Planche n° 42. Probabilités. Corrigé

Exercice n° 1

Un univers Ω est dans les deux cas $\Omega = \{(F, F), (F, G), (G, F), (GG)\}$, le premier des deux éléments d'un couple étant le premier enfant apparu c'est-à-dire l'ainé(e). Les événements élémentaires sont équiprobables.

• **Famille Jones.** L'événement « l'ainée est une fille » est l'événement $A = \{(F, F), (F, G)\}$ avec $p(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

L'événement « les deux enfants sont des filles » est l'événement $B = \{(F, F)\}$ avec $p(B) = \dfrac{1}{4}$. La probabilité demandée est

$$p_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

• **Famille Smith**. L'événement « l'un des deux enfants est un garçon » est l'événement $C = \{(G, G), (G, F), (F, G)\}$ avec $p(C) = \dfrac{3}{4}$.

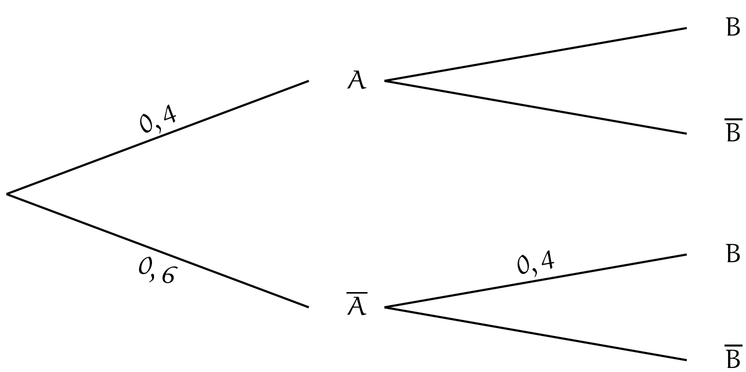
L'événement « les deux enfants sont des garçons » est l'événement $D = \{(G, G)\}$ avec $p(D) = \dfrac{1}{4}$. La probabilité demandée est

$$p_C(D) = \frac{p(D \cap C)}{p(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Dit autrement, si on croise dans la rue un couple avec un enfant qui est un garçon et que l'on sait que ce couple a deux enfants, il y a une chance sur trois que l'autre enfant soit un garçon.

Exercice n° 2

Représentons la situation par un arbre de probabilités.



• $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B)$ et donc $0,6 = 0,4 \times p_A(B) + 0,6 \times 0,4$ puis

$$p_A(B) = \frac{0,6 - 0,6 \times 0,4}{0,4} = 0,9.$$

• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$ puis

$$p(A \cup B) = P(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,4 + 0,6 - 0,36 = 0,64.$$

• $p_{\overline{B}}(A) = \dfrac{p(A) \times p_A(\overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{0,4(1 - 0,9)}{1 - 0,6} = 0,1.$

Exercice n° 3

1) L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments. Les événements élémentaires sont équiprobables.

$$\text{card}(\Omega) = \binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 8 \times 31 \times 29 \times 28 = 201\ 376.$$

Il y a ainsi $201\ 376$ cas possibles. Pour les cas favorables, on tire 3 cartes parmi les 8 cœurs et 2 cartes parmi les 24 qui ne sont pas des cœurs. Au total, il y a

$$\binom{8}{3} \times \binom{24}{2} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times \frac{24 \times 23}{2} = 56 \times 12 \times 23 = 15\ 456.$$

Il y a $15\,456$ mains de 5 cartes contenant exactement 3 cœurs. La probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs est donc

$$p = \frac{15\,456}{201\,376} = \frac{56 \times 12 \times 23}{8 \times 31 \times 29 \times 28} = \frac{3 \times 23}{31 \times 29} = \frac{69}{899} = 0,076\ldots$$

2) L'univers Ω est ici l'ensemble des tirages successifs sans remise de 5 éléments dans un ensemble à 32 éléments. Les événements élémentaires sont équiprobables.

$$\text{card}(\Omega) = 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 = 24\,165\,120.$$

Il y a ainsi $24\,165\,120$ cas possibles. Pour les cas favorables, on choisit d'abord l'emplacement des cœurs. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ emplacements des 3 cœurs. Pour chacun de ces emplacements, il y a $8 \times 7 \times 6$ choix des cœurs et 24×23 choix des cartes qui ne sont pas des cœurs. Le nombre de cas favorables est donc

$$\binom{5}{3} \times (8 \times 7 \times 6) \times (24 \times 23) = 1\,854\,720.$$

Il y a $1\,854\,720$ tirages successifs sans remise de 5 cartes contenant exactement 3 cœurs. La probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs est donc

$$p = \frac{1\,854\,720}{24\,165\,120} = \frac{10 \times (8 \times 7 \times 6) \times (24 \times 23)}{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28} = \frac{3 \times 23}{31 \times 29} = \frac{69}{899} = 0,076\ldots$$

On note que, bien sûr, la probabilité ne change pas.

