DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 2 heures

Sujet

Mouvement dans un champ newtonien

Le théorème du viriel affirme en particulier que si un point matériel $P(x, y, z)$ *possède une énergie potentielle* $Ep(x, y, z)$ *vérifiant la propriété suivante: pour tout* λ *réel* $Ep(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k Ep(x, y, z)$ *, alors il existe la relation suivante entre valeurs moyennes temporelles au cours du mouvement de* P *:* $k < Ep > = 2 < Ec >$ *à condition que la trajectoire soit bornée (* Ec *désigne l'énergie cinétique de* P *). Dans la suite, le mouvement est périodique et les moyennes sont calculées sur une période.*

On considère un satellite de masse m, assimilé à un point matériel P, se trouvant à une distance r du centre O de la terre. On note G la constante de gravitation, M_T la masse de la terre et $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

I. Généralités

1. L'étude est faite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen auquel est associé un repère orthonormé (O, x, y, z) . Définir ce référentiel.
2. Donner l'expression vectorielle de la force subie par le satellite.
3. Cette force est-elle conservative? Justifier. Cette force est-elle centrale? Justifier. Quelles sont alors les deux grandeurs qui sont conservées au cours du mouvement? Justifier rapidement.
4. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle Ep du satellite (avec la convention $Ep = 0$ à l'infini).

II. Cas particulier d'une trajectoire circulaire

5. Dans le cas où la trajectoire du satellite est circulaire de rayon r_0 , déterminer sa vitesse v en fonction éventuellement de G , M_T , m , r_0 .
6. En déduire la période T_0 et l'énergie cinétique Ec .
7. Quelle est pour cette trajectoire circulaire la relation entre Ec et Ep . Le résultat est-il en accord avec le théorème du viriel.
8. Comment s'exprime ici le théorème du viriel dans un cas moins particulier que celui du mouvement circulaire? Quelle propriété de l'énergie retrouve-t-on pour un état lié ?

III. Équation générale d'une trajectoire elliptique

Le satellite est lancé, en $t = 0$, d'un point P_0 tel que $\overrightarrow{OP}_0 = r_0 \vec{u}_r$, avec une vitesse orthoradiale (orthogonale au rayon vecteur) $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_\theta = \alpha \sqrt{\dfrac{G M_T}{r_0}} \vec{u}_\theta$ avec $1 < \alpha < \sqrt{2}$.

9. Donner l'expression de l'énergie $E_{t=0}$ et du moment cinétique en O $\vec{\sigma}_{t=0}$ à l'instant $t = 0$ en fonction des données G , M_T , m , r_0 et α .

10.Montrer, avec précision, que le mouvement est plan.

11.Le satellite est repéré en coordonnées polaires (r,θ) dans son plan ; montrer que la quantité $\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ est constante. Déterminer la valeur de cette constante que l'on notera C .

12.Que peut-on dire du signe de l'énergie. Montrer que la trajectoire est bornée.

13.On pose $u(\theta)=\frac{1}{r}$ et $u'(\theta)=\frac{d\,u(\theta)}{d\theta}$. Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ en fonction de $u(\theta)$, $u'(\theta)$, C .

14.Donner l'expression de l'énergie E en fonction éventuellement de $u(\theta)$, $u'(\theta)$, G , M_T , m , C .

15.En déduire que l'équation de la trajectoire peut s'écrire sous la forme: $u(\theta)=\frac{1+e\cos(\theta-\theta_0)}{p}$ avec $p=\frac{C^2}{G M_T}$.

IV. Grandeurs caractéristiques de la trajectoire étudiée

16.Déterminer le paramètre p de la trajectoire du satellite en fonction de r_0 et α .

17.On choisit l'axe polaire de telle façon que pour le point de départ P_0 on ait $\theta=0$. Les deux conditions initiales pour $\theta=0$ ont été indiquées précédemment: pour la première on a $u_{\theta=0}=\frac{1}{r_0}$ et pour la seconde, on obtient $u'_{\theta=0}$ connaissant $\vec{v}_0$.

- Déterminer θ_0 .
- Déterminer l'excentricité e (grandeur définie positive) de la trajectoire en fonction de α seulement.

18.Calculer les rayons au périgée et à l'apogée en fonction de p et e puis en fonction de r_0 et α .

19.Représenter la trajectoire en précisant le point de départ, l'axe polaire, les foyers, le paramètre.

