Mécanique

MECA1 - Statique

Cours

Statique

1.I. Introduction

L'objet de ce chapitre traitant de la statique des solides indéformables est de déterminer les actions mécaniques (efforts, moments) transitant dans les liaisons d'un mécanisme en vue de le dimensionner. Nous nous limiterons à la seule détermination de ces actions pour des problèmes isostatiques (solvables).

Nous supposerons toujours que les systèmes que nous étudions sont immobiles, d'où le terme « Statique ». En 2° année, nous traiterons de la « Dynamique » des solides, ce qui conduira à aller un peu plus loin que ce que nous verrons ici.

1.II. Outils mathématiques pour la statique

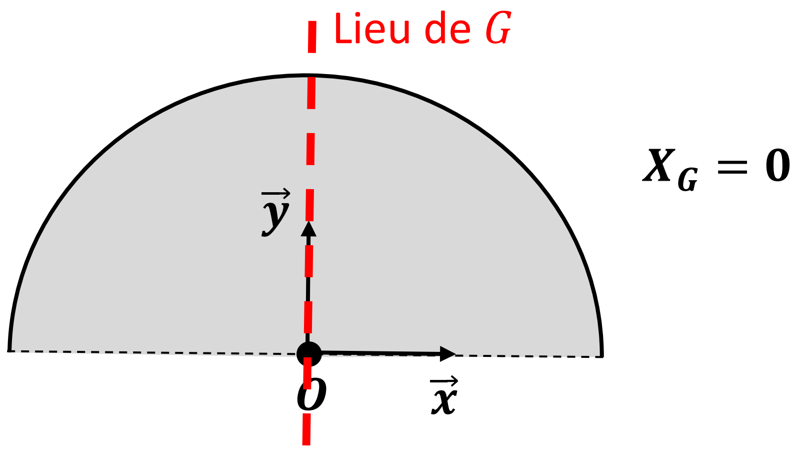
En statique, nous allons devoir déterminer la position de centres géométriques de lignes, surfaces et volumes. Par ailleurs, nous allons manipuler des intégrales de produits vectoriels. Nous allons donc ici donner quelques outils mathématiques utiles pour la suite.

1.II.1 Centres géométriques

1.II.1.a Préliminaires

Lorsqu'il existe un élément de symétrie sur une géométrie, le centre géométrique appartient forcément à cet élément de symétrie.

Par exemple, le centre d'un demi disque est obligatoirement sur l'axe de symétrie $(O,\vec{y})$



De même, le centre d'un cône appartient forcément à son axe de révolution.

1.II.1.b Segments

1.II.1.b.i Un segment

Soit un segment $[AB]$

On appelle centre du segment $[AB]$ le point G tel que :

$$\int_{[AB]} \overrightarrow{GP}\, dl = \vec{0}$$

où P est un point courant de $[AB]$.

Soit un repère $(O, \vec{x})$ quelconque sur la droite support de $[AB]$. On a $\overrightarrow{OP} = x\vec{x}$

La coordonné X_G suivant $\vec{x}$ du centre du segment $[AB]$ de longueur L telle que $\overrightarrow{OG} = X_G\vec{x}$ vaut

$$\boxed{X_G = \frac{1}{L}\int_{[AB]} x\, dx}$$

Démonstration :

$$\int_{[AB]} \overrightarrow{OP}\, dl = \int_{[AB]} \overrightarrow{OG}\, dl + \int_{[AB]} \overrightarrow{GP}\, dl = \int_{[AB]} \overrightarrow{OG}\, dl$$

$$\int_{[AB]} \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}\int_{[AB]} dl = L\overrightarrow{OG} = LX_G\vec{x}$$

$$\int_{[AB]} \overrightarrow{OP}\, dl = \int_{[AB]} x\vec{x}\, dx = \int_{[AB]} x\, dx\vec{x}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = X_G\vec{x} = \frac{1}{L}\int_{[AB]} x\, dx\vec{x}$$

Remarque : cette formule ne se limite pas à un unique segment, L représentant alors la longueur totale des segments intégrés.

1.II.1.b.ii Un ensemble de segments

Soient n segments $[S_i]$ **alignés** suivant la droite Δ, de longueurs respectives L_i et de centres G_i de coordonnées X_i dans un repère $(O,\vec{x})$ quelconque de Δ.

Soit L_t la longueur totale d'intégration : $L_t = \sum_{i=1}^{n} L_i$. Le centre G de plusieurs segments alignés est un point d'abscisse X_G tel que :

$$X_G = \frac{1}{L_t}\int_{U[S_i]} x\,dx \quad ; \quad U[S_i]\ est\ l'union\ des\ segments\ S_i$$

Si l'on connaît la position des centres G_i des n segments S_i, on utilise la formule des barycentres :

$$\boxed{X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}}$$

Démonstration :

$$X_G = \frac{1}{L_t}\int_{U[S_i]} x\,dx = \frac{1}{L_t}\sum_{i=1}^{n}\int_{[S_i]} x\,dx = \frac{1}{L_t}\sum_{i=1}^{n} L_i X_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}$$

$$avec\ X_i = \frac{1}{L_i}\int_{[S_i]} x\,dx \Rightarrow \int_{[S_i]} x\,dx = L_i X_i$$

Remarques :

- Dans le cas de segments, ce calcul est très rarement appliqué
- Il est possible d'utiliser des longueurs négatives pour « enlever » une partie de segment

1.II.1.c Surfaces planes

1.II.1.c.i Une surface

Soit une surface plane S.

On appelle centre de la surface plane S le point G tel que :

$$\int_S \overrightarrow{GP}\, dS = \vec{0}$$

où P est un point courant de S.

Soit un repère $(O,\vec{x},\vec{y})$ quelconque sur la droite support de $[AB]$. On a : $\overrightarrow{OP} = x\vec{x} + y\vec{y}$

Les coordonnés X_G suivant $\vec{x}$ et Y_G suivant $\vec{y}$ du centre de la surface plane S telle que $\overrightarrow{OG} = X_G\vec{x} + Y_G\vec{y}$ valent :

$$\boxed{\begin{cases} X_G = \dfrac{1}{S}\displaystyle\int_S x\, dS \\ Y_G = \dfrac{1}{S}\displaystyle\int_S y\, dS \end{cases}}$$

Démonstration semblable au cas du segment.

1.II.1.c.ii Un ensemble de surfaces

Soient n surfaces S_i **coplanaires** dans le plan P, de surfaces respectives S_i et de centres G_i de coordonnées (X_i,Y_i) dans un repère $(O,\vec{x},\vec{y})$ quelconque de P.

Soit S_t la surface totale d'intégration : $S_t = \sum_{i=1}^n S_i$. Le centre G de plusieurs surfaces coplanaires est un point de coordonnées (X_G,Y_G) tel que :

$$\begin{cases} X_G = \dfrac{1}{S_t}\displaystyle\int_{US_i} x\, dS \\ Y_G = \dfrac{1}{S_t}\displaystyle\int_{US_i} y\, dS \end{cases} \quad ; \quad US_i\ est\ l'union\ des\ surfaces\ S_i$$

Si l'on connaît la position des centres G_i des n surfaces S_i, on utilise la formule des barycentres :

$$\boxed{\begin{cases} X_G = \dfrac{\sum_{i=1}^n S_i X_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \\ Y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^n S_i Y_i}{\sum_{i=1}^n S_i} \end{cases}}$$

Démonstration semblable au cas du segment.

Remarque : Il est possible d'utiliser des surfaces négatives pour « enlever » une partie de surface.

1.II.1.d Volumes

1.II.1.d.i Un volume

Soit un volume V.

On appelle centre du volume V le point G tel que :

$$\int_V \overrightarrow{GP}\, dV = \vec{0}$$

où P est un point courant de S.

Soit un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ quelconque sur la droite support de $[AB]$. On a : $\overrightarrow{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

Les coordonnés X_G suivant $\vec{x}$, Y_G suivant $\vec{y}$ et Z_G suivant $\vec{z}$ du centre du volume V telle que $\overrightarrow{OG} = X_G\vec{x} + Y_G\vec{y} + Z_G\vec{z}$ valent :

$$\boxed{\begin{cases} X_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V x\, dV \\ Y_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V y\, dV \\ Z_G = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V z\, dV \end{cases}}$$

Démonstration semblable au cas du segment.

1.II.1.d.ii Un ensemble de volumes

Soient n volumes V_i, de volumes respectifs V_i et de centres G_i de coordonnées (X_i, Y_i, Z_i) dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ quelconque de l'espace.

Soit V_t le volume total d'intégration : $V_t = \sum_{i=1}^{n} V_i$. Le centre G de plusieurs volumes est un point de coordonnées (X_G, Y_G, Z_G) tel que :

$$\begin{cases} X_G = \dfrac{1}{V_t}\displaystyle\int_{UV_i} x\, dV \\ Y_G = \dfrac{1}{V_t}\displaystyle\int_{UV_i} y\, dV \\ Z_G = \dfrac{1}{V_t}\displaystyle\int_{UV_i} z\, dV \end{cases} \quad ; \quad UV_i\ est\ l'union\ des\ volumes\ V_i$$

Si l'on connaît la position des centres G_i des n volumes V_i, on utilise la formule des barycentres :

$$\boxed{\begin{cases} X_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} V_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \\ Y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} V_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \\ Z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} V_i Z_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \end{cases}}$$

Démonstration semblable au cas du segment.

Remarque : Il est possible d'utiliser des volumes négatifs pour « enlever » une partie de volume.

1.II.1.e Présence de symétries

Lorsqu'un segment, une surface ou un volume présentent un axe ou un plan de symétrie, le centre géométrique de l'entité étudiée appartient à l'élément de symétrie.

1.II.2 Produit vectoriel et intégration

Soit $\vec{a}$ un vecteur constant, V un volume, S une surface, Γ une portion de courbe et $\vec{u}(P)$ un vecteur en un point P de V, S ou Γ.

D'après la distributivité du produit vectoriel et la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_V \vec{u}(P) \wedge \vec{a}\, dV = \int_V \vec{u}(P)\, dV \wedge \vec{a}$$

$$\int_S \vec{u}(P) \wedge \vec{a}\, dS = \int_S \vec{u}(P)\, dS \wedge \vec{a}$$

$$\int_\Gamma \vec{u}(P) \wedge \vec{a}\, dl = \int_\Gamma \vec{u}(P)\, dl \wedge \vec{a}$$

1.II.3 Intégrale d'une somme

Attention, je vois régulièrement une erreur, alors voici un exemple :

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} (x+y+z)\, dxdydz = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} x\, dxdydz + \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} y\, dxdydz + \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} z\, dxdydz$$

Certains écrivent :

$$\xcancel{\int_{x_1}^{x_2} xdx + \int_{y_1}^{y_2} ydy + \int_{z_1}^{z_2} zdz}$$

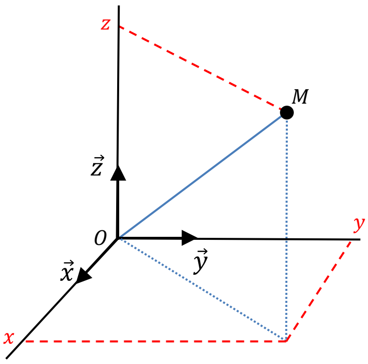
1.II.4 Intégrales sur une ligne, une surface ou un volume

Nous allons avoir besoin de calculer des intégrales sur des lignes, surfaces et volumes. Voyons donc ici les outils dont nous allons avoir besoin.

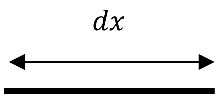
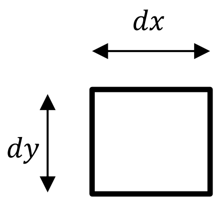
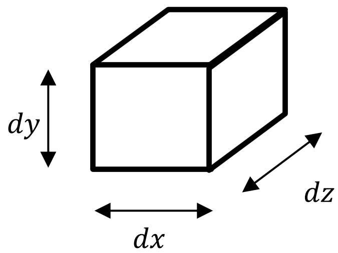
1.II.4.a Préliminaires

J'invite tout lecteur à se reporter au cours spécifique sur les intégrales constituées de quelques règles et d'exemples. Ce cours se limitera aux rappels importants des intégrales cartésiennes, cylindriques et sphériques.

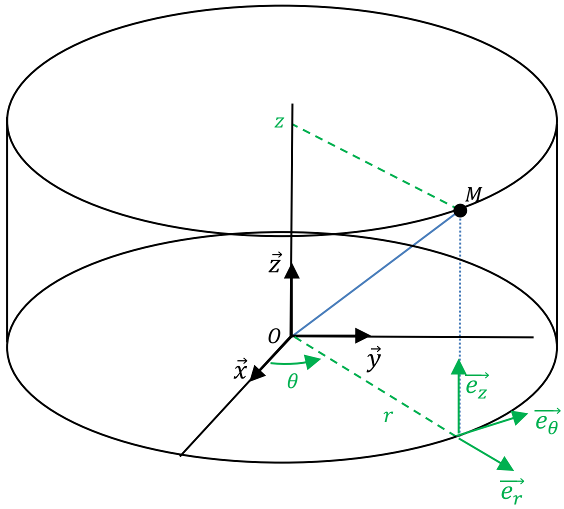
1.II.4.b Coordonnées cartésiennes



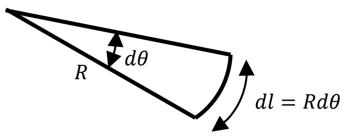
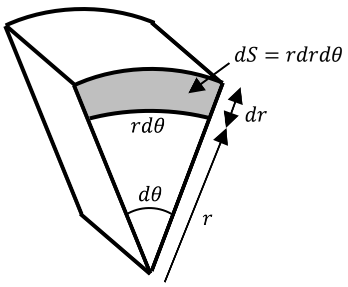
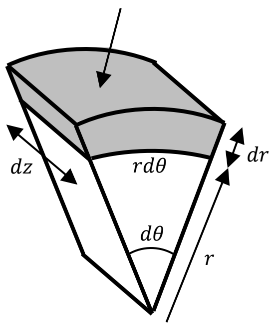
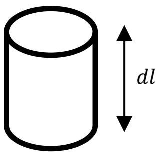
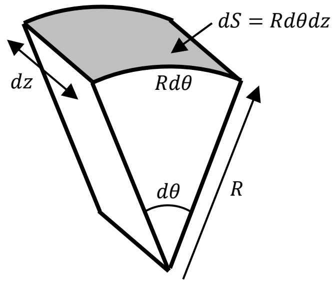
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Longueur	Surface	Volume
		

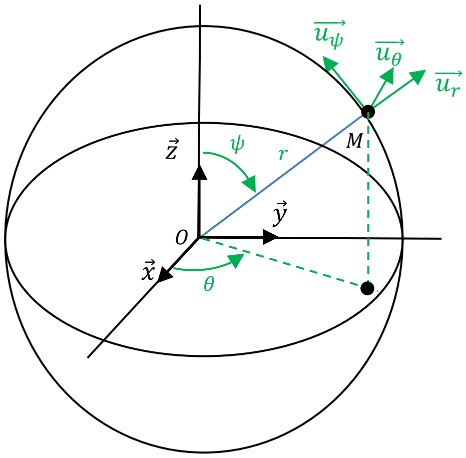
1.II.4.c Coordonnées cylindriques



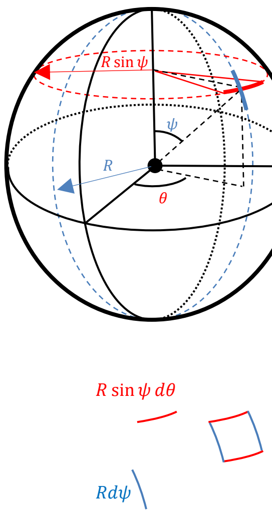
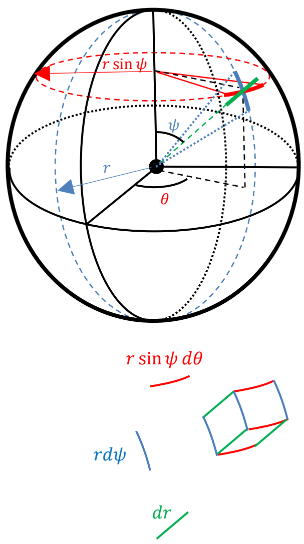
$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$

Longueur	Surface	Volume
Circonférence cylindre 	Tranche de cylindre 	
Arrête cylindre $dl = dz$ 	Surface extérieure cylindre 	

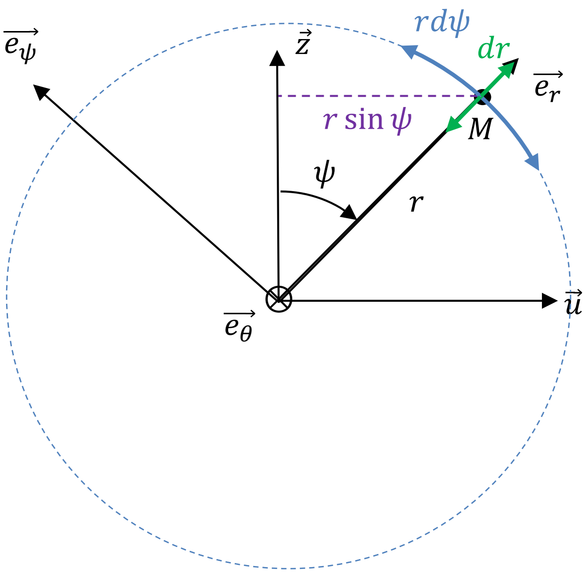
1.II.4.d Coordonnées sphériques

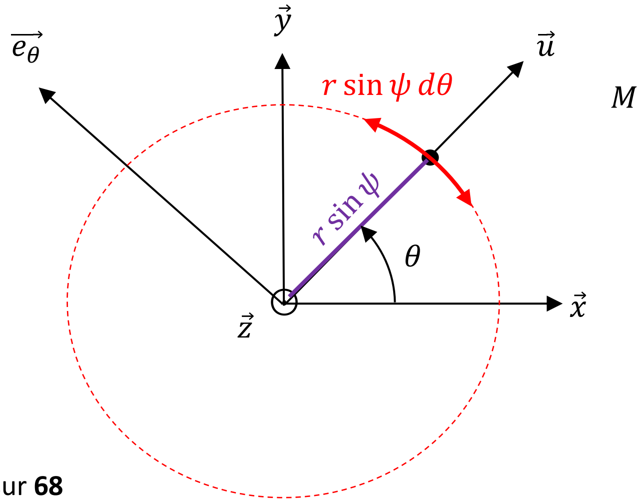


$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

Longueur	Surface	Volume
Peu utilisé, revient à faire du cartésien (ligne) ou cylindrique (cercles)	$dS = R^2 \sin\psi \, d\theta d\psi$ 	$dV = r^2 \sin\psi \, dr d\theta d\psi$ 

Attention : dS et dV sont positifs, $\psi \in [0, \pi]$ uniquement





1.III. Actions mécaniques

1.III.1 Définition

Une action mécanique, souvent appelée « force », est un phénomène qui a la capacité de déformer un corps ou de changer sa vitesse ou sa trajectoire dans un référentiel Galiléen.

