*Les vecteurs sont désignés selon $\overrightarrow{X}$, $X$ désignant la norme de $\overrightarrow{X}$. Pour tous les satellites terrestres, on prendra le rayon de la Terre $R_T = 6{,}4\cdot10^3\,\mathrm{km}$, l'intensité du champ de gravitation au niveau du sol proche de $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et la période de rotation de la Terre égale à $T_0 = 24\,\mathrm{h}$.*

**Exercices d'application :** Mise en orbite, troisième loi de Kepler, modification d'orbites, deuxième vitesse cosmique, oscillateur harmonique spatial

**Culture en sciences physiques :** Mise en orbite, modification d'orbites, troisième loi de Kepler, deuxième vitesse cosmique, désorbitation, interaction coulombienne

**Corrigés en TD :** Mise en orbite, collision, modification d'orbites, oscillateur harmonique spatial, interaction coulombienne

## Mouvements circulaires

### Exercice 1 : Mise en orbite

On lance un satellite de masse $m$ d'une base terrestre située à la latitude $\lambda$ (on rappelle que la latitude est nulle à l'équateur et vaut 90° aux pôles).

1. Faire un schéma et déterminer sa vitesse dans le référentiel géocentrique avant le lancement.
2. En déduire l'énergie à lui communiquer pour le placer sur une orbite de rayon $R$ en fonction de $g$, $R_T$, $R$, $T$ $m$ et $\lambda$.
3. Justifier ainsi la localisation des centres de lancement proches de l'équateur.

### Exercice 2 : Troisième loi de Kepler

On précisera pour chaque situation étudiée le référentiel considéré galiléen dans lequel on étudie les mouvements. Tous les satellites considérés parcourent leurs orbites d'ouest en est et on considérera pour simplifier que celles-ci sont équatoriales (*ie* dans le plan de l'équateur) et circulaires. On recherchera les valeurs des paramètres orbitaux nécessaires.

1. (a) Combien de temps s'écoule-t-il entre le lever dans le ciel de la station spatiale internationale et son coucher. S'effectuent-ils à l'ouest ou à l'est ?
   (b) Mêmes questions pour le satellite « Vela 1A » dont l'orbite a pour altitude $100\cdot10^3\,\mathrm{km}$.
   (c) Quelle devrait être l'orbite d'un satellite pour qu'il se lève à l'est et se couche à l'ouest 48 h plus tard.
2. L'opposition entre deux planètes orbitant un même astre est la configuration où les trois sont alignés, une planète étant entre l'autre et le soleil.
   (a) La dernière opposition entre Mars et la Terre était en octobre 2020. Déterminer quand se produira la prochaine opposition.
   (b) On souhaite envoyer depuis la Terre une sonde sur Mars en lui faisant parcourir une orbite képlerienne. Déterminer le grand-axe pour que l'énergie mécanique de la sonde soit la plus faible possible. Combien de temps durera le voyage entre la Terre et Mars

### Exercice 3 : Désorbitation

On étudie l'effet, sur la trajectoire de la station spatiale internationale de masse $m$, des frottements de l'atmosphère ténue qui demeure à son altitude. On considère qu'initialement l'orbite est circulaire d'altitude $h_{ISS}$.

1. Justifier qualitativement que si les frottements sont suffisamment faibles, on pourra considérer que la station décrit une orbite circulaire de rayon $R$.
2. Montrer, en étudiant l'énergie mécanique, que le rayon $R$ décroît lentement. Commenter le signe des variations de l'énergie potentielle $\mathscr{E}_{\mathrm{pot}}$ et de l'énergie cinétique $\mathscr{E}_{\mathrm{c}}$. En quoi ce dernier résultat peut-il être surprenant ?
3. La force de frottement $\overrightarrow{F}$ créée par l'atmosphère est d'intensité proportionnelle au carré de la vitesse $v$ et s'exprime selon $\overrightarrow{F} = -\beta v\overrightarrow{v}$, avec $\beta$ une constante positive. Déterminer, toujours sous l'hypothèse d'une trajectoire quasi circulaire, la variation d'énergie mécanique et la variation d'altitude à l'issue d'une révolution. Commenter la validité de l'hypothèse précédente.
4. (a) Pour éviter cette diminution, on peut utiliser les moteurs de la station. Calculer le travail qu'ils doivent fournir pendant une révolution pour maintenir l'altitude constante. Dans quel sens et dans quelle direction doit être dirigée la force qu'ils exercent ?
   (b) Le carburant est caractérisé par son pouvoir calorifique massique $e$, défini comme l'énergie libérée par la combustion d'une unité de masse. Calculer la masse de carburant brûlée par les moteurs par période de révolution, en supposant que la moitié de l'énergie thermique libérée peut être convertie en énergie mécanique.

