Planche n° 6. Espaces préhilbertiens. Corrigé

Exercice n° 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\ell_n = (X^2-1)^n$ de sorte que $L_n = \ell_n^{(n)}$. L_n est un polynôme de degré n car ℓ_n est de degré $2n$.

1) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E$. Une intégration par parties fournit

$$(L_n|P) = \int_{-1}^{1} L_n(x)P(x)\ dx = \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n)}(x)P(x)\ dx = \Big[(\ell_n)^{(n-1)}(x)P(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\ dx.$$

Maintenant, -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme ℓ_n et donc, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, -1 et 1 sont racines d'ordre $n-k$ de $\ell_n^{(k)}$ et en particulier racines de $(\ell_n)^{(k)}$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$. Donc

$$(L_n|P) = -\int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\ dx.$$

Plus généralement, si pour un entier $k \in [\![0,n-1]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\ dx$ alors

$$\begin{aligned}(L_n|P) &= (-1)^k \left(\Big[(\ell_n^{(n-k-1)}(x)P^{(k)}(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\ dx\right)\\ &= (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\ dx.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\ dx$. En particulier

$$(L_n|P) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \ell_n(x)P^{(n)}(x)\ dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n P^{(n)}(x)\ dx \quad (*).$$

Cette dernière égalité reste vraie pour $n = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ (L_n|P) = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n P^{(n)}(x)\ dx.}$$

Soient alors n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p < n$. Puisque $\deg(L_p) = p < n$, on a $(L_n|L_p) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{La famille } (L_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthogonale de l'espace } (\mathbb{R}[X], |\ ).}$$

b) On applique maintenant la formule $(*)$ dans le cas particulier $P = L_n$. On obtient

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n L_n^{(n)}(x)\ dx = 2\times(2n)!\int_0^1 (1-x^2)^n\ dx = 2\times(2n)!\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 t)^n(-\sin t)\ dt\\ &= 2\times(2n)!\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1} t\ dt = 2\times(2n)!W_{2n+1} \text{ (intégrales de Wallis).}\end{aligned}$$

On « sait » que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $W_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}W_{2n-1}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \dfrac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times 3}W_1 = \dfrac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$. On obtient alors

$$\|L_n\|^2 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}\times 2\times(2n)! = \frac{2^{2n+1}n!^2}{2n+1},$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \|L_n\|=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}2^n n!.}$$

On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{1}{2^n n!}L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $(\mathbb{R}[X],\ |\ )$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n=\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X],\ |\ )$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(P_n)=n$ et donc la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}[X],\ |\ )$.

2) Chaque P_n, $n\in\mathbb{N}$, est de degré n et donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(P_0,...,P_n)=\mathrm{Vect}(1,X,...,X^n)$ et de plus, pour $n\in\mathbb{N}$

$$P_n|X^n=\frac{1}{\mathrm{dom}(P_n)}\left(P_n|\mathrm{dom}(P_n)X^n\right)=\frac{1}{\mathrm{dom}(P_n)}\left(P_n|P_n\right)=\frac{1}{\mathrm{dom}(P_n)}\|P_n\|^2$$

car $P_n\in(P_0,\dots,P_{n-1})^\perp=(1,X,\dots,X^{n-1})^\perp=(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Ceci montre que $P_n|X^n>0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'orthonormalisée de la base canonique de }\mathbb{R}[X]\text{ est la famille des polynômes de }\textsc{Legendre}\\ \left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}.\end{array}}$$

3) $\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$. Donc, la distance de X^3 à $\mathbb{R}_1[X]$ est bien définie.

Une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ est (P_0,P_1) avec $P_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $P_1=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\dfrac{1}{2}\times\left(X^2-1\right)'=\sqrt{\dfrac{3}{2}}X$.

Le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est

$$\left(X_3|P_0\right)P_0+\left(X_3|P_1\right)P_1=\frac{1}{2}\left(X^3|1\right)1+\frac{3}{2}\left(X^3|X\right)X,$$

avec $X^3|1=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^3\ dt=0$ et $X^3|X=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^4\ dt=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$. Donc, le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{5}X=\dfrac{3}{5}X$. Par suite,

$$\begin{aligned}\left(d\left(X^3,\mathbb{R}_1[X]\right)\right)^2&=\left\|X^3-\frac{3}{5}X\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left(t^3-\frac{3}{5}t\right)^2dt=2\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{9}{25}\times\frac{1}{3}\right)=2\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{25}\right)\\&=\frac{2\times 4}{7\times 25},\end{aligned}$$

et donc $d\left(X^3,\mathbb{R}_1[X]\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$.

Exercice n° 2

1) • Soient P et Q deux polynômes. La fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, la fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(P,Q)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de l'application φ sont claires. De plus, pour $P\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0&\Rightarrow\int_0^{+\infty}P^2(t)e^{-t}\ dt=0\\&\Rightarrow\forall t\in[0,+\infty[,\ P^2(t)e^{-t}=0\ \text{(fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\&\Rightarrow\forall t\in[0,+\infty[,\ P(t)=0\ (\text{car }\forall t\in[0,+\infty[,\ e^{-t}\neq 0)\\&\Rightarrow P=0\ \text{(polynôme ayant une infinité de racines)}.\end{aligned}$$

Ainsi, la forme φ est bilinéaire, symétrique, définie, positive et finalement

$$\boxed{\text{l'application }\varphi\text{ est un produit scalaire sur }E.}$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de LEIBNIZ permet d'écrire

$$\left(X^n e^{-X}\right)^{(n)} e^X = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(X^n\right)^{(n-k)} \left(e^{-X}\right)^{(k)}\right) e^X = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} X^k.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(h_n) = n$ (et $\mathrm{dom}(h_n) = (-1)^n$) et on sait que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X].}$$

b) Soient $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto (t^n e^{-t})^{(n-1)}$ et P sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A P(t)h_n(t)e^{-t}\, dt = \int_0^A P(t)(t^n e^{-t})^{(n)}\, dt = \left[P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}\right]_0^A - \int_0^A P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}\, dt$$

