

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: non autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Un modèle de l'indice de réfraction.....	2
I. Champs électromagnétiques créés par une nappe plane de courant.....	2
A. Champ statique.....	2
1) Symétries.....	2
2) Expression de $B(z)$	2
3) Limite: nappe surfacique de courant.....	3
B. Champ créé par une nappe de courant harmonique.....	3
II. Interaction d'une onde plane avec un plan d'atomes.....	4
A. Polarizabilité selon le modèle de la charge élastiquement liée.....	4
B. Densité de courant surfacique induite.....	4
C. Champs électriques incident, réfléchi et transmis par la lame mince.....	5
III. Indice.....	6
A. Déphasage apporté par une lame de diélectrique d'indice proche de 1.....	6
B. Lame de diélectrique d'indice proche de 1 et d'épaisseur $a \ll \lambda$	7
C. Loi de CAUCHY.....	7
Un exemple de distillation.....	8
I. Étude d'un diagramme binaire.....	8
II. Application au mélange méthanol-butanone.....	9
III. Distillation à deux colonnes.....	10

Un modèle de l'indice de réfraction

L'espace est rapporté au trièdre direct $Oxyz$, de vecteurs unitaires notés \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z .

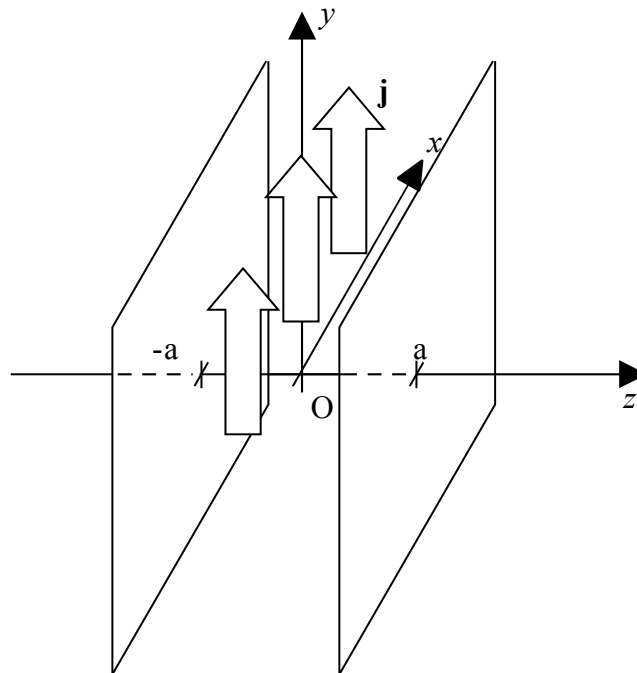
Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est noté i .

Les forces de gravitation sont négligées dans tout le problème.

I. Champs électromagnétiques créés par une nappe plane de courant

A. Champ statique

On considère une distribution de courant volumique: pour $-a < z < a$, $\vec{j} = j_0 \vec{u}_y$ et pour $|z| > a$, $\vec{j} = \vec{0}$.



1) Symétries

1. Par une analyse des symétries (on précisera clairement les plans de symétrie ou d'antisymétrie considérés), déterminer la direction de $\vec{B} = B\vec{u}$ en un point M quelconque.
2. Justifier que le champ magnétique n'est fonction que de la variable z .
3. Montrer également par un argument de symétrie que le champ est nul en $z = 0$.
4. Étudier avec précision la parité de $B(z)$.

2) Expression de $B(z)$

5. Rappeler l'équation locale de Maxwell-Ampère. Que devient cette équation, ici, en magnétostatique?

6. En utilisant cette équation, les résultats précédents et la continuité du champ magnétique en l'absence de distribution surfacique de courant, déterminer \vec{B} pour $-a < z < a$, pour $z > a$ et pour $z < -a$. Faire le graphe de $B(z)$ (en supposant $j_0 > 0$).

3) *Limite: nappe surfacique de courant*

On fait alors le passage à la limite suivant: $a \rightarrow 0$, $j_0 \rightarrow \infty$, le produit $j_0 a$ restant constant.

7. Montrer que la distribution de courant est alors celle d'un plan parcouru par un courant surfacique \vec{j}_s . Justifier que $\vec{j}_s = 2 j_0 a \vec{u}_y$.
8. Que devient l'expression de \vec{B} (en fonction de j_s) pour $z > 0$ et pour $z < 0$. Que doit-on dire pour $B(z=0)$? Faire le graphe de $B(z)$.
9. Rappeler la relation de passage à la traversée d'une nappe de courant surfacique. Vérifier avec précision cette relation dans le cas étudié.
10. On envisage le contour fermé dans un plan $y = \text{constante}$ formé de 4 segments: $z = z_1 > 0$, $x = x_2 > x_1$, $z = -z_1$, $x = x_1$. Le théorème d'Ampère est-il vérifié? Préciser le calcul réalisé.

B. Champ créé par une nappe de courant harmonique

On considère maintenant une nappe surfacique de courant uniforme dans le plan $z=0$, mais dépendant du temps de façon sinusoïdale. La densité surfacique de courant est $\vec{j}_s = j_{s,0} \cos(\omega t) \vec{u}_y$ ou en complexes $\vec{j}_s = j_{s,0} \exp(i\omega t) \vec{u}_y$.

11. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide. Indiquer leur nom. Retrouver l'équation de propagation du champ $\vec{B}(z, t)$.
12. En notation complexe, on écrit $\vec{B}(z, t) = \underline{B}(z) \exp(i\omega t) \vec{u}_x$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\underline{B}(z)$.
13. Donner la solution générale pour $\underline{B}(z)$ (sans chercher à déterminer les constantes) sous forme d'exponentielles puis la solution générale pour $\vec{B}(z, t)$. Commenter le sens physique de chacun des deux termes obtenus pour $\vec{B}(z, t)$.
14. On considère ici uniquement le demi espace $z > 0$. Justifier la solution suivante adoptée: $\vec{B}(z, t) = \underline{A} \exp[i\omega(t - \frac{z}{c})] \vec{u}_x$. En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}(z, t)$ dans le demi espace concerné. La constante multiplicative \underline{A} reste à ce stade inconnue.
15. On considère maintenant le demi espace $z < 0$. Écrire $\vec{B}(z, t)$ et $\vec{E}(z, t)$ dans ce demi espace. La constante multiplicative notée ici \underline{A}' est, elle aussi, inconnue à ce stade.
16. En utilisant les conditions de passage en $z=0$ pour \vec{E} et pour \vec{B} c'est-à-dire les relations entre $\vec{E}(0^+, t)$ et $\vec{E}(0^-, t)$ puis entre $\vec{B}(0^+, t)$ et $\vec{B}(0^-, t)$, déterminer les deux constantes inconnues et donner finalement les expressions de \vec{E} et \vec{B} dans chacun de deux demi-espaces. Donner l'expression de $\vec{E}(0, t)$. Que peut-on dire de $\vec{B}(0, t)$?
17. Les champs $\vec{E}(z, t)$ et $\vec{B}(z, t)$ sont-ils en phase, en avance ou en retard par rapport à $\vec{j}_s(t)$? Justifier par l'analyse des résultats obtenus.

II. Interaction d'une onde plane avec un plan d'atomes

A. Polarisation selon le modèle de la charge élastiquement liée

On étudie l'action d'une onde électromagnétique sur un atome. Un atome est ici décrit dans le modèle de la charge élastiquement liée. Dans ce modèle, un atome placé en un point O est représenté comme un ensemble de deux charges opposées : un ion de charge totale $+e$ ($e > 0$), fixe, centré en O , et une charge ponctuelle $-e$, mobile, de masse m , située en un point M à l'intérieur de l'ion, tel que $\vec{r} = \vec{OM}$.

La charge $-e$ est soumise uniquement aux deux forces suivantes : une force de rappel $\vec{f} = -m\omega_0^2 \vec{r}$ (qui modélise la force électrique de rappel exercée par la charge fixe sur la charge mobile) et la force électrique due au champ électrique excitateur (onde) régnant au niveau de l'atome. Ce champ est noté $\vec{E}(z=0, t) = \underline{E}_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$, il est ici considéré comme uniforme à l'échelle de l'atome. On supposera $\omega < \omega_0$.

La force magnétique due au champ magnétique de l'onde est négligeable. De même tout frottement est ici négligé.

18. Donner l'expression de la force électrique agissant sur la charge mobile en fonction de e et de \vec{E} .
19. Estimer le rapport entre la grandeur de la force magnétique et la grandeur de la force électrique dans le cas d'une onde plane progressive incidente. Justifier que l'on néglige ici la force magnétique.
20. Écrire l'équation différentielle vectorielle en $\vec{r}(t)$ régissant le mouvement de la charge mobile en fonction de $\vec{E}(t)$ et des constantes.
21. On cherche la solution en régime sinusoïdal établi (ou régime sinusoïdal forcé), le mouvement s'effectuant selon \vec{u}_y . On pourra travailler en complexes. Déterminer $\vec{r}(t)$ qu'on écrira sous la forme $\vec{r} = -r_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$.
22. L'atome est alors polarisé par le champ et possède un moment dipolaire $\vec{p}(t)$. On rappelle $\vec{p} = q \times \vec{NP}$ (q : charge positive, N position de la charge négative, P position de la charge positive). Donner l'expression de $\vec{p}(t)$. On écrira la relation linéaire $\vec{p}(t) = \alpha \vec{E}(t)$ et on donnera l'expression de la polarisabilité α en fonction de e , m , ω_0 et ω .
23. Donner l'expression de la vitesse de la charge mobile $\vec{v}(t)$ (en régime sinusoïdal forcé).

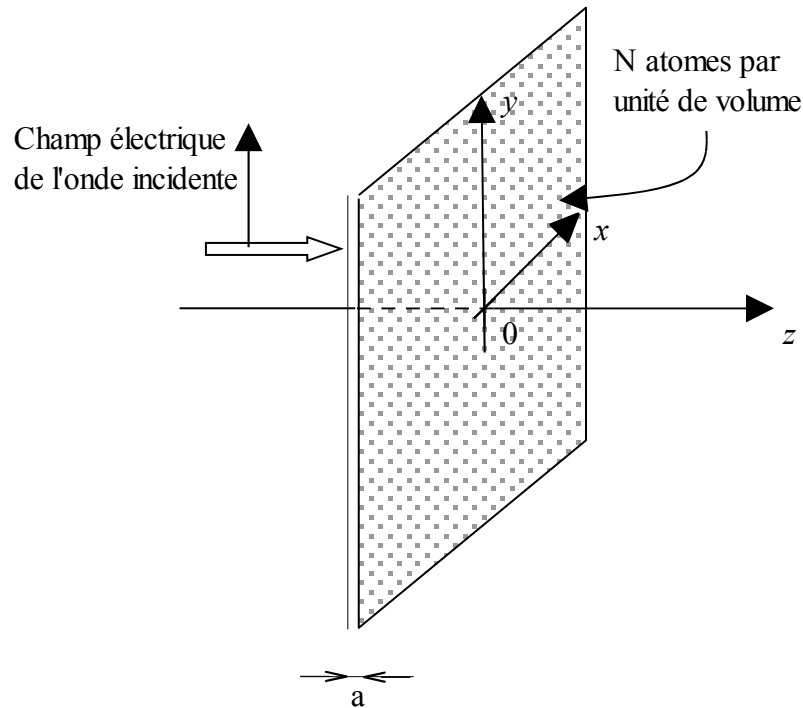
B. Densité de courant surfacique induite

Une onde plane dans le vide, polarisée rectilignement selon \vec{u}_y , éclaire sous incidence normale une plaque diélectrique mince limitée par les plans $z=0$ et $z=a$, supposée infinie selon x et y . Cette plaque contient N atomes par unité de volume.

