

---

## Régime sinusoïdal forcé d'un circuit RLC

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Diagramme de Fresnel</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Application : Etude d'un circuit RLC . . . . .	3
1.2.1	Dipôles fondamentaux . . . . .	3
1.2.2	Groupeement R,L,C . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Méthode des grandeurs complexes-Impédance complexe</b>	<b>5</b>
2.1	Notation complexe . . . . .	5
2.1.1	Preliminaire . . . . .	5
2.1.2	propriétés . . . . .	6
2.1.3	Application à une grandeur alternative sinusoïdale . . . . .	6
2.1.4	Dérivée et primitive en notation complexe . . . . .	7
2.2	Lois de Kirchhoff en notation complexe . . . . .	7
2.3	Impédance complexe-Admittance complexe . . . . .	7
2.3.1	Définitions . . . . .	7
2.3.2	Dipôles fondamentales R,L,C . . . . .	8
2.4	Groupeement série de dipôles passifs . . . . .	8
2.4.1	Impédance équivalente . . . . .	8
2.4.2	Cas du RLC série . . . . .	8
2.5	Groupeement parallèle de dipôles passifs . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Théorèmes généraux</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Résonance d'un circuit RLC</b>	<b>10</b>
4.1	résonance en intensité . . . . .	10
4.1.1	Intensité efficace du circuit . . . . .	10
4.1.2	Résonance . . . . .	10
4.1.3	Bande passante . . . . .	11
4.1.4	Aspect graphique . . . . .	11
4.2	Résonance en tension aux bornes du condensateur . . . . .	12
4.2.1	Tension efficace aux bornes du condensateur . . . . .	12
4.2.2	Résonance en tension . . . . .	13
4.2.3	Aspect graphique . . . . .	13

On s'intéresse à un circuit  $RLC$ , soumis à une tension sinusoïdale. Le régime sinusoïdal forcé s'établit rapidement après extinction du régime transitoire.

# 1 Diagramme de Fresnel

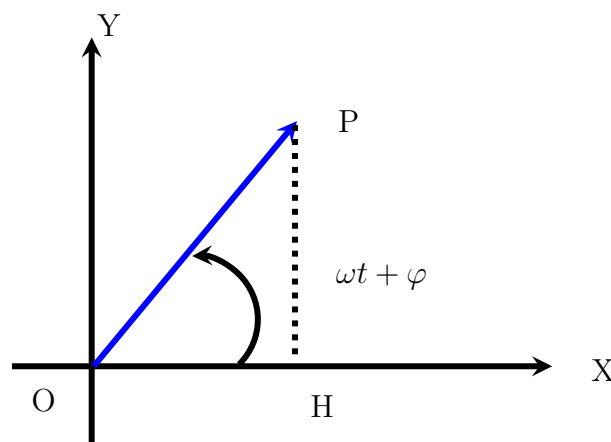
## 1.1 Définitions

- **Diagramme de Fresnel** : Il s'agit d'une représentation vectorielle des grandeurs sinusoïdales.

- **Vecteur de Fresnel** : Il s'agit d'un vecteur représentant une grandeur sinusoïdale.

Considérons un vecteur  $\overrightarrow{OP}$  de module  $V_m$  tournant autour du point  $O$  dans le sens trigonométrique avec une vitesse angulaire  $\omega$  constante.

On choisit l'axe  $OX$  de référence tq :  $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP}) = \varphi$  à  $t = 0$



$H$  la projection de  $P$  sur  $OX$

$$\overline{OH} = OP \cos(\omega t + \varphi) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- **Résultat** : à toute grandeur sinusoïdale on peut faire correspondre un vecteur de Fresnel.

