Étude de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$

Dans tout le problème α est un réel strictement positif.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application u_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$$

Partie I: Fonction Zêta de Riemann

On note ζ la fonction Zéta de Riemann, définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Soit $a > 1$
   (a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$
   (b) A-t-on une convergence uniforme sur $]1, a]$?
2. Étudier la limite de ζ en $+\infty$
3. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées k-ième
4. Soit $x \in]1, +\infty[$
   (a) En utilisant la comparaison série-intégrale, montrer que :
   $$0 \leqslant \zeta(x) - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} t^{-x}\,\mathrm{d}t \leqslant \zeta(x)$$
   (b) En déduire $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x)$
   (c) Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ en 1

Partie II: Étude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$

5. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   On note f_α sa somme
6. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > \frac{1}{2}$
7. Soit a un réel tel que $a > 0$.
   Prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$
8. On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.
   Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$
   (a) Établir les inégalités : $R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$ puis $R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant \frac{1}{3\sqrt{2}}$
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, a]$ où a est un réel strictement positif
9. Calculer $f_1(1)$ et $f_2(1)$. (On admettra que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$)

Étude de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)}$

10. Calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$
11. Montrer que $f_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\zeta(\alpha+1)}{x}$

Partie III: Régularité de f_α

12. Montrer que f_α est continue $]0,+\infty[$
13. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors f_α est continue $[0,+\infty[$
14. Soit x un réel strictement positif et φ_x l'application définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\varphi_x(t) = \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$$

   (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\int_1^n \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)} \leqslant \frac{x}{1+x^2} + \int_1^n \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$$

   (b) Calculer l'intégrale $\int_1^n \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ (On pourra effectuer le changement de variable $u = x\sqrt{t}$)

   (c) En déduire un équivalent simple de $f_{\frac{1}{2}}(x)$ lorsque x tend vers 0^+

15. On suppose que $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$

   (a) Montrer que $f_{\frac{1}{2}} \leqslant f_\alpha$

   (b) En déduire que f_α n'est pas continue en 0

16. Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'_α
17. Montrer que f_α est décroissante sur $[1,+\infty[$

Partie IV: Une autre expression sommatoire de f_α

18. Soit $x\in[1,+\infty[$. Montrer que la suite double $\left(\frac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha}x^{2k-1}}\right)_{k\geqslant1,n\geqslant2}$ est sommable.
19. En déduire que

$$\forall x\in[1,+\infty[,\quad f_\alpha(x) = \frac{x}{x^2+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}$$

20. On pose pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\geqslant 1$, $v_k(x) = (-1)^{k-1}\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}$

   (a) Montrer que v_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1,+\infty[$ et calculer $v_k^{(p)}(x)$ pour $p\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[1,+\infty[$

   (b) Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$

21. Soit $x\in[1,+\infty[$

   (a) Montrer que la suite $\left(\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}\right)_{k\geqslant1}$ est décroissante

   (b) En déduire que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}\right| \leqslant \frac{1}{(\alpha+n)\,x^{2n+1}}$$

   (c) Donner une valeur approchée de $f_2(2)$ à 10^{-2} près

Étude de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$

Partie I: Fonction Zêta de Riemann

On note ζ la fonction Zéta de Riemann, définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$

1. Soit $a > 1$
   (a) Soit $x \in [a, +\infty[$, on a :
   $$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}$$
   Puisque $a > 1$, alors la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^a}$ converge et, par suite, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, ainsi la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[a, +\infty[$
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_n(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} \dfrac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, a]$
2. La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et pour tout $n \geqslant 1$,
   $$f_n(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Par le théorème d'interversion limite somme, ζ admet une limite finie en $+\infty$ et
   $$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$$
3. — Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]1, +\infty[$
   — La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ de somme ζ
   — Soit $p \geqslant 1$ et $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $f_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p \ln^p(n)}{n^x}$. En conséquence
   $$\left|f_n^{(p)}(x)\right| = \frac{\ln^p(n)}{n^x} \leqslant \frac{\ln^p(n)}{n^a}$$
   Pour $\alpha \in]1, a[$, on a $n^{\alpha}.\dfrac{\ln^p(n)}{n^a} = \dfrac{\ln^p(n)}{n^{a-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc, par le critère de Riemann, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln^p(n)}{n^a}$ converge. On en déduit la convergence normale de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n^{(p)}$ sur $[a, b]$, puis sa convergence uniforme sur $[a, b]$.

   Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \ln^p(n)}{n^x}$$
4. Soit $x \in]1, +\infty[$
   (a) Soit $n \geqslant 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissance sur $[1, +\infty[$, alors pour $t \in [n, n+1]$, on a :
   $$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \quad &\Longrightarrow \quad \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\,\mathrm{d}t \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^x} \end{aligned}$$

Étude de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$

On somme ces inégalité de n allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$0 \leqslant \zeta(x) - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} t^{-x}\,\mathrm{d}t \leqslant \zeta(x)$$

(b) La valeur $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}$ et l'inégalité précédente donnent $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x)$ et puisque $\dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$, alors $\zeta(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$.

(c) L'encadrement précédent donne $1 \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant x$, et par le théorème des gendarmes $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1$ c'est-à-dire $\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$

Partie II: Étude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$
   - Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \sim \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$. Or la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge
   - Si $x = 0$, la série nulle $\sum_{n\geqslant 1} u_n(0)$ converge

   Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

6. u_n est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= \left(\frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}\right)' \\ &= \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
u_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$	$\searrow$	0

   Le signe de $u_n'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est celui de $1 - nx^2$.
   On obtient son tableau de variations et $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Ainsi $\sum_{n\geqslant 1} \|u_n\|_\infty$ converge si, et seulement, si $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge si, et seulement, si $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$ si, et seulement, si $\alpha > \dfrac{1}{2}$

7. Soit a un réel tel que $a > 0$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 \geqslant \dfrac{1}{a^2}$.
   Soit $n \geqslant n_0$, l'application u_n est décroissante sur $[a, +\infty[$ et, par suite, pour tout $x \in [a, +\infty[: |u_n(x)| = u_n(x) \leqslant u_n(a)$. La série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n(a)$ est convergente, d'où $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. En outre la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée, donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$

8. On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$

Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$

(a) On a $R_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x}{k^{\alpha}\left(1+kx^2\right)}\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{x}{k^{\alpha}\left(1+kx^2\right)}$. Pour tout $k\in[\![n+1,2n]\!]$, on a $k^{\alpha}\leqslant(2n)^{\alpha}\leqslant\sqrt{2n}$ et, par suite, $R_n(x)\geqslant\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$ puis

$$\begin{aligned}R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)&\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}\\&\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{2n}\left(1+\dfrac{2n}{n}\right)}\\&\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{3\sqrt{2n}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Ainsi $R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\geqslant\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

(b) Pour tout $n\geqslant\dfrac{1}{a^2}$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\in[0,a]$ et $\left|R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|=R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\geqslant\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$, donc $\|R_n\|_{\infty}^{[0,a]}\not\to 0$, en conséquence la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,a]$

9. Par télescopage $f_1(1)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{1+n}\right)=1.$

Par la décomposition en éléments simples, on a $\dfrac{1}{X^2(X+1)}=\dfrac{1}{X^2}-\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X+1}$ et, par suite,

$$f_2(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(1+n)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\zeta(2)-1$$

10. — La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ pour $a>0$;

— Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $u_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

D'après le théorème d'interversion limite et somme $f_\alpha(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

11. — Puisque $\forall x\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\left|\dfrac{x^2}{n^{\alpha}(1+nx^2)}\right|=\dfrac{x^2}{n^{\alpha}(1+nx^2)}\leqslant\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{x^2}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$;

— Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{x^2}{n^{\alpha}(1+nx^2)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$

D'après le théorème d'interversion limite et somme $xf_\alpha(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$, soit $f_\alpha(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\zeta(\alpha+1)}{x}$

Partie III: Régularité de f_α

12. — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'application $u_n:x\longrightarrow\dfrac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

— Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$. D'après la question 7 la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc elle l'est uniformément sur $[a,+\infty[$ puis en particulier sur $[a,b]$

Donc f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$

13. Si $\alpha>\dfrac{1}{2}$
    — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'application $u_n : x\longrightarrow \dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
    — D'après la question 6 la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, donc elle l'est uniformément sur $\mathbb{R}_+$

