Chapitre 3. Espaces euclidiens

Plan du chapitre

1 Rappels des différents résultats de maths sup

- Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

  L'inégalité de Cauchy-Schwarz et ses cas d'égalité :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ |\langle x,y\rangle|\leqslant\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}\text{ et de plus }|\langle x,y\rangle|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}\Leftrightarrow(x,y)\text{ liée.}$$

- La norme euclidienne (norme associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$) est définie par : $\forall x\in E,\ \|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

  L'inégalité triangulaire et ses cas d'égalité :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\text{ et de plus }\|x+y\|=\|x\|+\|y\|\Leftrightarrow x=0\text{ ou }(x\neq 0\text{ et }\exists\lambda\in\mathbb{R}^+/\ y=\lambda x).$$

  On a les identités de polarisation :

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in E^2,\ \langle x,y\rangle&=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).\end{aligned}$$

- Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale si et seulement si $\forall (i,j)\in I^2$, $(i\neq j\Rightarrow\langle e_i,e_j\rangle=0)$.
  Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormale si et seulement si $\forall (i,j)\in I^2$, $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{i,j}$.
  Une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre. Une famille orthonormale est libre.

- Orthonormalisée d'une famille libre : soit $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel $(E,\langle\ ,\ \rangle)$.
  Il existe une famille orthonormale $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et une seule telle que :
  1) $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\text{Vect}\,(e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}=\text{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$;
  2) $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\langle e_k,u_k\rangle>0$.

  Procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

$$e_1=\frac{1}{\|u_1\|}u_1\text{ et,}$$

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ e_{k+1}=\frac{1}{\left\|e'_{k+1}\right\|}e'_{k+1}\text{ où }e'_{k+1}=u_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\langle u_{k+1},e_i\rangle\,e_i.$$

- Si $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien de dimension finie non nulle n, il existe au moins une base orthonormée de E.

- Si $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E, alors pour tous vecteurs $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $y=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$,

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=\langle x,e_i\rangle\qquad\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\qquad\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

- Si A est une partie de E, l'orthogonal de A est $A^\perp=\{y\in E/\ \forall x\in A,\ \langle x,y\rangle=0\}$.
  Pour toute partie A de E, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. $\{0\}^\perp=E$ et $E^\perp=\{0\}$ (car un vecteur orthogonal à tout vecteur de E est en particulier orthogonal à lui-même).

- Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a toujours
  - $E=F\oplus F^\perp$. On peut dire que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.
  - la dimension de $F^\perp$ est $n-\dim(F)$.
  - si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base orthonormée de F, pour tout x de E, $p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}(x|e_i)\,e_i$ (où p_F est la projection orthogonale sur F).

  La distance d'un vecteur x au sous-espace F est alors

$$d(x,F)=\text{Inf}\{\|x-y\|,\ y\in F\}=\|x-p_F(x)\|=\|p_{F^\perp}(x)\|.$$

  - $\left(F^\perp\right)^\perp=F$

2 Formes linéaires sur un espace euclidien

Théorème 1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

1) Pour tout $u \in E$, l'application $\varphi_u\ :\ x \mapsto \langle u, x\rangle$ est une forme linéaire sur E.

2) Pour toute forme linéaire ψ sur E, il existe un vecteur $u \in E$ et un seul tel que $\psi = \varphi_u$ ou encore plus explicitement,

$$\forall x \in E,\ \psi(x) = \langle u, x\rangle.$$

DÉMONSTRATION .

1) Soit $u \in E$. Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité du produit scalaire par rapport à chacune de ses variables,

$$\varphi_u(\lambda x + \mu y) = \langle u, \lambda x + \mu y\rangle = \lambda\langle u, x\rangle + \mu\langle u, y\rangle = \lambda\varphi_u(x) + \mu\varphi_u(y).$$

Donc, φ_u est une forme linéaire sur E.

2) Soit $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \varphi_u \end{array}$. D'après 1), Φ est une application de E dans $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.
Soient $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout x de E,

$$(\Phi(\lambda u + \mu v))(x) = \varphi_{\lambda u + \mu v}(x) = \langle \lambda u + \mu v, x\rangle = \lambda\langle u, x\rangle + \mu\langle v, x\rangle = (\lambda\Phi(u) + \mu\Phi(v))(x)$$

et donc $\Phi(\lambda u + \mu v) = \lambda\Phi(u) + \mu\Phi(v)$. Ainsi, $\Phi \in \mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, \mathbb{R}))$.

Soit $u \in E$. $u \in \mathrm{Ker}(\Phi) \Rightarrow \varphi_u = 0 \Rightarrow \forall x \in E,\ \langle u, x\rangle = 0 \Rightarrow u \in E^\perp \Rightarrow u = 0$. Donc, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ puis Φ est injective.

Enfin, $\dim(\mathscr{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times 1 = \dim(E) < +\infty$ et donc Φ est un isomorphisme de E sur $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. En particulier, Φ est bijective et donc, pour toute forme linéaire ψ sur E, il existe un vecteur $u \in E$ et un seul tel que $\psi = \varphi_u$.

❏

Exemple 1. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$.
Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ sont les applications de la forme $\varphi\ :\ x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ où $u = (a_1, \dots, a_n)$ est un élément donné de $\mathbb{R}^n$. On note alors que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \langle u, x\rangle.$$

Exemple 2. L'application $\psi\ :\ P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Donc,

$$\exists! A \in \mathbb{R}_n[X] / \ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\ dt.$$

Supposons maintenant par l'absurde que

$$\exists A \in \mathbb{R}[X] / \ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\ dt.$$

En appliquant l'égalité ci-dessus au polynôme $P = XA$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 tA^2(t)\ dt = 0$. Mais alors, pour tout $t \in [0, 1]$, $tA^2(t) = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle), puis pour tout $t \in]0, 1]$, $A(t) = 0$ et donc $A = 0$ (polynôme ayant une infinité de racines). Mais $A = 0$ ne convient pas car on doit avoir $\displaystyle\int_0^1 A(t) \times 1\ dt = 1 \neq 0$. Donc, si on remplace $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie par $\mathbb{R}[X]$ qui est de dimension infinie, le théorème 1 est faux.

❏

3 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

3.1 Définition de l'adjoint

Théorème 2. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Il existe une application g de E dans E et une seule telle que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle \quad (*).$$

2) L'application g définie par $(*)$ est un endomorphisme de E.

Démonstration .

1) Soit $y \in E$. L'application $x \mapsto \langle f(x), y\rangle$ est une forme linéaire sur l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. D'après le théorème 1, il existe un et un seul vecteur, dépendant de y et que l'on note donc $g(y)$, tel que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$.
On vient de définir une application g de E dans lui-même, uniquement définie, telle que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$

2) Vérifions que l'application g est linéaire. Soient $(y_1, y_2) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\langle x, g(\lambda y_1 + \mu y_2)\rangle &= \langle f(x), \lambda y_1 + \mu y_2\rangle = \lambda \langle f(x), y_1\rangle + \mu \langle f(x), y_2\rangle = \lambda \langle x, g(y_1)\rangle + \mu \langle x, g(y_2)\rangle \\ &= \langle x, \lambda g(y_1) + \mu g(y_2)\rangle\end{aligned}$$

et donc, pour tout $x \in E$, $\langle x, g(\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda g(y_1) + \mu g(y_2))\rangle = 0$. Par suite, $g(\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda g(y_1) + \mu g(y_2)) \in E^\perp = \{0\}$ et donc $g(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda g(y_1) + \mu g(y_2)$.

Ainsi, l'unique application g définie par $(*)$ est un endomorphisme de E.

❑

On peut maintenant définir l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien :

Définition 1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

L'**adjoint** de f, noté f^*, est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

⇛ **Commentaire** . *L'adjoint d'un endomorphisme est pour l'instant un objet très « nébuleux ». Pour travailler sur l'adjoint d'un endomorphisme, on a à disposition rien d'autre que sa définition.*

Par exemple, si $f = \lambda \mathrm{Id}_E$ *est une homothétie, alors pour tout* $(x, y) \in E^2$,

$$\langle f(x), y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle$$

et donc pour tout $y \in E$, $f^*(y) = \lambda y$ *ou encore* $f^* = \lambda \mathrm{Id}_E = f$.

On verra plus loin, de manière générale, que si f *est un endomorphisme de* E *et si* $\mathscr{B}$ *est une base orthonormée de* E*, alors*

$$Mat_{\mathscr{B}}(f^*) = (Mat_{\mathscr{B}}(f))^T.$$

3.2 Propriétés algébriques et géométriques de l'adjoint

Théorème 3. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soient $(f, g) \in (\mathscr{L}(E))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1) $(f^*)^* = f$.

2) $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$.

3) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

4) a) $(\mathrm{Id}_E)^*$.
b) $\forall f \in \mathscr{L}(E)$, $f \in GL(E) \Leftrightarrow f^* \in GL(E)$ et de plus, $\forall f \in GL(E)$, $\left(f^{-1}\right)^* = (f^*)^{-1}$.

Démonstration . Soient $(f, g) \in (\mathscr{L}(E))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle = \langle x, (f^*)^*(y)\rangle$. Par unicité, $(f^*)^* = f$.

2) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, (\lambda f+\mu g)^*(y)\rangle = \langle \lambda f(x)+\mu g(x), y\rangle = \lambda\langle f(x), y\rangle+\mu\langle g(x), y\rangle = \lambda\langle x, f^*(y)\rangle+\mu\langle x, g^*(y)\rangle = \langle x, (\lambda f^*+\mu g^*)(y)\rangle$. Par unicité, $(\lambda f + \mu g)^* = \lambda f^* + \mu g^*$.

3) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, (g \circ f)^*(y)\rangle = \langle g \circ f(x), y\rangle = \langle f(x), g^*(y)\rangle = \langle x, f^* \circ g^*(y)\rangle$. Par unicité, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

4) a) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle \mathrm{Id}_E(x), y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, \mathrm{Id}_E(y)\rangle$. Par unicité, $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$.

b) Soit $f \in GL(E)$. $f^* \circ \left(f^{-1}\right)^* = \left(f^{-1} \circ f\right)^* = (\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$. Donc, $f^* \in GL(E)$ et $(f^*)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$.
En appliquant à f^*, on obtient : si $f^* \in GL(E)$, alors $f = (f^*)^* \in GL(E)$. Finalemant, $f \in GL(E) \Leftrightarrow f^* \in GL(E)$.

