Corrigé problème 2 — CENTRALE PSI 2012

I. Préliminaires, définition de la transformation L.

I.A. L'intégrabilité (= convergence absolue) entraîne la convergence de l'intégrale et on a donc

$$E \subset E'$$

I.B. Si $x \in E$ alors pour tout $y \geqslant x$ on a $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |f(t)e^{-\lambda(t)y)} \leqslant |f(t)|e^{-\lambda(t)x}$ (car $\lambda(t) \geqslant 0$) et, la fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $x \in E$, on a $y \in E$. On vient donc de voir que

$$\forall x \in E,\ [x, +\infty[\subset E$$

On suppose désormais E non vide et on distingue deux cas.

- Si E n'est pas minoré; pour tout réel y il existe $x \in E$ tel que $x \leqslant y$ et ce qui précède indique indique que $y \in E$. On a donc
$$E = \mathbb{R}$$
- Si E est minoré, étant non vide il possède une borne inférieure α et $E \subset [\alpha, +\infty[$. Par ailleurs, si $y > \alpha$ alors (caractérisation de la borne inférieure) il existe $x \in E$ tel que $x \leqslant y$ et ainsi $y \in E$. On a prouvé que
$$]\alpha, +\infty[\subset E \subset [\alpha, +\infty[$$
et E est égal à l'un des intervalles $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$.

I.C. Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- $\forall x \in E,\ t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall t \geqslant 0,\ x \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est continue sur E.
- $\forall [a, b] \subset E,\ \forall x \in [a, b],\ \forall t \geqslant 0,\ |f(t)e^{-\lambda(t)x}| \leqslant |f(t)|e^{-\lambda(t)a}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème s'applique et donne
$$Lf \in \mathcal{C}^0(E)$$

II. Exemples dans le cas de f positive.

II.A. Si f est positive il y a équivalence entre intégrabilité (=absolue convergence) et convergence de l'intégrale donc $E = E'$.

II.B. Dans les trois cas proposés, la fonction f est positive (en B.1 cela découle de la croissance supposée de λ). On peut donc indifféremment étudier la convergence de l'intégrale (c'est-à-dire l'existence d'une limite de $\displaystyle\int_0^a f(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt$ quand $a \to +\infty$) ou l'intégrabilité (au voisinage de $+\infty$ car les fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $+\infty$ est donc le seul problème).

II.B.1) Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\forall x \neq 0,\ \int_0^a \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-\lambda(t)x}\right]_{t=0}^{t=a} = \frac{e^{-\lambda(0)x} - e^{-\lambda(a)x}}{x}$$

λ étant croissante et non majorée tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et ainsi

$$\forall x > 0,\ \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt = \frac{e^{-\lambda(0)x}}{x}$$

$$\forall x < 0,\ \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt = +\infty$$

Enfin (cas $x = 0$) $\displaystyle\int_0^a \lambda'(t)\,dt = \lambda(a) - \lambda(0) \to +\infty$ quand $a \to +\infty$. On a donc montré que

$$E = E' = \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \forall x > 0,\ Lf(x) = \frac{e^{-\lambda(0)x}}{x}$$

II.B.2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall t \geqslant \max(x, 0),\ f(t)e^{-\lambda(t)x} = e^{\lambda(t)(t-x)} \geqslant 1$. On n'a donc pas intégrabilité au voisinage de $+\infty$ et
$$E = \emptyset$$

II.B.3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall t \geqslant \max(-x,0),\ 0 \leqslant f(t)e^{-\lambda(t)x} = \dfrac{e^{-\lambda(t)(x+t)}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$. La fonction majorante étant intégrable, on a $x \in E$. Ainsi

$$E = E' = \mathbb{R}$$

II.C. Il s'agit ici d'étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$.

II.C.1) Si $x \geqslant 0$ alors $0 \leqslant \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $x \in E$.

