Corrigé proposé par :
M. Afekir - École Royale de l'Air
CPGE Marrakech
cpgeafek@yahoo.fr

Satellites artificiels

Première partie
Étude générale

1.1. Le Maroc a lancé son premier satellite artificiel en 2001. Nom : **Zarkae Elyamama**;il est destiné au usage de la télécommunication.

1.2.

$$\mathcal{G}(r) = \frac{GM}{r^2} \text{ et } g_o = \frac{GM}{R_T^2} \text{ ; Soit : } \boxed{G(r) = g_o\frac{R_T^2}{r^2}}$$

1.3.

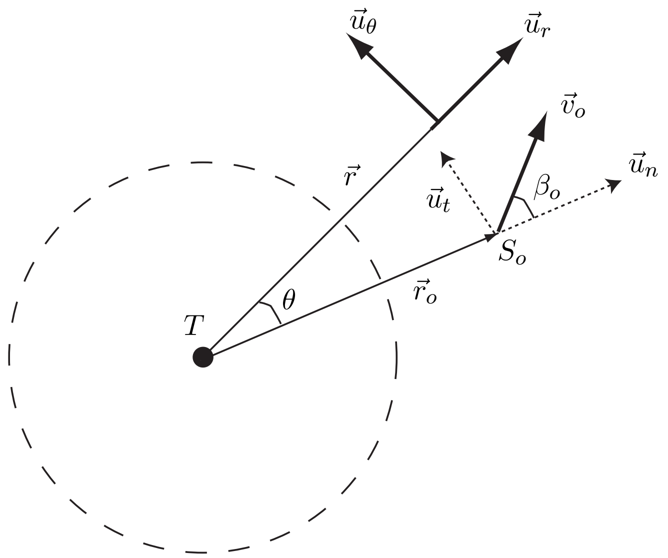
$$\alpha_o = \frac{r_o v_o^2}{g_o R_T^2} \quad ; \quad \beta_o = (\overrightarrow{TS}_o, \overrightarrow{v}_o) \quad et \quad \overrightarrow{f}_G = -mg_o\frac{R_T^2}{r^2}\vec{u}_r$$

1.3.1. Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma}_T}{dt} = \overrightarrow{M}_T(\overrightarrow{f}_G) = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\sigma} = \text{constante vectorielle}$$

Le mouvement du satellite est, donc, plan. Le plan du mouvement est le plan perpendiculaire, à chaque instant, au moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}_T$ qui est une constante vectorielle égale à sa valeur initiale; soit : $\overrightarrow{TS}_o \wedge m\vec{v}_o$. le plan du mouvement est le plan $(\overrightarrow{TS}_o, \overrightarrow{v}_o)$

1.3.2.



1.3.3. Moment cinétique du satellite

$$\overrightarrow{\sigma}_T = \overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{TS}_o \wedge m\vec{v}_o = m\vec{r}_o \wedge \vec{v}_o \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\sigma} = mr_o v_o sin\beta_o \vec{u}_z \quad \text{ou} \quad \boxed{\sigma = mr_o v_o sin\beta_o}$$

1.4. Le vecteur Hamilton $\overrightarrow{H}$

$$\overrightarrow{H} = m\vec{v} - \frac{K}{\sigma^2}\left(\overrightarrow{\sigma} \wedge \frac{\vec{r}}{r}\right) = m\vec{v} - \frac{K}{\sigma^2}\left(\overrightarrow{\sigma} \wedge \vec{u}_r\right)$$

$$\frac{d\overrightarrow{H}}{dt} = m\vec{a} - \frac{K}{\sigma^2}\left(\vec{\sigma} \wedge \frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) = \vec{f}_G - \frac{K}{\sigma^2}\dot{\theta}\left(\vec{\sigma} \wedge \vec{u}_\theta\right)$$

$$\vec{f}_G = -mg_o\frac{R_T^2}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{\sigma} = \sigma\vec{u}_z = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\overrightarrow{H}}{dt} = \left(-mg_o\frac{R_T^2}{r^2} - \frac{K}{mr^2}\right)\vec{u}_r}$$

