SESSION 2020

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

I - Préliminaires

Q 1. Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in F$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0 \text{ (car } u(y) \in F).$$

Donc, $u(x) \in F^\perp$. On a montré que $u\left(F^\perp\right) \subset F^\perp$ et donc $F^\perp$ est stable par u.

Q 2. γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E et u est de classe C^1 sur E en tant qu'application linéaire. Donc, $u \circ \gamma$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Puisque $u \circ \gamma$ et γ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on sait que $\varphi\ :\ t \mapsto \langle u \circ \gamma(t), \gamma(t)\rangle$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 3. Soit $y \in F \cap (x_0)^\perp$, y unitaire. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|\gamma(t)\|^2 = \|x_0\|^2 \cos^2 t + \|y\|^2 \sin^2 t = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \text{ puis } \|\gamma(t)\| = 1.$$

Puisque x_0 et y sont dans F, pour tout réel t, $\gamma(t)$ est dans F et unitaire. Par définition de x_0, pour tout réel t,

$$\varphi(0) = \langle u\left(x_0\right), x_0\rangle \geqslant \langle u(\gamma(t)), \gamma(t)\rangle = \varphi(t).$$

Ainsi, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$ et φ admet un maximum en 0. On en déduit que $\varphi'(0) = 0$.

Q 4. Pour tout réel t, $\gamma'(t) = -x_0 \sin(t) + y\cos(t)$ puis $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = y$. Puisque u est linéaire, on sait que pour tout réel t, $(u \circ \gamma)'(t) = u \circ \gamma'(t)$ et donc

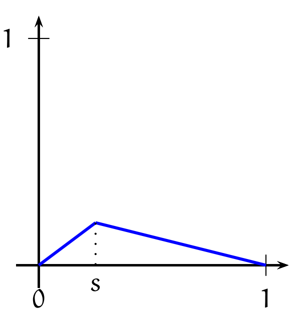
$$\varphi'(0) = \langle u \circ \gamma'(0), \gamma(0)\rangle + \langle u \circ \gamma(0), \gamma'(0)\rangle = \langle u(y), x_0\rangle + \langle u\left(x_0\right), y\rangle = 2\langle u\left(x_0\right), y\rangle,$$

et donc $\langle u\left(x_0\right), y\rangle = 0$. $u\left(x_0\right)$ est orthogonal à y.

Q 5. x_0 n'est pas nul. Soit $G = D^\perp$ l'orthogonal de $D = \mathrm{Vect}\left(x_0\right)$ dans F. Puisque $\dim(D) < +\infty$, le théorème de la projection orthogonale permet d'affirmer $F = D \oplus G$. Si on pose $u\left(x_0\right) = y_0 + z_0$ avec $y_0 \in G$ et $z_0 \in D$, alors $u\left(x_0\right) - z_0 = y_0 \in D \cap G = \{0\}$ et donc $u\left(x_0\right) = z_0 \in D$. Ceci montre que $u\left(x_0\right)$ est colinéaire à x_0 et donc que x_0 est un vecteur propre de u.

II - Etude d'un opérateur

Q 6. Graphe.



Q 7. On pose $T = \left\{(s,t) \in [0,1]^2 / \ t < s\right\}$ et $T' = \left\{(s,t) \in [0,1]^2 / \ t > s\right\}$. K est continue sur T en tant que polynôme à deux variables et de même K est continue sur T'. Il reste à étudier la continuité de K en un point $(s_0, s_0) \in [0,1]^2$.
Soit $s_0 \in [0,1]$. Pour $(s,t) \in [0,1]^2$,

$$|K(s,t) - K\left(s_0, s_0\right)| = \begin{cases} |t(1-s) - s_0\left(1-s_0\right)| \text{ si } t < s \\ |s(1-t) - s_0\left(1-s_0\right)| \text{ si } t \geqslant s \end{cases}.$$

Si $t < s$,

$$\begin{aligned}|K(s,t) - K(s_0,s_0)| &= |(t-s_0)(1-s) - s_0(s-s_0)| \\ &\leqslant (1-s)|t-s_0| + s_0|s-s_0| \leqslant |s-s_0| + |t-s_0| = \|(s,t)-(s_0,s_0)\|_1 .\end{aligned}$$

Si $t \geqslant s$,

$$\begin{aligned}|K(s,t) - K(s_0,s_0)| &= |(s-s_0)(1-t) + s_0(t-s_0)| \\ &\leqslant (1-t)|t-s_0| + s_0|t-s_0| \leqslant \|(s,t)-(s_0,s_0)\|_1 .\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $|K(s,t) - K(s_0,s_0)| \leqslant \|(s,t)-(s_0,s_0)\|_1$. Ceci montre que $\lim\limits_{\substack{(s,t)\to(s_0,s_0)\\(s,t)\neq(s_0,s_0)}} K(s,t) = K(s_0,s_0)$ et donc que K est continue en (s_0,s_0).

