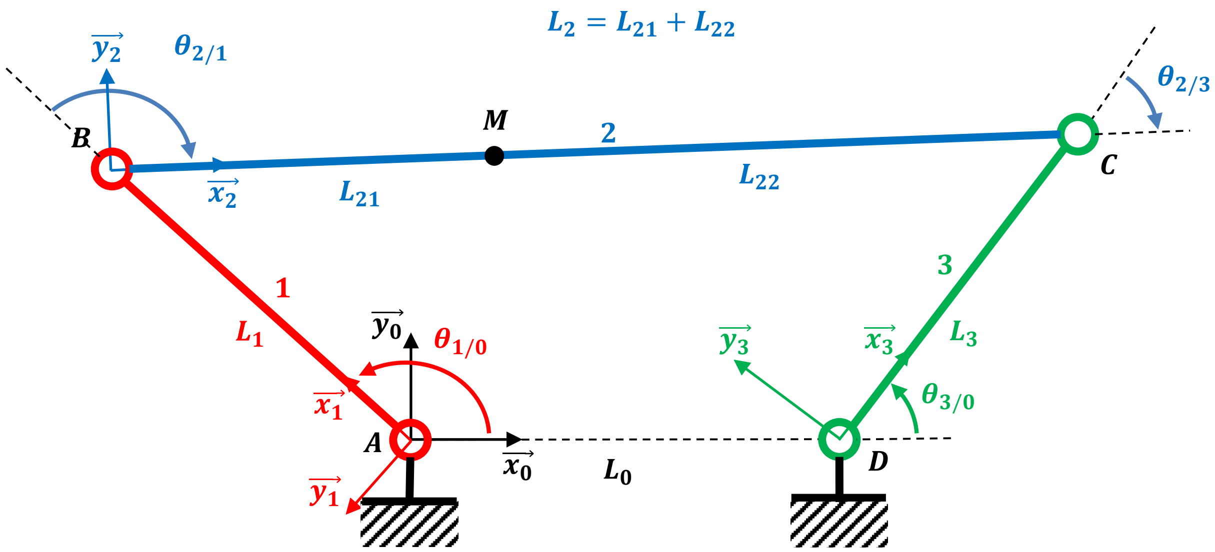
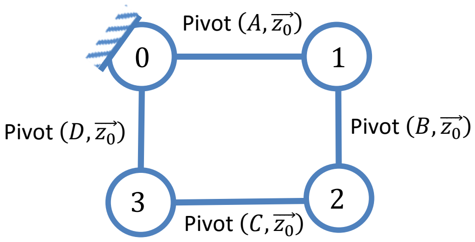
Tapis Volant
Modèle général des structures à 3 bielles



Question 1: Etablir le graphe des liaisons du mécanisme.



Question 2: Exprimer la vitesse $\vec{V}(M, 2/0)$ en fonction de L_{21}, L_1, $\dot{\theta}_{2/1}$ et $\dot{\theta}_{1/0}$ et de vecteurs de base.

Dérivation du vecteur position :

$$\vec{V}(M,2/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{d\overrightarrow{BM}}{dt}\right)_0$$

$$\vec{V}(M,2/0) = L_1 \left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + L_{21} \left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_0$$

$$\vec{V}(M,2/0) = L_1 \overrightarrow{\Omega_{10}} \wedge \overrightarrow{x_1} + L_{21} \overrightarrow{\Omega_{20}} \wedge \overrightarrow{x_2}$$

$$\vec{V}(M,2/0) = \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{z_0} \wedge L_1 \overrightarrow{x_1} + L_{21}(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10}) \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_2}$$

$$\vec{V}(M,2/0) = L_1 \dot{\theta}_{10} \overrightarrow{y_1} + L_{21}(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10}) \overrightarrow{y_2}$$

Composition du mouvement :

$$\vec{V}(M,2/0)=\vec{V}(M,2/1)+\vec{V}(M,1/0)$$

$$\vec{V}(M,2/1)=\vec{V}(B,2/1)+\overrightarrow{\Omega_{21}}\wedge\overrightarrow{BM}=\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_0}\wedge L_{21}\overrightarrow{x_2}=\dot{\theta}_{21}L_{21}\overrightarrow{z_2}\wedge\overrightarrow{x_2}=\dot{\theta}_{21}L_{21}\overrightarrow{y_2}$$
$$\vec{V}(M,1/0)=\vec{V}(A,1/0)+\overrightarrow{\Omega_{10}}\wedge\overrightarrow{AM}=\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0}\wedge L_1\overrightarrow{x_1}+\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0}\wedge L_{21}\overrightarrow{x_2}=\dot{\theta}_{10}L_1\overrightarrow{y_1}+\dot{\theta}_{10}L_{21}\overrightarrow{y_2}$$

$$\vec{V}(M,2/0)=\dot{\theta}_{21}L_{21}\overrightarrow{y_2}+\dot{\theta}_{10}L_1\overrightarrow{y_1}+\dot{\theta}_{10}L_{21}\overrightarrow{y_2}$$
$$\vec{V}(M,2/0)=L_{21}\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\overrightarrow{y_2}+\dot{\theta}_{10}L_1\overrightarrow{y_1}$$

