

DNS

Sujet

Cycle Diesel.....	1
I. Première partie.....	1
A. Première phase (1->2).....	1
B. Deuxième phase (2->3).....	1
C. Troisième phase (3->4).....	1
D. Quatrième phase (4->1).....	2
II. Deuxième partie.....	2
III. Troisième partie.....	2
IV. Quatrième partie.....	3

(voir site de Monsieur Jean LE HIR pour le texte original)

Cycle Diesel

I. Première partie

Un moteur fonctionne par compression et détente d'un gaz parfait dans un cylindre selon le cycle constitué de quatre phases. Le rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$ est supposé indépendant de la température

T . Le volume varie entre V_1 et V_2 . Le volume maximal a pour valeur $V_1 = 60 \text{ dm}^3$ et le volume minimal $V_2 = 10 \text{ dm}^3$.

A. Première phase (1->2)

Le gaz, admis à la température $T_1 = 300 \text{ K}$ sous la pression $P_1 = 1,00 \text{ bar}$ dans le cylindre au volume V_1 est comprimé de façon isotherme jusqu'au volume minimal V_2 .

1. Déterminer la pression atteinte P_2 .
2. Calculer le travail de compression $W_{1 \rightarrow 2}$ ainsi que la chaleur $Q_{1 \rightarrow 2}$ reçue par le gaz.

B. Deuxième phase (2->3)

Le gaz est ensuite chauffé jusqu'à la température T_3 , de façon réversible à pression constante. Le volume en fin d'échauffement est égal à $V_3 = 30 \text{ dm}^3$.

3. Déterminer la température T_3 .
4. Calculer la chaleur $Q_{2 \rightarrow 3}$ et le travail $W_{2 \rightarrow 3}$ reçus par le gaz.

C. Troisième phase (3->4)

Le gaz subit ensuite une détente adiabatique et réversible qui le ramène au volume initial V_1 .

5. Déterminer la température T_4 .

6. Calculer la chaleur $Q_{3 \rightarrow 4}$ et le travail $W_{3 \rightarrow 4}$ reçus par le gaz.

D. Quatrième phase (4→1)

Enfin, le gaz est ramené à l'état initial P_1, V_1 par une transformation isochore au contact d'une seule source extérieure de température T_1 .

7. Représenter l'allure du cycle en diagramme de Clapeyron $P-V$.

8. Calculer numériquement le rendement thermodynamique (ou efficacité) du cycle moteur.

II. Deuxième partie

9. En prenant pour origine l'entropie du gaz dans son état initial ($S_1=0$), déterminer l'entropie du gaz dans chacun des états 2, 3 et 4.

10. Représenter l'allure du cycle en diagramme entropique $T-S$: températures en ordonnée et entropies en abscisse.

11. Pour chaque phase du cycle, déterminer les entropies échangées avec le milieu extérieur ainsi que les entropies créées.

III. Troisième partie

L'apport d'énergie sous forme de chaleur dans la phase (2→3) est réalisé grâce à une combustion interne. Le piston contient initialement de l'air que l'on assimilera à un mélange gazeux contenant 80% de diazote et 20% de dioxygène.

Dans cette phase (2→3) du fuel est injecté à la pression constante P_2 . On assimilera le fuel à un hydrocarbure saturé de formule brute C_9H_{20} . Les produits de combustion sont le dioxyde de carbone et la vapeur d'eau.

Tous les gaz seront considérés comme parfaits, de rapport $\gamma=1,40$ indépendant de T .

L'enthalpie molaire de combustion du fuel dans l'oxygène a pour valeur $\Delta_f H = -5,7 \text{ MJ} \times \text{mol}^{-1}$, elle sera supposée indépendante de la température.

12.. Quelle est la masse de fuel maximale que l'oxygène peut brûler complètement à chaque cycle ?

13. A quelle masse de fuel brûlé correspond le cycle étudié précédemment ?

14. Déterminer l'enthalpie de formation du fuel à partir des éléments simples. On donne : $\Delta_f H(CO_2) = -393,5 \text{ kJ} \times \text{mol}^{-1}$, $\Delta_f H(H_2O_{\text{gaz}}) = -242,5 \text{ kJ} \times \text{mol}^{-1}$.

15. La combustion chimique a modifié les quantités de matière gazeuse dans le piston. En quoi cela modifie-t-il la suite du cycle moteur ?