Maintenant, $(t^n e^{-t})^{(n-1)}$ peut s'écrire $Q(t)e^{-t}$ où Q est un polynôme et donc $P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, la formule de LEIBNIZ montre que le polynôme Q a une valuation au moins égale à 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}(t)$ s'annule en 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\, dt = -\int_0^{+\infty} P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}\, dt.$$

De manière générale, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, les remarques précédentes s'appliquent à la fonction $t \mapsto P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k-1)}$ et par récurrence on obtient

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\, dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)}\, dt.$$

En particulier, pour $k = n$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\, dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t}\, dt$. Cette égalité reste vraie quand $n = 0$ et on a montré que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(P, h_n) = \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\, dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t}\, dt.$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(P) < n$, on a $P^{(n)} = 0$ et donc $\varphi(P, h_n) = 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(h_n) = n$, on en déduit en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi(h_n, h_k) = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X], \varphi).}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\deg(h_n) = n$ et $\mathrm{dom}(h_n) = (-1)^n$, on a $h_n^{(n)} = (-1)^n n!$. La question précédente fournit alors

$$\|h_n\|^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t)t^n e^{-t}\, dt = n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!\Gamma(n+1) = n!^2,$$

et donc $\|h_n\| = n!$. Par suite,

$$\boxed{\text{la famille } \left(\frac{1}{n!}h_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthonormale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X], \varphi).}$$

Exercice n° 3

1) • Soit $(P, Q) \in E^2$. L'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$. Ensuite, l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand t tend vers 1, $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Puisque $\dfrac{1}{2} < 1$, on en déduit que l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand t tend vers 1, $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ et l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ et $\varphi(P,Q)$ existe.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $P \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P) = 0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in]-1,1[,\ \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall t \in]-1,1[, P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Ainsi, l'application φ est définie et finalement

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) a) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. En posant $t = \cos\theta$, on obtient

$$\varphi(T_n,T_p) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{\pi}^{0} \frac{T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\,(-\sin\theta d\theta) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta,$$

(pour $\theta \in]0,\pi[$, $\sin\theta > 0$ et donc $\sqrt{1-\cos^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$). Si de plus, $n \neq p$ (de sorte que $n-p \neq 0$ et $n+p \geqslant 1+0 > 0$),

$$\varphi(T_n,T_p) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((n+p)\theta) + \cos((n-p)\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p} + \frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p}\right]_0^{\pi} = 0.$$

Ainsi, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. De plus, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{la famille } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien } (E,\varphi).}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quand $p = n$, la formule précédente fournit

$$\|T_n\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos(2n\theta))\,d\theta = \left\{\begin{array}{l}\pi \text{ si } n = 0\\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } n \geqslant 1\end{array}\right.,$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\| = \left\{\begin{array}{l}\sqrt{\pi} \text{ si } n = 0\\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \text{ si } n \geqslant 1\end{array}\right..}$$

Exercice n° 4

1) Montrons que E est un sous-espace de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.)$. La suite nulle est élément de E. Soient $(u,v) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout entier naturel n, $u_n^2 + v_n^2 - 2u_nv_n = (u_n - v_n)^2 \geqslant 0$ et donc

$$0 \leqslant (\lambda u_n + \mu v_n)^2 = \lambda^2u_n^2 + 2\lambda\mu u_nv_n + \mu^2v_n^2 \leqslant \lambda^2u_n^2 + \lambda\mu(u_n^2+v_n^2) + \mu^2v_n^2 = (\lambda^2+\lambda\mu)u_n^2 + (\lambda\mu+\mu^2)v_n^2.$$

Par hypothèse, la série de terme général $(\lambda^2+\lambda\mu)u_n^2 + (\lambda\mu+\mu^2)v_n^2$ converge et on en déduit que la suite $\lambda u + \mu v$ est de carré sommable. On a montré que

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.).}$$

2) • Soient u et v deux éléments de E. Pour tout entier naturel n,

$$|u_nv_n| \leqslant \frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2).$$

Ainsi, la série de terme général u_nv_n est absolument convergente et donc convergente. Ceci montre que $\varphi(u,v)$ existe dans $\mathbb{R}$.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $u \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(u,u) = 0 &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 = 0 \text{ (réels positifs de somme nulle)}\\ &\Rightarrow u = 0.\end{aligned}$$

En résumé, l'application φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Exercice n° 5

Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\Phi(A,B) = \text{Tr}\left(A^T \times B\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

L'application Φ n'est autre que produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier est un produit scalaire. La base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (constituée des matrices élémentaires) est orthonormée pour ce produit scalaire.

L'application Φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Par exemple, si $A = iE_{1,1} \neq 0$ alors $A^TA = -E_{1,1}$ puis $\text{Tr}\left(A^TA\right) = -1 < 0$.

Exercice n° 6

Soit N une norme sur E vérifiant $\forall (x,y) \in E^2\ (N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2((N(x))^2 + (N(y))^2)$.
Il faut montrer que la norme N est associée à un produit scalaire B. Si B existe, B est nécessairement défini par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ B(x,y) = \frac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2).$$

Réciproquement,

• Pour tout $x \in E$, $B(x,x) = \frac{1}{4}((N(2x))^2 - (N(0))^2) = \frac{1}{4}(4(N(x))^2 - 0) = (N(x))^2$ et donc $\forall x \in E$, $B(x,x) \geqslant 0$ puis $B(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De plus, $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$.

