Corrigé DS n°1

PSI* 00-01

PARTIE A

1) Si $d°P = 2$, alors P'' est un polynôme constant non nul, donc $P'' | P$.
Ainsi, tous les polynômes de degré 2 sont divisibles par leur poly. dérivé seconde

---

2) • Si $P = a(X-c)^3 + b(X-c)$, alors $P'' = 6a(X-c)$ donc $P'' | P$ $(a \neq 0)$

• Réciproquement, soit P de degré 3 divisible par P'' ; puisque $d°P'' = 1$, P'' admet une racine $c \in \mathbb{C}$; la formule de Taylor donne alors :

$$P = P(c) + P'(c)(X-c) + \frac{P''(c)}{2}(X-c)^2 + \frac{P'''(c)}{6}(X-c)^3$$

Or, c racine de $P \Rightarrow c$ racine de P'' (car $P'' | P$) d'où $P(c) = P''(c) = 0$
et P s'écrit bien sous la forme $a(X-c)^3 + b(X-c)$.

---

3) a) • $P = QP''$ d'où $d°P = d°Q + d°P''$ d'où $\underline{d°Q = 2}$

• Soit a_n le coeff. dominant de P, et α celui de Q. Le coeff. dominant de P'' est alors $n(n-1)a_n$ d'où : $a_n = n(n-1)a_n\alpha$

d'où $\underline{\alpha = \dfrac{1}{n(n-1)}}$ (car $a_n \neq 0$)

b) • Ici, $Q = \dfrac{1}{n(n-1)}(X-c)^2$, $P = QP'' = (X-c)^r R$ d'où $P'' = n(n-1)(X-c)^{r-2}R$

Or, en dérivant l'égalité : $P = (X-c)^r R$, on obtient : $P'' = r(r-1)(X-c)^{r-2}R + 2r(X-c)^{r-1}R'$
$+ (X-c)^r R''$

Il en résulte (en comparant les deux égalités) :

$$n(n-1)R = r(r-1)R + 2r(X-c)R' + (X-c)^2 R''$$

En prenant la valeur en c, puisque $R(c) \neq 0$, on trouve : $n(n-1) = r(r-1)$
d'où $\underline{r = n}$ (l'autre solution de l'équation serait $r = 1-n < 0$)

• P est donc de la forme $\underline{P = \lambda(X-c)^n, \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}^*}$

PARTIE B

1) On dérive k fois l'égalité $n(n-1)P_n = (X^2-1)P_n''$ à l'aide de la formule de Leibniz : $n(n-1)P_n^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} C_k^p (X^2-1)^{(p)} P_n^{(k-p+2)}$, et, puisque $(X^2-1)^{(p)} = 0$ si $p \geq 3$, on obtient :

$$n(n-1)\,P_n^{(k)} = (X^2-1)P_n^{(k+2)} + 2kX\,P_n^{(k+1)} + 2\,\frac{k(k-1)}{2}\,P_n^{(k)}$$

ce qui donne l'égalité voulue

(Rem : cette égalité peut aussi se démontrer par récurrence sur k)

---

2) $R_{k+1} = (X^2-1)^k P_n^{(k+1)}$ d'où $R'_{k+1} = 2kX(X^2-1)^{k-1}P_n^{(k+1)} + (X^2-1)^k P_n^{(k+2)}$

$$= (X^2-1)^{k-1}\left[2kX\,P_n^{(k+1)} + (X^2-1)P_n^{(k+2)}\right]$$

$$= (X^2-1)^{k-1}\left[n(n-1) - k(k-1)\right]P_n^{(k)}$$

en utilisant l'égalité de la question précédente.

d'où $R'_{k+1} = \frac{1}{a_k}R_k$ $\quad (a_k \neq 0$ car $k \neq n)$

---

3) a) Montrons, par récurrence sur $\ell \in [\![1,n]\!]$: $R_0 = a_0 \cdots a_{\ell-1} R_\ell^{(\ell)}$

- pour $\ell = 1$, $R_0 = a_0 R'_1$ découle de la question précédente
- si le résultat est vérifié à l'ordre $\ell \leq n-1$, alors de $R_\ell = a_\ell R'_{\ell+1}$

il découle : $R_0 = a_0 \cdots a_\ell R_\ell^{(\ell+1)}$ $\rightarrow$ cqfd

Et on a donc, pour $\ell = n$, la formule demandée.

