DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice non autorisée

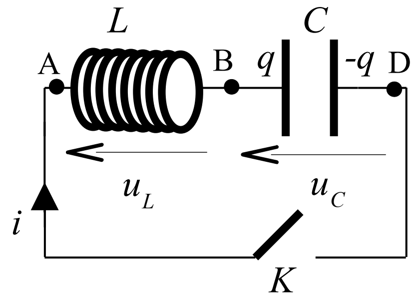
durée: 4 heures

Sujet

Électricité

I. Système non dissipatif

Un circuit électrique est constitué d'une bobine idéale de coefficient d'auto-inductance L en série avec un condensateur idéal de capacité C (voir figure). Pour $t<0$, l'interrupteur K est ouvert. À l'aide d'un circuit extérieur non représenté, on charge le condensateur. Au temps $t=0$, on ferme K.



1. Rappeler sans démonstration la relation entre $u_L(t)=V_A(t)-V_B(t)$ et $i(t)$ faisant intervenir L (loi d'Ohm pour une bobine idéale).

2. Rappeler sans démonstration la relation entre $u_C(t)=V_B(t)-V_D(t)$ et $i(t)$ faisant intervenir C (loi d'Ohm pour un condensateur idéal). On peut éventuellement retrouver cette expression en passant par la charge $q(t)$ mais cette démarche n'est pas exigée ici.

3. En déduire, en utilisant les deux lois d'Ohm précédentes, l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur notée désormais $u(t)$ ($=u_C(t)$) . Écrire cette équation différentielle du second ordre sous la forme habituelle en faisant intervenir la pulsation propre ω_0 dont on retrouvera l'expression en fonction de L et C .

4. Pour résoudre cette équation différentielle, on cherche l'équation caractéristique, c'est à dire que l'on essaye une solution de la forme: $a\exp(rt)$. Écrire l'équation caractéristique vérifiée par r . En déduire, avec précision, que la solution de l'équation différentielle est de la forme $u(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$ pour $t>0$.

5. A l'instant $t=0^-$, le condensateur est chargé sous la tension $u_C(t=0^-)=u_0$ et le circuit est ouvert. Donner, en justifiant, les conditions initiales $u(t=0^+)$ et $\frac{du}{dt}(t=0^+)$ et déterminer finalement $u(t)$ puis $\frac{d\,u(t)}{dt}$ en tenant compte des conditions initiales.

6. Afin de tracer le portrait de phase, on pose $x(t)=u(t)$ et $y(t)=\frac{1}{\omega_0}\frac{du(t)}{dt}$. Établir entre $x(t)$ et $y(t)$ une relation indépendante de t . On rappelle: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

7. Tracer la courbe, appelée trajectoire de phase, décrite dans le plan (Ox,Oy) par le point M de coordonnées x et y quand t varie. De quelle courbe s’agit-il ? Préciser le point de départ M_0 . On envisagera les deux cas $u_0>0$ et $u_0<0$.

8. Quel est le sens de parcours de M quand t augmente. Justifier. On pourra envisager si nécessaire les deux cas $u_0>0$ et $u_0<0$.

II. Système dissipatif

A. Circuit RLC en régime libre

On modélise les défauts de la bobine par un résistor de résistance R en série avec celle-ci, le condensateur étant toujours supposé parfait. On ferme l'interrupteur au temps $t=0$, le condensateur étant chargé sous la tension u_0 .

1) Expression de la tension

9. Faire le schéma du nouveau circuit, préciser les notations utilisées (i , u_C , u_L , u_R) et établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $u(t)=u_C(t)$.

10. Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme canonique: $\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du(t)}{dt}+\omega_0^2u(t)=0$. On donnera les expressions de ω_0 et Q en fonction de R , L , C .

11. Écrire l'équation caractéristique en utilisant les notations ω_0 et Q et résoudre cette équation en supposant (ainsi que pour la suite du problème) le cas où les deux solutions sont des complexes conjugués et s'écrivent sous la forme: $r=r'\pm jr''$ avec $j=\sqrt{-1}$. Quelle est dans ce cas l'inégalité vérifiée par Q puis celle vérifiée par R . Commenter le sens de ces deux inégalités.

12. Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme $u(t)=\exp(-\alpha t)(A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t))$ pour $t>0$. Donner l'expression de la pseudopulsation Ω en fonction de ω_0 et Q . Donner l'expression de α en fonction de ω_0 et Q .

13. Déterminer $u(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

14. On décide d'écrire $u(t)$ sous la forme $u(t)=C(t)\cos(\Omega t-\varphi)$ où $C(t)$ qui varie plus lentement que $\cos(\Omega t-\varphi)$ est l'amplitude, dépendant du temps, de $u(t)$. Montrer que $C(t)$ peut s'écrire sous la forme $C(t)=u_0\frac{\exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$. On procédera par identification mais sans utiliser le résultat fourni ici pour l'expression de $C(t)$ .Déterminer φ en l'écrivant si possible sous forme d'un arctan .

2) Aspect énergétique

15. Rappeler l'expression de l'énergie électrique emmagasinée par un condensateur et celle de l'énergie magnétique emmagasinée par une bobine. Quelle est l'expression de l'énergie totale à l'instant t : $E(t)$ emmagasinée dans le circuit étudié en fonction de C , ω_0 , u , $\frac{du}{dt}$?

16.En dérivant cette expression par rapport au temps, établir une relation entre $\frac{dE(t)}{dt}$, R , $i(t)$ (intensité dans le circuit). Commenter le sens physique de la relation obtenue.

3) Trajectoire de phase

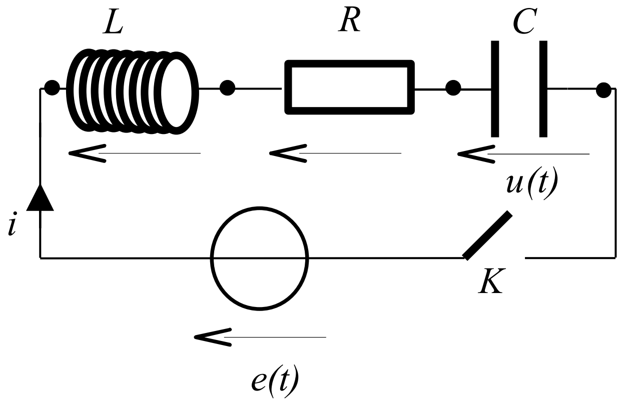
On revient ici au point M dans le plan (Ox,Oy) de coordonnées $x(t)=u(t)$ et $y(t)=\frac{1}{\omega_0}\frac{du(t)}{dt}$.

17.Exprimer la distance $\|\overrightarrow{OM}\|$ en fonction de E (énergie emmagasinée dans le circuit) et éventuellement des autres données R , L , C . Que peut-on en conclure quant à la trajectoire du point M dans le plan (Ox,Oy) au cours du temps ?

18.Représenter l'allure de la trajectoire de phase en précisant le sens de parcours . Justifier le nom d'attracteur donné au point O .

B. Circuit RLC en régime forcé sinusoïdal

On dispose dans le circuit RLC de la question précédente (voir figure) un générateur de tension de f.e.m. $e(t)$ variant de façon sinusoïdale avec le temps $e(t)=E_{MAX}\cos(\omega t)$. On ferme l'interrupteur au temps $t=0$, le condensateur étant ici déchargé.



19.Retrouver l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ en faisant intervenir les notations ω_0 et Q .

20.On cherche la solution particulière (solution en régime forcé sinusoïdal). On passe aux grandeurs complexes. On rappelle que $u(t)=\Re(\underline{u}(t))$ et $\frac{d}{dt}\underline{u}(t)=j\omega\underline{u}(t)$. Déduire de l'équation différentielle l'expression de $\underline{u}(t)$. L'écrire sous la forme $\underline{u}(t)=(-j)\frac{E_{MAX}\exp(j\omega t)}{\underline{z}}$ où $\underline{z}$ est une grandeur complexe dont la partie réelle est positive, s'exprimant en fonction de ω , ω_0 et Q . On aura intérêt à écrire ce complexe sous forme exponentielle. En déduire l'expression de $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

21.Pour une valeur supposée donnée de U_{MAX} (amplitude de $u(t)$), tracer la trajectoire de phase en régime forcé sinusoïdal dans le plan (Ox,Oy) de coordonnées $x(t)=u(t)$ et $y(t)=\frac{1}{\omega}\frac{du(t)}{dt}$. En toute rigueur le plan de phase est le plan de coordonnées $x(t)=u(t)$ et

$y(t)=\frac{du(t)}{dt}$. Quelle serait la trajectoire dans ce plan?

22.Que faut-il ajouter au tracé précédent pour représenter tous les points décrits quand $t>0$? Donner l'allure du portrait de phase complet. Quelle est la forme de l'attracteur?

C. Circuit RLC en régime forcé non sinusoïdal

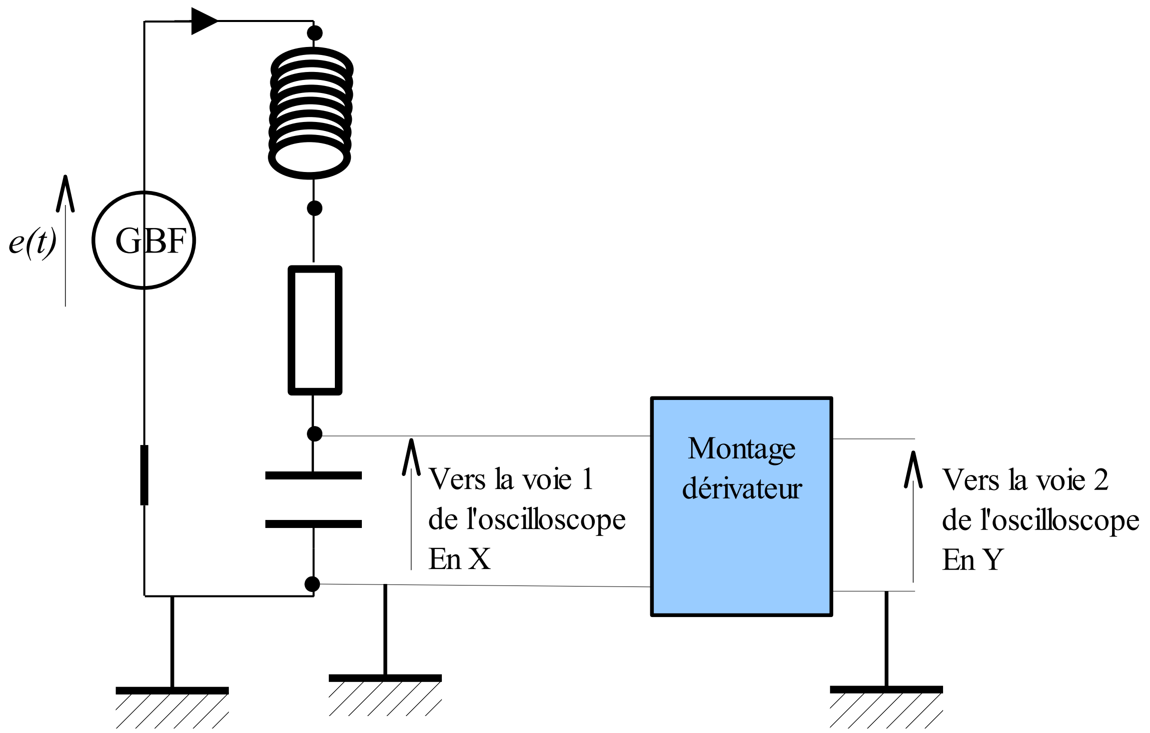
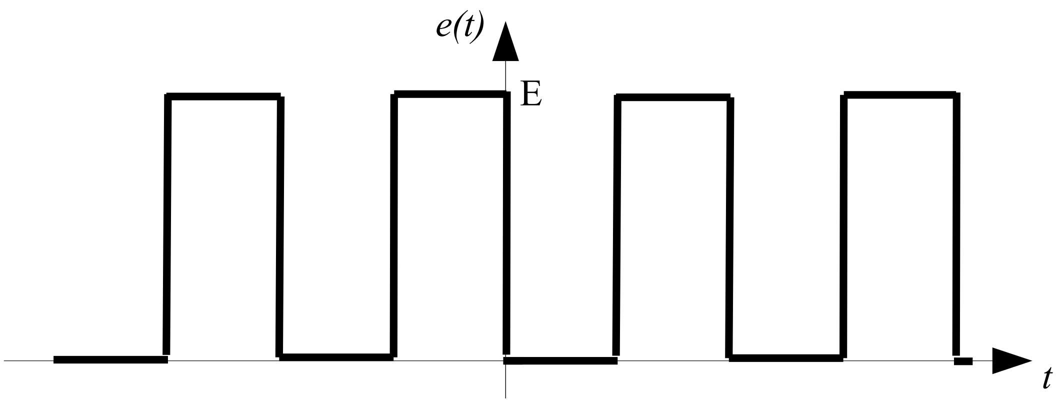