• $\forall (x,y) \in E^2$, $B(y,x) = \frac{1}{4}((N(y+x))^2 - (N(y-x))^2) = \frac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2) = B(x,y)$.

• Vérifions alors que l'application B est bilinéaire.

1) Montrons que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $B(x+y,z) + B(x-y,z) = 2B(x,z)$.

$$\begin{aligned}B(x+y,z) + B(x-y,z) &= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 - (N(x+y-z))^2 + (N(x-y+z))^2 - (N(x-y-z))^2)\\ &= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 + (N(x-y+z))^2) - ((N(x+y-z))^2 + (N(x-y-z))^2)\\ &= \frac{1}{4}(2(N(x+z))^2 + (N(y))^2) - 2((N(x-z))^2 + (N(y))^2) \text{ (par hypothèse sur } N)\\ &= \frac{2}{4}((N(x+z))^2 - (N(x-z))^2) = 2B(x,z).\end{aligned}$$

2) Montrons que $\forall (x,z) \in E^2$, $B(2x,z) = 2B(x,z)$. Tout d'abord, $B(0,z) = \frac{1}{4}((N(z))^2 - (N(-z))^2) = 0$ puis d'après 1)

$$B(2x,z) = B(x+x,z) + B(x-x,z) = 2B(x,z).$$

3) Montrons que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $B(x,z) + B(y,z) = B(x+y,z)$.

$$\begin{aligned}B(x,z) + B(y,z) &= B\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, z\right) + B\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}, z\right)\\ &= 2B\left(\frac{x+y}{2}, z\right) \text{ (d'après 1))}\\ &= B(x+y,z) \text{ (d'après 2)).}\end{aligned}$$

4) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$.

• C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$ et $B((n+1)x,y) = (n+1)B(x,y)$. Alors

$$B((n+2)x,y) + B(nx,y) = B((n+2)x + nx, y) = B(2(n+1)x,y) = 2B((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence, $B((n+2)x,y) = 2(n+1)B(x,y) - nB(x,y) = (n+2)B(x,y)$.

5) Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$. Le résultat est acquis pour $n \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B(nx,y) + B(-nx,y) = B(0,y) = 0 \text{ et donc } B(-nx,y) = -B(nx,y) = -nB(x,y),$$

6) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B\left(\dfrac{1}{n}x, y\right) = \dfrac{1}{n}B(x,y)$.

$$B(x,y) = B\left(\frac{1}{n}nx, y\right) = nB\left(\frac{1}{n}x, y\right) \text{ et donc } B\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}B(x,y).$$

7) Montrons que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(rx,y) = rB(x,y)$. Soient $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ puis $r = \dfrac{p}{q}$.

$$B(rx,y) = B\left(\frac{p}{q}x, y\right) = pB\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}B(x,y) = rB(x,y).$$

8) Montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(\lambda x,y) = \lambda B(x,y)$. Soit λ un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite λ.

Maintenant, l'application $\begin{array}{rccc} N : & (E,N) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ & x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue sur E car 1-Lipschitzienne sur E. Donc

$$B(\lambda x,y) = B(\lim_{n\to+\infty} r_n x, y) = \lim_{n\to+\infty} B(r_n x, y) = \lim_{n\to+\infty} r_n B(x,y) = \lambda B(x,y).$$

Finalement, l'application B est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire. Puisque $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$, N est la norme associée à ce produit scalaire. On a montré que

$$\boxed{\text{toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme hilbertienne.}}$$

Exercice n° 7

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_i|e_j)^2 = 1 + \sum_{j\neq i} (e_i|e_j)^2$$

et donc $\displaystyle\sum_{j\neq i} (e_i|e_j)^2 = 0$.On en déduit que $\forall j \neq i$, $(e_i|e_j) = 0$. Ainsi, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $i \neq j$, on a $e_i|e_j = 0$. Par suite

$$\text{la famille } (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une famille orthonormale.}$$

Il reste à vérifier que si $F = \text{Vect}(e_1, ..., e_n)$ alors $F = E$.

Soit x un vecteur de E. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On peut donc définir le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F. On sait que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i.$$

On en déduit que $\|p_F(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = \|x\|^2$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = 0,$$

et donc $x = p_F(x)$ ce qui montre que $x \in F$. Donc $F = E$ et finalement

$$\boxed{\text{la famille } (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

Exercice n° 8

1) L'existence, la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\Phi(P,P) = 0 &\Rightarrow \int_0^1 f(t)P^2(t)\ dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t)P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}.\end{aligned}$$

Maintenant, la fonction f est continue, positive sur $[0,1]$ et n'est pas nulle. Donc la fonction f est strictement positive sur un intervalle ouvert non vide inclus dans le segment $[0,1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines et finalement $P = 0$.

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

2) L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ répond à la question.

3) Soit n un entier naturel non nul. Le polynôme $P_n \in (P_0,...,P_{n-1})^{\perp} = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. Soit p le nombre de racines réelles d'ordre impair du polynôme P_n. Soient a_1,..., a_p ces racines (deux à deux distinctes, réelles et d'ordre impair) dans le cas où $p \geqslant 1$. Si $p \geqslant 1$, on pose $Q = (X - a_1)...(X - a_p)$ et si $p = 0$, on pose $Q = 1$.

Si $p < n$, le polynôme Q est orthogonal à P_n car de degré strictement plus petit que le degré de P_n. D'autre part , au vu de la définition de Q, la fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est continue sur $[0,1]$, de signe constant sur $[0,1]$, d'intégrale nulle sur $[0,1]$. La fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est donc nulle.
La fonction f est continue, positive et non nulle sur $[0,1]$. On en déduit que la fonction f ne s'annule pas sur un intervalle de longueur non nulle et en particulier, ne s'annule pas en une infinité de valeurs. Mais alors, le polynôme P_nQ s'annule en une infinité de valeurs puis $P_nQ = 0$. Ceci est faux et donc $p = n$, ce qui signifie que le polynôme P_n a n racines réelles simples.

