Puissance et travail d'une force-Théorème de l'énergie cinétique

Table des matières

1 Puissance et travail d'une force 2
- 1.1 Définition 2
- 1.2 Exemples 2
  - 1.2.1 Taravail d'une force constante 2
  - 1.2.2 Travail d'une force de frottement 3
  - 1.2.3 Travail de la force magnétique 4

2 Enérgie cinétique-Théorème de l'énergie cinétique 4
- 2.1 Energie cinétique - Théorème de la puissance cinétique 4
- 2.2 Théorème de l'énergie cinétique 5
- 2.3 Application : pendule simple 5

3 Forces conservatives-Energie potentielle 5
- 3.1 Notion d'une force conservative-Energie potentielle 5
- 3.2 Exemples 6
  - 3.2.1 Particule dans un champ de pesanteur uniforme 6
  - 3.2.2 Force de frottement 6
  - 3.2.3 Force de rappel élastique 7
  - 3.2.4 Champ de force newtonienne 7

4 Energie mécanique 8
- 4.1 Définition 8
- 4.2 Théorème de l'énergie mécanique 8
- 4.3 Intégrale première de l'énergie 8

5 Equilibre d'un point matériel dans un champ de forces conservatives 9
- 5.1 Problème à un degré de liberté 9
- 5.2 Condition d'équilibre 9
- 5.3 Condition de stabilité d'équilibre 9
- 5.4 Exemples 11
- 5.5 Etat lié-Etat de diffusion 12
  - 5.5.1 Barrière de l'énergie potentielle 12
  - 5.5.2 Cuvette de l'énergie potentielle 12
  - 5.5.3 Cas général 12

1 Puissance et travail d'une force

1.1 Définition

Définition : On définit la puissance P d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{V}(M/R)$ par rapport à un référentiel R comme :

$$\boxed{P = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{V}(M/R) \text{ : unité : watt (w)}}$$

- $P > 0$: puissance motrice
- $P < 0$: puissance résistance

• le point M effectue un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ pendant l'intervalle du temps dt sous l'action d'une force $\overrightarrow{F}$,on définit le travail élémentaire par :

$$\boxed{\delta W = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} \text{ : unité joule (J)}}$$

- $\delta W = \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{V}(M/R)dt = P.dt$

$$\boxed{P = \frac{\delta W}{dt}}$$

- en coordonnées cartésiennes

$$\underset{R}{\overrightarrow{F} =} \left| \begin{array}{l} f_x \\ f_y \\ f_z \end{array} \right. \text{ ;et } \underset{R}{d\overrightarrow{OM} =} \left| \begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array} \right.$$

$$\boxed{\delta W = f_x dx + f_y dy + f_z dz}$$

- en coordonnées polaire (mouvement plan)

$$\underset{R}{\overrightarrow{F} =} \left| \begin{array}{l} f_r \\ f_\theta \end{array} \right. \text{ ;et } \underset{R}{d\overrightarrow{OM} =} \left| \begin{array}{l} dr \\ rd\theta \end{array} \right.$$

$$\boxed{\delta W = f_r dr + f_\theta.rd\theta}$$

- le travail de $\overrightarrow{F}$ le long de (C) : le point matériel passe de M_1 à M_2

$$\boxed{W = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr}}$$

avec $\overrightarrow{dr} = d\overrightarrow{OM}$

1.2 Exemples

1.2.1 Taravail d'une force constante

- la force $\overrightarrow{F}$ est constante en module et en sens
- $W = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F}d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\boxed{W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{M_1M_2}}$$

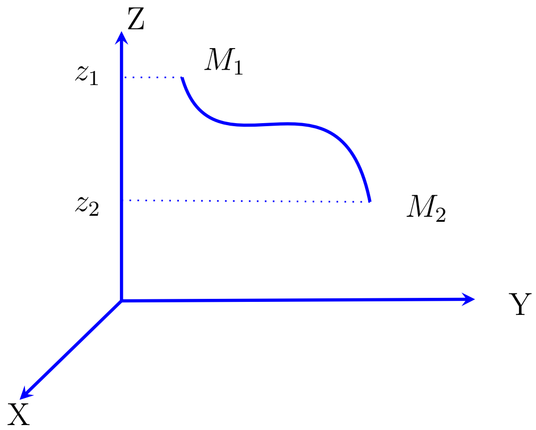
Conclusion : le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin suivi