V. Utilisation du viriel

20.Exprimer l'énergie cinétique $Ec(\theta)$ du satellite en fonction de G , M_T , p , e et θ .

21.Exprimer de même l'énergie potentielle $Ep(\theta)$ en fonction de G , M_T , p , e et θ .

22.En partant des deux résultats précédents, déterminer $Ec(\theta)+Ep(\theta)$. Vérifier que le résultat est cohérent avec $E_{t=0}$. Vérifier aussi que l'énergie mécanique s'exprime simplement en fonction du grand axe.

23.Déduire du théorème du viriel que $<\cos\theta>=-e$. Ce résultat est-il surprenant? Que penser de $<\sin\theta>$?

Pour mieux cerner le résultat précédent on cherche à évaluer les durées du parcours du satellite: Δt_1 pour un angle θ passant de $-\pi/2$ *à* $\pi/2$ et Δt_2 pour un angle θ passant de $\pi/2$ *à* $3\pi/2$.

24.On rappelle la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G M_T}$; exprimer la période T en fonction de p , C et e .

25.Exprimer la durée Δt que met le satellite pour passer d'un angle polaire θ_1 à θ_2 ; on donnera le résultat en fonction de la période et d'une intégrale sans dimension.

26.Si $e=0,5$ le calcul numérique donne le résultat suivant : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+e \cos\theta)^2}=0,195$. Ce résultat est-il en accord avec celui obtenu concernant $<\cos\theta>$?

Gravitation et pesanteur terrestre

Données numériques :

Constante de gravitation universelle: $G=6,67.10^{-11} N.m^{2.} kg^{-2}$

Masse de la Terre: $M_T=5,98.10^{24} kg$

Rayon de la Terre supposée sphérique: $R_T=6,38.10^3 km$

L'expression des opérateurs: rotationnel, divergence, laplacien n'est pas donnée. Ces opérateurs ne sont donc pas à utiliser au niveau des applications.

I. Le champ de gravitation terrestre

A. Théorème de Gauss

1. Exprimer la force électrostatique $\vec{F}^e_{1/2}$ exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une charge ponctuelle q_2 et faire un schéma précisant clairement les notations utilisées. En déduire le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q .

2. Énoncer le théorème de Gauss de l'électrostatique et l'équation locale de Maxwell-Gauss correspondante.

3. Exprimer la force gravitationnelle $\vec{F}^g_{1/2}$ exercée par une masse ponctuelle m_1 sur une masse ponctuelle m_2 . En déduire le champ gravitationnel $\vec{G}$ créé par une masse ponctuelle m .

4. Dresser un tableau présentant les analogies entre les grandeurs électrostatiques et les grandeurs gravitationnelles. En déduire le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel créé par une distribution de masses quelconques et l'équation locale correspondante.

B. Modèle 1

Dans un premier temps, on assimile la Terre à une sphère de centre O , de rayon R_T et de masse M_T uniformément répartie dans tout le volume.

5. Déterminer le champ gravitationnel terrestre $\vec{G}_T$ en tout point M de l'espace (réponse vectorielle).

6. Représenter graphiquement $\|\vec{G}_T\|$ en fonction de $r=OM$.

7. Application numérique: calculer $G_0=\|\vec{G}_T\|$ à la surface de la Terre.

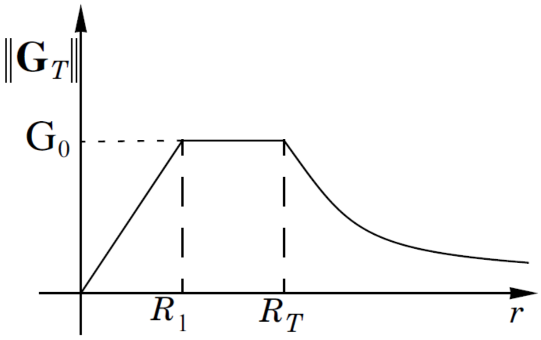
C. Modèle 2

En réalité la masse M_T n'est pas uniformément répartie. Dans un modèle plus élaboré dans lequel on suppose la symétrie sphérique conservée, les variations de $\|\vec{G}_T\|$ sont représentées sur la *figure* avec $R_1=3,50.10^3 km$.

8. Justifier que le champ gravitationnel à la surface de la Terre n'est pas modifié.

9. Justifier que dans ce modèle, on considère le noyau terrestre $0<r<R_1$ comme homogène. Calculer sa masse volumique moyenne.

