

Dernière mise à jour	SLCI2	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Systèmes Linéaires Continus Invariants

SLCI2 - Linéarisation

TD1

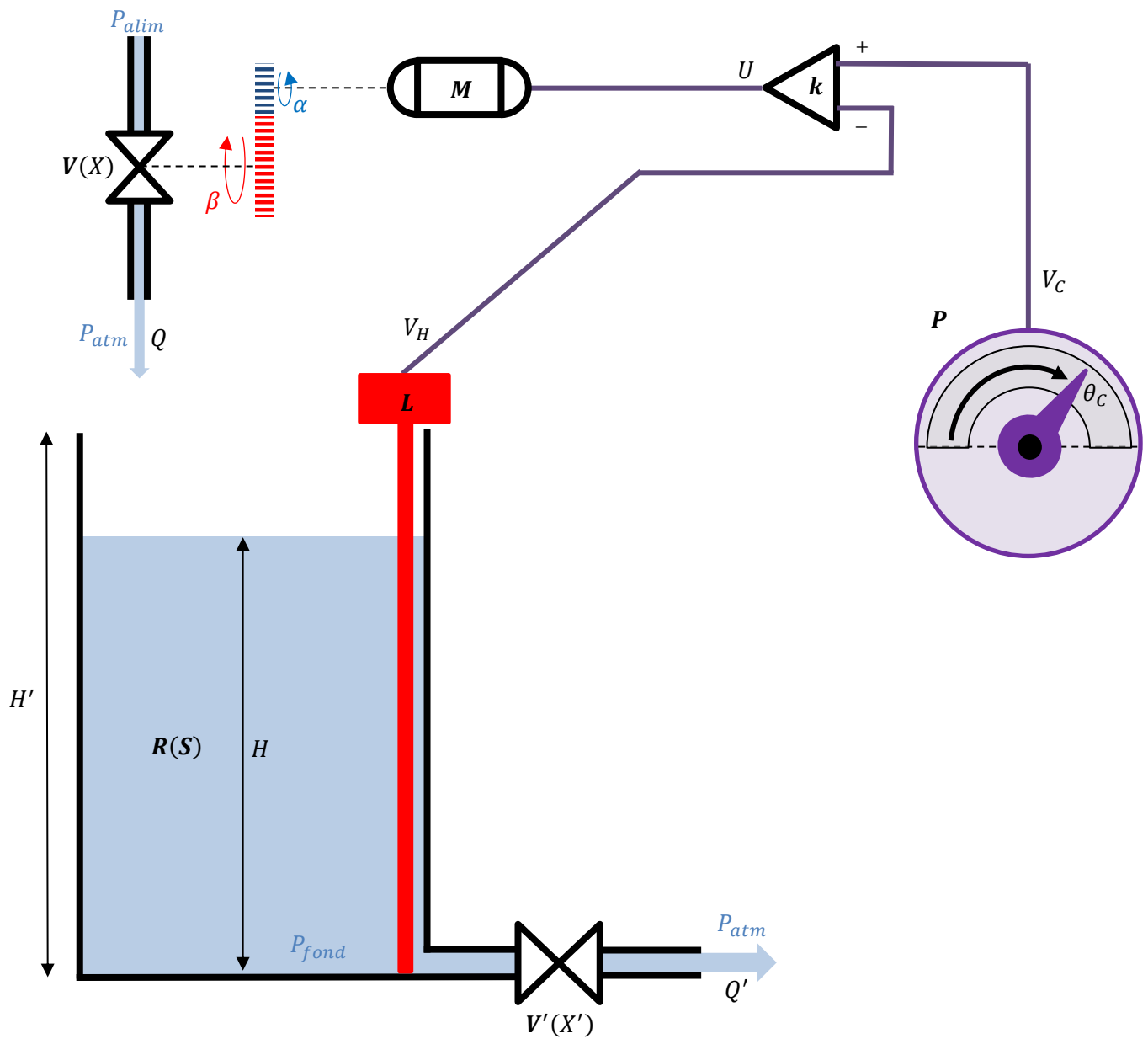
Régulation de niveau



Programme PSI/MP 2022 (LIEN)		
Id	Compétence développée	Connaissances associées
B3-02	Préciser les limites de validité d'un modèle.	Point de fonctionnement. Non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation, seuil) et retard pur.
B2-08	Simplifier un modèle.	Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement. Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : – principe ; – justification ; – limites.

Dernière mise à jour	SLC12	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Schéma de principe du système de régulation de niveau



Dernière mise à jour	SLCI2	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Description du fonctionnement du système

Un réservoir R de section constante S est alimenté en fluide par l'intermédiaire d'une vanne V de section pilotée par un moteur à courant continu M dont la rotation de l'arbre moteur α réduite par l'intermédiaire d'un réducteur de rapport $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}$ pilote le débit Q en faisant varier la section X tel que $X = k_\beta \beta$.

Une vanne V' de section X' crée une perte de fluide avec un débit Q' (sortant positif) qui sera considéré comme une perturbation. La section est un disque de rayon r que l'on peut piloter.

Le niveau de fluide H dans le réservoir de hauteur H' est retranscrit par l'intermédiaire d'un limnimètre L (appareil de mesure de niveau) en une tension V_H telle que $V_H = k_H H$. Dès que $H \geq H'$, il y a débordement.

La consigne de niveau est réalisée à l'aide d'un potentiomètre P . L'opérateur choisit visuellement la consigne de hauteur H_C à l'aide de graduations allant de H_C^{min} à H_C^{max} en tournant le bouton d'un angle θ_C allant de θ_C^{min} à θ_C^{max} tel que $\theta_C = k_C H_C$. Le potentiomètre délivre alors une tension de consigne $V_C = k_\theta \theta_C$.

Le moteur à courant continu est alimenté par un amplificateur différentiel de puissance (ALI) de gain k (valeur qui sera choisie par la suite) dont la tension de sortie alimentant le moteur est notée U .