Exercice n° 9

1) Soit $F = \text{Vect}\,(x_1,\ldots,x_n)$ et $m = \text{dim}F$. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}$. M est une matrice rectangulaire de format (m,n).

Soit $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice M^TM est

$$\sum_{k=1}^{m} m_{k,i}m_{k,j} = (x_i|x_j),$$

et on a donc

$$G\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) = M^TM.$$

Puisque $\text{rg}\,(x_1,\ldots,x_n) = \text{rg}(M)$, il s'agit de vérifier que $\text{rg}\left(M^TM\right) = \text{rg}(M)$. Pour cela, montrons que les matrices M et M^TM ont même noyau.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker}(M) \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow M^TMX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}\left(M^TM\right)$ et aussi

$$X \in \text{Ker}\left(M^TM\right) \Rightarrow M^TMX = 0 \Rightarrow X^TM^TMX = 0 \Rightarrow (MX)^TMX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}(M).$$

Finalement, $\text{Ker}\left(M^TM\right) = \text{Ker}(M)$ et donc, d'après le théorème du rang, $\text{rg}\,(x_1,\ldots,x_n) = \text{rg}(M) = \text{rg}\left(M^TM\right) = \text{rg}\,(G\,(x_1,x_2,\ldots,x_n))$.

$$\boxed{\text{rg}\,(G\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)) = \text{rg}\,(x_1,\ldots,x_n).}$$

2) D'après 1) et puisque M^TM est une matrice carrée de format n,

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \text{rg}\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) < n \Leftrightarrow \text{rg}G\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) < n \Leftrightarrow G\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) \notin GL_n(\mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow \gamma\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0.\end{aligned}$$

De plus, quand la famille $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ libre, avec les notations de la question 1), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée, inversible. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det\left(M^T M\right) = \det\left(M^T\right) \times \det(M) = (\det(M))^2 > 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(x_1, \dots, x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \gamma(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ (x_1, \dots, x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow \gamma(x_1, \dots, x_n) > 0.\end{array}}$$

3) 1ère solution. Soit x un vecteur de E et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Dans la première colonne de $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$, le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire (puisque $x - p_F(x) \in F^{\perp}$)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}(x|x) \\ (x|x_1) \\ \vdots \\ (x|x_n)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\|x - p_F(x)\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(p_F(x)|p_F(x)) \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n) + \gamma(p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Maintenant, $p_F(x)$ est dans F et donc la famille $(p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée puis d'après la question 2) $\gamma(p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Il reste $\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)$ et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x \in E,\ \gamma(x, x_1, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Finalement

$$\boxed{\|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)}}.}$$

2ème solution. Posons $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ puis $d = \|x - p_F(x)\|$ de sorte que

$$d^2 = (x - p_F(x))\,|\,(x - p_F(x)) = (x - p_F(x))\,|x = \|x\|^2 - (x|p_F(x)).$$

D'autre part, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, $x|x_i = (x - p_F(x)|x_i) + (p_F(x)|x_i) = (p_F(x)|x_i)$. Par suite, les $n+1$ réels d^2, λ_1,..., λ_n sont solutions du système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{ll} d^2 + & \lambda_1(x|x_1) + \ldots + \lambda_n(x|x_n) = \|x\|^2 \\ & \lambda_1(x_1|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_1|x_n) = (x|x_1) \\ & \vdots \\ & \lambda_1(x_n|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_n|x_n) = (x|x_n) \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système d'inconnues d^2, λ_1, $\dots\lambda_n$, vaut $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ et le système est de CRAMER. Le déterminant associé à l'inconnue d^2 est $\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ et les formules de CRAMER refournissent

$$d^2 = \frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}.$$

Planche n° 7. Espaces euclidiens. Corrigé

Exercice n° 1

La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}X^T H_n X &= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{i+j-1}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j t^{i+j-2}\right) dt\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 dt \geqslant 0.\end{aligned}$$

De plus, si $X \neq 0$, le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i Y^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul. Puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t \mapsto \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0, 1]$ et on en déduit que

$$^tXH_nX = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 dt > 0.$$

On a montré que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^T H_n X > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la matrice } H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$$

Exercice n° 2

1) $S^T = \left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^T A = S$. Donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T S X = X^T A^T A X = (AX)^T AX = \|AX\|^2 \geqslant 0$. Donc $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A^T A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

2) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^T$.
Posons $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ (et donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$) et on peut poser $\Delta = \text{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ de sorte que $\Delta^2 = D$. On peut alors écrire

$$S = PDP^T = P\Delta^T\Delta P^T = \left(\Delta P^T\right)\left(\Delta P^T\right),$$

et la matrice $A = \Delta P^T$ convient.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) /\ S = A^T A.}$$

Si $A = 0$, pour $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $B^T B = A^T A \Rightarrow B^T B = 0 \Rightarrow \text{Tr}\left(B^T B\right) = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j}^2 = 0 \Rightarrow B = 0$.

Donc, si $A = 0$, $\left(A^T A = B^T B \Rightarrow A = B\right)$.
Si $A \neq 0$, on a aussi $(-A)^T(-A) = S$ avec $-A \neq A$. Donc, si $A \neq 0$, $\left(A^T A = B^T B \not\Rightarrow A = B\right)$.

3) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $S = A^T A$.

$$\begin{aligned}S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^T S X > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \|AX\|_2^2 > 0\\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ AX \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

4) Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(A) \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow A^T AX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}(S),$$

et

$$X \in \operatorname{Ker}(S) \Rightarrow A^T AX = 0 \Rightarrow X^T A^T AX = 0 \Rightarrow (AX)^T AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \operatorname{Ker}(A).$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}\left(A^T A\right) = \operatorname{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{rg}\left(A^T A\right) = \operatorname{rg}(A).}$$

5) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0 D_0 P_0^T$.
Posons $D_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ et enfin $R = P_0 \Delta_0 P_0^T$. La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis

$$R^2 = P_0 \Delta_0^2 P_0^2 = P_0 D_0 P_0^2 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.

M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda)$ (et aussi $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\mu \in \operatorname{Sp}(S)}{\oplus} E_S(\mu)$).

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \in E_\lambda(M) \Rightarrow MX = \lambda X \Rightarrow M^2 X = \lambda^2 X \Rightarrow X \in E_{\lambda^2}(S)$ et donc $E_\lambda(M) = \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \operatorname{Ker}\left(S - \lambda^2 I_n\right) = E_{\lambda^2}(S)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2, $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\operatorname{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.
En tenant compte de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda) = \underset{\mu \in \operatorname{Sp}(S)}{\oplus} E_S(\mu)$, ceci montre que pour chaque $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$, $E_\lambda(M) = E_{\lambda^2}(S)$ et que les λ^2, $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S.

Ainsi, nécessairement la matrice $P_0^T M P_0$ est une matrice diagonale D. L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ R^2 = S.}$$

Exercice n° 3

1 ère solution. Soit $p \geqslant 2$. Montrons que si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est obtusangle alors la famille $(x_1, ..., x_{p-1})$ est libre.

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille obtusangle. Supposons que la famille $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ soit liée.

Il existe donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0$.

Quite à multiplier les deux membres de l'égalité par -1, on peut supposer que l'un des λ_i au moins est strictement positif.
On pose $I = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k > 0\}$ et $J = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k \leqslant 0\}$ (éventuellement J est vide).

Si J est vide, il reste $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ et si J est non vide,

$$\left\|\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right\|^2 = -\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j\right) = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j (x_i | x_j) \leqslant 0 \text{ (car } \forall (i,j) \in I \times J,\ (x_i|x_j) < 0 \text{ et } \lambda_i \lambda_j \leqslant 0).$$

Ainsi, dans tous les cas, $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais ceci est impossible car $\displaystyle\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) | x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i (x_i | x_p) < 0$.

On a montré que la famille $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ est libre et on en déduit que $p - 1 \leqslant n$ ou encore $p \leqslant n + 1$.

2ème solution. Montrons par récurrence sur $n = \dim(E) = n \geqslant 1$ que toute famille obtusangle d'un espace E de dimension n, a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$.

- Pour $n = 1$, soit $(E, |\ )$ un espace euclidien de dimension 1. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E. On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels x_1, x_2 ou x_3 ont même signe et on ne peut donc avoir $x_1 x_2 < 0$ et $x_1 x_3 < 0$ et $x_2 x_3 < 0$.
Une famille obtusangle de $(E, |\ )$ a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille obtusangle d'un espace euclidien $(E, |\ )$ de dimension $n + 1$.
Si $p = 1$ alors $p \leqslant n + 2$. Supposons dorénavant $p \geqslant 2$.

On va construire à partir de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ une famille obtusangle de cardinal $p-1$ d'un espace euclidien de dimension n.
Soit $H = x_p^{\perp}$. Puisque la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est obtusangle, le vecteur x_p n'est pas nul et H est un espace euclidien de dimension n.
On note y_1, y_2, ..., y_{p-1} les projetés orthogonaux des vecteurs x_1, ..., x_{p-1} sur H. On sait que

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!],\ y_i = x_i - \frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2}x_p.$$

Soit $(i, j) \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $i \neq j$.

$$(y_i|y_j) = (x_i|x_j) - 2\frac{(x_i|x_p)\,(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)\,(x_j|x_p)\,\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i|x_j) - \frac{(x_i|x_p)\,(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p-1}$ est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n et par hypothèse de récurrence $p-1 \leqslant n+1$ et donc $p \leqslant n+2$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Exercice n° 4

Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie.
Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on peut considérer $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille $(x_1, \dots, x_n)$. Les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}$ sont des bases orthonormées de E et donc $\mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_0}$ est une matrice orthogonale puis $|\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_0)| = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|\det{}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)| &= |\det{}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_0)| \times |\det{}_{\mathscr{B}_0}(x_1, \dots, x_n)| = |\det{}_{\mathscr{B}_0}(x_1, \dots, x_n)| \\
&= \text{abs}\left(\begin{vmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n) \end{vmatrix}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} |(x_k|e_k)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|\|e_k\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ |\det{}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \text{ (inégalité de HADAMARD).}}$$

Ensuite,

- si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul
- si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|(x_k|e_k)| = \|x_k\|\,\|e_k\|$. Les cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ étant connus, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, x_k est colinéaire à e_k ou encore si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

En résumé, l'inégalité de HADAMARD est une égalité si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale libre ou l'un des vecteurs est nul.

Exercice n° 5

C'est le n° 4.

