Mécanique

MECA1 - Cinématique

Cours

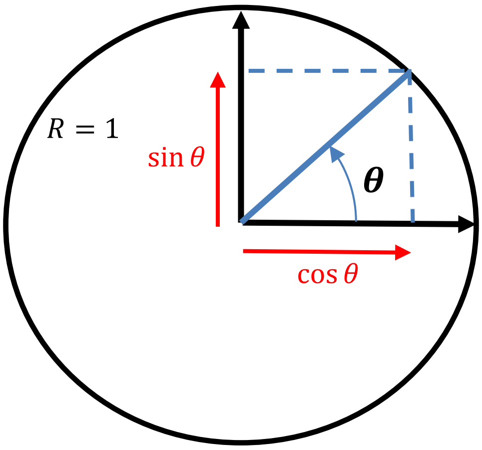
Cinématique

1.I. Outils mathématiques pour la mécanique

1.I.1 Trigonométrie

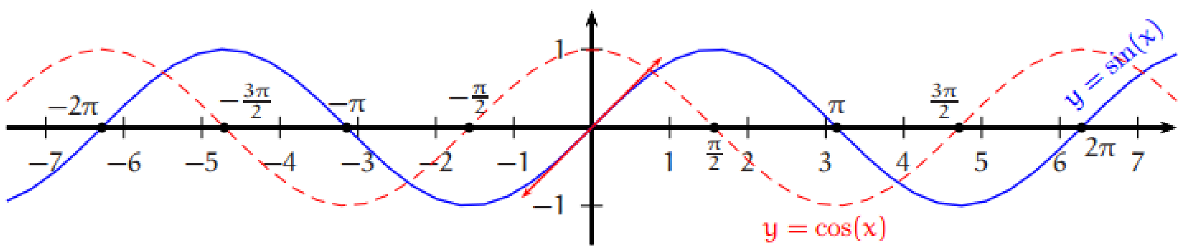
1.I.1.a Cercle trigonométrique

Il est nécessaire de maîtriser le sinus et le cosinus pour aborder la mécanique. Que ce soit pour des projections, des calculs de moments, produits scalaires et vectoriels, la trigonométrie intervient. La base consiste à maîtriser le cercle de rayon 1 et de savoir interpréter les valeurs de sinus et cosinus sur ce cercle pour un angle θ et ses dérivés $\left(\frac{\pi}{2}-\theta;\frac{\pi}{2}+\theta;\pi-\theta;\pi+\theta\right)$. Toutes ces relations trigonométriques se trouvent facilement sur le cercle.



Remarque : attention au sens de la flèche et au signe de θ qui peut être positif ou négatif. Pour plus de détails, se référer à la fiche « Rappels – Projections »

1.I.1.b Fonctions sinus et cosinus



1.I.1.c Valeurs usuelles et calculs

θ en degrés	0	30	45	60	90
θ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Attention : faire attention lors du calcul d'un sinus ou cosinus avec une calculatrice. Il faut vérifier si votre calculatrice est en mode degrés ou radians. Pour cela, un simple calcul permet de le vérifier : cos(60)

- le résultat vaut 0,5, alors la calculatrice utilisée est en mode Degrés.
- le résultat vaut $-0{,}95$, l'erreur doit sauter aux yeux, cos(60) devant être positif, le mode radian est actif.

Pour changer un angle en degrés ou radians, on utilise la règle de 3 :

θ degrés → radians	θ radians → degrés
$180° \rightarrow \pi\, rd$ $\theta° \rightarrow \frac{\pi}{180}\theta$	$\pi\, rd \rightarrow 180°$ $\theta\, rd \rightarrow \frac{180}{\pi}\theta$

1.I.2 Repérage d'un point

1.I.2.a Base et repère

Une base $\mathcal{B}$ est la donnée de trois vecteurs $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ (trièdre) de l'espace, unitaires (de norme 1), formant une famille libre ($\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z}=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$), tels que tout vecteur $\vec{u}$ puisse s'écrire sous la forme :

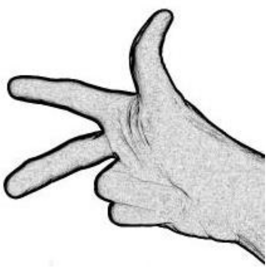
$$\vec{u}=a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z} \quad (a,b,c)\in\mathbb{R}$$

Un repère $\mathcal{R}$ est la donnée d'un point O et d'une base $\mathcal{B}$, permettant de repérer tout point M de l'espace par rapport à O tel que :

$$\overrightarrow{OM}=a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z} \quad (a,b,c)\in\mathbb{R}$$

Une base ou un repère orthonormé a ses vecteurs deux à deux orthogonaux.

Une base directe est une base dont les vecteurs sont organisés afin de former un trièdre directe, représentable par les doigts de la main droite (pouce pour $\vec{x}$, index pour $\vec{y}$ puis majeur pour $\vec{z}$).



Dans la suite, toutes les bases seront orthonormées directes.

1.I.2.b Systèmes de coordonnées

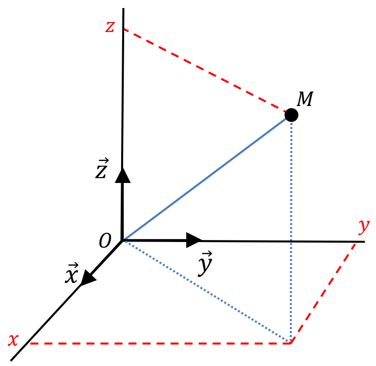
Pour repérer un point, on peut utiliser 3 systèmes de coordonnées. Chacun d'entre eux sera utilisé en fonction du cas traité et il est possible de passer de l'un à l'autre en transformant les coordonnées.

1.I.2.b.i Coordonnées cartésiennes

Le repère cartésien est de loin le plus utilisé.

Soit la base $\mathfrak{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Un point est repéré par ses 3 coordonnées cartésiennes (x,y,z) dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

On utilise aussi la notation verticale pour représenter les coordonnées d'un point dans le système cartésien :

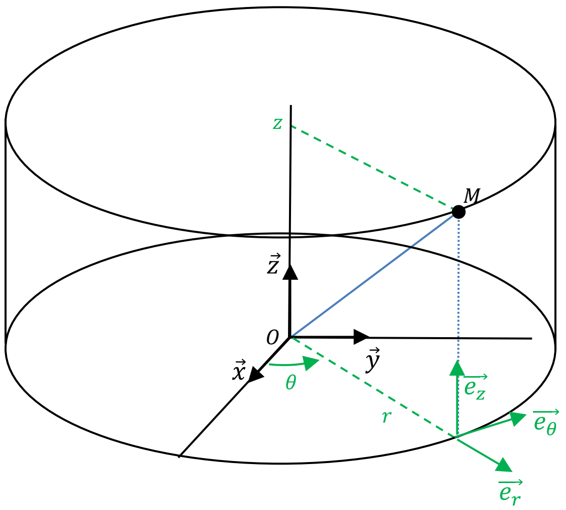
$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

ATTENTION : Cette notation est dépendante de la base $\mathfrak{B}$ dans laquelle est exprimé le vecteur.

1.I.2.b.ii Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont souvent utilisées lorsque le problème traité présente une symétrie de révolution autour d'un axe, avec lequel sera confondu l'un des vecteurs de la base.

Un point est repéré par ses 3 coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans le repère $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$



$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

$\overrightarrow{e_r}$ est un vecteur qui dépend de θ.

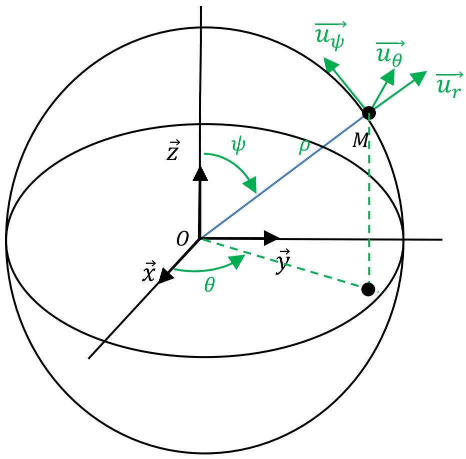
On peut passer du système cylindrique au système cartésien :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

1.I.2.b.iii Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont souvent utilisées lorsque le problème traité présente une forme sphérique.

Un point est repéré par ses 3 coordonnées sphériques (ρ, θ, ψ) dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\psi}\right)$



$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u_r}$$

$\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\psi}$ sont des vecteurs qui dépendent de θ et ψ.

On peut passer du système sphérique aux autres systèmes :

Cartésien	Cylindrique
$\begin{cases} x = \rho \sin\psi \cos\theta \\ y = \rho \sin\psi \sin\theta \\ z = \rho \cos\psi \end{cases}$	$\begin{cases} r = \rho \sin\psi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \cos\psi \end{cases}$

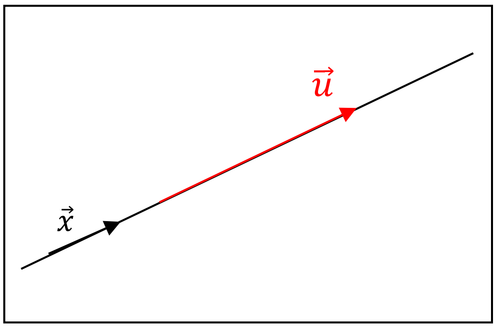
1.I.3 Vecteurs

1.I.3.a Définition

Un vecteur $\vec{u}$ est défini par :

- Une direction
- Un sens
- Une longueur (norme)

Un vecteur est indépendant du point d'origine.



1.I.3.b Expression

Soit une base $\mathfrak{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

1.I.3.b.i Notation vectorielle

Soit u_x, u_y, u_z les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

On a :

$$\vec{u} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z}$$

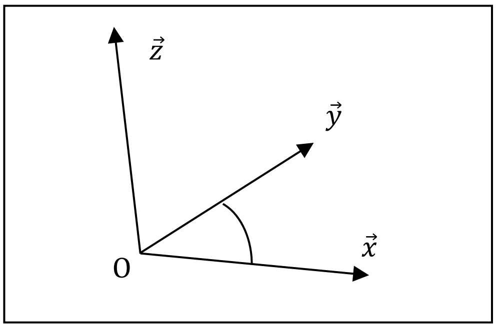
1.I.3.b.ii Notation verticale

En notation verticale, on peut écrire les composantes d'un vecteur verticalement dans une matrice à 3 lignes et 1 colonne.

ATTENTION : Cette notation est dépendante de la base dans laquelle est exprimé le vecteur.

On a ainsi l'expression des vecteurs de base :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \vec{y} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \vec{z} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$



On a donc :

$$\vec{u} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z} = u_x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + u_y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + u_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

Si la base n'est pas précisée, par principe, le résultat sera considéré faux.

1.I.3.c Norme

La norme du vecteur $\vec{u}$ s'écrit $\|\vec{u}\|$.

$$\vec{u} = \pm\|\vec{u}\|\vec{x} = u\vec{x}$$
$$\|\vec{u}\| = |u|$$

On associe souvent la lettre d'un vecteur pour représenter sa valeur algébrique. Attention aux notations. Ecrire u pour parler du vecteur $\vec{u}$ est une erreur courante. Il faut donc faire attention à l'objet que l'on manipule, un vecteur ou sa valeur algébrique.

On a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2}$$

Une norme est un nombre réel positif.

1.I.3.d Opérations sur les vecteurs

1.I.3.d.i Somme

Soit le vecteur $\vec{u}$ obtenu par somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$$

Pour calculer $\vec{u}$:

- graphiquement, il faut mettre les vecteurs bout à bout.
- analytiquement, il suffit d'ajouter les composantes des vecteurs.

• **<u>Vecteurs colinéaires</u>**

Si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires, $\vec{u}$ est de même direction.

Analytiquement, supposons que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont portés par $\vec{x}$:

$$\overrightarrow{u_1} = u_1\vec{x} \quad ; \quad u_1 \in \mathbb{R}$$

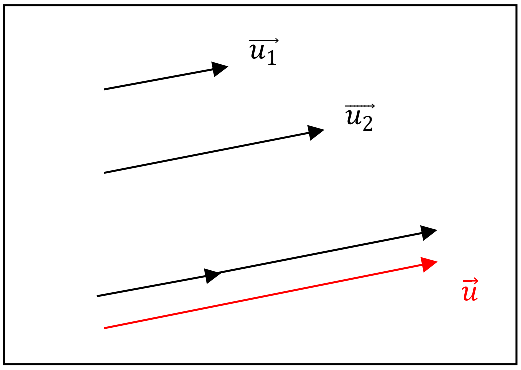
$$\overrightarrow{u_2} = u_2\vec{x} \quad ; \quad u_2 \in \mathbb{R}$$

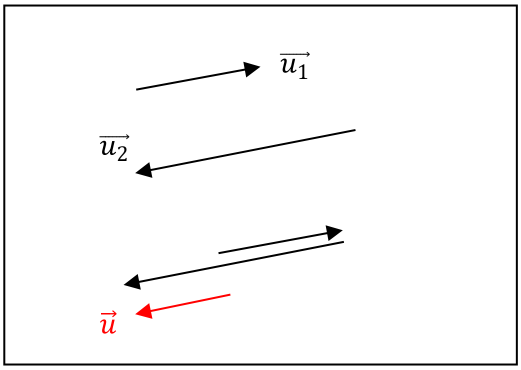
$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = u_1\vec{x} + u_2\vec{x} = (u_1 + u_2)\vec{x}$$

Le sens de $\vec{u}$ résulte du signe de $(u_1 + u_2)$ et du sens de $\vec{x}$.

Remarque : dans ce cas, on a l'égalité : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{u_1}\| + \|\overrightarrow{u_2}\|$

Graphiquement, la détermination de $\vec{u}$ est simple :





• **Vecteurs non colinéaires**

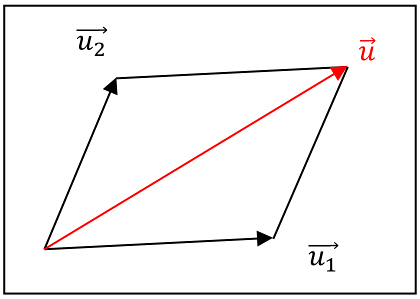
Analytiquement, supposons que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont portés par $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ respectivement :

$$\overrightarrow{u_1} = u_1\overrightarrow{x_1} \quad ; \quad u_1 \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{u_2} = u_2\overrightarrow{x_2} \quad ; \quad u_2 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = u_1\overrightarrow{x_1} + u_2\overrightarrow{x_2}$$

Graphiquement, dans le cas de vecteurs non colinéaires, un parallélogramme permet de construire $\vec{u}$.



Remarque : dans ce cas, on a l'inégalité : $\|\vec{u}\| \leq \|\overrightarrow{u_1}\| + \|\overrightarrow{u_2}\|$

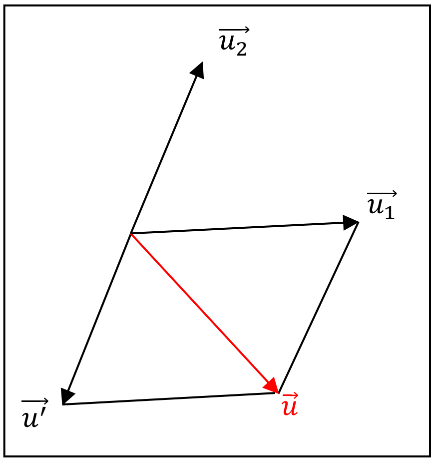
1.I.3.d.ii Soustraction

Soit le vecteur $\vec{u}$ obtenu par soustraction du vecteur $\overrightarrow{u_2}$ au vecteur $\overrightarrow{u_1}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$$

Il faut se ramener à une somme de vecteurs. On introduit un vecteur $\overrightarrow{u'} = -\overrightarrow{u_2}$, de sens opposé à $\overrightarrow{u_2}$ de même direction et de même norme.

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u'}$$

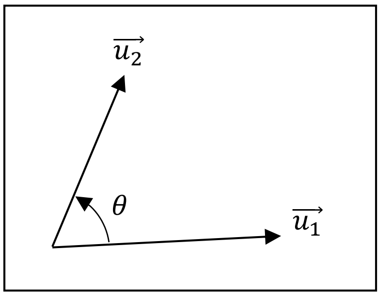


1.I.4 Produit scalaire et projections

1.1.4.a Produit scalaire

1.I.4.a.i Définition

Le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{u_1}$ avec le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ noté $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}$ est égal au produit des normes des 2 vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle θ entre les deux directions, quel que soit le sens pris pour l'angle.



$\theta = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ angle orienté

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\| cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}\right)$$

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = |u_1 u_2| \, cos(\theta)$$

Un produit scalaire est un nombre réel.
Remarque :

$$\text{si } \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Rightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \text{ car } cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{x}.\vec{x} = 1 \quad ; \quad \vec{y}.\vec{y} = 1 \quad ; \quad \vec{z}.\vec{z} = 1$$
$$\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = \vec{y}.\vec{z} = 0$$

1.I.4.a.ii Calcul avec la définition

Soient deux vecteurs portés par des vecteurs unitaires :

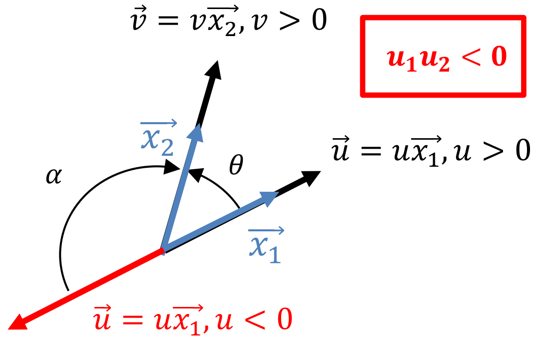
$$\overrightarrow{u_1} = u_1\overrightarrow{x_1} \quad ; \quad \overrightarrow{u_2} = u_2\overrightarrow{x_2} \quad ; \quad \left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}\right) = \theta$$
$$\|\overrightarrow{x_1}\| = \|\overrightarrow{x_2}\| = 1$$

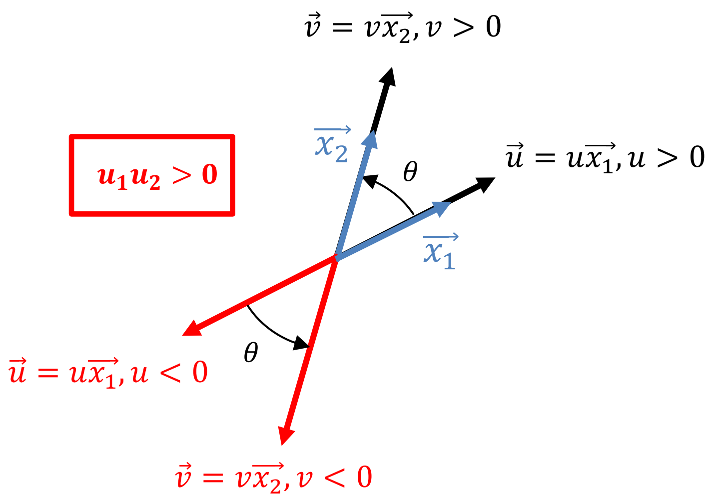
• **Application à ne pas faire**

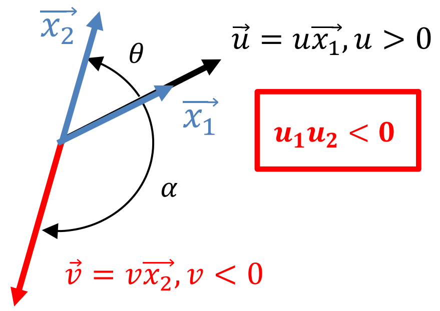
$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\| cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = |u_1 u_2|\, cos\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right)$$

Le problème de cette écriture est que l'angle $\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right)$ dépend des signes de u_1 et u_2 et qu'il ya une valeur absolue dont on se passerait bien.

Etudions les 3 situations suivantes :







$$si\ u_1 u_2 > 0$$
$$|u_1 u_2| = u_1 u_2$$
$$\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = \theta$$
$$cos\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = cos(\theta)$$

$$si\ u_1 u_2 < 0$$
$$|u_1 u_2| = -u_1 u_2$$
$$\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = \alpha = \theta - \pi$$
$$cos\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = cos(\theta - \pi) = -cos(\theta)$$

Ce qui induit dans tous les cas que :

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = |u_1 u_2|\, cos\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1},u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = u_1 u_2 cos\theta$$

• **Application à réaliser**

Pour appliquer cette formule, on passera toujours par le produit scalaire de vecteurs unitaires :

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = u_1\overrightarrow{x_1}.u_2\overrightarrow{x_2} = u_1 u_2 \overrightarrow{x_1}.\overrightarrow{x_2} = u_1 u_2 \|\overrightarrow{x_1}\|\|\overrightarrow{x_2}\| cos\left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}\right) = u_1 u_2\, cos\left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}\right)$$

Ainsi, il n'y a ni valeurs absolues, ni discussion sur l'angle : $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = u_1 u_2\, cos(\theta)$

1.I.4.a.iii Calcul avec composantes

Soit une base $\mathfrak{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Posons :

$$\overrightarrow{u_1} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \overrightarrow{u_2} = x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

- **Notation vectorielle**

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = (x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z}).(x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

- **Notation verticale**

S'ils sont exprimés dans la même base :

$$\boxed{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

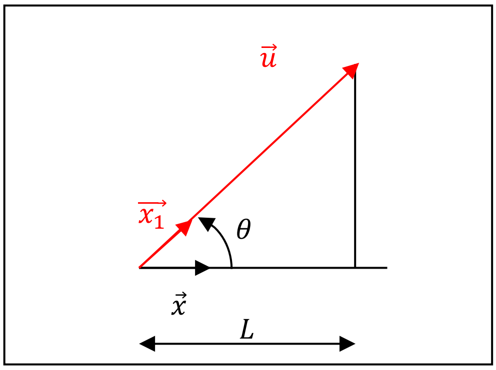
On fait la somme des produits ligne par ligne :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \begin{matrix} \xleftrightarrow{x} \\ \xleftrightarrow{x} \\ \xleftrightarrow{x} \end{matrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

1.1.4.b Projection orthogonale

Si l'un des deux vecteurs est de norme 1, par exemple le vecteur de base $\vec{x}$, alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{x}$ est la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{x}$.

$$\vec{u} = u\overrightarrow{x_1}$$



$$\|\vec{u}.\vec{x}\| = L = \|\vec{u}\|\|\vec{x}\||\cos\theta| = |u\cos\theta|$$

Démonstration :

$$\vec{u}.\vec{x} = u\cos\theta$$

$$\vec{u}.\vec{x} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} u\cos\theta \\ u\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = u\cos\theta$$

$$L = |u\cos\theta|$$

1.1.4.c Changement de base

En mécanique, la projection d'un vecteur dans une base est un élément essentiel qui, s'il n'est pas maîtrisé, ne permet pas d'obtenir de résultats justes. Il faut donc parfaitement maîtriser les projections, en particulier leur signe.

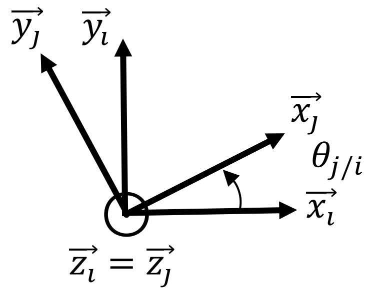
1.1.4.c.i Contexte

Soit $\mathfrak{B}_i$ une base $(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$, $\mathfrak{B}_j$ une base $(\overrightarrow{x_j}, \overrightarrow{y_j}, \overrightarrow{z_j})$ en rotation autour de leur même vecteur $\overrightarrow{z_i} = \overrightarrow{z_j}$ et l'angle $\theta_{j/i}$ orientant la base j par rapport à la base i. $\theta_{j/i}$ est l'angle qui par de $\overrightarrow{x_i}$ et qui va vers $\overrightarrow{x_j}$.

Tout autre cas devra être traité à partir de la bonne compréhension de ce paragraphe.

1.1.4.c.ii Formules de projection

Le sens de l'angle orienté est primordial.



$$\theta = (\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{x_j}) = (\overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{y_j})$$

angle orienté

On a :

$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{x_j} = \cos\theta_{j/i}\,\overrightarrow{x_i} + \sin\theta_{j/i}\,\overrightarrow{y_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{j/i} \\ \sin\theta_{j/i} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_i} \\ \\ \overrightarrow{y_j} = -\sin\theta_{j/i}\,\overrightarrow{x_i} + \cos\theta_{j/i}\,\overrightarrow{y_i} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_{j/i} \\ \cos\theta_{j/i} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_i} \end{array}}$$

Ou encore :

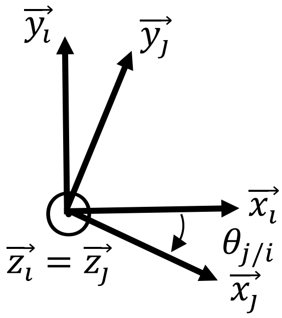
$$\overrightarrow{x_j} = (\overrightarrow{x_j}.\overrightarrow{x_i})\overrightarrow{x_i} + (\overrightarrow{x_j}.\overrightarrow{y_i})\overrightarrow{y_i}$$

$$\overrightarrow{y_j} = (\overrightarrow{y_j}.\overrightarrow{x_i})\overrightarrow{x_i} + (\overrightarrow{y_j}.\overrightarrow{y_i})\overrightarrow{y_i}$$

Avec

$$\overrightarrow{x_j}.\overrightarrow{x_i} = \cos\theta_{j/i} \quad - \quad \overrightarrow{x_j}.\overrightarrow{y_i} = \sin\theta_{j/i} \quad - \quad \overrightarrow{y_j}.\overrightarrow{x_i} = -\sin\theta_{j/i} \quad - \quad \overrightarrow{y_j}.\overrightarrow{y_i} = \cos\theta_{j/i}$$

1.1.4.c.iii Cas d'une orientation négative



$$\overrightarrow{x_j} = \cos\theta_{j/i}\,\overrightarrow{x_i} + \sin\theta_{j/i}\,\overrightarrow{y_i}$$

$$\overrightarrow{y_j} = -\sin\theta_{j/i}\,\overrightarrow{x_i} + \cos\theta_{j/i}\,\overrightarrow{y_i}$$

Il est très important de bien retenir ce résultat. Dans le cas d'une orientation négative, l'angle $\theta_{j/i}$ a une valeur négative qui induit que $sin\theta_{j/i}$ est négatif.

Prenons l'exemple où $\theta_{j/i} = -\frac{\pi}{4}$

$$\overrightarrow{x_j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{x_i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{y_i}$$

$$\overrightarrow{y_j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{x_i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{y_i}$$

1.1.4.c.iv Conclusion

Les fonctions sinus et cosinus contiennent les changements de signes. Le fait de représenter des bases dans une autre position que celle où l'angle orienté est positif inférieur à 90° induit des projections fausses à cause de problèmes de signe.

Pour plus de » détails sur les signes et les erreurs à ne pas faire avec les projections, se référer à la fiche **« Rappels – Projections »**.

Quelques conseils :

- quelle que soit la position d'un mécanisme, toujours représenter une base à projeter positivement par rapport à la base de référence, avec un angle inférieur à 90°, et appliquer les formules ci-dessus par cœur
- on peut toujours lire les coordonnées d'une projection si l'angle est en sens direct et inférieur à 90°
- ne jamais projeter des vecteurs si ce n'est pas explicitement demandé ou nécessaire. Un résultat exprimé en fonction de vecteurs de différentes bases reste juste. Exemple : $\vec{V} = V\overrightarrow{x_3}$

1.I.5 Produit vectoriel

1.I.5.a Données

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs exprimés dans la base $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ ainsi :

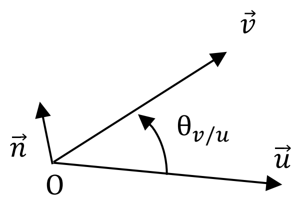
$$\vec{u} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z}$$

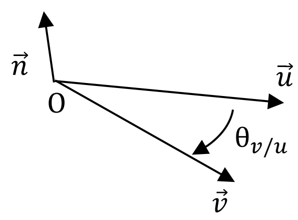
$$\vec{v} = v_x\vec{x} + v_y\vec{y} + v_z\vec{z}$$

Soit le plan $\mathcal{P}$ contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et une droite Δ orthogonale à $\mathcal{P}$. Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire ($\|\vec{n}\| = 1$) de Δ. Soit $\theta_{v/u}$ l'angle orienté allant de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ tel que la direction de $\vec{v}$ est obtenue par rotation de la direction de $\vec{u}$ autour du vecteur $\vec{n}$ de l'angle $\theta_{v/u}$:

$$\theta_{v/u} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})}$$

$\vec{n}$ est tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ forme un trièdre direct si $\theta_{v/u}$ était positif inférieur à 90°.

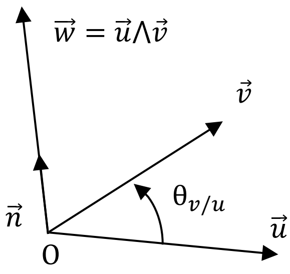




Que l'on soit dans le cas de gauche où $\theta_{v/u} \in [0;\pi]$ ou dans le cas de droite où $\theta_{v/u} \in [0;-\pi]$, il faut construire $\vec{n}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ soit un trièdre direct lorsque $\theta_{v/u} \in [0;\pi]$ (c'est-à-dire ne pas créer $\vec{n}$ à l'aide de la règle de la main droite).

Remarque : Le sens du produit vectoriel selon $\vec{n}$ sera défini en fonction du sinus de l'angle, négatif dans le cas où $\theta_{v/u} \in [0;-\pi]$.

1.I.5.b Définition



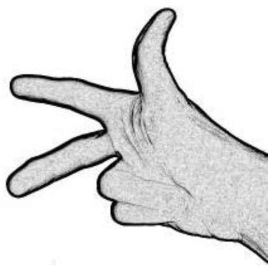
Soit $\vec{w}$ le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\,\vec{n}$$

Un produit vectoriel est un vecteur, dont la direction est orthogonale à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, et dont la norme vaut :

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|$$

Le sens de $\vec{w}$, c'est-à-dire le signe selon $\vec{n}$ du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est simplement obtenu à l'aide des 3 doigts de la main droite :



En formant un trièdre direct avec la main droite, on place le pouce dans le sens du premier vecteur, l'index dans le sens du second, le majeur donne alors le sens du résultat du produit vectoriel du premier vecteur avec le second.

Attention toutefois : Cette règle donne le signe de $\vec{w}$ selon $\vec{n}$, c'est-à-dire le signe de $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. En aucun cas il ne faut ajouter un moins sur la formule :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\,\vec{n}$$

NON

1.I.5.c Propriétés

1.I.5.c.i Vecteurs colinéaires

$$\vec{u}//\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$$

1.I.5.c.ii Signe

$$\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$$

Démonstration :

$$\vec{v}\wedge\vec{u} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$$

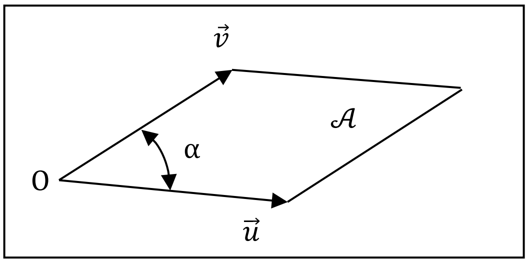
$$\vec{v}\wedge\vec{u} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin\left[(\widehat{\vec{v},\vec{u}})\right] = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin\left[-(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right] = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -\vec{u}\wedge\vec{v}$$

1.I.5.c.iii Multiplication par un réel

$$\forall k \in \mathbb{R}, k\vec{v}\wedge\vec{u} = \vec{v}\wedge k\vec{u}$$

1.I.5.c.iv Norme

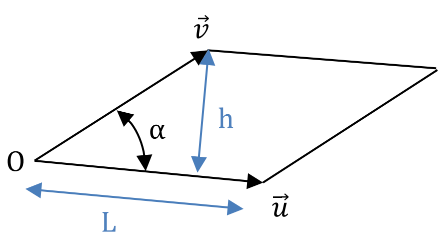
La norme du produit vectoriel correspond à l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$



$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$

Démonstration :

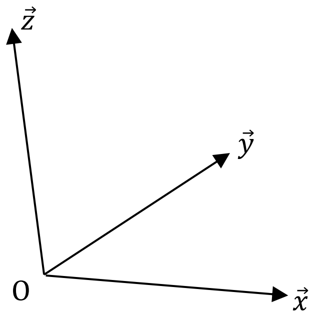
$$\mathcal{A} = \text{Base.Hauteur} = \text{LH} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\||\sin\alpha| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$



$$h = \|\vec{v}\||\sin\alpha|$$

1.I.5.d Produit vectoriel des vecteurs de base

Soit une base orthonormée $\mathfrak{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.



$$\vec{x}\wedge\vec{y} = \vec{z} \;:\; \vec{y}\wedge\vec{z} = \vec{x} \;:\; \vec{z}\wedge\vec{x} = \vec{y} \;:\; \vec{y}\wedge\vec{x} = -\vec{z} \;:\; \vec{z}\wedge\vec{y} = -\vec{x} \;:\; \vec{x}\wedge\vec{z} = -\vec{y}$$

Conseil : Utiliser la règle de la main droite afin de s'assurer du signe.

Une méthode simple pour retenir ces résultats est la suivante :

$$\overset{\quad\quad\quad +}{x \quad y \quad z \quad x \quad y}$$
$$\quad -$$

Alors :

- Lorsque que l'on prend deux lettres successives de gauche à droite, le résultat est la suivante (à droite) associée d'un signe plus
- Lorsque que l'on prend deux lettres successives de droite à gauche, le résultat est la précédente (à gauche) associée d'un signe moins

Autrement dit :

- Si deux vecteurs se suivent dans le repère direct, le produit vectoriel est porté positivement par le 3° vecteur de la base.
- Si deux vecteurs ne se suivent pas dans le repère direct, le produit vectoriel est porté négativement par le 3° vecteur de la base.

Remarque :

Pour 2 des 3 vecteurs d'une base (orthogonaux), le sinus disparaît !

1.I.5.e Calcul de produits vectoriels

1.I.5.e.i Calcul avec la définition

Soient deux vecteurs portés par des vecteurs unitaires :

$$\overrightarrow{u_1} = u_1\overrightarrow{x_1} \quad ; \quad \overrightarrow{u_2} = u_2\overrightarrow{x_2} \quad ; \quad \left(\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}\right) = \theta$$
$$\|\overrightarrow{x_1}\| = \|\overrightarrow{x_2}\| = 1$$

Soit $\overrightarrow{n_{12}}$ le vecteur directement orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. $\overrightarrow{n_{12}}$ est tel que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{n_{12}})$ forme un trièdre direct si θ était positif inférieur à 90°.

- **<u>Application à ne pas faire</u>**

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\| sin(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})\overrightarrow{n_{12}} = \boldsymbol{|u_1u_2|\ sin\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1}, u_2\overrightarrow{x_2}}\right)}\overrightarrow{n_{12}}$$

Comme vu pour le produit scalaire (cf illustrations associées), le problème de cette écriture est que l'angle $\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1}, u_2\overrightarrow{x_2}}\right)$ dépend des signes de u_1 et u_2 et qu'il ya une valeur absolue dont on se passerait bien.

si $u_1u_2 > 0$	si $u_1u_2 < 0$
$\|u_1u_2\| = u_1u_2$	$\|u_1u_2\| = -u_1u_2$
$\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1}, u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = \theta$	$\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1}, u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = \alpha = \theta - \pi$
$sin\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1}, u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = sin(\theta)$	$sin\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1}, u_2\overrightarrow{x_2}}\right) = sin(\theta - \pi) = -sin(\theta)$

Ce qui induit dans tous les cas que :

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = |u_1u_2|\ sin\left(\widehat{u_1\overrightarrow{x_1}, u_2\overrightarrow{x_2}}\right)\overrightarrow{n_{12}} = u_1u_2 sin(\theta)\overrightarrow{n_{12}}$$

- **<u>Application à réaliser</u>**

Pour appliquer cette formule, on passera toujours par le produit vectoriel de vecteurs unitaires :

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = u_1\overrightarrow{x_1} \wedge u_2\overrightarrow{x_2} = u_1u_2(\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2}) = u_1u_2\|\overrightarrow{x_1}\|\|\overrightarrow{x_2}\|\ sin\left(\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}\right)\overrightarrow{n_{12}} = u_1u_2\ \boldsymbol{sin\left(\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}\right)}\overrightarrow{n_{12}}$$

Ainsi, il n'y a ni valeurs absolues, ni discussion sur l'angle :

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = u_1u_2\ sin(\theta)\overrightarrow{n_{12}}$$

1.I.5.e.ii Calcul avec composantes

Soit une base $\mathfrak{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Posons :

$$\overrightarrow{u_1} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \overrightarrow{u_2} = x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

• **Notation vectorielle**

Déterminons dans un premier temps ce produit vectoriel par le calcul vectoriel :

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = (x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z})\Lambda(x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z})$$

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = x_1\vec{x}\Lambda x_2\vec{x} + x_1\vec{x}\Lambda y_2\vec{y} + x_1\vec{x}\Lambda z_2\vec{z} + y_1\vec{y}\Lambda x_2\vec{x} + y_1\vec{y}\Lambda y_2\vec{y} + y_1\vec{y}\Lambda z_2\vec{z} + z_1\vec{z}\Lambda x_2\vec{x} + z_1\vec{z}\Lambda y_2\vec{y} + z_1\vec{z}\Lambda z_2\vec{z}$$

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = x_1\vec{x}\Lambda y_2\vec{y} + x_1\vec{x}\Lambda z_2\vec{z} + y_1\vec{y}\Lambda x_2\vec{x} + y_1\vec{y}\Lambda z_2\vec{z} + z_1\vec{z}\Lambda x_2\vec{x} + z_1\vec{z}\Lambda y_2\vec{y}$$

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = x_1y_2\vec{z} - x_1z_2\vec{y} - y_1x_2\vec{z} + y_1z_2\vec{x} + z_1x_2\vec{y} - z_1y_2\vec{x}$$

$$\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{x} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{y} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{z}$$

On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{u_1}\Lambda\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \Lambda \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}}$$

• **Notation verticale**

Les méthodes présentées ci-dessous ne sont valables que si les vecteurs sont exprimés dans la même base :

• **Méthode 1**

On ne reporte pas la première ligne en 4° ligne. Un moins apparaît sur le second terme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

• **Méthode 2**

On reporte la première ligne en 4° ligne : Pas de moins sur le second terme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

1.I.6 Dérivation temporelle de scalaires et vecteurs dans une base

Jusqu'à présent, vous ne connaissiez la dérivée que d'une fonction scalaire sans parler de base fixe ou mobile.

Exemple :

$$f : x \rightarrow f(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \cdots$$

En mécanique, nous allons dériver des fonctions scalaires et des vecteurs, et ce relativement à des bases associées à des solides qui vont changer d'orientation dans le temps, du fait des mouvements des différents solides d'un mécanisme les uns par rapport aux autres.

1.I.6.a Dérivation temporelle par rapport à une base

Introduisons donc une nouvelle notation, la dérivée temporelle par rapport à une base $\mathfrak{B}$ d'une fonction f, qui pour le moment est quelconque (scalaire, vecteur…)

$$\left.\frac{df}{dt}\right)_{\mathfrak{B}}$$

Cette écriture se lit ainsi : dérivée de la fonction f par rapport au temps dans/par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Lorsque la base est associée à un nombre, par exemple $\mathfrak{B}_i$, on notera :

$$\left.\frac{df}{dt}\right)_{\mathrm{i}}$$

1.I.6.b Dérivation temporelle d'un scalaire dans une base

Lorsque l'on dérive une fonction scalaire (un nombre), la dérivation par rapport à une base n'a pas d'importance :

$$\forall \mathfrak{B}_i \,, \left.\frac{df(t)}{dt}\right)_i = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)$$

L'évolution d'une fonction scalaire est indépendante de la base de dérivation choisie.

1.I.6.c Dérivation temporelle d'un vecteur dans une base

1.I.6.c.i Contexte

Un vecteur $\vec{v}$ est exprimé dans une base $\mathfrak{B}_j$ en fonction de ses 3 vecteurs unitaires $(\vec{x_j},\vec{y_j},\vec{z_j})$:

$$\vec{v} = v_x\vec{x_j} + v_y\vec{y_j} + v_z\vec{z_j}$$

Supposons l'existence d'une autre base $\mathfrak{B}_i(\vec{x_i},\vec{y_i},\vec{z_i})$ telle qu'il existe un mouvement entre ces deux bases. Ce mouvement est soit une translation, soit une rotation autour d'un point qui peut bouger avec le temps.

1.I.6.c.ii Dérivation

Dérivons le vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathfrak{B}_i$:

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\left(v_x\vec{x_j} + v_y\vec{y_j} + v_z\vec{z_j}\right)}{dt}\right)_i$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \left.\frac{dv_x\vec{x_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_y\vec{y_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_z\vec{z_j}}{dt}\right)_i$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = v_x\left.\frac{d\vec{x_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_i\vec{x_j} + v_y\left.\frac{d\vec{y_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_i\vec{y_j} + v_z\left.\frac{d\vec{z_j}}{dt}\right)_i + \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_i\vec{z_j}$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \underbrace{\left[\left.\frac{dv_x}{dt}\right)_i\vec{x_j} + \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_i\vec{y_j} + \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_i\vec{z_j}\right]}_{A} + \underbrace{\left[v_x\left.\frac{d\vec{x_j}}{dt}\right)_i + v_y\left.\frac{d\vec{y_j}}{dt}\right)_i + v_z\left.\frac{d\vec{z_j}}{dt}\right)_i\right]}_{B}$$

• **<u>Variation du vecteur dans sa base</u>**

Travaillons dans un premier temps sur le premier terme A ci-dessus :

$$A = \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_i\vec{x_j} + \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_i\vec{y_j} + \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_i\vec{z_j}$$

$$\forall(i,j) \in \mathbb{N}, \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_i = \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_j \quad car\ v_x\ scalaire$$

$$\forall(i,j) \in \mathbb{N}, \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_i = \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_j \quad car\ v_y\ scalaire$$

$$\forall(i,j) \in \mathbb{N}, \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_i = \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_j \quad car\ v_z\ scalaire$$

Donc :

$$A = \left.\frac{dv_x}{dt}\right)_j \overrightarrow{x_j} + \left.\frac{dv_y}{dt}\right)_j \overrightarrow{y_j} + \left.\frac{dv_z}{dt}\right)_j \overrightarrow{z_j}$$

$$\left.\frac{dv_x}{dt}\right)_j \overrightarrow{x_j} = \left.\frac{dv_x\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_j \quad car\ \overrightarrow{x_j}\ constant\ dans\ \mathfrak{B}_j$$

$$\left.\frac{dv_y}{dt}\right)_j \overrightarrow{y_j} = \left.\frac{dv_y\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_j \quad car\ \overrightarrow{y_j}\ constant\ dans\ \mathfrak{B}_j$$

$$\left.\frac{dv_z}{dt}\right)_j \overrightarrow{z_j} = \left.\frac{dv_z\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_j \quad car\ \overrightarrow{z_j}\ constant\ dans\ \mathfrak{B}_j$$

$$A = \left.\frac{dv_x\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_j + \left.\frac{dv_y\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_j + \left.\frac{dv_z\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_j$$

$$A = \left.\frac{d\left(v_x\overrightarrow{x_j} + v_y\overrightarrow{y_j} + v_z\overrightarrow{z_j}\right)}{dt}\right)_j$$

$$A = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j$$

A correspond à la variation du vecteur $\vec{v}$ dans la base $\mathfrak{B}_j$

• **Evolution des vecteurs de base**

Travaillons dans un second temps sur le second terme B :

$$B = v_x \left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i + v_y \left.\frac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_i + v_z \left.\frac{d\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_i$$

Ce terme fait apparaitre des dérivées de vecteurs de la base $\mathfrak{B}_j$ dans la base $\mathfrak{B}_i$.

En mathématiques, on montre qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$ tel que :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{x_j} \\ \left.\dfrac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_i = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{y_j} \\ \left.\dfrac{d\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_i = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{z_j} \end{cases}$$

$\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$ est appelé vecteur rotation de la base $\mathfrak{B}_j$ par rapport à $\mathfrak{B}_i$. Ce vecteur est

- Nul si les bases $\mathfrak{B}_i$ et $\mathfrak{B}_j$ sont en translation l'une par rapport à l'autre

- Non nul s'il existe un mouvement de rotation entre les bases $\mathfrak{B}_i$ et $\mathfrak{B}_j$. Sa direction est alors confondue avec l'axe de rotation et sa norme est égale à la vitesse de rotation $\Omega_{j/i} = \dot{\theta}_{j/i}$ des deux bases en rd/s. Ce vecteur sera revu plus en détails dans la suite (cinématique du solide).

