Exercice 1: Extrait X-ENS PSI 2017 - ROBOVOLC

Véhicule basique

Question 1: Déterminer le nombre de mobilités utiles m

$$m = 0$$

La voiture doit pouvoir se déplacer sur le plan (2 translations dans le plan et une rotation hors plan) : $m += 3$

Dit proprement, il faudrait par exemple :

- Soit bloquer 2 translations et une rotation d'une ponctuelle, soit la transformer en rotule à doit qui bloque la rotation sur la verticale, soit 3 DDL enlevés
- Soit boquer deux translations d'une des ponctuelles en la transformant en rotule et bloquer une translation d'une autre ponctuelle horizontalement (la faire devenir une sphère cylindre d'axe bien choisi pour éliminer la bonne translation)
- Etc.

Chacune des 6 roues peut tourner sur elle-même (motorisation) : $m += 6$
Chacune des 6 roues peut être orientée (direction) : $m += 6$

$$m = 15$$

Question 2: Déterminer le nombre d'inconnues cinématiques I_c

$$I_c = 2 * 6 * 1(Pvt) + 6 * 5(Pct) = 42$$

Question 3: Déterminer le nombre d'inconnues statiques I_s

$$I_s = 2 * 6 * 5(Pvt) + 6 * 1(Pct) = 66$$

Question 4: Déterminer le nombre d'équations cinématiques E_c

$$\gamma = L - P + 1 = 18 - 14 + 1 = 5$$
$$E_c = 6\gamma = 6 * 5 = 30$$

Question 5: Déterminer le nombre d'équations statiques E_s

$$E_S = 6(P - 1) = 6 * 13 = 78$$

Question 6: En déduire le degré d'hyperstatisme h à l'aide des formules cinématique et statique

$$h = m + E_c - I_c = m + I_S - E_S$$
$$h = 15 + 30 - 42 = 15 + 66 - 78$$
$$h = 3 = 3$$

Question 7: Expliquer en quelques mots l'origine du degré d'hyperstatisme identifié

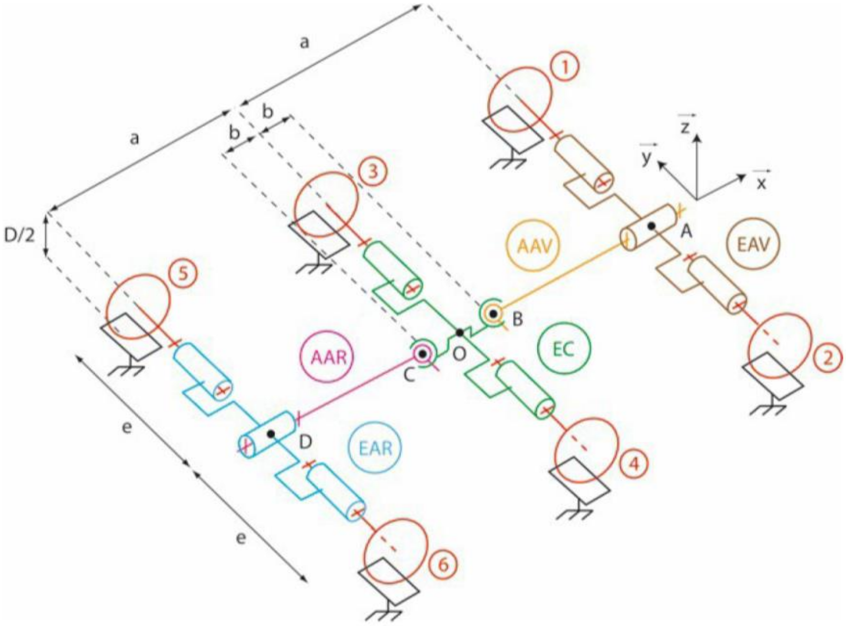
La liaison équivalente obtenue est une liaison plane. Pour la réaliser, il suffit de 3 contacts ponctuels. Les 3 roues de plus ne peuvent toucher le plan s'il y a des défauts. Elles induisent 3 degrés d'hyperstatisme en translation suivant l'axe vertical. Par analogie, une table à 6 pieds n'en aura que 3 qui touchent le sol.

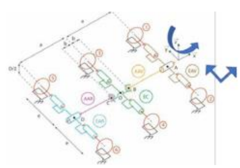
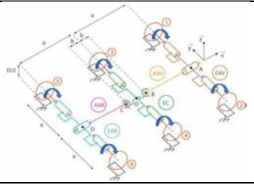
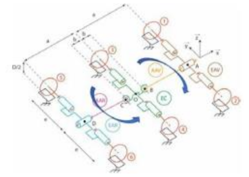
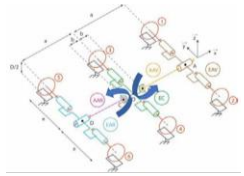
Question 8: Préciser ce qu'il faudrait ajouter au mécanisme pour qu'il soit isostatique

Il faudrait que 3 roues soient réglables en verticale (remplacer les pivots d'orientation par des pivots glissantes avec ressorts afin de garantir un effort de contact). Ce sont les suspensions qui font que les 4 roues d'une voiture classique touchent le sol…
Par analogie, il faudrait 3 pieds réglables sur la table à 6 pieds pour assurer les 6 contacts.

Véhicule ROBOVOLC

Question 9: Montrer que système est isostatique commenter le résultat

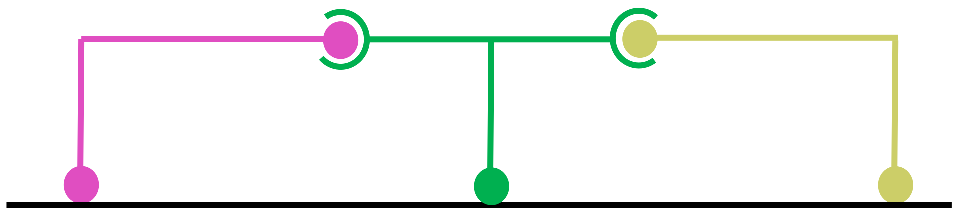


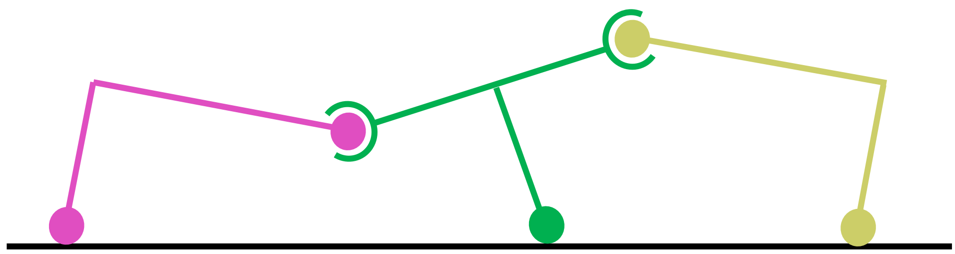
Mouvement plan	Rotations 6 roues	Rotations de AAR et AAV Mobilités internes	Rotations liées
			