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \text{ tq :}$$

$$||\overrightarrow{OP}|| = V_m \text{ l'amplitude de } v(t)$$

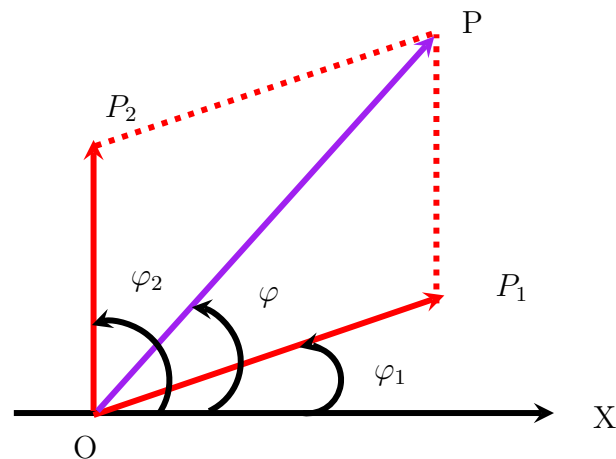
$$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP}) = \omega t + \varphi \text{ la phase instantanée}$$

► **Somme de deux grandeurs sinusoïdales**

Soient :  $v_1(t) = V_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $v_2(t) = V_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$  des grandeurs sinusoïdales associées aux vecteurs  $\overrightarrow{OP_1}$  et  $\overrightarrow{OP_2}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} \text{ donc}$$

$$v = v_1 + v_2 = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$



► **Dérivée et primitive d'une grandeur sinusoïdale**

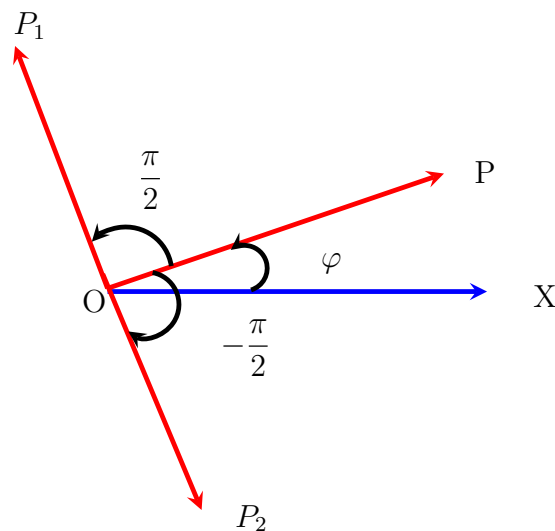
$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\omega V_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega V_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP_1}$$

- **Résultat** : la grandeur  $\frac{dv}{dt}$  est en quadrature avance par rapport à  $v(t)$

$$\int v dt = \frac{V_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{V_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP_2}$$

- **Résultat** : la grandeur  $\int v dt$  est en quadrature retard par rapport à  $v(t)$



## 1.2 Application : Etude d'un circuit RLC

### 1.2.1 Dipôles fondamentaux

Par analogie avec la loi d'Ohm :

$$U_m = Z I_m \text{ et } I_m = Y U_m$$

$U_m$  : Amplitude de la tension

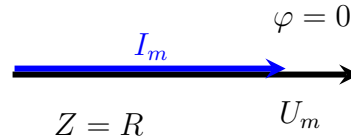
$I_m$  : Amplitude du courant

$Z$  : Impédance modulaire ( $\Omega$ )

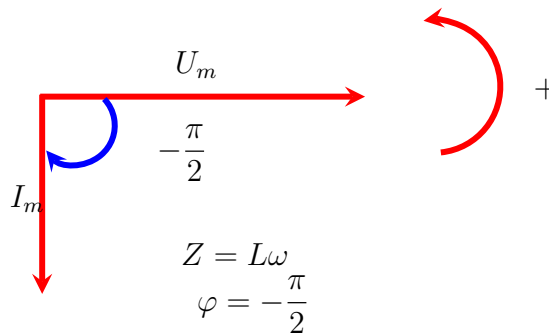
$Y$  : Admittance modulaire ( $\Omega^{-1}$  ou siemens  $s$ )

- **Résistance pure** :  $u(t) = U_m \cos(\omega t) = Ri(t) \Rightarrow i(t) = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t)$

En prenant comme axe de référence la tension, nous obtenons un diagramme très simple .