3) L'univers Ω est ici l'ensemble des tirages successifs avec remise de 5 éléments dans un ensemble à 32 éléments. Les événements élémentaires sont équiprobables.

$$\text{card}(\Omega) = 32^5 = 33\,554\,432.$$

Il y a ainsi $33\,554\,432$ cas possibles. Pour les cas favorables, on choisit d'abord l'emplacement des cœurs. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ emplacements des 3 cœurs. Pour chacun des ces emplacements, il y a 8^3 choix des cœurs et 24^2 choix des cartes qui ne sont pas des cœurs. Le nombre de cas favorables est donc

$$\binom{5}{3} \times 8^3 \times 24^2 = 2\,949\,120.$$

Il y a $2\,949\,120$ tirages successifs avec remise de 5 cartes contenant exactement 3 cœurs. La probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs est donc

$$p = \frac{2\,949\,120}{33\,554\,432} = 0,087\ldots$$

On note que la situation du 3) est en fait un schéma de Bernoulli : $P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{8}{32}\right)^3 \left(\frac{24}{32}\right)^2 = \ldots$.

Exercice n° 4

Pour avoir les idées claires, on différencient les boules de même couleur en écrivant des numéros sur ces boules, ce qui ne change rien aux probabilités à calculer. Les sept boules de l'urne sont alors B1, B2, B3, B4, N1, N2 et N3.
On peut prendre pour univers Ω l'ensemble des tirages successifs sans remise de 3 éléments dans un ensemble à 7 éléments. Les événements élémentaires sont équiprobables.

$\text{card}(\Omega) = A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$. Pour les cas favorables, il y a $4 \times 3 = 12$ tirages des deux premières boules tels que ces deux premières boules soient blanches et pour chacun de ces tirages, il y a 3 possibilités que la troisième boule soit noire. Au total, $4 \times 3 \times 3 = 36$ cas favorables. La probabilité demandée est

$$\frac{4 \times 3 \times 3}{7 \times 6 \times 5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35} = 0,17\ldots$$

Exercice n° 5

La probabilité de ne rien gagner est $p_n = \dfrac{\binom{30-n}{2}}{\binom{30}{2}} = \dfrac{(30-n)(29-n)}{30 \times 29} = \dfrac{n^2 - 59n + 870}{870}$.

$$1-p_n \geqslant 0,9 \Leftrightarrow \frac{n^2-59n+870}{870} \leqslant 0,1 \Leftrightarrow n^2-59n+783 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{59-\sqrt{349}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{59+\sqrt{349}}{2}$$
$$\Leftrightarrow 20,1\ldots \leqslant n \leqslant 38,8\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 21.$$

A partir de 21 billets gagnants, on a au moins 9 chances sur 10 de gagner.

Exercice n° 6

Les résultats de l'expérience sont des couples où la première composante est le numéro obtenu sur le dé noir et la deuxième composante est le numéro obtenu sur le dé blanc. On peut donc prendre $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ puis $\text{card}(\Omega) = 36$.

• $p(A) = \frac{3\times 6}{6\times 6} = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{6\times 3}{6\times 6} = \frac{1}{2}$ et $p(C) = \frac{6\times 3}{6\times 6} = \frac{1}{2}$.

• $p(A\cap B) = \frac{3\times 3}{6\times 6} = \frac{1}{4} = p(A)\times p(B)$, $p(A\cap C) = \frac{3\times 3}{6\times 6} = \frac{1}{4} = p(A)\times p(C)$ et $p(B\cap C) = \frac{3\times 3}{6\times 6} = \frac{1}{4} = p(B)\times p(C)$.
Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

• $A\cap B\cap C = \varnothing$ et donc $p(A\cap B\cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = p(A)\times p(B)\times p(C)$. A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice n° 7

