DS Sciences Physiques MathSpé

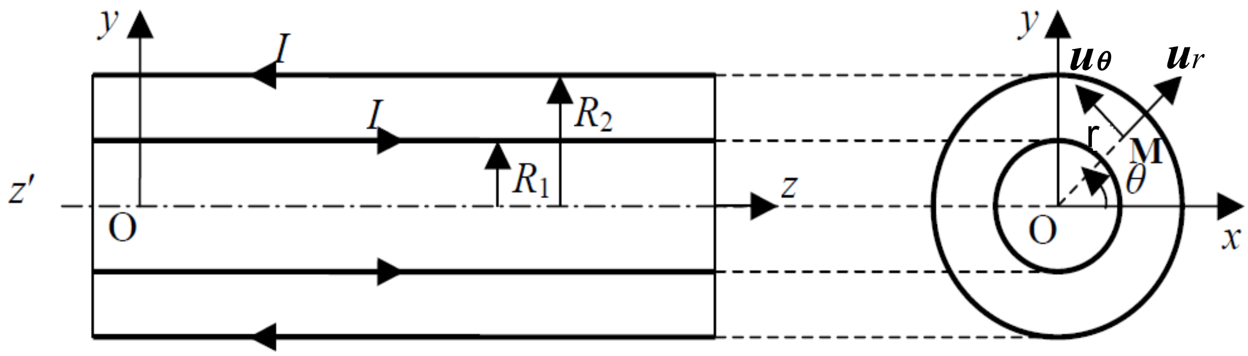
calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Câble coaxial sans pertes

Une ligne électrique, supposée de longueur infinie, est constituée par un câble coaxial. Dans le problème, les deux conducteurs du câble sont supposés creux et assimilés à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, de section circulaires et coaxiales. Le conducteur intérieur (1) a pour rayon R_1 et le conducteur extérieur (2) a un rayon $R_2 > R_1$. L'espace entre les deux conducteurs est vide (voir *figure*).



Le câble est traversé par un courant alternatif de pulsation ω . A un instant t et à une abscisse z donnés, on note $\underline{I}(z,t)$ l'expression en notation complexe de l'intensité du courant pour le conducteur interne (1). Cette intensité est comptée positivement dans le sens de Oz . Le courant passe dans le sens opposé pour le conducteur externe et l'intensité s'écrit donc: $-\underline{I}(z,t)$ pour le conducteur (2). On pose $\underline{I}(z,t)=\underline{I}_0(z)\exp(j\omega t)$ (la forme de $\underline{I}_0(z)$ est inconnue).

On suppose que les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ en tout point M dans l'espace interconducteur $R_1<r<R_2$ sont de la forme: $\underline{\vec{E}}=\underline{\vec{E}}_0(r,z)\exp(j\omega t)$ et $\underline{\vec{B}}=\underline{\vec{B}}_0(r,z)\exp(j\omega t)$ ($\underline{\vec{E}}_0(r,z)$ et $\underline{\vec{B}}_0(r,z)$ sont inconnus). Les champs sont nuls pour $r<R_1$ et pour $r>R_2$. Dans la suite on ne s'intéresse qu'à l'espace interconducteur.

On suppose de plus que le champ électrique $\underline{\vec{E}}$ est radial soit finalement: $\underline{\vec{E}}=\underline{E}_0(r,z)\exp(j\omega t)\ \vec{u}_r$.

Donnée: En coordonnées cylindriques:

$$\vec{rot}\,\vec{A}=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\vec{u}_r+\left[\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{u}_z$$

I. Expressions de E et B

1. Densité de courant surfacique.

- Rappeler l'unité de la densité de courant surfacique.

- Donner l'expression de la densité $\vec{j}_{S1}$ de courant surfacique sur le conducteur (1) en fonction de $\underline{I}(z,t)$, de R_1 , en utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}_z$.
- Donner l'expression de la densité $\vec{j}_{S2}$ de courant surfacique sur le conducteur (2) en fonction de $\underline{I}(z,t)$, de R_2 .

2. On se propose de montrer que la direction de $\vec{B}$ est orthoradiale.

- En utilisant avec précision des considérations de symétrie, montrer que $\vec{B}$ est orthoradial.
- Montrer que l'on retrouve, entre autres, la même conclusion en appliquant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale à un point M entre les deux conducteurs . L'équation obtenue est désignée par: $\textit{équation}\,1$).

3. On se propose de déterminer la dépendance de $\vec{B}$ par rapport à r et $\underline{I}(z,t)$.

- Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère sous forme locale. En utilisant le théorème de Stokes, en déduire la forme intégrale ou « théorème d'Ampère généralisé ». On fera intervenir I (courant algébrique enlacé par la courbe orientée considérée) et Φ_E flux algébrique de $\vec{E}$ à travers la surface limitée par la courbe orientée considérée.
- En appliquant le théorème d'Ampère généralisé à un cercle d'axe Oz , de rayon r passant par M déterminer en fonction de r et du courant $\underline{I}(z,t)$, le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$.

4. On se propose de retrouver le résultat précédent en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère sous forme locale et non sous forme intégrale. On reprend donc l'étude précédente en appliquant l'équation de Maxwell-Ampère à un point M entre les conducteurs.

- Montrer que l'on obtient deux équations.
- Déduire de l'une d'entre elles que la composante scalaire de $\vec{B}$ est en $\dfrac{f(z,t)}{r}$.
- Retrouver alors l'expression précédente de $\underline{\vec{B}}$ en appliquant les conditions de continuité.

L'équation non utilisée est désignée par: $\textit{équation}\,2$.

5. Équation de dispersion.

- Déduire de l'équation de Maxwell-Faraday (cf. : $\textit{équation}\,1$) et de l'équation de Maxwell-Ampère (cf. : $\textit{équation}\,2$) que la fonction $\underline{I}_0(z)$ satisfait à une équation différentielle dont une solution est $\underline{I}_0(z)=I_0\exp(-jkz)$.
- Donner l'expression de k en fonction de ω et de constantes habituelles.
- Montrer que la solution adoptée correspond à une « onde de courant » qui se propage parallèlement à l'axe Oz , avec un sens et une vitesse de phase que l'on précisera.
- Quelle est la signification de la deuxième solution non adoptée ici.

6. Écrire finalement les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en notation réelle (I_0 étant la seule grandeur inconnue). Préciser les caractéristiques de cette onde électromagnétique existant entre les

conducteurs.

II. Expression du vecteur de Poynting

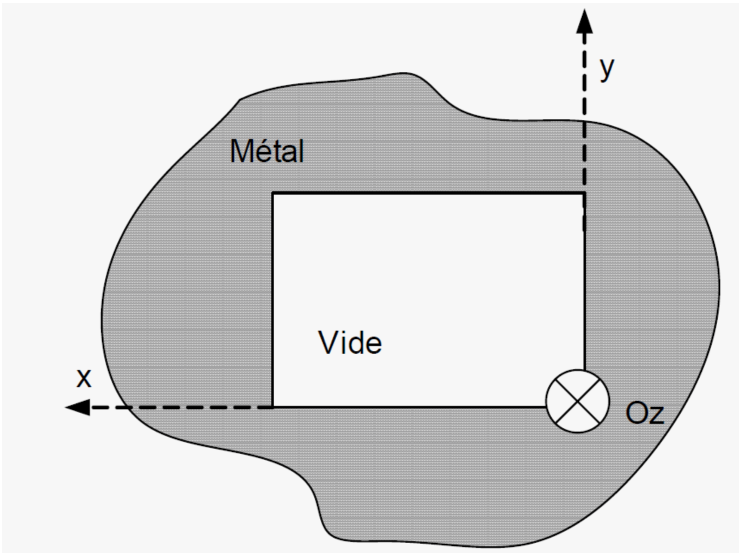
7. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{S}(r,z,t)$ et sa valeur moyenne temporelle $<\vec{S}>(r,z)$. Quelle remarque peut-on faire quant à $<\vec{S}>(r,z)$?

8. En déduire P le flux de $<\vec{S}>$ à travers la couronne circulaire, située en z , comprise entre les circonférences de rayons R_1 et R_2 . Quel est le sens physique de P ?

9. On pose $P=Z\,I_{efficace}^2$. Déterminer l'impédance caractéristique Z du coaxial en fonction de R_1 , R_2 , ε_0 , μ_0 .

Réflexion dans un guide rectangulaire

On considère un guide d'onde rectangulaire constitué d'un matériau métallique dans lequel on a réalisé une cavité dont les parois forment un cylindre creux de section rectangulaire d'équations mathématiques $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ (voir *figure*). On considère que le métal est parfait.



I. Généralités

Un émetteur disposé dans la cavité génère une onde électromagnétique de pulsation ω dont le champ électrique est choisi sous la forme:

$$\vec{E}(x,y,z,t)=E_0\ f(x,y,z)\ \cos(\omega t-kz)\ \vec{u_y}$$

où $f(x,y,z)$ est une fonction à valeurs réelles, E_0 est une constante homogène à un champ électrique, k est positif.

1. Rappeler l'unité d'un champ électrique.
2. Peut-on dire que cette onde est:
   - polarisée ?
   - plane ?
3. En utilisant une équation de Maxwell dont on donnera le nom, montrer que la fonction $f(x,y,z)$ ne peut en aucun cas dépendre de y .
4. On suppose que le guide n'introduit aucune perte d'énergie lors de la propagation dans le guide. Expliquer qualitativement pourquoi $f(x,y,z)$ ne dépend alors que de x . On note cette fonction $f(x)$. Quelle succession de calculs faudrait-il réaliser pour démontrer cela de manière plus précise?

