Mécanique

MECA2 - Dynamique

TD2

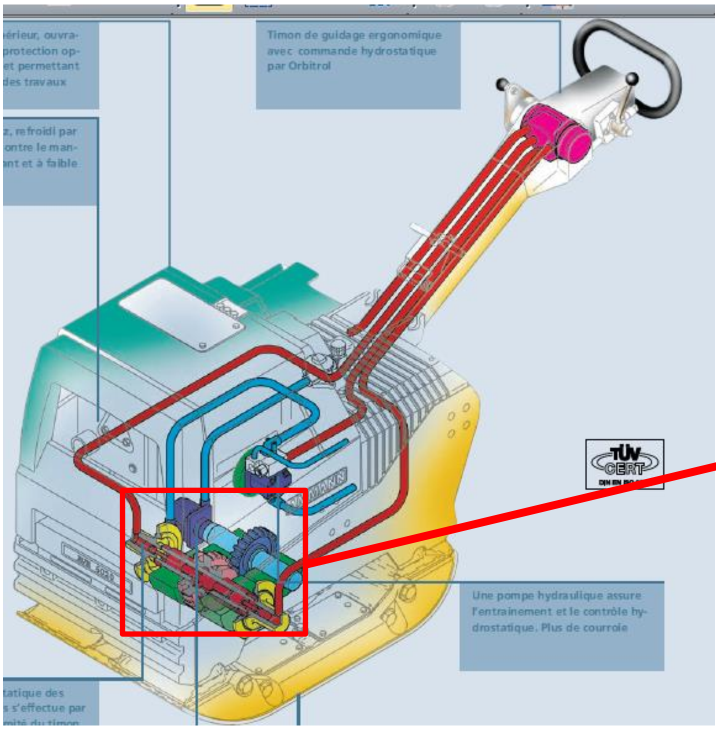
Plaques vibrantes hydrauliques

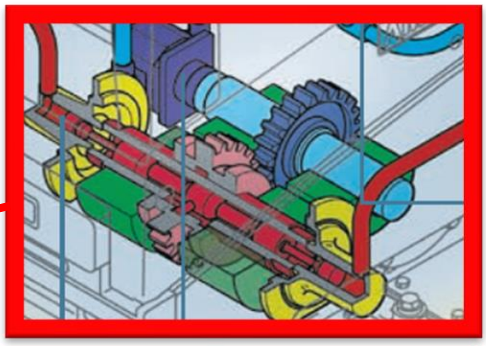
Programme PSI/MP 2022 (LIEN)		
Id	Compétence développée	Connaissances associées
B2-10	Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.
C1-05	Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.
C2-08	Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.	Torseurs cinétique et dynamique d'un solide ou d'un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen. Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen. Énergie cinétique. Inertie et masse équivalentes. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen. Puissance intérieure à un ensemble de solides. Théorème de l'énergie cinétique. Rendement en régime permanent.
C2-09	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.	

