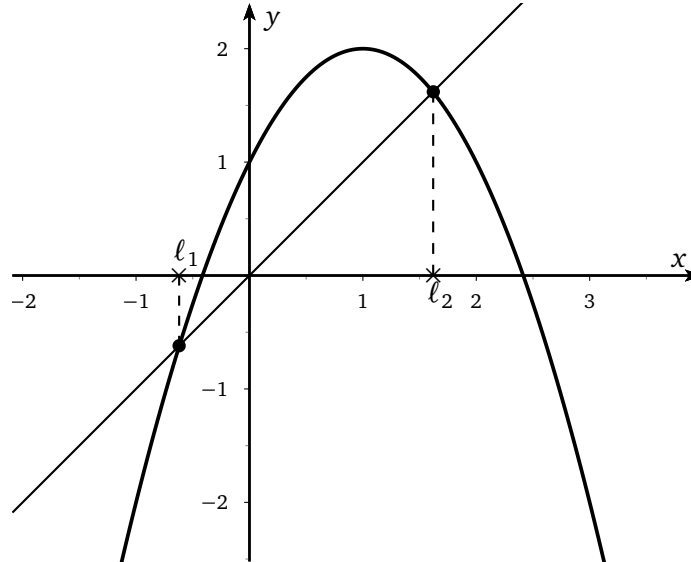


CORRIGÉ DU DS°1

EXERCICE

1. L'étude et le tracé n'auraient pas du poser de problème ni prendre plus de quelques minutes...



La résolution de l'équation du second degré $f(x) = x$ donne $\ell_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

2. a) L'étude précédente montre que $f(]-\infty, -1[) =]-\infty, -1[$, c'est-à-dire que $]-\infty, -1[$ est stable par f .

Par conséquent, si $u_0 \in]-\infty, -1[$, on aura $u_n \in]-\infty, -1[$ pour tout n .

Rem : on pouvait aussi procéder par récurrence sur n puisque

$$u_n < \ell_1 \text{ et } f \text{ strictement croissante sur }]-\infty, \ell_1[\implies f(u_n) < f(\ell_1) \text{ i.e. } u_{n+1} < \ell_1$$

b) On a le tableau de signe suivant (signe d'un trinôme, cours de 1ère...) :

| x | $-\infty$ | ℓ_1 | ℓ_2 | $+\infty$ | |
|------------|-----------|----------|----------|-----------|-----|
| $f(x) - x$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

Pour $x < \ell_1$, on a $f(x) < x$ donc, puisque $u_n < \ell_1$, on aura $f(u_n) < u_n$ soit $u_{n+1} < u_n$: la suite est strictement décroissante.

c) Si (u_n) était convergente, ce serait vers un réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$ puisque f est continue (en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$).

De plus, la suite étant décroissante, on devrait avoir $\ell \leq u_n$ pour tout n , et en particulier $\ell \leq u_0 < \ell_1$. Or il n'existe pas de point fixe de f qui est $< \ell_1$, d'où la contradiction.

(u_n) étant décroissante non convergente, on a, d'après le cours : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. a) L'étude des variations de f a montré que $f(]1, \ell_2[) =]\ell_2, 2[$. Donc directement

$$1 < u_0 < \ell_2 \implies \ell_2 < u_1 < 2.$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f \circ f(x) - x &= -(-x^2 + 2x + 1)^2 + 2(-x^2 + 2x + 1) + 1 - x \\ &= -(x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^3 - 2x^2 + 4x) - 2x^2 + 4x + 2 + 1 - x \\ &= -x^4 + 4x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-1)(x-2)(-x^2 + 2x + 1) \\ &= -(x-1)(x-2)(x-\ell_1)(x-\ell_2) \end{aligned}$$

Rem : Ce n'était quand même pas compliqué : en effet, 1 et 2 sont racines évidentes, et vous auriez du savoir que le polynôme $f(x) - x$ divise le polynôme $f \circ f(x) - x$, pour des raisons qui ont été mentionnées en cours...

Les 4 racines sont simples, donc le polynôme change de signe à chaque racine, et puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} f \circ f(x) - x = -\infty$, on a facilement le tableau de signes :

| x | $-\infty$ | ℓ_1 | 1 | ℓ_2 | 2 | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|----------|-----|----------|-----|-----------|
| $f \circ f(x) - x$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

c) Puisque $f([1, \ell_2[) =]\ell_2, 2[$ et $f([\ell_2, 2]) =]1, \ell_2[$, on aura $f \circ f([1, \ell_2[) =]1, \ell_2[$ et $f \circ f([\ell_2, 2]) =]\ell_2, 2[$.