Question 3: Exprimer la vitesse $\vec{V}(M,2/0)$ en fonction de L_{22}, L_3, $\dot{\theta}_{2/3}$ et $\dot{\theta}_{3/0}$ et de vecteurs de base.

$$\vec{V}(M,2/0)=\left.\frac{d\overrightarrow{DM}}{dt}\right)_0=\left.\frac{d\overrightarrow{DC}}{dt}\right)_0+\left.\frac{d\overrightarrow{CM}}{dt}\right)_0$$
$$\vec{V}(M,2/0)=L_3\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_0-L_{22}\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_0$$
$$\vec{V}(M,2/0)=L_3\overrightarrow{\Omega_{30}}\wedge\overrightarrow{x_3}-L_{22}\overrightarrow{\Omega_{20}}\wedge\overrightarrow{x_2}$$
$$\vec{V}(M,2/0)=\dot{\theta}_{30}\overrightarrow{z_0}\wedge L_3\overrightarrow{x_3}-L_{22}\left(\dot{\theta}_{23}+\dot{\theta}_{30}\right)\overrightarrow{z_0}\wedge\overrightarrow{x_2}$$
$$\vec{V}(M,2/0)=L_3\dot{\theta}_{30}\overrightarrow{y_3}-L_{22}\left(\dot{\theta}_{23}+\dot{\theta}_{30}\right)\overrightarrow{y_2}$$

Composition du mouvement :

$$\vec{V}(M,2/0)=\vec{V}(M,2/3)+\vec{V}(M,3/0)$$

$$\vec{V}(M,2/3)=\vec{V}(C,2/3)+\overrightarrow{\Omega_{23}}\wedge\overrightarrow{CM}=\dot{\theta}_{23}\overrightarrow{z_0}\wedge\left(-L_{22}\overrightarrow{x_2}\right)=-\dot{\theta}_{23}L_{22}\overrightarrow{z_2}\wedge\overrightarrow{x_2}=-\dot{\theta}_{23}L_{22}\overrightarrow{y_2}$$
$$\vec{V}(M,3/0)=\vec{V}(D,3/0)+\overrightarrow{\Omega_{30}}\wedge\overrightarrow{DM}=\dot{\theta}_{30}\overrightarrow{z_0}\wedge L_3\overrightarrow{x_3}+\dot{\theta}_{30}\overrightarrow{z_0}\wedge\left(-L_{22}\overrightarrow{x_2}\right)=\dot{\theta}_{30}L_3\overrightarrow{y_3}-\dot{\theta}_{30}L_{22}\overrightarrow{y_2}$$

$$\vec{V}(M,2/0)=-\dot{\theta}_{23}L_{22}\overrightarrow{y_2}+\dot{\theta}_{30}L_3\overrightarrow{y_3}-\dot{\theta}_{30}L_{22}\overrightarrow{y_2}$$
$$\vec{V}(M,2/0)=-L_{22}\left(\dot{\theta}_{30}+\dot{\theta}_{23}\right)\overrightarrow{y_2}+\dot{\theta}_{30}L_3\overrightarrow{y_3}$$

Question 4: Exprimer la vitesse $\vec{V}(M,2/0)$ dans la base 1 en fonction de L_{21}, L_1, $\dot{\theta}_{2/1}$, $\dot{\theta}_{1/0}$ et $\theta_{2/1}$.

$$\vec{V}(M,2/0)=L_{21}\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\overrightarrow{y_2}+\dot{\theta}_{10}L_1\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{y_2}=-\sin\left(\theta_{2/1}\right)\overrightarrow{x_1}+\cos\left(\theta_{2/1}\right)\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{V}(M,2/0)=-L_{21}\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\sin\left(\theta_{1/0}\right)\overrightarrow{x_1}+L_{21}\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\cos\left(\theta_{1/0}\right)\overrightarrow{y_1}+\dot{\theta}_{10}L_1\overrightarrow{y_1}$$
$$\vec{V}(M,2/0)=\begin{pmatrix}-L_{21}\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\sin\left(\theta_{2/1}\right)\\L_{21}\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\cos\left(\theta_{2/1}\right)+\dot{\theta}_{10}L_1\\0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$$

