

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: non autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Particule chargée dans le champ magnétique terrestre.....	3
I. Questions préliminaires.....	3
II. Particule chargée dans un champ magnétique uniforme.....	4
A. Décomposition du mouvement en parallèle et perpendiculaire.....	4
B. Étude du mouvement perpendiculaire.....	4
III. Étude de la trajectoire.....	5
IV. Moment dipolaire.....	5
V. Particule chargée dans un champ magnétique non uniforme.....	5
Description du champ magnétique terrestre.....	7
I. Questions préliminaires.....	7
II. Le champ magnétique terrestre.....	7
III. Oscillations d'une aiguille aimantée.....	9
Génération spontanée du champ magnétique terrestre.....	10
I. Questions préliminaires.....	11
II. Mise en équation pour le problème très simplifié.....	11
III. Stabilité des états stationnaires du système.....	13
A. Étude de l'état stationnaire tel que $i_s = 0$	13
B. Autres états stationnaires.....	13

Afin de faciliter le travail du correcteur:

- On indiquera la numérotation des questions
- On passera une ligne entre chaque question
- On encadrera les réponses au rouge

Les copies mal écrites, mal présentées, mal rédigées, sont corrigées aux risques et périls de l'étudiant.

On justifiera toutes les réponses, même celles jugées « évidentes », avec précision.

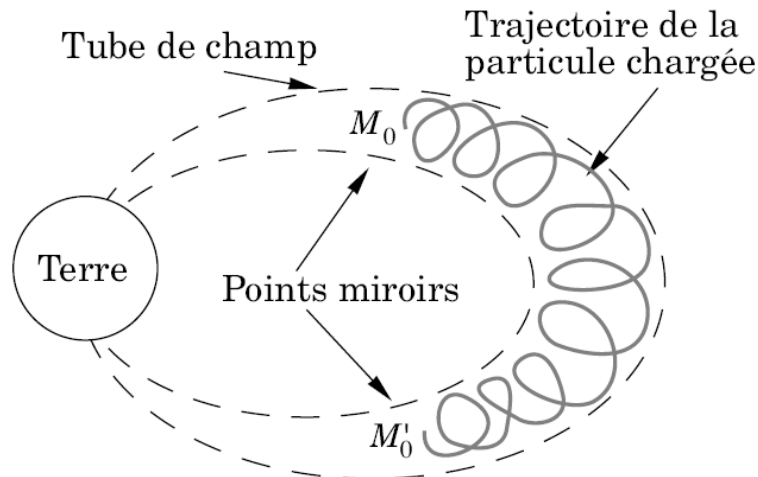
En l'absence de calculatrice, pour les applications numériques, on évaluera (de manière même très approchée le premier chiffre significatif) mais l'ordre de grandeur doit être correct ainsi que l'unité.

CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE

Constantes physiques :

Charge élémentaire :	e	$= 1,60.10^{-19}\text{C}$
Masse de l'électron :	m_e	$= 9,11.10^{-31}\text{kg}$
Masse du proton :	m_p	$= 1,67.10^{-27}\text{kg}$
Électron-volt	1 eV	$= 1,60\text{ }10^{-19}\text{J}$
Permittivité du vide :	ϵ_o	$= 8,85.10^{-12}\text{ F.m}^{-1}$
Perméabilité du vide :	μ_o	$= 4\pi\text{ }10^{-7}\text{ H.m}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	c	$= 3,00.10^8\text{m.s}^{-1}$
Rayon terrestre	R_T	$= 6,40\text{ }10^3\text{ km}$

Particule chargée dans le champ magnétique terrestre.



La Terre est entourée de zones, appelées « ceintures de Van Allen », où des particules chargées, de haute énergie, sont piégées par le champ magnétique terrestre. Dans ces zones, les trajectoires des particules s'enroulent autour des lignes de champ terrestre. Au fur et à mesure que les particules se rapprochent des pôles magnétiques de la terre, les trajectoires se resserrent et la composante longitudinale de la vitesse des particules le long des lignes de champ diminue ; elle peut finir même par s'annuler et les particules correspondantes repartent alors en sens inverse vers l'autre pôle où le même rebroussement se produit. Ces particules chargées oscillent ainsi entre deux points appelés points miroirs (figure).

I. Questions préliminaires

1. Rappeler l'expression de la force de Lorentz subie par une particule de charge q et de masse m se déplaçant à la vitesse \vec{v} , en référentiel galiléen, dans un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) permanent (indépendant du temps).
2. Comment peut-on justifier que seule la force de Lorentz soit à prendre en compte pour décrire le mouvement de la particule.
3. Écrire la relation fondamentale de la dynamique sous forme vectorielle à l'aide du vecteur vitesse \vec{v} pour la particule supposée non relativiste.
4. En multipliant la relation précédente par $\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$ (avec $d\vec{\ell}$ déplacement élémentaire de la particule pendant dt), retrouver le théorème de l'énergie cinétique pendant la durée dt (on exprimera $d(\frac{1}{2}m\vec{v}^2)$). On posera $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$.
5. En déduire que l'énergie mécanique totale est constante et retrouver son expression dans un champ (\vec{E}, \vec{B}) . Que peut-on en déduire concernant la norme de \vec{v} dans le cas où la force est seulement d'origine magnétique c'est-à-dire quand $\vec{E} = \vec{0}$.

II. Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule, de masse m et de charge q , est soumise à la seule action d'un champ magnétique \vec{B} uniforme et permanent (indépendant du temps), dans le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ supposé galiléen. On appelle respectivement $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz .

Le champ magnétique est colinéaire à Oz : $\vec{B} = B\vec{u}_z$ ($B > 0$). On pose $\omega = -\frac{qB}{m}$ (ω défini ici est donc du signe opposé à q).

A. Décomposition du mouvement en parallèle et perpendiculaire

Le vecteur vitesse \vec{v} de la particule a pour composantes scalaires v_x, v_y, v_z : $\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z$. On pose $\vec{v}_\perp = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$ et $\vec{v}_\parallel = v_z\vec{u}_z$; \vec{v}_\perp et \vec{v}_\parallel désignent ainsi les composantes vectorielles de la vitesse respectivement perpendiculaire et parallèle au champ \vec{B} . La norme du vecteur \vec{v}_\perp est notée $v_\perp = \|\vec{v}_\perp\|$. À l'instant initial, la particule se trouve en O avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{\perp 0}\vec{u}_x + v_{\parallel 0}\vec{u}_z$ ($v_{\perp 0} > 0, v_{\parallel 0} > 0$).

6. Écrire la relation fondamentale de la dynamique sous forme vectorielle et projeter dans la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. On introduira la notation ω .

7. Montrer que \vec{v}_\parallel est une constante du mouvement. En déduire que v_\perp est également constant au cours du mouvement.

B. Étude du mouvement perpendiculaire

On étudie la projection du mouvement de la particule dans le plan P_\perp perpendiculaire à \vec{B} .

8. On pose $\zeta = v_x + i v_y$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$ et donc $i^2 = -1$. En couplant deux des équations différentielles précédentes, déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la variable complexe $\zeta(t)$.

9. En intégrant l'équation différentielle, obtenir $\zeta(t)$ en fonction du temps et des constantes du problème (on portera les conditions initiales après avoir cherché l'expression de $\zeta(t=0)$).

10. En déduire les composantes v_x et v_y de la vitesse de la particule en fonction de v_\perp , ω et du temps t .

11. Déterminer les coordonnées x et y de la particule à l'instant t .

12. Donner l'équation de la trajectoire du mouvement de la particule dans le plan P_\perp . Montrer qu'il s'agit d'un cercle Γ dont on précisera le centre C (centre guide) de coordonnées x_C, y_C et le rayon a (rayon de giration). Exprimer x_C, y_C, a et la période de révolution T de la particule sur ce cercle en fonction de v_\perp et ω .

13. Tracer, avec soin, le cercle Γ dans le plan P_\perp , dans le cas d'un proton, puis dans le cas d'un électron. Préciser en particulier en justifiant avec soin les sens de parcours de chaque particule sur Γ .