$m += 3$	$m += 6$	$m += 2$	$m += 1$

Il suffit pour s'en convaincre d'imaginer que l'on bloque les mouvements possibles, et de regarder ce qui bouge encore…

$$m = 12$$

Pour les rotations liées :





Cinématique $h = m + E_c - I_c$	Statique $h = m + I_S - E_S$
$I_c = 8 * 1(Pvt) + 6 * 5(Pct) + 2 * 2(Rdgt)$ $I_c = 8 + 30 + 4 = 42$ $\gamma = L - P + 1 = 16 - 12 + 1 = 5$ $E_c = 6\gamma = 6 * 5 = 30$ $h = 12 + 30 - 42$ $h = 0$	$I_s = 8 * 5(Pvt) + 6 * 1(Pct) + 2 * 4(Rdgt)$ $I_c = 40 + 6 + 8 = 54$ $E_S = 6(P - 1) = 6 * 11 = 66$ $h = 12 + 30 - 42 = 12 + 54 - 66$ $h = 0$

YOUPI ! Le robot s'adaptera parfaitement au sol plan (voire plus mais on ne l'étudie pas).

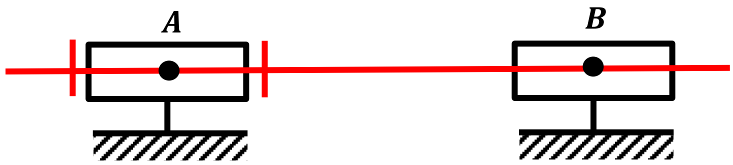
Question 10: Préciser l'influence de la présence de deux rotules au lieu de rotules à doigts en B et C sur les résultats obtenus

$$I_c += 2 \quad ; \quad m += 2 \quad ; \quad I_S -= 2$$

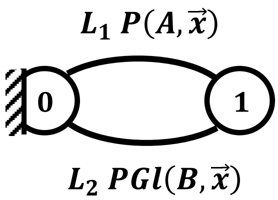
Oui, regardez bien, on ajoute deux mobilités. En supposant EC fixe, tout l'avant (AAV, EAV, 1 et 2) tourne autour de $(B, \vec{z})$ et tout l'arrière (AAR, EAR, 5 et 6) autour de $(C, \vec{z})$.

Exercice 2: Réducteur ALSTOM

Modèle 1



Question 1: Etablir le graphe des liaisons du montage



Question 2: Calculer le degré d'hyperstatisme du montage à l'aide des formules d'analyse cinématique et statique

Non plan			
Cinématique		Statique	
$\gamma = L - p + 1$	2-2+1=1	p	2
$E_c = 6\gamma$	6	$E_s = 6(p-1)$	6
I_c	1+2=3	I_s	5+4=9
m_u		1	
m_i		0	
$m = m_u + m_i$		1	
$h = m + E_c - I_c$	6-3+1=4	$h = m + I_s - E_s$	9-6+1=4

Question 3: Déterminer la liaison équivalente statique 1/0

$\{\mathcal{T}_{10}{}^{1}\}$ $\begin{Bmatrix} X_{10}{}^{1} & 0 \\ Y_{10}{}^{1} & M_{10}{}^{1} \\ Z_{10}{}^{1} & N_{10}{}^{1} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$	$\{\mathcal{T}_{10}{}^{2}\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{10}{}^{2} & M_{10}{}^{2} \\ Z_{10}{}^{2} & N_{10}{}^{2} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$	$\{\mathcal{T}_{10}{}^{eq}\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^{1} & 0 \\ Y_{10}{}^{1} + Y_{10}{}^{2} & M_{10}{}^{1} + M_{10}{}^{2} \\ Z_{10}{}^{1} + Z_{10}{}^{2} & N_{10}{}^{1} + N_{10}{}^{2} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$

Question 4: En étudiant les systèmes cinématiques et statique, démontrer le résultat précédent

Cinématique

$$\{\mathcal{V}_{10}{}^1\} + \{\mathcal{V}_{01}{}^2\} = \{0\}$$

$\{\mathcal{V}_{10}{}^1\} = \begin{Bmatrix} P_{10}{}^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$	$\{\mathcal{V}_{01}{}^2\} = \begin{Bmatrix} P_{01}{}^2 & U_{01}{}^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$	$\begin{cases} P_{10}{}^1 + P_{01}{}^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ U_{01}{}^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Une inconnue à fixer : $m = 1$

4 équations $0 = 0$: $h = 4$

Statique

Il suffit d'écrire : $\{\mathcal{T}_{10}{}^{eq}\} = \{0\}$

$$\begin{cases} X_{01}{}^1 = 0 \\ Y_{01}{}^1 + Y_{01}{}^2 = 0 \\ Z_{01}{}^1 + Z_{01}{}^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ M_{01}{}^1 + M_{01}{}^2 = 0 \\ N_{01}{}^1 + N_{01}{}^2 = 0 \end{cases}$$

1 équations $0 = 0$: $m = 1$

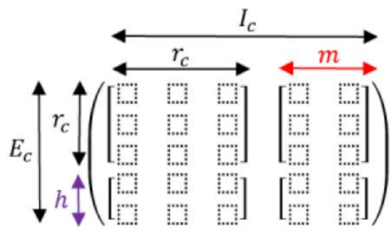
4 inconnues à fixer : $h = 4$

Question 5: Faites de même en étudiant les matrices cinématiques et statique, démontrer le résultat précédent