Schéma du montage

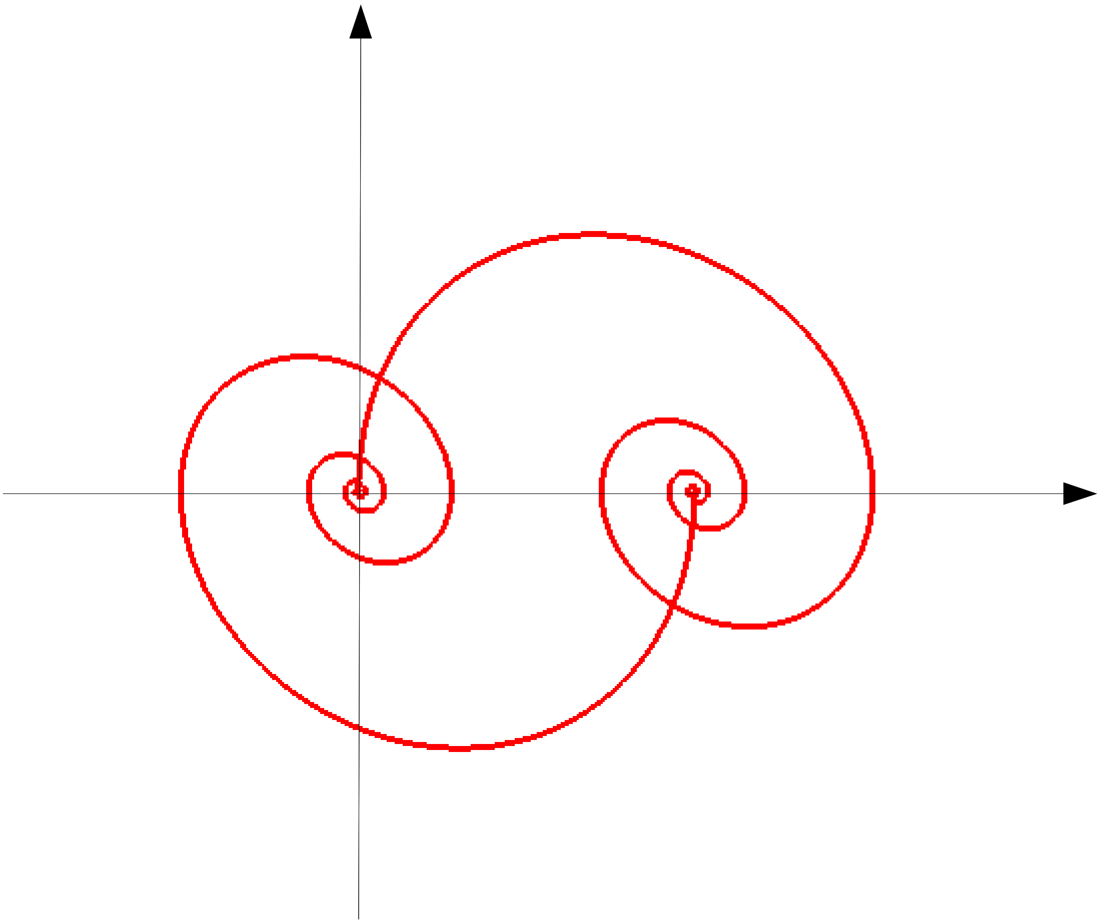


Tension fournie par le GBF

On réalise le montage représenté ci-dessus. Le GBF utilisé fournit une tension créneau dissymétrique de période T. On envoie à l'oscilloscope, en voie X , la tension $u_C(t)=u(t)$ et, en voie Y , la tension $K\frac{d\,u_C(t)}{dt}$ c'est-à-dire à une constante multiplicative près la dérivée

$\frac{d u(t)}{dt}$.

On obtient alors l'oscillogramme reproduit ci-après.



23.Proposer un schéma théorique de dérivateur inverseur à amplificateur opérationnel idéal et vérifier par le calcul que le montage proposé est bien dérivateur.

On supposera que le dérivateur utilisé dans le montage est non inverseur.

24.Comment peut-on obtenir le tension proposée (créneau non symétrique) avec un GBF?

25.Pourquoi n'a t-on pas choisi d'envoyer en X la tension aux bornes de C et en Y la tension aux bornes de R sans utiliser de montage dérivateur?

26.Justifier l'allure de l'oscillogramme, indiquer le sens de parcours, préciser à quoi correspondent les deux points particuliers (on précisera la valeur de u et $\frac{du}{dt}$ en ces points). On tracera l'allure de $u(t)$ pour préciser la réponse.

27.Quelle inégalité T et Ω doivent-ils vérifier?

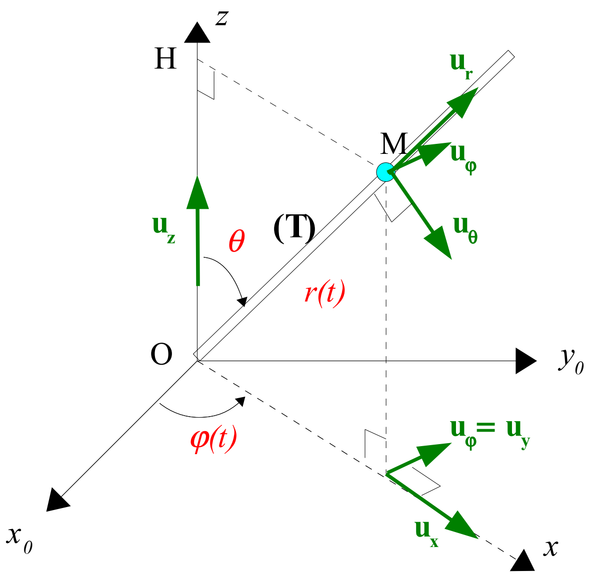
Mécanique du point

Une tige (T) passant par un point O est fixe dans un plan Oxz . Ce plan tourne à vitesse constante autour de Oz par rapport à un référentiel galiléen (grâce à un moteur qui assure la rotation). On définit le repère (O,x,y,z) associé au référentiel tournant $\mathscr{R}$. Le repère (O,x_0,y_0,z) est un repère associé au référentiel galiléen $\mathscr{R}_0$. Le vecteur rotation est $\vec{\omega}=\vec{\omega}(\mathscr{R}/\mathscr{R}_0)=\omega\ \vec{u}_z$ avec $\omega=constante$.

Un anneau M assimilé à un point de masse m peut coulisser sur la tige (T) .

I. Cinématique dans $\mathscr{R}_0$

On repère le point M par les coordonnées sphériques notées $(r(t),\theta,\varphi(t))$ avec $r(t)=\|\overrightarrow{OM}\|$, $\theta=constante$, $\varphi(t)=\omega t$. La base utilisée dans tout le problème est la base privilégiée en sphériques: $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ avec $\vec{u}_r$ selon $\overrightarrow{OM}$.



1. Faire une figure dans le plan (Ox,Oz) en y portant les vecteurs unitaires suivants: $\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z,\vec{u}_x$, les points suivants: O,M,H , les coordonnées suivantes de M : r,θ,x,z , le vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}(\mathscr{R}/\mathscr{R}_0)$. Déterminer l'expression de $\vec{u}_z$ dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$.

2. On rappelle que la dérivée d'un vecteur unitaire d'une base mobile s'écrit $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_0}=\vec{\omega}_{/\mathscr{R}_0}\wedge\vec{u}$.
   Ici la base directe $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ tourne par rapport à $\mathscr{R}_0$ avec (θ étant fixe) un vecteur rotation $\vec{\omega}=\vec{\omega}(\mathscr{R}/\mathscr{R}_0)=\omega\ \vec{u}_z$. En faisant les calculs dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$, déterminer les expressions de $\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_0}$, $\left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_0}$, $\left(\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}\right)_{/\mathscr{R}_0}$.

3. Donner l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dans la base utilisée (notations autorisées: $(r(t),\theta,\varphi(t))$ et $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$).

4. En déduire, toujours dans la même base, par dérivation, $\vec{v}(M)/\mathscr{R}_0$ l'expression de la vitesse de M par rapport au référentiel galiléen.

5. On aurait pu déterminer la vitesse de M par rapport à $\mathscr{R}_0$ en travaillant par composition de mouvement. Donner, sans démonstration, pour le cas étudié, l'expression de la vitesse relative à $\mathscr{R}$: $\vec{v}(M)/\mathscr{R}$. Déduire de $\vec{v}(M)/\mathscr{R}_0$ et de $\vec{v}(M)/\mathscr{R}$ l'expression de la vitesse d'entrainement notée ici: $\vec{v}(M\in\mathscr{R})/\mathscr{R}_0$. Montrer que l'on peut écrire le résultat obtenu en faisant intervenir la coordonnée x . Commenter.

6. Déterminer par dérivation $\vec{a}(M)/\mathscr{R}_0$ l'accélération de M par rapport au référentiel galiléen. Vérifier que chaque terme du résultat a bien pour dimension $Longueur\times Temps^{-2}$.