L'épaisseur a de la lame étant supposée petite devant la longueur d'onde λ à la fréquence considérée, on peut la considérer comme un plan et on adopte par conséquent une description en terme de répartition surfacique. Le « plan » d'atomes sera supposé placé en $z=0$. Le champ électrique total agissant sur tout atome au niveau du plan est à nouveau écrit : $\vec{E}(z=0, t) = \underline{E}_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$.

On étudie le courant surfacique apparu sur le plan.

24. Formules: rappeler l'expression de la densité volumique de courants \vec{j} dans la lame en fonction de la densité volumique de charge (mobile) ρ et de la vitesse \vec{v} des charges puis en fonction de N , e , \vec{v} . Écrire, pour ce problème décrit en termes surfaciques, l'expression de la densité surfacique de courants \vec{j}_s en fonction \vec{j} et a .



25. Exprimer \vec{j}_s en fonction de $\vec{E}(z=0, t)$ et de constantes du problème. Vérifier que le résultat s'écrit en fonction de $\vec{p}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (et de constantes du problème).

C. Champs électriques incident, réfléchi et transmis par la lame mince

Le champ total \vec{E} est la superposition du champ de l'onde incidente $\vec{E}_i(z, t) = E_{0,i} \exp[i(\omega t - k_0 z)] \vec{u}_y$ avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$ et du champ de l'onde créée par la distribution sinusoïdale de courant \vec{j}_s elle-même.

26. On se place en $z=0$. Le champ incident (connu) au niveau du plan est $\vec{E}_i(z=0, t) = E_{0,i} \exp(i\omega t) \vec{u}_y$. Le champ total (inconnu) au niveau du plan est noté, comme précédemment, $\vec{E}(z=0, t) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$. Rappeler l'expression du champ électrique créé par le plan lui-même au niveau du plan, c'est-à-dire en $z=0$, en fonction de \vec{j}_s .

27. Déterminer \vec{E}_0 en fonction de $E_{0,i}$ et des données de l'énoncé (on utilisera aussi la notation α).

28. On se place en $z>0$ (en fait $z>a$). Donner l'expression de $\vec{E}(z>a, t)$ noté $\vec{E}_r(z, t)$ résultant de la superposition du champ incident et du champ rayonné par la lame en fonction des grandeurs connues.

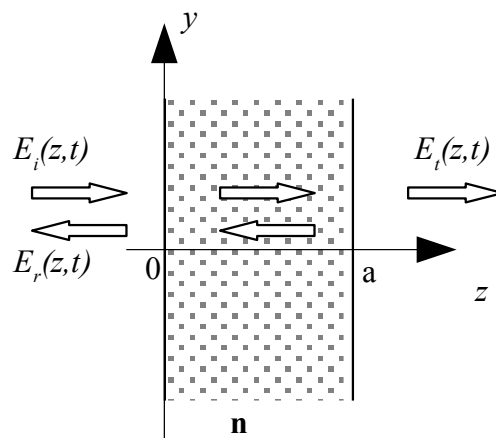
29. Du côté des $z < 0$, il apparaît une onde se propageant dans le sens des z décroissants. Donner l'expression de cette onde réfléchie $\vec{E}^-(z, t)$.

III. Indice

Dans son célèbre cours de physique, Richard FEYNMAN explique l'étonnement que provoque la pensée suivante. Une onde électromagnétique progressive de célérité c (ex: lumière) se transforme dans un milieu matériel transparent (ex: verre) en une onde de célérité réduite $\frac{c}{n}$.

D'où vient ce ralentissement alors que, dans chaque couche dipolaire, l'onde créée par les dipôles oscillants se propage elle aussi à la vitesse c comme l'onde incidente?

A. Déphasage apporté par une lame de diélectrique d'indice proche de 1



Le dessin précédent schématise l'onde plane progressive incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise dans le cas d'une lame de diélectrique d'épaisseur a et d'indice n .

On peut montrer en électromagnétisme que le déphasage retard φ apporté par le parcours dans la lame par rapport au parcours entièrement dans le vide est tel que:

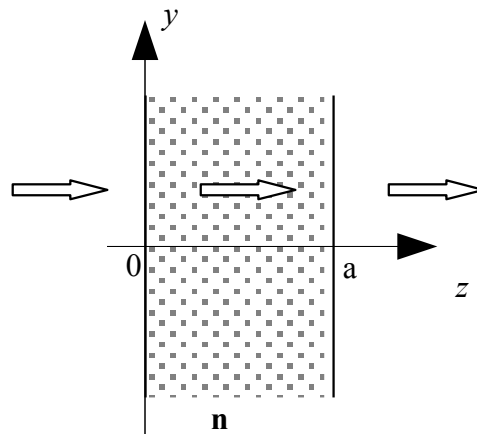
$$(-\varphi) = \arg\left(\frac{E_r(z, t)}{E_i(z, t)}\right) = k_0 a - \arctan\left[\frac{1+n^2}{2n} \tan(nk_0 a)\right] \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

On envisagera dans la suite, pour simplifier l'étude, le cas d'une lame pour laquelle la densité des atomes est faible et donc d'indice proche de 1.

30. Faire un calcul approché à l'ordre le plus bas possible et déterminer l'expression de φ dans le cas $n \approx 1$ en fonction de n , k_0 , a .

31. On se propose de retrouver ce résultat directement dans le cas d'une lame d'épaisseur a , d'indice n proche de 1. On admettra que, dans le cadre de cette approximation où l'on cherche seulement à exprimer $\vec{E}_r(z, t)$, on peut négliger l'onde réfléchie.

- Quel est le temps de parcours de l'onde entre $z=0$ et $z>a$.
- Quel serait le temps de parcours en l'absence de la lame?
- En déduire clairement le déphasage φ apporté par la lame.



32. Le champ incident s'écrit: $\vec{E}_i(z, t) = E_{0,i} \exp[i(\omega t - k_0 z)] \vec{u}_y$. Donner, en négligeant la réflexion, l'expression du champ transmis (champ en $z > a$) sous la forme $\vec{E}_t(z, t) = \exp(g(n)) \vec{E}_i(z, t)$ où $g(n)$ dépend de n , k_0 , a .

B. lame de diélectrique d'indice proche de 1 et d'épaisseur $a \ll \lambda$

Dans le cas d'une lame de diélectrique d'épaisseur $a \ll \lambda$, le champ transmis s'écrit:

$$\vec{E}_t(z, t) = \left(1 - i\omega \frac{\alpha a N}{2\varepsilon_0 c}\right) \vec{E}_i(z, t). \text{ Il s'agit de la somme du champ incident et d'un autre champ.}$$

33. Cette expression semble-t-elle en accord avec les résultats obtenus précédemment?

34. Le champ transmis se décompose alors en deux champs. Quel est le sens physique du second champ?

35. Représenter dans le plan complexe ces deux champs et le champ résultant (« construction de Fresnel » ou « pointeurs ») et retrouver sur ce schéma l'angle φ . Quelle est finalement l'origine du ralentissement de l'onde dans la lame? (Remarque: pour simplifier le schéma, on choisit un temps t tel que $\vec{E}_i(z, t)$ soit réel).

36. En déduire (à partir de cette étude simplifiée d'une lame de diélectrique d'indice proche de 1 et d'épaisseur $a \ll \lambda$) l'expression de l'indice n en fonction de N , ε_0 , α .

C. Loi de CAUCHY

37. Dans l'hypothèse suivante où $\omega \ll \omega_0$, montrer que l'on peut écrire n sous la forme

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2} \quad (\lambda_0 \text{ désigne la longueur d'onde dans le vide}) \text{ et donner les expressions de } A \text{ et de } B \text{ obtenues dans le cadre de ce modèle simplifié.}$$

Un exemple de distillation

I. Étude d'un diagramme binaire

Soit un mélange binaire de deux constituants A et B , totalement miscibles à l'état liquide. On pose :

x_A : fraction molaire de A dans la phase liquide et

x_B : fraction molaire de B dans la phase liquide.

y_A : fraction molaire de A dans la phase vapeur et

y_B : fraction molaire de B dans la phase vapeur.

P_A^* : pression de vapeur saturante de A et

P_B^* : pression de vapeur saturante de B (à T donnée).

T_A^* : température d'ébullition de A et

T_B^* : température d'ébullition de B (à P donnée).

Le diagramme binaire isobare ($P=1,0$ bar) est fourni en *annexe I*.

1. Nommer les courbes $T=f(x_A)$ et $T=f(y_A)$. Reproduire l'allure du diagramme sur la copie et y porter, à leur place, le nom des courbes.
2. Reproduire l'allure du diagramme sur la copie et y indiquer la signification des différents domaines.
3. Quel est le composé le plus volatil ? En déduire une comparaison des pressions de vapeur saturante de A et B à une température T donnée.

4. On considère que le mélange étudié est idéal : on rappelle que le potentiel chimique d'un gaz parfait (constituant i) dans un mélange idéal gazeux s'écrit:

$$\mu_{i,v}(T, P) = \mu_{i,v}^o(T) + RT \ln \frac{P}{P^o} + RT \ln y_i.$$

- Rappeler la relation entre P_A (pression partielle de A), y_A et P . Idem pour P_B .
- Réécrire l'expression de $\mu_{i,v}(T, P)$ en faisant intervenir la pression partielle P_i .

5. Le mélange étudié est idéal : le potentiel chimique d'un liquide (constituant i) dans un mélange idéal liquide s'écrit: $\mu_{i,l}(T, P) = \mu_{i,l}^o(T) + RT \ln x_i$. Montrer que les pressions partielles dans le mélange vérifient $P_A = x_A P_A^*$ et $P_B = x_B P_B^*$.

6. Le mélange étudié est idéal : donner les équations des courbes $P=f(x_A)$ et $P=f(y_A)$ dans le diagramme isotherme. Tracer l'allure de ce diagramme isotherme. Vérifier que l'une de ces deux courbes est une droite.

7. On réalise au laboratoire la distillation fractionnée d'un mélange de A et B de composition initiale $x_A=0,8$. On suppose que la colonne a un pouvoir séparateur suffisant : que récupère-t-on dans le distillat, résultant de la condensation des vapeurs en tête de colonne, A ou B ? Indiquer qualitativement comment évolue la composition dans le bouilleur au fur et à mesure de la distillation.
8. Comment évolue la température en tête de colonne ? Distinguer deux étapes: première phase: on récupère de la vapeur et il y a présence de A et B dans le bouilleur, suivie de la deuxième phase. Pour répondre à la question posée, on tracera l'allure de la courbe $T=f(\text{nombre de moles distillées})$ en supposant que l'on distille le mélange jusqu'au bout.
9. Parallèlement, comment évolue la température dans le bouilleur ?
10. En réalité, la colonne n'a pas un pouvoir séparateur suffisant. À partir d'un mélange initial $x_A=0,8$, on récupère un distillat correspondant à $y_A=0,10$. Déterminer à partir du diagramme fourni en *annexe I* le nombre de plateaux théoriques de la colonne (nombre entier). Reproduire rapidement le tracé obtenu sur la copie.

