

# Corrigé du CNC 2010 : Physique II

## 1<sup>ère</sup> Partie

### Conduction électrique dans un milieu matériel

## 1

### 1.1 Conductivité électrique d'un milieu matériel

#### 1.1.1

En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, on peut trouver l'équation du mouvement du porteur de charge dans le milieu matériel selon :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_e + \vec{F}_a + \vec{F}_r \Rightarrow m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} - m\omega_0^2\vec{r} \\ &\Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v} - m\omega_0^2\vec{r} \end{aligned}$$

soit donc :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

#### 1.1.2

Le milieu matériel est soumis à un champ électrique extérieur sinusoïdal de pulsation  $\omega$  :

**1.1.2.1** L'étude en régime sinusoïdal trouve sa justification dans le théorème de FOURIER qui énonce que tout champ quelconque période peut être développé en une somme de composantes sinusoïdales. L'action d'un milieu sur le champ total est la somme des actions de ce milieu sur chaque composante sinusoïdale.

**1.1.2.2** Pour déterminer l'expression complexe de la vitesse  $\vec{v}$  du porteur de charge en régime sinusoïdal établi de pulsation  $\omega$ , on utilise l'équation du mouvement suivante :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau}\vec{v} + m\omega_0^2\vec{r} = q\vec{E} \text{ avec } \vec{r} = \int \vec{v} dt$$

soit alors :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau}\vec{v} + m\omega_0^2 \int \vec{v} dt = q\vec{E} \text{ avec } \begin{cases} \frac{d}{dt} \exp(i\omega t) \equiv i\omega \exp(i\omega t) \\ \int \exp(i\omega t) dt \equiv \frac{1}{i\omega} \exp(i\omega t) \end{cases}$$

$$i\omega\vec{v} + \frac{\vec{v}}{\tau} - i\frac{\omega_0^2}{\omega}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E} \Rightarrow \left[ \frac{1}{\tau} + i\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right) \right] \vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

d'où :

$$\vec{v} = \frac{q/m}{\frac{1}{\tau} + i(\omega - \omega_0^2/\omega)} \vec{E}$$

**1.1.3**

Expression de la densité volumique de charges  $\rho$  associée aux porteurs mobiles en fonction de  $n$  et  $q$  :

$$\boxed{\rho = nq}$$

**1.1.4**

Expression de la densité de courant  $\vec{j}$  en fonction de  $n$ ,  $q$  et  $\vec{v}$  :

$$\boxed{\vec{j} = \rho \vec{v} = nq \vec{v}}$$

**1.1.5**

Du résultat de la question 1.1.2.2, on peut déduire l'expression complexe de la densité de courant  $\vec{j}$  :

$$\vec{j} = \frac{nq^2/m}{\frac{1}{\tau} + i(\omega - \omega_0^2/\omega)} \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{nq^2\tau/m}{1 + i\omega\tau(1 - \omega_0^2/\omega^2)} \vec{E}}$$

**1.1.6**

La loi d'OHM s'écrit en régime établi :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Cette loi, identifiée à l'expression établie dans la question 1.1.5, donne l'expression de la conductivité complexe  $\sigma$  :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{nq^2\tau/m}{1 + i\omega\tau(1 - \omega_0^2/\omega^2)} \vec{E}$$

soit :

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})}} \text{ avec } \boxed{\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}}$$

**1.2 Étude d'un milieu conducteur****1.2.1**

Dans le cas cité dans cette section ( $\omega_0 = 0$ ), l'expression de la conductivité électrique complexe d'un milieu conducteur s'écrit :

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} (1 - i\omega\tau)}$$

**1.2.2**

La conductivité complexe précédente peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2 = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} - i \frac{\sigma_0\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}}$$

avec :

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2}} \text{ et } \boxed{\sigma_2 = \frac{\sigma_0\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2}}$$

**1.2.3**

Cas du métal cuivre.