Cinématique

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {P_{10}}^1 \\ {P_{01}}^2 \\ {U_{01}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_c = \mathrm{rg}(K_c) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$



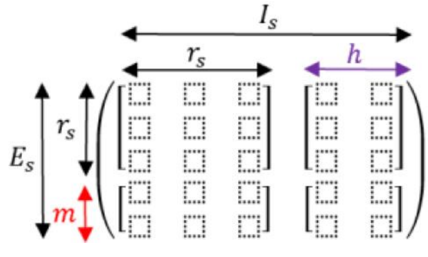
$$m = I_c - r_c = 3 - 2 = 1$$
$$h = E_c - r_c = 6 - 2 = 4$$

Statique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {X_{01}}^1 \\ {Y_{01}}^1 \\ {Y_{01}}^2 \\ {Z_{01}}^1 \\ {Z_{01}}^2 \\ {M_{01}}^1 \\ {M_{01}}^2 \\ {N_{01}}^1 \\ {N_{01}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_s = \mathrm{rg}(K_s) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

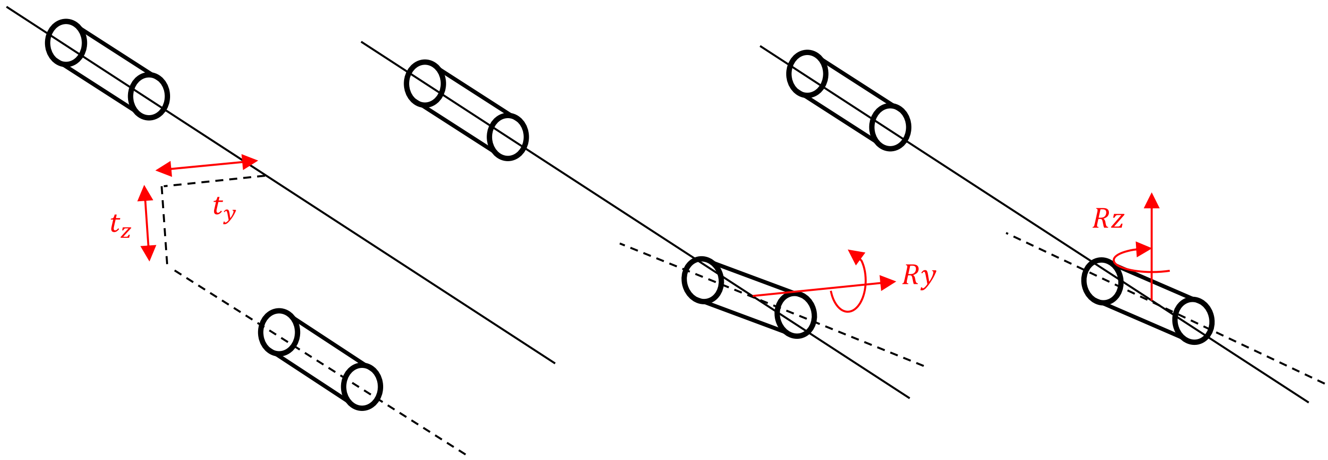
$$m = E_s - r_s = 6 - 5 = 1$$
$$h = I_s - r_s = 9 - 5 = 4$$



Question 6: Préciser les axes en rotation et/ou translation porteurs de l'hyperstatisme

Deux rotations et deux translations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

Illustration d'une déformation en translation dans les deux directions (à gauche) et dans les deux orientations (à droite) :



Pour entrer les deux liaisons l'une dans l'autre, il faut obligatoirement les 4 conditions :

$$t_y = t_z = R_y = R_z = 0$$

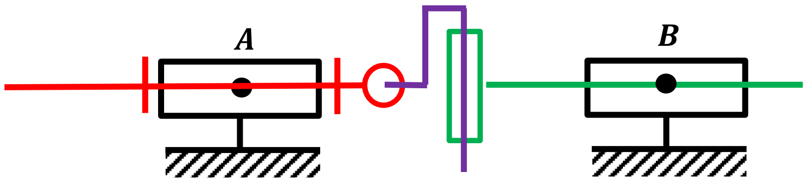
Question 7: Sans modifier le mécanisme, quelle condition géométrique faut-il respecter pour garantir un fonctionnement optimal

Il faut une coaxialité des axes.

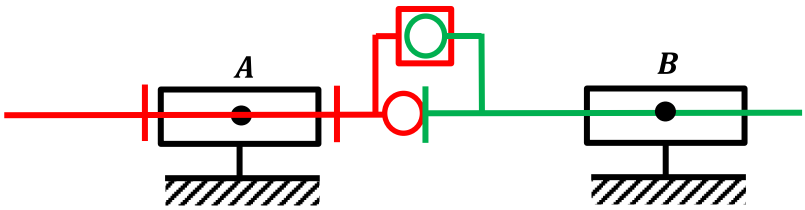
Question 8: Proposer un schéma cinématique rendant ce système isostatique en ajoutant des liaisons et donc des pièces sans ajout de mobilités

La liaison équivalente cinématique ajoutée doit être de la forme : $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & V \\ R & W \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ via un ensemble de liaisons en série ou parallèle ! La solution la plus évidente mais la moins recherchée consiste à ajouter 2 pivots et deux glissières en série sur les axes concernés… Ou deux pivots glissants d'axes y et z. Sinon :

Solution 1 : joint de cardan – 2 pivots glissantes sur les axes y et z (revient à mettre les 4 ddl en série : pivot glissière pivot glissière) :



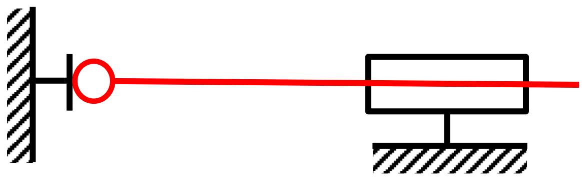
Solution 2 :



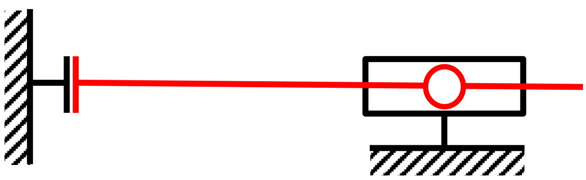
Remarque : ce n'est pas obligé que les contacts soient sur la même ligne comme représenté ci-dessus. Il y a des mouvements liés, mais ça fonctionne…

