DS Sciences Physiques MathSpé

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Essence de térébenthine

L'essence de térébenthine est constituée de pinène $C_{10}H_{16}$ (et de produits lourds moins volatils dont on négligera l'effet dans ce problème).

I. Purification de l'essence de térébenthine

Le pinène, selon la température $T(K)$, présente une tension de vapeur $P(hPa)$ donnée par la relation :

$$\ln P(hPa) = 16{,}0481 - \frac{3326{,}67}{T(K) - 64{,}97}.$$

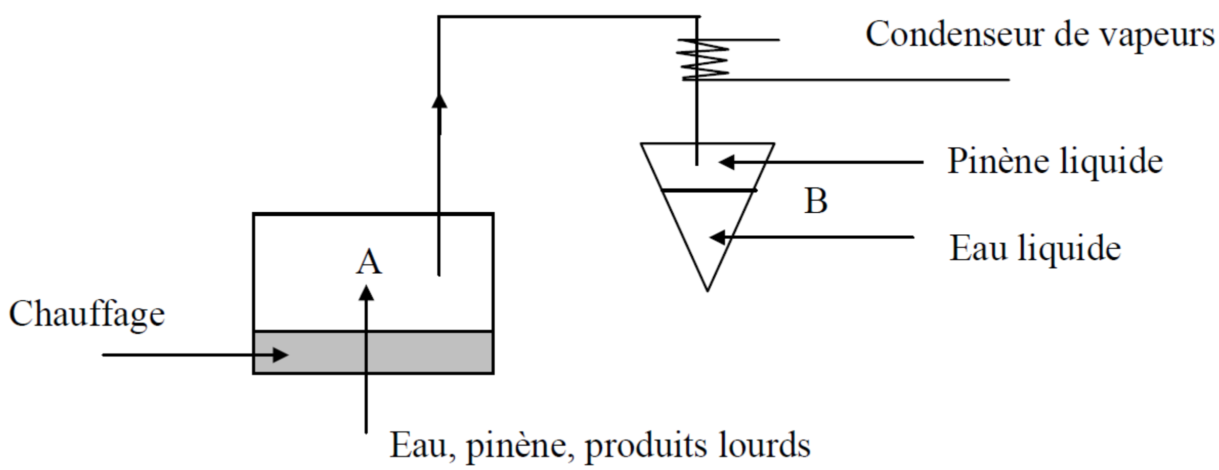
De même la tension de vapeur de l'eau est donnée par la relation :

$$\ln P(hPa) = 20{,}809 - \frac{5176{,}44}{T(K)}$$

1. Est-il dangereux de travailler (peinture d'un tableau) dans un local où l'essence de térébenthine est à l'air libre, $T = 298\,K$? La limite à ne pas dépasser est de $5\,g.m^{-3}$. On assimile la vapeur saturante à un gaz parfait. Quelle solution envisagez-vous ?
2. Dans quel domaine de température doit-on travailler pour éviter tout danger ? Résolution numérique.

Pour purifier l'essence de térébenthine, on se propose d'entraîner le pinène dans un courant de vapeur dans un appareillage correspondant au schéma ci-dessous, fonctionnant à la pression atmosphérique ($1013\,h\,Pa$):

Condenseur de vapeurs :



On recueille ainsi en B de l'eau et du pinène liquides. Eau et pinène liquides ne sont pas miscibles quelle que soit la température.

3. On se place au niveau du récipient A : faire l'inventaire des paramètres intensifs décrivant l'équilibre en supposant toutes les phases présentes. Quelles sont les relations entre ces paramètres ? En déduire la variance au niveau du récipient A . Que peut-on en déduire pour la valeur de la température T lorsque toutes les phases sont présentes ?

4. Écrire l'équation permettant de déterminer la température en A lorsque toutes les phases sont présentes. Résoudre numériquement, donner T en $°C$ à $\pm 1 °C$ près.

5. Calculer la pression partielle de l'eau et la pression partielle du pinène dans le récipient A .

6. Déterminer la fraction molaire puis la fraction massique en pinène dans le mélange recueilli en B . Le pinène et l'eau sont assimilés à des gaz parfaits donnant un mélange idéal à l'état de vapeur . Réponses littérales puis numériques.

7. Quelle masse minimale d'eau doit-on introduire en A si l'on veut recueillir $1000 g$ de pinène en B ?

II. Distillation du pinène

En fait, le pinène obtenu de formule $C_{10}H_{16}$ est composé d'un mélange de deux isomères : l' α –pinène et le β –pinène (chacun de ces isomères a pour formule brute $C_{10}H_{16}$) . Le diagramme isobare tracé à la pression de $73 hPa$ présente l'évolution de la température en fonction de la composition molaire en α –pinène pour un mélange α –pinène et β –pinène.

8. Quelle est la température d'ébullition de l' α –pinène pur $t_{eb\alpha}$ et celle du β –pinène pur $t_{eb\beta}$?

9. On considère un mélange de $280 g$ d' α –pinène et $720 g$ de β –pinène. Sous quelle forme se trouve ce mélange si on le porte à des températures successives de $t=76 °C$, $t=80 °C$, $t=81 °C$ et $t=83 °C$? Quel est le nom des courbes $C1$ et $C2$ figurant sur le diagramme?

10. Lors d'une distillation du mélange précédent, à quelle température t_{eb} observe-t-on l'apparition de la première bulle de vapeur ?

11. Les premières gouttes de liquide ainsi recueillies sont-elles plus riches en α –pinène ou en β -pinène que le mélange initial? Commenter. Quelle est leur composition en fraction molaire ?

12. Déterminer la masse et la composition des phases en g pour le mélange étudié à $t=80 °C$.

Données :

Masses atomiques :

$H=1 g.mol^{-1}$

$C=12 g.mol^{-1}$

$O=16 g.mol^{-1}$

Constante des gaz parfaits

$R=8,31 J.mol^{-1}.K^{-1}$

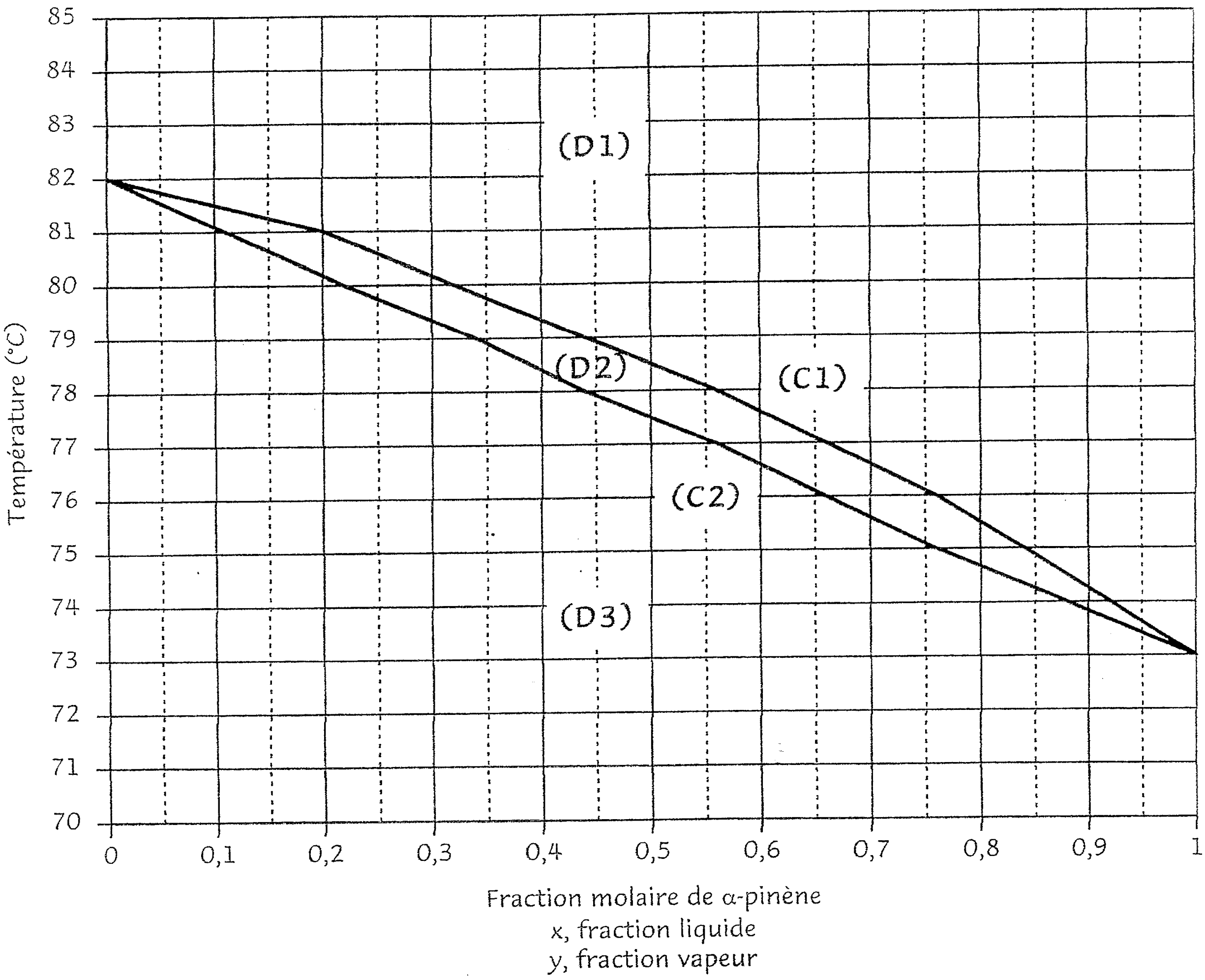


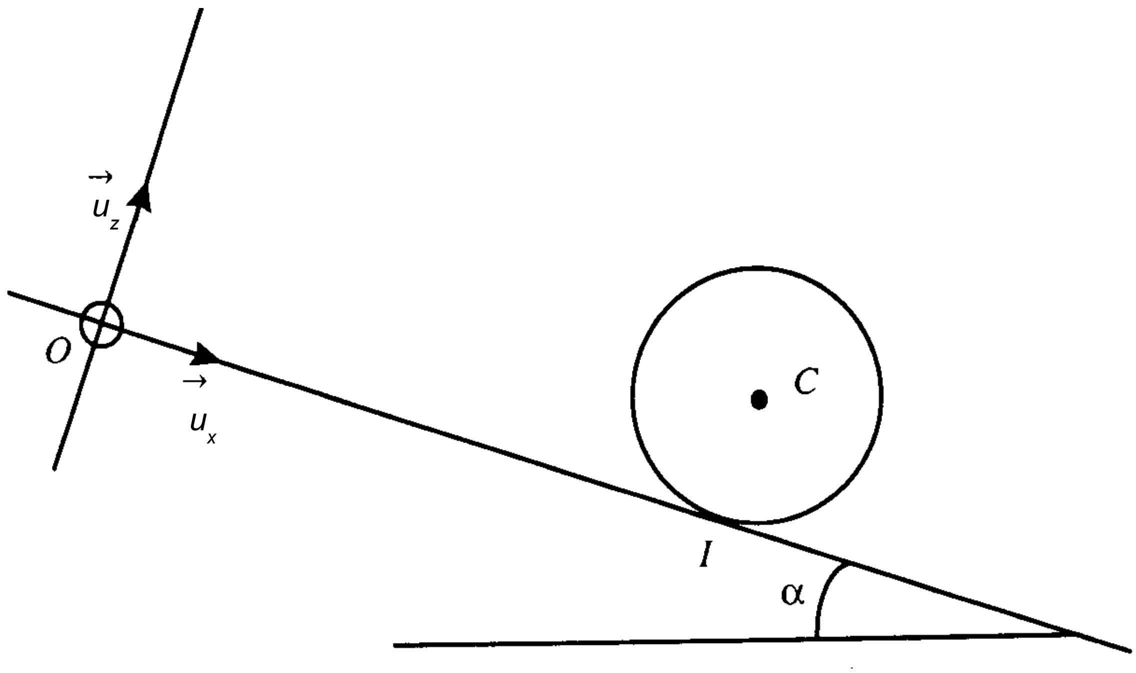
Diagramme Equilibre liquide vapeur du mélange α-pinène et β-pinène
($P = 73$ hPa)