On a donc :

$$B = v_x \left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i + v_y \left.\frac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_i + v_z \left.\frac{d\overrightarrow{z_j}}{dt}\right)_i$$

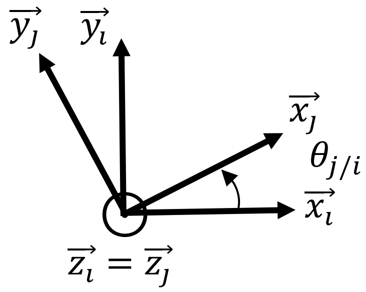
$$B = v_x\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{x_j} + v_y\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{y_j} + v_z\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{z_j}$$

$$B = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda v_x\overrightarrow{x_j} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda v_y\overrightarrow{y_j} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda v_z\overrightarrow{z_j}$$

$$B = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left(v_x\overrightarrow{x_j} + v_y\overrightarrow{y_j} + v_z\overrightarrow{z_j}\right)$$

$$B = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{v}$$

On peut illustrer ce résultat dans le cas particulier suivant :



$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\left(\cos\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} + \sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{y_i}\right)}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\cos\theta_{ji}}{dt}\right)_i \overrightarrow{x_i} + \left.\frac{d\sin\theta_{ji}}{dt}\right)_i \overrightarrow{y_i} = -\dot{\theta}_{ji}\sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} + \dot{\theta}_{ji}\cos\theta_{ji}\,\overrightarrow{y_i}$$

$$= \dot{\theta}_{ji}\left(-\sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} + \cos\theta_{ji}\right) = \dot{\theta}_{ji}\overrightarrow{y_j} = \dot{\theta}_{ji}\overrightarrow{z_j}\Lambda\overrightarrow{x_j} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{x_j}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_j}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\left(-\sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} + \cos\theta_{ji}\,\overrightarrow{y_i}\right)}{dt}\right)_i = -\left.\frac{d\sin\theta_{ji}}{dt}\right)_i \overrightarrow{x_i} + \left.\frac{d\cos\theta_{ji}}{dt}\right)_i \overrightarrow{y_i}$$

$$= -\dot{\theta}_{ji}\sin\theta_{ji}\,\overrightarrow{x_i} - \dot{\theta}_{ji}\cos\theta_{ji}\,\overrightarrow{y_i} = -\dot{\theta}_{ji}\overrightarrow{x_j} = \dot{\theta}_{ji}\overrightarrow{z_j}\Lambda\overrightarrow{y_j} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{y_j}$$

• **Conclusion**

Soient deux bases $\mathfrak{B}_i(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i})$ et $\mathfrak{B}_j(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{y_j},\overrightarrow{z_j})$ et un vecteur $\vec{v}$

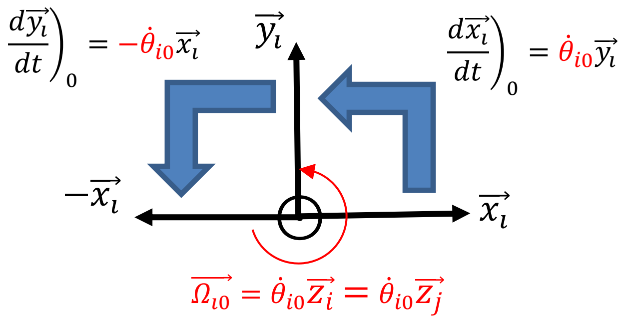
$$\boxed{\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \vec{v}}$$

Formule de Bour

Avec $\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$ vecteur rotation de la base $\mathfrak{B}_j$ par rapport à $\mathfrak{B}_i$

Si $\vec{v}$ est constant dans la base j, alors $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j = \vec{0}$ et $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \vec{v}$

Il existe un moyen simple de prévoir la dérivée d'un vecteur x ou y lorsque la rotation est suivant z :



Remarques :

- En général, on cherche à changer de base de dérivation afin d'obtenir $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j = \vec{0}$, par exemple dans le cas des vecteurs de base :
$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\overrightarrow{x_j}}{dt}\right)_j + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{x_j} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{x_j}$$
- Ne pas garder de produit vectoriel lors de l'utilisation de cette formule. Il faut le calculer
- Ne pas appliquer de formule de changement de base de dérivation à un vecteur écrit avec des lettres type $\overrightarrow{AB}$ car on ne sait quelle base choisir ! $\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_? + \cdots$. Exprimer $\overrightarrow{AB} = L\overrightarrow{x_k}$ en exploitant les données géométriques puis appliquer le changement de base

1.II. Cinématique du point

Avant d'aborder les mouvements de solides indéformables et les relations entre la vitesse de leurs points, nous allons voir comment calculer position, vitesse et accélération d'un point dans l'espace. Nous nous limiterons à l'application de la cinématique du point dans un repère cartésien.

1.II.1 Position

1.II.1.a Définition usuelle

Soit une pièce 0 contenant le point fixe O. Soit le repère $R_0(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ associé à la pièce 0.

Soit $M(t)$ un point mobile de l'espace de coordonnées $\left(X_M(t),Y_M(t),Z_M(t)\right)$ dans le repère R_0. On notera (X_M,Y_M,Z_M) les coordonnées de M par commodité.

Le vecteur position définissant la position du point M dans le repère R_0 est noté $\overrightarrow{OM}$ et est défini tel que :

$$\overrightarrow{OM} = X_M\overrightarrow{x_0} + Y_M\overrightarrow{y_0} + Z_M\overrightarrow{z_0}$$

1.II.1.b Définitions courantes

Ajoutons aux éléments du paragraphe précédent un point A fixe dans 0 et le repère $R_0{}'(A,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$

On peut parfaitement définir la position de M dans ce second repère $R_0{}'$:

$$\overrightarrow{AM} = X_M{}'\overrightarrow{x_0} + Y_M{}'\overrightarrow{y_0} + Z_M{}'\overrightarrow{z_0}$$

On pourra donc définir le vecteur position en fonction d'un quelconque point fixe de la pièce par rapport à laquelle on positionne le point M.

1.II.2 Vitesse

1.II.2.a Définition

La vitesse instantanée du point M dans la base $\mathfrak{B}_0$ notée $\vec{V}(M/0)$ est la dérivée par rapport au temps et par rapport à la base $\mathfrak{B}_0$ de tout vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_0}$$

$$\vec{V}(M/0) = \frac{dX_M}{dt}\overrightarrow{x_0} + \frac{dY_M}{dt}\overrightarrow{y_0} + \frac{dZ_M}{dt}\overrightarrow{z_0}$$

$$\vec{V}(M/0) = \dot{X}_M\overrightarrow{x_0} + \dot{Y}_M\overrightarrow{y_0} + \dot{Z}_M\overrightarrow{z_0}$$

1.II.2.b Calcul courant

Quel que soit le point du repère choisit afin d'exprimer le vecteur position, on obtient la vitesse d'un point M par rapport à la base $\mathfrak{B}_0$ en dérivant un vecteur $\overrightarrow{PM}$ avec P fixe dans R_0 :

$$\boxed{\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0 \quad P\ fixe\ dans\ R_0}$$

Démonstration :

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_0$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}\right)}{dt}\right)_0$$

Par linéarité de la dérivée, on a :

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$$

Les points O et P étant fixes dans R_0, $\overrightarrow{OP}$ l'est aussi, d'où :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_0 = 0$$

On en déduit le résultat :

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$$

Conclusion : on peut dériver tout vecteur position partant d'un point P fixe de la pièce 0 :

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$$

1.II.2.c Démarche de calcul et exemple

1.II.2.c.i Méthode

Le calcul d'une vitesse par dérivation du vecteur position doit être effectué dans le bon ordre :

- Décomposer le vecteur position avec la relation de Chasles afin de passer par toutes les liaisons du mécanisme présentes entre les deux points du vecteur dérivé. Il peut parfois y avoir plusieurs relations de Chasles possibles.
- Exprimer chaque « petit vecteur » en fonction des paramètres géométriques et des vecteurs des bases liées à chaque pièce, et surtout, ne pas les projeter (sauf si demandé)
- Appliquer la formule de changement de base de dérivation
- Calculer les produits vectoriels
- Factoriser les termes en fonction des vecteurs de base selon lesquels ils sont exprimés

1.II.2.c.ii Erreur à ne pas faire

Une **erreur souvent commise** consiste à écrire d'abord la formule de changement de base et à oublier que le terme de dérivation dans la nouvelle base n'est pas nul :

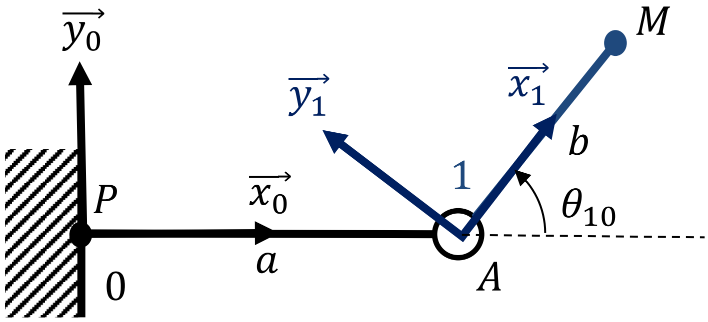
$$\cancel{\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_j + \overrightarrow{\Omega_{j/0}} \wedge \overrightarrow{PM}}$$

Généralement :

- Le vecteur $\overrightarrow{PM}$ s'exprime en fonction des vecteurs de différentes bases
- Le terme $\left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_j$ n'est pas nul et nécessitera une décomposition par Chasles (qui aurait du être faite avant) et à nouveau un changement de base induisant un travail inverse à la première transformation

Exemple :

Soit une pièce 1 en rotation par rapport à la pièce 0 au point A :



Soit P fixe dans 0, on exprime le vecteur position de M dans le repère 0 :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1}$$

On définit le vecteur rotation de la pièce 1 par rapport à la pièce 0 ainsi :

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1}$$

a et b étant constants

On peut alors calculer la vitesse de M par rapport à la pièce 0 :

$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$	
Bonne démarche	Mauvaise démarche
$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d(a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1})}{dt}\right)_0$ $\vec{V}(M/0) = \left.\frac{da\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{db\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0$ $\vec{V}(M/0) = b\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 = b\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{x_1}$ $\vec{V}(M/0) = b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$	$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{PM}$ Ici le terme $\left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_1$ ne présente aucune utilité $\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d(a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1})}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge(a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1})$ $\vec{V}(M/0) = \left.\frac{da\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_1 + \left.\frac{db\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge a\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge b\overrightarrow{x_1}$ On doit rechanger de base le terme $\left.\frac{da\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_1$ $\vec{V}(M/0) = \left.\frac{da\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_0 + \overrightarrow{\Omega_{0/1}}\wedge a\overrightarrow{x_0} + a\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_0} + b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$ $\vec{V}(M/0) = a\dot{\theta}_{0/1}\overrightarrow{y_0} + a\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_0} + b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$ $\vec{V}(M/0) = b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$ On comprend ainsi l'intérêt de ce paragraphe…

Donc :

$$\vec{V}(M/0) = b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

Ne pas projeter ce résultat si ce n'est pas demandé.

1.II.3 Trajectoire

La trajectoire du point M dans R_0 est l'ensemble de ses positions au cours de son mouvement. La vitesse d'un point est toujours tangente à sa trajectoire.

1.II.4 Accélération

1.II.4.a Définition

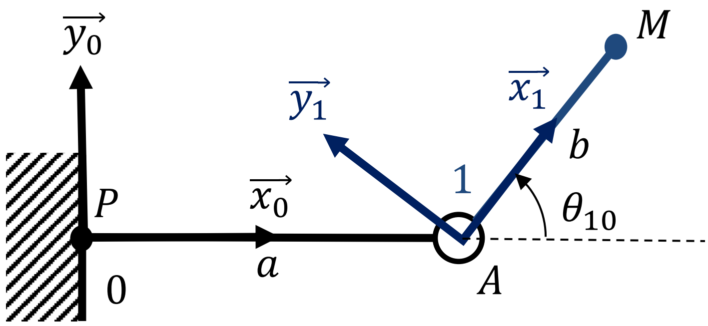
L'accélération du point M dans la base $\mathfrak{B}_0$ notée $\vec{\Gamma}(M/0)$ est la dérivée par rapport au temps et par rapport à la base $\mathfrak{B}_0$ de son vecteur vitesse $\vec{V}(M/0)$:

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0}$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = \ddot{X}_M\overrightarrow{x_0} + \ddot{Y}_M\overrightarrow{y_0} + \ddot{Z}_M\overrightarrow{z_0}$$

1.II.4.b Exemple

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent :



On a montré que :

$$\vec{V}(M/0) = b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

On a donc :

$$\vec{\Gamma}(M/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0 = \left.\frac{db\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0 = b\left[\left.\frac{d\dot{\theta}_{1/0}}{dt}\right)_0\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_{1/0}\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0\right]$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = b\left[\ddot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_{1/0}\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0\right]$$

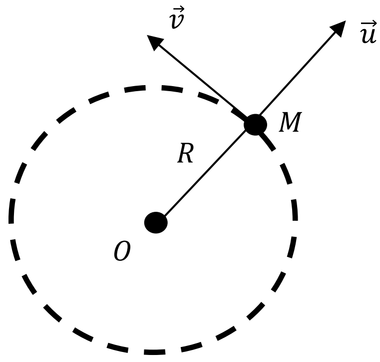
$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{y_1} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1}\wedge\overrightarrow{y_1} = -\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = b\left[\ddot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}_{1/0}{}^2\overrightarrow{x_1}\right]$$

1.II.4.c Remarque

La relation en norme n'est pas vraie en général : $\left\|\vec{\Gamma}(M/0)\right\| \neq \frac{d\left\|\vec{V}(M/0)\right\|}{dt}$

Exemple : mouvement de rotation à vitesse constante $\omega = scte > 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0$



$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}$$

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_0 = R\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0 = R\omega\vec{v}$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0 = R\dot{\omega}\vec{v} - R\omega^2\vec{u} = -R\omega^2\vec{u}$$

$$\left\|\vec{V}(M/0)\right\| = R\omega \quad ; \quad \frac{d\left\|\vec{V}(M/0)\right\|}{dt} = R\dot{\omega} = 0$$

$$\left\|\vec{\Gamma}(M/0)\right\| = R\omega^2$$

Elle n'est vraie que lorsque la vitesse est exprimée selon un vecteur constant de la base 0 :

$$\vec{V}(M/0) = f(t)\vec{u} \quad ; \quad \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma}(M/0) = f'(t)\vec{u}$$

Prenons $\|\vec{u}\| = 1$ pour simplifier.

$$\left\|\vec{V}(M/0)\right\| = f(t) \quad ; \quad \left\|\vec{\Gamma}(M/0)\right\| = f'(t)\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{\Gamma}(M/0)\right\| = \frac{d\left\|\vec{V}(M/0)\right\|}{dt}$$

1.III. Cinématique du solide

Les mécanismes sont composés de plusieurs pièces, en mouvement les unes par rapport aux autres. Nous allons donc nous intéresser aux mouvements de solides les uns par rapport aux autres.

A chaque solide S_i est associée une base orthonormée directe $\mathfrak{B}_i(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{y_i}, \overrightarrow{z_i})$

1.III.1 Préliminaires

1.III.1.a Solide indéformable – Définition

Un solide rigide ou indéformable est un solide dont tous les points restent à la même distance les uns des autres pendant au cours du temps.

Soit S un solide indéformable. P_i et P_j sont deux points de S

$$\forall (P_i, P_j) \in S, \forall t, \left\|\overrightarrow{P_i P_j}\right\| = cste$$

1.III.1.b Notations

Soient deux solides S_i et $\mathrm{S_j}$ en mouvement l'un par rapport à l'autre et un point A quelconque.

La vitesse du point A appartenant à S_j par rapport à S_i est notée

$$\vec{V}(A \in \mathrm{S_j}/\mathrm{S_i}) \quad ou \quad \vec{V}(A, \mathrm{S_j}/S_i) \quad ou \quad \vec{V}(A, j/i)$$

Bien qu'un point appartienne matériellement à un solide, on peut calculer sa vitesse en considérant virtuellement qu'il appartient à un autre solide.

Par ailleurs, on a :

$$\vec{V}(A, i/j) = -\vec{V}(A, j/i)$$

1.III.2 Mouvements entre solides

Lorsque deux solides sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, à tout instant, ce mouvement est :

- Soit une translation
- Soit une rotation autour d'un point fixe de chaque solide
- Soit une rotation autour d'un point mobile dans chaque solide appelé « Centre Instantané de Rotation » (CIR).

1.III.2.a Mouvement de translation

Soient deux solides S_i et S_j en translation l'un par rapport à l'autre. La particularité du mouvement de translations est de ne pas présenter de rotation, ce qui implique que l'expression des vecteurs de base de chacune des bases des solides S_i et S_j dans l'autre base reste la même au cours du temps.

Dans le cas de la translation, on a :

$$\boxed{\forall (A,B) \in S_j, \vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i)}$$

Démonstration :

Soit O un point fixe dans i. Soient A et B deux points quelconques associés à la pièce j (fixés dans j).

$$\vec{V}(B,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_i + \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_i$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_i = \vec{0} \; car \; \overrightarrow{AB} \; vecteur \; constant \; dans \; \mathfrak{B}_i \; et \; \mathfrak{B}_j$$

$$\vec{V}(B,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_i = \vec{V}(A,j/i)$$

Remarque : Ne pas garder de produit vectoriel lors de l'utilisation de cette formule. Il faut le calculer

1.III.2.b Mouvement de rotation

Soient deux solides S_i et S_j en rotation l'un par rapport à l'autre. Soit Δ l'axe de rotation entre les deux solides passant par le point O et comportant le vecteur unitaire $\vec{n}$.

On définit le vecteur rotation du solide j par rapport au solide i noté $\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$. Ce vecteur est parralèle à l'axe de rotation Δ, et sa norme est égale à la vitesse de rotation $\Omega_{j/i} = \dot{\theta}_{j/i}$ du solide j par rapport au solide i en rd/s.

$$\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \Omega_{j/i}\vec{n} = \dot{\theta}_{j/i}\vec{n}$$

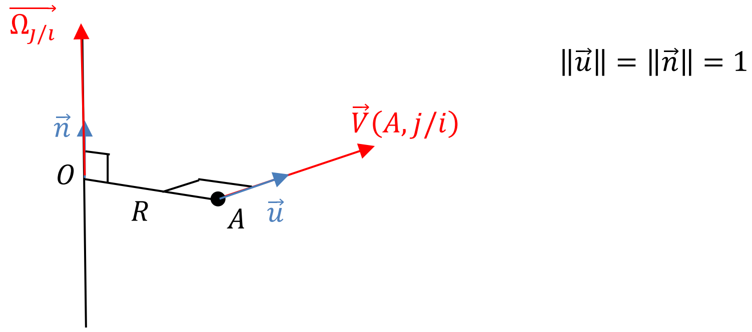
$\Omega_{j/i}$ est positif si la rotation est en sens direct autour du vecteur $\vec{n}$.

On a :

$$\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = -\overrightarrow{\Omega_{i/j}}$$

Soit un point A quelconque. La vitesse $\vec{V}(A, j/i)$ est

- proportionnelle à sa distance R à l'axe de rotation
- proportionnelle à la vitesse de rotation
- perpendiculaire à la droite (OA) orthogonale à l'axe de rotation passant par A.



On peut exprimer cette vitesse ainsi :

$$\vec{V}(A, j/i) = R\Omega_{j/i}\vec{u}$$

Le vecteur $\vec{u}$ peut être obtenu à l'aide d'un produit vectoriel :

$$\vec{u} = \frac{\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA}}{R}$$

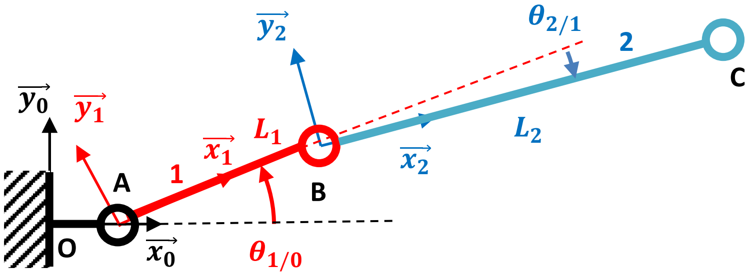
On peut alors exprimer la vitesse de A ainsi :

$$\vec{V}(A, j/i) = R\Omega_{j/i}\vec{u} = \Omega_{j/i}\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Soit un point O appartenant à l'axe de rotation. On a finalement:

$$\boxed{\forall P, \vec{V}(P, j/i) = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \overrightarrow{OP}}$$

Attention : cette formule n'est vraie que si toutes les rotations entre i et j ont des axes concourants en O. Exemple d'erreur à ne pas faire :



Il est faux d'écrire : $\vec{V}(C, 2/0) = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{AC}$

1.III.3 Champs des vitesses et accélérations d'un solide

1.III.3.a Champs des vitesses

1.III.3.a.i Formule de Varignon

Dans le cas des solides indéformables et quel que soit le mouvement considéré, il existe une relation entre la vitesse de chaque point de ce solide d'un mouvement donné. Cette relation est appelée relation de Varignon :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB} \\ \vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{BA} \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}\end{gathered}}$$

Attention : n'utiliser cette formule que lorsque le mouvement entre i et j est un mouvement élémentaire (une liaison), sinon composer d'abord le mouvement (cf composition du mouvement)

Moyens mnémotechniques pour retenir ces formules :

- Formule 1 : Symétrie de Ω et de l'écriture : $AB\Omega BA$
- Formule 2 : $BABA\Omega$ ($BABAR$ en statique)

Démonstration :

Soit O un point fixe dans i. Soient A et B deux points quelconques associés à la pièce j (fixés dans j).

$$\vec{V}(B,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_i + \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_i = \vec{V}(A,j/i) + \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_j + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_j = \vec{0} \; car \; A \; et \; B \; fixes \; dans \; j$$

$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}$$

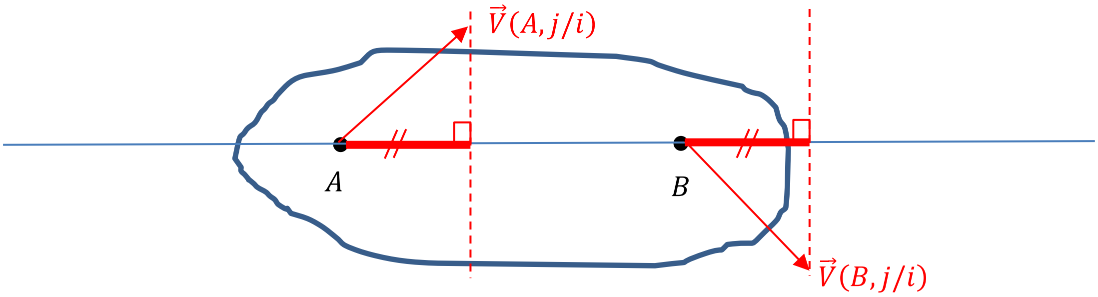
Remarques :

- On retrouve bien la relation de vitesse du mouvement de translation, cas particulier du mouvement de rotation où la rotation est nulle : $\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \vec{0}$
$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB} = \vec{V}(A,j/i)$$
- On retrouve bien la relation de vitesse du mouvement de rotation avec A sur l'axe:
$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}$$
- D'une manière générale, cette relation est utilisée lorsque la vitesse en A est connue (nulle ou non), afin d'obtenir l'expression de la vitesse en tout autre point.

1.III.3.a.ii Equiprojectivité

Le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif. Il respecte la condition suivante :

$$\forall (A,B) \in S_j, \vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB}$$



Démonstration :

$$\vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB} = \left(\vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB}$$

1.III.3.b Champs des accélérations

De même que précédemment, il existe une relation entre les accélérations de deux points d'un solide indéformable. Toutefois, elle ne doit pas être connue et est donnée ci-dessous à titre d'information.

$$\vec{\Gamma}(B,j/i) = \vec{\Gamma}(A,j/i) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i \Lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}\right)$$

Démonstration :

$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{BA} \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

$$\left.\frac{d\vec{V}(B,j/i)}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\vec{V}(A,j/i)}{dt}\right)_i + \left.\frac{d\overrightarrow{BA} \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i$$

$$\vec{\Gamma}(B,j/i) = \vec{\Gamma}(A,j/i) + \overrightarrow{BA} \Lambda \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i + \left.\frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}\right)_i \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

$$\vec{\Gamma}(B,j/i) = \vec{\Gamma}(A,j/i) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i \Lambda \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{BA}\right) \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

$$\vec{\Gamma}(B,j/i) = \vec{\Gamma}(A,j/i) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i \Lambda \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}\right)$$

1.III.4 Composition du mouvement

Soient n solides S_i en mouvements quelconques les uns par rapport aux autres et un point M quelconque.

1.III.4.a Principe

Lorsque l'on parle de composition du mouvement, on prend souvent l'exemple d'un tapis roulant et d'un homme se déplaçant dessus. Les vitesses de translation se somment.

Prenons un second exemple :

Supposons qu'un horloger soit en train de monter une horloge très lourde au bout d'une corde. L'horloge effectue dont un mouvement de translation verticalement.

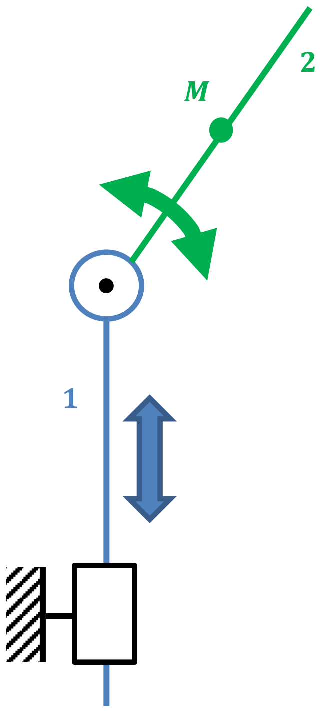
L'horloge étant en fonctionnement, les aiguilles sont en mouvement de rotation.

Une mouche a eu l'idée de se poser sur l'aiguille et se déplace en translation sur celle-ci.

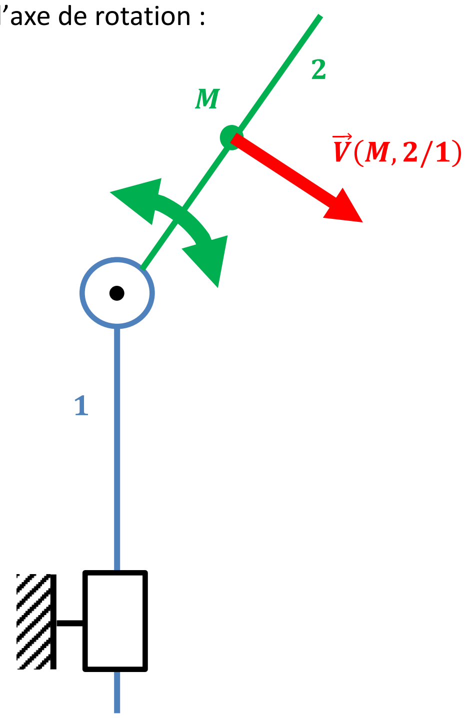
Proposons le modèle suivant où :

- 1 est le boitier de l'horloge
- 2 est l'aiguille en rotation par rapport à 1
- M est la mouche

Dans ce paragraphe, nous supposerons que la mouche s'est collée à l'aiguille et ne peut pas se déplacer dessus. On suppose donc que le point M appartient à la pièce 2.

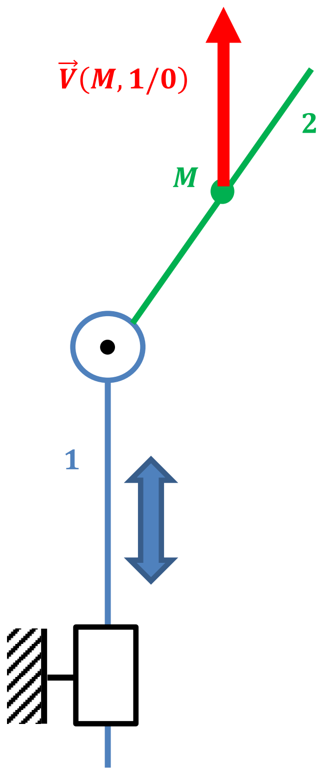


Supposons dans un premier temps que l'horloger s'arrête de tirer la corde. Vu du sol, le point M aura un mouvement de rotation autour de l'axe de rotation :



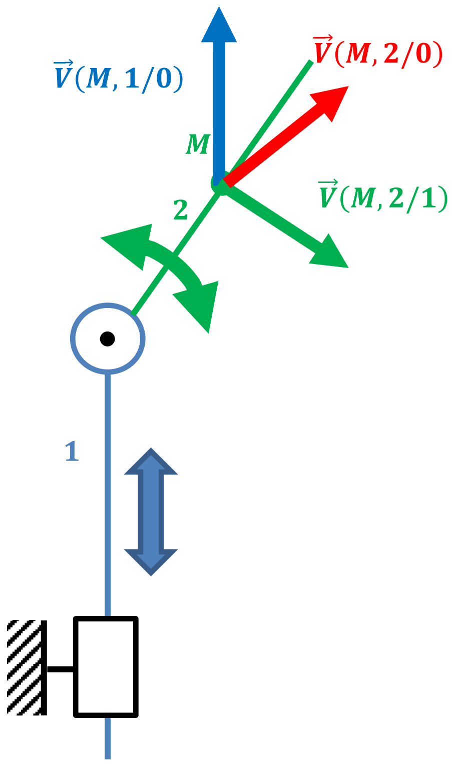
Avec $\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1)$ et $\vec{V}(M,1/0) = \vec{0}$

Considérons maintenant que l'horloger monte l'horloge alors que la pile est vide et que l'horloge ne fonctionne plus. Vu du sol, le point M aura un mouvement de translation verticale :



Avec $\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1)$ et $\vec{V}(M,1/0) = \vec{0}$

Supposons maintenant que ces deux mouvements ont lieu en même temps, on va alors sommer les deux vitesses précédentes :

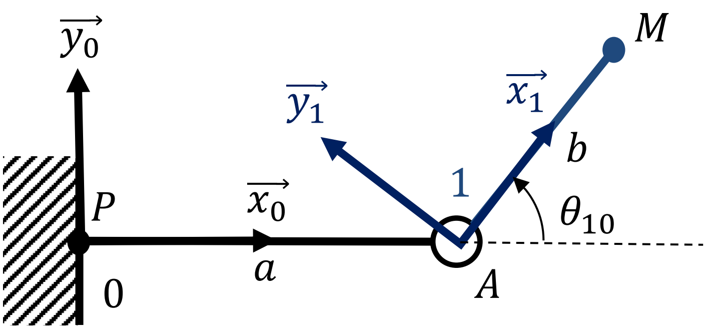


On a donc bien, dans tous les cas :

$$\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$$

C'est ce que l'on appelle la composition du mouvement.

On remarquera que l'on peut parfaitement parler de la vitesse $\vec{V}(M,1/0)$ malgré le fait que le point M n'appartienne pas physiquement à la pièce 1. Exemple !



$$\overrightarrow{V(P,1/0)} \neq \vec{0}$$

1.III.4.b Composition des rotations

$$\forall (i,j,k) \leq n$$

$$\overrightarrow{\Omega_{k/i}} = \overrightarrow{\Omega_{k/j}} + \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

1.III.4.c Composition des vitesses

1.III.4.c.i Principe

$$\forall (i,j,k) \leq n$$

$$\vec{V}(M,k/i) = \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i)$$

L'intérêt de cette formule est d'exprimer la vitesse d'un point entre deux solides en passant par chacune des liaisons des pièces intermédiaires qui permettent d'aller du solide auquel le point M appartient jusqu'au solide par rapport auquel est calculée la vitesse. Ainsi, connaissant les mouvements élémentaires associés à chaque liaison intermédiaire, on peut exprimer chaque vitesse intermédiaire simplement et en déduire la vitesse recherchée.

1.III.4.c.ii Différence entre $\vec{V}(M/i)$ et $\vec{V}(M,k/i)$

Il arrive que l'on cherche une vitesse $\vec{V}(M/i)$.

Dans ce cas, on a :

$$\vec{V}(M/i) = \vec{V}(M/k) + \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i)$$

En SII, nous allons très généralement nous intéresser à des vitesses de points matériels appartenant à des solides. Ainsi, nous aurons toujours la possibilité de trouver une pièce k dans laquelle le point en question a une vitesse nulle :

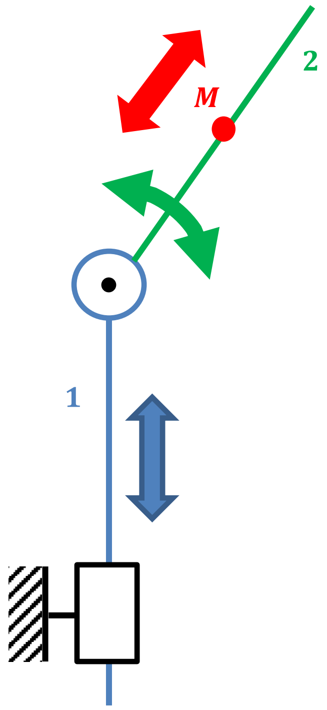
$$\vec{V}(M/k) = \vec{0}$$

Ce qui nous conduira a écrire :

$$\vec{V}(M/i) = \vec{V}(M/k) + \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i) = \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i)$$

Donnons toutefois un petit exemple afin de bien comprendre ces notations :

Reprenons le cas de l'horloge et de la mouche et supposons maintenant que la mouche puisse se déplacer à convenance sur l'aiguille.



A un instant quelconque, la mouche est animée de 3 mouvements :

- Les deux mouvements issus du déplacement de l'horloge et de l'aiguille, c'est-à-dire qu'elle a la vitesse du point M « en dessous » d'elle, appartenant à l'aiguille $\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$
- Le mouvement propre de la mouche en translation selon l'aiguille $\vec{V}(M/2)$

Dans ce cas, comme la mouche est un « objet libre », on écrira sa vitesse par rapport au sol $\vec{V}(M/0)$ tel que :

$$\vec{V}(M/0) = \vec{V}(M/2) + \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$$

1.III.4.d Remarques

1.III.4.d.i Utilité de la composition du mouvement

Pour le calcul de $\vec{V}(M,k/i)$, dès lors qu'il n'existe pas une liaison unique (pivot, glissière…) entre les solides i et k, il n'est plus possible d'utiliser la formule de Varignon immédiatement car on fait alors apparaître une nouvelle vitesse $\vec{V}(N,k/i)$ en un autre point dont on ne peut rien dire, quel que soit le point choisi. Il devient alors nécessaire de composer les mouvements, afin de passer par tous les mouvements élémentaires entre k et i, c'est-à-dire concrètement par toutes les liaisons. On utilise alors un outil très pratique, le graphe des liaisons.

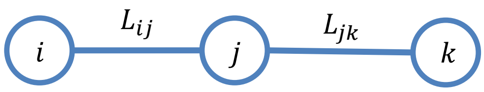
1.III.4.d.ii Graphe des liaisons et utilité

• **<u>Principe</u>**

Pour bien composer les mouvements, on établit un **graphe des liaisons**.

Le principe est de représenter

- les pièces par des cercles et des numéros les pièces
- les liaisons intermédiaires entre chaque pièce par des traits entre les cercles et la description de la liaison associée (Pivot, Glissière…)



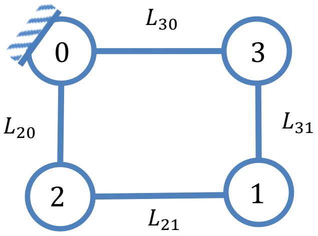
Il suffit alors de composer les vitesses en suivant les différentes liaisons sur le graphe des liaisons.

$$\vec{V}(M,k/i) = \vec{V}(M,k/j) + \vec{V}(M,j/i)$$

Les liaisons intermédiaires étant connues, nous saurons bientôt y associer les vitesses correspondantes.

• **Composition dans une chaîne fermée**

Soit un mécanisme dont le graphe des liaisons est en boucle (chaîne fermée) :



Dans le cas de chaînes fermées, l'expression d'une vitesse peut être réalisée par les différents chemins qui mènent de la pièce où la vitesse est recherchée vers la pièce de référence.

Exemple :

$$\vec{V}(M,1/0) = \vec{V}(M,1/3) + \vec{V}(M,3/0) = \vec{V}(M,1/2) + \vec{V}(M,2/0)$$

$$\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/3) + \vec{V}(M,3/0)$$

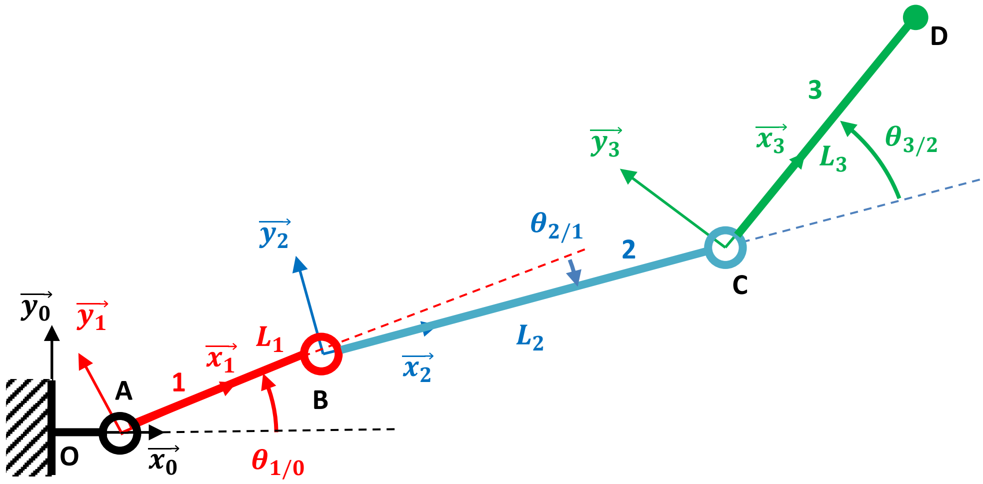
Attention à ne passer que par des liaisons existantes

Remarque : les formules trouvées feront apparaître des inconnues cinématiques différentes, et des variables géométriques différentes. Toutefois, après résolution géométrique et cinématique, même si les formules n'ont pas du tout la même forme, les valeurs numériques seront forcément les mêmes.

1.III.4.e Méthodes de calcul de vitesses dans les mécanismes

1.III.4.e.i Exemple 1

Soit le mécanisme suivant :



Calculons la vitesse : $\vec{V}(D,3/0)$

• **Bonne méthode 1 – Chasles puis changement de base de dérivation**

$$\vec{V}(D,3/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d(L_1\vec{x_1} + L_2\vec{x_2} + L_3\vec{x_3})}{dt}\right)_0 = L_1\left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_0 + L_2\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right)_0 + L_3\left.\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right)_0$$

$$\left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\vec{x_1} = \dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}$$

$$\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right)_2 + \overrightarrow{\Omega_{2/0}}\wedge\vec{x_2} = (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_2}$$

$$\left.\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right)_3 + \overrightarrow{\Omega_{3/0}}\wedge\vec{x_2} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_3}$$

$$\vec{V}(D,3/0) = L_3(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_3} + L_2(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\vec{y_2} + L_1\dot{\theta}_{1/0}\vec{y_1}$$

• **Bonne méthode 2 - Composition du mouvement puis Varignon**

$$\vec{V}(D,3/0) = \vec{V}(D,3/2) + \vec{V}(D,2/1) + \vec{V}(D,1/0)$$

$$\vec{V}(D,3/2) = \vec{V}(C,3/2) + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{CD}$$

$$\vec{V}(D,3/2) = \vec{0} + \dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{z_3} \wedge L_3\overrightarrow{x_3} = L_3\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_3}$$

$$\vec{V}(D,2/1) = \vec{V}(B,2/1) + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{BD}$$

$$\vec{V}(D,2/1) = \vec{0} + \dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_3} \wedge L_3\overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_2} \wedge L_2\overrightarrow{x_2}$$

$$\vec{V}(D,2/1) = L_3\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_3} + L_2\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_2}$$

$$\vec{V}(D,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AD}$$

$$\vec{V}(D,1/0) = \vec{0} + \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_3} \wedge L_3\overrightarrow{x_3} + \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_2} \wedge L_2\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1} \wedge L_1\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{V}(D,1/0) = L_3\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_3} + L_2\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_2} + L_1\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

Soit finalement :

$$\vec{V}(D,3/0) = L_3\left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{y_3} + L_2\left(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{y_2} + L_1\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

• **<u>Mauvaise méthode 1 – Changement de base de dérivation puis Chasles</u>**

$$\vec{V}(D,3/0)=\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_0=\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_3+\overrightarrow{\Omega_{3/0}}\wedge\overrightarrow{AD}$$

L'erreur à ne pas faire consiste alors à écrire : $\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_3=\vec{0}$

On va donc devoir calculer ce terme en utilisant la relation de Chasles, ce qu'il aurait fallu faire dès le départ !

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}}\wedge\overrightarrow{AD}=\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{z_0}\wedge\left(L_1\overrightarrow{x_1}+L_2\overrightarrow{x_2}+L_3\overrightarrow{x_3}\right)$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}}\wedge\overrightarrow{AD}=\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)L_1\overrightarrow{y_1}+\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)L_2\overrightarrow{y_2}+\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)L_3\overrightarrow{y_3}$$

Travaillons maintenant sur le terme $\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_3$:

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_3=\left.\frac{d\left(L_1\overrightarrow{x_1}+L_2\overrightarrow{x_2}+L_3\overrightarrow{x_3}\right)}{dt}\right)_3=L_1\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0+L_2\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_0+L_3\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_0$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_3=\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_1+\overrightarrow{\Omega_{1/3}}\wedge\overrightarrow{x_1}=\left(\dot{\theta}_{1/2}+\dot{\theta}_{2/3}\right)\overrightarrow{y_1}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_3=\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_2+\overrightarrow{\Omega_{2/3}}\wedge\overrightarrow{x_2}=\dot{\theta}_{2/3}\overrightarrow{y_2}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_3=\vec{0}$$

Soit au final :

$$\begin{aligned}\vec{V}(D,3/0)=&\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)L_1\overrightarrow{y_1}+\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)L_2\overrightarrow{y_2}+\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)L_3\overrightarrow{y_3}\\&+\left(\dot{\theta}_{1/2}+\dot{\theta}_{2/3}\right)L_1\overrightarrow{y_1}+\dot{\theta}_{2/3}L_2\overrightarrow{y_2}\end{aligned}$$

On retrouve alors bien :

$$\vec{V}(D,3/0)=L_3\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{y_3}+L_2\left(\dot{\theta}_{2/1}+\dot{\theta}_{1/0}\right)\overrightarrow{y_2}+L_1\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

• **Mauvaise méthode 2 – Varignon puis Composition du mouvement**

$$\vec{V}(D,3/0) = \vec{V}(A,3/0) + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})\overrightarrow{z_0} \wedge (L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{x_3})$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})(L_1\overrightarrow{y_1} + L_2\overrightarrow{y_2} + L_3\overrightarrow{y_3})$$

$$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{AD} = (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_1\overrightarrow{y_1} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_2\overrightarrow{y_2} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_3\overrightarrow{y_3}$$

Attention : $\vec{V}(A,3/0) \neq \vec{0}$

Il faut donc travailler sur ce terme, et forcément composer le mouvement (trop tard), car aucune formule de Varignon ne va aider

$$\vec{V}(A,3/0) = \vec{V}(A,3/2) + \vec{V}(A,2/1) + \vec{V}(A,1/0)$$

$$\vec{V}(A,1/0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(A,2/1) = \vec{V}(B,2/1) + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{BA}$$

$$\vec{V}(A,2/1) = \vec{0} + \dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{z_1} \wedge (-L_1\overrightarrow{x_1})$$

$$\vec{V}(A,2/1) = -L_1\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{V}(A,3/2) = \vec{V}(C,3/2) + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \wedge \overrightarrow{CA}$$

$$\vec{V}(A,3/2) = \vec{0} + \dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{z_3} \wedge (-L_1\overrightarrow{x_1} - L_2\overrightarrow{x_2})$$

$$\vec{V}(A,3/2) = -L_1\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_1} - L_2\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_2}$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned}\vec{V}(D,3/0) = &-L_1\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_1} - L_1\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_1} - L_2\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_2} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_1\overrightarrow{y_1} \\ &+ (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_2\overrightarrow{y_2} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_3\overrightarrow{y_3}\end{aligned}$$

$$\vec{V}(D,3/0) = \dot{\theta}_{1/0}L_1\overrightarrow{y_1} + (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_2\overrightarrow{y_2} + (\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})L_3\overrightarrow{y_3}$$

On a fait apparaître des termes lors de l'application de Varignon au départ qui sont inutiles, et qui finissent par disparaître.

Remarque : dans certains cas, les deux méthodes fonctionnent aussi bien, mais c'est par chance !

