaystyle\int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [a,b]} |g(t) - P_n(t)| = 0$

10. Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes telle que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [a,b]} |\varphi(t) - P_n(t)| = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [a,b]} |\varphi'(t) - P_n'(t)| = 0$

11. Soit $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, $P_n(t) \geqslant 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [a,b]} |\psi(t) - P_n(t)| = 0$

Partie I: Théorème de Weierstrass

1. (a) On fait appel à la formule du binôme de Newton, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = 1$$

   (b) Il est clair que pour tout $x \in [0,1]$, $B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \geqslant 0$. D'autre part, d'après la question précédente, $B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = 1$

2. • On utilise la formule $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} &= \sum_{k=1}^{n} kB_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} nC_{n-1}^{k} X^{k+1} (1-X)^{n-1-k} \\
&= nX (X + (1-X))^{n-1} = nX
\end{aligned}$$

   • Pour $n=1$, on a bien $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} = 0$. Si $n \geqslant 2$, on utilise la formule $k(-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)B_{n,k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)C_{n-2}^{k-2} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1)C_{n-2}^{k} X^{k+2} (1-X)^{n-2-k} \\
&= n(n-1)X^2 (X + (1-X))^{n-2} = n(n-1)X^2
\end{aligned}$$

   Donc

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} = n(n-1)X^2$$

   Cette égalité est valable aussi pour $n=1$

   • Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$ est la somme de deux précédents

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k} = n(n-1)X^2 + nX$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$. On distingue trois cas
   - Si $k=0$, on a $B_{n,0} = (1-X)^n$, donc $B'_{n,0} = -n(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$
   - Si $k=n$, on a $B_{n,n} = X^n$, donc $B'_{n,n} = nX^{n-1} = nB_{n-1,n-1}$
   - Si $k \neq 0$ et $k \neq n$, on a

$$\begin{aligned}
B'_{n,k} &= kC_n^k X^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)C_n^k X^k (1-X)^{n-k-1} \\
&= nC_{n-1}^{k-1} X^{k-1}(1-X)^{n-k} - nC_{n-1}^{k} X^k (1-X)^{n-k-1} \\
&= n\left(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}\right)
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\begin{aligned}
(P_n(f))' &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B'_{n,k} \\
&= f(0)\, B'_{n,0} + f(1)\, B'_{n,n} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B'_{n,k} \\
&= -nf(0)B_{n-1,0} + nf(1)\, B_{n-1,n-1} + n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}) \\
&= -nf(0)B_{n-1,0} + nf(1)\, B_{n-1,n-1} + n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k-1} - n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k} \\
&= -nf(0)B_{n-1,0} + nf(1)\, B_{n-1,n-1} + n\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right) B_{n-1,k} - n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k} \\
&= nf(1)\, B_{n-1,n-1} + n\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right) B_{n-1,k} - n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k} - nf(0)B_{n-1,0} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) B_{n-1,k} - n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n-1,k}
\end{aligned}$$

Ainsi l'égalité souhaitée, pour tout $x \in [0,1]$, $(P_n(f))'(x) = n\sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n-1,k}(x)$

(c) Si f est croissante sur $[0,1]$, alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \in [0,1]$ et $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$, alors par croissance de f, on a $f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant 0$. En outre, d'après la question **??**, pour tout $x \in [0,1]$, on a $B_{n-1,k}(x) \geqslant 0$ et, par suite, $(P_n(f))'(x) \geqslant 0$. Ceci montre que $P_n(f)$ est croissante sur $[0,1]$

4. On fixe $\varepsilon > 0$

(a) Soit $x \in [0,1]$, par un calcul direct

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(x^2 - 2x\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) B_{n,k}(x) \\
&= x^2 \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) - 2\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) \\
&= x^2 - 2\frac{x}{n}.nx + \frac{1}{n^2}\left(n(n-1)x^2 + nx\right) \\
&= \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