H reste constante au cours du mouvement si et seulement si : $\boxed{K = m^2 g_o R_T^2}$

1.5. Hodographe H

1.5.1.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{v} = \frac{\overrightarrow{H}}{m} + \frac{K}{m\sigma^2}\left(\overrightarrow{\sigma} \wedge \vec{u}_r\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{H}}{m} + \frac{g_o R_T^2}{r_o v_o \sin\beta_o}\vec{u}_\theta}$$

$\overrightarrow{H}$ étant constante du mouvement : $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}(t=0)$; soit :

$$\overrightarrow{H} = m\vec{v}_o - \frac{K}{\sigma}\vec{u}_t = m\vec{v}_o - \frac{mg_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}\vec{u}_t = mv_o\cos\beta_o\vec{u}_n + m\left(v_o\sin\beta_o - \frac{g_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}\right)\vec{u}_t$$

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{H}}{m} + \frac{g_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}\vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{u}_n + \cos\theta\vec{u}_t$$

$$\text{Soit} : \quad \vec{v}\begin{pmatrix} v_o\sin\beta_o - \dfrac{g_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}(1-\cos\theta) \\ \\ v_o\cos\beta_o - \dfrac{g_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}\sin\theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}_t,\vec{u}_n)} = v_t\,\vec{u}_t + v_n\,\vec{u}_n$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\left(v_t - v_o\sin\beta_o + \frac{g_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}\right)^2 + (v_n - v_o\cos\beta_o)^2 = \left(\frac{g_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}\right)^2}$$

L'hodographe H est, donc, un cercle dans le plan $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$:

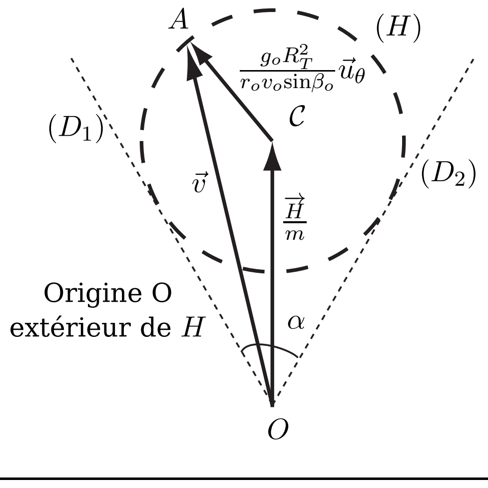
- de centre :

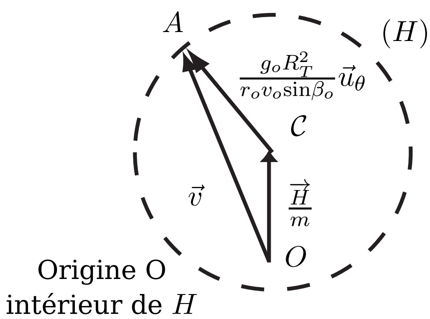
$$\mathcal{C}\left(v_o\sin\beta_o - \frac{g_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}, v_o\sin\beta_o\right)$$

- de rayon :

$$\mathcal{R} = \frac{g_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}$$

1.5.2. Directions permises pour $\vec{v}$





1.5.3.

Origine O	A l'intérieur de H	A l'extérieur de H
Direction permise	Toutes les directions	Celles délimitées par (D_1) et (D_2)
Type de trajectoire	elliptique ou circulaire	hyperbolique ou parabolique

1.5.4.

$$\begin{cases} \overrightarrow{H} &= m\vec{v}_o - \dfrac{K}{mr^2}\vec{u}_t \\ \vec{v}_o &= v_o\cos\beta_o\vec{u}_n + v_o\sin\beta_o\vec{u}_t \\ K &= m^2 g_o R_T^2 \end{cases} \qquad \boxed{\Rightarrow \quad \overrightarrow{H} = mv_o\cos\beta_o\vec{u}_n + m\left(v_o\sin\beta_o - \frac{g_oR_T^2}{r_ov_o\sin\beta_o}\right)\vec{u}_t}$$

avec $\vec{u}_t = \sin\theta\vec{u}_r + \cos\theta\vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(t=0)$ et $\vec{u}_n = \cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta = \vec{u}_r(t=0)$