7. On aurait pu déterminer l'accélération de M par rapport à $\mathscr{R}_0$ en travaillant par composition de mouvement. En utilisant notamment le résultat précédent, donner, sans démonstration, (expressions dans la même base que précédemment):
   - l'expression de l'accélération relative à $\mathscr{R}$: $\vec{a}(M)/\mathscr{R}$
   - l'expression de l'accélération de Coriolis
   - l'expression de l'accélération d'entrainement : $\vec{a}(M\in\mathscr{R})/\mathscr{R}_0$. Commenter ce résultat.

II. Dynamique dans $\mathscr{R}$

L'axe Oz est vertical dirigé vers le haut. On désigne l'accélération de la pesanteur par $\vec{g}$ de norme notée g . Un ressort enfilé sur la tige (T) (de raideur k et de longueur au repos l_0) relie le point M étudié au point O . Le mouvement du point M relativement à la tige se fait sans frottement de sorte que la réaction de la tige (T) sur le point M , $\vec{R}=R_r\vec{u}_r+R_\theta\vec{u}_\theta+R_\varphi\vec{u}_\varphi$, est perpendiculaire à la tige.

A. Mise en équation du mouvement

Pour mettre le mouvement en équation, on se place dans le référentiel non galiléen $\mathscr{R}$ où le mouvement du point M est rectiligne. Les deux forces d'inertie dont il faut tenir compte sont la force d'inertie d'entrainement, ici uniquement centrifuge $\vec{F}_{i,e}=m\omega^2\overrightarrow{HM}$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{i,e}=-2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$ avec $\vec{\omega}$: vecteur rotation du référentiel non galiléen par rapport au référentiel galiléen et $\vec{v}$: vitesse du point dans le référentiel non galiléen.

8. Rappeler l'expression de la force exercée par le ressort (ici, résultat en fonction de k , r , l_0 dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$).

9. Écrire le principe fondamental, sous forme vectorielle, pour le point M dans $\mathscr{R}$ en fonction de: $\vec{R}$, $\overrightarrow{HM}$, $\vec{\omega}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{g}$, m , k , l_0 ...etc.

10. Projeter le relation vectorielle sur les trois vecteurs unitaires $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$. On dispose ainsi de trois équations pour résoudre le problème. Vérifier que le nombre d'inconnues est bien égal aussi à trois. Lesquelles? On posera: $\Omega=\omega\sin\theta$ et $\Omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

B. Étude d'un premier cas particulier

On étudie le cas particulier sans ressort $\Omega_0 = 0$.

11.Réécrire dans ce cas particulier l'équation différentielle en r issue du principe fondamental.

12.Donner l'expression de $r(t)$ en supposant que en $t=0$ le point est en $r=r_0$ avec une vitesse nulle par rapport à la tige.

13.Donner l'expression de la position d'équilibre r_{eq} (équilibre relatif) par rapport à $\mathscr{R}$ de M en fonction de g , Ω , $\cos\theta$. Justifier simplement, en partant de l'expression obtenue pour $r(t)$, que cette position d'équilibre est une position d'équilibre instable.

C. Étude d'un deuxième cas particulier

On étudie le cas $\Omega=\Omega_1$ avec $\Omega_1=\sqrt{\dfrac{g\cos\theta}{l_0}}$.

14.Réécrire dans ce cas particulier l'équation différentielle en r issue du principe fondamental.

15.Donner l'expression de la position d'équilibre r_{eq} . Commenter le résultat obtenu.

16.Donner l'expression de $(r(t)-r_{eq})$ en supposant que en $t=0$ le point est en $r=r_0$ avec une vitesse nulle par rapport à la tige

- dans le cas $\Omega<\Omega_0$
- dans le cas $\Omega>\Omega_0$
- dans le cas $\Omega=\Omega_0$

Commenter la stabilité de l'équilibre.

III. Énergétique dans $\mathscr{R}$

On considère pour chacune des forces, dans le référentiel non galiléen, l'expression du travail élémentaire.

17.Que peut-on dire du travail élémentaire de la réaction? Que peut-on dire du travail élémentaire de la force de Coriolis? Justifier.

18.Écrire le travail élémentaire du poids en utilisant ici la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et retrouver l'expression connue de l'énergie potentielle associée au poids (à une constante près). L'écrire ensuite en fonction de la variable r . Retrouver aussi, à une constante près, l'expression de l'énergie potentielle associée à la force de rappel du ressort.

19.Retrouver, à une constante près, l'expression de l'énergie potentielle associée à la force centrifuge s'exerçant sur le point M dans $\mathscr{R}$.

20.On définit l'énergie potentielle $E_P(M)/\mathscr{R}$ du point M dans $\mathscr{R}$ comme la somme de l'énergie potentielle de pesanteur, de l'énergie potentielle élastique, de l'énergie potentielle liée à la force centrifuge. Exprimer $E_P(M)/\mathscr{R}$ en fonction de la variable r . On choisira une référence d'énergie potentielle telle que l'énergie potentielle totale soit nulle en $r=0$.

21.On définit l'énergie mécanique totale $E(M)/\mathscr{R}$ du point M dans $\mathscr{R}$ comme étant la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Justifier que cette grandeur est conservative. Donner son expression. Application: la vitesse de rotation est $\Omega=\Omega_1$ et la constante de raideur du ressort est telle que $\Omega_0=\sqrt{7}\Omega_1$, le point M est au repos en $r=l_0$. Déterminer $E(M)/\mathscr{R}$ en fonction de Ω_1 , m , l_0 .

22. En $t=0$ le point M étant dans sa position d'équilibre (voir question précédente), la vitesse de rotation passe brusquement à la valeur $2\Omega_1$. Par une raisonnement énergétique, en admettant la conservation de l'énergie mécanique totale dans $\mathscr{R}$, écrire l'intégrale première de l'énergie (équation différentielle du premier ordre en r) et en déduire les valeurs extrémales de r au cours du mouvement.

23. On définit l'énergie mécanique totale de M dans $\mathscr{R}_0$ galiléen comme étant la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle de pesanteur, de l'énergie potentielle élastique. Donner son expression $E(M)/\mathscr{R}_0$. Comparer à $E(M)/\mathscr{R}$. Cette grandeur est-elle conservative? Commenter.

Thermodynamique

Les grandeurs minuscules v, u, s sont relatives à l'unité de masse $1\,kg$. De même r est la constante du gaz parfait étudié relative à $1\,kg$. Les questions dans la suite concernent en général une masse m. On sera attentif au fait que, dans le texte, les notations W et Q sont parfois relatives à l'unité de masse et parfois relatives à la masse m. On désigne par γ le rapport des capacités thermiques massiques à pression constante et à volume constant. Ce rapport est ici supposé constant.

I. Généralités

On rappelle la loi des gaz parfaits $PV=nRT$. On considère une masse m de gaz parfait, de masse molaire M.

1. Démontrer avec précision les deux autres formes: $PV=mrT$ et $Pv=rT$.

2. Application numérique:

$$M_{air}=29.10^{-3}\,kg \quad M_{eau}=18.10^{-3}\,kg \quad R=8{,}314\ J.mol^{-1.}K^{-1}$$

Calculer r pour l'air et pour l'eau (vapeur sèche) assimilés à des gaz parfaits.

II. Compressions d'un gaz parfait

A. Compression infiniment lente

On comprime de manière isotherme - donc infiniment lentement - (la transformation pour le gaz est donc réversible) une masse m de gaz parfait initialement à la pression P_1 et à la température T_1 jusqu'à la pression $P_2>P_1$.

3. L'énergie interne de ce gaz a-t-elle augmenté, diminué ou est-elle restée constante? Justifier.

4. Chaleur reçue:

- Le transfert de chaleur (« reçu » par le gaz étudié) est-il positif, négatif ou nul ? Justifier.
- On rappelle la formule donnant, dans le cas général, la variation d'entropie massique s (c'est à dire pour une masse unité) de gaz parfait passant de l'état P_1, T_1 à l'état P_2, T_2 quelle que soit la nature de la transformation: $\Delta s=s_2-s_1=r\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln(\frac{T_2}{T_1})-r\ln(\frac{P_2}{P_1})$. On rappelle que pour une transformation réversible, pour une masse unité: $ds=\frac{\delta Q}{T}$. Quelle grandeur énergétique, relative au système de masse m, peut-on déterminer ici en utilisant ces formules ? Exprimer le résultat en fonction des données.

5. Travail reçu:

- Le transfert de travail (« reçu » par le gaz étudié) est-il positif, négatif ou nul ?

- On rappelle que pour une transformation réversible, pour une masse unité: $\delta W = -P\,dv$, v désigne le volume massique (avec $v = r\frac{T}{P}$). Trouver à partir de cette formule l'expression du travail reçu par la masse m de gaz au cours de la compression étudiée.

6. Vérifier la cohérence des résultats obtenus.

B. Compression très brusque

On comprime de manière très brusque - donc de manière irréversible - une masse m de gaz parfait initialement à la pression P_1 et à la température T_1 jusqu'à la pression $P_2 > P_1$. La pression extérieure appliquée au gaz est égale à P_2 pendant toute la compression. Les échanges de chaleur étant lents à s'établir, on supposera que cette transformation brusque peut être considérée comme adiabatique.

7. On rappelle les expression du bilan d'énergie pour le système $\Delta U = W + Q$ et du bilan d'entropie pour le système $\Delta S = S_{échangé} + S_{créé}$. Parmi les 6 termes figurant dans ces deux bilans, indiquer, en justifiant, les deux termes nuls. Indiquer, en justifiant, le signe des autres termes.
8. Bilan énergétique: on rappelle la formule donnant la variation d'énergie interne massique u (c'est à dire pour une masse unité) de gaz parfait passant de l'état P_1, T_1 à l'état P_2, T_2 : $\Delta u = u_2 - u_1 = r\frac{1}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$. On rappelle que pour une transformation non réversible, pour une masse unité: $\delta W = -P_{extérieur}\,dv$. Donner l'expression de T_2 et les expressions pour le système de $\Delta U, W, Q$ en fonction des données m, P_1, P_2, T_1 et des constantes r, γ .
9. Bilan entropique: déterminer les expressions pour le système de $\Delta S, S_{échangé}, S_{créé}$ en fonction des données m, P_1, P_2, T_1 et des constantes r, γ .

III. Liquéfaction par compression isotherme d'un gaz

On étudie désormais un système qui peut être diphasé (gaz + liquide) et ne se comporte donc plus, a priori, comme un gaz parfait.

Une masse m d'eau est contenue dans un récipient de volume V_1 à la température T_1 (inférieure à la température critique de l'eau). Il n'y a pas d'air ou d'autre gaz présent. L'eau peut y être soit à l'état liquide, soit à l'état gazeux, soit sous les deux états liquide et gazeux. On admet que, s'il existe de l'eau liquide, son volume peut toujours être négligé par rapport au volume de l'eau gaz. On supposera que la vapeur sèche (c'est à dire la vapeur d'eau en l'absence d'eau liquide) se comporte comme un gaz parfait.

Quand le mélange est diphasé la pression est égale à la pression de saturation à la température du système $P^*(T)$ (la loi donnant $P^*(T)$ sera supposée connue). Si la pression est supérieure à la pression de saturation, tout est liquide. Si la pression est inférieure à la pression de saturation, tout est gazeux (vapeur sèche).