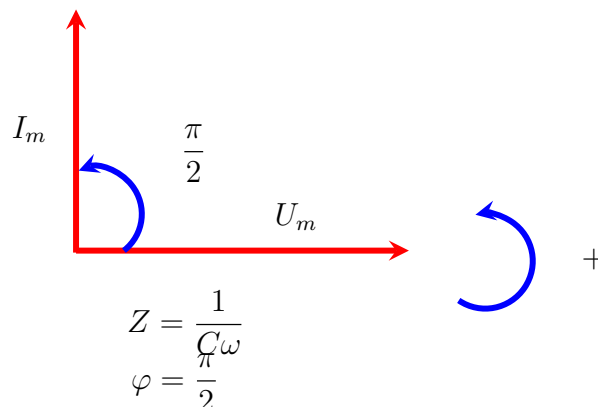


- **Bobine pure** :  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = U_m \cos(\omega t) \Rightarrow i(t) = \frac{U_m}{L} \int \cos(\omega t) dt = \frac{U_m}{L\omega} \sin(\omega t)$   
 $i(t) = \frac{U_m}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow I_m = \frac{U_m}{L\omega}; \varphi = -\frac{\pi}{2}; Z = L\omega$



- **Resultat** : Le courant est en quadrature retard par rapport à la tension .

- **Condensateur** :  $u(t) = \frac{q(t)}{C} = U_m \cos(\omega t)$   
 $i(t) = \frac{dq}{dt} = -C\omega U_m \sin(\omega t) = C\omega U_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$   
 On déduit :  $I_m = C\omega U_m$  et  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

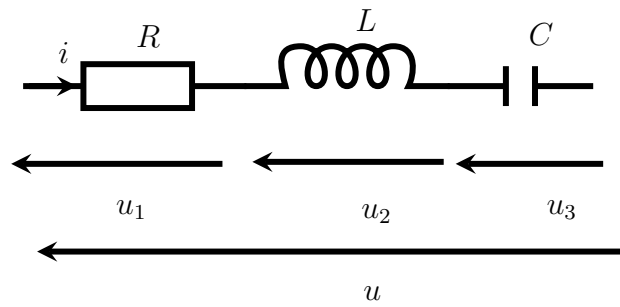


- **Resultat** : Le courant est en quadrature avance par rapport à la tension .

### 1.2.2 Groupement R,L,C

En serie la grandeur commune est l'intensité on la choisit comme axe de référence .

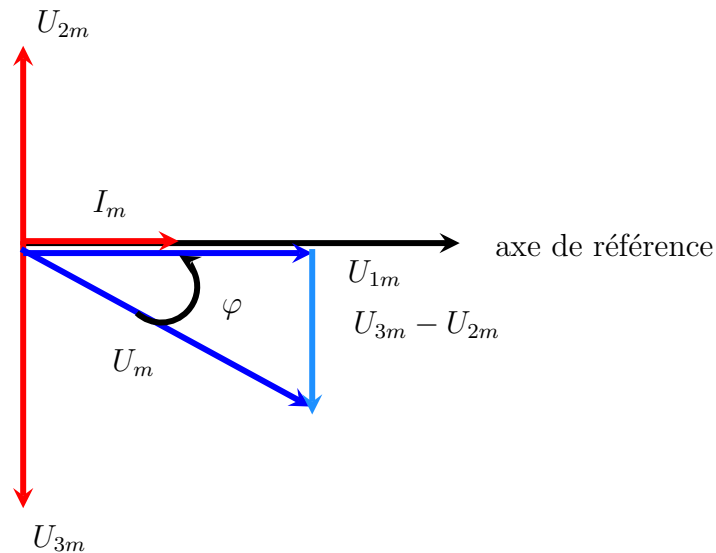
$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$



$$u_1(t) = RI_m \cos(\omega t) = U_{1m} \cos(\omega t)$$

$$u_2(t) = L\omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_{2m} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$u_3(t) = \frac{I_m}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = U_{3m} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$



$$U_m^2 = U_{1m}^2 + (U_{3m} - U_{2m})^2 = [R^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2] I_m^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega} - L\omega)^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

## 2 Méthode des grandeurs complexes-Impédance complexe

### 2.1 Notation complexe

#### 2.1.1 Préliminaire

En physique pour ne pas confondre le nombre d'Hamilton  $i$  tq  $i^2 = -1$  avec l'intensité du courant on note  $j^2 = -1$ .