$$\boxed{W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{M_1M_2}}$$

- Cas de la force de pesanteur

$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ est une force constante
$W = m\overrightarrow{g}.\overrightarrow{M_1M_2}$
$W = mg(z_1 - z_2)$

$$\boxed{W_{M_1\to M_2}(\overrightarrow{P}) = mg(z_1 - z_2)}$$

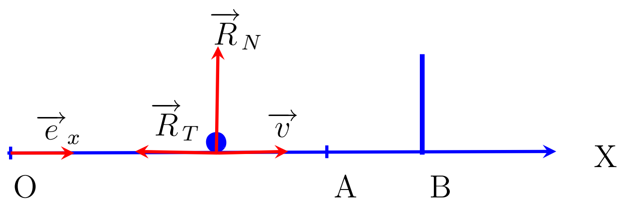


- Remarque

  - si $W > 0$: travail moteur
  - si $W < 0$: travail résistant

1.2.2 Travail d'une force de frottement

Considérons un point matériel qui se déplace sur ox avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0$,il rebondit sur une paroi verticale et repasse par le point A .



- P.F.D : $\overrightarrow{R}_T + \overrightarrow{R}_N + m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a}$
  - projection sur oy : $0 + R_N - mg = 0$ donc $\boxed{R_N = mg}$
  - projection sur ox : $-R_T + 0 + 0 = ma$
  - $R_T = fR_N$ avec f : coefficient de frottement donc $\boxed{R_T = fmg}$
- le travail W_1 de la force de frottement $\overrightarrow{R}_T$ au cours du trajet directe entre O et A
  $W_1 = \int_O^A \overrightarrow{R}_T\overrightarrow{dr}$ avec : $\overrightarrow{dr} = dx\overrightarrow{e}_x$
  $W_1 = -\int_{x_O}^{x_A} f.mgdx = -fmg(x_A - x_O) = -fmg.OA$

$$\boxed{W_1 = -fmg.OA}$$

- le travail W_2 de $\overrightarrow{R}_T$ lors du trajet OBA

$W_2 = \int_{(OBA)} \overrightarrow{R}_T.\overrightarrow{dr} = \int_O^B \overrightarrow{R}_T.\overrightarrow{dr} + \int_B^A \overrightarrow{R}_T.\overrightarrow{dr} = -\int_{x_O}^{x_B} fmgdx - \int_{x_A}^{x_B} fmgdx$

$W_2 = -fmgOB - fmgBA$

$$\boxed{W_2 = -fmg(OA + 2AB)}$$

$W_1 \neq W_2$ car R_T n'est pas une force constante elle change le sens

Conclusion : le travail du force de frottement dépend du chemin suivi .

1.2.3 Travail de la force magnétique

- la force magnétique

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}$$

  - q : charge de la particule
  - $\overrightarrow{v}$: vitesse de la particule
  - $\overrightarrow{B}$: champ magnétique

- le travail de la force magnétique

$W = \int \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dOM} = \int \overrightarrow{v}dt.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = 0$

2 Enérgie cinétique-Théorème de l'énergie cinétique

2.1 Energie cinétique - Théorème de la puissance cinétique

Considérons un point matériel de masse m qui se déplace avec une vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport à un référentiel galiléen .

Définition : on définit l'énergie cinétique du point matériel de masse m et ed vitesse $\overrightarrow{v}$ par

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2}$$

- P.F.D $\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$

$P = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{V} = m\overrightarrow{V}\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2\right) = \frac{dE_c}{dt}$

Théorème de puissance cinétique : Par rapport à un référentiel galiléen la dérivée par rapport au temps dt de l'énergie cinétique E_c d'un point matériel égale à la puissance de la résultante des forces appliquées sur ce point matériel .

$$\boxed{P = \frac{dE_c}{dt}}$$

2.2 Théorème de l'énergie cinétique

- $P = \dfrac{dE_c}{dt} \Rightarrow dE_c = Pdt = \delta W$

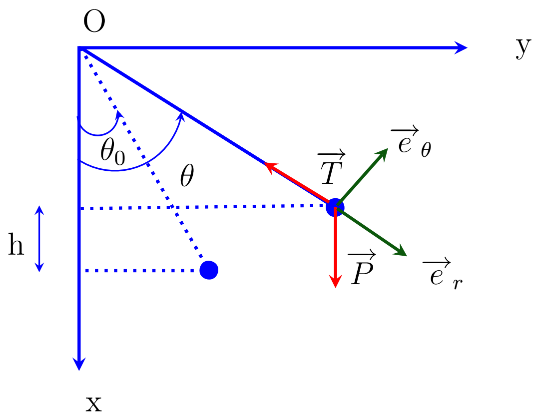
$$\boxed{\Delta E_c = W(\overrightarrow{F})}$$