16. Comparer le nouveau rendement en tenant compte de cette modification des quantités de matière gazeuse dans le cylindre au rendement précédent (on supposera que le fuel introduit brûle

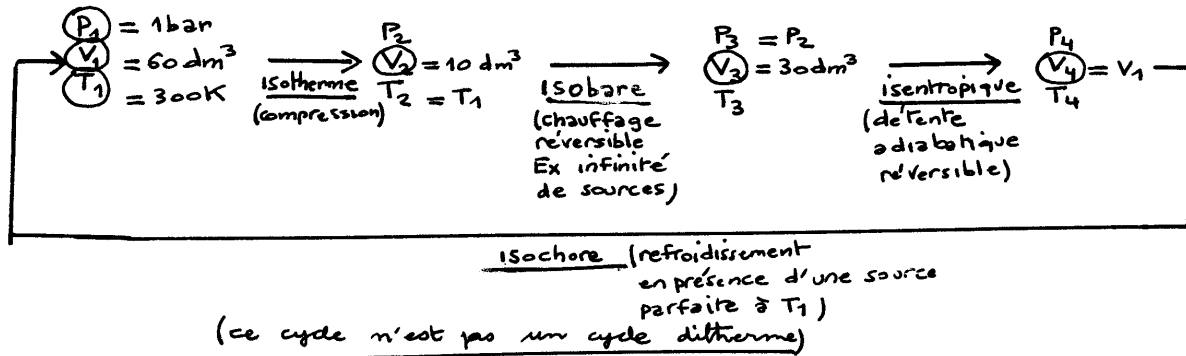
totalement).

IV. Quatrième partie

17. La présence de dioxyde de carbone et de vapeur d'eau dans les produits de réaction oblige à changer de modèle de gaz. La capacité thermique molaire des gaz à volume constant doit être considérée comme une fonction affine de la température, $C_V = A + BT$. Les gaz étant toujours supposés parfaits, expliciter la fonction $\gamma(T)$.
18. De quelle façon la loi de Laplace est-elle modifiée par cette nouvelle hypothèse? On recherchera, dans un premier temps la relation entre V et T , puis la relation entre P et V .
-

Réponses

Cycle diésel



$$1) \quad \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1}$$

$$P_2 = P_1 \frac{V_1}{V_2}$$

$$\text{A.N.} \quad = 1 \frac{60}{10}$$

$$P_2 = 6,0 \text{ bar}$$

$$3) \quad W_{12} = - \int_1^2 P_{\text{ext}} dV$$

$$= - \int_1^2 P dV$$

car pour que la température reste toujours égale à la température extérieure, il faut comprimer infiniment lentement.

La pression est donc toujours homogène dans le gaz.

La transformation est quasistatique c'est à dire réversible pour le système.

(pas d'irréversibilité thermique, ni mécanique)

et donc $P_{\text{ext}} = P_{\text{gaz}}$ à chaque instant.

$$= - \int_1^2 \frac{P_1 V_1}{V} dV$$

$$W_{12} = + P_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$A.N. = 10^5 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \ln \frac{60}{10}$$

$$W_{12} = 10,8 \text{ kJ}$$

Puisque $\Delta U_{12} = 0$ car gaz parfait et transformation à T constant,

$$Q_{12} = -W_{12}$$

$$Q_{12} = -P_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$A.N. = -10,8 \text{ kJ}$$

$$3) \quad \frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$T_3 = T_1 \frac{V_3}{V_2}$$

$$A.N. = 300 \frac{30}{10}$$

$$T_3 = 900 \text{ K}$$

4) Pour une transformation à pression constante, on a $Q = \Delta H$

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = n C_p (T_3 - T_2)$$

avec C_p capacité thermique molaire à pression constante.

$$= n R \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_3 - T_2)$$

$$Q_{23} = P_1 V_1 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{V_3}{V_2} - 1 \right)$$

$$A.N. = 10^5 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \frac{1,4}{1,4 - 1} \left(\frac{30}{10} - 1 \right)$$

$$Q_{23} = 42,0 \text{ kJ}$$

$$W_{23} = \int_2^3 -P_{\text{ext}} dV$$

$$= \int_2^3 -P dV$$

(car $P_{\text{ext}} = P$ puisque transformation réversible)

$$= -P_2 (V_3 - V_2)$$

(car chauffage à P constante $= P_2$)

$$W_{23} = -P_1 V_1 \left(\frac{V_3}{V_2} - 1 \right)$$

$$\text{A.N.} = -10^5 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \left(\frac{30}{10} - 1 \right)$$

$$W_{23} = -12,0 \text{ kJ}$$

5) Pour une isentropique : $PV^\gamma = \text{cste}$
 donc : $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$

$$T_4 V_4^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1}$$

$$= T_1 \frac{V_3}{V_2} \frac{V_3^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}}$$