Dans le cas d'un mouvement circulaire :

$$\beta_o = \frac{\pi}{2} \text{ et } v_o^2 = \frac{g_oR_T^2}{r_o} \qquad \text{D'où : } \qquad \boxed{\overrightarrow{H} = m\left(v_o - \frac{g_oR_T^2}{r_ov_o}\right)\vec{u}_t = \overrightarrow{0}}$$

1.6.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{K}\overrightarrow{H}\wedge\vec{\sigma} = \frac{\overrightarrow{H}\wedge\vec{\sigma}}{m^2g_oR_T^2}$$

1.6.1. $\overrightarrow{H}$ et $\vec{\sigma}$ sont deux constantes vectorielles, donc : $\vec{\varepsilon}$ est aussi constante du mouvement. $\vec{\varepsilon} \in$ au plan formé par $\overrightarrow{H}$ et $\vec{\sigma} \Longrightarrow$ $\boxed{\vec{\varepsilon} \in \text{ au plan polaire } (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)}$.

1.6.2.

$$\vec{r}.\vec{\varepsilon} = \frac{r}{m^2g_oR_T^2}\vec{u}_r.\left(\overrightarrow{H}\wedge\vec{\sigma}\right) \qquad \text{avec} \quad : \quad \overrightarrow{H}\wedge\vec{\sigma} = \left(\frac{\sigma^2}{r} - m^2g_oR_T^2\right)\vec{u}_r - m\sigma\dot{r}\,\vec{u}_\theta$$

Soit : $\vec{r}.\vec{\varepsilon} = \left(\dfrac{\sigma^2}{r} - m^2g_oR_T^2\right)\dfrac{r}{m^2g_oR_T^2} = r\,\|\vec{\varepsilon}\|\,\cos(\theta-\theta_o)$ <u>ou</u> $\boxed{r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta-\theta_o)}}$

$$\boxed{e = \|\vec{\varepsilon}\| \qquad \text{et} \qquad p = \frac{\sigma^2}{K} = \frac{\sigma^2}{m^2g_oR_T^2} = \alpha_or_o\sin^2\beta_o}$$

θ_o est l'angle qui positionne l'axe de la conique par rapport à l'axe polaire.

1.6.3.

$$\vec{\varepsilon} = \left(-1 + \frac{\sigma^2}{rK}\right)\vec{u}_r - m\frac{\sigma}{K}\dot{r}\vec{u}_\theta = \vec{\varepsilon}(t=0) = \left(-1 + \frac{\sigma^2}{r_oK}\right)\vec{u}_{r_o} - m\frac{\sigma}{K}\dot{r}_o\vec{u}_{\theta_o}$$

$$\dot{r}_o = v_o\cos\beta_o \quad \Rightarrow \quad \vec{\varepsilon} = \left(-1 + \frac{\sigma^2}{r_oK}\right)\vec{u}_{r_o} - m\frac{\sigma}{K}v_o\cos\beta_o\vec{u}_{\theta_o}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad e^2 = \|\vec{\varepsilon}\|^2 &= \left(\frac{\sigma}{K}\right)^2\left(m^2v_o^2\cos^2\beta_o + \left(-\frac{K}{\sigma} + \frac{\sigma}{r_o}\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{\sigma}{K}\right)^2\left(m^2v_o^2\cos^2\beta_o + \left(-\frac{K}{\sigma} + mv_o\sin\beta_o\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{\sigma}{K}\right)^2\left(m^2v_o^2 + \left(\frac{K}{\sigma}\right)^2 - 2\frac{K}{r_o}\right) \\ &= 1 + m^2v_o^2\frac{\sigma^2}{K^2} - \frac{2\sigma}{Kr_o} \\ &= 1 - 2\alpha_o\sin^2\beta_o + \alpha_o^2\sin^2\beta_o \end{aligned}$$

