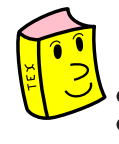


RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES



Définition.



Résultat de cours.



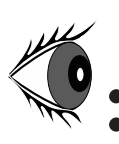
Résultat pratique.



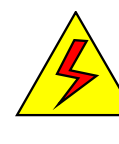
Astuce.



Démarche.



Exemple classique.

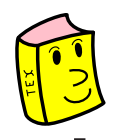


Attention.



Information

ÉLÉMENTS PROPRES



Éléments propres

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- Soit $x \in E$. On dit que x est vecteur propre de u si $x \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé le spectre de u et noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.
- Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. $E_{\lambda}(u) = \text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0_E\}$ appelé le sous-espace propre de u associé à λ



Caractérisation en dim finie

Si E est de dimension finie $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(u) &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \text{Id}_E) \text{ n'est pas injectif} \\ &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \text{Id}_E) \text{ n'est pas surjectif} \\ &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \text{Id}_E) \text{ n'est pas bijectif} \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(u - \lambda \cdot \text{Id}_E) < n \\ &\Leftrightarrow \det(u - \lambda \cdot \text{Id}_E) = 0 \end{aligned}$$



Éléments propres d'une matrice

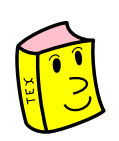
Les éléments propres d'une matrice A sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé

$$u_A : \begin{cases} M_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$$

On écrit A à la place de u_A

POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

E est de dimension finie $n \geq 1$.



Définition

- On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$.
- On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme $\chi_u = \det(X\text{Id}_E - u)$.



Endomorphisme induit

Si F est stable par u , alors $\chi_{u_F} | \chi_u$.

Plus généralement si $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, F_i est stable par u , alors

$$\chi_u = \prod_{i=1}^k \chi_{u_{F_i}}$$



Spectre et polynôme caractéristique

$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \chi_u(\lambda) = 0\}$

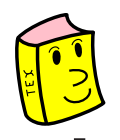


Ordre de multiplicité

La multiplicité d'une racine λ de χ_u est appelée l'ordre de multiplicité de λ , et ona: elle est noté $m(\lambda)$.

$$1 \leq \dim E_{\lambda}(u) \leq m(\lambda)$$

POLYNÔME MINIMAL



Polynômes annulateurs et minimal

- Le noyau $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ du morphisme d'évaluation $P \mapsto P(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle l'idéal annulateur de u .
- On appelle polynôme annulateur de u tout élément de l'idéal annulateur;
- On appelle polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs.



Même définition pour les matrices



Théorème de décomposition des noyaux

Si P_1, \dots, P_k sont k polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\text{Ker} \left[\left(\prod_{i=1}^k P_i \right) (u) \right] = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker} (P_i(u))$$

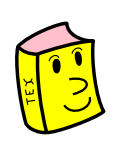
Si $P = \prod_{i=1}^k P_i$ un polynôme annulateur de u , alors $E = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker} (P_i(u))$



Théorème de Cayley-Hamilton

Soit χ_u le polynôme caractéristique de u , alors $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
En conséquence $\pi_u | \chi_u$.

DIAGONALISATION



Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.
- On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.



Propriété

Si A est diagonalisable et $\Delta = P^{-1}AP$, alors les valeurs propres sont les éléments de la diagonale de Δ et la multiplicité de chacune est son nombre d'occurrence dans cette diagonale.



Les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A



Propriétés caractéristiques

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

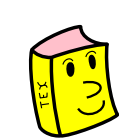
- u est diagonalisable.
- E possède une base de vecteurs propres;
- $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$;
- $\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}) = \dim E$;
- χ_u est scindé et $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\dim E_{\lambda_i} = m_i$.
- π_u est scindé à racines simples.
- u annule un polynôme scindé à racines simples.



En particulier si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

TRIGONALISATION

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.



Définition

- u est dite trigonalisable s'il existe une base \mathcal{B} de E pour laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.
- A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice T triangulaire supérieure.



Propriétés caractéristiques

Les quatres affirmations sont équivalentes :

- u est trigonalisable.
- χ_u est scindé.
- u annule un polynôme scindé
- π_u est scindé.



Corollaire

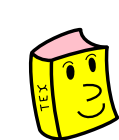
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.



Toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$, avec $\dim E = n$.



Définition

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.



Ce vocabulaire se transpose aux matrices



Propriété caractéristique

- u est nilpotent $\iff u$ est trigonalisable avec $\text{Sp}(u) = \{0\}$
- A est nilpotente \iff elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

DÉCOMPOSITION SPÉCTRALE



Décomposition spectrale

Si u est diagonalisable où E est de dim finie, avec $\text{Sp}(u) = \{\lambda_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}$.

Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on pose p_i la projection de E sur $E_{\lambda_i}(u)$ (de direction

$$\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k E_{\lambda_j}(u)). \text{ Alors}$$

$$u = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$$

et

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \sum_{i=1}^k P(\lambda_i) p_i$$

CONTACT INFORMATION

Web www.elamdaoui.com

Email elamdaoui@gmail.com

Phone 06 62 30 38 81