On distingue trois grands types d'actions :

- Les actions volumiques à distance (gravité, forces électromagnétiques)
- Les actions surfaciques de contact (contact réel entre deux solides ou un solide et un fluide)
- Les actions linéiques et ponctuelles (modèle d'un contact réel entre deux solides)

1.III.2 Actions mécaniques

Une action mécanique est la donnée de deux éléments :

- Une force
- Un moment

Elle s'applique sur un corps, que ce soit sur son volume V, sa surface S, une ligne ou en un point.

1.III.2.a Forces

Une action mécanique est composée d'une force représentée par un vecteur (direction, sens, longueur) exprimée en Newton (N).

On appelle résultante d'une force volumique, surfacique ou linéique la force « totale » générée par l'ensemble des forces sur le volume, la surface ou la ligne considérés.

1.III.2.a.i Force volumique

Une force volumique $d\vec{F}$ est une force par unité de volume et s'exprime en $N.m^{-3}$ issue généralement de l'attraction gravitationnelle ou de forces électromagnétiques. On la note souvent $f(P)$ et elle possède une direction $\vec{u}(P)$ en tout point P de coordonnées (x,y,z) tel que :

$$d\vec{F} = f(P)\vec{u}(P)dV$$

Soit un volume V quelconque, on peut calculer la résultante F de l'action volumique :

$$\vec{F} = \int_V d\vec{F} = \int_V f(P)\vec{u}(P)dV$$

Si la direction $\vec{u}$ et la valeur f de l'effort volumique étudié sont constants sur le volume, on a :

$$\vec{F} = fV\vec{u}$$

1.III.2.a.ii Force surfacique

Une force surfacique $d\vec{F}$ est une force par unité de surface et s'exprime en $N.m^{-2}$ ou Pa (Pascal). Elle est associée à un contact entre deux solides ou entre un solide et un fluide. On la note souvent $p(P)$ telle que :

$$d\vec{F} = -p(P)\overrightarrow{dS}$$

$p(P)$ est appelé « pression en P ».

$\overrightarrow{dS}$ est un vecteur de norme dS, élément de surface autour du point P et de direction $\vec{n}(P)$, vecteur normal sortant de la surface du corps étudié :

$$\overrightarrow{dS} = dS\vec{n}(P)$$

Soit une surface S quelconque, on peut calculer la résultante F de l'action surfacique :

$$\vec{F} = \int_S \left(-p(P)d\vec{S}\right) = -\int_S p(P)d\vec{S}$$

Si la direction $\vec{n}$ est constante (surface plane) et la valeur p de la pression aussi, on a :

$$\vec{F} = -pS\vec{n}$$

Remarque : $1\ bar = 10^5\ Pa$

1.III.2.a.iii ***Force linéique***

Une force linéique ($k(P)\ en\ N.m^{-1}$) est une force par unité de longueur et s'exprime en $N.m^{-1}$. Elle est le résultat :

- Soit d'un modèle de contact entre deux solides indéformables
- Soit d'une simplification d'une force surfacique ou volumique pour traiter un modèle simplifié

On la note souvent $k(P)$ telle que :

$$d\vec{F} = -k(P)\overrightarrow{dl}$$

$\overrightarrow{dl} = dl\vec{n}(P)$, dl étant un élément de longueur autour du point P et $\vec{n}(P)$ la normale sortante en P. La résultante vaut alors :

$$\vec{F} = \int_\Gamma d\vec{F} = -\int_\Gamma k(P)\vec{n}(P)dl$$

Si la direction $\vec{n}$ est constante (droite) et la valeur k de la répartition aussi, on a sur un segment de longueur L:

$$\vec{F} = -kL\vec{n}$$

Remarque : Une force linéique n'existe pas dans la réalité car il n'existe pas de solides indéformables, et tout contact s'établit sur une petite surface par l'intermédiaire d'une pression. Un modèle linéique induit la présence (fausse) d'une pression infinie au contact, mais permet toutefois de rendre compte de l'effet de la force concernée. Si la pression au contact est recherchée, on pourra alors étudier le contact au niveau local (théorie de Hertz) connaissant la force qui transite.

1.III.2.a.iv ***Force ponctuelle***

Une force ponctuelle est une force « simple », qui est le résultat :

- Soit d'un modèle de contact entre deux solides indéformables
- Soit d'une simplification d'une force linéique, surfacique ou volumique pour traiter un modèle simplifié dans lequel on fait apparaître de simples forces plutôt que leur répartition

Remarque : la remarque pour le contact linéique est aussi valable dans le cas de la force ponctuelle qui n'existe pas dans la réalité.

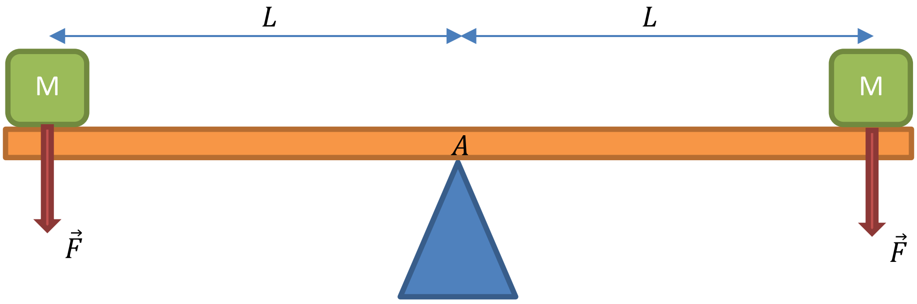
1.III.2.b Moments

1.III.2.b.i Introduction

Lorsqu'une force s'applique sur un solide, le point d'application de cette force induit un effet différent sur la pièce sollicitée, un effet qui est proportionnel à une distance, qui tend à « faire tourner » la pièce sollicitée et qui dépend du lieu où s'applique cette force et de sa direction. On parle souvent d'« effet levier ». La grandeur qui caractérise cet effet est le « moment ».

Un moment est une grandeur exprimée en $N.m$. C'est le produit d'une force par une distance.

Prenons l'exemple d'une pièce en équilibre sous l'action de deux masses égales à une même distance du centre A :

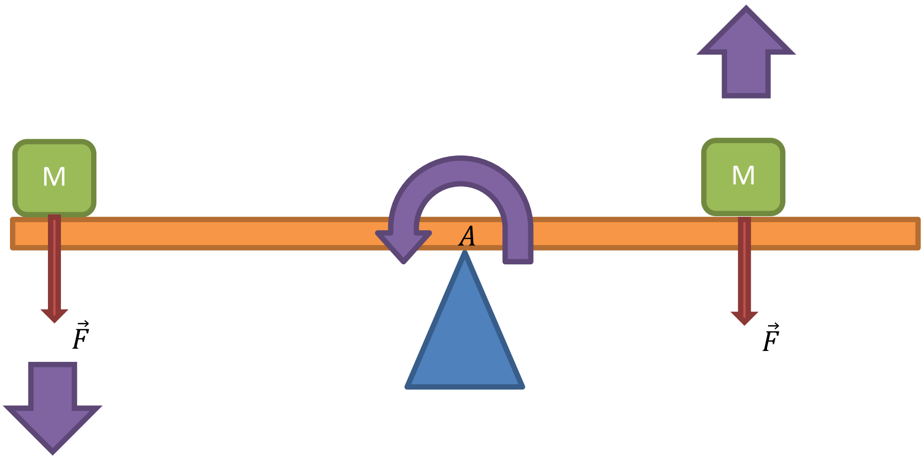


La force qui s'applique sur chaque masse vaut $\vec{F} = -Mg\vec{z}$ où g est l'accélération de la pesanteur.

On devine aisément que l'action au contact en A est opposée aux poids des deux masses et vaut :

$$\overrightarrow{F_A} = 2Mg\vec{z}$$

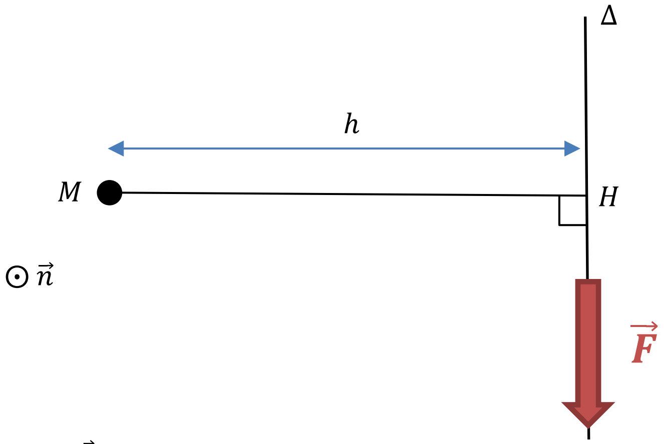
Les deux masses étant identiques, et les distances (bras de levier) aussi, la situation d'équilibre existe. Si l'on rapproche l'une des masses de A, l'équilibre va être perdu :



L'origine du basculement est une différence de moment des deux forces F. L'action en A s'oppose toujours au poids des deux forces et ne change pas de valeur $\left(\overrightarrow{F_A} = 2Mg\vec{z}\right)$, mais il existe une « force en rotation », appelée moment, qui tend à faire basculer l'ensemble vers la gauche.

1.III.2.b.ii Moment d'une force

Soit une force $\vec{F}$ de support la droite Δ et un point M quelconque de l'espace :



Le bras de levier de la force $\vec{F}$ au point M est la distance de M à la droite Δ, c'est-à-dire la distance $MH = h$ où H est la projection orthogonale de M sur Δ.

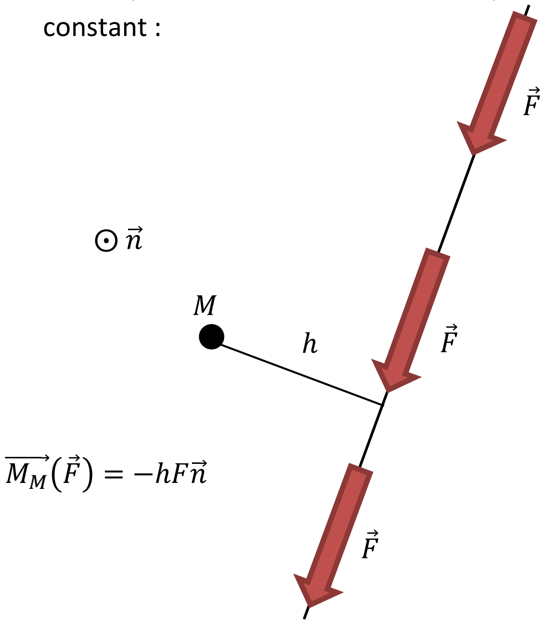
Soit $\vec{n}$ le vecteur orthogonal au plan contenant Δ passant par M et orienté comme présenté sur la figure ci-dessus.

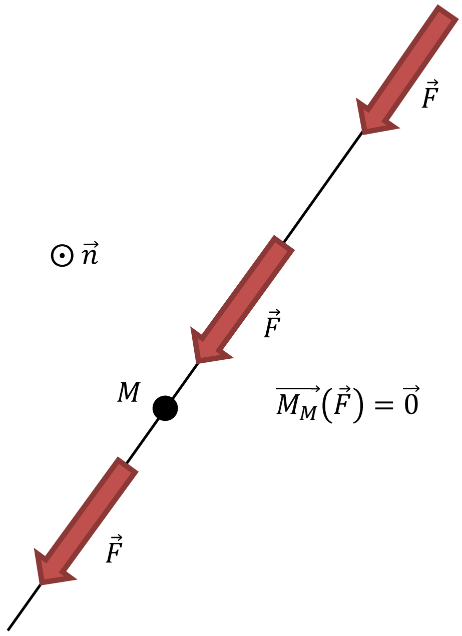
Le moment de $\vec{F}$ en M est un vecteur noté $\overrightarrow{M_M}(\vec{F})$ tel que :

- sa norme est égale à la norme de la force F multipliée par le bras de levier h de cette force au point considéré
- sa direction est orthogonale au plan contenant la direction de la force et le point M
- son sens suivant $\vec{n}$ est
  - positif si la force « tend à faire tourner » dans le sens direct autour de $\vec{n}$
  - négatif si la force « tend à faire tourner » dans le sens indirect autour de $\vec{n}$

$$\overrightarrow{M_M}(\vec{F}) = \pm hF\vec{n}$$

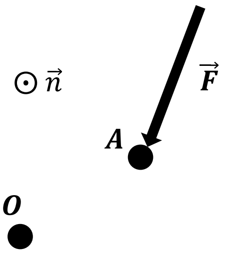
Remarque : Le moment en un même point de toutes forces égales appliquées sur la même droite est constant :





1.III.2.b.iii *Calcul d'un moment*

Soit un point O, une force $\vec{F}$ s'appliquant en A et un vecteur $\vec{n}$ orienté orthogonal au plan contenant $\vec{F}$ et O.



On peut calculer simplement le moment d'une force en un point quelconque de l'espace à l'aide d'un produit vectoriel :

$$\boxed{\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}}$$

Etudions cette formule dans le cas représenté ci-dessus : Soit H la projection orthogonale de O sur la drite d'action de $\vec{F}$ et h le bras de levier de la force $\vec{F}$ en O :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} = -hF\vec{n}$$

1.III.2.b.iv *Formule de Varignon*

Soit une résultante $\vec{R}$ appliquée en un point M et deux points quelconques A et B.

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{R}$$

$$\overrightarrow{M_B}(\vec{R}) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{R}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_B}(\vec{R}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

Le moyen mnémotechnique souvent utilisé pour retenir cette formule est :

$$BABAR$$

1.III.2.b.v Equiprojectivité du moment

Comme nous l'avons vu en cinématique, l'obéissance à la formule de Varignon conduit à la notion d'équiprojectivité du moment :

$$\boxed{\overrightarrow{M_A}(\vec{R}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B}(\vec{R}).\overrightarrow{AB}}$$

Preuve :

$$\overrightarrow{M_B}(\vec{R}).\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{M_A}(\vec{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}\right).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}).\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}\right).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_A}(\vec{R}).\overrightarrow{AB}$$

Cette formule est très utile en statique graphique.

1.III.2.b.vi Moment d'une répartition d'effort

• Répartition volumique d'effort

Calcul

Soit une répartition volumique d'effort $f(P)$. On a $d\vec{F} = f(P)\vec{u}(P)dV$.

Appelons $\overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF})$ le moment de $d\vec{F}$ en un point O de l'espace : $\overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF}) = \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}$

Le moment en O de la répartition volumique d'effort vaut :

$$\overrightarrow{M_O} = \int_V \overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF}) = \int_V \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} = \int_V \overrightarrow{OP} \wedge f(P)\vec{u}(P)dV$$

Cas particulier

Considérons une répartition volumique d'effort constante en norme et direction : $d\vec{F} = f\vec{u}dV$

Soit G le centre géométrique du volume V :

$$\overrightarrow{M_G} = \int_V \overrightarrow{GP} \wedge f\vec{u}dV = f\left(\int_V \overrightarrow{\boldsymbol{GP}}\boldsymbol{dV}\right) \wedge \vec{u}$$

Or, G étant le centre géométrique de V, on a :

$$\int_V \overrightarrow{GP}dV = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_G} = \vec{0}$$

Le moment d'une répartition volumique d'effort constante sur un volume est nul au centre géométrique du volume étudié et sa résultante vaut $fV\vec{u}$

• **Répartition surfacique d'effort**

Calcul

Soit une répartition surfacique d'effort $p(P)$. On a $d\vec{F} = -p(P)\vec{n}(P)dS$.

