Étude de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \ln\left(1+e^{-nx}\right)$.

Pour tout réel x tel que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

Partie I: Convergence, monotonie et convexité

1. Montrer que le domaine de définition de f est $D =]0, +\infty[$
2. Soit a un réel strictement positif
   (a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$
   (b) A-t-on une convergence uniforme sur $]0, a]$?
3. Montrer que f est continue $]0, +\infty[$
4. Calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ que l'on note λ
5. (a) Étudier la monotonie et la convexité de f_n sur $]0, +\infty[$
   (b) En déduire la monotonie et la convexité de f sur $]0, +\infty[$

Partie II: Équivalent en 0

Soit x un réel strictement positif et φ_x l'application définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\varphi_x(t) = \ln\left(1+e^{-tx}\right)$$

6. Justifier l'intégrabilité de φ_x sur $[0, +\infty[$
7. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \ln(2) + \int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$$
8. Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par
$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$
   Montrer que g est développable en série entière en 0 et écrire son développement
9. (a) Montrer soigneusement que $\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
   (b) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$, montrer que $\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}$
10. (a) Trouver une relation entre $\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y$.
    (b) En déduire qu'il existe une constante μ tel que $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\mu}{x}$

Partie III: Une autre expression de f

Soit $x \in]0, +\infty[$.

11. Montrer que la suite double $\left(\frac{(-1)^{k-1}e^{-nkx}}{k}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.

Étude de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$

12. En déduire que $f(x)=\ln(2)+\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(e^{kx}-1)}$

13. Déterminer une valeur de n pour que $f(1)-\ln(2)\simeq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(e^{k}-1)}$ à 10^{-3} près

Partie IV: Régularité de f

14. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}\mid pq=n\right\}$.
    (a) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$
    (b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $f(x)=\ln(2)+\sum_{n=1}^{+\infty}\omega_n e^{-nx}$ où $\omega_n=\sum_{k\mid n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$

15. Pour $n\geqslant 1$, on définit l'application g_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_n(x)=\omega_n e^{-nx}$
    (a) Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} g_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$
    (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$

Partie I: Convergence, monotonie et convexité

1. Soit $x \in \mathbb{R}$
   — Si $x \leqslant 0$, alors $f_n(x) \geqslant \ln(2) \not\to 0$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge grossièrement ;
   — Si $x > 0$, alors $f_n(x) = \ln(1+e^{-nx}) \sim e^{-nx}$ et la SATP $\sum_{n\geqslant 0} e^{-nx}$ est géométrique de raison $e^{-x} \in]0,1[$, donc elle converge, alors par le critère de comparaison des séries à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge

   Donc le domaine de définition de f est $]0,+\infty[$
2. Soit a un réel strictement positif
   (a) Soit $x \in [a,+\infty[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f_n(x) \leqslant f_n(a)$. Or la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(a)$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, puis elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$
   (b) Comme $\| f_n \|_\infty^{]0,a]} = \ln 2 \not\to 0$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,a]$
3. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
   — Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$, donc elle l'est sur $[a,b]$

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
4. La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_n = \begin{cases} \ln 2 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Par le théorème d'interversion limite somme, f admet une limite finie en $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \ln 2$$

   Donc $\lambda = \ln 2$
5. (a) Soit $n \geqslant 0$, la fonction f_n est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, avec

$$f_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+e^{-nx}} = \frac{-n}{1+e^{nx}} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f_n''(x) = \frac{n^2e^{nx}}{(1+e^{nx})^2} \geqslant 0$$

   Donc f_n est décroissante et convexe sur $]0,+\infty[$
   (b) — **Monotonie :** Soit $x,y \in]0,+\infty[$ tels que $x<y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(y) \leqslant f_n(x)$. Les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ et $\sum_{n\geqslant 0} f_n(y)$ sont convergentes, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(y) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, soit $f(y) \leqslant f(x)$
   — **Convexité :** Soit $x,y \in]0,+\infty[$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est convexe sur $]0,+\infty[$: elle vérifie alors l'inégalité de convexité, soit

$$f_n\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leqslant \lambda f_n\left(x\right) + (1-\lambda) f_n\left(y\right)$$

   Les deux membres de cette inégalité sont les termes de deux séries convergentes, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leqslant \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(x\right) + (1-\lambda) \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(y\right)$$

Étude de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$

Soit
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
D'où f est convexe.