Ω est l'ensemble des permutations de l'ensemble des entiers de 1 à $2n$. $\text{card}(\Omega) = (2n)!$ et les événements élémentaires sont équiprobables.
Pour les cas favorables, il y a $n!$ possibilités pour les n premiers cartons et pour chacune de ces possibilités, il y a $n!$ possibilités pour les n derniers. Il y a donc $n!\times n! = n!^2$ cas favorables. La probabilité demandée est

$$p = \frac{n!\times n!}{(2n)!} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

Exercice n° 8

1) $p = \dfrac{\binom{2}{2}\times\binom{30}{1}}{\binom{32}{3}} = \dfrac{30}{32\times 31\times 5} = \dfrac{3}{16\times 31} = \dfrac{3}{496} = 0,006\ldots$

2) Avec 4 cartes, $p = \dfrac{\binom{2}{2}\times\binom{30}{2}}{\binom{32}{4}} = \dfrac{\dfrac{30\times 29}{2}}{\dfrac{32\times 31\times 30\times 29}{4\times 3\times 2}} = \dfrac{4\times 3}{32\times 31} = \dfrac{3}{8\times 31} = \dfrac{3}{248} = 0,012\ldots$

Avec 5 cartes, $p = \dfrac{\binom{2}{2}\times\binom{30}{3}}{\binom{32}{5}} = \dfrac{\dfrac{30\times 29\times 28}{3\times 2}}{\dfrac{32\times 31\times 30\times 29\times 28}{5\times 4\times 3\times 2}} = \dfrac{5\times 4}{32\times 31} = \dfrac{5}{8\times 31} = \dfrac{5}{248} = 0,020\ldots$

3) Avec n cartes, $3 \leqslant n \leqslant 32$, $p_n = \dfrac{\binom{2}{2}\times\binom{30}{n-2}}{\binom{32}{n}} = \dfrac{\dfrac{30!}{(n-2)!(32-n)!}}{\dfrac{32!}{n!(32-n)!}} = \dfrac{n(n-1)}{32\times 31}$ puis

$$p_n \geqslant 0,5 \Leftrightarrow n(n-1) \geqslant 496 \Leftrightarrow n^2-n-496 \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1+\sqrt{1985}}{2} \Leftrightarrow n \geqslant 22,7\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 23.$$

A partir de 23 cartes tirées, on a au moins une chance sur deux de se rendre compte de la supercherie.

Exercice n° 9

1) a) Quand $n = 0$, la particule est initialement en 0 et s'arrête donc immédiatement en 0 de manière certaine. Donc $q_0 = 1$. Quand $n = N$, la particule s'arrête immédiatement en N de manière certaine et donc ne s'arrête pas en 0 de manière certaine. Donc $q_N = 0$.

b) Si on note A_n l'événement « la particule est en n et s'arrête en 0 ». A_n est la réunion disjointe des événements « la particule va en $n+1$ et s'arrête en 0 » et de l'événement « la particule va en $n-1$ et s'arrête en 0 » de probabilités respectives $p\times q_{n+1}$ (produit de la probabilité d'aller vers la droite et donc d'arriver en $n+1$ par la probabilité de s'arrêter en 0 sachant qu'on est en $n+1$) et $q\times q_{n-1}$. Donc, $q_n = p\times q_{n+1} + q\times q_{n-1}$.

c) Pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, on a $pq_{n+1} - q_n + qq_{n-1} = 0$. L'équation caractéristique associée est $pz^2 - z + (1-p) = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2$.

1er cas. Si $p \neq \frac{1}{2}$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes à savoir $\frac{1 \pm |2p-1|}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}$ ou encore 1 et $\frac{1}{p} - 1$. On sait qu'il existe λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $q_n = \lambda + \mu\left(\frac{1}{p} - 1\right)^n = \lambda + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^n$.

Les conditions $q_0 = 1$ et $q_N = 0$ fournissent $\left\{\begin{array}{l}\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^N = 0\end{array}\right.$ et donc $\lambda = -\frac{q^N}{p^N - q^N}$ et $\mu = \frac{p^N}{p^N - q^N}$ puis

$$q_n = -\frac{q^N}{p^N - q^N} + \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

2ème cas. Si $p = \frac{1}{2}$, l'équation caractéristique admet une solution réelle double à savoir 1. On sait qu'il existe λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $q_n = \lambda + \mu n$. Les conditions $q_0 = 1$ et $q_N = 0$ fournissent

$$q_n = \frac{n - N}{-N} = 1 - \frac{n}{N}.$$

2) De nouveau,

1er cas. Si $p \neq \frac{1}{2}$, il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $p_n = \lambda + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^n$.