Appelons $\overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF})$ le moment de $d\vec{F}$ en un point O de l'espace : $\overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF}) = \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}$

Le moment en O de la répartition surfacique d'effort vaut :

$$\overrightarrow{M_O} = \int_S \overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF}) = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} = -\int_S \overrightarrow{OP} \wedge p(P)\vec{n}(P)dS$$

Cas particulier

Considérons une répartition surfacique d'effort constante en norme et direction (surface plane) :

$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS$$

Soit G le centre géométrique de la surface S.

$$\overrightarrow{M_G} = \int_S \overrightarrow{GP} \wedge (-p\vec{n}dS) = -p\left(\int_S \overrightarrow{\boldsymbol{GP}}\boldsymbol{dS}\right) \wedge \vec{n}$$

Or, G étant le centre géométrique de S, on a :

$$\int_S \overrightarrow{GP}dS = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_G} = \vec{0}$$

Le moment d'une répartition surfacique d'effort constante (norme et direction – soit sur une surface plane) est nul au centre géométrique de la surface étudiée et sa résultante vaut $-pS\vec{n}$

• **Répartition linéique d'effort**

Calcul

Soit une répartition linéique d'effort $k(P)$. On a $d\vec{F} = -k(P)\vec{n}(P)dl$.

Appelons $\overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF})$ le moment de $d\vec{F}$ en un point O de l'espace : $\overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF}) = \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}$

Le moment en O de la répartition linéique d'effort vaut :

$$\overrightarrow{M_O} = \int_\Gamma \overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF}) = \int_\Gamma \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} = -\int_\Gamma \overrightarrow{OP} \wedge k(P)\vec{n}(P)dl$$

Cas particulier

Considérons une répartition linéique d'effort constante en norme et direction sur un segment de longueur L :

$$d\vec{F} = -k\vec{n}dl$$

Soit G le centre géométrique de du segment où s'applique l'effort.

$$\overrightarrow{M_G} = \int_\Gamma \overrightarrow{GP} \wedge (-k\vec{n}dl) = -k\left(\int_{\boldsymbol{\Gamma}} \boldsymbol{\overrightarrow{GP}dl}\right) \wedge \vec{n}$$

Or, G étant le centre géométrique du segment étudié, on a :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{GP}dl = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_G} = \vec{0}$$

Le moment d'une répartition linéique d'effort constante sur un segment est nul au centre géométrique du segment étudié et sa résultante vaut $-kL\vec{n}$

1.III.3 Torseurs des actions mécaniques

A partir de maintenant, décrivons l'action d'une pièce j sur une pièce i à l'aide de la résultante $\overrightarrow{R_{ji}}$ et du moment $\overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}})$.

1.III.3.a Notation sous forme de torseur

Soit une résultante $\overrightarrow{R_{ji}}$ et un point M quelconque de l'espace. La résultante est constante, quel que soit le point où on étudie son influence. Cependant, son moment évolue et représente un champ équiprojectif.

Toute action mécanique est représentée par une résultante et le moment associé qui dépend du point où elle est exprimée. On introduit donc la notation sous forme de torseurs :

$$\{T_{j\to i}\} = \{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_N}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) + \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{R_{ji}} \end{Bmatrix}_N$$

Une action mécanique est la donnée de sa résultante et de son moment en un point.

1.III.3.b Torseur d'actions mécaniques

1.III.3.b.i Action quelconque

Ponctuelle en A	Linéique	Surfacique	Volumique
$\vec{F}$	$d\vec{F} = -k(P)\vec{n}(P)dl$	$d\vec{F} = -p(P)\vec{n}(P)dS$	$d\vec{F} = f(P)\vec{u}(P)dV$
$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} \end{Bmatrix}_O$	$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{M_O}(\vec{F}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{V/S/\Gamma} d\vec{F} \\ \int_{V/S/\Gamma} \overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF}) = \int_{V/S/\Gamma} \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} \end{Bmatrix}_O$		

Attention : notez bien que $\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \int_{V/S/\Gamma} \overrightarrow{dM_O}(\overrightarrow{dF})$. Il faut utiliser $\overrightarrow{dF}$.

1.III.3.b.ii Action constante

Soit G le centre géométrique du volume, de la surface ou du segment sur lequel s'applique respectivement une action volumique, surfacique ou linéique de norme et direction constante, nous avons montré précédemment que l'on a :

Linéique	Surfacique	Volumique
$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} -kL\vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$	$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} -pS\vec{n} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$	$\{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} fV\vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

On pourra donc simplement représenter, par exemple, l'action mécanique de la gravité par une simple force au centre de gravité du solide concerné si sa masse volumique est constante.

1.III.3.c Torseurs particuliers

Nous avons lors de l'étude cinématique des mécanismes introduit les torseurs glisseur et couple. Voyons enfin ce a quoi ils correspondent vraiment (noms associés à la statique).

1.III.3.c.i *Torseur glisseur*

Un torseur glisseur est un torseur dont le moment est nul en au moins un point de l'espace :

$$\exists M / \{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

Toute action mécanique de type glisseur possède un axe central, c'est-à-dire une droite de l'espace le long de laquelle le moment de l'action étudiée est nul. La détermination de cet axe pour des répartitions linéiques, surfaciques et volumiques est très utile pour remplacer l'action en question par une unique résultante et un moment nul en un point de son axe central. Trouver l'axe central consiste à trouver le (les) point(s) où le moment de l'action concernée est nul : $M / \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) = \vec{0}$

L'axe central est alors la droite passant par M et de vecteur directeur : $\vec{u} = \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$

Propriété :

$$\boxed{\{T_{ji}\}\ est\ un\ glisseur \Leftrightarrow \forall P, \overrightarrow{R_{ji}} \perp \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}})}$$

En effet : $\{T_{ji}\}$ est un glisseur, donc $\exists M / \{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_P}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_P$ avec $\overrightarrow{M_P}(\overrightarrow{R_{ji}}) = \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{R_{ji}}$, donc $\overrightarrow{M_P}(\overrightarrow{R_{ji}}) \perp \overrightarrow{R_{ji}}$.

Ceci est utile dans certains sujets de concours pour démontrer qu'un torseur est un glisseur.

1.III.3.c.ii Torseur couple

Un torseur couple est un torseur qui en tout point de l'espace possède une résultante nulle :

$$\forall M / \{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C} \end{Bmatrix}_M$$

Dans ce cas, le moment est le même en tout point de l'espace car :

$$\forall M', \overrightarrow{M_{M'}}(\vec{R}) = \vec{C} + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{R} = \vec{C} + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{0} = \vec{C}$$

Un torseur couple est toujours obtenu par la somme d'au moins deux actions mécaniques ponctuelles, ou par l'intégration d'une action répartie particulière. Dans le cas de deux actions ponctuelles, celles-ci sont opposées de manière à annuler la résultante, et sur des axes différents afin de créer un moment.

On fait très (trop) souvent la confusion entre un couple et un moment. Un moment existe, qu'il soit nul ou non, pour toute action mécanique. Le couple est le moment particulier tel que l'action mécanique qu'il représente possède une résultante nulle.

1.III.4 Somme d'actions mécaniques

Soient n actions mécaniques sur un solide S dont les torseurs respectifs sont notés $\{T_{iS}\}, i = 1..n$. On peut remplacer les n actions mécaniques par une seule action $\{T_{ext \to S}\}$ tel que :

$$\{T_{ext \to S}\} = \sum_{i=1}^{n} \{T_{iS}\}$$

1.IV. Actions de liaisons

1.IV.1 Torseurs statiques

Le torseur statique est noté :

$$\{T_{j\to i}\} = \{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} X_{ji}\overrightarrow{x_0} + Y_{ji}\overrightarrow{y_0} + Z_{ji}\overrightarrow{z_0} \\ L_{ji}\overrightarrow{x_0} + M_{ji}\overrightarrow{y_0} + N_{j/i}\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

$\overrightarrow{R_{ji}}$ est appelé la résultante du torseur, c'est aussi la résultante en statique. Ses composantes dans la base $\mathfrak{B}_0$ sont X_{ji}, Y_{ji} et Z_{ji}

$\overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}})$ est appelé le moment du torseur, c'est aussi le moment en statique. Ses composantes dans la base $\mathfrak{B}_0$ sont L_{ji}, M_{ji} et N_{ji}

La notation $\{T_{j\to i}\}$ est indépendante du point où sera exprimé le torseur.

La notation vectorielle $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_M$ a l'obligation d'être exprimée en un point qu'il faut préciser.

La notation verticale $\begin{Bmatrix} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$ doit être utilisée en précisant la base. Cette notation sera uniquement utilisée pour apprendre les torseurs, puis lorsqu'ils seront posés, on repassera à la notation vectorielle.

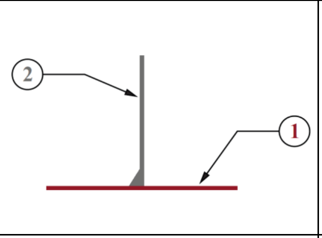
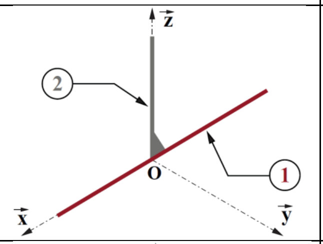
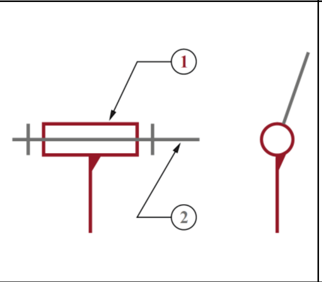
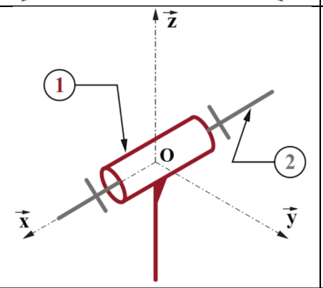
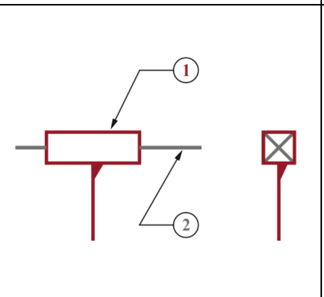
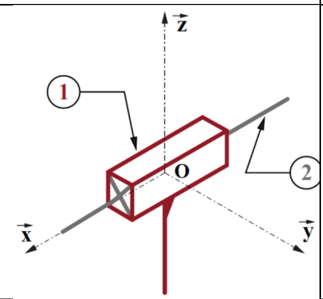
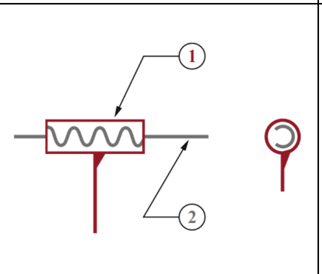
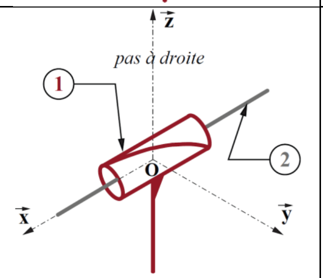
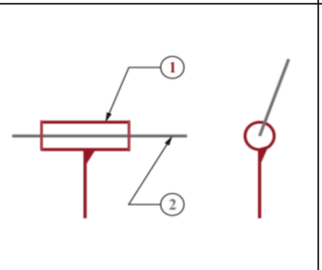
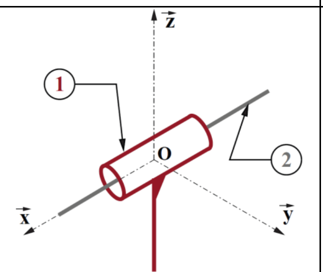
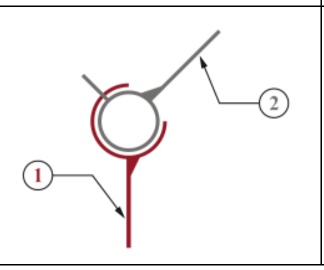
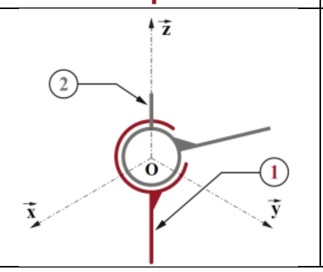
Quel que soit le point où le torseur est exprimé, le vecteur résultante reste constant.

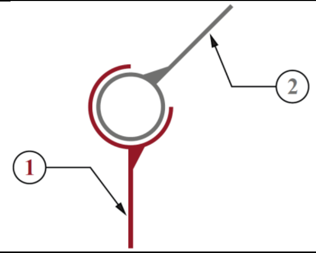
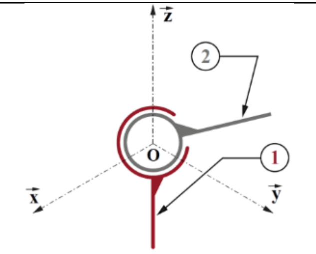
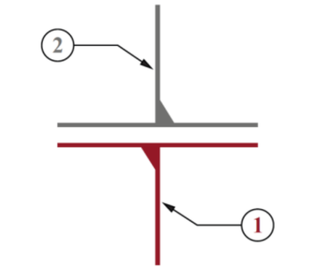
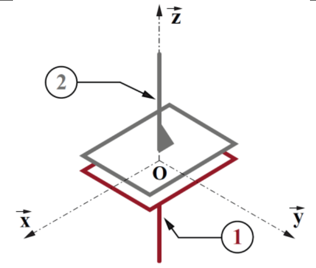
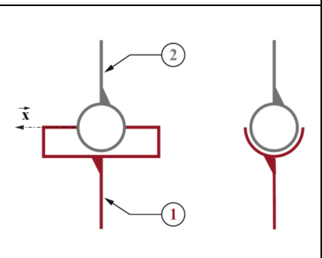
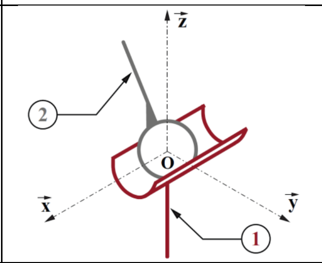
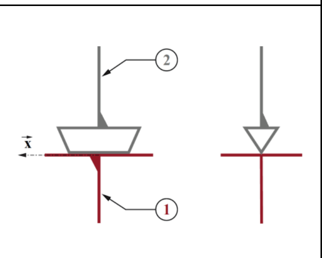
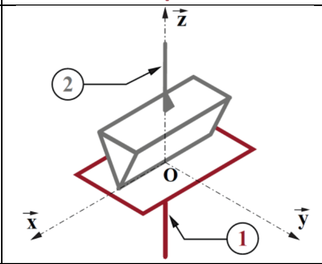
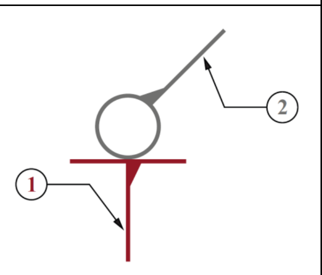
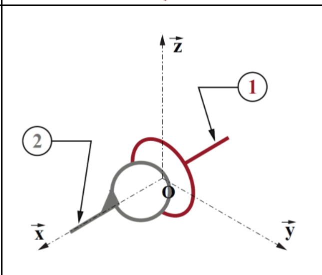
Selon le point choisi, le vecteur moment change et est exprimé à l'aide de la formule de changement de Varignon :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_N}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) + \overrightarrow{NM} \Lambda \overrightarrow{R_{ji}} \end{Bmatrix}_N$$

1.IV.2 Liaisons normalisées parfaites

1.IV.2.a Liaisons en 3D

Liaison	Elem Géom	2D	3D	$\{T_{21}\}$ Forme canonique	Validité	$\mathfrak{B}$	I_c
Encastrement E	RAS			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\vec{x}$ — —	6
Pivot P	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	5
Glissière Gl	$\vec{x}$			$\begin{Bmatrix} 0 & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\vec{x}$ — —	5
Hélicoïdale He	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $L_{2/1} = -\frac{pas}{2\pi} X_{2/1}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	5
Pivot Glissant PG	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	4
Rotule à doigt Sphérique à doigt	O Rainure $(O,\vec{x},\vec{z})$ Doigt $\vec{z}$			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	O	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	4

Rotule S Sphérique S	O			$\left\{\begin{matrix} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	O	— — —	3
Appui plan AP	$\vec{z}$			$\left\{\begin{matrix} 0 & \boldsymbol{L_{2/1}} \\ 0 & \boldsymbol{M_{2/1}} \\ Z_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	— — —	3
Linéaire annulaire LA Sphère cylindre SC	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{2/1} & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	O	$\vec{x}$ — —	2
Linéaire rectiligne LR Cylindre Plan CP	$\{(O,\vec{x}),\vec{z}\}$			$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M_{2/1}} \\ Z_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	$(O,\vec{x},\vec{z})$	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	2
Ponctuelle Pct Sphère-plan SP	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix} X_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	1

1.IV.2.b Liaisons en 2D

En mécanismes plans, les mouvements des pièces ont lieu dans un seul plan, par exemple le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$.