❏

Théorème 4. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par f. Alors, $F^\perp$ est stable par f^*.

Démonstration. Soit $(x, y) \in F \times F^\perp$.

$$\langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = 0$$

car, $f(x) \in F$ puisque F est stable par f. Ainsi, $\forall y \in F^\perp$, $f^*(y) \in F^\perp$ et donc $F^\perp$ est stable par f^*.

❏

3.3 Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée

Théorème 5. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension non nulle puis $\mathscr{B}$ une base orthonormée de cet espace. Alors, pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^T$.

Démonstration. Posons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Posons aussi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*) = \left(a'_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$a'_{i,j} = \langle e_i, f^*(e_j)\rangle = \langle f(e_i), e_j\rangle = a_{j,i}.$$

Ceci montre que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^T$.

❏

Une conséquence immédiate du théorème 5 est :

Théorème 6. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension non nulle. Alors, pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $\det(f^*) = \det(f)$, $\mathrm{Tr}(f^*) = \mathrm{Tr}(f)$, $\chi_{f^*} = \chi_f$, $\mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

Solution 1. Soit $x \in E$.

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f^*(f(x)) = 0 \Rightarrow f^* \circ f(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f).$$

Donc, pour tout x de E, $x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$ puis $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$.

Soit $x \in E$.

$$x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f) \Rightarrow f^*(f(x)) = 0 \Rightarrow \langle f^*(f(x)), x\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(x)\rangle = 0 \Rightarrow \|f(x)\|^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f).$$

Donc, pour tout x de E, $x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f)$ puis $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Finalement, $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

4 Isométries vectorielles, matrices orthogonales

4.1 Isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux)

4.1.1 Définition

DÉFINITION 2. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit f un endomorphisme de E.

f est une **isométrie vectorielle** de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ si et seulement si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. On dit dans ce cas que f **conserve la norme**.

⇛ **Commentaire** . *Dans la définition précédente,* f *est d'abord un endomorphisme de* E*. Il existe des isométries non linéaires (c'est-à-dire des applications de* E *vers* E *qui conservent la norme et qui ne sont pas linéaires). Le programme officiel dit que par définition, une isométrie vectorielle est linéaire (et on s'abstiendra donc de dire « isométrie vectorielle linéaire »).*

On énonce une première propriété importante des isométries vectorielles d'un espace euclidien :

Théorème 7. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit f une isométrie vectorielle de cet espace. Alors f est une automorphisme de E.

DÉMONSTRATION . Soit f une isométrie vectorielle de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Soit $x \in E$.

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Donc, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Puisque l'espace E est de dimension finie, on en déduit que f est un automorphisme de E.

❏

DÉFINITION 3. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Une isométrie vectorielle de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ s'appelle aussi **un automorphisme orthogonal** de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ (et réciproquement).

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ se note $O(E)$.

⇛ **Commentaire** .

◇ *Le programme officiel privilégie l'emploi de « isométrie vectorielle » plutôt que de « automorphisme orthogonal ».*

◇ *On peut remarquer que la notation* $O(E)$ *est un peu imprécise car elle ne fait pas référence au produit scalaire utilisé. Si on change de produit scalaire, l'ensemble* $O(E)$ *devrait changer. On devrait donc écrire* $O((E, \langle\ ,\ \rangle))$ *au lieu de simplement* $O(E)$*. Mais la notation serait alors très lourde ...*

Théorème 8. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit f un endomorphisme de E.

f conserve la norme si et seulement si f conserve le produit scalaire ou encore

$$(\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|) \Leftrightarrow \left(\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle\right).$$

DÉMONSTRATION . Soit f un endomorphisme de E.

• Supposons que f conserve le produit scalaire. Alors en particulier pour $x \in E$,

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|,$$

et donc f conserve la norme.

• Supposons que f conserve la norme. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \text{ (identité de polarisation)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\|f(x + y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \text{ (par linéarité de } f\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \text{ (car } f \text{ conserve la norme)} \\
&= \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Donc, f conserve le produit scalaire.

❏

En résumé, si f est un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ qui conserve la norme, alors f est automatiquement un automorphisme de E et conserve automatiquement le produit scalaire.

4.1.2 Image d'une base orthonormée

Théorème 9. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit f un endomorphisme de E.

$f \in O(E)$ si et seulement si l'image par f de toute base orthonormée de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est une base orthonormée de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.
$f \in O(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ telle que $f(\mathscr{B})$ est une base orthonormée de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

Démonstration .

• Soit f une isométrie vectorielle de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de cet espace. Alors, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Donc, la famille $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

• Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que la famille $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

Soit $(x, y) \in E^2$. Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ où $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j) \right\rangle \text{ (car } f \text{ est linéaire)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ (car } f(\mathscr{B}) \text{ est une base orthonormée)} \\
&= \langle x, y \rangle \text{ (car } \mathscr{B} \text{ est une base orthonormée).}
\end{aligned}$$

Donc, f conserve le produit scalaire ou encore f est un isométrie vectorielle.

❏

Les isométries vectorielles sont donc les endomorphismes transformant une base orthonormée en une base orthonormée.

4.1.3 Adjoint d'une isométrie vectorielle

Théorème 10. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit f un endomorphisme de E.
$f \in O(E)$ si et seulement si $f \in GL(E)$ et $f^* = f^{-1}$.

Démonstration . Soit $f \in O(E)$. On sait déjà que $f \in GL(E)$. De plus, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle f(x), y \rangle = \left\langle f(x), f\left(f^{-1}(y)\right) \right\rangle = \left\langle x, f^{-1}(y) \right\rangle$$

(puisque f conserve le produit scalaire) et donc, par unicité, $f^* = f^{-1}$.

Réciproquement, supposons que $f \in GL(E)$ et que $f^* = f^{-1}$. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, f^*(f(y)) = \langle x, y \rangle$$

et donc f est une isométrie vectorielle.

❏

4.1.4 Symétries orthogonales

Un exemple très important d'isométrie vectorielle est fourni par le théorème suivant :

Théorème 11. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle. En particulier, toute réflexion est une isométrie vectorielle.

On rappelle qu'une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Démonstration . Soit F un sous-espace de l'espace E. Soit s_F la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace F. Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = x_1 + x_2$. On sait alors que $s_F(x) = x_1 - x_2$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2.$$

Donc, s_F conserve la norme ou encore, puisque s_F est linéaire, s_F est une isométrie linéaire de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$

❏

On peut préciser davantage le théorème 11 :

Théorème 12. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit s une symétrie de l'espace E.

s est une isométrie vectorielle si et seulement si s est une symétrie orthogonale si et seulement si $s^* = s$.

Démonstration . On sait déjà que si s est une symétrie orthogonale, alors s est une isométrie vectorielle. Mais alors, $s^* = s^{-1} = s$.

Réciproquement, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Supposons que $s \in O(E)$ et montrons que s est une symétrie orthogonale ou encore montrons que $G = F^{\perp}$.

Soit $(x_1, x_2) \in F \times G$.

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x\|^2 - \|s(x)\|^2\right) = 0.$$

Ceci montre que $G \subset F^{\perp}$. De plus, G et $F^{\perp}$ sont deux supplémentaires de F et en particulier G et $F^{\perp}$ ont même dimension finie. Finalement, $G = F^{\perp}$ ou encore s est une symétrie orthogonale.

Supposons enfin que $s^* = s$. Puisque s est une symétrie, $s^2 = \mathrm{Id}_E$ puis $s^{-1} = s$. Ceci montre que s est une symétrie qui est une isométrie vectorielle et donc que s est une symétrie orthogonale.

❏

Puisque la matrice de l'adjoint f^* d'un endomorphisme f dans une base orthonormée est la transposée de la matrice de f dans cette même base, le théorème 12 se traduit matriciellement par :

Théorème 13. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de cet espace. Soient f un endomorphisme E puis $S = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

f est une symétrie orthogonale si et seulement si $S^2 = I_n$ et $S^T = S$.

4.1.5 Le groupe orthogonal $(O(E), \circ)$

Théorème 14. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

$O(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$.

Démonstration . On sait qu'une isométrie vectorielle est en particulier un automorphisme de E et donc $O(E) \subset GL(E)$. D'autre part, Id_E est un une isométrie vectorielle de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ car Id_E est un endomorphisme de E qui conserve la norme.

Soit $(f, g) \in (O(E))^2$. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}\left\|f \circ g^{-1}(x)\right\| &= \left\|f\left(g^{-1}(x)\right)\right\| \\ &= \left\|g^{-1}(x)\right\| \text{ (car } f \in O(E)) \\ &= \left\|g\left(g^{-1}(x)\right)\right\| \text{ (car } g \in O(E)) \\ &= \|x\|.\end{aligned}$$

Donc, l'endormorphisme $f \circ g^{-1}$ conserve la norme puis $f \circ g^{-1} \in O(E)$.

On a montré que $O(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$.

❏

⇛ **Commentaire** . *D'après la démonstration précédente, on pouvait aussi utiliser l'adjoint (théorème 10) et les résultats du théorème 3, page 4. Si* $(f, g) \in (O(E))^2$, *alors*

$$\left(f \circ g^{-1}\right)^* = \left(g^{-1}\right)^* \circ f^* = g \circ f^{-1} = \left(f \circ g^{-1}\right)^{-1}$$

et donc $f \circ g^{-1} \in O(E)$.

4.1.6 Déterminant d'une isométrie vectorielle. Isométries positives, isométries négatives

Théorème 15. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $f \in O(E)$.

Alors, $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration . Soit $f \in O(E)$. Alors, $f \in GL(E)$ et $f^* = f^{-1}$. D'après le théorème 6, page 5, $\det(f) = \det(f^*) = \det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$ puis $(\det(f))^2 = 1$ et donc $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

❏

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 4. Les isométries vectorielles de déterminant 1 sont appelées **isométries directes** (ou aussi **isométries positives**) et les isométries vectorielles de déterminant -1 sont appelées **isométries indirectes** (ou aussi **isométries négatives**).

L'ensemble des isométries vectorielles positives de E se note $O^+(E)$ et l'ensemble des isométries vectorielles négatives de E se note $O^-(E)$.

Dans le théorème qui suit, on note $SL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de déterminant 1 (la notation est expliquée dans le théorème).