Hypothèses

L'écoulement devient turbulent au passage par les robinets V et V' . Dans ces conditions, le débit s'exprime ainsi :

$$Q = k_q X \sqrt{P_1 - P_2} \quad ; \quad k_q = \sqrt{\frac{2}{\rho}}$$

Avec P_1 la pression en amont du robinet, P_2 la pression en aval, X la section du robinet et k_q un coefficient de proportionnalité constant lié à la masse volumique ρ du fluide, ici de l'eau.

Origine de cette formule : On applique le théorème de Bernoulli $P + \frac{1}{2} \rho V^2 = cst$ (P incluant la gravité $\rho g z$) le long d'une ligne de courant en un point immobile du fluide à la pression P_1 et un point de la sortie à la vitesse V et la pression P_2 :

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho V^2 \Leftrightarrow V = \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_1 - P_2)} \quad ; \quad Q = VX = \sqrt{\frac{2}{\rho}} X \sqrt{P_1 - P_2} = k_q X \sqrt{P_1 - P_2}$$

Dernière mise à jour	SLCI2	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

On néglige les pertes de pression dans les tuyauteries.

On note P_{atm} la pression atmosphérique, P_{alim} la pression d'alimentation de la vanne V et P_{fond} la pression du fluide en fond de réservoir.

On note ρ la masse volumique du fluide et g l'accélération de la pesanteur.

Le moteur à courant continu a une fonction de transfert notée $H_m(p)$ telle que

$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1 + T_m p} = \frac{10}{1 + p}$$

Autres données numériques

$$S = 100 \text{ cm}^2 ; \quad k_H = 1 \text{ V.m}^{-1} ; \quad k_\beta = 0,1 \text{ m}^2.\text{rd}^{-1} ; \quad n = 10$$

$$H_C^{min} = 0 \text{ m} ; \quad H_C^{max} = 1 \text{ m} ; \quad \theta_C^{min} = 0^\circ ; \quad \theta_C^{max} = 180^\circ ; \quad H' = 1,5 \text{ m}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3} ; \quad g = 9,81 \text{ m.s}^{-2} ; \quad P_{alim} = 3 \text{ bars} ; \quad P_{atm} = 1013,25 \text{ hPa}$$

Objectifs

On souhaite étudier deux problèmes indépendants :

- Partie 1 : Aptitude du système à remplir un réservoir en un temps voulu et à en maîtriser le niveau lors d'un pompage à débit constant (Vanne V' non utilisée)
- Partie 2 : Aptitude du système à maintenir un niveau constant lors d'une variation de l'ouverture de la vanne V' (débit de fuite lié à la hauteur de fluide)

Extrait du cahier des charges

Compte tenu de la présence d'un débit d'entrée uniquement positif, nous n'autoriserons aucun dépassement positif qui ne pourrait être corrigé autrement qu'aléatoirement par le débit de pompage/fuite. De même, le système ne pourra répondre qu'à des pertes.

Partie 1 : Pompage constant	Partie 2 : Fuite contrôlée par vanne V'
Débit négatif interdit	
Temps de réponse à 5% inférieur ou égale à 10 secondes lors du remplissage Et le plus rapide possible	De l'ordre de 3 minutes
RAS	Marge de phase : 45°
Ecart statique entrée/sortie nul	
Pompage constant corrigé (échelon de débit de pompage)	Fuite via la vanne parfaitement corrigée (échelon en section d'ouverture de la vanne)
Niveau variant dans toute la plage : 0 à 1m	Niveau variant dans la plage : $H_{f_{min}} = 0,5 \text{ m} \rightarrow H_{f_{max}} = 1 \text{ m}$ Ouverture de la vanne dans la plage : $r = 1 \text{ cm} \pm 5 \text{ mm}$ par incréments de $dr = 1 \text{ mm}$

Dernière mise à jour	SLCI2	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Partie 1 : Pompage

Dans cette première partie, on suppose que le débit de fuite $Q'(t)$ est constant : on pompe le fluide dans le réservoir après que celui-ci a atteint son niveau constant. Les conditions initiales sont nulles, le réservoir est donc vide. On souhaite déterminer les performances du système lors du remplissage puis pour maintenir le niveau lors d'un pompage à débit constant.

Schéma bloc

Question 1: Donner l'expression du débit Q en fonction de k_q , X , P_{alm} et P_{atm} et la mettre sous la forme $Q = AX$ où A sera explicité (expression, valeur et unité)

Question 2: Etablir la relation entre Q , Q' , $\dot{H}(t)$ et la section S du réservoir dans le domaine temporel puis dans le domaine de Laplace

On propose le schéma bloc vide du document réponse 1.

Question 3: Compléter les différents blocs du schéma bloc du document réponse 1 avec les données du problème traité

Question 4: Déterminer le gain qui transforme la hauteur de consigne H_c lue par l'opérateur en une position angulaire θ_c du potentiomètre

Remarque : on suppose que l'opérateur a une bonne vue

Question 5: Préciser la classe de la *FTBO* du système et en déduire la valeur du gain du potentiomètre k_θ permettant d'assurer un écart statique entrée/sortie nul

On propose des schémas blocs simplifiés vides aux documents réponses 2-1 et 2-2.

Question 6: Compléter les différents blocs du schéma bloc du document réponse 2-1 afin qu'il soit équivalent au schéma bloc précédemment établi

Question 7: Compléter les différents blocs du schéma bloc du document réponse 2-2

Stabilité du système

Question 8: Déterminer la *FTBO* notée $G(p)$ associée aux deux entrées H_c et $-Q'$, la mettre sous la forme $\frac{kK}{p^2} \frac{1}{(1+Tp)}$ et donner les expressions littérales, valeurs numériques et unités de K et T

Question 9: Le système étudié est-il stable ?