Ainsi les intervalles $]1, \ell_2[$ et $] \ell_2, 2[$ sont des intervalles stables par $f \circ f$, sur lesquels $f \circ f$ est croissante (comme composée de deux fonctions décroissantes).

Les suites (v_n) et (w_n) vérifient la récurrence $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$, donc, d'après le cours, elles sont monotones, de sens de variations contraires.

Puisque $v_0 = u_0 \in]1, \ell_2[$, $v_1 - v_0 = f \circ f(v_0) - v_0$ est négatif, d'après le tableau de signes précédent.

Donc $v_1 < v_0$ et la suite (v_n) est décroissante, donc la suite (w_n) est croissante.

Puisque (v_n) reste dans l'intervalle $]1, \ell_2[$, elle est minorée par 1, donc elle converge ; sa limite ℓ doit vérifier $f \circ f(\ell) = \ell$ puisque $f \circ f$ est continue, doit appartenir à $[1, \ell_2]$ et doit être inférieure à v_0 , donc différente de ℓ_2 ; cette limite ne peut donc être que 1.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ et de la même façon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$.

d) Puisqu'il existe deux suites extraites de (u_n) qui ont des limites différentes la suite (u_n) diverge.

PROBLÈME I : Méthode de Newton (ENSI 1986, option TA, Maths appliquées, 2h30)

Première partie

1. On a bien ici :

- f de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$
- f possède un seul zéro $x = +\sqrt{\alpha} \in]0, +\infty[$
- $f' : x \mapsto 2x$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $x > 0$, $F(x) = x - \frac{x^2 - \alpha}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2x} > 0$, donc $F(x) \in]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[$ est stable par F .

Les hypothèses du préambule sont satisfaites sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

2. a) Pour tout $x > 0$:

$$F(x) - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2x}(x^2 + \alpha - 2x\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{2x}(x - \sqrt{\alpha})^2$$

et

$$F(x) + \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2x}(x^2 + \alpha - 2x\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{2x}(x + \sqrt{\alpha})^2$$

donc $\frac{F(x) - \sqrt{\alpha}}{F(x) + \sqrt{\alpha}} = \left(\frac{x - \sqrt{\alpha}}{x + \sqrt{\alpha}} \right)^2$.

En appliquant ce résultat à $x = u_n$, on obtient

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{\alpha}}{u_{n+1} + \sqrt{\alpha}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{\alpha}}{u_n + \sqrt{\alpha}} \right)^2$$

d'où par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \sqrt{\alpha}}{u_n + \sqrt{\alpha}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}} \right)^{2^n}.$$

b) Posons $k = \frac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}}$; de $\frac{u_n - \sqrt{\alpha}}{u_n + \sqrt{\alpha}} = k^{2^n}$, on tire $u_n = \sqrt{\alpha} \frac{1 + k^{2^n}}{1 - k^{2^n}}$.

Or $-(u_0 + \sqrt{\alpha}) < u_0 - \sqrt{\alpha} < u_0 + \sqrt{\alpha}$ donc $-1 < k < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^{2^n} = 0$ donc :

Pour tout $u_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \sqrt{\alpha}$.

c) Si $u_0 > 0$ et $u_0 \neq \alpha$, on a $k \neq 0$ donc $u_n \neq \sqrt{\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a vu que $F(x) - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2x}(x - \sqrt{\alpha})^2$ d'où, pour $x = u_n$:

$$y_n = \frac{|u_{n+1} - \sqrt{\alpha}|}{|u_n - \sqrt{\alpha}|^2} = \frac{1}{2u_n} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \neq 0. \text{ Cela signifie que :}$$

La convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est quadratique.

3. a) $F(x) - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2x}(x - \sqrt{\alpha})^2 \geq 0$ donc, en prenant $x = u_{n-2}$ on aura, pour tout $n \geq 2$: $0 \leq u_{n-1} - \sqrt{\alpha}$.

On a également :

$$2(x - F(x)) - x + \sqrt{\alpha} = -\frac{\alpha}{x} + \sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha}}{x}(x - \sqrt{\alpha}) \geq 0 \text{ pour les } x \geq \sqrt{\alpha}.$$

En appliquant cela à $x = u_{n-1} \geq \sqrt{\alpha}$, on obtient : $2(u_{n-1} - u_n) - (u_{n-1} - \sqrt{\alpha}) \geq 0$.