Cerceau sur un plan incliné

On se propose d'étudier quelques mouvements d'un cerceau de masse m, modélisé par un cercle de centre C et de rayon a. Le moment d'inertie du cerceau par rapport à son axe de révolution est noté $J = m a^2$.

Ces mouvements auront lieu dans le plan vertical $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ le long d'un plan incliné de longueur suffisante, faisant l'angle α avec l'horizontale. Le contact en I du cerceau et du plan incliné est toujours supposé réalisé, et il est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement : f (terme positif et constant).

On posera $\vec{OI} = x \vec{u}_x$.



Le référentiel du laboratoire est nommé $\mathscr{R}_L$. On note $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ le repère lié à $\mathscr{R}_L$ supposé galiléen. On désignera par :

$\vec{v} = v(t) \vec{u}_x$ le vecteur vitesse de C,

$\vec{\omega} = \omega(t) \vec{u}_y$ le vecteur vitesse de rotation du cerceau,

$\vec{R} = R_x(t) \vec{u}_x + R_z(t) \vec{u}_z$ la réaction du plan incliné sur le cerceau,

I. Préliminaires

1. Exprimer la vitesse de glissement du cerceau par rapport au plan incliné $\vec{V}_g = V_g(t) \vec{u}_x$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de v, a et ω.

(*On respectera la notation* V_g *et on soignera l'écriture afin d'éviter toute confusion entre* V_g *et* v)

2. Exprimer l'énergie cinétique E_k du cerceau en fonction de m , v , a et ω .
3. Appliquer le théorème du centre de masse au cerceau et le théorème du moment cinétique en $G=C$, en projection selon Cy , dans le référentiel barycentrique. En déduire trois relations scalaires. Justifier que ces trois relations ne peuvent suffire à déterminer le mouvement du cerceau.
4. Écrire le théorème de la puissance cinétique au cerceau dans $\mathscr{R}_L$ en utilisant les notations scalaires proposées par l'énoncé. Montrer que cette nouvelle relation n'apporte rien de plus par rapport aux relations précédentes.

A l'instant origine ($t=0$), I se trouve en O et les conditions initiales imposées au cerceau sont $v=v_0>0$ et $\omega=\omega_0<0$.

II. Étude dynamique

Données numériques

$m=300\,g$

$J=75\,10^{-3}\,kg.m^2$.

$g=10\,m.s^{-2}$ *(accélération de la pesanteur)*

$f=0{,}2$

$v_0=2\,m.s^{-1}$

$a\,\omega_0=-7\,m.s^{-1}$

$\alpha=0{,}1\,rad$

Pour les applications numériques uniquement, on travaillera au premier ordre en α *mais dans les formules littérales, on conservera* $\sin(\alpha)$ *,* $\cos(\alpha)$ *,* $\tan(\alpha)$ *. On écrira toute réponse d'abord sous forme littérale avant de passer éventuellement à l'application numérique.*

5. En utilisant les données fournies, déterminer ω_0 (littéral puis numérique)

A. Première partie du mouvement

On étudie ici la première phase du mouvement.

6. Déterminer V_g en $t=0$ notée V_{g0} (littéral puis numérique). Que peut-on en déduire pour la première phase du mouvement. Y-a-t-il ou non glissement ? Rappeler les lois de Coulomb concernant ce cas.
7. Déterminer les lois d'évolution de R_z , R_x , v , $a\,\omega$ en fonction du temps t (littéral puis numérique).
8. Déterminer la loi d'évolution de V_g en fonction du temps(littéral puis numérique). A quel instant noté τ_1 cette première phase de mouvement s'annule-t-elle ?(littéral puis numérique)
9. Déterminer $x(t)$ au cours de cette première phase (littéral puis numérique). Tracer

soigneusement $x(t)$ en indiquant les valeurs particulières de x et de t et mettre en évidence l'existence d'un instant particulier noté τ'_1 (littéral puis numérique).

10.Décrire avec soin le mouvement du cerceau au cours de cette première phase. Sur un tableau récapitulatif, indiquer les valeurs numériques de R_z , R_x , v , $a\omega$, V_g aux instants $t=0$, $t=\tau'_1$, $t=\tau_1$.

B. Deuxième partie du mouvement

On prendra une nouvelle origine des temps (mais pas une nouvelle origine des axes) au début de cette deuxième phase ($t'=0$) et dans les calculs littéraux, on désignera par v'_0 et $a\omega'_0$ les valeurs initiales de v et $a\omega$.

11.Quelle est la valeur numérique de la vitesse de glissement en $t'=0$? Peut-on en déduire quelque chose pour la deuxième phase du mouvement : y-a-t-il ou non glissement ?

12.La deuxième phase est une phase de non glissement. Que faut-il vérifier en ce qui concerne les lois de Coulomb dans ce cas ?

13.Déterminer les lois d'évolution de R_z , R_x , v , $a\omega$ en fonction du temps t' (littéral puis numérique).

14.Vérifier l'hypothèse posée concernant cette deuxième phase

15.Déterminer $x(t')$ au cours de cette deuxième phase (littéral puis numérique). Tracer soigneusement $x(t')$ en indiquant les valeurs particulières de x et de t' et mettre en évidence l'existence d'un instant particulier noté $t'=\tau'_2$ (littéral puis numérique).

16.Décrire avec soin le mouvement du cerceau au cours de cette deuxième phase. Sur un tableau récapitulatif, indiquer les valeurs numériques de R_z , R_x , v , $a\omega$, V_g aux instants $t'=0$, $t'=\tau'_2$, $t'=2\tau'_2$.

III. Aspects énergétiques

A. Deuxième phase

17.Exprimer la variation d'énergie cinétique entre les instants $t'=0$ et $t'=\tau'_2$. Faire l'application numérique.

18.Que vaut, entre ces mêmes instants, le travail de la réaction $\vec{R}$?

19.Vérifier numériquement le théorème de l'énergie cinétique.

B. Première phase

20.Exprimer la variation d'énergie cinétique entre les instants $t=0$ et $t=\tau_1$. Faire l’application numérique.

21.Calculer les différents travaux mis en jeu.

22.Vérifier numériquement le théorème de l'énergie cinétique.

IV. Cas général

On se place dans le cas où les conditions initiales imposées au cerceau sont $v=v_0>0$ et $\omega=\omega_0<0$.

23.À quelle condition portant sur v_0 , $a\,\omega_0$, α , f peut-on observer un « rétro ».

24.Cette première phase supposée avec rétro est-elle obligatoirement suivie d'une deuxième phase sans glissement. Si non, indiquer la condition pour obtenir première phase avec rétro suivie d'une deuxième phase avec glissement.

Fibre optique

I. Onde électromagnétique et relations de passage

1. Rappeler l'expression donnant la vitesse v de la lumière dans un milieu d'indice n en fonction de la vitesse c de la lumière dans le vide.
2. Établir pour une onde de fréquence donnée, la relation entre sa longueur d'onde λ dans le milieu d'indice n et sa longueur d'onde λ_0 dans le vide.
3. On désigne le vecteur d'onde pour une onde progressant selon $\vec{u}_x$ dans le milieu d'indice n par $\vec{k}=k\,\vec{u}_x$ avec $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$. Retrouver la relation entre k dans le milieu, k_0 grandeur du vecteur d'onde dans le vide et n.
4. L'onde lumineuse est une onde électromagnétique. Pour l'onde progressive de vecteur d'onde $\vec{k}=k\,\vec{u}_x$ dans le milieu d'indice n, on a $\vec{E}=E\,\vec{u}_y=E_M\cos(\omega t-k x)\ \vec{u}_y$. Déterminer le champ magnétique de l'onde donné par $\vec{B}=\dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$ (le trièdre $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{k}$ est donc direct) en fonction de E, c, n.

La puissance instantanée traversant dans le sens du vecteur unitaire $\vec{u}$ une surface perpendiculaire à $\vec{u}$ est donnée par le flux $P(t)=\iint_S \vec{\pi}\,\vec{dS}$ du vecteur de Poynting $\vec{\pi}=\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ à travers la surface avec $\vec{dS}=dS\,\vec{u}$.

5. Donner l'expression de la puissance instantanée rayonnée par l'onde étudiée à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation. En déduire l'expression de la puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers S en fonction de n, E_M, μ_0, c, S.

On considère maintenant la frontière située en $x=0$ entre deux milieux transparents. Pour $x<0$, $n=n_1$ et pour $x>0$, $n=n_2$. Une onde caractérisée par le champ $\vec{E}_1(x,t)=E_M\cos(\omega t-k_1 x)\ \vec{u}_y$ vient frapper en $x=0$ la frontière avec le second milieu. Il apparaît une onde réfléchie de pulsation ω, $\vec{E}'_1=E'_1\vec{u}_y$, se propageant selon $-\vec{u}_x$ dans le milieu 1 et une onde transmise de pulsation ω, $\vec{E}_2=E_2\vec{u}_y$ se propageant selon $+\vec{u}_x$ dans le milieu 2. On désigne par ρ le coefficient de réflexion pour l'onde et par τ le coefficient de transmission avec $\rho=\dfrac{E'_1(x=x_{frontière},t)}{E_1(x=x_{frontière},t)}$ et $\tau=\dfrac{E_2(x=x_{frontière},t)}{E_1(x=x_{frontière},t)}$

6. Écrire $\vec{E}_1(x,t)$ en fonction de E_M, ω, k_0, n_1.
7. Écrire $\vec{E}'_1(x,t)$ en fonction de ρ, E_M, ω, k_0, n_1.
8. Écrire $\vec{E}_2(x,t)$ en fonction de τ, E_M, ω, k_0, n_2.
9. Écrire $\vec{B}_1(x,t)$, $\vec{B}'_1(x,t)$, $\vec{B}_2(x,t)$.