    Donc f_α est continue $\mathbb{R}_+$
14. Soit x un réel strictement positif et φ_x l'application définie sur $[1,+\infty[$ par :
$$\varphi_x(t)=\frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$$
    (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. L'application φ est continue, décroissante et positive sur $[1,+\infty[$, on utilise les deux inégalités
$$\forall k\geqslant 1,\quad \int_k^{k+1}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\varphi_x(k)\quad\text{ et }\quad\forall k\geqslant 2,\quad \varphi_x(k)\leqslant\int_{k-1}^{k}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$$
    On somme la première inégalité de k allant de 1 à n et la deuxième de k allant de 2 à n, on obtient
$$\int_1^{n+1}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)}\text{ et }\sum_{k=2}^{n}\frac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)}\leqslant\int_1^{n}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$$
    Par transitivité, la première inégalité donne $\displaystyle\int_1^{n}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)}$ et on ajoute le nombre $\varphi_x(1)$ aux deux membres de la deuxième inégalité, on aboutit à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)}\leqslant\frac{x}{1+x^2}+\int_1^{n}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.
    Bref
$$\int_1^{n}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)}\leqslant\frac{x}{1+x^2}+\int_1^{n}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$$
    (b) On effectue le changement de variable $u=x\sqrt{t}$. Alors $t=1\Rightarrow u=x$, $t=n\Rightarrow u=x\sqrt{n}$, $t=\dfrac{u^2}{t^2}$ et $\mathrm{d}t=\dfrac{2u}{x^2}\mathrm{d}u$, par la formule de changement de variables, il vient
$$\begin{aligned}\int_1^{n}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t &= \int_x^{x\sqrt{n}}\frac{x}{\frac{u}{x}\left(1+u^2\right)}.\frac{2u}{x^2}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\int_x^{x\sqrt{n}}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= 2\left[\arctan(u)\right]_x^{x\sqrt{n}}\\ &= 2\left(\arctan\left(x\sqrt{n}\right)-\arctan\left(x\right)\right)\end{aligned}$$
    (c) Tout d'abord on fait tendre n vers l'infini, dans l'inégalité de 14a, on obtient l'encadrement
$$\pi-2\arctan(x)\leqslant f_{\frac{1}{2}}(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}+\pi-2\arctan(x)$$
    Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\pi-2\arctan(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1+x^2}+\pi-2\arctan(x)=\pi$, alors $f_{\frac{1}{2}}(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}\pi$
15. On suppose que $\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$
    (a) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $n^{\alpha}\leqslant\sqrt{n}$, ce qui donne l'inégalité $\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}\leqslant\dfrac{x}{\sqrt{n}\left(1+nx^2\right)}$, puis par sommation $f_{\frac{1}{2}}(x)\leqslant f_\alpha(x)$. Ceci est vrai pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, alors $f_{\frac{1}{2}}\leqslant f_\alpha$

Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)}$

(b) Si f_α est continue en 0, alors on doit avoir $f_\alpha(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{} f_\alpha(0)=0$. Mais l'inégalité précédente donne $\pi=\lim\limits_{x\to 0^+} f_{\frac{1}{2}}(x)\leqslant \lim\limits_{x\to 0^+} f_\alpha(x)$. Absurde

16. — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'application u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad u_n'(x)=\frac{1-nx^2}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)^2}$$

— La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$

— Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ et soit $x\in[a,b]$, on a

$$\left|\frac{nx^2-1}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)^2}\right|\leqslant\frac{nx^2+1}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)^2}\leqslant\frac{nb^2+1}{n^\alpha\left(1+na^2\right)^2}\leqslant\frac{nb^2+1}{a^4n^{\alpha+2}}$$

Comme $\dfrac{nb^2+1}{a^4n^{\alpha+2}}\sim\dfrac{b^2}{a^4}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge ($\alpha>0$), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n'$ converge normalement sur le segment $[a,b]$, donc elle l'est uniformément

D'après le théorème de la dérivation terme à terme f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f_\alpha'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-nx^2}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)^2}$$

17. Pour tout $x\in[1,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, la fraction $\dfrac{1-nx^2}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)}$, dont le dénominateur positif et le numérateur négatif, est positive, donc $f_\alpha'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1-nx^2}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)}\leqslant 0$, puis f_α est décroissante sur $[1,+\infty[$

Partie IV: Une autre expression sommatoire de f_α

18. — Soit $n\geqslant 2$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{k+\alpha}x^{2k-1}}=\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{x}{n^\alpha(nx^2)^k}$ converge car la série géométrique $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{(nx^2)^k}$, de raison $0<\dfrac{1}{nx^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$, converge

— $T_n=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{x}{n^\alpha(nx^2)^k}=\dfrac{x}{n^\alpha\left(nx^2-1\right)}\sim\dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}T_n$ converge

Donc la suite double $\left(\dfrac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha}x^{2k-1}}\right)_{k\geqslant 1,n\geqslant 2}$ est sommable.