On a donc bien :

$$\text{Pour tout } n \geq 2 : 0 \leq u_{n-1} - \sqrt{\alpha} \leq 2(u_{n-1} - u_n).$$

b) D'une part : $0 \leq u_n - \sqrt{\alpha}$ est vraie pour $n \geq 1$ d'après ce qui précède.

D'autre part, l'inégalité $u_{n-1} - \sqrt{\alpha} \leq 2(u_{n-1} - u_n)$ (pour $n \geq 2$) implique, en additionnant $u_n - u_{n-1}$ des deux côtés, $u_n - \sqrt{\alpha} \leq u_{n-1} - u_n$.

On a donc bien :

$$\forall n \geq 2, 0 \leq u_n - \sqrt{\alpha} \leq u_{n-1} - u_n.$$

Dans la pratique, lorsqu'on calcule les termes successifs de (u_n) à l'aide de la relation de récurrence $u_{n+1} = F(u_n)$, on aura directement une estimation de l'erreur commise en approchant $\sqrt{\alpha}$ par u_n à l'aide de la différence des deux derniers termes calculés.

4. a) \circ Si $p = 2k$, on a $\sqrt{\alpha} = 2^k \sqrt{\beta}$ et $u_0 = 2^k : \frac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}} = \frac{1 - \sqrt{\beta}}{1 + \sqrt{\beta}} \geq 0$.

Et puisque $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\beta} < 1$, on aura :

$$0 < 1 - \sqrt{\beta} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1 + \sqrt{\beta} < 2$$

$$\text{d'où l'on tire } \left| \frac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}} \right| = \frac{1 - \sqrt{\beta}}{1 + \sqrt{\beta}} \leq \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1} = (\sqrt{2} - 1)^2.$$

- \circ Si $p = 2k + 1$, on a $\sqrt{\alpha} = 2^k \sqrt{2} \sqrt{\beta}$ et $u_0 = 2^k : \frac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}} = \frac{1 - \sqrt{2} \sqrt{\beta}}{1 + \sqrt{2} \sqrt{\beta}}$.

$$\text{Puisque } 1 \leq \sqrt{2} \sqrt{\beta} \leq \sqrt{2}, \text{ on a } 1 - \sqrt{2} \sqrt{\beta} \leq 0 \text{ donc } \left| \frac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}} \right| = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\beta} - 1}{\sqrt{2} \sqrt{\beta} + 1}.$$

$$\text{Or } \sqrt{2} \sqrt{\beta} - 1 \leq \sqrt{2} - 1 \text{ et } 1 + \sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{2} \sqrt{\beta} \text{ donc } \left| \frac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}} \right| \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)^2.$$

Finalement dans tous les cas on a bien : $\left| \frac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}} \right| \leq (\sqrt{2} - 1)^2$.

- b) Puisque $(\sqrt{2} - 1)^2 \leq \frac{1}{5}$ et que $\frac{u_n - \sqrt{\alpha}}{u_n + \sqrt{\alpha}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{\alpha}}{u_0 + \sqrt{\alpha}} \right)^{2^n}$, on déduit de la majoration précédente :

$$\left| \frac{u_n - \sqrt{\alpha}}{u_n + \sqrt{\alpha}} \right| \leq \left(\frac{1}{5} \right)^{2^n}.$$

$$\text{Or, pour } n \geq 1, u_n \geq \sqrt{\alpha}, \text{ d'où } 0 \leq u_n - \sqrt{\alpha} \leq (u_n + \sqrt{\alpha}) \left(\frac{1}{5} \right)^{2^n}.$$

Or $\sqrt{\alpha} \leq u_1$ et comme la suite est décroissante à partir du rang 1, $u_n \leq u_1$.

Donc $u_n + \sqrt{\alpha} \leq 2u_1$ pour $n \geq 1$ et finalement :

$$0 \leq u_n - \sqrt{\alpha} \leq 2u_1 \left(\frac{1}{5} \right)^{2^n}.$$

- c) Cette estimation de l'erreur permet d'avoir dès le départ une idée du nombre de termes qu'il faudra calculer pour obtenir $\sqrt{\alpha}$ à une précision donnée. Personnellement, je ne trouve pas cela plus intéressant que l'estimation obtenue auparavant...