Finalement, K est continue sur $[0,1]^2$.

Q 8. Soit $f \in E$. Soit $s \in [0,1]$. L'application partielle $t \mapsto k_s(t)$ est continue sur $[0,1]$ (la continuité entrainant la continuité partielle) et donc l'application $t \mapsto k_s(t)f(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$. On en déduit l'existence de $T(f)(s)$.

Soit $f \in E$. Pour $s \in [0,1]$, $T(f)(s) = (1-s)\displaystyle\int_0^s tf(t)\,dt + s\int_s^1 (1-t)f(t)\,dt$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, les applications $s \mapsto \displaystyle\int_0^s tf(t)\,dt$ et $s \mapsto \displaystyle\int_s^1 f(t)\,dt$ sont continues sur $[0,1]$. Donc, l'application $T(f)$ est continue sur $[0,1]$. Ceci montre que T est une application de E dans E.

T est linéaire par bilinéarité du produit de deux fonctions et par linéarité de l'intégration. Donc, $T \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}\|T(f)\|^2 &= \int_0^1 (T(f)(s))^2\,ds = \int_0^1 \left(\int_0^1 k_s(t)f(t)\,dt\right)^2 ds \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 k_s^2(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 f^2(t)\,dt\right) ds \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 f^2(t)\,dt\right) ds \text{ (car pour tout } (s,t)\in[0,1]^2,\ 0 \leqslant k_s(t) \leqslant 1) \\ &= \int_0^1 f^2(t)\,dt = \|f\|^2\end{aligned}$$

et donc $\|T(f)\| \leqslant \|f\|$. Ainsi, il existe un réel k tel que pour tout $f \in E$, $\|T(f)\| \leqslant k\|f\|$, à savoir $k = 1$. Puisque T est un endomorphisme de E, on en déduit que T est continu sur l'espace vectoriel normé $(T, \|\ \|)$.

Q 9. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}T(p_k)(s) &= \int_0^1 k_s(t)t^k\,dt = (1-s)\int_0^s t^{k+1}\,dt + s\int_s^1 \left(t^k - t^{k+1}\right)dt \\ &= (1-s)\frac{s^{k+2}}{k+2} + s\left(\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) - \left(\frac{s^{k+1}}{k+1} - \frac{s^{k+2}}{k+2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left((k+1)\left(s^{k+2} - s^{k+3}\right) + s - \left((k+2)s^{k+2} - (k+1)s^{k+3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(-s^{k+2} + s\right)\end{aligned}$$

et donc $T(p_k) = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}(-p_{k+2} + p_1) \in F$. Par suite,

$$T(F) = \text{Vect}\,(T(p_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \text{Vect}\,(p_k)_{k\in\mathbb{N}} = F.$$

F est stable par T.

Q 10. Pour $k \in \mathbb{N}$, $T(p_k)' = -\dfrac{1}{(k+1)}p_{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ puis $T(p_k)'' = -p_k$. Par linéarité de la dérivation, $p \mapsto T(p)''$ est un endomorphisme de F. Cet endomorphisme coïncide avec l'endomorphisme $-\mathrm{Id}_F$ sur une base de F et donc est égal à $-\mathrm{Id}_F$. Ainsi, pour tout $p \in F$, $T(p)'' = -p$.

Q 11. Soit $f \in E$. $k_0 f$ et $k_1 f$ sont nulles sur $[0,1]$. Donc, $T(f)(0) = T(f)(1) = 0$.

Q 12. Soit $f \in E$. Pour tout $s \in [0,1]$, $T(f)(s) = (1-s)\displaystyle\int_0^s tf(t)\,dt + s\int_s^1 (1-t)f(t)\,dt$. La fonction f est continue sur $[0,1]$ et donc les fonctions $s \mapsto \displaystyle\int_0^s tf(t)\,dt$ et $s \mapsto \displaystyle\int_s^1 (1-t)f(t)\,dt$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$. Il en est de même de $T(f)$ et pour tout $s \in [0,1]$,

$$T(f)'(s) = -\int_0^s tf(t)\,dt + (1-s)sf(s) + \int_s^1 (1-t)f(t)\,dt - s(1-s)f(s) = -\int_0^s tf(t)\,dt + \int_s^1 (1-t)f(t)\,dt.$$

De même, $T(f)'$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ ou encore $T(f)$ est de classe C^2 sur $[0,1]$ et pour tout $s \in [0,1]$,

$$T(f)''(s) = -sf(s) - (1-s)f(s) = -f(s).$$

Donc, pour tout $f \in E$, $T(f)'' = -f$.

Q 13. Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$. Alors, $T(f) = 0$ puis $-f = T(f)'' = 0$ et donc $f = 0$. Par suite, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et donc T est injectif.