À la surface de séparation entre deux milieux diélectriques tels que ceux étudiés ici, on admettra qu' il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique, continuité de la composante normale du champ magnétique mais aussi continuité de la composante tangentielle du champ magnétique (alors qu'il y a discontinuité de la composante normale du champ électrique).

10.Écrire les relations de continuité dans ce cas et en déduire les expressions de ρ et de τ en fonction des indices n_1 et n_2 . On obtiendra $\rho=\frac{1-n}{1+n}$ et $\tau=1+\rho$ avec n désignant ici le rapport des deux indices.

11.On appelle P_i la puissance moyenne incidente, P_r la puissance moyenne réfléchie, P_t la puissance moyenne transmise. Déterminer le coefficient de réflexion en énergie $R=\frac{P_r}{P_i}$ et le coefficient de transmission en énergie $T=\frac{P_t}{P_i}$ en fonction des indices. On trouvera $R+T=1$. Commenter.

II. Lame antireflet

12.La face d'entrée d'une fibre optique d'indice $N=1{,}69$ est éclairée, en incidence normale, par un faisceau laser en transit dans l'air d'indice $n=1$ ($Figure\,1$). Calculer la valeur numérique des coefficients ρ et τ . En déduire la proportion d'énergie réfléchie par la face d'entrée et la proportion d'énergie transmise à la fibre optique.

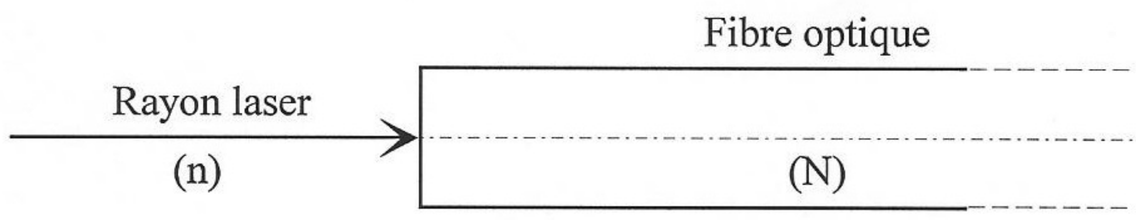


Figure 1

Une couche mince de cryolithe (Na_3AlF_6 d'indice n' et d'épaisseur D égale au quart de la longueur d'onde λ de la lumière dans ce milieu (« lame quart d'onde »), est déposée sur la face d'entrée de la fibre optique ($Figure\,2$).

13.Exprimer, en fonction des indices n , n' et N , les coefficients de transmission en amplitude τ_1 , τ_2 , τ_3 et les coefficients de réflexion en amplitude ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 notés sur la $Figure\,2$.

τ_1 pour la transmission de l'air vers la cryolithe

τ_2 pour la transmission de la cryolithe vers la fibre

τ_3 pour la transmission de la cryolithe vers l'air

ρ_1 pour la réflexion "air - cryolithe - air"

ρ_2 pour la réflexion “cryolithe - fibre - cryolithe”

ρ_3 pour la réflexion “cryolithe - air - cryolithe”

14.Exprimer ρ_3 en fonction de ρ_1 . Commenter éventuellement.

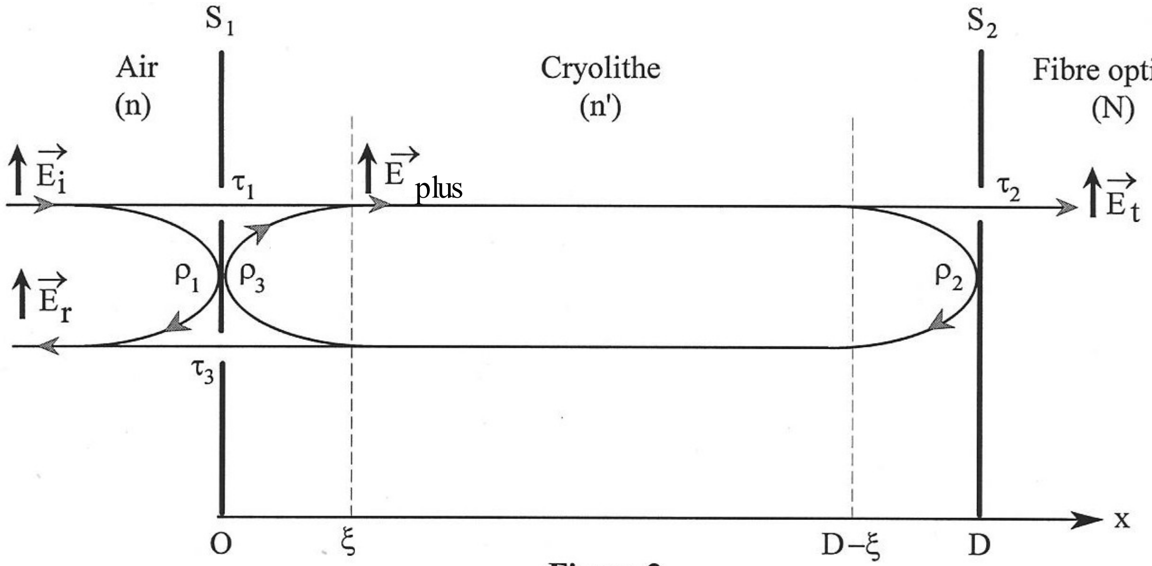


Figure 2

Le champ électrique incident dans l'air à l'abscisse $x=0$ est désigné, en notation complexe, par $\underline{\vec{E}}_i(x=0-,t)=\underline{E}_{M,i}\exp(j\omega t)\vec{u}_y$.

Le champ électrique transmis par la lame quart d'onde, défini dans la fibre, en $x=D=\lambda/4$, sera désigné par $\underline{\vec{E}}_t(x=D+,t)=\underline{E}_{M,t}\exp(j\omega t)\vec{u}_y$.

Dans la lame, on peut analyser le phénomène en étudiant une infinité d'ondes aller et retour suite aux réflexions multiples des ondes en $x=0$ et en $x=D$. On adopte ici une autre mode d'analyse. On considère directement la somme des ondes qui se propagent dans le sens positif. Ce champ électrique qui se se propage dans le sens positif est désigné à l'abscisse $x=0$ dans la lame par $\underline{\vec{E}}_{plus}(x=0+,t)=\underline{E}_{M,plus}\exp(j\omega t)\vec{u}_y$. Il existe aussi bien entendu dans la lame un champ électrique qui se propage dans le sens négatif.

Ce champ $\underline{\vec{E}}_{plus}(x=0+,t)$ résulte de la superposition du champ $\tau_1\underline{\vec{E}}_i(x=0-,t)$ et d'un autre champ $\underline{\vec{E}}_{autre}$ dont la valeur est égale à celle de $\underline{\vec{E}}_{plus}$ en $x=0$ à l'instant $t-\frac{2D}{v}$ (précédemment à un aller retour à la vitesse de propagation v dans la cryolithe), atténuée par deux réflexions successives. (Sur la *Figure* 2 , pour des raisons de lisibilité, on a défini une grandeur notée ξ . Il faut bien entendu considérer $\xi\to 0$)

15.Écrire $\underline{\vec{E}}_{autre}(x=0+,t)$ en fonction de $\underline{\vec{E}}_{plus}(x=0+,t)$, de D et de ρ_2 et ρ_3 ...etc. Modifier l'expression pour tenir compte de la valeur de D .

16.En déduire $\underline{E}_{M,plus}$ en fonction de $\underline{E}_{M,i}$ et des autres données.

17.On pose de la même façon: $\underline{\vec{E}}_r(x=0-,t)=\underline{E}_{M,r}\exp(j\omega t)\vec{u}_y$. Exprimer $\underline{E}_{M,r}$ en fonction de $\underline{E}_{M,i}$ et des différents coefficients ρ_i et τ_i , puis en fonction de $\underline{E}_{M,i}$ et des seuls coefficients ρ_i .Exprimer finalement $\underline{E}_{M,r}$ en fonction de $\underline{E}_{M,i}$ et des coefficients ρ_1 et

ρ_2 .

18.En déduire une condition entre ρ_1 et ρ_2 qui permette d'annuler ce champ. Transposer la relation précédente en fonction des indices n , n' et N . Ce résultat serait il modifié si l'on intervertissait les indices n et N ?

19.Calculer la valeur numérique de l'indice de la cryolithe qui réalise cette condition.

20.Quelle est alors la proportion d'énergie transmise à la fibre?

21.La face de sortie de la fibre est revêtue d'une même lame mince de cryolithe. Quelle est la puissance transmise en bout de ligne ? Conclure.

III. Guidage par une gaine réfléchissante

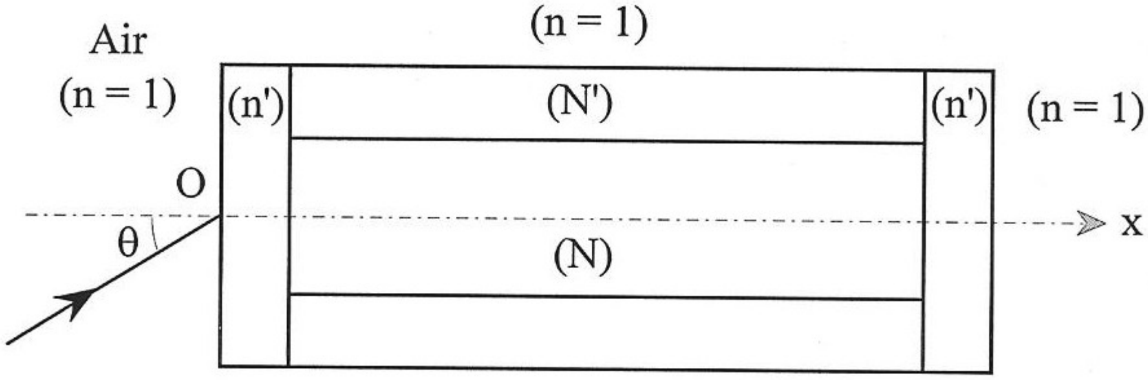


Figure 3

Une fibre optique d'indice $N=1{,}69$ et dont les faces d'entrée et de sortie ont subi le traitement antireflet décrit précédemment, est étirée ($Figure\,3$) sous forme d'un cylindre de révolution d'axe Ox .