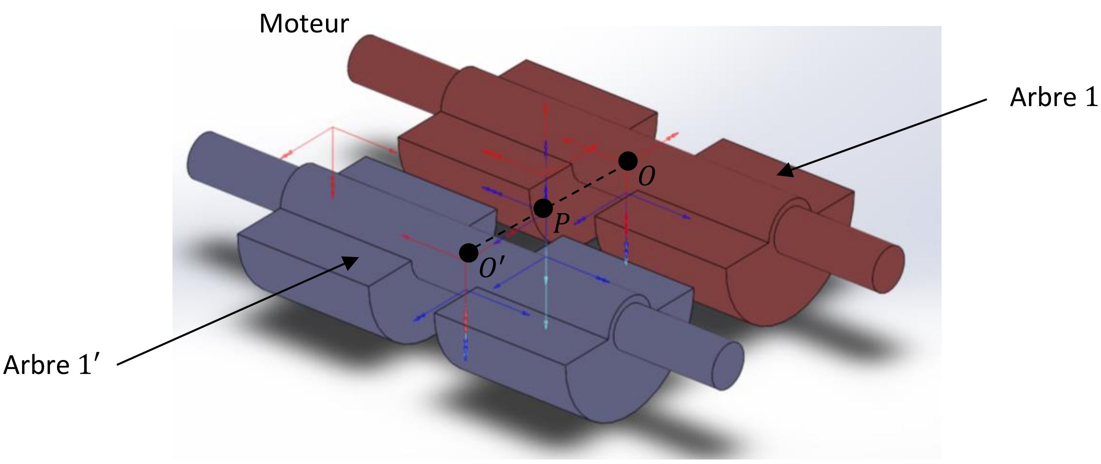
Exercice 1: Plaque vibrante hydraulique

Notre étude porte sur un système de plaques vibrantes utilisé sur les engins de chantier manuels pour compacter les sols.

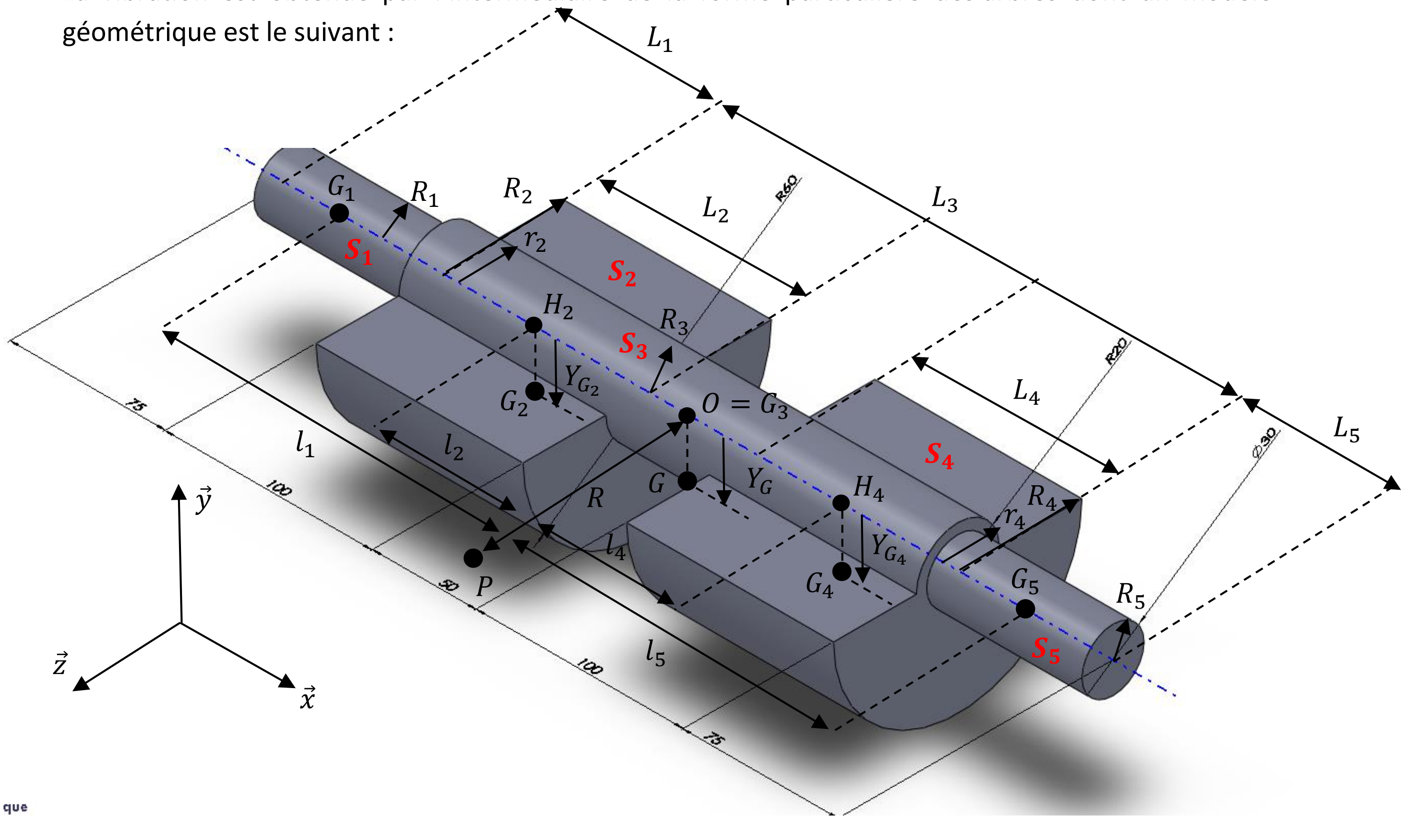
Le principe repose sur la mise en mouvement de plaques par l'intermédiaire de deux arbres vibrants mis en rotation par un moteur hydraulique et un train d'engrenages. On arrive alors à créer des efforts internes induisant le décollement de l'ensemble de la machine du sol à chaque tour de l'arbre.