Q 14. D'après les questions Q11 et Q12, $\mathrm{Im}(T) \subset \left\{g \in C^2([0,1],\mathbb{R}) /\ g(0) = g(1) = 0\right\}$. Inversement, soit $g \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $g(0) = g(1) = 0$. S'il existe $f \in E$ tel que $T(f) = g$, nécessairement $f = -T(f)'' = -g''$. Soit donc $f = -g'' \in F$. Pour tout $s \in [0,1]$, en tenant compte de $g(0) = g(1) = 0$, une intégration par parties fournissent

$$\begin{aligned}
T(f)(s) &= -\int_0^1 k_s(t)g''(t)\,dt = -(1-s)\int_0^s tg''(t)\,dt - s\int_s^1 (1-t)g''(t)\,dt \\
&= -(1-s)\left([tg'(t)]_0^s - \int_0^s g'(t)\,dt\right) - s\left([(1-t)g'(t)]_s^1 + \int_s^1 g'(t)\,dt\right) \\
&= -(1-s)\left(sg'(s) - (g(s) - g(0))\right) - s\left(-(1-s)g'(s) + (g(1) - g(s))\right) \\
&= g(s)
\end{aligned}$$

et donc $T(f) = g$ puis $g \in \mathrm{Im}(T)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(T) = \left\{g \in C^2([0,1],\mathbb{R}) /\ g(0) = g(1) = 0\right\}$. On note que, puisque T est injectif, tout élément g de $\mathrm{Im}(T)$ a exactement un antécédent à savoir $f = -g''$.

Q 15. Soient λ un éventuelle valeur propre non nulle de T et $f \in E$ un vecteur propre associé. Alors, $T(f) = \lambda f$ puis

$$\lambda f'' = T(f)'' = -f.$$

Q 16. De plus, nécessairement $f = T\left(\dfrac{1}{\lambda}f\right) \in \mathrm{Im}(T)$ et donc $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ et $f(0) = f(1) = 0$.

• Si $\lambda > 0$, les solutions de l'équation différentielle $y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0$ sont les fonctions de la forme $y\ :\ t \mapsto \alpha\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)$. L'égalité $y(0) = 0$ fournit $\alpha = 0$ puis l'égalité $y(1) = 0$ fournit $\beta\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$. Si $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \notin \pi\mathbb{N}^*$, ceci impose $\beta = 0$ puis $y = 0$. Dans ce cas, λ n'est pas valeur propre de T.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $\lambda_k = \dfrac{1}{k^2\pi^2}$ de sorte que $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}} = k\pi$. Dans ce cas, les solutions de $y'' + \dfrac{1}{\lambda_k}y = 0$ s'annulant en 0 et 1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto \alpha\sin(k\pi t)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, posons $f_k(t) = \sin(k\pi t)$.

• Pour $k \in \mathbb{N}^*$, f_k est un élément non nul de E, de classe C^2 sur $[0,1]$, s'annulant en 0 et 1 et vérifiant $\lambda_k f_k'' = -\lambda_k k^2\pi^2 f_k = -f_k$. Mais alors $T(f_k) = \lambda_k f_k$ puisque $\lambda_k f_k$ est dans $\mathrm{Im}(T)$.
Les réels strictement positifs valeurs propres de T sont les λ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, et le sous-espace propre associé à λ_k, $k \in \mathbb{N}^*$, est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f_k)$.

Si $\lambda < 0$, les solutions de l'équation différentielle $y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0$ sont les fonctions de la forme $y\ :\ t \mapsto \alpha\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{t}{\sqrt{-\lambda}}\right) + \beta\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{t}{\sqrt{-\lambda}}\right)$. L'égalité $y(0) = 0$ fournit $\alpha = 0$ puis l'égalité $y(1) = 0$ fournit $\beta\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0$ puis $\beta = 0$ et donc $y = 0$. Dans ce cas, λ n'est pas valeur propre de T.

Finalement, $\mathrm{Sp}(T) = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{k^2\pi^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ (0 n'est pas valeur propre de T car T est injectif) et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_{\frac{1}{k^2\pi^2}}(T) = \mathrm{Vect}\,(f_k)$ où $f_k\ :\ t \mapsto \sin(k\pi t)$.