• **<u>Très mauvaise méthode : Composition puis dérivation du vecteur position</u>**

Une très grosse erreur que certains font est la suivante. On compose d'abord le mouvement, ce qui est bien :

$$\vec{V}(D,3/0)=\vec{V}(D,3/2)+\vec{V}(D,2/1)+\vec{V}(D,1/0)$$

Mais au lieu d'utiliser la formule de Varignon, on cherche à calculer chacune des vitesses ci-dessus par dérivation du vecteur position :

$$\vec{V}(D,3/2)=\left.\frac{d\overrightarrow{CD}}{dt}\right)_2=\left.\frac{dL_3\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_2=L_3\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_3}\quad \textcolor{red}{\boldsymbol{OK}}$$

Concernant les deux autres termes, on va écrire :

$$\vec{V}(D,2/1)=\left.\frac{d\overrightarrow{BD}}{dt}\right)_1;\vec{V}(D,1/0)=\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_0$$

Si nous calculons sans réfléchir ces deux termes, nous écrivons :

$$\vec{V}(D,2/1)=\left.\frac{d\overrightarrow{BD}}{dt}\right)_1=\left.\frac{d(L_2\overrightarrow{x_2}+L_3\overrightarrow{x_3})}{dt}\right)_1=L_2\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_1+L_3\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_1$$

$$\cancel{\vec{V}(D,2/1)=L_2\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_2}+L_3\left(\dot{\theta}_{3/2}+\dot{\theta}_{2/1}\right)\overrightarrow{y_3}}$$

Ce résultat est faux !!! Mais il est difficile de s'en rendre compte

En effet, écrire $\vec{V}(D,2/1)=\left.\frac{d\overrightarrow{BD}}{dt}\right)_1$ consiste en réalité à imaginer un point D' confondu avec le point D mais tel que ce point appartienne à la pièce 2 et non à la pièce 3, c'est-à-dire que le seul mouvement considéré est le mouvement de 2 par rapport à 1, ce qui revient à faire comme si la rotation 3/2 n'existait pas.

On a alors, en réalité :

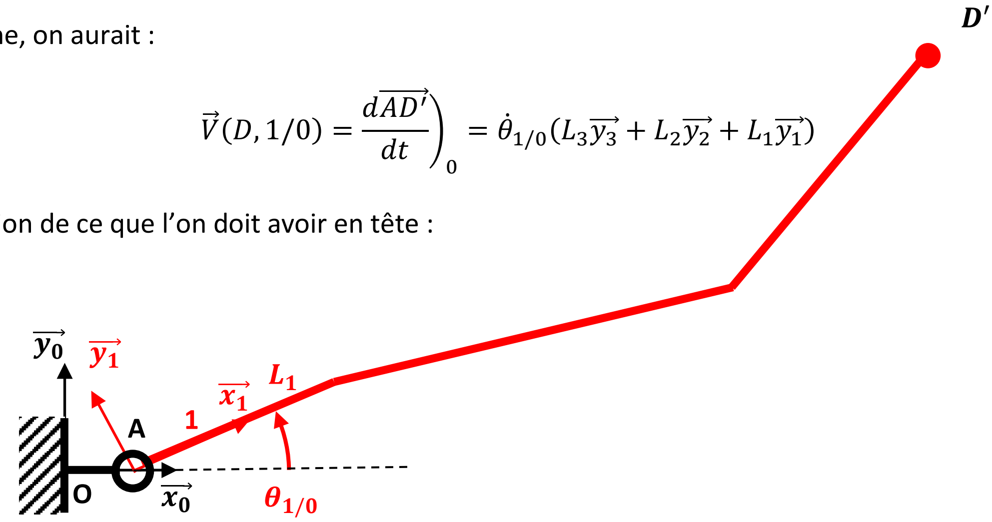
$$\vec{V}(D,2/1)=\left.\frac{d\overrightarrow{BD'}}{dt}\right)_1=L_2\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_2}+L_3\dot{\theta}_{2/1}\overrightarrow{y_3}=\dot{\theta}_{2/1}(L_2\overrightarrow{y_2}+L_3\overrightarrow{y_3})$$

Ce résultat est identique au résultat faux précédent avec $\dot{\theta}_{3/2}=0$.

De même, on aurait :

$$\vec{V}(D,1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AD'}}{dt}\right)_0 = \dot{\theta}_{1/0}\left(L_3\overrightarrow{y_3} + L_2\overrightarrow{y_2} + L_1\overrightarrow{y_1}\right)$$

Illustration de ce que l'on doit avoir en tête :



Au final, on trouve bien :

$$\vec{V}(D,3/0) = L_3\dot{\theta}_{3/2}\overrightarrow{y_3} + \dot{\theta}_{2/1}\left(L_2\overrightarrow{y_2} + L_3\overrightarrow{y_3}\right) + \dot{\theta}_{1/0}\left(L_3\overrightarrow{y_3} + L_2\overrightarrow{y_2} + L_1\overrightarrow{y_1}\right)$$

$$\vec{V}(D,3/0) = \dot{\theta}_{1/0}L_1\overrightarrow{y_1} + \left(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)L_2\overrightarrow{y_2} + \left(\dot{\theta}_{3/2} + \dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}\right)L_3\overrightarrow{y_3}$$

Conclusions :

Lorsqu'il y a plusieurs mouvements entre plusieurs pièces, écrire une dérivation de vecteur position $\vec{V}(M,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_i$ avec une seule liaison entre i et j consiste à écrire :

$$\vec{V}(M,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt}\right)_i$$

Avec :

- M' le point confondu avec M mais appartenant à la pièce j
- Non prise en compte des mouvements autres que le mouvement j/i

Personne n'y pense !

NE JAMAIS FAIRE COMPOSITION PUIS DERIVAION DE VECTEURS POSITION

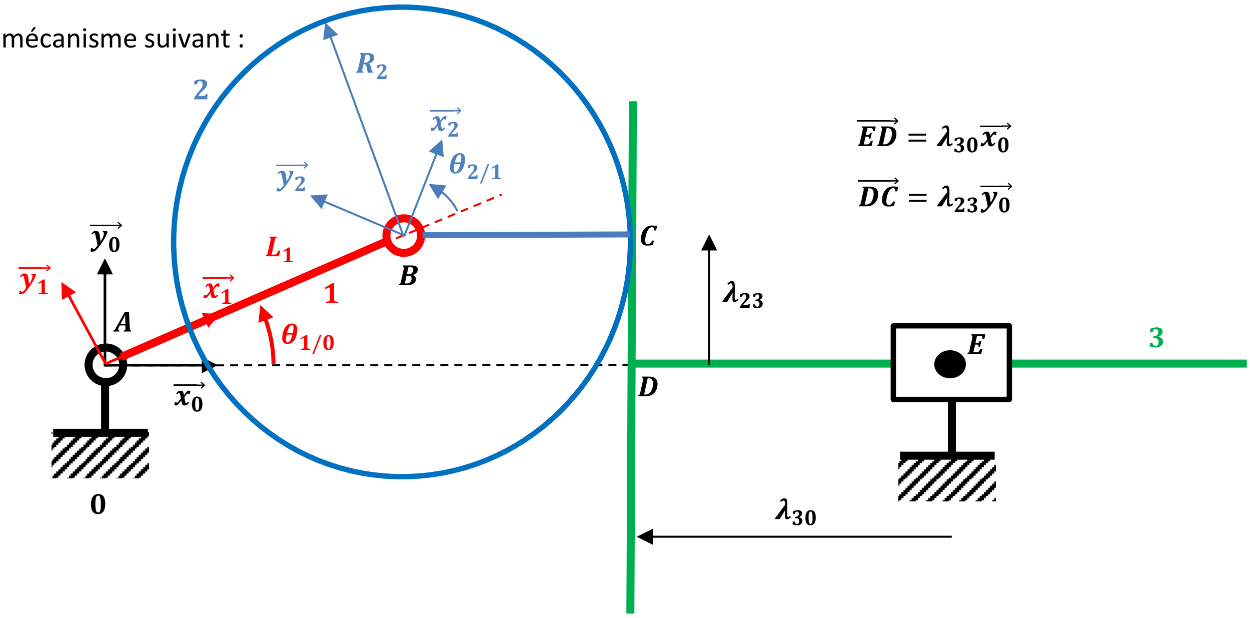
Conclusion : pour éviter ces soucis

Lors du calcul $\vec{V}(M,j/i) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_i$, avec une seule liaison entre i et j, si M n'est pas physiquement un point de j, utiliser la formule de Varignon pour calculer la vitesse $\vec{V}(M,j/i)$

Remarque : s'il y a plusieurs liaisons entre i et j, il faut composer le mouvement d'abord, pusi utiliser Varignon.

1.III.4.e.ii Exemple 2

Soit le mécanisme suivant :



Dans le cas de calcul de vitesses en présence de points de contact, une erreur classique est à éviter. Elle réside dans la définition du vecteur $\overrightarrow{BC}$:

Du fait du contact et quand on s'intéresse à la vitesse du point de contact, on peut toujours écrire : $\overrightarrow{BC} = R_2\overrightarrow{x_0}$

Toutefois, si l'on calcul la vitesse $\vec{V}(C,2/0)$, on va écrire :

- Composition puis Varignon (OK) :

$$\vec{V}(C,2/0) = \vec{V}(C,2/1) + \vec{V}(C,1/0)$$
$$\vec{V}(C,2/1) = \vec{V}(B,2/1) + \overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{21}} = -R_2\overrightarrow{x_0}\wedge\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_0} = R_2\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{y_0}$$
$$\vec{V}(C,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{10}} = -R_2\overrightarrow{x_0}\wedge\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0} - L_1\overrightarrow{x_1}\wedge\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0} = R_2\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_0} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$
$$\vec{V}(C,2/0) = R_2\left(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10}\right)\overrightarrow{y_0} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

  Remarque : la composante suivant $\overrightarrow{y_0}$ est vraie à tout instant si on parle de la vitesse du point de contact nommé C, qui n'est pas le même point dans la pièce 2 au cours du temps !

- Dérivation du vecteur position (Non OK) :

$$\vec{V}(C,2/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AC}}{dt}\right)_0 = L_1\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + R_2\left.\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_0 = L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

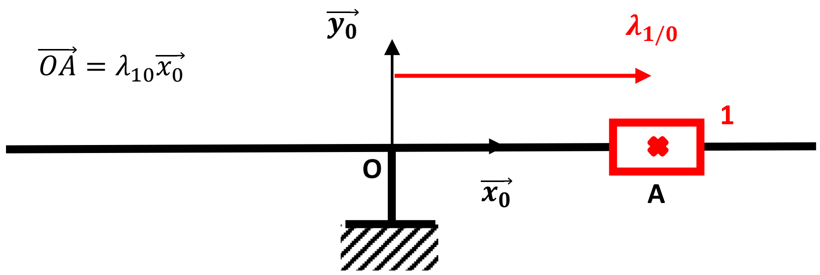
On voit qu'il y a une erreur, on ne trouve pas le même résultat. La première formule est juste, pas la seconde. L'erreur consiste à écrire $\overrightarrow{BC} = R_2\overrightarrow{x_0}$, ce qui induit une perte de renseignement sur le fait que la pièce 2 tourne. On a fait le calcul dans le cas particulier où $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_0}$, ou encore $\theta_{21} + \theta_{10} = 0$, ce qui n'est pas le cas général !!! Donc :

Dans le cas de présence de contact, privilégier la méthode Composition - Varignon

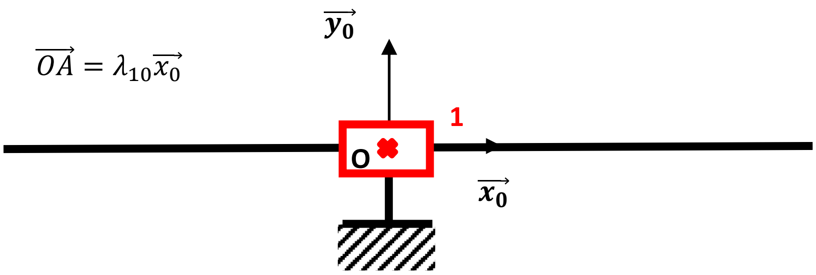
Une solution consiste à utiliser $\overrightarrow{x_2}$ en définissant $\overrightarrow{BC} = R_2\overrightarrow{x_2}$ dans le cas particulier où $\theta_{21} = -\theta_{10}$, ce qui conduit au bon résultat par dérivation du vecteur position. Ou encore $\overrightarrow{BC} = R_2\vec{u}$, ce qui donne une vitesse suivant un vecteur v parallèle à $\overrightarrow{y_0}$ quand on ne parle que du point de contact !

1.III.4.e.iii Exemple 3

Soit le mécanisme suivant :



Représentons-le maintenant dans une position bien particulière où $\lambda_{10} = 0$:



Pour calculer $\vec{V}(A,1/0)$:

- Ecrire immédiatement $\vec{V}(A,1/0) = \dot{\lambda}_{10}\overrightarrow{x_0}$ est juste
- Ecrire la dérivée du vecteur position peut conduire à des erreurs :
  - $\vec{V}(A,1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_0$ sera juste si on pense à écrire $\overrightarrow{OA} = \lambda_{10}\overrightarrow{x_0}$
  - Mais on risque d'écrire $\vec{V}(A,1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AA}}{dt}\right)_0 = \vec{0}$

Ici aussi, il faut en réalité avoir en tête qu'on s'intéresse au point A qui est « par-dessus » O à l'instant de la photo…

1.III.4.e.iv Conclusion générale

Pour calculer $\vec{V}(M,j/i)$:

- $M \in j$
  - La **dérivation du vecteur position** donne le résultat le plus rapidement possible
  - On peut **composer le mouvement si nécessaire puis utiliser Varignon**
- $M \notin j$
  - La dérivation du vecteur position conduit à des erreurs
  - Préférer **composer le mouvement si nécessaire puis utiliser la formule de Varignon**
- En cas de présence de contact, préférer la méthode **Composition puis Varignon**

1.III.4.f Composition des accélérations

Il existe une relation de composition des accélérations, elle est donnée ici à titre d'information.

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(M,j/i)+k\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)$$

Démonstration :

$$\vec{V}(M,k/i)=\vec{V}(M,k/j)+\vec{V}(M,j/i)$$

Soit I un point fixe dans j.

$$\vec{V}(M,k/i)=\vec{V}(M,k/j)+\vec{V}(I,j/i)+\overrightarrow{MI}\Lambda\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$$

$$\left.\frac{d\vec{V}(M,k/i)}{dt}\right)_i=\left.\frac{d\vec{V}(M,k/j)}{dt}\right)_i+\left.\frac{d\vec{V}(I,j/i)}{dt}\right)_i+\left.\frac{d\left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{IM}\right)}{dt}\right)_i$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\left.\frac{d\vec{V}(M,k/j)}{dt}\right)_j+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(I,j/i)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left.\frac{d\overrightarrow{IM}}{dt}\right)_i+\left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i\Lambda\overrightarrow{IM}$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(I,j/i)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left.\frac{d\overrightarrow{IM}}{dt}\right)_j+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{IM}\right)$$
$$+\left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i\Lambda\overrightarrow{IM}$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(I,j/i)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{IM}\right)$$
$$+\left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i\Lambda\overrightarrow{IM}$$

Or

$$\vec{\Gamma}(M,j/i)=\vec{\Gamma}(I,j/i)+\left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{j/i}}}{dt}\right)_i\Lambda\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\left(\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\overrightarrow{IM}\right)$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(M,j/i)+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)$$

$$\vec{\Gamma}(M,k/i)=\vec{\Gamma}(M,k/j)+\vec{\Gamma}(M,j/i)+k\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\Lambda\vec{V}(M,k/j)$$

1.III.5 Outil de représentation du mouvement – Torseur cinématique

Tout mouvement est décrit par

- Un vecteur vitesse
- Un vecteur rotation

La présence d'une rotation induit un changement de la vitesse selon le point auquel elle est exprimée :

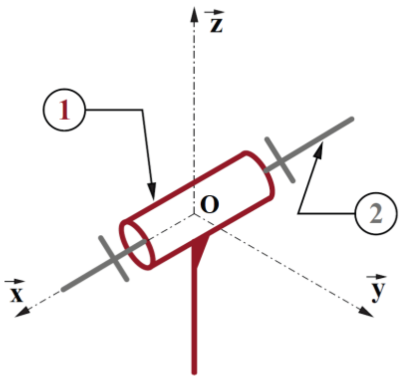
$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \Lambda \overrightarrow{AB}$$

Il est donc nécessaire de toujours garder, pour chaque mouvement entre pièces, le vecteur rotation en parallèle du vecteur vitesse afin d'être en mesure d'exprimer la vitesse de tout point.

Dans un souci de clarté, nous choisissons donc pour chaque mouvement, de regrouper le vecteur rotation et le vecteur vitesse dans un même outil, que l'on appelle torseur, notation utilisée pour représenter des champs équiprojectifs.

1.III.5.a Introduction des torseurs par l'exemple

Soit une liaison pivot d'axe $(0,\vec{x})$ entre deux pièces 1 et 2.



Soit un point P quelconque de l'espace : $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$

On sait que la vitesse de tout point de l'axe de rotation $(0,\vec{x})$ dans le mouvement de 2 par rapport à 1 est nulle.

$$\forall P \in (0,\vec{x}), \vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$$

On peut donc définir le mouvement de 2 par rapport à 1 quel que soit le point de l'axe de rotation ainsi :

- Présence d'une rotation : $\overrightarrow{\Omega_{21}} = P_{21}\vec{x}$
- $\vec{V}(P,2/1) = \vec{0} \ \forall P \in (0,\vec{x})$

Si on souhaite exprimer la vitesse d'un point P quelconque de l'espace, on utilise la formule de changement de point (Varignon) :

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(O,2/1) + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -z\Omega_{21} \\ y\Omega_{21} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

On retrouve bien le fait que si $y = z = 0$, c'est-à-dire sur l'axe de rotation, $\vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$

On peut alors définir le mouvement de tout point de l'espace dans le mouvement de 2 par rapport à 1 ainsi :

- Présence d'une rotation : $\overrightarrow{\Omega_{21}} = P_{21}\vec{x}$
- $\vec{V}(P,2/1) = -z\Omega_{21}\vec{y} + y\Omega_{21}\vec{z} \; \forall P$

On voit que pour définir le mouvement entre les pièces 1 et 2, on doit nécessairement connaître

- le mouvement de rotation
- une vitesse en un point, ici sur l'axe car elle est nulle

On utilise donc une notation permettant de regrouper ces deux éléments, l'outil est appelé « Torseur » :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{V}(P,2/1) \end{Bmatrix}_{\forall P}$$

Ensuite, si l'on reprend les résultats précédents, on voit que définir le mouvement associé à la liaison pivot consiste à donner l'un de ces torseurs :

$\forall P \in (0,\vec{x})$	$\forall P(x,y,z)$
$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21}\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21}\vec{x} \\ -z\Omega_{21}\vec{y} + y\Omega_{21}\vec{z} \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ 0 & -z\Omega_{21} \\ 0 & y\Omega_{21} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$

Ne parlons pas de l'éventuel choix d'une base ne contenant pas l'axe de rotation…

Il semble donc évident que pour décrire le mouvement associé à une liaison pivot, on retiendra la solution de gauche, c'est-à-dire :

- le torseur sous forme canonique (le plus de 0 possible)

- en un point de « son lieu de validité », c'est-à-dire où sa forme canonique est maintenue, ou encore un point ou son moment est minimum

On pourra alors aisément calculer la vitesse d'un point quelconque de l'espace à l'aide de la formule de Varignon, connaissant ce torseur en un lieu bien défini.

Il en sera de même pour toutes les liaisons.

1.III.5.b Notations

Le torseur cinématique est noté :

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} P_{j/i}\overrightarrow{x_0} + Q_{j/i}\overrightarrow{y_0} + R_{j/i}\overrightarrow{z_0} \\ U_{j/i}\overrightarrow{x_0} + V_{j/i}\overrightarrow{y_0} + W_{j/i}\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} P_{j/i} & U_{j/i} \\ Q_{j/i} & V_{j/i} \\ R_{j/i} & W_{j/i} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

$\overrightarrow{\Omega_{j/i}}$ est appelé la résultante du torseur. Ses composantes dans la base $\mathfrak{B}_0$ sont $P_{j/i}$, $Q_{j/i}$ et $R_{j/i}$

$\vec{V}(M,j/i)$ est appelé le moment du torseur. Ses composantes dans la base $\mathfrak{B}_0$ sont $U_{j/i}$, $V_{j/i}$ et $W_{j/i}$

La notation $\{\mathcal{V}_{j/i}\}$ est indépendante du point où sera exprimé le torseur.

La notation vectorielle $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M$ a l'obligation d'être exprimée en un point qu'il faut préciser.

La notation verticale $\begin{Bmatrix} P_{j/i} & U_{j/i} \\ Q_{j/i} & V_{j/i} \\ R_{j/i} & W_{j/i} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$ doit être utilisée en précisant la base. Cette notation sera uniquement utilisée pour apprendre les torseurs, puis lorsqu'ils seront posés, on repassera à la notation vectorielle.

Quel que soit le point où le torseur est exprimé, le vecteur rotation reste constant.

Selon le point choisi, le vecteur vitesse change et est exprimé à l'aide de la formule de changement de Varignon :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(N,j/i) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) + \overrightarrow{NM} \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \end{Bmatrix}_N$$

1.III.5.c Remarques

1.III.5.c.i Passage d'une notation à l'autre

Nous allons bientôt introduire les torseurs associés à chaque liaison usuelle rencontrée dans les mécanismes. L'écriture en notations verticales permet de retenir facilement ces torseurs. Toutefois, il faut savoir repasser immédiatement à une écriture avec résultante et moment :

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} P_{j/i} & U_{j/i} \\ Q_{j/i} & V_{j/i} \\ R_{j/i} & W_{j/i} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_k} = \begin{Bmatrix} P_{j/i}\overrightarrow{x_k} + Q_{j/i}\overrightarrow{y_k} + R_{j/i}\overrightarrow{z_k} \\ U_{j/i}\overrightarrow{x_k} + V_{j/i}\overrightarrow{y_k} + W_{j/i}\overrightarrow{z_k} \end{Bmatrix}_M$$

Lors du déplacement d'un torseur en un point particulier, il peut arriver deux situations :

- Résultante et/ou moment s'expriment selon une seule base
- Résultante et/ou moment s'expriment dans plusieurs bases

Lorsque les éléments de réduction s'expriment dans une seule base, nous garderons la notation verticale.

Lorsqu'ils s'expriment dans plusieurs bases, nous adopterons la notation en résultante et moment afin de **ne pas projeter** de vecteurs inutilement.

1.III.5.c.ii Notation i/j et j/i - Signe

$$\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = -\overrightarrow{\Omega_{i/j}}$$

$$\vec{V}(M,j/i) = -\vec{V}(M,i/j)$$

On a donc :

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} -\overrightarrow{\Omega_{i/j}} \\ -\vec{V}(M,i/j) \end{Bmatrix}_M = -\{\mathcal{V}_{i/j}\}$$

On pourra donc noter :

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} P_{j/i} & U_{j/i} \\ Q_{j/i} & V_{j/i} \\ R_{j/i} & W_{j/i} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_k} = \begin{Bmatrix} -P_{i/j} & -U_{i/j} \\ -Q_{i/j} & -V_{i/j} \\ -R_{i/j} & -W_{i/j} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_k}$$

Toutefois, moins il y a de signes moins, moins ils risquent de disparaître malencontreusement.

1.III.5.c.iii Composition du mouvement et torseurs

$$\{\mathcal{V}_{k/j}\} + \{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{k/j}} \\ \vec{V}(M,k/j) \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{k/i}} \\ \vec{V}(M,k/i) \end{Bmatrix}_M = \{\mathcal{V}_{k/i}\}$$

$$\{\mathcal{V}_{k/j}\} + \{\mathcal{V}_{j/i}\} = \{\mathcal{V}_{k/i}\}$$

1.III.5.c.iv Torseur d'un mouvement quelconque

Un torseur est un outil qui n'est pas uniquement associé à une liaison. On peut exprimer un mouvement quelconque à l'aide d'un torseur. Il suffit d'identifier le vecteur rotation du mouvement considéré et de calculer une vitesse en un point dans ce mouvement pour ensuite écrire le torseur du mouvement associé.

1.III.5.d Torseurs particuliers

1.III.5.d.i *Glisseur*

Un torseur de type glisseur est un torseur dont le champ de moment est nul en au moins un point. En cinématique, cela correspond à un torseur dont la vitesse s'annule en au moins un point, au CIR d'un mouvement de rotation. Le moment du torseur est nul sur l'axe de rotation, appelé axe central du torseur.

$$\exists M/\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

Le champ des vitesses dans un mouvement de rotation est un glisseur.

Propriété :

$$\boxed{\{\mathcal{V}_{j/i}\}\ est\ un\ glisseur \Leftrightarrow \forall P, \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \perp \vec{V}(P,j/i)}$$

En effet : $\{\mathcal{V}_{j/i}\}$ est un glisseur, donc $\exists M/\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(P,j/i) \end{Bmatrix}_P$ avec $\vec{V}(P,j/i) = \overrightarrow{PM} \Lambda \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$, donc $\vec{V}(P,j/i) \perp \overrightarrow{\Omega_{j/i}}$.

Ceci est utile dans certains sujets de concours pour démontrer qu'un torseur est un glisseur.

1.III.5.d.ii *Torseur couple*

Un torseur de type couple est un torseur dont la résultante est nulle. En cinématique, cela correspond à un vecteur rotation nul. Un mouvement de translation est un mouvement représenté par un torseur de type couple.

$$\forall M, \{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M$$

La particularité de ce torseur est d'être le même en tout point de l'espace.

Démonstration : $\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(N,j/i) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M,j/i) + \overrightarrow{NM} \Lambda \vec{0} \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M,j/i) \end{Bmatrix}_N$

1.III.5.d.iii *Remarque*

En cinématique :

- Tout mouvement est décrit par l'un de ces deux torseurs
- Un torseur couple est un torseur associé à une translation
- Un torseur glisseur est associé à tout autre mouvement. Autrement dit, un mouvement qui n'est pas une translation est une rotation autour d'un point, fixe ou mobile, auquel cas on l'appelle CIR ou Centre Instantanée de Rotation

De même, en statique, toute action mécanique est représentée soit par un couple, soit pas un glisseur

1.III.5.e Opérations sur les torseurs

1.III.5.e.i Automoment : invariant scalaire

On appelle automoment d'un torseur le produit scalaire de sa résultante et de son moment.

L'automoment est un invariant scalaire, c'est-à-dire que c'est un nombre réel constant.

$$A_{\{\mathcal{V}_{ji}\}} = \frac{1}{2}\{\mathcal{V}_{ji}\} \odot \{\mathcal{V}_{ji}\} = cste$$

$$\forall N, M : \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(M, j/i) = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(N, j/i)$$

Démonstration :

$$\overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(M, j/i) = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\left[\vec{V}(N, j/i) + \overrightarrow{MN}\Lambda\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\right] = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(N, j/i) + \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\overrightarrow{MN}\Lambda\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \overrightarrow{\Omega_{j/i}}.\vec{V}(N, j/i)$$

Utilité :

L'automoment est utile pour vérifier qu'un torseur est juste suite à un changement de point par exemple.

1.III.5.e.ii Comoment

Le comoment de deux torseurs est la somme du produit de la résultante de l'un avec le moment de l'autre et du moment de l'un avec la résultante de l'autre lorsque les torseurs sont exprimés au même point.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} \odot \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{V}(M, 2/1) \end{Bmatrix}_M \odot \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \vec{V}(N, 1/0) \end{Bmatrix}_N = \overrightarrow{\Omega_{2/1}}.\vec{V}(P, 1/0) + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}.\vec{V}(P, 2/1) \quad \forall P$$

Le comoment sera très utile lors du calcul de puissance dissipée dans des liaisons, par l'intermédiaire du comoment du torseur statique et cinématique de la liaison.

1.III.5.e.iii Addition

Pour additionner deux torseurs, il faut qu'ils soient **exprimés au même point**. Le résultat est un torseur dont la résultante est la somme des résultantes des deux torseurs et le moment la somme des deux moments exprimés au même point.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{V}(M, 2/1) \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \vec{V}(N, 1/0) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \vec{V}(P, 2/1) + \vec{V}(P, 1/0) \end{Bmatrix}_P \quad \forall P$$

Attention : en notation verticale, les torseurs doivent de plus être **exprimés dans la même base** :

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} P_{1/0} & U_{1/0} \\ Q_{1/0} & V_{1/0} \\ R_{1/0} & W_{1/0} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} + P_{1/0} & U_{2/1} + U_{1/0} \\ Q_{2/1} + Q_{1/0} & V_{2/1} + Q_{1/0} \\ R_{2/1} + R_{1/0} & W_{2/1} + R_{1/0} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

1.III.5.e.iv Multiplication par un scalaire

Lorsqu'un torseur est multiplié par un scalaire, on multiplie résultante et moment par ce scalaire.

$$\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ \vec{V}(M, j/i) \end{Bmatrix}_M$$

$$k\{\mathcal{V}_{j/i}\} = \begin{Bmatrix} k\overrightarrow{\Omega_{j/i}} \\ k\vec{V}(M, j/i) \end{Bmatrix}_M$$

1.III.5.e.v Egalité de deux torseurs

Il faut que les torseurs soient **exprimés au même point**.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \vec{V}(M, 2/1) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \vec{V}(N, 1/0) \end{Bmatrix}_N$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \ (1) \\ \vec{V}(P, 2/1) = \vec{V}(P, 1/0) \ (2) \end{cases}$$

L'égalité de deux torseurs donne deux équations vectorielles. Lorsque l'on projette ces deux vecteurs dans une même base, on obtient 6 équations scalaires :

$$\begin{gathered} (1).\overrightarrow{x_0} \rightarrow P_{2/1} = P_{1/0} \\ (1).\overrightarrow{y_0} \rightarrow Q_{2/1} = Q_{1/0} \\ (1).\overrightarrow{z_0} \rightarrow R_{2/1} = R_{1/0} \\ (2).\overrightarrow{x_0} \rightarrow U_{2/1} = U_{1/0} \\ (2).\overrightarrow{y_0} \rightarrow V_{2/1} = V_{1/0} \\ (2).\overrightarrow{z_0} \rightarrow W_{2/1} = W_{1/0} \end{gathered}$$

Attention : en notation verticale, les torseurs doivent de plus être **exprimés dans la même base**.

Il vient alors :

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{1/0} & U_{1/0} \\ Q_{1/0} & V_{1/0} \\ R_{1/0} & W_{1/0} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{2/1} = P_{1/0} \\ Q_{2/1} = Q_{1/0} \\ R_{2/1} = R_{1/0} \\ U_{2/1} = U_{1/0} \\ V_{2/1} = V_{1/0} \\ W_{2/1} = W_{1/0} \end{cases}$$

Remarque : nous ne travaillerons pas avec cette notation et lui préfèrerons la notation vectorielle. Toutefois, nous apprendrons par cœur les torseurs des liaisons usuelles sous cette forme.

1.IV. Modélisation des mécanismes

La modélisation d'un mécanisme consiste à passer d'un mécanisme réel ou de sa représentation réelle (plan, schéma…) à un schéma cinématique dans lequel est représentée

- chaque classe d'équivalence par un ou plusieurs traits
- chaque liaison entre pièce par une liaison normalisée

A partir d'un mécanisme réel, il faut donc:

- Identifier les différentes classes d'équivalence
- Identifier les liaisons entre ces classes d'équivalence
- Modéliser le mécanisme à l'aide d'un schéma cinématique

1.IV.1 Classes d'équivalence

Une classe d'équivalence est un ensemble de pièces cinématiquement équivalentes, c'est à dire qui peuvent être représentées toutes ensemble par une seule et même « pièce équivalente » appelée « classe d'équivalence ».

- Toutes les pièces ne présentant aucun mouvement relatif (un encastrement les lie) seront dans la même classe d'équivalence
- Des pièces additionnelles n'intervenant pas dans la cinématique du système mais permettant, par exemple, de réduire des frottements dans une liaison, pourront être associées à l'une ou l'autre des classes d'équivalence associées à la liaison concernée
- Certaines pièces pourront même n'être incluses dans aucune classe d'équivalence

On fait souvent une confusion entre le mot « pièce » et le terme « Classe d'équivalence ».

1.IV.2 Liaisons normalisées

Les liaisons normalisées découlent des contacts entre les différentes classes d'équivalence. Les différents types de contacts réalisés sont :

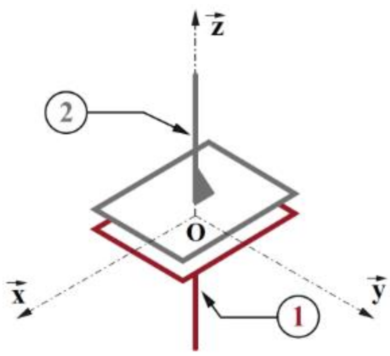
- plan sur plan
- cylindre sur plan ou sur cylindre
- sphère (au niveau local) sur surface quelconque

L'identification des surfaces en contact entre les classes d'équivalence doit conduire à la détermination des degrés de liberté (DDL), c'est-à-dire les mouvements possibles entre les deux pièces suivant 3 directions de l'espace en translation et 3 directions de l'espace en rotation.

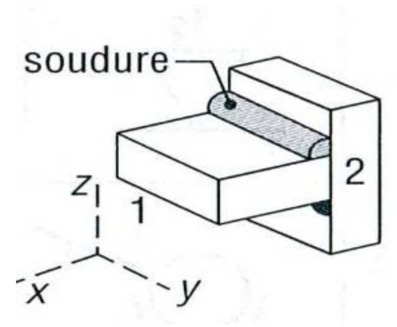
Attention, bien qu'un mouvement dans une liaison puisse être impossible du fait de contraintes dans un mécanisme complet, l'étude des liaisons doit être menée localement en considérant les surfaces en contact entre les pièces étudiées et la liaison proposée doit rendre compte des mouvements possible indépendamment du reste du mécanisme.

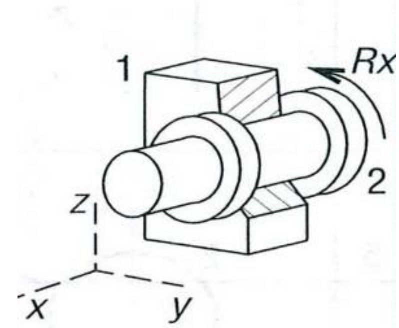
A partir de cette analyse, on propose alors un modèle de la liaison parmi les liaisons normalisées. Ce modèle représente le réel. Les hypothèses qui lui sont associées sont les suivantes :

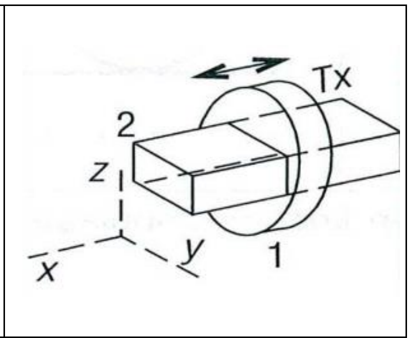
- Pas de jeu dans les liaisons
- Contacts supposés maintenus, même si le modèle est unilatéral. Exemple : un appui plan modélisé comme suit pourrait en théorie se décoller suivant $+\vec{z}$ mais on considérera que c'est impossible – Si le décollement a lieu dans la réalité, on fera 2 schémas cinématiques, l'un lorsqu'il y a contact, l'autre lorsqu'il n'y est pas, et dans lequel on ne représentera alors pas la liaison

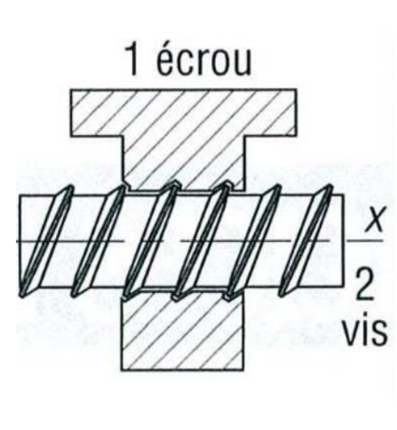


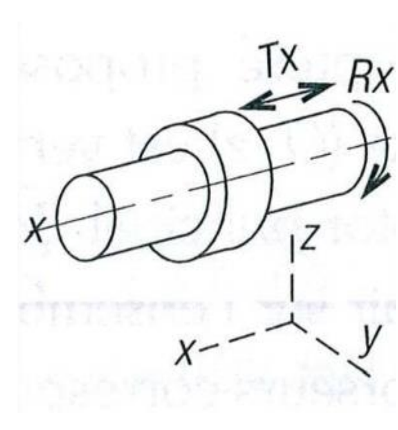
1.IV.2.a Liaisons réelles

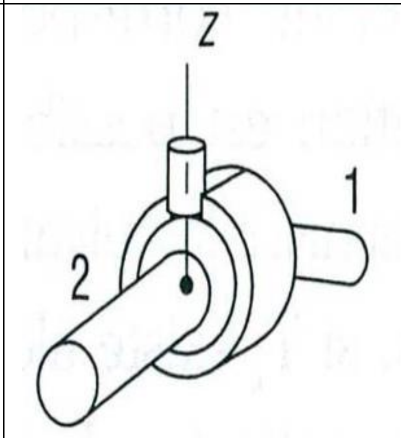


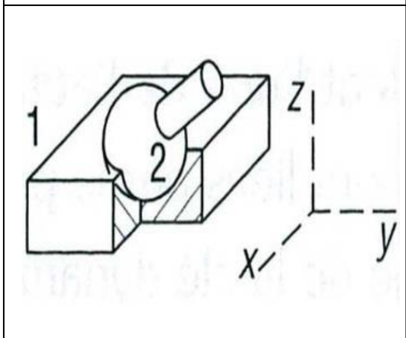


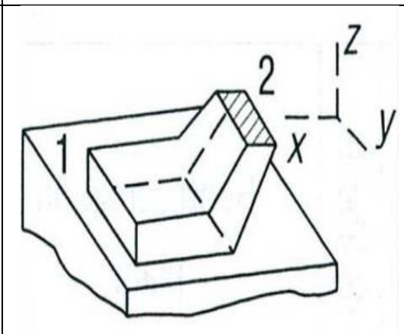


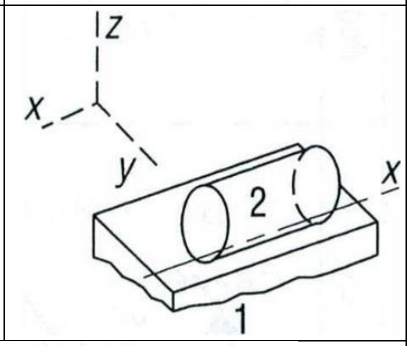


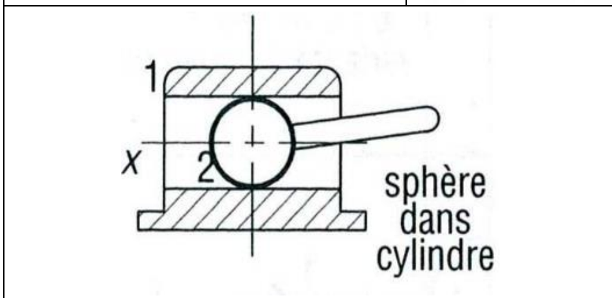


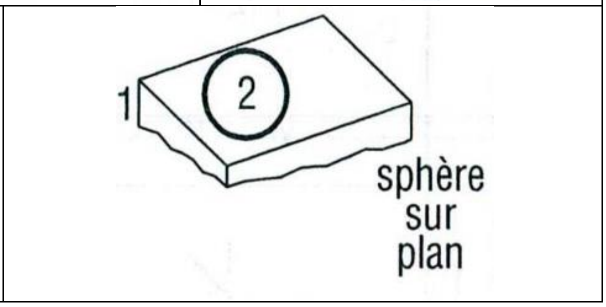




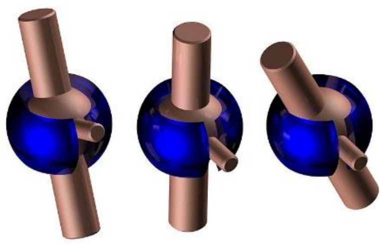






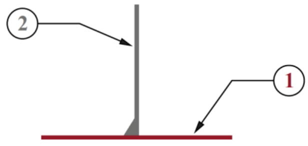
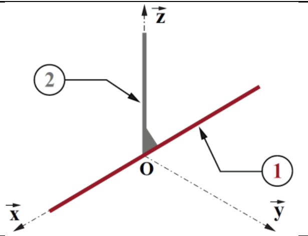
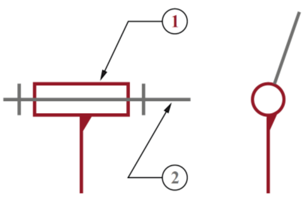
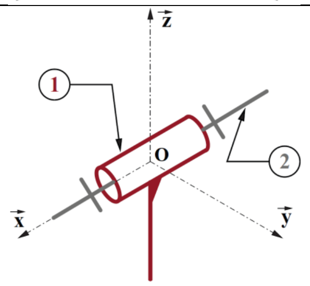
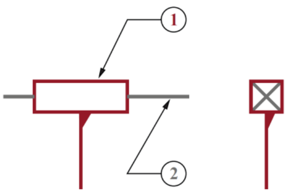
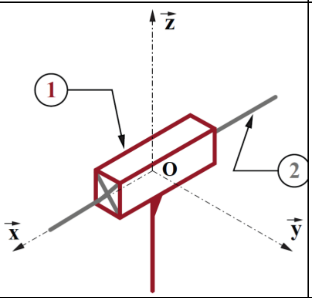
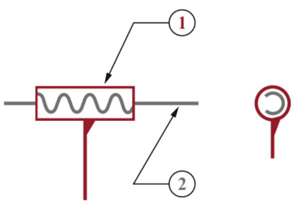
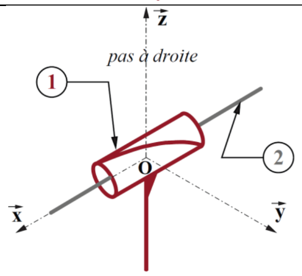
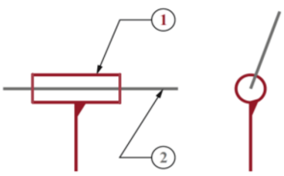
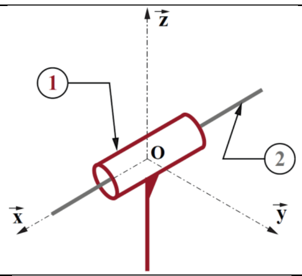
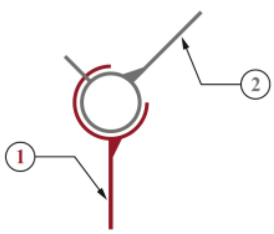
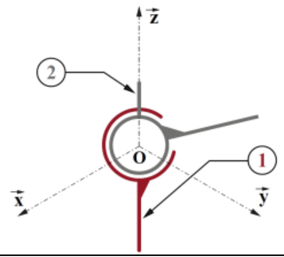


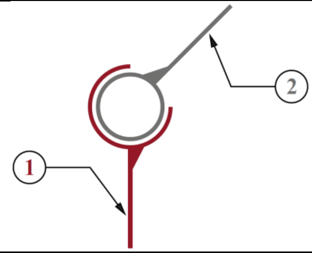
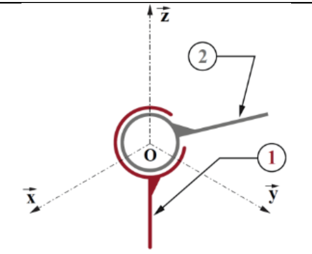
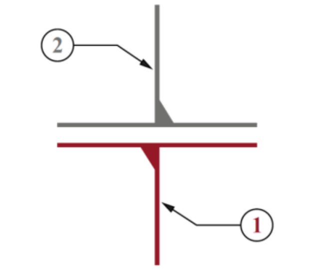
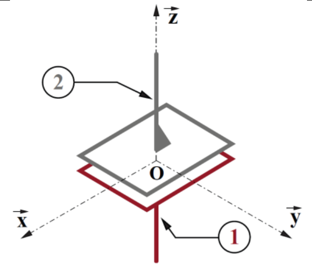
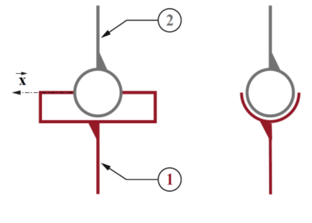
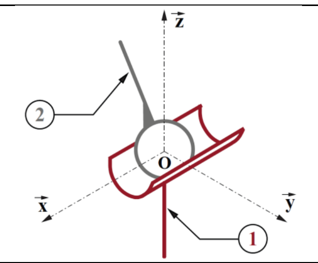
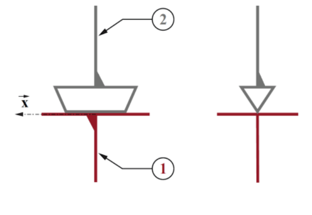
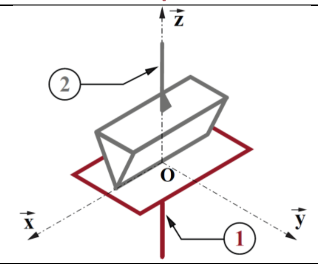
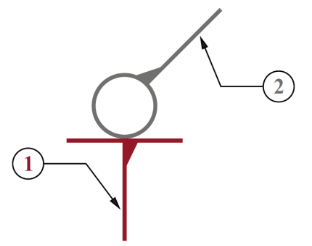
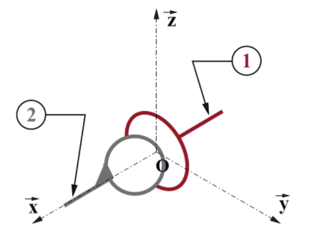
Exemple de doigt



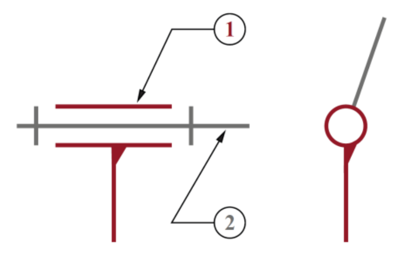
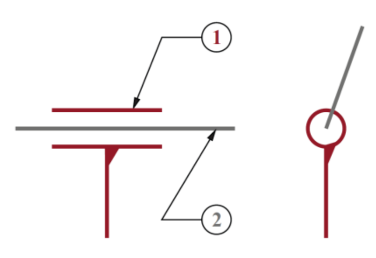
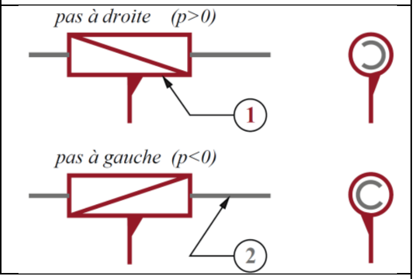
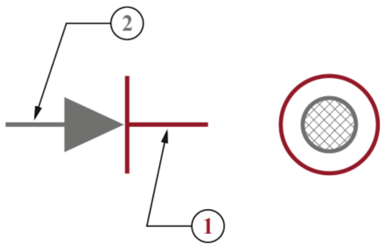
1.IV.2.b Liaisons usuelles

1.IV.2.b.i Liaisons en 3D

Liaison	Elem Géom	2D	3D	$\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ Forme canonique	Validité	$\mathfrak{B}$	I_c
Encastrement E	RAS			$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	— — —	0
Pivot P	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix}P_{2/1} & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	1
Glissière Gl	$\vec{x}$			$\left\{\begin{matrix}0 & U_{2/1}\\0 & 0\\0 & 0\end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\vec{x}$ — —	1
Hélicoïdale He	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix}P_{2/1} & U_{2/1}\\0 & 0\\0 & 0\end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $U_{2/1} = \frac{pas}{2\pi} P_{2/1}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	1
Pivot Glissant PG	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix}P_{2/1} & U_{2/1}\\0 & 0\\0 & 0\end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	2
Rotule à doigt Sphérique à doigt	O Rainure $(O,\vec{x},\vec{z})$ Doigt $\vec{z}$			$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\Q_{2/1} & 0\\R_{2/1} & 0\end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	O	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	2

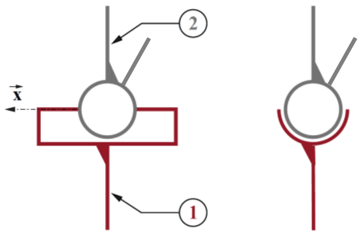
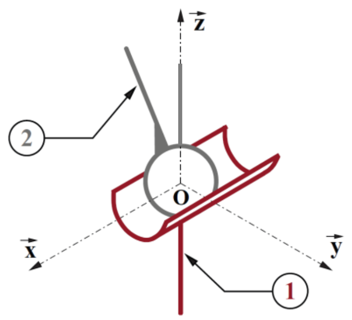
Rotule R Sphérique S	O			$\left\{\begin{matrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	O	— — —	3
Appui plan AP	$\vec{z}$			$\left\{\begin{matrix} 0 & \boldsymbol{U_{2/1}} \\ 0 & \boldsymbol{V_{2/1}} \\ R_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	— — $\vec{z}$	3
Linéaire annulaire LA Sphère cylindre SC	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	O	$\vec{x}$ — —	4
Linéaire rectiligne LR Cylindre Plan CP	$\{(O,\vec{x}),\vec{z}\}$			$\left\{\begin{matrix} P_{2/1} & \boldsymbol{U_{2/1}} \\ 0 & \boldsymbol{V_{2/1}} \\ R_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	$(O,\vec{x},\vec{z})$	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	4
Ponctuelle Pct Sphère-plan SP	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & \boldsymbol{V_{2/1}} \\ R_{2/1} & \boldsymbol{W_{2/1}} \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	5

Ancienne norme

Pivot	Pivot Glissant	Hélicoïdale
		
Ponctuelle		
		

Liaison non usuelle parfois rencontrée

Ex : 2 arbres – Cannelures sur faible longueur /Disques d'embrayages ou freins

Linéaire annulaire à doigt Doigt suivant $\vec{z}$ Rainure dans (O, $\vec{x}$, $\vec{z}$) RAS			$\left\{\begin{matrix} 0 & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_0^{\mathfrak{B}}$ $\mathfrak{B}=(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$	3

1.IV.2.b.ii Liaisons en 2D

En mécanismes plans, les mouvements des pièces ont lieu dans un seul plan, par exemple le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$.