14. Calculer a et T pour un électron de 25 keV ou pour un proton de 25 keV dans un champ de

50 μ T, la vitesse initiale est inclinée d'un angle de 45° avec le champ.

III. Étude de la trajectoire

15. Quelle est la trajectoire de la particule chargée? Expliquer pourquoi elle s'enroule sur un tube de champ du champ \vec{B} .
16. On peut décomposer le mouvement de la particule en un mouvement sur un cercle dont le centre C se déplace à la vitesse \vec{v}_{\parallel} le long de Oz . Quelle distance b parcourt le centre C sur Oz durant la période T ? Exprimer b en fonction de v_{\parallel} et ω . Comparer b et a dans le cas où la vitesse initiale est inclinée d'un angle de 45° avec le champ.

IV. Moment dipolaire

17. Le mouvement projeté dans le plan perpendiculaire au champ équivaut à un courant engendrant un moment magnétique $\vec{\mu} = \mu \vec{u}_z$ que l'on exprimera. Montrer en particulier qu'il peut s'exprimer en fonction de B et de "l'énergie cinétique transverse" $E_{c\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$. En donner également une autre expression en fonction du flux Φ (et des constantes du problème) contenu dans le tube de champ magnétique autour duquel s'enroule la trajectoire. Quels sont les sens respectifs du champ magnétique et de ce moment magnétique?

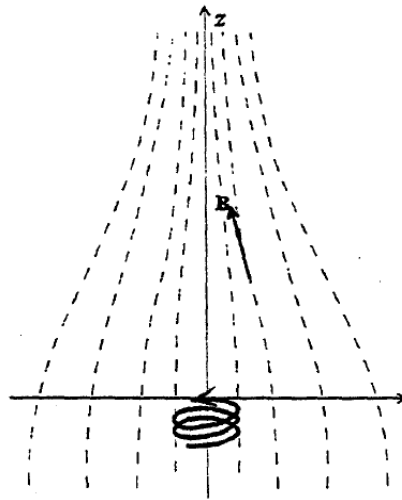
V. Particule chargée dans un champ magnétique non uniforme

On suppose que le champ \vec{B} n'est plus tout à fait uniforme, ses variations restant très faibles sur une distance de l'ordre du rayon de giration a ou de la distance b .

Le champ \vec{B} présente la symétrie de révolution autour de l'axe Oz ; en outre, on admet que la coordonnée B_z du champ \vec{B} ne dépend que de z (donc indépendante de r), ce qui est acceptable dans la zone située au voisinage de l'axe où se déplace la particule chargée et dans laquelle il n'y a aucun courant. On suppose en outre B_z positive. Un point M de cette zone est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ, z . La base cylindrique est $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$.

18. Justifier, avec précision, que la composante orthoradiale B_θ du champ \vec{B} est nulle.
19. Établir l'expression de la composante radiale B_r du champ \vec{B} en fonction de r et de la dérivée $\frac{dB_z}{dz}$. On pourra, par exemple, utiliser l'expression de la divergence du champ en coordonnées cylindriques: $\text{div } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$ sachant que le flux étant conservatif pour un champ magnétique, on peut toujours écrire au niveau local: $\text{div } \vec{B} = 0$.

On considère un champ de révolution autour d'un axe Oz , dont les lignes se resserrent lentement (voir figure ci-dessous) et une particule dont la trajectoire s'enroule originellement autour de cet axe. (On remarquera donc qu'à l'instant initial, la particule n'est pas supposée en O comme lors des questions précédentes).



20. Le champ sur l'axe est-il plus intense ou moins intense quand z augmente? Justifier.

Le champ étant « localement » uniforme, on peut utiliser certains résultats de l'étude en champ uniforme: la particule chargée décrit un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire à \vec{B} , autour d'un centre guide C se déplaçant le long de Oz ; mais, le rayon a du cercle, la période T de révolution, varient également au cours du mouvement et le déplacement de C sur Oz n'est plus uniforme (les vitesses v_{\parallel} et v_{\perp} ne sont plus constantes).

On admet que l'expression donnant le rayon a reste valable en remplaçant B par B_z . De même, on définit la grandeur μ par l'expression obtenue plus haut où l'on a remplacé B par B_z .

21. Montrer que la composante F_z de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule animée d'un mouvement, que l'on suppose, dans le cadre de l'approximation, hélicoïdal, de vitesse $\vec{v} = v_{\theta} \vec{u}_{\theta} + v_z \vec{u}_z$ autour de l'axe Oz dans un champ $\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_z \vec{u}_z$, s'écrit en fonction de q, B_r, v_{\perp} . On justifiera avec beaucoup de soin le signe adopté, v_{\perp} désignant ici une norme. Donner une réponse dans le cas $q > 0$ et une réponse dans le cas $q < 0$.

22. En déduire que $F_z = -\frac{m v_{\perp}^2}{2 B_z} \frac{dB_z}{dz}$ et exprimer alors $\frac{dv_z}{dt}$. Écrire $\frac{d(v_z^2)}{dt}$ et en déduire $d(v_z^2)$ fonction de μ, m, dB_z .

23. En remarquant que $dE_c = dE_{c\perp} + dE_{c\parallel}$, montrer que μ reste constant au cours du mouvement. Montrer que la trajectoire d'une particule décrit la paroi d'un tube de champ (ou tube de flux).

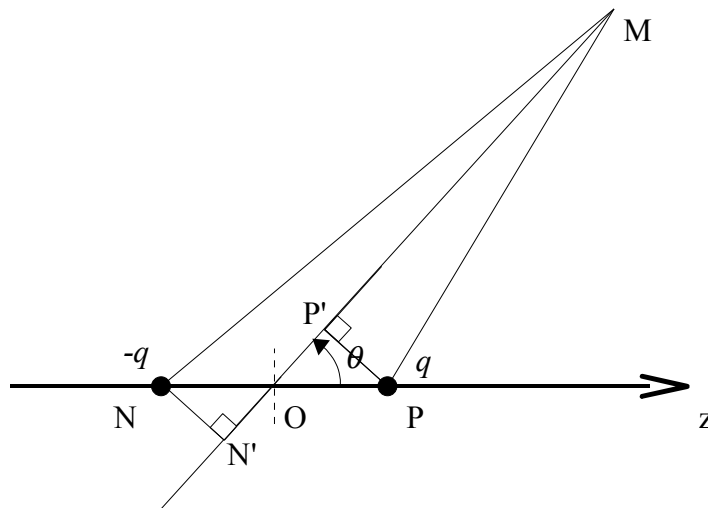
24. Montrer que la particule chargée ne peut entrer dans une zone où la composante B_z du champ dépasse une valeur maximale B_{max} que l'on exprimera en fonction de E_c et μ .

Description du champ magnétique terrestre

I. Questions préliminaires

On considère un doublet en électrostatique: une charge q positive sur l'axe Oz en P tel que $z_P = \frac{a}{2}$ et une charge $-q$ sur l'axe Oz en N tel que $z_N = -\frac{a}{2}$. On considère un point M repéré en coordonnées sphériques r, θ, φ d'origine O avec $r = \|\vec{OM}\|$.