5. Retrouver l'équation différentielle du 2ème ordre à laquelle satisfait $f(x)$.

II. Étude d'un mode particulier

Données:

$a=1\,cm$
$b=1\,cm$
$f=15{,}81\,GHz$ *(fréquence de l'onde)*
$c=3.10^{8}\,m\,s^{-1}$
$\mu_0=4\pi.10^{-7}\,H\,m^{-1}$
$E_0=5.10^{3}\,V\,cm^{-1}=0{,}5\,10^{6}\,V\,m^{-1}$

Dans la suite, on choisit $f(x)=\sin\left(\pi\dfrac{x}{a}\right)$

6. Justifier et commenter ce choix.
7. Établir la relation de dispersion.
8. Montrer qu'il existe une pulsation de coupure.
9. Application numérique: calculer la valeur de la fréquence de coupure en GHz.
10. Application numérique: on pose $k=\dfrac{2\,Pi}{\lambda_z}$. Calculer λ_z .
11. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(x,y,z,t)$ associé à l'onde étudiée.
12. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$. Déterminer sa valeur moyenne dans le temps. Déterminer sa valeur moyenne dans le temps et dans une section droite du guide $z=constante$. En déduire la puissance moyenne traversant ce guide de section $S=ab$.
13. Application numérique: calculer la puissance transportée par l'onde électromagnétique.

III. Réflexion

Le guide est fermé en $z=L$ par une plaque qui réfléchit partiellement l'onde incidente avec un coefficient de réflexion complexe $\underline{r}=\left(\dfrac{\underline{E}_{réfléchi}}{\underline{E}_{incident}}\right)_{z=L}=r\ \exp(j\varphi)$ avec $0\leqslant r\leqslant 1$. On rappelle:

$\underline{E}_{incident}(x,z,t)=E_0\ \sin\left(\pi\dfrac{x}{a}\right)\ \exp j(\omega t-kz)$ pour $0<x<a$, $0<y<b$, $z<L$.

14. Écrire la grandeur complexe $\underline{E}_{réfléchi}(x,z,t)$ de l'onde réfléchie en faisant intervenir $\underline{r}$.
15. En déduire la grandeur complexe $\underline{E}_{total}(x,z,t)$ associée au champ électrique global régnant dans le guide d'onde en amont de la la plaque.
16. Pour cette seule question, on suppose que la plaque est faite d'un métal infiniment conducteur.

- En utilisant le résultat précédent, établir l'expression de $\underline{r}$ dans le cas particulier envisagé.
- En déduire l'expression en réel de $E_{total}(x,z,t)$ sous la forme d'un produit de trois fonctions trigonométriques.
- En déduire la position des plans nodaux selon z de $\vec{E}$ dans ce cas particulier.

17.On revient ici au cas d'une plaque en métal non parfait. En travaillant en complexes, déterminer l'amplitude de E c'est-à-dire le module de $\underline{E_{total}}(x,z,t)$ en un point de coordonnées (x,y,z) (le résultat fait intervenir entre autres : r et φ).

18.Lorsque qu'on promène un détecteur le long du guide (déplacement à x et y fixés), on constate que l'amplitude du champ électrique passe par des maxima de grandeur E_{max} et des minima de grandeur E_{min} . On mesure ainsi un « taux d'onde stationnaire » défini par:

$$TOS=20\ \log\left(\frac{E_{max}}{E_{min}}\right)\ .$$

Relier TOS à r .

19.On constate également que les positions des minima (de champ électrique) sont régulièrement espacés de d et que le minimum le plus proche de l'obstacle (en $z=L$) est positionné en $z_1=L-\Delta z$ avec $0<\Delta z<d$. Relier φ à Δz . On choisira $\varphi\in[-\pi,\pi]$.

20.Application numérique

$TOS=5$
$d=3\text{cm}$
$\Delta z=1\text{cm}$

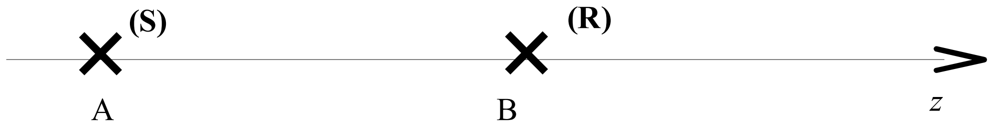
calculer r et φ .

Effet Doppler

I. Impulsions

Une source S émet un signal, sous forme d'impulsions de durée " brève " (considérée comme nulle dans la suite), à intervalles de temps réguliers égaux à T_S . On note f_S la fréquence correspondante. Un récepteur R mesure la fréquence notée f_R du signal reçu. Cette fréquence est différente de f_S lorsque S et R sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

On suppose que S et R se déplacent, par rapport à un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, le long de l'axe Oz , de vecteur unitaire $\vec{u}_z$ avec des vitesses constantes $\vec{v}_S=v_S\vec{u}_z$ et $\vec{v}_R=v_R\vec{u}_z$. La célérité (norme de la vitesse) du signal est égale à c dans $\mathscr{R}$.



On a $|v_S|<c$ et $|v_R|<c$.

1. A l'instant pris comme origine des temps $t=0$, la source S se trouve en A_0 et le récepteur R en B_0 avec $\overrightarrow{A_0B_0}=\ell\,\vec{u}_z$. S émet alors une impulsion (impulsion *"zéro"*). A quel instant t_0 , cette impulsion atteint-elle R ?
2. A l'instant $t=T_S$, alors que la source S se trouve en A_1 et le récepteur R en B_1 , la source émet une nouvelle impulsion (impulsion *"un"*).
   - Déterminer $\overrightarrow{A_1B_1}$.
   - On choisit comme nouvelle origine des temps $t'=0$ l'instant d'émission de l'impulsion *"un"* . A quel instant t'_1 , l'impulsion *"un"* atteint-elle R ?
3. En déduire la durée T_R entre la réception de l'impulsion *"zéro"* et de l'impulsion *"un"* . Exprimer f_R en fonction de f_S et des vitesses. A quelle condition ces deux fréquences sont-elles égales ?
4. On suppose que la source S est mobile $v_S=v$ et que le récepteur est immobile $v_R=0$. Préciser si f_R est plus grande ou plus petite que f_S (justifier la réponse) :
   - lorsque la source s'éloigne du récepteur.
   - lorsque la source s'approche du récepteur.
5. On suppose que la source S est immobile $v_S=0$ et que le récepteur est mobile $v_R=V$. Exprimer f_R en fonction de f_S et des vitesses.
6. Le récepteur R réfléchit le signal reçu et se comporte ainsi comme une source émettant à la fréquence f_R . Le dispositif S bascule en mode récepteur et perçoit alors un signal à la fréquence f'_S . Déterminer l'expression de f'_S en fonction de f_S , c et V . Simplifier

dans le cas $\frac{V}{c} \ll 1$ (double effet Doppler).

II. Onde électromagnétique sinusoïdale

Un plan conducteur parfait supposé infini est en translation à la vitesse constante $\vec{V} = V\,\vec{u}_z$ dans un référentiel $\mathscr{R}$. A $t=0$ le plan est en $z=0$. On envoie une onde électromagnétique plane harmonique $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ avec $\underline{\vec{E}_i} = E_0 \exp j(\omega t - k z)\ \vec{u}_x$, de fréquence f , sur ce plan, se propageant dans le sens des z croissants. Le milieu de propagation est assimilé au vide.

7. Rappeler l'expression de k en fonction de ω

On désigne par $\mathscr{R}$ le référentiel galiléen lié à la source et par $\mathscr{R}'$ le référentiel galiléen lié au plan conducteur. La célérité des ondes électromagnétiques est égale à $c = 3{,}00 . 10^8 m/s$.

On rappelle les formules de transformation pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ entre deux référentiels galiléens $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ avec $\mathscr{R}'$ en translation à la vitesse $\vec{V}$ par rapport à $\mathscr{R}$:

$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$ et $\vec{B}' = \vec{B}$

8. Démontrer ces deux relations. Pour cela, on pourra envisager une charge test q dont la vitesse est $\vec{v}$ dans $\mathscr{R}$ et $\vec{v}'$ dans $\mathscr{R}'$.

9. Le champ réfléchi dans $\mathscr{R}$ s'écrit $\underline{\vec{E}_r} = \underline{r}\ E_0 \exp j(\omega' t + k' z)\ \vec{u}_x$ de fréquence f' .

   - Commenter l'écriture proposée.
   - Exprimer, connaissant $\underline{\vec{E}_i}$, les champs incident $\underline{\vec{E}_i}'$ et $\underline{\vec{B}_i}'$ dans $\mathscr{R}'$.
   - Exprimer, à partir de l'écriture proposée pour $\underline{\vec{E}_r}$, les champs réfléchis $\underline{\vec{E}_r}'$ et $\underline{\vec{B}_r}'$ dans $\mathscr{R}'$.

10. Pour exprimer la réflexion de l'onde et vérifier les conditions aux limites, il convient d'étudier la réflexion dans le référentiel où la plaque est immobile. En travaillant dans ce référentiel, déterminer $\underline{r}$ et $\frac{f'}{f}$. Exprimer $\frac{f'}{f}$ dans le cas $\frac{V}{c} \ll 1$.