$$T_4 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma$$

$$\text{A.N.} = 300 \left(\frac{60}{10} \right) \left(\frac{30}{60} \right)^{1,4}$$

$$T_4 = 682 \text{ K}$$

$$6) \quad Q_{34} = 0$$

(cf adiabatique)

$$W_{34} = \Delta U_{34}$$

$$= n C_V (T_4 - T_3)$$

$$= n \frac{R}{\gamma-1} (T_4 - T_3)$$

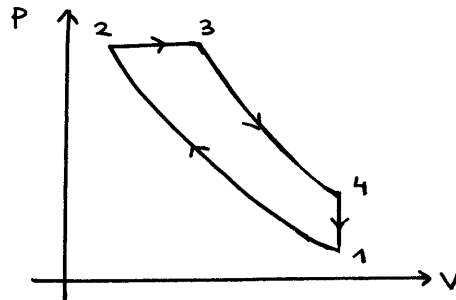
avec C_V capacité thermique molaire
à volume constant.

$$W_{34} = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left(\frac{V_3}{V_2} \right) \left(1 - \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right)$$

$$\text{A.N.} = -\frac{10^5 \cdot 60 \cdot 10^{-3}}{1,4-1} \left(\frac{30}{10} \right) \left(1 - \left(\frac{30}{60} \right)^{1,4-1} \right)$$

$$W_{34} = -10,9 \text{ kJ}$$

7) allure du cycle dans le diagramme PV



(Les transformations 1-2, 2-3, 3-4 sont réversibles donc P est défini.)

La transformation 4-1 est irréversible mais le refroidissement est plus lent. On a supposé que la P était définie.)

8) Rendement thermodynamique.

$$\eta = \frac{-W}{Q_{\text{chaud}}} \quad (\text{car } W < 0)$$

$$= \frac{-(W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41})}{Q_{23}}$$

→ car l'apport de chaleur se produit au cours de la transformation 2-3

$$\eta = \frac{-(W_{12} + W_{23} + W_{34})}{Q_{23}}$$

→ car il n'y a pas de travail au niveau de la transformation isochore 4-1

$$\text{A.N.} \quad = \frac{-(10,8 - 12,0 - 10,9)}{42,0}$$

$$\eta = 0,29$$

9) Formule utilisée pour la variation d'entropie, en variables T, V

$$dU = TdS - PdV$$

$$dS = \frac{dU}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$= n \frac{R}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = nR \left(\frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{\text{final}}}{T_{\text{initial}}} + \ln \frac{V_{\text{final}}}{V_{\text{initial}}} \right)$$

— on pose $S_1 = 0$

— on considère la transformation 1-2

$$S_2 - S_1 = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

donc
$$S_2 = \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1}$$

— on considère la transformation 4-1

$$S_1 - S_4 = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_4}$$

$$= -\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left[\frac{V_1}{V_2} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma \right]$$

donc
$$S_4 = \frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{1}{\gamma-1} \left(\ln \frac{V_1}{V_2} + \gamma \ln \frac{V_2}{V_1} \right)$$

— Enfin S_3 est égal à S_4 car 3-4 est isentropique.

A.N.

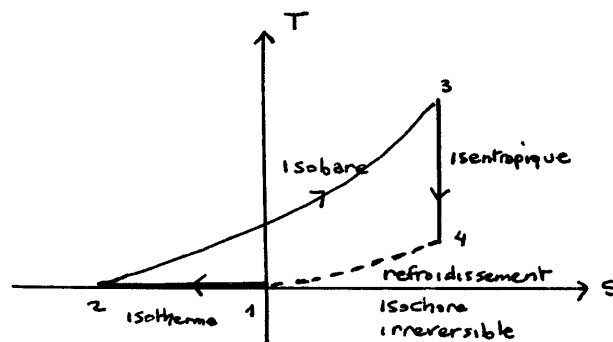
$$S_2 = \frac{10^5 \cdot 60 \cdot 10^{-3}}{300} \ln \frac{10}{60}$$

$$S_2 = -35,8 \text{ J K}^{-1}$$

$$S_3 = S_4 = \frac{10^5 \cdot 60 \cdot 10^{-3}}{300} \frac{1}{1,4-1} \left(\ln \frac{60}{10} + 1,4 \ln \frac{30}{60} \right)$$

$$S_3 = S_4 = 41,1 \text{ J K}^{-1}$$

10) allure du cycle dans le diagramme TS



(Pendant 4-1, irréversible, la température du système n'est, a priori, pas définie d'où les pointillés)