Dans ce cas, les seuls actions possibles sont:

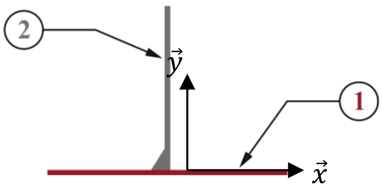
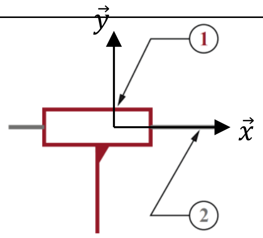
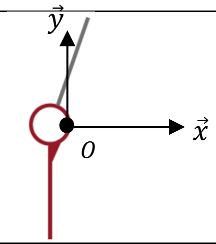
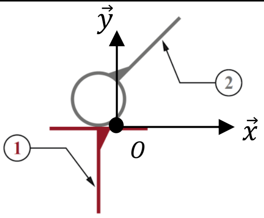
- Les efforts dans le plan suivant $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$

- Le moment autour de $\vec{z}$

Dans les torseurs statiques des liaisons, les trois termes $L_{2/1}$, $M_{2/1}$ et $Z_{2/1}$ sont donc nuls. Il ne reste que 3 inconnues maximum par liaison.

$$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & \mathbf{0} \\ Y_{2/1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

Les seules liaisons permettant de représenter des mouvements plans sont les liaisons suivantes, en tenant compte des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ du plan:

Encastrement		$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & 0 \\ 0 & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\boldsymbol{I_s^{2D} = 3}$
Glissière $\vec{x}$		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{2/1} & 0 \\ 0 & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\boldsymbol{I_s^{2D} = 2}$
Pivot $(O, \vec{z})$		$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O, \vec{z})$	$\boldsymbol{I_s^{2D} = 2}$
Ponctuelle $(O, \vec{y})$		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O, \vec{y})$	$I_s^{2D} = 1$

Toute autre liaison se rapportera, dans le plan, à l'une de celles-ci.

1.IV.2.c Remarques

Lorsque l'on connaît les torseurs cinématiques des liaisons, il est simple de retrouver les torseurs statiques associés. Pour cela, il faut

- Intervertir les deux colonnes
- Changer les variables nulles en variables non nulles et inversement en affectant les bonnes lettres X, Y, Z, L, M et N.

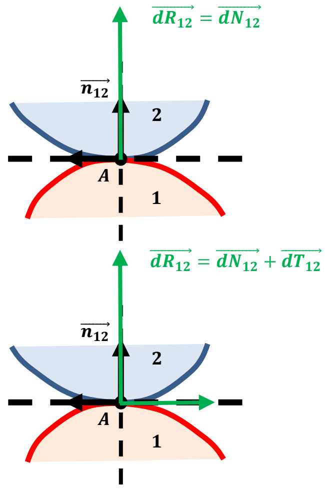
Exemple de la liaison pivot d''axe $(0,\vec{x})$

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{x})}^{\mathfrak{B}} ; \begin{Bmatrix} 0 & P_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{x})}^{\mathfrak{B}} ; \begin{Bmatrix} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_{P}^{\mathfrak{B}} \forall P \in (O,\vec{x})$$

Attention, cette méthode ne fonctionne pas pour la liaison hélicoïdale : Les inconnues non nulles le restent !

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{x})}^{\mathfrak{B}} ; \begin{Bmatrix} U_{2/1} & P_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O,\vec{x})}^{\mathfrak{B}} ; \begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_{P}^{\mathfrak{B}} \forall P \in (O,\vec{x})$$

1.V. Contact



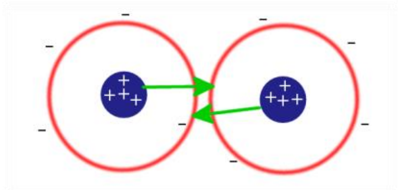
Lorsqu'il y a contact entre deux solides, il existe deux cas de figure :

- Le contact est supposé parfait :
  - Il n'y a pas de dissipation énergétique due au contact
  - L'action locale en tout point est normale à la surface
- Le contact n'est pas parfait, il y a des frottements tangentiels causant :
  - Adhérence (Pas de dissipation énergétique par glissement)
  - Glissement, synonyme d'usure et de dissipation énergétique
    - En translation
    - En pivotement (rotation autour de la normale au contact)

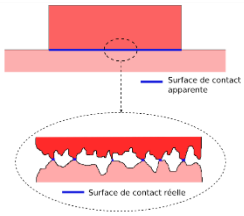
Dans les deux cas, il peut y avoir dissipation énergétique par résistance au roulement, sauf si une liaison est supposée parfaite, ce qui veut dire : Contact parfait et absence de résistance au roulement.

Nous allons ici nous intéresser au cas des contacts imparfaits et considérer le contact entre deux solides notés 1 et 2.

1.V.1 Frottement : Adhérence/Glissement



1.V.1.a Définitions



La présence de **frottements** causant les phénomènes **d'adhérence** et de **glissement** a pour principales origines la rugosité des surfaces en contact et les interactions électromagnétiques. Faites bien la différence entre ces trois termes.

1.V.1.a.i Adhérence

On parle d'adhérence entre deux solides lorsque la vitesse relative entre ces solides est nulle en tout point de la zone de contact : $\forall P \in contact, \vec{V}(P,2/1) = \vec{0}$

Lorsqu'il y a **adhérence**, il n'y a pas de glissement. ATTENTION : Le roulement sans glissement (**RSG**) n'est rendu possible que parce que le contact n'est pas parfait ! Autrement dit, il faut des frottements, soit une action tangentielle au contact. Toutefois, il n'y a pas de mouvement relatif, donc pas de dissipation par frottements, mais il peut y avoir dissipation par la présence de résistance au roulement. Dans le cas de l'adhérence, on parle d'actions mécaniques (efforts, couples) **transmissibles** par la liaison réalisée grâce à l'adhérence. Cela correspond à l'action mécanique **maximale** qui peut transiter dans la liaison avant qu'il y ait glissement (ex : embrayage).

1.V.1.a.ii Glissement

On parle de glissement lorsqu'il existe des points de la zone de contact où la vitesse de glissement n'est pas nulle :$\exists P \in contact, \vec{V}(P,2/1) \neq \vec{0}$

Dans le cas du glissement, on parle d'actions mécaniques (efforts, couples) **transmises** par le contact frottant (ex : frein à disques). L'effort transmis sera généralement constant !

1.V.1.b Mise en place du problème

Soient deux solides 1 et 2 en contact sur une surface S quelconque. Soit un point A quelconque de cette surface et $\overrightarrow{dS}$ l'élément de surface autour de A. Appelons $\overrightarrow{dR_{12}}$ l'action élémentaire de 1 sur 2 en A transitant à travers l'élément de surface dS.

Soit $\overrightarrow{n_{12}}$ la normale unitaire sortante de 1 vers 2.

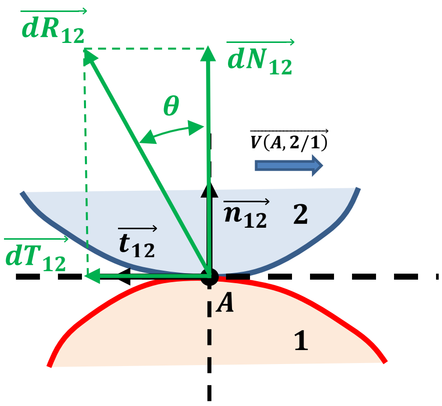
Appelons $\overrightarrow{t_{12}}$ le vecteur unitaire tel que, si le contact était parfait, il y aurait une vitesse relative $\vec{V}(A,2/1)$ non nulle :

$$\overrightarrow{t_{12}} = -\frac{\vec{V}(A,2/1)}{\left\|\vec{V}(A,2/1)\right\|}$$

Soit $\overrightarrow{dN_{12}}$ la composante normale de l'action $\overrightarrow{dR_{12}}$ suivant $\overrightarrow{n_{12}}$ et $\overrightarrow{dT_{12}}$ la composante tangentielle de $\overrightarrow{dR_{12}}$ suivant $\overrightarrow{t_{12}}$. On a :

$$\overrightarrow{dR_{12}} = \overrightarrow{dN_{12}} + \overrightarrow{dT_{12}} = \left\|\overrightarrow{dN_{12}}\right\|\overrightarrow{n_{12}} + \left\|\overrightarrow{dT_{12}}\right\|\overrightarrow{t_{12}}$$

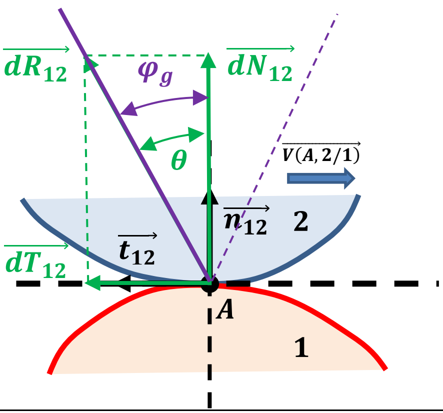
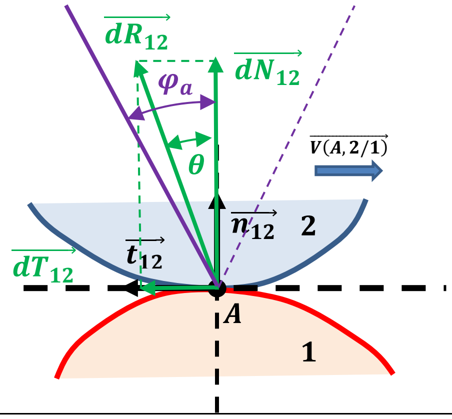
Définissons l'angle θ tel que : $\theta = \left|\left(\widehat{\overrightarrow{dN_{12}}, \overrightarrow{dR_{12}}}\right)\right|$



L'action tangentielle de 1 sur 2 de frottement **s'oppose au mouvement possible de 2 par rapport à 1 si le contact était parfait**, que le mouvement ait lieu ou non.
L'action tangentielle de frottement de 1 sur 2 **s'oppose à 2** dans le mouvement 2/1
L'action tangentielle de frottement de 2 sur 1 **entraîne 1** dans le mouvement 2/1

1.V.1.c Lois de Coulomb

Les lois de Coulomb permettent de déterminer la relation liant la composante normale transitant au contact avec la composante tangentielle issue du frottement des deux surfaces :

Glissement	Adhérence
$\left\lVert\overrightarrow{dT_{12}}\right\rVert = f_g \left\lVert\overrightarrow{dN_{12}}\right\rVert$ $f_g = \tan \varphi_g$ $\theta = \varphi_g$ f_g est appelé coefficient de glissement φ_g est appelé angle de glissement Attention : $\cancel{\overrightarrow{dT_{12}} = f_g \overrightarrow{dN_{12}}}$	$\left\lVert\overrightarrow{dT_{12}}\right\rVert < f_a \left\lVert\overrightarrow{dN_{12}}\right\rVert$ $f_a = \tan \varphi_a$ $\theta \leq \varphi_a$ f_a est appelé coefficient d'adhérence φ_a est appelé angle d'adhérence Attention : $\cancel{\overrightarrow{dT_{12}} \leq f_a \overrightarrow{dN_{12}}}$
L'action $\overrightarrow{dR_{12}}$ est **sur** le cône de glissement  	L'action $\overrightarrow{dR_{12}}$ est **dans** le cône d'adhérence 

Lorsqu'il y a adhérence, une inégalité complique grandement les démarches de résolution. Dans ce cas, on se placera souvent « **à la limite du glissement** », de manière à traiter le cas limite entre adhérence et glissement, cas où on écrira :

$$\left\lVert\overrightarrow{dT_{12}}\right\rVert = f_a \left\lVert\overrightarrow{dN_{12}}\right\rVert$$

1.V.1.d Passage Local – Global

1.V.1.d.i Formules générales

Lors de la détermination d'actions de contact avec adhérence ou frottement sur l'intégralité d'une surface, il convient de bien définir l'action locale $\overrightarrow{dR_{12}}$ avec ses deux composantes, puis de définir le moment en O $\overrightarrow{dM_O^{12}}$ de cette action en un point P courant sur la zone de contact puis enfin de les intégrer.

$$\overrightarrow{dR_{12}} = \left\|\overrightarrow{dN_{12}}\right\|\overrightarrow{n_{12}} + \left\|\overrightarrow{dT_{12}}\right\|\overrightarrow{t_{12}} = pdS\overrightarrow{n_{12}} + fpdS\overrightarrow{t_{12}}$$

$$\overrightarrow{dM_O^{12}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR_{12}}$$

$$\forall O, \{T_{12}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{12}} = \int_S \overrightarrow{dR_{12}} \\ \overrightarrow{M_O^{12}} = \int_S \overrightarrow{dM_O^{12}} \end{Bmatrix}_O$$

Remarque importante : Prétendre que le moment $\overrightarrow{M_O^{12}}$ se calcul avec la résultante intégrée $\overrightarrow{R_{12}}$ est généralement une erreur. En effet :

$$\overrightarrow{M_O^{12}} = \int_S \overrightarrow{dM_O^{12}} = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR_{12}}$$

est différent dans le cas général de

$$\overrightarrow{OP} \wedge \int_S \overrightarrow{dR_{12}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{R_{12}}$$

1.V.1.d.ii Cas du contact Plan/Plan en mouvement de translation

Dans le cas d'un contact entre deux surfaces planes sur une surface S et dans le cas d'un mouvement de translation, on a :

$$\overrightarrow{dF_{12}} = \overrightarrow{dN_{12}} + \overrightarrow{dT_{12}}$$

$$\overrightarrow{dN_{12}} = p(P)dS\overrightarrow{n_{12}} \quad ; \quad \begin{cases} \left\|\overrightarrow{dT_{12}}\right\| = f_g\left\|\overrightarrow{dN_{12}}\right\| \text{ en cas de glissement} \\ \left\|\overrightarrow{dT_{12}}\right\| < f_a\left\|\overrightarrow{dN_{12}}\right\| \text{ en cas d'adhérence} \end{cases}$$

On notera f ce coefficient d'adhérence ou de frottement et on suppose qu'il est constant.

Dans le cas particulier étudié, on peut définir les actions normale $\overrightarrow{N_{12}}$ et tangentielle $\overrightarrow{T_{12}}$ globales :

$$\overrightarrow{N_{12}} = \int_S \overrightarrow{dN_{12}} \quad ; \quad \overrightarrow{T_{12}} = \int_S \overrightarrow{dT_{12}}$$

Appelons : $T = \left\|\overrightarrow{T_{12}}\right\| \quad ; \quad N = \left\|\overrightarrow{N_{12}}\right\|$

Le contact étant plan et le mouvement étant un mouvement de translation, tous les petits vecteurs $\overrightarrow{dN_{12}}$ et $\overrightarrow{dT_{12}}$ sont parallèles et dans le même sens, on a donc :

$$\left\|\overrightarrow{N_{12}}\right\| = \int_S \left\|\overrightarrow{dN_{12}}\right\| \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{T_{12}}\right\| = \int_S \left\|\overrightarrow{dT_{12}}\right\|$$

Ce qui donne :

$$T = \left\|\overrightarrow{T_{12}}\right\| = \int_S \left\|\overrightarrow{dT_{12}}\right\| = \int_S f\left\|\overrightarrow{dN_{12}}\right\| = f\int_S \left\|\overrightarrow{dN_{12}}\right\| = fN$$

On a la relation au niveau global : $\boxed{\begin{cases} T = fN \text{ en cas de glissement} \\ T < fN \text{ en cas d'adhérence} \end{cases}}$

Attention : hormis dans le cas du contact Plan/Plan où l'on peut parler des actions $\vec{T}$ et $\vec{N}$ comme les intégrales des actions $\overrightarrow{dT}$ et $\overrightarrow{dN}$ au contact, qui sont dans les mêmes directions que les actions locales et donc compréhensibles, dès que l'on a des surfaces non planes, les exprimer n'a plus de sens car à quelle normale correspondrait $\vec{N}$? et à quelle direction tangentielle correspondrait $\vec{T}$?

1.V.1.d.iii Cas du contact ponctuel

Dans le cas d'un contact ponctuel, modèle d'un contact réel, il existe la même relation :

$$\begin{cases} T = fN \text{ en cas de glissement} \\ T < fN \text{ en cas d'adhérence} \end{cases}$$

1.V.1.e Un petit exemple intéressant

Supposons un véhicule à n contacts avec le sol horizontal, modélisés par des actions ponctuelles. On appelle N_i les efforts normaux de chaque roue avec le sol. On a $P = mg = \sum N_i$.

On suppose que toutes les roues glissent (chaque roue est freinée) et que le coefficient de glissement est le même partout, appelé f. Les actions tangentielles à chaque contact s'écrivent $T_i = fN_i$. L'action horizontale totale T s'écrit $T = \sum T_i = \sum fN_i = f\sum N_i = fmg$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on a $fmg = ma \Leftrightarrow a = fg$

Résultat intéressant… Quel que soit le nombre de contacts, l'accélération la plus grande en valeur absolue, vaut fg.

