Systèmes Linéaires Continus Invariants

SLCI2 - Linéarisation

Résumé

Programme PSI/MP 2022 (LIEN)		
Id	Compétence développée	Connaissances associées
B3-02	Préciser les limites de validité d'un modèle.	Point de fonctionnement. Non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation, seuil) et retard pur.
B2-08	Simplifier un modèle.	Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement. Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : – principe ; – justification ; – limites.

Contexte des systèmes non linéaires

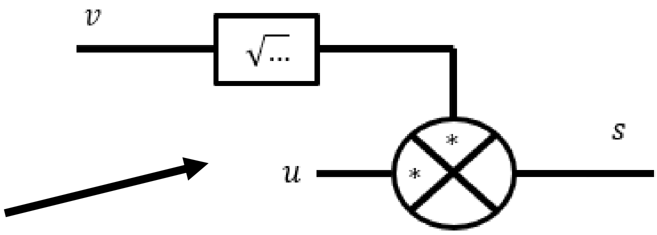
Relations entre variables avec des fonctions mathématiques

Exemples

$$s(t) = e_1(t)e_2(t)$$

$$s(t) = \sqrt{e(t)}$$

$$\boldsymbol{s(t) = u(t)\sqrt{v(t)}}$$



Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

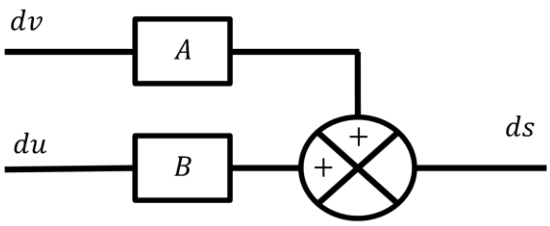
$$s(t) = u(t)\sqrt{v(t)}$$

$$\begin{cases} s(t) = s_f + ds(t) \\ u(t) = u_f + du(t) \\ v(t) = v_f + dv(t) \end{cases} \quad \begin{cases} ds(0) = 0 \\ du(0) = 0 \;\; Conditions\ de\ heavyside\ ☑ \\ dv(0) = 0 \end{cases}$$

Relation vérifiée au point de fonctionnement

$$s_f = u_f\sqrt{v_f}$$

Trouver A et B tels que $ds(t) = Bdu(t) + Adv(t)$



Valable tant que les évolutions sont « faibles »

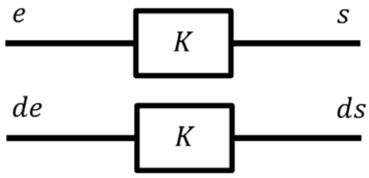
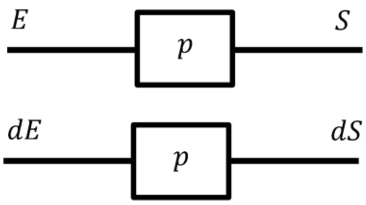
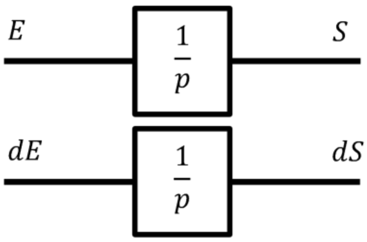
A la fin, on étudie $s(t) = s_f + ds(t)$ pour conclure sur les performances

Pour trouver A et B	
Dérivées partielles	Remplacement dans l'équation initiale
$\begin{cases} A = \left(\frac{\partial s(t)}{\partial v}\right)_{u_f,v_f} \\ B = \left(\frac{\partial s(t)}{\partial u}\right)_{u_f,v_f} \end{cases}$ $\begin{cases} A = \frac{\boldsymbol{u_f}}{\boldsymbol{2\sqrt{v_f}}} \\ B = \sqrt{\boldsymbol{v_f}} \end{cases}$	$s(t) = u(t)\sqrt{v(t)}$ $s_f + ds(t) = \left(u_f + du(t)\right)\sqrt{v_f + dv(t)}$ Utiliser les développements limités Se limiter à l'ordre 1 Identifier le point de fonctionnement qui disparaît à gauche et à droite $\cancel{\boldsymbol{s_f}} + ds(t) = \cancel{\boldsymbol{u_f\sqrt{v_f}}} + \frac{\boldsymbol{u_f}}{\boldsymbol{2\sqrt{v_f}}}dv(t) + \sqrt{\boldsymbol{v_f}}du(t) + \frac{\cancel{dv(t)du(t)}}{\cancel{2\sqrt{v_f}}}$

Linéarisation des autres blocs

Hypothèses : Le système est stabilité au point de fonctionnement au départ

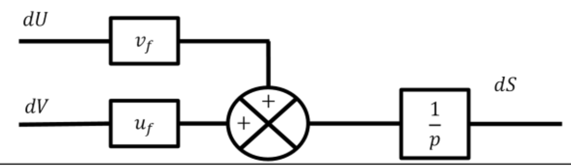
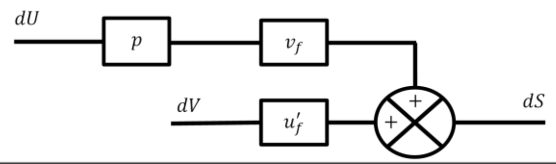
$$\forall t \leq 0, de(t) = ds(t) = 0, \begin{cases} e(t) = e_0 \\ s(t) = s_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^n e(t)}{dt^n} = 0 \\ \dfrac{d^n s(t)}{dt^n} = 0 \end{cases}$$

