Théorèmes d'Abel et Tauberien faible

Dans tout le problème :

- $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
- On désigne alors par $\sum a_n x^n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ .$$

- On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite :

$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.

$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie I: Généralités

1. En utilisant des développements en série entière " usuels ", donner dans chaque cas, un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que :
   (a) $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
   (b) $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
   (c) $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
   (d) La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$ (justifier).

2. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$

   Indication : *On pourra utiliser une décomposition en éléments simples*

Partie II: Théorème d'Abel

4. On suppose dans cette question que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
   On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).
   On pose $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p}$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum\limits_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$
   (c) Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis que :
   pour tout entier $n \geqslant n_0$ et pour tout réel $x \in [0,1]$, $|R_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

Théorèmes d'Abel et Tauberien faible

(d) Conclure que la fonction $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

5. Que peut-on dire de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ si $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$?
6. Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction arctan puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.
7. On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

   (a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

   __Indication__ : On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ *pour* $n \geqslant 1$

   (b) Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ convergent.

   Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Partie III: Théorème Tauberien faible

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} n a_n = 0$ et $\lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = L \in \mathbb{R}$.

8. Montrer qu'il existe un réel K tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leqslant \frac{K}{n}$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = L - \sum_{k=0}^{n} a_k$.

   Prouver que l'on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ u_n = L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k\left(x^k - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.
10. (a) Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $M_n = \sup_{k\geqslant n}(|k a_k|)$.

    (b) Prouver que la suite (M_n) converge. Quelle est sa limite ?
11. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ |u_n| \leqslant |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|\left(1 - x^k\right) + \dfrac{1}{n(1-x)} M_n$

    puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ |u_n| \leqslant |L - f(x)| + (1-x)\sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + \dfrac{1}{n(1-x)} M_n$.
12. On prend $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

    En utilisant tout ce qui précède, prouver alors que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
13. Conclure en énonçant clairement le résultat obtenu concernant la fonction f.

THÉORÈMES D'ABEL ET TAUBERIEN FAIBLE

Partie I: Généralités

1. (a) Il suffit de considérer $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}$

   (b) Il suffit de considérer $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n$

   (c) Il suffit de considérer $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

   (d) On sait que si une suite d'applications bornées sur un domaine A converge uniformément sur ce domaine vers une application f, alors f est bornée sur A. Dès lors, n'importe lequel des trois exemples précédents convient : les sommes partielles sont bornées sur $[-1,1]$ (par Heine, puisque ce sont des fonctions polynomiales donc continues) et la somme n'est pas bornée sur $]-1,1[$.

2. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[0,1]$, donc sa somme est continue sur $[0,1]$ C'est du cours ! (on dispose ici de la convergence normale de la série sur [0,1] ...)

3. Pour $x \in]-1,1[$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n} \\ &= x\ln(1+x) + [\ln(1+x) - x]\end{aligned}$$

   Comme la question précédente s'applique, on en déduit : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$.

Partie II: Théorème d'Abel

4. (a) Comme $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$, on a tout simplement :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = R_n(x)$$

   (b) On travaille sur les sommes partielles :

$$\sum_{p=1}^{k}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = \sum_{p=1}^{k} r_{n+p-1}\, x^{n+p} - \sum_{p=1}^{k} r_{n+p}\, x^{n+p}$$

   après mise à l'écart du premier terme de la première somme et réindexation des autres, on obtient :

$$\sum_{p=1}^{k}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = r_n\, x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{k-1} r_{n+p}\, x^{p-1} - r_{n+k}\, x^{n+k}$$

   le dernier terme tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini car r_{n+k} tend vers 0 puisque la série $\sum a_n$ converge, et x^{n+k} est borné ; il suffit donc de faire tendre k vers l'infini pour obtenir la relation voulue.