Partie II: Équivalent en 0

Soit x un réel strictement positif et φ_x l'application définie sur $[0,+\infty[$ par :
$$\varphi_x(t)=\ln\left(1+e^{-tx}\right)$$

6. Soit $x>0$.
   — L'application $\varphi_x : t \longmapsto \ln(1+e^{-tx})$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
   — En $+\infty$: On a $\ln(1+e^{-tx}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-xt} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
   Donc φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
7. La fonction φ_x est continue et décroissance sur $[0,+\infty[$, alors pour $t\in[k,k+1]$, on a :
$$\varphi_x(t)\leqslant\varphi_x(k) \quad\Rightarrow\quad \int_k^{k+1}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\varphi_x(k)$$
   On somme ces inégalités de k allant de 0 à $+\infty$, on obtient
$$\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)$$
   De même pour $t\in[k-1,k]$, on a :
$$\varphi_x(k)\leqslant\varphi_x(t) \quad\Rightarrow\quad \varphi_x(k)\leqslant\int_{k-1}^{k}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$$
   On somme ces inégalités de k allant de 1 à $+\infty$, on obtient
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_x(k)\leqslant\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$$
   En ajoutant le terme manquant $\varphi_x(0)=\ln(2)$ aux deux membres de l'inégalité précédente, on obtient
$$f(x)\leqslant\ln(2)+\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$$
   Ainsi l'encadrement demandé
$$\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant\ln(2)+\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$
8. La fonction $x\longmapsto\ln(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1,1]$ et on a :
$$\forall x\in]-1,1], \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$
   Alors pour tout $x\in]-1,1]\setminus\{0\}$, on a $g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}$. Cette relation est aussi valable pour $x=0$. Donc g est développable en série entière en 0
9. (a) — Pour tout $n\geqslant 1$, l'application $g_n : x\longmapsto\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n-1}$ est continue sur $[0,1]$

Étude de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$

— La série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $[0,1]$, car pour tout $x\in[0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n(x)$ est alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées. En outre pour tout $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k-1}\right| \leqslant \frac{x^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément sur $[0,1]$

Alors d'après le théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$, on a

$$\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

(b) La famille $\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et les deux parties $I_1=\{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}$ et $I_2=\{2k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, alors par le théorème de la sommation par paquets, les deux familles $\left(\frac{1}{(2k+1)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{4k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables et on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Donc $\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}$

10. (a) L'application $\psi : \left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,1[\\ t & \longmapsto & e^{-xt}\end{array}\right.$ est une bijection de $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ vers $]0,1[$ et $\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y$ converge, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+e^{-xt}\right)}{e^{-xt}} |\psi'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= x\int_0^{+\infty} \ln\left(1+e^{-xt}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= x\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc $\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{12x}$.

(b) D'après l'encadrement 1, on a : $\frac{\pi}{12x} \leqslant f(x) \leqslant \ln 2 + \frac{\pi}{12x}$, donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{12x}$

Partie III: Régularité de f

Soit $x\in]0,+\infty[$.

11. — Pour $k\in\mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nkx}}{k}$ est géométrique de raison $e^{-kx}\in]0,1[$, donc elle converge de somme $T_k = \frac{1}{k}\frac{e^{-kx}}{1-e^{-kx}} \sim \frac{e^{-kx}}{k}$;

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$

— La SATP $\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{-kx}}{k}$ est convergente, d'après la règle de D'Alembert, et par le critère de comparaison des SATP $\sum_{k\geqslant 1} T_k$ converge

D'où la sommabilité de la suite double $\left(\frac{(-1)^{k-1}e^{-nkx}}{k}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.