b) $R_n = (X^2-1)^{n-1}P_n^{(n)}$. Or P_n normalisé de degré n $\Rightarrow P_n^{(n)} = n!$

De plus : $P_n = (X^2-1)R_0$, donc l'égalité du a) donne :

$$P_n = (X^2-1)R_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) n!\,(X^2-1)\left[(X^2-1)^{n-1}\right]^{(n)}$$

Or $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} a_i = \prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(n-i)(n-i+1)} = \frac{1}{n(n-1)\cdots 1\,(n-1)n\cdots(2n-2)} = \frac{(n-2)!}{n!\,(2n-2)!}$

et on obtient finalement : $\quad P_n = \frac{(n-2)!}{(2n-2)!}(X^2-1)\left[(X^2-1)^{n-1}\right]^{(n)}$

PARTIE C

1) les calculs (passionnants) donnent. $P_2 = X^2-1$, $P_3 = X(X^2-1)$

$P_4 = (X^2-1)(X^2-\frac{1}{5})$

---

2) • $d^\circ\left[(X^2-1)^{n-1}\right] = 2n-2$ d'où $d^\circ\left[\left((X^2-1)^{n-1}\right)^{(n)}\right] = 2n-2-n = n-2$ et,

ensuite, $d^\circ P_n = n$

- Le terme dominant de $[(X^2-1)^{n-1}]^{(n)}$ est $(X^{2n-2})^{(n)}$, soit $\frac{(2n-2)!}{n!}$

et, par suite, <u>P_n est normalisé</u>.

- $(X^2-1)^{n-1}$ est pair, donc $[(X^2-1)^{n-1}]^{(n)}$ est de la parité de n ; il en est donc de même de P_n.

---

3) • Compte tenu de la parité de P_n, on a $a_{n-2\ell+1}=0$ pour $\ell \in [\![1, E(\frac{n}{2})]\!]$.

• $(X^2-1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k X^{2n-2k-2} (-1)^k$

La dérivée n-ième de $X^{2n-2k-2}$ sera nulle si $2n-2k-2<n$, soit $k > \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}-1$

et, sinon : $[X^{(2n-2k-2)}]^{(n)} = \frac{(2n-2k-2)!}{(n-2k-2)!} X^{n-2k-2}$ d'où :

$$[(X^2-1)^{n-1}]^{(n)} = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})-1} C_{n-1}^k \frac{(2n-2k-2)!}{(n-2k-2)!} X^{n-2k-2} (-1)^k$$

Lorsqu'on multiplie par X^2-1, le terme de degré $n-2\ell$ du produit aura donc pour coefficient :

$$(-1)^\ell \left[\frac{C_{n-1}^\ell (2n-2-2\ell)!}{(n-2\ell-2)!} + C_{n-1}^{\ell-1} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!} \right]$$

$$\text{Soit } (-1)^\ell . C_{n-1}^\ell \frac{(2n-2-2\ell)!}{(n-2\ell-2)!} \left[1 + \frac{\ell}{n-\ell} . \frac{(2n-2\ell)(2n-2\ell-1)}{(n-2\ell)(n-2\ell-1)} \right]$$

soit, après simplification : $(-1)^\ell C_{n-1}^\ell \frac{(2n-2-2\ell)!\, n(n-1)}{(n-2\ell)!}$

Pour obtenir enfin le coeff. du terme de degré $n-2\ell$ dans P_n, il faut ensuite multiplier la quantité précédente par $\frac{(n-2)!}{(2n-2)!}$, ce qui donne :

$$a_{n-2\ell} = (-1)^\ell C_{n-1}^\ell \frac{n!\,(2n-2-2\ell)!}{(n-2\ell)!\,(2n-2)!} = \underline{(-1)^\ell C_{n-1}^\ell \frac{C_n^{2\ell}}{C_{2n-2}^{2\ell}}}$$: <u>cqfd</u> !

---

4) Avec $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on vérifie, en développant, que P_n est solution de l'équation $n(n-1) P_n = (X^2-1) P_n''$ si et seulement si $a_n = 1$, $a_{n-1} = 0$ et $a_{n-p} = -\dfrac{(n-p+1)(n-p+2)}{p(2n-p-1)} a_{n-p+2}$ pour $p \in [\![2,n]\!]$

ce qui correspond exactement aux valeurs trouvées auparavant...