III. Radar

La gendarmerie utilise un radar à effet Doppler pour contrôler la vitesse des véhicules. Un tel radar fonctionne sur le principe précédent: émission d'un signal de fréquence f , réception et mesure de la fréquence f' du signal réfléchi). Le signal est une onde électromagnétique hertzienne sinusoïdale de fréquence $f = 5\,GHz$.

11. Donner la vitesse (en km/h) d'un véhicule si une mesure donne pour $\delta f = f' - f$ la valeur numérique $|\delta f| = 972\,Hz$.

12. Une mesure directe de f' vous semble-t-elle possible ? Justifier votre réponse.

Un oscillateur de référence fournit le signal d'émission $u_e = U_e \sin(2\pi f t)$. Le signal réfléchi mesuré est noté $u_r = U_r \sin(2\pi f' t + \varphi)$. Les signaux u_e et u_r sont alors appliqués à l'entrée d'un multiplieur qui délivre en sortie le signal $u_s = K u_e u_r$.

13.Quelle est l'unité de K .

14.Préciser le spectre de u_s

15.Quel type de filtre doit-on brancher en sortie du multiplieur pour récupérer un signal purement sinusoïdal de fréquence $|\delta f|$? Proposer le schéma simple d'un tel filtre passif en précisant les conditions de son bon fonctionnement.

Diagramme potentiel-pH du chrome

Données :

$RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0{,}06\, V$

produit ionique de l'eau : $Ke = 10^{-14}$
pK solubilité de $Cr(OH)_3(s)$ *:* $pKs = 31{,}0$

potentiels standards d'oxydoréduction:

Couple	$Cr^{2+}/Cr(s)$	Cr^{3+}/Cr^{2+}	$Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$	$O_2(g)/H_2O$
$E°$ (en V)	$-0{,}91$	$-0{,}41$	$1{,}33$	$1{,}23$

Le diagramme potentiel-pH simplifié du chrome est fourni (voir figure). Les espèces considérées sont $Cr(s)$, Cr^{2+} , Cr^{3+} , $Cr_2O_7^{2-}$, CrO_4^{2-} et $Cr(OH)_3(s)$. On y a superposé les droites correspondant aux deux couples de l'eau.

Le tracé a été réalisé pour une concentration totale en chrome dissous égale à $c = 10^{-1}\, mol.L^{-1}$ et en considérant qu'il y a égalité des concentrations atomiques en chrome à la frontière entre deux espèces dissoutes.

1. Donner le nombre d'oxydation du chrome dans les espèces étudiées.
2. Frontière $Cr_2O_7^{2-}/CrO_4^{2-}$:
   - Justifier que le couple $(1/2\ Cr_2O_7^{2-})/CrO_4^{2-}$ est un couple acide/base.
   - On donne $pKa = 7{,}2$. Écrire la réaction correspondante pour $(1/2\ Cr_2O_7^{2-})/CrO_4^{2-}$ et donner l'expression de la constante Ka en fonction des concentrations.
   - Que valent les concentrations en $Cr_2O_7^{2-}$ et en CrO_4^{2-} à la frontière $Cr_2O_7^{2-}/CrO_4^{2-}$. En déduire l'équation de la frontière. Application numérique.
3. Attribuer aux diverses espèces les différents domaines repérés par les numéros 1 à 6 . Indiquer s'il s'agit de domaines de prédominance ou d'existence.

Numéro	1	2	3	4	5	6
Espèce						

4. Établir l'équation de la frontière entre Cr^{3+} et $Cr(OH)_3(s)$.
5. Établir l'équation de la frontière entre $Cr(OH)_3(s)$ et Cr^{2+} .

6. Écrire la demi-équation d'oxydoréduction entre $Cr(OH)_3(s)$ et CrO_4^{2-} .En déduire la pente de la droite séparant leurs domaines.

7. Déterminer par le calcul les coordonnées du point A . Comment appelle-t-on la réaction se produisant au point A quand on élève le pH en ajoutant des HO^- ? Écrire cette réaction.

8. D'après ce diagramme, que peut-on prévoir quant aux réactions du chrome sur l'eau? (réaction ou non selon le pH , produits obtenus...etc). On constate expérimentalement que le chrome métal ne réagit pas avec l'eau dans un vaste domaine de pH . Préciser ce domaine de pH. Expliquer rapidement ce phénomène et donner son nom.

9. Écrire la réaction du dichromate de potassium $Cr_2O_7^{2-}$ sur l'eau et calculer sa constante d'équilibre. A quelle condition sur le pH les solutions de dichromate de potassium sont-elles stables (aucun calcul n'est attendu, on lira le diagramme) ? En pratique, on utilise parfois au laboratoire des solutions qui n'obéissent pas à cette condition ; proposer une explication.

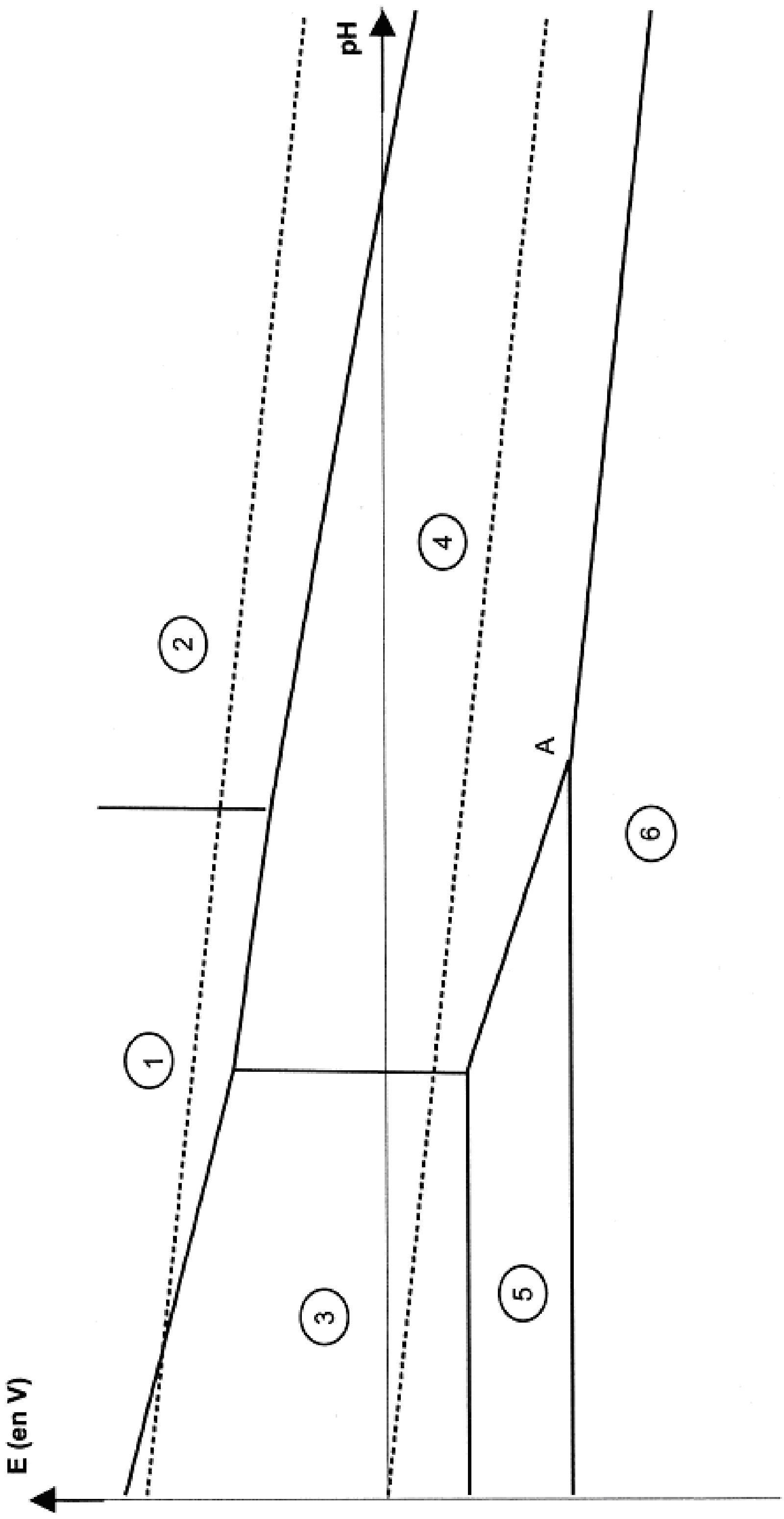


diagramme potentiel-pH simplifié du chrome pour une concentration totale en chrome dissous égale à 10^{-1} mol.L^{-1} et égalité des concentrations à la frontière.