**1.2.3.1** Expression du nombre d'électrons de conduction par unité de volume  $n$  :

$$n = \frac{N}{V} \text{ avec } N = n_{(\text{mol})} \mathcal{N}_A = \frac{m_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}} \mathcal{N}_A$$

$$n = \frac{m_{\text{Cu}}}{V} \frac{\mathcal{N}_A}{M_{\text{Cu}}} \Rightarrow \boxed{n = \rho_{\text{Cu}} \frac{\mathcal{N}_A}{M_{\text{Cu}}}}$$

**1.2.3.2** Valeur numérique de  $n$  :

$$n = 8,9 \times 10^3 \times \frac{6,02 \times 10^{23}}{63,5 \times 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{n = 8,4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}}$$

**1.2.3.3** La conductivité du cuivre en régime statique est :

$$\sigma_0 = \frac{nq^2\tau}{m} \text{ avec } q = -e \text{ et } m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

soit donc :

$$\tau = \frac{m\sigma_0}{nq^2} = \frac{(9,1 \times 10^{-31}) (6 \times 10^7)}{(8,4 \times 10^{28}) (-1,6 \times 10^{-19})^2} \Rightarrow \boxed{\tau = 2,5 \times 10^{-14} \text{ s}}$$

**1.2.3.4** Le domaine de fréquences demandé est tel que :

$$\omega\tau \ll 1 \Leftrightarrow 2\pi f\tau \ll 1 \Rightarrow \boxed{f \ll f_1 = \frac{1}{2\pi\tau} = 6,4 \times 10^{12} \text{ Hz}}$$

**1.2.4**

En supposant que la condition précédente ( $\omega\tau \ll 1$ ) est vérifiée, on obtient les expressions approchées au premier ordre en  $\omega\tau$  de  $\sigma_1$  et de  $\sigma_2$  :

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} \approx \sigma_0} \text{ et } \boxed{\sigma_2 = \frac{\sigma_0\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \approx \sigma_0\omega\tau}$$

**1.2.5**

Le vecteur densité de courant dans le milieu étudié s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = (\sigma_1 - i\sigma_2) \vec{E} = \sigma_0 (1 - i\omega\tau) \vec{E}$$

soit :

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} - i\sigma_0\tau\omega \vec{E} \xrightarrow{\text{en notation réelle}} \vec{j} = \sigma_0 \vec{E} - \sigma_0\tau \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E} - \sigma_0\tau \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \sigma_0 \vec{E} + \varepsilon_0\chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On en déduit donc l'expression de  $\chi$  :

$$\boxed{\chi = -\frac{\sigma_0\tau}{\varepsilon_0}}$$

**1.2.6**

L'équation de MAXWELL-AMPÈRE s'écrit dans le milieu conducteur comme suit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{avec} \quad \vec{j} = \sigma_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

soit :

$$\boxed{\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma_0 \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

**1.2.7**

Si l'on admet que le courant de conduction a la même expression qu'en basses fréquences, on écrit :  $\vec{j}_c = \sigma_0 \vec{E}$ . L'équation de MAXWELL-AMPÈRE s'écrit alors :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_c + \vec{j}_d) \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{j}_d = (1 + \chi) \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$\vec{j}_d$  est la densité de courant de déplacement.

**1.2.8**

Le rapport de l'amplitude du courant de conduction à celle du courant de déplacement est donné par :

$$\eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{|\dot{j}_c|}{|\dot{j}_d|} \Rightarrow \eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{\sigma_0 |\vec{E}|}{|1 + \chi| \varepsilon_0 |\omega \vec{E}|}$$

soit donc :

$$\boxed{\eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega |1 + \chi|}}$$

**1.2.9**

Caractère isolant et caractère conducteur du matériau.