5. Voir TD d'info.

Seconde partie

6. a) Pour $x > 0$, $f'(x) = -1/x^2$ d'où $F(x) = 2x - \alpha x^2$.

$F'(x) = 2(1 - \alpha x)$, et on a facilement le tableau de variations de F :

| | | | | |
|--------|---|-----------------------------|--------------------|--------------------|
| x | 0 | $\frac{1}{\alpha}$ | $\frac{2}{\alpha}$ | $+\infty$ |
| $F(x)$ | 0 | $\nearrow \frac{1}{\alpha}$ | $\searrow 0$ | $\searrow -\infty$ |

On remarque que pour $x \in]0, \frac{2}{\alpha}[$, $F(x) > 0$ et $F(x) \leq 0$ sinon.

Donc, si $I \subset]0, +\infty[$ est tel que $F(I) \subset I$, il faut que pour tout $x \in I$, $F(x) > 0$ donc que $I \subset]0, \frac{2}{\alpha}[$.

D'autre part, $F(]0, \frac{2}{\alpha}[) =]0, \frac{1}{\alpha}[\subset]0, \frac{2}{\alpha}[$, c'est-à-dire que l'intervalle $]0, \frac{2}{\alpha}[$ est bien stable par F . Ainsi :

$]0, \frac{2}{\alpha}[$ est le plus grand intervalle contenu dans $]0, +\infty[$ et stable par F .

- b) On a bien ici f de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \frac{2}{\alpha}[$, f possède un seul zéro $x = \frac{1}{\alpha} \in]0, \frac{2}{\alpha}[$, f' ne s'annule pas sur $]0, \frac{2}{\alpha}[$ et enfin $]0, \frac{2}{\alpha}[$ est stable par F .

Toutes les hypothèses du préambule sont donc satisfaites.

7. a) On a vu que pour $x \in]0, \frac{2}{\alpha}[$, $F(x) \in]0, \frac{1}{\alpha}[$. Comme $v_0 \in]0, \frac{2}{\alpha}[$, on aura $v_1 \in]0, \frac{1}{\alpha}[$ puis par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in]0, \frac{1}{\alpha}[$.

Pour $x \in]0, 1/\alpha]$, $F(x) - x = x - \alpha x^2 = x(1 - \alpha x) \geq 0$ donc $v_{n+1} = F(v_n) \geq v_n$.

La suite $(v_n)_{n \leq 1}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{\alpha}$: elle converge.

- b) Notons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. On sait que $v_1 \leq \ell \leq 1/\alpha$. Donc $\ell > 0$.

Et comme F est continue en ℓ , par passage à la limite dans la relation $v_{n+1} = F(v_n)$, on a $F(\ell) = \ell$.

$F(\ell) = \ell$ équivaut à $\ell(1 - \alpha\ell) = 0$ donc finalement : $\ell = \frac{1}{\alpha}$.

- c) Si $v_0 \in]0, \frac{2}{\alpha}[$ et $v_0 \neq \frac{1}{\alpha}$ alors $v_1 \in]0, \frac{1}{\alpha}[$ puis par récurrence $v_n \in]0, \frac{1}{\alpha}[$. En particulier $v_n \neq \frac{1}{\alpha}$.

$$F(x) - \frac{1}{\alpha} = 2x - \alpha x^2 - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}(1 + \alpha^2 x^2 - 2\alpha x) = -\frac{1}{\alpha}(1 - \alpha x)^2 \text{ donc } \frac{|F(x) - 1/\alpha|}{|x - 1/\alpha|^2} = \alpha.$$

Pour $x = v_n$, on obtient $y_n = \frac{|v_{n+1} - \frac{1}{\alpha}|}{|v_n - \frac{1}{\alpha}|^2} = \alpha$ donc (y_n) converge vers $\alpha > 0$. Cela signifie que :

La convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est quadratique.

8. La question n'était pas très claire... Voir TD d'info.

Troisième partie

9. a) F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et on a $F'(x) = \frac{k-1}{k} \left(1 - \frac{\alpha}{x^k}\right)$. On obtient facilement le tableau de variations suivant :

| | | | |
|--------|-----------|----------------|-----------|
| x | 0 | $\alpha^{1/k}$ | $+\infty$ |
| $F(x)$ | $+\infty$ | $\alpha^{1/k}$ | $+\infty$ |

On envisage donc deux cas :

- Si $w_0 \in [\alpha^{1/k}, +\infty[$: l'intervalle $[\alpha^{1/k}, +\infty[$ étant stable par F , on aura alors $w_n \in [\alpha^{1/k}, +\infty[$ pour tout n .