Réponses

Cable coaxial sans pertes

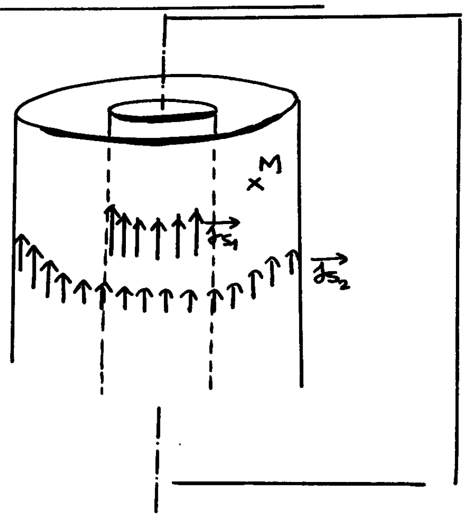
1)

$$\boxed{J_S \text{ en } A.m^{-1}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{J_{S_1}} = \frac{I(z,t)}{2\pi R_1}\overrightarrow{u_z}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{J_{S_2}} = -\frac{I(z,t)}{2\pi R_2}\overrightarrow{u_z}}$$

2)



→ le plan $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de sources (courants $\overrightarrow{J_S}$)

$\overrightarrow{E}$ est effectivement dans ce plan de symétrie ($\overrightarrow{E}$ selon $\overrightarrow{u_r}$)

$\overrightarrow{B}$ est perpendiculaire à ce plan donc:

$$\boxed{\overrightarrow{B} = B\ \overrightarrow{u_\theta}}$$

→ Equation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \underline{\overrightarrow{E}} = -j\omega\,\underline{\overrightarrow{B}}$$

$$\underline{\overrightarrow{B}} = -\frac{1}{j\omega}\overrightarrow{rot}\ \underline{\overrightarrow{E}}$$

avec $\vec{E} = \overbrace{E_0(r,z)\ \exp j\omega t}^{\underline{E}}\ \vec{u_r}$ donc ici :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = 0\ \vec{u_r} + \frac{\partial E}{\partial z}\ \vec{u_\theta} + 0\ \vec{u_z}$$

finalement

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = -\frac{1}{j\omega}\frac{\partial \underline{E}}{\partial z}\ \vec{u_\theta}}$$ équation 1

on retrouve effectivement que $\vec{B}$ est orthoradial.

---

3)

→ Equation de Maxwell-Ampère

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{B}\cdot\vec{dS} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\,\vec{dS} + \frac{1}{c^2}\iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,\vec{dS}$$

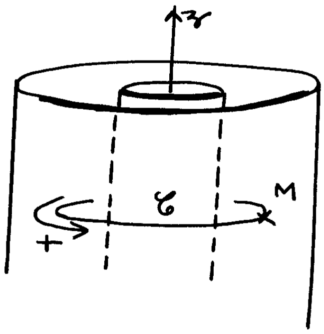
↓ STOKES

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0\, I_{enlacé} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\Phi_E}$$

(théorème d'Ampère généralisé)

→ on applique au cercle de rayon r.

On remarque que $\underbrace{\vec{E}}_{\text{selon } \vec{u_r}}\ \underbrace{d\vec{S}}_{\text{selon } \vec{u_z}}$ est nul (donc Φ_E est nul.)



Ici donc :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\ \vec{dl} = \mu_0\, I_{enlacé}$$

$$B\ 2\pi r = \mu_0\ I(z,t)$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\mu_0\ \underline{I}(z,t)}{2\pi r}\ \vec{u_\theta}}$$

---

4) $\longrightarrow$ $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

on remarque que $\overrightarrow{j}$ est nul en M :

$$\overrightarrow{rot}\,\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{j\omega}{c^2}\underline{\overrightarrow{E}}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & \boxed{-\frac{\partial \underline{B}}{\partial z} = \frac{j\omega}{c^2}\underline{E}} & \text{équation 2} \\ & 0 = 0 & \\ \overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z} & \boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{B}) = 0} & \end{array}$$

On obtient donc deux équations.

$\longrightarrow$ En intégrant l'équation obtenue selon $\overrightarrow{u_z}$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\underline{B}) = 0$$

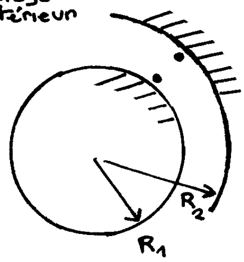
$$r\,\underline{B} = \text{terme indépendant de } r$$

$$\boxed{\underline{B} = \frac{\underline{f}(z,t)}{r}}$$

$\longrightarrow$ On écrit alors les équations de continuité (de passage)

$$\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0\,\overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{n}_{1\to 2}$$

$$\overrightarrow{B}_{\substack{\text{voisinage}\\ \text{extérieur}}} = \mu_0\,\overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{n}_{ext}$$



• par exemple en R_1^+ :

$$\frac{\underline{f}(z,t)}{R_1}\overrightarrow{u_\theta} = \mu_0\,\overrightarrow{j_{S_1}} \wedge \overrightarrow{u_r}$$

$$= \mu_0 \frac{\underline{I}(z,t)}{2\pi R_1}\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r}$$

• ou en R_2^- :

$$\frac{\underline{f}(z,t)\,\overrightarrow{u_\theta}}{R_2} = \mu_0\,\overrightarrow{j_{S_2}} \wedge -\overrightarrow{u_r}$$

$$= \mu_0 \frac{-\underline{I}(z,t)}{2\pi R_2}\overrightarrow{u_z} \wedge -\overrightarrow{u_r}$$

quelle que soit la méthode, on obtient :

$$\boxed{\underline{I}(z,t) = \frac{\mu_0 \underline{I}(z,t)}{2\pi}}$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 \underline{I}(z,t)}{2\pi r}$$

---

5)

→ En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday

cf équation 1 $$\underline{B} = -\frac{1}{j\omega}\frac{\partial \underline{E}}{\partial z}$$

et l'équation de Maxwell-Ampère

cf équation 2 $$-\frac{\partial \underline{B}}{\partial z} = \frac{j\omega}{c^2}\underline{E}$$

on doit obtenir l'équation de propagation puis l'équation de dispersion. Ici, ayant déjà remplacé $\frac{\partial}{\partial t}$ par $j\omega$, on obtient :

$$-\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial z^2} = \frac{j\omega}{c^2}\frac{\partial \underline{E}}{\partial z}$$

$$= \frac{j\omega}{c^2} \times -j\omega \underline{B}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{B} = 0}$$

or $$\underline{B} = \frac{\mu_0 \underline{I}_0(z) \exp j\omega t}{2\pi r}$$

L'équation devient :

$$\boxed{\frac{d^2 \underline{I}_0(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{I}_0(z) = 0}$$

On pose $\underline{I}_0(z)$ en $\exp(rz)$ pour trouver l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$r = \pm j\frac{\omega}{c}$$

$$r = \pm jk$$

on pose $k = \frac{\omega}{c}$

Donc, on peut trouver une solution en $\exp - jkz$

Ici $\underline{I}_0(z) = I_0 \exp - jkz$

$\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} k = \frac{\omega}{c} \\ k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \end{array}}$

$\longrightarrow$ on a donc obtenu

$$\boxed{\underline{I}(z,t) = I_0 \exp j(\omega t - kz)}$$

il s'agit d'une onde (cf en : $t - \frac{k}{\omega} z$)

se propageant selon z avec une vitesse $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$

$\longrightarrow$ La deuxième solution était en $\exp + jkz$ soit

$$\underline{I}'(z,t) = I'_0 \exp j(\omega t + kz)$$

onde de courant se propageant dans <u>le sens des z négatifs</u>.

---

6) $\overrightarrow{\underline{B}} = \frac{\mu_0 I_0 \exp j(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_\theta}}{2\pi r}$

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{\cos(\omega t - kz)}{r} \overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\overrightarrow{\underline{E}} = \frac{-c^2}{j\omega} \frac{\partial \underline{B}}{\partial z} \overrightarrow{u_r}$$

$$= -\frac{c^2}{j\omega} \times -jk\, \underline{B}\, \overrightarrow{u_r}$$

$$= c\, \underline{B}\, \overrightarrow{u_r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{\mu_0 c\, I_0}{2\pi} \frac{\cos(\omega t - kz)}{r} \overrightarrow{u_r}}$$

Il s'agit d'une onde

- progressive selon $\overrightarrow{u_z}$
- quasiplane (T.E.M.) avec $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{E}}{c}$

---

7)
$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\boxed{\vec{S}_{(r,z,t)} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi^2} \frac{\cos^2(\omega t - kz)}{r^2} \vec{u_z}}$$

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle_{(r,z)} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2} \vec{u_z}}$$

(indépendant de z)

---

8)
$$P = \iint_{\text{couronne circulaire}} \langle \vec{S} \rangle \, \vec{dS} \quad \text{(element de surface)}$$

$$= \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \, 2\pi \, \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{P = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) I_0^2}$$

P est la puissance transportée par le cable coaxial. Elle ne dépend pas de z puisque c'est un cable non résistif (cable sans pertes)

---

9)
$$P = Z \, I_{eff}^2$$

$$= Z \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$Z = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{Z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Réflexion dans un guide rectangulaire

1) $\boxed{\overrightarrow{E} \text{ en } V\,m^{-1}}$

2) $\overrightarrow{E}$ est selon $\overrightarrow{u_y}$ donc

$\boxed{\text{l'onde est polarisée selon } \overrightarrow{u_y}}$

L'onde n'est pas plane puisque dans un plan de phase $z = \text{cte}$ l'amplitude n'est pas uniforme

$\boxed{\text{l'onde n'est pas plane car pour } z = \text{cte},\ E \text{ dépend de } x \text{ et } y \text{ aussi.}}$

3) Equation de Maxwell-Gauss.