Théorème 16. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

1) $SL(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$ appelé **groupe spécial linéaire**.

2) $O^+(E)$ est un sous-groupe du groupe $(O(E), \circ)$ et du groupe $(SL(E), \circ)$, appelé **groupe spécial orthogonal**.

Notation. Le groupe $(O^+(E), \circ)$ sera dorénavant noté $SO(E)$.

Démonstration .

1) On sait que l'application $\det : \begin{array}{ccc} (GL(E), \circ) & \rightarrow & (\mathbb{R}^*, \times) \\ f & \mapsto & \det(f) \end{array}$ est un morphisme de groupes. $SL(E)$ est le noyau de ce morphisme et est donc un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$.

2) $SO(E) = SL(E) \cap O(E)$ est un sous-groupe du groupe $(GL(E), \circ)$ en tant qu'intersection de sous-groupes de ce groupe.

❏

⇛ **Commentaire** . *Par contre,* $O^-(E)$ *n'est pas stable pour* $\circ$ *car, si* f *et* g *sont deux éléments de* $O^-(E)$*, alors* $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g) = (-1) \times (-1) = 1$.

Exemple. On peut se demander si une symétrie orthogonale est dans $O^+(E)$ ou dans $O^-(E)$. Soit s_F la symétrie orthogonale par rapport à un certain sous-espace F de E. En notant n la dimension de E et p la dimension de F, on sait qu'il existe une base orthonormée de l'espace $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ dans laquelle la matrice de s_F s'écrit $\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-p})$. Mais alors,

$$\det(s_F) = (-1)^{n-p}.$$

Par suite, s_F est dans $O^+(E)$ si et seulement si $n - p$ est un entier pair.

En particulier, si s_H est une réflexion par rapport à un certain hyperplan H, alors $p = n - 1$ puis $\det(s_H) = -1$. Une réflexion est donc toujours une isométrie négative. C'est le cas d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite en dimension 2 ou d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan en dimension 3.

❏

On termine cette section consacrée aux isométries vectorielles par un exercice qui établit qu'un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité est une *similitude* c'est-dire la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle (et réciproquement toute similitude conserve l'orthogonalité).

Exercice 2. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité c'est-à-dire qui vérifie

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = 0)\,.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $g \in O(E)$ tels que $f = \lambda g$.

$\Rrightarrow$ **Commentaire**. *Un autre énoncé était possible : montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.*

Solution 2. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée fixée de E. Soit f un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. $\langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0$. Donc, les vecteurs $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$ sont orthogonaux. Puisque f conserve l'orthogonalité et est linéaire, les vecteurs $f(e_i) + f(e_j)$ et $f(e_i) - f(e_j)$ sont aussi orthogonaux. Mais alors,

$$0 = \langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j)\rangle = \|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2$$

puis $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Ainsi, les vecteurs $f(e_1)$, ..., $f(e_n)$ ont la même norme. On pose $\lambda = \|f(e_1)\|$. λ est un réel positif et $\|f(e_1)\| = \ldots = \|f(e_n)\| = \lambda$.

1er cas. Si $\lambda = 0$, alors $f(e_1) = \ldots = f(e_n) = 0$. L'endomorphisme f s'annule sur une base de E et donc $f = 0$. Dans ce cas, $\lambda = 0$ et $g = Id_E$ conviennent.

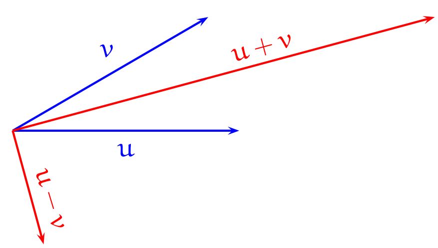
2ème cas. Supposons $\lambda > 0$. Posons $g = \dfrac{1}{\lambda} f$. Déjà, $f = \lambda g$. Ensuite, puisque f conserve l'othogonalité, il en est de même de g et en particulier, la famille $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est une famille orthogonale. De plus, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\|g(e_i)\| = \left\|\frac{1}{\lambda} f(e_i)\right\| = \frac{1}{\lambda}\|f(e_i)\| = 1$$

et donc la famille $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est une base orthonormale de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Puisque l'image par g d'une base orthonormale de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est une base orthonormale de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, g est une isométrie vectorielle. On a encore une fois trouvé un réel positif λ et une isométrie vectorielle g tels que $f = \lambda g$.

Dans l'exercice précédent, nous avons au passage utilisé un résultat géométrique simple : si u et v sont deux vecteurs de même norme, alors $u + v$ et $u - v$ sont orthogonaux :

$$\langle u + v, u - v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0.$$



4.2 Matrices orthogonales

4.2.1 Définition

Définition 5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

A est une **matrice orthogonale** si et seulement si $A^T A = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales se note $O_n(\mathbb{R})$ ou aussi $O(n)$.

Dit autrement, une matrice orthogonale est une matrice inversible d'inverse sa transposée (on rappelle que si $A^T A = I_n$, on a automatiquement $AA^T = I_n$).

Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ est orthogonale car cette matrice est inversible ($\det(A) = 1 \neq 0$), d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = A^T.$$

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq B^T$. La matrice B n'est donc pas une matrice orthogonale.

Théorème 17. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A^T \in O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors, $A^T A = I_n$. En transposant, on obtient $\left(A^T\right)\left(A^T\right)^T = I_n$ et donc $A^T \in O_n(\mathbb{R})$. Inversement, en appliquant ce qui précède à la matrice A^T, si $A^T \in O_n(\mathbb{R})$, alors $A = \left(A^T\right)^T \in O_n(\mathbb{R})$.

❑

4.2.2 Lien avec les bases orthonormées

Une première caractérisation des matrices orthogonales est fournie par :

Théorème 18. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les colonnes de A constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
$A \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les lignes de A constituent une base orthonormée de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \ldots, C_n$, les colonnes de la matrice A. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $A^T A$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}$. Par suite,

$$\begin{aligned} A \in O_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow A^T A = I_n \\ &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle C_i, C_j\rangle = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow (C_1,\ldots,C_n) \text{ est une base orthonormée de } (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle). \end{aligned}$$

En appliquant ce résultat à la matrice A^T et en notant $L_1, \ldots, L_n$, les lignes de A et $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, on obtient

$$A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (L_1,\ldots,L_n) \text{ est une base orthonormée de } (\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle).$$

❑

Ainsi, par exemple, si $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, les deux colonnes de A sont unitaires et orthogonales l'une à l'autre pour le produit scalaire usuel. Donc, de nouveau la matrice A est une matrice orthogonale.
Par contre, la deuxième colonne de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas unitaire ou aussi les deux colonnes de cette matrice ne sont pas orthogonales, toujours pour le produit scalaire usuel. La matrice B n'est donc pas une matrice orthogonale (bien que de déterminant égal à 1).

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 19. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de cet espace. Soient $\mathscr{B}'$ une famille de n vecteurs de E puis $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Alors,

$$\mathscr{B}' \text{ une base orthonormée de } (E, \langle\ ,\ \rangle) \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire usuel dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\langle e'_i, e'_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = (C_i|C_j)\,.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} A \in O_n(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (C_i|C_j) = \delta_{i,j} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \mathscr{B}' \text{ base orthonormée de } (E, \langle\ ,\ \rangle). \end{aligned}$$

❏

⇛ **Commentaire**. *Les matrices orthogonales sont donc les matrices de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée. En conséquence, l'inverse de la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre est tout simplement la transposée de cette matrice.*

4.2.3 Lien avec les isométries vectorielles

Théorème 20. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de cet espace. Soient f un endomorphisme de E puis $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors,

$$f \in O(E) \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration. D'après les théorèmes 9 (page 7) et 19,

$$A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(\mathscr{B}) \text{ base orthonormée de } (E, \langle\ ,\ \rangle) \Leftrightarrow f \in O(E).$$

❏

⇛ **Commentaire**. *Les matrices orthogonales sont donc aussi les matrices d'isométries vectorielles dans une base orthonormée.*

4.2.4 Le groupe orthogonal $(O_n(\mathbb{R}), \times)$

Théorème 21. $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}, \times)$

Démonstration. Une matrice orthogonale est inversible et donc $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$. Ensuite, $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ car $I_n^T I_n = I_n$.

Soit $(A,B) \in (O_n(\mathbb{R}))^2$. $\left(AB^{-1}\right)^T \left(AB^{-1}\right) = \left(B^T\right)^{-1} A^T A B^{-1} = \left(B^T\right)^{-1} B^{-1} = \left(BB^T\right)^{-1} = I_n$. Donc, $AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

On a montré que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

❏

4.2.5 Déterminant d'une matrice orthogonale. Matrices orthogonales positives, matrices orthogonales négatives

Théorème 22. Pour toute $A \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Donc, $A^T A = I_n$ puis $\det\left(A^T A\right) = \det(I_n)$ puis $(\det(A))^2 = 1$ et donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

❏

La réciproque du résultat précédent est fausse ou encore le déterminant d'une matrice carrée peut être égal à 1 ou à -1 bien que cette matrice ne soit pas une matrice orthogonale. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à 1 mais n'est pas une matrice orthogonale.

DÉFINITION 6. Une **matrice orthogonale positive** est une matrice orthogonale de déterminant 1 et une **matrice orthogonale négative** est une matrice orthogonale de déterminant -1.

On note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$ ou $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales positives et $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales négatives.

On rappelle que l'ensemble des matrices de déterminant 1, noté $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (groupe spécial linéaire), est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$. On peut alors énoncer :

Théorème 23

$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe des groupes $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$, $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \times)$ et $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

DÉMONSTRATION . $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ en tant qu'intersection de sous-groupes du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

❏

Ainsi, en particulier, le produit de deux matrices orthogonales positives est une matrice orthogonale positive. De manière plus générale, le produit de deux matrices orthogonales obéit à la « règle des signes » : le produit de deux matrices orthogonales négatives est une matrice orthogonale positive et le produit d'une matrice orthogonale positive et d'une matrice orthogonale négative est une matrice orthogonale négative.
On note aussi que I_n est une matrice orthogonale positive et que l'inverse d'une matrice orthogonale positive (resp. négative) est une matrice orthogonale positive (resp. négative).

