Mécanique

MECA2 - Dynamique

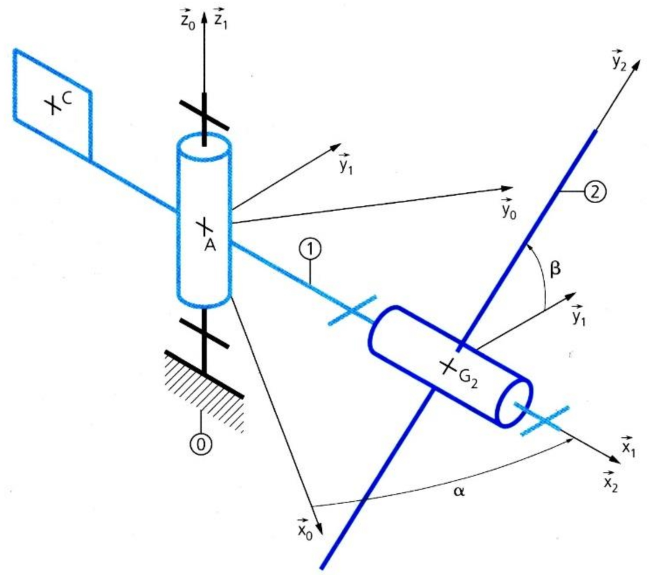
TD+

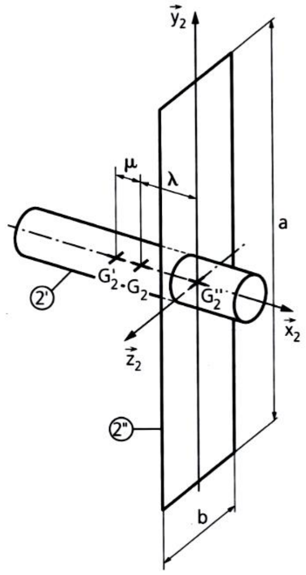
Eolienne

Programme PSI/MP 2022 (LIEN)		
Id	Compétence développée	Connaissances associées
B2-10	Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.
C1-05	Proposer une démarche permettant la détermination d’une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.
C2-08	Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.	Torseurs cinétique et dynamique d’un solide ou d’un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen. Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen. Énergie cinétique. Inertie et masse équivalentes. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen. Puissance intérieure à un ensemble de solides. Théorème de l'énergie cinétique. Rendement en régime permanent.
C2-09	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.	

Exercice 1: Etude d'une éolienne

L'objet de cette étude est une éolienne bipale modélisée sur le schéma suivant :





Solide 2

$$\vec{z_0} = \vec{z_1}; (\vec{x_0}, \vec{x_1}) = (\vec{y_0}, \vec{y_1}) = \alpha$$
$$\vec{x_1} = \vec{x_2}; (\vec{y_1}, \vec{y_2}) = (\vec{z_1}, \vec{z_2}) = \beta$$
$$\overrightarrow{AG_2} = L\vec{x_1}$$

Solide 1 : Nacelle	Solide 2 : Rotor + Hélice
Masse : m_1 Centre d'inertie: $A = G_1$ Plan de symétrie matériel : $(A, \vec{x_1}, \vec{z_1})$	Masse : m_2 Centre d'inertie: G_2 Plan de symétrie matériel : $(G_2, \vec{x_2}, \vec{y_2})$

On assimile l'hélice à un solide composé d'un cylindre plein (rotor) et d'une plaque rectangulaire (hélice) :

Rotor $2'$	Hélice $2''$
Cylindre plein Axe $(A, \vec{x_2})$ Masse m'_2 Centre de gravité G'_2 tel que : $G_2G'_2 = -\mu\vec{x_2}$ Hauteur H Rayon R	Plaque rectangulaire Plan $(G''_2, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ Masse m''_2 Centre de gravité G''_2 tel que : $G_2G''_2 = \lambda\vec{x_2}$ Largeur b Hauteur a Epaisseur e négligeable
On négligera la matière à l'intersection entre le rotor et l'hélice qu'il faudrait soustraire à la matrice d'inertie de l'ensemble.	