Question 10: Le réglage du facteur k peut-il permettre de stabiliser le système ? Justifier votre réponse

Question 11: Proposer les types de correcteurs qui permettraient de stabiliser le système

Dernière mise à jour	SLCI2	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Stabilisation du système – Schéma bloc et fonctions de transfert

On ajoute un correcteur à action dérivée unitaire après le premier comparateur et on propose un schéma bloc vide au document réponse 2-3.

Question 12: Donner la nouvelle FTBO $G(p)$ du système corrigé en fonction uniquement des variables k , K et T

Question 13: Compléter le schéma bloc du document réponse 2-3 en faisant uniquement apparaître les variables S , k , K et T

Question 14: Déterminer les fonctions de transfert en boucle fermée $G_H(p)$ et $G_{Q'}(p)$ associées aux deux entrées H_C et Q' telles que $H(p) = G_H(p)H_C(p) - G_{Q'}(p)Q'(p)$ et les mettre sous la forme $G_H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ et $G_{Q'}(p) = \frac{K_{Q'}(1+Tp)}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ où les constantes $K_{Q'}$, z et

ω_0 seront explicitées en fonction de K , S et T – Proposer un schéma bloc simplifié du système

Performances

Question 15: Proposer un réglage du coefficient k permettant de respecter le critère de non-dépassement

Question 16: En déduire la valeur numérique de ω_0

Question 17: Commenter les performances de stabilité et de précision (échelon de hauteur et perturbation de pompage en échelon) du système étudié

Question 18: Donner l'expression littérale de l'écart de hauteur dû à une perturbation en débit de pompage Q'_0

Question 19: Pourquoi ne pas mettre le correcteur à action dérivée après la perturbation ?

Question 20: Déterminer le temps de réponse du système ainsi obtenu pour une entrée échelon de consigne et vérifier le critère du cahier des charges

Question 21: En changeant de correcteur, comment pourrait-on envisager de corriger une perturbation en échelon tout en maintenant un système stable ?

Prise en compte des non-linéarités

Le système étudié présente deux non-linéarités liées à sa conception :

- Présence d'un bac
- Choix du système d'alimentation

Il est nécessaire de les modéliser afin de simuler son comportement correctement

Remarque : on impose aucune contrainte sur la tension U , ni sur le débit max atteignable. En effet, leurs valeurs maximales obtenues par simulation permettront au concepteur de choisir les composants adaptés (saturations supérieures aux besoins).

Question 22: Préciser le nom des non-linéarités à ajouter, leur symbole, le lieu où les ajouter à l'aide d'une flèche sur le DR 2-1, et les valeurs à y imposer

Dernière mise à jour	SLCI2	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Conditions initiales non nulles ?

Supposons maintenant qu'au départ de notre résolution, le niveau est constant (consigne H_{c0} constante et sortie $H_0 = H_{c0}$) et qu'il y a un débit de fuite quelconque constant Q'_0 . On suppose que toutes les variables V s'écrivent $V = V_0 + dV$

Le point de fonctionnement est décrit par l'ensemble des variables initiales :

$$H_{c0}, \varepsilon_{H0}, \varepsilon_0, U_0, \Omega_{m0}, \alpha_0, \beta_0, X_0, Q_0, Q'_0, H_0$$

Question 23: Préciser comment connaître l'intégralité de ces valeurs

Question 24: Préciser les mises à jour à effectuer sur le schéma bloc obtenu précédemment (variables, blocs, non linéarités)

On souhaite tracer la hauteur $H(t)$ pour une variation du débit de fuite dQ' donnée. On réalise donc une simulation du schéma bloc proposé à la question précédente qui donne la variable de sortie $s(t)$.

Question 25: Que faut-il tracer pour visualiser l'évolution de H ?

Question 26: Les résultats de la résolution sont-ils valables quelle que soit l'évolution obtenue ?

Partie 2 : Débit de fuite contrôlé par la vanne

Le coefficient k déterminé précédemment est à nouveau indéterminé et on supprime le correcteur à action dérivée.

Dans cette partie, on s'intéresse à la capacité du système de maintenir un niveau constant pour une variation de l'ouverture de la vanne V' induisant un débit de fuite Q' lié à la hauteur de fluide.

Linéarisation

Question 27: Donner l'expression du débit Q' en fonction de k_q , X' , P_{fond} et P_{atm}

Question 28: Donner l'expression du débit Q' en fonction de k_q , X' , ρ , g et H

Question 29: Préciser pourquoi il n'est pas possible de prendre en compte ce débit de fuite directement dans le cadre des SLCI

On s'intéresse maintenant à un point de fonctionnement et on souhaite étudier le comportement du système autour de ce point de fonctionnement. Pour cela, toutes variables V sera notée ainsi :

$$V = V_f + dV$$

Question 30: Linéariser l'équation trouvée autour d'un point de fonctionnement et montrer que dQ' s'écrit sous la forme $dQ' = BdX' + CdH$ où B sera exprimé en fonction de g et H_f et C en fonction de g , H_f et X'_f

Dernière mise à jour	SLCI2	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Schéma bloc

On propose des schémas blocs aux documents réponses 3-1, 3-2, 3-3 et 3-4 correspondant au système étudié autour d'un point de fonctionnement.

Question 31: Compléter les différents blocs du schéma bloc du document réponse 3-1 afin de modéliser le système autour d'un point de fonctionnement

Question 32: Compléter les différents blocs du schéma bloc du document réponse 3-2 afin qu'il soit équivalent au schéma bloc du document réponse 3-1

Question 33: Compléter le schéma bloc du document réponse 3-3 représentant simplement le système autour de son point de fonctionnement

Question 34: Finalement, compléter le schéma bloc du document réponse 3-4 en faisant uniquement apparaître les variables K, k, C, S, T_m et B

Point de fonctionnement

Plaçons-nous à une ouverture de vanne $r = 1 \text{ cm}$ et à la hauteur $H_f = 0,5m$

Question 35: Donner les coordonnées du point de fonctionnement (H_f, X'_f, Q'_f)

Ainsi, si l'on simulait le système sans variation des entrées H et X' , celles-ci resteraient égales aux valeurs au point de fonctionnement, et le débit de fuite serait de Q'_f , le débit d'alimentation serait donc aussi Q'_f . Dans le schéma bloc, les variations dH et dX' resteraient nulles.