Exercice n° 6

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice orthogonale. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1\times a_{i,j}\times 1\right| &= \left|U^T AU\right| = |(AU|U)|\\ &\leqslant \|AU\|\|U\| \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\ &= \|U\|^2 \text{ (puisque la matrice } A \text{ est orthogonale)}\\ &= n.\end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si la famille (U, AU) est liée ce qui équivaut à U vecteur propre de A.
On sait que les valeurs propres (réelles) de A ne peuvent être que 1 ou -1. Donc,

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| = n \Leftrightarrow AU = U \text{ ou } AU = -U \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| = 1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Puisque tous les $a_{i,j}$ sont éléments de $[0,1]$,

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité $a_{i,j} \geqslant a_{i,j}^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est une égalité. Par suite, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0,1\}$. Ceci montre que la matrice A est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

Exercice n° 7

1) Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons encore $A^T = \left(a'_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a'_{j,i} b_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}\right).$$

On reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Déterminons l'orthogonal de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle)$. Soit $(A,B) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = -\mathrm{Tr}\left(B^T A\right) = -\langle B,A\rangle = -\langle A,B\rangle,$$

et donc $2\langle A,B\rangle = 0$ puis $\langle A,B\rangle = 0$. On en déduit que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dim\left((\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp\right)$, on a montré que

$$\boxed{(\mathscr{A}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).}$$

3) Ainsi, la projection orthogonale d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M - p_a(M) = p_s(M)$ (partie symétrique de M). Donc,

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ d\left(M, \mathscr{A}_n(\mathbb{R})\right) = \frac{1}{2}\left\|M + M^T\right\|.$$

Exercice n° 8

La matrice A est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels positifs. De plus,

$$\det A = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = (1+\lambda_1)\ldots(1+\lambda_n),$$

(car si $P = X + 1$, on sait que $\mathrm{Sp}(A + I_n) = \mathrm{Sp}(P(A)) = (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) = (1+\lambda_1, \ldots, 1+\lambda_n)$). L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (1+\lambda_k)}.$$

Soit donc $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Si l'un des λ_k est nul, l'inégalité est immédiate.

Supposons dorénavant tous les λ_k strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln\left(1+\exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln\left(\lambda_1\right)+\ldots+\ln\left(\lambda_n\right)\right)\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\ln(1+\exp\left(\ln\left(\lambda_1\right)\right)+\ldots+\ln\left(1+\exp\left(\ln\left(\lambda_n\right)\right)\right)\right) \quad (*)$$

ou encore $f\left(\dfrac{1}{n}(x_1+...+x_n)\right) \leqslant \dfrac{1}{n}(f(x_1)+...+f(x_n))$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^x)$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = \ln(\lambda_k)$.
L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1} \text{ puis } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'inégalité $(*)$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ 1+\sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n+A)}.}$$

Exercice n° 9

Soit A une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de A sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls. A est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou -1. Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.

Il y a $n!$ matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation 2^n façons d'attribuer un signe $+$ ou $-$ à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\boxed{\operatorname{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})) = 2^n n!.}$$

Exercice n° 10

Puisque les matrices $S_1 = {}^tAA$ et $S_2 = A\,{}^tA$ sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si M et N sont deux matrices quelconques alors les matrices MN et NM ont même polynôme caractéristique.
Notons alors $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la famille des valeurs propres des matrices S_1 et S_2 et posons $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ...\lambda_n)$. D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que $S_1 = P_1DP_1^T$ et $S_2 = P_2DP_2^T$. Mais alors

$$S_2 = P_2\left(P_1^TS_1P_1\right)P_2^T = \left(P_2P_1^T\right)S_1\left(P_2P_1^T\right)^T.$$

Comme la matrice $P_2P_1^T$ est orthogonale, on a montré que les matrices S_1 et S_2 sont orthogonalement semblables.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ les matrices } A^TA \text{ et } AA^T \text{ sont orthogonalement semblables.}}$$

Exercice n° 11

Remarque. Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow (AB)^T = AB \Leftrightarrow B^TA^T = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de AB soient toutes réelles .

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice n° 2, il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = M^TM$ et $B = N^TN$. On a alors $AB = M^TMN^TN$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N\left(M^TMN^T\right) \left(MN^T\right)^T\left(MN^T\right)$. D'après l'exercice n° 2, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.

$$\boxed{\forall (A, B) \in \left(\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\right)^2,\ \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(AB) \subset \mathbb{R}^+.}$$

Exercice n° 12

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.

1er cas. Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$.
D'autre part, la matrice $A+B$ est symétrique car $(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, $X^T(A+B)X = X^TAX + X^TBX \geqslant 0$.
La matrice $A+B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A+B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A+B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a $\det(A+B) \geqslant 0 = \det A + \det B$.

2ème cas. Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple A définie positive.

D'après l'exercice n° 2, il existe une matrice inversible M telle que $A = M^TM$. On peut alors écrire $A+B = M^TM+B = M^T\left(I_n + \left(M^{-1}\right)^T BM^{-1}\right)M$ et donc

$$\det(A+B) = (\det(M))^2 \det\left(I_n + \left(M^{-1}\right)^T BM^{-1}\right) = (\det M)^2 \det\left(I_n + C\right)$$

où $C = \left(M^{-1}\right)BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne X,

$$X^TCX = X^T\left(M^{-1}\right)^T BM^{-1}X = \left(M^{-1}X\right)^T B\left(M^{-1}X\right) \geqslant 0$$

et donc, ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1+\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et donc

$$\det\left(I_n + C\right) = \left(1+\lambda_1\right)\ldots\left(1+\lambda_n\right) \geqslant 1 + \lambda_1\ldots\lambda_n = 1 + \det(C).$$

Maintenant, $\det(A) = (\det(M))^2$ puis $\det(B) = (\det(M))^2\det(C)$ et donc (en tenant compte de $(\det(M))^2 \geqslant 0$),

$$\det(A) + \det(B) = (\det(M))^2(1+\det(C)) \leqslant (\det(M))^2\det\left(I_n + C\right) = \det(A+B).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (A,B) \in \left(\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})\right)^2,\ \det(A) + \det(B) \leqslant \det(A+B).}$$

Exercice n° 13

Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve l'orthogonalité est une similitude.