Q 17. Soit $(f, g) \in E^2$. Les deux fonctions $T(f)$ et $T(g)'$ sont de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\langle T(f), g\rangle &= \int_0^1 T(f)(t)g(t)\ dt = -\int_0^1 T(f)(t)T(g)''(t)\ dt \text{ (car } g = -T(g)'' \text{ d'après Q12)}\\ &= -\left[T(f)(t)T(g)'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 T(f)'(t)T(g)'(t)\ dt = \int_0^1 T(f)'(t)T(g)'(t)\ dt \text{ (car } T(f)(0) = T(f)(1) = 0).\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de f et g, $\langle T(g), f\rangle = \displaystyle\int_0^1 T(f)'(t)T(g)'(t)\ dt = \langle T(f), g\rangle$. On a montré que pour tout $(f, g) \in E^2$, $\langle T(f), g\rangle = \langle f, T(g)\rangle$. T est donc un endomorphisme symétrique de l'espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

Q 18. Supposons par l'absurde $H = G^\perp \neq \{0\}$. Il existe $f \in H$ telle que $\|f\| = 1$ et $\langle T(f), f\rangle = \sup\limits_{h\in H,\ \|h\|=1} \langle T(h), h\rangle$. D'après la question Q5, f est un vecteur propre de T et donc un élément de G d'après la question précédente. Ainsi, $f \in G \cap G^\perp = \{0\}$. Ceci contredit $\|f\| = 1$ et donc $H = \{0\}$.

Q 19. Soit $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k \neq l$.

$$\lambda_k\langle g_k, g_l\rangle = \langle T(g_k), g_l\rangle = \langle g_k, T(g_l)\rangle = \lambda_l\langle g_k, g_l\rangle,$$

puis, $(\lambda_k - \lambda_l)\langle g_k, g_l\rangle = 0$ et donc $\langle g_k, g_l\rangle = 0$ car $\lambda_k \neq \lambda_l$. La famille $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\|g_k\|^2 = 2\int_0^1 \sin^2(k\pi x)\ dx = \int_0^1 (1 - \cos(2k\pi x))\ dx = 1 - \left[\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\right]_0^1 = 1$$

et donc $\|g_k\| = 1$. La famille $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale.

Q 20. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, posons $u_k(x) = \dfrac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k(x)$ de sorte que $\Phi = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 1]$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u_k(x)| = \frac{1}{k^2\pi^2}\,|\langle f, g_k\rangle|\,|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{k^2\pi^2}\|f\|\,\|g_k\|\,\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\|f\|}{k^2\pi^2},$$

puis $\|u_k\|_\infty \leqslant \dfrac{\sqrt{2}\|f\|}{k^2\pi^2}$. On en déduit que la série numérique de terme général $\|u_k\|_\infty$ converge puis que la série de fonctions de terme général u_k converge normalement et en particulier uniformément et simplement vers la fonction Φ sur $[0, 1]$. Puisque de plus chaque fonction u_k est définie et continue sur $[0, 1]$, la fonction Φ est définie et continue sur $[0, 1]$.

Q 21. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $T(f_N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \langle f, g_k\rangle T(g_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k$ puis

$$\|\Phi - T(f_N)\| = \left\|\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k\right\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}\,|\langle f, g_k\rangle|\,\|g_k\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{\|f\|}{k^2\pi^2}.$$

$\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{\|f\|}{k^2\pi^2}$ est le reste à l'ordre N d'une série convergente et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{\|f\|}{k^2\pi^2} = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \|\Phi - T(f_N)\| = 0$.

Q 22. Vérifions que $\lim\limits_{N\to+\infty} f_N = f$ dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $F_N = \text{Vect}\,(g_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ est un sous-espace de dimension finie de E et $(g_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ est une base orthonormée de F_N. D'après le théorème de la projection orthogonale, f_N est le projeté orthogonal de f sur F_N.
Puisque la famille $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, est totale, on sait alors que $\lim\limits_{N\to+\infty} \|f_N - f\| = 0$ (égalité de Parseval) et donc $\lim\limits_{N\to+\infty} f_N = f$ dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$.

Par continuité de $\|\ \|$ et de T sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$, on en déduit que

$$0 = \lim_{N\to+\infty} \|T(f_N) - \Phi\| = \left\|T\left(\lim_{N\to+\infty} f_N\right) - \Phi\right\| = \|T(f) - \Phi\|$$

et donc $T(f) = \Phi$.

III - Etude d'espaces à noyau reproduisant

III.A - Un exemple

Q 23. Pour $(f, g) \in E_1^2$, la fonction $f'g'$ est définie et continue par morceaux sur $[0, 1]$ (l'écriture $f'(t)$ étant très ambigüe pour certains réels t) et donc $(f|g)$ existe dans $\mathbb{R}$. La symétrie, la bilinéarité et la positivité de $(\ |\ )$ sont claires. Soit enfin $f \in E_1$. Soit $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision de $[0, 1]$ adaptée à f' (f' est continue sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$)

$$\begin{aligned}(f|f) = 0 &\Rightarrow \int_0^1 f'^2(t)\ dt = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'^2(t)\ dt = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'^2(t)\ dt = 0\\
&\Rightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in]x_k, x_{k+1}[\ f'^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\
&\Rightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in]x_k, x_{k+1}[\ f'(t) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, f est continue sur $[0, 1]$ et sa dérivée est nulle sur $[0, 1]$ sauf peut-être en un nombre fini de points. On en déduit que f est constante sur $[0, 1]$ puis que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = f(0) = 0$ et finalement que $f = 0$.