10. Dans le manteau terrestre $R_1<r<R_T$, la masse volumique est-elle supposée fonction croissante ou décroissante de r ? Justifier rapidement puis trouver l'expression de la masse volumique dans le manteau terrestre.



II. Le champ de pesanteur terrestre

En première approximation, le poids $m\vec{g}$ d'un point matériel de masse m est la résultante de la force de gravitation exercée par la Terre et de la force d'inertie d'entraînement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

11. Définir un référentiel galiléen. Définir les référentiels géocentrique et terrestre.

12. Expliquer à l'aide d'un schéma pourquoi le jour sidéral (période T de rotation propre de la Terre) diffère du jour solaire moyen $T_0=24h$ (durée entre deux passages successifs du Soleil au zénith).

13. Évaluer en minutes l'ordre de grandeur de T_0-T .

Quel que soit le résultat trouvé précédemment, on prendra $\Omega=7{,}29\cdot10^{-5}rad\cdot s^{-1}$ comme vitesse angulaire de rotation du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique.

14. Exprimer en un point M de latitude λ , le champ de pesanteur terrestre $g=\|\vec{g}\|$ à la surface de la Terre en fonction de G (constante de gravitation universelle), M_T , R_T , Ω et λ .On pourra faire toute approximation jugée utile.

15. Calculer les valeurs extrémales de g . Quelle erreur relative maximale commet-on si l'on confond champ de pesanteur terrestre et champ de gravitation terrestre ?

16. Quelle devrait être la durée maximale du jour sidéral pour qu'il existe des lieux de pesanteur nulle à la surface de la Terre ?

Réponses

Mouvement dans un champ newtonien

1) Le référentiel géocentrique

- a pour origine le centre d'inertie de la terre
- a pour axes des axes parallèles à ceux du référentiel de Copernic (directions de trois étoiles éloignées pouvant être considérées comme fixes)

2)
$$\vec{F} = -\frac{G M_T m}{r_{OP}^2}\,\vec{u}_{OP}$$
$$\boxed{\vec{F} = -\frac{G M_T m\,\vec{r}}{r^3}}$$

3) La force est conservative.

Par exemple, on peut dire que le travail élémentaire de cette force est une différentielle totale :

$$\delta W = \vec{F}\,\vec{dl} \quad \text{avec } \vec{dl} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}$$
$$= -\frac{G M_T m}{r^2}\,dr$$
$$\boxed{\delta W = -\,dE_P}$$

puisqu'il ne fait intervenir que la variable r. (Il existe donc une primitive).

La force est centrale.

Elle est selon $\vec{u}_{OP}$ donc elle passe par le point O fixe.

Son moment en O est donc nul :

$$\vec{\mathcal{M}}_{(O)} = \vec{OP} \wedge \vec{F}$$
$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{(O)} = \vec{0}}$$

- Il y a donc conservation de l'énergie mécanique totale : E

cf : théorème de l'énergie cinétique

$$dE_c = \delta W$$
$$= -dE_P$$
$$d(\underbrace{E_c + E_P}_{E}) = 0$$
$$\boxed{E = \text{constante}}$$

• Il y a donc conservation du moment cinétique en O : $\vec{\sigma}(O)$

cf : théorème du moment cinétique en un point fixe

$$\frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O) = \text{constante}}$$

---

4) par exemple :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_P(r,\theta,\varphi)$$

$/\vec{u_r}$ $$-\frac{GM_Tm}{r^2} = -\frac{\partial E_P}{\partial r}$$

$/\vec{u_\theta}$ $$0 = -\frac{\partial E_P}{r\partial\theta}$$

$/\vec{u_\varphi}$ $$0 = -\frac{\partial E_P}{r\sin\theta\partial\varphi}$$

d'où

$$E_P = E_P(r)$$

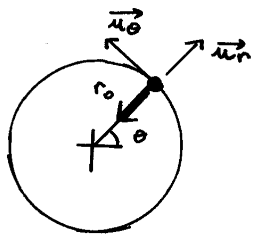
$$\frac{dE_P}{dr} = \frac{GM_Tm}{r^2}$$

$$E_P = -\frac{GM_Tm}{r} + \cancel{cste}$$

$$\boxed{E_P = -\frac{GM_Tm}{r}}$$

---

5)