Si $x < 0$, $t\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ (croissances comparées) donc $\dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \geqslant \dfrac{1}{t}$ pour t assez grand et la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire $x \notin E$. On a donc

$$E = \mathbb{R}^+$$

On a immédiatement (arctan étant une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$)

$$Lf(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

II.C.2) Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0,\ \forall t \geqslant 0,\ t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall t \geqslant 0,\ x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto -\dfrac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}$.
- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\dfrac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- On a

$$\forall a > 0,\ \forall x \geqslant a,\ \forall t \geqslant 0,\ \left|-\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{t^2}{1+t^2}e^{-at^2} = \psi(t)$$

  avec ψ continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (car $a > 0$) ; c'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le cours indique alors que Lf est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall x > 0,\ (Lf)'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}\,dt$$

Remarque : on ne sait rien a priori quant à la dérivabilité en 0 *! L'énoncé n'était pas très clair.*

II.C.3) On en déduit que

$$\forall x > 0,\ Lf(x) - (Lf)'(x) = \int_0^{+\infty} e^{xt^2}\,dt = \frac{A}{\sqrt{x}} \quad \text{avec} \quad A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

la dernière égalité provenant du changement de variable $u = t\sqrt{x}$.

Remarque : On a donc $(Lf)'(x) \to -\infty$ *quand* $x \to 0^+$*. Par théorème de prolongement de la dérivée (avec* $Lf \in C^0(\mathbb{R}^+) \cap C^1(\mathbb{R}^{+*})$*), on peut en déduire que* Lf *n'est PAS dérivable en* 0 *mais que son graphe présente en* $(0, \pi/2)$ *une demi-tangente verticale.* :

II.C.4) g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ g'(x) = e^{-x}((Lf)'(x) - Lf(x)) = -A\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

$x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc (« théorème fondamental de l'analyse ») $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ en est une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$. Deux primitives sur un intervalle différenat d'une constante,

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x > 0,\ g(x) = c - A\int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

Par ailleurs, g est continue en 0 (Lf l'est) et $g(x) \to g(0) = Lf(0) = \frac{\pi}{2}$ quand $x \to 0$. On en déduit que l'on peut passer à la limite dans l'égalité ci-dessus (en particulier, l'intégrale existe sur $[0,1]$ ce qui n'est pas surprenant car la fonction que l'on intègre est prolongeable par continuité en 0). On obtient $c = \frac{\pi}{2} + A\int_1^0 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$. Finalement, on a

$$\forall x > 0,\ g(x) = \frac{\pi}{2} - A\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

et l'égalité reste vraie en $x = 0$ (elle se lit $g(0) = \pi/2$).

II.C.5) Remarquons que

$$\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'identité de la question précédente, on obtient donc

$$\lim_{x\to+\infty} A\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Par ailleurs, le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (licite car $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe C^1 de $]0,x[$ dans $]0,\sqrt{x}[$) donne

$$\forall x > 0,\ \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,du$$

Cette quantité tend vers $2A$ quand $x \to +\infty$ et finalement, $2A^2 = \frac{\pi}{2}$ ou encore (comme $A \geqslant 0$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

III. Étude d'un premier exemple.

III.A. Comme $e^t - 1 \underset{0}{\sim} t$, on a $f(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$. f est donc prolongeable par continuité en posant

$$f(0) = 0$$

III.B. Soit $x \in \mathbb{R}$; $g\ :\ t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g(t) \sim \frac{t}{2}e^{-xt}$ en $+\infty$ (car $f(t) \underset{+\infty}{\sim} t/2$). Si $x > 0$, g est intégrable au voisinage de $+\infty$ (négligeable devant $1/t^2$). Si $x \leqslant 0$, g est non intégrable au voisinage de $+\infty$ (de limite infinie). Ainsi

$$E = \mathbb{R}^{+*}$$

III.C. Par définition, on a

$$\forall x > 0,\ Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,dt$$

Par ailleurs, pour $t > 0$ on a $e^{-t} \in [0,1[$ et donc

$$\forall t > 0,\ f(t) = \frac{\mathrm{t}\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} - 1 + \frac{t}{2} = te^{-t}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt} - 1 + \frac{t}{2}$$

Les fonctions $t \mapsto e^{-xt}$ et $t \mapsto te^{-xt}$ étant intégrables sur $\mathbb{R}^+$ pour $x > 0$, on peut découper $Lf(x)$ en trois morceaux pour $x > 0$ et obtenir

$$\forall x > 0,\ Lf(x) = \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} te^{-(k+1+x)t}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-xt}\,dt$$

Pour $y > 0$, une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^a te^{-yt}\,dt = \left[-\frac{t}{y}e^{-yt}\right]_0^a + \frac{1}{y}\int_0^a e^{-yt}\,dt = \frac{-aye^{-ya} + 1 - e^{-ay}}{y^2}$.
En faisant tendre a vers $+\infty$, on trouve alors

$$\forall y > 0,\ \int_0^{+\infty} te^{-ty}\,dt = \frac{1}{y^2}$$

et ainsi

$$\forall x > 0,\ Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} te^{-(k+1+x)t}\,dt$$

On veut maintenant intervertir somme et intégrale par le théorème d'intégration terme à terme. On travaille pour un $x > 0$ fixé.