Enoncé : Dans un référentiel galiléen ,la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants t_1 et t_2 égale au travail de la résultante des forces appliquées sur ce point matériel entre ces deux instants

$$\boxed{\Delta E_c = W(\overrightarrow{F})}$$

2.3 Application : pendule simple

- à $t = 0$ le pendule est repéré par θ_0
- à t le pendule est repéré par θ
- $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$
- $\overrightarrow{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d(l\overrightarrow{e}_r)}{dt} = l\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta$
- $E_c = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$
- $E_c(t=0) = E_{c0} = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2$



- $W(\overrightarrow{P}) = -mgh = -mgl(\cos\theta_0 - \cos\theta_0)$
- $W(\overrightarrow{T}) = 0$
- théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_c = W(\overrightarrow{P}) + W(\overrightarrow{T}) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \dfrac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$
- l'équation du mouvement

$$\boxed{\ddot{\theta}^2 + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

- pour les θ faibles : $\sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

3 Forces conservatives-Energie potentielle

3.1 Notion d'une force conservative-Energie potentielle

Définition : la force $\overrightarrow{F}$ est dite conservative s'elle existe une fonction d'état E_p appelée énergie potentielle ne dépend pas du chemin suivi tel que :

$$\boxed{\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}d\overrightarrow{OM} = -dE_p}$$

- $dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$
- $\overrightarrow{grad}E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\overrightarrow{k}$
- $d\overrightarrow{OM} = dx\,\overrightarrow{i} + dy\,\overrightarrow{j} + dz\,\overrightarrow{k}$
- $\overrightarrow{grad}E_p.d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}E_p.d\overrightarrow{OM} = dE_p}$$

- $\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}d\overrightarrow{OM} = -dE_p = -\overrightarrow{grad}E_p.d\overrightarrow{OM}$

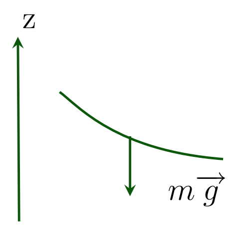
$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p}$$

Conclusion : une force est dite conservative s'elle existe une fonction d'état E_p ne dépend pas du chemin suivi tel que

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p}$$

3.2 Exemples

3.2.1 Particule dans un champ de pesanteur uniforme



- $\delta W(\overrightarrow{P}) = m\overrightarrow{g}\overrightarrow{dr}$
- $\overrightarrow{dr} = dx\,\overrightarrow{e}_x + dy\,\overrightarrow{e}_y + dz\,\overrightarrow{e}_z$; et $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e}_z$
- $\delta W = -mgdz = -d(mgz + cte) = -dE_p$

$$\boxed{\delta W = -dE_p}$$

l'énergie potentielle de pesanteur

$$\boxed{E_p = mgz + cte}$$

Conclusion

- la force de pesanteur $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ est une force conservative
- l'énergie potentielle de pesanteur

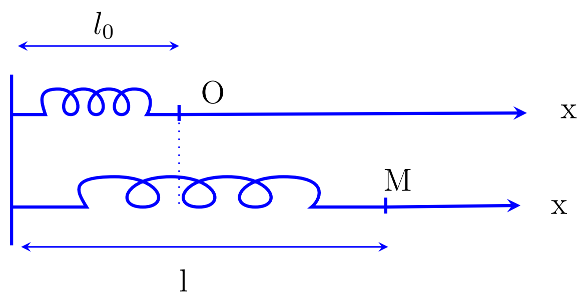
$$\boxed{E_p = mgz + cte}$$

3.2.2 Force de frottement

le travail de la force de frottement dépend du chemin suivi donc il s'agit d'une force non conservative

3.2.3 Force de rappel élastique

- $\overrightarrow{OM} = (l - l_0)\overrightarrow{e}_x = x\overrightarrow{e}_x$
- $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{dr} = dx\overrightarrow{e}_x$
- force de rappel : $\overrightarrow{F} = -kx\overrightarrow{e}_x$
- $\delta W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr} = -kxdx$
  $\delta W = -d(\frac{1}{2}kx^2 + cte) = -dE_p$



$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cte}$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cte = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte}$$

Conclusion :