Un nombre complexe peut se mettre sous la forme

$$z = a + jb = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r \exp j\theta$$

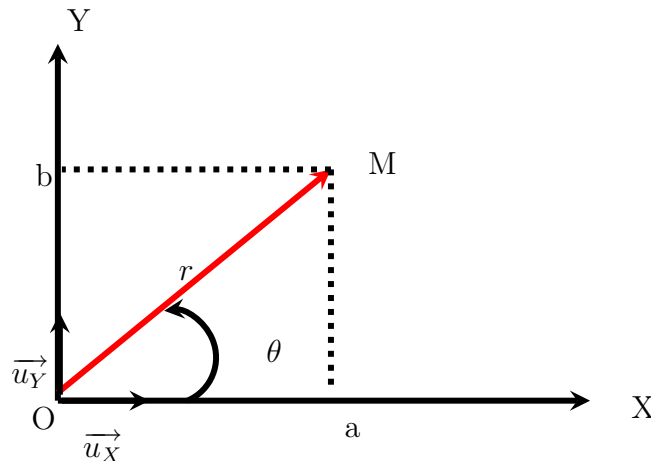
a : partie réelle

b : partie imaginaire

r : module

$\theta$  : argument

On peut lui associer un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans le plan complexe  $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y)$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

### 2.1.2 propriétés

- $z_1 = z_2 \Rightarrow a_1 = a_2; b_1 = b_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2; \theta_1 = \theta_2$
- $z = z_1 z_2 \Leftrightarrow r = r_1 r_2; \theta = \theta_1 + \theta_2$
- $z = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow r = \frac{r_1}{r_2}; \theta = \theta_1 - \theta_2$
- $z = a + jb \Leftrightarrow z^* = a - jb; z^* = (r, -\theta)$
- L'expression du module de  $z$  est  $r = \sqrt{z \cdot z^*}$
- La condition  $z$  réel se traduit par  $z = z^*$
- La condition  $z$  imaginaire se traduit par  $z = -z^*$

### 2.1.3 Application à une grandeur alternative sinusoïdale

Considérons les grandeurs sinusoïdales :  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$  et  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

On peut leur faire correspondre les grandeurs complexes :

$$\underline{u}(t) = U_m \exp j\omega t \text{ et } \underline{i}(t) = I_m \exp(j\omega t + \varphi)$$

seules les parties réelles ont un sens physique .

Usuellement on pose  $\underline{I}_m = I_m \exp j\varphi$  l'intensité maximale complexe de  $i(t)$

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m \exp j\omega t \text{ avec}$$

$|\underline{I}_m| = I_m$  : intensité maximale de  $i$   
 $\arg \underline{I}_m = \varphi$  : phase à l'origine de  $i(t)/u(t)$

### 2.1.4 Dérivée et primitive en notation complexe

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m \exp j\omega t \Rightarrow \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega \underline{I}_m \exp j\omega t$$

$$\boxed{\frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega \underline{i}(t)}$$

$$\int \underline{i}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{I}_m \exp j\omega t$$

$$\boxed{\int \underline{i}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{i}(t)}$$

## 2.2 Lois de Kirchhoff en notation complexe

Dans le cadre de l'ARQP, en régime sinusoïdal les lois de Kirchhoff se généralisent en notation complexe :

- Loi des Noeuds

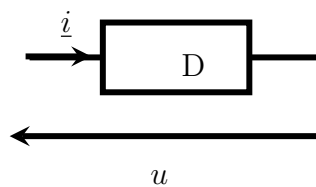
$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0}$$

- Loi des mailles

$$\boxed{\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0}$$

## 2.3 Impédance complexe-Admittance complexe

### 2.3.1 Définitions



Par analogie avec la loi d'Ohm :

$$\boxed{\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i} \Leftrightarrow \underline{i} = \underline{Y} \cdot \underline{u}}$$

$\underline{Z}$  : Impédance complexe

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  admittance complexe

$\underline{u}(t) = U_m \exp j\omega t$  et  $\underline{i}(t) = I_m \exp(j\omega t + \varphi) = \underline{I}_m \exp j\omega t$   
la relation précédente se simplifie en

$$\boxed{U_m = \underline{Z} \cdot I_m}$$

$\varphi$  est le déphasage de  $i/u$

- En modules  $U_m = Z \cdot I_m$
- Le déphasage

$$\boxed{0 = \arg \underline{Z} + \varphi}$$

### 2.3.2 Dipôles fondamentales R,L,C

- **Résistance pure** :  $u(t) = R.i(t) \Leftrightarrow \underline{u}(t) = R.\underline{i}(t)$  donc

$$\underline{Z}_R = R; \underline{Y}_R = \frac{1}{R}$$

- **Bobine pure**

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow \underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega \underline{i}$$

$$\underline{Z}_L = jL\omega; \underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$$

$$|\underline{Z}_L| = L\omega \text{ et } \varphi_{i/u} = -\arg \underline{Z} = \arg \underline{Y} = -\frac{\pi}{2} \text{ (quadrature retard)}$$