Pour tout $x \in [\alpha^{1/k}, +\infty[$, on a $F(x) - x = \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha - x^k}{x^{k-1}} \right) \leq 0$, donc (w_n) est décroissante

(car $w_{n+1} - w_n = F(w_n) - w_n \leq 0$) ; étant minorée par $\alpha^{1/k}$, elle converge, nécessairement vers un point fixe de F puisque F est continue, donc vers $\alpha^{1/k}$.

- Si $w_0 \in]0, \alpha^{1/k}[$, alors $w_1 \in [\alpha^{1/k}, +\infty[$ et on est ramené au cas précédent.

En conclusion, dans tous les cas : (w_n) converge vers $\alpha^{1/k}$.

b) ◦ Pour $n \geq 1$, $w_n = F(w_{n-1})$ donc $w_n \geq \alpha^{1/k}$. On a donc bien :

$$\forall n \geq 2, 0 \leq w_{n-1} - \alpha^{1/k}.$$

◦ Pour tout $x > 0$ on a

$$k(x - F(x)) - (x - \alpha^{1/k}) = \frac{x^k - \alpha}{x^{k-1}} - (x - \alpha^{1/k}) = \alpha^{1/k} \frac{x^{k-1} - \alpha^{\frac{k-1}{k}}}{x^{k-1}}$$

Si $x \geq \alpha^{1/k}$, on aura $x^{k-1} \geq \alpha^{\frac{k-1}{k}}$ donc $k(x - F(x)) \geq (x - \alpha^{1/k})$.

En appliquant cette relation à w_{n-1} , qui est bien $\geq \alpha^{1/k}$ pour $n \geq 2$ d'après ce qui précède, on en déduit

$$k(w_{n-1} - F(w_{n-1})) \geq w_{n-1} - \alpha^{1/k} \quad \text{soit} \quad k(w_{n-1} - w_n) \geq w_{n-1} - \alpha^{1/k}$$

ce qu'il fallait démontrer.

◦ À partir de l'inégalité

$$0 \leq w_{n-1} - \alpha^{1/k} \leq k(w_{n-1} - w_n)$$

valable pour $n \geq 2$, on obtient, en ajoutant $w_n - w_{n-1}$ aux deux membres :

$$w_n - w_{n-1} \leq w_n - \alpha^{1/k} \leq (k-1)(w_{n-1} - w_n)$$

et l'inégalité cherchée résulte du fait que (w_n) est décroissante à partir du rang 1 au moins d'après l'étude faite à la question précédente.

c) Je vous laisse le soin de vérifier que la suite (w_n) est bien celle fournie par la méthode de Newton pour la fonction $f : x \mapsto x^k - \alpha$ (ne pas oublier de vérifier les hypothèses du préambule).

PROBLÈME II : Accélération de convergence (ENSAE 1998, Maths appliquées, 2h)

Partie préliminaire

f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ donc f' est continue sur $[a, b]$. Or toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes. Donc $\sup_{y \in [a, b]} |f'(y)| = K$ existe.

De plus, f est dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq K$; d'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc :

$$\forall (x, x') \in [a, b]^2, |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$$

Partie I : Théorème du point fixe

1. ◦ Nous savons que $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, puisque l'on a par hypothèse $f([a, b]) \subset [a, b]$. Dès lors, la fonction $f(x) - x$ change de signe; étant continue, elle s'annule sur $[a, b]$ (théorème des valeurs intermédiaires), c'est-à-dire qu'il existe au moins un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Mais si x et x' étaient deux points fixes distincts de f , on aurait $|f(x) - f(x')| = |x - x'| \leq K|x - x'|$, d'où $K \geq 1$: impossible.

En conclusion, f possède un et un seul point fixe c .

- La suite (x_n) est bien définie puisque $f([a, b]) \subset [a, b]$.

On a aussi, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x) - f(c)| \leq K|x - c|$, d'où $|x_{n+1} - c| \leq K|x_n - c|$ puis par récurrence $|x_n - c| \leq K^n|x_0 - c|$ pour tout entier n , ce qui implique la convergence de la suite (x_n) vers c puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} K^n = 0$.