4.3 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Changements de bases orthonormées

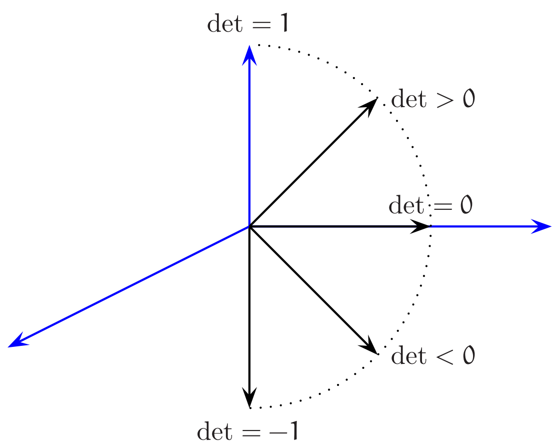
4.3.1 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Imaginons que (i, j, k) soit une base de l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. La base $(j, -k, i)$ a-t-elle la même orientation que la base (i, j, k) ou encore, « va-t-on dans le même sens » quand on va de i à j puis à k que quand on va de j à $-k$ puis à i ? Pas facile de visualiser cela.

On va maintenant voir que les déterminants sont un outil puissant pour simplifier ce problème.

On se donne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle puis $\mathscr{B}$ une base de E. Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, on sait que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$. On a donc exactement deux possibilités : ou bien $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$, ou bien $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') < 0$.

Au départ, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1 > 0$. Si on modifie à peine un ou plusieurs des vecteurs de $\mathscr{B}$ pour obtenir une base $\mathscr{B}'$ « proche de $\mathscr{B}$ », il est clair que le déterminant se modifie à peine (on énoncera dans le chapitre de Topologie le fait que que « le déterminant est continu ») car ce déterminant est polynomial en les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$. Donc, si $\mathscr{B}'$ « proche de $\mathscr{B}$ », $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ reste strictement positif. Pour que ce déterminant change de signe, il faut d'abord qu'il s'annule, ce qui traduit le fait que l'un des vecteurs de $\mathscr{B}'$ devient une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{B}'$ (qui n'est donc plus une base). C'est le moment où $\mathscr{B}'$ change d'orientation (dans le graphique qui suit, on fixe deux des vecteurs de $\mathscr{B}$ et on fait varier lentement le troisième) :



Ce qui précède devrait suffire à motiver ce qui suit :

Théorème 24. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\mathscr{R}$ la relation définie sur l'ensemble des bases de E par : pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E,

$$\mathscr{B}\ \mathscr{R}\ \mathscr{B}' \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0.$$

$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. De plus, il existe exactement deux classes d'équivalence pour la relation $\mathscr{R}$.

Démonstration .

• Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1 > 0$. Donc, $\mathscr{R}$ est réflexive.

• Pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E, si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$, alors $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')} > 0$. Donc, $\mathscr{R}$ est symétrique.

• Pour toutes bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ de E, si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$ et $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') > 0$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \times \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') > 0$. Donc, $\mathscr{R}$ est transitive.

Ceci montre que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E.

Soient alors $\mathscr{B}_1$ une base donnée de E puis $\mathscr{B}_2$ la base de E obtenue en remplaçant le premier vecteur de $\mathscr{B}_1$ par son opposé. Alors, $\det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) = -1 < 0$. Par suite, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ ne sont pas en relation.
Si maintenant $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E, ou bien $\det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}) > 0$ et dans ce cas, $\mathscr{B}\ \mathscr{R}\ \mathscr{B}_1$, ou bien $\det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}) < 0$ et dans ce cas, $\det_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1) \times \det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}) > 0$ puis $\mathscr{B}\ \mathscr{R}\ \mathscr{B}_2$.

Il existe donc exactement deux classes d'équivalence, celle de $\mathscr{B}_1$ et celle de $\mathscr{B}_2$. ❏

Définition 7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Pour $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ bases données de E, on dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont la **même orientation** si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$.

Orienter E, c'est choisir arbitrairement une base de référence $\mathscr{B}$ puis appeler **base directe** toute base $\mathscr{B}'$ ayant la même orientation que $\mathscr{B}$ et **base indirecte** toute base $\mathscr{B}'$ n'ayant pas la même orientation que $\mathscr{B}$.

Exemple. On suppose que $\mathbb{R}^3$ est orienté et que (e_1, e_2, e_3) est une base directe de $\mathbb{R}^3$. On veut savoir si $(-e_2, -e_3, -e_1)$ est une base directe ou indirecte de $\mathbb{R}^3$. Par linéarité par rapport à chaque vecteur,

$$\det_{(e_1,e_2,e_3)}(-e_2, -e_3, -e_1) = (-1)^3 \det_{(e_1,e_2,e_3)}(e_2, e_3, e_1).$$

Ensuite, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur 3 et donc de signature $(-1)^2$. Donc,

$$\det_{(e_1,e_2,e_3)}(-e_2, -e_3, -e_1) = (-1)^3(-1)^2 \det_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1, e_2, e_3) = -1 < 0.$$

$(-e_2, -e_3, -e_1)$ est une base indirecte de $\mathbb{R}^3$. ❏

4.3.2 Changements de bases orthonormées

Dans ce paragraphe, on analyse l'effet d'un changement de base orthonormée dans différentes situations.

• Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est une matrice orthogonale. Donc,

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \det\left(\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right) \in \{-1, 1\}.$$

Soit maintenant $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$$\det_{\mathscr{B}'}(u_1, \ldots, u_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \pm\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$$

ou encore

$$|\det_{\mathscr{B}'}(u_1, \ldots, u_n)| = |\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)|.$$

• Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, f un endomorphisme de E, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E. Soient alors $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Les formules de changement de base s'écrivent

$$B = P^{-1}AP \quad (*)$$

et en conséquence les matrices A et B sont semblables. Mais de plus ici, les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont orthonormées et donc P est une matrice orthogonale (de sorte que $P^{-1} = P^T$). Dans ce cas, on dit que que les matrices A et B sont **orthogonalement semblables**.

Exercice 3. (inégalité de HADAMARD)

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\mathscr{B}$ une base orthonormée de cet espace. Montrer que

$$\forall\, (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ |\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \|x_1\| \dots \|x_n\|\,.$$

Solution 3. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)| = 0$ et l'inégalité est immédiate.

On suppose dorénavant que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. Soit $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ son orthonormalisée. $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée de l'espace $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Donc, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \pm 1$ puis

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)| = |\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \times \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n)| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n)|\,.$$

Maintenant, puisque $\mathscr{B}'$ est orthonormée, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ème coordonnée de x_i dans la base $\mathscr{B}'$ est $\langle x_i, e_i\rangle$ et puisque pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $x_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$, la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}'$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, e_1\rangle & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \langle x_n, e_n\rangle \end{pmatrix}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} |\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n)| &= \prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, e_i\rangle| \\ &\leqslant \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|e_i\| = \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|\,. \end{aligned}$$

4.3.3 Changements de bases orthonormées directes. Produit mixte

On suppose que $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$. On considère $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées directes de cet espace. Dans ce cas, $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est une matrice orthogonale positive (car $\det\left(\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$). D'après le paragraphe précédent, pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E,

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n)\,.$$

On peut donc énoncer la définition suivante :

DÉFINITION 8. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Le **produit mixte** des vecteurs de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant de cette famille dans une base orthonormée directe. Ce nombre ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe. Il est noté $[x_1, \dots, x_n]$.

⇛ **Commentaire**. *L'expression produit mixte vient de la dimension 3 : E étant un espace euclidien orienté de dimension 3, on peut montrer que*

$$\forall (u, v, w) \in E^3,\ [u, v, w] = (u \wedge v)\,.w$$

où $u \wedge v$ est le produit vectoriel des vecteurs u et v (notion qui n'est pas au programme de math en classes préparatoires mais qui est utilisée en physique et en S.I.). Le produit mixte est donc un mélange de produit scalaire et de produit vectoriel.

Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, son produit mixte est nul et si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, son produit mixte est un réel non nul.

Nous allons maintenant interpréter ce produit mixte dans le cas $n = 2$. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs linéairement indépendants d'un espace euclidien orienté E de dimension 2 (et donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E). On note A, B, C et D

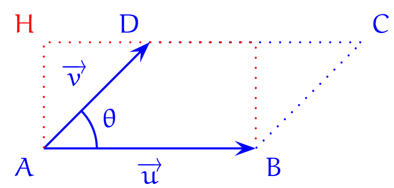
des points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On note H le projeté orthogonal du point D sur la perpendiculaire à (AB) passant par A. On note que $H \neq A$ car $D \notin (AB)$. On a :

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] &= \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}\right] = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}\right] + \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HD}\right] = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}\right] \\ &= AB \times AH \times \left[\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{AH}\overrightarrow{AH}\right].\end{aligned}$$

Maintenant, $\left(\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{AH}\overrightarrow{AH}\right)$ est une base orthonormée et donc, $\left[\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{AH}\overrightarrow{AH}\right]$ est égal à 1 ou à -1 suivant que cette base soit directe ou indirecte puis

$$\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] = \pm\, AB \times AH = \pm \text{ aire de } ABCD,$$

le signe du produit mixte $\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right]$ étant + si la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est directe et − si la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est indirecte.



Dans les deux cas,

$$\text{aire de } ABCD = \text{abs}\left(\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right]\right) = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \left\|\overrightarrow{v}\right\| \sin(\theta).$$

Si on enlève la valeur absolue, le produit mixte de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (dans cet ordre) est l'**aire algébrique** (ou aire orientée) du parallélogramme ABCD. Cette aire est positive quand on va de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$ dans le sens direct et négative quand on va de $\overrightarrow{u}$ à $\overrightarrow{v}$ dans le sens indirect.

Pour unifier, rappelons que l'on a aussi

$$\left|\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle\right| = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cos(\theta),$$

et donc

$$\left(\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle\right)^2 + \left(\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right]\right)^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 \text{ (identité de Lagrange).}$$

4.4 Description de $O_2(\mathbb{R})$ et $O^+(E_2)$

4.4.1 Description de $O_2(\mathbb{R})$

On va déterminer toutes les matrices orthogonales de format 2. Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$.
La première colonne de A s'écrit nécessairement sous la forme $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels tels que $a^2+b^2 = 1$. Le vecteur C_1 de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ n'est pas nul puis $(C_1)^{\perp} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right)$ (dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique). C_2 devant être orthogonale à C_1, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $C_2 = \lambda\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Enfin, C_2 devant être unitaire, on a nécessairement $\lambda = \pm 1$. Donc, A est nécessairement de l'un des deux types suivants :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Réciproquement, les matrices ci-dessus sont orthogonales car leurs deux colonnes sont unitaires et orthogonales l'une à l'autre. On note que $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = 1$ et $\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -1$. Donc,

Théorème 25.