- Posons $f_k\ :\ t \mapsto te^{-(k+1+x)t}$. f_k est continue pour tout $k \geqslant 0$ et la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$; elle a pour somme $t \mapsto \dfrac{t}{e^t-1}e^{-xt}$ qui est aussi continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Les f_k sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_k| = \int_0^{+\infty} f_k = \frac{1}{(k+1+x)^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Le théorème s'applique et le calcul d'intégrale fait plus haut donne

$$\forall x > 0,\ Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x+1)^2}$$

C'est la formule voulue (il suffit de poser $n = k+1$).

III.D. On vient de voir que

$$\forall x > 0,\ Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

- Posons $h_n\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{(n+x)^2}$. On a $\|h_n\|_\infty^{\mathbb{R}^+} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
- Les h_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

Le cours indique que la somme de la série $\sum h_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. En particulier,

$$\lim_{x\to 0^+} Lf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

IV. Généralités dans le cas typique.

IV.A. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- Pour tout $x > \alpha$ (et donc $x \in E$) $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tout $t \geqslant 0$, $x \mapsto e^{-xt}f(t)$ est de classe C^∞ sur $]\alpha, +\infty[$ de dérivée n-ième $x \mapsto (-t)^n e^{-xt}f(t)$.
- Pour tout $x > \alpha$, $t \mapsto (-t)^n e^{-xt}f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $[a,b] \subset]\alpha, +\infty[$. On a

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \geqslant 0,\ \left|(-t)^n e^{-xt}f(t)\right| \leqslant t^n e^{-at}|f(t)| = \phi_n(t)$$

  ϕ_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et présente un unique problème d'intégrabilité en $+\infty$. Comme $a > \alpha = \inf(E)$, il existe $c \in E$ tel que $a > c$ (caractérisation de la borne inférieure). On a alors, au voisinage de $+\infty$, $\phi_n(t) = e^{-ct}|f(t)|t^n e^{-(a-c)t} = o(e^{-ct}f(t))$ (car $a-c>0$). Comme $c \in E$, $t \mapsto e^{-ct}f(t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (sur $\mathbb{R}^+$). Ainsi, ϕ_n est intégrable au voisinage de $+\infty$ elle aussi et donc elle l'est sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème s'applique. Il indique que $Lf \in C^\infty(]\alpha, +\infty[)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > \alpha,\ (Lf)^n(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt}\, dt\,.$$

IV.B. Comme f est positive, on a $E = E'$. Il s'agit de trouver les $x \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-(x+a)t}\, dt$ converge (le seul problème étant celui au voisinage de $+\infty$) ou tels que $t \mapsto t^n e^{-(x+a)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (idem). Si $x+a > 0$ alors $t^n e^{-(x+a)t} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées) et la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. Si $x+a \leqslant 0$ alors $t.t^n e^{-(x+a)t} \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ et la fonction n'est donc pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement ;

$$E = E' =]-a, +\infty[$$

Pour $y > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, une intégration par parties donne (en omettant les détails de calcul) $d\int_0^{+\infty} t^n e^{-yt}\, dt = \dfrac{n}{y}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-yt}\, dt$. On en déduit par récurrence simple que

$$\forall y > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} t^n e^{-yt}\, dt = \frac{n!}{y^{n+1}}\cdot$$

En particulier, on a

$$\forall x > -a,\ Lf(x) = \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}\cdot$$

IV.C.1) On fixe $\beta > 0$. Posons $g\ :\ t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k$. On sait qu'au voisinage de 0 on a $g(t) = O(t^{n+1})$.

Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ et $c \in]0, \beta[$ tel que

$$\forall t \in [0, c],\ |g(t)| \leqslant M t^{n+1}$$

La relation de Chasles, l'inégalité triangulaire et la croissance du passage à l'intégrale donnent

$$\left| \int_0^\beta g(t) e^{-tx}\, dt \right| \leqslant \int_0^c |g(t)| e^{-tx}\, dt + \|g\|_\infty^{[c,\beta]} \int_c^\beta e^{-xt}\, dt \leqslant M \int_0^c t^{n+1} e^{-tx}\, dt + \|g\|_\infty^{[c,\beta]} (\beta - c) e^{-cx}$$

Le calcul de IV.B indique alors que

$$\left| \int_0^\beta g(t) e^{-tx}\, dt \right| \leqslant \frac{M(n+1)!}{x^{n+2}} + \|g\|_\infty^{[c,\beta]} (\beta - c) e^{-cx} \underset{x \to +\infty}{=} O(x^{-n-2})$$

ce qui correspond au résultat demandé.

IV.C.2) Avec le calcul de IV.B on a (en continuant à utiliser la fonction g introduite en IV.C.1)

$$\forall x \in E \cap \mathbb{R}^{+*},\ Lf(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-tx}\, dt$$

La question précédente donne un renseignement pour l'intégrale entre 0 et 1. Intéressons-nous à l'autre partie. Fixons $c \in E \cap \mathbb{R}^{+*}$ (c existe car E est non majoré), travaillons avec $x \geqslant c + 1$ et écrivons que

$$\forall t \geqslant 1,\ |g(t) e^{-tx}| = |g(t) e^{-ct} e^{-(x-c)t}| \leqslant |g(t) e^{-ct}| e^{-(x-c)}$$

$t \mapsto g(t) e^{-ct}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $c \in E$ donc $t \mapsto f(t) e^{-ct}$ est intégrable et $c > 0$ donc pour tout k, $t \mapsto t^k e^{-ct}$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}^+$). On a alors

$$\left| \int_1^{+\infty} g(t) e^{-xt}\, dt \right| \leqslant e^{-(x-c)} \int_1^{+\infty} |g(t)| e^{-ct}\, dt$$

et cet terme est dominé par (et même négligeable devant) x^{-n-2} quand $x \to +\infty$. En sommant, on a alors

$$\int_0^{+\infty} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx}\, dt = O(x^{-n-2})$$

et le calcul de IV.B donne

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV.D.1) f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite en $+\infty$ et elle est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ (majorée en module par $|\ell| + 1$ au voisinage de $+\infty$ et continue sur le segment qui reste). Soit $x > 0$; $|f(t) e^{-xt}| \leqslant \|f\|_\infty^{\mathbb{R}^+} e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donc $x \in E$. Ainsi

$$\mathbb{R}^{+*} \subset E$$

IV.D.2) On a

$$\forall x > 0,\ xLf(x) = \int_0^{+\infty} x f(t) e^{-xt}\, dt$$

Le changement de variable $u = xt$ donne

$$\forall x > 0,\ xLf(x) = \int_0^{+\infty} f(u/x) e^{-u}\, du = G(x)$$

Pour étudier le comportement de G en $+\infty$, on va utiliser la caractérisation séquentielle. On se donne ainsi une suite (x_n) d'éléments de $]0, 1]$ telle que $x_n \to 0$ et on veut montrer que $G(x_n) \to \ell$. Pour cela, on utilise le théorème de convergence dominée.

- Posons $g_n\ :\ u \mapsto f(u/x_n) e^{-u}$. (g_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers la fonction constante $u \mapsto \ell$ elle même continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \geqslant 0,\ |g_n(u)| \leqslant \|f\|_\infty e^{-u}$ et le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème s'applique et indique que $G(x_n) \to \int_0^{+\infty} \ell e^{-u}\, du = \ell$. On obtient la même limite pour toutes les suites (x_n) et ainsi (caractérisation séquentielle des limites)

$$\lim_{x\to 0^+} xLf(x) = \ell$$

V. Étude d'un deuxième exemple.

V.A. Il s'agit de montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ou encore que $F(a) = \int_0^a |f|$ n'admet pas de limite infinie quand $a \to +\infty$. On remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\, dt \geqslant \int_{n\pi+\pi/4}^{(n+1)\pi-\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{2}t} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)\pi}\frac{\pi}{2}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F((n+1)\pi) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