2. D'après l'inégalité triangulaire $|x_0 - c| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - c|$, et on vient de voir que $|x_1 - c| \leq K|x_0 - c|$ donc $|x_0 - c| \leq |x_0 - x_1| + K|x_0 - c|$, d'où l'on tire, puisque $1 - K > 0$: $|x_0 - c| \leq \frac{1}{1 - K}|x_1 - x_0|$.
Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'inégalité $|x_n - c| \leq K^n|x_0 - c|$ pour obtenir le résultat.

Partie II : Procédure diagonale d'Aitken.

1. f' étant continue sur $[a, b]$ et ne s'y annulant pas, elle garde un signe constant (d'après le théorème des valeurs intermédiaires). Ainsi, f est strictement monotone sur $[a, b]$ et, en particulier, elle est injective.

Si $e_0 \neq 0$, alors $x_0 \neq c$ donc $f(x_0) \neq f(c)$ puisque f injective, c'est-à-dire $x_1 \neq c$ soit $e_1 \neq c$.

Par récurrence triviale, on aura bien $e_n \neq 0$ pour tout n .

2. Dire que $x_{n+1} = x_n$ signifie que $f(x_n) = x_n$ donc que x_n est un point fixe de f donc que $x_n = c$ donc que $e_n = 0$: impossible.

3. $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}$. Puisque x_n tend vers c , ce rapport tend vers $f'(c)$ par définition du nombre dérivé et d'après la caractérisation séquentielle de la limite.

4. x'_n existe si et seulement si $x_{n+2} - x_{n+1} \neq x_{n+1} - x_n$.
Or, d'après la question préliminaire :

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq K|x_{n+1} - x_n| < |x_{n+1} - x_n|$$

puisque $K < 1$ et $x_{n+1} \neq x_n$. On ne peut donc pas avoir $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, d'où l'existence de x'_n .

- On calcule : $x'_n - c = e_n - \frac{(e_{n+1} - e_n)^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n}$ puis

$$\frac{x'_n - c}{x_n - c} = 1 - \frac{\left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1\right)^2}{\frac{e_{n+2}}{e_n} - 2\frac{e_{n+1}}{e_n} + 1} = \frac{\frac{e_{n+2}}{e_n} - \frac{e_{n+1}^2}{e_n^2}}{\frac{e_{n+2}}{e_n} - 2\frac{e_{n+1}}{e_n} + 1}.$$

En écrivant $\frac{e_{n+2}}{e_n} = \frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \times \frac{e_{n+1}}{e_n}$, et en utilisant le résultat de la question précédente, on voit que le dénominateur de la dernière fraction tend vers $f'(c)^2 - 2f'(c) + 1 = (f'(c) - 1)^2 \neq 0$ (car $|f'(c)| \leq K < 1$). Le numérateur, lui, tend vers $f'(c)^2 - f'(c)^2 = 0$, ce qui démontre le résultat voulu.

Interprétation : La suite (x'_n) converge plus vite vers c que la suite (x_n) .

Partie III : Méthode de Steffenson.

Notons d'abord que g est convexe et strictement décroissante. De plus, g est minorée par a , donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ existe et est finie.

1. Posons $h(x) = g(x) - x$; h est continue et strictement décroissante sur $[a, +\infty[$. On a $h(a) = g(a) - a \geq 0$ puisque $g([a, +\infty[) \subset [a, +\infty[$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ d'après la remarque ci-dessus. Donc h réalise une bijection de $[a, +\infty[$ sur $] -\infty, h(a)]$, et s'annule donc une et une seule fois sur $[a, +\infty[$.

2. ◦ Soit $x \in [a, +\infty[$. Supposons d'abord x différent de d .

Le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction h précédente entre x et d , montre qu'il existe y_1 compris strictement entre x et d tel que $h(x) - h(d) = h'(y_1)(x - d)$, ce qui s'écrit $g(x) - x = (g'(y_1) - 1)(x - d)$ puisque $h(d) = 0$.

C'est le résultat voulu ; si $x = d$, on peut choisir n'importe quoi pour y_1' .