• les matrices orthogonales positives de format 2 sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$, ou aussi les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

• les matrices orthogonales négatives de format 2 sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$, ou aussi les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

• les matrices orthogonales de format 2 sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2+b^2 = 1$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, ou aussi les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

4.4.2 Description de $O_2^+(\mathbb{R})$ et de $O^+(E_2)$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (R est l'initiale du mot rotation).

Théorème 26.

1) Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$. $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est donc un groupe commutatif.

2) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.

3) Dit autrement, l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \to & (SO_2(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \mapsto & R_\theta \end{array}$ est un morphisme de groupes. Ce morphisme est surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration .

1) Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} R_\theta \times R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')) \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\ &= R_{\theta+\theta'}. \end{aligned}$$

2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$R_\theta \times R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Donc, $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.

3) D'après 1), φ est un morphisme de groupes. Ce morphisme est surjectif d'après le théorème 25. Enfin, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\theta \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow R_\theta = I_2 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 1 \text{ et } \sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

❏

⇛ **Commentaire** . *Les calculs effectués ci-dessus ressemblent étrangement à certains calculs effectués dans* $\mathbb{C}$ *: pour tout* $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$. *De fait, il est « presque » immédiat que l'application* $\begin{array}{ccc} (O_2^+(\mathbb{R}), \times) & \to & (\mathbb{U}, \times) \\ R_\theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$ *est bien définie et est un isomorphisme de groupes.*

Passons maintenant à l'étude des automorphismes orthogonaux positifs d'un espace euclidien orienté de dimension 2. Pour alléger les notations, on note E_2 un tel espace. On se donne $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E_2.

Soit f un automorphisme orthogonal positif de E_2. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$ est orthogonale et puisque $\det(A) = \det(f) > 0$, A est un élément de $O_2^+(\mathbb{R})$. Donc, il existe un réel θ tel que $A = R_\theta$.

Changeons alors de base orthonormée directe. Soit $\mathscr{B}'$ une base orthonormée directe. $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \in O_2^+(\mathbb{R})$ et donc il existe un réel θ' tel que $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = R_{\theta'}$. D'après le théorème 26,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \left(\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \times A \times \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = R_{-\theta'}R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'+\theta+\theta'} = R_\theta.$$

Le réel θ ne dépend donc pas du choix de la base orthonormée directe $\mathscr{B}$. Il est uniquement défini modulo 2π (car $R_{\theta_1} = R_{\theta_2} \Leftrightarrow \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$). L'automorphisme orthogonal positif f s'appelle une **rotation vectorielle** et le réel θ est une mesure de l'**angle** de cette rotation. Au passage, on a établi (ce qui suit est plus une définition qu'un théorème) :

Théorème 27. Les éléments de $O^+(E_2)$ sont les rotations de E_2.

On note dorénavant r_θ la « rotation d'angle θ ».

Théorème 28. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs unitaires. Il existe une rotation r_θ et une seule telle que $r_\theta\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{v}$.

Démonstration . Il suffit de montrer le résultat quand E_2 est l'espace $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ muni de structure euclidienne et de son orientation canonique.

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ puis $f = r_\theta$. Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont unitaires, il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{v} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta + \alpha = \beta + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = \beta - \alpha + 2k\pi. \\ &\Leftrightarrow f = r_{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Ceci montre l'existence et l'unicité d'une rotation transformant $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{v}$.

❏

Le théorème précédent nous permet alors de « définir proprement » la notion de mesure d'un angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ toute mesure de l'angle de l'unique rotation transformant $\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|}\overrightarrow{u}$ en $\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{v}\right\|}\overrightarrow{v}$. A partir de cette définition, on peut reconstituer les propriétés usuelles des angles orientés, la principale étant la relation de Chasles : pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$,

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) + \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right).$$

4.4.3 Description de $O(E_2)$

On sait déjà que $O^+(E_2)$ est constitué des rotations. Intéressons nous maintenant à $O^-(E_2)$. Soit f un automorphisme orthogonal de E_2. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E_2. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est une matrice orthogonale négative. Donc, il existe un réel θ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On note S_θ la matrice ci-dessus.

$$S_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

On en déduit encore que $f^2 = \mathrm{Id}_{E_2}$ puis que f est une symétrie orthogonale (d'après le théorème 12, page 8). Si l'espace F des vecteurs invariants par f est de dimension 2, alors $f = \mathrm{Id}_{E_2}$ ce qui est impossible car $\mathrm{Id}_{E_2} \in O^+(E_2)$ et si l'espace F des vecteurs invariants par f est de dimension 0, alors $F^\perp$ est de dimension 2 puis $f = -\mathrm{Id}_{E_2}$ ce qui est impossible car $-\mathrm{Id}_{E_2} \in O^+(E_2)$. Donc, F est de dimension 1 puis f est une réflexion.

Déterminons explicitement l'ensemble des vecteurs invariants par f. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = x \\ \sin(\theta)x - \cos(\theta)y = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1-\cos(\theta))x - \sin(\theta)y = 0 \\ \sin(\theta)x - (1+\cos(\theta))y = 0 \end{array} \right.$$

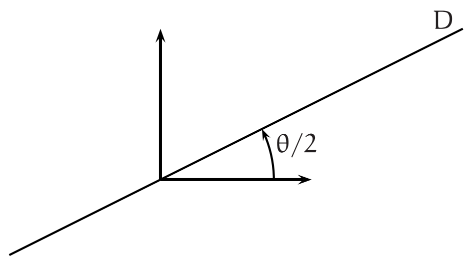
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)x - 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y = 0 \\ 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)x - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)y = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y\right) = 0 \\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y\right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y = 0$$

(car $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ne sont pas simultanément nuls).

Ainsi, l'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite d'équation $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y = 0$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. Cette droite D est engendrée par le vecteur $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_2$. On dit que f est la réflexion par rapport à la droite « d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$ ».



Au passage, on a montré que :

Théorème 29. Soit E_2 un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2.
$O^+(E_2)$ est constitué des rotations. $O^-(E_2)$ est constitué des réflexions.
$O(E_2)$ est constitué des rotations et des réflexions.

4.5 Réduction des isométries vectorielles

L'établissement du résultat principal (théorème 33) est préparé par l'établissement de trois résultats préliminaires (théorèmes 30, 31 et 32).

Théorème 30. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension non nulle. Soit $f \in O(E)$. Toute valeur propre éventuelle de f appartient à $\{-1, 1\}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de f. Il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. Puisque $f \in O(E)$,

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,$$

et donc $|\lambda| = 1$ car $\|x\| \neq 0$. Par suite, $\lambda \in \{-1, 1\}$.

❏

⇛ **Commentaire**. *L'exemple de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$ montre qu'il est possible qu'une isométrie vectorielle n'admette pas de valeur propre.*

Théorème 31. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension non nulle. Soit $f \in O(E)$. f admet au moins une droite stable ou un plan stable.

Démonstration. Si χ_f admet au moins une racine réelle λ, alors λ est valeur propre de f. Soit x un vecteur propre associé. $D = \text{Vect}(x)$ est une droite vectorielle stable par f.

Sinon, χ_f n'a pas de racine réelle ce qui impose $\dim(E) \geqslant 2$. Dans ce cas, la décomposition de χ_f en produit de facteurs irréductibles s'écrit

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{k} \left(X^2 + a_i X + b_i\right)^{\alpha_i}$$

où les a_i et les b_i réels tels que $a_i^2 - 4b_i < 0$. L'un au moins des endomorphismes $f^2 + a_i f + b_i \mathrm{Id}_E$ a un noyau non réduit à $\{0\}$. En effet, dans le cas contraire, chaque $f^2 + a_i f + b_i \mathrm{Id}_E$ est un automorphisme de E puis $\prod_{i=1}^{k} \left(f^2 + a_i f + b_i \mathrm{Id}_E\right)_i^{\alpha} = \chi_f(f)$ est un automorphisme de E ce qui contredit l'égalité $\chi_f(f) = 0$.

Soit donc $i \in [\![1, k]\!]$ tel que $\mathrm{Ker}\left(f^2 + a_i f + b_i \mathrm{Id}_E\right) \neq \{0\}$. Soit x_0 un vecteur non nul de ce noyau puis $P = \mathrm{Vect}\,(x_0, f(x_0))$.
$f(x_0)$ n'est pas colinéaire à x_0 car f n'a pas de valeur propre. Donc, P est un plan vectoriel. De plus,

$$f(P) = \mathrm{Vect}\left(f(x_0), f^2(x_0)\right) = \mathrm{Vect}\,(f(x_0), -b_i x_0 - a_i f(x_0)) \subset \mathrm{Vect}\,(x_0, f(x_0)) = P.$$

Donc, P est un plan stable par f.

❑

⇛ **Commentaire**. *Le résultat précédent est valable pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.*

Théorème 32. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension non nulle. Soit $f \in O(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Si F est stable par f, alors $F^{\perp}$ est stable par f. De plus, f induit une isométrie vectorielle de F et une isométrie vectorielle de $F^{\perp}$.

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. On a donc $f(F) \subset F$ puis $f(F) = F$ par égalité des dimensions de F et $f(F)$ (f étant un automorphisme) puis $f^{-1}(F) = F$ (en prenant l'image des deux membres par f^{-1}).

Soit $x \in F^{\perp}$. Soit $y \in F$. Soit $z = f^{-1}(y)$ de sorte que $z \in F$ et $y = f(z)$. Alors,

$$\langle f(x)|y\rangle = \langle f(x)|f(z)\rangle = \langle x|z\rangle = 0.$$

Ainsi, $f(x)$ est orthogonal à tout élément de F et donc $f(x) \in F^{\perp}$. On a montré que $F^{\perp}$ est stable par f.

Enfin, f induit un endomorphisme de F (resp. $F^{\perp}$) qui conserve la norme et donc f induit une isométrie linéaire de F (resp. $F^{\perp}$).

