PROBLÈME DE RÉVISION

Lois exponentielle et géométrique-Convergence
Énoncé

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $\text{cov}(X, Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.

la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.

Partie I: Loi géométrique

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$). On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.
   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(X_1 - X_2)$, $V(X_1 - X_2)$.
   (c) Etablir la relation : $P([X_1 = X_2]) = \dfrac{p}{1+q}$
2. (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.
   (b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$.Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.
   En déduire la relation suivante : $P(T = k) = 2P(X_1 = k) - P(Z = k)$.
   (c) Etablir la formule : $V(T) = \dfrac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.
3. (a) Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$.
   En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $P([Z = j] \cap [Z = T])$
   (b) Montrer que pour tout couple (j, ℓ) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $P([Z = j] \cap [T - Z = \ell]) = 2p^2 q^{2j+\ell-2}$
   (c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$ (on distinguera trois cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$).
   (d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.
   (e) Etablir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.
4. (a) A l'aide du résultat de la question 3e, calculer $\text{cov}(Z, T)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.
   (c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T).
   (d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
   (e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$. Calculer $E(D_j)$.

Partie II: Loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$). On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

5. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leqslant x])$, pour tout réel x.
   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$, $V(Y)$.
6. Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
7. (a) Montrer que pour tout réel t, on a : $F_T(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$. Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.
   (b) Justifier l'existence de $E(T)$ et $V(T)$. Montrer que $E(T) = \dfrac{3}{2\lambda}$ et $V(T) = \dfrac{5}{4\lambda^2}$.
   (on pourra utiliser des changements de variables affine).
8. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que $r = 1/\sqrt{5}$.

9. (a) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.
   (b) Etablir que la fonction $y \mapsto \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}$ est la densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ de la variable aléatoire Y.
   (c) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie III: Convergences

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

10. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(J_n)$ et $V(J_n)$.

11. (a) Montrer, par récurrence que, la densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$
    (b) A l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existence de $E\left(\dfrac{1}{J_n}\right)$ et de $E\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.

12. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
    (a) Enoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.
    (b) En déduire que $P([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]) \sim 1 - \alpha$.

    Dans les questions suivantes, on suppose que $\lambda = 1$.

13. On pose pour tou n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.
    Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose : $g_n(x) = \displaystyle\int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$ et $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$
    (a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$ et $g_n(x)$.
    (b) Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
    Etablir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \dfrac{1}{n}F_{T_n}(x)$
    (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de $x, F_{T_1}(X), F_{T_2}(x), ..., F_{T_n}(x)$.
    (d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.
    (e) Déduire des questions c) et d) l'existence de $E(T_n)$ et montrer que $E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

14. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - E(T_n)$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.
    (a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a : $F_{G_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$.
    (b) En déduire que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$
    (c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_G(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

15. Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable alétoire Y définie par $Y = F_X(X)$.