11) Transformation 1→2

La transformation est réversible

$$S_{créé} = 0$$

$$\begin{aligned} S_{échange} &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_{\text{frontière}}} \\ &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_{\text{système}}} \\ &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_1} \\ &= \frac{Q_{12}}{T_1} \\ &= \Delta S_{12} \end{aligned}$$

$$S_{créé_{12}} = 0$$

$$S_{échange_{12}} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} = -35,8 \text{ JK}^{-1} \quad (= S_2)$$

Transformation 2→3

La transformation est réversible ("infinité de sources" pour ce chauffage)

$$S_{créé} = 0$$

$$\begin{aligned} S_{échange} &= \int_2^3 \frac{\delta Q}{T_{\text{frontière}}} \\ &= \int_2^3 \frac{\delta Q}{T_{\text{système}}} \end{aligned}$$

on ne peut donc sortir T de l'intégrale

$$\begin{aligned} &= \int_2^3 \frac{dH}{T} \\ &= \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_3}{T_2} \\ &= \frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{V_3}{V_2} \\ &= \Delta S_{23} \end{aligned}$$

$$S_{créé_{23}} = 0$$

$$S_{échange_{23}} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{V_3}{V_2} = 76,9 \text{ JK}^{-1} \quad (= S_3 - S_2)$$

transformation 3 → 4

La transformation est adiabatique et réversible

$$S_{\text{créé } 34} = 0$$

$$S_{\text{échange } 34} = 0$$

transformation 4 → 1

Refroidissement isochore en présence d'une seule source froide
(donc irréversible)

$$\begin{aligned} S_{\text{échange}} &= \int_4^1 \frac{\delta Q}{T_{\text{FRONTIERE}}} \\ &\quad \quad \quad \downarrow T_1 \\ &= \frac{Q_{41}}{T_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec: } Q_{41} &= \Delta U_{41} \quad (\text{cf isochore}) \\ &= n C_v (T_1 - T_4) \\ &= n \frac{R T_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma \right) \end{aligned}$$

$$S_{\text{échange}} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma \right)$$

$$S_{\text{créé}} = \Delta S - S_{\text{échange}}$$

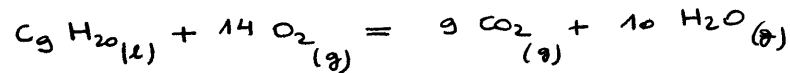
$$\text{avec: } \Delta S = - \frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{V_1}{V_2} \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma \right] \quad (\text{cf 9})$$

$$S_{\text{échange } 41} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma \right) = -63,7 \text{ JK}^{-1}$$

$$S_{\text{créé } 41} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{1}{\gamma - 1} \left(-\ln \left(\frac{V_1}{V_2} \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma \right) + \frac{V_1}{V_2} \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^\gamma - 1 \right) = 22,6 \text{ JK}^{-1}$$

(On doit vérifier que la somme de ces 8 termes est nulle)

12) Réaction de combustion de l'hydrocarbure :



→ nombre de moles d'air dans le cylindre (en négligeant le volume de l'hydrocarbure liquide)

$$\begin{aligned} n_{\text{air}} &= \frac{P_1 V_1}{R T_1} \\ &= \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{8,314 \text{ J/mol}\cdot\text{K} \cdot 300 \text{ K}} \\ &= 2,41 \text{ mol} \end{aligned}$$

→ nombre de moles d'oxygène

$$\begin{aligned} n_{\text{O}_2} &= n_{\text{air}} \times 20\% \\ &= 0,48 \text{ mol} \end{aligned}$$

→ il faut 14 moles d'O₂ pour brûler 1 mole de C₉H₂₀

$$\begin{aligned} n_{\text{C}_9\text{H}_{20}}^{\text{max}} &= \frac{n_{\text{O}_2}}{14} \\ &= 0,034 \text{ mol} \end{aligned}$$

La masse de fuel maximale que l'on peut brûler à chaque cycle vaut donc

$$\begin{aligned} m_{\text{C}_9\text{H}_{20}}^{\text{max}} &= n_{\text{max}} \times M_{\text{C}_9\text{H}_{20}} \\ &= 0,034 \times 128 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$m_{\text{max}} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