F n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}^+$ et

$$0 \notin E$$

V.B. Avec la partie préliminaire, on en déduit que $E \subset]0,+\infty[$. Réciproquement, si $x > 0$ alors $f(t)e^{-xt} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $x \in E$. Ainsi

$$E =]0,+\infty[$$

V.C. Le seul problème dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est celui au voisinage de $+\infty$. On a

$$\forall a \geqslant 1,\ \int_1^a \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^a + \int_1^a \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

Le terme « entre crochets » du membre de droite admet une limite quand $a \to +\infty$.
$t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (majorée en module par $1/t^2$) et l'intégrale du membre de droite admet donc une limite quand $a \to +\infty$). Il en est finalement de même de l'intégrale du membre de gauche. L'intégrale de $\dfrac{\sin(t)}{t}$ existe donc aussi au voisinage de $+\infty$. On a finalement existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ et

$$0 \in E'$$

V.D. Il convient encore d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
- $\forall x > 0,\ t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $x \in E$).
- $\forall t > 0,\ x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ dé dérivée $x \mapsto -\sin(t)e^{-xt}$.
- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\sin(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall a > 0,\ \forall x \geqslant a,\ \forall t \geqslant 0,\ |-\sin(t)e^{-xt}| \leqslant e^{-at}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, $Lf \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$ et

$$\forall x > 0\ (Lf)'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\, dt = -\frac{1}{1+x^2}$$

le calcul de l'intégrale se faisant, par exemple, en écrivant le sinus comme partie imaginaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

V.E. Deux primitives d'une fonction sur un intervalle différant d'une constante,

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x > 0,\ Lf(x) = c - \operatorname{Arctan}(x)$$

f étant bornée sur $\mathbb{R}^+$ (continue et de limite nulle en l'infini) on a $|Lf(x)| \leqslant \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \dfrac{\|f\|_\infty}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$. On en déduit que $c = \pi/2$ et

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$$

V.F. Soit $x \geqslant 0$ (et donc $x \in E'$). Le changement de variable $u = x - n\pi$ donne

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-n\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + n\pi} e^{-ux}\, dx$$

On remarque que $(f_n(x))$ est une suite alternée, de limite nulle (car $x \in E'$) et que $(|f_n(x)|)$ décroît (car c'est le cas des suites positives de terme généraux $e^{-n\pi x}$ et $\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi} e^{-ux}\, dx$). On peut alors appliquer la règle spéciale pour affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant |f_{n+1}(x)| \leqslant \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

et on a donc

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_\infty^{\mathbb{R}^+} \leqslant \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \to 0$$

ce qui montre que la série $\sum f_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

V.G. On peut ainsi utiliser le théorème de la double limite pour affirmer que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x \to 0} Lf(x) = \lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = Lf(0)$$

VI. Injectivité dans le cas typique.

VI.A.1) Par linéarité du passage à l'intégrale, on a

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 P(t) g(t)\, dt = 0$$

VI.A.2) D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\|P_n - g\|_\infty^{[0,1]} \to 0$. On a alors

$$\left| \int_0^1 P_n g - \int_0^1 g^2 \right| \leqslant \|P_n - g\|_\infty^{[0,1]} \int_0^1 |g| \to 0$$

et comme $\displaystyle\int_0^1 P_n g$ est toujours nul,

$$\int_0^1 g^2 = 0$$

g^2 étant continue et positive sur $[0,1]$ ceci entraîne que

$$\forall t \in [0,1],\ g(t) = 0$$

VI.B.1) $u \mapsto e^{-xu} f(u)$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$, le « théorème fondamental de l'analyse » indique que h est une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}^+$. Une intégration par parties donne alors

$$\forall b > 0,\ \int_0^b f(t) e^{-(x+a)t}\, dt = \left[h(t) e^{-at}\right]_0^b + a \int_0^b e^{-at} h(t)\, dt$$

Le membre de gauche admet une limite (égale à $Lf(x+a)$) quand $b \to +\infty$ (car $x + a \in E$). On a donc

$$Lf(x+a) = \lim_{b \to +\infty} \left(h(b) e^{-ab} + a \int_0^b e^{-at} h(t)\, dt \right)$$

Par ailleurs, h admet une limite finie en $+\infty$ (car $x \in E \subset E'$) et $e^{-ab} \to 0$ quand $b \to +\infty$ (car $a > 0$). Ainsi,

$$L(fx + a) = \lim_{b \to +\infty} a \int_0^b e^{-at} h(t)\, dt = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t)\, dt$$

l'existence de l'intégrale étant conséquence de l'existence des autres limites.