- la force de rappel élastique est une force conservative
- l'énergie potentielle élastique

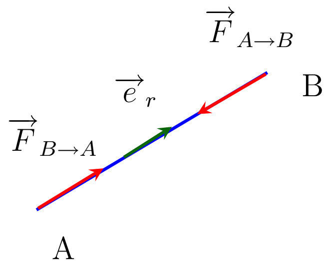
$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cte = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte}$$

3.2.4 Champ de force newtonienne

► Force gravitatinnelle

- $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_{A\rightarrow B} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\overrightarrow{e}_r$
  $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB}$
- $\alpha = Gm_A m_B$

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e}_r}$$



- En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{dr} = dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e}_\varphi$
- $\delta W = \overrightarrow{F}\overrightarrow{dr} = -\frac{\alpha}{r^2}dr = -d(-\frac{\alpha}{r} + cte) = -dE_p$

$$\boxed{E_p = -\frac{\alpha}{r} + cte}$$

► Force colombienne : interaction entre deux charges q_1 et q_2 ,la distance entre les deux charges r

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{e}_r}{r^2} = -\frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e}_r}$$

avec $\alpha = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$

Conclusion :

- la force newtonienne est conservative
- l'énergie potentielle newtonienne

$$\boxed{E_p = -\frac{\alpha}{r} + cte}$$

4 Energie mécanique

4.1 Définition

Définition : On appelle énergie mécanique E_m d'un point matériel M(m) la somme de son énergie cinétique E_c et son énergie potentielle E_p

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

4.2 Théorème de l'énergie mécanique

- la résultante des forces appliquées à un point matériel s'écrit : $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_c + \overrightarrow{F}_{nc}$
  - $\overrightarrow{F}_c$: la résultante des forces conservatives
  - $\overrightarrow{F}_{nc}$: la résultante des forces non conservatives
- $W(\overrightarrow{F}_c) = -\Delta E_p$
- théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = W(\overrightarrow{F}_c) + W(\overrightarrow{F}_{nc}) = -\Delta E_p + W(\overrightarrow{F}_{nc})$ donc $\Delta(E_c + E_p) = W(\overrightarrow{F}_{nc}) \Rightarrow \Delta E_m = W(\overrightarrow{F}_{nc})$

$$\boxed{\Delta E_m = W(\overrightarrow{F}_{nc})}$$

Enoncé : Dans un référentiel galiléen,la variation de l'énergie mécanique entre deux instants égale au travail de la résultante des forces non conservatives entre ces instants

$$\boxed{\Delta E_m = W(\overrightarrow{F}_{nc})}$$

- $\frac{dE_m}{dt} = P(\overrightarrow{F}_{nc})$: puissance des forces non conservatives

4.3 Intégrale première de l'énergie

- si $W(\overrightarrow{F}_{nc}) = 0$ alors $\Delta E_m = 0$

$$\boxed{E_m = cte \text{ : intégrale première de l'énergie}}$$

- dans ce cas on dit que l'énergie mécanique se conserve : l'énergie cinetique se transforme en énergie potentielle et inversement
- l'évolution du point matériel est dite conservative

Conclusion : Dans un référentiel galiléen l'énergie mécanique d'un point mtériel en évolution conservative reste constante . Cette constante représente l'intégrale première de l'énergie

$$\boxed{E_m = cte}$$

• Remarque : L'énergie mécanique est non conservative d'où le premier principe qui introduit l'énergie totele qui est conservative

$$\boxed{\Delta E_{totale} = W(\overrightarrow{F}_{nc}) + Q}$$

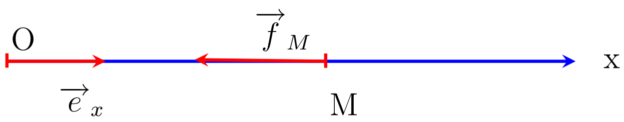
avec $E_{totale} = E_m + U$; U représente l'énergie interne

5 Equilibre d'un point matériel dans un champ de forces conservatives

5.1 Problème à un degré de liberté

- Le problème à un degré de liberté ne fait intervenir qu'une seule variable de position dans les grandeurs physiques mises en jeu .
- Considérons un point matériel M en mouvement rectiligne selon l'axe ox de vecteur de position $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e}_x$,soumis à l'action d'un champ des forces de la forme

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \overrightarrow{f}(M) = f(x)\overrightarrow{e}_x}$$



- la force $\overrightarrow{f}$ est conservative donc $\overrightarrow{f}$ dérive de l'énergie potentielle
  $\delta W = \overrightarrow{f}.\overrightarrow{dr} = f(x)dx = -dE_p$

$$\boxed{dE_p = -f(x)dx}$$

5.2 Condition d'équilibre

Condition d'équilibre : On dit qu'il y a équilibre en $x = x_e$ si

$$\boxed{\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_e} = -f(x_e) = 0}$$

5.3 Condition de stabilité d'équilibre

- On se limite à un petit déplacement algébrique $(x - x_e)$ à partir de la position d'équilibre x_e .