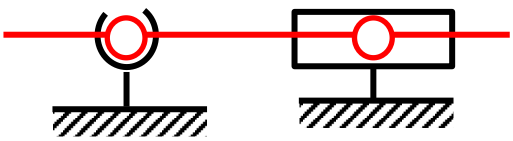
Question 9: Proposer un schéma cinématique rendant ce système isostatique en modifiant des liaisons (pas de pièce ajoutée) sans ajout de mobilités

Solution à modification d'une seule liaison :



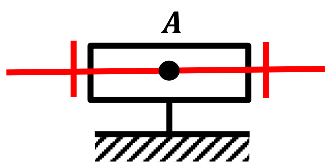
Sinon…



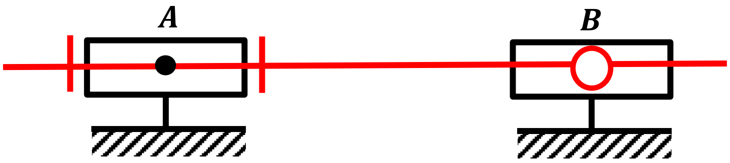


Cette dernière solution qui oui, annule un hyperstatisme en translation par la présence de rotations

Enfin, solution à une liaison, évidemment (schéma cinématique minimal du guidage) :



Modèle 2



Question 10: Quel est son degré d'hyperstatisme ? Préciser intuitivement axes et mouvements concernés

Non plan			
Cinématique		Statique	
$\gamma = L - p + 1$	2-2+1=1	p	2
$E_c = 6\gamma$	6	$E_s = 6(p-1)$	6
I_c	1+4=5	I_s	5+2=7
m_u		1	
m_i		0	
$m = m_u + m_i$		1	
$h = m + E_c - I_c$	6-5+1=2	$h = m + I_s - E_s$	7-6+1=2

$$h = 2$$

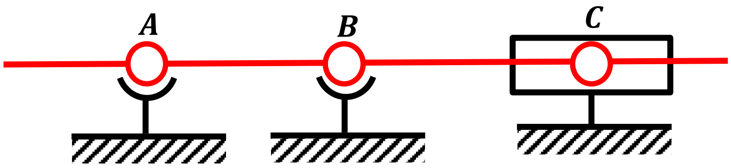
Deux translations suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

Question 11: Analyser l'effet du changement de la liaison sur les systèmes cinématique et statique

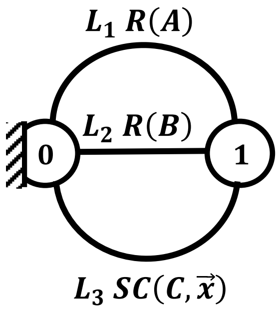
$$\begin{cases} {P_{10}}^1 + {P_{01}}^2 = 0 \\ \boldsymbol{{Q_{01}}^2} = 0 \\ \boldsymbol{{R_{01}}^2} = 0 \\ {U_{01}}^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {X_{01}}^1 = 0 \\ {Y_{01}}^1 + {Y_{01}}^2 = 0 \\ {Z_{01}}^1 + {Z_{01}}^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ {M_{01}}^1 + \cancel{{M_{01}}^2} = 0 \\ {N_{01}}^1 + \cancel{{N_{01}}^2} = 0 \end{cases}$$

Modèle 3



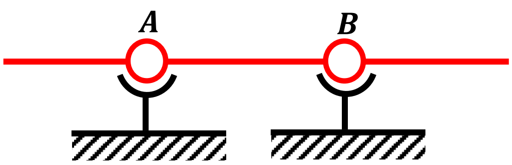
Question 12: Etablir le graphe des liaisons du montage



Question 13: Calculer le degré d'hyperstatisme de ce montage à l'aide des formules d'analyse cinématique et statique

Non plan			
Cinématique		Statique	
$\gamma = L - p + 1$	3-2+1=2	p	2
$E_c = 6\gamma$	12	$E_s = 6(p-1)$	6
I_c	3+3+4=10	I_s	3+3+2=8
m_u		1	
m_i		0	
$m = m_u + m_i$		1	
$m + E_c - I_c$	12+1-10=3	$h = m + I_s - E_s$	8+1-6=3

Question 14: Le degré d'hyperstatisme a augmenté de 1, pourquoi ?

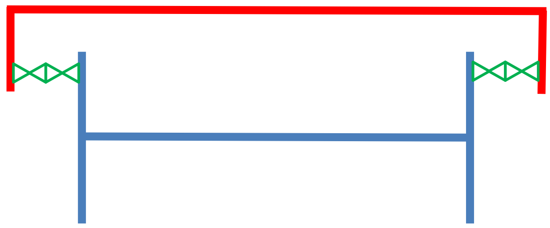
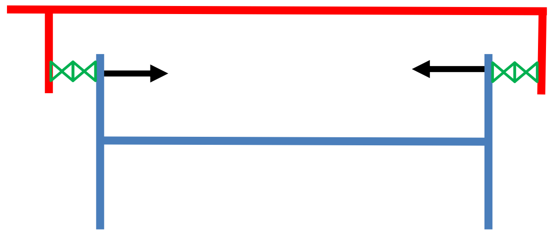
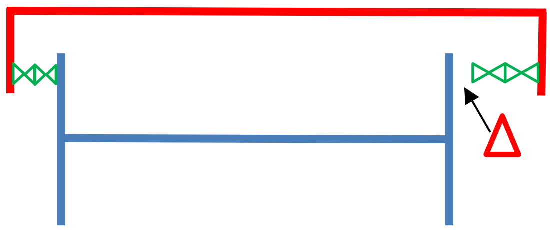
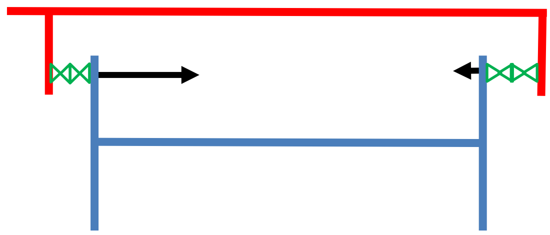


La liaison pivot (isostatique) était en fait la liaison équivalente d'une liaison réelle composée de deux rotules, systèmes hyperstatiques axialement de degré 1.