Hypothèses

- Les liaisons sont supposées parfaites
- La gravité est négligée compte tenu de la symétrie de l'hélice (la gravité n'a d'effet que l'ajout d'une action verticale dans les liaisons 2/1 et 1/0)
- On considère qu'aucune force extérieure hormis les actions de liaisons ne s'exerce sur les solides 1 et 2.

Notre objectif est d'étudier le comportement de l'hélice de l'éolienne lorsque le vent change de direction, imposant une rotation de la nacelle pendant un court instant. Pour cela, nous supposerons que le vent induit une rotation à vitesse constante de la nacelle verticalement. Nous étudierons alors :

- les actions dans les liaisons 2/1 et 1/0
- l'équation du mouvement de l'hélice afin d'en déduire son mouvement et ses positions d'équilibre

Matrices d'inertie

Question 1: Donner la forme de la matrice d'inertie en G_1 du solide 1 dans la base B_1.

Question 2: En utilisant la formule de détermination du centre de gravité G_2 de la pale 2 astucieusement, déterminer la relation entre λ et μ.

Question 3: Déterminer la matrice d'inertie en G_2' du rotor $2'$ dans la base $(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ en fonction de m_2', H et R.

Question 4: Déterminer la matrice d'inertie en G_2'' de la pâle $2''$ dans la base $(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ en fonction de m_2'', a et b.

Question 5: Déterminer la matrice d'inertie en G_2 de l'hélice 2 dans la base $(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$ et la mettre sous la forme $\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{B_2}$.

Moments cinétiques

Question 6: Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(G_1,S_1/0)$ dans la base 1.

Question 7: Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(G_2,S_2/0)$ dans la base 2.

Moments dynamiques

On appelle S l'ensemble S_1+S_2

Question 8: Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}(G_1,S_1/0)$ dans la base 1.

Question 9: Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}(G_2,S_2/0)$ dans la base 2.

Dans la suite, on notera : $\vec{\delta}(G_2,S_2/R_0)=\begin{bmatrix}\delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z\end{bmatrix}_{B_2}$

Question 10: Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}(G_1,S/0)$ sous la forme d'une somme d'un vecteur dans la base 1 et d'un vecteur dans la base 2.

Torseurs des actions extérieures

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\{\mathcal{D}(1/0)\} = \{\mathcal{T}_{ext\to 1}\}$$
$$\{\mathcal{D}(2/0)\} = \{\mathcal{T}_{ext\to 2}\}$$
$$\{\mathcal{D}(1\mathrm{U}2/0)\} = \{\mathcal{T}_{ext\to 1U2}\}$$

Comme pour l'application d'un PFS, le PFD permet d'obtenir les actions dans toutes les liaisons en faisant autant d'isolements qu'il y a de pièces (sans le bâti). Il suffit donc d'utiliser deux de ces 3 relations afin de résoudre le problème dynamique.

Question 11: Donner l'expression des torseurs des actions extérieures sur 1, 2 et $1U2$
Remarque : on définira tous ces torseurs dans la base $\mathfrak{B}_1$, le torseur 1/0 étant défini en G_1 et le torseur 2/1 en G_2

Torseurs dynamiques

Afin de déterminer au plus vite les actions dans la liaison 1/0 et la liaison 2/1, on choisit d'isoler l'ensemble 1+2 puis uniquement la pièce 2. Il faut donc déterminer les torseurs dynamiques de S et de 2.

Solide 2

L'isolement du solide 2 va nous permettre de déterminer les actions dans la liaison 2/1.

Question 12: Déterminer $\vec{\Gamma}(G_2, S_2/0)$.
Question 13: En déduire l'expression de la résultante dynamique du mouvement de S_2 par rapport à 0
Question 14: Donner $\{D(S_2/0)\}$ en G_2 dans la base 2

Ensemble S (1+2)

L'isolement de l'ensemble S va nous permettre de déterminer les actions dans la liaison 1/0.

