Corrigé du Concours National Commun

Épreuve de Mathématiques II
Session 2022 - Filière MP

m.laamoum@gmail.com

Exercice

Construction d'une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

0.1

0.1.1 ψ est linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\psi(1\dots,1) = n$ donc ψ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$.

0.1.2 $H = \ker\psi$ donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On a $\operatorname{Im}\psi \subset \mathbb{R}$ donc $0 \leq \dim \operatorname{Im}\psi \leq 1$, comme ψ est non nulle alors $\dim \operatorname{Im}\psi = 1$, le théorème du rang donne $\dim H = n-1$, H est un hyper plan .

0.2 $(v_1,\dots,v_{n-1})$ est une famille de H . La matrice de $(v_1,\dots,v_{n-1})$ dans $(e_1,\dots,e_n)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

elle est de rang $n-1$ donc $(v_1,\dots,v_{n-1})$ est libre par suite c'est une base de H.

0.3

0.3.1 Soit $(j,k) \in \{1,\dots,n-1\}^2$, on a

$$\begin{aligned} (v_j \mid v_k) &= (e_j - e_{j+1} \mid e_k - e_{k+1}) \\ &= (e_j \mid e_k) - (e_{j+1} \mid e_k) - (e_j \mid e_{k+1}) + (e_{j+1} \mid e_{k+1}) \\ &= \delta_{j,k} - \delta_{j+1,k} - \delta_{j,k+1} + \delta_{j+1,k+1} \\ &= 2\delta_{j,k} - \delta_{j+1,k} - \delta_{j,k+1} \end{aligned}$$

donc

$$(v_j \mid v_k) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \in \{j-1, j+1\} \\ 2 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{si } k \neq \{j-1, j, j+1] \end{cases}$$

0.3.2 La base orthogonale $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})$, de H est obtenue par procédé de Schmidt à partir de $(v_1,\dots.v_{n-1})$ donc $\varepsilon_1 = v_1$ et pour $k \in \{2,\dots,n-1\}, \varepsilon_k = v_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{(v_k|\varepsilon_i)}{\|\varepsilon_i\|^2}\varepsilon_i = v_k - p_{k-1}(v_k)$.

0.3.3

(i) Soit $k \in \{2,\dots,n-1\}$; on pose $\varepsilon_k = v_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j$.

On a $\varepsilon_k = v_k - p_{k-1}(v_k) \in F_{k-1}^{\perp}$ donc $(v_j \mid \varepsilon_k) = 0$ pour tout $j \in \{1,\dots,k-1\}$ qui s'écrit

$$\begin{cases} (v_1 \mid v_k) - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \alpha_j (v_1 \mid v_j) & = 0 \\ (v_2 \mid v_k) - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \alpha_j (v_2 \mid v_j) & = 0 \\ \qquad\vdots & \\ (v_{k-1} \mid v_k) - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \alpha_j (v_{k-1} \mid v_j) & = 0 \end{cases}$$

Ainsi $(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})$ est solution du système linéaire $A_kX = B_k$, où $A_k = ((v_j \mid v_\ell))_{1\leq j,\ell\leq k-1}$ et B_k est le vecteur colonne de composantes $(v_1 \mid v_k),\dots,(v_{k-1} \mid v_k)$.

(ii) D'après 0.3.1 on a

- Si $i=1$.

$$\begin{aligned}(v_1 \mid v_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (v_1 \mid v_j) &= -(v_1 \mid v_1)\alpha_1 - (v_1 \mid v_2)\alpha_2 \\ &= -2\alpha_1 + \alpha_2\end{aligned}$$

- Si $i \in \{2,\dots,k-2\}$

$$\begin{aligned}(v_i \mid v_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (v_i \mid v_j) &= -\alpha_{i-1}(v_i \mid v_{i-1}) - \alpha_i (v_i \mid v_i) - \alpha_{i+1}(v_i \mid v_{i+1}) \\ &= \alpha_{i-1} - 2\alpha_i + \alpha_{i+1}\end{aligned}$$

- Si $i = k-1$

$$\begin{aligned}(v_i \mid v_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (v_i \mid v_j) &= (v_{k-1} \mid v_k) - \alpha_{k-2}(v_{k-1} \mid v_{k-2}) - \alpha_{k-1}(v_{k-1} \mid v_{k-1}) \\ &= -1 + \alpha_{k-2} - 2\alpha_{k-1}\end{aligned}$$