VI.B.2) $t \mapsto e^{-at}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $]0,1[$. On peut ainsi poser $u = e^{-ta}$ pour obtenir (ce qui inclut l'existence de l'intégrale du membre de droite)

$$a\int_0^{+\infty} e^{-t(n+1)a}h(t)\ dt = \int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)\ du$$

Par ailleurs le membre de gauche vaut $\dfrac{1}{n+1}Lf(x+(n+1)a)$ et est nul d'après la question précédente. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)\ du = 0$$

VI.B.3) La fonction $g\ :\ u \mapsto h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right)$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 (car h admet une limite finie en $+\infty$ car $x \in E$). Avec les question VI.B.2) et VI.A.2), on en déduit que g est nulle. Quand u varie dans $[0,1]$, $-\frac{\ln(u)}{a}$ varie dans $\mathbb{R}^+$ et h est donc nulle sur $\mathbb{R}^+$.

VI.C. Soit f telle que E est non vide. Supposons que $Lf = 0$; la question précédente indique que $\forall x \in E$, une primitive de $u \mapsto e^{-xu}f(u)$ est nulle sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout x de E, $u \mapsto e^{-xu}f(u)$ est donc nulle sur $\mathbb{R}^+$. Comme E non vide (et comme exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) f est donc nulle sur $\mathbb{R}^+$.
Le noyau de l'application linéaire L est donc réduit à $\{0\}$ et L est injective.

VII. Etude en la borne inférieure de E.

VII.A. Comme f est positive, on a $E = E'$ mais aussi Lf qui est décroissante sur E ($\forall x, y \in E$ tels que $x \leqslant y$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ on a $f(t)e^{-\lambda(t)x} \geqslant f(t)e^{-\lambda(t)y}$ et donc $Lf(x) \geqslant Lf(y)$). En particulier, par théorème de limite monotone, Lf admet des limites aux bornes de l'intervalle E (éventuellement $+\infty$ en la borne inférieure si la fonction n'est pas majorée).

VII.A.1) On suppose Lf bornée sur E et on note M un majorant de cette fonction. Montrons que

$$\forall b \geqslant 0,\ \int_0^b f(t)e^{-\alpha t}\ dt \leqslant M \tag{$*$}$$

Fixons donc $b \geqslant 0$; $G_b\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^b f(t)e^{-xt}\ dt$ est continue sur $\mathbb{R}$ par théorème sur les intégrales à paramètres car

- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0,b]$
- $\forall t \in [0,b],\ x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall [u,v] \subset \mathbb{R},\ \forall x \in [u,v],\ \forall t \in [0,b],\ |f(t)e^{-xt}| \leqslant f(t)e^{-ut}$ et le majorant est intégrable sur $[0,b]$ puisque continu sur ce *segment*.

Or, $\forall x \in E,\ G_b(x) \leqslant Lf(x)$ (car f est positive) et donc $\forall x \in E,\ G_b(x) \leqslant M$. En faisant tendre x vers α, on obtient $(*)$.
$b \mapsto \displaystyle\int_0^b f(t)e^{-\alpha t}\ dt$ est ainsi majoré sur $\mathbb{R}^+$ et c'est une fonction croissante (car f est positive). Elle admet donc une limite finie quand $b \to +\infty$ et donc

$$\alpha \in E' = E$$

VII.A.2) Par contraposée, si $\alpha \notin E$ alors Lf n'est pas bornée. Avec la remarque initiale de monotonie, on a donc

$$\lim_{x \to \alpha^+} Lf(x) = +\infty$$

VII.B. On a ici (pour $x \in E'$) $Lf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x}\ dt$.

VII.B.1) Si $x > 1$ alors $\left|\dfrac{\cos(t)}{(1+t)^x}\right| \leqslant d\frac{1}{(1+t)^x}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ et $x \in E$.