**1.2.9.1** Le rapport  $\eta$  est égal à l'unité pour la fréquence  $\omega_c$  telle que :

$$\eta = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega |1 + \chi|} = 1 \Rightarrow \varepsilon_0 \omega |1 + \chi| = \sigma_0$$

donc :

$$\boxed{\omega = \omega_c = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 |1 + \chi|}}$$

**1.2.9.2** La fréquence  $f_c$  vaut pour le cuivre :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\sigma_0}{2\pi \varepsilon_0 |1 + \chi|} \quad \text{avec} \quad \chi = -\frac{\sigma_0 \tau}{\varepsilon_0}$$

$$f_c = \frac{\sigma_0}{2\pi |\varepsilon_0 - \sigma_0 \tau|} \Rightarrow \boxed{f_c = 6,4 \times 10^{12} \text{ Hz}}$$

Cette fréquence est située dans le domaine des infrarouges.

Dans le cas d'un rayonnement électromagnétique visible  $f_{\text{visible}} \gg f_c$  et par suite  $\eta \ll 1$  : le cuivre se comporte comme un isolant.

**2<sup>ème</sup> partie****Propagation d'ondes électromagnétiques dans le conducteur ohmique**

## 2.1 Relation de dispersion dans un conducteur ohmique

### 2.1.1

D'après 1.2.1., la conductivité  $\sigma$  est égale à  $\sigma_0$  si :  $\omega \tau \ll 1 \Rightarrow f \ll f_1 = \frac{1}{2\pi\tau} = 1,5.10^{13} \text{ Hz}$ .

### 2.1.2

Pour un conducteur ohmique, l'équation de MA s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} + \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

### 2.1.3

Équation de propagation : on a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t}$$

soit :

$$-\Delta \vec{E} + \vec{\text{grad}}(\underbrace{\text{div} \vec{E}}_{=0}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \sigma_0 \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$\Rightarrow$

$$-\Delta \vec{E} = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

d'où :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1)$$

### 2.1.4

D'après le DSF, le champ  $\vec{E}$  peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales + l'équation de propagation (1) est linéaire.

### 2.1.5

Projection de l'équation (1) sur  $\vec{u}_x$  :

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial E(z, t)}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = 0$$

soit :

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} - \mu_0 \sigma_0 i \omega E(z) + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 E(z) = 0$$

d'où :

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + (\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \sigma_0 \omega) E(z) = 0 \quad (2)$$

### 2.1.6

On cherche les solutions sous la forme :  $E(z) = \exp(i k z)$ .

L'équation (2) donne alors :

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \sigma_0 \omega$$

### 2.1.7

2.1.7.1 On a  $E(z) = E_1 \exp(ikz)$ , d'où :

$$\vec{E}(z, t) = E_1 \exp[i(\omega t + kz)] \vec{u}_x$$

L'équation de M-F donne :

$$\frac{\partial \vec{B}(z, t)}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} = -ikE_1 \exp[i(\omega t + kz)] \vec{u}_y$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\vec{B}(z, t) = -\frac{k}{\omega} E_1 \exp[i(\omega t + kz)] \vec{u}_y + \underbrace{\vec{cte}}_{\vec{0}}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{B}(z, t) = -\frac{k}{\omega} E_1 \exp[i(\omega t + kz)] \vec{u}_y$$

soit :

$$\vec{B}(z, t) = \frac{k}{\omega} \vec{E}_1(z, t) \wedge \vec{u}_z$$

2.1.7.2 Non, car  $\arg(k) \neq 0$

## 2.2

### 2.2.1

On a :  $k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i\mu_0 \sigma_0 \omega$

$\Rightarrow$

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \left( 1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} \left( 1 - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)^{1/2} \\ &\approx \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \omega \left( 1 - i \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \omega} \right) \\ &= \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \omega - i \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ &= \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \omega - i \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \\ &= k_0 - i \frac{1}{l_p} \end{aligned}$$

d'où :

$$l_p = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

### 2.2.2

⊙ On a :  $l_p = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{2\varepsilon_0 c}{\sigma}$

d'où :

$$\frac{l_p}{\lambda} = \frac{2\varepsilon_0 c}{\sigma} \frac{1}{\lambda} = \frac{2\varepsilon_0 c}{\sigma} \frac{1}{\lambda \omega} \omega = \frac{\omega \varepsilon_0}{\sigma \pi} \quad \text{car} \quad \lambda \omega = 2\pi c$$

puisque  $\sigma \ll \varepsilon_0 \omega$ , alors :

$$l_p \gg \lambda$$

⊙ Le champ électromagnétique pénètre dans le conducteur sur une distance de l'ordre de quelques  $l_p$ .