1.V.1.f Coefficients de frottement : glissement et adhérence

Les coefficients f_g et f_a dépendent de plusieurs paramètres. Nous retiendrons, pour nos applications, les paramètres principaux suivants :

- Matériaux des deux solides en contact
- Nature du contact : sec ou humide

Voici quelques coefficients pour des matériaux souvent rencontrés :

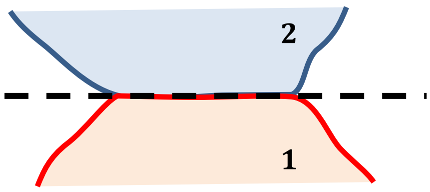
Matériau 1	Matériau 2	f_g	f_a
Acier	Acier	0,15	0,2
Acier	Garniture de frein	0,25	0,4
Pneu	Route sèche	0,5	0,8
Pneu	Route mouillée	0,35	0,5

En général, si ce n'est pas précisé, on confondra coefficient de glissement et coefficient d'adhérence qui ont des valeurs proches, on aura alors :

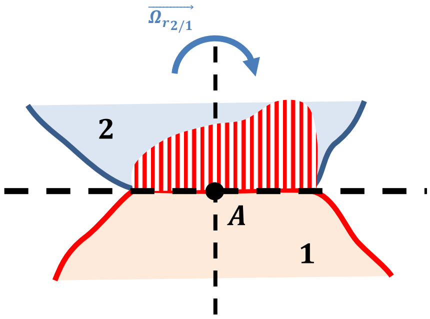
$$f = f_g = f_a \quad ; \quad \varphi = \varphi_g = \varphi_a$$

1.V.2 Résistance au roulement

Lorsqu'il y a contact entre deux pièces, la matière se déforme et s'écrase. Plus l'effort normal est important, plus cette déformation est grande.



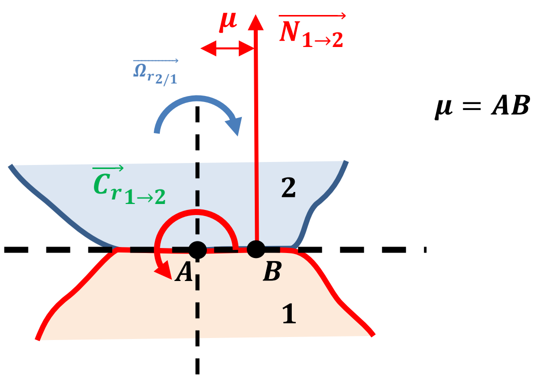
On peut utiliser la théorie de Hertz pour caractériser déformations et contraintes au niveau local. Dans nos modèles, on pourra considérer que lorsqu'il y a contact et mouvement de rotation, il y a résistance au roulement. En effet, du fait du mouvement, la pression ne se répartie pas uniformément sur la surface de contact. On peut la représenter comme suit :



On définit le point A au centre de la surface de contact, tel que s'il n'y avait pas de résistance au roulement, le moment de l'action de contact serait nul en A.

En cas de résistance au roulement, la résultante de l'action de pression peut alors se représenter comme un effort normal de moment nul en $B \neq A$, décentré d'une distance μ en amont dans le sens du mouvement et qui génère un couple de résistance au roulement :

$$C_{r_{1\to2}} = \pm\mu N_{1\to2}$$



La distance μ en m est appelée coefficient de résistance au roulement

1.VI. Résolution statique des mécanismes

Plaçons-nous dans le cas où toutes les liaisons usuelles vues précédemment sont parfaites, c'est-à-dire sans adhérence/frottement, et étudions des mécanismes composés de pièces supposées indéformables.

L'objet de cette partie est de déterminer les actions mécaniques dans les différentes liaisons d'un mécanisme connaissant les actions extérieures qui s'appliquent dessus (volumiques, surfaciques, linéiques ou ponctuelles).

Il existe deux grandes méthodes pour déterminer ces actions :

- Une méthode analytique (calcul)
- Une méthode graphique

1.VI.1 Résolution analytique

1.VI.1.a Graphe des liaisons et actions mécaniques

Lors de la résolution d'un problème en statique, il est conseillé d'effectuer un graphe des liaisons du mécanisme étudié et de le compléter en faisant apparaître les actions mécaniques extérieures qui s'appliquent sur ses différentes pièces.

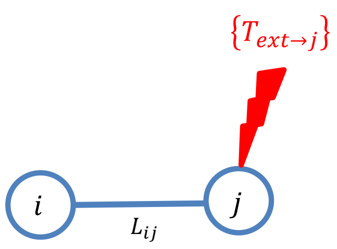
On rencontre deux types d'actions extérieures hormis les actions de liaison :

- Les actions extérieures ne s'appliquant que sur une pièce
- Les actions entre deux pièces, un moteur ou un vérin par exemple

Rappelons que l'action de la gravité s'applique sur toutes les pièces d'un mécanisme. Elle sera toutefois souvent négligée.

1.VI.1.a.i Actions extérieures sur une pièce

La gravité, une pression, un effort ou un couple résistant en sortie du mécanisme… sont des actions extérieures sur une pièce du mécanisme. On représentera ces actions sur le graphe des liaisons ainsi :



On remplacer le mot « ext » par un terme désignant facilement l'action en question.

1.VI.1.a.ii Interactions extérieures entre deux pièces

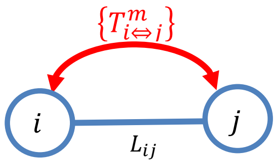
Rappelons que l'on ne parle pas ici de l'action de liaison toujours présente entre les pièces d'un mécanisme. Lorsqu'un moteur ou un vérin motorise une liaison entre deux pièces, il exerce sur chacune des pièces une action opposée.

Sachant que l'on note le torseur de l'action mécanique de liaison entre les pièces i et j $\{T_{ij}\}$ ou $\{T_{ji}\}$, on choisira un nom marquant la différence, par exemple indicé de la lettre m montrant que cette action est liée à la motorisation de la liaison :

$$\{T_{i\Leftrightarrow j}^{m}\}$$

Ce torseur ne sera utilisé que dans le graphe des liaisons pour représenter l'interaction entre les pièces concernées.

On peut donc proposer le modèle suivant dans le cas d'une interaction :

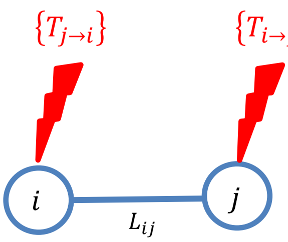


Attention, le torseur lié à cette interaction devra être noté correctement en fonction de la pièce isolée :

- Isolement de la pièce i : $\{T_{j\to i}^{m}\}$

- Isolement de la pièce j : $\{T_{i\to j}^{m}\}$

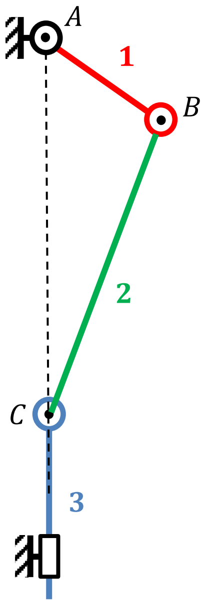
Remarque : L'interaction entre i et j peut aussi être représentée à l'aide de deux actions extérieures plutôt que l'interaction précédente :

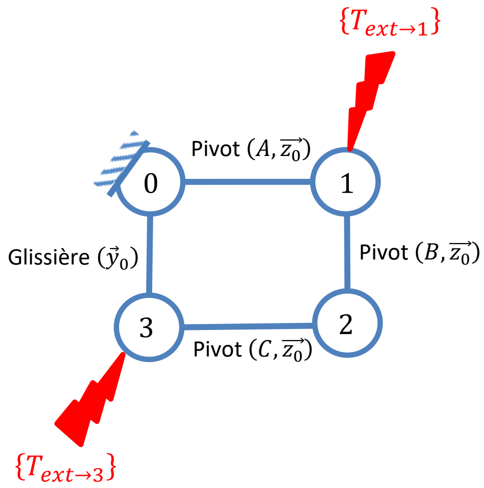


1.VI.1.b Isolement - Définition

Isoler un solide ou un ensemble de solides consiste à répertorier l'intégralité des actions mécaniques qui s'appliquent sur celui-ci, c'est-à-dire de réaliser le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures aussi appelé BAME.

Exemple : Bielle - Manivelle

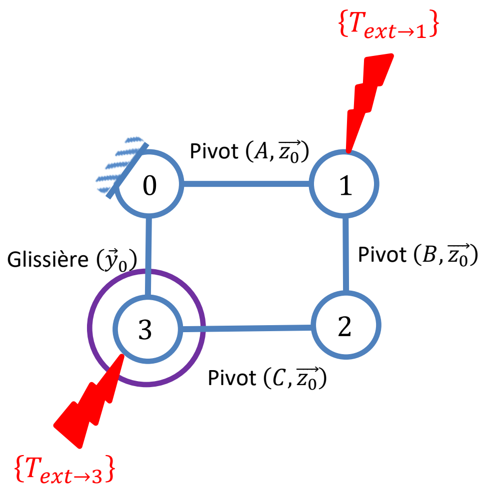




Les actions extérieures au système sont :

- Sur la pièce 3, un effort issu de la combustion du combustible créant une pression sur le piston
- Sur la pièce 1, un couple opposé au couple moteur sortant du système Bielle-Manivelle

Isoler la pièce 3 (par exemple) consiste concrètement à entourer la pièce 3 d'une ligne fermée, et d'énumérer les différentes actions qui s'exercent dessus, c'est-à-dire les intersections entre la ligne et les actions présentes :



Actions sur la pièce 3 : $\{T_{ext\to 3}\}; \{T_{2\to 3}\}; \{T_{0\to 3}\}$

1.VI.1.c Principe Fondamental de la Statique

1.VI.1.c.i Enoncé

Soit un référentiel Galiléen R_g que l'on notera aussi 0 comme base 0. Soit un solide S quelconque fixe dans la base 0 (il peut être en mouvement rectiligne uniforme, mais en statique nous supposerons qu'il est fixe). Isolons le solide S soumis à n actions extérieures dont les torseurs statiques respectifs sur le solide S s'écrivent $\{T_{i \to S}\}, i = 1..n$. Ces actions sont soit des actions extérieures de chargement (volumique, surfaciques, linéiques ou ponctuelles), soit des actions de liaisons.

Le Principe Fondamental de la Statique (PFS), permet d'écrire la relation suivante pour chaque isolement :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \{T_{i \to S}\} = \{0\}}$$

Appelons $\overrightarrow{R_{\iota \to S}}$ la résultante statique de chacune des actions extérieures sur S et $\overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{\iota \to S}}\right)$ le moment en un point M quelconque de l'espace de chacune de ces actions. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\iota \to S}} \\ \overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{\iota \to S}}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{R_{\iota \to S}} = \vec{0} & (\overrightarrow{eq_1}) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{\iota \to S}}\right) = \vec{0} & (\overrightarrow{eq_2}) \end{cases}$$

L'équation 1 est appelée « Théorème de la Résultante Statique » TRS

L'équation 2 est appelée « Théorème du Moment Statique » TMS

Remarque : il est possible d'appliquer le PFS à un ensemble de solides E en équilibre.

1.VI.1.c.ii Résultats obtenus

L'application du PFS donne deux types de résultats :

- Les actions de liaisons (inconnues de la résolution X, Y, Z, L, M et N) en fonction des actions extérieures – On trouvera autant d'inconnues que le rang du système linéaire mis en place
- Les relations entre actions extérieures entrée/sortie associées aux degrés de mobilité du système (obtenues par les équations qui diminuent le rang du système, dans lesquelles tout sera connu) – On aura autant d'équations « inutiles » pour la détermination d'inconnues statiques, « diminuant le rang », « où tout est connu », qu'il y a de mobilités

1.VI.1.c.iii PFS et résultat attendu

Nous verrons qu'il est assez fastidieux de mener une résolution statique car elle présente souvent beaucoup d'équations.

Après avoir mis en œuvre une méthode de a à z, il faudra être capable d'identifier, selon le résultat souhaité :

- La ou les pièces à isoler
- Le théorème à utiliser (TMS, TRS)
- Le point où l'appliquer
- L'axe sur lequel le projeter

Il sera alors par exemple possible d'obtenir en quelques lignes la relation entrée/sortie en statique, où bien l'action de liaison souhaitée

1.VI.1.c.iv Démarche de résolution du système linéaire obtenu

Pour résoudre le système linéaire, il est recommandé de procéder ainsi :

- Encadrer les actions extérieures supposées connues
- Souligner en trait droit une inconnue dans l'équation dans laquelle elle a pu être déterminée
- Souligner cette même inconnue dans les autres équations avec un ligne en forme de vague (attention, si X_{ij} est connu, X_{ji} l'est aussi)

Cela permet :

- De revenir en arrière simplement en cas d'erreurs
- De mettre en évidence les éventuelles équations dans lesquelles tout est connu correspondant à des relations entre actions extérieures

Exemple :

$$\begin{cases} \underbrace{X_{01}} + \underline{X_{21}} = 0 \\ \underline{Y_{01}} + \underbrace{Y_{21}} = 0 \\ -L_1 \cos\theta_{10}\, \underbrace{Y_{01}} + L_1 \sin\theta_{10}\, \underline{X_{01}} + [C] = 0 \\ \underline{X_{32}} + \underbrace{X_{12}} = 0 \\ \underbrace{Y_{32}} + \underline{Y_{12}} = 0 \\ L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10})\, \underbrace{Y_{32}} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})\, \underbrace{X_{32}} = 0 \\ \underbrace{X_{23}} + X_{03} = 0 \\ [F] + \underline{Y_{23}} = 0 \\ \underline{N_{03}} = 0 \end{cases}$$

Le système ci-dessus montre une mobilité (équation dans laquelle tout est connu) : $L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10})\, \underbrace{Y_{32}} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})\, \underbrace{X_{32}} = 0$. En remplaçant les expressions de Y_{32} et X_{32} obtenues lors de la résolution, on trouvera la relation entre F et C. Attention, selon la résolution, ce n'est pas forcément cette 6° équation qui sera celle où tout est connu, mais le résultat lui sera le même quoi qu'il arrive.

1.VI.1.c.v Théorème des actions réciproques

• Enoncé

Soient deux solides S_1 et S_2 exerçant chacun une action mécanique sur l'autre, notées $\{T_{12}\}$ et $\{T_{21}\}$. Soit des actions extérieures quelconques $\{T_{Ext\to 1}\}$ et $\{T_{Ext\to 2}\}$ sur les solides 1 et 2.

Le théorème des actions réciproques (ou 3° loi de Newton) démontre que l'action d'un solide 1 sur un solide 2 est l'opposée de l'action du solide 2 sur le solide 1. On parle souvent de principe d'action/réaction.

$$\boxed{\{T_{21}\} = -\{T_{12}\}}$$

• Démonstration

Isolons successivement S_1, S_2 et l'ensemble S_1US_2 et appliquons le PFS à chacun de ces isolements :

S_1	$\{T_{Ext\to 1}\} + \{T_{21}\} = \{0\}$	$\{T_{Ext\to 1}\} = -\{T_{21}\}$
S_2	$\{T_{Ext\to 2}\} + \{T_{12}\} = \{0\}$	$\{T_{Ext\to 2}\} = -\{T_{12}\}$
S_1US_2	$\{T_{Ext\to 1}\} + \{T_{Ext\to 2}\} = \{0\}$	
Bilan	$\{T_{Ext\to 1}\} + \{T_{Ext\to 2}\} = \{0\} \Leftrightarrow -\{T_{21}\} - \{T_{12}\} = \{0\} \Leftrightarrow \{T_{21}\} = -\{T_{12}\}$	

1.VI.1.c.vi Théorème de superposition

L'application du PFS conduit à l'obtention d'un système linéaire permettant de déterminer des inconnues statiques de liaisons. Si plusieurs chargements s'appliquent sur un mécanisme, on peut appliquer autant de PFS qu'il y a de chargements et sommer les solutions obtenues à chaque résolution.

1.VI.1.c.vii Pièce soumise à deux glisseurs

Un glisseur est une action mécanique représentée par un torseur glisseur. Un torseur glisseur st un torseur dont le moment s'annule en au moins un point

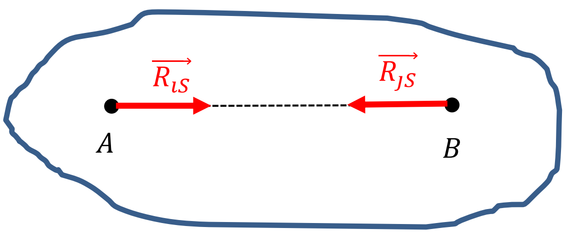
Si un solide n'est soumis qu'à deux glisseurs de moments nuls respectivement en A et B, leurs résultantes sont opposées, de même norme et colinéaires portées par (AB)

Démonstration : Soient deux glisseurs représentant des actions mécaniques sur un solide S. On suppose que l'un des glisseurs possède un moment nul en un point A (force passant par A) et que l'autre possède un moment nul en un point B (force passant par B).