22.On considère un rayon incident sous l'angle θ . Démontrer que l'angle de pénétration du rayon lumineux dans le cœur d'indice N est indépendant de la couche d'indice n' , quelle que soit son incidence initiale.

Cette fibre est gainée par une couche transparente d'indice $N'=1{,}30$ (dont l'épaisseur est très supérieure à la longueur d'onde).

23.Montrer que le rayon lumineux incident, situé dans un plan méridien et incliné d'un angle θ par rapport à l'axe est guidé dans le cœur (c'est-à-dire qu'il n'en sort pas par réflexion totale sur la couche d'indice N') si θ est inférieur à une certaine valeur θ_L . On exprimera $\sin(\theta_L)$ en fonction de N et de N' . Application numérique: calculer θ_L . Que doit-on en conclure ici ?

IV. Face de sortie focalisante

La fibre étant utilisée en "monomode", c'est-à-dire en lumière paraxiale pour éviter les réflexions multiples, on recherche un profil de sortie ($Figure\,4$) qui fasse converger vers un foyer F tout faisceau de lumière parallèle à l'axe Ox . Le calcul se fera en négligeant l'épaisseur de la couche antireflet. On désignera par S le sommet de la face de sortie et par $f = SF$ la distance focale. La position du point d'émergence M sera repérée à l'aide de ses coordonnées polaires r et α .

24.On considérera ci-après les chemins optiques mesurés jusqu'au point F , à compter d'un plan d'onde (P_o fixe, positionné en H_o sur l'axe optique, à l'intérieur de la fibre. Exprimer alors, en fonction de f , r , α et des indices, la différence (Δ) entre le chemin optique selon un rayon lumineux passant par le point courant M et le chemin optique relatif au rayon particulier confondu avec l'axe optique.

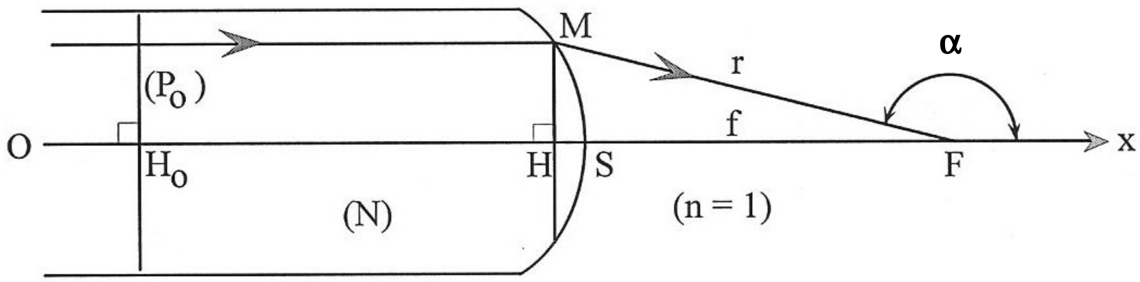


Figure 4

25.Sachant qu'un foyer lumineux est un point où se superposent un grand nombre d'ondes en concordance de phase, traduire cette propriété par une condition relative à la différence (Δ). En déduire alors l'équation $r=g(\alpha)$ du profil de la face de sortie dans le plan de figure. Comment se nomme cette courbe?

26.Les fibres optiques utilisées en monomode ont un diamètre très faible, de l'ordre de $6\,\mu m$. En supposant que la valeur maximale de la distance HM soit égale à $3\,\mu m$, en déduire la distance focale f puis la flèche $(HS)_{max}$ de la face de sortie, si l'on souhaite que le demi-angle au sommet du cône de lumière atteignant le foyer F , c'est-à-dire $\pi-\alpha$, ait pour mesure $30°$.

Réponses

Essence de térébenthine

1) Tension de vapeur de "l'essence de térébenthine" à 298 K (en hPa)

$$\ln P = 16{,}0481 - \frac{3326{,}67}{T - 64{,}97}$$

$$= 1{,}77238$$

$$\boxed{P = 5{,}88 \text{ hPa}}$$

à convertir en masse de pinène par m³

$$P = \frac{n R T}{V}$$

$$= \frac{m}{M} \frac{RT}{V} \quad \text{avec } M : \text{masse molaire du pinène}$$

$$= \frac{m}{V} \frac{RT}{M}$$

$$\boxed{\frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}}$$

A.N.

$$= \frac{5{,}88 \cdot 10^{2} \quad 136 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \quad 298}$$

$$= 32{,}3 \quad 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$$

$$\boxed{\frac{m}{V} = 32{,}3 \text{ g m}^{-3}}$$

$$> \left(\frac{m}{V}\right)_{\text{limite}} = 5 \text{ g m}^{-3}$$

Il faut ventiler la pièce

---

2) Pour éviter tout danger, il faut

$$P < \overbrace{\left(\frac{m}{V}\right)_{\text{limite}} \frac{RT}{M}}^{P_{\text{limite}}(T)}$$

soit en tenant compte de l'unité de P (hPa)

$$\boxed{100 \exp\left(16{,}0481 - \frac{3326{,}67}{T - 64{,}97}\right) < \frac{5 \cdot 10^{-3} \quad 8{,}31 \quad T}{136 \quad 10^{-3}}}$$

La résolution numérique (exemple : solveur ou étude graphique) donne :

$$\boxed{T < 269{,}8\ K}$$

3) Eau et pinène ne sont pas miscibles à l'état liquide. La distillation est donc une distillation <u>hétéroazéotropique</u>

→ Paramètres intensifs : 4

$$\boxed{T,\ P,\ y_{pinène},\ y_{eau}}$$

(<u>on n'a pas à définir de fraction molaire pour la phase liquide</u> puisque l'on suppose une phase aqueuse pure et une phase organique pure avec le pinène — si on néglige dans ce calcul les autres produits lourds —)

→ Relations : 3

équilibre 1 avec $\mu_{pinène}(\ell) = \mu_{pinène}(g)$

$$\boxed{pinène\ (\ell) \rightleftharpoons pinène\ (g)}$$

equilibre 2 avec $\mu_{eau}(\ell) = \mu_{eau}(g)$

$$\boxed{eau\ (\ell) \rightleftharpoons eau\ (g)}$$

relation phase gaz

$$\boxed{y_{pinène} + y_{eau} = 1}$$

→ Variance :

variance générale = nombre de paramètres intensifs − nombre de relations

$$\boxed{\text{variance générale} = 1}$$

On doit enfin tenir compte du fait que la pression est fixée

$$P = P_{atm} = 1013\ hPa$$

$$\boxed{\text{variance résiduelle} = 0}$$

→ En conclusion, si P est fixé, <u>la variance est nulle</u> lorsque toutes les phases sont présentes. <u>T est donc fixé</u> (ainsi que $y_{pinène}$ et y_{eau})

4) En travaillant avec les paramètres

$$P \,,\ T \,,\ P_{\text{pinène}} \,,\ P_{\text{eau}}$$

(au lieu de P, T, $y_{\text{pinène}}$, y_{eau})

on écrit les 3 relations existantes indiquées à la question précédente :

a) $\underset{\text{seul dans sa phase}}{\text{pinène }(\ell)} \rightleftharpoons \text{pinène }(g)$

donc : (cf $K^\circ(T) = \dfrac{P_{\text{pinène}}/p^\circ}{1}$)

$$P_{\text{pinène}} = P^*_{\text{pinène}}(T)$$

pression de vapeur saturante
ou tension de vapeur à T
(donné dans le texte)

b) $\underset{\text{seule dans sa phase}}{\text{eau }(\ell)} \rightleftharpoons \text{eau }(g)$

donc :

$$P_{\text{eau}} = P^*_{\text{eau}}(T)$$

(donné dans le texte)

c) $P = P_{\text{pinène}} + P_{\text{eau}}$

$$\boxed{P = P^*_{\text{pinène}}(T) + P^*_{\text{eau}}(T)}$$

en hPa :

$$1013 = \exp\left(16{,}0481 - \frac{3326{,}67}{T - 64{,}97}\right) + \exp\left(20{,}809 - \frac{5176{,}44}{T}\right)$$

En utilisant le solveur de la calculatrice, on trouve

$$\boxed{\begin{aligned} T = T_{\text{hétéroazéotrope}} &= 368{,}2 \text{ K} \\ &= 95{,}0\,°\text{C} \end{aligned}}$$

---

5) $$P_{\text{pinène}\ T_H} = \exp\left(16{,}0481 - \frac{3326{,}67}{368{,}16 - 64{,}97}\right)$$

$$\boxed{P_{\text{pinène}} = 160{,}1 \text{ hPa}}$$

$$P_{eau}(T_H) = \exp\left(20{,}809 - \frac{5176{,}44}{368{,}16}\right)$$

$$\boxed{P_{eau}(T_H) = 852{,}9 \text{ hPa}}$$

---

6) Dans le "mélange" (eau + pinène non miscibles) en B, les fractions molaire et massique sont <u>les mêmes</u> que dans le mélange gaz correspondant à l'hétéroazéotrope.

$$\boxed{y_{pinène} = \frac{P_{pinène}}{P}}$$

A.N. $= \dfrac{160{,}1}{1013}$

$$\boxed{y = y_{pinène} = 15{,}8\ \% \quad \text{(fraction molaire)}}$$

Fraction massique en pinène :

dans n moles :
- $n\,y$ mol pinène $\longrightarrow$ $n\,y\,M_{pinène}$ masse pinène
- $n(1-y)$ mol eau $\longrightarrow$ $n(1-y)\,M_{eau}$ masse eau

$$w_{pinène} = \frac{y\,M_{pinène}}{y\,M_{pinène} + (1-y)\,M_{eau}}$$

$$\boxed{w_{pinène} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)\frac{M_{eau}}{M_{pinène}}}}$$

A.N. $= \dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{0{,}158} - 1\right)\frac{18}{136}}$

$$\boxed{w = w_{pinène} = 58{,}6\ \% \quad \text{(fraction massique)}}$$

---

7) On a :

$$w_{pinène} = \frac{m_{pinène}}{m_{pinène} + m_{eau}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{m_{eau}}{m_{pinène}}}$$

d'où

$$\boxed{m_{eau} = \left(\frac{1}{w_{pinène}} - 1\right) m_{pinène}}$$

A.N. $m_{eau}/g = \left(\frac{1}{0,586} - 1\right) 1000$

$$\boxed{m_{eau} = 705\ g}$$

---

8) L'échelle des abscisses (fraction molaire de α-pinène) donne pour

$x = 0$ $\quad T = T^*_{eb}$ (β pinène) $= 82\,°C$

$x = 1$ $\quad T = T^*_{eb}$ (α pinène) $= 73\,°C$

---

9) Puisque la masse molaire de l'αpinène est la même que la masse molaire du βpinène, on se trouve dans le cas particulier où la fraction molaire est égale à la fraction massique.

$$x = w$$

avec

$$w_{\alpha\,pinène} = \frac{m_{\alpha\,pinène}}{m_{\alpha\,pinène} + m_{\beta\,pinène}}$$

$$= \frac{280}{280 + 720}$$

$$\boxed{x_\alpha = w_\alpha = 28\,\%}$$

En traçant une verticale, on coupe C2 pour :

$T_{eb} = 79\,°C$

et C1 pour :

$T_{ros} = 80,3\,°C$

donc :

$T = 76\,°C$	mélange liquide	
$T = 80\,°C$	mélange biphasé liquide + vapeur	
$T = 81\,°C$	mélange vapeur	
$T = 83\,°C$	mélange vapeur	

C2	: courbe d'ébullition
C1	: courbe de rosée

---

10) $\boxed{T_{eb} = 79°C}$

---

11) La première bulle de vapeur (donc les premières gouttes de liquide obtenues dans cette distillation) correspondent à une composition molaire ou massique de $\boxed{38\% \text{ en } \alpha\text{-pinène}}$.