Les conditions $p_0 = 0$ et $p_N = 1$ fournissent $\left\{\begin{array}{l}\lambda + \mu = 0 \\ \lambda + \mu\left(\frac{q}{p}\right)^N = 1\end{array}\right.$ et donc $\lambda = \frac{p^N}{p^N - q^N}$ et $\mu = -\frac{p^N}{p^N - q^N}$ puis

$$p_n = \frac{p^N}{p^N - q^N} - \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

2ème cas. Si $p = \frac{1}{2}$, il existe λ et μ tels que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $p_n = \lambda + \mu n$. Les conditions $p_0 = 0$ et $p_N = 1$ fournissent

$$p_n = \frac{n}{N}.$$

3) $p_n + q_n = \left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{n}{N} + \frac{n}{N} \text{ si } p = \frac{1}{2} \\ -\frac{q^N}{p^N - q^N} + \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^n + \frac{p^N}{p^N - q^N} - \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^n \text{ si } p \neq \frac{1}{2}\end{array}\right. = 1.$

La probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais est $1 - (p_n + q_n) = 0$.

Exercice n° 10

1) Formule de Bayes.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.
Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$.
Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque $P(B) \neq 0$,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)}.$$

Puisque $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ un système complet d'événements de cet espace tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(A_j) \neq 0$, on a

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B).$$

Donc,

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \times P_{A_j}(B)}.$$

2) a) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements. On a $P(A) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\dfrac{1}{2}$.

b) Notons A l'événement « le dé est pipé » et B l'événement « on obtient n fois le chiffre 6 ». La probabilité demandée est $P_B(A)$.

$\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements. On a toujours $P(A) = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et $P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{3}{4}$. Ensuite $P_A(B) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{6^n}$. Donc,

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n} \neq 0.$$

D'après la formule de Bayes,

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

La probabilité que ce dé soit pipé est $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. Ceci signifie que si au bout d'un grand nombre de lancers, on a obtenu à chaque fois le 6, il est quasiment sûr que le dé est pipé.

Exercice n° 11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement « au n-ème tirage, la boule provient de l'urne U_1 » (l'événement $\overline{A_n}$ est donc l'événement « au n-ème tirage, la boule provient de l'urne U_2 »).

1) $\left(A_1, \overline{A_1}\right)$ est un système complet d'événements et $P(A_1) = P\left(\overline{A_1}\right) = \dfrac{1}{2} \neq 0$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = P(B_1) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_1) + P\left(\overline{A_1}\right) \times P_{\overline{A_1}}(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{35}.$$

La probabilité p_1 que la première boule tirée soit blanche est $\dfrac{17}{35}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(B_n, \overline{B_n}\right)$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P\left(\overline{B_n}\right) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{4}{7} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

3) La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.
La fonction affine $x \mapsto -\dfrac{6}{35}x + \dfrac{4}{7}$ admet un point fixe et un seul :

$$x = -\frac{6}{35}x + \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{41}{35}x = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{20}{41}.$$

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{6}{35}\left(p_n - \dfrac{20}{41}\right)$ puis que pour tout entier naturel non nul n,

$$p_n - \frac{20}{41} = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{20}{41}\right) = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right) = -\frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1},$$

et donc

$$p_n = \frac{20}{41} - \frac{3}{1435} \times \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}.$$

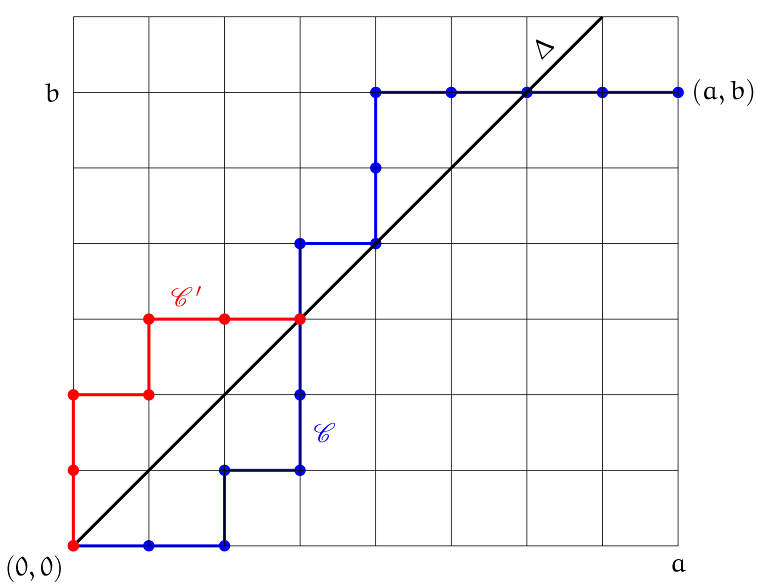
Pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \dfrac{20}{41} - \dfrac{3}{1435} \times \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1}$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 12