On applique le principe fondamental

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-\frac{GM_Tm\vec{u_r}}{r_0^2} = m\vec{a}$$

$/\vec{u_r}$ $$-\frac{GM_Tm}{r_0^2} = -\frac{mv^2}{r_0}$$

$/\vec{u_\theta}$ $$0 = m\frac{dv}{dt}$$

d'où

$$\boxed{v^2 = \frac{GM_T}{r_0}}$$

---

6) période

$$T_o = \frac{2\pi r_o}{v}$$

$$T_o^{\,2} = \frac{4\pi^2 r_o^{\,2}}{v^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 r_o^{\,2}}{GM_T/r_o}$$

$$\boxed{T_o^{\,2} = \frac{4\pi^2 r_o^{\,3}}{GM_T}}$$

énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\frac{GM_T m}{r_o}}$$

---

7)

$$E_P = -\frac{GM_T m}{r_o}$$

donc $\boxed{E_c = -\frac{1}{2} E_P}$

D'après le théorème du viriel, E_P étant en $\frac{1}{r}$, on a

$$E_P(\lambda r) = \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\lambda^k} E_P(r)$$

soit

$$\boxed{k = -1}$$

$$k < E_P > = 2 < E_c >$$

ici : $-1 \; E_P = 2 \; E_c$

c'est bien le résultat obtenu plus haut.

---

8) Cas d'une ellipse (trajectoire bornée, périodique)

$$E = E_c + E_P$$

$$= <E_c> + <E_P>$$

$$= <E_c> - 2<E_c>$$

$$\boxed{E = -<E_c> = \frac{<E_P>}{2}}$$

on trouve donc

$$\boxed{E < 0}$$

caractéristique pour un état lié

---

9) Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes E et $\overrightarrow{\sigma_{(0)}}$

$\longrightarrow$

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_T m}{r_0}$$

$$= \frac{1}{2} m \alpha^2 \frac{G M_T}{r_0} - \frac{G M_T m}{r_0}$$

$$\boxed{E = - \frac{G M_T m}{r_0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right)}$$

$\longrightarrow$

$$\vec{\sigma} = \vec{r_0} \wedge m \vec{v_0}$$

$$\begin{array}{c|c} & r_0 \\ & 0 \\ \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z} & 0 \end{array} \quad \begin{array}{|c} 0 \\ m\alpha\sqrt{\frac{G M_T}{r_0}} \\ 0 \end{array}$$

$$\boxed{\vec{\sigma} = m \alpha \sqrt{G M_T r_0} \, \vec{u_z}}$$

---

10) Le mouvement est à force centrale donc $\overrightarrow{\sigma_{(0)}}$ = constante avec

$\vec{\sigma} = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$ selon $\vec{u_z}$

$\underline{\overrightarrow{OP} \perp \vec{\sigma}}$ donc

$$\boxed{\text{P appartient au plan perpendiculaire à } \vec{u_z} \text{ passant par O .}}$$

---

11)

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\begin{array}{c|c} & r \\ & 0 \\ \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z} & 0 \end{array} \quad m \begin{array}{|c} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{array}$$

$$\vec{\sigma} = m r^2 \dot{\theta} \, \vec{u_z} = cste$$

Donc

$$\boxed{\begin{aligned} r^2 \dot{\theta} &= C \\ &= \alpha \sqrt{G M_T r_0} \end{aligned}}$$

---

12) On a établi que

$$E = -\frac{GM_T m}{r_0}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

négatif si

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} > 0$$

$$\boxed{\sqrt{2} > \alpha}$$

ce qui est le cas.

Dans ce cas, il s'agit d'un état lié (la trajectoire est bornée, r ne peut tendre vers l'infini) (cf question 8)

---

13)

$$r = \frac{1}{u(\theta)}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{u'}{u^2}\dot{\theta} \qquad \text{avec} \qquad \dot{\theta} = C u^2$$

$$= -C u'$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$= -C u'\,\vec{u_r} + \frac{1}{u} C u^2\,\vec{u_\theta}$$

$$\boxed{\vec{v} = C\left(-u'\,\vec{u_r} + u\,\vec{u_\theta}\right)}$$

---

14)

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_T m}{r}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m C^2 (u'^2 + u^2) - GM_T m\, u}$$