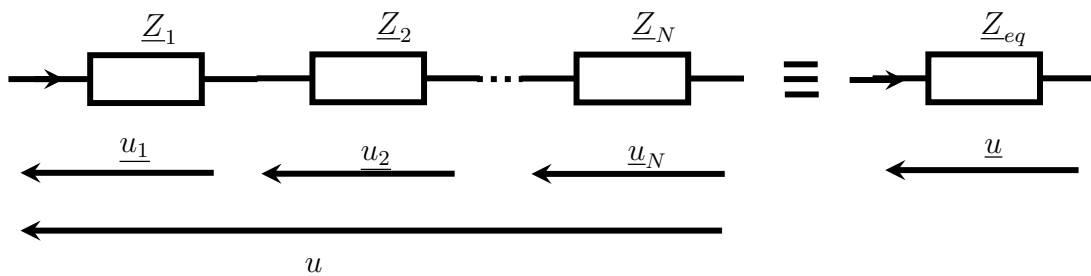
- **Condensateur**  $u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Leftrightarrow \underline{u} = \frac{1}{C} \int \underline{i} dt = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}; \underline{Y}_C = jC\omega$$

$$\varphi_{i/u} = \frac{\pi}{2} \text{ (quadrature avance)}$$

## 2.4 Groupement série de dipôles passifs

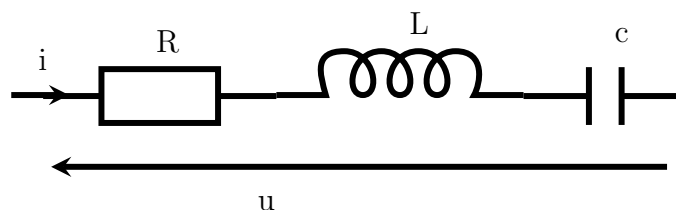
### 2.4.1 Impédance équivalente



$$\underline{u} = \sum_k \underline{Z}_k \underline{i} = \underline{Z}_{eq} \underline{i}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k$$

### 2.4.2 Cas du RLC série



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ et } u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

en utilisant les impédances complexes :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C$$



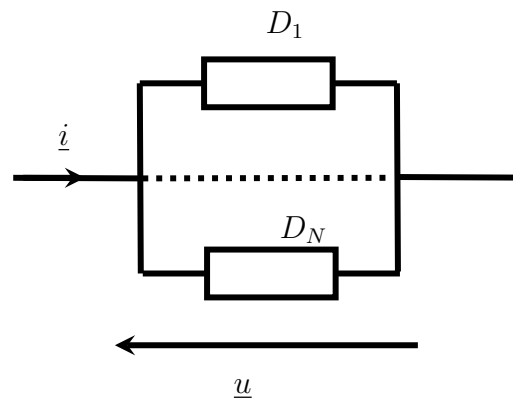
$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)$$

$$I_m = \frac{U_m}{|\underline{Z}|} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{L\omega - \frac{1}{c\omega}}{R}$$

avec  $\cos \varphi > 0$

## 2.5 Groupement parallèle de dipôles passifs



$$\underline{i} = \sum_k \underline{i}_k = \sum_k \underline{Y}_k \underline{u}$$

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_k \underline{Y}_k; \underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\underline{Y}_{eq}}$$

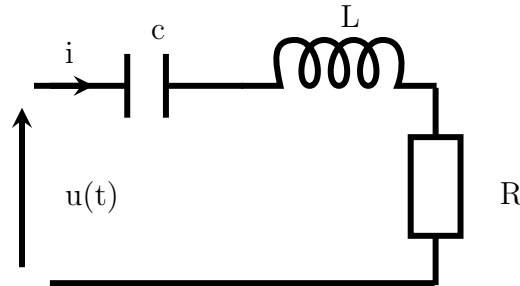
## 3 Théorèmes généraux

Les lois de Kirchhoff et les théorèmes généraux qui découlent de la linéarité du système se généralisent au régime sinusoïdal dans le cadre de la représentation complexe. Tous les théorèmes vus précédemment restent valables à condition de remplacer chaque dipôle par son impédance complexe ou son admittance complexe.