(calculs à faire de façon détaillée ...)

PARTIE D :

1) a) Ici, $Q = \dfrac{1}{n(n-1)}(X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha \neq \beta$. Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, on a : $Q(aX+b) = \dfrac{a^2}{n(n-1)}\left(X + \dfrac{b}{a} - \dfrac{\alpha}{a}\right)\left(X + \dfrac{b}{a} - \dfrac{\beta}{a}\right)$

donc $Q(aX+b) = \dfrac{a^2}{n(n-1)}(X^2-1) \iff \begin{cases} \dfrac{b}{a} - \dfrac{\alpha}{a} = -1 \\ \dfrac{b}{a} - \dfrac{\beta}{a} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ b = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{cases}$

Il est donc possible de trouver a et b ($a \neq 0$ car $\alpha \neq \beta$)

b) $R = P(aX+b) = Q(aX+b) P''(aX+b) = \dfrac{a^2}{n(n-1)}(X^2-1) P''(aX+b)$

Or $R'' = a^2 P''(aX+b)$ d'où $R = \dfrac{1}{n(n-1)}(X^2-1) R''$: cqfd.

---

2) a) • Soit P_n la solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$. Il est facile de vérifier que, alors, pour tous $\lambda, c, d \in \mathbb{C}$, ($\lambda \neq 0$, $c \neq 0$), le polynôme $P = \lambda P_n(cX+d)$ est solution du problème $(\mathcal{P}_n)$: en effet :

- on a bien $d^\circ P = d^\circ P_n = n$
- $P'' = \lambda c^2 P_n''(cX+d)$ d'où $P = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{(cX+d)^2 - 1}{n(n-1)} P'' = Q P''$, avec

Q ayant deux racines distinctes $\left(\dfrac{\pm 1 - d}{c}\right)$

• Réciproquement, on a vu qu'à toute solution P de $(\mathcal{P}_n)$, on peut associer un polynôme de la forme $\mu P(aX+b)$ qui soit solution de $(\mathcal{P}'_n)$ (cf. question précédente)

On en conclut :

Les solutions de (P_n) sont les polynômes de la forme $\lambda P_n(cX+d)$ avec $(\lambda, c, d) \in \mathbb{C}^{*2} \times \mathbb{C}$.

3) Les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé seconde sont, en vertu de ce qui précède et de A.3.b

- les polynômes de la forme ci-dessus
- et les poly. de la forme $\lambda(X-c)^n$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ (cas où Q a une racine double)

PARTIE E

1) • On sait que P_n a la parité de n donc, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $P_n^{(n-k)}$ a la parité de k, et est de degré k.

• Démontrons le résultat proposé par récurrence sur k :

- On sait que $P_n^{(n)} = n!$, d'où $P_n^{(n-1)} = n!\,X$ (car $P_n^{(n-1)}$ impair)

et, en appliquant la relation de B.1 pour $k = n-2$:

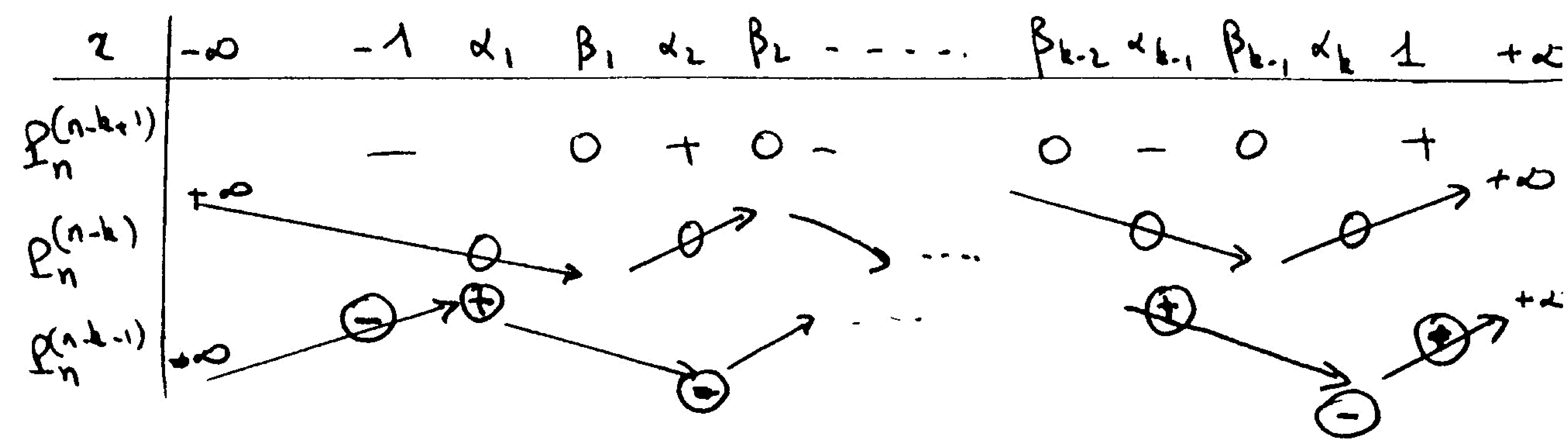
$$(X^2-1)\,P_n^{(n)} + 2(n-2)\,X\,P_n^{(n-1)} = 2(2n-3)\,P_n^{(n-2)}$$