Question 36: Donner les valeurs numériques de B et C et préciser leurs unités

Question 37: Préciser les modifications à réaliser dans les non-linéarités proposées en première partie de ce TD

Question 38: Préciser enfin la consigne à imposer au schéma bloc en entrée en évolution de hauteur pour simuler l'influence de la variation de section du trou de fuite

Fonction de transfert

Question 39: Déterminer la FTBO notée $G_f(p)$ associée aux deux entrées H_c et $-X'$, la mettre sous la forme $\frac{kK_f}{p} \frac{1}{(1+T_{f1}p)(1+T_{f2}p)}$ et donner les expressions littérales de K_f , T_{f1} et T_{f2}

Question 40: Préciser l'ordre et la classe de la FTBO, justifier le fait qu'il ne soit plus nécessaire d'ajouter un correcteur à action dérivée et préciser la démarche de stabilisation qu'il est possible de réaliser sans ajouter de correcteur

Question 41: Déterminer $G_f(p)$ sous forme numérique (arrondis aux entiers) en gardant le paramètre k

Dernière mise à jour	SLC12	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

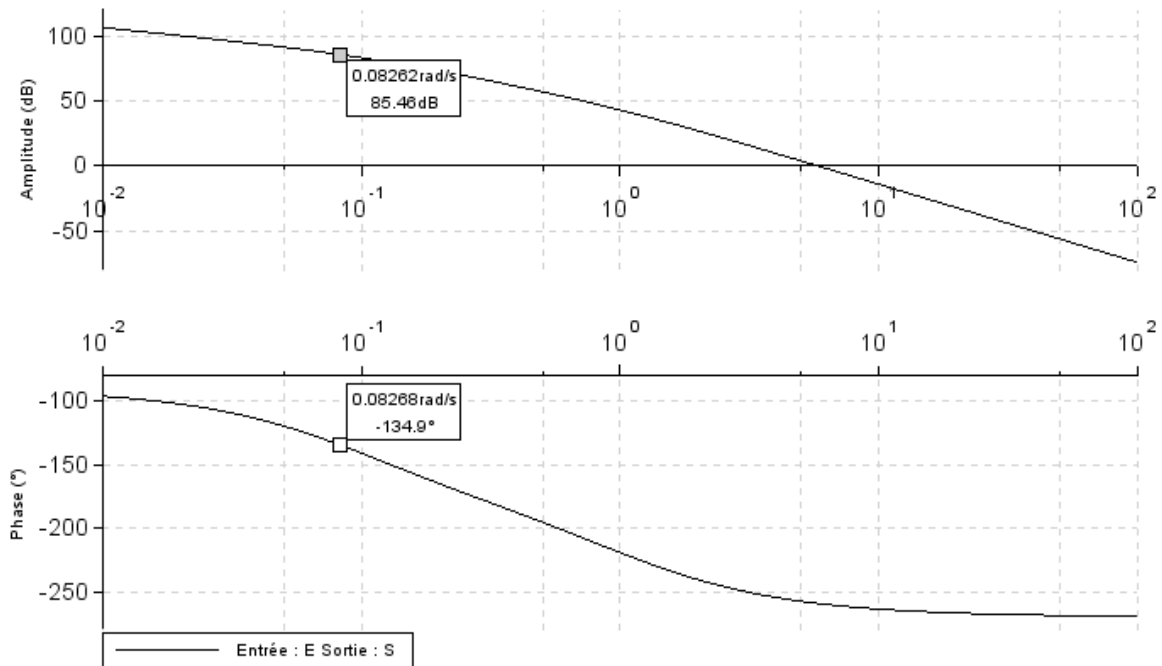
Stabilité

On suppose que $k = 1$.

Question 42: Etablir le diagramme de Bode de la FTBO sur le document réponse 3-5 et 3-6

Question 43: Le système est-il stable – Justifier la réponse

On propose le diagramme de Bode du système pour $k = 1$ ci-dessous :



Note : ce diagramme de Bode n'est valable qu'autour du point de fonctionnement étudié...

Question 44: Déterminer le gain k permettant de satisfaire le critère de marge de phase du cahier des charges