II. Application au mélange méthanol-butanone

On s'intéresse ici au mélange binaire de méthanol (composé 1) et de butanone (composé 2). On donne le diagramme binaire isobare sous une pression $P=0,10$ bar fourni en *annexe II* avec en abscisse la fraction molaire en méthanol et en ordonnée la température exprimée en degré Celsius.

11. D'après l'allure du diagramme binaire, indiquer si la miscibilité est nulle ou totale. Le mélange liquide méthanol-butanone peut-il être considéré comme idéal ? Justifier.
12. Indiquer le nombre et la nature des phases en présence dans les domaines I à IV .
13. Un point remarquable apparaît sur le diagramme binaire liquide-vapeur méthanol-butanone pour une fraction molaire en méthanol, $x_1=0,67$. Comment nomme-t-on le mélange correspondant au minimum dans ces diagrammes ? Calculer la variance d'un système constitué de ce mélange particulier en équilibre avec sa vapeur et commenter la valeur obtenue.
14. Représenter l'allure des courbes d'analyse thermique isobare de refroidissement pour des fractions molaires en méthanol respectivement de 0 ; 0,4 ; 0,67 ? Porter sur ces courbes la valeur des températures remarquables.

Un mélange liquide méthanol-butanone est constitué de 4,0 moles de méthanol et de 6,0 moles de butanone.

15. Donner la température d'ébullition commençante et celle d'ébullition finissante.
16. Déterminer la composition de la première bulle de vapeur ainsi que celle de la dernière goutte de liquide.
17. Ce mélange est porté à 15°C . Indiquer la nature et la composition en fraction molaire des phases en équilibre à cette température. Calculer les quantités de matière exprimées en mole de méthanol et de butanone dans chacune des phases.
18. Lors de la distillation fractionnée, sous 0,1 bar, d'un mélange méthanol-butanone, préciser la nature du distillat et celle du résidu de distillation en fonction de la composition initiale du mélange à distiller.

III. Distillation à deux colonnes

Une installation de distillation concernant le mélange binaire de méthanol (composé 1) et de butanone (composé 2) est schématisée de façon simplifiée ci-dessous et comprend deux colonnes, fonctionnant à deux pressions différentes.

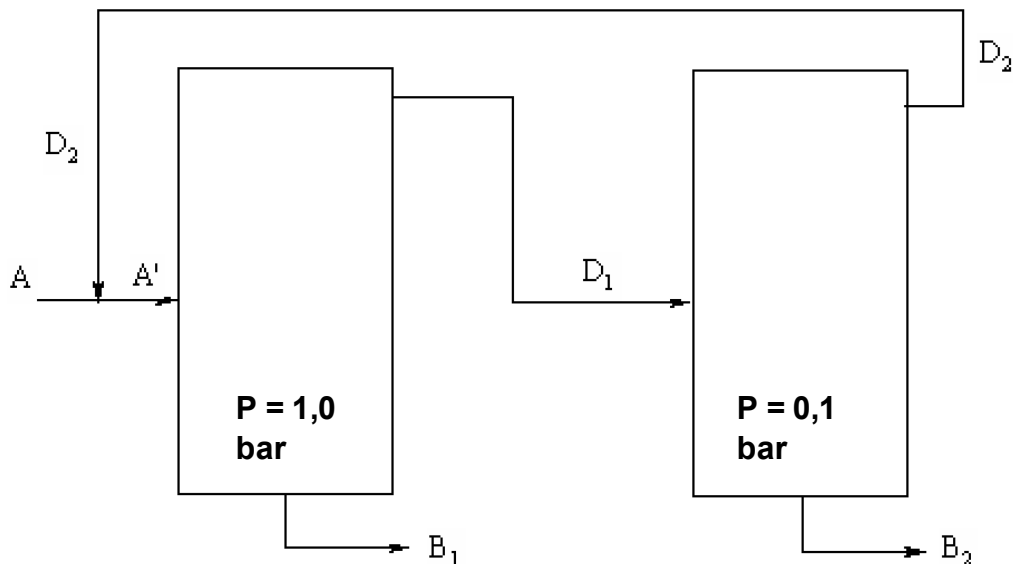
Cette installation fonctionne en régime permanent.

Les pressions totales seront considérées comme constantes et égales à 1,0 bar dans la première colonne, et 0,1 bar dans la deuxième colonne.

Les diagrammes binaires isobares sont fournis en *annexe II* et *annexe III*.

19. Commenter le fait que l'abscisse du minimum n'est pas la même dans ces deux diagrammes.

Installation de distillation à deux colonnes à pressions différentes



L'alimentation de l'ensemble a un débit A . Dans la première colonne, le distillat sort avec un débit D_1 et une fraction molaire x_{D1} en méthanol. Le résidu en bas de la première colonne sort avec un débit B_1 et une fraction molaire x_{B1} en méthanol. Dans la deuxième colonne, l'alimentation est le distillat de la première colonne. Le distillat de cette deuxième colonne sort avec un débit D_2 et une composition x_{D2} en méthanol. Ce distillat est recyclé dans l'alimentation de la première colonne.

20. En se basant sur les diagrammes binaires fournis en *annexe II* et *annexe III*, et en supposant que les colonnes ont un excellent pouvoir séparateur, donner les compositions du résidu B_1 et du distillat D_1 , si l'alimentation A' a une fraction molaire proche de 0,5 ?

21. De même, quelles seront les compositions du résidu B_2 et du distillat D_2 ?

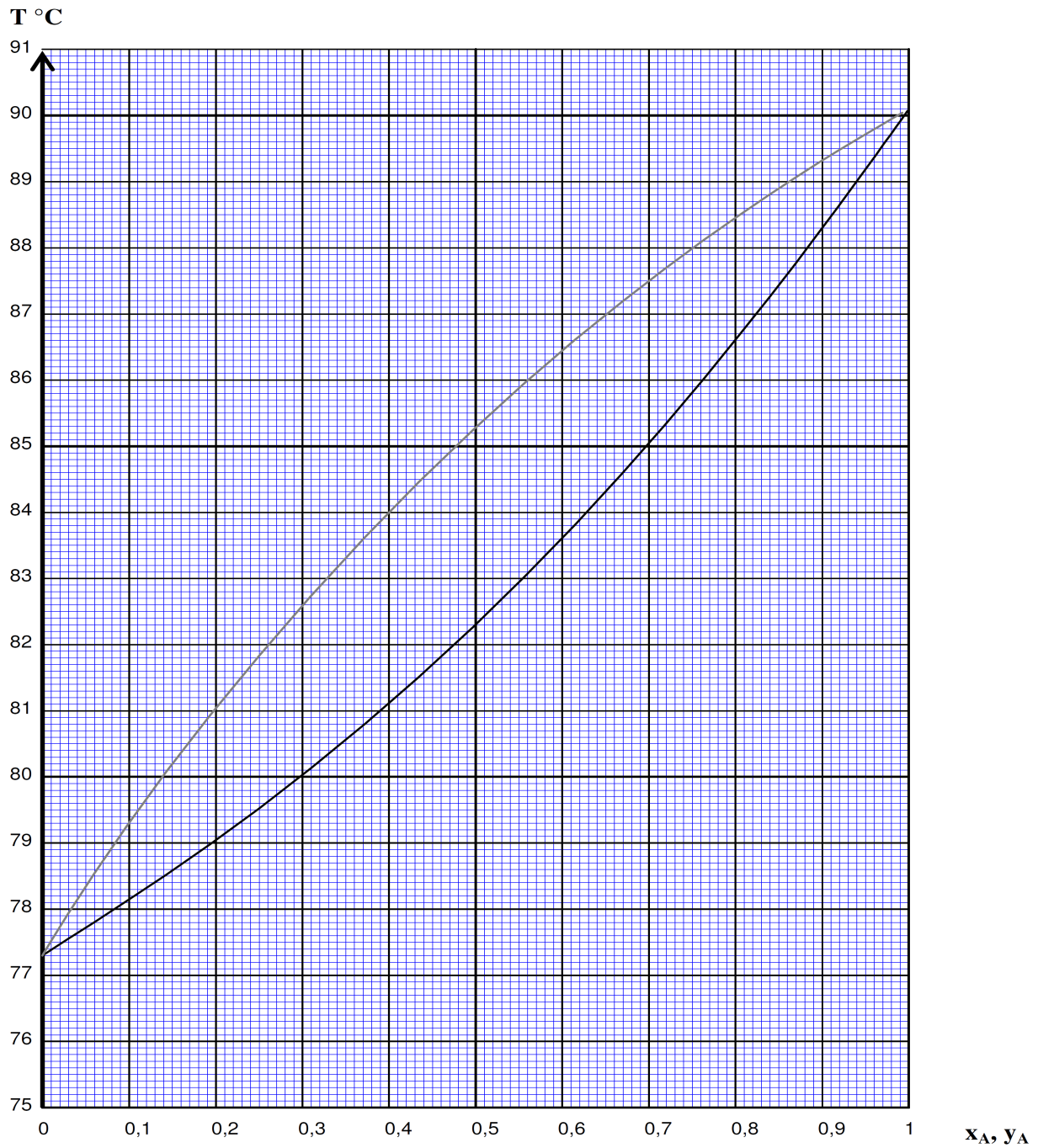
22. Quel est l'intérêt de cette installation à deux colonnes par rapport à une distillation classique à une colonne ? Commenter éventuellement.

En réalité, le pouvoir séparateur des colonnes n'est pas totalement idéal. Le débit D_2 est égal à $80,8 \text{ kmol} \cdot \text{h}^{-1}$ et sa composition en méthanol est $x_{D2}=0,68$. L'alimentation de la deuxième colonne a un débit $D_1=139,1 \text{ kmol} \cdot \text{h}^{-1}$ et sa composition en méthanol est $x_{D1}=0,80$.

L'alimentation de l'ensemble des deux colonnes a un débit A égal à $100 \text{ kmol} \cdot \text{h}^{-1}$ et une composition notée ici $x_A=0,58$ en méthanol.