**Données :** La constante $\beta$ est de l'ordre de $1\cdot10^{-8}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$, $m_{ISS} = 4{,}0\cdot10^5\,\mathrm{kg}$, $h_{ISS} = 4{,}0\cdot10^2\,\mathrm{km}$, $e = 2{,}7\cdot10^7\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$.

## Autres mouvements kepleriens

### Exercice 4 : Modifications d'orbites

On considère un satellite $M$ de masse $m$ en orbite géostationnaire, dont on note $R_0$ le rayon.

1. Rappeler l'expression de son énergie mécanique, notée $\mathscr{E}_{\mathrm{m}0}$, et du module de sa vitesse, noté $v_0$, ainsi que la période de l'orbite.
2. L'utilisation de ses moteurs permet de faire varier quasi instantanément la vitesse du satellite.
   (a) On souhaite rendre son orbite elliptique, avec un demi-grand axe égal à $3R_0/4$. Représenter l'allure de la nouvelle trajectoire.
   (b) Établir l'expression de l'énergie mécanique sur la nouvelle trajectoire et en déduire le travail fourni par les moteurs.
   (c) Déterminer également la période de la nouvelle trajectoire en utilisant la troisième loi de Kepler.
3. Avec un travail plus important des moteurs on annule quasiment la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique, alors qu'il était en orbite géostationnaire.
   (a) Décrire l'allure de la trajectoire.

(b) Déterminer la nouvelle valeur de son énergie mécanique. En déduire le demi-grand axe de la nouvelle trajectoire

(c) En déduire une estimation de la durée au bout de laquelle le satellite tombera sur la Terre, en utilisant de nouveau la troisième loi de Kepler.

## Exercice 5 : Deuxième vitesse cosmique

On étudie quelques conséquences des valeurs de la deuxième vitesse cosmique, notée $v_2$, relative à l'attraction gravitationnelle de différents astres.

1. Rappeler l'expression de la deuxième vitesse cosmique pour un point matériel situé à la surface d'un astre de masse $m$ et de rayon $R$.

2. Calculer sa valeur pour les attractions du Soleil, de la Terre, de la Lune et du satellite de Mars Phobos, de masse $m_{\mathrm{p}} = 1{,}8 \cdot 10^{-9} m_T$ et de rayon $R_p = 1{,}7 \cdot 10^{-3} R_T$. On les considérera tous à symétrie sphérique.

   (a) Un spationaute peut-il échapper, en courant ou en sautant, à l'attraction de la Terre, de la Lune, de Phobos ?

   (b) Justifier que les moteurs de retour (trajet de la Lune vers la Terre) des missions Apollo étaient plus petits que ceux du trajet aller.

   (c) Dans un gaz de molécules de masse molaire $M$ (exprimée en $\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$) à la température $T$ (exprimée en K), l'énergie cinétique d'agitation moyenne des particules correspond à une vitesse $v = \sqrt{3RT/M}$. Calculer la vitesse $v_{\mathrm{N_2}}$ pour le diazote sur la Terre ($T = 3 \cdot 10^2\,\mathrm{K}$), sur la Lune ($T_{\max} = 4 \cdot 10^2\,\mathrm{K}$), sur Phobos ($T = 2 \cdot 10^2\,\mathrm{K}$). On a donné des ordres de grandeur des températures de surface. Que peut-on en conclure quant à la présence d'une atmosphère sur ces astres ?

   (d) On imagine que la masse de la Terre est concentrée dans une sphère de rayon $R_n < R_T$. Calculer la valeur de $R_n$ (dit rayon de Schwarzschild) pour laquelle la vitesse de libération est celle de la lumière. La densité de l'astre ainsi constitué est alors celle d'un trou noir.

## Exercice 6 : Interaction coulombienne

1. On étudie le mouvement classique de l'électron d'un atome d'hydrogène autour du noyau considéré immobile.

   (a) Déterminer le rayon et le moment cinétique pour une orbite circulaire d'énergie mécanique $-13{,}6\,\mathrm{eV}$. On note respectivement $a_B$ et $\sigma_B$ leurs valeurs.

   (b) Exprimer de même l'énergie et le rayon d'orbites circulaires sur lesquelles le moment cinétique vaut $\sigma_n = n\sigma_B$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$.

