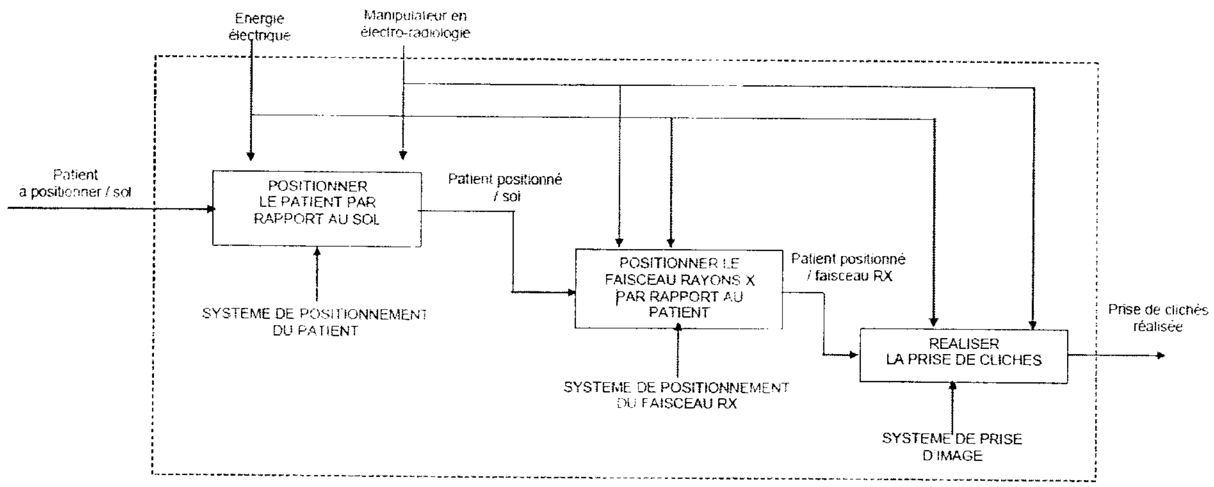
Corrigé SI – CNC 2013

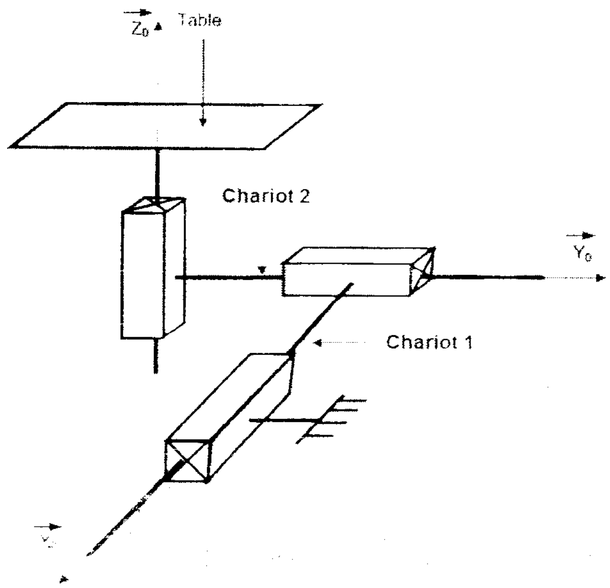
MP - PSI

Partie I

Q1 –

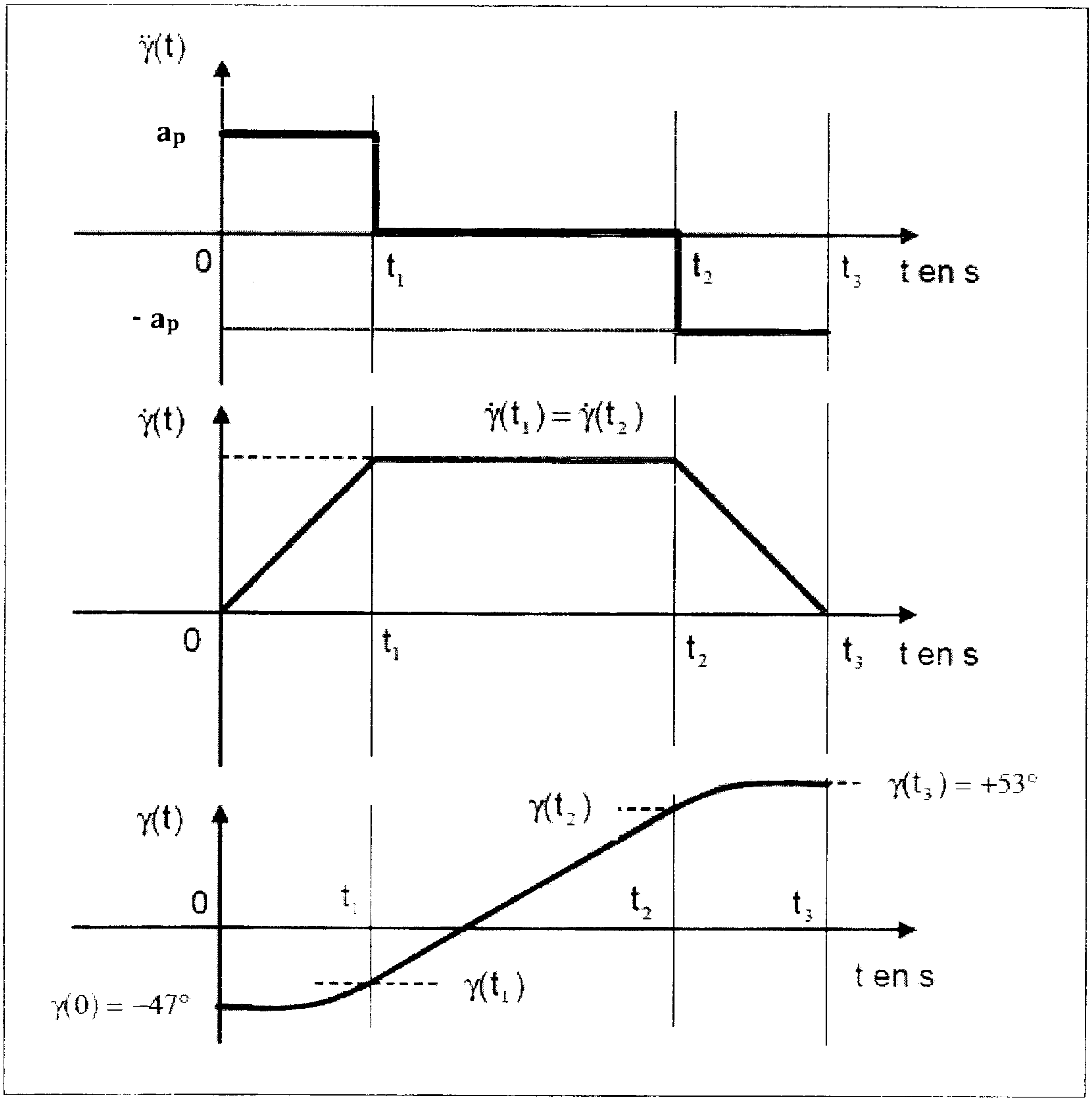


Q2 –



Partie II

Q3 –



Q4 –

Calcul de t_1 :

Nous avons $a_p = \dfrac{\dot{\gamma}(t_1)}{t_1}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{t_1 = \dfrac{\dot{\gamma}(t_1)}{a_p} = \dfrac{10}{13} = 0,77\ s}$

Calcul de $\gamma(t_1)$:

Nous avons : $\dot{\gamma}^2(t_1) = 2a_p(\gamma(t_1) - \gamma(t_0))$

$$\Longrightarrow \boxed{\gamma(t_1) = \gamma(t_0) + \frac{\dot{\gamma}^2(t_1)}{2a_p} = -47 + \frac{100}{2\times 13} = -43,15°}$$

Calcul de t_2 :

L'angle parcouru entre t_0 et t_3 est :

$$\gamma(t_3) - \gamma(t_0) = t_2 . \dot{\gamma}(t_1)$$

$$\Longrightarrow \boxed{t_2 = \frac{\gamma(t_3) - \gamma(t_0)}{\dot{\gamma}(t_1)} = \frac{100}{10} = 10s}$$

Calcul de t_3 : $\boxed{t_3 = t_2 + t_1 = 10,77s}$

Calcul de $\gamma(t_2)$:

Nous avons $\dfrac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1} = \dot{\gamma}(t_1)$