d'où $P_n^{(n-2)} = \dfrac{n!}{2(2n-3)}\left[(2n-3)X^2 - 1\right]$

possède bien deux racines réelles distinctes dans $[-1,1]$ $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2n-3}}\right)$, séparées par celle de $P_n^{(n-1)}$ (qui vaut zéro).

• Supposons la propriété énoncée vraie à l'ordre k (avec $k \leq n-1$) : ainsi $P_n^{(n-k+1)}$ possède $(k-1)$ racines réelles distinctes (nécessairement simples), notées β_j, qui séparent les k racines réelles distinctes (et simples) de $P_n^{(n-k)}$, notées α_i. On a donc $-1 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_{k-1} < \beta_{k-1} < \alpha_k \leq 1$

En supposant (par exemple), k pair, on peut donc établir le tableau de variations suivant (en utilisant le th. des valeurs intermédiaires, les limites en $\pm\infty$ et le fait que les racines de $P_n^{(n-k)}$ sont simples, ce qui justifie les changements de signe) :



D'autre part, la relation établie en B.1 donne (en remplaçant k par $n-k-1$) :

$$(X^2-1)\,P_n^{(n-k+1)} + 2(n-k-1)\,X\,P_n^{(n-k)} = (k+1)(2n-k-2)\,P_n^{(n-k-1)}$$

ce qui donne (pour $X = \alpha_i$ puis pour $X = \pm 1$) :

$$\begin{cases} (\alpha_i^2-1)\,P_n^{(n-k+1)}(\alpha_i) = (k+1)(2n-k-2)\,P_n^{(n-k-1)}(\alpha_i) \\ 2(n-k-1)\,P_n^{(n-k)}(1) = (k+1)(2n-k-2)\,P_n^{(n-k-1)}(1) \\ -2(n-k-1)\,P_n^{(n-k)}(-1) = (k+1)(2n-k-2)\,P_n^{(n-k-1)}(-1) \end{cases}$$

et ce qui justifie les signes indiqués sur le tableau de variation ci-dessus.

Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors que $P_n^{(n-k-1)}$ admet $k+1$ racines distinctes entre -1 et 1, séparées par les α_i i.e. les racines de $P_n^{(n-k)}$, <u>ce qui établit la propriété</u>.

- Pour $k = n$, on en déduit que P_n admet n racines réelles distinctes entre -1 et 1. De plus, ± 1 sont racines de P_n d'après la relation $(X^2-1)\,P_n'' = n(n-1)\,P_n$.