On comprend ici l'importance de la réalisation d'un schéma d'architecture pour déterminer le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme.

Question 15: Justifier technologiquement les raisons de l'hyperstatisme de ce mécanisme.

Hyperstatisme axial : On utilise des roulements à rouleaux coniques car ils reprennent de gros efforts axiaux et tangentiels. Les bagues sont séparables (cf. photo). Il est nécessaire de maintenir le contact de tous les éléments roulants. Or, l'arbre étant déformable axialement, ce contact peut être perdu. On précontraint l'arbre axialement en préchargeant les roulements qui se comportent comme des ressorts :

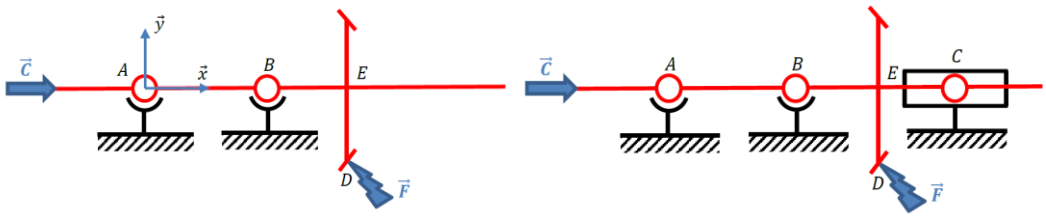
Sans précontrainte	Avec précontrainte
Sans chargement sur l'arbre	
	
Avec chargement sur l'arbre	
	
Le contact est perdu à droite	Le contact est maintenant jusqu'à un effort limite à ne pas dépasser

Ainsi, même en présence de déformation axiale, le contact est maintenu tant que les efforts des roulements (flèches noires) sont présents.

On évite donc le jeu

Cet hyperstatisme est VOULU !

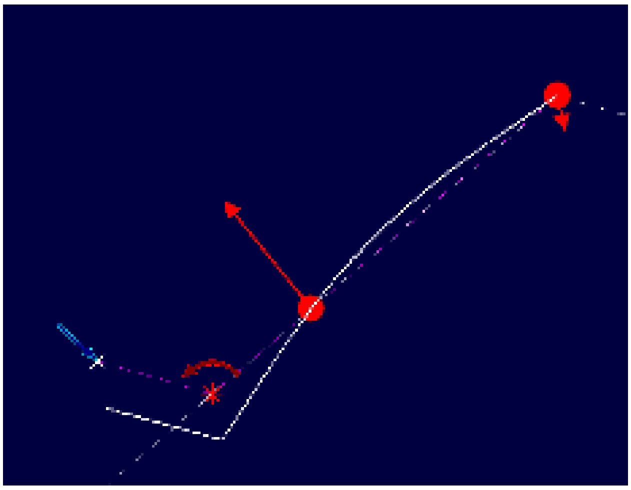
Hyperstatisme radial : Afin de maintenir un « bon » contact au niveau de l'engrenage conique (les sommets des cônes de chaque pignon doivent être confondus), il faut limiter la flexion de l'arbre. On ajoute donc ce roulement à rouleaux cylindriques.



On évite donc les déformations

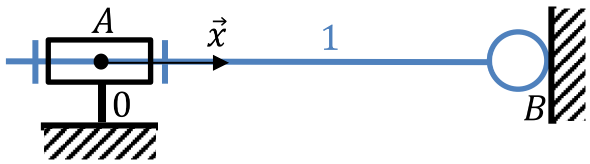
Cet hyperstatisme est VOULU !

Résultats de simulation avec RDM Le Mans (déformée avec 1160 Nm et 2 roulements) et calcul du déplacement du point de contact entre les deux roues dentées avec 2 et 3 roulements :

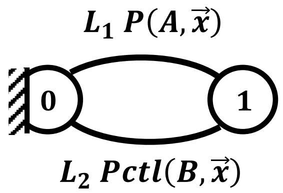


2 roulements	3 roulements
$d = 20{,}08\ \mu m$	$d = 3{,}95\mu m$

Exercice 3: Etude des systèmes matriciels



Question 1: Proposer un graphe des liaisons du système



Question 2: Calculer le degré d'hyperstatisme du montage

$$m = 1 \Rightarrow h = \begin{cases} m + E_c - I_c = 1 + 6 - 6 = 1 \\ m + I_s - E_s = 1 + 6 - 6 = 1 \end{cases}$$

Cinématique

Question 3: Déterminer le système linéaire cinématique et sa matrice K_c associée

On étudie la chaîne 010 : $\{\mathcal{V}_{01}^1\} + \{\mathcal{V}_{10}^2\} = \{0\}$

On se place directement en A qui appartient aux lieux de définition de chaque liaison :

$$\{\mathcal{V}_{01}^1\} = \begin{Bmatrix} P_{01}^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} P_{01}^1\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{V}_{10}^2\} = \begin{Bmatrix} P_{10}^2 & 0 \\ Q_{10}^2 & V_{10}^2 \\ R_{10}^2 & W_{10}^2 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} P_{10}^2\vec{x} + Q_{10}^2\vec{y} + R_{10}^2\vec{z} \\ V_{10}^2\vec{y} + W_{10}^2\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{cases} P_{01}^1\vec{x} + P_{10}^2\vec{x} + Q_{10}^2\vec{y} + R_{10}^2\vec{z} = \vec{0} \\ V_{10}^2\vec{y} + W_{10}^2\vec{z} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection dans la base $\mathfrak{B}$ quelconque contenant $\vec{x}$:

$$\begin{cases} P_{01}^1 + P_{10}^2 = 0 \\ Q_{10}^2 = 0 \\ R_{10}^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ V_{10}^2 = 0 \\ W_{10}^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{01}^1 \\ P_{10}^2 \\ Q_{10}^2 \\ R_{10}^2 \\ V_{10}^2 \\ W_{10}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 4: Interpréter les équations de ce système pour déterminer m et h

