

Planche n° 18. Rationnels et réels. Corrigé

Exercice n° 1.

1) Soient m et n deux entiers naturels supérieurs à 2.

$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \sqrt[n]{m} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / a^n = m \times b^n.$$

Tout d'abord, si $b = 1$, $m = a^n$ et m est une puissance n -ième parfaite. Ensuite, $a = 1$ est impossible car $m \times b^n \geq 2$.

Supposons alors que a et b sont des entiers supérieurs à 2 (et que $a^n = m \times b^n$). L'exposant de tout facteur premier de a^n ou de b^n est un multiple de n et par unicité de la décomposition en facteurs premiers, il en est de même de tout facteur premier de m . Ceci montre que, si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, m est une puissance n -ième parfaite.

Réciproquement, si m est une puissance n -ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est un entier et en particulier un rationnel. En résumé :

$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \text{ est une puissance } n \text{-ième parfaite.}$$

Par suite, si m n'est pas une puissance n -ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est irrationnel. Par exemple, $\sqrt{2}$ ou $\sqrt[3]{7}$ sont des irrationnels.

2)

$$\begin{aligned} \log 2 \in \mathbb{Q} &\Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \log 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^{a/b} = 2 \Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^a = 2^b \\ &\Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 5^a = 2^{b-a}. \end{aligned}$$

On a nécessairement $b - a > 0$ car sinon $5^a > 1$ et $2^{b-a} \leq 1$ ce qui contredit l'égalité $5^a = 2^{b-a}$.

L'égalité $5^a = 2^{b-a}$ est alors impossible par unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On a montré par l'absurde que $\log 2$ est irrationnel.

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$.

• Pour $n = 0$, $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt = \int_0^1 e^t dt = e - 1$ et donc, $e = 1 + \int_0^1 e^t dt = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t dt$. La formule à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$.

Les deux fonctions $t \mapsto -\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1) \times n!} e^t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt,$$

et donc,

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence.

Soit n un entier naturel non nul. D'après ce qui précède,

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leq e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supposons alors par l'absurde que e soit rationnel. Alors, il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / e = \frac{a}{b}$.

Soit n un entier naturel non nul quelconque. D'après ce qui précède, on a

$$0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!},$$

ce qui s'écrit encore

$$0 < an! - b \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

En particulier, pour $n = 3b$, on a $0 < a(3b)! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < \frac{3b}{3b+1} < 1$. Mais ceci est impossible car $a(3b)! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!}$ est un entier relatif. Il est donc absurde de supposer que e est rationnel. Finalement, e est irrationnel.

4) Une équation du troisième degré dont les solutions sont $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ et $\cos \frac{6\pi}{7}$ est

$$\left(X - \cos \frac{2\pi}{7}\right) \left(X - \cos \frac{4\pi}{7}\right) \left(X - \cos \frac{6\pi}{7}\right) = 0,$$

ou encore

$$X^3 - \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}\right) X^2 + \left(\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}\right) X - \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = 0.$$

Calculons alors ces trois coefficients.

Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Puisque $\omega^7 = 1$ et que $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$, on a :

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2} (\omega + \omega^6 + \omega^2 + \omega^5 + \omega^3 + \omega^4) = -\frac{1}{2},$$

puis, en tenant compte de $\omega^7 = 1$,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{4} ((\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5) + (\omega + \omega^6)(\omega^3 + \omega^4) + (\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4)) \\ &= \frac{1}{4} ((\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4) + (\omega^4 + \omega^5 + \omega^2 + \omega^3) + (\omega^5 + \omega^6 + \omega + \omega^2)) \\ &= \frac{2}{4} (\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8} (\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4) \\ &= \frac{1}{8} (\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4)(\omega^3 + \omega^4) = \frac{1}{8} (\omega^6 + 1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + 1 + \omega) \\ &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Les trois nombres $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ et $\cos \frac{6\pi}{7}$ sont solution de l'équation $X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8} = 0$ ou encore de l'équation

$$8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0.$$

Montrons que cette équation n'admet pas de racine rationnelle. Dans le cas contraire, si, pour p entier relatif non nul et q entier naturel non nul tels que p et q sont premiers entre eux, le nombre $r = \frac{p}{q}$ est racine de cette équation, alors $8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 - q^3 = 0$. Ceci peut encore s'écrire $8p^3 = q(-4p^2 + 4pq + q^2)$ ce qui montre que q divise $8p^3$. Comme q est premier avec p et donc avec p^3 , on en déduit, d'après le théorème de GAUSS que q divise 8. De même, l'égalité $q^3 = p(8p^2 + 4pq - 4q^2)$ montre que p divise 1.

Ainsi, nécessairement $p \in \{-1, 1\}$ et $q \in \{1, 2, 4, 8\}$ ou encore $r \in \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$. On vérifie aisément qu'aucun de ces nombres n'est racine de l'équation considérée et donc cette équation n'a pas de racine rationnelle. En particulier, $\cos \frac{2\pi}{7}$ est irrationnel.

5) On sait que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels mais ceci n'impose rien à la somme $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Posons $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} &\Rightarrow (\alpha - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = 8 + 2\sqrt{15} \\ &\Rightarrow (\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha - 6)^2 = 60 \\ &\Rightarrow \alpha^4 + 8\alpha^2 + 36 - 4\sqrt{2}\alpha^3 - 12\alpha^2 + 24\sqrt{2}\alpha - 60 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^2 - 24 = 4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2 - 6)\end{aligned}$$

Si maintenant, on suppose que α est rationnel, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a nécessairement $\alpha(\alpha^2 - 6) = 0$ (dans le cas contraire, $\sqrt{2} = \frac{\alpha^4 + 8\alpha^2 - 24}{4\alpha(\alpha^2 - 6)} \in \mathbb{Q}$). Mais α n'est ni 0, ni $-\sqrt{6}$, ni $\sqrt{6}$ (car $\alpha^2 > 2 + 3 + 5 = 10 > 6$). Donc $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ est irrationnel.