On peut raisonner sur une base orthonormée de E que l'on note $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Par hypothèse, la famille $\left(f\left(e_i\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, $\langle e_i+e_j, e_i-e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$ et donc $\rangle f\left(e_i+e_j\right), f\left(e_i-e_j\right)\rangle = 0$ ce qui fournit $\|f\left(e_i\right)\| = \|f\left(e_j\right)\|$. Soit k la valeur commune des normes des $f\left(e_i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
Si $k=0$, tous les $f\left(e_i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont nuls. L'endomorphisme f s'annule sur base de E et donc $f=0$. Dans ce cas, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = 0 \times \|x\|$.
Si $k \neq 0$, l'image par l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}f$ de la base othonormée $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}f$ est un automorphisme orthogonal de E ou encore l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}f$ conserve la norme. Mais alors, pour tout $x \in E$, $\dfrac{1}{k}\|f(x)\| = \|x\|$ ou encore $\|f(x)\| = k\|x\|$.
Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice n° 14

Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc P est un plan. Une base de P est par exemple $(i,j) = ((1,-1,0,0),(1,0,2,-3))$. On orthonormalise la base (i,j).
On prend $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ puis $e_2' = j - \langle j, e_1\rangle e_1 = (1,0,2,-3) - \dfrac{1}{2}(1,-1,0,0) = \dfrac{1}{2}(1,1,4,-6)$. puis $e_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6)$.

Une base orthonormée de P est (e_1,e_2) où $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}(1,1,4,-6)$.

1) Le projeté orthogonal de $u = (x, y, z, t)$ sur P est

$$\begin{aligned}
p_P(u) &= \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2 = \frac{1}{2}(x-y)(1,-1,0,0) + \frac{1}{54}(x+y+4z-6t)(1,1,4,-6)\\
&= \frac{1}{54}(28x-26y+4z-6t, -26x+28y+4z-6t, 4x+4y+16z-24t, -6x-6y-24z+36t)\\
&= \frac{1}{27}(14x-13y+2z-3t, -13x+14y+2z-3t, 2x+2y+8z-12t, -3x-3y-12z+18t).
\end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P est

$$\boxed{M = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 & -3\\ -13 & 14 & 2 & -3\\ 2 & 2 & 8 & -12\\ -3 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}.}$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P est

$$\boxed{S = 2M - I_4 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 & -26 & 4 & -6\\ -26 & 1 & 4 & -6\\ 4 & 4 & -11 & -24\\ -6 & -6 & -24 & 9 \end{pmatrix}.}$$

2) La distance de u = (x,y,z,t) à P est

$$\begin{aligned}
\|u - p_P(u)\| &= \frac{1}{27}\|(14x+13y-2z+3t, 13x+14y-2z+3t, -2x-2y-11z+12t, 3x+3y+12z+9t)\|\\
&= \frac{1}{27}\sqrt{(14x+13y-2z+3t)^2 + (13x+14y-2z+3t)^2 + (-2x-2y-11z+12t)^2 + (3x+3y+12z+9t)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice n° 15

Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel $\lambda \in]0,1[$, la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ n'est pas orthogonale.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on note respectivement A_j, B_j et C_j la j-ème colonne de matrice A, de la matrice B et de la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$. Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$1 = \|C_j\| \leqslant (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1-\lambda) + \lambda = 1,$$

et donc $\|C_j\| = (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de Minkowski. Puisque $\lambda \in]0,1[$, les colonnes $(1-\lambda)A_j$ et λB_j ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels $1-\lambda$ et λ sont strictement positifs, il en est de même des colonnes A_j et B_j et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale, alors $A = B$. Ceci est une contradiction et on a montré que

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas convexe.}}$$

Exercice n° 16

Si $\text{rg}M \leqslant n-1$, l'égalité $M = \text{com}(M)$ entraîne $MM^T = M(\text{com}(M))^T = (\det(M))I_n = 0$ et donc $M = 0$. En effet,

$$\begin{aligned}
MM^T = 0 &\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T MM^T X = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|M^T X\right\|^2 = 0\\
&\Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ M^T X = 0 \Rightarrow M^T = 0 \Rightarrow M = 0.
\end{aligned}$$

En résumé, si M est solution, $M = 0$ ou M est inversible. $M = 0$ est solution.

Dans le deuxième cas, d'après l'exercice n° 13, planche n° 3, on doit avoir $\det(M) = (\det(M))^{n-1}$ et donc, puisque $\det(M) \neq 0$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$ (et même $\det(M) = 1$ si n est impair) car $\det(M)$ est réel.

• Si $\det(M) = -1$, on doit avoir $MM^T = -I_n$ mais ceci est impossible car le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice MM^T vaut $m_{1,1}^2 + \ldots + m_{1,n}^2 \neq -1$.

• Il reste le cas où $\det(M) = 1$, l'égalité $M = \text{com}M$ entraîne $MM^T = I_n$ (et $\det(M) = 1$) c'est-à-dire M est orthogonale positive.

Réciproquement, si M est orthogonale positive, $M^T = M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}(\text{com}M)^T = (\text{com}(M))^T$ et donc $M = \text{com}M$.

Finalement ,

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\} \cup O_n^+(\mathbb{R}).}$$

Exercice n° 17

Soit $x \in E$. Si $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}\,(f^*)$, alors $f(x) + f^*(x) = 0 + 0 = 0$ et donc $x \in \text{Ker}\,(f + f^*)$.

Inversement, si $x \in \text{Ker}\,(f + f^*)$, alors $f^*(x) = -f(x)$ puis

$$\|f^*(x)\|^2 = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle = -\langle f^*(x), f(x)\rangle = -\langle x, f \circ f(x)\rangle = -\langle x, 0\rangle = 0$$

et donc $f^*(x) = 0$ puis $f(x) = -f^*(x) = 0$ puis $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}\,(f^*)$.