Question 5: En déduire la norme de la vitesse V_M de $\vec{V}(M,2/0)$ en fonction de L_{21}, L_1, $\dot{\theta}_{2/1}$, $\dot{\theta}_{1/0}$ et $\theta_{2/1}$.

$$V_M{}^2 = \left(-L_{21}(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\sin(\theta_{2/1})\right)^2 + \left(L_{21}(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\cos(\theta_{2/1}) + \dot{\theta}_{10}L_1\right)^2$$

$$V_M{}^2 = L_{21}{}^2(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})^2 + \dot{\theta}_{10}{}^2L_1{}^2 + 2L_1L_{21}\dot{\theta}_{10}(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\cos(\theta_{2/1})$$

$$V_M = \sqrt{L_{21}{}^2(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})^2 + \dot{\theta}_{10}{}^2L_1{}^2 + 2L_1L_{21}\dot{\theta}_{10}(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\cos(\theta_{2/1})}$$

Question 6: Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}(M,2/0)$ en fonction de L_{21}, L_1, $\ddot{\theta}_{2/1}$, $\ddot{\theta}_{1/0}$, $\dot{\theta}_{2/1}$, $\dot{\theta}_{1/0}$ et de vecteurs de base.

$$\vec{V}(M,2/0) = L_{21}(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_2} + \dot{\theta}_{10}L_1\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{\Gamma}(M,2/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M,2/0)}{dt}\right)_0 = L_{21}(\ddot{\theta}_{21}+\ddot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_2} - L_{21}(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})^2\overrightarrow{x_2} + \ddot{\theta}_{10}L_1\overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}_{10}{}^2L_1\overrightarrow{x_1}$$

Sinon :

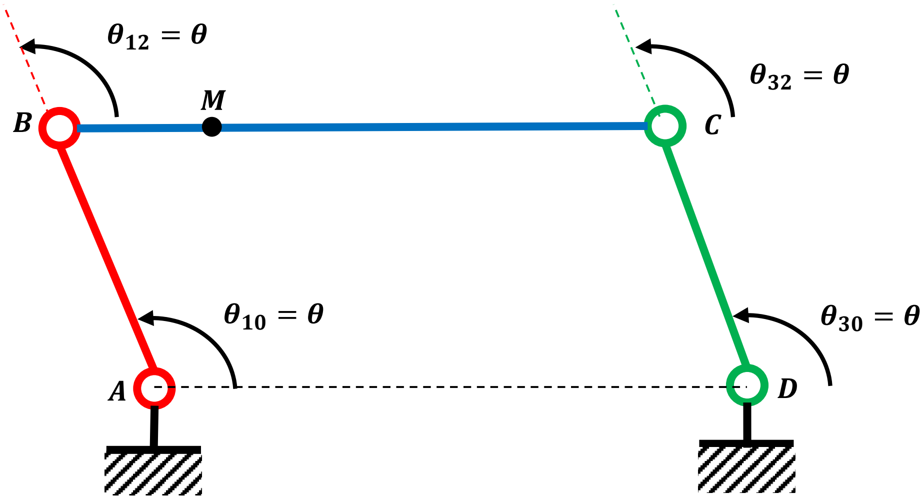
$$\vec{\Gamma}(M,2/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M,2/0)}{dt}\right)_0 = -L_{22}(\ddot{\theta}_{30}+\ddot{\theta}_{23})\overrightarrow{y_2} + L_{22}(\dot{\theta}_{30}+\dot{\theta}_{23})^2\overrightarrow{x_2} + \ddot{\theta}_{30}L_3\overrightarrow{y_3} - \dot{\theta}_{30}{}^2L_3\overrightarrow{x_3}$$

Question 7: En déduire la norme de l'accélération Γ_M de $\vec{\Gamma}(M,2/0)$ sous la forme $\sqrt{A^2+B^2}$ où A et B seront précisés

$$\vec{\Gamma}(M,2/0) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{10}{}^2L_1 - L_{21}(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})^2\cos(\theta_{2/1}) - L_{21}(\ddot{\theta}_{21}+\ddot{\theta}_{10})\sin(\theta_{2/1}) \\ \ddot{\theta}_{10}L_1 - L_{21}(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})^2\sin(\theta_{2/1}) + L_{21}(\ddot{\theta}_{21}+\ddot{\theta}_{10})\cos(\theta_{2/1}) \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$$

$$\Gamma_M = \sqrt{A^2+B^2}$$

Etude du « Tapis volant »



$$\dot{\theta}_{10} = \dot{\theta}_{30} = \dot{\theta}_{12} = \dot{\theta}_{32} = \dot{\theta}$$
$$\theta_{21} + \theta_{10} = \theta_{23} + \theta_{30} = 0$$

On supposera que la vitesse de rotation est constante : $\dot{\theta} = k > 0$
On prendra pour l'accélération de la pesanteur la valeur approchée suivante : $g = 10\ m.s^{-2}$
On donne $L = 10\ m$.