$$\Longrightarrow \gamma(t_2) = (t_2 - t_1)\dot{\gamma}(t_1) + \gamma(t_1)$$

$$\Longrightarrow \gamma(t_2) = (10 - 0,77) \times 10 - 43,15 = 49,15^o$$

Q5 –

Calcul de t_4 : $\boxed{t_4 = t_3 + 10 = 20,77s}$

Calcul de t_5 : $\boxed{t_5 = \frac{|\dot{\gamma}_G|}{a_p} + t_4 = \frac{30}{13} + 20,77 = 23,07\ s}$

Q6 – Calcul de T_{rp} .

a– l'égalité entre la course angulaire de la phase a et celle de la phase c permet d'écrire

$$\boxed{|\dot{\gamma}_G| . \left(T_{rp} - (t_5 - t_4)\right) = \gamma(t_3) - \gamma(t_0)}$$

$$\Longrightarrow \quad T_{rp} = \frac{\gamma(t_3)-\gamma(t_0)}{|\dot{\gamma}_c|} + (t_5 - t_4) = \frac{100}{30} + 2,3 = 5,63\ s$$

b-

- Le temps de la phase a est de 10,77s : **passage à petite vitesse**
- Le temps de la phase b est de 5,63s : **passage à grande vitesse**

(le temps de retour à grande vitesse < le temps d'allé à petite vitesse)

Partie III

Q7 – Le seul mouvement autorisé de l'arceau 3 par rapport au bras 2 est la rotation. La liaison équivalente entre l'arceau 3 et le bras 2 est une liaison pivot.