1. Écrire l'expression du potentiel V en M créé par le doublet en fonction de $q, \epsilon_0, \|\vec{PM}\|, \|\vec{NM}\|$



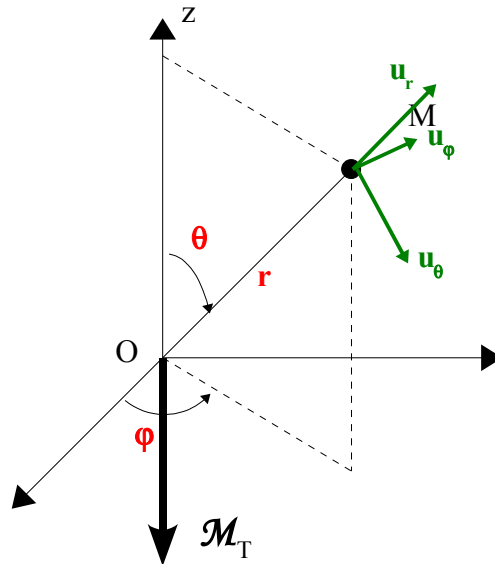
Le point M se trouve à grande distance de O ($r \gg a$): on admet alors qu'au premier ordre en $\frac{a}{r}$, on peut ici confondre $\|\vec{PM}\|$ et $\|\vec{P'M}\|$ où P' est le projeté orthogonal de P sur la droite OM . De même, on peut confondre $\|\vec{NM}\|$ et $\|\vec{N'M}\|$ où N' est le projeté orthogonal de N sur la droite OM .

2. En déduire directement $\|\vec{PM}\|$ en valeur approchée en fonction de r, a, θ puis en travaillant toujours au premier ordre en $\frac{a}{r}$ l'expression de $\frac{1}{\|\vec{PM}\|}$. Idem pour $\frac{1}{\|\vec{NM}\|}$.
3. Retrouver alors l'expression du potentiel à grande distance du doublet (potentiel dipolaire).
4. On pose $\vec{p} = p\vec{u}_z$ avec \vec{p} : moment dipolaire du doublet. Donner l'expression de p en fonction des données du problème et écrire la potentiel dipolaire V en fonction de p, ϵ_0, r, θ .
5. En déduire, en explicitant le calcul, l'expression du champ \vec{E} créé par un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = p\vec{u}_z$ en coordonnées sphériques dans la base sphérique $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$.

II. Le champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est assimilé (de façon simpliste) au champ d'un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}_T$ placé au centre de la terre (de rayon R_T) dont la direction est légèrement inclinée par rapport à la direction de l'axe de rotation de la terre.

Attention: on note ici $\vec{\mathcal{M}}_T = -\mathcal{M}_T \vec{u}_z$ avec $\mathcal{M}_T > 0$. Le vecteur \vec{u}_z désigne le vecteur unitaire de l'axe géomagnétique (donc légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation terrestre) orienté dans le sens du sud géographique vers le nord géographique.



Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, φ par rapport à l'axe géomagnétique.

6. Justifier la présence du signe « moins » dans l'expression du moment magnétique.
7. En procédant par analogie formelle entre un dipôle électrostatique et un dipôle magnétique, donner l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par le dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}_T = -\mathcal{M}_T \vec{u}_z$ au point M dans la base sphérique.
8. Établir l'équation différentielle d'une ligne de champ. En intégrant cette équation, montrer que l'équation d'une ligne de champ est donnée par l'expression $r = r_0 \sin^2 \theta$ où r_0 désigne une constante. Que représente la distance r_0 pour une ligne de champ?
9. Tracer l'allure de quelques lignes de champ dans un plan méridien (plan défini par $\varphi = \text{constante}$) sans oublier d'y indiquer le sens du champ.
10. Calculer l'intensité $B = B(\theta)$ du champ magnétique sur une ligne de champ ; en désignant par B_0 l'intensité correspondante dans le plan équatorial magnétique (plan défini par $\theta = \frac{\pi}{2}$), écrire B sous la forme $B = B_0 f(\sin \theta)$. Exprimer B_0 en fonction de $\mathcal{M}_T, r_0, \mu_0$ et expliciter la fonction $f(\sin \theta)$. Représenter le graphe de B en fonction de θ . Commenter le graphe obtenu.
11. Application numérique: le champ magnétique vaut $31 \mu\text{T}$ sur l'équateur magnétique terrestre. Que vaut le moment magnétique terrestre \mathcal{M}_T ?

III. Oscillations d'une aiguille aimantée

On se propose de déterminer, en un point M (défini par l'angle θ) situé à la surface de la terre, l'intensité de la composante horizontale $B_h = |B_o|$ du champ magnétique terrestre en mesurant les petites oscillations dans un plan horizontal d'une aiguille aimantée. L'aiguille aimantée est un petit solide qui peut tourner sans frottement autour de son axe vertical. Elle est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ horizontal et de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation. On pose $\alpha = (\vec{u}_\theta, \vec{\mathcal{M}})$

12. L'aiguille aimantée étant astreinte à rester horizontale dans le champ magnétique terrestre, justifier rapidement que la composante verticale du champ magnétique terrestre n'intervient pas ici dans l'étude du mouvement de l'aiguille aimantée. On rappellera l'expression du moment subi par l'aiguille dans \vec{B} .

Dans la suite, on ne tient donc compte que de la composante vectorielle horizontale \vec{B}_h .

13. Quelle est la position d'équilibre stable de l'aiguille aimantée, restant horizontale, dans le champ magnétique terrestre ? Justifier rapidement la réponse à partir de l'énergie. Préciser la valeur de α notée α_{eq} à l'équilibre.

14. Quelle est l'expression du moment de force subi par l'aiguille dans \vec{B}_h . Établir l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille soumise au champ magnétique terrestre. On appliquera la loi pour la dynamique de rotation autour d'un axe fixe:

$$\mathcal{M}_{\text{axe de rotation orienté}} = J_{\text{axe de rotation}} \frac{d}{dt} \omega_{\text{axe de rotation orienté}}$$

15. En déduire la période T_0 des petites oscillations de cette aiguille au voisinage de la position d'équilibre stable, en fonction de B_h , J et la norme \mathcal{M} du moment $\vec{\mathcal{M}}$. On posera $\alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon$.

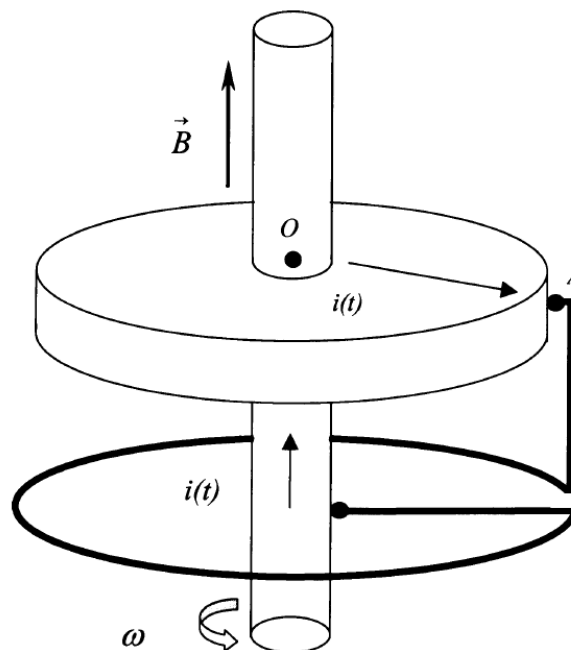
16. Les valeurs de \mathcal{M} et J n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique \vec{B}_e créé par une bobine parcourue par un courant électrique pour s'en affranchir. On place d'abord la bobine telle que \vec{B}_e et la composante horizontale vectorielle \vec{B}_h du champ terrestre soient parallèles et de même sens et on mesure la période T_1 des petites oscillations de l'aiguille aimantée. On change ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle valeur de la période T_2 des petites oscillations. En déduire B_h en fonction de l'intensité B_e du champ \vec{B}_e créé par la bobine et du rapport $\frac{T_1}{T_2}$ (on supposera $B_h < B_e$).

17. Application numérique : en un point M défini par $\theta = 50^\circ$, on a mesuré $B_e = 100 \mu T$ et $\frac{T_1}{T_2} = 0,78$. En déduire le moment magnétique terrestre \mathcal{M}_T . Réponse littérale puis application numérique.