Une équation $0 = 0$ traduit un degré d'hyperstatisme : on a bloqué deux fois la translation suivant $\vec{x}$, c'est-à-dire « pas de mouvement suivant $\vec{x}$ dans la première liaison » = « pas de mouvement suivant $\vec{x}$ dans la deuxième liaison »

$$h = 1$$

Il faut fixer l'une des deux inconnues P_{01}^1 ou P_{10}^2 afin de connaître l'autre et donc toutes les inconnues cinématiques, la mobilité vaut donc 1

$$m = 1$$

Question 5: Déterminer r_c avec K_c et en déduire m et h

$$r_c = rg(K_c) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

$$r_c = 5$$

$$\begin{cases} h = E_c - r_c = 6 - 5 = 1 \\ m = I_c - r_c = 6 - 5 = 1 \end{cases}$$

Statique

Question 6: Déterminer le système linéaire statique et sa matrice K_s associée

On applique le PFS à la pièce 1 : $\{\mathcal{T}_{01}^1\} + \{\mathcal{T}_{01}^2\} = \{0\}$

On se place directement en A qui appartient aux lieux de définition de chaque liaison :

$$\{\mathcal{T}_{01}^1\} = \begin{Bmatrix} X_{01}^1 & 0 \\ Y_{01}^1 & M_{01}^1 \\ Z_{01}^1 & N_{01}^1 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} X_{01}^1\vec{x} + Y_{01}^1\vec{y} + Z_{01}^1\vec{z} \\ M_{01}^1\vec{y} + N_{01}^1\vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{T}_{01}^2\} = \begin{Bmatrix} X_{01}^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} X_{01}^2\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{cases} X_{01}^1\vec{x} + Y_{01}^1\vec{y} + Z_{01}^1\vec{z} + X_{01}^2\vec{x} = \vec{0} \\ M_{01}^1\vec{y} + N_{01}^1\vec{z} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection dans la base $\mathfrak{B}$ quelconque contenant $\vec{x}$:

$$\begin{cases} X_{01}^1 + X_{01}^2 = 0 \\ Y_{01}^1 = 0 \\ Z_{01}^1 = 0 \\ 0 = 0 \\ M_{01}^1 = 0 \\ N_{01}^1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{01}^1 \\ X_{01}^2 \\ Y_{01}^1 \\ Z_{01}^1 \\ M_{01}^1 \\ N_{01}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a par hasard, $K_s = K_c$

Question 7: Interpréter les équations de ce système pour déterminer m et h

Une équation $0 = 0$ traduit une mobilité : le mouvement est laissé libre par les deux liaisons

$$m = 1$$

Il faut fixer l'une des deux inconnues X_{01}^1 ou X_{10}^2 afin de connaître l'autre et donc toutes les inconnues statiques, le degré d'hyperstatisme vaut donc 1

$$h = 1$$

Question 8: Déterminer r_s avec K_s et en déduire m et h

$$K_s = K_c$$

$$r_s = 5$$

$$\begin{cases} h = I_s - r_s = 6 - 5 = 1 \\ m = E_s - r_s = 6 - 5 = 1 \end{cases}$$

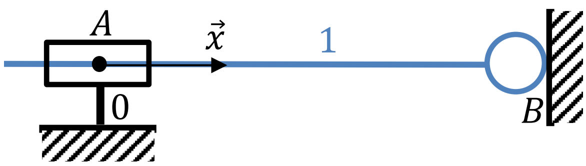
Question 9: Donner l'expression du torseur équivalent statique de la liaison et montrer que l'analyse de m et h est simple à réaliser

$$\left\{\mathcal{T}_{01}^{eq}\right\} = \begin{Bmatrix} X_{01}^1 + X_{01}^2 & 0 \\ Y_{01}^1 & M_{01}^1 \\ Z_{01}^1 & N_{01}^1 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

Effectivement, on obtient bien le système statique en écrivant $\left\{\mathcal{T}_{01}^{eq}\right\} = \{0\}$

Question 10: Proposer une modification de la liaison en A pour rendre le système isostatique et identifier ce que cela change dans les systèmes cinématique et statique

On transforme la liaison pivot en une liaison pivot glissante :



$$\begin{cases} \cancel{X_{01}^1} + X_{01}^2 = 0 \\ Y_{01}^1 = 0 \\ Z_{01}^1 = 0 \\ 0 = 0 \\ M_{01}^1 = 0 \\ N_{01}^1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} P_{01}^1 + P_{10}^2 = 0 \\ Q_{10}^2 = 0 \\ R_{10}^2 = 0 \\ V_{10}^1 = 0 \\ V_{10}^2 = 0 \\ W_{10}^2 = 0 \end{cases}$$

Par la même analyse que précédemment :

- En statique, on a plus d'inconnues en trop (h=0) et on garde la mobilité (0=0)
- En cinématique, il faut toujours fixer une rotation (m=1) et il n'y a plus d'équation inutile (h=0)

Exercice 4: Base de projection et système cinématique

Etude du robot Maxpid simplifié

Résolution cinématique :

$$\{\mathcal{V}_{32}\} + \{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{03}\} = \{0\}$$

$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21}\overrightarrow{x_1} \\ U_{21}\overrightarrow{x_1} \end{Bmatrix}_B$
$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ \lambda_{21}R_{10}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_B$ $\vec{V}(B,1/0) = \overrightarrow{BA} \wedge R_{10}\overrightarrow{z_0} = -\lambda_{21}\overrightarrow{x_1} \wedge R_{10}\overrightarrow{z_0}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{03} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{0/3}\} = \begin{Bmatrix} R_{30}\overrightarrow{z_0} \\ L_3R_{30}\overrightarrow{y_3} \end{Bmatrix}_B$ $\vec{V}(B,1/0) = \overrightarrow{BC} \wedge R_{30}\overrightarrow{z_0} = -L_3\overrightarrow{x_3} \wedge R_{30}\overrightarrow{z_0}$

$$\begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} P_{21}\overrightarrow{x_1} \\ U_{21}\overrightarrow{x_1} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ \lambda_{21}R_{10}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} R_{30}\overrightarrow{z_0} \\ L_3R_{30}\overrightarrow{y_3} \end{Bmatrix}_B = \{0\}$$