Q8 –

a- La mobilité m

La mobilité utile mu=1 (la rotation de 3)

La mobilité interne mi=4 (les rotations des galets G_{17} , G_{18} , G_{27} et G_{28})

Donc M=5

b- Le degré d'hyperstatisme h

Inconnus statiques Is=2x(6x2+2x1+10x5)=128

Equations statiques Es=6(20+2-1)=126

Donc $\boxed{h=Is-(Es-m)=7}$

c- Un guidage hyperstatique est rigide et précis

Partie IV

Q9 – La courroie est inextensible $R\omega_{3/2} = R_p\omega_{5/2}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{K = \frac{\omega_{3/2}}{\omega_{5/2}} = \frac{R_p}{R} = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}}$

Q10 –

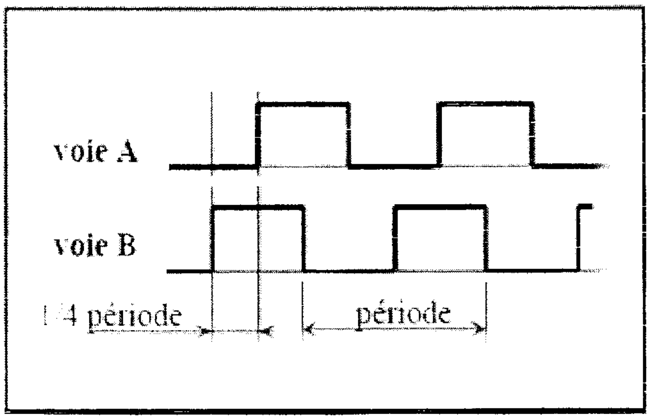
a- La résolution (précision) requise sur la position de l'arbre moteur $\Delta\theta_{mot}$

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta\theta_{mot}} = k.\mu \quad \Longrightarrow \quad \Delta\theta_{mot} = \frac{\Delta\gamma}{k.\mu} = 24 \times 50 \times 10^{-3} = 1,2°$$

b- Le nombre (résolution du capteur) minimal de traits par tour N que doit posséder le capteur

$4\ N = \frac{360}{\Delta\theta_{mot}}$ $\Longrightarrow$ N = 75 Traits par tour

Le capteur retenu est convenable (N=250 > 75 traits)



Q12 - La fréquence correspondante du signal carré de sortie du capteur f_c

$f_c = N.N_{mot}$ ou N_{mot} la fréquence du moteur en tours par seconde ($trs.s^{-1}$)

$$N_{mot} = \frac{\dot{\gamma}}{k.\mu} = 24 \times 50 \times 30 \times \frac{1}{360} = 100\ trs.s^{-1}$$

$$\boxed{f_c = 75 \times 100 = 7500 Hz}$$

13 – Chronogramme de la bascule JK

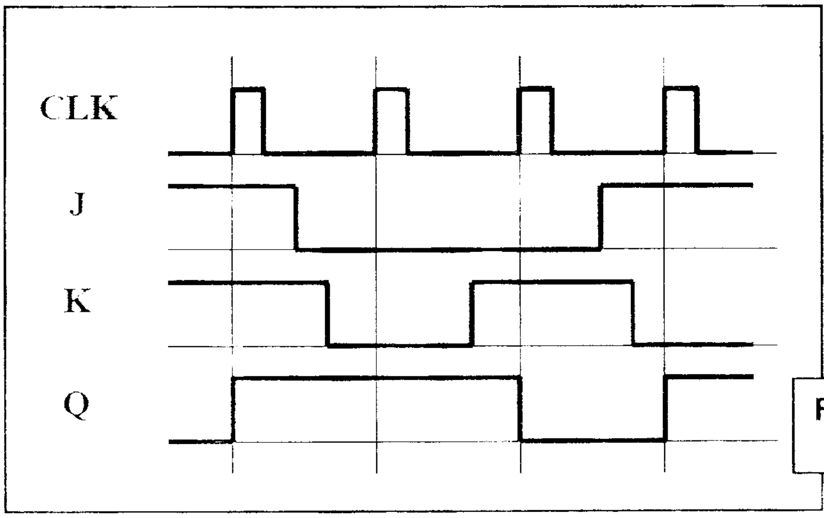


Figure DR3

Q14 –

a - Le tableau de Karnaugh donnant Q_{n+1}

Q_n \ JK	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	0	1

b - L'expression simplifiée de $\mathbf{Q_{n+1}}$.

$$\boxed{Q_{n+1} = J.\overline{Q}_n + \overline{K}Q_n}$$

Figure DR4

Q15 -

Nous avons 2^{10}=1024 états (de 0 à 1023)

