Dipôle électrostatique

Table des matières

1 Champ et potentiel du dipôle électrostatique 2
1.1 Définitions 2
1.2 Potentiel du dipôle électrostatique 3
1.3 Champ crée par un dipôle électrostatique 3

2 Surfaces équipotentielles et lignes de champ d'un dipôle électrostatique 4
2.1 Surfaces équipotentielles 4
2.2 Lignes de champ 4

3 Actions d'un champ électrostatique sur un dipôle 5
3.1 Dipôle régide 5
3.2 Action d'un champ uniforme 5
3.2.1 Force 5
3.2.2 Moment de la force 6
3.3 Action d'un champ non uniforme 6

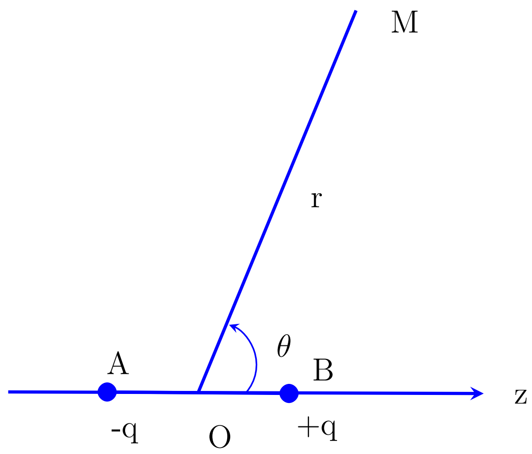
1 Champ et potentiel du dipôle électrostatique

1.1 Définitions

• Dipôle électrostatique : Il s'agit d'un doublet de charges ponctuelles $A(-q)$ et $B(+q)$ séparées par une distance $AB = d$,supposée petite par rapport à la distance $OM = r$ où on cherche à déterminer ses effets.

• Approximation dipôlaire : l'approximation $OM >> d$ est appelée approximation dipôlaire.

- O est le milieu de AB
- $OM = r$ et $d = AB$
- l'approximation dipôlaire $OM >> d$



• Moment dipôlaire : On définit le moment dipôlaire $\overrightarrow{p}$ d'un dipôle électrostatique par

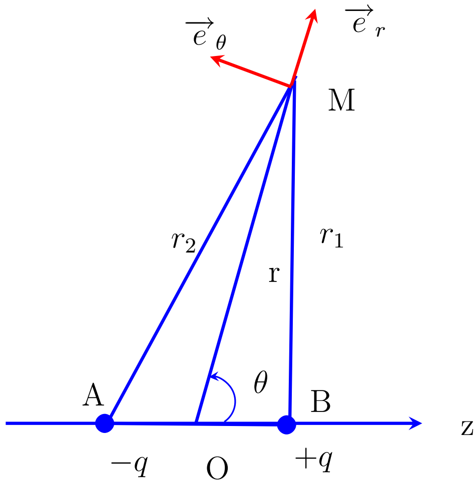
$$\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{AB}\,;\; q > 0$$

orienté toujours de $\ominus$ vers $\oplus$

• Exemples
  - molécule $H - Cl$
  - molécule H_2O

• Unité du moment dipôlaire
  - l'unité dans le système international est $C.m$
  - on utilise aussi Debye (D) : $\boxed{1D = \frac{1}{3}.10^{-29}C.m}$

1.2 Potentiel du dipôle électrostatique



- le potentiel électrostatique en M : $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$
- $r_1 = ||\overrightarrow{BM}||; r = ||\overrightarrow{OM}||$
- $r_2 = ||\overrightarrow{AM}||$
- $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}$
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$

▶ $\overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{OM}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BM} = r^2 + \dfrac{d^2}{4} - 2r.\dfrac{d}{2}\cos\theta = r^2\left(1 + \dfrac{d^2}{4r^2} - \dfrac{d}{r}\cos\theta\right)$

▶ $\dfrac{1}{BM^2} = \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{r}\left(1 - \dfrac{d}{r}\cos\theta + \dfrac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

▶ approximation dipôlaire : $r >> d$

$$\boxed{\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\theta\right)}$$

▶ de même on montre que

$$\boxed{\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\theta\right)}$$

▶ $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(2\dfrac{d}{2r}\cos\theta\right)$

$$\boxed{V(M) = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\overrightarrow{p}.\overrightarrow{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

• Remarque : le potentiel V d'un dipôle électrostatique varie en $\dfrac{1}{r^2}$ alors que le potentiel d'une charge ponctuelle varie en $\dfrac{1}{r}$.