Elles sont logiquement plus riches en α-pinène que le mélange initial c'est à dire plus riche en liquide plus volatil.
(on sait que ce n'est pas toujours vrai en présence d'azéotrope ou d'hétéroazéotrope)

---

12) Pour $t = 80°C$

$$x = w_{Liq} = 22\% \quad \text{(point L)}$$
$$y = w_{vap} = 32\% \quad \text{(point V)}$$
et
$$w_{initial} = 28\% \quad \text{(point M)}$$

Pour $m = 1000g$

⟶ masse de liquide $m_L = m \frac{MV}{LV}$

$$= m \frac{0{,}32 - 0{,}28}{0{,}32 - 0{,}22}$$

$$\underline{m_L = 400\ g}$$

avec α-pinène liquide

$$m_{L\alpha} = m_L \ w_L$$
$$= 400 \times 0{,}22$$
$$\underline{m_{L\alpha} = 88g}$$

et

$$\underline{m_{L\beta} = 312g}$$

⟶ masse de vapeur $m_V = m \frac{LM}{LV}$

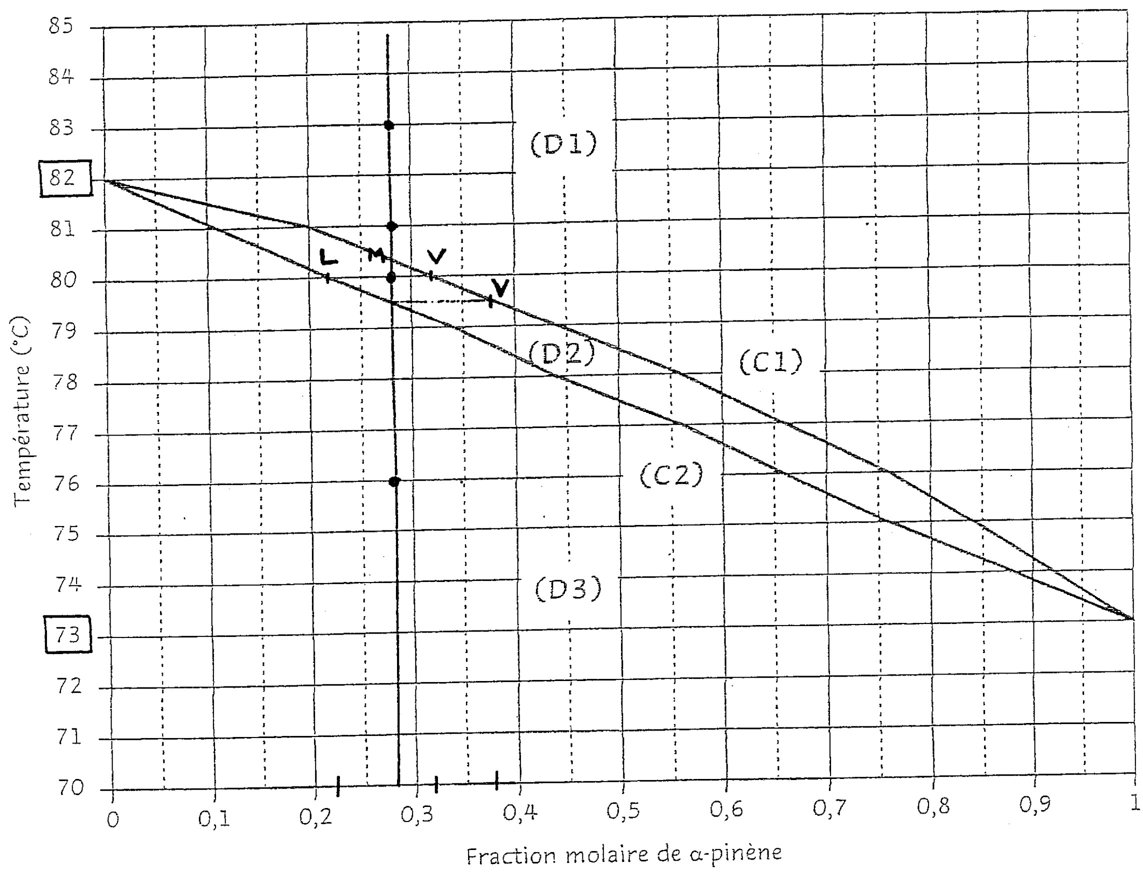
$$\underline{m_V = 600g}$$

avec α-pinène vapeur

$$m_{V\alpha} = m_V \ w_V$$
$$= 600 \times 0{,}32$$
$$\underline{m_{V\alpha} = 192g}$$

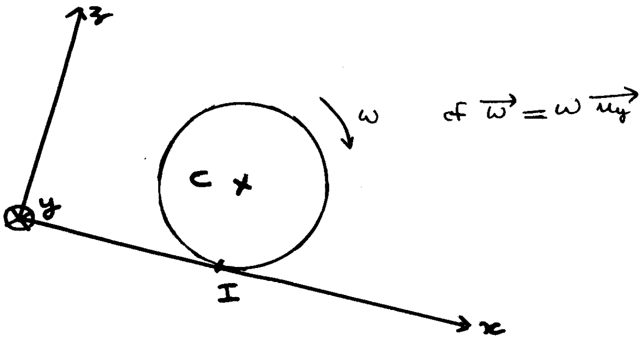
et

$$\underline{m_{V\beta} = 408g}$$


85
84
83
82
81
80
79
78
77
76
75
74
73
72
71
70
Température (°C)
(D1)
L
M
V
V
(D2)
(C1)
(C2)
(D3)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
Fraction molaire de α-pinène

Cerceau sur un plan incliné

1) vitesse de glissement



$$\overrightarrow{V_g}_{\text{cerceau/plan}} = \overrightarrow{v}_{I\in\text{cerceau}} - \underbrace{\overrightarrow{v}_{I\in\text{plan}}}_{\text{nul}}$$

$$\downarrow$$

$$\overrightarrow{v_C} + \overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{\omega}$$

$$\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\ \begin{vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_g} = (v - a\omega)\ \overrightarrow{u_x}}$$

---

2) $$E_K = \frac{1}{2} m v_G^2 + E_K^*$$

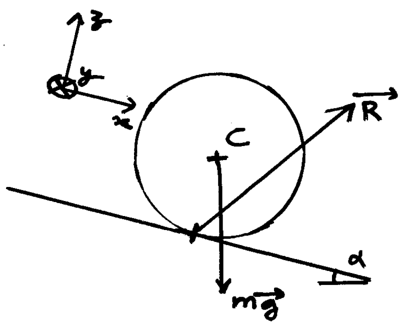
(deuxième théorème de König)

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \underbrace{J_{Cy}}_{ma^2} \omega^2$$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m (v^2 + a^2\omega^2)}$$

---

3)



théorème du centre de masse dans $\mathcal{R}_L$

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$/x \quad \boxed{R_x + mg\sin\alpha = m\frac{dv}{dt}} \quad (1)$$

$$/z \quad \boxed{R_z - mg\cos\alpha = 0} \quad (2)$$

théorème du moment cinétique en C dans le référentiel barycentrique ($\mathcal{R}^*$) en projection selon Cy

$$-R_x\, a = J\frac{d\omega}{dt}$$

$$= ma^2\frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{R_x = -ma\frac{d\omega}{dt}} \quad (3)$$

Les inconnues sont : R_x, R_z, v, ω soit 4 inconnues
Pour 3 équations. Il faut donc une quatrième équation.

---

4) Théorème de la puissance cinétique dans $\mathcal{R}_L$

$$\frac{dE_k}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ttes forces}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m(v^2 + a^2\omega^2) = m\vec{g}\cdot\vec{v} + \vec{R}\cdot\underbrace{\vec{v}_{I\in\text{cerceau}}}_{\text{ici } \vec{V}_g}}$$

$$m\, v\frac{dv}{dt} + ma^2\omega\frac{d\omega}{dt} = mgv\sin\alpha + R_x(v - a\omega)$$

soit :

$$v\underbrace{\left(m\frac{dv}{dt} - mg\sin\alpha - R_x\right)}_{\text{nul d'après (1)}} + a\omega\underbrace{\left(R_x + ma\frac{d\omega}{dt}\right)}_{\text{nul d'après (3)}} = 0$$

donc $$0 = 0$$

Cette équation n'apporte rien de plus que (1), (2), (3).