Si $x \leqslant 1$ alors on remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{(1+t)^x}\ dt \geqslant \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/4} \frac{dt}{\sqrt{2}(1+t)^x} \geqslant \frac{\pi}{4\sqrt{2}(1+(n+1)\pi)^x}$$

On conclut alors comme en V.A que $x \notin E$. Ainsi

$$E =]1, +\infty[$$

VII.B.2) Il s'agit de voir si $G\ :\ b \mapsto \displaystyle\int_0^b \frac{\cos(t)}{(1+t)^x}\,dt$ admet une limite en $+\infty$.

- Si $x > 0$, une intégration par parties donne
$$\forall b \geqslant 0,\ G(b) = \frac{\sin(b)}{(1+b)^x} + x\int_0^b \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}}\,dt\,.$$
Les deux termes du membre de droite admettent une limite quand $b \to +\infty$ (en effet, la fonction sous l'intégrale est intégrable car dominée par $1/t^{x+1}$ au voisinage de $+\infty$). Il en est de même du membre de gauche et $x \in E'$.
- Si $x = 0$ alors $G(b) = \sin(b)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ et $0 \notin E'$.
- Si $x < 0$ alors $\displaystyle\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/4} \frac{\cos(t)}{(1+t)^x}\,dt \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi/4} \frac{1}{(1+t)^x}\,dt \geqslant \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(1+n\pi)^{-x}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. Ainsi $G(2n\pi+\pi/4) - G(2n\pi)$ ne tend pas vers 0 et $x \notin E'$ (sinon, cette différence tendrait vers 0 comme différence de deux termes ayant la même limite).

On a donc montré que
$$E' =]0, +\infty[$$

VII.B.3) On réutilise le calcul de VI.B.2) (intégration par parties) dans le cas $x > 0$ qui nous donne
$$\forall x > 0,\ Lf(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}}\,dt\,.$$

En utilisant le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on obtient que $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}}\,dt$ est continue sur $[1, +\infty[$ (on utilise la domination $\left|\dfrac{\sin(t)}{(1+t)^{x+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{(1+t)^2}$). On en déduit que
$$\lim_{x\to 1^+} Lf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^2}\,dt$$

En refaisant alors une intégration par parties dans l'autre sens, on obtient alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t}\,dt = Lf(1)$ donc
$$\lim_{x\to 1^+} Lf(x) = Lf(1)\,.$$

VIII. Une utilisation de la transformation L.

VIII.A. Soient $P, Q \in \mathcal{P}$. $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dominée par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ (croissances comparées). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrable existe a fortiori sur $\mathbb{R}^+$.

VIII.B. L'application est bien définie, est symétrique ($\langle P\,|\,Q\rangle = \langle Q\,|\,P\rangle$) et est linéaire par rapprot à la prmière variable (par linéarité du passage à l'intégrale). De plus si $P \in \mathcal{P}$, $\langle P\,|\,P\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} |P(t)|^2 e^{-t}\,dt \geqslant 0$ et si cette quantité est nulle alors $P = 0$ (car $t \mapsto |P(t)|^2 e^{-t}$ est alors continue positive d'intégrale nulle et donc nulle et l'exponentielle ne s'annule pas).

On a finalement un produit scalaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{P}$.

VIII.C. U est linéaire par linéarité du passage à la dérivée. De plus, $U(X^0) = 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ U(X^n)(t) = e^t D(nt^n e^{-t}) = -nt^n + n^2 t^{n-1}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ U(X^n) \in \mathcal{P}$. Comme tout élément de $\mathcal{P}$ est combinaison linéaire d'éléments de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}$ est stable par U. Finalement
$$U \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$$

VIII.D. On a $U(P)(t)Q(t)e^{-t} = D(te^{-t}P'(t))Q(t)$. Une intégration par parties donne
$$\forall a \geqslant 0,\ \int_0^a U(P)(t)Q(t)e^{-t}\,dt = \left[te^{-t}P'(t)Q(t)\right]_0^a - \int_0^a te^{-t}P'(t)Q'(t)\,dt$$

Par croissances comparées, les différents termes admettent une limite quand $a \to +\infty$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} U(P)(t)Q(t)e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} te^{-t}P'(t)Q'(t)\,dt$$

On montre de même, en échangeant les rôles de P et Q, que

$$\int_0^{+\infty} P(t)U(Q)(t)e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} te^{-t}P(t)'Q'(t)\,dt$$

Donc :

$$\langle U(P)\,|\,Q\rangle = \langle P\,|\,U(Q)\rangle\ .$$

VIII.E. U étant un endomorphisme symétrique d'un espace préhilbertien réel, les résultats demandés sont des résultats de cours.