❑

Théorème 33. (Réduction des isométries vectorielles)

Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension non nulle. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
f est une isométrie vectorielle si et seulement si il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale par blocs du type

$$\begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & R(\theta_k) & & \\ & 0 & & I_p & \\ & & & & -I_q \end{pmatrix} \quad (*)$$

où pour $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Démonstration. Une matrice du type $(*)$ est orthogonale car ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. Donc, si la matrice d'un certain endomorphisme f dans une certaine base orthonormée d'un espace euclidien est du type $(*)$, alors f est une isométrie vectorielle.

On montre la réciproque de ce résultat par récurrence sur $n = \dim(E) \geqslant 1$. On note E_n un espace euclidien de dimension n.

- $O(E_1) = \{-\mathrm{Id}_{E_1}, \mathrm{Id}_{E_1}\}$. Le résultat est donc vrai quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Soit $f \in O(E_{n+1})$.

1er cas. Si f admet une valeur propre λ, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$ d'après le théorème 30. Il existe un vecteur propre unitaire e_1 associé à cette valeur propre. D'après le théorème 32, puisque $D = \mathrm{Vect}\,(e_1)$ est stable par f, $D^{\perp}$ est stable par f et la restriction de f à

$D^\perp$ induit une isométrie vectorielle de $D^\perp$. Puisque $\dim\left(D^\perp\right) = n$, l'hypothèse de récurrence nous fournit une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e_2, \ldots, e_{n+1})$ de $D^\perp$ dans laquelle la matrice de cette restriction est du type $(*)$. Quite à réordonner les vecteurs de la base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$, on obtient une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est du type $(*)$.

2ème cas. Si f n'admet pas de valeur propre, f admet au moins un plan stable P d'après le théorème 31. f induit une isométrie vectorielle $\widetilde{f}$ de P qui n'a pas de valeur propre (car le polynôme caractéristique de $\widetilde{f}$ divise le polynôme caractéristique de f). Les automorphismes orthogonaux d'un plan euclidien sont les rotations et les réflexions. Puisque qu'une réflexion admet une valeur propre, $\widetilde{f}$ est une rotation. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de P. La matrice de $\widetilde{f}$ dans (e_1, e_2) est $R(\theta)$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Si $n = 1$ de sorte que $n + 1 = 2$, le résultat est établi. Sinon, $n + 1 \geqslant 3$.
D'après le théorème 32, $P^\perp$ est stable par f et la restriction de f à $P^\perp$ induit une isométrie vectorielle de $P^\perp$. Puisque $\dim\left(P^\perp\right) = n-1$, l'hypothèse de récurrence nous fournit une base orthonormée $(e_3, \ldots, e_{n+1})$ de $P^\perp$ dans laquelle la matrice de l'isométrie vectorielle induite par f est du type $(*)$. Mais alors $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est du type $(*)$.

Le résultat est démontré par récurrence. ❑

A l'aide du théorème précédent, on peut maintenant décrire les isométries vectorielles positives d'un espace euclidien de dimension 3. Un isométrie vectorielle f de E_3 a une matrice du type $(*)$ (voir théorème 33) dans une certaine base orthonormée. Avec les notations du théorème 33, $\det(f) = (-1)^q$. Par suite, $f \in SO\left(E_3\right) \Leftrightarrow q$ est pair. Deux types de matrices de format 3 correspondent à cette situation :

- $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et en particulier $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (quand $q = 0$)
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (quand $q = 2$).

Mais si la matrice de f dans une certaine base orthonormée (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (e_2, e_3, e_1) est une autre base orthonormée dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) & 0 \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, dans tous les cas, si f est une isométrie vectorielle positive de E_3, il existe une base orthonormée de E_3 dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Réciproquement, cette dernière matrice est orthogonale positive et donc si la matrice de f dans une certaine base orthonormée est de ce type, f est un automorphisme orthogonal positif de E_3. On peut donc énoncer

Théorème 34. (Isométries vectorielles positives d'un espace euclidien de dimension 3)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est un isométries vectorielle positive si et seulement si il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Soit f de matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une certaine base orthonormée (e_1, e_2, e_3) où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Si on oriente $P = \text{Vect}\left(e_1, e_2\right)$ de telle sorte que (e_1, e_2) soit une base orthonormée directe de P, la restriction de f à $\text{Vect}\left(e_1, e_2\right)$ « est » la rotation d'angle θ. D'autre part, f laisse invariant tout vecteur de $P^\perp = \text{Vect}\left(e_3\right)$. Pour cette raison, on dit alors que f est une **rotation** autour de e_3 et même la rotation d'angle θ autour de e_3. On a démontré que

tout automorphisme orthogonal positif d'un espace euclidien de dimension 3, distinct de l'identité, est une rotation.

5 Endomorphismes autoadjoints. Matrices symétriques réelles

5.1 Définition

Définition 9. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien puis f un endomorphisme de E.

f est **autoadjoint** (ou **symétrique**) si et seulement si $f^* = f$ ou encore

f est **autoadjoint** (ou **symétrique**) si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E se note $\mathscr{S}(E)$.

Exemple 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ puis $f = \lambda \mathrm{Id}_E$. Pour x et y éléments de E,

$$\langle f(x), y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Donc, les homothéties vectorielles sont des endomorphismes autoadjoints. ❏

Exemple 2. Soient F un sous-espace vectoriel de E puis p_F la projection orthogonale sur F. Pour x et y éléments de E,

$$\langle p_F(x), y\rangle = \langle p_F(x), y - p_F(y) + p_F(y)\rangle = \langle \underbrace{p_F(x)}_{\in F}, \underbrace{y - p_F(y)}_{\in F^\perp}\rangle + \langle p_F(x), p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle\,.$$

Par symétrie des rôles de x et y, $\langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle = \langle p_F(x)|y\rangle$. Une projection orthogonale est un endomorphisme autoadjoint. ❏

Exemple 3. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ puis r_θ la rotation vectorielle d'angle θ. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée directe du plan euclidien orienté P.

$$\langle r_\theta\left(e_1\right), e_2\rangle = \langle(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2), e_2\rangle = \sin(\theta)$$

et

$$\langle e_1, r_\theta\left(e_2\right)\rangle = \langle e_1, (-\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2)\rangle = -\sin(\theta).$$

Puisque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\langle r_\theta\left(e_1\right), e_2\rangle \neq \langle e_1, r_\theta\left(e_2\right)\rangle$. Donc, une rotation vectorielle distincte de $\pm\mathrm{Id}_P$ n'est pas un endomorphisme autoadjoint. ❏

Théorème 35. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien puis f un endomorphisme de E. Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

f est symétrique (ou autoadjoint) si et seulement si A est symétrique.

Démonstration. Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

- Supposons f symétrique. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée,

$$a_{i,j} = \langle e_i, f\left(e_j\right)\rangle = \langle f\left(e_i\right), e_j\rangle = a_{j,i}.$$

Ainsi, $A^T = A$ et donc, la matrice A est symétrique.

- Supposons A symétrique. Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux éléments de E.

$$\begin{aligned}
\langle f(x)|y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(e_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \left\langle f\left(e_i\right)|e_j\right\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} x_i y_j \text{ (car } \mathscr{B} \text{ est orthonormée)} \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i} x_i y_j \text{ (car } A \text{ est symétrique)} \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \left\langle f\left(e_j\right), e_i\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f\left(e_j\right) \right\rangle = \langle x, f(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Donc, f est autoadjoint.

❏

On sait que l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Du théorème précédent, on déduit

Théorème 36. $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(E), +, .)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (où $n = \dim(E)$).

$\Rrightarrow$ **Commentaire** . *Un endomorphisme* f *est symétrique si et seulement si* $f^* = f$ *et on note* $\mathscr{S}(E)$ *l'espace des endomorphismes symétriques. De même, on peut définir la notion d'endomorphisme anti-symétrique :* f *est anti-symétrique si et seulement si* $f^* = -f$. *On note* $\mathscr{A}(E)$ *l'ensemble des endomorphismes anti-symétriques.*
On peut montrer que $\mathscr{A}(E)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{L}(E)$ *puis que* $\mathscr{L}(E) = \mathscr{S}(E) \oplus \mathscr{A}(E)$. *La décomposition d'un endomorphisme quelconque en somme d'un endomorphisme symétrique et d'un endomorphisme anti-symétrique est*

$$f = \frac{1}{2}\left(f + f^*\right) + \frac{1}{2}\left(f - f^*\right).$$

Exemple. Soient F un sous-espace vectoriel de E puis s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Puisque $s_F = 2p_F - Id_E$ et que p_F et Id_E sont dans $\mathscr{S}(E)$, on en déduit que s_F est un endomorphisme autoadjoint. Toute symétrie orthogonale est un endomorphisme autoadjoint.

5.2 Le théorème spectral

Le résultat central de ce paragraphe est le fait qu'un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien diagonalise dans une base orthonormée de cet espace ou encore qu'une matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle. On prépare le terrain en établissant d'abord trois résultats préliminaires.

Théorème 37.
- Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.
- Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien non réduit à $\{0\}$. Alors χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$.

Démonstration .

- Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Il existe $X = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. On note tout d'abord que

$$X^T\overline{X} = \sum_{k=1}^{n} x_k\overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0,$$

(car l'un au moins des $|x_k|$ est strictement positif, les autres étant positifs ou nuls). Ensuite,

$$\begin{aligned}\lambda X^T\overline{X} &= (\lambda X)^T\overline{X} = (AX)^T\overline{X} = X^T A^T\,\overline{X}\\ &= X^T\overline{A}\,\overline{X} \text{ (car } A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}))\\ &= X^T\left(\overline{AX}\right) = X^T\left(\overline{\lambda X}\right)\\ &= \overline{\lambda}\,X^T\overline{X}\end{aligned}$$

et donc $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)X^T\overline{X} = 0$. Puisque $X^T\overline{X} \neq 0$, on en déduit que $\lambda - \overline{\lambda} = 0$ et donc que λ est un réel.

Ainsi, toute valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ est réelle ou encore χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

- Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien non réduit à $\{0\}$. Soit A la matrice de f dans une base orthonormée de E. D'après le théorème 35, A est une matrice symétrique réelle et donc $\chi_f = \chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$. ❑

Théorème 38. Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ non réduit à $\{0\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

Démonstration . Soit $(x, y) \in F^\perp \times F$. Par hypothèse, $f(y) \in F$ et donc

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = 0.$$

Ainsi, $\forall x \in F^\perp$, $f(x) \in F^\perp$ ou encore $F^\perp$ est stable par f.