Dans ce cas, les seuls mouvements possibles sont:

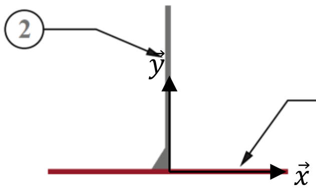
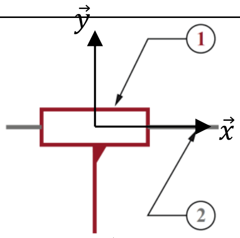
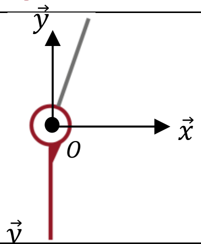
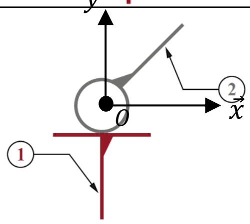
- Les translations dans le plan suivant $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$

- La rotation autour de $\vec{z}$

Dans les torseurs cinématiques des liaisons, les trois termes $P_{2/1}$, $Q_{2/1}$ et $W_{2/1}$ sont donc nuls. Il ne reste que 3 inconnues maximum par liaison.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} & U_{2/1} \\ \mathbf{0} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

Les seules liaisons permettant de représenter des mouvements plans sont les liaisons suivantes, en tenant compte des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ du plan:

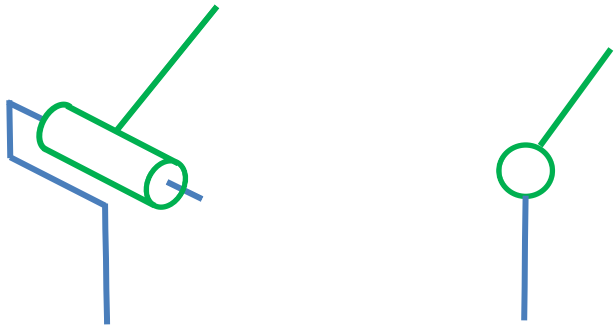
Encastrement		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$\forall P$	$I_c^{2D} = 0$
Glissière $\vec{x}$		$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$\forall P$	$I_c^{2D} = 1$
Pivot $(O,\vec{z})$		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$(O,\vec{z})$	$I_c^{2D} = 1$
Ponctuelle $(0,\vec{y})$		$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$(O,\vec{y})$	$\boldsymbol{I_c^{2D} = 2}$

Toute autre liaison se rapportera, dans le plan, à l'une de celles-ci.

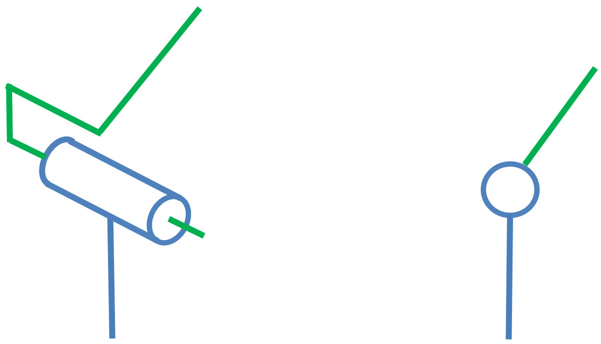
1.IV.2.b.iii Remarques

• Représentation

La représentation d'une liaison se fait toujours par l'association de deux éléments géométriques qui vont ensemble afin de la représenter :



Ces deux éléments peuvent être indépendamment associés à l'une pièce ou l'autre des deux pièces :



• Forme canonique d'un torseur

La forme canonique d'un torseur correspond à « sa forme lorsqu'il a le plus de 0 » :

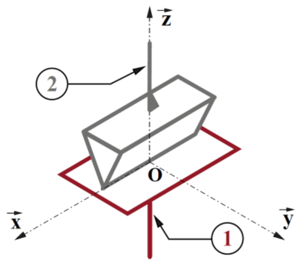
- Son moment doit donc être minimum (lieu géométrique associé)
- La base doit être bien choisie (résultante et moment les plus simples)

Lorsque l'on a la forme canonique d'un torseur

- son lieu de validité correspond au lieu de l'espace où, si ce torseur y est exprimé, la vitesse ne change pas de forme, c'est-à-dire concrètement que les 0 de la colonne de droite de la forme canonique du torseur restent des 0.
- Ses bases de validité sont des bases dans lesquelles les composantes du torseur sont exprimées selon le moins de vecteurs possibles

Pour retrouver le lieu de validité d'un torseur, après avoir posé son torseur cinématique en un point de son lieu de validité (a priori, on se souvient au moins d'un point, souvent sur « le centre » de la liaison) il suffit de déplacer ce torseur en un point quelconque de l'espace et de déterminer les conditions pour lesquelles la forme canonique ne change pas, c'est-à-dire les zéros restent des zéros.

Exemple :



$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & \boldsymbol{U_{2/1}} \\ 0 & \boldsymbol{V_{2/1}} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_0^{\mathfrak{B}}$$

Soit un point P quelconque de l'espace : $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(O,2/1) + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U_{2/1}} \\ \boldsymbol{V_{2/1}} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{bmatrix} P_{2/1} \\ 0 \\ R_{2/1} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U_{2/1}} \\ \boldsymbol{V_{2/1}} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + \begin{bmatrix} -yR_{2/1} \\ -xR_{2/1} + zP_{2/1} \\ yP_{2/1} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\vec{V}(P,2/1) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U_{2/1}} - yR_{2/1} \\ \boldsymbol{V_{2/1}} - xR_{2/1} + zP_{2/1} \\ yP_{2/1} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

On a donc :

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & \boldsymbol{U_{2/1}} - yR_{2/1} \\ 0 & \boldsymbol{V_{2/1}} - xR_{2/1} + zP_{2/1} \\ R_{2/1} & yP_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$$

Pour que les zéros restent des zéros, le terme $yP_{2/1}$ soit nul, soit :

$$y = 0$$

Le lieu géométrique de validité du torseur de la liaison linéaire rectiligne est donc le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$.

Remarque : selon le choix du point effectué, on remarque que les composantes de vitesse suivant x et y changent, c'est pourquoi dans le tableau des liaisons, elles sont inscrites en rouge et en gras, ce qui est vrai pour quelques autres liaisons.

• Aide-mémoire

Elément géométrique	1 point O	1 direction $\vec{x}$	1 axe $(O,\vec{x})$	Une normale (droite ou plan)
Liaisons concernées	Rotule Rotule à doigt	Glissière Appui Plan	Pivot Pivot Glissant Hélicoïdale *Sphère cylindre*	Linéaire rectiligne (Droite+Direction) Ponctuelle (Droite)

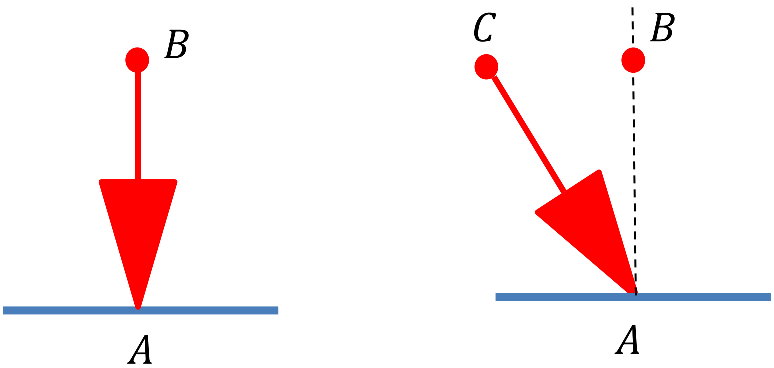
Lieux de validité	O	$\forall P$	$\forall P \in (O,\vec{x})$	Une normale (droite ou plan)
Liaisons concernées	Rotule Rotule à doigt *Sphère Cylindre*	Glissière Appui Plan	Pivot Pivot Glissant Hélicoïdale	Linéaire rectiligne (Plan) Ponctuelle (Droite)

Intéressant : Dès qu'il y a contact entre un plan et une autre surface, la validité est l'ensemble des points sur la normale au contact : Ponctuelle – Linéaire rectiligne - Appui plan ☺

• Normale au contact

Attention, pour les liaisons ponctuelle et linéaire rectiligne, le lieu de définition du torseur associé est respectivement la normale au contact et le plan normal au contact.

Prenons le cas de la linéaire rectiligne, une erreur est souvent commise :



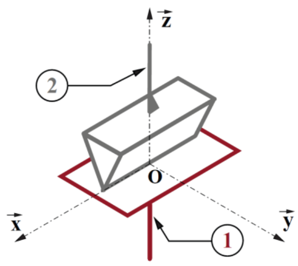
Le torseur de cette liaison peut être défini sous sa forme canonique indépendamment en tout point du plan normal. Attention, c'est vrai en A et B, mais ça ne l'est pas en C. Si les points de la normale n'y restent pas au cours du mouvement, on choisira le point de contact A.

• **Débattement des liaisons et collisions**

Un modèle cinématique ne tient pas compte des collisions entre les différentes pièces et des débattements. Les translations sont supposées pouvoir être infinies et les angles aller de 0 à 360 °.

• **Dépendance des torseurs canoniques à une ou 2 bases**

A plusieurs reprise est écrit dans le tableau des liaisons $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$ ou $Ref\ \mathfrak{B}_1$ ou $Ref\ \mathfrak{B}_2$. C'est un détail qui peut avoir son importance. Prenons l'exemple de la linéaire rectiligne :



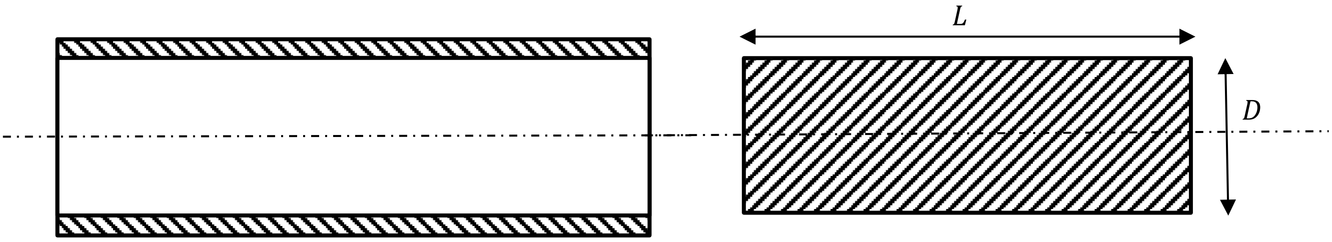
Son torseur garde sa forme canonique dans une base qui contient la ligne de contact qui dans le cas présent serait $\overrightarrow{x_2}$ et qui contient la normale au contact, c'est a dire $\overrightarrow{z_1}$. Dans un mécanisme où $\forall t, \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1}$, on définira le torseur 2/1 dans la base 2, mais dans un mécanisme où les deux vecteurs $\overrightarrow{z_1}$et $\overrightarrow{x_2}$ évoluent, que faire ?

Heureusement, vous rencontrerez très probablement pas ce cas, mais il est bien d'en être consient.

C'en est de même pour quelques autres liaisons, citons par exemple la rotule à doigt dont le torseur dépend de la position de la rainure dans $\mathfrak{B}_1$ ET de l'orientation du doigt dans $\mathfrak{B}_2$.

• **Liaison Cylindre/Cylindre**

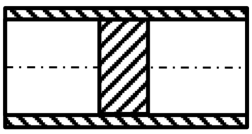
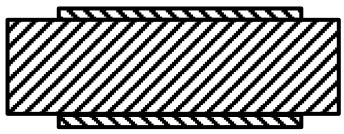
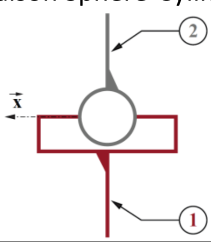
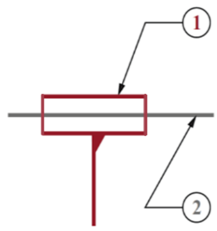
La liaison cylindre/cylindre est une liaison particulière qui peut être modélisée de deux façons différentes selon un rapport de longueurs.



La présence d'un jeu permettant le montage des deux pièces induit la présence d'un léger rotulage dont la valeur dépend du rapport $\frac{L}{D}$, L étant la longueur de guidage et D le diamètre du cylindre de guidage, supposé égal dans les deux pièces. En effet, plus la longueur est grande et plus le diamètre est petit, plus cet angle est petit :

L longueur de la surface en contact entre les deux cylindres

L diamètre de cette surface

Centrage court	Cas indécis	Centrage long
$\frac{L}{D} < 0,8$	$0,8 < \frac{L}{D} < 1,5$	$\frac{L}{D} > 1,5$
	---	
Liaison Sphère-Cylindre 	---	Liaison Pivot Glissante 

1.IV.3 Modélisation

La modélisation des mécanismes doit conduire à obtenir un schéma cinématique paramétré afin de déterminer des relations entre les mouvements. Il conviendra de ne pas représenter les mécanismes dans des positions particulières qui ne permettraient pas de faire apparaître certaines données (2 pièces alignées induisant un angle nul etc).

1.IV.3.a Méthode

Pour modéliser un mécanisme, après avoir identifié les classes d'équivalence et les liaisons entre elles, on procède dans l'ordre suivant :

- Dessiner un repère
- Placer les éléments géométriques des liaisons entre les classes d'équivalence
- Dessiner les liaisons normalisées
- Dessiner les classes d'équivalence

1.IV.3.b Modélisation des classes d'équivalence

Les classes d'équivalence sont représentées à l'aide d'un trait ou d'un ensemble de traits reliés entre eux.

Cas particulier du bâti : Dans le cas d'un bâti, il est possible de ne pas représenter la classe d'équivalence d'un seul tenant. Dans ce cas, chaque portion du bâti devra contenir le symbole de fixation associé.

Les traits doivent être liés aux lieux géométriques des liaisons entre la classe d'équivalence étudiée et les autres classes d'équivalence du mécanisme. Il est donc nécessaire, dans un premier temps, d'analyser les surfaces en contact avec d'autres pièces afin de définir les éléments géométriques des liaisons (Points, Droites, Plans) et de les positionner.

Ensuite, les traits doivent permettre de mettre en évidence facilement des données géométriques importantes telles que des longueurs, rayons…

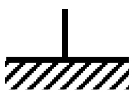
Enfin, ils doivent rejoindre d'éventuels lieux où des données sont présentes ou recherchées (point d'application d'une force, lieu de calcul d'une vitesse…).

1.IV.3.c Modélisation des liaisons

Lorsque chaque classe d'équivalence est modélisée, les lieux géométriques des liaisons avec les autres pièces du mécanisme sont normalement positionnés, il reste alors à ajouter le modèle de chaque liaison usuelle parmi celles vues précédemment.

Remarques :

- Une liaison est toujours l'assemblage de deux parties qui peuvent indépendamment être liées à chacune des deux pièces.
- On ajoute au bâti un élément graphique permettant de préciser qu'il est fixe.



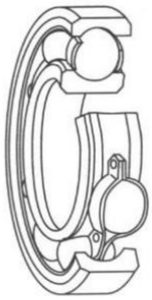
1.IV.3.d Mise en place du schéma cinématique

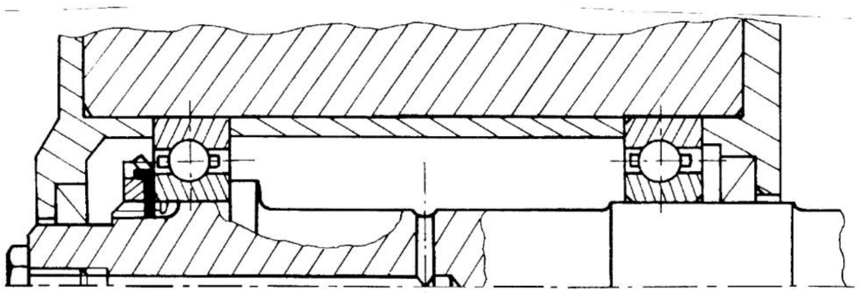
Il reste alors à créer le schéma cinématique du système complet en assemblant les différents modèles des classes d'équivalence et les liaisons normalisées associées. Attention à ne pas représenter le système dans une position particulière qui ne permettrait pas un bon paramétrage (angles ou longueurs nulles…)

Remarque : un schéma cinématique est un schéma contenant des pièces représentées par un ensemble de traits et des liaisons normalisées. On trouve cependant deux schémas cinématiques spécifiques :

- Schéma d'architecture : schéma cinématique représentant l'ensemble des liaisons réelles à l'échelle étudiée (utile en dimensionnement : statique, dynamique)
- Schéma cinématique minimal : schéma cinématique composé d'un nombre minimum de liaisons permettant de représenter le fonctionnement cinématique du système (utile en cinématique)

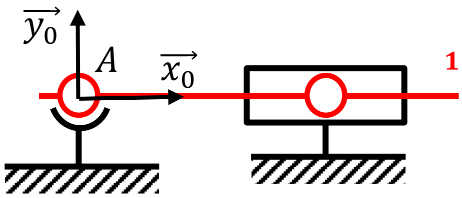
Prenons l'exemple d'un arbre guidé en rotation par deux roulements :



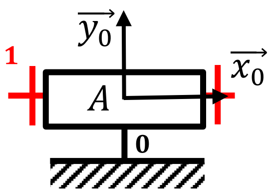


Chaque roulement présente un léger rotulage qui induit 3 degrés de liberté en rotation. Selon les arrêts axiaux réalisés sur chacune des bagues des deux roulements, la translation selon l'axe de l'arbre est possible ou non. Dans les montages classiques comme celui-proposé ci-dessus, un roulement comporte une bague complètement arrêtée axialement et l'autre possède une bague libre en translation axialement. On va donc modéliser le roulement complètement arrêté par une rotule et le roulement présentant une translation par une liaison linéaire annulaire.

Le schéma d'architecture du montage est le schéma cinématique représentant les différentes liaisons réelles entre l'arbre et le bâti selon le point de vue choisi, ici un dimensionnement des deux roulements :



Le schéma cinématique minimal est le schéma représentant la liaison équivalente (cf fin du chapitre), c'est-à-dire une liaison pivot :



Le schéma cinématique minimal est le schéma cinématique le plus simple à utiliser lors d'une étude cinématique d'un mécanisme car il représente au plus simple les mouvements existants.

Le schéma d'architecture a pour objectif de dimensionner les liaisons réelles en prenant en compte les différents éléments réels qui réalisent une liaison. Le schéma d'architecture que nous venons de proposer pour le montage de l'arbre sur deux roulements permet de dimensionner chacun des roulements en statique (et en dynamique) en calculant les efforts auxquels ils sont soumis. Selon le point de vue du problème traité, le schéma d'architecture peut être différent. Si l'on souhaite

- calculer les efforts dans les deux roulements, on propose le schéma précédent
- calculer les actions aux contacts entre chaque bille et les bagues du roulement, il faudrait faire un schéma d'architecture encore plus précis modélisant l'intégralité des billes et des bagues du roulement

1.IV.4 Paramétrage

Le paramétrage d'un mécanisme est nécessaire afin de mener son étude. Il consiste à préciser sur le schéma cinématique l'ensemble des éléments utiles à sa description précise.

Nous traiterons généralement des mécanismes plans (2D ou à représentation cinématique plane d'un mécanisme 3D). Dans ce cas, toutes les translations ont lieu dans un plan unique et l'unique rotation possible a un axe normal au plan. Dans ce cas, généralement, nous nous placerons dans le plan composé de vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Nous allons introduire le paramétrage 2D et 3D afin de pouvoir traiter n'importe quel problème.

1.IV.4.a Paramétrage 2D

Compte tenu des liaisons possibles en 2D vues précédemment, chaque liaison peut présenter :

- 1 rotation autour de $\vec{z}$ (Pivot)
- 1 translation dans le plan (glissière)
- 1 translation dans le plan et 1 rotation autour de $\vec{z}$ (Ponctuelle)

1.IV.4.a.i Conventions

Lors du traitement de mécanismes plans, nous adopterons ces conventions :

	Fixes	**Paramètres**
Longueurs	L_i	$\lambda_{j/i}$
Angles	α_i	$\theta_{j/i}$
Vecteurs liés aux pièces	$\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i}$	$\vec{u_i}, \vec{v_i}, \vec{w_i}$

Pour les mécanismes plans, nous représenterons par convention le mécanisme avec des rotations autours des vecteurs $\vec{z_i}$ qui sont tous égaux, « venant vers nous »

Dans le cas des mécanismes plans, on a l'égalité :

$$R_{ji} = \dot{\theta}_{ji}$$

Dans le cas des mécanismes 3D pour les liaisons pivot (1 seul axe de rotation), on peut avoir le paramétrage angulaire :

$$P_{ji} = \dot{\theta}_{ji} \; ou \; Q_{ji} = \dot{\theta}_{ji} \; ou \; R_{ji} = \dot{\theta}_{ji}$$

1.IV.4.a.ii Paramétrage

Pour paramétrer un mécanisme plan, il faut définir :

- Les points caractéristiques (A, B, C…)
- Les numéros des pièces (1,2,3…)
- Les repères liés à chaque pièce $(\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$. En plan, on supposera toujours que les rotations se font autour des vecteurs $\vec{z_i} \forall i$, tous égaux, et on essaiera autant que possible d'associer au moins l'un des vecteurs $\vec{x_i}$ ou $\vec{y_i}$ à des éléments géométriques des pièces associées aux bases en question
- Les longueurs fixes : L_i pour la pièce i – Eventuellement L_{i1}, L_{i2}… pour d'autres longueurs dans la pièce i
- Les vecteurs fixes s'ils existent $(\vec{u_i}, \vec{v_i}, \vec{w_i})$ et les angles fixes non orientés associés α_i associés à classe d'équivalence i
- Les angles variables θ_{ji} associés à chaque liaison pivot et leurs flèches orientées, généralement mises du côté où l'angle est inférieur à 180°. Le signe est défini de base par le sens de rotation autour des vecteurs $\vec{z}$
- Les longueurs variables λ_{ji} avec la convention de signe définie en posant la définition du vecteur associé : $\overrightarrow{AB} = \lambda_{ji}\vec{x_i}$ (on pourra consulter le document sur le rappel des conventions pour la définition de vecteurs). Contrairement aux angles qui sont orientés par convention en plan par les vecteurs $\vec{z_i}$, les longueurs sont définies sur une droite dont le sens n'est pas défini.

Remarque : Lorsque l'on définit la position d'une pièce j par rapport à une pièce i, le paramètre $\theta_{j/i}$ ou λ_{ji} doit être défini en partant de i pour aller à j et on pose la flèche associée.

1.IV.4.b Paramétrage 3D

Dans les mécanismes 3D, il est possible d'avoir des liaisons qui présentent :

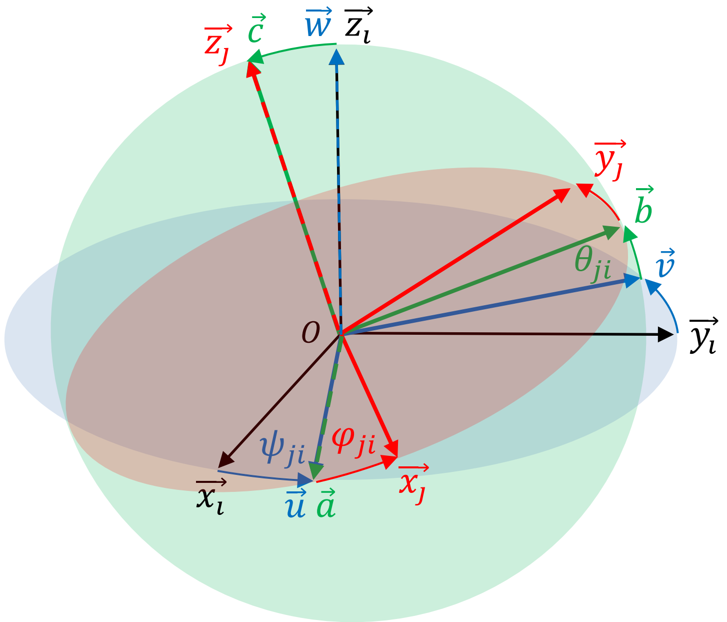
- Plusieurs translations dans différentes directions de l'espace
- Plusieurs rotations dans les différentes directions de l'espace

Il va donc falloir pouvoir paramétrer ces différents mouvements.

1.IV.4.b.i Angles d'Euler

Tout ce que nous avons proposé précédemment pour le paramétrage plan est à reprendre, en modifiant le paramétrage des angles et longueurs variables :

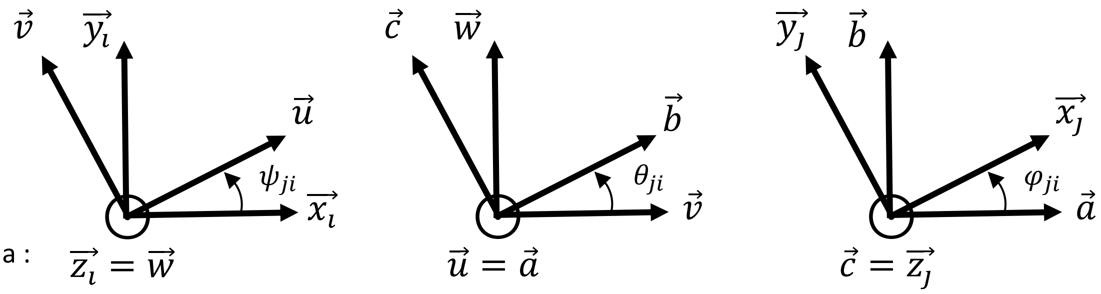
- Pour les longueurs, on introduira simplement des paramètres du type : ${\lambda^x}_{ji}$, ${\lambda^y}_{ji}$ et ${\lambda^z}_{ji}$
- Pour les rotations, on introduira les angles d'Euler



Les 3 rotations successives s'appellent :

- La précession $\psi_{ji} = \widehat{(\vec{x_i},\vec{u})} = \widehat{(\vec{y_i},\vec{v})}$ autour de l'axe $(0,\vec{z_i}) = (0,\vec{w})$ transforme $\mathfrak{B}_i(\vec{x_i},\vec{y_i},\vec{z_i})$ en $\mathfrak{B}_{uvw}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$
- La nutation $\theta_{ji} = \widehat{(\vec{v},\vec{b})} = \widehat{(\vec{w},\vec{c})}$ autour de l'axe $(0,\vec{u}) = (0,\vec{a})$ transforme $\mathfrak{B}_{uvw}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ en $\mathfrak{B}_{abc}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
- La rotation propre $\varphi_{ji} = \widehat{(\vec{a},\vec{x_j})} = \widehat{(\vec{b},\vec{y_j})}$ autour de l'axe $(0,\vec{c}) = (0,\vec{z_j})$ transforme $\mathfrak{B}_{abc}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ en $\mathfrak{B}_j(\vec{x_j},\vec{y_j},\vec{z_j})$

On a :



$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\psi_{ji}\,\vec{x_i} + \sin\psi_{ji}\,\vec{y_i} \\ \vec{v} = -\sin\psi_{ji}\,\vec{x_i} + \cos\psi_{ji}\,\vec{y_i} \\ \vec{w} = \vec{z_i} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{a} = \vec{u} \\ \vec{b} = \cos\theta_{ji}\,\vec{v} + \sin\theta_{ji}\,\vec{w} \\ \vec{c} = -\sin\theta_{ji}\,\vec{v} + \cos\theta_{ji}\,\vec{w} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{x_j} = \cos\varphi_{ji}\,\vec{a} + \sin\varphi_{ji}\,\vec{b} \\ \vec{y_j} = -\sin\varphi_{ji}\,\vec{a} + \cos\varphi_{ji}\,\vec{b} \\ \vec{z_j} = \vec{c} \end{cases}$$

On peut exprimer le vecteur rotation entre les solides i et j ainsi : $\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \dot{\psi}_{ji}\vec{z_i} + \dot{\theta}_{ji}\vec{u} + \dot{\varphi}_{ji}\vec{c}$

1.IV.4.b.ii Projections et matrices de changement de base

• Matrice de passage entre deux bases

Rappel : Une matrice de rotation permet de transformer un vecteur d'une base i dans une base j lorsqu'il existe entre celles-ci une rotation. On écrit verticalement les vecteurs de la nouvelle base j dans l'ancienne base i. On l'appelle « matrice de passage de la base i vers la base j ».

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_j} = X_x\overrightarrow{x_i} + Y_x\overrightarrow{y_i} + Z_x\overrightarrow{z_i} \\ \overrightarrow{y_j} = X_y\overrightarrow{x_i} + Y_y\overrightarrow{y_i} + Z_y\overrightarrow{z_i} \\ \overrightarrow{z_j} = X_z\overrightarrow{x_i} + Y_z\overrightarrow{y_i} + Z_z\overrightarrow{z_i} \end{cases} \quad R_{ji} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \overrightarrow{x_j} & \overrightarrow{y_j} & \overrightarrow{z_j} \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{bmatrix} & \begin{matrix} \overrightarrow{x_i} \\ \overrightarrow{y_i} \\ \overrightarrow{z_i} \end{matrix} \end{array}$$

Lorsqu'elle est appliquée au vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, la matrice R_{ji} donne :

$$\begin{bmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix}$$

Elle permet donc transformer le vecteur $\overrightarrow{x_j}$ exprimé dans la base j en le vecteur $\overrightarrow{x_j}$ exprimé dans la base i.

$$\mathfrak{B}_j \underset{R_{ji}}{\rightarrow} \mathfrak{B}_i$$

La matrice de passage de la base i à la base j transforme donc un vecteur de $\mathfrak{B}_j$ en le même vecteur exprimé dans $\mathfrak{B}_i$.

Remarque : la matrice de passage inverse est obtenue par transposée de la matrice obtenue :

$$\mathfrak{B}_i \underset{R_{ij}}{\rightarrow} \mathfrak{B}_j$$

$$\boldsymbol{R_{ji} = {R_{ij}}^{-1} = R_{ij}}$$

• Application au changement de base avec les angles d'Euler

Les matrices de rotation de chacune de ces rotations s'écrivent ainsi :

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} & -\sin\psi_{ji} & 0 \\ \sin\psi_{ji} & \cos\psi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji} \\ 0 & \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix} \quad R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 \\ \sin\varphi_{ji} & \cos\varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{B}_j \underset{R_\varphi}{\rightarrow} \mathfrak{B}_{uvw} \underset{R_\theta}{\rightarrow} \mathfrak{B}_{abc} \underset{R_\psi}{\rightarrow} \mathfrak{B}_i$$

On a alors :

$$\mathfrak{B}_j \underset{R_{ji}=R_\psi R_\theta R_\varphi}{\rightarrow} \mathfrak{B}_i$$

La matrice de rotation du mouvement complet s'obtient par produit de ces 3 matrices :

$$R_{ji} = R_\psi R_\theta R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} & -\sin\psi_{ji} & 0 \\ \sin\psi_{ji} & \cos\psi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji} \\ 0 & \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 \\ \sin\varphi_{ji} & \cos\varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{ji} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} & -\sin\psi_{ji} & 0 \\ \sin\psi_{ji} & \cos\psi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 \\ \cos\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & -\sin\theta_{ji} \\ \sin\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}$$

$$R_{ji} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji}\cos\varphi_{ji} - \sin\psi_{ji}\cos\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & -\cos\psi_{ji}\sin\varphi_{ji} - \sin\psi_{ji}\cos\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & \sin\psi_{ji}\sin\theta_{ji} \\ \sin\psi_{ji}\cos\varphi_{ji} + \cos\psi_{ji}\cos\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & -\sin\psi_{ji}\sin\varphi_{ji} + \cos\psi_{ji}\cos\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & -\cos\psi_{ji}\sin\theta_{ji} \\ \sin\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}$$

On a donc verticalement les coordonnées des vecteurs de la base j dans la base i. Ces formules ne sont pas à connaître et sont données afin d'être utilisées si nécessaire.

• **Expression projetée de la vitesse de rotation**

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \dot\psi_{ji}\overrightarrow{z_i} + \dot\theta_{ji}\vec{u} + \dot\varphi_{ji}\vec{c} = \omega_x^i\overrightarrow{x_i} + \omega_y^i\overrightarrow{y_i} + \omega_z^i\overrightarrow{z_i} = \omega_x^j\overrightarrow{x_j} + \omega_y^j\overrightarrow{y_j} + \omega_z^j\overrightarrow{z_j}$$

Dans la base $\mathfrak{B}_i$:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} \\ \sin\psi_{ji} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} ; \vec{v} = \begin{bmatrix} -\sin\psi_{ji} \\ \cos\psi_{ji} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} ; \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} ; \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_{uvw}} = \begin{bmatrix} \sin\theta_{ji}\sin\psi_{ji} \\ -\sin\theta_{ji}\cos\psi_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \dot\psi_{ji}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} + \dot\theta_{ji}\begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} \\ \sin\psi_{ji} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} + \dot\varphi_{ji}\begin{bmatrix} \sin\theta_{ji}\sin\psi_{ji} \\ -\sin\theta_{ji}\cos\psi_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \begin{bmatrix} \omega_x^i \\ \omega_y^i \\ \omega_z^i \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} = \begin{bmatrix} \dot\theta_{ji}\cos\psi_{ji} + \dot\varphi_{ji}\sin\theta_{ji}\sin\psi_{ji} \\ \dot\theta_{ji}\sin\psi_{ji} - \dot\varphi_{ji}\sin\theta_{ji}\cos\psi_{ji} \\ \dot\psi_{ji} + \dot\varphi_{ji}\cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

Dans la base $\mathfrak{B}_j$:

$$\vec{u} = \vec{a} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} \\ -\sin\varphi_{ji} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_j} ; \vec{b} = \begin{bmatrix} \sin\varphi_{ji} \\ \cos\varphi_{ji} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_j} ; \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_j} ; \overrightarrow{z_i} = \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_{abc}} = \begin{bmatrix} \sin\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} \\ \sin\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_j}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \dot\psi_{ji}\begin{bmatrix} \sin\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} \\ \sin\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_j} + \dot\theta_{ji}\begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} \\ -\sin\varphi_{ji} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_j} + \dot\varphi_{ji}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_j}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \begin{bmatrix} \omega_x^j \\ \omega_y^j \\ \omega_z^j \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} = \begin{bmatrix} \dot\psi_{ji}\sin\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} + \dot\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} \\ \dot\psi_{ji}\sin\theta_{ji}\cos\varphi_{ji} - \dot\theta_{ji}\sin\varphi_{ji} \\ \dot\psi_{ji}\cos\theta_{ji} + \dot\varphi_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_j}$$

• **Expression des dérivées des angles d'Euler**

En général, un accéléromètre mesure les accélérations de la pièce j dans la base $\mathfrak{B}_j$ et on souhaite mettre en relation les 3 accélérations ω_x^j, ω_y^j et ω_z^j avec les vitesses dans les 3 liaisons pivots $\dot{\psi}_{ji}$, $\dot{\theta}_{ji}$ et $\dot{\varphi}_{ji}$.

En partant de l'expression $\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \dot{\psi}_{ji}\vec{z_i} + \dot{\theta}_{ji}\vec{u} + \dot{\varphi}_{ji}\vec{c} = \omega_x^j\vec{x_j} + \omega_y^j\vec{y_j} + \omega_z^j\vec{z_j}$, il faut réaliser des projections bien choisies.

Pour $\dot{\psi}_{ji}$:

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}}.\vec{b} = \dot{\psi}_{ji}\vec{z_i}.\vec{b} + \dot{\theta}_{ji}\vec{u}.\vec{b} + \dot{\varphi}_{ji}\vec{c}.\vec{b} = \dot{\psi}_{ji}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{ji}\right) = \dot{\psi}_{ji}\sin\theta_{ji}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}}.\vec{b} = \omega_x^j\vec{x_j}.\vec{b} + \omega_y^j\vec{y_j}.\vec{b} + \omega_z^j\vec{z_j}.\vec{b} = \omega_x^j\sin\varphi_{ji} + \omega_y^j\cos\varphi_{ji}$$

$$\Rightarrow \dot{\psi}_{ji}\sin\theta_{ji} = \omega_x^j\sin\varphi_{ji} + \omega_y^j\cos\varphi_{ji}$$

$$\boldsymbol{\dot{\psi}_{ji} = \frac{\omega_x^j\sin\varphi_{ji} + \omega_y^j\cos\varphi_{ji}}{\sin\theta_{ji}}}$$

Pour $\dot{\theta}_{ji}$:

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}}.\vec{a} = \dot{\psi}_{ji}\vec{z_i}.\vec{a} + \dot{\theta}_{ji}\vec{u}.\vec{a} + \dot{\varphi}_{ji}\vec{c}.\vec{a} = \dot{\theta}_{ji}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}}.\vec{a} = \omega_x^j\vec{x_j}.\vec{a} + \omega_y^j\vec{y_j}.\vec{a} + \omega_z^j\vec{z_j}.\vec{a} = \omega_x^j\cos\varphi_{ji} - \omega_y^j\sin\varphi_{ji}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\dot{\theta}_{ji} = \omega_x^j\cos\varphi_{ji} - \omega_y^j\sin\varphi_{ji}}$$

Pour $\dot{\varphi}_{ji}$:

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}}.\vec{v} = \dot{\psi}_{ji}\vec{z_i}.\vec{v} + \dot{\theta}_{ji}\vec{u}.\vec{v} + \dot{\varphi}_{ji}\vec{c}.\vec{v} = -\dot{\varphi}_{ji}\sin\theta_{ji}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}}.\vec{v} = \omega_x^j\vec{x_j}.\vec{v} + \omega_y^j\vec{y_j}.\vec{v} + \omega_z^j\vec{z_j}.\vec{v}$$

$$= \omega_x^j\begin{bmatrix}\cos\varphi_{ji}\\ \sin\varphi_{ji}\\ 0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_{abc}} . \begin{bmatrix}0\\ \cos\theta_{ji}\\ -\sin\theta_{ji}\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_{abc}} + \omega_y^j\begin{bmatrix}-\sin\varphi_{ji}\\ \cos\varphi_{ji}\\ 0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_{abc}} . \begin{bmatrix}0\\ \cos\theta_{ji}\\ -\sin\theta_{ji}\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_{abc}} - \omega_z^j\sin\theta_{ji}$$

$$= \omega_x^j\sin\varphi_{ji}\cos\theta_{ji} + \omega_y^j\cos\varphi_{ji}\cos\theta_{ji} - \omega_z^j\sin\theta_{ji}$$

$$\Rightarrow -\dot{\varphi}_{ji}\sin\theta_{ji} = \omega_x^j\sin\varphi_{ji}\cos\theta_{ji} + \omega_y^j\cos\varphi_{ji}\cos\theta_{ji} - \omega_z^j\sin\theta_{ji}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_{ji} = -\omega_x^j\sin\varphi_{ji}\frac{\cos\theta_{ji}}{\sin\theta_{ji}} - \omega_y^j\cos\varphi_{ji}\frac{\cos\theta_{ji}}{\sin\theta_{ji}} + \omega_z^j$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\dot{\varphi}_{ji} = \omega_z^j - \frac{\omega_x^j\sin\varphi_{ji} + \omega_y^j\cos\varphi_{ji}}{\tan\theta_{ji}}}$$

1.IV.5 Graphe des liaisons

Le **graph des liaisons**, ou **graph de structure**, est un outil indispensable pour la résolution des mécanismes. Il permet d'élaborer des stratégies de résolution des mécanismes.

La seule donnée d'un graphe des liaisons complet et de la géométrie du mécanisme (vecteurs entre ses points caractéristiques) permet de traiter celui-ci en géométrie et en cinématique sans même avoir recours à son schéma cinématique.

On représente chaque classe d'équivalence (pièce ou groupe de pièce sans mouvements relatifs) par un cercle contenant le numéro de celle-ci.

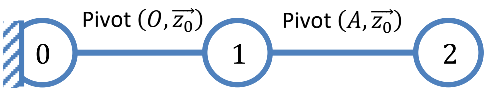
Concernant le bâti :

- on ajoute un élément graphique permettant de montrer qu'il est fixe 
- on ne le représente qu'une seule fois !

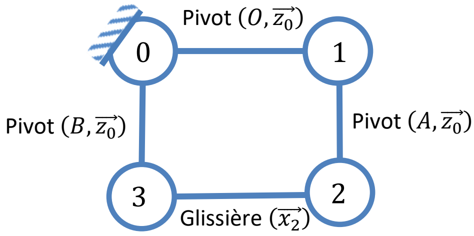
On représente chaque liaison entre les classes d'équivalence par un trait entre les 2 cercles correspondant. Auprès de chaque liaison, on indique les caractéristiques géométriques importantes (point central, axe, plan…) précisés dans le tableau des liaisons.