   (c) Comme on l'a déjà signalé, r_n tend vers 0 ; par conséquent, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, on dispose d'un entier n_0 pour tout $k \geqslant n_0$ on ait $|r_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; alors on a bien $|r_{n+p}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geqslant n_0$ et p entier naturel. Et pour $x \in [0,1]$ et $n \geqslant n_0$ on obtient :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = \varepsilon$$

   (d) Continuité de la somme à gauche en 1, assurée par convergence uniforme de la série sur $[0,1]$.

Théorèmes d'Abel et Tauberien faible

5. Par contraposition, la série est divergente.
6. Par primitivation du développement de $\dfrac{1}{1+x^2}$ on obtient $\arctan(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x\in\,]-1,1[$; et l'on peut appliquer le théorème d'Abel pour obtenir : $\dfrac{\pi}{4}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$
7. (a) La série proposée converge par critère spécial des séries alternées. Le terme général du produit de Cauchy est ici : $w_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^n}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}}=(-1)^na_n$. (poser $u_0=v_0=0$)
   Or $k(n-k)\leqslant\dfrac{n^2}{4}$ $\big($étude des variations, ou mieux : $(n-2k)^2\geqslant 0\big)$ et par conséquent $a_n\geqslant\dfrac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$; ce qui montre que la série de terme général w_n diverge grossièrement.
   (b) Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n\,x^n$ et $\sum v_n\,x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. D'après le cours, c'est alors aussi le cas de $\sum w_n\,x^n$... Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a : $U(x)\,V(x)=W(x)$ pour tout $x\in[0,1[$. Mais d'après le théorème d'Abel appliqué à chacune des trois séries, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $U(x)$ tend vers $\sum u_n$, $V(x)$ tend vers $\sum v_n$, $W(x)$ tend vers $\sum w_n$. Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième.

Partie III: Théorème Tauberien faible

8. Par hypothèse, la suite (na_n) converge, elle est donc bornée, d'où l'existence de K.
9. Par définition, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1[$, on a

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(x^k-1\right)+\sum_{k=0}^{n}a_k+\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k=L-u_n+\sum_{k=0}^{n}a_k\left(x^k-1\right)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k$$

   d'où le résultat.
10. (a) Par définition de K, pour tout n, l'ensemble $\mathcal{E}_n=\{|ka_k|\,,\ k\geqslant n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par K. D'après l'axiome de la borne supérieure, elle admet donc une borne supérieure.
   (b) Par hypothèse, (ka_k) converge vers 0 ; pour $\varepsilon>0$ fixé on dispose donc de N tel que : $\forall k\geqslant N,\ |ka_k|\leqslant\varepsilon$, d'où par définition de la borne supérieure, $\forall n\geqslant N,\ 0\leqslant M_n\leqslant\varepsilon$. Par définition la suite (M_n) converge vers 0.
11. Par définition de M_n, on a : $\forall k\geqslant n,\ |a_k|\leqslant\dfrac{M_n}{k}\leqslant\dfrac{M_n}{n}$, d'où, connaissant la somme d'une série géométrique

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[\,,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kx^k\right|\leqslant\frac{M_n}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}x^k\leqslant\frac{M_n}{n}\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{M_n}{n}\cdot\frac{1}{1-x}$$

   Ensuite, on utilise l'identité

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1[\,,\ 1-x^k=(1-x)\sum_{j=0}^{k-1}x^j\leqslant(1-x)\cdot k$$

   d'où la seconde majoration.
12. D'après les résultats précédents, avec $x_n=1-\dfrac{1}{n}$, on obtient,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |u_n|\leqslant\left|L-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|+\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}|ka_k|+M_n$$

   On a
   — $L-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$;

Théorèmes d'Abel et Tauberien faible

— $na_n = \circ(1)$ et $\sum_{n \geqslant 0} 1$ diverge, donc $\sum_{k=0}^{n} ka_k = \circ(n)$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} ka_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

— $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

13. Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous venons de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et a pour somme L, autrement-dit que f peut se prolonger au segment $[0,1]$ avec $f(1) = L$. Ainsi f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$.