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = \cancel{\frac{\rho}{\varepsilon_0}} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Ici $\boxed{\dfrac{\partial E}{\partial y} = 0}$

soit $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 0$

f est indépendant de y

4) Si f dépend de z, l'amplitude de $\overrightarrow{E}$ (et celle de $\overrightarrow{B}$) est fonction de z. La puissance transportée sera fonction de z ce qui est contraire à l'hypothèse (pas de pertes d'énergie)

Il faudrait calculer $\overrightarrow{B}$, $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle$, P (flux de $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle$ dans une section $z = \text{cte}$)

5) On utilise l'équation de propagation de $\overrightarrow{E}$ dans le vide.

$$\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \qquad \text{soit selon } \overrightarrow{u_y}$$

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

avec $E = E_0 \; f(x) \; \cos(\omega t - kz)$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = E_0 \; \frac{d^2 f}{dx^2} \; \cos(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -k^2 \; E_0 \; f(x) \; \cos(\omega t - kz)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 \; E_0 \; f(x) \; \cos(\omega t - kz)$$

on obtient après simplification

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f(x) = 0}$$

---

6) et 7)

→ la solution doit vérifier l'équation précédente

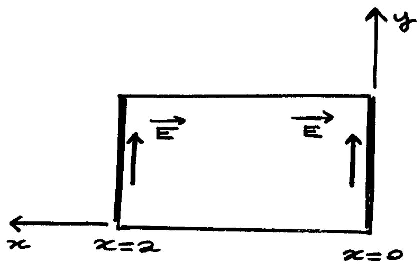
$$-\frac{\pi^2}{a^2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \overset{?}{=} 0$$

possible si

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}}$$

Cette relation entre ω et k est l'équation de dispersion.

→ le champ $\vec{E}$ doit vérifier les conditions aux limites



Il est <u>tangentiel</u> aux parois $x=0$ et $x=a$ faites d'un conducteur parfait. Il doit s'annuler

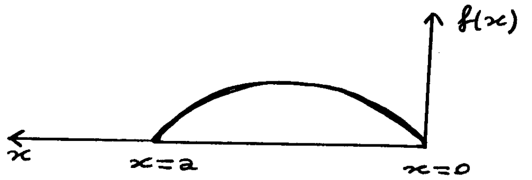
$$E(x=0, z, t) = 0$$

$$E(x=a, z, t) = 0$$

donc il faut

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x=0) = 0 \\ f(x=a) = 0 \end{array}}$$

ce qui est bien vérifié pour $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$



⟶ Commentaire en lien avec le cours :

Il s'agit ici du <u>mode fondamental</u> du guide (si $b<a$)

(on pourrait envisager $f(x) = \sin\frac{m\pi x}{a}$ avec m entier

on pourrait envisager $\vec{E}$ selon x et un $f(y)$ mais

si $b<a$ - cf figure - les fréquences de coupure seraient

plus élevées)

---

8) On a vu $$\frac{\omega^2}{c^2} = \underbrace{k^2}_{\text{positif}} + \frac{\pi^2}{a^2}$$

$$\omega^2 > \frac{\pi^2 c^2}{a^2}$$

La pulsation doit être supérieure à ω_c (passe haut)

$$\boxed{\omega > \omega_c = \frac{\pi c}{a}}$$

---

9) $$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

$$\boxed{f_c = \frac{c}{2a}}$$

A.N. $$= \frac{3.10^8}{2 \times 10^{-2}}$$

$$\boxed{f_c = 15 \text{ GHz}}$$

---

10) $$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_c^2}{c^2}$$

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi f}{c}\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\boxed{\lambda_z = \frac{c}{f\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}}$$

A.N.
$$= \frac{3 \cdot 10^8}{15{,}81\ 10^9\sqrt{1-\left(\frac{15}{15{,}81}\right)^2}}$$

$$\boxed{\lambda_z = 6{,}01 \text{ cm}}$$

---

11) Pour trouver $\overrightarrow{B}$, je préfère travailler en utilisant la notation complexe.

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\overrightarrow{E}} = -\frac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t}$$

$$= -j\omega \underline{\overrightarrow{B}}$$

$$\underline{\overrightarrow{B}} = -\frac{1}{j\omega}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\overrightarrow{E}}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ -jk \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \exp j(\omega t - kz) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z} \end{array} \begin{vmatrix} -\frac{k}{\omega} E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \exp j(\omega t - kz) \\ 0 \\ \frac{1}{\omega}\frac{\pi}{a} E_0 \cos\frac{\pi x}{a} \exp j(\omega t - kz) \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{B} = &-\frac{k}{\omega} E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_x} \\ &-\frac{1}{\omega}\frac{\pi}{a} E_0 \cos\frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_z} \end{aligned}}$$

---

12) Vecteur de Poynting :

$$\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{E} \wedge \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{E_y B_z}{\mu_0}\overrightarrow{u_x} - \frac{E_y B_x}{\mu_0}\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{\Pi} = &-\frac{1}{\omega}\frac{\pi}{a}\frac{1}{4\mu_0} E_0^2 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin 2(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_x} \\ &+\frac{k}{\omega}\frac{1}{\mu_0} E_0^2 \sin^2\frac{\pi x}{a} \cos^2(\omega t - kz)\, \overrightarrow{u_z} \end{aligned}}$$

---

puis valeur moyenne dans le temps :

$$\boxed{<\vec{\Pi}> = \frac{k}{\omega}\frac{1}{2\mu_0}E_0^2 \sin^2\frac{\pi x}{a}\,\vec{u_z}}$$

et valeur moyenne dans le temps et sur une section droite (il y a une période spatiale de $\sin^2\frac{\pi x}{a}$)

$$\boxed{<\vec{\Pi}>_{\text{moyen section droite}} = \frac{k}{\omega}\frac{1}{4\mu_0}E_0^2\,\vec{u_z}}$$

donc puissance traversant le guide

$$\boxed{P = \frac{k}{\omega}\frac{1}{4\mu_0}E_0^2\, a b}$$

---

13) A.N.

$$P = \frac{2\pi/\lambda_z}{2\pi f}\,\frac{1}{4\mu_0}E_0^2\,a^2$$

$$= \frac{E_0^2\,a^2}{4\mu_0\,\lambda_z\,f}$$

$$= \frac{(0{,}5\ 10^6)^2\,(10^{-2})^2}{4\ \ 4\pi\,10^{-7}\ \ 6{,}01\,10^{-2}\ \ 15{,}81\ \ 10^9}$$

$$\boxed{P = 5{,}24\ \text{kW}}$$

---

14)

L'onde réfléchie se propage selon les z décroissants, donc :

$$\vec{E}_{\text{réfléchi}} = \underline{E'_0}\ \exp j(\omega t + kz)\ \vec{u_y}$$

$$\left(\quad \vec{E}_{\text{incident}} = E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\ \exp j(\omega t - kz)\ \vec{u_y} \quad\right)$$

On donne le coefficient de réflexion en $z = L$

$$\underline{r} = \left(\frac{\underline{E}_{\text{réfléchi}}}{\underline{E}_{\text{incident}}}\right)_{z=L}$$

$$\underline{r} = \frac{\underline{E'_0}\ \exp j(\omega t + kL)}{E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\ \exp j(\omega t - kL)}$$

donc

$$\underline{E'_0} = \underline{r}\ E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\ \exp -j2kL$$

$$\boxed{\underline{E}_{\text{réfléchi}} = \underline{r}\ E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\ \exp j\left(\omega t - k(2L - z)\right)}$$

15) $\underline{E}_{total} = \underline{E}_{incident} + \underline{E}_{réfléchi}$

$$\boxed{\underline{E}_{total} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp j\omega t \left(\exp -jkz + \underline{r} \exp -jk(2L-z)\right)}$$

---

16) On suppose que le métal est infiniment conducteur.

$\longrightarrow$ $\underline{E}_{total}$ étant tangentiel à la plaque, il doit être nul en $z=L$

$$0 = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp j\omega t \left(\exp -jkL + \underline{r} \exp -jk(2L-L)\right)$$

Donc, comme attendu :

$$\boxed{\underline{r} = -1}$$

$\longrightarrow$ $\underline{E}_{total} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp j\omega t \left(\exp -jkz - \exp -jk(2L-z)\right)$

$$= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp j\omega t \exp -jkL \underbrace{\left(\exp jk(L-z) - \exp -jk(L-z)\right)}_{2j \sin k(L-z)}$$

$$\boxed{E_{total} = -2 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin k(L-z) \sin(\omega t - kL)}$$

$\longrightarrow$ Les plans nodaux selon z sont tels que :

$$\sin k(L-z) = 0$$

$$k(L-z) = m\pi \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{z_N = L - m\frac{\lambda_z}{2}}$$

Les nœuds sont distants de $\lambda_z/2$

---

17) Pour trouver l'amplitude au carré, on fait $\underline{E}_{total}\ \underline{E}^*_{total}$

$$\underline{E}_{total}\underline{E}^*_{total} = E_0^2 \sin^2\frac{\pi x}{a} \left(\exp -jkz + \underline{r} \exp -jk(2L-z)\right) \times \left(\exp jkz + \underline{r}^* \exp +jk(2L-z)\right)$$

$$= E_0^2 \sin^2\frac{\pi x}{a} \left(1 + \underline{r}\,\underline{r}^* + \underline{r} \exp -jk\,2(L-z) + \underline{r}^* \exp jk\,2(L-z)\right)$$

$$= E_0^2 \sin^2\frac{\pi x}{a} \left(1 + r^2 + 2r \cos[k\,2(L-z) - \varphi]\right)$$

$$\boxed{\left|\underline{E}_{(x,z)}\right| = E_0 \left|\sin\frac{\pi x}{a}\right| \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos[k\,2(L-z) - \varphi]}}$$