A. État de départ

10. Quelle inégalité faut-il vérifier (ne faisant intervenir que les données: $P^*(T_1)$, T_1 , V_1 , m , r (de l'eau)) pour déterminer que l'eau se trouve totalement sous forme gaz au départ.

On admet que l'eau se trouve totalement sous forme vapeur au départ à la pression P_1 .

B. Compression infiniment lente

On comprime de manière isotherme. Le volume final est $V_2 < V_1$. On admet que l'eau se trouve alors sous forme diphasée.

11. Donner en fonction des données l'expression de la masse d'eau m_V sous forme vapeur puis celle de la masse d'eau m_L sous forme liquide.

Pour étudier le bilan d'énergie au cours de la compression, on aura intérêt à considérer deux étapes dans la transformation: première étape de P_1 à $P^*(T_1)$ et deuxième étape à la pression constante $P^*(T_1)$. On rappelle que la quantité de chaleur à pression constante est donnée par $Q_P = \Delta H$. On rappelle aussi que la chaleur latente massique de vaporisation à la température T est définie par $l_V(T) = h_v(T, P^*(T)) - h_L(T, P^*(T))$ avec h : enthalpie massique. On supposera connu $l_V(T_1)$.

12. Exprimer le travail de compression au cours de la première étape puis le travail de compression au cours de la deuxième étape. En déduire l'expression du travail W en fonction de $P^*(T_1)$, P_1 , T_1 , V_2 , m , r .

13. Exprimer la quantité de chaleur reçue au cours de la première étape. Que peut-on dire de la quantité de chaleur reçue par la masse de vapeur m_V au cours de la deuxième étape? Déterminer alors la quantité de chaleur reçue par m_L au cours de la deuxième étape.

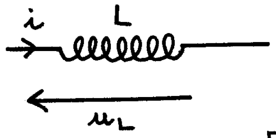
14. Quelle est la variation d'énergie interne au cours de la compression. Réponse en fonction de $P^*(T_1)$, $l_V(T_1)$, P_1 , T_1 , V_2 , m , r .

15. Étudier le bilan d'entropie au cours de la compression.

Réponses

Electricité

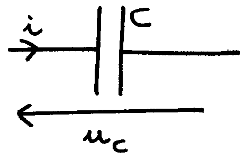
1)



$$\boxed{u_L = L\frac{di}{dt}}$$

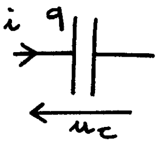
---

2)

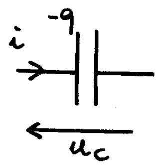


$$\boxed{i = C\frac{du_C}{dt}}$$

remarque :



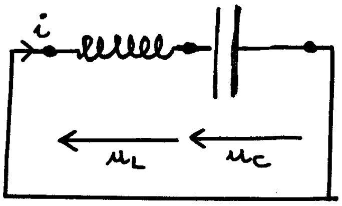
$$\left.\begin{array}{l} i = +\dfrac{dq}{dt} \\ u_C = +\dfrac{q}{C} \end{array}\right\} \quad i = C\frac{du_C}{dt}$$



$$\left.\begin{array}{l} i = -\dfrac{dq}{dt} \\ u_C = -\dfrac{q}{C} \end{array}\right\} \quad i = C\frac{du_C}{dt}$$

---

3)



$$u_L + u_C = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + u = 0$$

$$L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du}{dt}\right) + u = 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}\,u = 0$$

on pose $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2\,u = 0}$$

---

4)
$$r^2 + \omega_0^2 = 1$$
$$r = \pm j\omega_0$$

au lieu d'écrire :

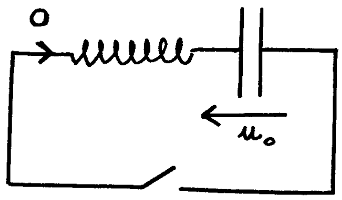
$$u = \underline{a}\,\underbrace{\exp j\omega_0 t}_{\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t} + \underline{b}\,\underbrace{\exp -j\omega_0 t}_{\cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t}$$

on fait :

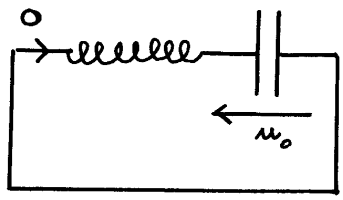
$$\boxed{u = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t}$$

---

5) Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur.
Il y a continuité de l'intensité qui passe dans une bobine.



$t = 0^-$



$t = 0^+$

donc $\boxed{u(t=0^+) = u_0}$

et puisque $i = C\frac{du}{dt}$

$$\boxed{\frac{du}{dt}(t=0^+) = \frac{i(t=0^+)}{C} = 0}$$

On reporte les deux C.I.

$$u_0 = A$$
$$0 = B\omega_0$$

finalement $\boxed{u = u_0 \cos \omega_0 t}$

$$\boxed{\frac{du}{dt} = - u_0 \omega_0 \sin \omega_0 t}$$

---

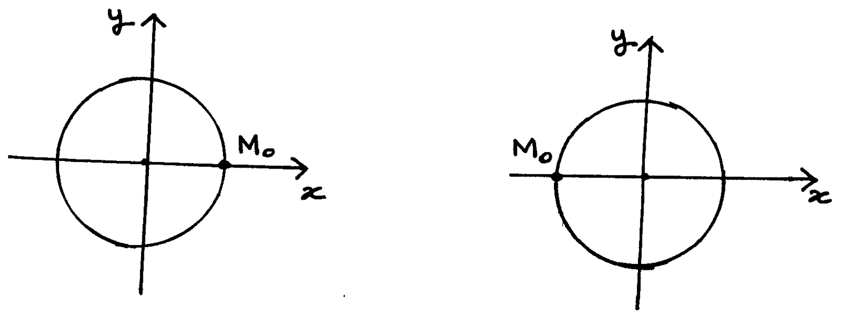
6)
$$x = u_0 \cos \omega_0 t$$
$$y = - u_0 \sin \omega_0 t$$

en faisant $\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t = 1$

$$\boxed{y^2 + x^2 = u_0^2}$$

---

7) La trajectoire de phase est un <u>cercle</u> de rayon u_0 de centre O

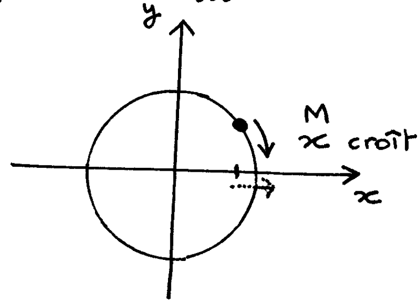


$u_0 > 0$ $u_0 < 0$

---

8) Pour trouver le sens de parcours, on peut imaginer de se placer dans <u>le premier quadrant</u> $(x>0\ ,\ y>0)$

or $y = \frac{1}{\omega_0} \frac{dx}{dt}$ donc $\frac{dx}{dt} > 0$ <u>x croît</u>



(on peut adapter la démonstration aux trois autres quadrants)

Le portrait de phase est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre.

remarque :

On peut étudier la vitesse de M

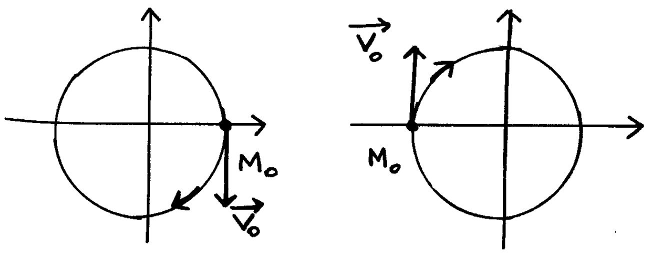
$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0 u_0 \sin \omega_0 t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega_0 u_0 \cos \omega_0 t$$

Je me contente du point de départ

$$\vec{V_0} \left| \begin{array}{l} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0 \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = -\omega_0 u_0 \end{array} \right.$$

d'où les deux cas :

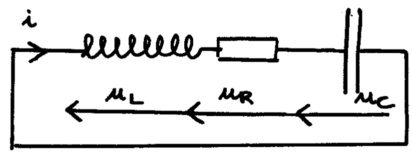


$u_0 > 0$ $u_0 < 0$

Le point tourne dans le sens horaire.

---

9)



$$u_L + u_R + u_C = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + u = 0 \qquad \left(\text{avec } i = C\frac{du}{dt}\right)$$

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0}$$

---

10)

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

cf on retrouve les formules connues pour le RLC série :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

---

11)

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

On essaye donc u en e^{rt}

$$\boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0}$$

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}$$

$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

mais puisque les racines sont complexes conjuguées la quantité sous radical est négative

$$\frac{1}{4Q^2} - 1 < 0$$

$$\boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2}$$

$$\boxed{R < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Dans un circuit série, plus R est petit, moins il y a d'effet Joule et donc d'amortissement. La "qualité" est supérieure et on observe des oscillations (amorties).

finalement :

$$\boxed{r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

---

12)

$$r = -\alpha \pm j\,\Omega$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}}$$

$$\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

$$u = \underline{a}\exp(-\alpha t + j\Omega t) + \underline{b}\exp(-\alpha t - j\Omega t)$$

$$\boxed{u = \exp(-\alpha t)\,(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)}$$

---

13) En $t=0^+$ on a $u=u_0$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) et $\frac{du}{dt}=\frac{i}{C}=0$ (continuité de l'intensité dans une bobine)

$$u = \exp(-\alpha t)\,(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u + \exp(-\alpha t)\cdot\Omega\,(-A\sin\Omega t + B\cos\Omega t)$$

donc en $t=0^+$

$$u_0 = 1\,(A + 0)$$

$$0 = -\alpha u_0 + 1\,\Omega\,(0 + B)$$

$$\boxed{A = u_0}$$

$$B = \frac{\alpha}{\Omega}u_0$$

$$\boxed{B = \frac{u_0}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

finalement :

$$\boxed{u = u_0\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(\cos\Omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\Omega t\right)}$$

---

14)
$$u = C(t)\ \cos(\Omega t - \varphi)$$
$$= C(t)\ (\cos \Omega t\ \cos\varphi + \sin \Omega t\ \sin\varphi)$$

Par identification avec l'écriture précédente :

$$C(t)\ \cos\varphi = u_o\ \exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q}t\right)$$
$$C(t)\ \sin\varphi = u_o\ \exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q}t\right)\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

d'où
$$C^2(t) = u_o^2\ \exp\left(-\frac{\omega_o}{Q}t\right)\left(1+\frac{1}{4Q^2-1}\right)$$

on décide de choisir le signe + (cf amplitude)

$$\boxed{C(t) = u_o\ \exp\left(-\frac{\omega_o}{2Q}t\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

on connait alors les lignes trigonométriques de l'angle φ

$$\cos\varphi > 0 \quad \left(\varphi \text{ entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin\varphi > 0$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

$$\boxed{u = \frac{u_o}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}\ e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}}\ \cos\left(\Omega t - \arctan\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\right)}$$

L'amplitude est en $\exp\left(-\frac{\omega_o t}{2Q}\right)$. Elle diminue exponentiellement.