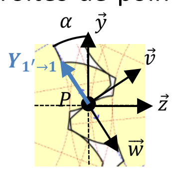
La vibration est obtenue par l'intermédiaire de la forme particulière des arbres dont un modèle géométrique est le suivant :



que

Les deux arbres étant identiques, on s'intéresse à l'un d'eux, celui qui est directement entraîné par le moteur, nommé 1, en liaison pivot d'axe $\vec{x}$ par rapport au bâti 0. La base $B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est liée au bâti. Le second arbre 1' est entraîné par le premier à l'aide d'un engrenage à dentures droites de point de contact P de rapport de réduction -1.

$$\{\mathcal{T}_{1'\to 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1'\to 1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_P & 0 \\ Z_P & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \frac{Y_P}{Z_P} = cste$$



$\vec{u} = \vec{x}$
$\alpha = cste$

La liaison engrenage entre les deux arbres est considérée comme un contact ponctuel parfait.
P est le centre du segment $[OO']$.

$$\overrightarrow{OP} = R\vec{z}$$

On appelle G le centre de gravité de l'arbre 1 et on définit : $\overrightarrow{OG} = Y_G\overrightarrow{y_1}$

La base $\mathfrak{B}_1$ liée à 1 et est telle que, sur la représentation de l'arbre ci-dessus, les bases $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}_1$ sont confondues à l'instant de la « photo ». À tout moment, $\vec{x} = \overrightarrow{x_1}$.

On définit l'angle θ tel que $\theta = (\vec{y},\overrightarrow{y_1}) = (\vec{z},\overrightarrow{z_1})$ et on appelle $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse de rotation de l'arbre 1.

L'arbre est en acier de masse volumique $\rho = 7850\ Kg/m^3$

On néglige l'inertie des roues dentées associées aux arbres 1 et $1'$.

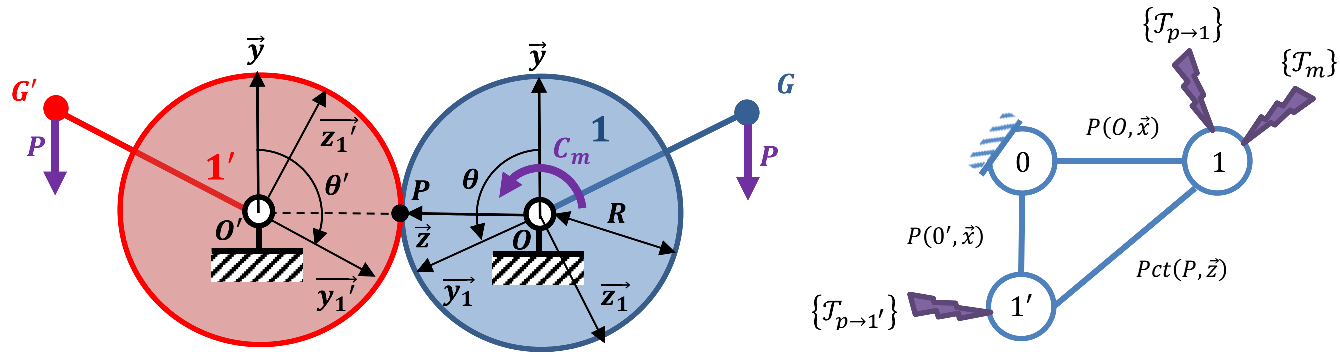
On suppose que les liaisons pivots réalisées entre chaque arbre 1 et $1'$ et le bâti sont réalisées chacune à l'aide d'une seule liaison pivot respectivement aux points 0 et $0'$. Elles sont supposées parfaites.