Ainsi le système $A_k X = B_k$ s'écrit

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ \quad\vdots & \\ -x_{k-3} + 2x_{k-2} - x_{k-1} & = 0 \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} & = -1 \end{cases}$$

(iii) La première équation donne $x_2 = 2x_1$, et de la deuxième $x_3 = 3x_1$.
Soit $j \in \{2,..,k-1\}$ supposons que $x_i = ix_1$ pour tout $i \in \{2,..,j-1\}$, on a $-x_{j-2} + 2x_{j-1} - x_j = 0$ donc $x_j = (-(j-2) + 2(j-1))\, x_1 = jx_1$.
De la dernière équation on a $(-(k-2)+2(k-1))\, x_1 = -1$ soit $x_1 = \frac{-1}{k}$, ainsi $x_j = \frac{-j}{k}$ pour $j \in \{1,..,k-1\}$.
On a donc $\varepsilon_k = v_k + \sum\limits_{j=1}^{k-1} \dfrac{j}{k} v_j$, puis on exprime les v_j dans la base $(e_1,...,e_n)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_k &= e_k - e_{k+1} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}(e_j - e_{j+1}) \\ &= e_k - e_{k+1} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} e_j - \sum_{j=2}^{k} \frac{j-1}{k} e_j \\ &= \frac{1}{k} e_1 + \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{j}{k} - \frac{j-1}{k} e_j \right) - e_{k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{k} e_j - e_{k+1}\end{aligned}$$

On en déduit que $\varepsilon_k = \left(\frac{1}{k},\dots,\frac{1}{k},-1,0,\dots,0\right)$ dans la base $(e_1,...,e_n)$.

0.4 On a $\|\varepsilon_k\| = \sqrt{1+\frac{1}{k}}$, la famille $\left(\frac{1}{\|\varepsilon_k\|}\varepsilon_k\right)_{1\le k\le n}$ une base orthonormée de H.
(*Comme application : chercher la distance de* X^n à H)

Problème

Étude des morphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Notations et rappels

1

Quelques résultats préliminaires sur les matrices C_n et D_n

1.1

1.1.1

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

1.1.2

- $D_3{}^3 = diag(1, j^3, j^6) = I_3$.
- $C_3{}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C_3{}^3 = I_3$
- $D_3C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ j & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \end{pmatrix}$, $C_3D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & j^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \end{pmatrix} = j^2 D_3C_3$ et $D_3C_3 = jC_3D_3$.

1.1.3 Soie a, b et c tels que $aI_3 + bD_3 + cD_3^2 = 0$ alors

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + jb + j^2c = 0 \\ a + j^2b + jc = 0 \end{cases}$$

la somme des trois équations donne $a = 0$, le système devient

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ b + jc = 0 \\ b + j^2c = 0 \end{cases}$$

on déduit $b = c = 0$, donc $\left(I_3, D_3, D_3^2\right)$ est libre .
Le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_3$des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est de dimension 3 et $\left(I_3, D_3, D_3^2\right)$ est libre dans $\mathcal{D}_3$ donc c'est une base .

1.1.4 On a

$$\begin{aligned}
\chi_{C_3}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ \lambda - 1 & \lambda & 0 \\ \lambda - 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L3 - L_1}}{=} (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \lambda + 1\right)
\end{aligned}$$

donc $\chi_{C_3}(\lambda) = \lambda^3 - 1$.
C_3 admet 3 valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1.2

1.2.1 $D_n{}^n = diag(1, w^n, ..., w^{n(n-1)}) = I_n$.

1.2.2 On vérifie que

$$C_nD_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & w^{n-2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D_nC_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ w & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & w^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

donc $D_nC_n = w\ C_nD_n$.

1.2.3 Soit $a_0, .., a_{n-1}$ tels que $a_0I_n + \ldots + a_{n-1}D_n{}^{n-1} = 0$ donc le polynôme $P = a_0 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}$ est annulateur de D_n , le polynôme minimal de D_n est $X^n - 1$, il divise P donc $P = 0$ et $a_0 = .. = a_{n-1} = 0$, ainsi la famille $(I_n, \ldots, D_n{}^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{D}_n$, le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension n donc $(I_n, \ldots, D_n{}^{n-1})$ est une base de $\mathcal{D}_n$.

1.2.4 On développe suivant la première ligne le déterminant χ_{C_n} :

$$\begin{aligned}\chi_{C_n}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & -1 & \lambda & 0 \\ \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^n - 1\end{aligned}$$

donc $\chi_{C_3}(X) = X^n - 1$.
C_n admet n valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1.2.5 Le théorème de Cayley-Hamilton on a ${C_n}^n = I_n$.