VIII.F.1) $U(P)(t) = e^tD(te^{-t}P'(t)) = -tP'(t) + P'(t) + tP''(t)$. Si $U(P) = \lambda P$, P est solution de l'équation différentielle

$$ty''(t) + (1-t)y'(t) - \lambda y(t) = 0$$

VIII.F.2) Soit n le degré de P. Il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $a \in \mathbb{R}^*$ tels que $P(t) = at^n + Q(t)$. Le coefficient de X^n dans $XP'' + (1-X)P' - \lambda P$ est $-na - \lambda a$. On en déduit que $\lambda = -\deg(P)$.

VIII.G.1) Soit $P \in \mathcal{P}$; on a $L(XP')(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)e^{-tx}\,dt$. Une intégration par parties (dont on ne détaille pas le calcul) donne (compte-tenu des croissances comparées et de la question IV.A)

$$\forall x > 0,\ L(XP')(x) = -\int_0^{+\infty} P(t)(e^{-tx} - xte^{-tx})\,dt = -LP(x) - x(LP)'(x)$$

et de façon similaire,

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ L(XP'')(x) &= -\int_0^{+\infty} P'(t)(e^{-tx} - xte^{-tx})\,dt \\
&= -L(P')(x) + x\int_0^{+\infty} tP'(t)e^{-tx}\,dt \\
&= -L(P')(x) - x\int_0^{+\infty} P(t)(e^{-tx} - xte^{-tx})\,dt \\
&= -L(P')(x) - xLP(x) - x^2(LP)'(x)
\end{aligned}$$

Suppsons $XP'' + (1-X)P' + nP = 0$. On a alors $L(XP'') + L(P') - L(XP') + nL(P) = 0$ ce qui donne

$$\forall x > 0,\ x(1-x)(LP)'(x) + (1-x)LP(x) + nLP(x) = 0$$

$Q = LP$ est donc solution sur $]0, +\infty[$ de

$$x(1-x)y'(x) + (n+1-x)y(x) = 0 \qquad (E'_n)$$

VIII.G.2) Sur $]1, +\infty[$, l'équation (E'_n) est résolue et à coefficients continus. L'ensemble de ses solutions est (théorème de Cauchy-Lipschitz) un espace vectoriel (l'équation est homogène) de dimension 1. Comme

$$\forall x > 1,\ \frac{x-n-1}{x(1-x)} = -\frac{n+1}{x} + \frac{n}{1-x}\,,$$

une primitive sur $]1, +\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{x-n-1}{x(1-x)}$ est $x \mapsto \ln\left(\dfrac{(x-1)^n}{x^{n+1}}\right)$. L'ensemble des solutions sur $]1, +\infty[$ de (E'_n) est donc l'espace vectoriel engendré par

$$f_n\ :\ x \mapsto \frac{(x-1)^n}{x^{n+1}}$$

Raisonnons par conditions nécessaires puis suffisantes pour trouver les éléments propres de U.

- Soit λ une valeur propre et P un vecteur propre associé. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = -n$ et P est solution de (E_n) (question VIII.F). $Q = LP$ est ainsi solution de (E'_n) sur $]1, +\infty[$ et LP est multiple de f_n. Par ailleurs, par la formule du binôme

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} \frac{k!}{x^{k+1}}$$

Avec la question IV.B dans le cas $a = 0$, on voit que f_n est image par L de $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} X^k$.
Ainsi, avec la partie VI, P est un multiple de Q_n (puisque LP est multiple de LQ_n).
- Réciproquement on montre que $UQ_n = -nQ_n$ par un calcul que nous omettons en cette fin de problème.

On a donc montré que les valeurs propres de U sont les éléments de $\mathbb{Z}^-$ et que chaque sous-espace propre est la droite vectorielle de base $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} X^k$.

VIII.G.3) D'après la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} P_n(t) &= e^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k(e^{-t}) D^{n-k}(t^n) \\ &= e^t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-t} \frac{n!}{k!} t^k \\ &= n! Q_n(t) \end{aligned}$$

P_n engendre donc aussi la droite vectorielle propre associée à la valeur propre $-n$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