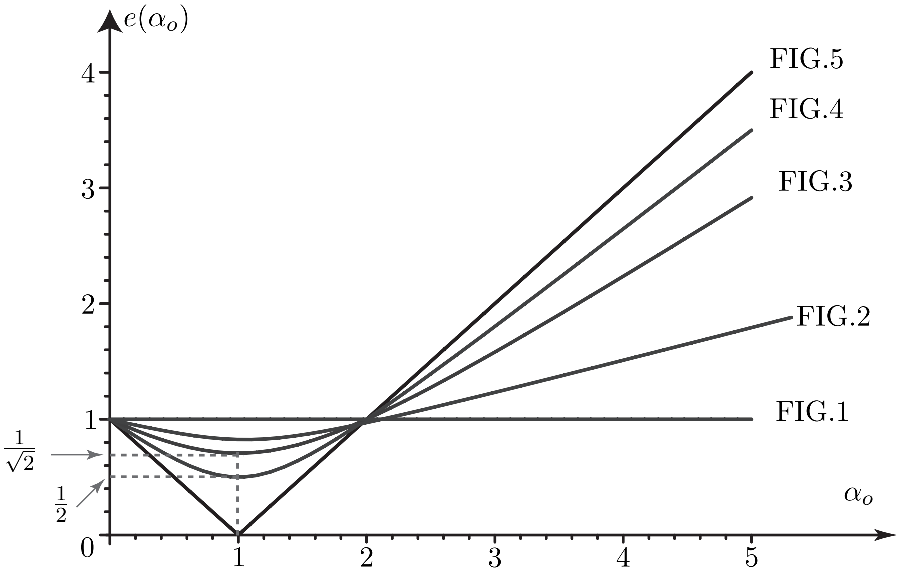
ou $\boxed{e^2 = 1 + \alpha_o(\alpha_o - 2)\sin^2\beta_o}$

Concours National Commun – PHYSIQUE I – Filière : MP

1.7. Nature de la trajectoire

1.7.1. Tableau des résultats :

β_o	$e(\alpha_o)$	Allure du graphe
0	1	FIG.1
$\pi/6$	$\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_o^2 - 2\alpha_o + 4}$	FIG.2
$\pi/4$	$\sqrt{1 + \frac{\alpha_o}{2}(\alpha_o - 2)}$	FIG.3
$\pi/3$	$\sqrt{1 + 3\frac{\alpha_o}{4}(\alpha_o - 2)}$	FIG.4
$\pi/2$	$\lvert\alpha_o - 1\rvert$	FIG.5



1.7.2.

e	$e = 0$ et $\beta_o = \pi/2$	$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
Nature de la trajectoire	Cercle	Ellipse	Parabole	Hyperbole
α_o	$\alpha_o = 1$	$\alpha_o < 2$	$\alpha_o = 2$	$\alpha_o > 2$

La vitesse de libération v_{lib} correspond à l'état libre (ou de diffusion)où le mouvement est révolutif, $\Longrightarrow$ Trajectoire hyperbolique $e = 1$,ou $\alpha_o = 2$; soit :

$$\alpha_o = \frac{r_o v_{lib}^2}{g_o R_T^2} = 2 \implies \boxed{v_{lib} = \sqrt{\frac{2g_o R_T^2}{r_o}} = R_T\sqrt{\frac{2g_o}{z_o + R_T}}}$$

1.7.3. La trajectoire est circulaire pour $e = 0$, soit :

$$\boxed{\alpha_o\left(\alpha_o - 2\right)\sin^2\beta_o + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \beta_o = \frac{\pi}{2}}$$

Vitesse v_s du satellite sur son orbite circulaire :

$$\alpha_o\left(\alpha_o - 2\right) + 1 = 0 \implies \alpha_o = 1 = \frac{r_o v_s^2}{g_o R_T^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{v_s = R_T\sqrt{\frac{g_o}{r_o}} = R_T\sqrt{\frac{g_o}{z_o + R_T}}}$$

1.8. On considère le cas : $\alpha_o = 1$ et $0 < \beta_o < \pi/2$.

1.8.1. Dans ces conditions : $e = 1 - \sin^2\beta_o$ et on a $0 < \beta_o < \pi/2$, d'où $0 < e < 1$: La trajectoire est, donc, elliptique.