Génération spontanée du champ magnétique terrestre

L'hypothèse selon laquelle le champ magnétique terrestre n'aurait pas eu une polarité constante au cours du temps a été formulée pour la première fois par le géophysicien français Bernard BRUNHES, au début du XX siècle. Des travaux ultérieurs ont établi que le champ géomagnétique subit de brusques renversements au cours desquels le Nord magnétique change d'hémisphère. L'existence de périodes de stabilité, s'étendant sur plus de cent millions d'années et suivies de nombreux renversements successifs, suggère un comportement chaotique. Afin d'expliquer la génération spontanée du champ magnétique terrestre, le géophysicien anglais Edward Crisp BULLARD propose en 1955 le modèle le plus simple de dynamo auto-entretenu : la dynamo-disque homopolaire (voir figure).

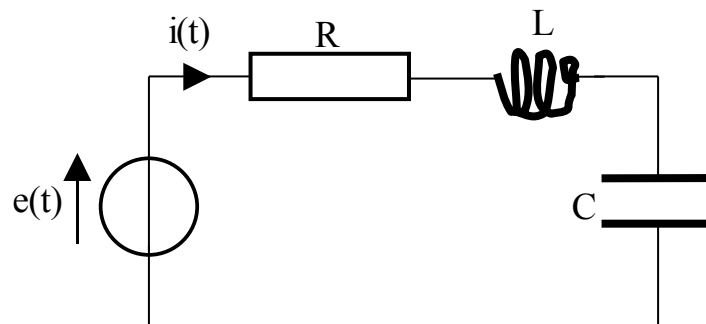
La modélisation proposée par BULLARD est la suivante. L'axe vertical et le disque, tous les deux conducteurs, sont mis en rotation par un dispositif non représenté. Une boucle conductrice, fixe, relie le bord du disque à l'axe par l'intermédiaire de deux frotteurs assurant un bon contact électrique. Ainsi un courant électrique est susceptible de circuler, empruntant un itinéraire indiqué sur la figure par des flèches. Le courant circule de O vers A, descend vers la spire, en fait le tour, puis va vers l'axe de rotation pour ressortir en O. Ce dispositif n'est pas plongé dans un champ magnétique d'origine extérieure et ne comporte pas de générateur électrique. En dépit de cela, il est possible qu'un courant et un champ magnétique apparaissent spontanément.



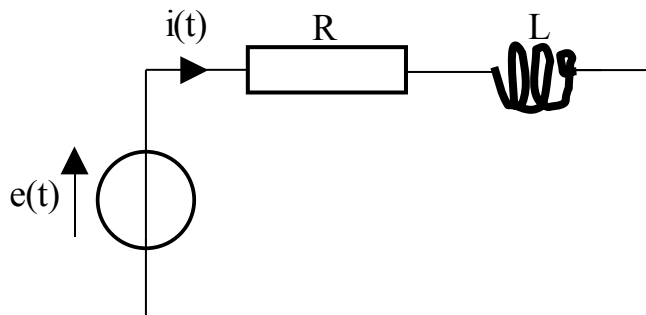
On pense que les mouvements des couches internes conductrices du globe terrestre sont responsables de la génération spontanée du champ magnétique terrestre. Le mouvement du disque modélise les mouvements de matière dans le noyau terrestre (fer liquide dans le noyau externe). Le dispositif étudié pourrait être une image, évidemment extrêmement grossière, de ce phénomène.

I. Questions préliminaires

- Rappeler l'expression de la loi d'Ohm, c'est à dire la relation entre la tension u et l'intensité i (en convention « récepteur »):
 - pour un conducteur ohmique de résistance R
 - pour une bobine idéale d'inductance L
 - pour un condensateur idéal de capacité C
- On considère le circuit suivant où la force électromotrice $e(t)$ dépend du temps: retrouver l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.



- Donner de même l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour le circuit suivant:



- En multipliant l'équation précédente par: $i dt$, retrouver l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée par une bobine et commenter la signification physique du bilan énergétique obtenu pour la durée dt : que devient l'énergie fournie par le générateur?

II. Mise en équation pour le problème très simplifié

On envisage le dispositif simplifié de la figure qui suit: au lieu d'un disque, on considère une barre OA de longueur a tournant dans le plan horizontal autour de l'axe Oz vertical à la vitesse $\omega(t)$.

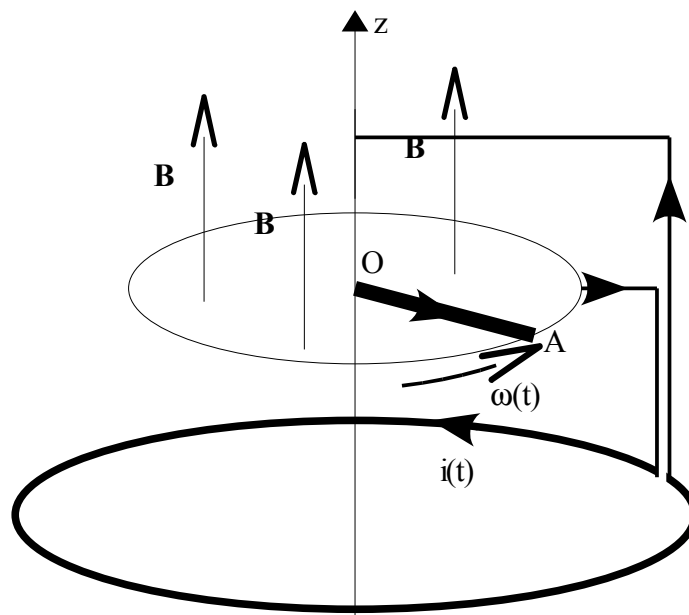
Le champ magnétique $\vec{B}(t) = B(t)\vec{u}_z$ créé par la spire inférieure est (pour simplifier) supposé uniforme dans le plan de la tige tournante. Il est proportionnel au courant $i(t)$ et on définit l'inductance mutuelle M (constante) entre la spire et le cercle de rayon a par

$$B(t)\pi a^2 = M i(t) \quad .$$

On choisit le sens positif du courant dans la barre de O vers A. La vitesse de rotation $\omega(t)$ a l'orientation définie par la figure.

D'un point de vue mécanique, la barre conductrice tourne sous l'action d'un couple de moment constant $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_z$ modélisant l'apport d'énergie dû à la rotation terrestre. Elle est encore soumise à l'action d'un couple de frottements, modélisant les frottements sur les couches fluides du noyau, de moment selon l'axe Oz : $-f \omega(t)$ (f est une constante) et à l'action des forces de Laplace de moment par rapport à l'axe Oz noté \mathcal{M}_L . On note J le moment d'inertie de la tige par rapport à Oz .

D'un point de vue électrique, le dispositif possède une inductance propre L , une résistance R et il est le siège d'une f.e.m induite e .



5. Donner l'expression de la force-électromotrice e du générateur équivalent à la barre entre O et A en fonction de B , a et ω . On rappelle le formule $e = \int_{OA} (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ avec $d\vec{l}$ élément de la tige et \vec{V} vitesse de l'élément de la tige considéré.

6. Donner l'expression du moment des forces de Laplace $\mathcal{M}_L(O) = \int_{OA} \vec{r} \wedge d\vec{F}_L$ avec $d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$

7. Établir le système ci dessous , de deux équations différentielles non linéaires du premier ordre, couplées:

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma - f \omega + \alpha M i^2$$

$$R i + L \frac{di}{dt} = \beta M \omega i$$

où α et β sont deux constantes à déterminer.

III. Stabilité des états stationnaires du système

On s'intéresse ici aux états stationnaires du système (les grandeurs sont indépendantes du temps).

8. Écrire les deux conditions à vérifier.

A. Étude de l'état stationnaire tel que $i_s = 0$

9. Montrer qu'il existe un unique état stationnaire i_s, ω_s tel que $i_s = 0$ et déterminer ω_s en fonction des données. Cet état stationnaire vous semble-t-il intéressant pour expliquer l'existence d'un champ magnétique terrestre?

Si cette solution était stable vis à vis des perturbations, le système pourrait rester indéfiniment dans cet état. Il convient donc d'en étudier la stabilité. Pour étudier la stabilité d'un état stationnaire, on suppose $\omega = \omega_s + \varepsilon$ et $i = i_s + \eta$ avec ε et η sont des infiniment petits traduisant une perturbation par rapport à l'état stationnaire.