(b) Par absurde supposons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x, y \in [0,1]$ tel que $|x-y| \leqslant \alpha$ et $|f(x) - f(y)| > \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n, y_n \in [0,1]$ tels que $|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}$.
$[0,1]$ est compact donc $[0,1]\times[0,1]$ est compact d'où on peut extraire de (x_n, y_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ d'où les deux suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent. Posons $x = \lim x_{\varphi(n)}$ et $y = \lim y_{\varphi(n)}$. On a $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $x = y$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \to f(x) - f(y) = 0$. Absurde, car $\left|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right| > \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

(c) i. Par construction de A, pour tout $k \in A$, on a: $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc

$$\sum_{k\in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \frac{\varepsilon}{2}$$

ii. Remarquons que si $k \in B$, alors $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha$, on a alors $1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in B}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) &\leqslant 2M\sum_{k\in B} B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k\in B}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2}\frac{x(1-x)}{n}\\
&\leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que le maximum de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$.

(d) Soit $x \in [0,1]$, remarquons d'abord que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)B_{n,k}(x)$, $[\![0,n]\!] = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
|P_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x)B_{n,k}(x)\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)B_{n,k}(x)\right|\\
&= \left|\sum_{k\in A}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)B_{n,k}(x) + \sum_{k\in B}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)B_{n,k}(x)\right|\\
&\leqslant \sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|B_{n,k}(x) + \sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|B_{n,k}(x)\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

(e) Fixons $\varepsilon > 0$ et soit α le réel strictment positif donné par l'uniforme continuité. On fixe ensuite n_0 suffisamment grand tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{M}{2n\alpha^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in [0,1], |f(x) - P_n(f)(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci prouve bien la convergence uniforme de la suite $(P_n(f))_{n\geqslant 0}$ vers f.

5. L'application $f : x \in [0,1] \longmapsto g(a + (b-a)x)$ est continue, par composition, sur $[0,1]$. Posons $Q_n(g)(x) = P_n(f)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, pour $x \in [a,b]$, où $(P_n(f))$ la suite de polynômes de Bernstein associée à f converge uniformément vers f sur $[0,1]$. $(Q_n(g))$ est encore une suite de fonctions polynomiales, et pour tout $x \in [a,b]$, on a:

$$|Q_n(g)(x) - g(x)| = \left|P_n(f)\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| \leqslant \| P_n(f) - f \|_\infty^{[0,1]}$$

Donc $(Q_n(g))$ converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

Partie II: Une démonstration probabiliste du théorème de Stone Weierstrass

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$

6. (a) $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$, donc $\mathbb{E}(S_n) = nx$ et $\mathbb{V}(S_n) = nx(1-x)$, en conséquence, l'espérance et la variance de X_n sont respectivement $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_n) = x$ et $\mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}$

(b) Soit $\delta > 0$, l'inégalité de Bienaymé Chebychev nous donne

$$\mathbb{P}\left(|X_n - x| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(X_n\right)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

7. (a) On a $X_n(\Omega) = \left\{\frac{k}{n} \quad , \quad k \in [\![0,n]\!]\right\}$ et $P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = P(S_n = k)$.
$f\left(X_n\right)$ est bient définier car f est continue sur $[0,1]$ et X à valeurs dans $[0,1]$. $X_n(\Omega)$ est fini ; on peut appliquer le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} C_n(f)(x) &= \mathbb{E}\left(Y_n\right) = \sum_{k \in S_n(\Omega)} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

ce qui montre que $x \longmapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale

(b) i. Par construction de β, on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \beta$ on a : $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc

$$\begin{aligned} \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \beta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right)\right| &\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \beta} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \leqslant \beta} \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ii. Remarquons que $\left[|X_n - x| > \beta\right] \subset \left[|X_n - x| \geqslant \beta\right]$

$$\begin{aligned} \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| > \beta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right)\right| &\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| > \beta} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\ &\leqslant 2M \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| > \beta} \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \\ &\leqslant 2M\mathbb{P}\left(|X_n - x| > \beta\right) \\ &\leqslant 2M \frac{\mathbb{V}\left(X_n\right)}{\beta^2} \\ &\leqslant \frac{2M}{\beta^2} \frac{x(1-x)}{n} \\ &\leqslant \frac{M}{2n\beta^2} \end{aligned}$$