2. On étudie le mouvement d'une particule $\alpha$ (noyau d'Helium IV) lancée depuis l'infini vers un noyau atomique de numéro atomique $Z$ considéré ponctuel. On note $v_\infty$ sa vitesse quand la particule $\alpha$ est à l'infini du noyau et $b$ son paramètre d'impact. On utilisera les valeurs des constantes et grandeurs nécessaires.

   (a) Établir l'expression de la distance minimale à laquelle elle s'approchera. Calculer sa valeur pour un paramètre d'impact nul, pour une vitesse $v_\infty = 1{,}5 \cdot 10^7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et pour un noyau d'or $Z = 79$ et comparer à la taille d'un atome.

   (b) Dans le modèle de Thomson de l'atome, les charges positives du noyau occupent tout le volume de l'atome. Par conséquent, si on note $R$ son rayon la norme de la force électrostatique qu'il exerce est toujours inférieure à sa valeur à sa « surface », *ie* à la distance $R$ de son centre.

      - Tracer l'allure de la trajectoire pour un paramètre d'impact non nul, dans le cas d'une faible déviation et établir l'expression de la vitesse minimale au cours du mouvement, notée $v_{\min}$. On utilisera le paramètre sans dimension : $\beta = Ze^2/(\pi\varepsilon_0 m v_\infty^2 b)$.
      - Justifier que la variation de la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ à l'issue de l'interaction s'écrit :

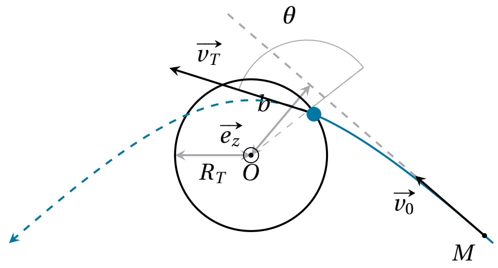
$$\Delta\overrightarrow{p} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}t,$$

        avec $\overrightarrow{F}$ la force électrostatique subie par la particule $\alpha$.
      - En majorant la durée d'interaction par $2R/v_{\min}$ et en majorant la norme de la force, obtenir une borne supérieure sur $\left\|\Delta\overrightarrow{p}\right\|$ puis une borne supérieure sur l'angle de déviation dont on calculera la valeur pour les paramètres précédents et pour un rayon $R = 1{,}79\,\text{Å}$ pour un noyau d'or.

Historiquement, l'expérience de l'équipe de E. Rutherford en 1911 a observé des déviations supérieures à 90°, invalidant ainsi le modèle de Thomson et conduisant au modèle actuel dans lequel le noyau est de taille très inférieure à l'atome.

## Exercice 7 : Collision

On étudie le mouvement d'un astéroïde $M$ se rapprochant de la Terre de centre $O$, en provenant de l'infini. On note $r$ la distance $OM$, qui tend initialement vers l'infini.
L'étude est effectuée dans le référentiel géocentrique.




1. Quelle est la nature du mouvement de $M$ quand $r$ tend vers l'infini ?

2. On note $\overrightarrow{v_0}$ sa vitesse à l'infini. Exprimer son moment cinétique par rapport à $O$, noté $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ quand il est à l'infini en fonction des paramètres du schéma. Quelle est l'évolution de $\overrightarrow{\sigma_{/O}}(M)$ ? La distance $b$ est nommée « paramètre d'impact ».

3. (a) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle effective de l'astéroïde et tracer son allure en fonction de $r$. Représenter sur cette courbe la distance minimale $r_{\min}$ de $O$ à laquelle passera $M$.

   (b) Quelle est l'énergie mécanique de l'astéroïde quand il est à l'infini ? En déduire, par conservation de l'énergie mécanique, l'expression de $r_{\min}$.

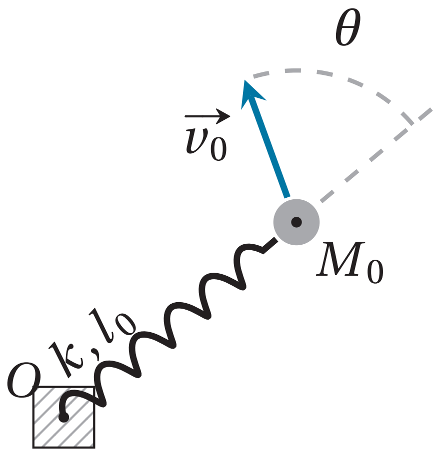
   (c) En déduire à quelle condition l'astéroïde évitera la Terre, de rayon $R_T$. Exprimer en particulier la vitesse minimale notée $v_{\min}(b)$ pour une valeur de $b$ donnée. On l'exprimera en fonction de la deuxième vitesse cosmique relative à l'attraction gravitationnelle de la Terre, notée $v_2$.