---

15) On dérive par rapport à θ

$$0 = \frac{1}{2} m C^2 (2u'u'' + 2u\,u') - GM_T m\, u'$$

La solution $u' = 0$ est à rejeter donc :

$$u'' + u = \frac{GM_T}{C^2}$$

$$\boxed{u'' + u = \frac{1}{P}}$$

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{P}$$

(deux constantes arbitraires A et θ_0)

on pose : $A = \frac{e}{P}$

(les deux constantes deviennent e et θ_0)

$$\boxed{u(\theta) = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{P}}$$

---

16)

$$P = \frac{C^2}{G M_T} = \frac{\alpha^2 G M_T r_0}{G M_T}$$

$$\boxed{P = \alpha^2 r_0}$$

---

17) Conditions initiales :

$\theta = 0$ $u = \frac{1}{r_0}$ donc : $\boxed{\frac{1}{r_0} = \frac{1 + e \cos\theta_0}{\alpha^2 r_0}}$

$\theta = 0$ $\vec{v}$ selon $\vec{u_\theta}$

donc

$u' = 0$ soit : $\boxed{0 = \frac{e \sin\theta_0}{\alpha^2 r_0}}$

donc $\boxed{\begin{array}{l} \theta_0 = 0 \\ e = \alpha^2 - 1 \end{array}}$ (on veut e positif)

---

18) finalement $\boxed{r = \frac{P}{1 + e \cos\theta}}$

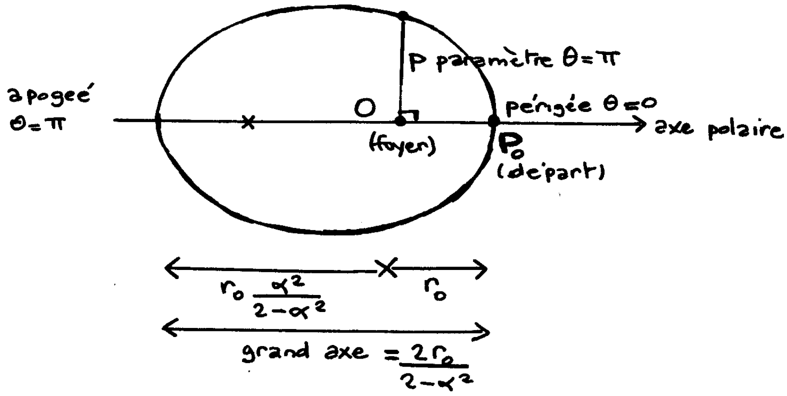
→ le rayon est minimum pour $\theta = 0$ (périgée)

→ le rayon est maximum pour $\theta = \pi$ (apogée)

$$\boxed{\begin{array}{l} r_{MIN} = \frac{P}{1+e} = r_0 \\ r_{MAX} = \frac{P}{1-e} = \frac{\alpha^2}{2-\alpha^2} r_0 \end{array}}$$

---

19)



---

20)

$$E_c = \frac{1}{2} m\, C^2 (u^2 + u'^2)$$

$$= \frac{1}{2} m\, p\, GM_T \left(\frac{(1+e\cos\theta)^2}{p^2} + \frac{(-e\sin\theta)^2}{p^2} \right)$$

$$\boxed{E_{c(\theta)} = \frac{1}{2} \frac{GM_T\, m}{p} (1 + 2e\cos\theta + e^2)}$$

---

21)

$$E_p = - GM_T\, m\, u$$

$$\boxed{E_{p(\theta)} = - \frac{GM_T\, m}{p} (1 + e\cos\theta)}$$

---

22) $\longrightarrow$ $\boxed{E_c(\theta) + E_p(\theta) = - \frac{GM_T m}{2p} (1-e^2)}$

$\longrightarrow$

$$= - \frac{GM_T m \;(2-\alpha^2)\,\alpha^2}{2\,\alpha^2 r_0}$$

on retrouve effectivement l'expression de E déjà établie

$$\boxed{E = - \frac{GM_T m \;(1 - \frac{\alpha^2}{2})}{r_0}}$$

$\longrightarrow$ qu'on peut écrire (2a : grand axe)

$$\boxed{E = - \frac{GM_T m}{2a}}$$

(même formule que pour une trajectoire circulaire de rayon a)