1.3

1.3.1 La j ième colonne de C_n est constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans $(e_1, \ldots, e_n)$ donc $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3, ..., u(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $u(e_n) = e_1$.

1.3.2 De la question précédente on a :
$u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$ donc $u^2(e_1) = e_3$, par récurrence on obtient pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ $u^k(e_1) = e_{k+1}$. De plus $u^n(e_1) = u(u^{n-1}(e_1)) = u(e_n) = e_1$.

1.3.3 On a $u^n(e_1) = e_1$ et pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} u^n(e_k) &= u^n(u^{k-1}(e_1)) \\ &= u^{k-1}(u^n(e_1)) \\ &= u^{k-1}(e_1) \\ &= e_k \end{aligned}$$

donc u^n et id coïncident sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$ donc $u^n = id$ et ${C_n}^n = I_n$. .

1.3.4 Soit $a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_1 id_E + \ldots + a_n u^{n-1} = 0$, on applique cette relation à e_1, on obtient
$a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n = 0$ donc $a_1 = \ldots = a_n = 0$ et $\left(id_E, u, \ldots, u^{n-1}\right)$ est libre .
$X^n - 1$ est annulateur de u , le polynôme minimal π_u de u le divise , si $\deg \pi_u \leq n-1$ alors la famille $\left(id_E, u, \ldots, u^{n-1}\right)$ est liée ce qui est absurde donc $\deg \pi_u \geq n$ par suite $\pi_u = X^n - 1$ et $\pi_{C_n} = X^n - 1$.

1.3.5 La relation $D_n C_n = w\ C_n D_n$ se traduit par $vu = w.uv$, D_n est diagonale donc $v(e_k\} = w^{k-1} e_k$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

1.3.6 La famille $\left({C_n}^k {D_n}^\ell\right)_{0 \leq k, \ell \leqslant n-1}$ contient n^2 éléments , qui est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit de montrer qu'elle est libre , pour cela montrons que la famille $\left(u^k v^\ell\right)_{0 \leq k, \ell \leqslant n-1}$ est libre .
Soit $(a_{k,\ell})_{0 \leq k, \ell \leqslant n-1}$ des complexes tels que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} a_{k,\ell}\ u^k v^\ell = 0$, on applique cette relation à e_j pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{k,\ell}\ u^k v^\ell(e_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_{k,\ell}\ w^{\ell(j-1)} \right) u^k(e_j) = 0$$

on a $u^k(e_j) = u^k(u^{j-1}(e_1)) = \begin{cases} e_{k+j} & \text{si } j \leq k+j \leq n \\ e_i & \text{si } k+j = n+i \text{ et } 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$, donc la famille $\left(u^k(e_j)\right)_{0 \leq k \leqslant n-1}$ est libre *(elle est costituée de tous le e_k pour $k \in \{1, \ldots, n\}$)* , par suite pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ $\sum\limits_{\ell=0}^{n-1} a_{k,\ell}\ w^{\ell(j-1)} = 0$.
La famille $(a_{k,\ell})_{0 \leq \ell \leqslant n-1}$ est solution d'un système de matrice $\left(w^{\ell.(j-1)}\right)_{\substack{0 \leq \ell \leqslant n-1 \\ 1 \leq j \leqslant n}}$, son déterminant est celui de Vandermonde $V(1, w, ..., w^{n-1}) = \prod\limits_{0 \leq k < \ell \leqslant n-1} (w^\ell - w^k)$ qui est non nul donc $a_{k,\ell} = 0$ pour tout $\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$, ainsi $a_{k,\ell} = 0$ pour tout k et ℓ dans $\{0, \ldots, n-1\}$.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Une question de réduction

2.1 On a $\det(f)^n = \det(g)^n = 1$ donc f et g sont inversibles et $f^{-1} = f^{n-1}$, $g^{-1} = g^{n-1}$.

2.2 $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de f et g , scindé à racines simples donc f et g sont diagonalisables et leurs spectres sont inclus dans l'ensemble de racines de ce polynôme, donc leurs valeurs propres sont des racines n-ièmes de l'unité.

2.3 Soit λ une valeur propre de f et $x_0 \in E$ un vecteur propre associé.

2.3.1 On a $f(x_0) = \lambda x_{0.}$ et $f\left(g(x_0)\right) = w\lambda.g\left(x_0\right)$, $x_0 \neq 0$ et g est inversible donc $g\left(x_0\right) \neq 0$ et $w\lambda$ est une valeur propre de f de vecteur propre $g\left(x_0\right)$.