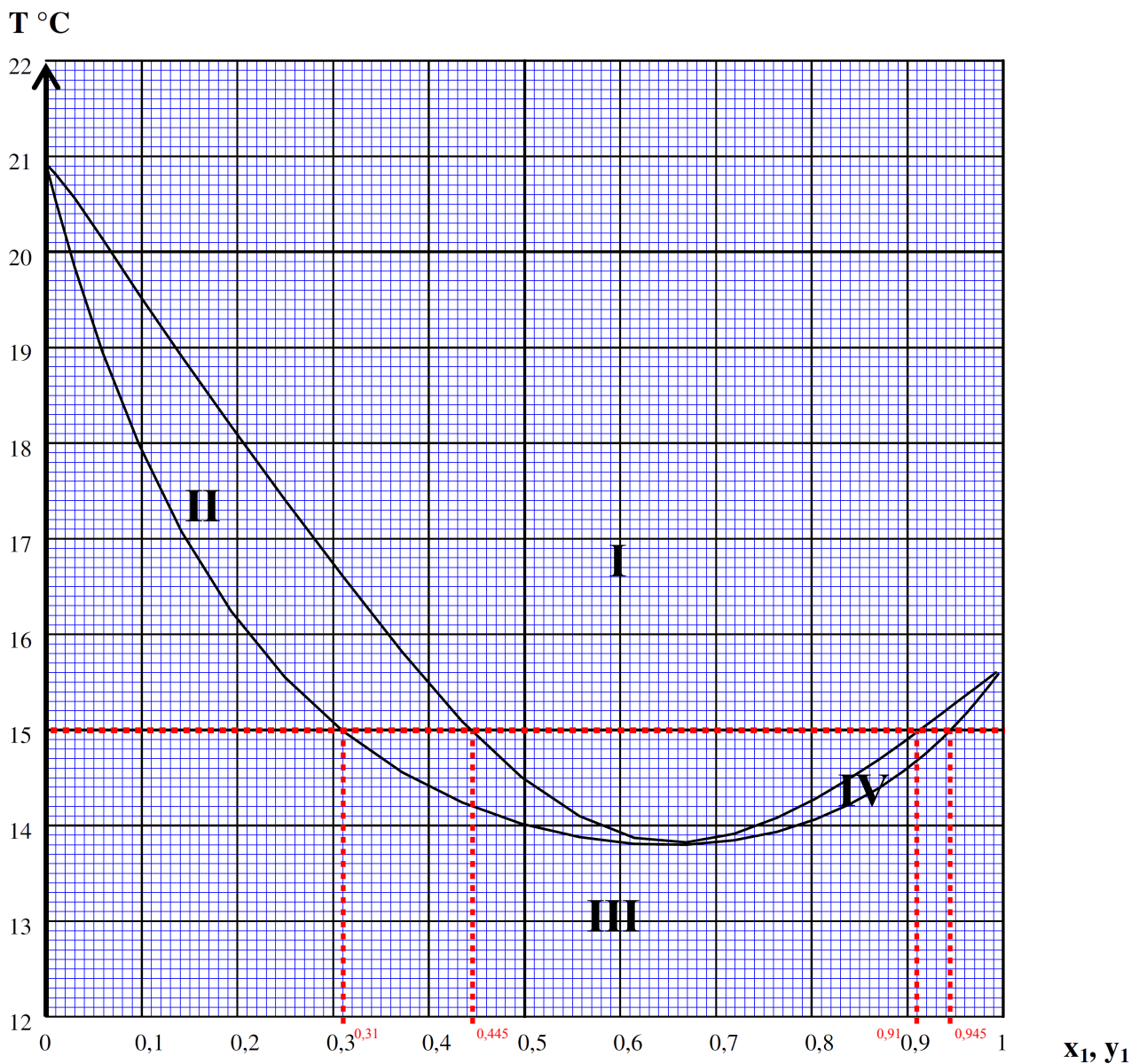
23. Justifier que, en régime permanent, la somme des débits entrants (comptés en valeur absolue) dans une colonne soit égale à la somme des débits sortants (comptés en valeur absolue) dans la même colonne.
24. Par un raisonnement fondé sur des bilans de matière (global et en méthanol), calculer le débit de sortie B_2 ainsi que sa composition en méthanol x_{B2} (formules littérales puis applications numériques).
25. Déterminer la composition du résidu de la première colonne x_{B1} ainsi que le débit B_1 (formules littérales puis applications numériques).

Annexe I
Diagramme binaire isobare A-B (P = 1 bar)



Annexe II

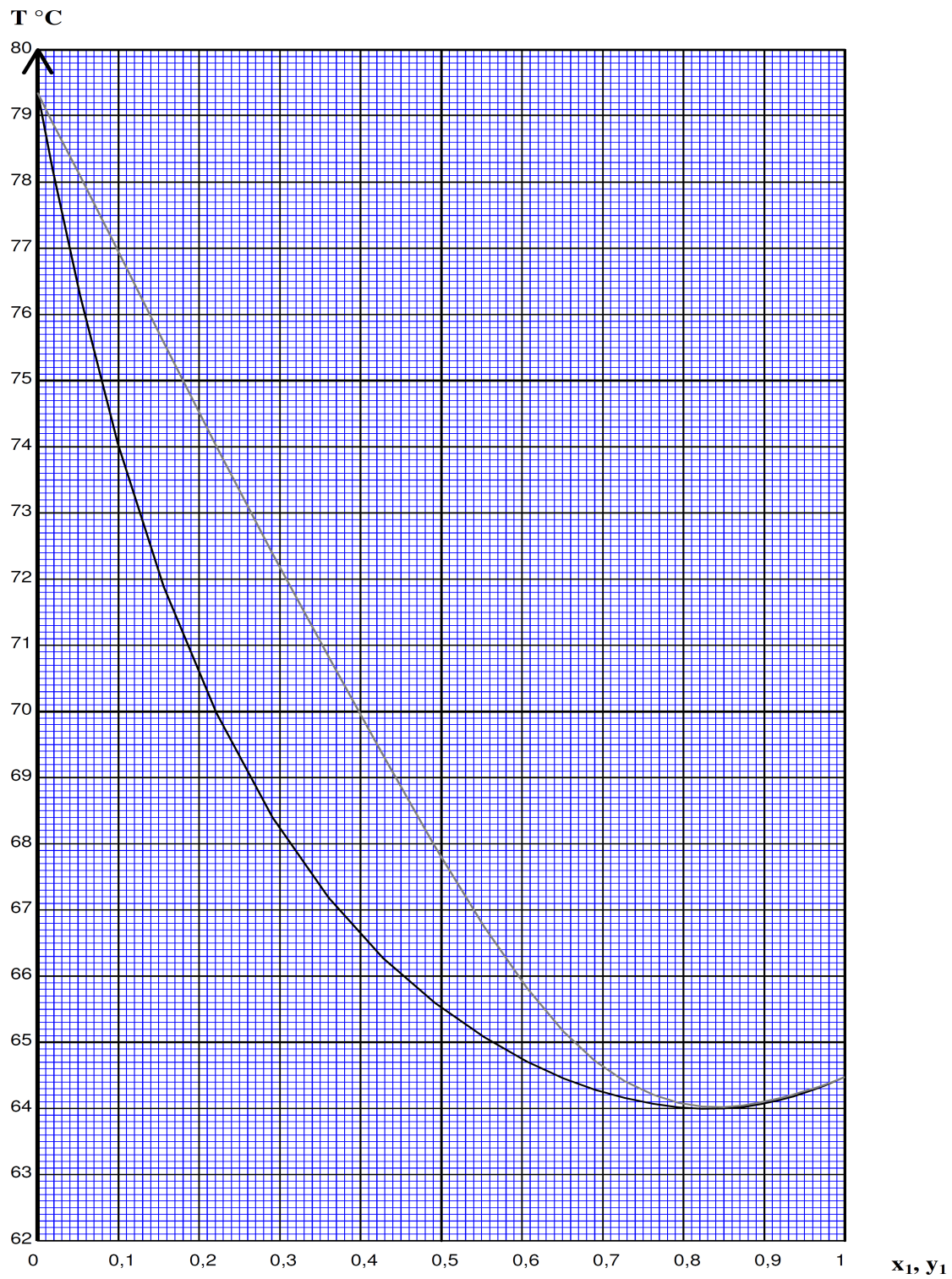
Diagramme isobare méthanol-butanone ($P = 0,1$ bar)



x₁ : fraction molaire de méthanol dans la phase liquide
y₁ : fraction molaire de méthanol dans la phase gazeuse

Annexe III

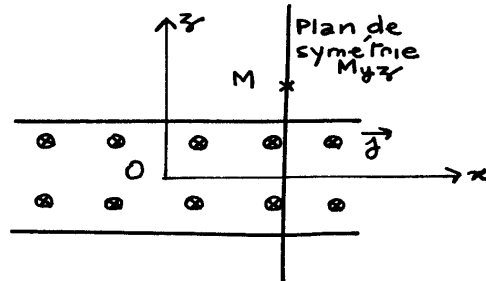
Diagramme isobare méthanol-butanone ($P = 1,0$ bar)



Réponses

Un modèle de l'indice de réfraction

1)



Le plan Myz est un plan de symétrie contenant M
Donc $\vec{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan de symétrie

$$\vec{B}(M) = B \vec{u}_x$$

2) Le problème est invariant en translation selon x

Idem invariance en translation selon y

Donc $B(x, y, z)$ ne dépend que de z

$$\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_x$$

3) Pour un point M situé en $z=0$, il faut ajouter un deuxième plan de symétrie contenant M .

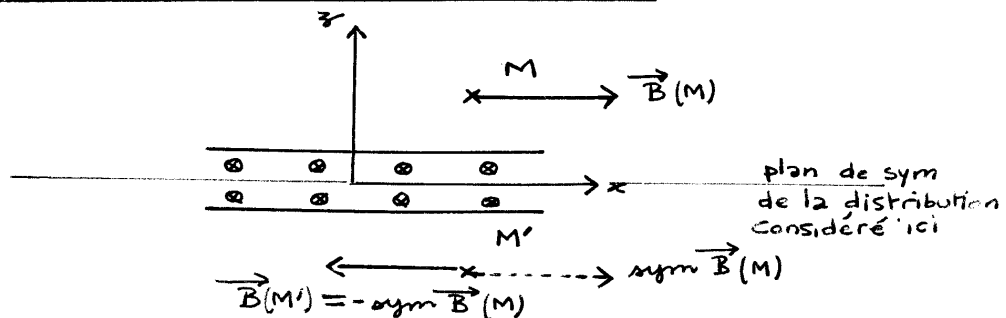
Donc deux plans de symétrie:

$$\frac{Myz}{\text{et } Mxy}$$

\vec{B} doit être perpendiculaire à ces deux plans. Il ne peut être que nul.

$$\vec{B}(x, y, z=0) = \vec{0}$$

4)



→ On considère M' symétrique de M par rapport au plan xOy qui est un plan de symétrie de la distribution.