1.3 Champ crée par un dipôle électrostatique

- En coordonnées sphériques :
  - ▶ $\overrightarrow{E} = E_r\overrightarrow{e}_r + E_\theta\overrightarrow{e}_\theta + E_\varphi\overrightarrow{e}_\varphi$
  - ▶ $\overrightarrow{grad}V = \left(\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\overrightarrow{e}_r + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}\overrightarrow{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{\theta,r}\overrightarrow{e}_\varphi$
  - ▶ $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$

▶ $$\begin{cases} E_r & = & -\dfrac{\partial V}{\partial r} & = & \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta & = & -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} & = & \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\varphi & = & -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} & = & 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\overrightarrow{e}_r + \sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta)}$$

▶ expression vectorielle intrinsèque

- $\overrightarrow{p} = p\cos\theta\,\overrightarrow{e}_r - p\sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta$
- $\boxed{\overrightarrow{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(3\overrightarrow{p}.\overrightarrow{r})\overrightarrow{r} - \overrightarrow{p}.r^2}{r^5}}$

2 Surfaces équipotentielles et lignes de champ d'un dipôle électrostatique

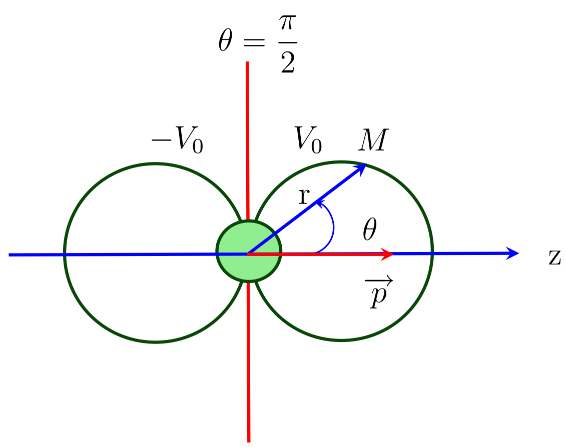
2.1 Surfaces équipotentielles

- surface équipotentielle : $V = cte = V_0$
- $C = \dfrac{q.d\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ donc

$$\boxed{r^2 = C.\cos\theta}$$

avec $C = \dfrac{q.d}{4\pi\varepsilon_0 V_0}$

- si V_0 est positif,alors le $\cos\theta$ est positif et l'équipotentielle se situe dans le demi-plan $z > 0$
- si $V_0 < 0$ est négatif,alors le $\cos\theta$ est négatif et l'équipotentielle se situe dans le demi-plan $z < 0$
- si $V_0 = 0$,alors $\theta = \dfrac{\pi}{2}$,il s'agit d'un plan médiateur des deux charges.
- l'approximation dipôlaire n'est pas valable dans la zone colorée

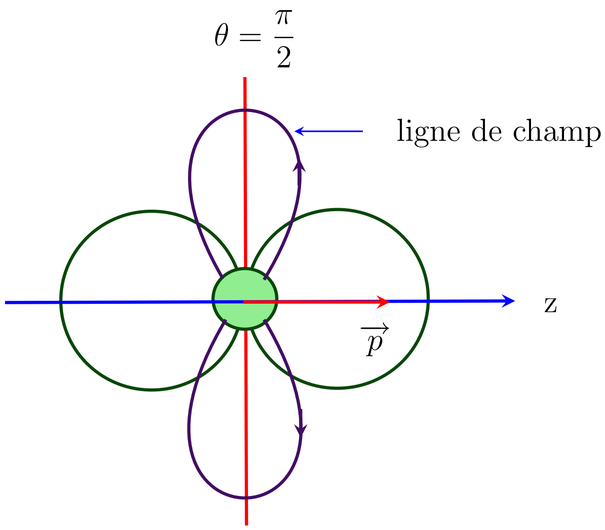


2.2 Lignes de champ

- l'équation de ligne de champ :
$\dfrac{dr}{E_r} = \dfrac{rd\theta}{E_\theta}$
- $\dfrac{dr}{r} = \dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}d\theta = 2\dfrac{d(\sin\theta)}{\sin\theta} \Rightarrow \ln\left(\dfrac{r}{k}\right) = \ln(\sin^2\theta)$

$$\boxed{r = k\sin^2\theta}$$

- chaque ligne de champ est caractérisée par une constante k. Elle est orthogonale aux équipotentielles rencontrées.