1) Un chemin de (α, β) à $(\alpha + m, \beta + n)$ « est » un mot de $m + n$ lettres comportant m lettres D (pour droite) et n lettes H (pour haut) du type DHHDDDH. . . H. Le nombre de ces chemins est le nombre de choix des emplacements des m lettres D dans les $m + n$ positions. Il y en a $\dbinom{m+n}{m} = \dfrac{(m+n)!}{m!n!}$.

2) a) Soit $\mathscr{C}$ un chemin allant de $(0, 1)$ à (a, b). Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des abscisses x des points (x, y) de $\mathscr{C}$ tels que $x \leqslant y$. $\mathscr{E}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car $0 \in \mathscr{E}$) et majorée (par a). Donc $\mathscr{E}$ admet un plus grand élément. Notons le c.
De même, on peut définir d la plus grande ordonnée d'un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse c. Par construction, $c \leqslant d$. c n'est pas a car $a > b \geqslant d$ et donc $c \leqslant a - 1$. Par définition de c et d, le point de $\mathscr{C}$ qui suit (c, d) est $(c + 1, d)$ avec $c + 1 > d$. Ainsi, $c \leqslant d$ et $c > d - 1$. On en déduit que $c = d$. Par construction le point (c, c) est un point de $\mathscr{C}$ et de Δ.

b) Notons E l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à (a, b), passant par $(1, 0)$ et rencontrant la droite Δ d'équation $y = x$ en au moins un point distinct de $(0, 0)$ et F l'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à (a, b) passant par $(0, 1)$. On va construire une bijection de E sur F.



Soit $\mathscr{C}$ un élément de E. On note $\mathscr{C}_1$ la partie de $\mathscr{C}$ qui va de $(0, 0)$ au premier point de $\mathscr{C}$ autre que $(0, 0)$ qui se trouve sur Δ puis $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1$. $\mathscr{C}$ ne rencontre pas Δ en (a, b) (car $a > b$) et donc $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un point distinct de $(0, 0)$ strictement avant (a, b). Donc $(a, b) \in \mathscr{C}_2$ et en particulier, $\mathscr{C}_2 \neq \varnothing$. De même, $(0, 0)$ et $(1, 0)$ appartiennent à $\mathscr{C}_1$ et donc $\mathscr{C}_1 \neq \varnothing$.
Notons alors $\mathscr{C}_1'$ le symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à Δ et enfin $\mathscr{C}' = \mathscr{C}_1' \cup \mathscr{C}_2$. Puisque $(1, 0) \in \mathscr{C}_1$, $(0, 1) \in \mathscr{C}_1'$ et donc $\mathscr{C}' \in F$.

On considère $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \mathscr{C} & \mapsto & \mathscr{C}' \end{array}$. D'après ce qui précède, f est une application de E vers F.

De même, on peut considérer $g : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ \mathscr{C} & \mapsto & \mathscr{C}' \end{array}$. D'après a), un chemin $\mathscr{C}$ de F a nécessairement un point commun avec Δ autre que $(0,0)$. On peut lui appliquer la transformation précédente et on obtient un chemin $\mathscr{C}'$ de E.
Pour tout chemin $\mathscr{C}$ de E, on a $g(f(\mathscr{C})) = \mathscr{C}$ et pour tout chemin $\mathscr{C}'$ de F, on a $f(g(\mathscr{C}')) = \mathscr{C}'$. Donc $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
On sait alors que f est bijective. En particulier, card$(F) =$ card(E).

c) Un chemin de $(0,0)$ à (a,b) situé en dessous de Δ passe par $(1,0)$. Le nombre total de chemins de $(0,0)$ à (a,b) passant par $(1,0)$ est encore le nombre total de chemins de $(1,0)$ à (a,b). Il y en a $\binom{a+b-1}{a-1}$ d'après la question 1). Le nombre de chemins de $(0,0)$ à (a,b) situés en dessous de Δ est la différence entre $\binom{a+b-1}{a-1}$ et le nombre de chemin passant par $(1,0)$ et rencontrant Δ en au moins un point distinct de $(0,0)$ à savoir card(E). D'après la question b), card$(E) =$ card(F) et donc le nombre cherché est

$$\binom{a+b-1}{a-1} - \text{card}(E) = \binom{a+b-1}{a-1} - \text{card}(F) = \binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}.$$