→ Si le champ \vec{B} était un "vrai vecteur", on aurait dans cette opération de symétrie par rapport à xOy :

$$\begin{aligned} M' &= \text{sym}(M) \\ \vec{B}(M') &= \text{sym}(\vec{B}(M)) \end{aligned}$$

→ Mais \vec{B} est un "faux vecteur" (vecteur axial). Il se transforme en: $-\text{sym}$

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}(\vec{B}(M))$$

→ Les résultats sont traduits sur le schéma précédent.
on a donc ici:

$$\vec{B}(x, y, -z) = -\vec{B}(x, y, z)$$

$$B(z) \text{ est donc une fonction impaire de la variable } z$$

5) Equation locale de Maxwell - Ampère:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En magnétostatique: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

6) domaine $-a < z < a$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 j_0 \vec{u}_y$$

$$\begin{vmatrix} 0 & B(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{d}{dz} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{dB}{dz} = \mu_0 j_0$$

$$B = \mu_0 j_0 z + A(\text{cste})$$

domaine $z > a$

Dans cette région $\vec{j} = \vec{0}$ donc finalement

$$\frac{dB}{dz} = 0$$

$$B = A' (\text{cste})$$

domaine $z < -a$

De même

$$B = A'' (\text{cste})$$

En écrivant la continuité en $z = a$ et en $z = -a$ d'où

$$-a < z < +a \quad B = \mu_0 j_0 z + A$$

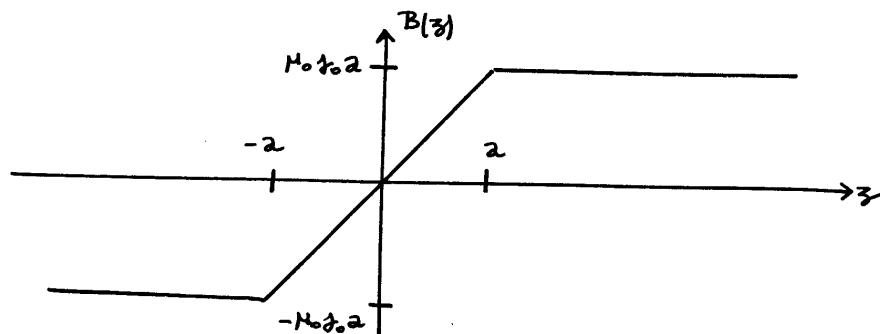
$$z > a \quad B = \mu_0 j_0 a + A$$

$$z < -a \quad B = -\mu_0 j_0 a + A$$

Puis on trouve $A = 0$ en faisant $B(z=0) = 0$

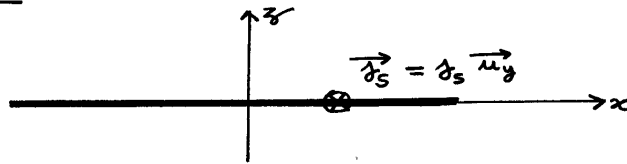
Résultat final :

$$\begin{aligned} z > a \quad \vec{B} &= \mu_0 j_0 a \vec{u}_x \\ -a < z < a \quad \vec{B} &= \mu_0 j_0 z \vec{u}_x \\ z < -a \quad \vec{B} &= -\mu_0 j_0 a \vec{u}_x \end{aligned}$$

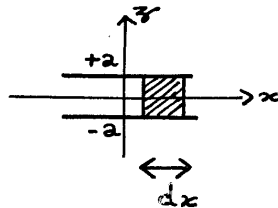


C'est bien le graphe d'une fonction impaire.

7) \rightarrow Puisque $a \rightarrow 0$, le courant se retrouve on surface

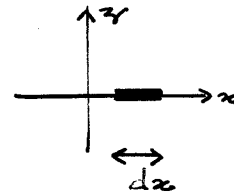


\rightarrow On doit retrouver la même intensité dI pour un dx commun
modèle volumique



$$dI = J_0 dS \\ = J_0 2a dx$$

modèle surfacique



$$dI = J_s dx$$

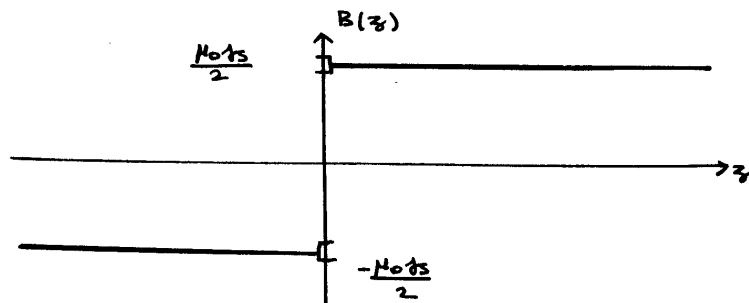
\Leftrightarrow

donc

$$J_s = J_0 2a$$

8) Expression de \vec{B} :

$$\begin{aligned} z > 0 & \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{u}_x \\ z < 0 & \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{u}_x \\ z = 0 & \quad \vec{B} \text{ non défini} \\ & \quad (\text{discontinuité liée au modèle surfacique utilisé ici}) \end{aligned}$$



9) Relation de passage à la traversée d'une nappe de courant surfacique :

$\begin{array}{c} z \uparrow \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ 1 \times \end{array}$ nappe surfacique
 (deux points au voisinage de la nappe)

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

On vérifie ici avec $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{u}_z$

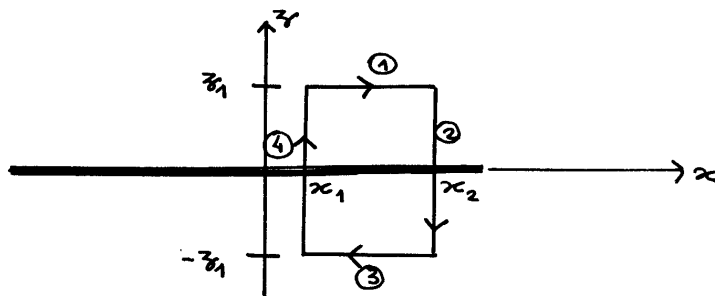
$$\vec{B}_{(z=0^+)} - \vec{B}_{(z=0^-)} \stackrel{?}{=} \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

$$\frac{\mu_0 \vec{j}_s}{2} \vec{u}_x - \left(-\frac{\mu_0 \vec{j}_s}{2} \vec{u}_x \right) \stackrel{?}{=} \mu_0 \vec{j}_s \vec{u}_x$$

$$\mu_0 \vec{j}_s \vec{u}_x = \mu_0 \vec{j}_s \vec{u}_x$$

La relation de passage est vérifiée.

10) On vérifie le théorème d'Ampère :



On choisit d'orienter le contour par \vec{u}_y .
 On doit vérifier

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad \text{?}$$

$$\int_{\text{①}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{②}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{③}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{④}} \vec{B} \cdot d\vec{l} \stackrel{?}{=} \mu_0 \int_{x_1}^{x_2} \vec{j}_s \cdot d\vec{x}$$

$$\downarrow$$

$$\text{nul}$$

$$\vec{B} \perp d\vec{l}$$

$$\downarrow$$

$$\text{nul}$$

$$\vec{B} \perp d\vec{l}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} B_{(z>0)} dx + \int_{x_2}^{x_1} B_{(z<0)} dx \stackrel{?}{=} \mu_0 \vec{j}_s (x_2 - x_1)$$

$$\frac{\mu_0 \vec{j}_s}{2} (x_2 - x_1) + \frac{-\mu_0 \vec{j}_s}{2} (x_1 - x_2) = \mu_0 \vec{j}_s (x_2 - x_1)$$

$$\mu_0 \vec{j}_s (x_2 - x_1) = \mu_0 \vec{j}_s (x_2 - x_1)$$

Le théorème d'Ampère est, bien entendu, vérifié.

11) dans le vide :

$\text{div } \vec{E} = 0$	(Maxwell - Gauss)
$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(Maxwell - Faraday)
$\text{div } \vec{B} = 0$	(Maxwell - flux)
$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(Maxwell - Ampère)

On prend le rotationnel de M-A

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \text{rot } \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{E}) \\
 &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad \text{cf M-F} \\
 &= - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

On utilise alors :

$$\Delta \vec{B} = \underbrace{\text{grad div } \vec{B}}_{\substack{\text{nul} \\ \text{cf M-flux}}} - \text{rot rot } \vec{B}$$

finalement :

$$- \Delta \vec{B} = - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

12) On projette sur \vec{u}_z :

$$\Delta B - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

On passe aux complexes

$$\Delta \underline{B}(z, t) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{B}(z, t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} = 0$$

et on pose $\underline{B} = \underline{f}(z) \exp i\omega t$

$$\frac{d^2 \underline{f}(z)}{dz^2} \exp i\omega t - \epsilon_0 \mu_0 (\omega)^2 \underline{f}(z) \exp i\omega t = 0$$

En posant $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, on obtient :

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f(z) = 0$$

13) on écrit l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$r = \pm j \frac{\omega}{c}$$

donc

$$f(z) = A_+ \exp(-j \frac{\omega}{c} z) + A_- \exp(j \frac{\omega}{c} z)$$

$$\vec{B}(z, t) = \left(A_+ \exp(j\omega(t - \frac{z}{c})) + A_- \exp(j\omega(t + \frac{z}{c})) \right) \vec{u}_x$$

onde progressive
vers les z positifs

onde progressive
vers les z négatifs

14) demi-espace $z > 0$

Il ne doit pas y avoir d'onde se propageant vers les $z < 0$
(pas de réflexion... ce demi-espace étant illimité)

$$\vec{B}(z, t) = A \exp(j\omega(t - \frac{z}{c})) \vec{u}_x$$

On trouve l'expression de \vec{E} en utilisant l'équation M-A

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c^2} j\omega \vec{E} \\ \begin{vmatrix} 0 & \vec{B} \\ 0 & 0 \\ -j\frac{\omega}{c} & 0 \end{vmatrix} & \\ \vec{E} &= -c \vec{B} \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\vec{E}(z > 0, t) = -c A \exp(j\omega(t - \frac{z}{c})) \vec{u}_y$$

15) demi-espace $z < 0$

Pour la même raison, il n'y a pas d'onde se propageant vers les $z > 0$.

$$\vec{B}(z, t) = A' \exp(j\omega(t + \frac{z}{c})) \vec{u}_x$$

puis \vec{E}

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c^2} j\omega \vec{E} \\ \begin{vmatrix} 0 & \vec{B} \\ 0 & 0 \\ j\frac{\omega}{c} & 0 \end{vmatrix} & \end{aligned}$$

$$\vec{E} = +c \underline{B} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_{(z < 0, t)} = c \underline{A}' \exp j\omega(t + \frac{z}{c}) \vec{u}_y$$

16) Le champ \vec{E} tangentiel est donc continu :

$$\vec{E}_{(0^+, t)} = \vec{E}_{(0^-, t)}$$

$$-c \underline{A} \exp j\omega t = c \underline{A}' \exp j\omega t \quad \text{donc :}$$

$$\underline{A} = -\underline{A}'$$

Le champ \vec{B} tangentiel n'est pas nécessairement continu

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{B}_{(0^+, t)} - \vec{B}_{(0^-, t)} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z$$

$$\underline{A} \exp j\omega t \vec{u}_x - \underline{A}' \exp j\omega t \vec{u}_x = \mu_0 \vec{j}_{S,0} \exp j\omega t \vec{u}_x$$

$$\underline{A} - \underline{A}' = \mu_0 \vec{j}_{S,0}$$

donc

$$\underline{A} = \frac{\mu_0 \vec{j}_{S,0}}{2}$$

$$\underline{A}' = -\frac{\mu_0 \vec{j}_{S,0}}{2}$$

finalement

$z > 0$	$\vec{E} = -\frac{c \mu_0 \vec{j}_{S,0}}{2} \exp j\omega(t - \frac{z}{c}) \vec{u}_y$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{j}_{S,0}}{2} \exp j\omega(t - \frac{z}{c}) \vec{u}_x$
$z < 0$	$\vec{E} = -\frac{c \mu_0 \vec{j}_{S,0}}{2} \exp j\omega(t + \frac{z}{c}) \vec{u}_y$ $\vec{B} = -\frac{\mu_0 \vec{j}_{S,0}}{2} \exp j\omega(t + \frac{z}{c}) \vec{u}_x$
$z = 0$	$\vec{E} = -\frac{c \mu_0 \vec{j}_{S,0}}{2} \exp j\omega t \vec{u}_y$ $\vec{B} \text{ est non défini}$

Le plan est non chargé donc \vec{E} est continue au niveau du plan.