## 4 Résonance d'un circuit RLC

### 4.1 résonance en intensité

#### 4.1.1 Intensité efficace du circuit



$$u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

En notation complexe

$$\underline{u} = U\sqrt{2}\exp j\omega t$$

$$\underline{i} = I\sqrt{2}\exp(j\omega t + \varphi) = \underline{I}\sqrt{2}\exp j\omega t$$

$$\underline{u} = \underline{Z}.\underline{i} \text{ avec } \underline{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{c\omega})$$

$$I \exp j\varphi = \frac{U}{R + j(L\omega - \frac{1}{c\omega})} \text{ et } \varphi(\omega) = -\arctan \frac{L\omega - \frac{1}{c\omega}}{R}$$

On définit :

- Pulsation propre du circuit :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Facteur de qualité du circuit :  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$
- Pulsation réduite du circuit :  $X = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$I(X) = \frac{\frac{U}{R}}{\sqrt{1 + Q^2(X - \frac{1}{X})}}$$

$$\varphi(X) = -\arctan(Q(X - \frac{1}{X}))$$

#### 4.1.2 Résonance

Il se produit le phénomène de résonance en courant lorsque l'intensité efficace  $I$  est maximale  $\Rightarrow X_r - \frac{1}{X_r} = 0 \Rightarrow X_r = 1 \Rightarrow \omega_r = \omega_0$  et  $\varphi(X_r) = 0$

• **Résultat** : La pulsation de résonance en intensité est égale à la pulsation propre du circuit, et le courant est en phase avec la tension à la résonance quelque soit le facteur de qualité  $Q$  du circuit  $RLC$  série .

$$\omega_r = \omega_0 \text{ et } \varphi(\omega_r) = 0$$

### 4.1.3 Bande passante

À la résonance l'intensité efficace est maximale  $I_{max} = \frac{U}{R}$ .

On appelle bande passante en pulsation réduite l'intervalle  $\Delta X = X_2 - X_1$  pour lequel

$$\frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \leq I(X) \leq I_{max}$$

$I(X) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + Q^2(X - \frac{1}{X})^2 = 2 \Rightarrow X - \frac{1}{X} = \pm \frac{1}{Q} \Rightarrow X^2 \pm \frac{X}{Q} - 1 = 0$  on prend les solutions positives

$$X_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

$$X_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$$

La bande passante en pulsation réduite

$$\Delta X = X_2 - X_1 = \frac{1}{Q}$$

La bande passante en pulsation

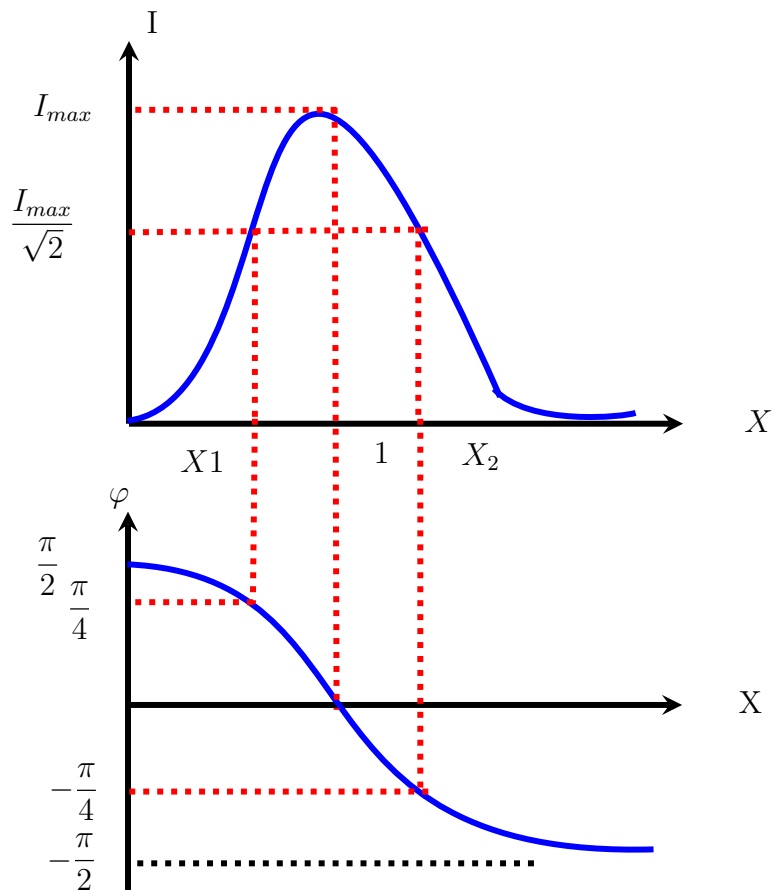
$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