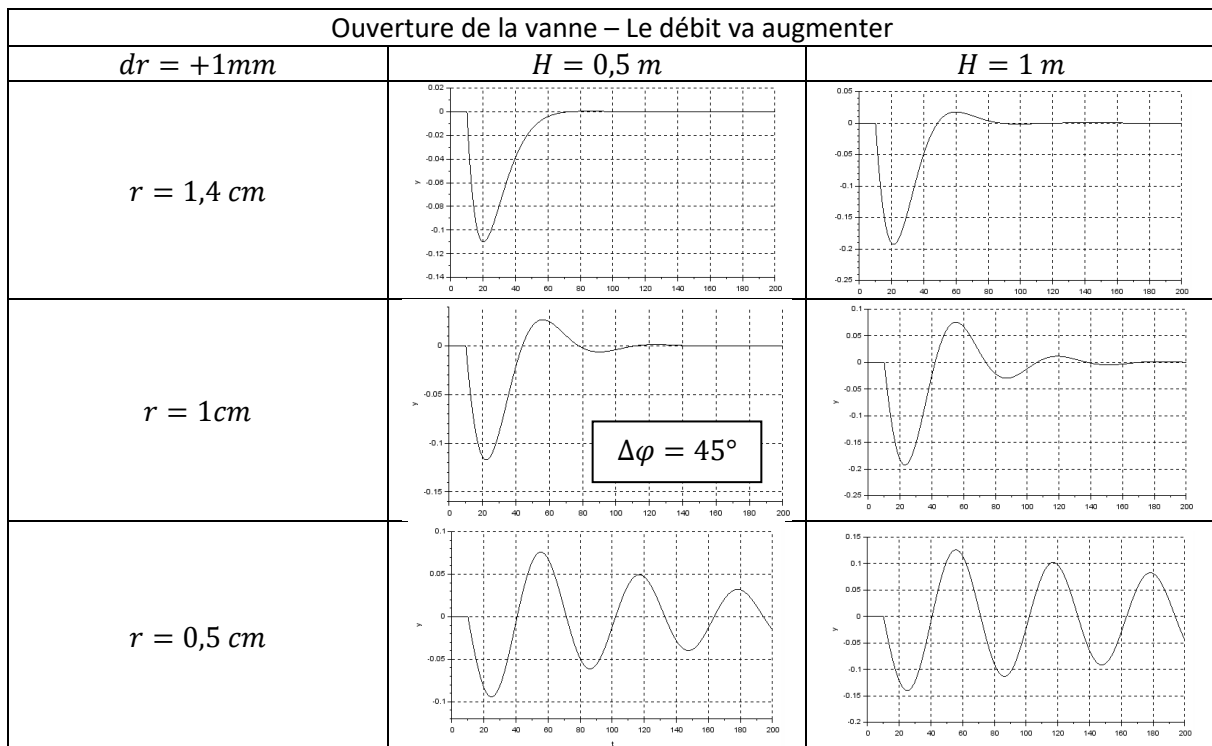
Rappelez-vous que si $k \neq 1$, le nouveau gain k doit être multiplié par le gain précédent.

Dernière mise à jour	SLC12	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Il nous est maintenant possible d'étudier le comportement du système autour de son point de fonctionnement, soit en faisant évoluer la consigne de hauteur, soit en faisant évoluer la section de la vanne. Nous choisissons d'ouvrir la vanne : on fait varier le rayon d'ouverture d'un incrément de $dr = 1 \text{ mm}$. On remarquera donc que l'on a une consigne de variation de hauteur $dH_C = 0$ (régulation).

On propose ci-dessous plusieurs courbes de réponse (niveau en mètres en fonction du temps en secondes) du système à des variations de l'ouverture de la vanne de $\pm 1 \text{ mm}$ et pour différents niveaux comme le précise le cahier des charges. On remarquera que ce sont les évolutions dH du niveau autour du point de fonctionnement H_f . On a pris soin d'ajouter deux non-linéarités au système permettant :

- De limiter la hauteur de fluide entre 0 et 1,5 m (soit entre $-H_f$ et $H' - H_f$ autour de la position d'équilibre)
- D'imposer un débit uniquement positif (soit supérieur à $Q_f = -k_q X_f' \sqrt{P_1 - P_2}$) autour du débit à l'équilibre

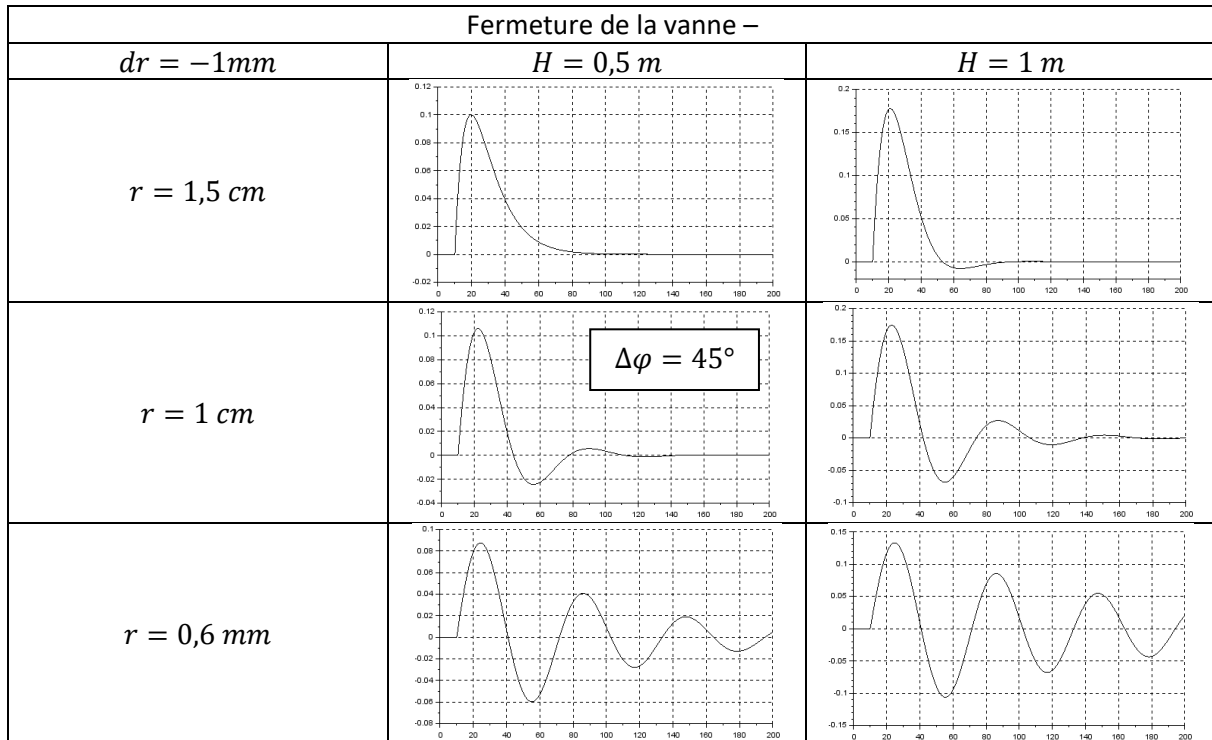


Remarques :