---

2) a) La décomposition en élts simples de $\frac{1}{H}$ s'écrit :

$$\frac{1}{H} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X - x_j} \quad \text{avec } \lambda_j \in \mathbb{R}$$

En confondant polynôme et fonction polynôme, on a :

$$\lambda_j = \lim_{x \to x_j} \frac{(x - x_j)}{H(x)}$$

Or, la formule de Taylor donne, puisque $H(x_j) = 0$:

$$H(x) = (x-x_j)H'_j + (x-x_j)^2 Q(x) \quad \text{où } Q \in \mathbb{R}[X]$$

D'où $\displaystyle \lambda_j = \lim_{x \to x_j} \frac{x-x_j}{(x-x_j)H'_j + (x-x_j)^2 Q(x)} = \lim_{x\to x_j} \frac{1}{H'_j + (x-x_j)Q(x)} = \frac{1}{H'_j}$: cqfd

---

b) La déc. en élts simples de $\frac{1}{H^2}$ s'écrit :

$$\frac{1}{H^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X-x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{(X-x_j)^2}$$

- On a : $\displaystyle \mu_j = \lim_{x\to x_j} (x-x_j)^2 H^2(x_j) = \frac{1}{H'^2_j}$ (cf. calcul précédent)

- Puis : $\displaystyle \lambda_j = \lim_{x\to x_j} (x-x_j)\left[\frac{1}{H^2(x)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{(x-x_k)^2}\right]$

$$= \lim_{x\to x_j} (x-x_j)\left[\frac{1}{H^2(x)} - \frac{\mu_j}{(x-x_j)^2}\right]$$

(car, pour $j \neq k$, $\displaystyle \lim_{x\to x_j} (x-x_j)\frac{\mu_k}{(x-x_k)^2} = 0$)

La formule de Taylor pour H s'écrit, puisque $H(x_j)=0$:

$$H(x) = (x-x_j)H'_j + \frac{(x-x_j)^2}{2}H''_j + (x-x_j)^3 Q(x) \quad \text{où } Q \in \mathbb{R}[X]$$

d'où $H^2(x) = (x-x_j)^2 H'^2_j + (x-x_j)^3 H'_j H''_j + (x-x_j)^4 R(x)$ où $R \in \mathbb{R}[X]$

Donc : $\displaystyle \frac{1}{H^2(x)} - \frac{\mu_j}{(x-x_j)^2} = \frac{1}{(x-x_j)^2}\left[\frac{1}{H'^2_j + (x-x_j)H'_jH''_j + (x-x_j)^2R(x)} - \frac{1}{H'^2_j}\right]$

$$= \frac{1}{(x-x_j)^2}\left[\frac{-(x-x_j)H'_jH''_j - (x-x_j)^2R(x)}{H'^2_j\left[H'^2_j + (x-x_j)H'_jH''_j + (x-x_j)^2R(x)\right]}\right]$$

et on en tire : $\displaystyle \lambda_j = -\frac{H''_j}{(H'_j)^3}$: cqfd

---

3) a) • On a $x_1 = -1$, $x_n = 1$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sont les racines réelles de P_n.

- D'après ce qui précède (appliqué à $H = P_n$) et avec les m̂ notations, on a :

* $\mu_j = \dfrac{1}{[P_n'(x_j)]^2}$

* si $j \in [\![2, n-1]\!]$, $P''_n(x_j) = 0$ car $(X^2-1)P''_n = n(n-1)P_n$,

d'où $\mu_j = 0$

* La relation B.1., écrite pour $k=1$ et $X = \pm 1$ donne :

$$\frac{P''(1)}{P'(1)} = \frac{n(n-1)}{2} = -\frac{P''(-1)}{P'(-1)}$$

et, d'autre part, par parité : $[P'(-1)]^2 = [P'(1)]^2$

On a donc $\lambda_1 = -\dfrac{P''(-1)}{[P'(-1)]^2} = \dfrac{1}{[P'(1)]^2} \cdot \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\lambda_n = -\lambda_1$, ce qui donne la formule de l'énoncé

---

b) D'après E.2.a, on a : $\dfrac{1}{P(X)} = A(X) + \dfrac{1}{P'(x_k)} \cdot \dfrac{1}{X - x_k}$

En élevant cette égalité au carré, puis en comparant au résultat précédent, on obtient :

$$A^2(X) + \frac{n(n-1)}{[P_n'(1)]^2} \cdot \frac{1}{X^2-1} - \sum_{j \neq k} \frac{1}{P_n'(x_j)^2} \cdot \frac{1}{(X-x_j)^2} = \frac{2A(X)}{P_n'(x_k).(X-x_k)}$$

Ainsi, la fraction rationnelle $\dfrac{A(X)}{X - x_k}$ n'admet pas x_k pour pôle,

ce qui implique $\underline{A(x_k) = 0}$: cqfd.