1.8.2. Expression de θ_o en fonction de α_o

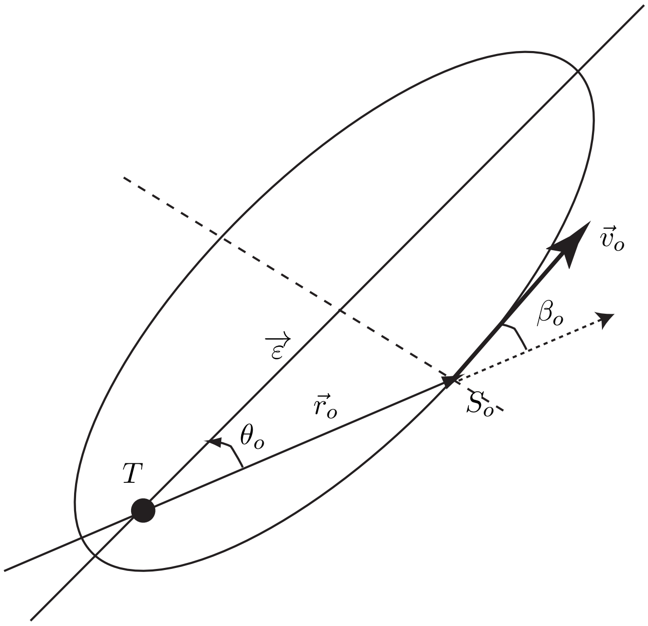
$$\alpha_o = 1 \;\Rightarrow\; e^2 = \cos^2\beta_o \;\; et \;\; e\cos\theta_o = \frac{p}{r_o} - 1 = -\cos^2\beta_o$$

$$\Rightarrow \cos\theta_o = -\cos\beta_o \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta_o = \beta_o + \pi}$$

1.8.3. θ_o est, aussi, l'angle entre $\overrightarrow{\varepsilon}$ et $\overrightarrow{TS}_o$: $\overrightarrow{\varepsilon}$ coïncide, donc, avec le grand axe, dont les positions particulières sont telles que :

- ⋄ $\theta = \theta_o = \beta_o + \pi$: la position du périgée. et
- ⋄ $\theta = \theta_o + \pi == \beta_o + 2\pi$: la position de l'apogée.

Conséquence : le vecteur vitesse $\vec{v}_o$ est colinéaire au vecteur excentricité $\overrightarrow{\varepsilon}$ et la position S_o appartient, donc, au petit axe.



Deuxième partie
Satellites circulaires

Concours National Commun — PHYSIQUE I —Filière : MP

2.1. Satellites en orbite basse

2.1.1. Théorème de la résultante cinétique

$$\overrightarrow{f}_G = -mg_o\frac{R_T^2}{R^2}\vec{u}_r = m\vec{a} = -m\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta \;\Rightarrow\; m\frac{v^2}{R} = mg_o\frac{R_T^2}{R^2} \;\text{ ou } \boxed{v = R_T\sqrt{\frac{g_o}{R}}}$$

2.1.2. Période T de révolution du mouvement du satellite et troisième loi de Kepler

$$\boxed{T = 2\pi\frac{R}{v} = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{R^3}{g_o}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{g_oR_T^2}}$$

2.1.3. Le satellite pôlaire est tel que l'axe pôlaire N-S se trouve dans son plan de trajectoire .

Il n'y a pas de restriction sur le plan de la trajectoire et sur le sens de rotation car la force gravitationnelle est à symétrie sphérique ! !