Exemples :

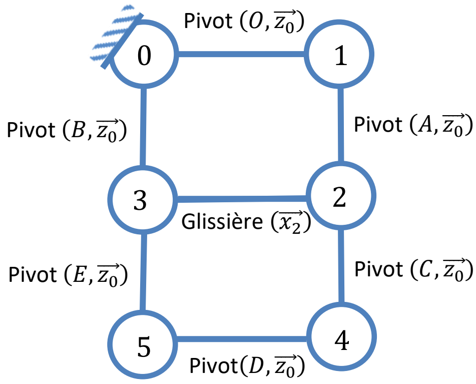
Chaine ouverte



Chaine simple fermée



Chaine complexe fermée



Il est d'usage de faire un premier graphe des liaisons en brouillon afin de bien présenter une version définitive.

Enfin, ce n'est pas obligatoire, on représente en couleur la/les liaison(s) où une entrée cinématique est imposée.

1.V. Résolution des mécanismes

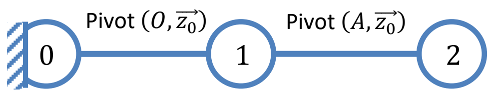
1.V.1 Contexte

On distingue les mécanismes en chaîne ouverte et en chaîne fermée. La résolution des mécanismes s'applique aux chaînes fermées.

1.V.1.a Chaîne ouverte

Lorsqu'un mécanisme est en chaîne ouverte, les pièces se succèdent et chaque degré de liberté des liaisons qui le composent doit être motorisée, pilotée, afin d'assurer les mouvements de la chaîne.

Son graphe des liaisons est de la forme :

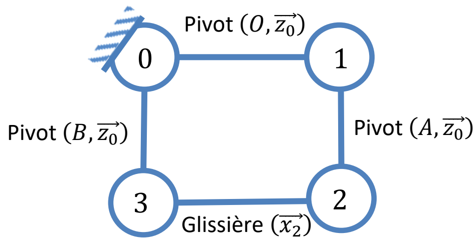


Nous avons précédemment introduit tous les outils nécessaires à l'étude des chaînes ouvertes et ce n'est donc pas l'objet de ce paragraphe.

1.V.1.b Chaîne fermée

Lorsqu'un mécanisme est en chaîne fermée, il existe des relations entre les différents mouvements. Bien qu'il y ait n degrés de liberté, il existe une relation entre eux et le seul pilotage d'un seul d'entre eux peut permettre de piloter le déplacement de l'ensemble des pièces du système.

Son graphe des liaisons est de la forme :



Dans les mécanismes complexes, il peut y avoir plusieurs chaînes.

On peut simplement déterminer leur nombre appelé **nombre cyclomatique** et noté γ :

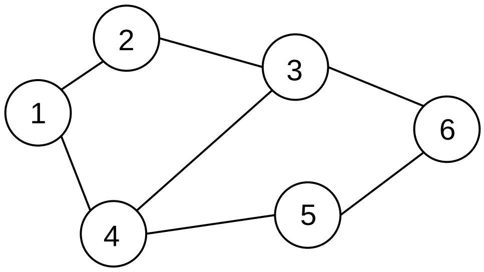
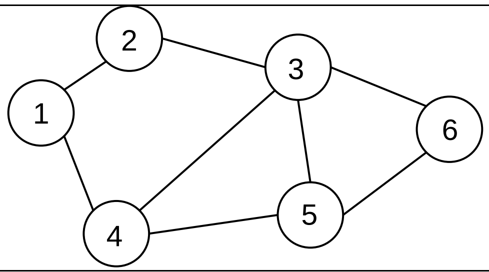
$$\gamma = L - p + 1$$

L : nombre de liaisons

p : nombre de solides dont le bâti

Le nombre cyclomatique correspond au **nombre de chaînes indépendantes** d'un système, c'est à dire le nombre de chaînes nécessaires et suffisantes qu'il faut étudier pour l'étude cinématique complète d'un mécanisme.

Exemples :

1		$L = 7$ $P = 6$ $\gamma = 7 - 6 + 1 = 2$ Etude de 12341 & 34563 Ou 12341 & 1236541 Ou 34563 & 1236541
2		$L = 8$ $P = 6$ $\gamma = 8 - 6 + 1 = 3$ Etude de 12341 & 3453 & 3653 Ou 6 autres possibilités !

Généralement, on étudie les γ chaines les plus simples.

1.V.1.c Etude des mécanismes

C'est dans le cas des chaînes fermées qu'il va falloir déterminer les relations qui existent entre les différents paramètres géométriques et cinématiques. Il existe différentes méthodes pour cela :

- Fermeture (de chaine) géométrique
- Fermeture (de chaine) cinématique
- Cinématique graphique

En général, l'objectif est d'obtenir une relation entre entrée et sortie d'un mécanisme.

Il faudra mener autant d'études (fermeture géométriques et cinématique) qu'il y a de chaînes fermées.

1.V.2 Particularités des méthodes

1.V.2.a Fermeture géométrique

La fermeture géométrique a pour but d'obtenir les relations entre les différents paramètres géométriques des mécanismes (longueurs et angles variables associés aux liaisons). Elle permet en particulier de déterminer les relations entre entrée e et sortie s. Les inconnues de cette résolution sont les paramètres géométriques des liaisons (angles, longueurs).

En appliquant la fermeture géométrique, on obtient une relation entrée/sortie qui peut être

- Explicite : $s = f(e)$ ou $e = f(s)$ (cf Bielle/Manivelle)
  $\Rightarrow$ Obtention soit de la formule directement, soit de la courbe $s = f(e)$ directement par symétrie de $e = f(s)$

- Implicite : $f(e,s)=0$ – exemple : $\cos e \sin s + \sqrt{e \cos s + L} = 0$
  ⇒ Résolution numérique (ou mathématique compliquée)

La fermeture géométrique permet d'obtenir la relation cinématique (vitesse et vitesse de rotation) par dérivation temporelle des relations obtenues.

Bien que la solution cinématique puisse être obtenue par fermeture géométrique puis dérivation, lorsque seule la relation cinématique est demandée, il est bien plus rapide de faire une fermeture cinématique.

1.V.2.b Fermeture cinématique

La fermeture cinématique a pour but d'obtenir les relations entre les différents paramètres cinématiques des mécanismes (vitesses et vitesses de rotation associées aux liaisons). Elle permet en particulier d'obtenir une relation **toujours explicite** entre l'entrée et la sortie.

Les inconnues de cette résolution sont les paramètres cinématiques des liaisons (vitesses, vitesses de rotation).

Lorsque l'on effectue une fermeture cinématique, on présuppose qu'une fermeture géométrique a été réalisée avant et que les **paramètres géométriques sont connus**.

Remarque : pour obtenir la même expression littérale des relations entre inconnues cinématiques par les deux méthodes (dérivation de la fermeture géométrique, fermeture cinématique), il est vivement conseillé d'effectuer les mêmes choix de bases de projections au risque de devoir manipuler des formules trigonométriques très complexes. Toutefois, cette règle n'est pas toujours vraie.

1.V.2.c Cinématique graphique

La cinématique graphique permet de déterminer des vitesses pour **des problèmes plans dans des situations particulières**. En effet, les relations obtenues ne seront vraies que pour la situation dessinée.

La cinématique graphique ne permet pas que de résoudre les mécanismes, elle permet aussi de déterminer des vitesses dans le cas de chaînes ouvertes.

1.V.3 Fermeture géométrique

La fermeture géométrique consiste en l'établissement de deux relations :

- Relation de Chasles sur les vecteurs du système en partant d'un point et en arrivant au même point en passant par tous les points intermédiaires décrivant la chaîne étudiée qui sera nulle
- Fermeture angulaire en partant d'une base et en allant à la même base en décrivant tous les mouvements de rotation intermédiaires dont la somme sera nulle

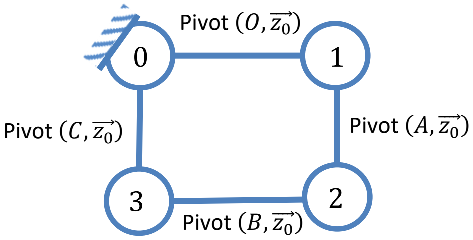
En écrivant ces deux relations, on obtient un système de 6 équations (3 en mécanismes plans) qu'il faut résoudre afin de déterminer les relations souhaitées, en particulier la relation entrée/sortie.

Généralement, on applique la fermeture géométrique sur des mécanismes plans. L'application 3D est plus complexe, et sera simplement présentée.

1.V.3.a Mécanismes plans

1.V.3.a.i Relations de Chasles

Prenons l'exemple d'un mécanisme possédant plusieurs points caractéristiques (O, A, B, C) décrit par le graphe des liaisons suivant :



- **Relation de Chasles**

La fermeture géométrique va conduire à écrire **l'équation vectorielle** suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}\ (Chasles)}$$

Le principe consiste à partir d'un point d'une liaison de la chaîne étudiée, de faire le tour de la chaîne en passant par les points de chaque liaison, et de revenir au point de départ.

Ensuite, exprimer chaque vecteur en fonction des paramètres géométriques du mécanisme :

$$ex: L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} \dots = \vec{0}$$

Dans le cas des mécanismes plans, après avoir détaillé ces différents vecteurs en fonction du paramétrage du mécanisme, on choisit une base $\mathfrak{B}_i$ de projection afin d'obtenir deux **équations scalaires** :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\overrightarrow{x_i} = 0 \\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\overrightarrow{y_i} = 0 \end{cases}$$

- **Fermeture angulaire**

La fermeture géométrique va conduire à écrire **l'équation scalaire** faisant intervenir toutes les rotations le la chaîne étudiée (relation de Chasles angulaire pour les mécanismes plans) :

$$\boxed{(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_0}}) = 0}$$

Ce résultat simple est issu du fait qu'en mécanismes plans, tous les mouvements de rotations ont lieu selon le même axe $\vec{z}$.

1.V.3.a.ii Résolution des systèmes obtenus

• Formes des systèmes à résoudre

Tout mécanisme plan à une chaîne cinématique $(\gamma = 1)$ composé d'une mobilité (un mouvement imposé permet de déterminer tous les mouvements du mécanisme) sera toujours composé au maximum de 4 inconnues de liaisons, soit translations, soit rotations (nous verrons cela dans un prochain paragraphe concernant la résolution par fermeture cinématique). Ci-dessous, nous proposons un tableau récapitulant toutes les solutions de mécanismes plans possible (2 premières colonnes) :

Liaisons	Nombre de pièces P	Nombre de rotations
4 pivots	$P = 4$	4
4 glissières	$P = 4$	0
3 pivots 1 glissière	$P = 4$	3
3 glissières 1 pivot	$P = 4$	3
2 glissières 2 pivots	$P = 4$	2
1 ponctuelle 2 pivots	$P = 3$	2
1 ponctuelle 2 glissières	$P = 3$	1
1 ponctuelle 1 glissière 1 pivot	$P = 3$	2
2 ponctuelles	$P = 2$	2

Selon le nombre de rotations, nous obtiendrons des relations de Chasles de la fermeture géométrique plus ou moins simples à résoudre. En effet, à chaque rotation correspondra en projection dans une base, un cos et sin d'un angle variable.

En supposant qu'au passage dans chaque pièce, on utilise un unique vecteur du point d'entrée au point de sortie. Voici à qui ressembleront les équations non projetées et les équations projetées associées à chaque fermeture selon le nombre de rotations présentes :

4 rotations Ij jk kl li	$a\overrightarrow{x_i} + b\overrightarrow{x_j} + c\overrightarrow{x_k} + d\overrightarrow{x_l} = \vec{0}$	$\begin{cases} u\cos\theta_j + v\cos\theta_k + w\cos\theta_l + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + v\sin\theta_k + w\sin\theta_l + t_y = 0 \end{cases}$
3 rotations Ij jk ki	$a\overrightarrow{x_i} + b\overrightarrow{x_j} + c\overrightarrow{x_k} = \vec{0}$	$\begin{cases} u\cos\theta_j + v\cos\theta_k + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + v\sin\theta_k + t_y = 0 \end{cases}$
2 rotations Ij ji	$a\overrightarrow{x_i} + b\overrightarrow{x_j} = \vec{0}$	$\begin{cases} u\cos\theta_j + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + t_y = 0 \end{cases}$

- On choisira évidemment de projeter dans l'une des bases i,j,k ou l
- u, v, w, t_x, t_y sont soit variables, soit constants, en fonction des problèmes traités.
- Pour les mécanismes plans à une mobilité, il n'y aura toujours que 4 variables (inconnues) parmi ces paramètres

Attention, selon le choix de la base de projection, on peut ou non faire apparaître des équations qui simplifieront la résolution par la suite, on saura la choisir avec l'expérience…

• **Cas de 2 rotations**

$$\begin{cases} u\cos\theta_j + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + t_y = 0 \end{cases}$$

Supposons par exemple que l'on cherche la relation entre u et θ_j, t_x et t_y constants :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}\cos\boldsymbol{\theta_j} + t_x = 0 \\ \boldsymbol{u}\sin\boldsymbol{\theta_j} + t_y = 0 \end{cases}$$

On a immédiatement :

$$\begin{cases} u = -\dfrac{t_x}{\cos\theta_j} \\ u = -\dfrac{t_y}{\sin\theta_j} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \theta_j = \pm\cos^{-1}\left(-\dfrac{t_x}{u}\right) \\ \theta_j = \begin{cases} \sin^{-1}\left(-\dfrac{t_y}{u}\right) \\ \pi - \sin^{-1}\left(-\dfrac{t_y}{u}\right) \end{cases} \end{cases}$$

• **Cas de 3 rotations**

$$\begin{cases} u\cos\theta_j + v\cos\theta_k + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + v\sin\theta_k + t_y = 0 \end{cases}$$

Supposons par exemple le cas classique d'un système bielle/manivelle où l'on cherche la relation entre θ_k et t_y avec t_y, θ_j, θ_k des variables et t_x, u, v des constantes :

$$\begin{cases} u\cos\boldsymbol{\theta_j} + v\cos\boldsymbol{\theta_k} + t_x = 0 \\ u\sin\boldsymbol{\theta_j} + v\sin\boldsymbol{\theta_k} + \boldsymbol{t_y} = 0 \end{cases}$$

Il existe deux méthodes qui seront vues en TD sur le système Bielle/Manivelle.

Soit à l'aide de la première équation, on exprime $\cos\theta_k$ puis on remplace $\sin\theta_k = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta_k}$ dans la seconde équation. Sinon, on exprime $\cos\theta_k$ et $\sin\theta_k$ puis on écrit $\cos^2\theta_k + \sin^2\theta_k = 1$

Remarque : pour déterminer laquelle des solutions est la bonne lorsqu'il y a un $\pm$, il suffit d'isoler la racine d'un côté de l'équation $\pm\sqrt{\dots} = \cdots$ et d'étudier le signe de ce qui est devant l'égalité dans le cas du mécanisme étudié afin de trouver la bonne solution. D'autres montages du mécanisme justifient la présence de plusieurs solutions (cf TD Bielle Manivelle).

• **Cas de 4 rotations**

$$\begin{cases} u\cos\theta_j + v\cos\theta_k + w\cos\theta_l + t_x = 0 \\ u\sin\theta_j + v\sin\theta_k + w\sin\theta_l + t_y = 0 \end{cases}$$

Supposons le cas d'un système à 4 pivots, les 3 angles sont variables, les autres données sont des constantes. Ce cas est le plus complexe. Il est nécessaire d'identifier la relation souhaitée, par exemple la relation entre θ_j et θ_l, de faire disparaître le paramètre non souhaité.

$$\begin{cases} u\cos\boldsymbol{\theta_j} + v\cos\boldsymbol{\theta_k} + w\cos\boldsymbol{\theta_l} + t_x = 0 \\ u\sin\boldsymbol{\theta_j} + v\sin\boldsymbol{\theta_k} + w\sin\boldsymbol{\theta_l} + t_y = 0 \end{cases}$$

Remarque : Le choix de la base de projection a de l'importance si l'on souhaite n'avoir que du θ_j et du θ_k dans les cos et sin !

On exprime $\cos\theta_k$ et $\sin\theta_k$ dans les deux équations, on utilise la formule $\cos^2\theta_k + \sin^2\theta_k = 1$, on simplifie l'expression, puis on doit utiliser des formules mathématiques. Cette résolution est assez complexe, les outils nécessaires sont les suivants :

Formules de De Moivre :

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad ; \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

$$e^x \pm e^y = e^{\frac{x+y}{2}}\left(e^{\frac{x-y}{2}} \pm e^{-\frac{x-y}{2}}\right)$$

Avec i, on obtient les formules de Simpson, ou « de Werner », ou « de Prostaferesi » :

$$e^{ix} \pm e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} \pm e^{-i\frac{x-y}{2}}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

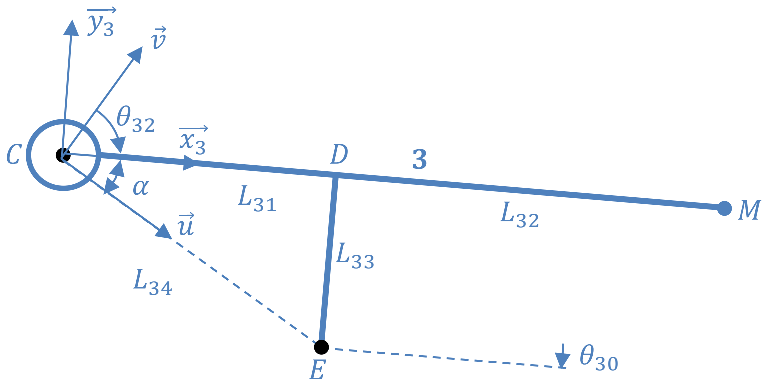
Il peut aussi être intéressant d'utiliser les formules de tangente de l'angle moitié sur y afin de se ramener à la résolution d'un polynôme de degré 2 :

$$Y = \tan\frac{y}{2} \quad ; \quad \cos y = \frac{1-Y^2}{1+Y^2} \quad ; \quad \sin y = \frac{2Y}{1+Y^2}$$

Dans ce cas, penser à traiter à part le cas $y = \pi$

• **Plus de 3 cos et 3 sin ?**

Si l'on fait apparaître plus de 3 cosinus et 3 sinus, c'est qu'au moins un des « passages » dans une pièce lors de la fermeture géométrique a été fait en utilisant 2 vecteurs. Exemple :



$$\overrightarrow{CE} = L_{31}\vec{x_3} - L_{33}\vec{y_3}$$

Il vaut donc mieux utiliser $\vec{u}$: $\overrightarrow{CE} = L_{34}\vec{u}$ et faire attention à l'angle non orienté α lors des projections.

Toutefois, si la projection de l'équation de la fermeture a lieu dans la pièce en question, on remarque qu'il n'est pas nécessaire de passer par $\vec{u}$, on fera juste apparaître les constantes L_{31} et L_{32} dans les équations.

• **Remarque**

Nous n'avons pas ici traité tous les cas de figure, étant donné que nous avons choisi ce qui était fixe ou variable dans les 3 systèmes étudiés. Toutefois, nous avons abordé les méthodes usuelles et dans les autres cas, les résolutions seront identiques ou plus simples.

• **Conclusion**

En conclusion, d'une manière générale :

Privilégier l'utilisation d'un seul vecteur par pièce lors de l'écriture de la relation de Chasles

1.V.3.b Mécanismes 3D

1.V.3.b.i Relation de Chasles

Comme précédemment, la fermeture géométrique va conduire à écrire **l'équation vectorielle** suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}\ (Chasles)}$$

Ensuite, exprimer chaque vecteur en fonction des paramètres géométriques du mécanisme :

$$ex: L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} \dots = \vec{0}$$

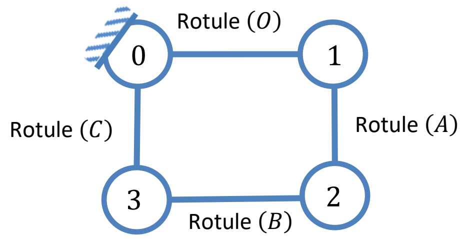
Finalement, obtenir 3 **équations scalaires** :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\overrightarrow{x_i} = 0 \\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\overrightarrow{y_i} = 0 \\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\overrightarrow{z_i} = 0 \end{cases}$$

1.V.3.b.ii Fermeture angulaire

Contrairement aux mécanismes plans où la relation est simple, en mécanismes 3D, il va falloir écrire les matrices de rotations de chaque liaison et en faire le produit afin d'obtenir 3 équations scalaires en rotation. Cette démarche très longue ne sera jamais appliquée à la main et est présentée ici afin de comprendre comment sont traités les mécanismes 3D.

Soit un mécanisme 3D représenté par le graphe des liaisons suivant :



Il faut écrire les matrices de rotation R_{ji} de chacune des liaisons de la chaîne et écrire l'ensemble des transformations en rotation dont la succession K doit mener à la matrice l'identité :

$$\boxed{K = R_{01}R_{12}R_{23}R_{30} = I}$$

On a alors le choix d'écrire

- les 3 équations associées aux termes de la diagonale : $\begin{cases} K_{11} = 1 \\ K_{22} = 1 \\ K_{33} = 1 \end{cases}$
- 3 équations en piochant dans les termes hors diagonale un terme par ligne :

$$\begin{cases} K_{21} = 0 \\ K_{32} = 0 \\ K_{13} = 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} K_{31} = 0 \\ K_{12} = 0 \\ K_{23} = 0 \end{cases}$$

Evidemment, le résultat des mécanismes plans se retrouve en appliquant cette démarche.

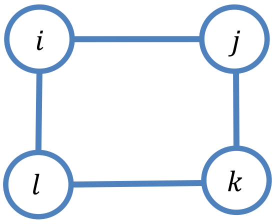
Remarque : Dans un mécanisme présentant des rotations sur des axes orthogonaux, on peut simplement écrire la somme des rotations sur chacun de ces axes nulle (3 équations simples)

1.V.4 Fermeture cinématique

1.V.4.a Définition

La fermeture de chaine cinématique consiste à écrire une somme de torseurs cinématiques qui sera égale au torseur nul.

Prenons l'exemple suivant :



La fermeture de chaine s'écrit alors en passant par TOUTES les liaisons intermédiaires :

$$\{\mathcal{V}_{i/l}\} + \{\mathcal{V}_{l/k}\} + \{\mathcal{V}_{k/j}\} + \{\mathcal{V}_{j/i}\} = \{0\}$$

Ce résultat est issu de la composition des mouvements.

1.V.4.b Erreur à ne pas faire

Il est nécessaire d'exprimer chacun de ces torseurs en utilisant les inconnues cinématiques de la liaison associée.

Certains font l'erreur suivante. Ils expriment correctement les $n-1$ premiers torseurs, puis sans trop réfléchir, expriment le dernier comme somme de tous les autres :

$$\{\mathcal{V}_{i/l}\} = \cdots ; \{\mathcal{V}_{l/k}\} = \cdots ; \{\mathcal{V}_{k/j}\} \ldots$$

Puis $\{\mathcal{V}_{j/i}\} = -(\{\mathcal{V}_{i/l}\} + \{\mathcal{V}_{l/k}\} + \{\mathcal{V}_{k/j}\})$

Ce qui conduit forcément à trouver à la fin, une équation $\{0\} = \{0\}$

D'autres regroupent deux torseurs. Il écrivent $\{\mathcal{V}_{i/l}\} + \{\mathcal{V}_{l/k}\} = \{\mathcal{V}_{i/k}\}$ mais il n'est alors plus possible d'avoir les inconnues de chaque liaison et on ne peut plus avancer.

PASSER PAR CHAQUE LIAISON ET EXPRIMER SES INCONNUES CINEMATIQUES

1.V.4.c Système linéaire obtenu

1.V.4.c.i Equations - Inconnues

• **Mécanismes 3D**

Une fermeture de chaine apporte 2 équations vectorielles conduisant à 6 équations scalaires. On écrit une fermeture pour chacune des γ chaines cinématiques indépendantes d'un mécanisme.

On note

- E_c le nombre d'équations cinématiques : $E_c = 6\gamma$
- I_c le nombre d'inconnues cinématiques. I_c s'obtient en comptant le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes des torseurs des n liaisons : $I_c = \sum_{i=1}^{n} I_c^i$, I_c^i étant le nombre d'inconnues cinématiques de la liaison i du mécanisme.

• **Mécanismes plans**

- 3 des équations de chaque fermeture de chaîne sont du type $0 = 0$. On peut donc définir le nombre d'équations en plan : $E_c^{2D} = 3\gamma$
- La mobilité (définie au paragraphe suivant) peut, mais c'est rare, diminuer (mobilité interne qui disparaît par exemple), on définit donc m^{2D}
- Les nombres d'inconnues cinématiques des liaisons encastrement, pivot et glissière sont inchangés. Par contre, la ponctuelle est modifiée $I_c^{2D}(ponctuelle) = 2$ (cf liaisons normalisées) et inconnues liaisons

I_c	3D	2D
Encastrement	0	0
Pivot	1	1
Glissière	1	1
Ponctuelle	5	2

1.V.4.c.ii Forme matricielle du système

Le système linéaire obtenu par la fermeture cinématique peut se mettre sous forme matricielle. Cette matrice, que nous noterons K_c en cinématique, possède des propriétés mathématiques dont nous parlerons par la suite. Traitons un exemple pour voir comment la définir. Soit le système linéaire suivant dont les inconnues sont (x, y, z, t):

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y + z = 0 \\ x + y + t = 0 \end{cases}$$

On peut écrire :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Appelons le vecteur inconnu $U=\begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix}$ et V le vecteur $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

On a donc : $K_cU=V$

La matrice cinématique du problème est donc la matrice :

$$K_c=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & 0 & 0\\a_2 & b_2 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

On remarquera que si l'on définit l'ordre des inconnues du vecteur U différemment, la matrice va subir des permutations de colonnes, et selon l'ordre pris pour les 3 équations, des permutations de lignes. Ces changements n'auront aucune influence sur ses caractéristiques mathématiques.

Pour résoudre ce système, on voit qu'il y a une inconnue en trop (4 inconnues pour 3 équations). Dans nos systèmes, il y aura des mouvements possibles, c'est-à-dire des mobilités. Supposons que le système étudié présente une mobilité, il y aura donc l'une de ces 4 inconnues qui sera imposée (moteur, vérin…). Supposons que l'on impose la variable x. On va donc arranger le système afin de mettre dans le vecteur de droite toutes les données :

$$\begin{cases}b_1y=-a_1x\\b_2y+z=-a_2x\\y+t=-x\end{cases}$$

Finalement, il faudra résoudre :

$$\begin{bmatrix}b_1 & 0 & 0\\b_2 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1x\\-a_2x\\-x\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}y\\z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & 0 & 0\\b_2 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-a_1x\\-a_2x\\-x\end{bmatrix}$$

1.V.4.c.iii Rang – Mobilité – Hyperstatisme

• **Cas général**

Le système d'équations obtenu est un système linéaire qui présente un rang noté r_c.

$$r_c = rang(K_c)$$

Le rang d'un système linéaire correspond au nombre d'équations qui servent, c'est-à-dire au nombre d'inconnues que l'on pourra déterminer.

On a forcément :

$$r_c \leq E_c$$

Le nombre d'inconnues cinématiques indéterminées par la résolution du système linéaire obtenu correspond au nombre de mobilités m du mécanisme, c'est-à-dire au nombre de degrés de liberté qu'il faut piloter afin de définir l'intégralité des mouvements des pièces du mécanisme. Autrement dit, il correspond au nombre minimum de degrés de liberté à bloquer afin que chacune des pièces du mécanisme ne puisse plus bouger.

$$m = I_c - r_c$$

Nombre d'inconnues à fixer = Nombre d'inconnues total – nombre d'inconnues déterminées

On remarque que sans même faire de mathématiques sur un système d'équations compliqué, comme nous étudions des mécanismes réels, il nous est possible d'estimer la mobilité « à la main » et d'en déduire le rang du système. On pourra alors en déduire le degré d'hyperstatisme défini ci-dessous.

Le nombre d'équations inutiles du système cinématique correspond à ce que l'on appelle le degré d'hyperstatisme h du mécanisme. Cette notion sera développée dans le chapitre de statique des solides.

$$h = E_c - r_c$$

Nombre d'équations inutiles = Nombre d'équations – nombre d'équations utiles

De même que pour la mobilité, si on arrive à estimer le degré d'hyperstatisme d'un système « à la main » (cf statique), on pourra en déduire le rang du système cinématique et donc la mobilité. C'est toutefois plus délicat que d'estimer la mobilité.

On a :

$$h = m + E_c - I_c$$

- **Cas des mécanismes plans**

A la main, nous traiterons majoritairement des mécanismes plans. D'ailleurs, la majorité des systèmes simples se modélisent en plan.

On peut définir le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme plan en plan :

$$h^{2D} = m^{2D} + {E_c}^{2D} - I^{2D}$$

Remarque sur le lien entre 2D et 3D : En mécanismes plans (3 équations $0 = 0$), on trouvera toujours un degré d'hyperstatisme 3D supérieur ou égal à 3 : $h^{3D} = 3 + h^{2D}$, avec h^{3D} le degré d'hyperstatisme du modèle plan en 3D. Lorsque le mécanisme ne présente que des pivots et des glissières, le modèle plan est identique au modèle 3D. Mais dès qu'il y a des ponctuelles, il faut faire attention à l'interprétation de ces équations. En effet, une ponctuelle 2D présente 2 inconnue cinématiques en plan, une ponctuelle 3D en a 5 en 3D, mais le modèle 2D d'une ponctuelle présente 2 inconnues cinématiques en 3D car c'est une liaison qui ne peut se déplacer hors plan. Il faut donc faire attention aux raisons qui ont poussé à proposer une ponctuelle plane dans un modèle plan car elle peut provenir d'une ponctuelle 3D comme de l'association en série (par exemple) d'une glissière et d'une pivot. On voit que le modèle 3D associé à ces 2 solutions n'est pas le même et parler de h^{3D} peut porter à confusion, parle-t-on du degré d'hyperstatisme du modèle plan mis en 3D, ou du modèle 3D réel dont la modélisation plane a induit une réduction des liaisons. La formule $h^{3D} = 3 + h^{2D}$ est donc toujours juste lorsqu'un mécanisme est réalisé en 2D et en 3D uniquement des pivots et glissières, et soumis à interprétation lorsqu'il y a des ponctuelles en plus dans le modèle 2D.

Par ailleurs, tout mécanisme plan composé d'une seule chaîne fermée ($\gamma = 1$) et ayant une seule mobilité possède au maximum 4 inconnues cinématiques.

En effet, le rang r_c vaut de 0 à 3, sa valeur maximale est donc 3, et :

$$I_c = r_c + m$$

Sachant qu'en modélisation plane, on ne trouve que les liaisons encastrement ($I_c^{2D} = 0$), pivot ($I_c^{2D} = 1$), glissière ($I_c^{2D} = 1$) et ponctuelle ($I_c^{2D} = 2$), les mécanismes à une mobilité sont donc les mécanismes composés de :

$m = 1$			
$r_c = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_c = 1 \\ h = 3 \end{cases}$	$r_c = 1 \Rightarrow \begin{cases} I_c = 2 \\ h = 2 \end{cases}$	$r_c = 2 \Rightarrow \begin{cases} I_c = 3 \\ h = 1 \end{cases}$	$r_c = 3 \Rightarrow \begin{cases} I_c = 4 \\ h = 0 \end{cases}$
1 pivot	2 pivots	3 pivots	4 pivots
1 glissière	2 glissières	3 glissières	4 glissières
	1 ponctuelle	2 pivots 1 glissière	3 pivots 1 glissière
		1 pivot 2 glissières	3 glissières 1 pivot
		1 pivot 1 ponctuelle	2 glissières 2 pivots
		1 glissière 1 ponctuelle	1 ponctuelle 2 pivots
			1 ponctuelle 2 glissières
			1 ponctuelle 1 glissière 1 pivot
			2 ponctuelles

Les 3 premières colonnes de ce tableau correspondent à des systèmes hyperstatiques, ils seront moins courants que ceux de la dernière colonne.

Vous verrez donc que quasiment tous les problèmes plans que vous traiterez seront les mécanismes correspondant à la dernière colonne de ce tableau, avec 4 inconnues.

1.V.4.c.iv Solvabilité cinématique d'un mécanisme

Un mécanisme est toujours solvable cinématiquement.

S'il ne présente aucune mobilité, on montrera que toutes les inconnues cinématiques sont nulles.

S'il présente au moins une mobilité, on pourra toujours exprimer toutes les inconnues cinématiques en fonction de m mobilités.

Comme $r_c \leq E_c$ et $m = I_c - r_c$:

$$-r_c \geq -E_c$$

$$I_c - r_c \geq I_c - E_c$$

$$I_c - r_c \geq I_c - E_c$$

$$m \geq I_c - E_c$$

Ainsi, s'il y a plus d'inconnues que d'équations, la mobilité est au moins égale au nombre d'inconnues en trop.

Si elle est juste égale : $h = m + E_c - I_c = m - (I_c - E_c) = m - m = 0$

Si elle est supérieure : $h = m - (I_c - E_c) > 0$

1.V.4.d Définition des torseurs au départ

En cinématique, il arrive qu'il y ait la présence de plusieurs chaînes cinématiques fermées. Et ces chaînes présenteront quasiment toujours des liaisons en commun. Prenons pour l'exemple deux chaînes présentant la liaison L_{ij} en commun.

La résolution cinématique du problème nous conduira à réaliser une première fermeture de chaîne.

Parmi les liaisons de cette chaîne, on trouvera le torseur $\{\mathcal{L}_{j/i}\}$. On va alors probablement le définir en un point et dans une base arrangeants pour traiter cette première fermeture de chaîne.

Ensuite, il faudra effectuer la fermeture de la seconde chaîne fermée, et on devra à nouveau utiliser le torseur $\{\mathcal{L}_{i/j}\}$ ou $\{\mathcal{L}_{j/i}\}$. Et c'est ici qu'il y a un gros risque d'erreurs. Souvent, on oublie que ce torseur a déjà été utilisé et on se permet alors de le redéfinir en un point et dans une base qui pourraient être différents des choix faits pour la première fermeture de chaîne, ce qui est une erreur. Attention, il faut reprendre le torseur qui a été défini lors de la première fermeture, et le changer de point et de base si nécessaire.

Une solution intéressante pour éviter cette erreur consiste à créer un tableau avant d'effectuer les fermetures de chaîne du mécanisme, dans lequel on écrit chacun des torseurs des liaisons du système sans forcément choisir de point et de base. Puis, lors de la réalisation de chaque fermeture, on vient piocher les torseurs dans ce tableau, en les complétant alors avec les choix effectués si ce n'est déjà fait.

1.V.4.e Mise en œuvre pour chaque chaine

On écrit la fermeture cinématique associée à la chaîne étudiée :

$$\{\mathcal{V}_{i/l}\}+\{\mathcal{V}_{l/k}\}+\{\mathcal{V}_{k/j}\}+\{\mathcal{V}_{j/i}\}=\{0\}$$

On écrit les différents torseurs des liaisons en leurs points caractéristiques :

$$\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{i/l}}\\ \vec{V}(A,i/l)\end{Bmatrix}_A+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{l/k}}\\ \vec{V}(B,l/k)\end{Bmatrix}_B+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{k/j}}\\ \vec{V}(C,k/j)\end{Bmatrix}_C+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\\ \vec{V}(D,j/i)\end{Bmatrix}_D=\{0\}$$

Remarque : on pourra définir ces torseurs en notation verticale car c'est une notation simple à retenir, mais nous passerons tout de suite après à une notation vectorielle lors de l'expression de ceux-ci au même point.

On déplace alors tous les torseurs au même point en utilisant la formule de Varignon :

$$\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{i/l}}\\ \vec{V}(M,i/l)\end{Bmatrix}_M+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{l/k}}\\ \vec{V}(M,l/k)\end{Bmatrix}_M+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{k/j}}\\ \vec{V}(M,k/j)\end{Bmatrix}_M+\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega_{j/i}}\\ \vec{V}(M,j/i)\end{Bmatrix}_M=\{0\}$$

On obtient alors 2 équations vectorielles :

$$\begin{cases}\overrightarrow{\Omega_{i/l}}+\overrightarrow{\Omega_{l/k}}+\overrightarrow{\Omega_{k/j}}+\overrightarrow{\Omega_{j/i}}=\vec{0} \quad (\overrightarrow{Eq1}=\vec{0})\\ \vec{V}(M,i/l)+\vec{V}(M,l/k)+\vec{V}(M,k/j)+\vec{V}(M,j/i)=\vec{0} \quad (\overrightarrow{Eq2}=\vec{0})\end{cases}$$

Il reste alors à obtenir 6 équations scalaires en projection dans une ou deux bases $\mathfrak{B}_m(\overrightarrow{x_m},\overrightarrow{y_m},\overrightarrow{z_m})$ $\mathfrak{B}_n(\overrightarrow{x_n},\overrightarrow{y_n},\overrightarrow{z_n})$:

$$\begin{cases}\overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{x_m}=0\\\overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{y_m}=0\\\overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{z_m}=0\\\overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{x_n}=0\\\overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{y_n}=0\\\overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{z_n}=0\end{cases}$$

Remarques :

- On prend généralement les même bases ($\mathfrak{B}_m=\mathfrak{B}_n$), mais ce n'est pas une obligation

- Il est obligatoire de projeter un MÊME vecteur sur LES TROIS vecteurs de la MÊME base afin de résoudre complètement un problème (relation d'équivalence)

- il peut être possible, en projetant une équation sur un seul vecteur, puis sur un seul autre, pas forcément orthogonal au premier, d'obtenir des relations recherchées, puisqu'elles sont vraies quelle que soit la projection, suffisantes pour résoudre le problème. Toutefois, il n'y aura alors pas obligatoirement équivalence entre le système d'équation et la solution obtenue. On ne recherche pas forcément toutes les solutions !

- En mécanismes plans dont les rotations sont portées par le même vecteur $\vec{z}$, on aura uniquement 3 équations scalaires en projection dans une base $\mathfrak{B}_m(\overrightarrow{x_m},\overrightarrow{y_m},\overrightarrow{z_m})$:

$$\begin{cases}\overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{z_m}=0\\\overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{x_m}=0\\\overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{y_m}=0\end{cases}$$

1.V.4.f Choix de points et bases

Lors de la mise en œuvre d'une fermeture cinématique, on doit choisir

- un point où exprimer tous les torseurs afin de les sommer
- une base afin de projeter les deux équations vectorielles et obtenir 6 équations scalaires

Ce choix doit être fait pour chaque chaine étudiée, mais ne doit pas forcément être le même pour chacune.

L'objectif peut être double :

- simplifier au plus les calculs afin d'obtenir des équations les plus simples possible
- obtenir la relation voulue au plus vite

1.V.4.f.i Préliminaires – Choix initiaux

• **Explications**

Lors de la résolution d'un exercice, on doit très généralement poser les torseurs de toutes les liaisons avant de mener la résolution et de voir ce qui est attendu. On a donc tendance à choisir arbitrairement un point sur le lieu de validité de chaque torseur et une base dans laquelle il est valable. En regardant ensuite ce qui est demandé, on peut se rendre compte que les choix effectués n'étaient pas forcément les meilleurs :

- un point a été choisi sur le lieu de validité du torseur, mais la question demande un résultat en un autre point appartenant lui aussi au lieu de validité du torseur
- une base a été choisie parmi les bases de définition du torseur mais le résultat est demandé dans une autre base qui elle aussi était valable pour le torseur posé

Il est alors possible d'effectuer deux choix :

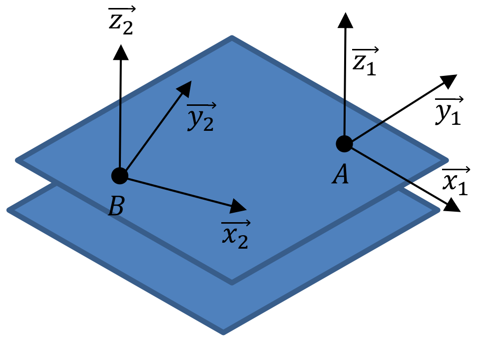
- garder le torseur posé initialement, déterminer ses inconnues au point et dans la base choisis, puis le déplacer au point demandé et le projeter dans la base demandée
- revenir en arrière, effacer points et base et les redéfinir plus judicieusement. Attention, tant que les torseurs n'ont pas été utilisés pour une quelconque résolution, on peut se permettre de revenir en arrière. Par contre, s'ils ont déjà servi, c'est trop tard !

La différence entre les deux démarches proposées ci-dessus se trouvera uniquement dans les valeurs numériques des différentes inconnues des torseurs obtenus.

• **Exemple – Choix de point**

Détaillons un exemple ci-dessous pour mieux comprendre.

Soit un appui-plan présent dans un mécanisme, de normale $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$.



Pour cet exemple, disons que : $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$; $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2}$; $(\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) = \theta_{21}$

On peut définir en début d'exercice ce torseur en tout point de l'espace, il faut en choisir un, choisissons A dans la première démarche, B dans la seconde. De même, on doit choisir une base contenant le vecteur normal $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$, choisissons la base 1 dans la première démarche, 2 dans la seconde. Nous cumulons donc les deux choix différents.

On peut voir les deux démarches suivantes comme deux résolutions de deux élèves différents ayant fait des choix différents au départ, mais ayant pourtant défini les mêmes inconnues U_{21}, V_{21}, R_{21}.

<table>
<tr><th>Démarche 1</th><th>Démarche 2</th></tr>
<tr>
<td>Un premier élève pose au départ :
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{matrix}\right\}_A^{\mathfrak{B}_1}$$
Il mène la résolution et trouve une formule pour les 3 inconnues R_{21}, V_{21} et V_{21}
Il fait une application numérique pour une valeur de θ_{21} donnée et trouve
$$\begin{cases} R_{21} = 7 \\ U_{21} = 1 \\ V_{21} = 1 \end{cases}$$</td>
<td>Un deuxième élève pose au départ :
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}_2}$$
Il mène la résolution et trouve une formule pour les 3 inconnues R_{21}, V_{21} et V_{21}
Il fait une application numérique pour la même valeur de θ_{21} et trouve
$$\begin{cases} R_{21} = 7 \\ U_{21} = 2 \\ V_{21} = 5 \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">Les deux élèves se regardent et disent chacun à l'autre qu'il s'est trompé…
Et non !</td></tr>
<tr>
<td>Si on déplace le torseur du premier élève au point du second et qu'on le projette dans l'autre base :
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{matrix}\right\}_A^{\mathfrak{B}_1}$$
$$\overrightarrow{V(B,2/1)} = \overrightarrow{V(A,2/1)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21}}$$
$$\overrightarrow{V(B,2/1)} = \begin{bmatrix} U_{21} \\ V_{21} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} + \begin{bmatrix} -a_1 \\ -b_1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{21} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$$
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & U_{21} - b_1 R_{21} \\ 0 & V_{21} + a_1 R_{21} \\ R_{21} & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}_1}$$
$$\left\{\begin{matrix} 0 & (U_{21} - b_1 R_{21})\cos\theta_{12} - (V_{21} + a_1 R_{21})\sin\theta_{12} \\ 0 & (U_{21} - b_1 R_{21})\sin\theta_{12} + (V_{21} + a_1 R_{21})\cos\theta_{12} \\ R_{21} & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}_2}$$
Si le premier élève fait l'application numérique, il trouvera que ce torseur vaut :
$$\left\{\begin{matrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}_2}$$
On avait :
$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{matrix}\right\}_A^{\mathfrak{B}_1}$$</td>
<td>Si on déplace le torseur du premier élève au point du second et qu'on le projette dans l'autre base :
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}_2}$$
$$\overrightarrow{V(A,2/1)} = \overrightarrow{V(B,2/1)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21}}$$
$$\overrightarrow{V(B,2/1)} = \begin{bmatrix} U_{21} \\ V_{21} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{21} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2}$$
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & U_{21} + b_2 R_{21} \\ 0 & V_{21} - a_2 R_{21} \\ R_{21} & 0 \end{matrix}\right\}_A^{\mathfrak{B}_2}$$
$$\left\{\begin{matrix} 0 & (U_{21} + b_2 R_{21})\cos\theta_{21} - (V_{21} - a_2 R_{21})\sin\theta_{21} \\ 0 & (U_{21} + b_2 R_{21})\sin\theta_{21} + (V_{21} - a_2 R_{21})\cos\theta_{21} \\ R_{21} & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}_1}$$
Si le second élève fait l'application numérique, il trouvera que ce torseur vaut :
$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{matrix}\right\}_A^{\mathfrak{B}_1}$$
On avait :
$$\left\{\begin{matrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{matrix}\right\}_B^{\mathfrak{B}_2}$$</td>
</tr>
</table>

On voit donc que poser, au départ de l'exercice, le torseur $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$ est un choix important selon ce qui sera demandé dans la suite. Si dans l'exercice on doit exprimer ce torseur en B dans la base 2, et si ce torseur n'a pas été utilisé par ailleurs, vaut-il mieux :

- le redéfinir en B dans la base 2 dès le départ : $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_2}$ et travailler avec cette forme permettant de trouver le résultat numérique immédiatement lors de la résolution
- ne pas le redéfinir, et à la fin de l'exercice, devoir exprimer :

$$\begin{Bmatrix} 0 & (U_{21} - b_1 R_{21}) \cos\theta_{12} - (V_{21} + a_1 R_{21}) \sin\theta_{12} \\ 0 & (U_{21} - b_1 R_{21}) \sin\theta_{12} + (V_{21} + a_1 R_{21}) \cos\theta_{12} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_2}$$

Le choix semble assez clair !