Il y aura beaucoup de dissipation d'énergie dans ce type de conducteur car l'onde y sera atténuée sur une distance de l'ordre de quelques  $l_p \gg \lambda$ .

### 2.2.3

On a :

$$E(z, t) = E_1 \exp[i(\omega t + kz)] + E_2 \exp[-i(\omega t + kz)]$$

soit :

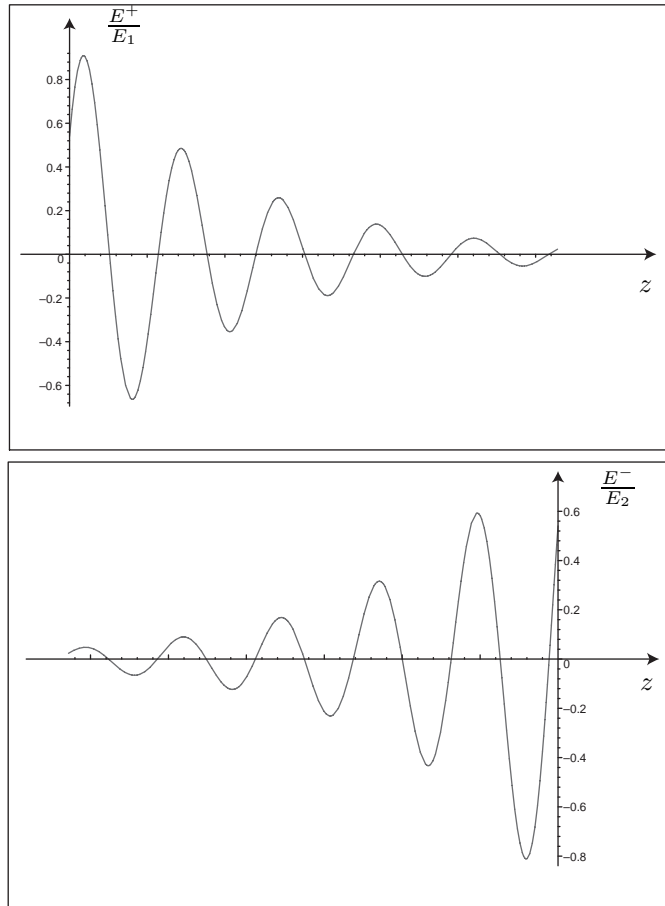
$$E(z, t) = E_1 \exp\left(\frac{z}{l_p}\right) \exp[i(\omega t + k_0 z)] + E_2 \exp\left(-\frac{z}{l_p}\right) \exp[i(\omega t - k_0 z)]$$

### 2.2.4

⊙ Le champ réel est :  $\Re(E(z, t))$ , soit :

$$\Re[E(z, t)] = \underbrace{E_1 \exp\left(\frac{z}{l_p}\right) \cos[(\omega t + k_0 z)]}_{E^-} + \underbrace{E_2 \exp\left(-\frac{z}{l_p}\right) \cos[(\omega t - k_0 z)]}_{E^+}$$

- ⊙  $E^-$  : OPPM dans le sens des  $z$  décroissants (onde évanescente)
- ⊙  $E^+$  : OPPM dans le sens des  $z$  croissants (onde évanescente).
- ⊙ Allures de  $E^+$  et  $E^-$  :



### 2.2.5

⊙ L'amplitude de cette onde diminue lorsqu'elle se propage dans le conducteur(car  $\Im(k) \neq 0$ ), donc il y a dissipation d'énergie.