Soit G le centre de gravité de l'ensemble $S = S_1 + S_2$ tel que $\overrightarrow{G_1G} = \varepsilon\overrightarrow{x_1}$.
Question 15: Déterminer $\vec{\Gamma}(G/0)$.
Question 16: En déduire l'expression de la résultante dynamique du mouvement de S par rapport à 0.
Question 17: Donner $\{D(S/0)\}$ en G_1 dans la base 1

Imposition d'une vitesse 1/0 constante

Intéressons-nous dans la suite au cas où une vitesse de rotation constante est imposée à la nacelle :

$$\Omega_{1/0} = cste$$

Imposer une vitesse de rotation constante induit la présence d'un couple inconnu dans la liaison pivot correspondante sur l'axe de rotation 1/0. On ajoutera donc ce couple noté C_m dans le torseur de l'action de 0 sur 1.

Nous allons chercher à déterminer les actions de liaison dans ce cas à l'aide du PFD et nous obtiendrons en plus l'équation différentielle du mouvement de l'hélice. Par ailleurs, le PFD nous permettra de déterminer l'expression du couple inconnu C_m.

Nous allons ensuite appliquer le TEC et obtenir, d'une autre manière, l'équation différentielle du mouvement de l'hélice. Toutefois, le fait d'imposer une vitesse constante qui induit l'apparition d'un couple inconnu C_m ne permet pas d'appliquer directement le TEC puisque la puissance de ce couple ne pourra pas être explicitée. Dans ce cas, il sera de toute manière nécessaire d'appliquer d'abord un PFD que nous aurons déjà effectué à l'ensemble S et de ne procéder qu'à l'étude de l'équation en moment suivant l'axe de ce couple afin d'obtenir son expression.

Question 18: Proposer une nouvelle forme du torseur des actions extérieures sur la pièce 1 au niveau de la liaison pivot 1/0.

Question 19: Simplifier le vecteur $\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}_{B_2}$

Question 20: Simplifier le torseur dynamique $D(S_2/0)$ en tenant compte de la vitesse constante imposée

Question 21: Simplifier le torseur dynamique $D(S/0)$ en tenant compte de la vitesse constante imposée - On remplacera uniquement la formule de δ_x

PFD et actions de liaison

Déterminons les actions dans la liaison 1/0 et en particulier le couple inconnu C_m lorsque l'hélice est libre.

Question 22: Que valent les actions dans la liaison 1/0 ?

Question 23: En déduire l'expression du couple C_m en remplaçant les expressions de δ_y et δ_z

Déterminons les actions dans la liaison 2/1 lorsque l'hélice est libre.

Question 24: Que valent les actions dans la liaison 2/1 ?

PFD et mouvement

Pour déterminer l'évolution de la position de l'hélice en fonction du temps, il existe deux solutions :

- Soit on laisse l'hélice libre et on obtient l'équation différentielle de son mouvement
- Soit on suppose que l'hélice est encastrée à la nacelle et on regarde le couple engendré par les effets d'inertie sur l'axe de la liaison pivot 2/1 transformée en encastrement. On sait alors que ce couple « résiste » au mouvement que l'hélice essaie d'avoir

Question 25: Trouver l'équation différentielle du mouvement de l'hélice supposée libre obtenue par l'application du PFD aux questions précédentes et exprimer $\dot{\Omega}_{2/1}$

Considérons maintenant que l'hélice est bloquée $\left(\Omega_{2/1} = 0\right)$ en rotation par rapport à 1. On associe donc la liaison 2/1 à une liaison encastrement en ajoutant la composante L_{12}. Déterminons donc les actions dans la liaison 2/1 ainsi que le couple qui s'exerce sur l'hélice et qui s'oppose à son mouvement.

Question 26: Que valent δ_y et δ_z dans ce cas

Question 27: Que valent L_{12} et C_m dans ce cas ?

Question 28: Etudier le signe de $-L_{12}$ ou de $\dot{\Omega}_{2/1}$ selon la position de l'hélice

Question 29: En déduire le mouvement de l'hélice

Question 30: Discuter de ses positions d'équilibre.

TEC et mouvement

Question 31: Obtenir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TEC.

Bilan

Question 32: Comparer les deux démarches mises en place pour l'obtention d'actions de liaisons et de l'équation différentielle du mouvement.