2.2. Satellites géostationnaires

2.2.1. De tels satellites envoient des informations, auxquelles ils sont destinés, sans déphasage temporel.
Applications :Obsevation et détection : des séismes , des volcans et des incendies ; télécommunication...

2.2.2.

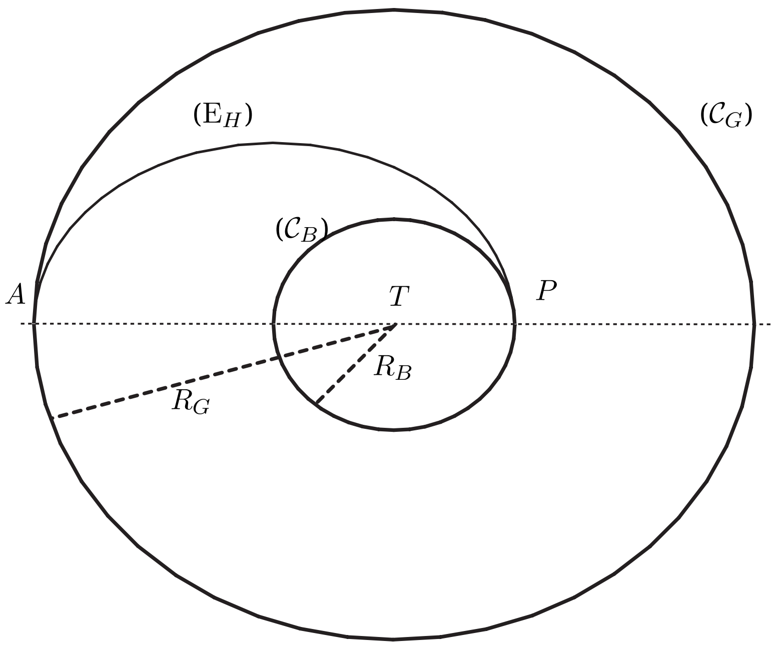
$$\frac{T_o^2}{(z_G+R_T)^3} = \frac{4\pi^2}{g_o R_T^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_G = -R_T + \sqrt[3]{\frac{g_o R_T^2 T_o^2}{4\pi^2}}}$$

2.2.3. Application numérique : $\boxed{z_G \approx 35774\text{km}}$

2.2.4. Le plan de la trajectoire est le plan équatorial et le satellite tourne dans le même sens que la rotation de la Terre dans le repère géocentrique .

2.3. Transfert d'orbite

2.3.1. Lest trois trajectoires sont coplanaires (appartiennent au même plan).



2.3.2.

◇ Conservation du moment cinétique sur E_H :

$$\sigma_A = \sigma_P \qquad \Rightarrow \qquad v_A R_G = v_P R_B$$

◇ Conservation du l'énergie sur E_H :

$$\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_A \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv_P^2 - mg_o\frac{R_T^2}{R_B} = \frac{1}{2}mv_A^2 - mg_o\frac{R_T^2}{R_G}$$

◇ Combinaison des deux équations de conservation donne :

$$v_P^2 - v_A^2 = 2g_o R_T^2\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_G}\right) \quad \Rightarrow \quad \left\{\boxed{\begin{array}{lcl} v_P & = & R_T\sqrt{\dfrac{2g_oR_G}{R_B\,(R_B+R_G)}} \\ v_A & = & R_T\sqrt{\dfrac{2g_oR_B}{R_G\,(R_B+R_G)}} \end{array}}\right.$$

2.3.3. Variations de vitesses de transfert

$$\boxed{\Delta v_1 = v_P - R_T\sqrt{\frac{g_o}{R_B}} \qquad \text{et} \qquad \Delta v_2 = -v_A + R_T\sqrt{\frac{g_o}{R_G}}}$$