⊙ L'énergie perdue par l'onde est cédée au conducteur. Elle est transformée ensuite en énergie thermique par effet JOULE (la puissance volumique moyenne cédée à la matière est :  $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} |E|^2 \exp(-2z/l_p)$ ).

⊙ On a  $l_p = \frac{2\varepsilon_0 c}{\sigma}$ , donc, dans un mauvais conducteur où  $\sigma$  est petite,  $l_p$  est grande. Donc il y a beaucoup de dissipation

## 2.3

### 2.3.1

On a  $k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \sigma_0 \omega \approx -i \mu_0 \sigma_0 \omega$ .

soit :

$$k = \pm \sqrt{-i} \sqrt{\mu_0 \sigma_0 \omega} = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma_0 \omega}$$

d'où :

$$k = \pm (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma_0 \omega}{2}} = \pm \frac{(1-i)}{\delta}$$

avec :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$$

⊙  $\delta$  est l'épaisseur de peau où profondeur de pénétration de l'onde.

### 2.3.2

⊙ On a :

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{2\sigma}}$$

puisque :  $\varepsilon_0 \omega \ll \sigma$ , alors :

$$\delta \ll \lambda$$

⊙ Pour un bon conducteur, l'onde est localisée au voisinage de la surface.

### 2.3.3

⊙

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_1 \exp[i(\omega t + kz)] + E_2 \exp[-i(\omega t + kz)] \\ &= E_1 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)\right] + E_2 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right] \end{aligned}$$

⊙ Le champ réel est :

$$\Re[E(z, t)] = \underbrace{E_1 \exp\left(\frac{z}{\delta}\right) \cos\left[\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)\right]}_{E^-} + \underbrace{E_2 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left[\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]}_{E^+}$$

⊙ L'amplitude du champ s'annule sur une distance de l'ordre de  $\delta$ .

On a :  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$ . Donc, en hautes fréquences ( $\omega \uparrow$ ),  $\delta$  devient faible et l'onde est localisée au voisinage de la surface du conducteur.

### 2.3.4

⊙ Pour un bon conducteur, l'onde reste localisée au voisinage de la surface. Il y a peu de dissipation.

⊙ Pour un mauvais conducteur l'onde pénètre à l'intérieur. Il y a alors trop de dissipation.



## 2.4 Réflexion d'une onde électromagnétique par un conducteur réel

### 2.4.1

L'onde considérée est une *OPPM*, on peut appliquer la relation de structure :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}_i = \frac{E_i}{c} \exp i(\omega t - k_0 z) \vec{e}_y$$

de même :

$$\vec{B}_r = -\frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}_r = -\frac{E_r}{c} \exp i(\omega t + k_0 z) \vec{e}_y$$

Donc :

$$\vec{B}_v = \frac{E_i}{c} \exp i(\omega t - k_0 z) \vec{e}_y - \frac{E_r}{c} \exp i(\omega t + k_0 z) \vec{e}_y$$

### 2.4.2

On utilise l'équation de MAXWELL – FARADAY :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t} \implies \vec{B}_t = -\int \text{rot} \vec{E} dt = ikE_t \exp i(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

Donc :

$$\vec{B}_t = \frac{k}{\omega} E_t \exp i(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

### 2.4.3

Les relations de passages en  $z = 0$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}(0, t) - \vec{E}_v(0, t) &= \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \\ \vec{B}_t(0, t) - \vec{B}_v(0, t) &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z \end{aligned}$$

$\rho_s$  et  $\vec{j}_s$  sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant.