---

15)
$$\boxed{\begin{aligned} U_E(t) &= \frac{1}{2}\ C\ u^2(t) \\ U_M(t) &= \frac{1}{2}\ L\ i^2(t) \end{aligned}}$$

L'énergie emmagasinée dans le circuit est :

$$E(t) = \frac{1}{2}\ C\ u^2(t) + \frac{1}{2}\ L\ i^2(t)$$
$$= \frac{1}{2}\ C\ u^2(t) + \frac{1}{2}\ LC^2\left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2$$

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2}\ C\ \left(u^2(t) + \frac{1}{\omega_o^2}\left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2\right)}$$

---

16) L'énergie diminue au cours du temps à cause de l'effet Joule.

Pour $dt > 0$ $dE(t) < 0$ et avec $P_J = R i^2$

$$dE = - P_J \, dt$$

$$\boxed{dE(t) = - R \, i^2(t) \, dt}$$

Démonstration :

$$E(t) = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

$$\frac{dE}{dt} = C u \frac{du}{dt} + L i \frac{di}{dt}$$

$$= u \, i + u_L \, i$$

$$= (u_C + u_L) \, i$$

$$= - u_R \, i$$

$$= - R i^2$$

---

17) On a vu à la question 14) que :

$$E(t) = \frac{1}{2} C \left(u^2 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} C \left(x^2 + y^2 \right)$$

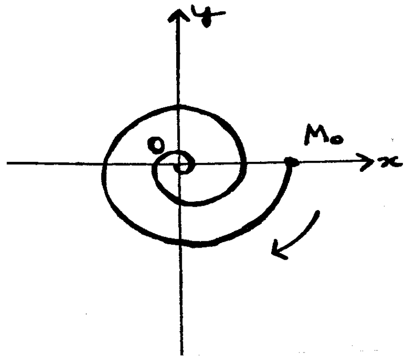
$$= \frac{1}{2} C \, \|\overrightarrow{OM}\|^2$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\frac{2}{C}} \sqrt{E(t)}}$$

<u>Puisque $E(t)$ diminue au cours du temps, le point M se rapproche de O sur le portrait de phase.</u>

---

18) Le portrait de phase est toujours décrit dans le sens horaire.



quelles que soient les conditions initiales, M va tendre vers le point O au cours du temps. M semble attiré par le point O.

$$\boxed{\text{O est un attracteur ponctuel}}$$

---

19)
$$e(t) = u_L + u_R + u_C$$
$$= LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u$$
$$\frac{e(t)}{LC} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u$$

soit :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u_{(t)} = \omega_0^2 e_{(t)}$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E_{MAX}\cos\omega t}$$

---

20) En complexes :

$$\frac{d^2\underline{u}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\underline{u}}{dt} + \omega_0^2\underline{u} = \omega_0^2 E_{MAX}\exp(j\omega t)$$
$$(j\omega)^2\underline{u} + \frac{\omega_0}{Q}(j\omega)\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} = \omega_0^2 E_{MAX}\exp(j\omega t)$$
$$\underline{u}\left(-\omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 E_{MAX}\exp(j\omega t)$$

$$\underline{u} = \frac{\omega_0^2 E_{MAX} \exp(j\omega t)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q}\right)}$$

$$= \frac{E_{MAX} \exp(j\omega t)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Je mets j en facteur au dénominateur afin d'y obtenir un complexe à partie réelle positive, ce qui permettra dans la suite d'utiliser un arctan pour l'argument (alors compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$)

$$\underline{u} = \frac{E_{MAX} \exp(j\omega t)}{j\left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - j\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right)}$$

$$\boxed{\underline{u} = \frac{-j\, E_{MAX} \exp(j\omega t)}{\left(\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - j\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right)}}$$

La grandeur complexe $\underline{z}$ (sans dimension) du texte est

$$\underline{z} = \frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - j\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$|\underline{z}| = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\varphi = \arg \underline{z} = -\arctan \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$= -\arctan \frac{Q\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\underline{u} = \frac{(-j)\, E_{MAX} \exp(j\omega t)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\ \exp\left(-j \arctan \frac{Q\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\frac{\omega}{\omega_0}}\right)}$$

on prend la partie réelle (un sinus à cause de $(-j)$)

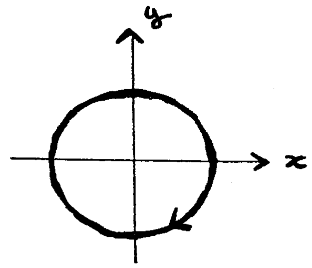
$$\boxed{u(t) = \frac{E_{MAX}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \sin\left(\omega t + \arctan \frac{Q\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\frac{\omega}{\omega_0}}\right)}$$

21) En régime forcé sinusoïdal, $u(t)$ est une grandeur sinusoïdale. On retrouve donc un portrait de phase comme en 5) 7).

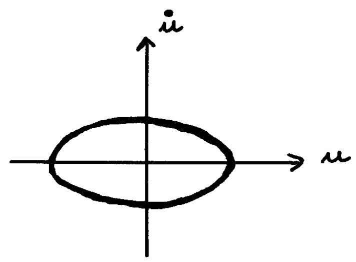
$\boxed{\text{Le portrait de phase est un cercle de rayon } U_{MAX}}$

rappel :

$$u(t) = U_{MAX} \sin(\omega t - \varphi)$$
$$\frac{du(t)}{dt} = \omega \, U_{MAX} \cos(\omega t - \varphi)$$
$$u^2 + \left(\frac{1}{\omega} \frac{du}{dt}\right)^2 = U_{MAX}^2$$



Pour obtenir la trajectoire dans le plan $(u, \dot{u})$, il suffit de faire une affinité orthogonale avec $y \to \omega y$.
On obtient donc une ellipse à partir du cercle.



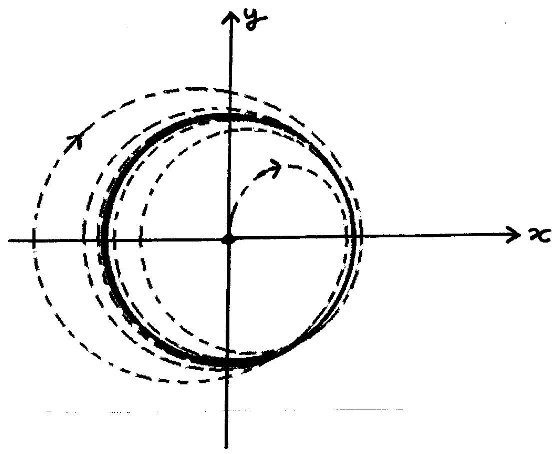
démonstration :

$$\frac{u(t)}{U_{MAX}} = \sin(\omega t - \varphi)$$
$$\frac{\dot{u}(t)}{\omega \, U_{MAX}} = \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{u^2(t)}{U_{MAX}^2} + \frac{\dot{u}^2(t)}{(\omega U_{MAX})^2} = 1$$

(ellipse ramenée à ses axes de symétrie)

22)

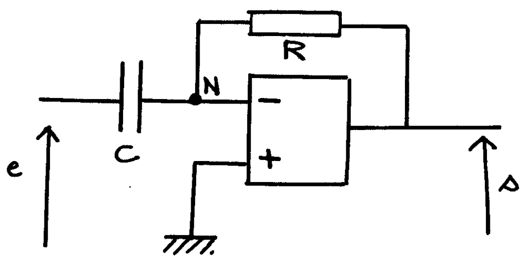


Il faut ajouter la partie du portrait de phase correspondant au régime transitoire (pointillés).

On rejoint alors le régime forcé.

L'attracteur est ici un attracteur circulaire.

23)



On écrit que la somme des intensités arrivant au nœud N est nulle.

$$C \frac{d}{dt}(e - v^-) + \frac{1}{R}(s - v^-) = 0$$

or $\qquad v^+ = 0$

$\qquad \varepsilon = v^+ - v^- = 0$

donc $\qquad v^- = 0$

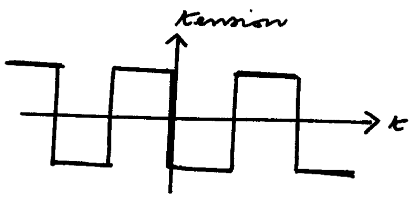
$$C \frac{de}{dt} + \frac{1}{R} s = 0$$

$$\boxed{s_{(t)} = -\tau \frac{de(t)}{dt}} \quad \text{avec } \tau = RC$$

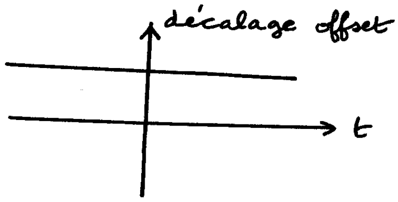
Ce schéma est donc celui d'un dérivateur inverseur (théorique)

---

24) On sélectionne un signal créneau (créneau symétrique)



on ajoute alors un décalage continu en réglant l'offset de telle façon que le niveau bas du signal total soit à 0 V.

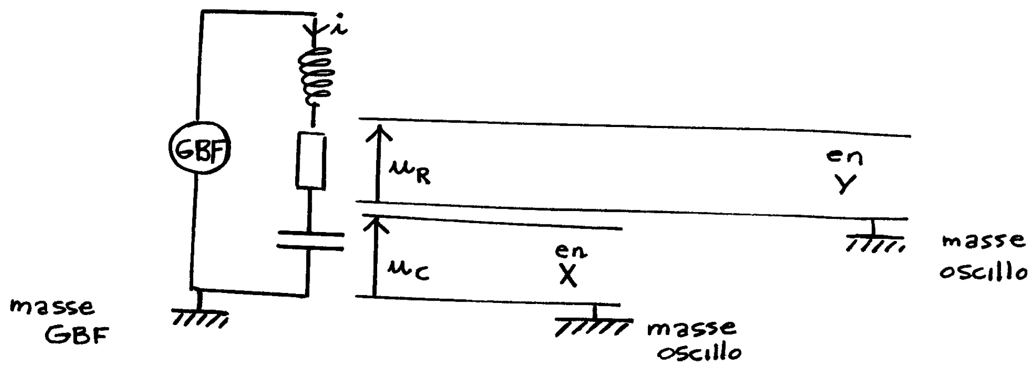


---

25) La tension aux bornes de C est u

La tension aux bornes de R est $Ri = RC \frac{du}{dt}$

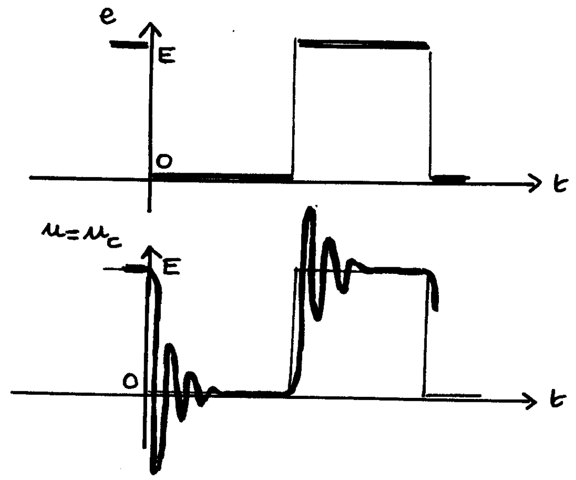
c'est à dire $\frac{du}{dt}$ à une constante près.