La machine complète sans les arbres a une masse de $M_t = 100\ Kg$.

L'accélération de la pesanteur vaut : $g = 9.81\ m/s^2$.

On note M la masse d'un arbre.

On propose le schéma cinématique simplifié suivant représentant les arbres 1 (centre de gravité G) et $1'$ (centre de gravité G') et les roues dentées associées :



Avec : $\theta' = -\theta$

Lors de la mise en marche du système, on souhaite que le système soit fonctionnel après $T = 1\ s$.
Le moteur envoie une consigne de couple en tout ou rien. On ne prend en compte que l'inertie des deux arbres, on négligera l'inertie des autres éléments en rotation.

Nous allons :

- Mettre en place la matrice d'inertie du solide dans son repère.
- Appliquer le principe fondamental de la dynamique intégralement (6 équations) dans le but
    - D'analyse l'intérêt de chaque équation
    - De déterminer les efforts générés par la rotation de l'arbre sur la machine
    - D'obtenir l'équation régissant le mouvement de l'arbre autour de son axe
- En déduire la vitesse de rotation minimale permettant le décollement de la machine du sol
- Déterminer le couple moteur permettant de réaliser la mise en marche demandée
- Conclure sur une méthode rapide permettant de mener cette étude au plus vite

On découpe l'arbre en 5 solides tels que : ($d_i = 2r_i$ et $D_i = 2R_i$)

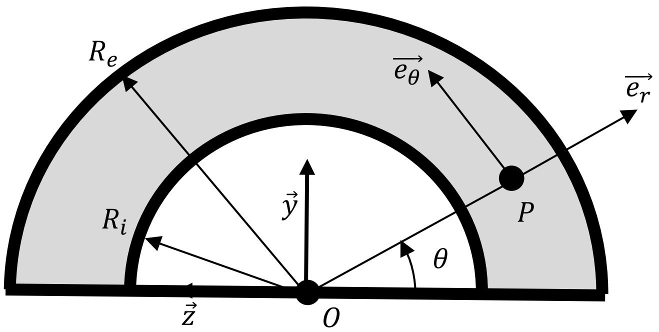
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre
$D_1 = 30\ mm$ $L_1 = 75\ mm$	$D_2 = 120\ mm$ $d_2 = 40\ mm$ $L_2 = 100\ mm$	$D_3 = 40\ mm$ $L_3 = 250\ mm$	$D_4 = 120\ mm$ $d_4 = 40\ mm$ $L_4 = 100\ mm$	$D_5 = 30\ mm$ $L_5 = 75\ mm$
$\overrightarrow{OG_1} = \begin{bmatrix} -l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $l_1 = 162.5\ mm$	$\overrightarrow{OG_2} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ Y_{G2} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $l_2 = 75\ mm$	$\overrightarrow{OG_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$	$\overrightarrow{OG_4} = \begin{bmatrix} l_4 \\ Y_{G4} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $l_4 = 75\ mm$	$\overrightarrow{OG_5} = \begin{bmatrix} l_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $l_5 = 162.5\ mm$

On appelle

- H_i les projections H_2 et H_4 des centres de gravité des parties S_2 et S_4 sur l'axe $(O,\vec{x})$
- R_i et r_i les rayons associés aux diamètres D_i et d_i
- M_i la masse du S_i

Centre de gravité

Soit la surface suivante (demi disque creux grisé), indépendamment du repère du problème étudié :