❑

Théorème 39.

Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ non réduit à $\{0\}$.

Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration. Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$.

Si f n'a qu'une valeur propre (d'ordre n), il n'y a rien à faire. Sinon, soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f. Soit $(x, y) \in E_\lambda(f) \times E_\mu(f)$.

$$\begin{aligned}\lambda\langle x, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle \\ &= \langle x, f(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle \\ &= \mu\langle x, y\rangle,\end{aligned}$$

et donc $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ puis $\langle x, y\rangle = 0$ car $\lambda - \mu \neq 0$. Ceci montre que $E_\mu(f) \subset (E_\lambda(f))^\perp$.

❏

On peut alors passer au théorème central du paragraphe, le théorème spectral.

Théorème 40. (théorème spectral pour les endomorphismes)

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ non réduit à $\{0\}$.

f est autoadjoint si et seulement si il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.
f est autoadjoint si et seulement si E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f.

On dit alors que f diagonalise en base orthonormée.

Démonstration. On note E_n un espace euclidien de dimension n. On montre par récurrence sur $n = \dim(E_n) \geqslant 1$ que tout endomorphisme autoadjoint de E_n diagonalise en base orthonormée.

- $\mathscr{S}(E_1) = \mathscr{L}(E_1) = \{\lambda \mathrm{Id}_{E_1}\}$. Donc, tout endomorphisme de E_1 est diagonalisable dans une base orthonormée de E_1 et en particulier, tout endomorphisme autoadjoint de E_1 est diagonalisable dans une base orthonormée de E_1.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension n soit diagonalisable en base orthonormée.
Soit f un endomorphisme autoadjoint de E_{n+1}, un espace euclidien de dimension $n+1$. D'après le théorème 37, χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$. f admet donc au moins une valeur propre λ_1 (λ_1 est un réel).
Soit e_1' un vecteur propre associé à λ_1. Alors $e_1 = \dfrac{1}{\|e_1'\|}e_1'$ est un vecteur propre unitaire associé à λ_1.

  Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1)$. D est stable par f et donc $D^\perp$ est stable par f d'après le théorème 38. f induit donc un endomorphisme de $D^\perp$, endomorphisme que l'on note $f_{D^\perp}$. $f_{D^\perp}$ vérifie $\forall (x, y) \in \left(D^\perp\right)^2$, $\langle f_{D^\perp}(x), y\rangle = \langle x, f_{D^\perp}(y)\rangle$.
Donc $f_{D^\perp}$ est un endomorphisme autoadjoint de $D^\perp$ qui est un espace euclidien de dimension n. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(e_2, \dots, e_{n+1})$ de $D^\perp$ constituée de vecteurs propres de $f_{D^\perp}$ et donc de f.

  e_1 est unitaire et orthogonal à chacun des e_i, $2 \leqslant i \leqslant n+1$. Donc, $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ est une base orthonormée de E, constituée de vecteurs propres de f.

Le résultat est démontré par récurrence.

Ainsi, si f est autoadjoint, f est diagonalisable. E est donc somme directe des sous-espaces propres de f. D'après le théorème 39, cette somme directe est orthogonale.

Réciproquement, soient $n \geqslant 1$ puis f un endomorphisme de E_n tel qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées. Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux éléments de E. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée,

$$\langle f(x), y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i.$$

En échangeant les rôles de x et y, on a

$$\langle f(x), y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i = \langle f(y), x\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Donc, f est un endomorphisme autoadjoint.

De même, si E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f, une base orthonormée de E adaptée à cette décomposition est une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f. D'après ce qui précède, f est autoadjoint.

❏

Théorème 41. (théorème spectral pour les matrices symétriques réelles)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est symétrique si et seulement si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle ou encore si et seulement si

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ \exists D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})/\ A = PDP^T.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathscr{B}$ la base canonique (de sorte que $\mathscr{B}$ est orthonormée et que $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$).

Si A est symétrique réelle, alors f est autoadjoint (puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée et d'après le théorème 35) et il existe une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f. $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ est une matrice diagonale D et d'autre part, $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est une matrice orthogonale car matrice de passage d'une base orthonormée à une autre. Les formules de changement de base fournissent

$$A = PDP^{-1} = PDP^T.$$

A est donc orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

Réciproquement, s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^T$, alors

$$A^T = \left(P^T\right)^T D^T P^T = PDP^T = A,$$

et A est symétrique réelle.

❏

⇛ **Commentaire**. *Le théorème spectral affirme en particulier qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable. Le résultat ne se généralise pas aux matrices symétriques complexes.*
Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$. *Alors* $\chi_A = X^2 - 2iX - 1 = (X - i)^2$. *Si* A *était diagonalisable,* A *serait semblable à diag*$(i, i) = iI_2$ *et donc égale à* iI_2 *ce qui n'est pas. Donc* A *est une matrice symétrique complexe non diagonalisable.*

La diagonalisation d'une matrice symétrique réelle est en général beaucoup plus rapide qu'une diagonalisation classique car on profite du fait que les sous-espaces propres sont orthogonaux et que l'inverse de la matrice de passage est tout simplement sa transposée (si on a bien trouvé une base **orthonormée** de vecteurs propres de A). C'est l'objet de l'exercice suivant :

Exercice 4. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution 4. A est symétrique réelle et donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. $\text{rg}\,(A - I_3) = 1$ puis $\dim(\text{Ker}\,(A - I_3)) = 2$ et donc 1 est valeur propre d'ordre exactement 2 (car A est diagonalisable). La dernière valeur propre λ est fournie par la trace de A : $1 + 1 + \lambda = 6$ et donc $\lambda = 4$.

$E_1(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Une base orthonormée de ce plan est (U_1, U_2) où $U_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$E_4(A)$ est l'orthogonal du plan $E_1(A)$ d'équation $x + y + z = 0$. Donc, $E_4(A) = \text{Vect}\,(U_3)$ où $U_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, $A = PDP^T$ où $D = \text{diag}(1, 1, 4)$ et $P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

5.3 Projections orthogonales. Symétries orthogonales

5.3.1 Projections orthogonales

Théorème 42. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit p une projection de E

p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Démonstration .

• Supposons que p soit une projection orthogonale. Soit $x \in E$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

et donc $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

• Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis p la projection sur F parallèlement à G. Supposons que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Soit $(x, y) \in F \setminus \{0\} \times G \setminus \{0\}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $p(x + \lambda y) = x$. Par hypothèse, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|x\|^2 = \|p(x + \lambda y)\|^2 \leqslant \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

et donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle \geqslant 0$. Puisque $\|y\|^2 \neq 0$, $\lambda \mapsto \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle$ est un trinôme du second degré de signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit $0 \geqslant \langle x, y\rangle^2$ puis $\langle x, y\rangle = 0$.

Ainsi, tout vecteur non nul de F est orthogonal à tout vecteur non nul de G. Ceci montre que $G \subset F^{\perp}$. D'autre part, G et $F^{\perp}$ sont deux supplémentaires de F. Donc, $F^{\perp}$ et G ont même dimension finie.
On en déduit que $G = F^{\perp}$ et donc que p est une projection orthogonale.

❏

Théorème 43. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit p une projection de E

p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint.

Démonstration .

• Soit F un sous-espace vectoriel de E. Supposons que p soit la projection orthogonale sur F. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), y - p(y) + p(y)\rangle = \langle\underbrace{p(x)}_{\in F}, \underbrace{y - p(y)}_{\in F^{\perp}}\rangle + \langle p(x), p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle.$$

En échangeant les rôles de x et y, on obtient $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle = \langle x, p(y)\rangle$. On a montré que p est un endomorphisme autoadjoint de E.

• Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis p la projection sur F parallèlement à G.
Supposons que p soit un endomorphisme autoadjoint. Soit $(x, y) \in F \times G$. Alors, $p(x) = x$ et $p(y) = 0$ puis

$$\langle x, y\rangle = \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

Ainsi, tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G. Ceci montre que $G \subset F^{\perp}$. D'autre part, G et $F^{\perp}$ sont deux supplémentaires de F. Donc, $F^{\perp}$ et G ont même dimension finie.
On en déduit que $G = F^{\perp}$ et donc que p est une projection orthogonale.

❏

En interprétant matriciellement les résultats précédents, on obtient :

Théorème 44. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

f est une projection orthogonale si et seulement si $A^2 = A$ et $A^T = A$.

Démonstration . On sait déjà que f est une projection si et seulement si $A^2 = A$. D'autre part, puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, f est autoadjoint si et seulement si A est symétrique d'après le théorème 35.
D'après le théorème précédent, f est une projection orthogonale si et seulement si f est une projection et f est autoadjoint ce qui équivaut à $A^2 = A$ et $A^T = A$.

❏

On termine cette section par deux exercices de révision du programme de math sup.

Exercice 5. Pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$.

1) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ ainsi que la distance de A à $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$.

Solution 5.

1) Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, le coefficient ligne j, colonne j de la matrice $A^T B$ est $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$ et donc

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

On reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) On sait déjà que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Vérifions que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^{\perp}$.

Soit $(A,B) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right) = -\mathrm{Tr}\left(AB^T\right) = -\mathrm{Tr}\left(B^T A\right) = -\langle B, A\rangle = -\langle A, B\rangle$$

et donc $2\langle A, B\rangle = 0$ puis $\langle A, B\rangle = 0$. Ceci montre que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^{\perp}$ puis $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = (\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))^{\perp}$ par égalité des dimensions.

3) Le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est donc sa partie symétrique :

$$\frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = p_{\mathscr{S}_3(\mathbb{R})}(A).$$

La partie anti-symétrique de A est par ailleurs

$$\frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = p_{\mathscr{A}_3(\mathbb{R})}(A).$$

La distance de A à $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est

$$\begin{aligned} d\left(A, \mathscr{S}_3(\mathbb{R})\right) &= \left\|A - p_{\mathscr{S}_3(\mathbb{R})}(A)\right\| = \left\|p_{\mathscr{A}_3(\mathbb{R})}(A)\right\| = \frac{1}{2}\left\|A - A^T\right\| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 6. Pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$.

1) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) a) Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ après en avoir justifié l'existence.
b) Déterminer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Solution 6.