- En appliquant maintenant le théorème des accroissements finis à h entre d et $g(x)$, on obtient de la même façon l'existence d'un y_2' compris entre $g(x)$ et d tel que

$$g(g(x)) - g(x) = (g'(y_2) - 1)(g(x) - d)$$

Donc :

$$\begin{aligned} N(x) &= g(g(x)) - g(x) - [g(x) - x] = (g'(y_2) - 1)(g(x) - x + x - d) - [g(x) - x] \quad (\text{astuce !}) \\ &= [g(x) - x][g'(y_2) - 2] + [g'(y_2) - 1](x - d) \\ &= (g'(y_1) - 1)(x - d)[g'(y_2) - 2] + [g'(y_2) - 1](x - d) \\ &= [(g'(y_1) - 1)(g'(y_2) - 2) + (g'(y_2) - 1)](x - d) \\ &= [(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)](x - d). \end{aligned}$$

3. On a évidemment : $x = d \implies N(x) = 0$.

D'autre part, N est dérivable et

$$N'(x) = g'(x).g'(g(x)) - 2g'(x) + 1$$

donc $N'(x) > 0$ puisque $g'(x)$ est strictement négative.

N est donc strictement croissante ; elle ne peut donc s'annuler qu'une fois, et c'est forcément en d .

4. ◦ D'après les théorèmes usuels, puisque N ne s'annule qu'en d , la fonction G est déjà continue sur $[a, +\infty[\setminus \{d\}$. Il reste à prouver sa continuité en d .

Pour $x \neq d$, on a

$$G(x) = x - (x - d) \frac{(g'(y_1) - 1)^2}{[(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)]} \quad (1)$$

avec y_1 compris entre x et d et y_2 compris entre $g(x)$ et d .

Lorsque x tend vers d , y_1 tend vers d et, puisque $g(x)$ tend vers $g(d) = d$ (g continue), y_2 tend aussi vers d .

g' étant continue, $g'(y_1)$ et $g'(y_2)$ tendent alors vers $g'(d)$ et les numérateur et dénominateur de la fraction dans (1) tendent tous deux vers $(g'(d) - 1)^2$, qui n'est pas nul puisque g' est à valeurs strictement négatives. On a donc $\lim_{x \rightarrow d} G(x) = G(d)$, ce qui prouve la continuité de G en d .

- Pour $x \in [a, +\infty[\setminus \{d\}$, on a

$$\begin{aligned} G(x) - d &= (x - d) \left(1 - \frac{(g'(y_1) - 1)^2}{[(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)]} \right) \\ &= \frac{(g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1)}{g'(y_1)g'(y_2) - 2g'(y_1) + 1} \end{aligned}$$

avec y_1 compris entre x et d et y_2 compris entre $g(x)$ et d .

- Si $x < d$: on a $g(x) > g(d) = d$ puisque g est strictement décroissante, d'où $x \leq y_1 \leq d \leq y_2 \leq g(x)$ d'où $g'(y_2) - g'(y_1) \geq 0$ puisque g' croissante. On a alors $(x - d)(g'(y_2) - g'(y_1))g'(y_1) \geq 0$ puisque g' est négative.

Enfin, le dénominateur $g'(y_1)g'(y_2) - 2g'(y_1) + 1$ est positif puisque g' négative.

Finalement, on trouve dans ce cas : $G(x) - d \geq 0$.

- Dans le cas $x > d$, reprenez les inégalités ci-dessus pour montrer qu'on aboutit au même résultat.

On a donc, pour tout $x \in [a, +\infty[\setminus \{d\}$, $G(x) \geq d$, cette inégalité restant vraie pour $x = d$. Puisque $d \geq a$, on a bien :

G est une application continue de $[a, +\infty[$ dans $[a, +\infty[$.

5. G étant définie sur $[a, +\infty[$ et à valeurs dans cet intervalle, la définition de la suite (x_n'') a bien un sens.

On vient de voir que $G(x) \geq d$ pour tout $x \geq a$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n'' = G(x_{n-1}'') \geq d$.

Enfin, on a vu que la fonction N est croissante ; donc si $x \geq d$, $N(x) \geq N(d) = 0$, d'où $G(x) \leq x$.

On aura donc, pour $n \geq 1$: $x_{n+1}'' = G(x_n'') \leq x_n''$, et la suite $(x_n'')_{n \geq 1}$ est décroissante.

Étant minorée par d , elle converge vers un point fixe de G puisque G est continue, c'est-à-dire vers d (en effet, l'équation $G(x) = x$ pour $x \neq d$ équivaut à $\frac{(g(x) - x)^2}{N(x)} = 0$ soit à $g(x) = x$ soit à $x = d \dots$).

Partie IV : Application.

Voir TD d'info.