3) En représentant chaque étape du dépouillement par un couple (x,y) où x est le nombre de voix de A et y est le nombre de voix de B, un dépouillement « est » un chemin de $(0,0)$ à (a,b) et un dépouillement où A est constamment en tête « est » est un chemin de $(0,0)$ à (a,b) situé en dessous de Δ et ne rencontrant Δ qu'en $(0,0)$. La probabilité demandée est donc

$$p = \frac{\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}} = \left(\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!b!} - \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!}\right)\frac{a!b!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Exercice n° 13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in [\![1,n]\!]$.

Supposons par exemple que la personne se rende compte que la boîte d'allumettes qui est dans sa poche gauche est vide. A chaque étape, on peut représenter le nombre d'allumettes de chaque boîte par un couple (x,y) où x est le nombre d'allumettes prises dans la poche gauche et y est le nombre d'allumettes de la poche droite.

Prendre une allumette à la fois dans l'une ou l'autre poche consiste à ajouter 1 à x ou à y et donc à faire un déplacement d'une unité vers la droite ou vers le haut. On veut prendre n allumettes dans la poche gauche et $n-k$ dans la poche droite (pour qu'il en reste k) et donc on veut atteindre le point $(n, n-k)$. Tout ceci permet d'identifier une succession de prises d'allumettes nous laissant une boîte vide à gauche et une boîte contenant k allumettes à droite à un chemin joignant le point $(0,0)$ au point $(n, n-k)$ comme dans l'exercice précédent.

On se rend compte que la boîte de la poche gauche est vide en effectuant un déplacement supplémentaire vers la droite. Le nombre de prises d'allumettes cherché est donc le nombre de chemins joignant $(0,0)$ à $(n+1, n-k)$ et se terminant par un déplacement vers la droite. Il y en a autant que de chemins joignant $(0,0)$ à $(n, n-k)$ à savoir $\binom{2n-k}{n}$. Un chemin joignant $(0,0)$ à $(n+1, n-k)$ est de longueur $2n-k+1$. Comme à chaque étape, la probabilité de choisir une des deux boîtes est $\frac{1}{2}$ et que les choix successifs sont mutuellement indépendants, la probabilité d'un tel chemin est $\frac{1}{2^{2n-k+1}}$. La probabilité qu'on se rende compte que la boîte gauche est vide et que la boîte droite contient k allumettes est $\frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k+1}}$.
Cette probabilité est la même si c'est la boîte droite qui est vide et la boîte gauche contient k allumettes. La probabilité demandée est

$$p = 2 \times \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k+1}} = \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}}.$$

En moyenne, il reste dans la poche pas vide $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}}$ ce qui s'écrit quand $n = 6$,

$$\sum_{k=1}^{6} k\frac{\binom{12-k}{6}}{2^{12-k}} = \frac{462}{2^{11}} + \frac{420}{2^{10}} + \frac{252}{2^{9}} + \frac{112}{2^{8}} + \frac{35}{2^{7}} + \frac{6}{2^{6}} = \frac{3958}{2048} = 1,9\ldots$$

Exercice n° 14

La situation est la même que celle de l'exercice n° 9 où on remplace la particule et sa position initiale par la somme que possède le joueur A initialement à savoir n. Celui-ci est ruiné si son capital arrive à 0 et son adversaire est ruiné si le capital du joueur A arrive à $n + s - n = s$.
On reprend les notations du n° 9 en remplaçant simplement N par s. q_n est alors la probabilité que A soit ruiné et p_n est la probabilité que B soit ruiné.

La probabilité que A soit ruiné est $-\dfrac{(1-p)^s}{p^s - (1-p)^s} + \dfrac{p^s}{p^s - (1-p)^s}\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n$ si $p \neq \dfrac{1}{2}$ et $1 - \dfrac{n}{s}$ si $p = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité que B soit ruiné est $\dfrac{p^s}{p^s - (1-p)^s} - \dfrac{p^s}{p^s - (1-p)^s}\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n$ si $p \neq \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{n}{s}$ si $p = \dfrac{1}{2}$.

On peut noter que la probabilité qu'un des deux joueurs soit ruiné en un temps fini est $p_n + q_n = 1$ dans tous les cas.