Question 1: Déterminer l'ordonnée Y du centre géométrique de cette surface

Vérifiez que lorsque le demi-disque est plein, vous trouvez : $Y = \frac{4R}{3\pi}$

Question 2: En exploitant le résultat d'un demi-disque plein, retrouvez Y en exploitant 2 demi-disques

Question 3: En déduire la valeur numérique de la coordonnée Y des centres de gravité des volumes S_2 et S_4

Question 4: Déterminer les masses M_i et ordonnées Y_{G_i} des solides S_i, puis la masse totale M de l'arbre 1

Volume 1	Volume 2	Volume 3	Volume 4	Volume 5
Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre	Demi-cylindre	Cylindre
$D_1 = 30\ mm$ $L_1 = 75\ mm$	$D_2 = 120\ mm$ $d_2 = 40\ mm$ $L_2 = 100\ mm$	$D_3 = 40\ mm$ $L_3 = 250\ mm$	$D_4 = 120\ mm$ $d_4 = 40\ mm$ $L_4 = 100\ mm$	$D_5 = 30\ mm$ $L_5 = 75\ mm$
$Y_{G_1} =$	$Y_{G_2} =$	$Y_{G_3} =$	$Y_{G_4} =$	$Y_{G_5} =$
$M_1 =$	$M_2 =$	$M_3 =$	$M_4 =$	$M_5 =$
$M =$				

Question 5: En déduire la position G du centre d'inertie de l'arbre 1 dans $\mathfrak{B}_1$

Matrice d'inertie

Question 6: Proposer la forme de la matrice d'inertie de l'arbre 1 en O dans la base B_1

Question 7: Rappeler la matrice d'inertie $I(G_i,S_i)$ en son centre G_i d'un cylindre plein S_i de rayon R_i, de longueur L_i et de masse M_i, d'axe $(G_i,\vec{x})$ dans la base B_i

Question 8: En déduire la matrice $I(O,S_1+S_3+S_5)$ des parties S_1, S_3 et S_5 de l'arbre 1 en O dans la base B_1

Question 9: Justifier le fait que nous allons préférer calculer la matrice des deux demi-cylindres creux en leurs points H_i plutôt qu'en leurs points G_i

Question 10: Déterminer la matrice d'inertie $I(H_i,S_i)$ en H_i d'un demi-cylindre creux dans le demi plan $y>0$, de rayon intérieur r_i, de rayon extérieur R_i et de longueur L_i, d'axe $(H_i,\vec{x})$ dans la base B_i

Question 11: En déduire la matrice d'inertie de chaque demi-cylindre creux 2 et 4 aux points H_i dans la base B_1 – Justifier le fait que $y<0$ ne change pas le résultat précédent

Question 12: En déduire la matrice d'inertie $I(O,S_2+S_4)$ des demi-cylindres creux 2 et 4 au point O dans la base B_1 – ATTENTION !!!

Question 13: En déduire la matrice $I(O,1)$ de l'arbre 1 dans la base B_1.

Question 14: En déduire la matrice $I(G,1)$ de l'arbre 1 dans B_1.

Pour la suite, on donne :

$$Y_G = -19{,}46\ mm$$
$$M = 11.19\ Kg$$
$$I(G,1) = \begin{bmatrix} 1{,}21*10^{-2}kg.m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}44*10^{-2}kg.m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}01*10^{-2}kg.m^2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_1}$$

Torseur dynamique

Dans cette partie, on appelle G le centre de gravité de l'arbre 1 complet.

Question 15: Déterminer la résultante dynamique $\overrightarrow{R_{d_{10}}}$ dans B_1.
Question 16: Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(G,1/0)$ dans B_1.
Question 17: Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}(G,1/0)$ dans B_1.
Question 18: Déterminer $\{D(1/0)\}$ en G dans B_1.
Question 19: En déduire $\{D(1/0)\}$ en O dans B.