Les deux voies de l'oscillo ont une masse commune.
On voit que ce montage ne fonctionne pas puisque le condensateur a ses deux bornes reliées à la même masse. Le condensateur est court-circuité.
Le courant du GBF passe dans L et R.
Il n'y a pas de courant dans le condensateur.

---

26)



Il faut supposer $Q > \frac{1}{2}$.

Le condensateur se charge et se décharge avec des oscillations.

première demi-période :

$e = 0$

le condensateur se décharge.

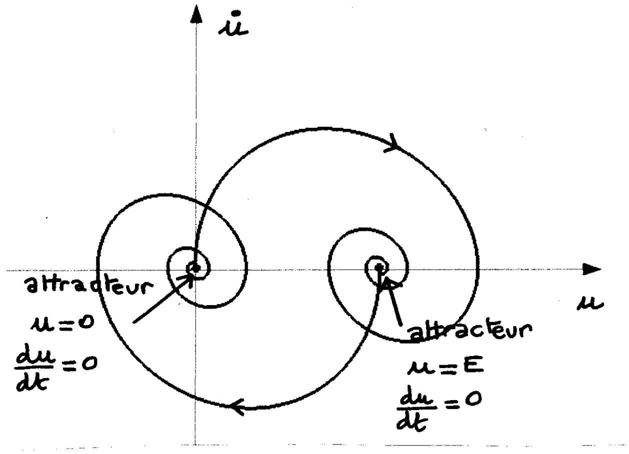
A la fin | $u = 0$ (cf $u = e = 0$)
| $\frac{du}{dt} = 0$ (cf $i = 0$)

deuxième demi-période

$e = E$

le condensateur se charge

A la fin | $u = E$ (cf $u = e = E$)
| $\frac{du}{dt} = 0$ (cf $i = 0$)



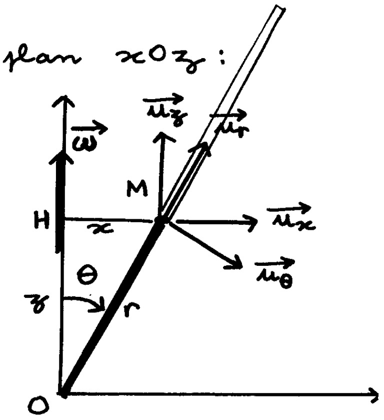
---

27) Il faut que le condensateur puisse se charger ou se décharger pendant la demi période du créneau

$$\boxed{\frac{T}{2} \gg \frac{2\pi}{\Omega}}$$

Mécanique du point

1) figure dans le plan xOz :



$\otimes\ \overrightarrow{u_\varphi} = \overrightarrow{u_y}$

$$\boxed{\overrightarrow{u_z} = \cos\theta\ \overrightarrow{u_r} - \sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta}}$$

---

2) $$\overrightarrow{\omega} = \omega\ (\cos\theta\ \overrightarrow{u_r} - \sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta})$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u_r} = \boxed{\omega \sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi}}$$

$$(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}) \begin{vmatrix} \omega\cos\theta \\ -\omega\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = \boxed{\omega \cos\theta\ \overrightarrow{u_\varphi}}$$

$$\begin{vmatrix} \omega\cos\theta \\ -\omega\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{u_\varphi} = \boxed{-\omega \sin\theta\ \overrightarrow{u_r} - \omega\cos\theta\ \overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\begin{vmatrix} \omega\cos\theta \\ -\omega\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

---

3) $$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{u_r}}$$

---

4) $$\overrightarrow{v}_{/R_0} = \dot{r}\ \overrightarrow{u_r} + r\ \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v}_{/R_0} = \dot{r}\ \overrightarrow{u_r} + r \sin\theta\ \omega\ \overrightarrow{u_\varphi}}$$

---

5) Le mouvement dans $\mathcal{R}$ est un mouvement rectiligne selon $\overrightarrow{u_r}$

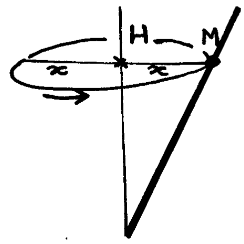
$$\boxed{\overrightarrow{v}/_{\mathcal{R}} = \dot{r}\ \overrightarrow{u_r}}$$

Le dernier terme dans $\overrightarrow{v}/_{\mathcal{R}_0}$ est donc la vitesse d'entrainement.

$$\overrightarrow{v}(M\in\mathcal{R})/_{\mathcal{R}_0} = r \sin\theta\ \omega\ \overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\boxed{\overrightarrow{v}(M\in\mathcal{R})/_{\mathcal{R}_0} = x\ \omega\ \overrightarrow{u_\varphi}}$$

Pour trouver la vitesse d'entrainement, il faut considérer à l'instant t le point de $\mathcal{R}$ coïncidant avec M. Ici, on considère donc $(M\in\mathcal{R})$ qui est le point de la tige en M.
Ce point décrit un cercle de centre H et de rayon x $(x>0)$ à la vitesse ω et sa vitesse est donc $x\omega$ selon la



tangente $(\overrightarrow{u_\varphi})$.

---

6) On dérive $\overrightarrow{v}/_{\mathcal{R}_0}$ dans $\mathcal{R}_0$

$$\overrightarrow{a}/_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}/_{\mathcal{R}_0}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_0}$$

Calcul : (θ et ω sont indépendants du temps)

$$\overrightarrow{a}/_{\mathcal{R}_0} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\sin\theta\,\omega\,\overrightarrow{u_\varphi} + r\sin\theta\ \omega\ \frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt}$$

$$= \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\sin\theta\,\omega\,\overrightarrow{u_\varphi} + \dot{r}\sin\theta\,\omega\,\overrightarrow{u_\varphi} + r\sin\theta\ \omega\left(-\omega\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} - \omega\cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}/_{\mathcal{R}_0} = (\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta)\,\overrightarrow{u_r} - r\omega^2\sin\theta\cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + 2\dot{r}\,\omega\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$

dimensions	$\ddot{r}$	LT^{-2}				$\rightarrow LT^{-2}$
	r	L	et	ω^2	T^{-2}	$\rightarrow LT^{-2}$
	$\dot{r}$	LT^{-1}	et	ω	T^{-1}	$\rightarrow LT^{-2}$

---

7) accélération relative (mouvement rectiligne)

$$\boxed{\overrightarrow{a}/\mathcal{R} = \ddot{r}\ \overrightarrow{u_r}}$$

accélération de Coriolis (contient un coefficient 2)

$$\boxed{\overrightarrow{a_C} = 2\,\dot{r}\,\omega \sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi}}$$

vérification :

$$\overrightarrow{a_C} = 2\,\overrightarrow{\omega}_{entrainement} \wedge \overrightarrow{v}_{relatif}$$
$$= 2\,\omega\,\overrightarrow{u_z} \wedge \dot{r}\,\overrightarrow{u_r}$$
$$= 2\,\omega\,\dot{r}\ \underbrace{(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r})}_{\overrightarrow{u_\varphi}\sin\theta}$$

accélération d'entrainement

Ce sont les deux termes restants :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M\in\mathcal{R})/\mathcal{R}_o = -\omega^2 r \sin\theta\ (\sin\theta\ \overrightarrow{u_r} + \cos\theta\ \overrightarrow{u_\theta})}$$

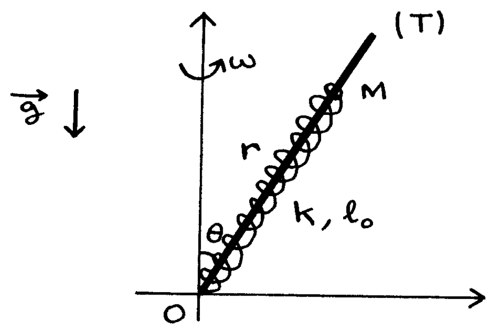
vérification :

C'est l'accélération du point $(M\in\mathcal{R})$, point de la tige au cours du mouvement circulaire <u>uniforme</u> de rayon x, de centre H

$$\overrightarrow{a}_{entrainement} = -\omega^2\,\overrightarrow{HM}$$
$$= -\omega^2\,x\ \overrightarrow{u_x}$$

---

8)



Si ℓ est la longueur du ressort

$$\vec{F}_{ressort} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u_r}$$

(cf si $\ell > \ell_0$ la force est dirigée vers O
si $\ell < \ell_0$ la force est dirigée vers l'extérieur)

Ici : $\ell = r$

$$\boxed{\vec{F}_{ressort} = -k\,(r - \ell_0)\,\vec{u_r}}$$

---

9) Dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ ($\vec{v} = \vec{v}_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{a} = \vec{a}_{/\mathcal{R}}$)

$$m\vec{g} + \vec{F}_{ressort} + \vec{R} + \vec{F}_{i,e} + \vec{F}_{i,c} = m\vec{a}$$

$$\boxed{m\vec{g} - k(r-\ell_0)\,\vec{u_r} + \vec{R} + m\omega^2\,\vec{HM} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v} = m\vec{a}}$$

---

10) avec : $\vec{g} = -g\,\vec{u_z}$
$= -g\cos\theta\,\vec{u_r} + g\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

$\vec{R} = R_\theta\,\vec{u_\theta} + R_\varphi\,\vec{u_\varphi}$

(R_r est nul puisque en l'absence de frottement $\vec{R}\vec{v} = 0$ donc $\vec{R} \perp \vec{u_r}$)

$\vec{HM} = x\,\vec{u_x}$
$= r\sin\theta\,(\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta})$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v} = \begin{array}{c|c|c} & \omega\cos\theta & \dot{r} \\ & -\omega\sin\theta & 0 \\ (\vec{u_r},\vec{u_\theta},\vec{u_\varphi}) & 0 & 0 \end{array} = \dot{r}\sin\theta\,\omega\,\vec{u_\varphi}$$

On projette le principe fondamental sur les vecteurs unitaires :

$$\boxed{\begin{array}{lllll} /\vec{u_r} & -mg\cos\theta - k(r-\ell_0) & & + m\omega^2 r\sin^2\theta & = m\ddot{r} \\ /\vec{u_\theta} & mg\sin\theta & + R_\theta & + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta & = 0 \\ /\vec{u_\varphi} & & R_\varphi & - 2m\dot{r}\omega\sin\theta & = 0 \end{array}}$$

→ Les inconnues sont $\theta(t)$, $R_\theta(t)$, $R_\varphi(t)$.
On pourra résoudre puisque l'on possède trois équations.