Ainsi, $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur E_1 et donc un produit scalaire sur E_1.

Q 24. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$. Pour $x \in [0, 1]$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left|\int_0^x 1 \times f'(t)\ dt\right| \leqslant \sqrt{\int_0^x 1^2 dt \times \int_0^x (f'(t))^2\ dt} = \sqrt{x \int_0^x (f'(t))^2\ dt}.$$

Q 25. Soit $f \in E_1$ de classe C^2 sur $[0, 1]$. Donc $U(f)$ et $T(f)$ sont bien définis. D'autre part, pour $s \in [0, 1]$, la fonction k_s est continue sur $[0, 1]$, de classe C^1 sur $[0, s]$ et $[s, 1]$ et donc de classe C^1 par morceaux sur $[0, 1]$ ($k'_{s,g}(s) = 1 - s$ et $k'_{s,d}(s) = -s$ et donc l'expression $k'_s(t)$ est très douteuse quand $t = s$).

$$T(f'')(s) = \int_0^1 k_s(t) f''(t)\ dt = (1 - s) \int_0^s t f''(t)\ dt + s \int_s^1 (1 - t) f''(t)\ dt.$$

Soit $s \in [0, 1]$. Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int_0^s t f''(t)\ dt = [t f'(t)]_0^s - \int_0^s f'(t)\ dt = s f'(s) - \int_0^s f'(t)\ dt$. De même, $\displaystyle\int_s^1 (1 - t) f''(t)\ dt = [(1 - t) f'(t)]_s^1 - \int_s^1 f'(t)\ dt = -(1 - s) f'(s) - \int_s^1 f'(t)\ dt$. Par suite,

$$\begin{aligned}T(f'')(s) &= (1 - s) s f'(s) - \int_0^s (1 - s) f'(t)\ dt - s(1 - s) f'(s) - \int_s^1 s f'(t)\ dt = -\int_0^s k'_s(t) f'(t)\ dt - \int_s^1 k'_s(t) f'(t)\ dt\\
&= -\int_0^1 k'_s(t) f'(t)\ dt = -U(f).\end{aligned}$$

On a vu à la question Q14 que, puisque f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, f est dans $\text{Im}(T)$ et l'unique antécédent de f par T est $h = -f''$ ou encore $T(-f'') = f$. Finalement,

$$U(f) = -T(f'') = T(-f'') = f.$$

Q 26. Soit f une application continue sur $[0, 1]$ et de classe C^1 par morceaux sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Pour $s \in [0, 1]$,

$$U(f)(s) = \int_0^1 k_s'(t)f'(t)\ dt = (1-s)\int_0^s f'(t)\ dt - s\int_s^1 f'(t)\ dt \quad (*).$$

Montrons alors que si g est une fonction continue et de classe C^1 par morceaux sur un segment $[a,b]$, alors $\int_a^b g'(t)\ dt = g(b)-g(a)$. Soit $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une subdivision adaptée à g'. Pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, notons g_k la restriction de g à $[x_k, x_{k+1}]$. g_k est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, de classe C^1 sur $]x_k, x_{k+1}[$ et g_k' a une limite réelle en x_k à droite et x_{k+1} à gauche. D'après le théorème de la limite de la dérivée, g_k est de classe C^1 sur $[x_k, x_{k+1}]$.
Mais alors, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} g'(t)\ dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k'(t)\ dt = g_k(x_{k+1}) - g_k(x_k) = g(x_{k+1}) - g(x_k)$. On en déduit que

$$\int_a^b g'(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n-1}\left(g(x_{k+1}) - g(x_k)\right) = g(b)-g(a) \text{ (somme télescopique).}$$

On reprend alors l'égalité $(*)$: pour tout $s\in[0,1]$, en tenant compte de $f(0)=f(1)=0$,

$$U(f)(s) = (1-s)\int_0^s f'(t)\ dt - s\int_s^1 f'(t)\ dt = (1-s)(f(s)-f(0)) - s(f(1)-f(s)) = (1-s+s)f(s) = f(s),$$

et donc $U(f)=f$. On a montré que $U = \mathrm{Id}_{E_1}$ (et la question précédente ne sert à rien ?).

Q 27. $(E_1, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien réel qui est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([0,1],\mathbb{R})$ et donc la propriété 1 est vérifiée.