Equations du PFD

Le système que nous étudions est composé de deux pièces et d'un « bâti ».
Si on traitait le problème en statique, il faudrait déterminer les actions inconnues dans les deux liaisons pivots et au contact dans la ponctuelle entre les deux arbres en fonction du couple moteur ou des poids, une relation existant entre ceux-ci. Il faut donc faire de même en dynamique. Il suffit d'effectuer deux isolements parmi les 3 possibles (1, 1' ou 1+1') afin de résoudre le problème dynamique. Compte tenu de la similarité des deux arbres, nous allons étudier l'un d'eux puis déterminer les résultats du second par analogie.
Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\{\mathcal{D}(1/0)\} = \{\mathcal{T}_{\bar{1}\to 1}\}$$

Question 20: Enumérer les actions extérieures s'exerçant sur 1 et exprimer leurs torseurs en O dans la base B.
Question 21: Donner le torseur général des actions de l'extérieur sur l'arbre 1 $\{\mathcal{T}_{\bar{1}\to 1}\}$ en O dans la base B.
Question 22: Déterminer les 6 équations issues du PFD dans la base B.

Etudions maintenant le second arbre. On peut remarquer que l'étude que nous avons menée sur l'arbre 1 peut être étendue à l'arbre 1'. En effet, les géométries des deux arbres sont identiques, et dans les calculs que nous avons effectués, les changements sont les suivants :

$$\theta \to -\theta \quad ; \quad \omega \to -\omega \quad ; \quad \dot{\omega} \to -\dot{\omega} \quad ; \quad C_m = 0 \quad R \to -R$$
$$\{\mathcal{T}_{0\to 1}\} \to \{\mathcal{T}_{0\to 1'}\} \quad ; \quad O \to O' \quad ; \quad \{\mathcal{T}_{1'\to 1}\} \to -\{\mathcal{T}_{1\to 1'}\}$$

Question 23: Par analogie avec l'étude de l'arbre 1, déterminer le système d'équations issu du PFD appliqué à 1' en O'

Nous obtenons finalement un système d'équations issu des isolements de 1 et $1'$.

Question 24: Faire un bilan du nombre d'inconnues et du nombre d'équations de ce système et conclure sur sa solvabilité

PFD et actions de liaisons

Question 25: Donner l'expression des torseurs $\{\mathcal{T}_{0\to 1}\}$ et $\{\mathcal{T}_{0\to 1'}\}$ des actions dans les liaisons pivot des pièces 1 et 1' avec le bâti en O et O' en gardant Y_P et Z_P.

Ces actions sont pour l'instant dépendantes de l'action au contact dans l'engrenage qui est inconnue. En statique, on déterminerait cette action à l'aide de l'équation en moment suivant l'axe de rotation des arbres $\vec{x}$, ce qui donnerait la relation entre Y_p et soit C_m, soit le poids des arbres. En dynamique, nous utiliserons l'équation différentielle du mouvement autour de cet axe x car l'inertie entre en compte dans cette action. Connaissant Y_p, on pourrait obtenir Z_p à l'aide de l'angle de contact dans l'engrenage. Nous ne détaillerons pas son calcul qui nous est inutile si nous ne nous intéressons pas à la composante suivant $\vec{z}$ des actions des arbres sur le bâti. En effet, l'action de la somme des 2 arbres sur le bâti ne contient pas cette inconnue qui se compense.

Question 26: En déduire le torseur $\{\mathcal{T}_{1U1'\to 0}\}$ de l'action de l'ensemble des deux arbres 1 et $1'$ sur le bâti 0 dans la base B au point P

Vous remarquerez qu'un couple non nul est exercé par les deux arbres sur le bâti.

Question 27: Donner l'expression littérale de la composante verticale R_y des deux arbres sur le bâti lorsque la vitesse de rotation des arbres est constante, et exprimer avec des mots à quoi correspondent ses deux termes

Question 28: Quel est l'intérêt d'utiliser deux arbres contra rotatifs ?

Pour les deux questions suivantes, bien avoir en tête que $Y_G < 0$

Question 29: Déterminer la vitesse de rotation minimale permettant de décoller la machine comme précisé dans la présentation du sujet

On suppose que l'arbre tourne à cette vitesse minimale pour la question suivante.