D'après le PFS : $\{T_{i\to S}\} + \{T_{j\to S}\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{iS}} \\ 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{jS}} \\ 0 \end{Bmatrix}_B = \{0\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{iS}} \\ 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{jS}} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{jS}} \end{Bmatrix}_A = \{0\}$. On a

donc : $\begin{cases} \overrightarrow{R_{iS}} + \overrightarrow{R_{jS}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{jS}} = \vec{0} \end{cases}$, soit :

- $\overrightarrow{R_{iS}} = -\overrightarrow{R_{jS}}$: Résultantes opposées de même norme
- $\overrightarrow{R_{jS}}$ parallèle à $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{R_{iS}}$ et $\overrightarrow{R_{jS}}$ parallèles à $\overrightarrow{AB}$

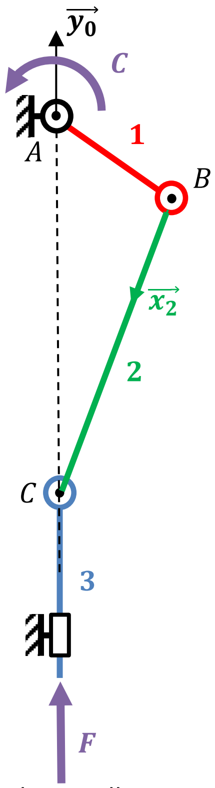


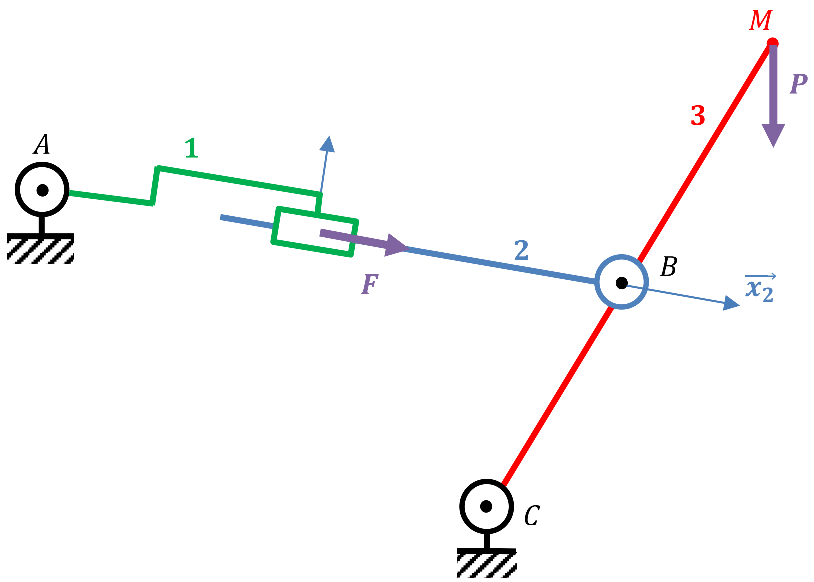
1.VI.1.c.viii Stratégie d'isolement

Par stratégie d'isolement, on entend l'application réduite (TRS ou TMS en un point et sur un axe) du PFS sur certaines pièces ou groupes de pièces pour tr**ouver rapidement la relation entre efforts entrée/sortie**. Il faut avoir un peu d'aisance en statique pour réussir à proposer des stratégies par soi-même. On retiendra les deux principes suivants :

- On cherche d'abord à isoler une pièce ou un ensemble de pièces entre deux pivots (en plan) ou deux rotules (en 3D) et soumises à aucune action mécanique autre que ces deux liaisons. On propose alors une force dont la direction est connue puisqu'elle est parallèle à la droite liant les centres des deux liaisons concernées
- On cherche ensuite avec intuition à appliquer le PFS en résultante sur un axe ou en moment en un point et sur un axe afin d'établir des relations entres les actions recherchées.

Exemples :





Exemple de gauche : Bielle-Manivelle

- Isoler 2 : Pièce « soumise à deux glisseurs », action suivant BC. On pose $\overrightarrow{R_{12}} = R_{12}\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{R_{32}} = R_{32}\overrightarrow{x_2}$. On a $R_{12} = R_{23}$
- Isoler 3 : Le TRS sur $\overrightarrow{y_0}$ donne la relation entre F et R_{23}, soit entre F et R_{12}
- Isoler 1 : Le TMS en A sur $\overrightarrow{z_0}$ donne la relation entre C et R_{12}, donc entre C et F

Exemple de droite : Maxpid

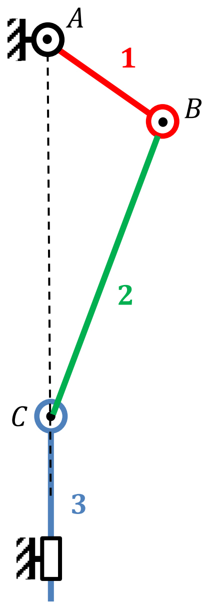
- Isoler 1+2 : Ensemble de pièces « soumises à deux glisseurs », action suivant AB. On pose $\overrightarrow{R_{23}} = R_{23}\overrightarrow{x_2}$.
- Isoler 2 : Le TRS sur $\overrightarrow{x_2}$ permet de dire que $F = R_{23}$
- Isoler 3 : Le TMS en C sur $\overrightarrow{z_0}$ donne la relation entre P et R_{23}, donc entre P et F

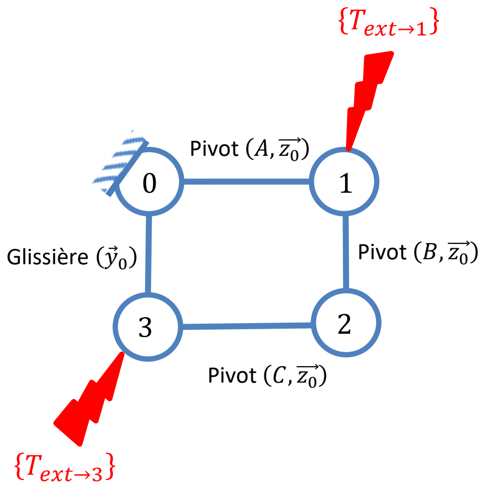
1.VI.1.d PFS et chaînes ouvertes/fermées

Voyons maintenant les stratégies d'isolement à appliquer pour résoudre les mécanismes en statique.

1.VI.1.d.i Chaînes fermées

Reprenons l'exemple du système bielle/manivelle :





Pour trouver l'action dans la liaison L_{01} par exemple

- En isolant la pièce 1, on aura besoin de l'action dans la liaison L_{21} pour trouver celle dans L_{01}
- En isolant les pièces 1+2, on aura besoin de l'action dans la liaison L_{32} pour trouver celle dans L_{01}
- En isolant les pièces 1+2+3, on aura besoin de l'action dans la liaison L_{03} pour trouver celle dans L_{01}

On voit qu'il ne sera pas possible de la trouver directement, il est en fait nécessaire de déterminer les actions dans toutes les liaisons pour avoir l'action recherchée. Pour cela, il est obligatoire d'effectuer autant d'isolements qu'il n'y a de pièces hormis le bâti.

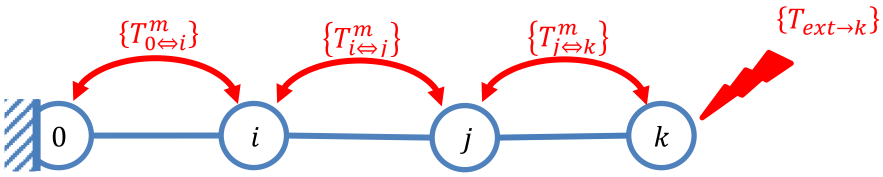
Il faut donc procéder à 3 isolements. Dans ce genre de systèmes, bien qu'il soit possible par exemple d'isoler 1, puis 1+2, puis 1+2+3, on procède souvent à l'isolement de chacune des pièces successivement.

Pièce isolée	Pièce 1	Pièce 2	Pièce 3
Actions extérieures	$\{T_{ext\to 1}\}$ $\{T_{0\to 1}\}$ $\{T_{2\to 1}\}$	$\{T_{1\to 2}\}$ $\{T_{3\to 2}\}$	$\{T_{ext\to 3}\}$ $\{T_{0\to 3}\}$ $\{T_{2\to 3}\}$

On obtiendra alors un système d'équations permettant à la fois de trouver les actions dans toutes les liaisons en fonction des actions extérieures et les relations éventuelles entre ces actions extérieures.

1.VI.1.d.ii Chaîne ouverte

Soit le système représenté par le graphe des liaisons suivant :



Connaissant l'action extérieure sur la pièce k $\{T_{ext \rightarrow k}\}$, on souhaite par exemple déterminer l'action dans la liaison L_{0i}.

Méthode 1 : On effectue les isolements successifs de chacune des pièces. Pour chacune, on a alors une relation entre l'action « à gauche » et l'action « à droite » :

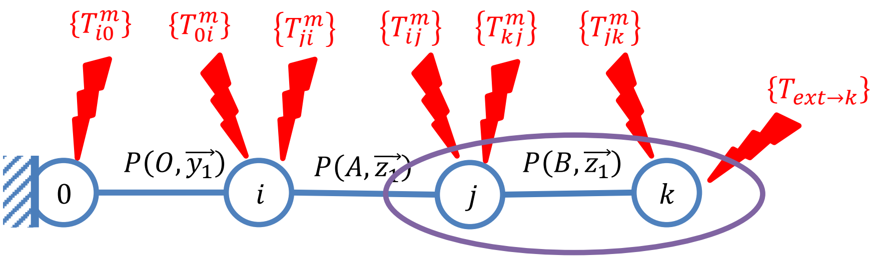
- L'isolement de la pièce k donne l'action $\{T_{jk}\}$ en fonction de $\{T_{ext \rightarrow k}\}$
- L'isolement de la pièce j donne l'action $\{T_{ij}\}$ en fonction de $\{T_{jk}\}$ et donc de $\{T_{ext \rightarrow k}\}$
- L'isolement de la pièce i donne l'action $\{T_{0i}\}$ en fonction de $\{T_{ij}\}$ et donc de $\{T_{ext \rightarrow k}\}$

Ainsi, pour obtenir l'action par exemple $\{T_{0i}\}$, il faut déterminer les actions dans les autres liaisons.

Méthode 2 : On isole un ensemble de solides. En effet, dans les systèmes en chaîne ouverte, il est intéressant d'isoler un ensemble de solides pour trouver directement les actions recherchées sans déterminer les actions dans d'autres liaisons.

- Le seul isolement i+j+k donne l'action $\{T_{0i}\}$
- Le seul isolement j+k donne l'action $\{T_{ij}\}$
- Le seul isolement k donne l'action $\{T_{jk}\}$

Remarque : Voyons la différence de modélisation de la présence éventuelle d'interactions sur l'isolement de plusieurs solides.



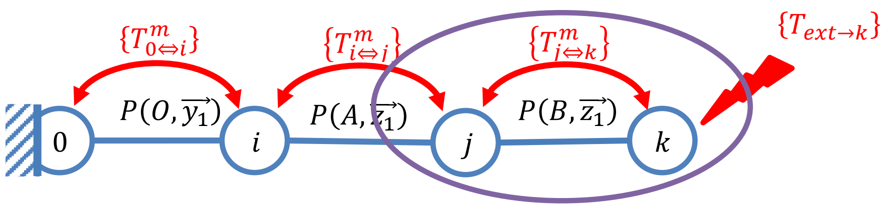
Bilan des actions sur j+k

$\{T_{i \rightarrow j}\}$

$\{T_{ij}^m\}$

$\{T_{kj}^m\} + \{T_{jk}^m\} = \{0\}!$

$\{T_{ext \rightarrow k}\}$



Bilan des actions sur j+k

$\{T_{i \rightarrow j}\}$

$\{T_{ij}^m\}$

$\{T_{ext \rightarrow k}\}$

On voit bien l'avantage de représenter les interactions extérieures par des doubles flèches afin de ne pas les prendre en compte dans les isolements de plusieurs pièces lorsqu'elles font partie de l'isolement puisqu'elles s'annulent. Ce principe est le même pour une chaîne fermée mais en général, dans ce cas, l'isolement de plusieurs solides n'est pas appliqué.

1.VI.1.e Système linéaire obtenu

1.VI.1.e.i Isolements

Pour résoudre entièrement un mécanisme, ie déterminer toutes les inconnues statiques des liaisons présentes, il faut effectuer autant d'isolements qu'il y a de solides sans compter le bâti (le bâti est capable de reprendre des efforts infinis) et leur appliquer le PFS. Soit P du nombre de pièces du mécanisme, bâti compris.

$$\boxed{\text{Il faut effectuer } (P-1) \text{ isolements}}$$

L'idée la plus évidente consiste à isoler chacune des $(P-1)$ pièces du mécanisme, d'écrire les systèmes d'équations correspondant, puis de les résoudre.

En réalité, on pourra effectuer $(P-1)$ isolements contenant chacun une ou plusieurs pièces du mécanisme, l'important étant de réaliser des choix conduisant à obtenir $(P-1)$ systèmes d'équations indépendants. Ce choix n'est pas évident et nécessite un peu d'expérience.

1.VI.1.e.ii Equations – Inconnues

• Mécanismes 3D

L'application du principe fondamental de la statique au $P-1$ pièces d'un mécanisme (il ne faut pas isoler le bâti) apporte, pour chaque solide, 2 équations vectorielles, soit 6 équations scalaires.

On note :

- E_s le nombre d'équations statiques : $E_s = 6(P-1)$
- I_s le nombre d'inconnues statiques. I_s s'obtient en comptant le nombre d'inconnues statiques indépendantes des torseurs des n liaisons : $I_s = \sum_{i=1}^{n} I_s^i$, I_s^i étant le nombre d'inconnues statiques de la liaison i du mécanisme.

• Mécanismes plans

- 3 des équations de chaque isolement sont du type $0 = 0$. On peut donc définir le nombre d'équations en plan : $E_s^{2D} = 3(P-1)$
- La mobilité peut, mais c'est rare, diminuer (mobilité interne qui disparaît par exemple), on définit donc m^{2D}
- Contrairement à la cinématique, les nombres d'inconnues statiques des liaisons encastrement, pivot et glissière changent. Seul le nombre d'inconnues statiques de la liaison ponctuelle est inchangé

I_s	3D	2D
Encastrement	6	3
Pivot	5	2
Glissière	5	2
Ponctuelle	1	1

• Remarque importante

Attention, des actions mécaniques extérieures n'étant pas des actions de liaisons (efforts, moments d'entrée et sortie) NE DOIVENT PAS être comptées comme des inconnues statiques. Malgré le fait que l'on puisse « dire en début de sujet » que l'action mécanique d'entrée est connus et que l'on veut la relation entre l'action mécanique de sortie et l'action mécanique d'entrée, on doit supposer ces actions comme connues car extérieures. On montrera alors qu'il y a une relation entre elles, mais ce ne sont pas des actions de liaisons.

Ne pas inclure des actions extérieures entrée/sortie dans I_s

1.VI.1.e.iii Rang – Mobilité - Hyperstatisme

Le système d'équations obtenu est un système linéaire qui présente un rang noté r_s.

Le nombre d'inconnues statiques indéterminées par la résolution du système linéaire obtenu correspond au degré d'hyperstatisme h du mécanisme, c'est-à-dire au nombre d'inconnues statiques indéterminées qu'il faudrait imposer afin de déterminer les actions de liaison du mécanisme.

$$h = I_s - r_s$$

Le nombre d'équations inutiles du système statique correspond à la mobilité m du mécanisme.

$$m = E_s - r_s$$

On a :

$$\boxed{h = m + I_s - E_s}$$

Si l'on trouve un degré d'hyperstatisme négatif (on parle parfois d'hypostatisme dans certaines spécialités), c'est qu'il reste des mobilités qui n'ont pas été trouvées.

On peut définir le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme plan en plan :

$$h^{2D} = m^{2D} + {I_s}^{2D} - {E_s}^{2D}$$

Remarque sur le lien entre 2D et 3D : En mécanismes plans (3 équations $0 = 0$), on trouvera toujours un degré d'hyperstatisme 3D supérieur ou égal à 3 : $h^{3D} = 3 + h^{2D}$, avec h^{3D} le degré d'hyperstatisme du modèle plan en 3D. Lorsque le mécanisme ne présente que des pivots et des glissières, le modèle plan est identique au modèle 3D. Mais dès qu'il y a des ponctuelles, il faut faire attention à l'interprétation de ces équations. En effet, une ponctuelle 2D présente 1 inconnue statique en plan, une ponctuelle 3D a toujours 1 inconnue statique en 3D, mais le modèle 2D d'une ponctuelle présente 4 inconnues statiques en 3D car c'est une liaison qui ne peut se déplacer hors plan. Il faut donc faire attention aux raisons qui ont poussé à proposer une ponctuelle plane dans un modèle plan car elle peut provenir d'une ponctuelle 3D comme de l'association en série (par exemple) d'une glissière et d'une pivot. On voit que le modèle 3D associé à ces 2 solutions n'est pas le même et parler de h^{3D} peut porter à confusion, parle-t-on du degré d'hyperstatisme du modèle plan mis en 3D, ou du modèle 3D réel dont la modélisation plane a induit une réduction des liaisons. La formule $h^{3D} = 3 + h^{2D}$ est donc toujours juste lorsqu'un mécanisme est réalisé en 2D et en 3D uniquement des pivots et glissières, et soumis à interprétation lorsqu'il y a des ponctuelles en plus dans le modèle 2D.

1.VI.1.e.iv *Solvabilité statique d'un mécanisme*

Concrètement, un mécanisme isostatique $(h = 0)$ sera entièrement résolu en statique alors qu'un mécanisme hyperstatique $(h > 0)$ ne permettra pas de déterminer toutes les inconnues de liaisons.

$h = 0$ $\Rightarrow$ Mécanismes statiquement solvable

$h > 0$ $\Rightarrow$ Mécanismes statiquement NON solvable

1.VI.1.f Définition des torseurs au départ

En statique, il y aura presque toujours plusieurs solides à étudier. Et ces solides seront quasiment toujours en interaction les uns avec les autres. Prenons pour l'exemple deux solides i et j.

La résolution statique du problème nous conduira à réaliser un premier isolement, prenons i.

Parmi les actions mécaniques extérieures sur i, on trouvera le torseur $\{T_{j/i}\}$. On va alors probablement le définir en un point et dans une base arrangeants pour traiter ce premier isolement.