---

23) En vertu du théorème du viriel :

$$2 < E_c > \quad = \quad - < E_P >$$

$$\frac{GM_T m}{p}\left(1 + 2e\underbrace{<\cos\theta>}_{\text{moyenne dans le temps de } \cos\theta(t)} + e^2\right) = \frac{GM_T m}{p}\left(1 + e <\cos\theta>\right)$$

$$\boxed{<\cos\theta> \quad = \quad -e}$$

Donc le satellite reste plus longtemps dans le domaine $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ que dans le domaine $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
(compréhensible : la région $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ correspond aux r "plus grands"... donc à $\dot\theta$ "plus petit" puisque $r^2\dot\theta = C$)

La symétrie de la trajectoire par rapport à l'axe polaire permet de prévoir que

$$\boxed{<\sin\theta> \quad = \quad 0}$$

---

24)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{p}{C^2}\left(\frac{p}{1-e^2}\right)^3$$

$$\boxed{T = 2\pi \frac{p^2}{C}(1-e^2)^{-3/2}}$$

---

25)

$$r^2\dot\theta = C$$

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{C}$$

$$= \frac{p^2}{C}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\frac{dt}{T} = \frac{1}{2\pi}(1-e^2)^{3/2}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\boxed{\frac{\Delta t}{T} = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}}$$

A.N.

26) $e = 0,5$

$\theta_1 = -\pi/2$

$\theta_2 = \pi/2$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{(1-0,5^2)^{3/2}}{2\pi} \; 0,195$$

$$\boxed{\frac{\Delta t}{T} = 0,020}$$

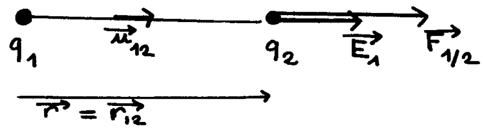
Ici le satellite ne passe que 2% du temps dans le domaine $\cos\theta > 0$ et donc 98 % dans le domaine $\cos\theta < 0$. Il est normal de trouver ici

$$\boxed{\langle \cos\theta \rangle < 0}$$

(ici : $\langle \cos\theta \rangle = -0,5$)

Gravitation et pesanteur terrestre

1)



(figure avec $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ <u>répulsion</u>)

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{F^e_{1/2}} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_{12}} \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}}$$

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = q_2 \overrightarrow{E_1}$$

donc

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_{12}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}}$$

---

2)

Le flux sortant de $\vec{E}$ à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure à cette surface divisée par ε_0

$$\boxed{\oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

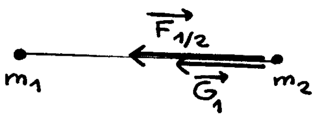
équation locale de Maxwell-Gauss :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

(ρ : densité volumique de charges)

---

3)



($m_1 > 0$, $m_2 > 0$ <u>attraction</u>)

$$\boxed{\overrightarrow{F^g_{1/2}} = -\frac{G\, m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_{12}}}$$

$$= m_2 \overrightarrow{G_1}$$

donc

$$\boxed{\overrightarrow{G} = -\frac{G\,m}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}}$$

---

4) analogies

Electrostatique	Gravitation
$\overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{G}$
q	m
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$

le théorème de gauss pour le champ de gravitation

$$\boxed{\oiint \overrightarrow{G}\,\overrightarrow{dS} = -4\pi G\, m_{int}}$$

l'équation locale

$$\boxed{div\,\overrightarrow{G} = -4\pi G\,\rho}$$ (ρ : masse volumique)

---

5) Vu la symétrie sphérique :

$$\overrightarrow{G_T} = G_T(r)\,\overrightarrow{u_r} \qquad (G_T < 0)$$

On applique le théorème de gauss, à une sphère de rayon r

$r > R_T$

$$\oiint \overrightarrow{G_T}\,\overrightarrow{dS} = -4\pi G M_T$$

$$G_T\, 4\pi r^2 = -4\pi G M_T$$

$$\boxed{\overrightarrow{G_T}(r>R_T) = -\frac{G M_T}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}}$$

$r < R_T$

$$\oiint \overrightarrow{G_T}\,\overrightarrow{dS} = -4\pi G\left(M_T \frac{r^3}{R_T^3}\right)$$

