

Planche n° 10. Généralités sur les fonctions

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**T)

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) f_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1 & 2) f_2(x) = \frac{x^5 - x}{x^2 - 1} & 3) f_3(x) = \frac{x^5 - x}{x^3 - 1} \\ 4) f_4(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & 5) f_5(x) = \cos(2x) + \tan^2(x) & 6) f_6(x) = \sin(x) - x \\ 7) f_7(x) = \sqrt{x^2 + 1} & 8) f_8(x) = \frac{x}{x^6 - x^4 - 31x^2 + 3} & 9) f_9(x) = \cos(x) + \sin(x). \end{array}$$

Exercice n° 2 (**I)

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice n° 3 (**I)

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que si f est paire, sa dérivée est impaire et si f est impaire, alors sa dérivée est paire.

Généraliser à f'' , $f^{(3)}$, \dots , $f^{(n)}$, $n \geq 2$.

A-t-on des résultats analogues pour les primitives ?

Exercice n° 4 (**T)

1) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie du graphe dans un repère orthonormé de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$.

2) Montrer que le point I de coordonnées $(1, 2)$ est centre de symétrie du graphe de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-1}$.

3) Montrer que le point I de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie du graphe de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$.

4) Etudier les symétries de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \cos(x) + \cos(3x)$.

Exercice n° 5 (**T)

Etudier la périodicité des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) f_1(x) = [x] - x & 2) f_2(x) = [2x] - 2x & 3) f_3(x) = \cos(2x) - \sin(4x) \\ 4) f_4(x) = \cos(4x) & 5) f_5(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) & 6) f_6(x) = \cos\left(\frac{2x}{3}\right). \end{array}$$

n° 6 (**T)

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$ est bornée sur \mathbb{R} .

2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ est bornée sur \mathbb{R} .

Exercice n° 7 (**T)

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes sur le domaine considéré.

$$\begin{array}{lll} 1) x \mapsto -3(x+1)^2 + 1, I = \mathbb{R} & 2) x \mapsto 3 - \frac{5}{2x+1}, I = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[& 3) x \mapsto \ln(1 + e^x), I = \mathbb{R} \\ 4) x \mapsto \exp\left(1 - \frac{1}{\ln^2|x|+1}\right), I = \mathbb{R}^* & 5) x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt & 6) x \mapsto \int_0^1 e^{xt} dt \end{array}$$

Exercice n° 8 (T)**

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré.

- 1) $x \mapsto \sin x - \cos x$, $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 2) $x \mapsto x \ln x$, $I = [1, +\infty[$ 3) $x \mapsto e^{3x^2-1} \cos\left(\frac{\pi}{2(x^2+1)}\right)$, $I = \mathbb{R}$
 4) $x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$, $I =]1, +\infty[$ 5) $x \mapsto \frac{x^4-1}{x^4+1}$, $I = \mathbb{R}$ 6) $x \mapsto -x^7 + x^4 + x^2 + 3$, $I =]-\infty, 0]$

Exercice n° 9 (*T)

1) Montrer que, si x est un réel tel que $1 \leq x \leq 2$, on a $\frac{3}{11} \leq \frac{2x+1}{4x+3} \leq \frac{5}{7}$.

2) Résoudre l'équation $\frac{2x+1}{4x+3} = \frac{3}{11}$. Que constatez-vous ?

3) Encadrer au mieux $\frac{2x+1}{4x+3}$ pour $x \in [1, 2]$.

Exercice n° 10 (*T)

Encadrer au mieux les expressions suivantes sur le domaine D considéré :

- 1) x^2 , $D = [-1, 2]$ 2) $x^2 - 3x + 2$, $D = [0, 4]$ 3) $\frac{1}{x}$, $D = [-2, -1]$ 4) $\frac{1}{x^2}$, $D = [-1, 1] \setminus \{0\}$
 5) $\cos x$, $D = \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 6) $\frac{5x+1}{13x+2}$, $D = [0, 4]$ 7) $\frac{2n+3}{2n-9}$, $n \in \mathbb{N}$ 8) $\frac{4n+1}{3n+7}$, $n \in \mathbb{N}$

Exercice n° 11 (T)**

Démontrer les inégalités suivantes :

- 1) $\forall x \in [1, 3], 2x^2 - 5x + 3 \leq 3x - 3$ 2) $\forall x \in [1, +\infty[, \frac{2x^2 - 7x + 1}{x + 3} \leq 10x$ 3) $\forall x \leq 0, \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x$

Exercice n° 12 (*I)

Etudier le signe de $\sqrt{x^2+1} - x$ et $\sqrt{x^2+1} + x$ suivant les valeurs de x .

Exercice n° 13 (I)**

Démontrer (et mémoriser) les inégalités classique suivantes :

- 1) $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$ 2) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ 3) $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$