17) Les champs obtenus sont en $t - \theta$ avec $\theta = \frac{|\vec{z}|}{c} > 0$

$$z > 0 \quad t - \theta = t - \frac{z}{c}$$

$$z < 0 \quad t - \theta = t - \frac{|z|}{c} = t + \frac{z}{c}$$

alors que t_s est en t

Les champs sont donc en retard par rapport à t_s avec un temps de propagation prévisible $\theta = \frac{|\vec{z}|}{c}$

(sur le plan, t_s et E sont en phase)

18)

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

$$\vec{F} = -e \vec{E}$$

19)

$$\vec{F}_{\text{électrique}} = -e \vec{E}$$

$$\vec{F}_{\text{magnétique}} = -e (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

(\vec{v} : vitesse de la charge)

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{magnétique}}\|}{\|\vec{F}_{\text{électrique}}\|} \leq \frac{\|\vec{v}\| \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|}$$

(pour une onde plane progressive dans le vide $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$)

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{magnétique}}\|}{\|\vec{F}_{\text{électrique}}\|} \leq \frac{\|\vec{v}\|}{c}$$

Dans ce problème, les charges sont loin d'avoir des vitesse relativistes donc $\frac{v}{c} \ll 1$ et la force magnétique est à négliger.

20)

$$-e \vec{E} - m \omega_0^2 \vec{r} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$21) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

et en projetant sur \vec{u}_y

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega_0^2 r = -\frac{e}{m} E$$

on travaille en régime sinusoïdal établi d'où, en complexes :

$$(\omega)^2 \underline{r} + \omega_0^2 \underline{r} = -\frac{e}{m} \underline{E}$$

$$\underline{r} = -\frac{e}{m} \frac{\underline{E}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

finallement

avec

$$\underline{r} = -r_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y$$

$$r_0 = \frac{e}{m} \frac{E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

22)

$$\vec{P}(t) = q \vec{NP}$$

$$= e \vec{MO}$$

$$\vec{P}(t) = -e \vec{r}$$

$$\vec{P}(t) = -e \times -\frac{e}{m} \frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\vec{P}(t) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}$$

polarisabilité (définie ici par $\vec{P} = \alpha \vec{E}$)

$$\alpha = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

23)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = -i\omega \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E}$$

24)

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

$$\vec{J} = N(-e) \vec{v}$$

$$\vec{J}_s = \vec{J} a$$

25) finalement :

$$\begin{aligned}
 \vec{j}_s &= -N a e \vec{v} \\
 \vec{j}_s &= -N a e \times -i\omega \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \vec{E} \\
 &= N a (i\omega) (\propto \vec{E}) \\
 &= N a \frac{d}{dt} \vec{P} \\
 \boxed{\vec{j}_s} &= \boxed{N a \dot{\vec{P}}}
 \end{aligned}$$

Le courant est causé par l'oscillation des dipôles.

26) en récupérant la formule trouvée en 16)

$$\boxed{\vec{E}_{\text{dipôles}}(z=0, t) = - \frac{\mu_0 c}{2} \vec{j}_s}$$

c'est le champ créé par l'oscillation des dipôles.

$$= - \frac{\mu_0 c}{2} N a (i\omega) (\propto \vec{E})$$

27) au niveau du plan :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{\text{total}} &= \vec{E}_{\text{onde}} + \vec{E}_{\text{dipôles}} \\
 \vec{E}_{(0,t)} &= \vec{E}_{i(0,t)} - i\omega \frac{\mu_0 c N a \alpha}{2} \vec{E}_{(0,t)} \\
 \vec{E}_{(0,t)} &= \frac{1}{1 + i\omega \frac{\mu_0 c N a \alpha}{2}} \vec{E}_{i(0,t)}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E}_0 = \frac{1}{1 + i\omega \frac{\mu_0 c N a \alpha}{2}} E_{0,i}}$$

28) pour $z > 2$, le champ total ou champ transmis est la somme du champ de l'onde et du champ créé par le plan de dipôles oscillants.

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{(z>2,t)} &= E_{0,i} \exp i\omega(t - \frac{z}{c}) \vec{u}_y \\
 &+ (-i\omega \frac{\mu_0 c N a \alpha}{2}) E_0 \exp i\omega(t - \frac{z}{c}) \vec{u}_y
 \end{aligned}$$

On remplace E_0 par son expression

$$\vec{E}_{\text{transmis}} = \frac{E_{0,i}}{1 + i\omega \frac{\mu_0 c N a \alpha}{2}} \exp i\omega(t - \frac{z}{c}) \vec{u}_y$$

(de façon logique, on obtient $E_0 \exp i\omega(t - \frac{z}{c}) \vec{u}_y$)

2) pour $z < 0$, on appelle onde réfléchi l'onde due au plan de dipôles oscillants (cf réponse 1b)

$$\vec{E}_{\text{réfléchi}} = (-i\omega \frac{\mu_0 c N a \alpha}{2}) E_{0,i} \exp i\omega(t + \frac{z}{c}) \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_{\text{réfléchi}} = \frac{-i\omega \frac{\mu_0 c N a \alpha}{2} E_{0,i}}{1 + i\omega \frac{\mu_0 c N a \alpha}{2}} \exp i\omega(t + \frac{z}{c}) \vec{u}_y$$

3) On pose $n = 1 + \epsilon$

→ A l'ordre 0 en ϵ , la lame est identique à une lame de vide et le déphasage φ doit être nul

$$\begin{aligned} (-\varphi) &= k_0 a - \arctan\left(\frac{1+n^2}{2n} \tan(nk_0 a)\right) \\ &= k_0 a - \arctan\left(\frac{2}{2} \tan(k_0 a)\right) \\ &= k_0 a - \arctan(\tan(k_0 a)) \\ &= k_0 a - k_0 a \\ &= 0 \end{aligned}$$

→ On essaye à l'ordre 1 en ϵ

$$\begin{aligned} \text{avec } \frac{1+n^2}{2n} &= \frac{1+(1+\epsilon)^2}{2(1+\epsilon)} \\ &= \frac{2+2\epsilon}{2+2\epsilon} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-\varphi) &= k_0 a - \arctan\left(\frac{1+n^2}{2n} \tan(nk_0 a)\right) \\ &= k_0 a - \arctan(1 \tan(nk_0 a)) \\ &= k_0 a - n k_0 a \end{aligned}$$

$$\varphi = k_0 (n-1) a$$

31) \rightarrow L'onde parcourt la distance (a) à la vitesse c/n
et la distance $(z-a)$ à la vitesse c

$$\tau = \frac{a}{c/n} + \frac{z-a}{c}$$

$$\tau_{\text{lame}} = \frac{(n-1)a + z}{c}$$

\rightarrow En l'absence de lame

$$\tau_{\text{vide}} = \frac{z}{c}$$

\rightarrow Le temps supplémentaire dû à la lame vaut :

$$\begin{aligned} \Delta \tau &= \tau_{\text{lame}} - \tau_{\text{vide}} \\ &= \frac{(n-1)a}{c} \end{aligned}$$

Chaque période correspond à un retard de phase de 2π

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\Delta \tau}{T} 2\pi \\ &= \frac{2\pi}{cT} (n-1) a \quad \text{or } \frac{2\pi}{T} = \omega \end{aligned}$$

$$\varphi = k_0 (n-1) a$$

32) En l'absence de réflexion, l'amplitude ne change pas au cours du trajet.

Si la traversée s'effectuait dans le vide, on aurait en $z > a$:

$$\vec{E}_r = E_{0,i} \exp i(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y$$

Ici le déphasage supplémentaire retard vaut φ donc :

$$\vec{E}_r = E_{0,i} \exp i(\omega t - k_0 z - \varphi) \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_i(z, t) \exp(-i\varphi)$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_i(z, t) \exp(-ik_0(n-1)a)$$

33) On avait trouvé (réponse 28)

$$\vec{E}_R = \frac{1}{1 + i\omega \frac{\mu_0 c N 2\alpha}{2}} \vec{E}_i$$

on a : $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ donc :

$$\vec{E}_R = \frac{1}{1 + i\omega \frac{N 2\alpha}{2\epsilon_0 c}} \vec{E}_i$$

de plus $\frac{\omega N 2\alpha}{2\epsilon_0 c} = \frac{N\alpha}{2\epsilon_0} 2\pi \frac{a}{\lambda}$

on sait déjà que $\frac{a}{\lambda} \ll 1$

Ici on suppose

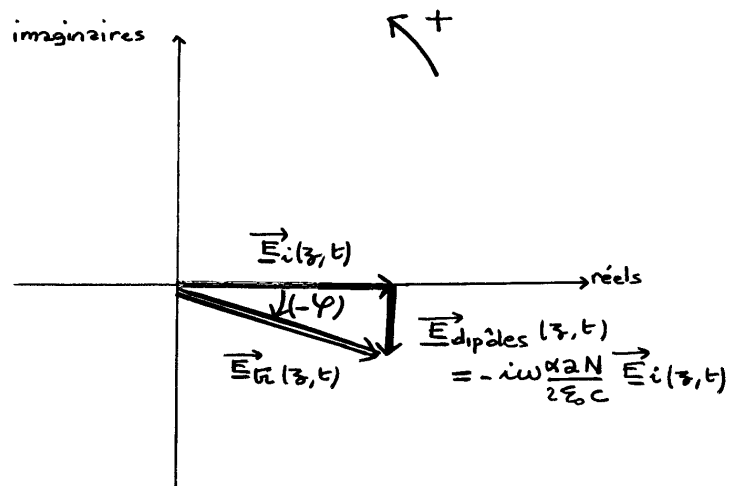
$$\frac{N\alpha\pi(a)}{\epsilon_0(\lambda)} \ll 1$$

alors :

$$\vec{E}_R \simeq \left(1 - i\omega \frac{N 2\alpha}{2\epsilon_0 c}\right) \vec{E}_i$$

34) On retrouve le champ de l'onde incidente
plus le champ émis par le plan de dipôles vibrants

35)



\vec{E}_R est la somme des deux champs.

Il est en retard de ϕ par rapport à l'onde originale, seule

onde existant en l'absence de la lame.

$$\tan \varphi \simeq \varphi = \omega \frac{\alpha 2N}{2\epsilon_0 c}$$

Le ralentissement de l'onde causé par la lame est en lien avec le fait que l'onde émise par le plan de dipôles n'est pas en phase avec l'onde incidente mais en retard de $\pi/2$

36) première méthode : on compare les deux expressions de φ

$$\varphi = \omega \frac{\alpha 2N}{2\epsilon_0 c} = k_0 (n-1) 2$$

$$\frac{\alpha N}{2\epsilon_0} = n-1 \quad \text{donc :}$$

$$n = 1 + \frac{N\alpha}{2\epsilon_0}$$

deuxième méthode : on compare les deux expressions de \underline{E}_r

$$\underline{E}_r = \underline{E}_i \left(1 - i\omega \frac{\alpha 2N}{2\epsilon_0 c} \right)$$

$$\underline{E}_r = \underline{E}_i \exp(-ik_0(n-1)2)$$

$$\simeq \underline{E}_i \left(1 - i k_0(n-1) 2 \right)$$

La comparaison des deux expressions donne bien le même résultat.