10 bascules sont donc nécessaires pour compter de 0 à 1023

Q16 – le compteur asynchrone 3bits

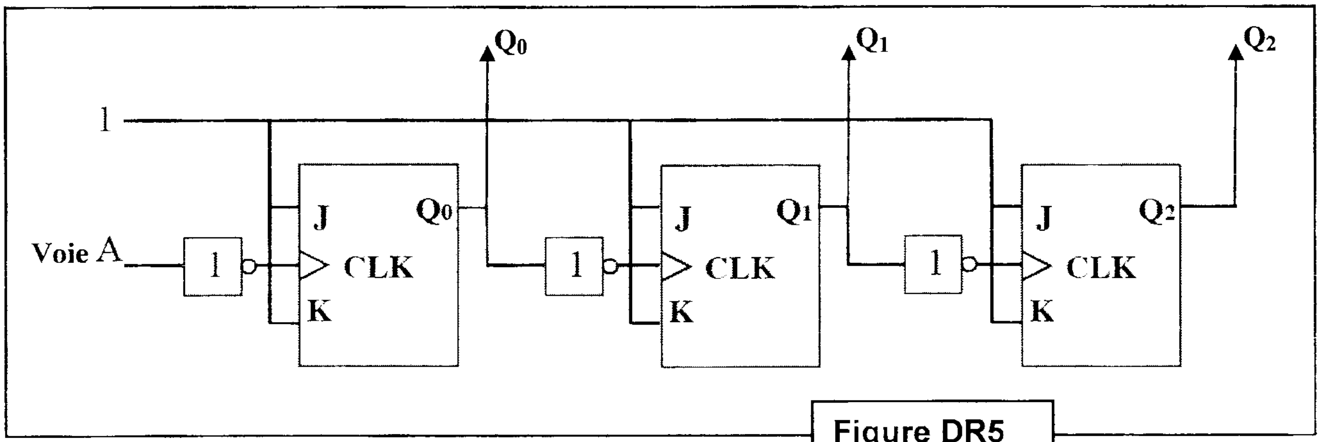


Figure DR5

Q17 – l'homogénéité et la symétrie de 3 permet d'avoir $x_{G3} = z_{G3} = 0$

L'application du théorème de Guldin permet d'écrire

$$\mathbf{4\pi R^2 = 2\pi.\lfloor y_{G3} \rfloor.\pi R} \Longrightarrow \boxed{y_{G3} = -\frac{2R}{\pi}}$$

Q18 – La matrice d'inertie

$$I(o,S) = \begin{pmatrix} \frac{m}{2}(R_1^2+R_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}\left(R_1^2+R_2^2+\frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{4}\left(R_1^2+R_2^2+\frac{h^2}{3}\right) \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)}$$

Q19 - Le moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{x}_3)$ de l'arceau 3 noté I_3

$$I_3 = I_{C1} + I_{C2} + I_{C3} + I_{C4}$$

I_{C1} moment d'inertie du solide C1 par rapport à l'axe $(O,\vec{x}_3)$

$$I_{C1} = \rho\pi rH.\,r^2$$

I_{C2} moment d'inertie du solide C2 par rapport à l'axe $(O,\vec{x}_3)$

$$I_{C2} = \rho\pi RH.\,R^2$$

I_{C3} moment d'inertie du solide C3 par rapport à l'axe $(O,\vec{x}_3)$

I_{C4} moment d'inertie du solide C4 par rapport à l'axe $(O,\vec{x}_3)$

$$I_{C3} = I_{C4} = \rho\frac{\pi(R^2-r^2)}{2}\frac{(R^2+r^2)}{2} = \rho\frac{\pi}{4}(R^4-r^4)$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_3 = \rho\pi\left[H.(r^3+R^3)+\frac{(R^4-r^4)}{2}\right]}$$

Q20 - L'énergie cinétique

a- l'énergie cinétique de l'arceau 3 :

Nous avons $T(3/_{Ro}) = \frac{1}{2}\left[m_3\vec{V}_{G3}^2(3/_{Ro}) + \underbrace{\vec{\Omega}(3/_{Ro}).\vec{\sigma}_{G3}(3/_{Ro})}_{= A_3\dot{\gamma}^2}\right]$

Or $\vec{V}_{G3}(3/_{Ro}) = [y_{G3}\vec{z}_3 - z_{G3}\vec{y}_3]\dot{\gamma}$

$$\Longrightarrow \boxed{T(3/_{Ro}) = \frac{1}{2}\left[m_3(y_{G3}^2+z_{G3}^2) + A_3\right]\dot{\gamma}^2}$$

b- l'energie cinétique du rotor :

$$\boxed{T(Rotor/_{Ro}) = \frac{1}{2}I_{mot}\omega_{mot}^2}$$

c- l'energie cinétique de la roue 5 et l'ensemble rigidement lié :

$$\boxed{T\left({}^{5}/_{Ro}\right) = \frac{1}{2} J_R \omega_{5/2}^2}$$

d- l'energie cinétique de la vis sans fin 4.

$$\boxed{T\left({}^{4}/_{Ro}\right) = \frac{1}{2} J_V \omega_{mot}^2}$$

e- Expression et calcul de J_e.