### 2.4.4

Sur l'interface entre le vide et le milieu conducteur :

– La composante tangentielle du champ électrique est continue :  $\vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = \vec{E}_t(z=0)$ , ce qui donne :

$$E_i + E_r = E_t$$

– La composante tangentielle du champ magnétique est aussi continue, puisque la densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$  qui est une grandeur macroscopique n'a pas de sens ici :  $\vec{B}_i(z=0) + \vec{B}_r(z=0) = \vec{B}_t(z=0)$ , ce qui donne :

$$\frac{E_i}{c} - \frac{E_r}{c} = \frac{k}{\omega} E_t$$

### 2.4.5

Les deux équations de continuité précédentes permettent de calculer  $E_t$  et  $E_r$  en fonction de  $E_i$  :

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{2}{1 + \frac{k}{k_0}} E_i \\ E_r &= \frac{1 - \frac{k}{k_0}}{1 + \frac{k}{k_0}} E_i \end{aligned}$$

### 2.4.6

2.4.6.1 D'après 2.2.1  $k \simeq k_0 - \frac{i}{l_p} \implies \frac{k}{k_0} \simeq 1 - \frac{i}{k_0 l_p} = 1 - \frac{i}{k_0} \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$

Donc :

$$E_t \simeq \frac{E_i}{1 - i \frac{\sigma}{4w\varepsilon_0}}$$

De même :

$$E_r = \frac{1 - \frac{k}{k_0}}{1 + \frac{k}{k_0}} E_i \simeq \frac{k_0 - (k_0 - \frac{i}{l_p})}{k_0 + (k_0 - \frac{i}{l_p})} E_i = \frac{\frac{i}{l_p}}{2k_0 - \frac{i}{l_p}} \simeq \frac{E_i}{\frac{2k_0 l_p}{i} - 1} = \frac{-E_i}{1 + 4 \frac{w\varepsilon_0}{\sigma}}$$

2.4.6.2 Puisque on est dans le cas du "mauvais" conducteur, alors  $\frac{w\varepsilon_0}{\sigma} \gg 1$ , donc :

$$\begin{aligned} E_t &\simeq E_i \\ \text{et} \\ E_r &\ll E_i \end{aligned}$$

Le "mauvais" conducteur transmet presque intégralement l'onde incidente.

### 2.4.7

2.4.7.1 D'après 2.3.1  $k \simeq \frac{1+i}{\delta}$ , donc :  $1 + \frac{k}{k_0} \simeq 1 + \frac{1+i}{k_0 \delta}$ . Avec :  $k_0 \delta = \sqrt{\frac{2w\varepsilon_0}{\sigma}} \ll 1$ , donc :

$$E_t = 2E_i(1 + i + k_0 \delta)^{-1} k_0 \delta = \frac{2E_i}{1+i} (1 + \frac{k_0 \delta}{1+i}) k_0 \delta$$

À l'ordre le plus bas non nul en  $k_0 \delta$  :

$$E_t \simeq \frac{2k_0 \delta}{1+i} E_i$$

De même, avec  $\|\frac{k}{k_0}\| = \sqrt{\frac{\sigma}{w\varepsilon_0}} \gg 1$ , on aura :

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{k_0}{k} - 1}{\frac{k_0}{k} + 1} = (\frac{k_0}{k} - 1)(\frac{k_0}{k} + 1)^{-1} \simeq (\frac{k_0}{k} - 1)(1 - \frac{k_0}{k}) = -(1 - \frac{k_0}{k})^2$$

Un développement limité au premier ordre donne :  $\frac{E_r}{E_i} = -1 + \frac{2k_0 \delta}{1+i} = -1 + (1+i)k_0 \delta$

Finalement :

$$E_r \simeq (-1 + (1+i)k_0 \delta) E_i$$

2.4.7.2 Puisque  $k_0 \delta \ll 1$  alors :

$$E_r \simeq -E_i \text{ et } E_t \ll E_i$$

### 2.4.8

Le "bon" conducteur réfléchit presque totalement toute l'énergie électromagnétique de l'onde incidente.

Le "mauvais" conducteur absorbe presque totalement toute l'énergie électromagnétique véhiculée par l'onde incidente.