Ensuite, il faudra isoler j, et on devra à nouveau utiliser le torseur $\{T_{i/j}\} = -\{T_{j/i}\}$. Et c'est ici qu'il y a un gros risque d'erreurs. Souvent, on oublie que ce torseur a déjà été utilisé et on se permet alors de le redéfinir en un point et dans une base qui pourraient être différents des choix faits pour l'isolement de i, ce qui est une erreur. Attention, il faut reprendre le torseur qui a été défini lors du premier isolement, et le changer de point et de base si nécessaire.

Une solution intéressante pour éviter cette erreur consiste à créer un tableau avant d'isoler chacune des pièces du mécanisme, dans lequel on écrit chacun des torseurs des liaisons du système sans forcément choisir de point et de base. Puis, lors de la réalisation de chaque isolement, on vient piocher les torseurs dans ce tableau, en les complétant alors avec les choix effectués si ce n'est déjà fait.

1.VI.1.g Mise en œuvre pour chaque isolement

On écrit le PFS pour chaque isolement :

$$\{T_{1/S}\} + \{T_{2/S}\} + \cdots + \{T_{n/S}\} = \{0\}$$

On écrit les différents torseurs des liaisons en leurs points caractéristiques :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1/S}} \\ \overrightarrow{M_A}\left(\overrightarrow{R_{1/S}}\right) \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2/S}} \\ \overrightarrow{M_B}\left(\overrightarrow{R_{2/S}}\right) \end{Bmatrix}_B + \cdots + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{n/S}} \\ \overrightarrow{M_C}\left(\overrightarrow{R_{n/S}}\right) \end{Bmatrix}_C = \{0\}$$

Remarque : on pourra définir ces torseurs en notation verticale car c'est une notation simple à retenir, mais nous passerons tout de suite après à une notation vectorielle lors de l'expression de ceux-ci au même point.

On déplace alors tous les torseurs au même point en utilisant la formule de Varignon :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1/S}} \\ \overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{1/S}}\right) \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2/S}} \\ \overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{2/S}}\right) \end{Bmatrix}_M + \cdots + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{n/S}} \\ \overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{n/S}}\right) \end{Bmatrix}_M = \{0\}$$

On obtient alors 2 équations vectorielles :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{1/S}} + \overrightarrow{R_{2/S}} + \cdots + \overrightarrow{R_{n/S}} = \vec{0} \quad \left(\overrightarrow{Eq1} = \vec{0}\right) \\ \overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{1/S}}\right) + \overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{2/S}}\right) + \cdots + \overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{R_{n/S}}\right) = \vec{0} \quad \left(\overrightarrow{Eq2} = \vec{0}\right) \end{cases}$$

Il reste alors à obtenir 6 équations scalaires en projection dans une ou deux bases $\mathfrak{B}_m\left(\overrightarrow{x_m}, \overrightarrow{y_m}, \overrightarrow{z_m}\right)$ $\mathfrak{B}_n\left(\overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{y_n}, \overrightarrow{z_n}\right)$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{x_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{y_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{z_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{x_n} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{y_n} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{z_n} = 0 \end{cases}$$

Remarques :

- On prend généralement les même bases ($\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}_n$), mais ce n'est pas une obligation

- Il est obligatoire de projeter un MÊME vecteur sur LES TROIS vecteurs de la MÊME base afin de résoudre complètement un problème (relation d'équivalence)

- il peut être possible, en projetant une équation sur un seul vecteur, puis sur un seul autre, pas forcément orthogonal au premier, d'obtenir des relations recherchées, puisqu'elles sont vraies quelle que soit la projection, suffisantes pour résoudre le problème. Toutefois, il n'y aura alors pas obligatoirement équivalence entre le système d'équation et la solution obtenue. On ne recherche pas forcément toutes les solutions !

- Le programme insiste sur le fait que vous devez être en mesure de choisir les théorèmes et projections suffisantes afin de déterminer les relations recherchées. Il n'est donc pas forcément obligatoire d'obtenir 6 équations par isolement ! Toutefois, les obtenir conduit forcément au résultat

- En mécanismes plans dont les rotations sont portées par le même vecteur $\vec{z}$, on aura uniquement 3 équations scalaires en projection dans une base $\mathfrak{B}_m(\overrightarrow{x_m},\overrightarrow{y_m},\overrightarrow{z_m})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{x_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{y_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{z_m} = 0 \end{cases}$$

1.VI.1.h Choix de points et bases

Lors de la mise en œuvre du PFS, on doit choisir

- un point où exprimer tous les torseurs afin de les sommer
- une base afin de projeter les deux équations vectorielles et obtenir 6 équations scalaires

Ce choix doit être fait pour chaque solide, mais ne doit pas forcément être le même pour chacun.

L'objectif peut être double :

- simplifier au plus les calculs afin d'obtenir des équations les plus simples possible
- obtenir la relation voulue au plus vite

1.VI.1.h.i Préliminaires – Choix initiaux

Nous ne détaillerons pas à nouveau ici ce que nous avons vu en cinématique, mais rappelons la conclusion :

Bien qu'il y ait plusieurs choix de bases et de points possibles pour la définition d'un torseur, il faut

- regarder ce qui est demandé dans l'exercice
- effectuer un choix car les composantes sont alors définies pour le point et la base choisis (ne jamais laisser $\forall P$ par exemple)
- avoir conscience que de ces choix dépendent les valeurs numériques finales
  - des composantes de moment pour les différents choix de points
  - de composantes de résultante et de moment pour les choix des bases

Par ailleurs, lorsqu'il y a plusieurs pièces à isoler, étudier le problème de chaque solide afin d'effectuer un choix, et définir les torseurs statiques des liaisons avant d'effectuer les isolements, et les utiliser pour chaque isolement

1.VI.1.h.ii Choix du point

Comme on l'a vu en cinématique, on choisira en général un point où, parmi tous les torseurs statiques à sommer, il y a le plus de composantes en résultante. Ce choix permettra de simplifier l'équation vectorielle de moment. Cela n'est pas nécessaire dans le cas particulier où un des torseurs présente une résultante de plus que les autres et si le changement de point doit se faire dans la direction de cette résultante, car le produit vectoriel de la formule de Varignon n'induira pas de nouveaux termes.

Remarque : Lorsque l'on choisit un point, on peut faire disparaître des équations en moment une résultante mécanique qui s'applique en ce point. Même si cette résultante est toujours bien présente dans les équations en résultante (on pourra la faire intervenir dans les résultats), la résolution des équations en moment ne la fera pas apparaitre. Or, si l'on souhaite des résultats en fonction de cette action, où même si on cherche cette action, il peut être plus simple et rapide de l'avoir aussi dans les équations en moment. Le choix du point va donc pouvoir influencer la résolution. Mais les résultats finaux seront eux, bien entendu, indifférents.

1.VI.1.h.iii Choix de la base

D'une manière générale, la base sera choisie afin d'obtenir les équations les plus simples possible. Ainsi, on projettera dans la base dans laquelle interviennent le plus de termes.

Exemple : soit l'équation vectorielle suivante obtenue dans un mécanisme plan :

$$a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c\overrightarrow{x_2} = \vec{0}$$

Attention, si deux termes sont en $\overrightarrow{x_2}$ par exemple, ils ne comptent que pour un seul terme après factorisation…

Le choix de la base 1 fait apparaître deux projections de $\overrightarrow{x_2}$:

$$\begin{cases} a + c\cos\theta_{21} = 0 \\ b + c\sin\theta_{21} = 0 \end{cases}$$

Le choix de la base 2 fait apparaître 4 projections de $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$:

$$\begin{cases} a\cos\theta_{12} - b\sin\theta_{12} + c = 0 \\ a\sin\theta_{12} + b\cos\theta_{12} = 0 \end{cases}$$

On choisira donc la base 1.

Il est parfois possible, en choisissant bien la base, d'obtenir immédiatement la relation entrée sortie lorsque c'est le seul résultat voulu.

1.VI.1.i Résolution

Après avoir écrit les 6 équations scalaires par isolement (3 en mécanismes plans), on regroupe l'ensemble des équations et on résout le système.

1.VII. Liaisons équivalentes

Nous nous limiterons ici à la détermination de liaisons équivalentes par la méthode **statique**. Nous avons vu qu'une démarche semblable s'applique avec une méthode cinématique.

1.VII.1 Préliminaires

Rappelons ici succinctement les différents points abordés et illustrés dans le paragraphe « Liaisons équivalentes » « Préliminaires » du cours de cinématique.

1.VII.1.a Reconnaissance d'une liaison

Pour reconnaître une liaison usuelle, il faut :

- obtenir la forme canonique du torseur associé. La forme canonique d'un torseur est la forme du torseur lorsque son moment est minimum (choix du point) et ses composantes ont des expressions les plus simples (le plus de 0 possibles) (choix de la base). Par forme on entend composantes nulles ou non nulles et places de celles-ci dans le torseur
- N'obtenir que des inconnues indépendantes (sauf hélicoïdale)

On pourra alors vérifier que le torseur obtenu correspond **ou non** à une liaison usuelle. Lorsque l'on obtient le torseur équivalent final, il est composé soit

- d'inconnues indépendantes permettant ou non de reconnaître une liaison usuelle selon sa forme
- d'inconnues dépendantes, ne pouvant correspondre à une liaison normalisée (sauf hélicoïdale)

La forme et l'indépendance des inconnues d'un torseur dépendent de deux choix :

- Le point d'expression du torseur équivalent
- La base d'expression du torseur équivalent

Remarque : Une liaison équivalente peut être une liaison normalisée dans une base qui bouge avec le temps et en un point qui peut ne pas être fixe dans l'espace. On peut par exemple trouver une liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$ où le point O n'est pas fixe au cours du temps dans la base 0.

1.VII.1.b Méthode ce choix du point

Soit P le point d'expression des torseurs des liaisons composant la liaison équivalente recherchée :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, P sera choisi sur son lieu d'invariance
- P sera choisi, autant que possible, sur un lieu d'invariance commun des différents torseurs des liaisons composant la liaison équivalente afin de minimiser le travail de déplacement des torseurs en P.
- Si des torseurs doivent être déplacés, et si différents points peuvent convenir, P sera le point induisant le moins de termes en moment, c'est-à-dire que les torseurs à déplacer auront généralement le moins possible de composantes de résultante (P, Q, R). Autrement dit, il faut choisir l'un des points où la **résultante** du torseur de la liaison associée a **le plus d'inconnues**
  Remarque : Cela n'est pas nécessaire dans le cas où parmi les points possibles, le changement de point s'effectue suivant l'axe de la résultante supplémentaire (s'il n'y en a qu'une), car le produit vectoriel de la formule de Varignon n'induira pas de nouveaux termes

1.VII.1.c Méthode de choix de la base

Pour déterminer la base d'expression du torseur équivalent, il faut :

- Essayer de reconnaître la liaison recherchée parmi les liaisons usuelles
- Si la liaison recherchée est une liaison usuelle, $\mathfrak{B}$ sera une base contenant au minimum les vecteurs proposés dans le tableau des liaisons (ex : $\mathfrak{B}(\vec{x}, -, -)$ → choix d'une base quelconque contenant le vecteur $\vec{x}$, quelle que soit sa position)
- D'une manière générale, choisir une base contenant à la fois les éléments géométriques des liaisons présentes et les éventuels vecteurs qui vont servir à la formule de Varignon

A.VII.2 Analyse

A.VII.2.a Préliminaires

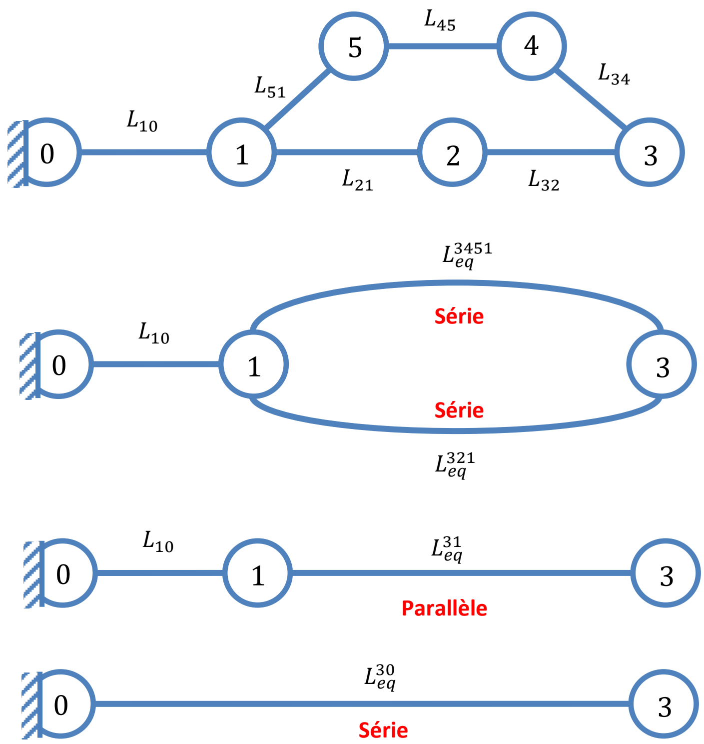
Face à un plan ou une vue 3D d'un mécanisme :

- Analyser les surfaces en contact et proposer les liaisons usuelles correspondantes
- Proposer un modèle cinématique du système : schéma d'architecture
- Etablir son graphe des liaisons
- Identifier si les liaisons étudiées sont en série ou en parallèle

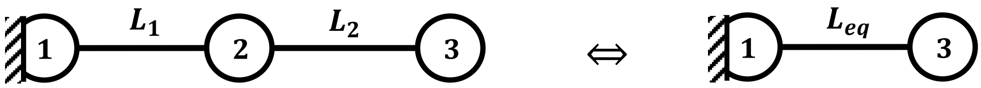
1.VII.2.b Décomposition du problème

Lorsque l'étude porte sur des liaisons à la fois en série et en parallèle, et ou s'il y a plus de 2 liaisons à étudier, il est possible, voire conseillé, de décomposer le problème en somme de problèmes simples contenant quelques liaisons en menant toute la démarche à chaque étape.

Exemple :



A.VII.2.c Liaisons en série



Lorsque deux pièces sont reliées par plusieurs liaisons successives, la liaison équivalente entre ces deux pièces possède un degré de mobilité supérieur ou égale au maximum des degrés de mobilité de chaque liaison intermédiaire.

Méthode :

- Choisir point P (Liaison reconnue ? Point commun ? Quel déplacement ?)
- Choix de la base $\mathfrak{B}$ (Liaison reconnue ? Base commune ? Vecteur de déplacement ?)
- Exprimer les n torseurs statiques en P dans $\mathfrak{B}$ des liaisons $\{\mathcal{T}_{n/n-1}\}, \{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\}$ ... $\{\mathcal{T}_{2/1}\}$
- Poser le torseur générique de la liaison équivalente $\{\mathcal{T}_{n/1}\}$ comportant les 6 inconnues en P dans $\mathfrak{B}$
- Par application du PFS à chaque solide, on a :

Solide	PFS	Déduction
2	$\{\mathcal{T}_{1/2}\} + \{\mathcal{T}_{3/2}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \{\mathcal{T}_{3/2}\}$
i	$\{\mathcal{T}_{i-1/i}\} + \{\mathcal{T}_{i+1/i}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{i+1/i}\} = \{\mathcal{T}_{i/i-1}\}$
n	$\{\mathcal{T}_{n-1/n}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{ext\to n}\}$
n via L_{eq}	$\{\mathcal{T}_{1/n}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{ext\to n}\}$

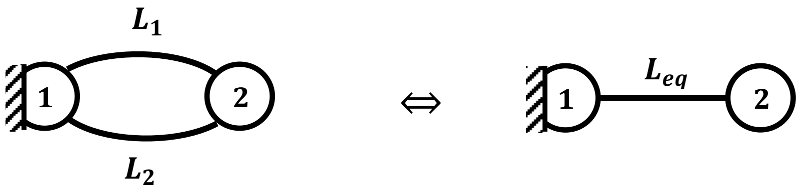
Finalement, on trouve :

$$\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \{\mathcal{T}_{n/n-1}\} = \{\mathcal{T}_{n-1/n-2}\} = \cdots = \{\mathcal{T}_{2/1}\}$$

Attention à l'ordre des indices

- Exprimer $\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{n/1} & L_{n/1} \\ Y_{n/1} & M_{n/1} \\ Z_{n/1} & N_{n/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues statiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

A.VII.2.d Liaisons en parallèle



Des liaisons en parallèle permettent généralement de répartir les efforts que chacune va subir dans un contexte de dimensionnement de mécanismes. L'ensemble des plusieurs liaisons entre deux pièces réalise une nouvelle liaison à mobilité inférieure ou égale à la mobilité de chacune des liaisons.