- développement limité à l'ordre 2 au voisinage de x_e de $E_p(x)$

  $E_p(x) \approx E_p(x_e) + (x - x_e)\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_e} + \frac{(x-x_e)^2}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} + \ldots$

  or $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_e} = 0$ donc

$$\boxed{E_p(x) \approx E_p(x_e) + \frac{1}{2}(x-x_e)^2\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e}}$$

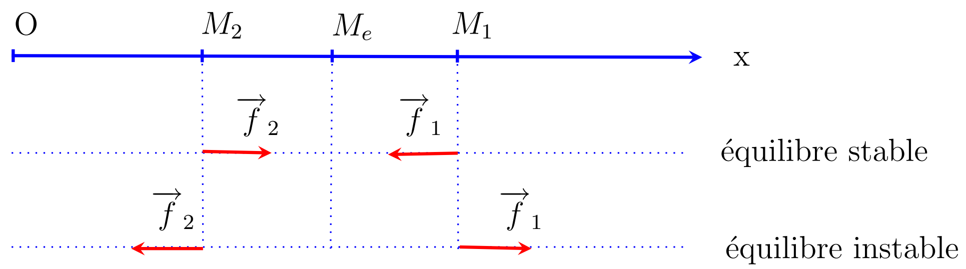
$$\boxed{f(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -(x-x_e)\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e}}$$

- position d'équilibre stable : la force $\overrightarrow{F}$ a tendance de ramener le point matériel vers sa position d'équilibre donc

$$\boxed{\left(\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM}\right)_{x=x_e} < 0}$$

- position d'équilibre instable : la force $\overrightarrow{F}$ a tendance d'éloigner le point matériel de sa position d'équilibre donc

$$\boxed{\left(\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM}\right)_{x=x_e} > 0}$$



- au voisinage d'équilibre stable x_e
  - supposons que le point matériel M se déplace dans le sens négative donc $x_e > x \Rightarrow x - x_e > 0$
  - $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_eM_2} = -dx\,\overrightarrow{e}_x$ avec : $dx = x_{M_e} - x_{M_2} > 0$
  - $\overrightarrow{F} = f(x)\overrightarrow{e}_x = -(x-x_e)\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e}\overrightarrow{e}_x$
  - $\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = (x-x_e)\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} dx$

    $\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} > 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} > 0$

$$\boxed{\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} > 0}$$

- au voisinage de l'équilibre instable : on montre que

$$\boxed{\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} < 0}$$

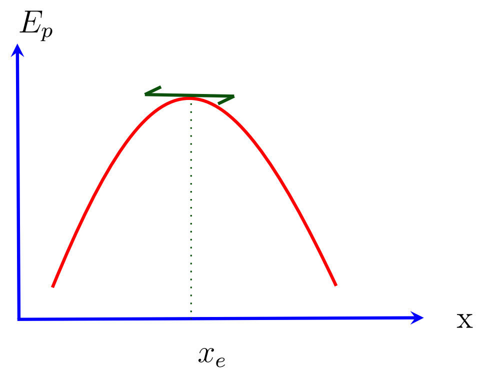
Conclusion

- x_e position d'équilibre stable : $\boxed{\left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} > 0}$
- x_e position d'équilibre instable : $\boxed{\left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} < 0}$

5.4 Exemples

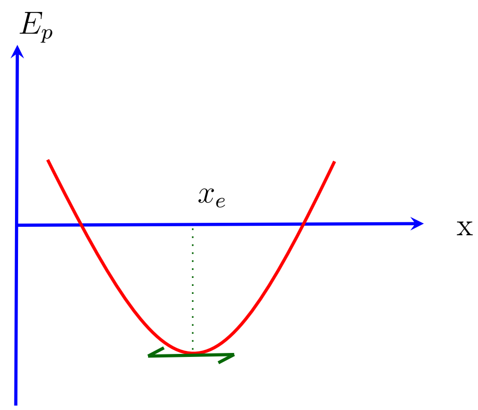
▶ Barrière d'énergie potentielle

- $E_p(x) = a(x-x_e)^2 + b\,;\, a < 0$
- $\left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} = 2a < 0$ position d'équilibre instable