→ La première équation donnera $\theta(t)$:

$$-g\cos\theta - \frac{k}{m}(r-l_o) + \omega^2 \sin^2\theta \; r = \ddot{r}$$

$$-g\cos\theta - \Omega_o^2(r-l_o) + \Omega^2 \; r = \ddot{r}$$

$$\boxed{\ddot{r} + (\Omega_o^2 - \Omega^2)\, r = \Omega_o^2\, l_o - g\cos\theta}$$

→ Les deux autres équations permettent d'obtenir la réaction connaissant $r(t)$.

---

11) $$\boxed{\ddot{r} - \Omega^2\, r = -g\cos\theta}$$

---

12) $$r = A\,e^{\Omega t} + B\,e^{-\Omega t} + \frac{g\cos\theta}{\Omega^2}$$

En $t=0$, $r=r_o$ et $\dot{r}=0$

$$\left|\begin{array}{l} r_o = A + B + \dfrac{g\cos\theta}{\Omega^2} \\ 0 = A\Omega - B\Omega \end{array}\right.$$

d'où $A = B = \frac{1}{2}\left(r_o - \frac{g\cos\theta}{\Omega^2}\right)$

$$\boxed{r = \left(r_o - \frac{g\cos\theta}{\Omega^2}\right) ch(\Omega t) + \frac{g\cos\theta}{\Omega^2}}$$

---

13) → Si au départ $r_o = \frac{g\cos\theta}{\Omega^2}$, on voit que r garde ensuite la même valeur $r = \frac{g\cos\theta}{\Omega^2}$ $\forall t$

Donc cette valeur correspond à une position d'équilibre

$$\boxed{r_{eq} = \frac{g\cos\theta}{\Omega^2}}$$

$$\boxed{(r - r_{eq}) = (r_o - r_{eq})\; ch(\Omega t)}$$

→ Si r_o est différent de r_{eq} , le point M ne revient pas vers la position d'équilibre (cela serait le cas avec un $\cos \Omega t$) mais s'en éloigne indéfiniment (cas d'un $\mathrm{ch}\, \Omega t$). L'équilibre est donc un équilibre instable.

---

14) L'équation différentielle s'écrivait :

$$\ddot{r} + (\Omega_0^2 - \Omega^2)\, r = \ell_0 (\Omega_0^2 - \Omega_1^2)$$

Ici $\Omega^2 = \Omega_1^2$ et donc l'équation devient :

$$\boxed{\ddot{r} + (\Omega_0^2 - \Omega^2)(r - \ell_0) = 0}$$

---

15) A l'équilibre $\ddot{r} = 0$

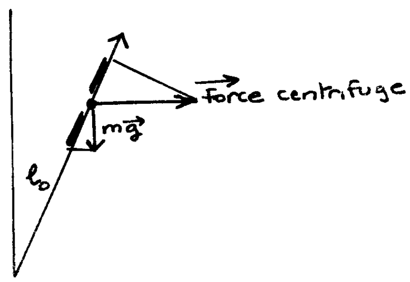
$$(\Omega_0^2 - \Omega^2)(r_{eq} - \ell_0) = 0$$

Si $\Omega \neq \Omega_0$ la solution est

$$\boxed{r_{eq} = \ell_0}$$

Commentaire :

La vitesse de rotation est telle que en ℓ_0 la projection selon $\overrightarrow{u_r}$ de la force centrifuge et du poids s'annulent.



---

16) En posant $R(t) = r(t) - r_{eq}$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{\ddot{R}_{(t)} + (\Omega_0^2 - \Omega^2)\, R_{(t)} = 0}$$

Cas $\Omega < \Omega_0$

$$R(t) = A\cos\left(\sqrt{\Omega_0^2-\Omega^2}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\Omega_0^2-\Omega^2}\,t\right)$$

C.I. $(r_0 - r_{eq}) = A$

$0 = B\sqrt{\Omega_0^2-\Omega^2}$

$$\boxed{(r-r_{eq}) = (r_0-r_{eq})\cos\left(\sqrt{\Omega_0^2-\Omega^2}\,t\right)}$$

Cas $\Omega > \Omega_0$

$$R(t) = A\,ch\left(\sqrt{\Omega^2-\Omega_0^2}\,t\right) + B\,sh\left(\sqrt{\Omega^2-\Omega_0^2}\,t\right)$$

$$\boxed{(r-r_{eq}) = (r_0-r_{eq})\,ch\left(\sqrt{\Omega^2-\Omega_0^2}\,t\right)}$$

Cas $\Omega = \Omega_0$

L'équation différentielle du mouvement devient :

$\ddot{R}(t) = 0$

finalement

$$\boxed{r = r_0}$$

Stabilité :

- si $\Omega < \Omega_0$ oscillations autour de r_{eq} qui est donc une position d'équilibre stable
- si $\Omega > \Omega_0$ équilibre instable (cf cosinus hyperbolique)
- si $\Omega = \Omega_0$ toute position est position d'équilibre. Le point reste où il se trouve au départ : équilibre indifférent.

---

17) Si $P = \vec{f}\,\vec{v}$ désigne la puissance, on a $\delta W = P\,dt$

$\longrightarrow$ réaction : $P = \vec{R}\,\vec{v}$ nul car $\vec{v}$ selon $\vec{u_r}$ et $\vec{R}$ perpendiculaire à $\vec{u_r}$. La réaction ne travaille pas en l'absence de frottements solides.

$\longrightarrow$ force de Coriolis $P = -2m(\vec{\omega}\wedge\vec{v})\cdot\vec{v}$ Le produit mixte est nul car $\vec{F_c}$ perpendiculaire à $\vec{v}$. La force de Coriolis ne travaille pas.

---

18) → poids :

$$\delta W = m\vec{g}\,\vec{dl}$$

$$\begin{array}{c|c|c} & 0 & dx \\ & 0 & dy \\ \vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z} & -g & dz \end{array}$$

$$\boxed{\delta W = -mg\,dz}$$

avec :

$$\delta W = -dE_p$$

$$dE_p = mg\,dz$$

$$\boxed{E_p = mg\,z + \text{constante}}$$

$$\boxed{E_{p(r)} = mg\,r\cos\theta + \text{constante}}$$

→ force de rappel du ressort :

$$\delta W = \vec{F}\,\vec{dl}$$

$$= -k(\ell-\ell_0)\,\vec{u}\;\;d\ell\,\vec{u} \qquad (\text{ici } \vec{u} = \vec{u_r})$$

$$\boxed{= -k(\ell-\ell_0)\,d\ell}$$

$$-dE_p = -k(\ell-\ell_0)\,d(\ell-\ell_0)$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 + \text{constante}}$$

$$\boxed{E_p(r) = \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2 + \text{constante}}$$

---

19) → force centrifuge

On sait que l'énergie potentielle associée à la force centrifuge $m\omega^2\overrightarrow{HM}$ vaut $\dfrac{-m\omega^2 HM^2}{2}$

(pour la force de rappel d'un ressort, signe + . Ici force "d'éloignement", signe négatif)

On retrouve dans le cadre du problème :

$$\vec{F}_{centrifuge} = m\omega^2 r\sin^2\theta\,\vec{u_r} + m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{dl} = dr\,\vec{u_r}$$

$$\delta W = \vec{F}\,\vec{dl}$$
$$= m\omega^2 r \sin^2\theta \; dr$$
$$dE_P = -m\omega^2 r \sin^2\theta \; dr$$
$$\boxed{E_{P(r)} = -\frac{m\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2} + \text{constante}}$$

---

20) $E_P(r)_{/\mathcal{R}} = mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 - \frac{m\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2} + K$

avec en $r=0$:

$$0 = 0 + \frac{1}{2}k\,l_0^{\,2} - 0 + K$$

finalement :

$$\boxed{E_P(r)_{/\mathcal{R}} = mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k\left\{(r-l_0)^2 - l_0^2\right\} - \frac{m\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2}}$$

$$\boxed{E_P(r)_{/\mathcal{R}} = m\left(\Omega_1^2\, l_0\, r + \frac{1}{2}\Omega_0^2\left\{(r-l_0)^2 - l_0^2\right\} - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2\right)}$$

---

21) On sait (théorème de l'énergie cinétique) pour un point matériel

$$dE_c = \sum \delta W_{\text{forces}}$$
$$= \sum \delta W_{\substack{\text{forces}\\ \text{conservatives}}} + \sum \delta W_{\substack{\text{forces}\\ \text{non conservatives}}}$$
$$= -dE_P + \sum \delta W_{\substack{\text{forces}\\ \text{non conservatives}}}$$
$$\boxed{dE = \sum \delta W_{\substack{\text{forces}\\ \text{non conservatives}}}}$$

Ici les deux forces "autres" : réaction et force de Coriolis, <u>ne travaillent pas</u> dans $\mathcal{R}$.

Donc :

$$dE_{/\mathcal{R}} = 0$$
$$\boxed{E_{/\mathcal{R}} = \text{constante}}$$

$$\boxed{E_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k\left\{(r-l_0)^2 - l_0^2\right\} - \frac{m\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2}}$$

Application :

$$\dot{r} = 0$$
$$\Omega = \Omega_1 \quad (r_{eq} = \ell_o)$$
$$\Omega_o = \sqrt{7}\,\Omega_1$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(\frac{1}{2} m (\Omega_o^2 - \Omega^2) r^2 - m(\Omega_o^2 - \Omega_1^2) r \ell_o \right)$$
$$= 0 + \frac{1}{2} m (7\Omega_1^2 - \Omega_1^2) \ell_o^2 - m (7\Omega_1^2 - \Omega_1^2) \ell_o^2)$$

$$\boxed{E = -3 \, m \, \ell_o^2 \, \Omega_1^2}$$

---

22)

remarque :

Lorsque Ω change, le mouvement du point coïncidant est circulaire, non uniforme. Il apparait donc dans $\mathcal{R}$ en plus de la force d'inertie d'entrainement normale centrifuge une force d'inertie d'entrainement tangentielle selon la direction $\vec{u_\theta}$.
Cette force est perpendiculaire au déplacement (selon $\vec{u_r}$) et donc ne travaille pas.
L'énergie reste conservée dans $\mathcal{R}$.

En écrivant la conservation de l'énergie dans $\mathcal{R}$:

$$-3 \, m \, \ell_o^2 \Omega_1^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (7\Omega_1^2 - 4\Omega_1^2) r^2 - m (7\Omega_1^2 - \Omega_1^2) r \ell_o$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{3}{2} m \Omega_1^2 r^2 - 6 m \Omega_1^2 r \ell_o$$

Pour trouver les valeurs extrêmes de r ($\dot{r} = 0$) on doit résoudre :

$$r^2 - 4 r \ell_o + 2 \ell_o^2 = 0$$

soit
$$r = 2\ell_o \pm \sqrt{(2\ell_o)^2 - 2\ell_o^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r_{MAX} &= \ell_o \, (2 + \sqrt{2}) \\ r_{MIN} &= \ell_o \, (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}}$$

→ 23) Dans R_0 galiléen, les forces sont : la force de pesanteur, la force exercée par le ressort et la réaction donc :

$E_P = E_{P\,pesanteur} + E_{P\,élastique}$

$E_{/R_0} = \frac{1}{2} m v^2_{/R_0} + m g r \cos\theta + \frac{1}{2} k \{(r-\ell_0)^2 - \ell_0^2\}$

$$\boxed{E_{/R_0} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \omega^2) + m g r \cos\theta + \frac{1}{2} k \{(r-\ell_0)^2 - \ell_0^2\}}$$

→ alors que :

$$\boxed{E_{/R} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\theta\, \omega^2 + m g r \cos\theta + \frac{1}{2} k \{(r-\ell_0)^2 - \ell_0^2\}}$$

Le deuxième terme a changé de signe.