On travaille donc au premier ordre en ε et η .

10. Établir les équations différentielles linéaires dont sont ici solutions $\varepsilon(t)$ et $\eta(t)$.

11. En déduire que l'état stationnaire est stable si Γ est inférieur à une valeur Γ_m qu'on exprimera en fonction des données.

12. Pour la terre, on a $\Gamma > \Gamma_m$. Commenter.

B. Autres états stationnaires.

13. Montrer qu'il existe deux états stationnaires i_s, ω_s tels que $i_s \neq 0$. Déterminer les valeurs correspondantes de i_s, ω_s en fonction des données.

14. Pourquoi peut-on se contenter de n'étudier qu'un seul de ces états.

15. On étudie la stabilité de l'état stationnaire tel que $i_s > 0$ de la même façon que ci-dessus. Établir les équations différentielles linéaires dont sont solutions $\varepsilon(t)$ et $\eta(t)$.

16. Chercher des solutions de la forme $\varepsilon(t) = \varepsilon_M \exp(q t)$ et $\eta(t) = \eta_M \exp(q t)$. Écrire l'équation du second degré dont q est solution.

17. Justifier, avec le plus de précision possible, que cet état stationnaire est stable.

18. Quelle est la caractéristique du champ magnétique terrestre qui ne semble pas prise en compte dans ce premier modèle?

Réponses

Particule chargée dans un champ magnétique

1) Force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

2) on néglige le poids car en général
 $\|\vec{F}_{\text{Lorentz}}\| \gg \|\vec{mg}\|$

3) relation fondamentale : $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

4) on multiplie par \vec{v} :

$$q \vec{E} \cdot \vec{v} + \underbrace{q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{\text{nul}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

puis par dt :

$$q \vec{E} \cdot d\vec{l} = d\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2\right)$$

$$-q dV = d\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2\right)$$

$$d\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + qV\right) = 0$$

5) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$
 $E_p = qV$
 $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + qV$ donc :

$$E_{\text{mécanique}} = \frac{1}{2} m v^2 + qV = \text{cte}$$

Si le champ électrique est nul, V est uniforme et

$$\frac{1}{2} m v^2 = \text{cte}$$

donc

si la force est seulement magnétique
 la norme de la vitesse est constante.

$$\begin{aligned}
 6) \quad q (\vec{v} \wedge \vec{B}) &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 \vec{v} \wedge \underbrace{\frac{q\vec{B}}{m}}_{-\omega \vec{u}_z} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 \boxed{\omega \vec{u}_z \wedge \vec{v} &= \frac{d\vec{v}}{dt}} \\
 \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z \quad \begin{vmatrix} 0 & \vec{v}_x \\ 0 & \vec{v}_y \\ \omega & \vec{v}_z \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \dot{\vec{v}}_x \\ \dot{\vec{v}}_y \\ \dot{\vec{v}}_z \end{vmatrix} \\
 \boxed{\begin{aligned} \dot{\vec{v}}_x &= -\omega \vec{v}_y \\ \dot{\vec{v}}_y &= \omega \vec{v}_x \\ \dot{\vec{v}}_z &= 0 \end{aligned}}
 \end{aligned}$$

7) Donc puisque $\dot{\vec{v}}_z = 0$

$$\boxed{v_{//} = v_z = \text{cste}_{v_{//0}}}$$

De plus, dans un champ magnétique

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_{//}^2 + v_{\perp}^2} = \text{constante}$$

$$\text{donc } \boxed{\begin{aligned} v_{\perp} &= \sqrt{v^2 - v_{//}^2} \\ &= \text{cste } v_{\perp 0} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \dot{\vec{v}}_x + i \dot{\vec{v}}_y &= -\omega \vec{v}_y + i\omega \vec{v}_x \\
 &= i\omega (\vec{v}_x + i\vec{v}_y) \\
 \boxed{\dot{\xi} &= i\omega \xi}
 \end{aligned}$$

9) Équation caractéristique

$$r = i\omega$$

$$\boxed{\xi = A e^{i\omega t}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{C.I. en } t=0 \quad \left| \begin{aligned} \xi_0 &= v_{x0} + i v_{y0} \\ &= v_{\perp 0} \text{ ou } v_{\perp} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\zeta = v_{\perp} e^{i\omega t}}$

10) On trouve v_x en prenant la partie réelle
et v_y en prenant la partie imaginaire

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} \cos \omega t \\ v_y &= v_{\perp} \sin \omega t \end{aligned}}$$

11) on intègre v_x et v_y

$$x = \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin \omega t + \text{cte}$$

C.I. $0 = \text{cte}$

$$\boxed{x = \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin \omega t}$$

$$y = -\frac{v_{\perp}}{\omega} \cos \omega t + \text{cte}$$

C.I. $0 = -\frac{v_{\perp}}{\omega} + \text{cte}$

$$\boxed{y = \frac{v_{\perp}}{\omega} (1 - \cos \omega t)}$$

12) $x = \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin \omega t$

$$y - \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos \omega t$$

On élève au carré et on fait la somme:

$$\boxed{x^2 + \left(y - \frac{v_{\perp}}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_{\perp}}{\omega}\right)^2}$$

équation d'un cercle de rayon:

$$\boxed{a = \frac{v_{\perp}}{|\omega|}}$$

de centre C:

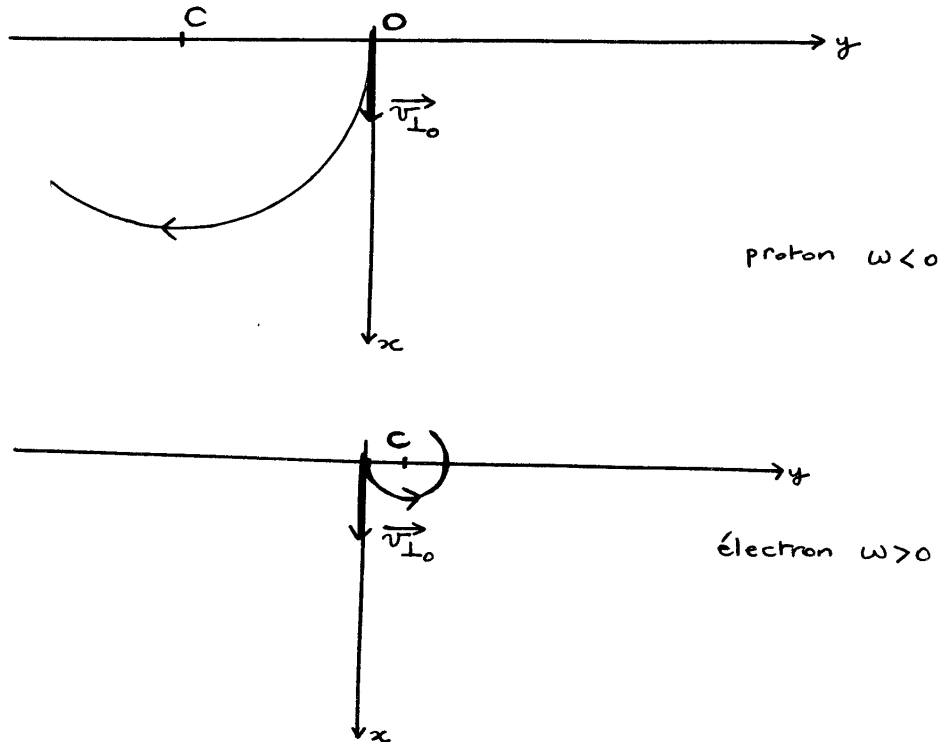
$$x_c = 0$$

$$y_c = \frac{v_{\perp}}{\omega}$$

de période T:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{|\omega|}}$$

13)