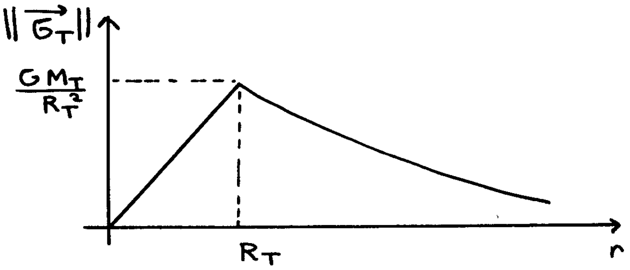
$$G_T\, 4\pi r^2 = -4\pi G M_T \frac{r^3}{R_T^3}$$

$$\boxed{\overrightarrow{G_T}(r<R_T) = -\frac{G M_T\, r}{R_T^3}\,\overrightarrow{u_r}}$$

$r = R_T$ il y a continuité de $\overrightarrow{G}$

---

6)



---

7)

$$\boxed{G_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}}$$

A.N. $$= \frac{6{,}67\ 10^{-11}\ 5{,}98\ 10^{24}}{(6{,}38\ 10^6)^2}$$

$$\boxed{G_0 = 9{,}80\ m s^{-2}}$$

---

8) La symétrie reste sphérique.

La masse de la terre garde la même valeur.

Le théorème de Gauss donne alors le même résultat pour $r > R_T$

Et par continuité en $r = R_T$ on retrouve donc

$$G_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}$$

---

9) Si la masse volumique est uniforme le champ augmente linéairement (cf M intérieur en r^3 et S en r^2 donc $\|\vec{G_T}\|$ proportionnel à r) – voir questions 5 et 6 –

Ici le champ varie linéairement pour $r < R_1$ parce que la masse volumique est uniforme pour $r < R_1$

Remarque

On peut préciser la démonstration (qui serait élémentaire) en calculant

$$\text{div}\,\vec{G_T} = -4\pi G \rho$$

Pour $r < R_1$ (théorème de Gauss)

$$G_T\, 4\pi r^2 = -4\pi G \underbrace{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}_{m_{int} \text{ en faisant } \rho \text{ uniforme}}$$

$$\rho = -\frac{3}{4\pi}\frac{G_T}{G}\frac{1}{r}$$

avec $G_T = -k\,r$

$= -\frac{G_0}{R_1}\,r$

$= -\frac{GM_T/R_T^2}{R_1}\,r$

$$\boxed{\rho = \frac{3\,M_T}{4\pi R_T^2 R_1}}$$

A.N. $\rho = \frac{3 \quad 5{,}98\ 10^{24}}{4\pi\,(6{,}38\ 10^6)^2\,(3{,}50\ 10^6)}$

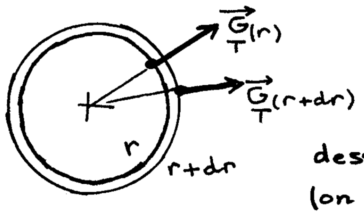
$$\boxed{\rho_{noyau} = 10{,}0\ \ 10^3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}}$$

---

10) Entre R_1 et R_2, $\|\vec{G}\|$ ne varie plus linéairement (cas de ρ uniforme). $\|\vec{G}\|$ augmente moins vite, il est même constant.

On peut donc affirmer que

$\boxed{\rho(r) \text{ est une fonction décroissante de } r}$



dessin avec $G_T > 0$
(on a en fait $G_T < 0$)

On applique le théorème de Gauss au volume entre r et $r+dr$

$$G_T(r+dr)\,4\pi(r+dr)^2 - G_T(r)\,4\pi r^2 = -4\pi G\,\underbrace{4\pi r^2 dr\ \rho(r)}_{dm_{int}}$$

$$4\pi \times \frac{d}{dr}(G_T r^2)\,dr = -4\pi G\ 4\pi r^2\,dr\ \rho(r)$$

$$\rho(r) = -\frac{1}{4\pi G}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(G_T r^2)$$

$G_T = -G_0 < 0$

$$= \frac{G_0}{2\pi r\,G}$$

$$\boxed{\rho(r) = \frac{M_T}{2\pi r\, R_T^2}}$$

($\rho(r)$ varie en $\frac{1}{r}$)

---

11) → <u>Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel un point matériel libre (isolé) a un mouvement rectiligne uniforme</u>

→ <u>référentiel géocentrique</u> :

origine : le centre de masse de la terre

axes : direction "fixe" (vers des étoiles lointaines)