Question 8: Exprimer V_M en fonction de L et $\dot{\theta}$

$$V_M = \sqrt{{L_{21}}^2\left(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10}\right)^2 + {\dot{\theta}_{10}}^2 {L_1}^2 + 2L_1 L_{21}\dot{\theta}_{10}\left(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10}\right)\cos\left(\theta_{2/1}\right)}$$
$$\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10} = -\dot{\theta} + \dot{\theta} = 0$$
$$V_M = \sqrt{L^2\dot{\theta}^2}$$
$$V_M = L\dot{\theta}$$

Question 9: Exprimer Γ_M en fonction de L et $\dot{\theta}$

$$\vec{\Gamma}(M,2/0) = \begin{pmatrix} -{\dot{\theta}_{10}}^2 L_1 - L_{21}\left(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10}\right)^2\cos\left(\theta_{2/1}\right) - L_{21}\left(\ddot{\theta}_{21} + \ddot{\theta}_{10}\right)\sin\left(\theta_{2/1}\right) \\ \ddot{\theta}_{10}L_1 - L_{21}\left(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10}\right)^2\sin\left(\theta_{2/1}\right) + L_{21}\left(\ddot{\theta}_{21} + \ddot{\theta}_{10}\right)\cos\left(\theta_{2/1}\right) \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$$
$$\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10} = 0 \quad ; \quad \ddot{\theta}_{10} = 0\ car\ \dot{\theta}_{10} = k \quad ; \quad \ddot{\theta}_{21} + \ddot{\theta}_{10} = 0\ car\ \dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10} = 0\ \forall t$$
$$\vec{\Gamma}(M,2/0) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}^2 L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$$
$$\Gamma_M = L\dot{\theta}^2$$

Question 10: Est-ce que l'ensemble des personnes à bord vivront la même expérience ?

On voit que la vitesse et l'accélération du point M est indépendante de L_{21} ou L_{22}, la réponse est donc oui.
On aurait pu s'en rendre compte dès le départ avec le sujet du TD. En effet, le tapis est en translation circulaire par rapport à 0, donc $\overrightarrow{\Omega_{20}} = \vec{0}$

$$\forall P, \vec{V}(P,2/0) = \vec{V}(M,2/0) + \overrightarrow{\Omega_{20}} \wedge \overrightarrow{PM} = \vec{V}(M,2/0)$$

Mise en place du « Tapis 0g »

Question 11: Exprimer la composante verticale Γ_y de l'accélération.

$$\vec{\Gamma}(M,2/0) = L_{21}(\ddot{\theta}_{21} + \ddot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_2} - L_{21}(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})^2\overrightarrow{x_2} + \ddot{\theta}_{10}L_1\overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}_{10}{}^2 L_1\overrightarrow{x_1}$$
$$\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10} = 0 \quad ; \quad \ddot{\theta}_{10} = 0$$
$$\vec{\Gamma}(M,2/0) = -\dot{\theta}_{10}{}^2 L_1\overrightarrow{x_1}$$
$$\Gamma_y = \vec{\Gamma}(M,2/0).\overrightarrow{y_0} = -\dot{\theta}^2 L \sin(\theta_{1/2})$$

Question 12: Déterminer la position pour laquelle l'accélération sera susceptible de décoller le public des sièges.

$$\Gamma_y = -\dot{\theta}^2 L \sin(\theta_{1/2})$$
$$\theta_{1/2} = \pm\frac{\pi}{2}$$

Il faut que l'accélération soit à sa valeur négative maximale en norme, soit en :

$$\theta_{1/2} = +\frac{\pi}{2}$$

Question 13: En déduire l'expression littérale en fonction de L et g et la valeur numérique approchée de la vitesse de rotation minimale en $\dot{\theta}$ en tr/min à imposer.

$$\Gamma_y{}^{min} \leq -g$$
$$-\dot{\theta}^2 L \leq -g$$
$$\dot{\theta}^2 \geq \frac{g}{L}$$
$$|\dot{\theta}| \geq \sqrt{\frac{g}{L}} \;\; et\, \dot{\theta} > \circ$$
$$\dot{\theta} \geq \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\dot{\theta} \geq \sqrt{\frac{10}{10}} = 1\frac{rd}{s} = \frac{60}{2\pi} \approx 10tr/min$$

Question 14: Donner l'expression littérale et la valeur numérique de la vitesse atteinte par le public en km/h à cette vitesse de rotation.

$$V_M = L\dot{\theta} = L\sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{Lg}$$

$$V_M = \sqrt{10 * 10} = 10\ m.s^{-1} = 10 * \frac{3600}{1000} = 36\ km.h^{-1}$$