$$\begin{cases} P_{21}\overrightarrow{x_1} + (R_{32} + R_{10} + R_{03})\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \\ U_{21}\overrightarrow{x_1} + R_{10}\lambda_{21}\overrightarrow{y_1} + R_{03}L_{31}\overrightarrow{y_3} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{21}\cos\theta_{10} = 0 \\ P_{21}\sin\theta_{10} = 0 \\ R_{32} + R_{10} + R_{03} = 0 \\ U_{21}\cos\theta_{10} - \sin\theta_{10}\, R_{10}\lambda_{21} - \sin\theta_{30}\, R_{03}L_{31} = 0 \\ U_{21}\sin\theta_{10} + \cos\theta_{10}\, R_{10}\lambda_{21} + \cos\theta_{30}\, R_{03}L_{31} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P_{21} = 0 \\ 0 = 0 \\ R_{32} + R_{10} + R_{03} = 0 \\ U_{21} - \sin\theta_{31}\, R_{03}L_{31} = 0 \\ R_{10}\lambda_{21} + \cos\theta_{31}\, R_{03}L_{31} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Question 1: Déterminer le degré d'hyperstatisme du mécanisme

Cinématique	
$\gamma = L - p + 1$	4-4+1=1
$E_c = 6\gamma$	6
I_c	1+2+1+1=5
$m_u = 1$	
$m_i = 0$	
$m = 1$	
$h = m + E_c - I_c$	1+6-5=2

Question 2: Déterminer le rang r_c du système dans la base 0 et valider m et h

$$\begin{cases} P_{21}\cos\theta_{10} = 0 \\ P_{21}\sin\theta_{10} = 0 \\ R_{32} + R_{10} + R_{03} = 0 \\ U_{21}\cos\theta_{10} - \sin\theta_{10} R_{10}\lambda_{21} - \sin\theta_{30} R_{03}L_{31} = 0 \\ U_{21}\sin\theta_{10} + \cos\theta_{10} R_{10}\lambda_{21} + \cos\theta_{30} R_{03}L_{31} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Une équation $0 = 0$ traduit un degré d'hyperstatisme : $h += 1$

$$\begin{cases} P_{21}\cos\theta_{10} = 0 \\ P_{21}\sin\theta_{10} = 0 \end{cases}$$

On trouve $P_{21} = 0$ par l'une des équations ($r_c += 1$), l'autre devient inutile ($0 = 0$), ce qui correspond à un second degré d'hyperstatisme : $h += 1$

$$\begin{cases} R_{32} + R_{10} + R_{03} = 0 \\ U_{21}\cos\theta_{10} - \sin\theta_{10} R_{10}\lambda_{21} - \sin\theta_{30} R_{03}L_{31} = 0 \\ U_{21}\sin\theta_{10} + \cos\theta_{10} R_{10}\lambda_{21} + \cos\theta_{30} R_{03}L_{31} = 0 \end{cases}$$

Système de 3 équations à 4 inconnues, on peut mener la résolution en posant l'une d'entre elles pour se convaincre qu'elles sont bien indépendantes ($r_c += 3\ et\ m += 1$).

$$r_c = 4 \quad ; \quad m = I_c - r_c = 5 - 4 = 1 \quad ; \quad h = E_c - r_c = 6 - 4 = 2$$

Question 3: Déterminer le rang r_c du système dans la base 1 et valider m et h

$$\begin{cases} P_{21} = 0 \\ 0 = 0 \\ R_{32} + R_{10} + R_{03} = 0 \\ U_{21} - \sin\theta_{31} R_{03}L_{31} = 0 \\ R_{10}\lambda_{21} + \cos\theta_{31} R_{03}L_{31} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Deux équations $0 = 0$ traduisant deux degrés d'hyperstatisme : $h += 2$

L'équation $P_{21} = 0$ est utile : $r_c += 1$

Les 3 autres équations à 4 inconnues donnent 3 inconnues en fonction d'une 4° imposée : $r_c += 3$ et $m += 1$

$$r_c = 4 \quad ; \quad m = I_c - r_c = 5 - 4 = 1 \quad ; \quad h = E_c - r_c = 6 - 4 = 2$$

Question 4: Identifier la mobilité à l'aide de cette étude

Il faut fixer l'une des inconnues R_{32}, R_{10}, R_{03} ou U_{21} pour avoir les 3 autres, cela traduit la mobilité (utile) qui à un mouvement d'entrée, associe un mouvement de sortie par l'intermédiaire de la chaine fermée.

Question 5: Expliquer le/les degrés(s) d'hyperstatisme obtenus

En utilisant les équations dans la base 1 :

- Equations $0 = 0$ en translation sur l'axe $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$
- Equations $0 = 0$ en rotation sur l'axe $\overrightarrow{y_1}$

Question 6: Pour chacune de ces modifications, déterminer le nouveau degré Pour chacune de ces modifications, complétez le tableau suivant et comprenez le résultat

	1	**2**	**3**	**4**
m_u	1	1	1	1
m_i	0	0	1	0
m	1	1	2	1
E_c	6	6	6	6
E_s	18	18	18	18
I_c	6	7	7	7
I_s	18	17	17	17
h	1	0	1	0

Il faut ajouter 2 degrés de liberté (DDL) sans ajouter de mobilités.

Solution 1 : On permet la rotation selon $\overrightarrow{y_1}$, pas de mobilité ajoutée, donc $h = m + E_c - I_c = 1 + 6 - 6 = 1$. Il reste l'hyperstatisme en translation sur $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$

Solution 2 : En plus de la solution 1, on permet la translation selon $\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1}$, pas de mobilité ajoutée, donc $h = m + E_c - I_c = 1 + 6 - 7 = 0$

Solution 3 : On ajoute 2DDL en transformant la liaison pivot en rotule. Donc on peut croire que tout est réglé, mais non ! Une mobilité interne est ajoutée, de la pièce 2 en rotation autour de l'axe $(B, \overrightarrow{x_2})$.
$h = m + E_c - I_c = 2 + 6 - 7 = 1$

Solution 4 : On n'ajoute aucune mobilité interne, donc $h = m + E_c - I_c = 1 + 6 - 7 = 0$