---

18) à x fixé

$$E_{MAX} = E_0 \left|\sin\frac{\pi x}{a}\right| (1+r) \qquad (\cos(\ )=+1)$$
$$E_{MIN} = E_0 \left|\sin\frac{\pi x}{a}\right| (1-r) \qquad (\cos(\ )=-1)$$

$$\boxed{TOS = 20 \log \frac{1+r}{1-r}}$$

---

19) On cherche ici la position des minima

$$\cos\left[2k(L-z)-\varphi\right] = -1$$
$$2k(L-z)-\varphi = (2m-1)\pi$$
$$k(L-z) = m\pi + \frac{\varphi-\pi}{2} \qquad \text{avec } k=\frac{2\pi}{\lambda_z}$$

$$\boxed{z_N = L - m\frac{\lambda_z}{2} + \left(1-\frac{\varphi}{\pi}\right)\frac{\lambda_z}{4}}$$

(Les noeuds restent distants de $\lambda_z/2$)

$$\boxed{d = \frac{\lambda_z}{2}}$$

De plus :

$$-\pi < \varphi < +\pi$$
$$-1 < \frac{\varphi}{\pi} < 1 \qquad \text{d'où}$$
$$d > \left(1-\frac{\varphi}{\pi}\right)\frac{\lambda_z}{4} > 0$$

pour le premier minimum, il faut $m=1$

$$\boxed{\Delta z = \left(1+\frac{\varphi}{\pi}\right)\frac{d}{2}}$$

---

20) A.N. $\longrightarrow$ $TOS = 20 \log \dfrac{1+r}{1-r} = 5$

donc

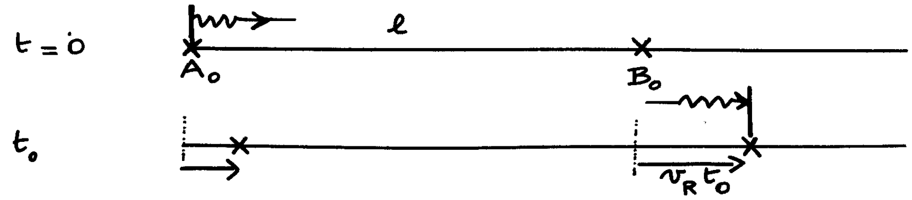
$$\boxed{r = 0{,}28}$$

$$\longrightarrow \varphi = \pi \left(\frac{2\Delta z}{d} - 1\right)$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{3}}$$

Effet Doppler

1) $t = 0$



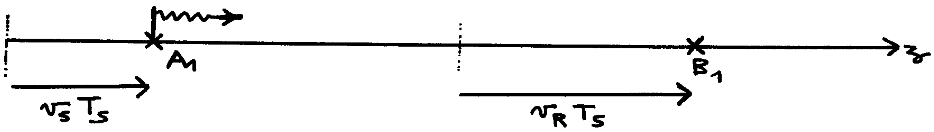
La distance parcourue par l'impulsion est $l + v_R t_0$
Donc puisque la vitesse est c

$$l + v_R t_0 = c\, t_0$$

$$\boxed{t_0 = \frac{l}{c - v_R}}$$

---

2) $t = T_S$
$(t' = 0)$



A l'émission de la nouvelle impulsion, la distance ne vaut plus l
mais $l + v_R T_S - v_S T_S$

$$\boxed{\overrightarrow{A_1B_1} = \underbrace{\left(l + (v_R - v_S) T_S\right)}_{l'} \vec{u}_z}$$

et de la même façon qu'en 1)

$$t'_1 = \frac{l'}{c - v_R}$$

$$\boxed{t'_1 = \frac{l + (v_R - v_S) T_S}{c - v_R}}$$

---

3) relation entre t et t'

$$\boxed{t' = t - T_S}$$

si on désigne par t_1 la valeur de t à l'arrivée de l'impulsion "un"

$$t_1 = t'_1 + T_S$$

$$\boxed{t_1 = \frac{l + (c - v_S) T_S}{c - v_R}}$$

donc
$$T_R = t_1 - t_0$$

$$\boxed{T_R = T_S \frac{c - v_S}{c - v_R}}$$

$$\boxed{f_R = f_S \frac{c - v_R}{c - v_S}}$$

Donc, de manière évidente

$$f_R = f_S$$

si

$$\boxed{v_R = v_S}$$

(S et R sont fixes l'un par rapport à l'autre dans le référentiel se déplaçant à la vitesse $v_R = v_S$ par rapport à $\mathcal{R}$)

---

4) $v_S = v$
$v_R = 0$

$$f_R = f_S \frac{c}{c - v}$$

$$\boxed{f_R = f_S \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}}$$

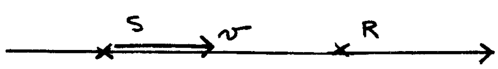
si la source s'éloigne du récepteur

$v = -|v| < 0$ donc $f_R = f_S \dfrac{1}{1 + \frac{|v|}{c}}$

$$\boxed{f_R < f_S}$$

le signal est "plus grave"

si la source s'approche du récepteur



$v > 0$ donc

$$\boxed{f_R > f_S}$$

le signal est "plus aigu"

---

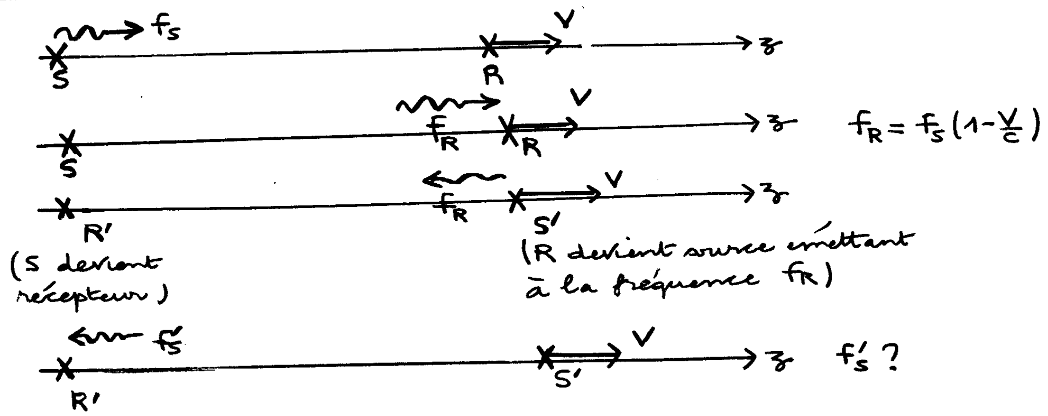
5) $v_S = 0$
$v_R = V$

$$f_R = f_S \, \frac{c - V}{c}$$

$$\boxed{f_R = f_S \left(1 - \frac{V}{c}\right)}$$

---

6)



La source s'éloigne du récepteur avec une vitesse V, on doit donc trouver (cf 4)) $\underset{\text{reçue}}{f'_S} < \underset{\text{émise}}{f_R}$.

$$f'_S = f_R \, \frac{1}{1 + \frac{V}{c}}$$

remarque

> on peut utiliser aussi l'étude précédente en 3) avec $v_R = 0$, $v_S = -V$, $c \to c$ puisque pour retrouver la configuration étudiée, il faut <u>inverser l'axe z</u>

finalement

$$\boxed{f'_S = f_S \, \frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}$$

et si $\frac{V}{c} \ll 1$

$$\boxed{f'_S = f_S \left(1 - \frac{2V}{c}\right)}$$

---

7)

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

---

8) Dans $\mathcal{R}'$: $\vec{F}' = q' \, (\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$

Dans $\mathcal{R}$: $\vec{F} = q \, (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

avec, en physique classique :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{F} = \vec{F}' \\ q = q' \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \end{array} \right.$$

Donc :

$$\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' = \vec{E} + (\vec{v}' + \vec{V}) \wedge \vec{B}$$
$$= (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) + \vec{v}' \wedge \vec{B} \qquad \forall \vec{v}'$$

ce qui impose :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E}' = (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{array}}$$

---

9)

$\longrightarrow$ $\underline{\vec{E}_i} = E_0 \exp j(\omega t - k z) \, \vec{u_x}$ (fréquence f)

$\underline{\vec{E}_r} = \underline{r} \, E_0 \exp j(\omega' t + k' z) \, \vec{u_x}$ (fréquence f')

- L'onde réfléchie se propage selon les z décroissants avec une vitesse $v_\varphi = -\frac{\omega'}{k'}$ $(= -c)$
- le problème suppose que la fréquence de l'onde réfléchie $f' = \frac{\omega'}{2\pi}$ est différente de la fréquence de l'onde incidente $f = \frac{\omega}{2\pi}$
- $\underline{r}$ coefficient traduisant le fait que l'amplitude de l'onde réfléchie diffère de E_0

$\longrightarrow$ $\underline{\vec{E}_i} = E_0 \exp j(\omega t - kz) \, \vec{u_x}$

$\underline{\vec{B}_i} = \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - kz) \, \vec{u_y}$

$\underline{\vec{E}'_i} = \underline{\vec{E}_i} + \vec{V} \wedge \underline{\vec{B}_i}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\vec{E}'_i} = E_0 \left(1 - \frac{V}{c}\right) \exp j\,\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{u_x} \\ \underline{\vec{B}'_i} = \frac{E_0}{c} \exp j\,\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) \vec{u_y} \end{array}}$$

$\longrightarrow$ $\underline{\vec{E}_r} = \underline{r} \, E_0 \exp j(\omega' t + k' z) \, \vec{u_x}$