1) • Pour $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$ et donc $\langle P, Q\rangle$ existe dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\langle\ ,\ \rangle$ est une application de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$.

• $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire (par linéarité de l'intégration et bilinéarité du produit de deux polynômes) et symétrique.

• Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\ dt \geqslant 0$ et de plus,

$$\begin{aligned}\langle P, P\rangle = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t)\ dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ P(t) = 0\\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur $\mathbb{R}[X]$. On a montré que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) a) $(\mathbb{R}[X], \langle\ ,\ \rangle)$ n'est pas un espace euclidien (car $\dim(\mathbb{R}[X]) = +\infty$) mais $\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_1[X]$ de dimension finie. D'après le théorème de la projection orthogonale, $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus (\mathbb{R}_1[X])^\perp$ et la projection orthogonale p sur $\mathbb{R}_1[X]$ est parfaitement définie.

$(P_0, P_1) = (1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminons son orthonormalisée.

$\|P_0\|^2 = \int_0^1 dt = 1$. Donc, $E_0 = \dfrac{1}{\|P_0\|}P_0 = 1$.

Ensuite, $\langle P_1, E_0\rangle = \int_0^1 t\ dt = \dfrac{1}{2}$ puis $P_1 - \langle P_1, E_0\rangle E_0 = X - \dfrac{1}{2}$ puis

$$\left\|X - \frac{1}{2}\right\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Mais alors, $E_1 = \sqrt{12}\left(X - \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$.

(E_0, E_1) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ et donc

$$p\left(X^2\right) = \langle X^2, E_0\rangle E_0 + \langle X^2, E_1\rangle E_1.$$

$\langle X^2, E_0\rangle = \dfrac{1}{3}$ et $\langle X^2, E_1\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 \left(2t^3 - t^2\right) dt = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ puis

$$p\left(X^2\right) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2X - 1) = X - \frac{1}{6}.$$

b)

$$\begin{aligned}\left(d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right)\right)^2 &= \left\|X^2 - \left(X - \frac{1}{6}\right)\right\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4t^2}{3} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right) dt\\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{36 - 90 + 80 - 30 + 5}{180} = \frac{1}{180}\end{aligned}$$

et donc $d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \dfrac{1}{6\sqrt{5}}$.

5.3.2 Symétries orthogonales

Théorème 45. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit s une symétrie de E

s est une symétrie orthogonale si et seulement si $\forall x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$ ($\Leftrightarrow s \in O(E)$).

Démonstration .

• Soit F un sous-espace vectoriel de E. Supposons que s soit la symétrie orthogonale par rapport à F. Soit $x \in E$. Posons $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|-x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2.$$

• Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires. Supposons que s soit la symétrie par rapport à F parallèlement à G et que pour tout x de E, $\|s(x)\| = \|x\|$. Alors, pour tout $(x_1, x_2) \in F \times G$,

$$0 = \|x_1 + x_2\|^2 - \|s\left(x_1 + x_2\right)\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 = 4\left\langle x_1, x_2\right\rangle$$

et donc $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. Ceci montre que $G \subset F^\perp$ puis que $G = F^\perp$ par égalité des dimensions. Ainsi, s est une symétrie orthogonale.

❑

Théorème 46. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit s une symétrie de E.

s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme autoadjoint.

Démonstration . Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Puisque $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ et aussi $p = \dfrac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$, que $(\mathscr{S}(E), +, .)$ est un espace vectoriel et que Id_E est un endomorphisme autoadjoint,

$$s \text{ est autoadjoint si et seulement si } p \text{ est autoadjoint.}$$

D'après le théorème 45, s est autoadjoint si et seulement si $G = F^\perp$ ce qui équivaut au fait que s est une symétrie orthogonale.

❑

Théorème 47. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

f est une symétrie orthogonale si et seulement si $A^2 = I_n$ et $A^T = A$.

Démonstration . Comme pour le théorème 44, f est autoadjoint si et seulement si $A^T = A$ et f est une symétrie si et seulement si $A^2 = I_n$.

❑

5.4 Endomorphismes autoadjoints positifs, matrices symétriques positives

5.4.1 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Soit f un élément de $\mathscr{S}(E)$. L'application $\varphi\ :\ (x, y) \mapsto \langle f(x), y\rangle$ est une forme bilinéaire (par linéarité de f et bilinéarité du produit scalaire) sur E, symétrique (car $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$). Une telle forme bilinéaire est ou n'est pas un produit scalaire suivant qu'elle soit définie positive ou pas. Or, pour tout x de E, $\varphi(x, x) = \langle f(x), x\rangle$. Ceci motive la définition suivante :

Définition 12. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien puis f un endomorphisme autoadjoint de E.

f est positif si et seulement si $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \geqslant 0$.
f est défini positif si et seulement si $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\langle f(x), x\rangle > 0$.

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs) de E se note $\mathscr{S}^+(E)$ (resp. $\mathscr{S}^{++}(E)$).

⇛ **Commentaire** . *Une variante de la définition de « f est défini positif » est : f est défini positif si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.*

Théorème 48. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E.

f est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset [0, +\infty[$.
f est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset]0, +\infty[$.

Démonstration .

• Supposons f autoadjoint positif. On sait que χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f puis x un vecteur propre associé.

$$\langle f(x), x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$$

et donc, puisque $\|x\|^2 > 0$,

$$\lambda = \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \geqslant 0.$$

Donc, $\mathrm{Sp}(f) \subset [0, +\infty[$.

Si on suppose de plus f défini positif, le calcul précédent fournit (en tenant compte de $x \neq 0$ et donc $\langle f(x), x\rangle > 0$),

$$\lambda = \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} > 0.$$

Donc, $\mathrm{Sp}(f) \subset]0, +\infty[$.

• Supposons $\mathrm{Sp}(f) \subset [0, +\infty[$. f est autoadjoint et donc, d'après le théorème spectral, il existe $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associée. Par hypothèse les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont tous des réels positifs.

Soit alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$.

$$\begin{aligned}\langle f(x), x\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \text{ (car la base } \mathscr{B} \text{ est orthonormée)} \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Donc, f est autoadjoint positif.

Supposons de plus $\mathrm{Sp}(f) \subset]0, +\infty[$ (et donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$). Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \setminus \{0\}$. L'une au moins des coordonnées x_i est non nulle et donc, l'un au moins des nombres $\lambda_i x_i^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est strictement positif, les autres étant positifs. Donc,

$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0.$$

Par suite, f est autoadjoint défini positif.

❏

5.4.2 Matrices symétriques réelles positives, définies positives

Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de cet espace puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, on sait que $A^T = A$.
Soient x un vecteur de E puis X la matrice (colonne) du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée,

$$\langle f(x), x\rangle = (AX)^T X = X^T A^T X = X^T A X.$$

Ceci motive la définition suivante :

Définition 13. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

A est positive si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X \geqslant 0$.
A est définie positive si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T A X > 0$.

L'ensemble des matrices symétriques réelles positives (resp. définies positives) se note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

⇛ **Commentaire** . *Une variante de la définition de « A est définie positive » est : A est définie positive si et seulement si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0$.*

L'expression $X^T A X$ ou plus généralement $X^T A Y$ (où X et Y sont deux vecteurs colonnes) est une expression classique à connaître :

Théorème 49. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$X^T A Y = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i y_j,$$

et en particulier,

$$X^T A X = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j,$$

Démonstration . $X^T A Y$ est le produit scalaire usuel du vecteur colonne X par le vecteur colonne Y. Donc,

$$X^T A Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i y_j.$$

❑

Théorème 50. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

A est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
A est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) \subset]0, +\infty[$.

On donne maintenant une démonstration spécifique à une matrice symétrique réelle, sans passer par l'endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé. Les démonstrations des théorèmes 48 et 50 constituent des questions de cours classiques et sont à maîtriser.

Démonstration .

• Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. On sait que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A puis X un vecteur propre associé.

$$X^T AX = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2,$$

et donc, puis $\|X\|^2 > 0$ (X étant non nul en tant que vecteur propre),

$$\lambda = \frac{X^T AX}{\|X\|^2} \geqslant 0.$$

Ceci montre que $\mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

Supposons de plus $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Puisque $X \neq 0$, $X^T AX > 0$ et donc, avec les notations précédentes,

$$\lambda = \frac{X^T AX}{\|X\|^2} > 0.$$

Ceci montre que $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$.

• Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Supposons $\mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.

D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et il existe $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{D}_n([0, +\infty[)$ telles que $A = PDP^T$. Soient $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $X' = P^T X = (x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Alors,

$$\begin{aligned} X^T AX &= X^T PDP^T X = \left(P^T X\right)^T D \left(P^T X\right) = X'^T DX' \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 \text{ (d'après le théorème 49)} \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Supposons de plus $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$ (et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$).

$$\begin{aligned} X^T AX = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i x_i'^2 = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)} \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x'_i = 0 \text{ (car tous les } \lambda_i \text{ sont non nuls)} \\ &\Rightarrow X' = 0 \Rightarrow P^T X = 0 \\ &\Rightarrow X = 0 \text{ (car } P^T \text{ est inversible).} \end{aligned}$$

Par contraposition, si $X \neq 0$, alors $X^T AX > 0$ et donc $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

❑

Exercice 7. Montrer que la matrice de Hilbert $H_n = \left(\dfrac{1}{i + j - 1}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ est définie positive.

Solution 7. Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \frac{x_i x_j}{i + j - 1} = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} x_i x_j t^{i+j-2}\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1}\right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 dt \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
X^T H_n X = 0 &\Rightarrow \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 \, dt = 0 \\
&\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
&\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} = 0 \\
&\Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)} \\
&\Rightarrow X = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T H_n X \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0$. La matrice H_n est une matrice symétrique, définie positive.

Exercice 8.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $S = A^T A$ est symétrique positive.

2) Réciproquement, soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.

Solution 8. On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\ \|$ la norme associée.

1) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $S = A^T A$. $S^T = \left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^T A = S$. Donc, $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Ensuite, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^T S X = X^T A^T A X = (AX)^T (AX) = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2 \geqslant 0.$$

Donc, $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^T$. De plus, S est positive et donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.

Soient $\Delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ puis $A = \Delta P^T$.

$$A^T A = P\Delta^T \Delta P^T = P\Delta^2 P^T = PDP^T = S.$$

On a trouvé $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$.