Exercice n° 2.

A et B sont deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} et admettent donc des bornes supérieures notées respectivement α et β .

Pour tout $(a, b) \in A \times B$, on a $a + b \leq \alpha + \beta$. Ceci montre que $A + B$ est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} , et donc que $\sup(A + B)$ existe dans \mathbb{R} . De plus, puisque $\alpha + \beta$ est un majorant de $A + B$, on a $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$.

Soit alors $\varepsilon > 0$.

Il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tels que $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a_0 \leq \alpha$ et $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b_0 \leq \beta$, et donc tels que $\alpha + \beta - \varepsilon < a_0 + b_0 \leq \alpha + \beta$.

En résumé,

- 1) $\forall (a, b) \in A \times B, a + b \leq \alpha + \beta$ et
- 2) $\forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times B / a + b > \alpha + \beta - \varepsilon$.

On en déduit que $\sup(A + B) = \alpha + \beta = \sup A + \sup B$.

La démarche et le résultat sont analogues pour les bornes inférieures.

Exercice n° 3.

Posons pour n entier naturel non nul $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ de sorte que $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\} = \left\{0, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{5} - 1, \dots\right\}$.

Pour $n \geq 1$, $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < u_{2n} \leq \frac{3}{2}$.

Pour $n \geq 1$, $u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < u_{2n-1} \leq 0$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < u_n \leq \frac{3}{2}$. Donc, $\sup A$ et $\inf A$ existent dans \mathbb{R} et de plus $-1 \leq \inf A \leq \sup A \leq \frac{3}{2}$.

Ensuite, $\frac{3}{2} = u_2 \in A$. Donc, $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$.

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n , on a $-1 \leq \inf A \leq u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. On fait tendre n tend vers l'infini dans cet encadrement, on obtient $\inf A = -1$ (cette borne inférieure n'est pas un minimum).

$\inf A = -1 \text{ et } \sup A = \max A = \frac{3}{2}.$

Exercice n° 4.

Posons $B = \{|y - x|, (x, y) \in A^2\}$.

A est une partie non vide et bornée de \mathbb{R} , et donc $m = \inf A$ et $M = \sup A$ existent dans \mathbb{R} .

Pour $(x, y) \in A^2$, on a $m \leq x \leq M$ et $m \leq y \leq M$, et donc $y - x \leq M - m$ et $x - y \leq M - m$ ou encore $|y - x| \leq M - m$.

Par suite, B est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . B admet donc une borne supérieure.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0, y_0) \in A^2$ tel que $x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$.

Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geq x_0 - y_0 > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

En résumé,

- 1) $\forall (x, y) \in A^2, |y - x| \leq \sup A - \inf A$ et
- 2) $\forall \varepsilon > 0, \exists (x, y) \in A^2 / |y - x| > \sup A - \inf A - \varepsilon$.

Donc, $\sup B = \sup A - \inf A$.

Exercice n° 5.

1) $A \cap B$ peut être vide et on n'a rien à dire. Supposons donc $A \cap B$ non vide. Pour $x \in A \cap B$, on a $x \leq \sup A$ et $x \leq \sup B$ et donc $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

Dans ce cas, $\sup(A \cap B)$ existe et $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

On ne peut pas améliorer. Par exemple, soit $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $B = ([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup \{0\}$. On a $\sup A = 1$, $\sup B = 1$, $A \cap B = \{0\}$ et donc $\sup(A \cap B) = 0 < 1 = \min\{\sup A, \sup B\}$.

2) Pour $x \in A \cup B$, on a $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

Donc $\sup(A \cup B)$ existe dans \mathbb{R} et $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

Inversement, supposons par exemple $\sup A \geq \sup B$ de sorte que $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$. De plus, a est dans A et donc dans $A \cup B$.

En résumé,

- 1) $\forall x \in (A \cup B), x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ et
- 2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in (A \cup B) / \max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon < x$.

Finalement, $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

3) D'après l'exercice n° 2, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

4) Pour $\sup(AB)$, tout est possible. Par exemple, si $A = B =]-\infty, 0]$ alors $\sup A = \sup B = 0$, mais $AB = [0, +\infty[$ et $\sup(AB)$ n'existe pas dans \mathbb{R} .

Exercice n° 6.

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

• Pour $n = 1$, $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$. L'identité proposée est donc vraie pour $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2(n+1)-1} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ (identité de CATALAN).

Exercice n° 7.

Pour $x \geq 1$, $x + 2\sqrt{x-1} = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} + 1)^2 \geq 0$. De même, $x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$.

Donc, si on pose $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$, $f(x)$ existe si et seulement $x \geq 1$ et pour $x \geq 1$,

$$f(x) = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1|.$$

Par suite,

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + |\sqrt{x-1} - 1| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} = 1,$$

ce qui est impossible. L'équation proposée n'a pas de solution.

Exercice n° 8.

Soient x un réel et ε un réel strictement positif. On a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$. Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe un rationnel r tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x+\varepsilon}$ et donc tel que $x < r^3 < x + \varepsilon$, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^3$ sur \mathbb{R} .

Donc, $\{r^3, r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} .