2.3.4. Durée de la phase de transfert sur l'ellipse de Hohmann

Soit T_H la période de révolution elliptique E_H et soit a_H le demi-grand axe de l'ellipse E_H , $2a_H = R_G + R_B$

$$\Delta t = \frac{T_H}{2} \qquad \text{avec} \qquad \frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{4\pi^2}{g_o R_T^2} \qquad \text{donc :} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{\pi}{2R_T}\sqrt{\frac{(R_G+R_B)^3}{2g_o}}}$$

2.3.5. Soit c_H la position du foyer de l'ellipse E_H par rapport à son centre

$$e_H = \frac{c_H}{a_H} \qquad \text{tels que :} \qquad \begin{cases} a_H = \dfrac{R_B + R_G}{2} \\ c_H = a_H - R_B = \dfrac{R_G - R_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{e_H = \frac{R_G - R_B}{R_B + R_G}}$$

Troisième partie
Influence de l'atmosphère terrestre

3.1. Modèle de force de frottement

3.1.1. Variation de la quantité du mouvement

On considère le système (molécule - satellite) . La quantité du mouvement du système est :

- ◇ Avant le choc : $m\vec{v}_{\text{satellite}} + m'\vec{v}_{\text{molécule}} = m\vec{v} + m'\vec{0} = m\vec{v}$
- ◇ Après le choc : $(m+m')\,\vec{v}_{\text{syst}}$ choc mou, et $\vec{v}_{\text{syst}}$: vitesse du système après le choc

La quantité du mouvement du satellite subit une variation :

$$\Delta\vec{p} = p_{\text{après}} - p_{\text{avant}} = m\vec{v}_{\text{syst}} - m\vec{v} = m\left(\vec{v}_{\text{syst}} - \vec{v}\right) = m\left(\frac{m}{m+m'} - 1\right)\vec{v}$$

$$\text{Soit : } \Delta\vec{p} = -\frac{mm'}{m+m'}\vec{v} \qquad \text{ou :} \quad \boxed{\Delta\vec{p} \approx -m'\vec{v}} \quad \text{car} \quad m >> m'$$

3.1.2. La variation de la quantité du mouvement du satellite pendant dt :

- ◇ Au cours du choc entre une molécule de masse m' et le satellite : $d\vec{p}_{\text{molécule}} \approx m'\vec{v}$
- ◇ Au cours du choc entre l'atmosphère de masse m' et le satellite supposé sphérique :

$$d\vec{p}_{atm} \approx \sum m'\vec{v} = m_{atm}\vec{v} = \mu(z)d\tau\vec{v} = \mu(z)\Sigma v dt\vec{v}$$

La force subit par le satellite de la part de l'atmosphère s'exprime par :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{atm}}{dt} = -\mu(z)\Sigma v\vec{v}$$

$$\boxed{\text{ou} \quad \vec{F} = -k(z)v\vec{v} \quad \text{avec} \quad k(z) = \mu(z)\Sigma}$$

Concours National Commun — PHYSIQUE I —Filière : MP

3.1.3. Modèle d'atmosphère isotherme Équation de l'hydrostatique dans le champ de pesanteur :

$$\mu(z)\vec{g} = \overrightarrow{grad}\,p \quad \Rightarrow \quad -\mu(z)g = \frac{dp(z)}{dz}$$

Dans le cadre de l'approximation : $z << R_T$: $g \approx g_o$, donc :

$$-\mu(z)g_o = \frac{dp(z)}{dz} \quad \text{avec :} \quad p(z) = \frac{\mu(z)}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mu(z)}{dz} = -\frac{Mg_o}{RT}\mu(z)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \mu(z) = \mu_o exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT}{Mg_o}}$$

μ_o : masse volumique de l'air atmosphérique au voisinage de la surface de la Terre.