---

5) $$a = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

donc $$\omega_0 = \frac{a\omega_0}{a}$$

$$\boxed{\omega_0 = (a\omega_0)\sqrt{\frac{m}{J}}}$$

A.N. $\omega_o = -7\sqrt{\frac{0{,}3}{75\ 10^{-3}}}$

$$\boxed{\omega_o = -14 \text{ rad s}^{-1}}$$

($-2{,}2$ tours s^{-1})

---

6) $V_{g_o} = v_o - a\omega_o$

A.N. $V_{g_o} = 2 - (-7)$

$$\boxed{V_{g_o} = 9 \text{ m s}^{-1}}$$

La première phase se fait avec <u>une vitesse de glissement positive</u> (elle s'arrête quand cette vitesse devient nulle : soit pour rester <u>nulle</u>, soit pour devenir ensuite <u>négative</u>)

En cas de glissement :

$$\left|\frac{R_T}{R_N}\right| = f \quad \text{et} \quad \vec{R}\,\vec{V_g} \leq 0$$

Ici

$$\boxed{(4) \quad \left|\frac{R_x}{R_z}\right| = f \quad \text{et} \quad R_x V_g \leq 0}$$

Donc, ici

$$\boxed{\begin{array}{l} V_g \geq 0 \\ R_x \leq 0 \end{array}}$$

---

7) d'après (2)

$$\boxed{R_z = mg\cos\alpha}$$

d'après (4) avec $R_x \leq 0$

$$\boxed{R_x = -f\,mg\cos\alpha}$$

d'après (1)

$$-f\,mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha) = \text{constante}$$

$$\boxed{v = v_o - g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)\ t}$$

d'après (3)

$$a\frac{d\omega}{dt} = f\,g\cos\alpha = \text{constante}$$

$$\boxed{a\omega = a\omega_o + f\,g\cos\alpha\ t}$$

applications numériques : (avec $\cos\alpha = 1$ $\sin\alpha = \alpha = 0{,}1$ rad)

$$R_z = 0{,}3 \times 10 \times 1$$

$$\boxed{R_z = 3 \text{ N}}$$

$$R_x = -0{,}2 \times 0{,}3 \times 10 \times 1$$

$$\boxed{R_x = -0{,}6 \text{ N}}$$

$$v = 2 - 10\,(0{,}2 \times 1 - 0{,}1)\,t$$

$$\boxed{\underset{/ms^{-1}}{v} = 2 - t}$$

$$a\omega = -7 + 0{,}2 \times 10 \times 1\ t$$

$$\boxed{\underset{/ms^{-1}}{a\omega} = -7 + 2t}$$

---

8) $$V_g = v - a\omega$$

$$\boxed{V_g = V_{g0} - g\,(2F\cos\alpha - \sin\alpha)\ t}$$

$$\boxed{\underset{/m.s^{-1}}{V_g} = 9 - 3t}$$

La première phase de glissement positif s'annule quand $V_g = 0$

$$\boxed{\tau_1 = \frac{V_{g0}}{g\,(2F\cos\alpha - \sin\alpha)}}$$

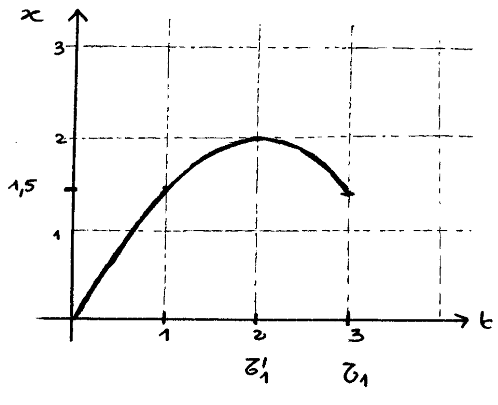
$$\boxed{\tau_1 = 3 \text{ s}}$$

---

9) On intègre v donc (avec $x_{(t=0)} = 0$)

$$\boxed{x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 (f\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

$$\boxed{\underset{/m}{x} = 2t - \frac{1}{2}t^2}$$



En τ'_1, le cerceau rebrousse chemin et remonte la pente (rétro)
τ'_1 annule la vitesse

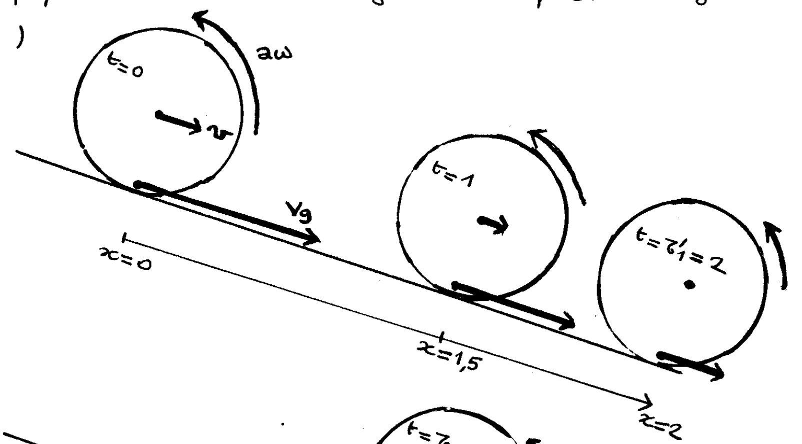
$$\boxed{\tau'_1 = \frac{v_0}{g\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)}}$$

$$\boxed{\tau'_1 = 2\ s}$$

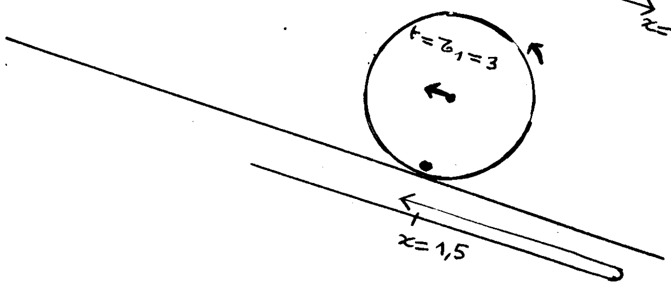
---

10) Le mouvement : (de façon symbolique, la flèche ↶) est de longueur proportionnelle à $a\omega$ afin de comparer à la flèche v et la flèche V_g)

descente



remontée



(remarque qu'il n'y a pas symétrie entre le passage aller et retour - exemple pour $x = 1,5$ sur la figure)

	$t=0$	$t=\tau'_1 = 2\,s$	$t=\tau_1 = 3\,s$
R_z/N	3	3	3
R_x/N	-0,6	-0,6	-0,6
v/ms^{-1}	2	0	-1
$a\omega/ms^{-1}$	-7	-3	-1
V_g/ms^{-1}	9	3	0

---

11) En $t' = 0$ $(t = \tau_1 = 3\,s)$ la vitesse de glissement est nulle (vu précédemment)

$$V'_{g_0} = v'_0 - a\omega'_0$$
$$= -1 - (-1)$$

$$\boxed{V'_{g_0} = 0 \quad m/s}$$

Pour la suite :

- soit on vient de passer par $V_g = 0$ et on passe d'une phase de glissement positif à une phase de glissement négatif
- soit on débute une phase de non glissement.

La phase suivante pourrait être du glissement dans le cas d'un plan très incliné mais il s'agirait de glissement positif à nouveau.

On peut s'attendre à une phase de non glissement (à vérifier)

---

12) On aura $V_g = 0$ soit $v = a\omega$ (4 bis)

Il faudra vérifier

$$\boxed{\left|\frac{R_x}{R_z}\right| \leq f}$$

---

13) équation (2)

$$\boxed{R_z = mg\cos\alpha}$$

$$\begin{cases} \text{équation (1)} & R_x + mg\sin\alpha = m\dfrac{dv}{dt'} \\ \text{equation (3) et (4 bis)} & R_x = -m\dfrac{dv}{dt'} \end{cases}$$

donc

$$\boxed{R_x = -\frac{mg\sin\alpha}{2}}$$

$$\frac{dv}{dt'} = \frac{g\sin\alpha}{2} = \text{constante}$$

$$\boxed{v = v'_0 + \frac{g\sin\alpha}{2}\,t'}$$

$$\boxed{a\omega_{(t')} = v_{(t')}}$$

application numérique

$$\boxed{R_z = 3\ N}$$

$$R_x = -\frac{0{,}3 \times 10 \times 0{,}1}{2}$$

$$\boxed{R_x = -0{,}15\ N}$$

$$a\omega = v = -1 + \frac{10 \times 0{,}1}{2} t'$$

$$\boxed{a\omega = v_{/ms^{-1}} = -1 + 0{,}5\ t'}$$

---

14) vérification de l'hypothèse de non glissement

$$\left| \frac{R_x}{R_z} \right| \leqslant f$$

$$\left| \frac{-mg \sin\alpha / 2}{mg \cos\alpha} \right| \leqslant f$$

$$\boxed{\tan\alpha \leqslant 2f}$$

A.N. $\quad 0{,}1 \overset{?}{\leqslant} 2 \times 0{,}2$

exact.

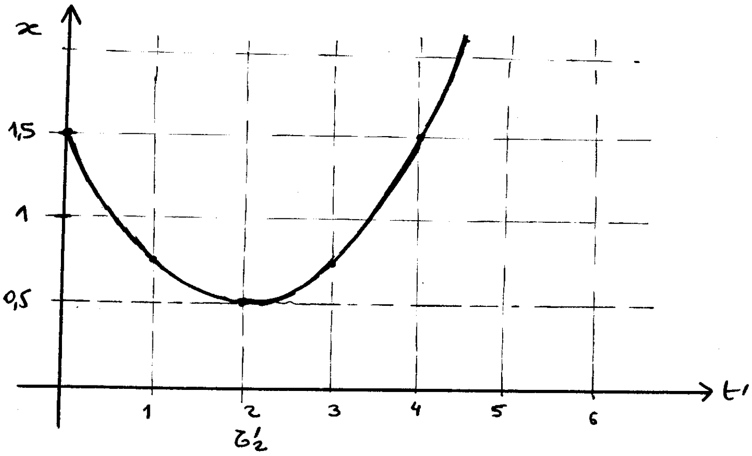
---

15) On intègre v (avec $x'_0 = 1{,}5m$)

$$\boxed{x = v'_0 t' + \frac{g \sin\alpha}{4} t'^2 + x'_0}$$

A.N.

$$\boxed{x_{/m} = -t' + 0{,}25\ t'^2 + 1{,}5}$$



Le cerceau rebrousse chemin et se met à descendre le plan quand $v = 0$ en τ'_2 avec

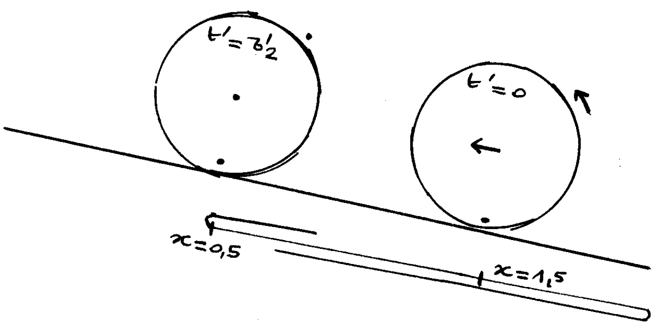
$$\boxed{\tau'_2 = -\frac{2\, v'_0}{g \sin\alpha}}$$

$$\boxed{\tau'_2 = 2\,s}$$

avec $\boxed{x'_2 = 0{,}5\,m}$

---

15)



(Le retour est symétrique)