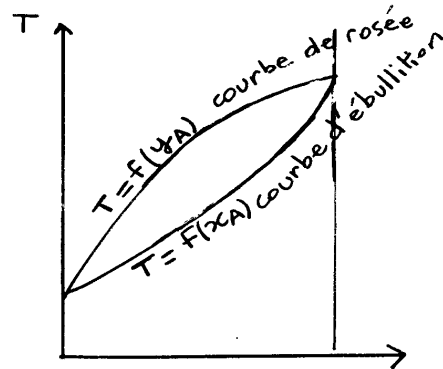
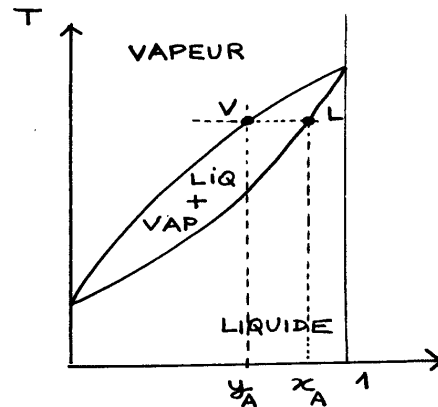
37)

$$\begin{aligned} n &= 1 + \frac{N}{2\epsilon_0} \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ &= 1 + \frac{Ne^2/m}{2\epsilon_0 \omega_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \\ &\simeq 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0 \omega_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \end{aligned}$$

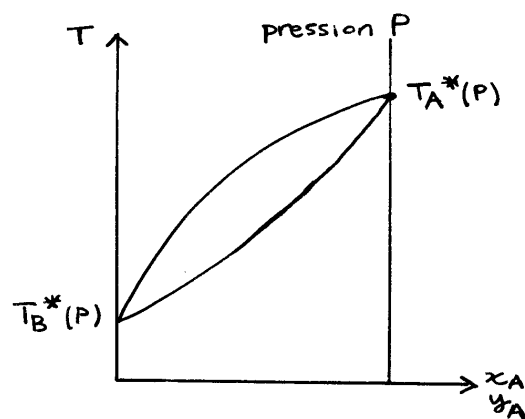
$$n = \left(1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0 \omega_0^2} \right) + \left(\frac{2\pi^2 Ne^2 c^2}{m \epsilon_0 \omega_0^4} \right) \frac{1}{\lambda_0^2}$$

Un exemple de distillation

1) et 2)



3)



La température d'ébullition de B est inférieure à celle de A

$$T_B^*(P) < T_A^*(P)$$

on peut en déduire que B est plus volatil que A

A la température T , la pression de vapeur saturante de B sera donc supérieure à la pression de vapeur saturante de A.

$$P_B^*(T) > P_A^*(T)$$

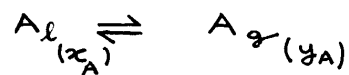
4) \rightarrow

$$\begin{aligned} P_A &= y_A P \\ P_B &= y_B P \end{aligned}$$

\rightarrow

$$M_{i,v}(T, P) = M_{i,v}^{\circ}(T) + RT \ln \frac{P_i}{P^{\circ}}$$

5) On écrit l'équilibre physique pour A dans le mélange à T, P

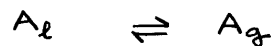


donc égalité des potentiels chimiques

$$M_{A,l}(T, P, x_A) = M_{A,g}(T, P, y_A)$$

$$M_{A,l}^{\circ}(T) + RT \ln x_A = M_{A,g}^{\circ}(T) + RT \ln \frac{P_A}{P^{\circ}}$$

puis pour A pur à T, P



$$M_{A,l}^{\circ}(T) = M_{A,g}^{\circ}(T) + RT \ln \frac{P_A^*}{P^{\circ}}$$

En faisant la différence entre ces deux équations :

$$RT \ln x_A = RT \ln \frac{P_A}{P_A^*}$$

$$\begin{aligned} P_A &= x_A P_A^* \\ P_B &= x_B P_B^* \end{aligned}$$

6) \rightarrow Courbe d'ébullition :

$$\begin{aligned}
 P &= P_A + P_B \\
 &= x_A P_A^*(T) + x_B P_B^*(T) \\
 &= x_A P_A^*(T) + (1-x_A) P_B^*(T)
 \end{aligned}$$

$$P = (P_A^*(T) - P_B^*(T)) x_A + P_B^*(T)$$

La courbe d'ébullition est une droite.

→ Courbe de rosée :

$$P_A = y_A P = x_A P_A^*$$

donc :

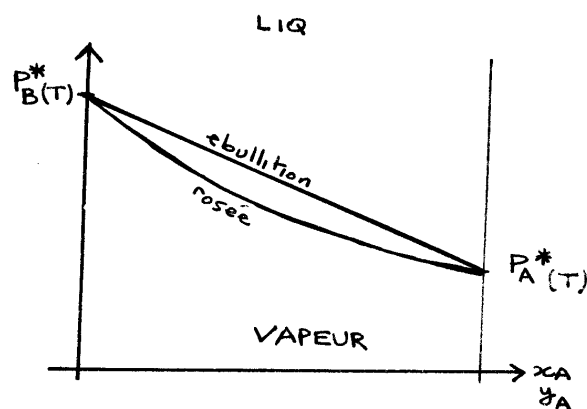
$$P = x_A \frac{P_A^*(T)}{y_A}$$

on remplace x_A par l'expression obtenue dans la courbe d'ébullition

$$P = \frac{(P - P_B^*(T))}{(P_A^*(T) - P_B^*(T))} \frac{P_A^*(T)}{y_A}$$

$$P = \frac{P_A^*(T) P_B^*(T)}{P_A^*(T) - y_A (P_A^*(T) - P_B^*(T))}$$

Il s'agit d'une branche d'hyperbole.



- 7) En tête de colonne (température basse), on recueille les vapeurs du composé le plus volatil B.

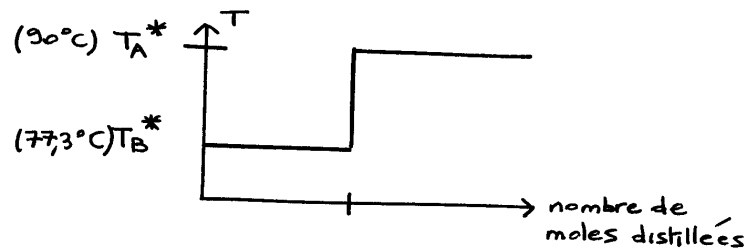
distillat : B

Dans le bouilleur la fraction molaire en A augmente donc.

bouilleur : $x_A = 0,8$
jusqu'à $x_A = 1$

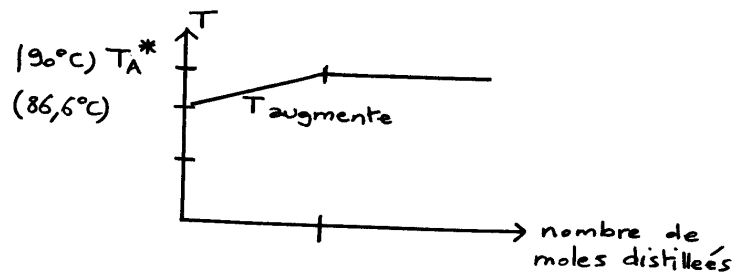
- 8) Dans la première phase, en tête de colonne on aura de la vapeur B seule.

Quand il n'y a plus de B, la vapeur est constituée de A pur



- 9) Dans le bouilleur, x_A augmente donc la température de la phase liquide en équilibre avec de la vapeur augmente aussi.

Dans la deuxième phase $x_A = 1$ et la température est celle de l'équilibre $A_{\text{liq}} \rightleftharpoons A_{\text{vap}}$

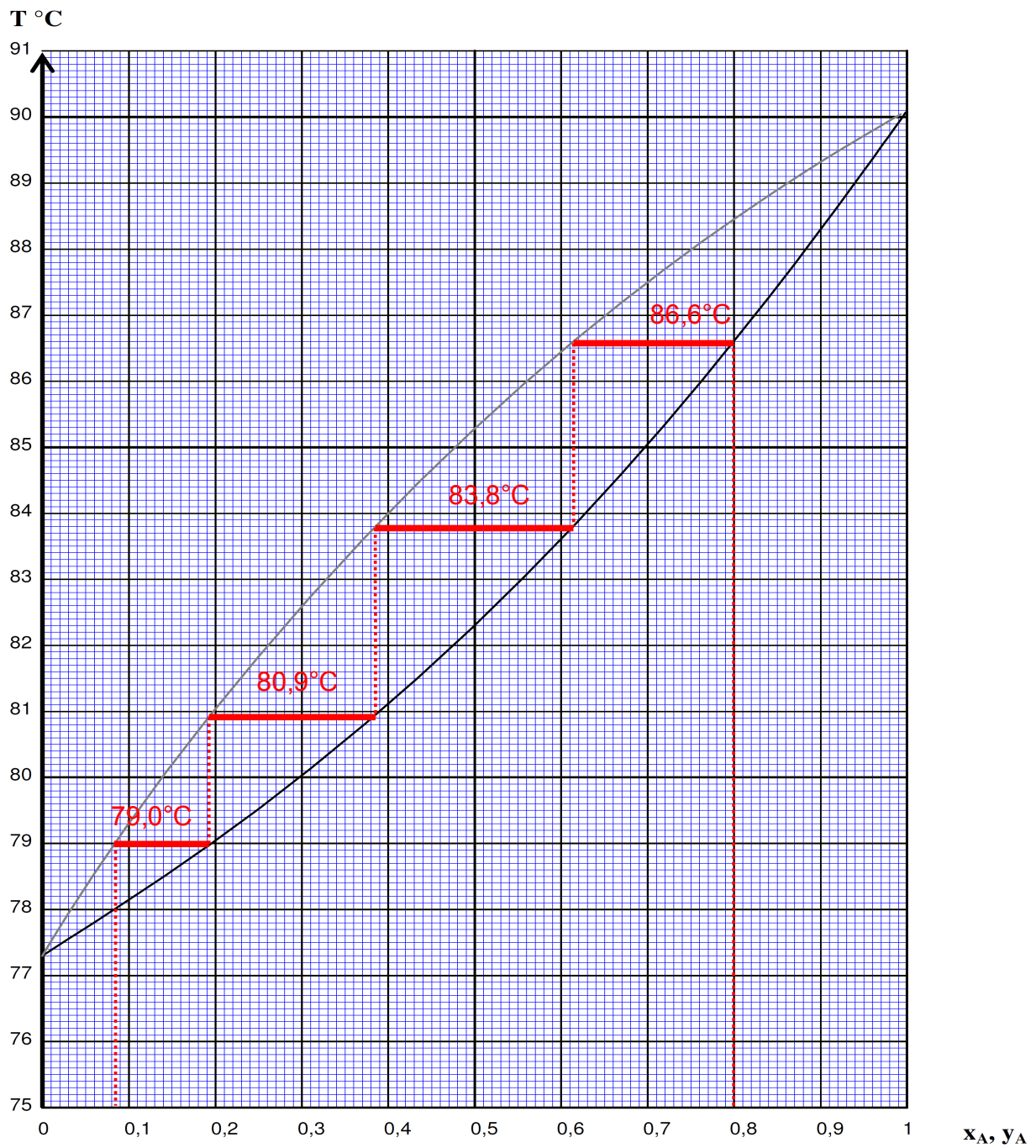


- 10) Il faut

4 plateaux théoriques

(c'est à dire 4

équilibres liquide-vapeur) pour atteindre $y_A = 0,10$.