Gain pur	
Dérivateur	
Intégrateur	
Saturation	 $s \in [a, b]$  $ds \in [a - e_0, b - e_0]$

Démonstrations dans le cours – En particulier, p et $1/p$ nécessitent la condition

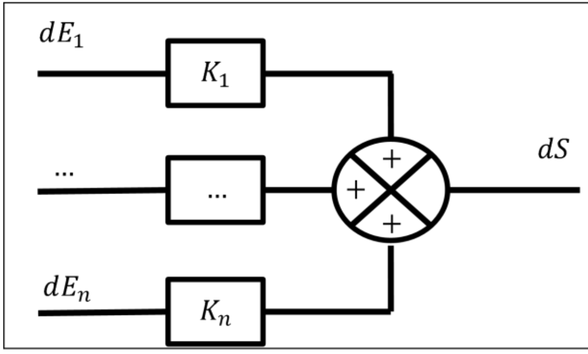
$$\forall t \leq 0, de(t) = ds(t) = 0, \begin{cases} e(t) = e_0 \\ s(t) = s_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^n e(t)}{dt^n} = 0 \\ \dfrac{d^n s(t)}{dt^n} = 0 \end{cases}$$

Equations différentielles

$\frac{ds(t)}{dt} = u(t)v(t)$	$s(t) = \frac{du(t)}{dt}v(t)$
$\begin{cases} u(t) = u_f + du(t) \\ v(t) = v_f + dv(t) \\ s'(t) = s'_f + ds'(t) \end{cases}$ $dS(p) = \frac{1}{p}\left[u_f dV(p) + v_f dU(P)\right]$	$\begin{cases} s(t) = s_f + ds(t) \\ u'(t) = u'_f + du'(t) \\ v(t) = v_f + dv(t) \end{cases}$ $dS(p) = u'_f dV(p) + v_f p dU(P)$
	

Produit de plusieurs variables

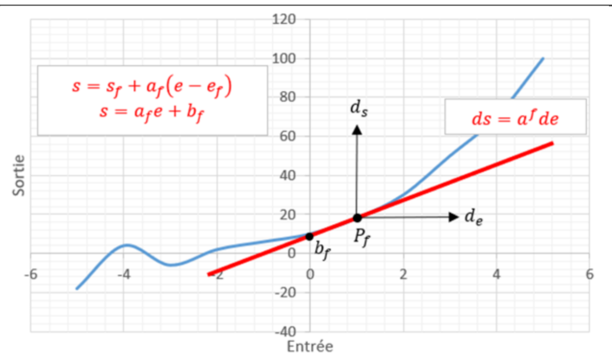
$$s(t) = \prod e_i(t)$$



$$K_i = \left(\frac{\partial s(t)}{\partial e_i}\right)_{P_f}$$

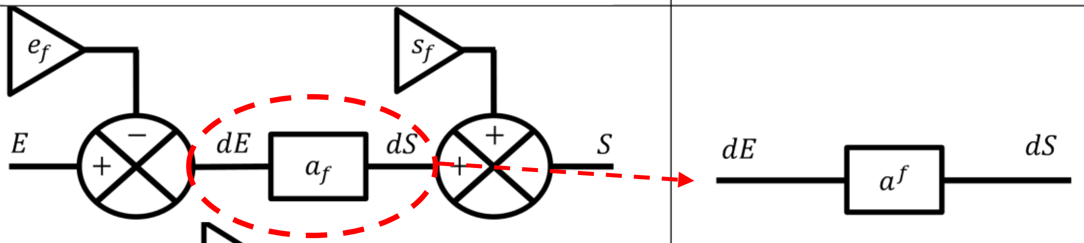
$$\begin{cases} e_f^i(t) = e_f^i + de_i(t) \ \forall i \in [1, n] \\ s_f(t) = s_f + ds(t) \end{cases}$$

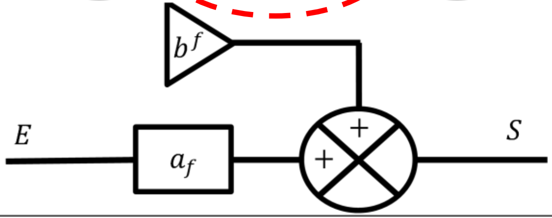
Linéarisation de problèmes simples



$$\begin{cases} e(t) = e_f + de(t) \\ s(t) = s_f + ds(t) \end{cases}$$

$$P_f = (e_f, s_f)$$





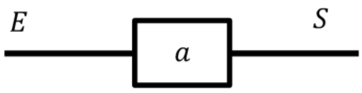
Modèle valable quelle que soit la linéarisation

Cas des problèmes à conditions initiales non nulles

Problème ? $\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) \boldsymbol{- f(0^+)}$

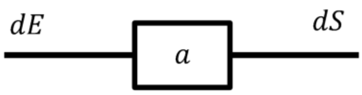
Si prendre en compte $f(0^+)$ est possible, il est préférable de se ramener à un système variant autour de la position de départ par changement de variables :

Imaginons par exemple : $s(t) = ae(t)$ avec $\begin{cases} e(0) = E_0 \\ s(0) = S_0 \end{cases}$



On pose : $\begin{cases} e(t) = E_0 + de(t) \\ s(t) = S_0 + ds(t) \end{cases}$

On étudie alors le système « linéarisé » aux conditions initiales nulles à l'équilibre au départ :



Exemples d'applications : problèmes de thermique où les températures ne sont jamais le 0 absolu, et/ou sont exprimées en °C