Soit $x\in[0,1]$. L'application $\begin{array}{rccc} V_x : & E_1 & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(x)\end{array}$ est une forme linéaire sur E (évaluation en x). De plus, pour $f\in E_1$,

$$\begin{aligned}|V_x(f)| = |f(x)| &\leqslant \sqrt{x\int_0^x (f'(t))^2\ dt} \text{ (d'après la question Q24)}\\ &\leqslant \sqrt{\int_0^1 (f'(t))^2\ dt} = \|f\|.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe un réel k tel que, pour tout $f\in E_1$, $|V_x(f)|\leqslant k\|f\|$ à savoir $k=1$. Puisque V_x est linéaire, on en déduit que V_x est continue sur l'espace vectoriel normé $(E_1, \|\ \|)$. Ceci étant vrai pour tout x de $[0,1]$, la propriété 2 est démontrée.

Puisque $U = \mathrm{Id}_{E_1}$, pour tout $x\in[0,1]$, $f(x) = \int_0^1 k_x'(t)f'(t)\ dt = \langle k_x, f\rangle$ où de plus k_x est dans E_1. La propriété 3 est démontrée et donc E_1 est à noyau reproduisant de noyau reproduisant K.

III.B - Un contre-exemple

Q 28. Supposons que pour tout $x\in[0,1]$, la forme linéaire V_x soit continue sur $(E, \|\ \|)$. Donc, pout tout $x\in[0,1]$, il existe une contante $k(x)$, dépendante de x mais indépendante de f telle que, pour toute $f\in E$, $|f(x)| = |V_x(f)| \leqslant k(x)\|f\| = k(x)\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\ dt}$. Pour $n\geqslant 2$, considérons g_n, la fonction continue sur $[0,1]$, nulle sur $\left[0, \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1\right]$, affine sur $\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]$ et égale à n en $\frac{1}{2}$. Pour $n\geqslant 2$, on pose alors $f_n = \sqrt{g_n}$.

Pour $n\geqslant 2$, $\|f_n\| = \sqrt{\int_0^1 g_n(t)\ dt} = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{n}\times n}{2}} = 1$. Par suite, pour tout $n\geqslant 2$,

$$\sqrt{n} = \left|f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant k\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ceci est une contradiction car la suite $\left(\sqrt{n}\right)$ n'est pas bornée. La propriété 2 n'est pas vérifiée par l'espace $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ et donc l'espace $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ n'est pas un espace à noyau reproduisant.

III.C - Fonctions développables en série entière

Q 29. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de carré sommable. Soit $t\in]-1,1[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|a_n t^n| \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n^2 + (t^n)^2\right) = \frac{1}{2}\left(a_n^2 + t^{2n}\right).$$

Par hypothèse, la série de terme général a_n^2, $n \in \mathbb{N}$, converge et d'autre part, la série géométrique de terme général t^{2n}, $n \in \mathbb{N}$, converge (car $\left|t^2\right| < 1|$). Par suite, la série de terme général $a_n t^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. Ceci étant vrai pour tout $t \in]-1,1[$, on a montré que $R_a \geqslant 1$.

Q 30. • Soit $(f,g) \in (E_2)^2$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites respectivement associées à f et à g. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n b_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$. On en déduit que la série de terme général $a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et donc converge. Ainsi, $\langle f, g\rangle$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La bilinéarité, la symétrie et la positivité de $\langle\ ,\ \rangle$ sont claires.

• Soient $f \in E_2$ puis $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite associée à f.

$$\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0 \Rightarrow \forall t \in]-1,1[,\ f(t) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Donc, $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E_2 ou encore $(E_2, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

Q 31. Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n(x) = x^n$. La suite $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et on peut donc poser pour $t \in]-1,1[$, $g_x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x) t^n$. g_x est un élément de E_2 et pour tout $f\ :\ t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ élément de E_2,

$$\langle g_x, f\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x).$$

Q 32. D'après ce qui précède, les propriétés 1 et 3 sont vérifiées avec : $\forall (x,t) \in]-1,1[^2$,

$$K(x,t) = g_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (xt)^n = \frac{1}{1-xt}.$$

Soit $x \in]-1,1[$. Soit $f\ :\ t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \in E_2$.

$$\begin{aligned}
|V_x(f)| = |f(x)| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|x|^n \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}} \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\|f\|.
\end{aligned}$$

Ainsi, V_x est une forme linéaire sur E_2 et il existe un réel k (indépendant de f) à savoir $k = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tel que, pour tout $f \in E_2$, $|V_x(f)| \leqslant k\|f\|$. Donc, V_x est continue sur l'espace vectoriel normé $(E_2, \|\ \|)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in]-1,1[$, la propriété 2 est démontrée.

L'espace $(E_2, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace à noyau reproduisant. Son noyau reproduisant est $K\ :\ (x,t) \mapsto \dfrac{1}{1-xt}$.