- Pour chaque simulation, les coefficients B et c sont mis à jour pour correspondre au point de fonctionnement étudié
- Le facteur k qui a permis de respecter le critère de marge de phase de 45° n'a pas été modifié. Ainsi, la marge de phase n'est en réalité plus égale à 45° pour toutes ces simulations. Elle ne l'est que pour le cas $r = 1 \text{ cm}$ et $H = 0,5 \text{ m}$

Dernière mise à jour	SLC12	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Les courbes suivantes concernent le cas d'une diminution de la section du trou. Le niveau va donc avoir tendance à augmenter, et le débit d'alimentation diminuer. Attention, si le débit devient négatif, ce qui est impossible dans la réalité et pris en compte dans le modèle à l'origine de ces courbes, « le système linéarisé devient non linéaire ». Le comportement à la fermeture n'est alors pas l'opposé du comportement à l'ouverture pour la même valeur de variation de section, ce qui explique que l'on propose les 6 courbes suivantes.



Stabilité

Question 45: Si l'on voulait garantir une marge de phase constante quel que soit le niveau, que pourrait-on envisager comme solution ?

Précision

Question 46: Donner la valeur et l'unité de l'échelon dx_f'

Question 47: Commenter les performances de précision liées à l'évolution de la section de la vanne

Question 48: En se référant aux courbes proposées ci-dessus, donner l'ordre de grandeur de la variation de niveau causée par la variation du rayon d'ouverture de la vanne de 1 mm

Question 49: Commenter cette variation compte tenu de la linéarisation mise en place et proposer des solutions permettant d'être plus fiable

Dernière mise à jour	SLCI2	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Rapidité

Question 50: Commenter les performances de rapidité du système vis-à-vis du cahier des charges

Question 51: Proposer des solutions qui permettraient de respecter le critère de rapidité dans toute la plage d'utilisation souhaitée du système de régulation

Dernière mise à jour	SLCI2	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

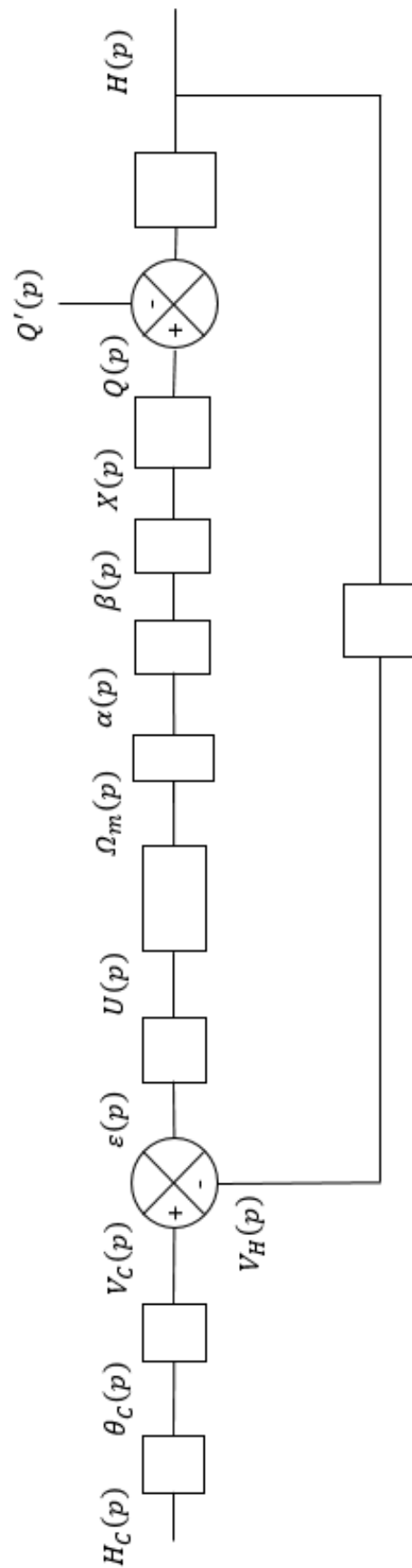
La fin est ici ! Le reste est inutile actuellement

Question 52: (Inutile) Compléter le schéma bloc du document réponse 3-4 en faisant uniquement apparaître les variables K , k , C , S et T_m

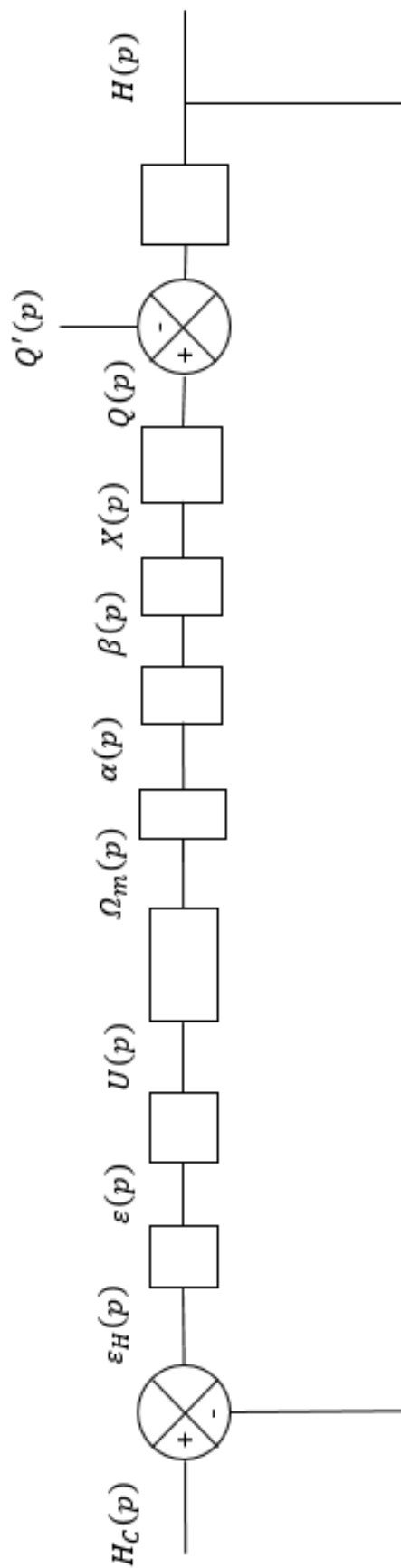
Question 53: (Inutile) Déterminer les fonctions de transfert $G_H^f(p)$ et $G_{Q'}^f(p)$ associées aux deux entrées H_C et Q' telles que $G(p) = G_H^f(p)H_C(p) - G_{Q'}^f(p)Q'(p)$ et les mettre sous la forme $G_H^f(p) = \frac{1}{1+K_{GH}^f(1+T_{f1}p)(1+T_{f2}p)p}$ et $G_{Q'}^f(p) = \frac{K_{GQ}^f(1+T_{f1}p)p}{1+K_{GH}^f(1+T_{f1}p)(1+T_{f2}p)p}$ où les constantes K_{GH}^f et K_{GQ}^f seront explicitées