13) En ne tenant pas compte des pertes, de la combustion incomplète, le nombre de moles de fuel brûlé serait :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Q_{23}}{|\Delta_r H|} \\ &= \frac{42}{57 \cdot 10^3} \\ &= 0,00074 \text{ mol} \end{aligned}$$

ce qui correspond à une masse

$$m_{\text{C}_9\text{H}_{20} \text{ brûlé}} = 0,0074 \times 128 \cdot 10^{-3}$$

$$m_{\text{brûlé}} = 0,94 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

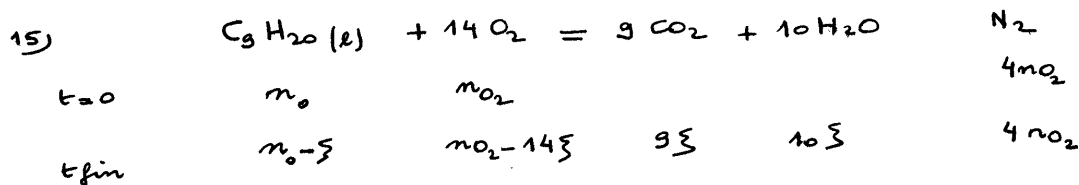
$$14) \quad \Delta_r H = 9 \Delta_f H(\text{CO}_2) + 10 \Delta_f H(\text{H}_2\text{O}) - 14 \cancel{\Delta_f H(\text{O}_2)} - \Delta_f H(\text{C}_9\text{H}_{20})$$

~~nul cf~~
état de référence

$$\Delta_f H(\text{C}_9\text{H}_{20}) = 9 \Delta_f H(\text{CO}_2) + 10 \Delta_f H(\text{H}_2\text{O}) - \Delta_r H$$

$$\text{A.N.} \quad = 9 \times -393,5 + 10 \times -242,5 - (-5,7 \cdot 10^3)$$

$$\Delta_f H(\text{C}_9\text{H}_{20}) = -266,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$



Dans l'étape 2-3 (supposée réversible), on avait supposé que le nombre de moles de gaz était $5n_{\text{O}_2} = n$.
En fait, en supposant une combustion de 5 moles de carburant, le nombre de moles de gaz est $5n_{\text{O}_2} + 5,5 = n'$.

A la fin de l'état 2-3, au lieu de

$$Q_{23} = n C_p (T_3 - T_2)$$

on aura

$$Q_{23} = n' C_p (T_3' - T_2)$$

Donc $T_3' = T_2 + \frac{n}{n'} (T_3 - T_2)$

$$\text{A.N.} \quad = 300 + \frac{2,41}{2,41 + 5 \times 7,4 \cdot 10^{-3}} (900 - 300)$$

$$T_3' = 891 \text{ K} < 900 \text{ K}$$

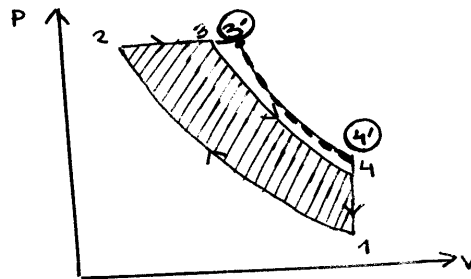
De plus $P_2 V_3 = n R T_3$
 Ici $P_2 V'_3 = n' R T'_3$

$$V'_3 = \frac{n'}{n} \frac{T'_3}{T_3} V_3$$

A.N. $= \frac{2,44}{2,41} \frac{891}{900} 30$

$$V'_3 = 30,2 \text{ dm}^3 > 30 \text{ dm}^3$$

Si on passe à ce que devient le cycle dans la diagramme PV



L'aire du cycle ($\oint P dV$) correspondant au travail fourni par le moteur ($-W = \oint P dV$) augmente pour le même Q_{chaud} .

Donc l'efficacité augmente.

15)

$$W'_{23} = -P_2 (V'_3 - V_2) = -12,09 \text{ kJ}$$

$$W'_{34} = n' C_V (T'_4 - T'_3) = n' C_V T'_3 \left(\left(\frac{V'_3}{V_3} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) = -10,88 \text{ kJ}$$

on obtient

$$\eta' = - \frac{W_{12} + W'_{23} + W'_{34}}{Q_{23}}$$

$$\eta' = 29,1$$

$$\eta = 28,9$$

17)

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

$$= \frac{C_v + R}{C_v}$$

$$\gamma_{(T)} = 1 + \frac{R}{A + BT}$$

18) $\underline{V, T}$

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV$$

$$= n(A + BT) \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$= n \left(A \frac{dT}{T} + B dT + R \frac{dV}{V} \right)$$

$$= n d(A \ln T + BT + R \ln V)$$

Pour une transformation à S cte

$$A \ln T + R \ln V + BT = \text{cte}$$

 $\underline{V, P}$

$$\text{avec } \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V}$$

$$dS = n \left(A \left(\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} \right) + R \frac{dV}{V} + B dT \right)$$

$$= n d(A \ln P + (A+R) \ln V + BT)$$

Pour une transformation à S cte

$$A \ln P + (A+R) \ln V + B \frac{PV}{nR} = \text{cte}$$