III.D - Autre exemple parmi les fonctions de classe C^1 par morceaux

Q 33. Pour $(x,t) \in [0,a]^2$, $k_x(t) = \min(x,t) = \begin{cases} t \text{ si } t \leqslant x \\ x \text{ si } t > x \end{cases}$ puis $k_x'(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t < x \\ 0 \text{ si } t > x \end{cases}$ (et les dérivées à gauche et à droite de k_x en x sont respectivement égales à 1 et 0). Donc, pour $f \in E_3$ et $x \in [0,a]$,

$$\langle k_x, f\rangle = \int_0^a k_s'(t) f'(t)\,dt = \int_0^x k_s'(t) f'(t)\,dt + \int_x^a k_s'(t) f'(t)\,dt = \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = f(x).$$

Donc, $(x,y) \mapsto \min(x,y)$ est un noyau reproduisant de l'espace $(E_3, (.|.))$.

Q 34. L'application φ est continue et strictement décroissante sur $[0,a]$ et donc bijective de $[0,a]$ sur $[\varphi(a), \varphi(0)] = [0,b]$ en posant $b = \varphi(0)$. On note ψ sa réciproque. On sait que ψ est strictement décroissante sur $[0,b]$ et d'autre part, puisque φ est de classe C^1 sur $[0,a]$ et que φ' ne s'annule pas sur $[0,a]$, on sait que ψ est de classe C^1 sur $[0,b]$.

Pour $(f,g) \in (E_4)^2$, posons $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^b (f\circ\psi)'(t)(g\circ\psi)'(t)\ dt$. Puisque ψ est de classe C^1 sur $[0,b]$ à valeurs dans $[0,a]$ et que f est de classe C^1 par morceaux sur $[0,a]$, $f\circ\varphi$ est de classe C^1 par morceaux sur $[0,b]$ et il en est de même de $g\circ\psi$. Ceci assure l'existence de $\langle f,g\rangle$ dans $\mathbb{R}$.
La bilinéarité, la symétrie et la positivité de $\langle\ ,\ \rangle$ sont claires. Enfin, si pour $f\in E_4$, $\langle f,f\rangle = 0$, alors $f\circ\varphi$ est continue sur $[0,b]$, de dérivée nulle sur $[0,b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points. $f\circ\varphi$ est constante sur $[0,b]$ puis f est constante sur $[0,a]$ de sorte que pour tout $x\in[0,a]$, $f(x) = f(a) = 0$. Ceci montre que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E_4.

Soit $x \in [0,a]$. Pour $t\in[0,b]$, $k_x(\psi(t)) = \mathrm{Min}(\varphi(x),t) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ si } t \geqslant \varphi(x) \\ t \text{ si } t < \varphi(x)\end{cases}$ puis $(k_x\circ\psi)'(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t > \varphi(x) \\ 1 \text{ si } t < \varphi(x)\end{cases}$.
Ensuite pour $f\in E_4$, en posant $u = \psi(t)$ et donc $du = \psi'(t)\ dt$ et $t = \varphi(u)$,

$$\begin{aligned}\langle k_x, f\rangle &= \int_0^b (f\circ\psi)'(t)(k_x\circ\psi)'(t)\ dt = \int_0^{\varphi(x)} f'(\psi(t))\psi'(t)\ dt \\ &= \int_a^x f'(u)\ du = f(x) - f(a) = f(x).\end{aligned}$$

Ceci montre que $(x,y)\mapsto \mathrm{Min}(\varphi(x),\varphi(y))$ est un noyau reproduisant de l'espace $(E_4, \langle\ ,\ \rangle)$.

IV - Quelques résultats sur les espaces à noyau reproduisant

IV.A - Continuité

Q 35. Soit $x\in I$. Si k_x est la fonction nulle, alors pour tout $f\in E$, $f(x) = \langle k_x, f\rangle = 0$. Dans ce cas, $N(V_x) = 0 = \sqrt{\langle k_x,k_x\rangle}$.
Sinon, k_x n'est pas la fonction nulle et pour $f\in E$ telle que $\|f\| = 1$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)| = |\langle k_x, f\rangle| \leqslant \sqrt{\langle k_x,k_x\rangle}\sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\langle k_x,k_x\rangle}$$

avec égalité effectivement obtenue quand $f = \dfrac{1}{\|k_x\|}k_x$ (qui vérifie $\|f\| = 1$). Ceci montre de nouveau que $N(V_x) = \sqrt{\langle k_x,k_x\rangle}$.