Exercice 5: Base de projection et système statique

$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & M_{10}{}^1 \\ Z_{10}{}^1 & N_{10}{}^1 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{10}{}^1 & M_{10}{}^1 \\ Z_{10}{}^1 & N_{10}{}^1 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & 0 \\ Z_{10}{}^2 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1} = \{0\}$
$\{\mathcal{T}_{1/0}{}^1\} = \begin{Bmatrix} X_{10}{}^2 & 0 \\ Y_{10}{}^2 & 0 \\ Z_{10}{}^2 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1}$	$\begin{cases} X_{10}{}^2\overrightarrow{x_1} + \left(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2\right)\overrightarrow{y_1} + \left(Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2\right)\vec{z} = \vec{0} \\ M_{10}{}^1\overrightarrow{y_1} + N_{10}{}^1\vec{z} = \vec{0} \end{cases}$

$$\begin{cases} X_{10}{}^2 \cos\theta_{10} - \left(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2\right)\sin\theta_{10} = 0 \\ X_{10}{}^2 \sin\theta_{10} + \left(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2\right)\cos\theta_{10} = 0 \\ Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 = 0 \\ -M_{10}{}^1 \sin\theta_{10} = 0 \\ M_{10}{}^1 \cos\theta_{10} = 0 \\ N_{10}{}^1 = 0 \end{cases} \begin{cases} X_{10}{}^2 = 0 \\ Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2 = 0 \\ Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ M_{10}{}^1 = 0 \\ N_{10}{}^1 = 0 \end{cases}$$

Question 1: Déterminer le degré d'hyperstatisme du mécanisme

Statique	
p	2
$\boldsymbol{E_s = 6(p-1)}$	6
$\boldsymbol{I_s}$	4+3=7
$\boldsymbol{m_u = 0}$	
$\boldsymbol{m_i = 1}$	
$\boldsymbol{m = 1}$	
$\boldsymbol{h = m + I_s - E_s}$	1+7-6=2

Question 2: Déterminer le rang r_s du système dans la base 0 et valider m et h

$$\begin{cases} X_{10}{}^2 \cos\theta_{10} - \left(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2\right)\sin\theta_{10} = 0 \\ X_{10}{}^2 \sin\theta_{10} + \left(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2\right)\cos\theta_{10} = 0 \\ Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 = 0 \\ -M_{10}{}^1 \sin\theta_{10} = 0 \\ M_{10}{}^1 \cos\theta_{10} = 0 \\ N_{10}{}^1 = 0 \end{cases}$$

Une équation utile $N_{10}{}^1 = 0$: $r_s {+}{=} 1$

$$\begin{cases} -M_{10}{}^1 \sin\theta_{10} = 0 \\ M_{10}{}^1 \cos\theta_{10} = 0 \end{cases}$$

Une équation utile donne $M_{10}{}^1 = 0$ ($r_s {+}{=} 1$), l'autre est inutile ($m {+}{=} 1$)

Dans $Z_{10}{}^1 + Z_{10}{}^2 = 0$, il faut fixer une inconnue ($h {+}{=} 1$), l'équation sert à trouver l'autre ($r_s {+}{=} 1$)

$$\begin{cases} X_{10}{}^2 \cos\theta_{10} - \left(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2\right)\sin\theta_{10} = 0 \\ X_{10}{}^2 \sin\theta_{10} + \left(Y_{10}{}^1 + Y_{10}{}^2\right)\cos\theta_{10} = 0 \end{cases}$$

Deux équations et 3 inconnues, il faut en fixer une ($h {+}{=} 1$), puis elles servent à trouver les autres ($r_s {+}{=} 2$)

$$r_s = 5 \quad ; \quad m = E_s - r_s = 6 - 5 = 1 \quad ; \quad h = I_s - r_s = 7 - 5 = 2$$

Question 3: Déterminer le rang r_s du système dans la base 1 et valider m et h

$$\begin{cases} {X_{10}}^2 = 0 \\ {Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2 = 0 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 = 0 \\ 0 = 0 \\ {M_{10}}^1 = 0 \\ {N_{10}}^1 = 0 \end{cases}$$

Une équation $0 = 0$ traduisant la mobilité ($m += 1$)

$$\begin{cases} {X_{10}}^2 = 0 \\ {M_{10}}^1 = 0 \\ {N_{10}}^1 = 0 \end{cases}$$

Trois équations utiles ($r_s += 3$)

$$\begin{cases} {Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2 = 0 \\ {Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2 = 0 \end{cases}$$

Deux équations dans lesquelles il faut fixer une inconnue ($h += 2$) puis elles servent à trouver les autres ($r_s += 2$)

$$r_s = 5 \quad ; \quad m = E_s - r_s = 6 - 5 = 1 \quad ; \quad h = I_s - r_s = 7 - 5 = 2$$

Question 4: Identifier la mobilité à l'aide de cette étude

L'équation dans la base 1 nous donne la mobilité en rotation sur l'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$

Question 5: Expliquer le/les degrés(s) d'hyperstatisme obtenus

Dans la base 1, on voit qu'il faut poser un Y et un Z parmi ${Y_{10}}^1 + {Y_{10}}^2$ et ${Z_{10}}^1 + {Z_{10}}^2$, soit deux degrés d'hyperstatisme en translation suivant $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{z_1}$

Question 6: Pour chacune de ces modifications, déterminer le nouveau degré Pour chacune de ces modifications, complétez le tableau suivant et comprenez le résultat

	1	**2**	**3**	**4**
m	1	1	1	2
E_c	6	6	6	6
E_s	6	6	6	6
I_c	7	6	7	8
I_s	5	6	5	4
h	0	1	0	0

Solution 1 : Aucune mobilité n'est ajoutée. $h = m + I_s - E_s = 1 + 5 - 6 = 0$
Solution 2 : Le système est maintenant contraint en ajoutant un degré d'hyperstatisme en translation sur $\overrightarrow{x_1}$, mais les deux autres degrés d'hyperstatisme ont disparu. Aucune mobilité n'est ajoutée. $h = m + I_s - E_s = 1 + 6 - 6 = 1$
Solution 3 : Aucune mobilité n'est ajoutée. $h = m + I_s - E_s = 1 + 5 - 6 = 0$
Solution 4 : Une mobilité en translation sur $\overrightarrow{x_1}$ est aoutée. $h = m + I_s - E_s = 2 + 4 - 6 = 0$