On comprendra maintenant pourquoi on ne doit pas écrire, pour l'appui plan par exemple :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}_2} \text{ MAIS } \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_2}, \forall P$$

Car selon le point choisi, les valeurs de U_{21} et V_{21} ne sont pas les mêmes.

• **Exemple – Choix de base**

Soit une liaison rotule de torseur cinématique dans une base $\mathfrak{B}$ quelconque :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

Si dans la résolution d'un problème, plusieurs bases peuvent convenir pour la définition de ce torseur, il est préférable de définir ce torseur directement dans la base qui sera choisie par la suite, plutôt que de la définir dans une base et de changer ensuite.

Exemple :

Définissons $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ par les composantes P_{21}, Q_{21}, R_{21} dans la base $\mathfrak{B}_1$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

Imaginons qu'il faille ensuite exprimer tous les torseurs dans la base $\mathfrak{B}_2$, il serait faux d'écrire :

$$\cancel{\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_2}}$$

Ce n'est pas parce que la forme canonique du torseur est la même dans toute base que le torseur ne change pas d'une base à l'autre.

Il faudrait écrire :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} P_{21}\cos\theta_{12} - Q_{21}\sin\theta_{12} & 0 \\ P_{21}\sin\theta_{12} + Q_{21}\cos\theta_{12} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_2}$$

On remarquera alors qu'il est préférable, si le torseur n'a pas aiulleurs pas été utilisé dans d'autres chaînes cinématiques, de revenir à sa définition et de le définir directement par :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_2}$$

En ayant évidemment conscience que les 3 inconnues de ce torseur n'ont pas la même valeur numérique que celles du même torseur dans $\mathfrak{B}_1$.

• **Conclusion**

On retiendra de tout cela la phrase suivante :

Bien qu'il y ait plusieurs choix de bases et de points possibles pour la définition d'un torseur, il faut

- regarder ce qui est demandé dans l'exercice
- effectuer un choix car les composantes sont alors définies pour le point et la base choisis (ne jamais laisser $\forall P$ par exemple)
- avoir conscience que de ces choix dépendent les valeurs numériques finales
  - des composantes de moment pour les différents choix de points
  - de composantes de résultante et de moment pour les choix des bases

• **Remarque**

L'influence du choix du point sur la valeur des composantes a été mise en évidence dans les tableaux des liaisons (inconnues en rouge et en gras). En cinématique, cela concerne uniquement les 3 liaisons : Appui plan – Linéaire rectiligne – Ponctuelle

1.V.4.f.ii Choix du point

D'une manière générale, le point sera choisi afin de simplifier au plus l'équation vectorielle en vitesse. Pour cela, selon les liaisons présentes, **on choisira très souvent de se placer au point d'une liaison ayant le plus de composantes en résultante, c'est-à-dire en rotation**. Cela n'est pas nécessaire dans le cas particulier où un des torseurs présente une résultante de plus que les autres et si le changement de point doit se faire dans la direction de cette résultante, car le produit vectoriel de la formule de Varignon n'induira pas de nouveaux termes.

Remarque : Parfois, selon le paramétrage donné et les liaisons présentes, un choix différent pourra simplifier les calculs.

Imaginons qu'il y ait dans un cycle une liaison rotule et 3 liaisons pivots :

$$\begin{Bmatrix} P_{il} & 0 \\ Q_{il} & 0 \\ R_{il} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_i} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{lk} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_i} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{kj} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_i} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{ji} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_i} = \{0\}$$

L'équation en rotation est indépendante du point choisi et donnera :

$$P_{il}\vec{x_i} + Q_{il}\vec{y_i} + R_{il}\vec{z_i} + R_{lk}\vec{z_i} + R_{kj}\vec{z_i} + R_{ji}\vec{z_i} = \vec{0}$$

Concernant l'équation de vitesse, quel que soit le point choisi, il y aura 3 produits vectoriels à calculer pour exprimer les 4 vitesses au même point :

$En\ A$	$En\ B\ (C, D)$
$\begin{cases} \vec{V}(A, lk) = R_{lk}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{BA} \\ \vec{V}(A, kj) = R_{kj}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{CA} \\ \vec{V}(A, ji) = R_{ji}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{DA} \end{cases}$	$En\ B\ (C, D)$ $\begin{cases} \vec{V}(B, il) = (P_{lk}\vec{x_i} + Q_{lk}\vec{y_i} + R_{lk}\vec{z_i}) \wedge \overrightarrow{AB} \\ \vec{V}(B, kj) = R_{kj}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{CB} \\ \vec{V}(B, ji) = R_{ji}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{DB} \end{cases}$
$\vec{V}(A, il) + \vec{V}(A, lk) + \vec{V}(A, kj) + \vec{V}(A, ji) = \vec{0}$ $\vec{0} + R_{lk}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{BA} + R_{kj}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{CA} + R_{ji}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{DA} = \vec{0}$	$\vec{V}(B, il) + \vec{V}(B, lk) + \vec{V}(B, kj) + \vec{V}(B, ji) = \vec{0}$ $(P_{lk}\vec{x_i} + Q_{lk}\vec{y_i} + R_{lk}\vec{z_i}) \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{0} + R_{kj}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{CB} + R_{ji}\vec{z_i} \wedge \overrightarrow{DB} = \vec{0}$
Plus simple	Plus compliqué

On voit que si l'on ne choisit pas le point où il y a le plus de rotations, on fait apparaître des termes de vitesse qui compliquent les équations finales du système.

Remarque : selon le point choisi, on pourra faire disparaître une vitesse de rotation des équations en vitesse, ce qui peut conduire soit à un effet négatif (on souhaitait des résultats en fonction de cette vitesse de rotation), soit positif (on obtient directement la relation recherchée). Cette remarque dépendra de votre expérience ! Toutefois, quel que soit le point choisi, le résultat après résolution complète sera identique.

1.V.4.f.iii Choix de la base

D'une manière générale, la base sera choisie afin d'obtenir les équations les plus simples possible. Ainsi, on projettera dans la base dans laquelle interviennent le plus de termes.

Exemple : soit l'équation vectorielle suivante obtenue dans un mécanisme plan :

$$a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c\overrightarrow{x_2} = \vec{0}$$

Attention, si deux termes sont en $\overrightarrow{x_2}$ par exemple, ils ne comptent que pour un seul terme après factorisation…

Le choix de la base 1 fait apparaître deux projections de $\overrightarrow{x_2}$:

$$\begin{cases} a + c\cos\theta_{21} = 0 \\ b + c\sin\theta_{21} = 0 \end{cases}$$

Le choix de la base 2 fait apparaître 4 projections de $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$:

$$\begin{cases} a\cos\theta_{12} - b\sin\theta_{12} + c = 0 \\ a\sin\theta_{12} + b\cos\theta_{12} = 0 \end{cases}$$

On choisira donc la base 1.

Il est parfois possible, en choisissant bien la base, d'obtenir immédiatement la relation entrée sortie lorsque c'est le seul résultat voulu.

1.V.4.g Résolution

Après avoir écrit les 6 équations scalaires par chaine (3 en mécanismes plans), on regroupe l'ensemble des équations et on résout le système.

1.V.5 Cinématique graphique (PTSI-PT)

Nous limiterons ce paragraphe à la cinématique graphique de mécanismes plans ou à l'étude de mouvements plans.

1.V.5.a Préliminaires

1.V.5.a.i Contexte

Rappelons qu'une résolution graphique ne donne la relation entre des vitesses que dans la position représentée par le schéma étudié. On privilégiera donc cette méthode lorsque l'on souhaite déterminer la relation cinématique voulue dans une position particulière prédéterminée. On peut par exemple connaître les positions où la vitesse recherchée est soit maximale, soit minimale…

1.V.5.a.ii Conventions choisies

On notera Δ_{ji}^{P} ou Δ_{ij}^{P} la droite support de la vitesse de $\vec{V}(P,j/i)$

On notera $P_{PM}^{P,ji}$ la projection sur $\overrightarrow{PM}$ de $\vec{V}(P,j/i)$: $P_{PM}^{P,ji} = \vec{V}(P,j/i).\overrightarrow{PM}$

Lorsqu'une vitesse sera entièrement connue, nous noterons le symbole V pour l'indiquer.

Lorsque seule sa direction sera connue, nous noterons D pour l'indiquer.

1.V.5.a.iii Précision des résultats

En cinématique graphique, la précision des résultats est très dépendante de différentes choses :

- L'échelle de représentation du mécanisme. Plus le mécanisme sera représenté grand, en respectant une l'échelle, plus les résultats seront précis
- L'échelle de représentation des vitesses (flèches). Plus les flèches seront grandes, plus la résolution sera précise
- Les outils utilisés pour les tracés (règle, compas, équerre, épaisseur des traits)
- L'éventuelle position particulière du mécanisme induisant pour une incertitude de 0,5 mm une grande variation de la vitesse de sortie

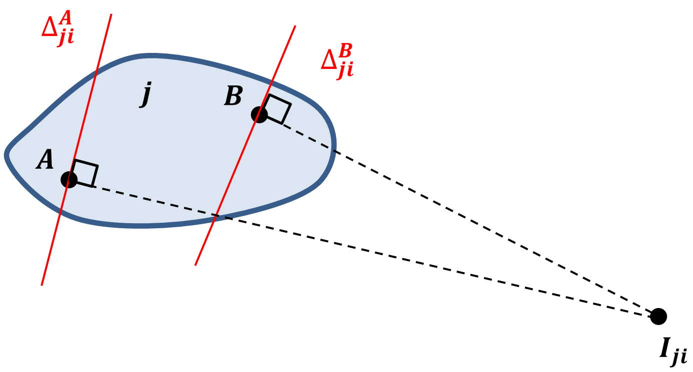
1.V.5.b Les outils en cinématique graphique

Les outils proposés ci-dessous permettent de résoudre tous les problèmes traités en cinématique graphique.

1.V.5.b.i Centre Instantanée de Rotation CIR et théorème des 3 plans glissants

• **<u>Définition du CIR</u>**

Nous avons vu précédemment que tout mouvement qui n'est pas une translation est une rotation autour d'un point fixe ou mobile dans l'espace. Ce point est appelé centre instantanée de rotation et noté CIR. On le notera souvent I_{ij} ou I_{ji} sur les schémas cinématiques.

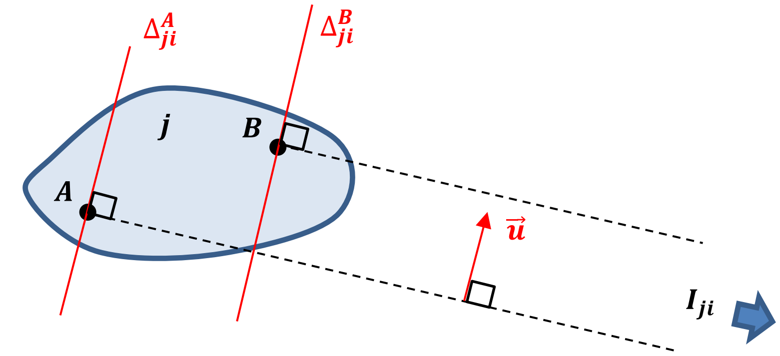


Connaissant le CIR I_{ji} dans le mouvement entre les pièces i et j, la direction Δ_{ji}^M de la vitesse $\vec{V}(M,j/i)$ en tout point M de l'espace est orthogonale à la droite liant M à I_{ji}:

$$\boxed{\forall M, \Delta_{ji}^M \perp (MI_{ji})}$$

On trouve donc un CIR à l'intersection de deux droites orthogonales à deux directions de vitesses non parallèles connues du mouvement concerné.

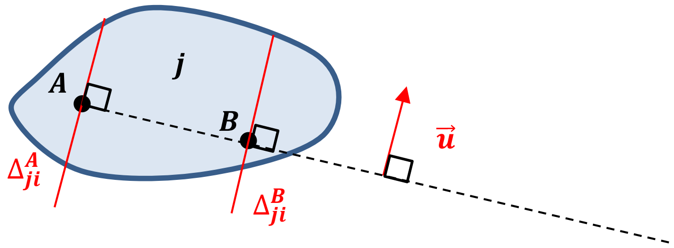
Remarque : dans le cas d'un mouvement de translation entre i et j, le CIR I_{ji} n'est pas défini. On dit parfois qu'il est « à l'infini ».



Propriété :

$$\begin{cases} \exists (A,B)/\Delta_{ji}^A \mathbin{/\!/} \Delta_{ji}^B \mathbin{/\!/} \vec{u} \\ \vec{u}.\overrightarrow{AB} \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow Mouvement\ j/i : translation$$

Si $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$, c'est soit une translation, soit une rotation autour d'un point de la droite (AB)



Quoi qu'il arrive :

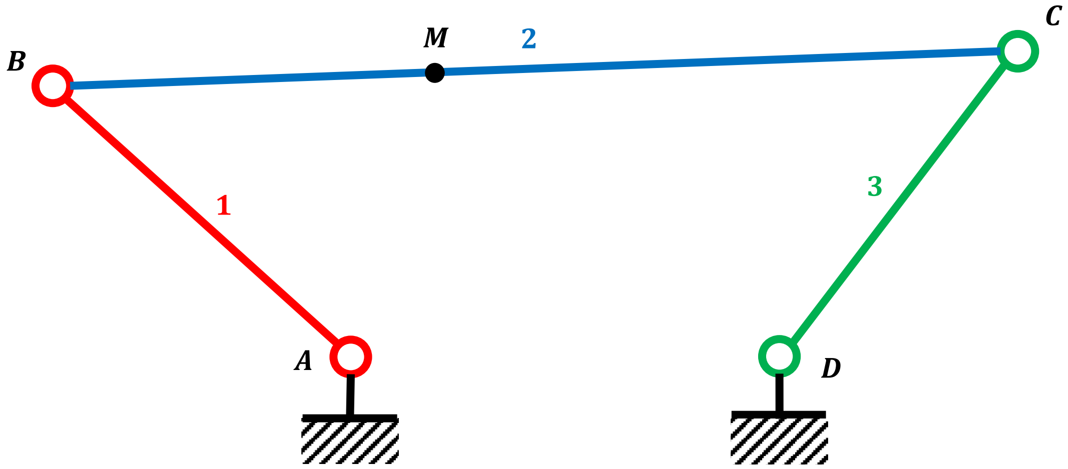
$$si \begin{cases} A \neq B \\ \vec{V}(A,j/i) = \vec{V}(B,j/i) \end{cases} \Rightarrow Mouvement\ de\ translation$$

• **Théorème des 3 plans glissants**

Si 3 pièces sont en mouvement plan les unes par rapport aux autres, alors les 3 CIR de mouvements relatifs des unes par rapport aux autres sont alignés.

• **Exemple**

Soit le mécanisme suivant :



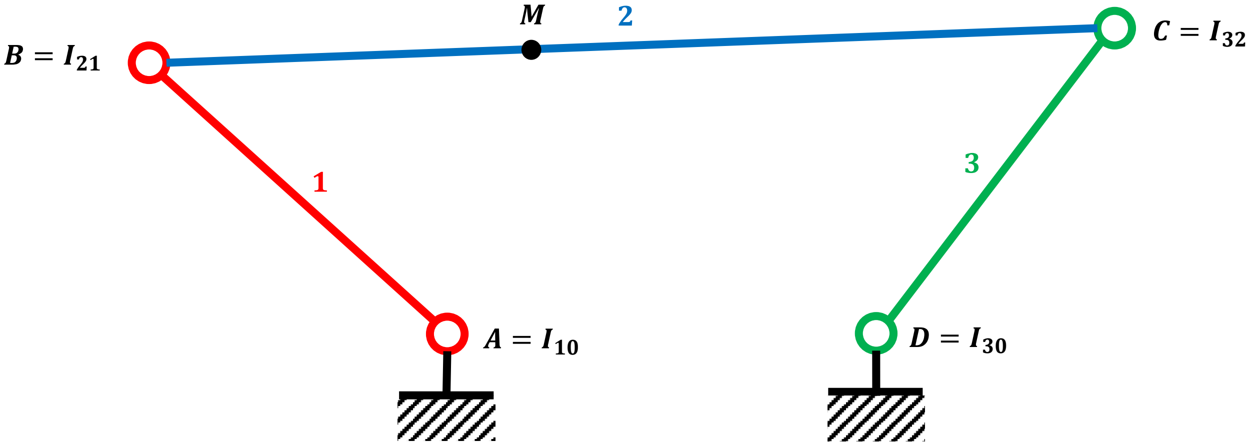
Déterminons d'abord les CIR vus immédiatement sur le schéma :

A est le CIR du mouvement de 1 par rapport à 0

B est le CIR du mouvement de 2 par rapport à 1

D est le CIR du mouvement de 3 par rapport à 0

C est le CIR du mouvement de 3 par rapport à 2



Déterminons ensuite le CIR du mouvement de la pièce 2 par rapport à 0 :

Méthode 1 : utilisation du théorème des 3 plans glissants

Les pièces 1,2 et 3 sont en mouvement plan les unes par rapport aux autres, on sait donc que :

$$I_{21}, I_{10}, I_{20} \; alignés \; \& \; I_{23}, I_{30}, I_{20} \; alignés$$

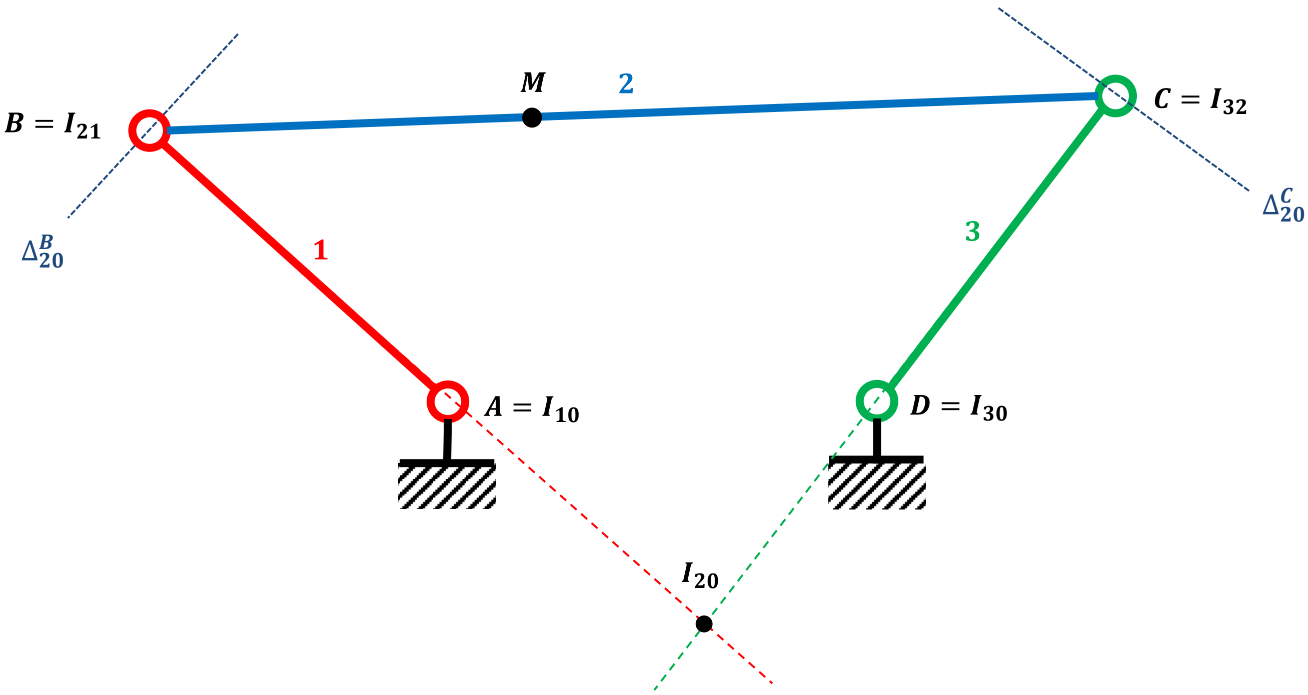
On en déduit la position de I_{20} connaissant $I_{21}, I_{10}, I_{23}, I_{30}$

Méthode 2 : Utilisation des directions Δ_{20}^B et Δ_{20}^C des vitesses $\vec{V}(B,2/0)$ et $\vec{V}(C,2/0)$

$$\vec{V}(B,2/0) = \vec{V}(B,1/0) \;\Rightarrow \Delta_{20}^B = \Delta_{10}^B \; et \; I_{10} \; connu \;\Rightarrow \Delta_{10}^B \perp (I_{10}B) \; soit \; \Delta_{20}^B \perp (AB)$$

$$\vec{V}(C,2/0) = \vec{V}(C,3/0) \;\Rightarrow \Delta_{20}^C = \Delta_{30}^C \; et \; I_{30} \; connu \;\Rightarrow \Delta_{30}^C \perp (I_{30}C) \; soit \; \Delta_{20}^C \perp (DC)$$

On en déduit I_{20} à l'intersection de deux droites (AB) et (DC)



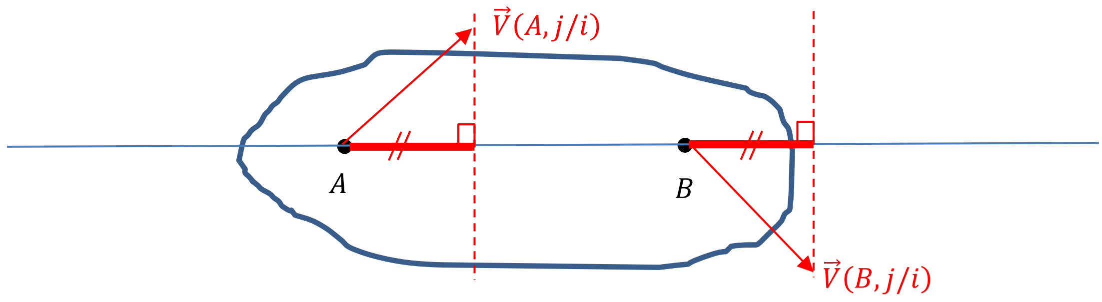
1.V.5.b.ii Triangle des vitesses et Equiprojectivité

Les deux outils proposés ici sont assez similaires et permettent de déterminer une norme d'une vitesse connaissant sa direction et une autre vitesse (norme et direction) dans le mouvement étudié.

- **Equiprojectivité**

Rappelons la propriété d'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide :

$$\forall (A,B) \in S_j, \vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB}$$

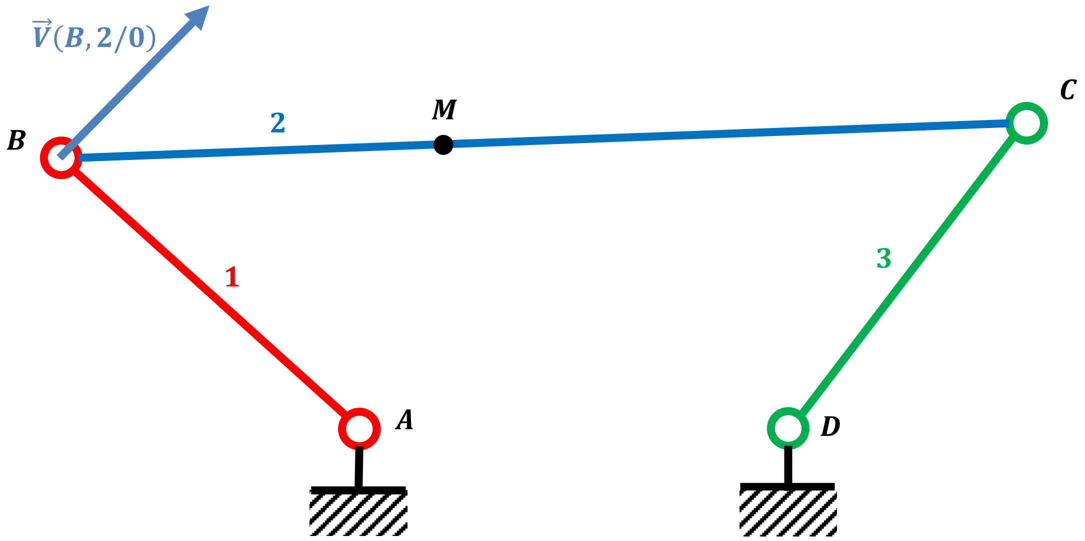


Avec les notations proposées plus tôt, on a :

$$\boxed{P_{AB}^{A,ji} = P_{AB}^{B,ji}}$$

Remarque : un produit scalaire a un signe, il faut donc faire attention : si la projection en A sur $\overrightarrow{AB}$ va dans le sens de A vers B, la projection en B sur $\overrightarrow{AB}$ va dans le même sens.

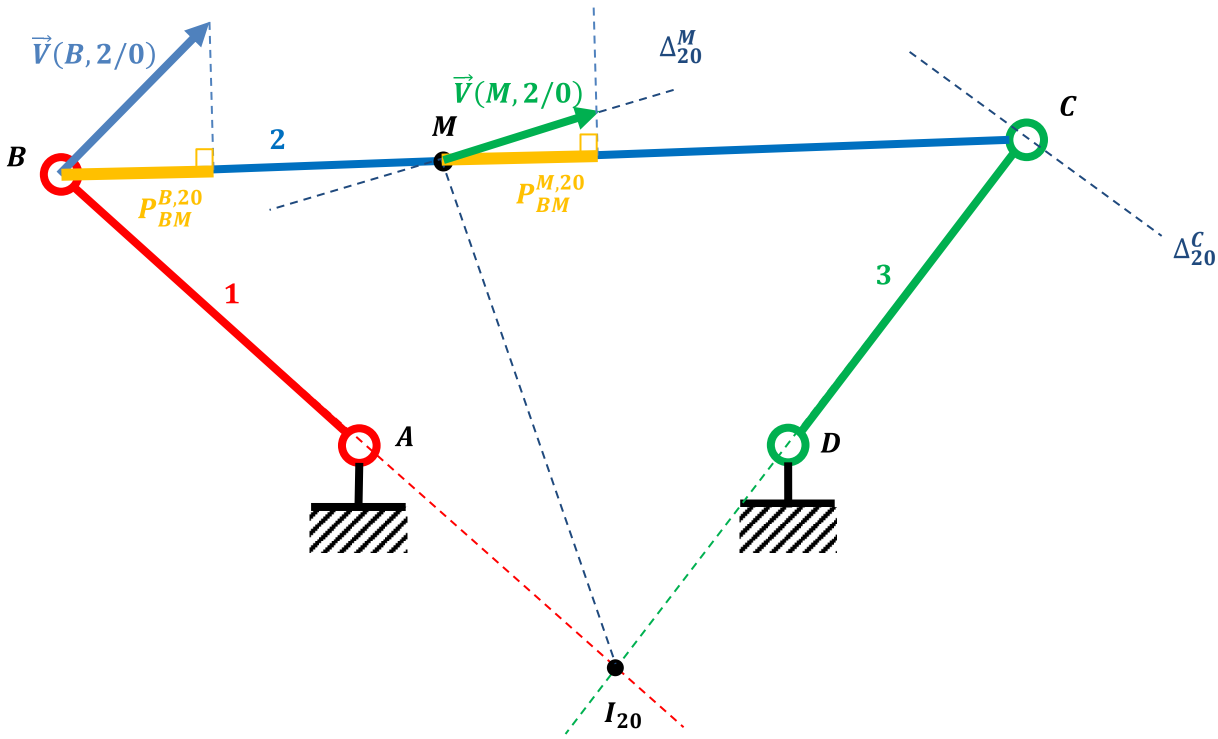
Exemple : Reprenons le cas étudié précédemment. Supposons que la vitesse $\vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(B,2/0)$ soit donnée. On chercher la vitesse $\vec{V}(M,2/0)$



La connaissance de I_{20} nous donne Δ_{20}^{M} orthogonale à $I_{20}M$.

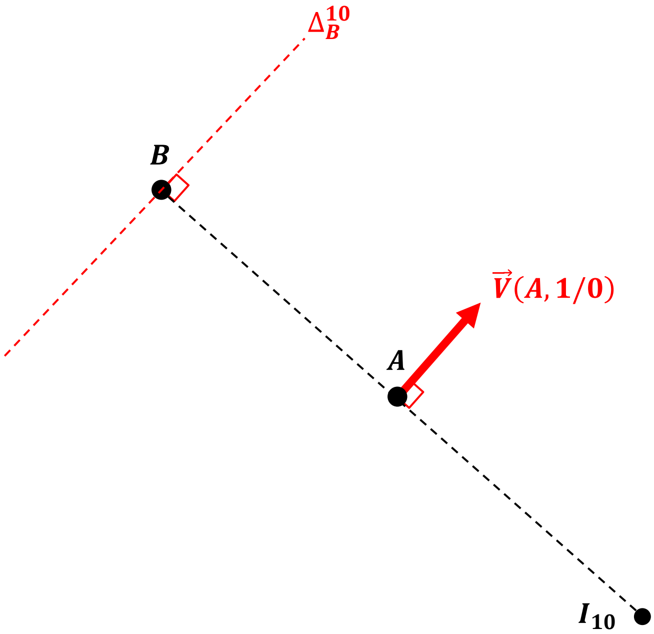
La donnée de $\vec{V}(B,2/0)$ nous donne la projection $P_{BM}^{B,20} = \vec{V}(B,2/0).\overrightarrow{BM}$

On a : $P_{BM}^{B,20} = P_{BM}^{M,20}$. On reporte donc cette projection en M en respectant le signe de cette projection puis on en déduit $\vec{V}(M,2/0)$.

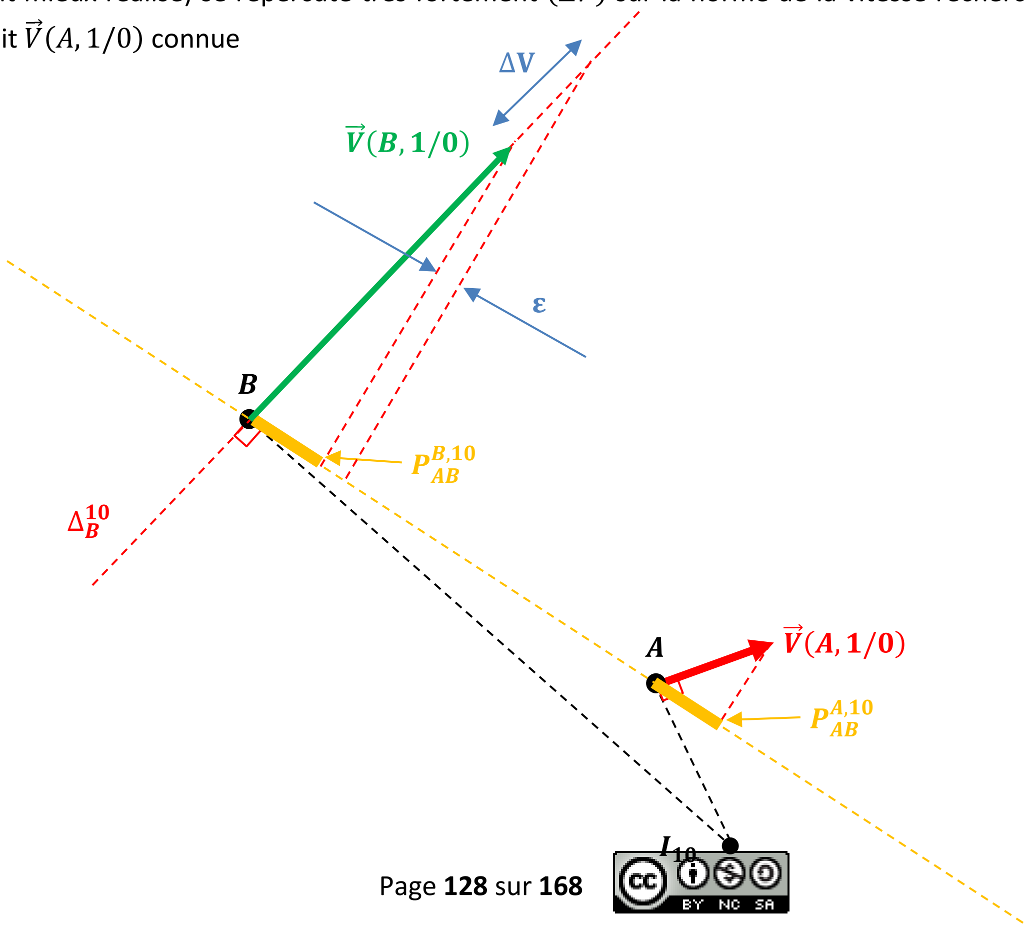


L'équiprojectivité possède des limites :

- Cas d'une projection nulle - Dans le cas particulier où I_{ji}, A et B sont alignés, les vitesses $\vec{V}(A,j/i)$ et $\vec{V}(B,j/i)$ sont orthogonales à la droite qui passe par I_{ji}, A et B. Les projections $\vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB}$ sont nulles et l'équiprojectivité ne permet pas de déterminer de norme de la vitesse inconnue : Soit $\vec{V}(A,1/0)$ connue



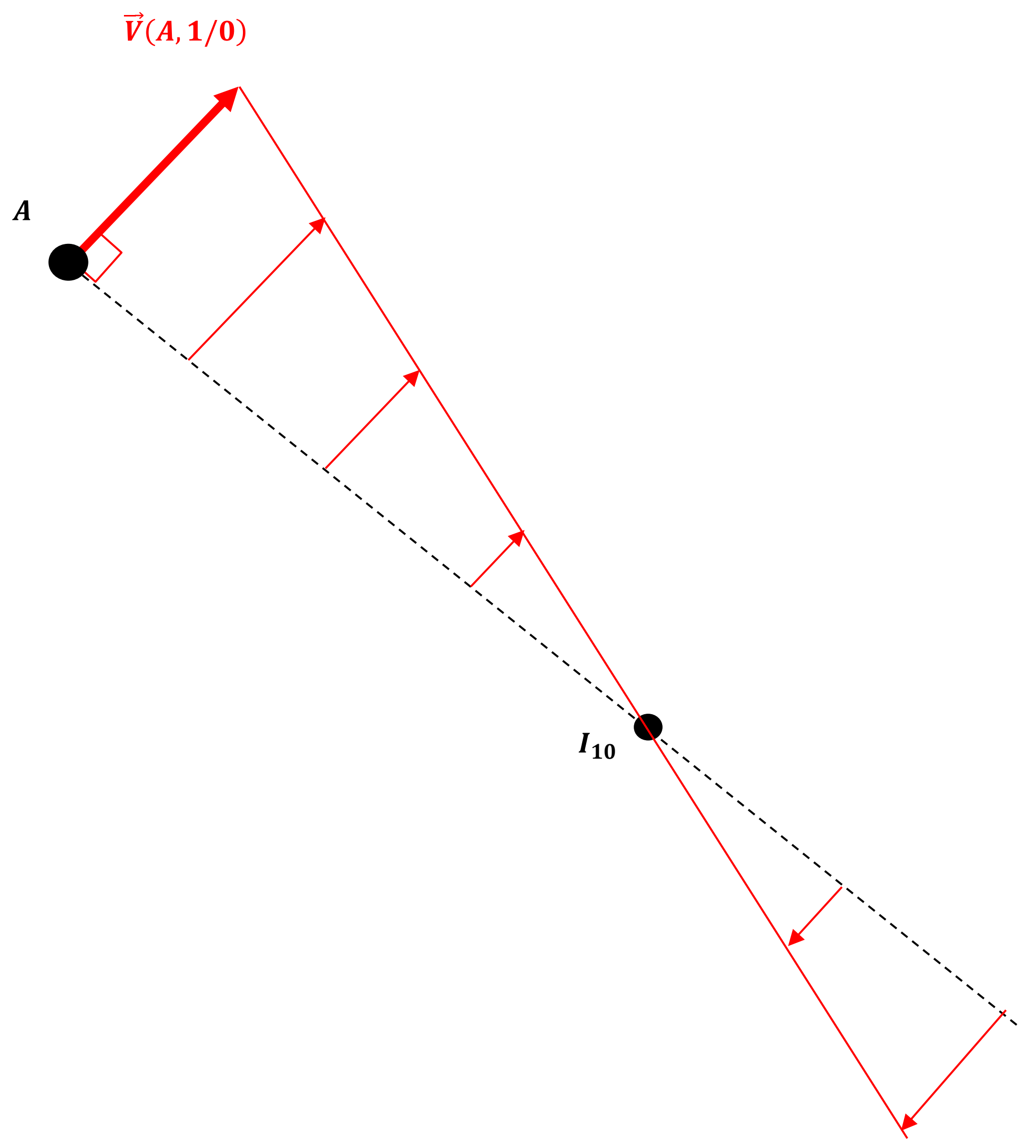
- Cas d'une projection d'une vitesse de direction presque orthogonale à la droite de projection (mécanisme dans une position particulière) – Lorsque I_{ji}, A et B sont presque alignés, l'imprécision sur nous instruments ε de 0,5 mm en moyenne (en supposant que l'angle droit soit mieux réalisé) se répercute très fortement (ΔV) sur la norme de la vitesse recherchée : Soit $\vec{V}(A,1/0)$ connue



• **Triangle des vitesses**

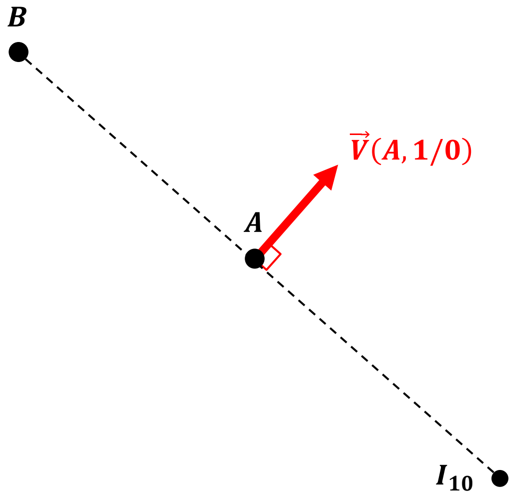
Cet outil permet de combler les manques liés aux problèmes abordés avec l'équiprojectivité. Il peut toutefois être utilisé à la place de l'équiprojectivité. Cependant, l'outil « triangle des vitesses » peut vite surcharger un schéma cinématique contrairement à l'équiprojectivité.

Il consiste à utiliser la propriété de proportionnalité de la norme d'une vitesse au rayon dans un mouvement de rotation.

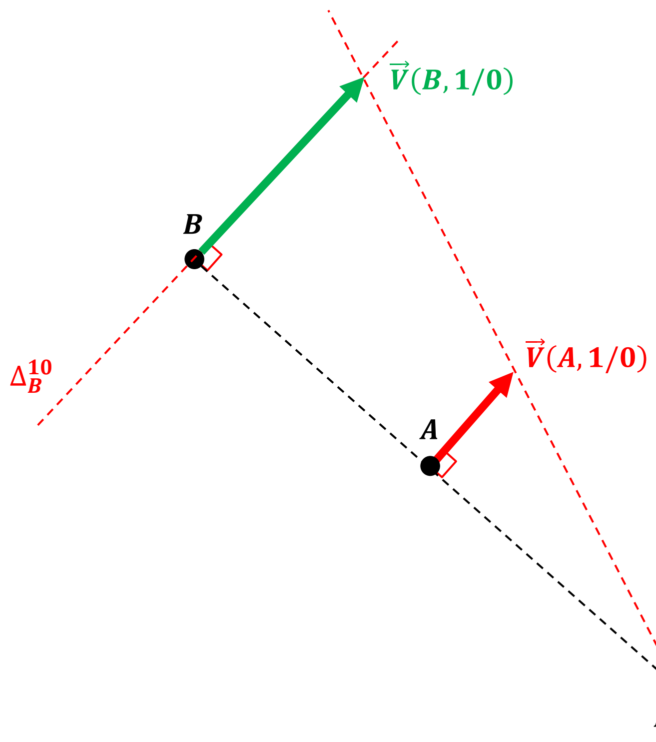


Exemples :

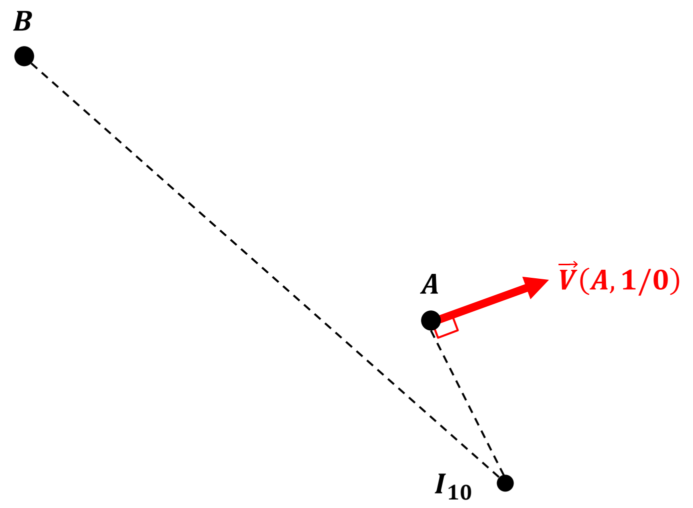
- A, B et I alignés



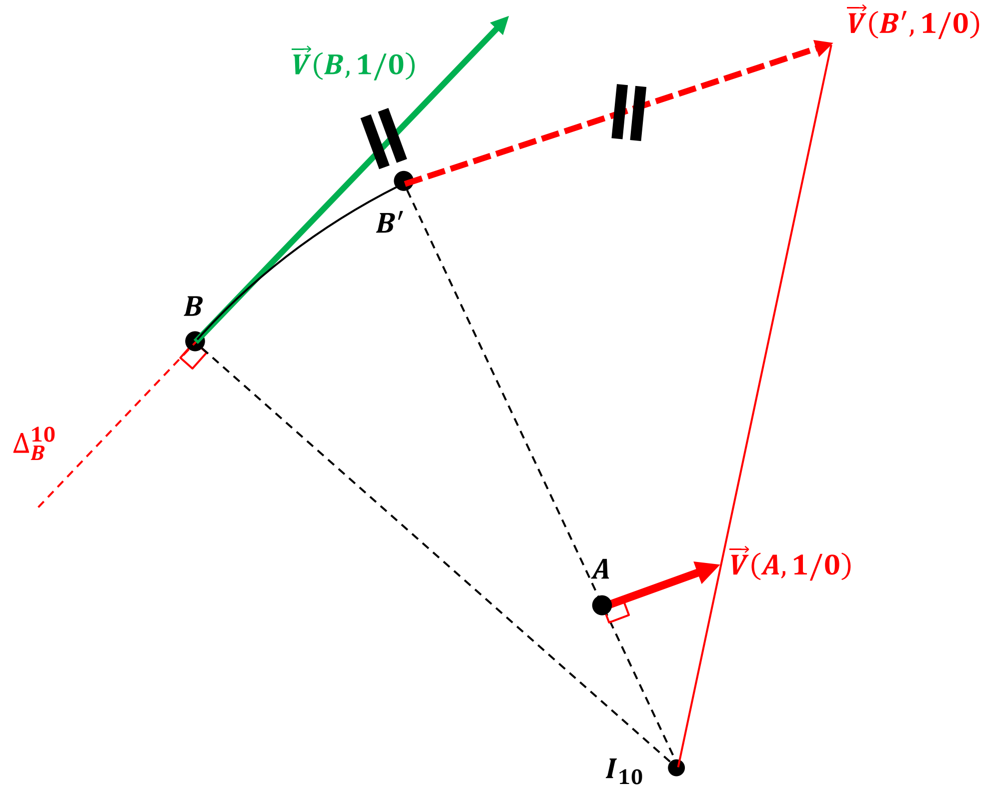
Après avoir déterminé Δ_B^{10}, il suffit de tracer la droite qui part de I_{10} et qui passe par l'extrémité de $\vec{V}(A,1/0)$ afin de déterminer la norme de $\vec{V}(B,1/0)$



- A, B et I non alignés



Le principe consiste à tracer le champ des vitesses 1/0 soit le long de la droite $(I_{10}A)$, soit le long de la droite $(I_{10}B)$. On choisira en fonction du schéma afin de ne pas surcharger une zone présentant déjà des constructions. Choisissons de tracer ce champ des vitesses le long de $(I_{10}A)$.



On prolonge la droite $(I_{10}A)$ de manière à ce que $I_{10}A > I_{10}B$. On reporte le point B en un point B' sur $(I_{10}A)$ avec un compas. On déterminer $\vec{V}(B',1/0)$ par la méthode des 3 points alignés. On trace Δ_B^{10} et on reporte la norme de $\vec{V}(B',1/0)$ en B car ayant le même rayon, $\|\vec{V}(B',1/0)\| = \|\vec{V}(B,1/0)\|$

1.V.5.b.iii Fermeture de chaîne cinématique

• **Principe**

Soit un mécanisme possédant une ou plusieurs chaînes fermées.

Le principe de l'utilisation de la fermeture de chaîne consiste à écrire une somme de vitesses égale au vecteur nul afin d'en déduire toutes les vitesses de la somme.

Mathématiquement, il est possible de déterminer tous les vecteurs d'une somme de vecteurs s'il n'y a que 3 vecteurs, si l'un deux possède une norme et direction connue (on notera V), et si la direction des deux autres est connue (on notera D).