14) électron 25 keV

$$\frac{1}{2} m v^2 = 25 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$$

$$v = 9,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$|\omega| = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{m}$$

$$|\omega| = 8,8 \cdot 10^6 \text{ rad s}^{-1}$$

$$a = \frac{v \frac{\sqrt{2}}{2}}{\omega}$$

$$a = 7,6 \text{ m}$$

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

$$T = 0,7 \mu\text{s}$$

proton 25 keV

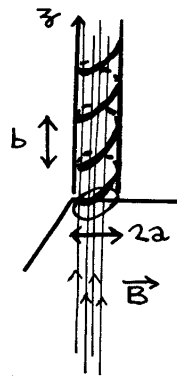
$$v = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$|\omega| = 4,8 \cdot 10^3 \text{ rad s}^{-1}$$

$$a = 320 \text{ m}$$

$$T = 1,3 \text{ ms}$$

15) La trajectoire est donc une hélice
Elle emprisonne des lignes de champ



- 16) b est la distance parcourue selon z pendant une période (pas de l'hélice)

$$b = v_{\parallel} T$$

$$b = v_{\parallel} \frac{2\pi}{|\omega|}$$

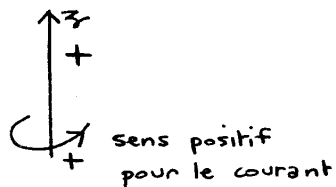
or $a = v_{\perp} \frac{1}{|\omega|}$

$$\frac{b}{a} = 2\pi \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}$$

A.N. Ici $v_{\parallel} = v_{\perp} = \|\vec{v}\| \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{b}{a} = 2\pi$$

17)



Quel que soit le signe de q , le courant sera négatif
(cf le proton positif tourne dans le mauvais sens
l'électron tourne dans le bon sens mais la charge est négative)

avec
$$\begin{aligned} i &= - \frac{|q|}{T} \\ &= - \frac{|q| |\omega|}{2\pi} \\ &= - \frac{q^2 B}{2\pi m} \end{aligned}$$

$$\vec{\mu} = i S \vec{u}_z \quad (S = \pi a^2)$$

$$\vec{M} = - \frac{q^2 B a^2}{2m} \vec{u}_z$$

on pose $E_{c\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$

$$= \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$$

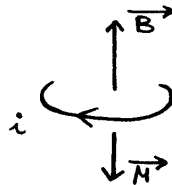
$$= \frac{1}{2} m a^2 \frac{q^2 B^2}{m^2}$$

$$\vec{M} = - \frac{E_{c\perp}}{B} \vec{u}_z$$

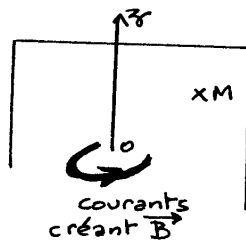
on pose $\phi = B \pi a^2$

$$\vec{M} = - \frac{q^2 \phi}{2\pi m} \vec{u}_z$$

Sens de \vec{M}



- 18) Le champ \vec{B} est à symétrie de révolution autour de Oz .
 C'est un champ créé par une distribution de courants invariante par rotation (comme le champ créé par une spire)



un plan contenant Oz est un plan d'antisymétrie.

Donc $\vec{B}(M) \in$ plan d'antisymétrie

$$B_{\theta} = 0$$

- 19) Donc $\vec{B} = B_r(r, \cancel{\theta}, z) \vec{u}_r + B_z(r, \cancel{\theta}, z) \vec{u}_z$
- ↑
on néglige
au voisinage
de l'axe

$$\vec{B} = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(z) \vec{u}_z$$

\vec{B} est à flux conservatif

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{dB_z}{dz} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = - r \frac{dB_z(z)}{dz}$$

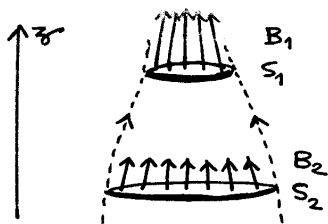
$$r B_r = - \frac{r^2}{2} \frac{dB_z(z)}{dz} + f(z)$$

$$B_r = - \frac{r}{2} \frac{dB_z(z)}{dz} + \frac{1}{r} f(z)$$

(il ne doit pas y avoir de problème pour r nul donc $f(z)$, la constante d'intégration, est nulle)

$$B_r = - \frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$$

2e) Le flux de \vec{B} est conservatif donc ici puisque



$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint B_z dS$$

↑ suppose indépendant de r

$$\Phi \approx B_{z, \text{axe}} S$$

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$B_{1, \text{axe}} S_1 = B_{2, \text{axe}} S_2$$

Le champ est donc plus intense si z augmente.
puisque les lignes se resserrent.

$$21) \quad \vec{F} = q \begin{vmatrix} \vec{v} \\ 0 \\ v_\theta \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \vec{B} \\ B_r \\ 0 \\ B_z \end{vmatrix}$$

$\vec{u}_r \quad \vec{u}_\theta \quad \vec{u}_z$

donne

$$F_z = -q v_\theta B_r \vec{u}_z$$

si $q > 0$ on a vu que $v_\theta < 0$ donc $v_\theta = -v_\perp$

si $q < 0$ $v_\theta > 0$ donc $v_\theta = +v_\perp$

finalement

$$F_z = |q| v_{\perp} B_r$$

22)

$$F_z = -|q| v_{\perp} \frac{a}{2} \frac{dB_z}{dz}$$

$$\text{or } a = \frac{m v_{\perp}}{|q| B_z}$$

$$F_z = -\frac{1}{2 B_z} \frac{dB_z}{dz} m v_{\perp}^2$$

$$\text{or } \mu = -\frac{E_{c\perp}}{B_z}$$

$$F_z = \mu \frac{dB_z}{dz}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\mu}{m} \frac{dB_z}{dz}$$

et

$$\frac{dv_z^2}{dt} = 2 v_z \frac{dv_z}{dt}$$

$$dv_z^2 = 2 \frac{\mu}{m} \frac{dB_z}{dz} v_z dz$$

$$dv_z^2 = \frac{2\mu}{m} dB_z$$

$$(dE_{c\parallel} = \mu dB_z)$$

23)

$$dE_c = dE_{c\perp} + dE_{c\parallel}$$

$$= (\mu dB_z + B_z d\mu) + \mu dB_z$$

$$= -B_z d\mu$$

or dans un champ \vec{B} , $E_c = \text{cste}$ donc :

$$\mu = \text{constante}$$

$$\text{et puisque } \mu = -\frac{q^2}{4\pi m} \phi$$

$$\phi = \text{constante}$$

La particule décrit la paroi d'un tube de champ.

24)

$$\text{Si } E_{c\perp} = E_c = E_{c\text{initial}} \text{ alors } E_{c\parallel} = 0$$

(il y aura d'ailleurs effet miroir)

$$B_{z\text{max}} = -E_c/\mu$$

Description du champ magnétique terrestre

$$1) \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{PM}\|} - \frac{1}{\|\vec{NM}\|} \right)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \|\vec{PM}\| &\approx \|\vec{OM}\| - \|\vec{OP'}\| \\ &\approx r - \frac{a}{2} \cos \theta \\ &\approx r \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \\ \frac{1}{\|\vec{PM}\|} &\approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\|\vec{PM}\|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$$

$$\frac{1}{\|\vec{NM}\|} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right)$$

$$3) \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(\frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$V = \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$4) \quad P = q a$$

$$V = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$5) \quad \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{\partial V}{r \partial \theta} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{E} = \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

6) Le pôle nord magnétique ainsi appelé parce qu'il "attire" le pôle nord des aiguilles aimantées est donc un pôle "sud" en réalité.

Le dipôle \vec{M}_T est donc tel que la flèche du vecteur pointe vers le sud géographique.