▶ Puit (cuvette) de potentielle

- $E_p(x) = a(x-x_e)^2 + b\,;\, a > 0$
- $\left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_e} = 2a > 0$ position d'équilibre stable



Conclusion

- si x_e est la position d'équilibre stable ,l'énergie potentielle est minimale en x_e
- si x_e est la position d'équilibre instable,l'énergie potentielle est maximale en x_e

5.5 Etat lié-Etat de diffusion

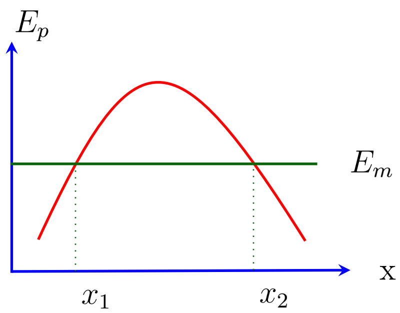
5.5.1 Barrière de l'énergie potentielle

- $E_m = E_c + E_p$ avec :$Ec \geqslant 0$ donc

$$\boxed{E_m \geqslant E_p}$$

- le domaine permis à la particule est

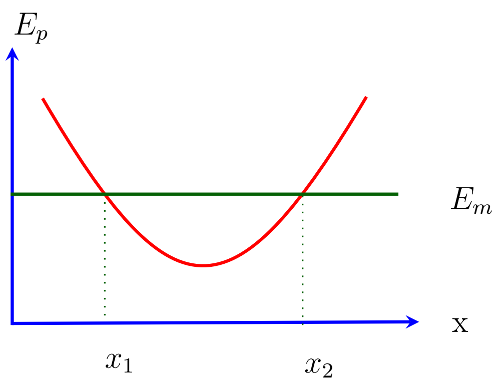
$$\boxed{x \leqslant x_1; x \geqslant x_2}$$



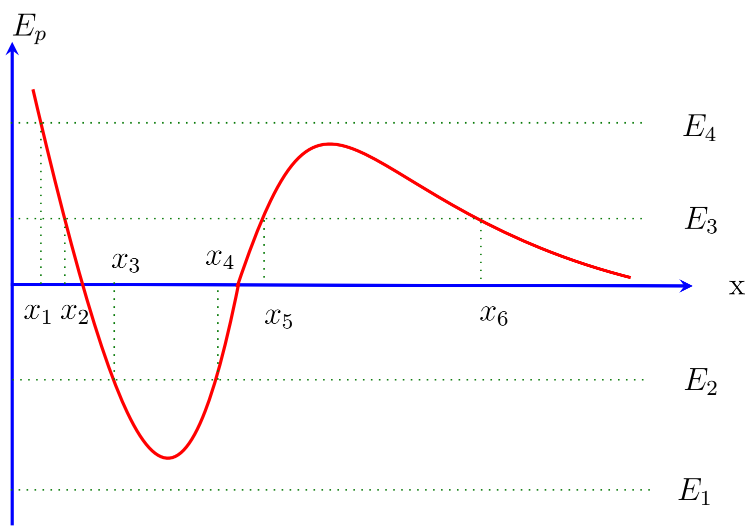
- si à $t = 0$,$x_0 < x_1$ le point matériel ne peut franchir la barrière potentielle
- si à $t = 0$,$x_0 > x_2$ le point matériele peut s'éloigner à l'infini , on dit qu'on a un état de diffusion .

5.5.2 Cuvette de l'énergie potentielle

Domaine permis est $[x_1, x_2]$: la particule effectue un mouvement périodique (en absence des frottements) ,on dit que la prticule se trouve dans l'état lié



5.5.3 Cas général



suivant les conditions initiales on peut prévoir :

- $E_m = E_1$: mouvement impossible ($E_c < 0$)
- $E_m = E_2$:mouvement possible dans $x \in [x_3, x_4]$: état lié

- $E_m = E_3$: mouvement possible dans $x \in [x_2, x_5] \cup [x_6, \infty[$
  - si $x \in [x_2, x_5]$: état lié
  - $x \in [x_6, \infty[$: état de diffusion
- $E_m = E_4$: mouvement possible $x \in [x_1, \infty[$: état de diffusion