L'équivalence énergétique permet d'écrire

$$T\left({}^{E}/_{Ro}\right) = T\left({}^{3}/_{Ro}\right) + T\left({}^{Rotor}/_{Ro}\right) + T\left({}^{4}/_{Ro}\right) + T\left({}^{5}/_{Ro}\right)$$

$$\frac{1}{2} J_e\omega_{mot}^2 = \frac{1}{2}\left[J_{mot} + J_V + \mu^2 J_R + \mu^2 k^2 \left(m_3\left(y_{G3}^2 + z_{G3}^2\right) \quad + A_3\right)\right]\omega_{mot}^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{J_e = J_{mot} + J_V + \mu^2 J_R + \mu^2 k^2 \left(m_3\left(y_{G3}^2 + z_{G3}^2\right) \quad + A_3\right)}$$

A.N $\boxed{J_e = \quad 7{,}62.10^{-4}\ kg.m^2}$

Q21 –

Calcul de la puissance intérieure : ***Pint***

$P_{int} = 0$ les liaisons entre les solides sont parfaites

Calcul de la puissance extérieure : ***Pext***

La puissance de la pesanteur

$$P(\text{pes} \rightarrow 3/Ro) = -m_3 g.\vec{z}_o \vec{V}_{G3}(3/R_o)$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(\text{pes} \rightarrow 3/Ro) = -m_3 g.\dot{\gamma}[y_{G3}\cos(\gamma) - z_{G3}\sin(\gamma)]}$$

La puissance due à Cmot, au frottement sec et visqueux sur l'arbre moteur

$$P(C_{mot} \rightarrow \text{rotor}/Ro) + P(C_r \rightarrow \text{rotor}/Ro) + P(f_{ve} \rightarrow \text{rotor}/Ro) = C_{mot}\omega_{mot} - C_r\omega_{mot} - f_{ve}\omega_{mot}^2$$

Les autres puissances extérieures dues aux liaisons parfaites sont nulles

Donc

$$\boxed{P_{ext} = C_{mot}\omega_{mot} - C_r\omega_{mot} - f_{ve}\omega_{mot}^2 - m_3 g.\dot{\gamma}[y_{G3}\cos(\gamma) - z_{G3}\sin(\gamma)]}$$

Q22 – Expression du couple moteur C_{mot}

Le TEC appliqué à E permet d'écrire :

$$\frac{dT(E/Ro)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_{mot} = J_e\dot{\omega}_{mot} + C_r + f_{ve}\omega_{mot} + \mu.k.g.m_3[y_{G3}\cos(\gamma) - z_{G3}\sin(\gamma)]}$$

Q23 – Calcul de C_{mot} à l'instant t_5

Tenant compte des données précédentes

Nous avons

$$C_{mot} = J_e\dot{\omega}_{mot} + C_r + f_{ve}\omega_{mot} + \mu.k.g.m_3[y_{G3}\cos(\gamma) - z_{G3}\sin(\gamma)]$$

Or $\dot{\omega}_{mot}(t_5) = \frac{\ddot{\gamma}(t_5)}{\mu.k}\cdot\frac{\pi}{180}$ et $\omega_{mot}(t_5) = \frac{\dot{\gamma}(t_5)}{\mu.k}\cdot\frac{\pi}{180}$

$$\Longrightarrow \boxed{C_{mot}(t_5) = -3,68\ N.m}$$

Q24 – La puissance du moteur nécessaire à l'instant t_5.

$$\boxed{P_{mot}(t_5) = C_{mot}(t_5).\omega_{mot}(t_5) = 2,31\ KW}$$

La valeur de cette puissance valide le moteur car $P_{mot}(t_5) = 2,31\ kw < 2,7kw$

Q25 –

a-

Transformée de la place des équations de 1 à 4

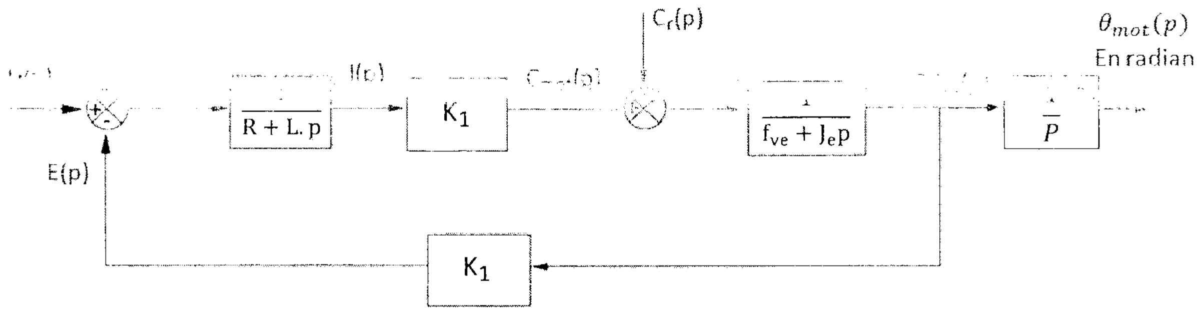
$C_{mot}(p) = J_e p\Omega_{mot}(p) + f_{ve}\Omega_{mot}(p) + C_r(p)$ (1)

$U(p) = L.p.I(p) + R.I(P) + E(p)$ (2)

$E(p) = k_t.\Omega_{mot}(p)$ (3)

$C_{mot}(p) = k_t.I(p)$ (4)