→ Donc si $E_{/R}$ est conservé, cela ne peut en être le cas pour $E_{/R_0}$

→ Dans R_0, la réaction selon $\vec{u_\theta}$, puisqu'il y a mouvement selon $\vec{u_\theta}$, travaille et n'est pas conservative.

(D'où l'intérêt de travailler dans le référentiel non galiléen)

Thermodynamique

1) $PV = n R T$

avec $n = \frac{m}{M}$

$PV = m \frac{R}{M} T$

$$\boxed{PV = m\, r\, T}$$

avec $\boxed{r = \frac{R}{M}}$

Pour l'unité de masse :

$m = 1$

et le volume est noté v

ou encore :

$P \frac{V}{m} = r T$

$$\boxed{P v = r T}$$

avec $\boxed{v = \frac{V}{m}}$

---

3) Application numérique :

air : $r = \frac{8{,}314}{29\ 10^{-3}}$

$$\boxed{r_{air} = 0{,}29\ 10^{3}\ \mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}}$$

eau : $r = \frac{8{,}314}{18\ 10^{-3}}$

$$\boxed{r_{eau} = 0{,}46\ 10^{3}\ \mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}}$$

---

3) On sait que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.

Ici la température finale étant identique à la température initiale,

$\boxed{\text{l'énergie interne n'a pas varié.}}$

remarque:
Un gaz réel aux températures proches de la température ambiante et aux pressions "habituelles" a un comportement proche du gaz parfait.
On se rend bien compte qu'un gaz comprimé a "plus d'intérêt" qu'un gaz à la pression atmosphérique or son énergie n'a pas changé.
C'est son exergie qui a augmenté.

---

4) Si l'on comprime un gaz sa température a tendance à augmenter. Ici, la température est constante parce que le gaz exporte de l'énergie thermique.

$$\boxed{\text{Le transfert de chaleur est donc négatif pour le gaz}}$$

Pour une transformation réversible :

$$\delta Q = T\, ds \qquad (\text{pour un kg})$$

Ici $T = T_1$

$$\delta Q_{1kg} = T_1\, ds$$

$$Q_{1kg} = T_1\, \Delta s$$

$$Q = m T_1\, \Delta s \qquad (\text{pour la masse } m)$$

On passe de T_1, P_1 à T_1, P_2

$$\boxed{Q = -m r T_1 \ln \frac{P_2}{P_1}}$$

---

5) Si l'on comprime un gaz, il faut fournir du travail que le gaz reçoit

$$\boxed{\text{Le transfert de travail est donc positif pour le gaz}}$$

Pour une transformation réversible

$$\delta W = -P\, dv \qquad (\text{pour un kg})$$

avec :

$$v = \frac{r T_1}{P}$$

$$dv = rT_1 \times -\frac{dP}{P^2}$$

$$\delta W = +P\, rT_1 \frac{dP}{P^2}$$

$$= rT_1 \frac{dP}{P}$$

$$W = rT_1 \ln\frac{P_2}{P_1} \quad \text{(pour un kg)}$$

$$\boxed{W = m\,r\,T_1 \ln\frac{P_2}{P_1}}$$

(pour une masse m)

---

6) On vérifie le bilan d'énergie :

$$\boxed{\Delta U = W + Q}$$

$$0 = mrT_1 \ln\frac{P_2}{P_1} + \left(-mrT_1 \ln\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Les résultats sont cohérents.

---

7) Bilan d'énergie :

$Q = 0$		(adiabatique)
$W > 0$		(compression)
$\Delta U > 0$		$(\Delta U = W + Q)$

Bilan d'entropie :

$S_{echange} = 0$	(adiabatique donc pas d'échange d'entropie)
$S_{créé} > 0$	(irréversible)
$\Delta S > 0$	$(\Delta S = S_{échange} + S_{créé})$

---

8) $$\Delta U = W + \cancel{Q}$$

avec $$\delta W = -P_{ext}\, dv \quad \text{(pour un kg)}$$

$$= - P_2 \, dv$$

$$W = - P_2 \int_{v_1}^{v_2} dv \qquad \text{(pour un kg)}$$

$$= - P_2 \, (v_2 - v_1)$$

$$= - P_2 \left(\frac{r T_2}{P_2} - \frac{r T_1}{P_1} \right)$$

$$= r \left(T_1 \frac{P_2}{P_1} - T_2 \right)$$

$$\boxed{W = m r \left(T_1 \frac{P_2}{P_1} - T_2 \right)}$$

(pour une masse m)

et

$$\Delta u = r \frac{1}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

$$\boxed{\Delta U = m r \frac{1}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)}$$

finalement :

$$m r \frac{1}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = m r \left(T_1 \frac{P_2}{P_1} - T_2 \right)$$

$$\boxed{T_2 = T_1 \frac{\left((\gamma - 1) \frac{P_2}{P_1} + 1 \right)}{\gamma}}$$

$$\boxed{\Delta U = W = \frac{m r}{\gamma} T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)}$$

---

9) Bilan d'entropie :

En utilisant la formule

$$\Delta s = r \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1} \right) - r \ln\left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$= r \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{(\gamma - 1)\frac{P_2}{P_1} + 1}{\gamma} \right] - r \ln\left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$\boxed{\Delta S = S_{créé} = m r \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{(\gamma - 1)\frac{P_2}{P_1} + 1}{\gamma} \right) - \ln\left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right]}$$

$$= \frac{m r}{\gamma - 1} \left[\gamma \ln \left(1 - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma (P_2/P_1)} \right) + \ln \frac{P_2}{P_1} \right]$$

---

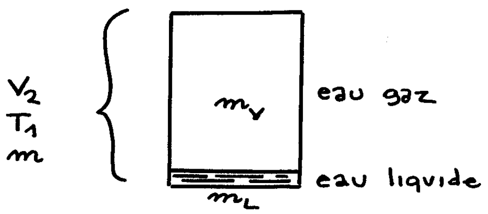
10) L'eau est sous forme de gaz (vapeur sèche) si :

$$P_1 < P_{saturation} \text{ à } T_1$$

$$\boxed{\frac{m r T_1}{V_1} < P^*(T_1)}$$

---

11)



- La pression vaut (cf mélange diphasé) $P^*(T_1)$
- Puisque l'on néglige le volume de l'eau liquide

$$P^*(T_1)\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{approché}}}{V_2} = m_V\, r\, T_1$$

$$\boxed{m_V = \frac{P^*(T_1)\, V_2}{r\, T_1} = m\, \frac{P^*(T_1)}{P_1}\frac{V_2}{V_1}}$$

$$m_L = m - m_V$$

---

12) travail

→ <u>première étape</u> : on comprime un gaz de manière isotherme de P_1 à $P^*(T_1)$

En utilisant le résultat de 5)

$$\boxed{W_{\text{étape}\,1} = m\, r\, T_1 \ln \frac{P^*(T_1)}{P_1}}$$

→ <u>deuxième étape</u> :

masse m_V gaz T_1 , $P^*(T_1)$	→	masse m_V gaz T_1 , $P^*(T_1)$
masse m_L <u>gaz</u> T_1 , $P^*(T_1)$		masse m_L <u>liquide</u> T_1 , $P^*(T_1)$

Cette étape se résume à la liquéfaction à T_1 , $P^*(T_1)$ d'une masse m_L à température, à pression constantes.

On néglige le volume du liquide

$$W_{\text{étape 2 pour 1 kg de liquide}} = -P^*_{(T_1)} \left(\cancel{v_{\substack{1kg\\ liquide}}} - v_{\substack{1kg\\ gaz}} \right)$$

$$= P^*_{(T_1)} \, v_{\substack{1kg\\ gaz}}$$

$$= P^*_{(T_1)} \, \frac{r T_1}{P^*_{(T_1)}}$$

$$\boxed{W_{\text{étape 2}} = m_L \, r \, T_1}$$

$$= (m - m_V) \, r T_1$$

$$= \left(m - \frac{P^*_{(T_1)} V_2}{r T_1}\right) r T_1$$

$$\boxed{W_{\text{étape 2}} = m r T_1 - P^*_{(T_1)} V_2}$$

finalement :

$$\boxed{W = m r T_1 \left(1 + \ln \frac{P^*(T_1)}{P_1}\right) - P^*_{(T_1)} V_2}$$

---

13) chaleur

→ première étape :

En utilisant le résultat de 4)

$$\boxed{Q_{\text{étape 1}} = - m r T_1 \ln \frac{P^*(T_1)}{P_1}}$$

→ deuxième étape :

Pour la liquéfaction de m_L (à pression constante)

$$Q_{\text{étape 2 pour 1 kg de liquide}} = \Delta h$$

$$= h_L - h_V$$

$$= - \ell_V(T_1)$$

$$\boxed{Q_{\text{étape 2}} = - m_L \, \ell_V(T_1)}$$

$$\boxed{Q_{\text{étape 2}} = - m \, \ell_V(T_1) + \frac{P^*_{(T_1)} V_2 \, \ell_V(T_1)}{r T_1}}$$

finalement :

$$\boxed{Q = -m r T_1 \ln \frac{P^*(T_1)}{P_1} - m \ell_v(T_1) + \frac{P^*(T_1) V_2 \ell_v(T_1)}{r T_1}}$$

---

14) énergie

→ première étape :

En utilisant 6)

$$\boxed{\Delta U_{\text{étape } 1} = 0}$$

→ deuxième étape :

Seul, m_L est concerné

$$h = u + P v$$
$$\Delta h = \Delta u + \Delta(P v)$$
$$= \Delta u + P^*(T_1)\,(v_F - v_i)$$
$$\Delta u = \Delta h + P^*(T_1)\,(v_i - v_F)$$
$$= -\ell_v(T_1) + P^*(T_1)\left(\frac{r T_1}{P^*(T_1)} - 0\right)$$

$$\boxed{\Delta U_{\text{étape } 2} = m_L\left(-\ell_v(T_1) + r T_1\right)}$$

finalement :

$$\boxed{\Delta U = m r T_1 - m \ell_v(T_1) - P^*(T_1) V_2 + \frac{P^*(T_1) V_2 \ell_v(T_1)}{r T_1}}$$

On vérifie que $\Delta U = W + Q$

---

15) bilan d'entropie

La transformation est réversible donc $S_{\text{créé}} = 0$ et

$$\boxed{\Delta S = S_{\text{échange}} = \frac{Q}{T_1}}$$

(cf transformation isotherme)