Il faut donc pouvoir écrire :

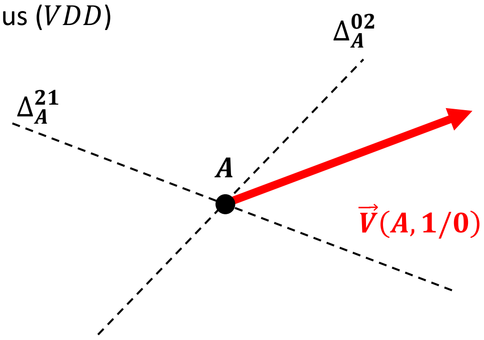
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Avec une vitesse connue V et les directions des deux autres connues DD. On notera donc par simplicité qu'il faut « VDD » pour que la fermeture de chaîne soit solvable.

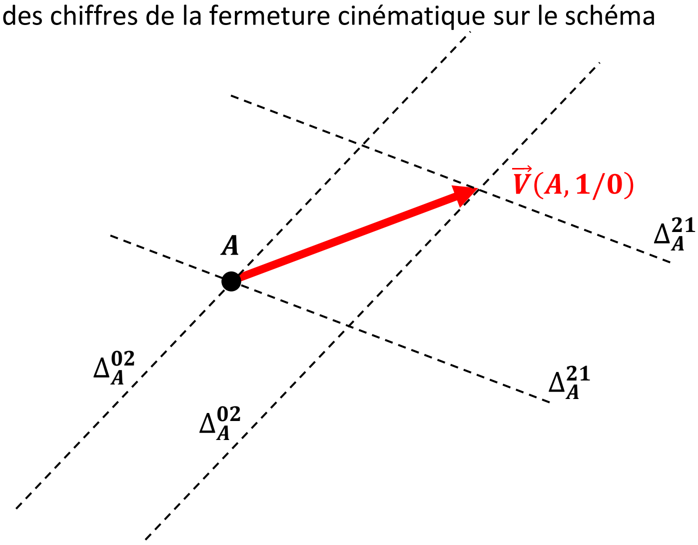
Remarque : évidemment, si l'on est en présence de deux vecteurs, ils seront opposés et de même norme.

• **Illustration**

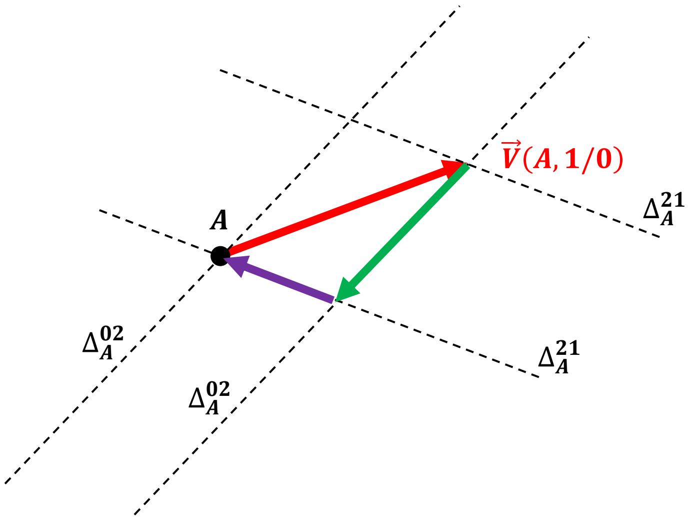
Soient une chaîne cinématique permettant d'écrire : $\vec{V}(A,1/0)+\vec{V}(A,0/2)+\vec{V}(A,2/1)=\vec{0}$ telle que $\vec{V}(A,1/0),\Delta_A^{02},\Delta_A^{21}$ connus (VDD)



On reporte les directions des vitesses connues de manière à former un parallélogramme (avec de l'expérience, une moitié de ce parallélogramme suffira). On précisera $\vec{V}(A,1/0)$, Δ_B^{02} et Δ_C^{21} en respectant l'ordre des chiffres de la fermeture cinématique sur le schéma



Comme la somme des 3 vecteurs doit être nulle, on tracer deux vecteurs suivant les bords du parallélogramme afin de mettre 3 flèches **bout à bout** :

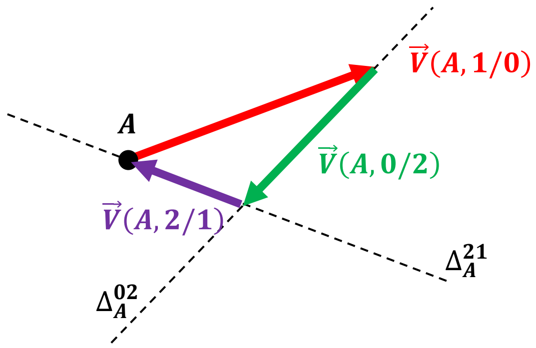


On identifie alors les vitesses trouvées. Attention, cette identification est source de beaucoup d'erreurs, il faut faire attention à ce qui est écrit dans la fermeture cinématique :

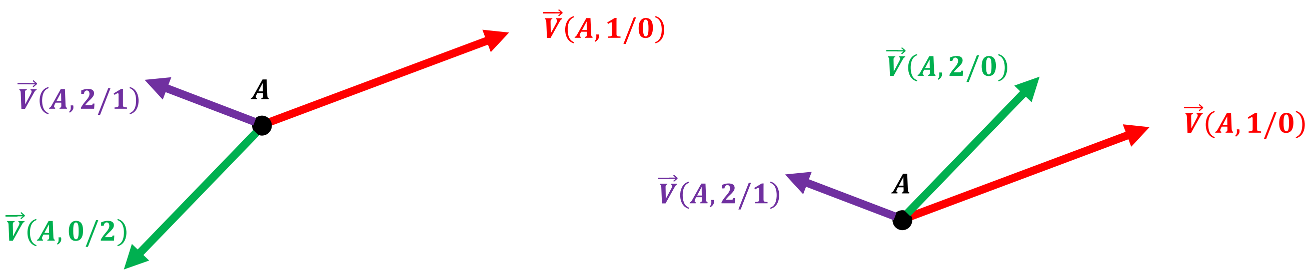
$$\vec{V}(A,1/0)+\vec{V}(A,0/2)+\vec{V}(A,2/1)=\vec{0}$$

Si l'on a bien respecté la prescription précédente : « On précisera $\vec{V}(A,1/0)$, Δ_B^{02} et Δ_C^{21} en respectant l'ordre des chiffres de la fermeture cinématique » sur le schéma, il suffira de lire les données inscrites. Sinon, bien regarder la fermeture afin d'identifier les indices de chaque vitesse.

On a donc :



On pourra finalement placer ces vitesses en A en changeant éventuellement sens de la flèche et chiffres associés si besoin. Cette étape est une seconde source d'erreur car certains oublient de replacer les vitesses en A avant de faire une équiprojectivité pour trouver la vitesse d'un mouvement en un autre point).

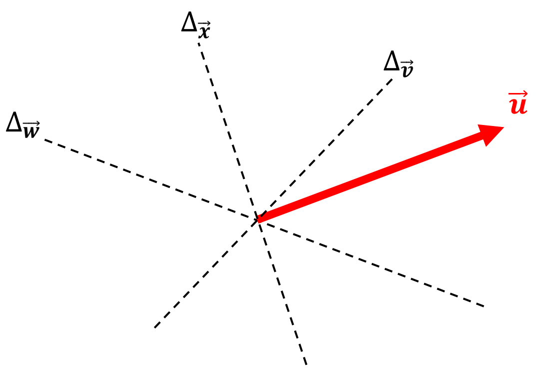


On pourra déplacer ces vitesses en d'autres points si besoin avec l'équiprojectivité ou le triangle des vitesses.

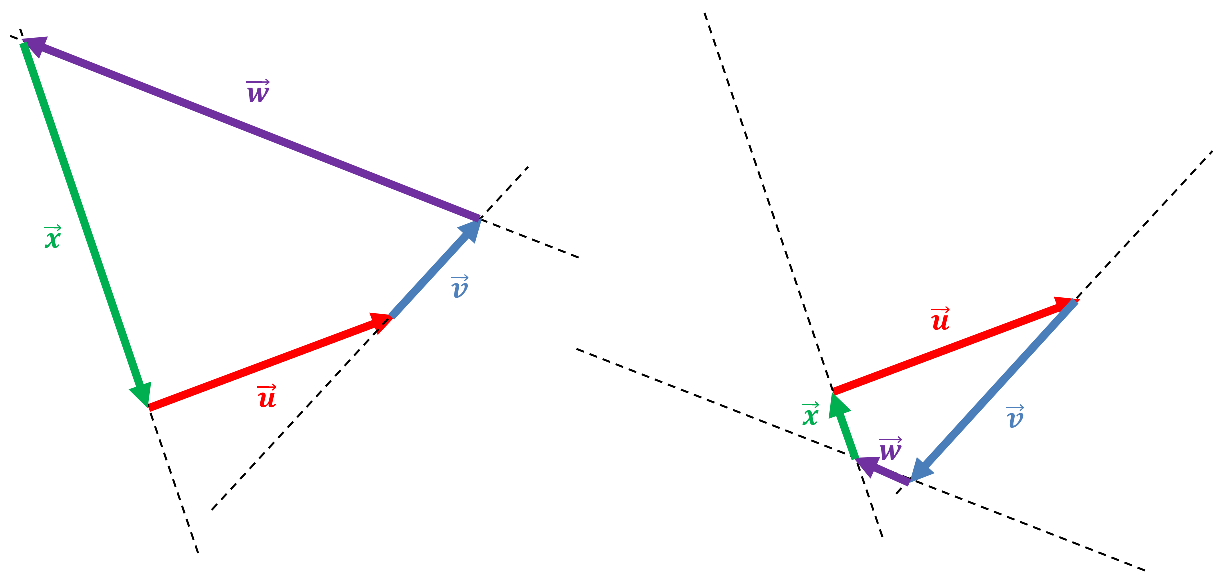
• **<u>Cas de plus de 3 vecteurs</u>**

Une somme de 4 vecteurs dont un seul est entièrement connu (norme et direction) et les 3 autres directions sont connues (VDDD) ne permet pas de déterminer la solution, il en existe en effet une infinité :

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}+\vec{x}=\vec{0}$$



Voici deux exemples de solutions :



Il est donc nécessaire :

- Soit d'en connaître deux et de les sommer pour se ramener à une situation VDD
- Soit de réussir à en regrouper 2 dont la somme peut avoir une direction connue à l'aide de la détermination d'un CIR afin là aussi de se ramener à une situation VDD.

• **<u>Méthode générale</u>**

Pour toute chaîne cinématique à étudier, écrire la fermeture en vitesse associée :

$$\vec{V}(A,i/j)+\vec{V}(A,j/\dots)+\cdots+\vec{V}(A,\dots/i)=\vec{0}$$

Quelle que soit la situation, il faut se ramener à une situation VDD, c'est-à-dire une vitesse entièrement connue (norme et direction), et deux vitesses de directions connues.

L'idéal est de réaliser un tableau dont les entrées sont, en colonnes les points caractéristiques de la chaîne étudiée (points des éléments géométriques des liaisons), et en lignes les différents torseurs de la chaîne. La dernière ligne sera un bilan en chaque point de ce qui est connu.

	A	B	C	D	…
$\{\mathcal{V}_{ij}\}$					
$\{\mathcal{V}_{j/\dots}\}$					
…					
$\{\mathcal{V}_{\dots/i}\}$					
Bilan					

Ensuite, on inscrit dans chaque case ce que l'on sait de chaque vitesse : direction D, vitesse complète V ou vecteur nul $\vec{0}$:

	A	B	C	D	…
$\vec{V}(A,i/j)$	$\vec{0}$	D	D	D	…
$\boldsymbol{\vec{V}(A,j/\dots)}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{\vec{0}}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	…
…	…	…	…	…	…
$\vec{V}(A,\dots/i)$	D	D	$\vec{0}$	D	…
Bilan					…

Le bilan sera de la forme VDD, VDDD, VDDDD… On ne fera pas apparaître les $\vec{0}$.

Première chose à regarder : Il existe des points où des vitesses sont nulles, et c'est normal. Toutefois, si on se place au point où la vitesse donnée est nulle, il n'y aura aucun V dans les bilans. On ne choisira donc évidemment pas ce point. De même, si on recherche une vitesse parmi toutes les vitesses de la fermeture, et si en un point cette vitesse est nulle, il est préférable de ne pas non plus choisir ce point afin d'éviter du travail par la suite pour la retrouvée en un autre point…

Après avoir fait attention aux vitesses nulles, et donc après avoir éliminé une ou deux colonnes, on trouvera alors deux solutions :

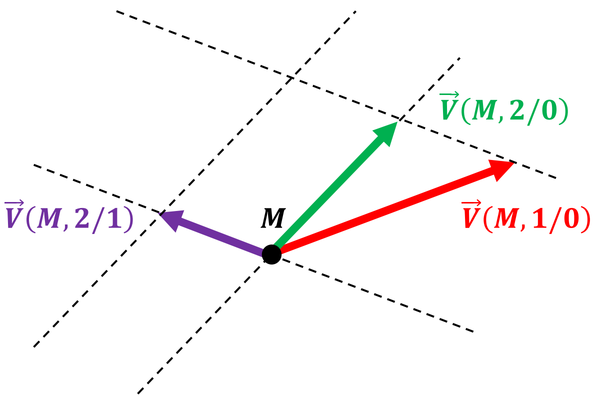
- Soit on trouve un bilan VDD, alors on peut procéder à la fermeture cinématique en ce point
- Si aucun bilan VDD n'est présent (VDDD, VDDDD etc), on ne peut pas conclure ! Il faut alors réussir à regrouper deux vitesses ou plus dans la fermeture cinématique tel que le CIR du mouvement regroupé puisse être trouvé, permettant de remplacer 2 vitesses ou plus de directions connues par une seule vitesse de direction connue. On refait alors le tableau pour trouver un point où VDD soit présent.

1.V.5.b.iv *Composition du mouvement*

• Somme de deux vitesses connues

Lorsque l'on connaît différentes vitesses en un point, la composition du mouvement permet de déterminer la vitesse somme des vitesses connues.

Exemple : Si l'on connaît $\vec{V}(M,2/1)$ et $\vec{V}(M,1/0)$, on a : $\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$

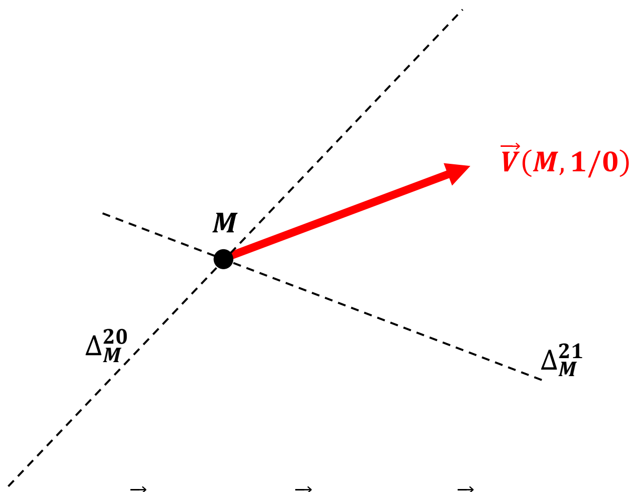


Attention, on ne met pas les flèches bout à bout comme nous l'avons vu pour les fermetures de chaîne.

• Somme de deux vitesses équivalentes à une fermeture de chaîne

Il arrive que l'on écrive une composition du mouvement pour résoudre une vitesse indéterminée. Elle consiste donc à se ramener à une situation VDD et une fermeture de chaîne se cache derrière !

Par exemple, connaissant $\vec{V}(M,1/0)$ et les directions Δ_M^{12} de $\vec{V}(M,1/2)$ et Δ_M^{20} de $\vec{V}(M,2/0)$

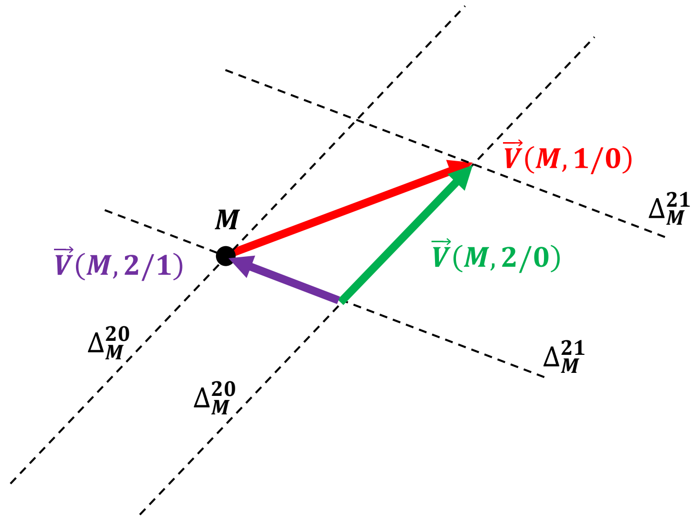


On a :

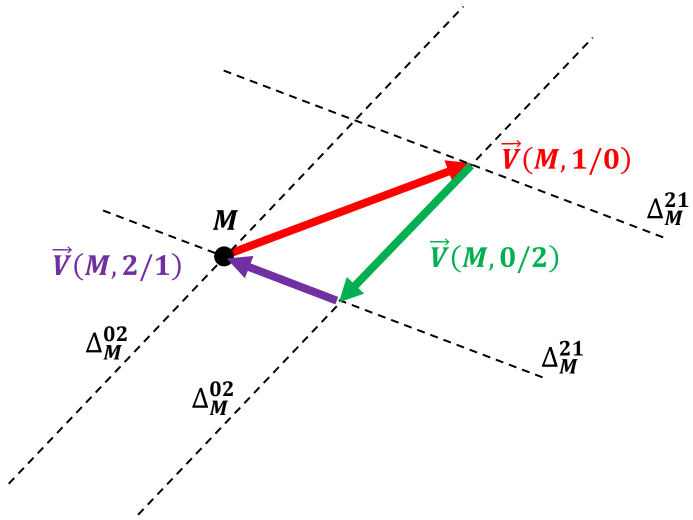
$$\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$$

Il est alors tentant de garder la somme, mais attention !!! C'est une source d'erreur car une somme ne consiste pas à mettre les flèches bout à bout. On peut repasser par une somme de 3 vitesses égale au vecteur nul. On pourra donc procéder des deux manières suivantes :

En gardant la somme : $\vec{V}(M,2/0)=\vec{V}(M,2/1)+\vec{V}(M,1/0)$. Il faut alors faire attention, à ce que la vitesse $\vec{V}(M,2/0)$ soit une flèche dans un sens, et que les deux autres permettent de partir du début de cette flèche et d'arriver à sa fin tout en gardant le sens de la vitesse donnée $\vec{V}(M,1/0)$!



En se ramenant à une fermeture de chaîne : $\vec{V}(M,0/2)+\vec{V}(M,2/1)+\vec{V}(M,1/0)=\vec{0}$



Remarque : les deux méthodes donnent évidemment le même résultat, mais attention si on garde une somme, car il faut réfléchir un peu plus et ne pas mettre les flèches bout à bout…

1.V.5.c Méthodologie de résolution graphique

Donnons dans ce paragraphes quelques éléments de méthodologie pour la résolution de problèmes en cinématique graphique.

1.V.5.c.i Réflexes à avoir

Lorsque l'on recherche une vitesse $\vec{V}(P,j/i)$

- Quelle est sa direction
  - Déterminer $I_{j/i}$
    - Trouver un point P_1 auquel la direction $\Delta_{P_1}^{ji}$ de $\vec{V}(P_1,j/i)$ peut être obtenue
    - Trouver un point P_2 auquel la direction $\Delta_{P_2}^{ji}$ de $\vec{V}(P_2,j/i)$ non parallèle à $\Delta_{P_1}^{ji}$ peut être obtenue
    - Déterminer $I_{j/i}$ à l'intersection des normales à $\vec{V}(P_1,j/i)$ en P_1 et $\vec{V}(P_1,j/i)$ en P_2
  - Tracer la droite $(I_{j/i}P)$
  - Tracer la direction Δ_P^{ji} de $\vec{V}(P,j/i)$ orthogonale à $(I_{j/i}P)$ en P
- Quelle est sa norme – Equiprojectivité (ou triangle des vitesses)
  - Trouver un point Q où la vitesse $\vec{V}(Q,j/i)$ est connue (direction et norme)
  - Tracer la droite (QP)
  - Déterminer la projection orthogonale $P_{QP}^{Q,ji}$ de $\vec{V}(Q,j/i)$ sur (QP)
  - Reporter cette projection $P_{QP}^{Q,ji} = P_{QP}^{P,ji}$ en P en respectant le sens de celle-ci selon le vecteur $\overrightarrow{QP}$
  - Introduire le point P' tel que $PP' = P_{QP}^{P,ji}$ soit la projection de $\vec{V}(P,j/i)$ sur $\overrightarrow{QP}$
  - Tracer la perpendiculaire à (PQ) passant par le point P'
  - Déterminer l'intersection entre (PQ) et Δ_P^{ji} et noter le point d'intersection P''
  - En déduire le vecteur recherché : $\vec{V}(P,j/i) = \overrightarrow{PP''}$

1.V.5.c.ii Mise en place d'une échelle de vitesse

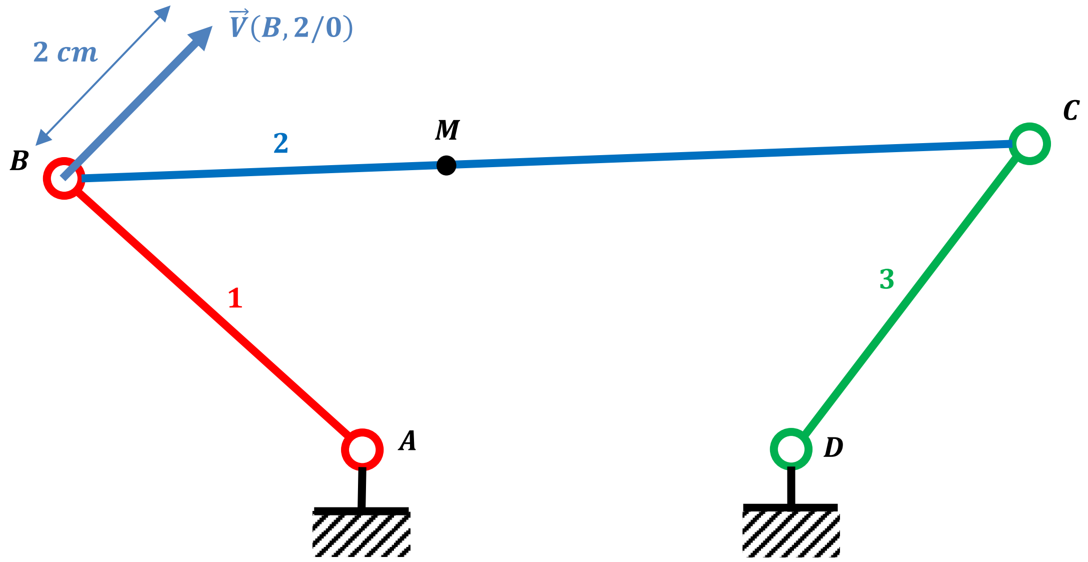
Attention, nous ne parlons pas ici d'échelle de représentation du mécanisme (dimensions des pièces), mais de l'échelle associant des valeurs de vitesses ($m.s^{-1}$) à des flèches de longueur donnée.

Attention, une échelle trop petite réduit la précision de la résolution, une échelle trop grande risque de « faire sortir » des flèches du dessin car trop grandes.

En entrée d'un mécanisme, on peut soit imposer une vitesse, soit imposer une vitesse de rotation.

• **Vitesse imposée**

Si une vitesse est imposée, par exemple 2 $m.s^{-1}$, et que l'on sait en quel point elle est valable (B dans l'exemple ci-dessous), il suffit de définir une échelle, par exemple $1\ cm \Leftrightarrow 1\ m.s^{-1}$. On pourra alors poser la vitesse d'entrée directement avec une longueur de $2\ cm$.



• **Vitesse de rotation imposée**

Il arrive que l'on donne une vitesse de rotation en entrée d'un mécanisme, par exemple $\Omega_{10} = 2\ rd.s^{-1}$ dans l'exemple précédent. Pour pouvoir traiter l'exercice, il faut connaître la longueur $L_1 = 1\ m$.

On calcule alors la vitesse de B : $\left\|\vec{V}(B,1/0)\right\| = |L_1\Omega_{10}| = 2\ m.s^{-1}$

Il suffit de poser une flèche en B en respectant le sens de rotation dépendant du signe de Ω_{10}et de définir une échelle, par exemple : $1\ cm \Leftrightarrow 1\ m.s^{-1}$. On traite alors le même cas que précédemment, avec une flèche en entrée de $2\ cm$ de longueur.

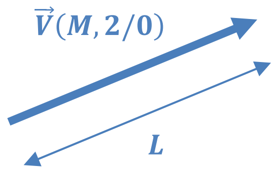
• **Bilan**

Finalement, il suffit de poser une flèche pour la vitesse d'entrée avec une longueur donnée puis :

- Si la vitesse est directement donnée, on a notre échelle
- Si la vitesse de rotation est donnée, il faut déterminer sa norme pour avoir l'échelle

1.V.5.c.iii Exploitation d'une échelle

Soit une flèche correspondant à une vitesse obtenue lors d'une résolution graphique :



Connaissant l'échelle, par exemple : $l\ cm \Leftrightarrow V\ m.s^{-1}$

Pour trouver la norme de la vitesse obtenue, il suffit de mesurer la longueur de la flèche L et de calculer :

$$\left\|\vec{V}(M,2/0)\right\| = \frac{L}{l}V$$

1.V.5.c.iv Méthodologie de résolution de problèmes à 1 chaîne cinématique

- Faire le dessin du mécanisme et établir son graph des liaisons
- Poser la vitesse d'entrée avec une longueur définie, par exemple 3 cm. On définit ici l'échelle des vitesses
- Déterminer le CIR du mouvement recherché (analyse de vitesses ou théorème des 3 plans glissants)
- Déterminer la direction de la vitesse recherchée à l'aide de la connaissance du CIR du mouvement correspondant
- Déterminer complètement une vitesse de la pièce dont le mouvement est recherché en fonction de l'entrée
- Déterminer la norme de la vitesse recherchée à l'aide de l'équiprojectivité (ou triangle des vitesses)
- A l'aide de l'échelle posée au départ, déterminer la valeur de la vitesse de sortie

Remarque : il est possible d'exploiter la fermeture de chaîne pour résoudre le problème

1.V.5.c.v Résolution de problèmes à plusieurs chaînes cinématiques

Dans le cas des problèmes à plusieurs chaînes cinématiques fermées, les problèmes sont plus ou moins complexes mais se résolvent parfaitement avec tous les outils donnés précédemment. C'est dans ce genre de problèmes qu'apparaissent les fermetures de chaînes faisant intervenir un trop grand nombre de directions (VDDD, VDDDD…) et qu'il faut réussir à trouver des CIR afin de n'avoir que des VDD. Nous traiterons un exemple en TD.

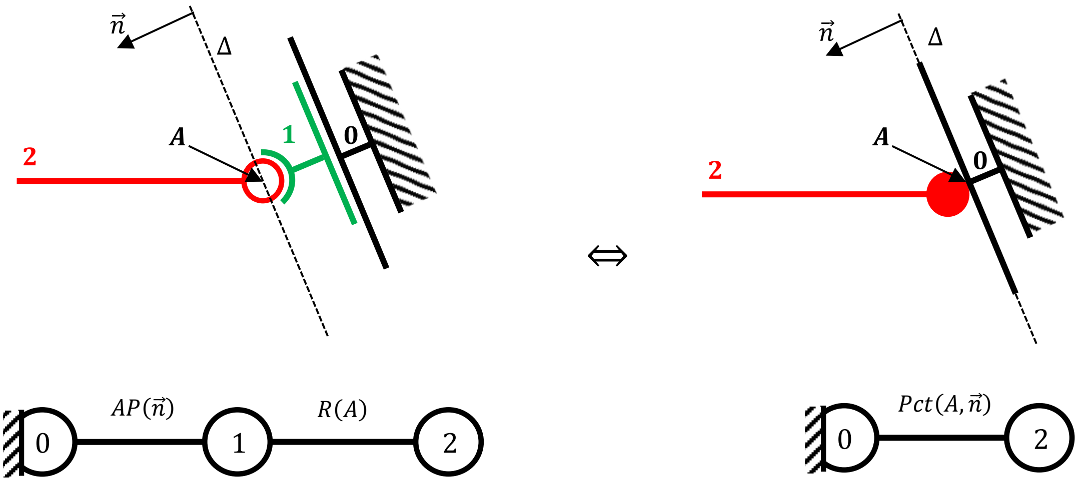
1.VI. Liaisons équivalentes

Nous nous limiterons ici à la détermination de liaisons équivalentes par la méthode **cinématique**. Nous verrons plus tard qu'une démarche semblable s'applique avec une méthode statique.

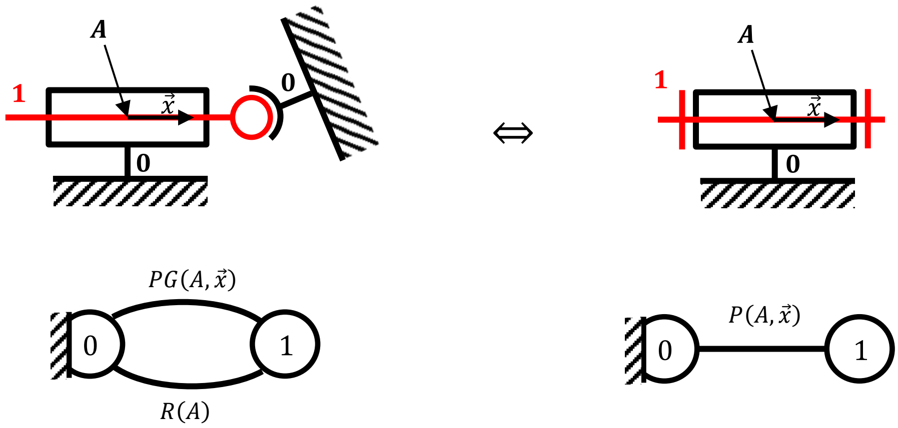
A.VI.1 Présentation

1.VI.1.a Exemples : série – parallèle

Plusieurs liaisons en série définissent une liaison équivalente qui peut être usuelle ou non (et toujours isostatique)



Plusieurs liaisons en parallèle définissent une liaison équivalente qui peut être usuelle ou non (dont la solution non simplifiée peut être est isostatique ou hyperstatique - notion abordée en 2° année) :



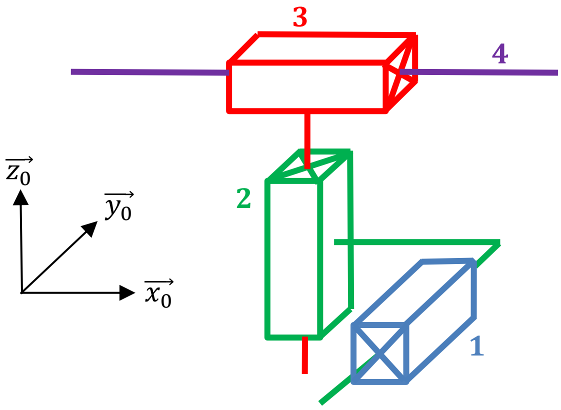
1.VI.1.b Objectifs

Obtenir une liaison équivalente dans un système complexe permet de le simplifier. En effet, lorsque l'on détermine une liaison équivalente à plusieurs liaisons, le nombre de liaisons du système en est d'autant réduit.

Lorsque l'on détermine une liaison équivalente, on détermine concrètement le torseur équivalent à l'ensemble des torseurs des liaisons considérées en utilisant l'une des deux méthodes disponibles, adaptées aux assemblages de liaisons en série ou en parallèle.

La liaison équivalente obtenue n'est pas obligatoirement une liaison normalisée. En effet, le torseur obtenu peut être :

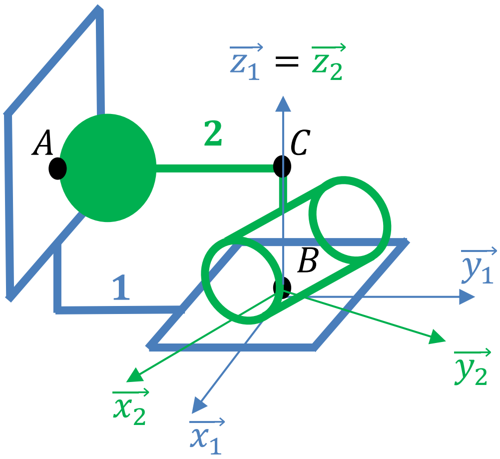
- Un torseur qui présente une forme non usuelle avec des inconnues indépendantes



$$\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/3} \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & W_{3/2} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/1} \\ 0 & V_{4/1} \\ 0 & W_{4/1} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

$$3DDL - 3\ inconnues\ indépendantes$$

- Un torseur présentant ou non une forme usuelle mais avec des inconnues **dépendantes**



$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P_{2/1}} & U_{2/1} \\ \boldsymbol{\tan\theta_{2/1} P_{2/1}} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

$$Q_{2/1} = \tan\theta_{2/1} P_{2/1}$$

$$= \begin{Bmatrix} P'_{2/1} & U'_{2/1} \\ 0 & V'_{2/1} \\ R'_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2} = \begin{Bmatrix} \dfrac{P_{2/1}}{\cos\theta_{2/1}} & \boldsymbol{U'_{2/1}} \\ 0 & \boldsymbol{U'_{2/1}\tan\theta_{2/1}} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

$$V'_{2/1} = U'_{2/1}\tan\theta_{2/1}$$

- Un mélange des 2 solutions précédentes

La difficulté lors de la détermination de liaisons équivalentes sera de bien choisir le point d'expression du torseur équivalent et sa base afin d'obtenir ce que l'on appelle la forme canonique du torseur dans le but de le reconnaître si c'est une liaison usuelle, ou d'exprimer au plus simple ses DDL dans le cas d'une liaison non usuelle.

A.VI.2 Préliminaires

1.VI.2.a.i Dépendance entre inconnues

La résolution de liaisons équivalentes conduit à trouver un torseur équivalent du type :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & U_{eq} \\ Q_{eq} & V_{eq} \\ R_{eq} & W_{eq} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

Il est alors nécessaire de savoir si P_{eq}, Q_{eq}, R_{eq}, U_{eq}, V_{eq} et W_{eq} sont indépendants. Autrement dit, si $(P_{eq}, Q_{eq}, R_{eq}, U_{eq}, V_{eq}, W_{eq})$ forme une famille libre, ou encore ci chacune des variables ne peut pas être exprimée comme combinaison linéaire des autres.

Ces variables dépendent des différentes inconnues des liaisons formant la liaison équivalente. Chacune de ces inconnues est une variable pouvant indépendamment des autres prendre n'importe quelle valeur. Il suffit donc de vérifier que les variables équivalentes en font de même.

Autrement dit : Est-il possible que chaque variable équivalente (case du torseur équivalent) prenne toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$ lorsque les autres sont nulles ?

ATTENTION : le terme « dépendance » n'est pas le plus approprié. En effet, il peut y avoir une dépendance entre des vitesses et des rotations, par exemple un torseur équivalent :

$$\begin{Bmatrix} 0 & U_{\mathrm{eq}} \\ 0 & V_{\mathrm{eq}} \\ R_{eq} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} - yR_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} + xR_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}}$$

Pourtant, on dira que les paramètres R_{eq}, U_{eq} et V_{eq} sont bien indépendants car ils respectent ce que nous venons de voir plus haut ! On verra un peu plus bas que 3 liaisons sont concernées par ce problème en cinématique (Appui Plan, Linéaire Rectiligne et Ponctuelle).

• **Liaisons en série**

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & U_{eq} \\ Q_{eq} & V_{eq} \\ R_{eq} & W_{eq} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} P_{10} & 0 \\ Q_{21} & V_{32}\cos\theta \\ 0 & V_{32}\sin\theta \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

On remarque que :

$$R_{eq} = U_{eq} = 0 \quad ; \quad \frac{W_{eq}}{V_{eq}} = \tan\theta$$

Soit :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & 0 \\ Q_{eq} & V_{eq} \\ 0 & V_{eq}\tan\theta \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

Nous verrons que dans cette situation (dépendance entre 2 termes d'une seule colonne), aucun changement de base ne peut la faire disparaître, on a donc un torseur équivalent possédant 3 inconnues ! Il y a une dépendance. Ce ne peut être une liaison normalisée

• **Liaisons en parallèle**

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & U_{eq} \\ Q_{eq} & V_{eq} \\ R_{eq} & W_{eq} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} P_{10}^1 & U_{10}^1 \\ Q_{10}^1 & V_{10}^1 \\ R_{10}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} P_{10}^2 & U_{10}^2\cos\theta \\ 0 & U_{10}^2\sin\theta \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

On remarque que :

$$Q_{eq} = R_{eq} = W_{eq} = 0 \quad ; \quad \frac{V_{eq}}{U_{eq}} = \tan\theta$$

Soit :

$$\{\mathcal{V}_{eq}\} = \begin{Bmatrix} P_{eq} & U_{eq} \\ 0 & U_{eq}\tan\theta \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

Ici aussi, la liaison équivalente présente une dépendance qui ne peut disparaître, il y a uniquement 2 degrés de liberté et elle n'est pas normalisé.

1.VI.2.a.ii Reconnaissance d'une liaison

Pour reconnaître une liaison usuelle, il faut :

- obtenir la forme canonique du torseur associé. La forme canonique d'un torseur est la forme du torseur lorsque son moment est minimum (choix du point) et ses composantes ont des expressions les plus simples (le plus de 0 possibles) (choix de la base). Par forme on entend composantes nulles ou non nulles et places de celles-ci dans le torseur
- N'obtenir que des inconnues indépendantes (sauf hélicoïdale)

On pourra alors vérifier que le torseur obtenu correspond **ou non** à une liaison usuelle. Lorsque l'on obtient le torseur équivalent final, il est composé soit

- d'inconnues indépendantes permettant ou non de reconnaître une liaison usuelle selon sa forme
- d'inconnues dépendantes, ne pouvant correspondre à une liaison normalisée (sauf hélicoïdale)

La forme et l'indépendance des inconnues d'un torseur dépendent de deux choix :

- Le point d'expression du torseur équivalent
- La base d'expression du torseur équivalent

Remarque : Une liaison équivalente peut être une liaison normalisée dans une base qui bouge avec le temps et en un point qui peut ne pas être fixe dans l'espace. On peut par exemple trouver une liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$ où le point O n'est pas fixe au cours du temps dans la base 0.

A.VI.2.a.iii Choix du point

• Principe

La reconnaissance d'une liaison par son torseur (cinématique, statique) dépend du point où celui-ci est exprimé. Ainsi, si le torseur d'une liaison est écrit en un point du lieu géométrique caractéristique de celle-ci (et si la base est bien choisie, point développé au prochain paragraphe), sa reconnaissance sera triviale :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

On reconnaît ici le torseur cinématique d'une liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$. Cette écriture est la forme canonique du torseur de la liaison pivot.

Cependant, si ce torseur est exprimé en un point quelconque de l'espace $P(x, y, z)$, le torseur associé à cette liaison prendra une forme non conventionnelle :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & zP_{2/1} \\ 0 & -yP_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & W_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$$

On remarque alors que les 3 composantes de ce torseur ne sont **pas indépendantes** :

$$V_{2/1} = zP_{2/1} \quad ; \quad W_{2/1} = -yP_{2/1}$$

Des inconnues en moment dépendent inconnues en résultante et on voit que la forme du torseur obtenu n'est pas la forme correspondant au moment minimum.

On remarque qu'en $y = z = 0$, soit sur l'axe $(A, \vec{x})$, le moment est minimum et les inconnues sont indépendantes :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

On reconnaître la liaison pivot recherchée.

Il est parfois compliqué de mener cette réflexion si le choix du point n'était pas bon au départ

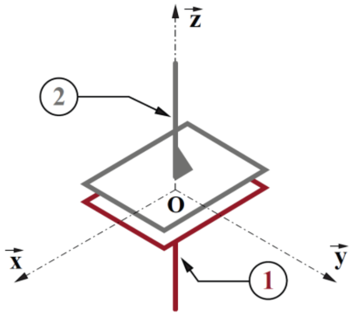
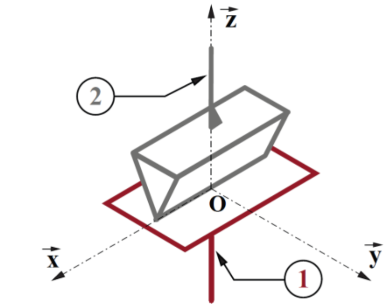
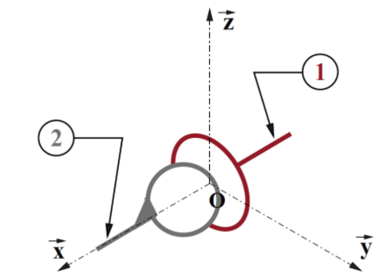
Conclusion : le choix du point avant même de mener l'analyse sera très important pour mener une étude correcte et simple de liaison équivalente : **on essaiera de reconnaître la liaison recherchée « par intuition » afin de choisir un point sur son lieu géométrique avant de commencer**.

• Effets d'un mauvais choix de point

Un mauvais choix de point conduit à l'apparition dans les moments de termes liés à la résultante du torseur **et à des dimensions** (ce n'est pas le cas pour l'hélicoïdale). Il faut alors déplacer le torseur en un autre point afin de minimiser le moment en jouant sur les dimensions et de rendre, si possible les inconnues indépendantes.

• **<u>Cas particuliers</u>**

A savoir, en cinématique par exemple, les liaisons Appui Plan, Linéaire Rectiligne et Ponctuelle peuvent contenir des termes U,V et W dépendants de P, Q et R sans changer leur forme canonique. Il peut donc être possible de les reconnaître sans faire ce travail.

		
$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1}-yR_{2/1} \\ 0 & V_{2/1}+xR_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P}^{\mathfrak{B}}$ $\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{P\in(O,\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$	$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1}+xR_{2/1}-zP_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{P\in(O,\vec{x},\vec{z})}^{\mathfrak{B}}$ $\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & V_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{O}^{\mathfrak{B}}$	$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & V_{2/1}+xR_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1}-xQ_{2/1} \end{Bmatrix}_{P\in(O,\vec{x})}^{\mathfrak{B}}$ $\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_{O}^{\mathfrak{B}}$

Remarques :

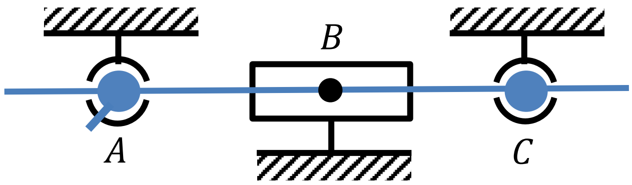
- Comme nous l'avons vu dans le paragraphe sur l'indépendance de variables, en aucun cas cette dépendance à des termes en résultante n'induit une dépendance entre les inconnues cinématiques du torseur équivalent. Pour mieux comprendre, revenez quelques pages en arrière.
- Il en va de même en statique pour un certain nombre de liaisons (cf tableau des liaisons)
- Ce n'est pas parce que le moment n'est pas minimum que le torseur n'a pas sa forme canonique.

• **<u>Méthode de choix du point</u>**

Soit P le point d'expression des torseurs des liaisons composant la liaison équivalente recherchée :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, P sera choisi sur son lieu d'invariance
- P sera choisi, autant que possible, sur un lieu d'invariance commun des différents torseurs des liaisons composant la liaison équivalente afin de minimiser le travail de déplacement des torseurs en P.
- Si des torseurs doivent être déplacés, et si différents points peuvent convenir, P sera le point induisant le moins de termes en moment, c'est-à-dire que les torseurs à déplacer auront généralement le moins possible de composantes de résultante (P, Q, R). Autrement dit, il faut choisir l'un des points où la **résultante** du torseur de la liaison associée a **le plus d'inconnues**
Remarque : Cela n'est pas nécessaire dans le cas où parmi les points possibles, le changement de point s'effectue suivant l'axe de la résultante supplémentaire (s'il n'y en a qu'une), car le produit vectoriel de la formule de Varignon n'induira pas de nouveaux termes

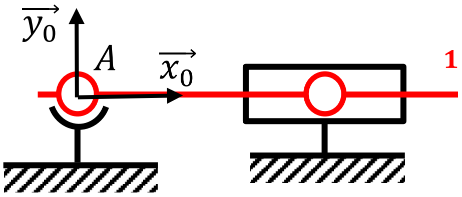
Illustrations : Quel point privilégier ?

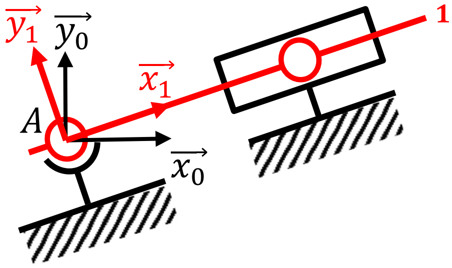


A.VI.2.a.iv Choix de la base

• Principe

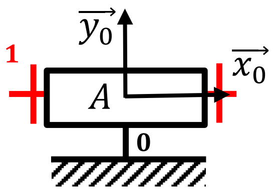
La base d'expression du torseur équivalent peut modifier sa forme. En général, la base est bien choisie intuitivement.