$\underline{\vec{B}_r} = -\underline{r} \, \frac{E_0}{c} \exp j(\omega' t + k' z) \, \vec{u_y}$

$$\vec{E'_r} = \vec{E_r} + \vec{V} \wedge \vec{B_r}$$

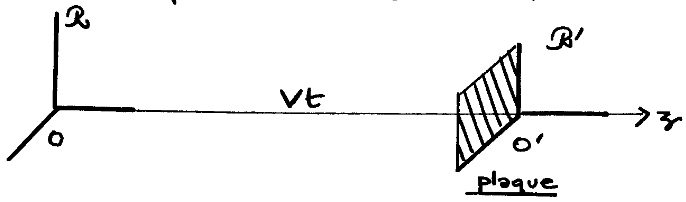
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E'_r} &= \underline{r} E_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right) \exp j\, \omega' \left(t + \frac{z}{c}\right) \vec{u_x} \\ \vec{B'_r} &= -\underline{r}\, \frac{E_0}{c} \exp j \omega' \left(t + \frac{z}{c}\right) \vec{u_y} \end{aligned}}$$

---

10) Dans le référentiel lié à la plaque

plaque en $z' = 0$

(donc $z = Vt$)



Le champ incident sur la plaque est, au voisinage de la plaque

$$\underset{\substack{\text{en } z'=0 \\ \text{en } t}}{\vec{E'_i}} = E_0 \left(1 - \frac{V}{c}\right) \exp\left[j\omega \left(1 - \frac{V}{c}\right) t\right] \vec{u_x}$$

Le champ réfléchi par la plaque est, au voisinage de la plaque

$$\underset{\substack{\text{en } z'=0 \\ \text{en } t}}{\vec{E'_r}} = \underline{r}\, E_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right) \exp\left[j\omega' \left(1 + \frac{V}{c}\right) t\right] \vec{u_x}$$

Le champ étant tangentiel, il doit s'annuler au voisinage de la plaque

$$E_0 \left(1 - \frac{V}{c}\right) \exp j\omega \left(1 - \frac{V}{c}\right) t + \underline{r}\, E_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right) \exp j\omega' \left(1 + \frac{V}{c}\right) t = 0 \quad \forall t$$

→ Donc les exposants sont égaux soit :

$$\omega \left(1 - \frac{V}{c}\right) = \omega' \left(1 + \frac{V}{c}\right)$$

$$\boxed{f' = f\, \frac{1 - V/c}{1 + V/c}}$$

→ alors

$$E_0 \left(1 - \frac{V}{c}\right) + \underline{r}\, E_0 \left(1 + \frac{V}{c}\right) = 0$$

$$\boxed{\underline{r} = -\, \frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}$$

On a retrouvé le résultat de 5)

$$\boxed{f' = f\, (1 - 2V/c)} \quad \text{si } V/c \ll 1$$

11)

$$f' = f\,(1 - 2V/c)$$

$$\delta f = f' - f = -f\, 2V/c$$

$$\boxed{\frac{|\delta f|}{f} = \frac{2V}{c}}$$

A.N.
$$V = \frac{c}{2}\,\frac{|\delta f|}{f}$$
$$= \frac{3.10^8}{2}\,\frac{972}{5\;10^9}$$
$$= 29{,}2 \;\; m/s$$
$$\boxed{V = 105{,}0 \;\; km/h}$$

---

12) Si l'on se contente d'une précision, par exemple, de 1 km/h il faut pouvoir apprécier la fréquence $\frac{1}{105} \times 972 \simeq 9$ Hz soit mesurer $f' = 5$ GHz $- 972$ Hz à 9 Hz près

$= \boxed{4\,999\,999\,028 \text{ Hz à 9 Hz près}}$

ce qui correspond à une précision de mesure de

$$\frac{9}{4\,999\,999\,028} = \boxed{2.10^{-7}\ \%}$$

Précision de mesure qui semble "impossible" !

---

13)
$$u_s = K\, u_e\, u_r$$

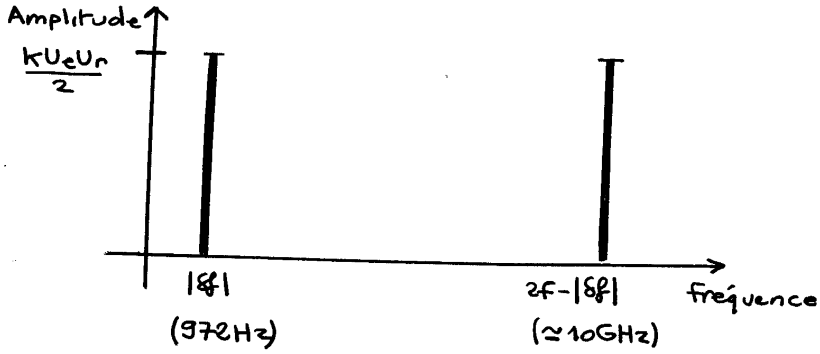
donc
$$[K] = [\text{tension}]^{-1}$$
$$\boxed{K \text{ en } V^{-1}}$$

---

14)
$$u_s = K\, U_e \sin(2\pi f t)\; U_r \sin(2\pi f' t + \varphi)$$
$$= K\, U_e U_r\; \frac{1}{2}\Big[\cos(2\pi(f - f')t - \varphi) - \cos(2\pi(f + f')t + \varphi)\Big]$$
$$= \frac{K U_e U_r}{2}\Big[\cos(-2\pi\, \delta f\, t - \varphi) - \cos(2\pi(2f + \delta f)\, t + \varphi)\Big]$$

ou
$$\boxed{u_s = \frac{K U_e U_r}{2}\Big[\cos(2\pi |\delta f|\, t - \varphi) - \cos(2\pi(2f - |\delta f|)\,t + \varphi)\Big]}$$

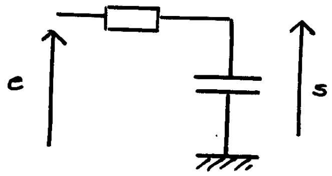
Spectre de fréquences (en amplitude)



---

15) On place donc un <u>filtre passe-bas</u> en sortie du multiplieur

Ex : passe-bas du premier ordre :



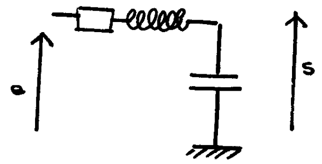
$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R}$$

$$= \frac{1}{1+j\frac{f}{f_c}}$$

avec $\boxed{2\pi f_c = \frac{1}{RC}}$

Condition : $\boxed{\underset{(972\,Hz)}{|\delta f|} \ll f_c \ll \underset{(10\,GHz)}{2f_{onde}}}$

Ex : passe-bas du second ordre :



$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R+jL\omega}$$

$$= \frac{1}{1+2j\sigma\frac{f}{f_0}-\frac{f^2}{f_0^2}}$$

avec $\boxed{2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

$$\sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

valeur de σ

- par exemple $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

  Pas de résonance (valeur limite)

  gain le "plus constant possible" dans la bande passante

  Filtre de Butterworth d'ordre 2

  avec $\left|\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^4}}$

- pour $\sigma = 1$

  $$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

condition identique : $|\delta f| \ll f_0 \ll 2 f_{onde}$

Diagramme potentiel - pH du chrome

1) nombres d'oxydation :

$Cr(s)$	0
Cr^{2+}	II
Cr^{3+}	III
$Cr_2O_7^{2-}$	VI
CrO_4^{2-}	VI
$Cr(OH)_3(s)$	III

---

2) $Cr_2O_7^{2-} / CrO_4^{2-}$

→ on équilibre la demi-réaction

$$\underset{\overset{\uparrow}{VI}}{Cr_2O_7^{2-}} + H_2O = 2\,\underset{\overset{\uparrow}{VI}}{CrO_4^{2-}} + 2H^+$$

<u>Il ne s'agit pas d'oxydoréduction.</u>

(pas d'électrons échangés ou :

le nombre d'oxydation du chrome ne varie pas)

<u>$Cr_2O_7^{2-}$ est susceptible de donner $2H^+$ et CrO_4^{2-}</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} Cr_2O_7^{2-} \text{ est acide} \\ CrO_4^{2-} \text{ est base} \end{array}}$$

→ $(\frac{1}{2}Cr_2O_7^{2-}) / CrO_4^{2-}$

$$\frac{1}{2}Cr_2O_7^{2-} + \frac{1}{2}H_2O = CrO_4^{2-} + H^+$$

réaction :

$$\boxed{\frac{1}{2}Cr_2O_7^{2-} + \frac{3}{2}H_2O = CrO_4^{2-} + H_3O^+}$$

(écrite pour 1 H_3O^+

comme traditionnellement pour un couple acide/base)

$$\boxed{K_2 = \frac{[CrO_4^{2-}]\ h}{[Cr_2O_7^{2-}]^{1/2}}}$$

$\longrightarrow$ à la frontière

$$\underbrace{2\,[Cr_2O_7^{2-}]}_{c/2} + \underbrace{[CrO_4^{2-}]}_{c/2} = c$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{rcl} [Cr_2O_7^{2-}] & = & c/4 \\ [CrO_4^{2-}] & = & c/2 \end{array}}$$

$$h = K_2 \frac{[Cr_2O_7^{2-}]^{1/2}}{[CrO_4^{2-}]}$$

$$pH_{\text{frontière}} = pK_2 - \log \frac{(c/4)^{1/2}}{c/2}$$

$$= pK_2 - \log \frac{1}{\sqrt{c}}$$

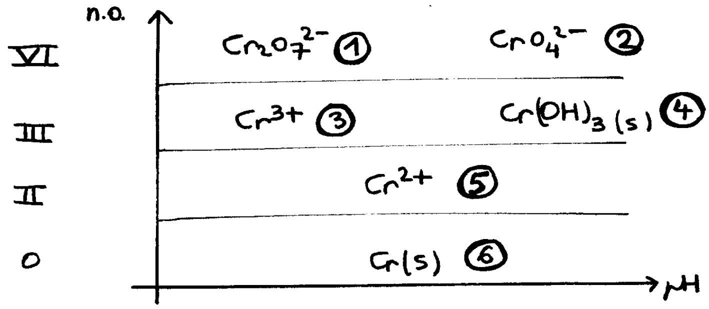
$$\boxed{pH_{\text{frontière}} = pK_2 - \frac{1}{2}\,pc}$$

A.N. $= 7{,}2 - \frac{1}{2}\ 1$

$$\boxed{pH_{\text{frontière}} = 6{,}7}$$

---

3) diagramme primitif



Les domaines avec <u>solide</u> (⑥ : $Cr(s)$
④ : $Cr(OH)_3\,(s)$)

sont des domaines d'<u>existence</u>

Les domaines avec des espèces solubles

sont des domaines de prédominance.