## 3

### 3<sup>ème</sup> partie

#### Propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

### 3.1 Dynamique d'un plasma libre

#### 3.1.1

L'équation (5) de l'énoncé donne :  $\frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E} = (1 + iw\tau) \vec{j}$ , pour obtenir l'équation différentielle demandée, il suffit de remplacer  $iw \vec{j}$  par  $\frac{d\vec{j}}{dt}$ . On obtient alors l'équation suivante :

$$\vec{j} + \tau \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{ne^2 \tau}{m} \vec{E}$$

### 3.1.2

L'équation de conservation de la charge électrique s'écrit :  $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

Appliquons l'opérateur divergence à l'équation de la question 3.1.1 :  $\text{div } \vec{j} + \tau \text{div } \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \text{div } \vec{E}$ . En utilisant l'équation de MAXWELL – GAUSS et l'équation de conservation de la charge, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \rho = 0$$

Il est clair que :  $w_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$

### 3.1.3

Pour les faibles densités  $n$ , l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit, avec  $A$  et  $B$  des constantes d'intégration :  $\rho(t) = A + B \exp(-\frac{t}{\tau})$ .  
Si  $t \rightarrow \infty$ ,  $\rho(t) \rightarrow A = \rho_0$ .

La densité volumique de charge tend vers une valeur constante  $\rho_0$ .

### 3.1.4

Dans ce cas :  $\frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \ll w_p^2 \times \rho$ , l'équation (6) devient :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \rho = 0$$

Le plasma est alors siège d'oscillations dont la pulsation propre est :  $w_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$ .

## 3.2 Propagation d'ondes dans un plasma

### 3.2.1

Il suffit de remplacer  $\frac{ne^2}{m}$  par  $\varepsilon_0 w_p^2$  dans l'expression de  $\vec{j}$  :

$$\vec{j} = \frac{\varepsilon_0 w_p^2}{iw} \vec{E}$$

### 3.2.2

**3.2.2.1** On a :  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$  puisque  $\text{div } \vec{E} = 0$ .

Autrement :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 w_p^2}{w} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Donc :

$$\Delta \vec{E} - \frac{i\mu_0 \varepsilon_0 w_p^2}{w} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

**3.2.2.2** On injecte  $\vec{E}$  dans cette équation, on obtient :

$$k^2 = \frac{w^2}{c^2} - \frac{w_p^2}{c^2}$$

### 3.2.3

**3.2.3.1** Pour  $w < w_p$  :  $w^2 - w_p^2 = i^2(w_p^2 - w^2)$ . Donc :  $k = \pm \frac{i}{c} \sqrt{w_p^2 - w^2} \Rightarrow \exp(-ikz) = \exp(\pm \frac{i}{c} (\sqrt{w_p^2 - w^2})z)$ .

Si  $z > 0$ , la valeur de  $k$  qui mène à une solution bornée est :

$$k = -\frac{i}{c} \sqrt{w_p^2 - w^2}$$

**3.2.3.2** L'expression du champ électrique est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t) \exp\left(-\frac{1}{c}(\sqrt{w_p^2 - w^2})z\right)$$

Cette onde est une onde évanescence. Le terme  $\exp\left(-\frac{1}{c}(\sqrt{w_p^2 - w^2})z\right)$  est responsable de la non propagation de l'onde dans le plasma pour  $w < w_p$ . L'onde est complètement réfléchiée par le plasma.

**3.2.3.3** Le calcul numérique de la longueur d'onde correspondante à  $f_p = \frac{w_p}{2\pi}$  :  $\lambda_p = \frac{c}{f_p}$  donne  $\lambda_p \simeq 334m$ . C'est le domaine des ondes radio. Les ondes sont réfléchies par la couche ionosphérique, ce phénomène est appliqué pour les transmissions hertziennes.

### 3.2.4

**3.2.4.1** Si  $w > w_p$  alors :  $k = \pm \frac{1}{c}\sqrt{w^2 - w_p^2}$ .

Si  $z > 0$ , la valeur de  $k$  qui donne une solution progressive dans le sens des  $z$  croissants est :

$$k = +\frac{1}{c}\sqrt{w^2 - w_p^2}$$

**3.2.4.2** L'expression du champ électrique est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i\left(\omega t - \frac{1}{c}(\sqrt{w^2 - w_p^2})z\right)$$

Cette onde est une onde plane progressive monochromatique.