- 7) Par analogie et sans oublier le signe moins puisque l'on note $\vec{M}_T = -M_T \vec{u}_z$

$$\vec{B} = - \frac{\mu_0 M_T}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

- 8) La ligne de champ vérifie :

$$\begin{aligned} \vec{B} \wedge d\vec{l} &= \vec{0} \\ (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \wedge (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta) &= 0 \\ 2 \cos \theta r d\theta &= \sin \theta dr \end{aligned}$$

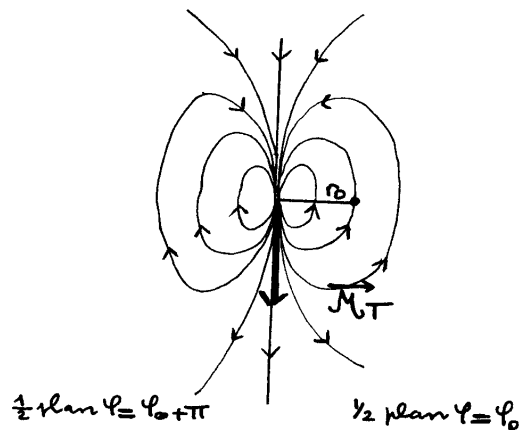
$$\frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} = \frac{dr}{r}$$

$$\ln \sin^2 \theta = \ln r + \underbrace{\text{constante}}_{-\ln r_0}$$

$$r = r_0 \sin^2 \theta$$

r_0 est la valeur de r dans le plan équatorial géomagnétique ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

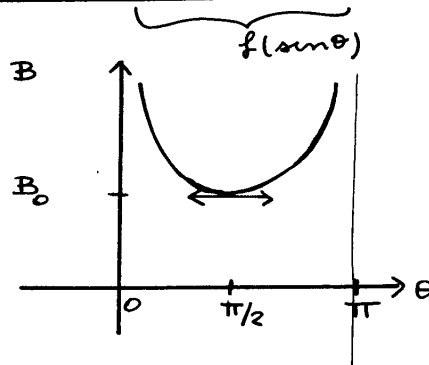
- 9) Allure des lignes de champ



$$\begin{aligned} 10) \quad \|\vec{B}\| &= \frac{\mu_0 M_T}{4\pi r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\mu_0 M_T}{4\pi r_0^3} \frac{\sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}{\sin^6 \theta} \end{aligned}$$

avec
$$B_0 = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_T}{4\pi r_0^3}$$

$$\|\vec{B}\| = B_0 \frac{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \theta}}{\sin^3 \theta}$$



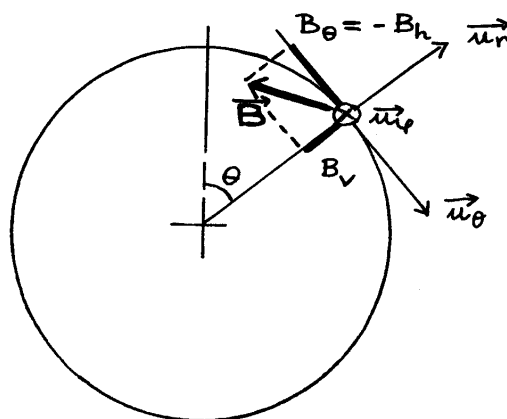
11) A.N.

$$B_{0, \text{Terre}} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_T}{4\pi R_T^3}$$

$$\mathcal{M}_T = \frac{4\pi R_T^3 B_{0, \text{Terre}}}{\mu_0}$$

$$= \frac{4\pi (6,4 \cdot 10^6)^3 \cdot 31 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-7}}$$

$$\mathcal{M}_T = 8,1 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

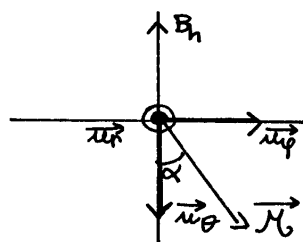


$$B_\theta < 0$$

Plan horizontal :

$(\vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$

(voir figure ci dessous)



12) Moment subi par l'aiguille aimantée :

$$\begin{aligned}
 \vec{m} &= \vec{M} \wedge \vec{B} \\
 &= \vec{M} \wedge (\vec{B}_h + \vec{B}_v) \\
 &= \underbrace{\vec{M} \wedge \vec{B}_h}_{\substack{\text{moment vertical} \\ \text{donc rotation} \\ \text{dans le plan horizontal}}} + \underbrace{\vec{M} \wedge \vec{B}_v}_{\substack{\text{moment horizontal} \\ \text{La rotation dans} \\ \text{le plan vertical est} \\ \text{impossible. un autre} \\ \text{moment annule} \\ \text{celui-ci}}}
 \end{aligned}$$

13) On ne tient compte que de $\vec{B}_h = \underbrace{B_\theta}_{<0} \vec{u}_\theta$
 $= -B_h \vec{u}_\theta$

L'énergie potentielle du dipôle \vec{M} dans \vec{B}_h est

$$\begin{aligned}
 E_p &= -\vec{M} \cdot \vec{B}_h \\
 &= -M_\theta B_\theta \\
 &= -(M \cos \alpha)(-B_h)
 \end{aligned}$$

$$E_{p(\alpha)} = M B_h \cos \alpha$$

A l'équilibre stable E_p est minimum donc

$$\alpha_{eq} = \pi$$

L'aiguille se couche sur \vec{B}_h

14) On peut trouver \vec{m} en faisant $\vec{M} \wedge \vec{B}_h$:

$$\begin{array}{c} \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ M \cos \alpha & -B_h \\ M \sin \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

→ ou en faisant : $m_r d\alpha = - \frac{dE_p(\alpha)}{d\alpha}$

on trouve :

$$m_r = M B_h \sin \alpha$$

Equation du mouvement (rotation autour d'un axe fixe)

$$\tau_r = J \frac{d\omega_r}{dt}$$

$$M B_h \sin \alpha = J \ddot{\alpha}$$

15) Changement de variable: on pose $\alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon$
 $= \pi + \varepsilon$

$$-M B_h \sin \varepsilon = J \ddot{\varepsilon}$$

De plus, on suppose "oscillations" petites"

$$-M B_h \varepsilon = J \ddot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{M B_h}{J} \varepsilon = 0$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M B_h}{J}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M B_h}}$$

16)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M(B_e + B_h)}}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M(B_e - B_h)}}$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{1 - B_h/B_e}{1 + B_h/B_e}$$

d'où

$$\left(\frac{B_h}{B_e}\right) = \frac{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$$

17) A.N.

$$B_h = 100 \mu T \frac{1 - (0,78)^2}{1 + (0,78)^2}$$

$$B_h = 24 \mu T$$

or

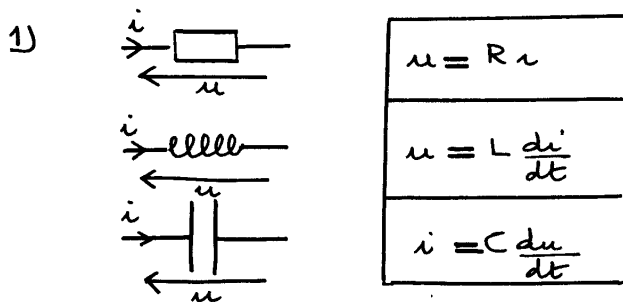
$$B_h = -B_\theta$$

$$= \frac{\mu_0 M_T}{4\pi R_T^3} \sin \theta$$

d'où

$$M_T = 8,3 \cdot 10^{22} \text{ A m}^2$$

Génération spontanée du champ magnétique terrestre



2)
$$e = R i + L \frac{di}{dt} + u_c$$

on dérive / temps

$$\boxed{\frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C}}$$

3)
$$\boxed{e = R i + L \frac{di}{dt}}$$

4)
$$e i dt = R i^2 dt + L \frac{di}{dt} i dt$$

$$\boxed{e i dt = R i^2 dt + d\left(\frac{1}{2} L i^2\right)}$$

L'énergie fournie par le générateur

- est stockée sous forme d'énergie magnétique
- est convertie en énergie thermique par effet joule.