Le schéma bloc associé est donc



b-

Expression de $H_u(p)$

$$\boxed{H_u(p) = \left[\frac{\Omega_{mot}(p)}{U(p)}\right]_{Cr=0} = \frac{k_1}{k_1^2 + Rf_{ve}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{RJ_e}{k_1^2 + Rf_{ve}} p} =. \frac{K_u}{1 + T_u p}}$$

Avec $K_u = 10^{-2}\ rad.s^{-1}.V^{-1}$ et $T_u = 11{,}52.10^{-8}\ s$

Expression de $H_r(p)$

$$H_r(p) = -\left[\frac{\Omega_{mot}(p)}{C_r(p)}\right]_{U=0} = \frac{1}{f_{ve} + J_e p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k_1^2}{R(f_{ve} + J_e p)}}$$

$$\boxed{H_r(p) = \frac{R}{k_1^2 + Rf_{ve}} \frac{1}{1 + \frac{RJ_e}{k_1^2 + Rf_{ve}} p} =. \frac{K_r}{1 + T_u p}}$$

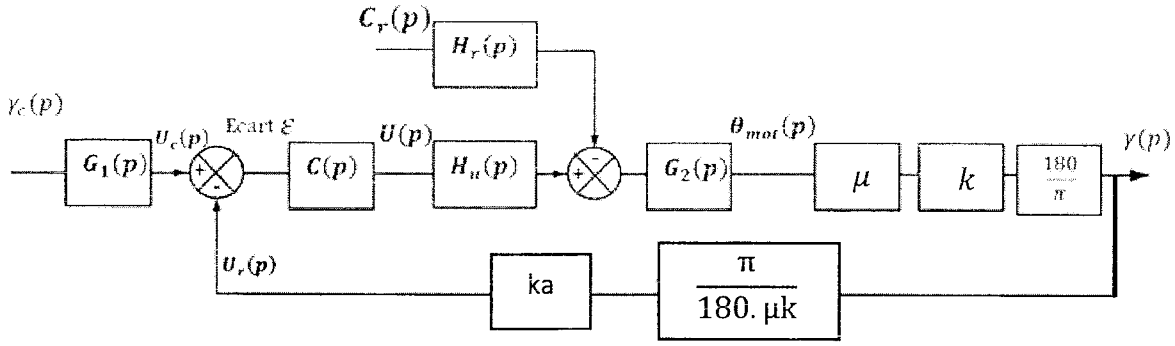
Avec $K_r = 1{,}44.10^{-4}\ rad.s^{-1}/N.m$

Q26 –

a- $G_3(p) = \mu$: Réducteur roue et vis sans fin.
$G_4(p) = k$: Transmission par courroie crantée.

b- Détermination de $G_1(p)$.

Le schéma bloc peut se mettre sous la forme suivante :



Pour que l'image en tension associée à la valeur de la position angulaire mesurée par le capteur soit identique à l'image en tension associée à la valeur de la position angulaire délivrée par l'adaptateur (Si $\gamma = \gamma_C$), on prend :

$$\boxed{G_1(p) = \frac{\pi.\, ka}{180.\, \mu.\, k}}$$

Q27 –

a- Expression de la FTBO notée T(p).

$$T(p) = C(p)H_u(p)\frac{1}{p}ka$$

$$\Longrightarrow \boxed{T(p) = \frac{k_u.ka}{p(1+T_u p)} = \frac{1}{p(1+T_u p)}}$$

b- Le stabilité du système est assurée : l'ordre de la FTBO est n=2.

Q28 –

a- Calcul de ε_s : $\gamma_c(p) = \frac{1}{p}$

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p\frac{U_c(p)}{1 + FTBO} = \lim_{p\to 0} p\frac{G_1(p)\gamma_c(p)}{1 + T(p)} = 0}$$

Le cahier des charges est respecté

b- Calcul de ε_{sp} : $C_r(p) = \frac{1}{p}$

$$\boxed{\varepsilon_{sp} = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{H_u(p)} \frac{FTBO}{1+FTBO} H_r(p) C_r(p) = \frac{k_r}{k_u} \neq 0}$$

Le cahier des charges n'est pas respecté.

Q29 –

a- Calcul de ε_T : $\gamma_c(p) = \frac{\gamma_0}{p^2}$

$$\boxed{\varepsilon_T = \lim_{p\to 0} p \frac{U_c(p)}{1+FTBO} = \lim_{p\to 0} p \frac{G_1(p)\gamma_c(p)}{1+T(p)} = \frac{\pi\gamma_0}{180.\mu.k.k_u} \neq 0}$$

Le cahier des charges n'est pas respecté.

b- Pour respecter le cahier des charges en terme de précision on introduit une integration

Le correcteur a, donc, la forme : $\boxed{C(p) = \frac{1}{p}}$

En effet la nouvelle expression de la FTBO est : $\boxed{T(p) = \frac{k_u.ka}{p^2(1+T_u p)} = \frac{1}{p^2(1+T_u p)}}$

$$\boxed{\varepsilon_T = \lim_{p\to 0} p \frac{U_c(p)}{1+FTBO} = \lim_{p\to 0} p \frac{G_1(p)\gamma_c(p)}{1+T(p)} = 0}$$

c- Calcul de ε_{sp} :