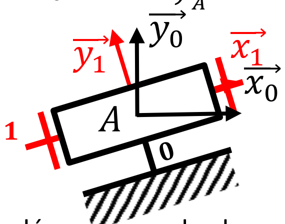




$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & 0 \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$





Dans le cas de droite, et dans la base 0, on remarque une dépendance de deux composantes en résultante (vitesse de rotation) et on remarque qu'un changement de base permet de supprimer celle-ci et de reconnaitre une liaison pivot.

Il est parfois compliqué de mener cette réflexion si le choix de la base n'était pas bon au départ

Conclusion : le choix de la base avant même de mener l'analyse sera très important pour mener une étude correcte et simple de liaison équivalente : **on essaiera de reconnaître la liaison recherchée « par intuition » afin de choisir une base contenant les vecteurs associés à la liaison recherchée avant de commencer**.

• Effets d'un mauvais choix de base

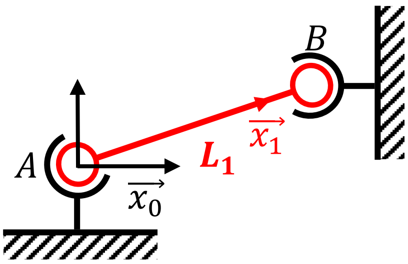
Un mauvais choix de base fait apparaître des relations adimensionnées (rapports de longueurs, cos, sin, tan) entre les mêmes composantes en résultante et en moment. Il faut alors faire un changement de base afin de rendre, si possible, ces inconnues indépendantes.

• **Méthode de choix de la base**

Pour déterminer la base d'expression du torseur équivalent, il faut :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, $\mathfrak{B}$ sera une base contenant au minimum les vecteurs proposés dans le tableau des liaisons (ex : $\mathfrak{B}(\vec{x},-,-) \rightarrow$ choix d'une base quelconque contenant le vecteur $\vec{x}$, quelle que soit sa position)
- D'une manière générale, choisir une base contenant à la fois les éléments géométriques des liaisons présentes et les éventuels vecteurs qui vont servir à la formule de Varignon

Illustrations : Quelle base privilégier ?



• **Remarque**

On remarquera que pour réussir à trouver la forme canonique d'un torseur par changement de base, il sera nécessaire d'avoir les mêmes relations entre deux mêmes composantes de la résultante et du moment :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & U_{2/1}\cos\theta_{10} \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & U_{2/1}\sin\theta_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{10} & U_{2/1} \\ P_{2/1}\sin\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1}\cos\theta_{01} \\ 0 & U_{2/1}\sin\theta_{01} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

A.VI.3 Analyse

A.VI.3.a Préliminaires

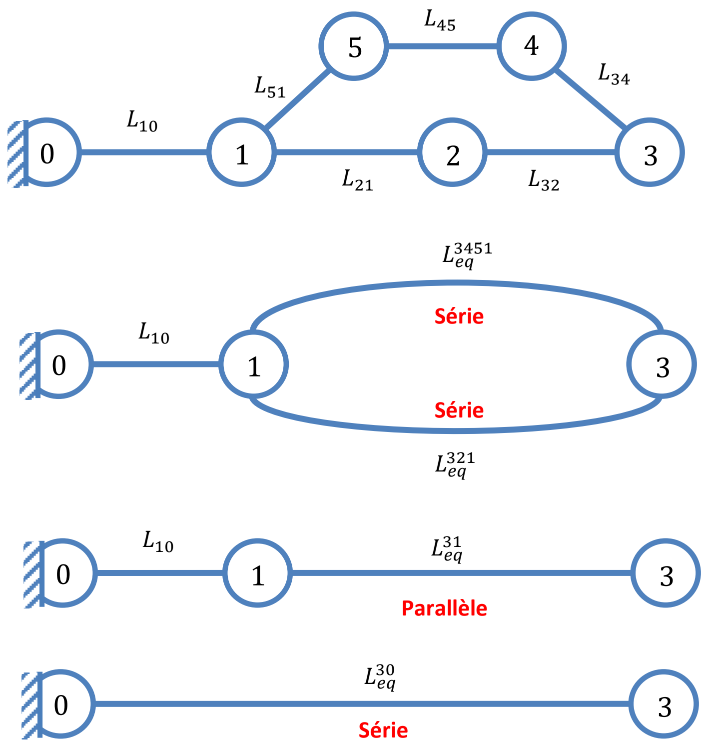
Face à un plan ou une vue 3D d'un mécanisme :

- Analyser les surfaces en contact et proposer les liaisons usuelles correspondantes
- Proposer un modèle cinématique du système : schéma d'architecture
- Etablir son graphe des liaisons
- Identifier si les liaisons étudiées sont en série ou en parallèle

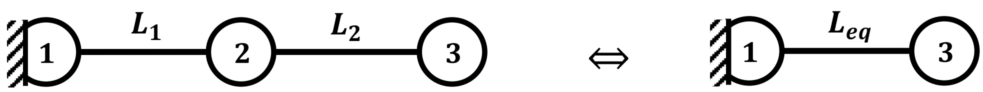
1.VI.3.b Décomposition du problème

Lorsque l'étude porte sur des liaisons à la fois en série et en parallèle, et ou s'il y a plus de 2 liaisons à étudier, il est possible, voire conseillé, de décomposer le problème en somme de problèmes simples contenant quelques liaisons en menant toute la démarche à chaque étape.

Exemple :



A.VI.3.c Liaisons en série



Lorsque deux pièces sont reliées par plusieurs liaisons successives, la liaison équivalente entre ces deux pièces possède un degré de mobilité supérieur ou égale au maximum des degrés de mobilité de chaque liaison intermédiaire.

Méthode :

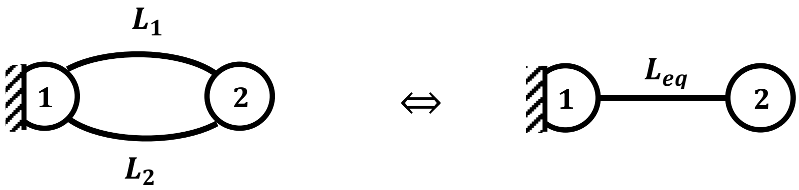
- Choisir point P (Liaison reconnue ? Point commun ? Quel déplacement ?)
- Choix de la base $\mathfrak{B}$ (Liaison reconnue ? Base commune ? Vecteur de déplacement ?)
- Exprimer les n torseurs cinématiques en P dans $\mathfrak{B}$ des liaisons $\{\mathcal{V}_{n/n-1}\}, \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\}$ … $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$
- Par composition du mouvement, on a :

$$\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \{\mathcal{V}_{n-1/n-2}\} + \cdots + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$

Attention à l'ordre des indices

- Exprimer $\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{n/1} & U_{n/1} \\ Q_{n/1} & V_{n/1} \\ R_{n/1} & W_{n/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues cinématiques non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VI.3.d Liaisons en parallèle



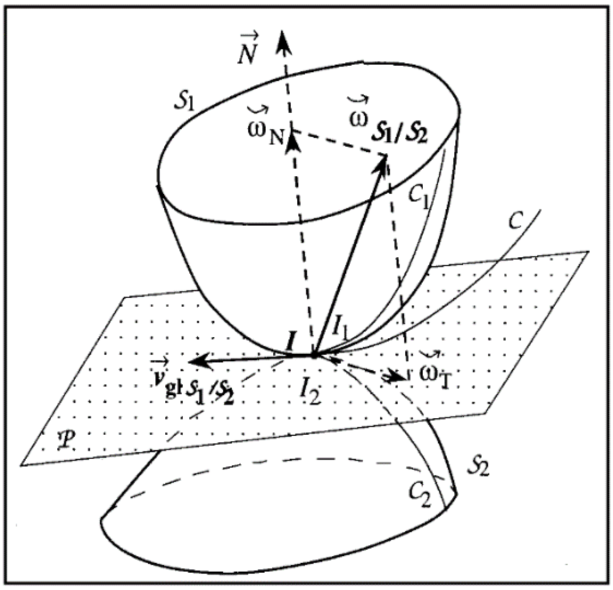
Des liaisons en parallèle permettent généralement de répartir les efforts que chacune va subir dans un contexte de dimensionnement de mécanismes. L'ensemble des plusieurs liaisons entre deux pièces réalise une nouvelle liaison à mobilité inférieure ou égale à la mobilité de chacune des liaisons.

Méthode :

- Choisir point P (Liaison reconnue ? Point commun ? Quel déplacement ?)
- Choix de la base $\mathfrak{B}$ (Liaison reconnue ? Base commune ? Vecteur de déplacement ?)
- Exprimer les n torseurs cinématiques en P dans $\mathfrak{B}$ de chaque liaison en prenant soin de différencier leur notation, en utilisant un numéro pour chacune : $\{\mathcal{V}_{2/1}{}^1\},\{\mathcal{V}_{2/1}{}^2\}$ … $\{\mathcal{V}_{2/1}{}^n\}$
- Poser le torseur générique de la liaison équivalente $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ comportant les 6 inconnues en P dans $\mathfrak{B}$
- Par fermeture cinématique de chaque chaîne indépendante, on a :
$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^1\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^2\} = \cdots = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^n\}$$
Attention à l'ordre des indices
Indicer les formules de déplacement : $\overrightarrow{V^k}(M,j/i) = \overrightarrow{V^k}(N,j/i) + \overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{\Omega_{ji}^k}$
- Exprimer $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues cinématiques non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

1.VII. Cinématique du contact

1.VII.1 Roulement – Pivotement – Glissement



Soient deux solides S_1 et S_2 en contact. Ce contact, du fait de déformations locales, est toujours établi sur une surface. Lorsque ces déformations sont faibles, en considérant les solides indéformables, le contact est un contact ponctuel.

Soient :

- I le point de contact géométrique entre les deux solides à l'instant t
- I_1 le point de contact lié au solide S_1 confondu avec I à l'instant t
- I_2 le point de contact lié au solide S_2 confondu avec I à l'instant t

I, I_1 et I_2 sont confondus à l'instant t mais ils ont des trajectoires différentes. C est la trajectoire du point I au cours du temps, C_1 celle de I_1et C_2 celle de I_2

On définit la vitesse de glissement du solide S_1 par rapport au solide S_2 par $\overrightarrow{v_{gl}}(S_1/S_2)$

$$\overrightarrow{v_{gl}}(S_1/S_2) = \vec{V}(I, S_1/S_2)$$

De même, on a :

$$\overrightarrow{v_{gl}}(S_2/S_1) = \vec{V}(I, S_2/S_1)$$

On a :

$$\overrightarrow{v_{gl}}(S_1/S_2) = -\overrightarrow{v_{gl}}(S_2/S_1)$$

Soit un repère quelconque $\mathcal{R}$, pour calculer la vitesse de glissement, on calculera :

$$\overrightarrow{v_{gl}}(S_1/S_2) = \vec{V}(I, S_1/\mathcal{R}) - \vec{V}(I, S_2/\mathcal{R})$$

Logiquement, le glissement ne dépend pas du référentiel choisi.

La vitesse de glissement appartient au plan $\mathcal{P}$ tangent au point I commun aux solides.

Le vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\omega_{S_1/S_2}} = \overrightarrow{\omega_T} + \overrightarrow{\omega_N}$ possède deux composantes :

- $\overrightarrow{\omega_T}$ le roulement contenu dans le plan tangent
- $\overrightarrow{\omega_N}$ le pivotement normal au plan tangent en I

1.VII.2 Roulement sans glissement

Lorsqu'il y a roulement sans glissement, la vitesse de glissement et le pivotement entre les deux solides sont nuls. On a :

$$\boxed{\vec{V}(I,S_1/S_2) = \vec{V}(I,S_2/S_1) = \vec{0}}$$

En introduisant un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque, on a :

$$\overrightarrow{v_{gl}}(S_1/S_2) = \vec{V}(I,S_1/\mathcal{R}) - \vec{V}(I,S_2/\mathcal{R}) = 0$$

$$\boxed{\vec{V}(I,S_1/\mathcal{R}) = \vec{V}(I,S_2/\mathcal{R})}$$

1.VIII. Transformation du mouvement à rapport fixe

On peut transformer une rotation en rotation à une vitesse différente, en une translation, et une translation en rotation. La plupart du temps, on utilise la propriété de roulement sans glissement.

Nous nous intéressons ici aux transformations de mouvement présentant un **rapport constant** :

$$\omega_{s/0} = k_{s/e}\omega_{e/0} \quad ; \quad V_{s/0} = k_{s/e}\omega_{e/0} \quad ; \quad V_{s/0} = k_{s/e}V_{e/0}$$

1.VIII.1 Transformation Rotation/Rotation

1.VIII.1.a Introduction

Lorsqu'une pièce, classiquement un arbre, tourne autour d'un axe, il est possible de transmettre ce mouvement de rotation à un autre arbre, dans le même sens ou dans le sens opposé, tout en modifiant la vitesse de rotation. Pour cela, parmi les possibilités existantes, les plus courantes sont :

- Les engrenages/Roues qui roulent sans glisser
- Les poulies/courroies ou Pignons/Chaînes
- Les systèmes à roue et vis sans fin

1.VIII.1.b Rapport de réduction

La transformation à rapport constant d'une rotation en une autre rotation/translation sera caractérisée par ce que l'on appelle un rapport de réduction (aussi appelé rapport de multiplication s'il augmente la vitesse en sortie).

Lors de l'étude d'un réducteur (réducteur ou multiplicateur), on choisit de définir l'entrée et la sortie, soit parce qu'elle est imposée par le mécanisme, soit arbitrairement.

On appelle alors :

- ω_e la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée
- ω_s la vitesse de rotation de l'arbre de sortie

On définit le rapport de réduction par :

$$k = \frac{\omega_s}{\omega_e}$$

Ce rapport s'appelle toujours **rapport de réduction**, mais s'il est supérieur à 1, on l'appelle aussi **rapport de multiplication** car la vitesse en sortie est alors plus grande que la vitesse en entrée.

Lorsque le rapport de réduction est constant, on parle **d'homocinétisme**. Cela permet d'éviter des vibrations.

Remarque : il est tout à fait possible d'avoir un rapport non constant (cf.Maxpid, Sympact…), qui sera déterminé par fermeture géométrique/cinématique…

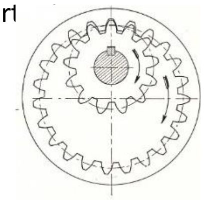
1.VIII.1.c Solution Engrenages/Roues qui roulent sans glisser

1.VIII.1.c.i Généralités

La transmission **par engrenages, association de deux roues dentées**, est de loin la plus utilisée. Elle exploite la propriété de roulement sans glissement entre deux surfaces cylindriques parfaites.

L'engrenage n'est en réalité qu'une solution géométrique (**profils en développantes de cercles**) qui permet l'homocinétisme ! Cela permet en fait d'assurer un point de contact tel qu'il y ait roulement sans glissement entre deux cylindres parfaits à des diamètres appelés diamètres primitifs des roues dentées utilisées. L'avantage de la présence de dents est qu'il est possible de transmettre les efforts par « **obstacle** » et non par **adhérence**, ce qui permet de transmettre des couples bien plus import transmissibles par adhérence.

Une couronne est une roue dentée dont les dents sont à l'intérieur :



1.VIII.1.c.ii Module d'un engrenage

Pour qu'un engrenage fonctionne, il faut que la distance entre deux dents sur chaque roue dentée soit égale. Appelons cette distance λ au niveau du diamètre primitif, Z_i le nombre de dents de la roue dentée i et D_i son diamètre, et considérons un engrenage composé des roues 1 et 2 :

$$\lambda = \frac{\pi D_1}{Z_1} = \frac{\pi D_2}{Z_2}$$

On définit alors le module d'un engrenage : $\frac{D_1}{Z_1} = \frac{D_2}{Z_2} = m$

Le nombre de dents noté est proportionnel aux diamètres primitifs des roues dentés :

$$\boxed{D = mZ}$$

1.VIII.1.c.iii Modélisation des engrenages

• **Modélisation des roues dentées**

Cinématiquement parlant, une roue dentée sera modélisée par une **pièce cylindrique lisse (sans dents) dont le diamètre est le diamètre primitif de la roue**. Ainsi, un engrenage sera modélisé par deux pièces lisses en contacts telles que les diamètres de chaque roue est son diamètre primitif. La relation entrée/sortie cinématique sera alors la même que s'il y avait roulement sans glissement entre les deux roues. Statiquement parlant, par contre, la transmission par obstacles ou par adhérence est différente.

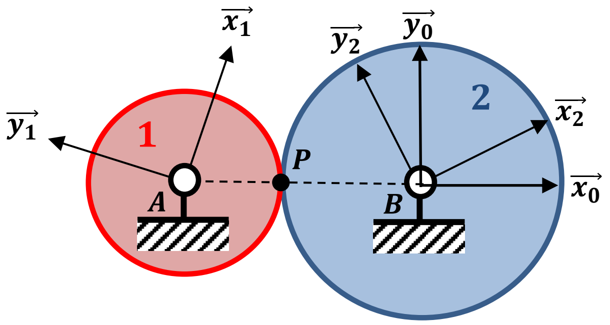
• **Modélisation du contact entre roues dentées**

Un contact entre deux roues dentées se réalise sur un point ou sur une ligne et sera donc modélisé soit par une liaison **ponctuelle**, soit par une liaison **linéaire rectiligne**. Pour les engrenages droits, et si les mouvements sont plans, ponctuelle et linéaire rectiligne en modèle plan seront cinématiquement équivalentes.

1.VIII.1.c.iv Rapport de réduction des engrenages droits

• **Contact extérieur**

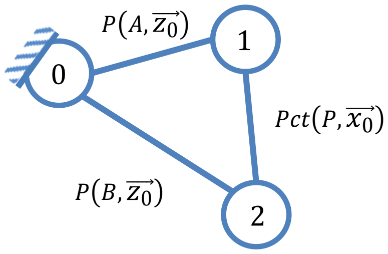
Soit le modèle suivant :



$$\|\overrightarrow{AP}\| = R_1 \; ; \; \|\overrightarrow{PB}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}})$$

$$\theta_{10} = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}})$$



On suppose qu'il y a roulement sans glissement entre 1 et 2 en P.

On a :

$$\vec{V}(P,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}} = -R_1\overrightarrow{x_0} \wedge \Omega_{10}\overrightarrow{z_0} = R_1\Omega_{10}\overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{V}(P,2/0) = \vec{V}(B,2/0) + \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{20}} = R_2\overrightarrow{x_0} \wedge \Omega_{20}\overrightarrow{z_0} = -R_2\Omega_{20}\overrightarrow{y_0}$$

La condition de roulement sans glissement entre 1 et 2 donne :

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(P,2/0) + \vec{V}(P,0/1) = \vec{V}(P,2/0) - \vec{V}(P,1/0) = \vec{0}$$

Soit :

$$R_1\Omega_{10}\overrightarrow{y_0} + R_2\Omega_{20}\overrightarrow{y_0} = (R_1\Omega_{10} + R_2\Omega_{20})\overrightarrow{y_0}$$

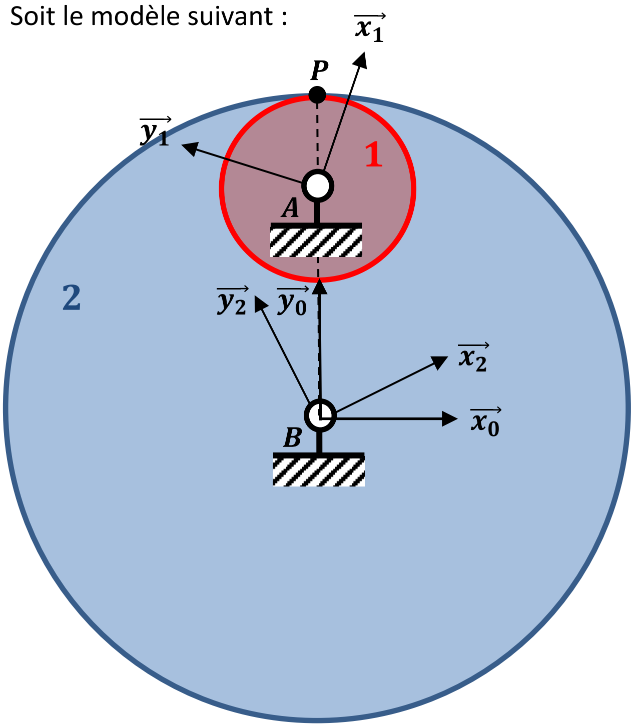
$$R_1\Omega_{10} + R_2\Omega_{20} = 0$$

$$\boxed{\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}}$$

On remarque qu'il y a inversion du sens de rotation.

- **Contact intérieur**

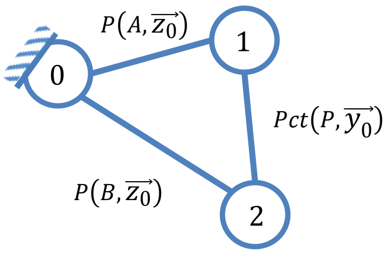
Soit le modèle suivant :



$$\|\overrightarrow{AP}\| = R_1 \; ; \; \|\overrightarrow{PB}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2})$$

$$\theta_{10} = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$$



On suppose qu'il y a roulement sans glissement entre 1 et 2 en P.

On a :

$$\vec{V}(P,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}} = -R_1\overrightarrow{y_0} \wedge \Omega_{10}\overrightarrow{z_0} = -R_1\Omega_{10}\overrightarrow{x_0}$$

$$\vec{V}(P,2/0) = \vec{V}(B,2/0) + \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{20}} = -R_2\overrightarrow{y_0} \wedge \Omega_{20}\overrightarrow{z_0} = -R_2\Omega_{20}\overrightarrow{x_0}$$

La condition de roulement sans glissement entre 1 et 2 donne :

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(P,2/0) + \vec{V}(P,0/1) = \vec{V}(P,2/0) - \vec{V}(P,1/0) = \vec{0}$$

Soit :

$$R_1\Omega_{10}\overrightarrow{y_0} - R_2\Omega_{20}\overrightarrow{y_0} = (R_1\Omega_{10} - R_2\Omega_{20})\overrightarrow{y_0}$$

$$R_1\Omega_{10} - R_2\Omega_{20} = 0$$

$$\boxed{\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}}$$

On remarque qu'il y a conservation du sens de rotation.

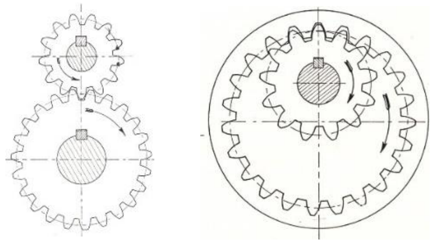
• Train d'engrenages - Formule de Willis

Dans le cas d'un engrenage avec contact extérieur, nous avons montré que : $k_{2/1} = \frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$

Dans le cas d'un engrenage avec contact intérieur, nous avons montré que : $k_{2/1} = \frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}} = \frac{Z_1}{Z_2}$

$k_{2/1}$ est appelé rapport de réduction $\left(k_{2/1} < 1\right)$, et/ou de multiplication $\left(k_{2/1} > 1\right)$ bien que le nom « rapport de réduction » puisse être utilisé dans tous les cas.

Considérons maintenant un ensemble de p engrenages en série dont les axes sont fixes dans le repère 0:



Contact extérieur   Contact intérieur

Engrenage 1 : roues 1 et 2 – rapport $k_{2/1} = \frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}}$

Engrenage 2 : roues 2 et 3 – rapport $k_{3/2} = \frac{\Omega_{3/0}}{\Omega_{2/0}}$

…

Engrenage p : roues p et $p+1$ – rapport $k_{p+1/p} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{p/0}}$

Supposons que cet ensemble comporte n contacts extérieurs.

Le rapport de réduction global vaut :

$$k_{p+1/1} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{10}} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{p/0}} \frac{\Omega_{p/0}}{\Omega_{p-1/0}} \dots \frac{\Omega_{30}}{\Omega_{20}} \frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = k_{p+1/p} k_{p/p-1} \dots k_{3/2} k_{2/1} = \prod_{i=1}^{p} k_{i+1/i}$$

$$k_{p+1/1} = (-1)^n \frac{Z_p}{Z_{p+1}} \frac{Z_{p-1}}{Z_p} \dots \frac{Z_2}{Z_3} \frac{Z_1}{Z_2} = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}}$$

Comme chaque roue dentée de chaque engrenage possède le même module, la relation reste vraie avec les diamètres, d'où la formule de Willis sous différentes formes suivante :

$$\boxed{k_{p+1/1} = \prod_{i=1}^{p} k_{i+1/i} = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}} = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \frac{D_{menantes}}{D_{menées}}}$$

FORMULE DE WILLIS

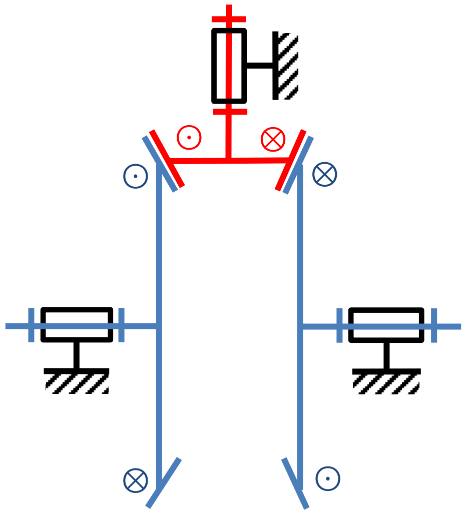
ATTENTION : La formule de Willis n'est applicable que lorsque les axes de rotation des roues dentées sont fixes dans le repère d'étude, ici 0. On parle de **trains simples** dans ce cas.

Cf exemple TD

• **Remarques**

Les roues menantes sont les roues qui « partent » de l'entrée, les roues menées sont celles qui « partent » de la sortie – Autrement dit, dans chaque engrenage (ensemble de 2 roues dentées), la roue entraînée par une roue provenant de l'entrée est menante, la roue liée à une roue allant vers la sortie est menée – Une roue peut à la fois être menée par les roues provenant de l'entrée, et menante pour les roues allant vers la sortie, auquel cas son nombre de dents n'entre pas en compte dans la réduction.

Attention, le signe de la formule de Willis est juste uniquement si les axes des roues dentées sont parallèles (engrenages droits). Dans le cas d'engrenages coniques, il faut traiter en visuel au cas par cas !!!

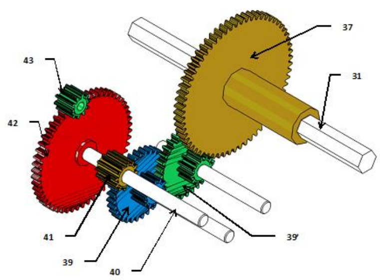


Lorsque l'on met n engrenages les uns derrière les autres, où chaque roue fait partie de deux engrenages, la formule de Willis se simplifie… Le rapport de réduction ne vaut donc que

$$k_{p+1/1} = \pm \frac{Z_1}{Z_{p+1}}$$

Cela présente l'avantage de permettre un éventuel changement de sens (marche arrière dans une boite de vitesses), ou d'obtenir une distance assez grande entre deux axes de rotation.

Lorsque l'on cherche un fort rapport de réduction, on fait en sorte que chaque pièce qui tourne ait un deux roues dentées, chacune faisant partie d'un engrenage…

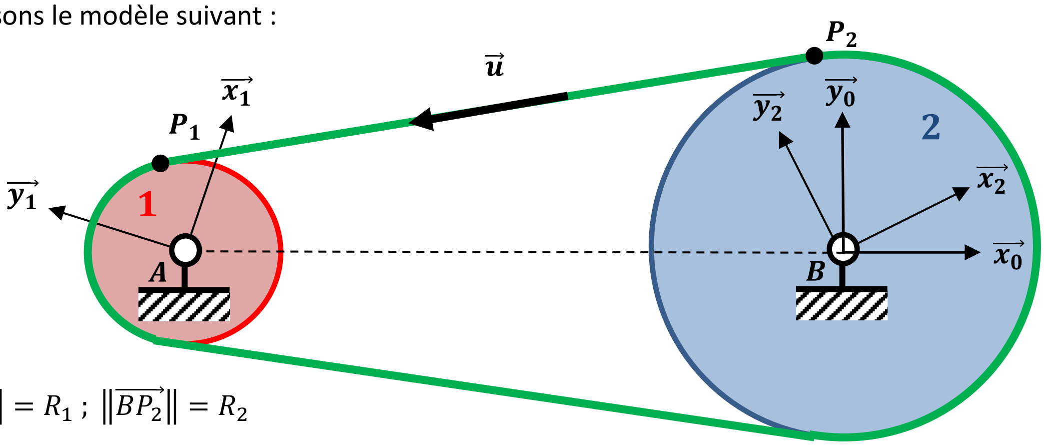


1.VIII.1.d Solution Poulie/Courroie ou Pignon/Chaîne

Voici ci-dessous un ensemble Poulie/Courroie (lisse ou crantée) modifiant la vitesse de rotation.

La courroie peut être lisse ou crantée selon les couples à transmettre et la nécessité éventuelle de permettre le glissement en cas de blocage.

Proposons le modèle suivant :



$\|\overrightarrow{AP_1}\| = R_1$; $\|\overrightarrow{BP_2}\| = R_2$

$\theta_{20} = (\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_2}}) = (\widehat{\vec{y_0}, \vec{y_2}})$

$\theta_{10} = (\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_1}}) = (\widehat{\vec{y_0}, \vec{y_1}})$

Supposons que la courroie ne se déforme pas entre P_1 et P_2 lors de l'utilisation (vrai en régime stationnaire, à vitesse constante et sans variation de l'effort dans celle-ci).

$$\vec{V}(P_1, 1/0) = R_1 \Omega_{10} \vec{u} \quad ; \quad \vec{V}(P_2, 2/0) = R_2 \Omega_{20} \vec{u}$$

Si la courroie ne se déforme pas, c'est-à-dire que $\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{cst}$:

$$\vec{V}(P_1, 1/0) = \vec{V}(P_2, 2/0) \Leftrightarrow R_1 \Omega_{10} \vec{u} = R_2 \Omega_{20} \vec{u}$$

Soit :

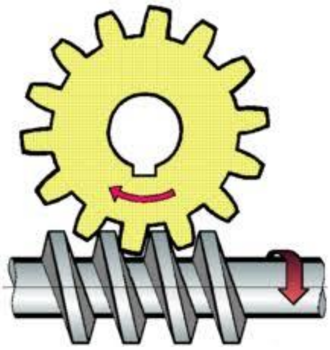
$$R_1 \Omega_{10} = R_2 \Omega_{20}$$

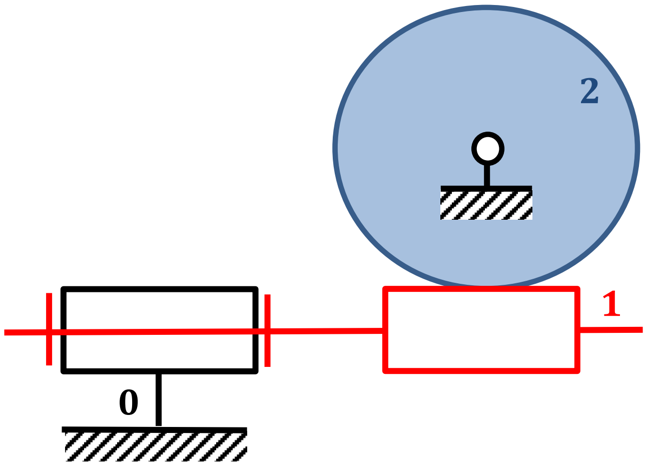
$$\boxed{\frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}} = \frac{R_1}{R_2}}$$

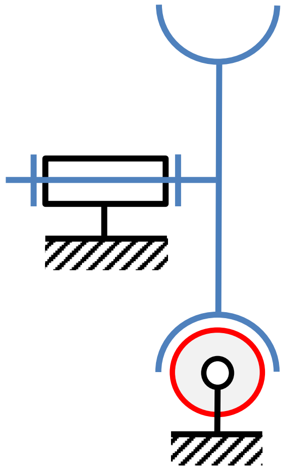
Remarque : selon l'agencement des courroies et la présence de galets, il est possible d'inverser les sens de rotation (courroies croisées) et de changer les axes de rotation.

1.VIII.1.e Solution Roue et vis sans fin

Le système de roue et vis sans fin permet d'obtenir de très faibles rapports de réduction, voire même de créer des systèmes irréversibles, c'est-à-dire que seule la vis entraîne la roue, l'inverse est impossible.







Déterminons le rapport cinématique au signe près (dépend des conventions choisies sur les axes des pièces, la définition des vitesses, et le positionnement de la roue 2).

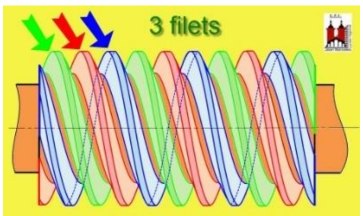
Supposons que la vis possède un seul filet (cf remarque). A chaque tour de la vis 1, une seule dent de la roue 2 est entraînée. Il est donc très simple de définir le rapport de réduction :

$$\boxed{\left|\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}}\right| = \frac{1}{Z_2}}$$

Remarque : il existe des vis à plusieurs filets en parallèle. Dans ce cas, à chaque tour de la vis, plusieurs dents sont entraînées en même temps, autant que de filets… Soit n le nombre de filets.

Le rapport devient :

$$\left|\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}}\right| = \frac{n}{Z_2}$$



1.VIII.2 Transformation Rotation/Translation

Les deux solutions généralement utilisées pour transformer une rotation en translation, et inversement, sont :

- L'ensemble Pignon/Crémaillère
- L'ensemble Poulie/Courroie

1.VIII.2.a Pignon/Crémaillère

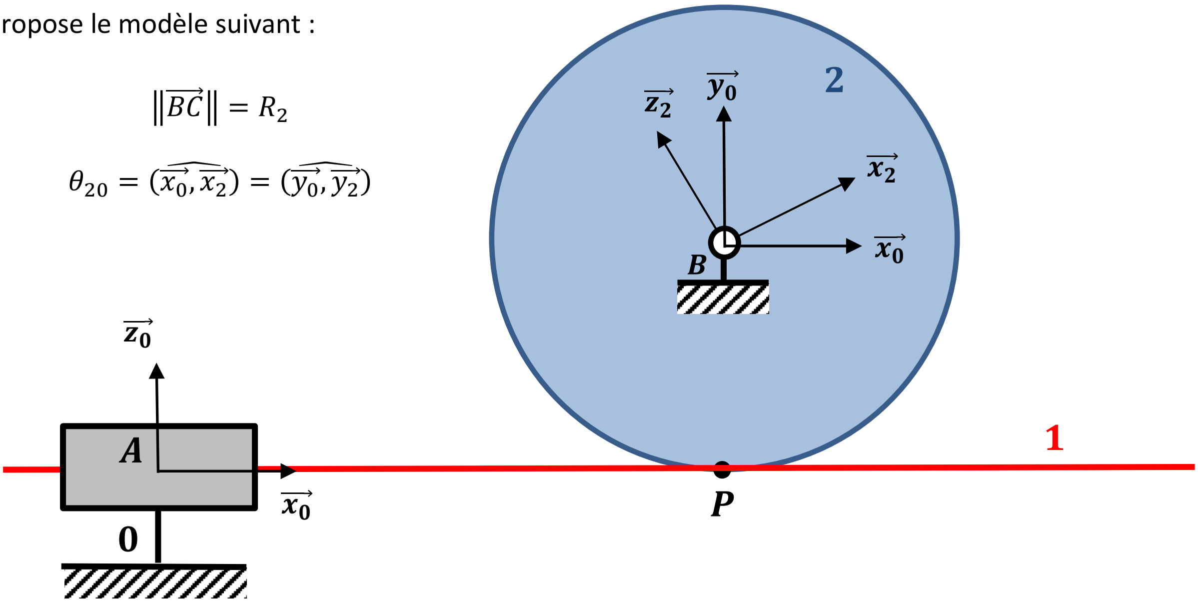
Un ensemble pignon crémaillère correspond à un engrenage dans lequel l'une des roues dentées est « déroulée ».

Ici aussi, la géométrie des dents assure un roulement sans glissement entre le cercle de diamètre primitif de la roue dentée et une ligne primitive de la crémaillère, les dents permettant de transmettre des efforts bien plus importants que par adhérence.

On propose le modèle suivant :

$$\|\overrightarrow{BC}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = \widehat{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2})} = \widehat{(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2})}$$



$$\vec{V}(P,2/0) = \vec{V}(B,2/0) + \overrightarrow{PB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{20}} = R_2\overrightarrow{y_0} \wedge \Omega_{20}\overrightarrow{z_0} = R_2\Omega_{20}\overrightarrow{x_0}$$

$$\vec{V}(P,1/0) = V_{10}\overrightarrow{x_0}$$

La condition de roulement sans glissement entre 1 et 2 donne :

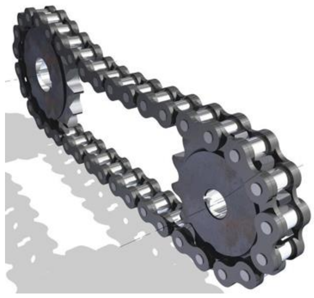
$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(P,2/0) + \vec{V}(P,0/1) = \vec{V}(P,2/0) - \vec{V}(P,1/0) = \vec{0}$$

$$R_2\Omega_{20}\overrightarrow{x_0} - V_{10}\overrightarrow{x_0} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{V_{10} = R_2\Omega_{20}}$$

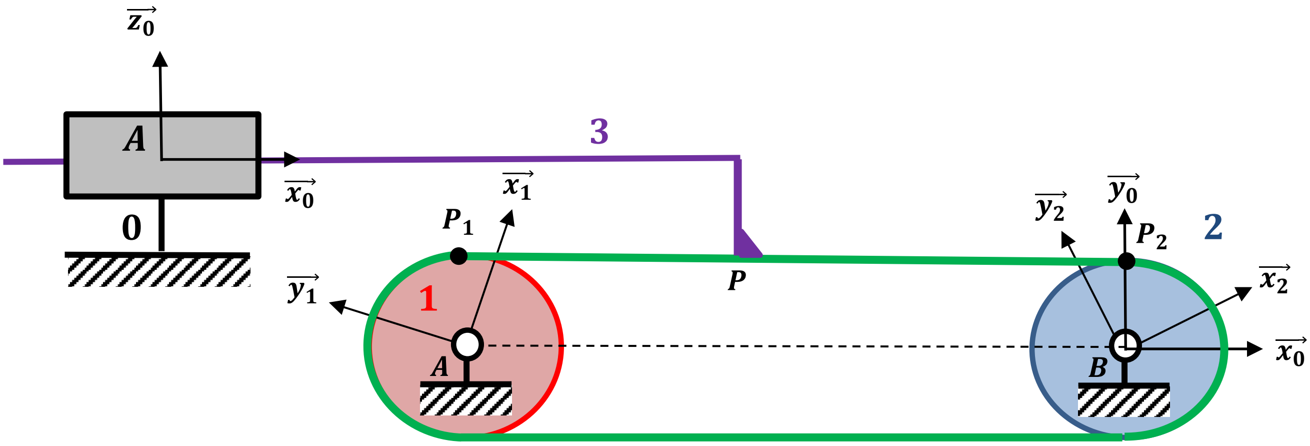
Remarque : pour inverser le sens du mouvement, il suffit de placer la crémaillère à l'opposé de la roue dentée

1.VIII.2.b Poulie/Courroie – Pignon/Chaine



En général, on utilise deux poulies de mêmes diamètres afin de transformer une rotation en translation et inversement.

On propose le modèle suivant :



Si la courroie est indéformable :

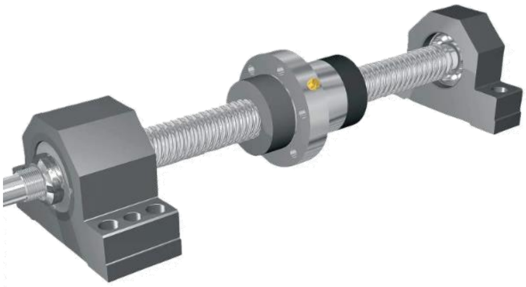
$$\vec{V}(P,3/0) = \vec{V}(P_1,1/0) = \vec{V}(P_2,2/0)$$

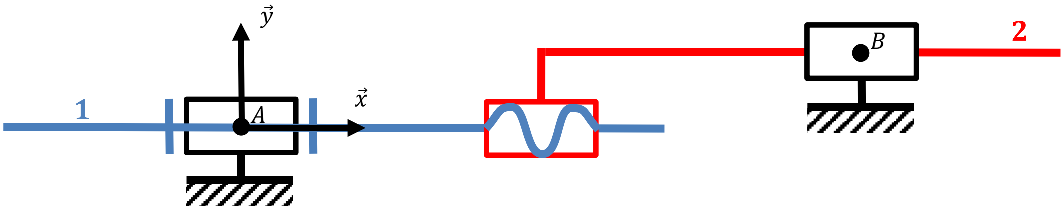
$$V_{30} = -R_1\Omega_{10} = -R_2\Omega_{20}$$

Remarque : pour inverser le sens du mouvement, il suffit de raccorder la pièce 3 sur la partie inférieure de la courroie.

1.VIII.2.c Vis/écrou

N'oublions pas la solution vis/écrou, ou liaison hélicoïdale.





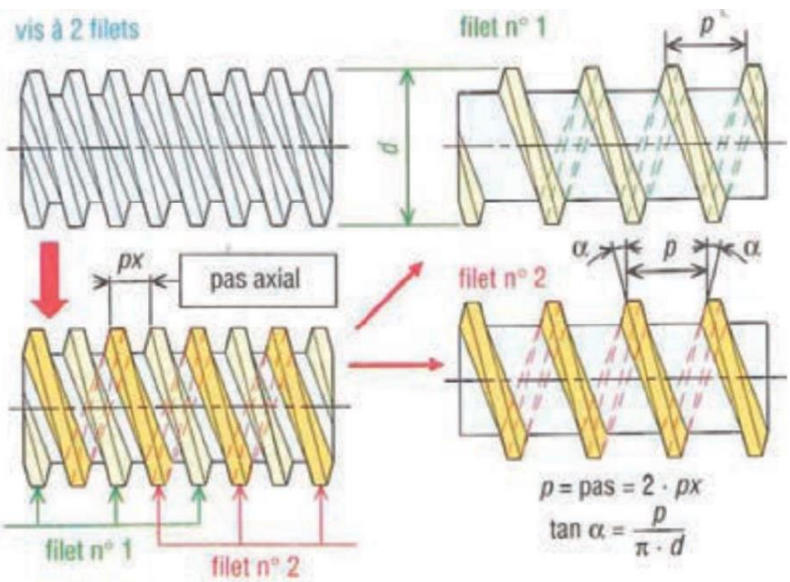
On pose : $\vec{V}(B,2/0) = V_{20}\vec{x}$; $\overrightarrow{\Omega_{10}} = \Omega_{10}\vec{x}$

On a alors la relation :

$$V_{20} = \frac{p}{2\pi}\Omega_{10}$$

Remarques :

- Le sens du pas définit le signe de p, la relation cinématique entrée/sortie étant identique :
$$\begin{cases} pas \text{ à } droite\ p > 0 \\ pas \text{ à } gauche\ p < 0 \end{cases}$$
Pour rappel, il faut regarder la vis « en la tenant devant soi », si en avançant dans l'axe de la vis, le filet part à droite, c'est un « pas à droite ». Et cela fonctionne encore si vous retournez la vis …
- Il existe des vis à plusieurs filets. Dans ce cas, on définit le pas axial px (distance entre deux dents successives), le nombre de filets n, et le pas p de la formule cinématique vaut :
$$p = n * px$$

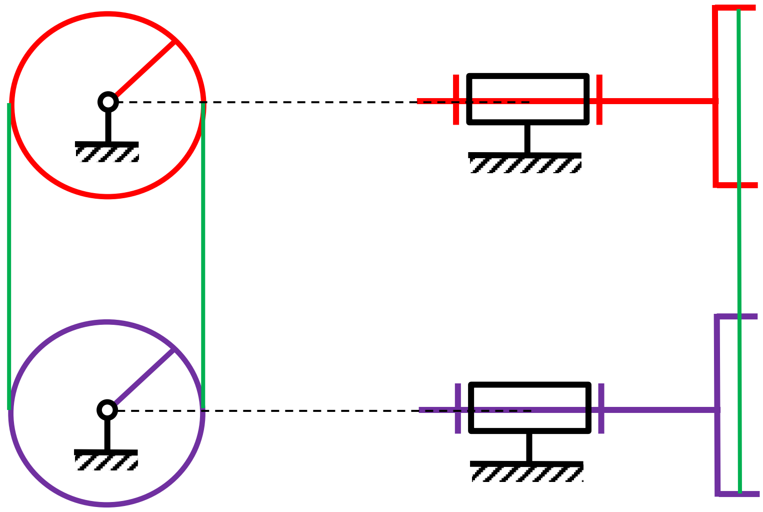


1.VIII.3 Modèles cinématiques

Nous avons jusque-là représenté les roues dentées et les courroies par des disques colorés. Voyons comment les représenter proprement sur un schéma cinématique.

1.VIII.3.a Modèle poulies

Une poulie se représente comme suit :



1.VIII.3.b Modèle Roues dentées et couronnes