→ <u>référentiel terrestre</u> :

origine : un point de la terre

(ex : le centre O

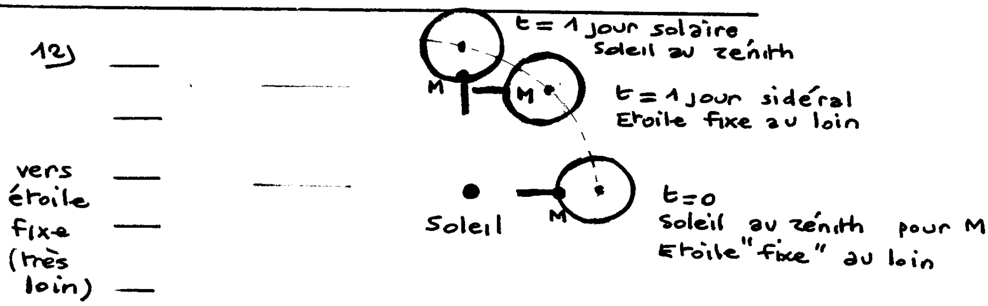
ex : un point sur la surface de la terre)

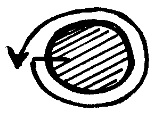
axes : 3 axes liés à la terre.

(donc tournant avec elle)

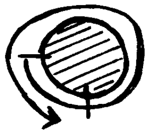
---

12)





rotation / étoiles pour <u>un jour sidéral</u>



rotation / étoiles pour <u>un jour solaire</u>

(écart très exagéré)

---

13) Au bout d'une année, il s'est écoulé

365,25 jours solaires T_0

366,25 jours sidéraux T

$$365{,}25 \; T_0 = 366{,}25 \; T$$

$$366{,}25 \; (T_0 - T) = T_0$$

$$\boxed{T_0 - T = \frac{T_0}{366{,}25}}$$

avec $T_0 = 24\,h$

d'où

$$\boxed{T_0 - T = 3{,}93 \text{ min} \quad (3 \text{ min } 55{,}9 \text{ s})}$$

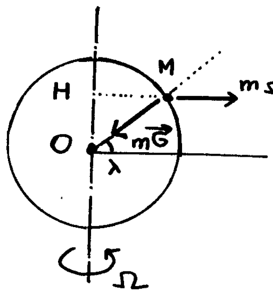
remarque :

on peut en déduire Ω_{terre}

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{avec} \quad T = 23\,h\ 56\,min\ 4{,}1\,s$$

---

14)



$m\Omega^2 \overrightarrow{HM} = m\Omega^2 R_T \cos\lambda \; \vec{u}_{HM}$

$$m\vec{g} = m\vec{G}_T + m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\boxed{\vec{g} = \vec{G}_T + \Omega^2 R_T \cos\lambda \; \vec{u}_{HM}}$$

$/\vec{u}_r$ $\quad g_r = -G_0 + \Omega^2 R_T \cos^2\lambda$

$/\vec{u}_\theta$ $\quad g_\theta = 0 + \Omega^2 R_T \cos\lambda \sin\lambda$

Il faut alors remarquer que $\underbrace{\Omega^2 R_T}_{0{,}034} \ll \underbrace{G_0}_{9{,}80}$

En travaillant alors au premier ordre en $\left(\frac{\Omega^2 R_T}{G_0}\right)$,

$$\|\vec{g}\| = \sqrt{g_r^2 + g_\theta^2} \simeq |g_r|$$

$$\boxed{\|\vec{g}\| = G_0 - \Omega^2 R_T \cos^2\lambda}$$

$$\boxed{\|\vec{g}\| = \frac{G M_T}{R_T^2}\left(1 - \frac{\Omega^2 R_T^3}{G M_T}\cos^2\lambda\right)}$$

---

15)

$\lambda = 0 \qquad g_{min} = 9{,}80 - 0{,}03 = \underline{9{,}77 \text{ m s}^{-2}}$

$\lambda = \pm 90° \qquad g_{max} = 9{,}80 - 0 = \underline{9{,}80 \text{ m s}^{-2}}$

erreur relative maximale : $\dfrac{0{,}03}{9{,}80} = 0{,}3\,\%$

---

16) Lieux de pesanteur nulle si

$$\frac{\Omega^2 R_T^3}{G M_T} \geqslant 1$$

$$\Omega \geqslant \sqrt{\frac{G M_T}{R_T^3}}$$

$$\boxed{T \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{R_T^3}{G M_T}}}$$

A.N. $\boxed{T \leqslant 1\text{ h } 24{,}5 \text{ min}}$