5)
$$e = \int_{OA} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{r=0}^{r=a} (r \omega \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_z) \cdot dr \vec{u}_r$$

$$= \int_{r=0}^a B \omega r dr$$

$$\boxed{\frac{e}{(t)} = \frac{B \omega a^2}{(t) (t) 2}}$$

en posant : $B(t) \pi a^2 = M i(t)$

$$e(t) = \frac{M}{2\pi} i(t) \omega(t)$$

$$\begin{aligned} 6) \quad d\vec{F}_L &= i d\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= i dr \vec{u}_r \wedge B \vec{u}_z \\ &= -i B dr \vec{u}_\theta \\ \vec{M}_{L(0)} &= \int_{r=0}^{r=a} r \vec{u}_r \wedge -i B dr \vec{u}_\theta \\ &= \int_{r=0}^a -i B r dr \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\vec{M}_{L(0)} = -i(t) B(t) \frac{a^2}{2} \vec{u}_z$$

ou :

$$M_{L/Oz}(t) = - \frac{M i^2(t)}{2\pi}$$

remarque :

Le terme de champ électrique en $-\frac{\delta \vec{A}}{\delta t}$ est selon \vec{u}_θ donc sa circulation sur la tige est nulle. Le problème est un problème type induction de Lorentz et le principe de conservation électromécanique est vérifié (même si $\vec{B} = \vec{B}(t)$)

$$e i + M_{Oz} \omega = 0$$

7) théorème du moment cinétique pour la rotation autour d'un axe fixe :

$$I \dot{\omega}(t) - \frac{M i^2(t)}{2\pi} = J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (1)$$

Loi du circuit électrique :

$$\frac{M i(t) \omega(t)}{2\pi} = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (2)$$

8) Pour un état stationnaire

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= 0 \\ \frac{di}{dt} &= 0\end{aligned}$$

donc

$$\Gamma - f\omega_s - \frac{M\omega_s^2}{2\pi} = 0 \quad (1')$$

$$i_s \left(\frac{M\omega_s}{2\pi} - R \right) = 0 \quad (2')$$

9)

$$\omega_s = 0$$

donc (2') est vérifié et il faut choisir

$$\omega_s = \frac{\Gamma}{f}$$

pour que (1') soit vérifiée

Cet état n'a pas d'intérêt (cf $\omega_s = 0$) pour expliquer \vec{B}_T
(pas de B créé par i nul)

10)

$$\omega = \omega_s + \varepsilon$$

$$\omega = \omega_s + \eta$$

On reporte dans (1) et (2)

$$(1) \quad \Gamma - f(\omega_s + \varepsilon) - \frac{M}{2\pi} (\omega_s + \eta)^2 = J \frac{d}{dt}(\omega_s + \varepsilon)$$

dérivent : (premier ordre)

$$(1'') \quad -f\varepsilon - \frac{M}{2\pi} (2\omega_s\eta) = J \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$(2) \quad \frac{M}{2\pi} (\omega_s + \eta)(\omega_s + \varepsilon) = R(\omega_s + \eta) + L \frac{d}{dt}(\omega_s + \eta)$$

dérivent : (premier ordre)

$$(2'') \quad \frac{M}{2\pi} (\omega_s \varepsilon + \eta \omega_s) = R\eta + L \frac{d\eta}{dt}$$

ICV $\omega_s = \frac{\Gamma}{f}$ et $i_s = 0$, les deux équations

sont :

$$-f\varepsilon = J \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\frac{M}{2\pi} \frac{\Gamma}{f} \eta = R\eta + L \frac{d\eta}{dt}$$

$$11) \rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{\tau} = 0 \text{ avec } \tau = \frac{J}{f}$$

$$\varepsilon = A e^{-t/\tau}$$

donc ε revient à zéro (stabilité vis à vis de la perturbation)

$$\rightarrow \frac{d\eta}{dt} + \eta \left(R - \frac{M \Gamma}{2\pi f} \right) = 0$$

on peut poser $\frac{1}{\tau'} = R - \frac{M \Gamma}{2\pi f}$

$$\eta = B e^{-t/\tau'}$$

Si $\tau' > 0$, η revient à zéro.

Cet état est stable si

$$R > \frac{M \Gamma}{2\pi f}$$

$$\Gamma < \frac{2\pi f R}{M} = \Gamma_m$$

12) On a $\Gamma > \Gamma_m$ dont l'état $\omega_s = 0$ n'est pas stable.
Si non, si au cours de l'évolution on était passé par cet état, il était stable et il n'y aurait donc pas de champ magnétique terrestre

13) Autres états stationnaires :

$$\omega_s = \frac{2\pi R}{M} \text{ cf (2')}$$

on reporte dans (1')

$$\Gamma - f \frac{2\pi R}{M} = \frac{M \omega_s^2}{2\pi}$$

$$\omega_s^2 = \frac{2\pi}{M} \left(\Gamma - \frac{2\pi f R}{M} \right)$$

(cf on a supposé $\Gamma > \Gamma_m$)

deux possibilités :

$$\omega_s, \omega_s = +\sqrt{\quad}$$

$$\omega_s, \omega_s = -\sqrt{\quad}$$

14) Il suffit d'étudier un seul cas.

Les équations sont invariantes si on fait le changement
 $(\omega, i) \rightarrow (\omega, -i)$

On remarquera que les deux états sont :

- identiques du point de vue mécanique
 (rotation de la terre inchangée)
- symétriques du point de vue
 $i, B \rightarrow -i, -B$
 (champ magnétique inversé)

15) En tenant compte de $\omega_s = \frac{2\pi R}{M}$, les équations deviennent

$$\begin{array}{lcl} (1'') & -f E(t) - \frac{M \omega_s}{\pi} \eta(t) & = J \frac{dE(t)}{dt} \\ (2'') & \frac{M \omega_s}{2\pi} E(t) & = L \frac{d\eta(t)}{dt} \end{array}$$

avec $\omega_s = \sqrt{\frac{2\pi}{M} \left(J^2 - \frac{2\pi f R}{M} \right)}$

Au voisinage du point critique,
 le système linéarisé donne donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f}{J} & -\frac{M \omega_s}{\pi J} \\ \frac{M \omega_s}{2\pi L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \eta \end{pmatrix}$$

16) On cherche des solutions en $\exp(qt)$

donc $\frac{dE}{dt} = qE$ et $\frac{d\eta}{dt} = q\eta$.

Il faut donc résoudre (cf recherche de valeurs propres)

$$\begin{pmatrix} -\frac{f}{J} - q & -\frac{M \omega_s}{\pi J} \\ \frac{M \omega_s}{2\pi L} & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ \eta \end{pmatrix} = 0$$

d'où l'équation caractéristique (qui annule le déterminant du système)

$$\left(\frac{F}{J} + q\right) q + \frac{M^2 \omega_s^2}{2\pi^2 L J} = 0$$

$$\boxed{q^2 + \frac{F}{J} q + \frac{1}{L J} \left(\frac{M \Gamma}{\pi} - 2FR \right) = 0}$$

> 0 car $\Gamma > \Gamma_m$

La somme des racines = $-\frac{F}{J}$ (trace de la matrice)
est négative.

Le produit des racines = $\frac{1}{L J} \left(\frac{M \Gamma}{\pi} - 2FR \right)$ (déterminant de la matrice) est positif.

17) si $\Delta > 0$ deux racines réelles négatives
donc solutions pour ξ et η de la forme
 $A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t}$
qui tend vers 0 si $t \rightarrow \infty$
L'état est stable.

si $\Delta = 0$ une racine double négative $q = -\frac{F}{2J}$
donc solution avec $e^{-\frac{F}{2J} t}$
L'état est stable

si $\Delta < 0$ deux racines complexes conjuguées de partie réelle négative
solution en $A e^{-\frac{F}{2J} t} \cos(\sqrt{\Delta} t + \varphi)$
qui tend vers 0 si $t \rightarrow \infty$
L'état est stable.

18 Le modèle conduit à deux états où les champs magnétiques sont de sens contraire. Mais ces états étant stables, le modèle n'explique pas les inversions spontanées et chaotiques de B terrestre.