où la quatrième inégalité vient de l'inégalité de Bienyamé Tchebychev, vu que $\mathbb{E}\left(X_n\right) = x$ et la dernière inégalité vient du fait que le maximum de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ est atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\beta > 0$ obtenu du théorème de Heine. Soit $x \in [0,1]$, alors par l'inégalité triangulaire et les inégalités des deux dernières questions, on a:

$$|C_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\beta^2}$$

Avec $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. On fixe ensuite n_0 suffisamment grand tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{M}{2n\beta^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a alors, pour $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in [0,1], |C_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci prouve bien la convergence uniforme de la suite $\left(C_n(f)\right)_{n \geqslant 1}$ vers f.

Partie III: Application

8. (a) Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a:

$$\int_a^b P(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

D'après théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$, en écrivant

$$\left|f(x)^2 - f(x)P_n(x)\right| = |f(x)\,(f(x) - P_n(x))| \leqslant \| f \|_\infty^{[a,b]} \| f - P_n \|_\infty^{[a,b]}$$

et il en résulte que la suite $(fP_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[a,b]$. D'après le théorème d'intégration des limites uniformes, il vient alors:

$$\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc

$$\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$$

La fonction f^2 étant continue positive sur le segment $[a,b]$ d'intégrale nulle, donc $f^2 = 0$, ainsi la nullité de f

(b)
- **Convergence:** Soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \longmapsto x^n e^{-(1-i)x}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc I_n est impropre en $+\infty$, mais $x^n e^{-(1-i)x} \underset{+\infty}{=} \circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc I_n converge.
- **Calcul:** Les deux fonctions $x \longmapsto x^{n+1}$ et $x \longmapsto e^{-(1-i)x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telles que $x^{n+1}e^{-(1-i)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} x^{n+1}\left(\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \left[x^{n+1}\left(\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{1-i}\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n+1}{1-i} I_n
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^n} I_0$, avec $I_0 = \dfrac{1}{1-i}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} = \frac{n!}{\sqrt{2}^{n+1}} e^{\frac{(n+1)\pi}{4}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, remarquons que $I_{4n+3} \in \mathbb{R}$, en conséquence

$$\int_0^{+\infty} x^{4n+3}e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

L'application $t \longmapsto \sqrt[4]{t}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ vers lui même, donc par intégration par changement de variable, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{4n+3}e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} t^n e^{-\sqrt[4]{t}}\sin\left(\sqrt[4]{t}\right)\mathrm{d}t$$

Posons alors $\phi : x \in [0,+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{4}e^{-\sqrt[4]{x}}\sin\left(\sqrt[4]{x}\right)$, une telle fonction répond aux contraintes demandées

9. D'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(Q_n)_n$ qui converge uniformément vers g sur I.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n : x \longmapsto Q_n(x) - \int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t$. La suite de polynômes (P_n) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$. D'autre part pour tout $x \in I$, on a

$$|P_n(x) - g(x)| \leqslant |Q_n(x) - g(x)| + \left|\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \| Q_n - g \|_\infty + \left|\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

   Or $Q_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} g$, donc $\| Q_n - g \|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi $P_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} g$

10. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, en particulier φ' est continue sur I, d'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(Q_n)_n$ qui converge uniformément vers φ' sur I. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit P_n : $x \longmapsto \varphi(a) + \int_a^x Q_n(t)\,\mathrm{d}t$. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors pour tout $x \in [a,b]$, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et on a:

$$|P_n(x) - \varphi(x)| = \left|\int_a^x Q_n(t) - \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a) \| Q_n - \varphi' \|_\infty$$

   Ceci montre $P_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} \varphi$, et comme $P_n' = Q_n$, alors on a aussi $P_n' \xrightarrow[I]{\text{cvu}} \varphi'$

11. On peut se ramener au cas $I = [0,1]$, la construction des polynômes de Bernstein donnée auparavant $P_n = \sum_{k=0}^{n} \psi\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$, montre que $\forall t \in [0,1]$, $P_n(t) \geqslant 0$, car ψ est positive sur I, et $P_n \xrightarrow[I]{\text{cvu}} \psi$