2.3.2 Par récurrence on a pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $fg^k = w^k.g^k f$, par la même méthode que la question précédente on montre que $w^k\lambda$ est une valeur propre de f .

2.3.3 Le cardinal de $\mathrm{Sp}(f)$ et inférieur à n et $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ car f est inversible.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ on a $\{w^k\lambda \ , 0 \leq k \leq n-1\} \subset \mathrm{Sp}(f)$, donc $\mathrm{Sp}(f)$ est de cardinal n , donc $\mathrm{Sp}(f)$ est l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de l'unité.

2.3.4 f admet n valeurs propres distinctes donc pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\dim E_\lambda(f) = 1$.

2.4

2.4.1 D'après 2.3.2 on a pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f\left(g^k(e)\right) = w^k.g^k(e)$.

2.4.2 On déduit de 2.4.1 que que $E_{w^k}(f) = \mathrm{Vect}\left\{g^k(e)\right\}$ et $E = \bigoplus\limits_{k=0}^{n-1} E_{w^k}(f)$ donc $\left(e, g(e), \ldots, g^{n-1}(e)\right)$ est une base de E, adaptée à la somme directe, elle est formée de vecteurs propres de f.

2.4.3 $\mathcal{B} = \left(e, g(e), \ldots, g^{n-1}(e)\right)$ base de E . On a $f\left(g^k(e)\right) = w^k.g^k(e)$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(f) = diag(1, w, \ldots, w^{n-1}) = D_n$.
Pour $k \in \{0, \ldots, n-2\}$ on a $g\left(g^k(e)\right) = g^{k+1}(e)$ et $g\left(g^{n-1}(e)\right) = e$, donc $Mat_{\mathcal{B}}(g) = C_n$.

$3^{\text{ème}}$ Partie
Application à la détermination des endomorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un morphisme d'algèbres, donc il est linéaire , vérifie $\Phi\left(I_n\right) = I_n$ et

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(C)^2, \quad \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B).$$

3.1 Par récurrece sur p .

3.2 On a $D_nC_n = w\ C_nD_n$, ${D_n}^n = I_n$et ${C_n}^n$, la définition de Φ et la question précédente donnent

$$\Phi\left(D_n\right)^n = \Phi\left(C_n\right)^n = I_n \quad \text{ et } \Phi\left(D_n\right)\Phi\left(C_n\right) = w, \Phi\left(C_n\right)\Phi\left(D_n\right).$$

3.3 On note f_1 et g_1 les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associés aux matrices $\Phi\left(D_n\right)$ et $\Phi\left(C_n\right)$ respectivement.

3.3.1 Les relations de la question 3.2 se traduisent par

$$f_1^n = g_1^n = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \quad \text{ et } \quad f_1 g_1 = w.g_1 f_1$$

3.3.2 D'après la question 2.4.3 il existe une base $\mathcal{B}$ de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans laquelle la matrice de f_1 est D_n et celle de g_1 est C_n.

3.3.3 Soit P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ de E alors on a $\Phi\left(D_n\right) = PD_nP^{-1}$ et $\Phi\left(C_n\right) = PC_nP^{-1}$.

3.4 D'après la question 1.3.6 la famille $\left({C_n}^k {D_n}^\ell\right)_{0 \leq k, \ell \leqslant n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe $\left(a_{k,\ell}\right)_{0 \leq k, \ell \leqslant n-1}$

des complexes tels que $M = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sum\limits_{\ell=0}^{n-1} a_{k,\ell}\ {C_n}^k {D_n}^\ell$. Les propriétés démontrée de Φ donnent :

$$\begin{aligned}
\Phi(M) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{k,\ell}\ \Phi(C_n)^k\ \Phi\left(D_n\right)^\ell \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{k,\ell}\ (PC_nP^{-1})^k\ \left(PD_nP^{-1}\right)^\ell \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{k,\ell}\ P.{C_n}^k.P^{-1}\ P.{D_n}^\ell P^{-1} \\
&= P.\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{k,\ell}\ {C_n}^k.{D_n}^\ell\right) P^{-1}
\end{aligned}$$

D'où $\Phi(M) = PMP^{-1}$.

3.5 Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(C) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(M) = PMP^{-1}$ avec P une matrice inversible .
Φ est linéaire , vérifie $\Phi\left(I_n\right) = I_n$ et $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(C)^2, \quad \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$, donc c'est un morphisme de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

FIN DE L'ÉPREUVE