19. D'après le théorème de Fubini, on a $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha}x^{2k-1}}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha}x^{2k-1}}$. Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha}x^{2k-1}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{x^{2k-1}}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+\alpha}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{x^{2k-1}}\left(\zeta(\alpha+k)-1\right)$$

D'autre part

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{n^{k+\alpha}x^{2k-1}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-x}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{nx^2}\right)^k=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-x}{n^\alpha}\frac{\frac{-1}{nx^2}}{1+\frac{1}{nx^2}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x}{n^\alpha\left(nx^2+1\right)}=f_\alpha(x)-\frac{x}{x^2+1}$$

D'où la formule demandée

$$\forall x\in[1,+\infty[,\quad f_\alpha(x)=\frac{x}{x^2+1}+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}$$

Étude de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$

20. On pose pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\geqslant 1$, $v_k(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}$

(a) v_k est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[1,+\infty[$, car il s'agit de la restriction d'une fraction rationnelle de pôle 0 sur $[1,+\infty[$. Pour $p\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[1,+\infty[$, on a

$$v_k^{(p)}(x)=(-1)^{k+p-1}\frac{(2k-2+p)!}{(2k-2)!}\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k+p-1}}$$

(b) — Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, l'application v_k est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]1,+\infty[$

— La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}v_k$ converge simplement sur $]1,+\infty[$

— Soit $[a,b]\subset\,]1,+\infty[$ et soit $x\in[a,b]$, on a

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad \left|v_k^{(p)}(x)\right|=\frac{(2k-2+p)!}{(2k-2)!}\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k+p-1}}\leqslant\frac{(2k-2+p)!}{(2k-2)!}\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{a^{2k+p-1}}\sim\frac{(2k)^p}{a^{2k+p-1}}\left(\zeta(\alpha+k)-1\right)$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{(2k)^p}{a^{2k+p-1}}$ converge, d'après le critère de D'Alembert,

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}v_k$ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]1,+\infty[$. Puis f_{α} est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]1,+\infty[$ comme somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]1,+\infty[$

21. Soit $x\in[1,+\infty[$

(a) Les deux suites $(\zeta(\alpha+k)-1)_{k\geqslant 1}$ et $\left(\dfrac{1}{x^{2k-1}}\right)_{k\geqslant 1}$ de réels positifs sont décroissantes, donc $\left(\dfrac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}\right)_{k\geqslant 1}$ est décroissante

(b) $\dfrac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, car $\zeta(\alpha+k)\xrightarrow[k\to+\infty]{}1$ et la suite $\left(\dfrac{1}{x^{2k-1}}\right)_{k\geqslant 1}$ est bornée, on déduit que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1}\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}$ est alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées, alors

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\zeta(\alpha+k)-1}{x^{2k-1}}\right|\leqslant\frac{1}{(\alpha+n)\,x^{2n+1}}$$

(c) D'après la question précédente

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\left|f_2\left(2\right)-\left(\frac{2}{5}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\zeta(2+k)-1}{2^{2k-1}}\right)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\zeta(2+k)-1}{2^{2k-1}}\right|\leqslant\frac{1}{(2+n)\,2^{2n+1}}$$

Pour $n=2$, on a $\dfrac{1}{(2+n)\,2^{2n+1}}=\dfrac{1}{128}\leqslant 10^{-2}$ et alors $\dfrac{2}{5}+\dfrac{\zeta(3)-1}{2}-\dfrac{\zeta(4)-1}{8}=\dfrac{1}{40}+\dfrac{4\zeta(3)-\zeta(4)}{8}$ est une valeur approchée de $f_2(2)$ à 10^{-2} près