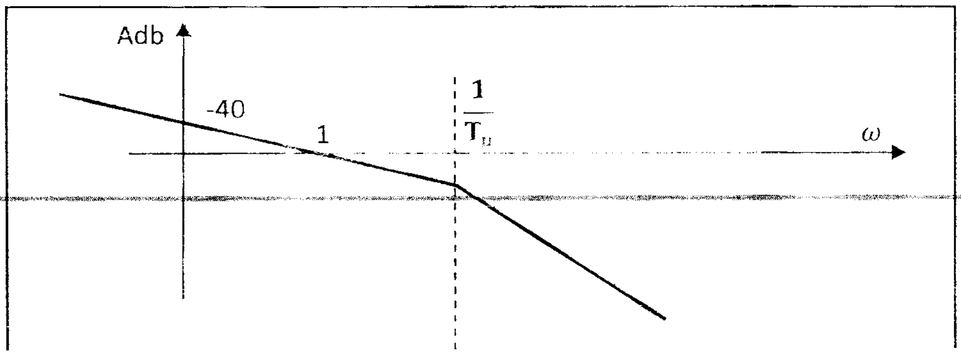
$$\boxed{\varepsilon_{sp} = \lim_{p\to 0} p \frac{1}{C(p).H_u(p)} \frac{FTBO}{1+FTBO} H_r(p) C_r(p) = 0}$$

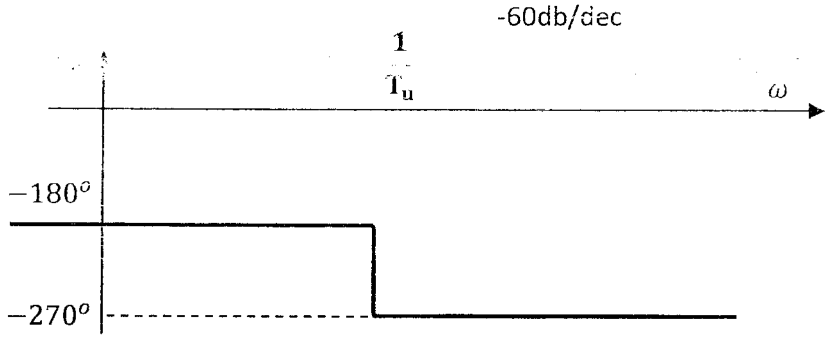
Le cahier des charges est respecté

d- Stabilité du système :

La FTBO est $T(p) = \frac{1}{p^2(1+T_u p)}$

Le Diagramme de Bode associé est :

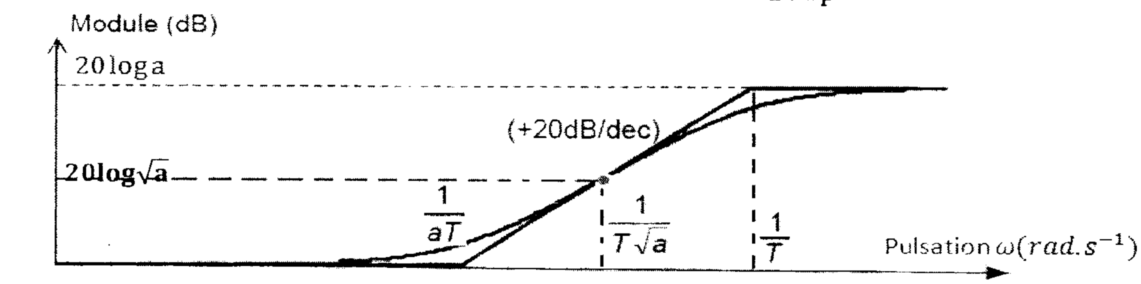


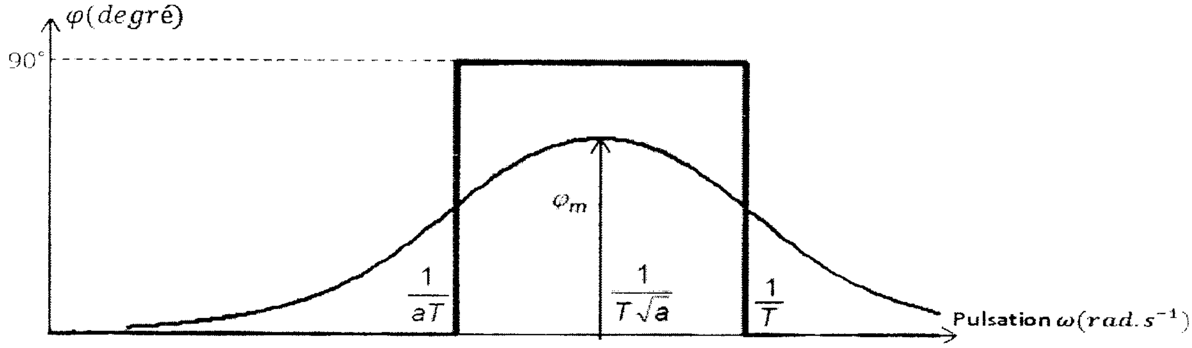


Les asymptotes de la phase sont en dessous de -180°, le système est **instable**

Q30 –

a. Le diagramme de Bode de $C_1(p)$ pour $K_c=1$: $C_1(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$ avec $a > 1$