11) le diagramme présente un azéotrope.

La miscibilité est totale (pour la non miscibilité, on verrait un hétéroazéotrope)

Le mélange n'est pas idéal (puisque présence d'un azéotrope)

12)

I	: vapeur
II	: vapeur + liquide
III	: liquide
IV	: vapeur + liquide

13)

Azéotrope pour $x_1 = 0,67$

Variance :

6 paramètres (x_1, x_2, y_1, y_2, T, P)

4 relations (

$$\begin{aligned} A_{1l} &\rightleftharpoons A_{1g} \\ A_{2l} &\rightleftharpoons A_{2g} \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ y_1 + y_2 &= 1 \end{aligned}$$

)

$$v'_{\text{générale}} = 6 - 4 = 2$$

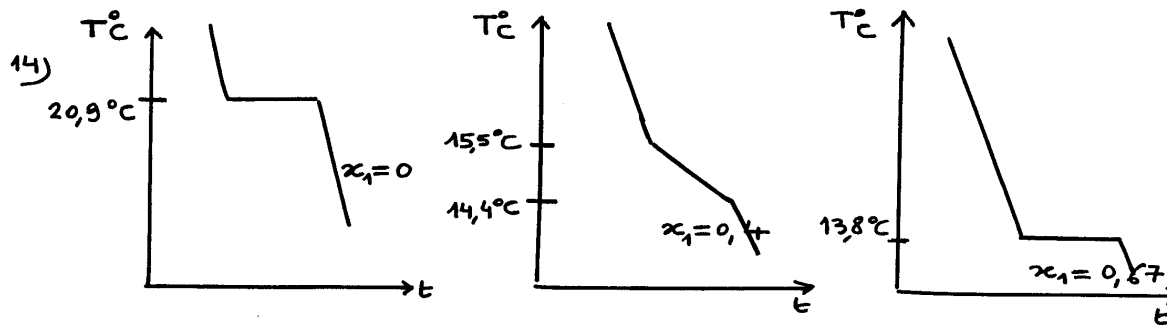
la pression étant connue $v'_{\text{réduite}} = 2 - 1 = 1$

De plus la composition de la phase liquide est égale à celle de la phase vapeur donc une relation supplémentaire

$$v'_{\text{réduite}} = 1 - 1 = 0$$

$$v' = 0$$

Le mélange bout à une température qui est fixée par la nature (il n'y a aucun degré de liberté)



15)

$$\begin{aligned}
 x_{\text{méthanol}} &= \frac{n_{\text{méthanol}}}{n_{\text{méthanol}} + n_{\text{butanone}}} \\
 &= \frac{4}{4 + 6} \\
 &= 0,4
 \end{aligned}$$

Température d'ébullition commençante = $14,4^\circ\text{C}$

Température d'ébullition finissante = $15,5^\circ\text{C}$

16)

composition de la première bulle $y_1 = 0,51$

composition de la dernière goutte $x_1 = 0,255$

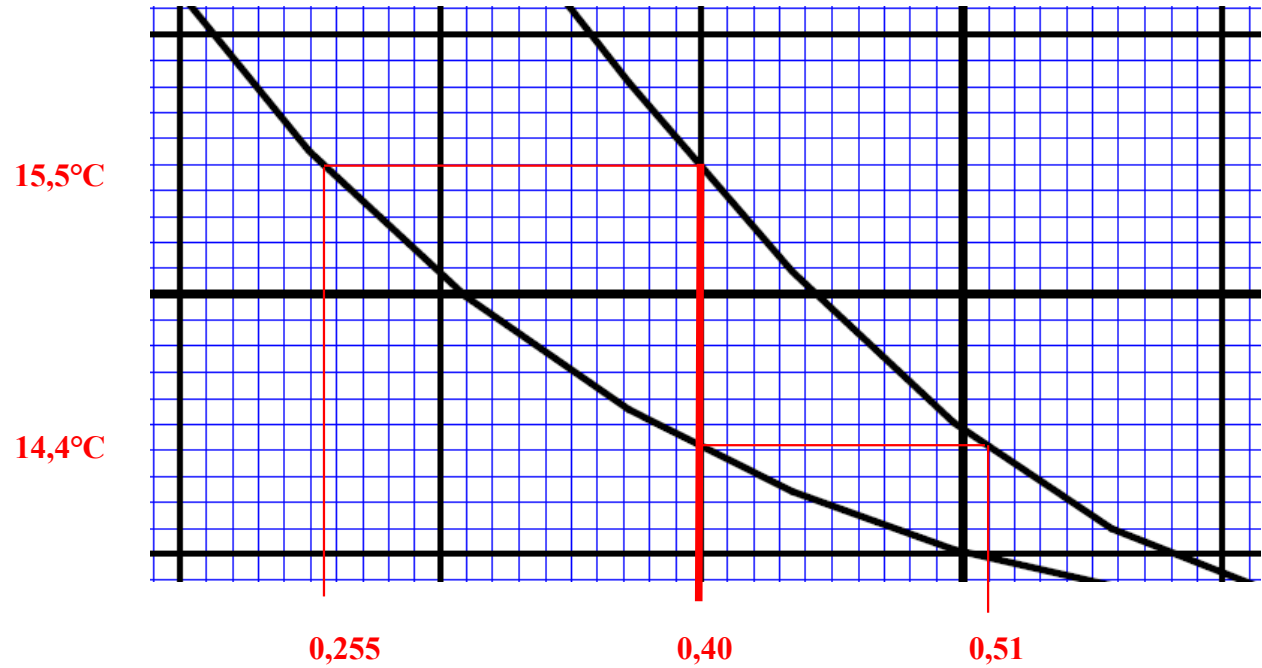
17) A 15°C

$$\begin{array}{ccc}
 L & M & V \\
 \times & \times & \times \\
 0,31 & 0,40 & 0,445
 \end{array}$$

D'après la règle des "moments chimiques"

$$\begin{aligned}
 n_{\text{vapeur}} &= n_{\text{total}} \times \frac{LM}{LV} \\
 &= 10 \times \frac{0,40 - 0,31}{0,445 - 0,31}
 \end{aligned}$$

$$n_{\text{vapeur}} = 6,67 \text{ moles}$$



$$n_{\text{liquide}} = 3,33 \text{ moles}$$

La phase vapeur est de composition $y_1 = 0,445$ et contient donc

$$\begin{aligned} n_{\text{méthanol vapeur}} &= n_{\text{vapeur}} \times y_1 \\ &= 6,67 \times 0,445 \end{aligned}$$

$$n_{\text{méthanol vapeur}} = 2,97 \text{ moles}$$

$$n_{\text{butanone vapeur}} = 3,70 \text{ moles}$$

La phase liquide est de composition $x_1 = 0,31$ et contient donc

$$\begin{aligned} n_{\text{méthanol liquide}} &= n_{\text{liquide}} \times x_1 \\ &= 3,33 \times 0,31 \end{aligned}$$

$$n_{\text{méthanol liquide}} = 1,03 \text{ moles}$$

$$n_{\text{butanone liquide}} = 2,30 \text{ moles}$$

- 18) Si $x_{\text{mélange initial}} < 0,67$ distillat : mélange azeotropique
résidu : butanone
- Si $x_{\text{mélange initial}} > 0,67$ distillat : mélange azeotropique
résidu : méthanol (le plus volatil des deux produits du mélange!)

- 19) Si on fixe P , la composition de l'azeotrope (et la température d'ébullition) sont fixées.

Mais la composition de l'azeotrope (et la température d'ébullition) dépendent de cette pression.

	$P = 1 \text{ bar}$	$P = 0,1 \text{ bar}$
x_{AZ}	0,83	0,67
$T_{\text{eb AZ}}$	64 °C	13,8 °C

20)

D1 distillat : arzéotrope ($x_{D1} = 0,83$)
 B1 résidu : butanone ($x_{B1} = 0$)

21)

D2 distillat : arzéotrope ($x_{D2} = 0,67$)
 B2 résidu : méthanol ($x_{B2} = 1$)

22)

Cette installation permet donc de séparer, malgré la présence d'arzéotrope, la butanone (recueillie en B1) et le méthanol (recueilli en B2), ce qui n'est pas possible par une distillation fractionnée.

on joue ici sur le fait que entre $P = 1 \text{ bar}$ et $P = 0,1 \text{ bar}$, on passe "de l'autre côté" de l'arzéotrope.

23) \rightarrow le nombre de moles $n(t)$ dans une colonne est une constante en régime stationnaire or, D désignant un débit molaire (supposé toujours positif ici)

$$\underbrace{\frac{dn}{dt}}_{\text{nul}} = \sum D_{\text{entrant}} - \sum D_{\text{sortant}}$$

donc

$$\sum D_{\text{entrant}} = \sum D_{\text{sortant}}$$

Remarques:

\rightarrow Cette relation est aussi valable au nœud d'entrée (arrivées : A et D2, départ A')

\rightarrow Cette relation est valable en considérant les moles de méthanol uniquement (au lieu des moles totales)

$$\sum_{\text{méthanol}} D_{\text{entrant}} = \sum_{\text{méthanol}} D_{\text{sortant}}$$

$$\sum_{\text{entrant}} x_i D_i = \sum_{\text{sortant}} x_i D_i$$

24) Les relations (bilans de matière globaux)

① noeud : $A + D_2 = A'$

② colonne 1 : $A' = D_1 + B_1$

③ colonne 2 : $D_1 = D_2 + B_2$

Les relations (bilans de matière en méthanol)

④ noeud : $x_A A + x_{D_2} D_2 = x_{A'} A'$

⑤ colonne 1 : $x_{A'} A' = x_{D_1} D_1 + x_{B_1} B_1$

⑥ colonne 2 : $x_{D_1} D_1 = x_{D_2} D_2 + x_{B_2} B_2$

Avec ③

$$B_2 = D_1 - D_2$$

$$= 139,1 - 80,8$$

$$B_2 = 58,3 \text{ kmol.h}^{-1}$$

Avec ⑥

$$x_{B_2} = \frac{x_{D_1} D_1 - x_{D_2} D_2}{B_2}$$

$$= \frac{0,80 \times 139,1 - 0,68 \times 80,8}{58,3}$$

$$x_{B_2} = 0,966$$

$$x_{B_2} = 0,97$$

25) Avec ① et ②

$$B_1 = A + D_2 - D_1$$

$$\text{ou } = A - B_2$$

remarque:

on remarquera qu'en faisant ① + ② + ③, on obtient $A = B_1 + B_2$, ce qui n'est autre que le bilan de matière global pour l'installation

$$B_1 = 100 - 58,3$$

$$B_1 = 41,7 \text{ kmol.h}^{-1}$$

Avec (4) et (5)

$$x_{B_1} = \frac{x_A A + x_{D_2} D_2 - x_{D_1} D_1}{B_1}$$

ou encore (cf : remarque précédente)

$$x_{B_1} = \frac{x_A A - x_{B_2} B_2}{B_1}$$

$$x_{B_1} = 0,0399$$

$$x_{B_1} = 0,04$$

La séparation est donc assez bonne.