12. Par le théorème de Fubini

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}e^{-nkx}}{k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}e^{-nkx}}{k}$$

Avec $\forall n\in\mathbb{N}^*, e^{-nx}\in\,]0,1[$ et $\forall t\in\,]-1,1]\,, \ln(1+t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}t^k$, on tire

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}e^{-nkx}}{k}=\ln\left(1+e^{-nx}\right)$$

En outre $\forall k\in\mathbb{N}^*, e^{-kx}\in\,]0,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}e^{-nkx}}{k}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{e^{-kx}}{1-e^{-kx}}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{1}{e^{kx}-1}$$

Donc $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(1+e^{-nx}\right)=\ln(2)+\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+e^{-nx}\right)=\ln(2)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(e^{kx}-1)}$

13. On a $f(1)-\ln(2)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(e^k-1)}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(e^k-1)}$ et $\sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k(e^k-1)}$ est une série alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées donc $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(e^k-1)}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)(e^{n+1}-1)}$, donc il suffit de choisir n tel que $\frac{1}{(n+1)(e^{n+1}-1)}\leqslant 10^{-3}$. la valeur $n=5$ répond à la question car $\frac{1}{6(e^6-1)}\simeq 0,0004$, donc $\sum_{k=1}^{5}\frac{(-1)^{k-1}}{k(e^k-1)}$ est une valeur approchée de $f(1)-\ln(2)$ à 10^{-3} près

Partie IV: Régularité de f

14. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}\mid pq=n\right\}$.
    (a) — Soit $n\in\mathbb{N}^*$ l'élément $(1,n)\in I_n$, donc $I_n\neq\emptyset$
    — Soit $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $m\neq n$. Si $(p,q)\in I_n\cap I_m$, alors $pq=m=n$, donc $m=n$. Absurde
    — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $I_n\subset\mathbb{N}^{*2}$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n\subset\mathbb{N}^{*2}$. Inversement si $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$, on pose $n=pqq$, donc $(p,q)\in I_n$, ainsi $\mathbb{N}^{*2}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$. D'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n=\mathbb{N}^{*2}$

    On conclut que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$;

Étude de la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+e^{-nx}\right)$

(b) Par le théorème de la sommation par paquets on a :

$$\begin{aligned} f(x)-\ln 2 &= \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}} \frac{(-1)^{q-1}e^{-pqx}}{q} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{(-1)^{q-1}e^{-pqx}}{q} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{(-1)^{q-1}e^{-nx}}{q} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q\mid n} \frac{(-1)^{q-1}e^{-nx}}{q} \end{aligned}$$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $f(x)-\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n e^{-nx}$ où $\omega_n = \sum_{q\mid n} \frac{(-1)^{q-1}}{q}$

15. Remarquons que pour $n\geqslant 1$, on a $|\omega_n|\leqslant H_n$, avec $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$

(a) L'application g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $g_n^{(p)}(x) = (-n)^p\omega_n e^{-nx}$.
Soit $[a,b]\subset\in\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x\in[a,b]$, on a

$$\left|g_n^{(p)}(x)\right| = n^p\left|\omega_n\right|e^{-nx} \leqslant n^p H_n e^{-na}$$

On a $\frac{(n+1)^p H_{n+1}e^{-(n+1)a}}{n^p H_n e^{-na}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-a}<1$. Par le critère de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} n^p H_n e^{-na}$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 1} g_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,b]$, et, par suite, elle converge uniformément sur $[a,b]$

(b) On a

— $\forall n\in\mathbb{N}^*, g_n\in C^\infty(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$;

— La série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$;

— $\forall p\geqslant 1, \sum_{n\geqslant 1} g_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$