<u>4)</u> frontière $\underset{III}{\underset{\uparrow}{Cr^{3+}}} / \underset{III}{\underset{\uparrow}{Cr(OH)_3(s)}}$

Il ne s'agit pas d'un couple redox.
On cherche le pH de début de précipitation de $Cr(OH)_3(s)$

$$Cr^{3+} + 3\,HO^- = Cr(OH)_{3(s)}$$

avec :

$$K_s = [Cr^{3+}]\,[HO^-]^3$$
$$= [Cr^{3+}]\,\frac{K_e^3}{h^3}$$
$$h^3 = \frac{K_e^3}{K_s}\,[Cr^{3+}]$$

A la frontière, on pose $[Cr^{3+}] = c$

$$3\,pH = 3\,pK_e - pK_s + pc$$
$$\boxed{\underset{\text{frontière}}{pH} = pK_e - \frac{1}{3}\,(pK_s - pc)}$$

A.N. $$= 14 - \frac{1}{3}\,(31 - 1)$$

$$\boxed{\underset{\text{frontière}}{pH} = 4{,}0}$$

---

5) frontière $\underset{III}{\underset{\uparrow}{Cr(OH)_3(s)}} / \underset{II}{\underset{\uparrow}{Cr^{2+}}}$

On part de $E^\circ(Cr^{3+}/Cr^{2+})$:

$$Cr^{3+} + e^- = Cr^{2+}$$

$$E = E^\circ_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} + \frac{0,06}{1} \log \frac{[Cr^{3+}]}{[Cr^{2+}]}$$

Ici il s'agit de $[Cr^{3+}]$ en présence d'un précipité de $Cr(OH)_3$ donc $[Cr^{3+}] = \frac{K_s\, h^3}{K_e^3}$ (question précédente)

$$E = E^\circ_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} + 0,06 \log \frac{K_s\, h^3}{K_e^3\,[Cr^{2+}]}$$

$$= E^\circ_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} - 0,06\,(pK_s - 3\,pK_e + 3\,pH) - 0,06 \log [Cr^{2+}]$$

A la frontière $[Cr^{2+}] = c$

$$\boxed{E_{\text{frontière}} = E^\circ_{Cr^{3+}/Cr^{2+}} - 0,06\,(pK_s - 3\,pK_e - pc) - 0,18\ pH}$$

A.N. $= -0,41 - 0,06\,(31 - 3 \times 14 - 1) - 0,18\ pH$

$$\boxed{E_{\text{frontière}} = 0,31 - 0,18\ pH}$$

---

6) frontière $\underset{\uparrow VI}{CrO_4^{2-}} / \underset{\uparrow III}{Cr(OH)_3\,(s)}$

$$\boxed{CrO_4^{2-} + 5\,H^+ + 3e^- = Cr(OH)_3(s) + H_2O}$$

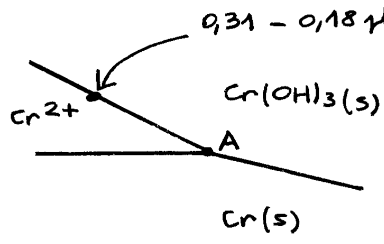
$$E_{\text{frontière}} = A + \frac{0,06}{3} \log [H^+]^5$$

$$= A - 0,10\ pH$$

$$\boxed{\text{pente : } -0,10\ V/pH}$$

---

7) au point A :



→ on cherche l'équation de la frontière $Cr^{2+}/Cr(s)$

$$Cr^{2+} + 2e^- = Cr(s)$$

$$E_{frontière} = E^0_{Cr^{2+}/Cr(s)} + \frac{0{,}06}{2}\log c$$

$$= -0{,}91 + 0{,}03 \times -1$$

$$= -0{,}94\,V$$

D'où les coordonnées de A à l'intersection des deux frontières $Cr(OH)_3\,(s)\,/\,Cr^{2+}$ et $Cr^{2+}/Cr(s)$

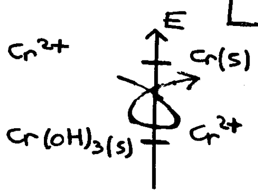
$$0{,}31 - 0{,}18\,pH = -0{,}94$$

$$\boxed{\begin{array}{l} pH_A = 6{,}9 \\ E_A = -0{,}94\,V \end{array}}$$

→ à partir de pH_A, le chrome (II) n'existe plus. Il se dismute en $Cr(OH)_3\,(s)$ et $Cr(s)$

réaction de <u>dismutation</u>

$$Cr^{2+}\,(II) \rightarrow Cr(OH)_3\,(s)\,(III) \qquad Cr^{2+}\,(II) \rightarrow Cr\,(s)\,(0)$$



$$Cr^{2+} + 2e^- = Cr(s) \qquad (\times 1)$$

$$Cr(OH)_3(s) + 3H^+ + e^- = Cr^{2+} + 3\,H_2O \qquad (\times -2)$$

$$3\,Cr^{2+} + 6\,H_2O = Cr(s) + 2\,Cr(OH)_3\,(s) + 6\,H^+$$

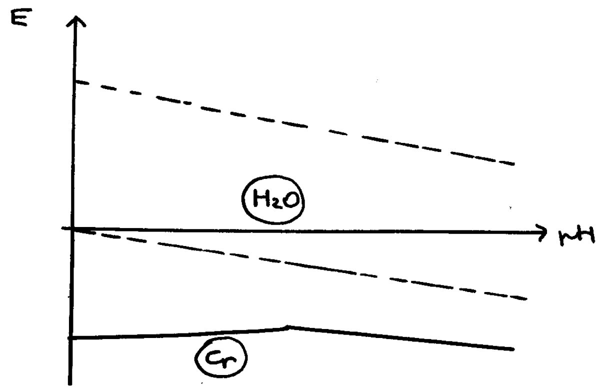
on ajoute des HO^- et on simplifie d'où la réaction demandée :

$$\boxed{3\,Cr^{2+} + 6\,HO^- = Cr(s) + 2\,Cr(OH)_3\,(s)}$$

---

8) → D'après ce diagramme (c'est à dire d'après la thermodynamique) <u>le chrome doit réagir sur l'eau à tout pH.</u>

(pas de domaine commun entre $Cr(s)$ et H_2O)



par exemple, pour pH < 4, l'espèce stable dans l'eau est Cr^{3+}

donc H_2O + Cr(s) donne $H_2(g)$ et Cr^{3+}

pour pH > 4, $Cr(OH)_3(s)$ est stable dans l'eau

donc H_2O + Cr(s) donne $H_2(g)$ et $Cr(OH)_3(s)$

→ On peut imaginer que la couche de $Cr(OH)_3(s)$ protège Cr(s) de l'attaque et entraîne une passivation réelle à pH $\gtrsim 4$

---

9) →

$$Cr_2O_7^{2-} + 14\,H^+ + 6e^- = 2\,Cr^{3+} + 7\,H_2O \quad (\times 2)$$
$$O_2 + 4\,H^+ + 4e^- = 2\,H_2O \quad (\times -3)$$

$$2\,Cr_2O_7^{2-} + 16\,H^+ = 4\,Cr^{3+} + 8\,H_2O + 3\,O_2(g)$$
$$\boxed{2\,Cr_2O_7^{2-} + 16\,H_3O^+ = 4\,Cr^{3+} + 24\,H_2O + 3\,O_2(g)}$$

(12 électrons échangés)

→ Les formules donnant $\Delta G^\circ = -RT\ln K^\circ = -n\mathcal{F}(E^\circ_D - E^\circ_G)$

permettent de retrouver :

$$\boxed{\log K^\circ = \frac{12}{0{,}06}\left(E^\circ_{Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}} - E^\circ_{O_2/H_2O}\right)}$$

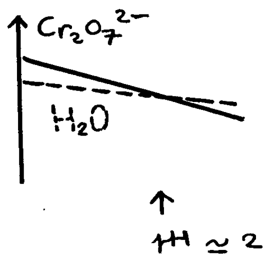
A.N. $= \frac{12}{0{,}06}(1{,}33 - 1{,}23)$

$= 20$

$$\boxed{K^\circ = 10^{20}}$$

réaction quantitative prévue par la thermo.

→ d'après le diagramme, on voit que



il existe un <u>domaine commun</u> entre $Cr_2O_7^{2-}$ et H_2O pour pH > 2.

Donc $\boxed{\text{les solutions sont stables pour pH > 2}}$

→ on utilise souvent des solutions acidifiées de pH < 2. La stabilité s'explique alors par une <u>cinétique très lente</u>.