	$t'=0$	$t'=\tau'_2$	$t'=2\tau'_2$
R_Z/N	3	3	3
R_x/N	$-0{,}15$	$-0{,}15$	$-0{,}15$
v/ms^{-1}	-1	0	$+1$
$a\omega/ms^{-1}$	-1	0	$+1$
V_g/ms^{-1}	0	0	0

remarque

constater la discontinuité de R_x en $t = 3s$ ou $t' = 0s$

en $t' = 0^-$ $R_x = -0,6$ N

en $t' = 0^+$ $R_x = -0,15$ N

---

17) Entre $t' = 0$ et $t' = \tau/2$

$$\Delta E_C = E_{C\,t'=\tau/2} - E_{C\,t'=0}$$
$$= 0 - \frac{1}{2} m (v^2 + v^2)$$

$$\boxed{\Delta E_C = - m v^2_{t'=0}}$$

A.N. $= -0,3\ (-1)^2$

$$\boxed{\Delta E_C = -0,3 \text{ J}}$$

---

18) La puissance de $\vec{R}$ vaut

$$P_{\vec{R}} = \vec{R}\ \vec{v}_{I \in cerceau/R}$$
$$= \vec{R}\ . \underbrace{\vec{V_g}}_{\text{nul}}$$ (pas de glissement)

$$P_{\vec{R}} = 0$$

avec $W_{\vec{R}} = \int_{t'=0}^{\tau/2} P_{\vec{R}}\, dt$

$$\boxed{W_{\vec{R}} = 0}$$

(pas de glissement)

---

19) Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_C = W_{\vec{R}} + W_{m\vec{g}}$$

avec $P_{m\vec{g}} = m\vec{g}\ \vec{v}$

$$= m g \sin\alpha\ v(t)$$

$$W_{m\vec{g}} = \int_{t'=0}^{t'=\tau/2} m g \sin\alpha\ \underbrace{v(t)\ dt}_{dx}$$

$$\boxed{W_{m\vec{g}} = m g \sin\alpha\ (x_{\tau/2} - x_{t'=0})}$$

A.N. $= 0,3\ 10\ 0,1\ (0,5 - 1,5)$

$$\boxed{W_{m\vec{g}} = -0,3 \text{ J}}$$

vérification :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta E_c & = & W_{\vec{R}} & + & W_{m\vec{g}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ -0{,}3 & & -0{,}3 & & 0 \end{array}$$

---

20) Entre $t=0$ et $t=\tau_1$

$$\Delta E_c = E_{c\,t=\tau_1} - E_{c\,t=0}$$

$$= \frac{1}{2} m (v^2+v^2) - \frac{1}{2} m (v_0^2 + a^2\omega_0^2)$$

$$\boxed{\Delta E_c = m v^2_{(t=\tau_1)} - \frac{1}{2} m (v_0^2 + a^2\omega_0^2)}$$

A.N. $$= 0{,}3\ (-1)^2 - \frac{1}{2}\ 93\ (2^2 + (-7)^2)$$

$$\boxed{\Delta E_c = -7{,}65 \text{ J}}$$

---

21) avec $$\boxed{W_{m\vec{g}} = mg \sin\alpha \ (x_{\tau_1} - x_{t=0})}$$

A.N. $$= 0{,}3\ 10\ 0{,}1\ (1{,}5 - 0)$$

$$\boxed{W_{m\vec{g}} = 0{,}45 \text{ J}}$$

et $$W_{\vec{R}} = \int P_{\vec{R}}\, dt$$

$$= \int R_x\, V_g\, dt$$ en travaillant numériquement

$$= \int_{t=0}^{t=3} -0{,}6\ (9-3t)\, dt$$

$$= -0{,}6\ \left(9\times 3 - \frac{3}{2}\ 3^2\right)$$

$$\boxed{W_{\vec{R}} = -8{,}1 \text{ J}}$$

---

22) Vérification :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta E_c & = & W_{\vec{R}} & + & W_{m\vec{g}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ -7{,}65 \text{ J} & & -8{,}1 \text{ J} & & 0{,}45 \end{array}$$

exact.

---

23) on impose $v_0 > 0$
$\omega_0 < 0$

Il y a retro si v s'annule pendant la première phase de glissement .

$$\boxed{\tau_1 > \tau'_1 > 0}$$

donc :
$$\frac{v_0}{g(f\cos\alpha - \sin\alpha)} > 0$$

$$\boxed{1) \qquad \tan\alpha < f}$$

et
$$\frac{v_0 - a\omega_0}{g(2f\cos\alpha - \sin\alpha)} > \frac{v_0}{g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

$$\boxed{2) \qquad (-a\omega_0) > \frac{v_0}{\left(1 - \frac{\tan\alpha}{f}\right)}}$$

Ici , les deux conditions étaient vérifiées :

1) $0{,}1 < 0{,}2$

2) $7 > \underbrace{\frac{2}{1 - \frac{0{,}1}{0{,}2}}}_{4}$

---

24) La première phase se fait donc avec du glissement positif

$$V_{g_0} = v_0 + (-a\omega_0)$$
$$> \underbrace{v_0 + \frac{v_0}{1 - \frac{\tan\alpha}{f}}}_{\text{positif}}$$

La deuxième phase , si glissement, correspondrait à <u>$V_g < 0$</u> ce qui n'a <u>pas de sens ici</u> car en partant d'un V_g nul , si le glissement apparaît , il sera positif (cf sens d'inclinaison du plan)

<u>remarque :</u>

la condition de non glissement était (cf 14)
$$\tan\alpha \leqslant 2f$$
Pour le glissement , il faut $\tan\alpha \geqslant 2f$
or $\tan\alpha < f$

Fibre optique

1)

$$\boxed{v = c/n}$$

2)

$$\lambda = v\,T \qquad (T : \text{période})$$

$$\lambda_0 = c\,T$$

$$\lambda/\lambda_0 = v/c$$

$$\boxed{\lambda = \lambda_0/n}$$

3)

$$k = 2\pi/\lambda$$

$$k_0 = 2\pi/\lambda_0$$

$$k/k_0 = \lambda_0/\lambda$$

$$\boxed{k = n\,k_0}$$

4)

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{n\,k_0\,\vec{u_x} \wedge E\,\vec{u_y}}{\omega} = \frac{n\,k_0\,E\,\vec{u_z}}{\omega}$$

or $\omega = k_0\,c$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,c$$

car $\lambda_0 = c\,T$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{n\,E}{c}\,\vec{u_z}}$$

5)

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E\,\vec{u_y} \wedge \frac{n\,E}{c}\,\vec{u_z}}{\mu_0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\pi} = \frac{n\,E^2}{\mu_0\,c}\,\overrightarrow{u_x}}$$

avec $P = \iint_S \overrightarrow{\pi}\,\overrightarrow{dS}$ avec $\overrightarrow{dS} = dS\,\overrightarrow{u_x}$

$$\boxed{P_{(t)} = \frac{n\,E^2}{\mu_0\,c}\,S}$$

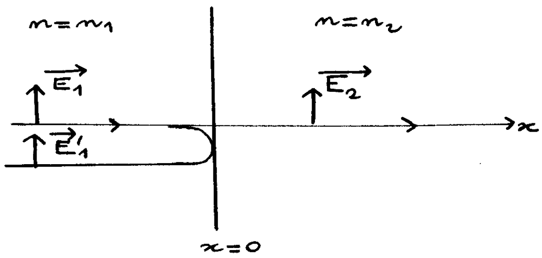
avec $E^2 = E_M^2 \cos^2(\omega t - kx)$

$<E^2> = E_M^2 < \cos^2(\omega t - kx) >$

$= E_M^2 \quad \frac{1}{2}$

Puissance moyenne

$$\boxed{<P> = \frac{n\,E_M^2\,S}{2\mu_0\,c}}$$



6) $$\boxed{\overrightarrow{E_1}(x,t) = E_M \cos(\omega t - n_1 k_0 x)\,\overrightarrow{u_y}}$$

---

7) $$\overrightarrow{E'_1}(x,t) = E'_M \cos(\omega t + n_1 k_0 x)\,\overrightarrow{u_y}$$

se propage dans le sens inverse de l'axe des x

avec $$\rho = \frac{E'_1(x=0,t)}{E_1(x=0,t)}$$

$$= \frac{E'_M \cos(\omega t)}{E_M \cos(\omega t)}$$

donc $E'_M = \rho\,E_M$

$$\boxed{\overrightarrow{E'_1}(x,t) = \rho\,E_M \cos(\omega t + n_1 k_0 x)\,\overrightarrow{u_y}}$$

---

8) $$\overrightarrow{E_2}(x,t) = E''_M \cos(\omega t - n_2 k_o x)$$

avec $$\tau = \frac{E_2(x=0,t)}{E_1(x=0,t)} = \frac{E''_M \cos(\omega t)}{E_M \cos(\omega t)}$$

donc $E''_M = \tau\, E_M$

$$\boxed{\overrightarrow{E_2}(x,t) = \tau\, E_M \cos(\omega t - n_2 k_o x)\, \overrightarrow{u_y}}$$

---

9) $$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{B_1} &= \frac{n_1 E_1}{c}\, \overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{B_2} &= \frac{n_2 E_2}{c}\, \overrightarrow{u_z} \end{aligned}}$$ cf (4) cf (4)

Mais pour $\overrightarrow{B'_1}$, $\overrightarrow{k'_1}$ est dans le sens contraire de $\overrightarrow{u_x}$, avec $\overrightarrow{k'_1} = -k_1 \overrightarrow{u_x}$

$$\boxed{\overrightarrow{B'_1} = -\frac{n_1 E'_1}{c}\, \overrightarrow{u_z}}$$

---

10) Continuité de la composante tangentielle de $\overrightarrow{E}$ en $x=0$

$$(E_1 + E'_1)_{x=0} = (E_2)_{x=0}$$

$$E_M \cos\omega t + \rho E_M \cos\omega t = \tau E_M \cos\omega t$$

$$\boxed{1 + \rho = \tau} \quad (1)$$

Ici, il y a aussi continuité de la composante tangentielle de $\overrightarrow{B}$ en $x=0$ (cf texte)

$$(B_1 + B'_1)_{x=0} = (B_2)_{x=0}$$

$$\frac{n_1 E_M}{c}\cos\omega t - \frac{n_1}{c}\rho E_M \cos\omega t = \frac{n_2}{c}\tau E_2 \cos\omega t$$

$$\boxed{1 - \rho = \frac{n_2}{n_1}\tau} \quad (2)$$

En faisant la somme de (1) et (2)

$$2 = \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right)\tau$$

$$\boxed{\tau = \frac{2}{1 + n_2/n_1}}$$

et $$\rho = \tau - 1$$

$$\boxed{\rho = \frac{1 - n_2/n_1}{1 + n_2/n_1}}$$

---

11)
$$P_i = \frac{n_1 E_M^2 S}{2\mu_0 c}$$
$$P_t = \frac{n_2 \tau^2 E_M^2 S}{2\mu_0 c}$$
$$P_r = \frac{n_1 \rho^2 E_M^2 S}{2\mu_0 c}$$

remarque :
pour P_r $\overrightarrow{dS} = -dS\,\overrightarrow{u_x}$
et $\overrightarrow{\Pi_r}$ est lui aussi selon $-\overrightarrow{u_x}$

donc : $$R = \frac{P_r}{P_i}$$

$$\boxed{R = \rho^2}$$

$$T = \frac{P_T}{P_i}$$

$$\boxed{T = \frac{n_2}{n_1}\tau^2}$$

vérification :
$$R + T = \left(\frac{1 - n_2/n_1}{1 + n_2/n_1}\right)^2 + n_2/n_1 \frac{4}{(1 + n_2/n_1)^2}$$

$$\boxed{R + T = 1}$$

La puissance incidente est égale à la puissance transmise + la puissance réfléchie.