b. Action du correcteur

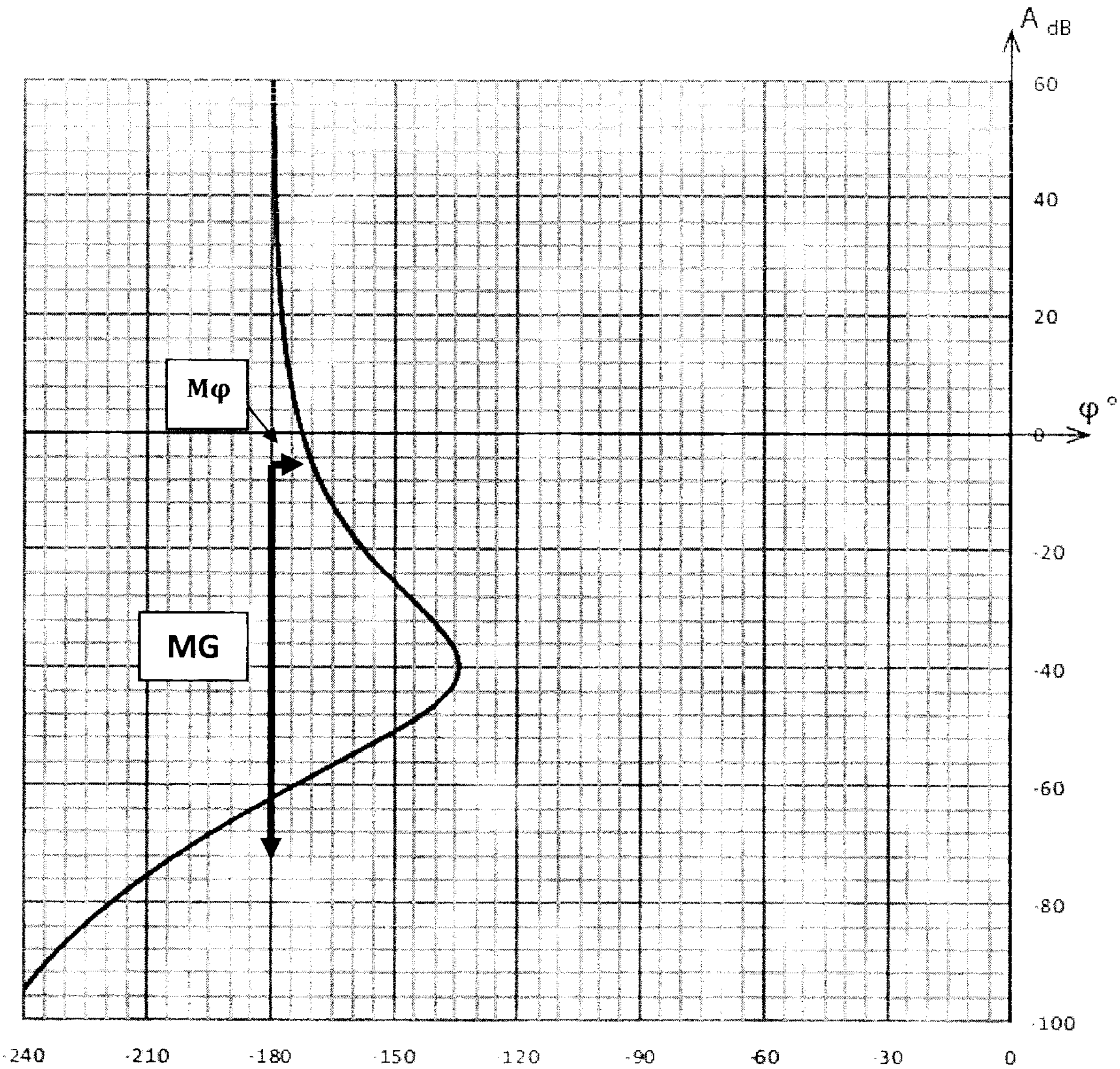
la classe de la nouvelle FTBO n'est pas modifiée par ce correcteur la précision ne sera, donc , pas modifiée. La forme du lieu de bode de ce correcteur fait apparaitre clairement l'action locale qu'aura celui-ci sur la FTBO et qui permet de rendre le système stable.

	Stabilité	Précision
Le correcteur $C_1(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$ avec $a > 1$	améliore	N'affecte pas

Q31 -

La marge de gain MG=62dB

La marge de phase $\mathbf{M\varphi = 7,5^o}$



b- A partir du document réponse on constate que, pour avoir une marge de phase de 45°, il faut déplacer le lieu de black verticalement de 40db.

Nous avons donc $20.\log K_c = 40$

⇒ $\boxed{K_c = 100}$

Dans ce cas la marge de gain est MG=22°

Ainsi le cahier des charges est respecté.

Fin du corrigé