La bande passante est d'autant plus étroite que le facteur de qualité est plus élevé.

### 4.1.4 Aspect graphique

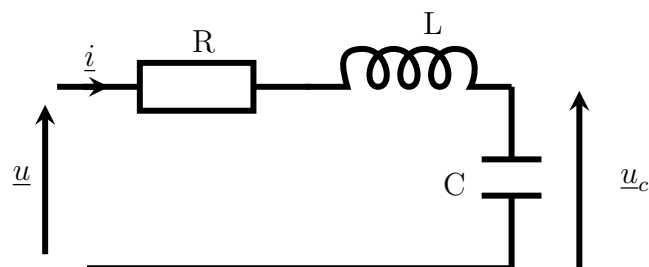
$I(x) \rightarrow 0$  lorsque  $X \rightarrow 0$  ou  $X \rightarrow \infty$  c'est le comportement limite du condensateur et du bobine.

- $\underline{Y}_c = j\omega C \rightarrow 0$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$  un condensateur se comporte comme une coupe - circuit aux très basses fréquences.
- $\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} \rightarrow 0$  lorsque  $\omega \rightarrow \infty$  la bobine se comporte comme une coupe circuit aux fréquences élevées.



## 4.2 Résonance en tension aux bornes du condensateur

### 4.2.1 Tension efficace aux bornes du condensateur



$$u_c(t) = U_c \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u(t) = U \sqrt{2} \cos \omega t$$

$$\underline{u}_c = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}} \underline{u} = \frac{\underline{u}}{j c \omega [R + j(L\omega - \frac{1}{c\omega})]}$$

$$U_c \exp j\phi = \frac{U}{1 - Lc\omega^2 + jRc\omega} \Rightarrow U_c = \frac{U}{\sqrt{(1 - Lc\omega^2)^2 + R^2c^2\omega^2}}$$

$$U_c = \frac{U}{\sqrt{(1 - X^2)^2 + \frac{X^2}{Q^2}}}$$

#### 4.2.2 Résonance en tension

Il existe une résonance en tension aux bornes du condensateur, lorsque la tension efficace  $U_c$  aux bornes du condensateur passe par un maximum pour une certaine valeur  $X_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$  ( $\omega_r$  pulsation de résonance).

À la résonance la fonction  $f(X) = (1 - X^2)^2 + \frac{X^2}{Q^2}$  doit être minimale

$$\left(\frac{df}{dX}\right)_{X=X_r} = 0 \Rightarrow 2X_r[-2(1 - X_r^2) + \frac{1}{Q^2}] = 0 \Rightarrow X_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \text{ ce qui exige}$$

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ donc } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \neq \omega_0$$

Pour  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  pas de résonance.

- **Résultat** : La résonance en tension exige  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

La pulsation de résonance en tension  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

- **Déphasage** :  $\underline{U}_{cm} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}_{cm} \Rightarrow \phi = \varphi - \frac{\pi}{2}$

La courbe représentant  $\phi$  en fonction de  $\omega$  se déduit directement à partir de la courbe  $\varphi = f(\omega)$  par un simple décalage vers le bas de  $-\frac{\pi}{2}$ .

#### 4.2.3 Aspect graphique