---

12)
$$\rho = \frac{1 - N/1}{1 + N/1}$$

A.N. $$= \frac{1 - 1{,}69}{1 + 1{,}69}$$

$$\boxed{\rho = -0{,}257}$$

A.N. $\tau = 1 + \rho$

$$\boxed{\tau = 0{,}743}$$

$$R = \rho^2$$

$$\boxed{R = 6{,}6\ \%}$$

$$T = 1 - R$$

$$\boxed{T = 93{,}4\ \%}$$

---

13)

$\tau_1 = \dfrac{2}{1 + n'/n}$	$\rho_1 = \dfrac{1 - n'/n}{1 + n'/n}$
$\tau_2 = \dfrac{2}{1 + N/n'}$	$\rho_2 = \dfrac{1 - N/n'}{1 + N/n'}$
$\tau_3 = \dfrac{2}{1 + n/n'}$	$\rho_3 = \dfrac{1 - n/n'}{1 + n/n'}$

---

14)

$$\boxed{\rho_3 = -\rho_1}$$

si $n' > n$ $\quad \rho_1 < 0$

$\rho_3 = -\rho_1 > 0$

La valeur absolue du coefficient de reflexion est la même. Mais il y a un déphasage de π lors de la réflexion sur un milieu plus refringent.

---

15)

$$\overrightarrow{E}_{autre}(x=0^+, t) = \rho_2 \rho_3 \overrightarrow{E}_{plus}\left(x=0^+, t - \frac{2D}{v}\right)$$

$$= \rho_2 \rho_3 \underline{E}_{M plus} \exp j\omega\left(t - \frac{2D}{v}\right) \overrightarrow{u_y}$$

or $\quad \dfrac{2D}{v} = \dfrac{2\ \lambda/4}{v} = \dfrac{2\ vT}{4\ v} = \dfrac{T}{2}$

$$= \rho_2 \rho_3 \underline{E}_{M plus} \exp j(\omega t - \pi) \overrightarrow{u_y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{autre}(x=0^+,t) = -\rho_2\rho_3\, \underline{E}_M\text{ plus } \exp j\omega t\ \overrightarrow{u_y}}$$

---

16)
$$\underline{E}_M\text{ plus} = \tau_1\, \underline{E}_{M,i} - \rho_2\rho_3\, \underline{E}_M\text{ plus}$$

$$\boxed{\underline{E}_{M,plus} = \frac{\tau_1}{1+\rho_2\rho_3}\, \underline{E}_{M,i}}$$

---

17)
$$\overrightarrow{\underline{E}_r}(x=0^-,t) = \rho_1\, \overrightarrow{\underline{E}_i}(x=0^-,t) + \tau_3\,\rho_2\, \overrightarrow{E}_{plus}(x=0^+, t-\tfrac{2D}{v})$$

$$\boxed{\underline{E}_{M,r} = \rho_1\, \underline{E}_{M,i} - \tau_3\,\rho_2\, \underline{E}_{M,plus}}$$

et en utilisant le résultat de 16) :

$$\underline{E}_{M,r} = \rho_1\, \underline{E}_{M,i} - \tau_3\rho_2 \frac{\tau_1}{1+\rho_2\rho_3}\, \underline{E}_{M,i}$$

$$\underline{E}_{M,r} = \underline{E}_{M,i}\, \frac{\rho_1 + \rho_1\rho_2\rho_3 - \rho_2\tau_1\tau_3}{1+\rho_2\rho_3}$$

avec
$$\left|\begin{array}{l} \rho_3 = -\rho_1 \\ \tau_1 = 1+\rho_1 \\ \tau_3 = 1+\rho_3 = 1-\rho_1 \end{array}\right.$$

$$\underline{E}_{M,r} = \underline{E}_{M,i}\, \frac{\rho_1 - \rho_1^2\rho_2 - \rho_2(1+\rho_1)(1-\rho_1)}{1-\rho_1\rho_2}$$

$$\boxed{\underline{E}_{M,r} = \underline{E}_{M,i}\, \frac{\rho_1-\rho_2}{1-\rho_1\rho_2}}$$

---

18) Pour annuler la réflexion à l'entrée de la fibre, il faut avoir

$$\boxed{\rho_1 = \rho_2}$$

$$\frac{1-\frac{n'}{n}}{1+\frac{n'}{n}} = \frac{1-\frac{N}{n'}}{1+\frac{N}{n'}}$$

soit :

$$\frac{n'}{n} = \frac{N}{n'}$$

$$\boxed{n' = \sqrt{n\,N}}$$

non modifié si on inverse N et n.

---

19) n' est la moyenne géométrique des deux indices qui encadrent la lame de cryolithe.

A.N. $n' = \sqrt{1 \times 1{,}69}$

$$\boxed{n' = 1{,}30}$$

---

20) Pas d'énergie réfléchie à l'entrée.

$$\boxed{\text{energie transmise } 100\%}$$

---

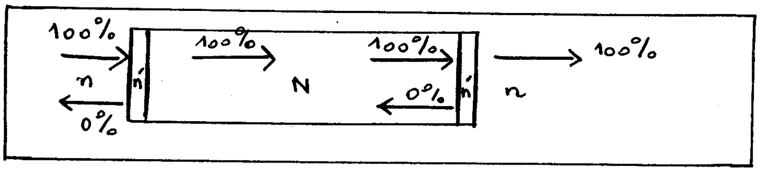
21)

entrée $\longrightarrow$	n	n'	N
sortie $\longrightarrow$	N	n'	n

En entrée, pas de réflexion si $n' = \sqrt{n\,N}$

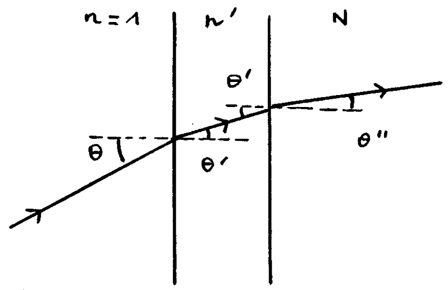
En sortie, " si n' $\sqrt{N\,n}$

La relation est donc vérifiée. Pas de réflexion en sortie. Tout est transmis.



---

22)



$$n \sin\theta = n' \sin\theta' = N \sin\theta''$$

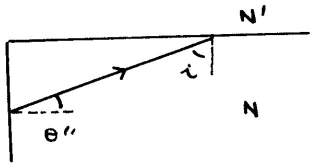
(conservation de $n_i \sin\theta_i$ si couches d'indices)

$$\boxed{n \sin\theta = N \sin\theta''}$$

θ'' est bien indépendant de n'

---

23)



On désigne par i' l'angle de réfraction dans le milieu N',

$$N \sin i = N' \sin i'$$

Le rayon est guidé dans le cœur s'il y a réflexion totale, ce qui mathématiquement correspond à $\sin i' > 1$ (donc pas d'émergent)

$$N \sin i > N'$$

$$N \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta''\right) > N'$$

$$N \cos \theta'' > N'$$

$$N \sqrt{1 - \frac{n^2}{N^2} \sin^2\theta} > N'$$

soit

$$n^2 \sin^2\theta < N^2 - N'^2$$

$$\boxed{\sin\theta < \frac{1}{n} \sqrt{N^2 - N'^2}}$$

A.N.

$$< \frac{1}{1} \sqrt{1{,}69^2 - 1{,}30^2}$$

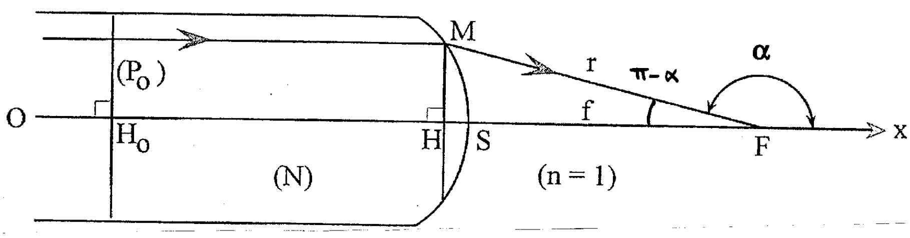
$$\sin\theta < 1{,}08$$

ce qui est toujours vrai.

$$\boxed{\text{Tous les angles } \theta \text{ conviennent donc le rayon est toujours guidé.}}$$

---

24)



$$\Delta = n r - (n f + N \text{ HS})$$

$$\text{HS} \to r \cos(\pi - \alpha) - f$$

$$= n r - n f + N r \cos\alpha + N f$$

avec $n = 1$:

$$\boxed{\Delta = r\,(1 + N\cos\alpha) + f\,(N-1)}$$

---

25) $\Delta = 0$ pour que les ondes soient en phase.

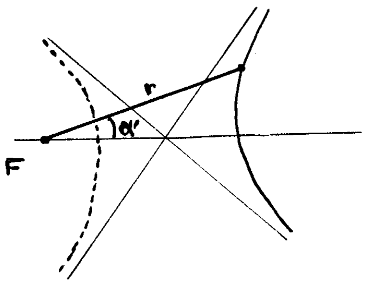
donc équation de la courbe

$$r = \frac{f\,(N-1)}{-N\cos\alpha - 1}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{f(N-1)}\,(-N\cos\alpha - 1)}$$

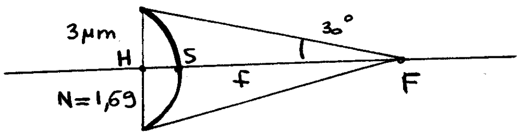
(cf $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(e\cos\alpha' - 1)$ avec $e = N > 1$
$p = (N-1)\,f$



branche d'hyperbole)

---

26)



⟶ Pour $\alpha' = 30°$, on a r :

A.N. $r = \frac{3\,\mu m}{\sin 30°} = 6\,\mu m$

⟶ et donc

$$f = \frac{r\,(N\cos\alpha' - 1)}{N - 1}$$

A.N.

$$f = \frac{6\,\left(1{,}69\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)}{1{,}69 - 1}$$

$$\boxed{f = 4{,}0\ \mu m}$$

⟶ et

$$HS_{max} = \frac{3}{\tan 30°} - 4$$

$$\boxed{HS_{max} = 1{,}2\ \mu m}$$