3 Actions d'un champ électrostatique sur un dipôle

3.1 Dipôle régide

• Définition : Un dipôle AB est dit régide si la distance $d = AB$ entre les charges reste fixe et les charges restent constantes.

On suppose dans toute la suite que le dipôle électrostatique est régide.

3.2 Action d'un champ uniforme

3.2.1 Force

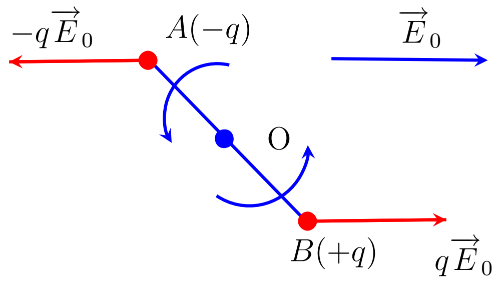
- Considérons un dipôle électrostatique placé dans une région où il régne un champ électostatique extérieur uniforme $\overrightarrow{E}_0$
- la résultante des forces appliquées sur le dipôle : $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}_0 - q\overrightarrow{E}_0 = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}}$$

• Conclusion : la résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle placé dans un champ uniforme est nulle :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

3.2.2 Moment de la force



- $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OA} \wedge (-q\overrightarrow{E}_0) + \overrightarrow{OB} \wedge (q\overrightarrow{E}_0)$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \wedge (q\overrightarrow{E}_0)$
  $= q\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{E}_0$

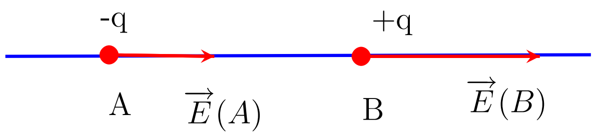
$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_0}$$

• Conclusion : Dans un champ uniforme,le dipôle subit un couple de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}_0$ qui tend à alligner parrallèlement au champ appliqué dans le même sens que celui-ci.

3.3 Action d'un champ non uniforme

- dans le cas d'un champ extérieur non uniforme,le moment en O de la résultante de le force s'éxerçant sur un dipôle est donnée par

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}(O)}$$



- $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E}(B) - \overrightarrow{E}(A))$
- $F_x = q(E_x(B) - E_x(A)) = qdE_x$
- $dE_x = \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z}\right)_{y,x} dz$
- $F_x = q\left(\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z}\right)_{y,x} dz\right)$
- $F_x = p_x\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial x}\right)_{y,z} + p_y\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)_{x,z} + p_z\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial z}\right)_{y,x}$
- $p_x = qdx; p_y = qdy; p_z = qdz$

$$\boxed{F_x = (\overrightarrow{p}.\overrightarrow{grad})E_x}$$

- on montre aussi que

$$\boxed{F_y = (\overrightarrow{p}.\overrightarrow{grad})E_y; F_z = (\overrightarrow{p}.\overrightarrow{grad})E_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{p}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{E}}$$

- On définit l'opérateur rotationnel par

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}}$$

avec $\overrightarrow{\nabla}$: opérateur nabla

- on montre qu'en régime permanent

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}V) = \overrightarrow{0}}$$

- donc en coordonnées cartésiennes on a : $\dfrac{\partial E_x}{\partial y} = \dfrac{\partial E_y}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \dfrac{\partial E_x}{\partial z}$
- $F_x = p_x \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \dfrac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \dfrac{\partial E_z}{\partial x}$

$$\boxed{F_x = \overrightarrow{p}.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial x}}$$

- de même

$$\boxed{F_y = \overrightarrow{p}.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial y} \text{ et } F_z = \overrightarrow{p}.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial z}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{p}.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial x}\right)\overrightarrow{e}_x + \left(\overrightarrow{p}.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial y}\right)\overrightarrow{e}_y + \left(\overrightarrow{p}.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial z}\right)\overrightarrow{e}_z}$$