Sa vitesse de phase est :

$$v_\varphi = \frac{w}{k} = \frac{wc}{\sqrt{w^2 - w_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{w_p}{w}\right)^2}}$$

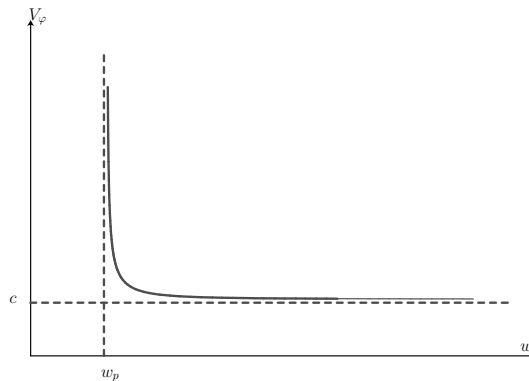


FIGURE 1 –

Aux hautes fréquences,  $v_\phi \rightarrow c$ , la dispersion disparaît, les propriétés du plasma n'intervient plus, ses charges "ne répondent" plus aux excitations très rapides du champ électrique : le plasma devient "transparent".

## 3.3

### 3.3.1

Le champ électrique de l'onde considérée s'écrit :

$$\vec{E} = E_0(\cos(\omega t - k_1 z) + \cos(\omega t - k_2 z))\vec{e}_x = E_0\left[\cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} - \frac{(k_1 + k_2)z}{2}\right) + \cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} + \frac{(k_1 - k_2)z}{2}\right)\right]\vec{e}_x =$$

Avec  $\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} = \frac{\delta\omega}{2}$  et  $\frac{(k_1 - k_2)z}{2} = -\frac{\delta k}{2}$

Donc :

$$\vec{E} = E_0 \times \underbrace{\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}z\right)}_{\text{amplitude modulée}} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z\right)\vec{u}_x$$

L'amplitude modulée constitue une *OPPM* de pulsation  $w_b = \frac{\delta\omega}{2}$ .

### 3.3.2

La vitesse de propagation de l'onde haute fréquence est :

$$v_r = \frac{w_m}{k_m} = \frac{w_1 + w_2}{k_1 + k_2}$$

et

$$v_g = \frac{\delta w}{\delta k} = \frac{w_2 - w_1}{k_2 - k_1}$$

$v_g$  est la vitesse de groupe.

Puisque il y a propagation, alors on est dans le cas où :  $w_2 > w_1 > w_p$ , alors :

$$k_1 = \frac{1}{c} \sqrt{w_1^2 - w_p^2} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{1}{c} \sqrt{w_2^2 - w_p^2}$$

On peut remarquer que :  $v_r \times v_g = \frac{w_2^2 - w_1^2}{k_2^2 - k_1^2} = c^2 \frac{w_2^2 - w_1^2}{w_2^2 - w_p^2 - (w_1^2 - w_p^2)} = c^2$

De plus :

$$w_1 + w_2 = 2w_1 + \delta w \simeq 2w_1$$

et

$$k_1 + k_2 = 2k_1 + \delta k \simeq 2k_1$$

Alors :

$$w_1 + w_2 = 2w_1 + \delta w \simeq 2w_1$$

et

$$k_1 + k_2 = 2k_1 + \delta k \simeq 2k_1$$

Alors :

$$v_r \simeq \frac{w_1}{k_1} = \frac{cw_1}{\sqrt{w_1^2 - w_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w_1^2}}}$$

On en déduit que :

$$v_g = \frac{c^2}{v_r} = c \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w_1^2}}$$

L'onde résultante se propage dans le plasma avec une vitesse de phase égale à  $v_r$  et son enveloppe se propage avec une vitesse égale à  $v_g$ .