   (d) Calculer $v_{\min}/v_2$ pour $b = 60R_T$, correspondant à l'orbite de la Lune.

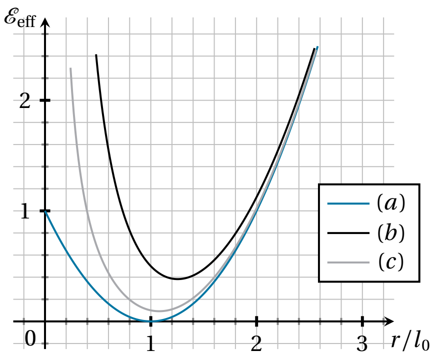
4. On considère maintenant que $v_0 = v_{\min}(b)/\sqrt{2}$.

   (a) Utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour déterminer le module $v_T$ de la vitesse de $M$ quand il atteint la Terre. On l'exprimera de nouveau en fonction de $v_2$, $b$ et $R_T$.




(a)




(b)

(b) Utiliser la conservation du moment cinétique pour déterminer l'angle $\theta$ du vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ avec la normale à la surface de la Terre au moment de l'impact.

(c) Calculer ces grandeurs pour $b = 60R_T$.

## Force centrale conservative quelconque

### Exercice 8 : Oscillateur harmonique spatial

On considère un point matériel $M$ en mouvement sans frottement sur un plan horizontal. Il est lié par un ressort de raideur $k$ et de longueur à vide $l_0$ à un point $O$ fixe du référentiel. On note $r$ la distance $OM$ (Figure 1a).

1. Justifier que le mouvement est conservatif et que l'on peut l'étudier à l'aide d'une énergie potentielle effective fonction de $r$.

2. À l'instant initial, le point $M$ se trouve à la distance $r_0 = 0{,}8l_0$, animé d'une vitesse de module $v_0$. La Figure 1b représente les courbes correspondant à différentes valeurs de l'angle $\theta_0$ entre le vecteur vitesse initial et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ initial, en gardant $r_0$ et $v_0$ fixés.

   (a) Quelle est la courbe qui peut correspondre à $\theta_0 = 0$ ? Quelle est celle qui peut correspondre à $\theta_0 = \pi/2$ ?

   (b) Que peut-on dire de $\dot{r}$ quand les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux ? En déduire dans le cas $\theta_0 = \pi/2$ les valeurs minimale et maximale de $r$ atteintes au cours du mouvement ainsi que la valeur de l'énergie mécanique.

   (c) Même question pour la courbe $(c)$.

   (d) Sur cette dernière courbe, décrire le mouvement selon que $\theta_0 > \pi/2$ ou $\theta_0 < \pi/2$.

### Exercice 9 : Période d'un mouvement lié à l'aide de $\mathscr{E}_{\text{eff}}$

On considère le mouvement d'un point matériel de position $M$ soumis dans un référentiel galiléen à une force centrale de centre $O$ conservative à laquelle est associée l'énergie potentielle $\mathscr{E}_{\text{pot}}(r)$, avec $r = OM$. On cherche dans cet exercice à obtenir une expression formelle de la période d'un mouvement lié.

1. (a) Rappeler la définition de $\mathscr{E}_{\text{eff}}(r)$. En quoi n'est-elle pas une véritable énergie potentielle ?

   (b) Comment définir les zones de l'espace accessibles pour un mouvement de moment cinétique en $O$, noté $\sigma_c$, donné ? Utiliser les intégrales premières du mouvement d'un point matériel de masse $m$ soumis à une force centrale conservative pour exprimer $\dot{r}^2$ en fonction de $r$, de l'énergie mécanique $\mathscr{E}_{\text{m}}$ et de la masse $m$ du point matériel.

2. (a) À l'instant $t = 0$ le P.M. se trouve à la distance $r_0$ du centre $O$. Établir une relation de la forme $t = G(r)$ en notant $r$ la distance à un instant ultérieur $t$. Quelle condition doivent vérifier les variations de $r$ pour que cette relation soit valable ?

   (b) À l'instant $t = 0$, la position du P.M. était également repérée par l'angle $\theta_0$. Déterminer la relation entre l'angle $\theta$ à un instant ultérieur en fonction de la distance $r$ de la forme : $\theta - \theta_0 = H(r)$.

   (c) Dans le cas où le mouvement est contraint entre deux cercles de rayon $r_m$ et $r_M > r_m$, à quelle condition la trajectoire est-elle fermée ? Donner alors l'expression de la période du mouvement.