On a montré que $\text{Ker}\,(f + f^*) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}\,(f^*)$.

Exercice n° 18

(1) et (2) $\Rightarrow$ (3). Puisque $f \in O(E)$, f est un automorphisme de E et $f^* = f^{-1}$ et puisque $f^2 = -Id_E$, $f^{-1} = -f$. Donc, $f^* = -f$ puis f est un endomorphisme anti-symétrique. Mais alors, pour tout $x \in E$,

$$\langle f(x), x\rangle = \langle x, f^*(x)\rangle = -\langle x, f(x)\rangle = -\langle f(x), x\rangle$$

puis $2\langle f(x), x\rangle = 0$ et finalement, $\langle f(x), x\rangle = 0$.

(2) et (3) $\Rightarrow$ (1). Puisque $f \in O(E)$, $f^* = f^{-1}$. D'autre part, pour $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(x + y), x + y\rangle = \langle f(x) + f(y), x + y\rangle = \langle f(x), x)\rangle + \langle f(x), y\rangle + \langle x, f(y)\rangle + \langle f(y), y\rangle \\ &= \langle f(x), y\rangle + \langle x, f(y)\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, -f(y)\rangle$. Par unicité, $f^* = -f$. Mais alors

$$-f^2 = -f \circ f = (-f) \circ f = f^* \circ f = f^{-1} \circ f = Id_E,$$

et donc, $f^2 = -Id_E$.

(3) et (1) $\Rightarrow$ (2). Comme précédemment, la condition (3) entraine $f^* = -f$ et la condition (1) entraine $f^{-1} = -f$. On en déduit que $f^* = f^{-1}$ et donc que $f \in O(E)$.

Exercice n° 19

1) D'après le n° 2, si $A = T^T T$ où T est une matrice inversible, alors $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{B} = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Puisque $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'application $\langle\ ,\ \rangle\ :\ (X, Y) \to \langle X, Y\rangle = X^T AY$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note que pour tout $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et tout $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i a_{i,j} y_j,$$

et en particulier, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = \langle E_i, E_j\rangle$.

Soit $\mathscr{B}' = (E'_1, \ldots, E'_n)$ l'orthonormalisée de $\mathscr{B}$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ puis $T' = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Par définition de l'orthonormalisée, T' est une matrice triangulaire supérieure. Soient $(X, Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ puis X' et Y' les vecteurs colonnes dont les composantes sont les coordonnées des vecteurs X et Y dans $\mathscr{B}'$. Les formules de changement de bases fournissent $X = T'X'$ et $Y = T'Y'$ puis

$$\langle X, Y\rangle = X^T AY = (T'X')^T A(T'Y') = X'^T\left(T'^T AT'\right)Y' = X'^T BY'^T = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x'_i b_{i,j} y'_j$$

où $B = T'^{T}AT' = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$,

$$b_{i,j} = \langle E'_i, E'_j \rangle = \delta_{i,j},$$

et donc $B = I_n$ puis $T'^{T}AT' = I_n$ puis $A = \left(T'^{-1}\right)^{T}\left(T'^{-1}\right)$. Mais alors, la matrice $T = T'^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure inversible telle que $A = T^{T}T$.

2) Posons $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$$\det(A) = \det\left(T^{T}T\right) = (\det(T))^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} t_{i,i}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2.$$

D'autre part, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} t_{j,i}t_{j,i} = \sum_{j=i}^{n} t_{i,j}^2 \geqslant t_{i,i}^2$$

(et en particulier, $a_{i,i} > 0$). On en déduit que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} t_{i,i}^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exercice n° 20 Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension 2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, $\mathrm{Mat}_{\mathbb{B}}(f^*) = A^{T}$. L'égalité $f^* \circ f = f \circ f^*$ s'écrit alors $A^{T}A = AA^{T}$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

$$A^{T}A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

et

$$AA^{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
A^{T}A = AA^{T} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+c^2 = a^2+b^2 \\ b^2+d^2 = c^2+d^2 \\ ab+cd = ac+bd \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |b| = |c| \\ ab+cd = ac+bd \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = b \\ ab+bd = ab+bd \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} c = -b \\ ab-bd = -ab+bd \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow c = b \text{ (I)} \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} c = -b \\ b(a-d) = 0 \end{array}\right. \text{ (II)}.
\end{aligned}$$

(I) est équivalent à $A \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ ou encore $f \in \mathscr{S}(E)$. (II) équivaut à $b = c = 0$ ou $c = -b \neq 0$ et $a = d$ ou encore (I) équivaut à A est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Les endomorphismes normaux de E sont les endomorphismes symétriques et les similitudes positives (composées d'une homothétie et d'une isométrie positive).

Exercice n° 21

1) On sait que si F est un sous-espace de E stable par f^*, alors $F^{\perp}$ est stable par $(f^*)^* = f$. En effet, pour $x \in F^{\perp}$ donné, pour tout $y \in F$,

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle = 0$$

(car $x \in F^{\perp}$ et $f^*(y) \in F$) et donc $f(x) \in F^{\perp}$. Par suite, $F^{\perp}$ est stable par f.

Si maintenant H est un hyperplan stable par f^*, alors $H^{\perp}$ est un droite stable par f et donc une droite engendrée par un vecteur propre u de f. Mais alors, $H = (u)^{\perp}$ est un hyperplan de vecteur normal un vecteur propre de f. Inversement, soit u un vecteur propre de f puis $H = (u)^{\perp}$. Alors, $\mathrm{Vect}(u)$ est stable par f et donc $H = (u)^{\perp}$ est stable par f^*.

2) Si f est symétrique, f admet au un vecteur propre u. $H = (u)^{\perp}$ est alors un hyperplan de E stable par $f^* = f$.