Question 30: Exprimer la variation de force de compactage du sol ΔR_y en fonction de M et M_t puis calculer sa valeur ?

PFD et mouvement

On s'intéresse à la phase d'accélération et on ne supposera donc plus que la vitesse est constante.

Question 31: Donner l'équation différentielle du mouvement de l'arbre 1

Question 32: Donner l'équation différentielle du mouvement de l'arbre 1'

Question 33: Déterminer l'inconnue Y_P à l'aide de l'unique équation du mouvement de l'arbre 1'

Question 34: En déduire la relation liant C_m aux données du problème en remplaçant Y_P dans l'équation de l'arbre 1

Question 35: Comment pourrait-on appeler le terme $2\left(A + M{Y_G}^2\right)$ qui apparaît dans cette formule

Supposons, ce qui n'est pas réaliste, que l'on puisse négliger la gravité. Autrement dit, la machine est inclinée !!! On remarquera toutefois que la gravité a tendance à accélérer le mouvement sur un demi-tour et à le décélérer sur l'autre et que son action moyenne est nulle.

Question 36: Déterminer l'expression du couple C_m permettant d'obtenir une vitesse de rotation ω en un temps T.

Question 37: En déduire la valeur numérique de C_m pour la valeur de T donnée dans le sujet

Questions subsidiaires

Question 38: En sommant les deux équations du mouvement, déterminer le lien entre $2RY_p$ et C_m

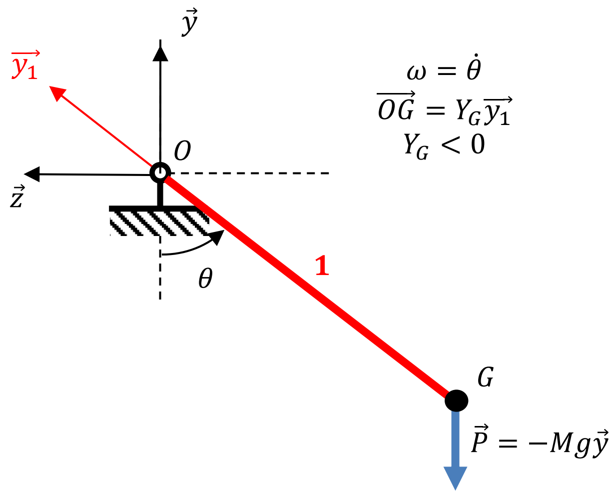
Question 39: Donner l'expression de $\{\mathcal{T}_{1U1' \to 0}\}$, en fonction de R_y et C_m

Question 40: Proposer un graphe des liaisons de l'ensemble du système (Sol, Machine, Arbre 1, Arbre 1', Moteur)

Question 41: En déduire le torseur de l'action de l'ensemble des arbres 1 et $1'$ et du moteur $\{\mathcal{T}_{1U1'UM \to 0}\}$ sur le bâti 0 dans la base B au point P

TEC et mouvement

On isole les deux arbres 1 et 1'. On rappelle la situation de l'arbre 1 :



Question 42: Exprimer $I_{1_O}^{x}$, moment d'inertie de l'arbre 1 autour de l'axe $(O, \vec{x})$

Question 43: Exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble $1U1'$

Question 44: En déduire l'inertie équivalente des pièces en rotation

Question 45: Donner l'expression des puissances extérieures aux deux arbres

Question 46: Donner l'expression des puissances intérieures à l'union $1U1'$

Question 47: Retrouver l'équation différentielle du mouvement à l'aide du TEC

Bilan

Au bilan, nous souhaitons analyser quelles équations il aurait suffi d'écrire pour répondre aux questions posées dans le cas de cette étude.

Question 48: Quelles équations permettraient de déterminer l'action des deux arbres sur le bâti R_y ?
Question 49: Quelle équation permet de mettre en relation le couple moteur avec l'accélération de l'arbre ?