Dernière mise à jour	SLC12	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

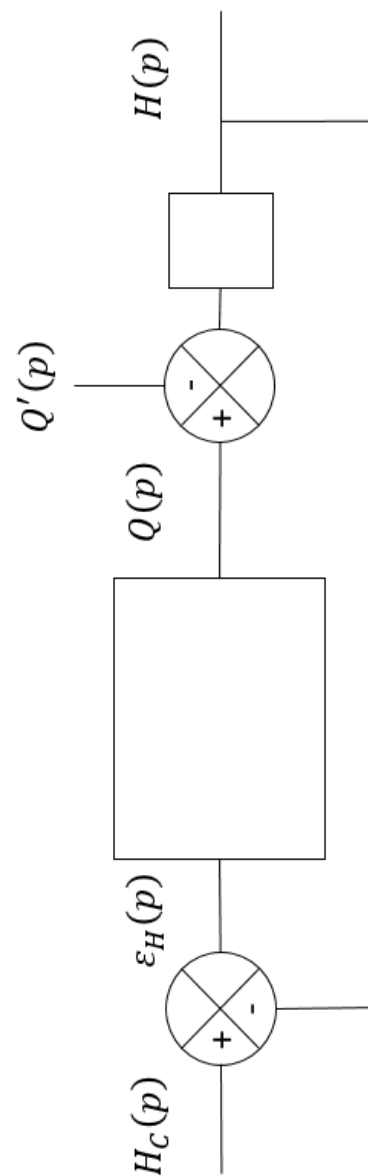
Document réponse 1



Document réponse 2-1

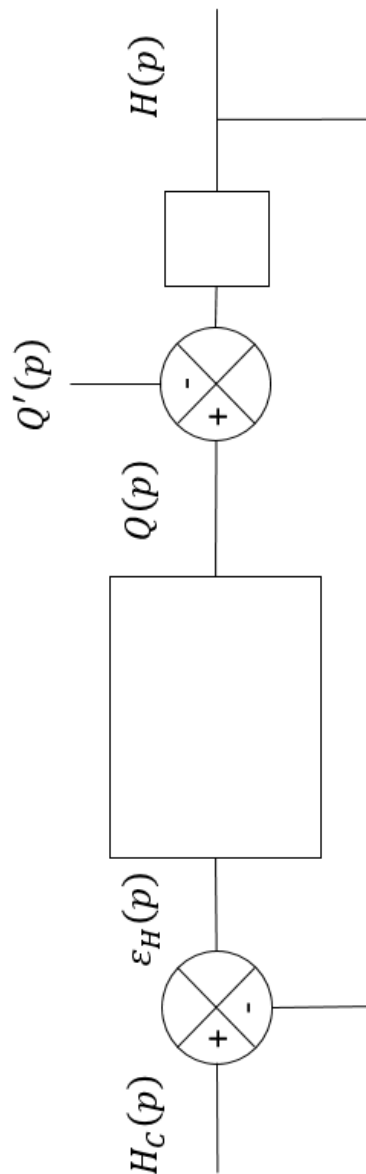


Document réponse 2-2



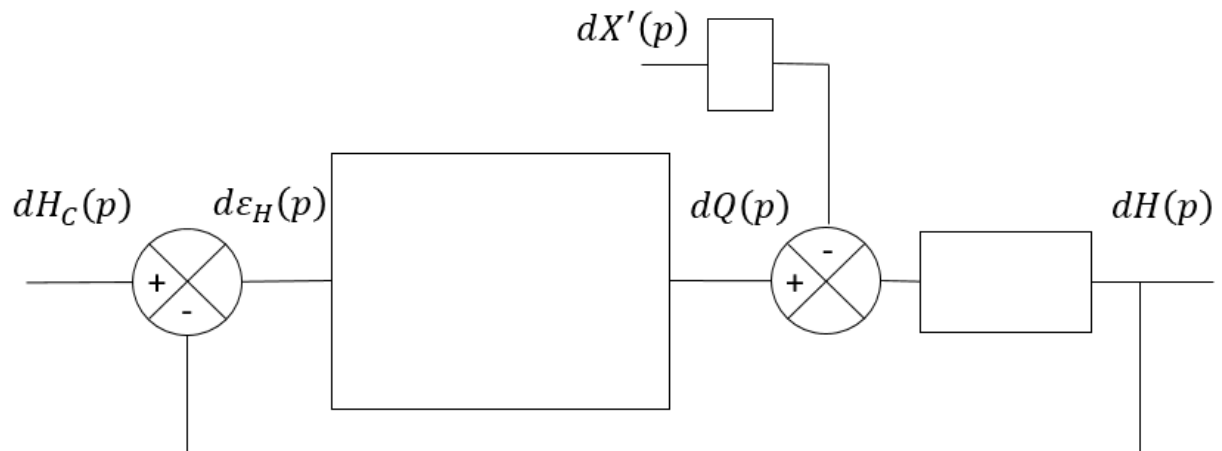
Dernière mise à jour	SLC12	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Document réponse 2-3