3.2. Freinage du satellite

3.2.1. Trajectoire circulaire du satellite dans le champ gravitationnel (*champ Newtonnien*) Le théorème de la résultante cinétique : $\vec{f}_g = m\vec{a}$

$$\Rightarrow \quad mg_o\frac{R_T^2}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{g_oR_T^2}{R_T+z} \quad \text{ou} \quad 2vdv = -g_o\frac{R_T^2}{(R_T+z)^2}dz$$

$$\text{Soit :} \quad \boxed{\frac{dv}{dz} = -\frac{R_T}{2\,(R_T+z)}\sqrt{\frac{g_o}{R_T+z}}}$$

3.2.2. L'énergie mécanique du satellite :

$$E_m = E_c + E_p \ \text{avec} \ \begin{cases} E_p = -mg_o\dfrac{R_T^2}{R} \\ E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = mg_o\dfrac{R_T^2}{R} \end{cases} \Rightarrow \ E_m = -\frac{E_p}{2} = -E_c$$

Au cours de la chute du satellite, son énergie potentielle diminue (perd de l'altitude) et, donc, son énergie cinétique augmente ; <u>par conséquent</u> : sa vitesse *augmente* ! !

3.2.3. Variation de l'énergie mécanique

$$E_m = -\frac{1}{2}E_p = mg_o\frac{R_T^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dE_m}{dz} = \frac{mg_oR_T^2}{2\,(R_T+z)^2} = \frac{mg_oR_T^2}{2R^2}}$$

3.2.4. Travail des forces de frottement

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.d\vec{r} = -k(z)v\vec{v}.\vec{v}dt = -k(z)v^3dt, \quad \text{ou} \quad \boxed{\delta W(\vec{F}) = -\mu(z)\Sigma v^3 dt}$$

3.2.5. Théorème de l'énergie mécanique

$$\frac{dE_m}{dt} = P\left(\vec{F}\right) = \frac{\delta W\left(\vec{F}\right)}{dt} \quad \Rightarrow \quad mg_o\frac{R_T^2}{2R^2}\frac{dz}{dt} = -\mu(z)\Sigma v^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = -\mu(z)\Sigma v^3\frac{2R^2}{mg_oR_T^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2}{m}\mu(z)\Sigma vR \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\frac{dz}{dt} = -B\mu(z)vR \quad \text{avec} \quad B = 2\frac{\Sigma}{m}}$$

3.2.6. D'après les résultats précédents

$$\frac{dz(t)}{dt} = -B\mu(z)vR = -2\frac{\Sigma}{m}R_T\sqrt{\frac{g_o}{R}}\mu_o Re^{-\frac{z(t)}{H}}$$

Dans l'approximation $z << R_T$: $R = z(t) + R_T \approx R_T \Rightarrow \frac{dz(t)}{dt} = -2\frac{\Sigma}{m}R_T\sqrt{R_T g_o}\mu_o e^{-\frac{z(t)}{H}}$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{\frac{z(t)}{H}} = -\frac{t}{\tau} + \frac{C_o}{H} \Rightarrow \boxed{z(t) = H\ln\left(\frac{C_o}{H} - \frac{t}{\tau}\right)} \quad \text{tel que :} \quad C_o = \mathrm{e}^{\frac{z(0)}{H}}$$

Avec : $\tau = \frac{mH}{2\Sigma R_T\sqrt{R_T g_o}\mu_o}$: terme homogè ne à un temps.

3.2.7. **Application numérique** :

$$\tau = 6,45 \times 10^{-6}\, s$$

La durée t_{chute} du chute d'un satellite, depuis l'altitude h, est telle que : $z(t_{\text{chute}}) = 0$

$$\Longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{z(t_{\text{chute}})}{H}} = \frac{t_{\text{chute}}}{\tau} = \mathrm{e}^{\frac{h}{H}} \quad \text{Soit :} \quad \boxed{t_{\text{chute}} = \tau\mathrm{e}^{\frac{h}{H}} = 6,4.10^7\, s}$$

3.2.8.

Vitesse d'agitation thermique est : $v_{\text{th}} = 0,5\, kms^{-1}$

Dans l'approximation $z << R_T$, la vitesse du satellite est : $v_{\text{sat}} \approx \sqrt{g_o R_T} = 7,75\, kms^{-1}$

$$\Longrightarrow \quad v_{\text{th}} << v_{\text{sat}}$$