Q 36. Soit $f\in E$. Pour $x\in I$, $f(x) = \langle k_x, f\rangle$. On en déduit que pour $(x,y)\in I^2$, $\langle k_y,k_x\rangle = k_x(y) = K(x,y)$. Soit alors $x\in I$. Pour tout y de I, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(y)| = |\langle k_x,f\rangle - \langle k_y,f\rangle| = |\langle k_x-k_y,f\rangle| \\ &\qquad \leqslant \|k_x-k_y\|\,\|f\| = \|f\|\sqrt{\|k_x-k_y\|^2} = \|f\|\sqrt{\|k_x\|^2+\|k_y\|^2-2\langle k_x,k_y\rangle} = \|f\|\sqrt{K(x,x)+K(y,y)-2K(x,y)}.\end{aligned}$$

Puisque K est continue sur I^2, quand y tend vers x en restant différent de x, $\|f\|\sqrt{K(x,x)+K(y,y)-2K(x,y)}$ tend vers $\|f\|\sqrt{K(x,x)+K(x,x)-2K(x,x)} = 0$. Mais alors, $\displaystyle\lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x}} |f(x)-f(y)| = 0$ puis $\displaystyle\lim_{\substack{y\to x\\ y\neq x}} f(y) = f(x)$. Ceci montre que f est continue sur I.

IV.B - Construction d'un espace à noyau reproduisant

Q 37. Puisque KerT est de dimension finie, $(\mathrm{Ker}T)^\perp$ est défini d'après le théorème de la projection orthogonale.

La linéarité de T est claire. Soit $f\in(\mathrm{Ker}T)^\perp$. $T(f) = 0 \Rightarrow f\in(\mathrm{Ker}T)\cap(\mathrm{Ker}T)^\perp = \{0\} \Rightarrow f = 0$. Donc, la restriction de T à $(\mathrm{Ker}T)^\perp$ est injective.
Soit $g\in\mathrm{Im}(T)$. Il existe $f\in E$ tel que $T(f) = g$ puis il existe $(f_1,f_2)\in\mathrm{Ker}(T)\times(\mathrm{Ker}(T))^\perp$ tel que $f = f_1+f_2$. Mais alors, $g = T(f) = T(f_1)+T(f_2) = T(f_2)$ où cette fois-ci $f_2\in(\mathrm{Ker}(T))^\perp$. Ainsi, l'application de $(\mathrm{Ker}(T))^\perp$ dans $\mathrm{Im}(T)$ qui à f associe $T(f)$ est surjective. Finalement, T induit un isomorphisme de $(\mathrm{Ker}(T))^\perp$ sur $\mathrm{Im}(T)$.

Q 38. • $\mathrm{Im}(T)$ est un espace de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et il semble admis que φ est un produit scalaire sur cet espace. La propriété 1 est vérifiée.

• Pour $(x,t)\in[0,1]^2$, $k_x(t) = \displaystyle\int_0^1 A(x,u)A(t,u)\ du$. Vérifions que pour tout $x\in[0,1]$, la fonction k_x est continue sur $[0,1]$.
Soit $x\in[0,1]$. Pour chaque $t\in[0,1]$, la fonction $u\mapsto A(x,u)A(t,u)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ (la continuité de A entraine la continuité partielle), pour chaque $u\in[0,1]$, la fonction $u\mapsto A(x,u)A(t,u)$ est continue sur $[0,1]$ et enfin, pour chaque $(t,u)\in[0,1]^2$, $|A(x,u)A(t,u)| \leqslant \|A\|_\infty^2$ (la fonction A est continue sur le compact $[0,1]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et donc la fonction A est bornée sur $[0,1]^2$) et la fonction $u\mapsto\|A\|_\infty^2$ est continue par morceaux et intégrable sur le

segment $[0,1]$. D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction k_x est continue sur $[0,1]$. Ceci montre que k_x est un élément de E.

Soit $x \in [0,1]$. Vérifions que k_x est dans $\mathrm{Im}(T)$. Pour tout $y \in [0,1]$,

$$k_x(y) = K(x,y) = \int_0^1 A(x,t)A(y,t)\ dt = T(l_x)(y)$$

où pour tout $t \in [0,1]$, $l_x(t) = A(x,t)$ de sorte que $l_x \in E$. Donc, $k_x \in \mathrm{Im}(T)$.

Soit $x \in [0,1]$. Vérifions que que pour tout $f \in \mathrm{Im}(T)$, $\varphi\left(k_x, f\right) = f(x)$. Soit $f \in \mathrm{Im}(T)$.

$$\varphi\left(k_x, f\right) = \langle S \circ k_x, S \circ f\rangle = \langle l_x, S \circ f\rangle = \int_0^1 A(x,t)S(f(t))\ dt = T(S(f))(x) = f(x).$$

Donc, la propriété 3 est vérifiée.

• Soit $x \in [0,1]$. Pour $f \in \mathrm{Im}(T)$, en notant N la norme associée au produit scalaire φ, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|V_x(f)| = |f(x)| = \varphi\left(k_x, f\right) \leqslant N\left(k_x\right) N(f).$$

Ceci montre encore une fois que pour tout x de $[0,1]$, la forme linéaire V_x est continue sur $(\mathrm{Im}(T), N)$. La propriété 2 est vérifiée et finalement $(\mathrm{Im}(T), \varphi)$ est un espace à noyau reproduisant, de noyau K.