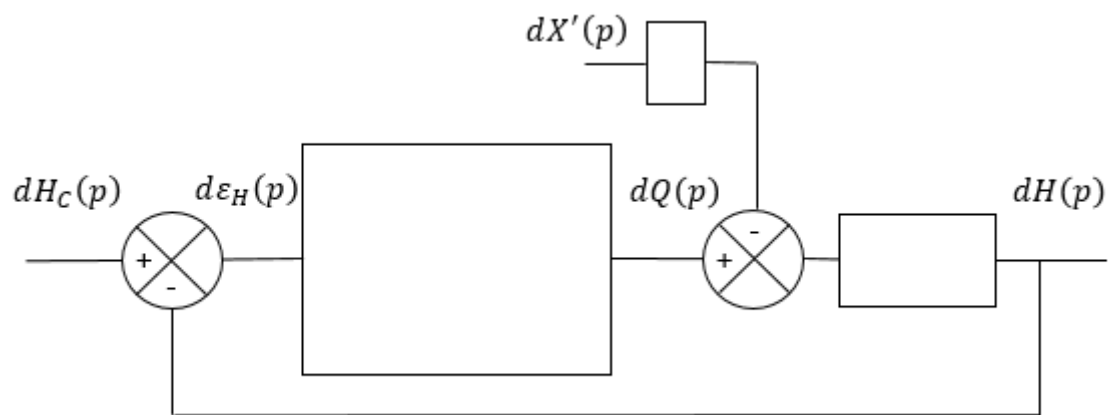


Dernière mise à jour	SLC12	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Document réponse 3-3

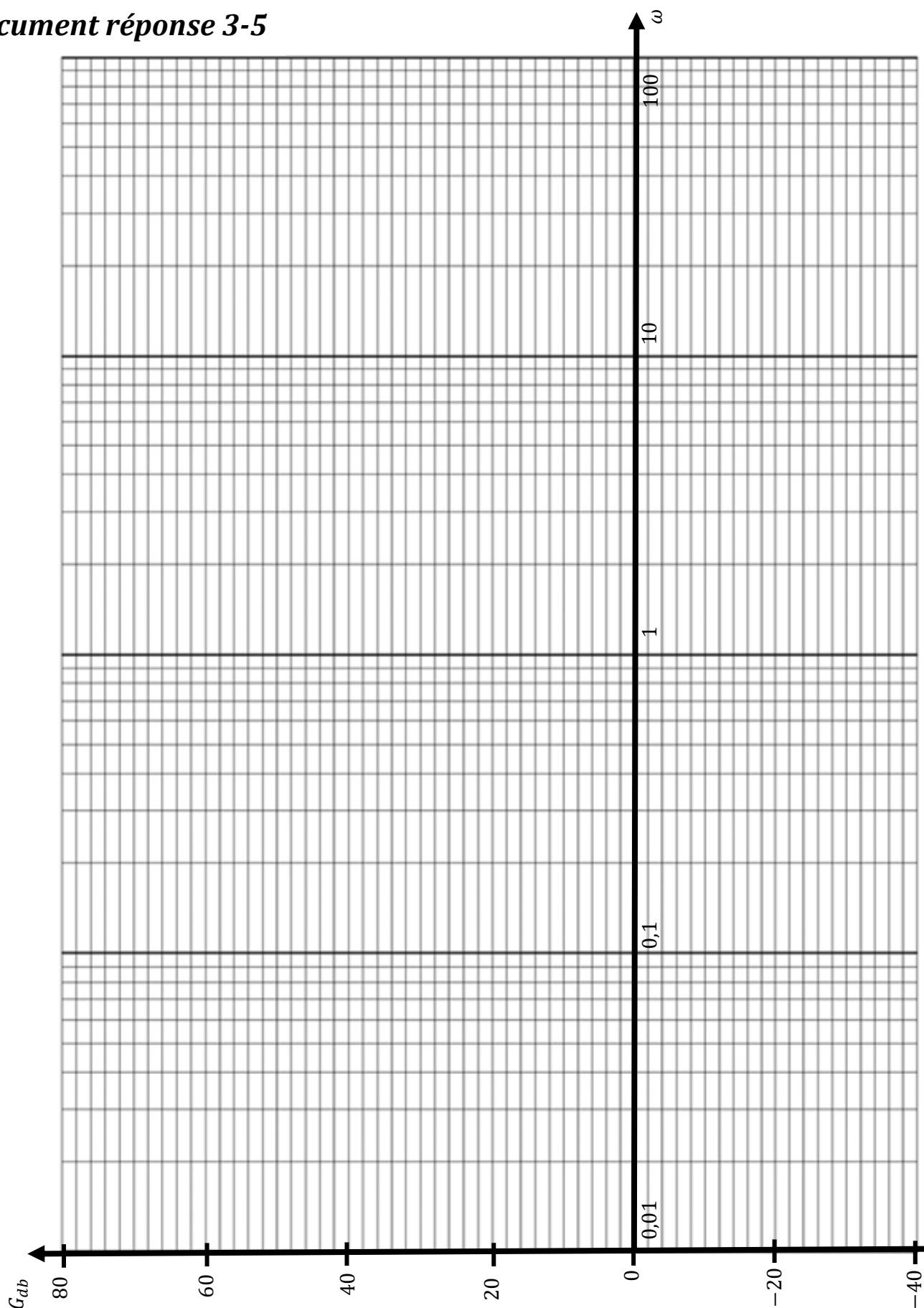


Document réponse 3-4



Dernière mise à jour	SLC12	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Document réponse 3-5



Dernière mise à jour	SLC12	Denis DEFAUCHY
12/10/2022	Linéarisation – Réduction	TD1 - Sujet

Document réponse 3-6