Méthode :

- Choisir point P (Liaison reconnue ? Point commun ? Quel déplacement ?)
- Choix de la base $\mathfrak{B}$ (Liaison reconnue ? Base commune ? Vecteur de déplacement ?)
- Exprimer les n torseurs statiques en P dans $\mathfrak{B}$ de chaque liaison en prenant soin de différencier leur notation, en utilisant un numéro pour chacune : $\{\mathcal{T}_{2/1}{}^{1}\}, \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{2}\}$ … $\{\mathcal{T}_{2/1}{}^{n}\}$.
- Par application du PFS, on a :

Solide	Liaison	PFS	Déduction
2	n	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} + \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_{1/2}{}^{i}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_{2/1}{}^{i}\}$
2	L_{eq}	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} + \{\mathcal{T}_{1/2}\} = \{0\}$	$\{\mathcal{T}_{ext\to n}\} = \{\mathcal{T}_{2/1}\}$

$$\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \sum_{i=1}^{n}\{\mathcal{T}_{2/1}{}^{i}\} = \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{1}\} + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{2}\} + \cdots + \{\mathcal{T}_{2/1}{}^{n}\}$$

Attention à l'ordre des indices

Indicer les formules de déplacement : $\overrightarrow{M_M^k}\left(\overrightarrow{R_{ji}^k}\right) = \overrightarrow{M_N^k}\left(\overrightarrow{R_{ji}^k}\right) + \overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{R_{ji}^k}$

- Exprimer $\{\mathcal{T}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ en fonction de ses inconnues statiques indépendantes non nulles
- S'il y a présence d'inconnues dépendantes :
  - Dans des mêmes composantes de la résultante et du moment, tenter un changement de base
  - Entre résultante et moment, tenter un changement de point
- Identifier, si possible, la liaison équivalente parmi les liaisons usuelles

1.VIII. Transformation du mouvement

Reprenons les différents mécanismes de transformation du mouvement que nous avons vu dans le chapitre de cinématique.

On supposera ici que toutes les liaisons sont parfaites. Les relations statiques trouvées entre action mécanique d'entrée et action mécanique de sortie ne seront valables que si les liaisons sont parfaites. Si les liaisons sont imparfaites, les relations cinématiques restent parfaitement valables, mais les relations statiques ne le seront plus, l'action de sortie étant toujours légèrement plus faible que l'action théorique lorsque les liaisons sont supposées parfaites.

Attention, dans tous les mécanismes de transformation du mouvement, il faut veiller à définir les signes des efforts entrant et sortant. La convention généralement choisie, et elle le sera dans la suite, est de considérer une entrée en effort ou couple E_1 de l'extérieur sur la pièce d'entrée, et un effort ou couple transmis de la pièce 2 vers l'extérieur E_2. Ainsi, la pièce 1 est soumise à E_1, la pièce 2 à $-E_2$.

1.VIII.1 Transformation Rotation/Rotation

Nous nous intéressons ici aux transformations de mouvement présentant un rapport $k_{s/e}$ constant :

$$\omega_{s/0} = k_{s/e}\omega_{e/0} \quad ; \quad V_{s/0} = k_{s/e}\omega_{e/0} \quad ; \quad V_{s/0} = k_{s/e}V_{e/0}$$

1.VIII.1.a Solution Engrenages

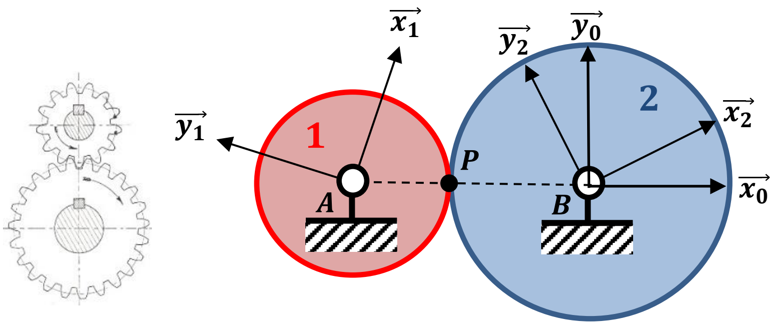
• **<u>Contact extérieur</u>**

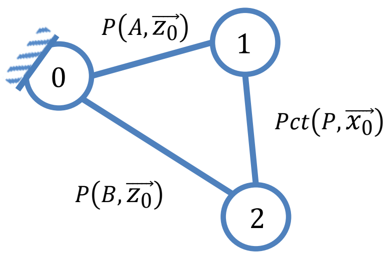
Soit le modèle suivant :

$$\|\overrightarrow{AP}\| = R_1 \; ; \; \|\overrightarrow{PB}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = (\widehat{\vec{x_0},\vec{x_2}}) = (\widehat{\vec{y_0},\vec{y_2}})$$

$$\theta_{10} = (\widehat{\vec{x_0},\vec{x_1}}) = (\widehat{\vec{y_0},\vec{y_1}})$$





On suppose qu'il y a roulement sans glissement entre 1 et 2 en P.

Appelons $\vec{C_1} = C_1\vec{z_0}$ le couple d'entrée, de l'extérieur sur la pièce 1 selon l'axe $(A,\vec{z_0})$ et $\vec{C_2} = C_2\vec{z_0}$ le couple de sortie, transmis par la pièce 2 à la sortie selon l'axe $(B,\vec{z_0})$

On note $\{T_{21}\} = \begin{Bmatrix} R_x^{21}\vec{x_0} + R_y^{21}\vec{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P$ l'action de la roue dentée 2 sur la roue dentée 1.

On se place en mécanisme plan.

Equilibre pièce 1	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_1\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} R_x^{21}\overrightarrow{x_0} + R_y^{21}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P = \{0\}$ $\overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{R_{21}}) = \overrightarrow{M_P}(\overrightarrow{R_{21}}) + \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{R_{21}} = R_1\overrightarrow{x_0} \wedge (R_x^{21}\overrightarrow{x_0} + R_y^{21}\overrightarrow{y_0}) = R_1R_y^{21}\overrightarrow{z_0}$ $\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_1\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} R_x^{21}\overrightarrow{x_0} + R_y^{21}\overrightarrow{y_0} \\ R_1R_y^{21}\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_A = \{0\}$ $\begin{cases} X_{01}\overrightarrow{x_0} + Y_{01}\overrightarrow{y_0} + R_x^{21}\overrightarrow{x_0} + R_y^{21}\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ C_1\overrightarrow{z_0} + R_1R_y^{21}\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$ Equation en moment suivant $\overrightarrow{z_0}$: $C_1 + R_1R_y^{21} = 0$
Equilibre pièce 2	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_2\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} X_{02}\overrightarrow{x_0} + Y_{02}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} R_x^{12}\overrightarrow{x_0} + R_y^{12}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P = \{0\}$ $\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_{12}}) = \overrightarrow{M_P}(\overrightarrow{R_{12}}) + \overrightarrow{BP} \wedge \overrightarrow{R_{12}} = -R_2\overrightarrow{x_0} \wedge (R_x^{12}\overrightarrow{x_0} + R_y^{12}\overrightarrow{y_0}) = -R_2R_y^{12}\overrightarrow{z_0}$ $\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_2\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} X_{02}\overrightarrow{x_0} + Y_{02}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} R_x^{12}\overrightarrow{x_0} + R_y^{12}\overrightarrow{y_0} \\ -R_2R_y^{12}\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_B = \{0\}$ $\begin{cases} X_{02}\overrightarrow{x_0} + Y_{02}\overrightarrow{y_0} + R_x^{12}\overrightarrow{x_0} + R_y^{12}\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ -C_2\overrightarrow{z_0} - R_2R_y^{12}\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$ Equation en moment suivant $\overrightarrow{z_0}$: $-C_2 - R_2R_y^{12} = 0$

Soit :

$$\begin{cases} C_1 + R_1R_y^{21} = 0 \\ C_2 + R_2R_y^{12} = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème des actions réciproques :

$$R_y^{21} = -R_y^{12}$$

Les équations en moment donnent :

$$\begin{cases} C_1 + R_1R_y^{21} = 0 \\ -C_2 - R_2R_y^{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -R_1R_y^{21} \\ C_2 = -R_2R_y^{12} = R_2R_y^{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_y^{21} = -\dfrac{C_1}{R_1} \\ R_y^{21} = \dfrac{C_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2}$$

Or :

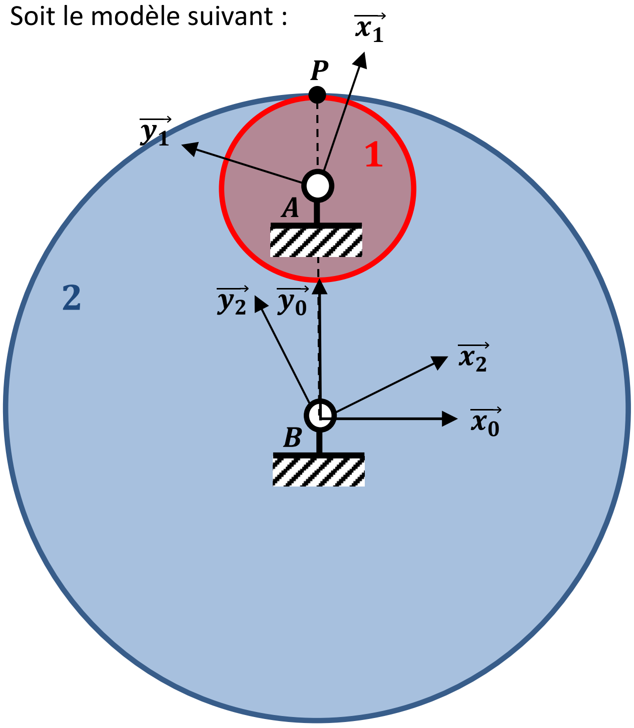
$$\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2} = k$$

Soit :

$$\boxed{\frac{C_2}{C_1} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\Omega_{10}}{\Omega_{20}} = \frac{1}{k}}$$

• **Contact intérieur**

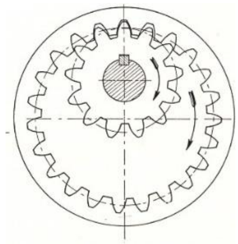
Soit le modèle suivant :

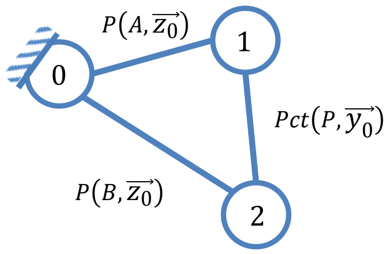


$$\|\overrightarrow{AP}\| = R_1 \; ; \; \|\overrightarrow{PB}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = (\widehat{\vec{x_0},\vec{x_2}}) = (\widehat{\vec{y_0},\vec{y_2}})$$

$$\theta_{10} = (\widehat{\vec{x_0},\vec{x_1}}) = (\widehat{\vec{y_0},\vec{y_1}})$$





Appelons $\vec{C_1} = C_1\vec{z_0}$ le couple d'entrée, de l'extérieur sur la pièce 1 selon l'axe $(A,\vec{z_0})$ et $\vec{C_2} = C_2\vec{z_0}$ le couple de sortie, transmis par la pièce 2 à la sortie selon l'axe $(B,\vec{z_0})$

Par une démonstration similaire au cas du contact extérieur, on obtient les deux équations suivantes en appliquant le TMS à chaque solide suivant $\vec{z_0}$

$$\begin{cases} C_1 - R_1R_x^{21} = 0 \\ -C_2 - R_2R_x^{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = R_1R_x^{21} \\ -C_2 = R_2R_x^{12} = -R_2R_x^{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_x^{21} = \dfrac{C_1}{R_1} \\ R_x^{21} = \dfrac{C_2}{R_2} \end{cases}$$

Or :

$$\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = k$$

Soit :

$$\boxed{\frac{C_2}{C_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\Omega_{10}}{\Omega_{20}} = \frac{1}{k}}$$

• **Train d'engrenages**

Considérons maintenant un ensemble de p engrenages en série dont les axes sont fixes dans le repère 0:

- Engrenage 1 : roues 1 et 2 – rapport $k_{2/1} = \frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}}$ – Couples C_1 et C_2
- Engrenage 2 : roues 2 et 3 – rapport $k_{3/2} = \frac{\Omega_{3/0}}{\Omega_{2/0}}$ – Couples C_2 et C_3
- …
- Engrenage p : roues p et $p+1$ – rapport $k_{p+1/p} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{p/0}}$ – Couples C_p et C_{p+1}

D'après ce que nous venons de voir, on a :

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{k_{21}} \quad ; \quad \frac{C_3}{C_2} = \frac{1}{k_{32}} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \frac{C_{p+1}}{C_p} = \frac{1}{k_{p+1/p}}$$

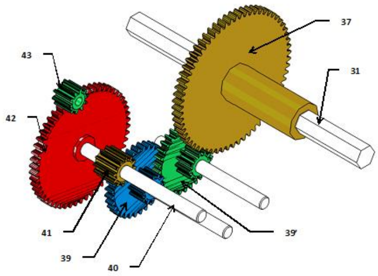
Nous avons vu en cinématique que le rapport de réduction global valait :

$$k_{p+1/1} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{10}} = \prod_{i=1}^{p} k_{i+1/i}$$

On a donc :

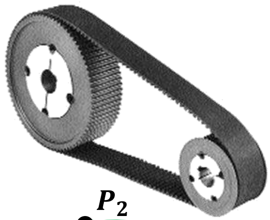
$$\frac{C_{p+1}}{C_1} = \frac{C_{p+1}}{C_p} \dots \frac{C_3}{C_2}\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{k_{p+1/p}} \dots \frac{1}{k_{32}}\frac{1}{k_{21}}$$

$$\boxed{\frac{C_{p+1}}{C_1} = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{k_{i+1/i}} = \frac{1}{k_{p1}}}$$

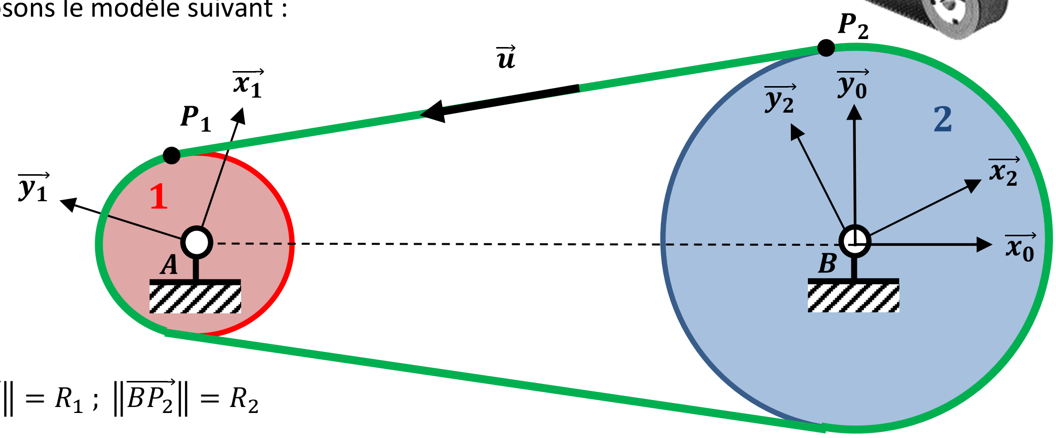


Remarque : Lorsque les liaisons sont imparfaites (programme de seconde année), les relations cinématiques, imposées par la matière, sont inchangées. Par contre, les couples et efforts transmis sont diminués

1.VIII.1.b Solution Poulie/Courroie ou Pignon/Chaîne



Proposons le modèle suivant :



$\|\overrightarrow{AP_1}\| = R_1$; $\|\overrightarrow{BP_2}\| = R_2$

$\theta_{20} = (\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_2}}) = (\widehat{\vec{y_0}, \vec{y_2}})$

$\theta_{10} = (\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_1}}) = (\widehat{\vec{y_0}, \vec{y_1}})$

Appelons $\vec{C_1} = C_1 \vec{z_0}$ le couple d'entrée, de l'extérieur sur la pièce 1 selon l'axe $(A, \vec{z_0})$ et $\vec{C_2} = C_2 \vec{z_0}$ le couple de sortie, transmis par la pièce 2 à la sortie selon l'axe $(B, \vec{z_0})$

Appelons $\vec{F_{c1}} = F_{c1} \vec{u}$ l'effort de la courroie sur la poulie 1 en P_1 et $\vec{F_{c2}} = F_{c2} \vec{u}$ l'effort de la courroie sur la poulie 2 en P_2

Supposons que la courroie se comporte comme un solide rigide entre P_1 et P_2. L'équation du TRS sur $\vec{u}$ appliqué à celle-ci donne :

$$F_{c1} = -F_{c2}$$

L'isolement de chacune des roues donne la relation suivante, en appliquant le TMS suivant $\vec{z_0}$:

$$\begin{cases} C_1 + F_{c1} R_1 = 0 \\ -C_2 + F_{c2} R_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -F_{c1} R_1 \\ C_2 = F_{c2} R_2 = -F_{c1} R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{c1} = -\dfrac{C_1}{R_1} \\ F_{c1} = -\dfrac{C_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2}$$

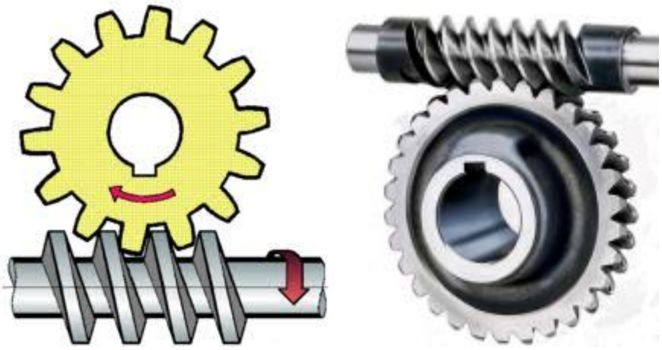
Or : $\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = k$

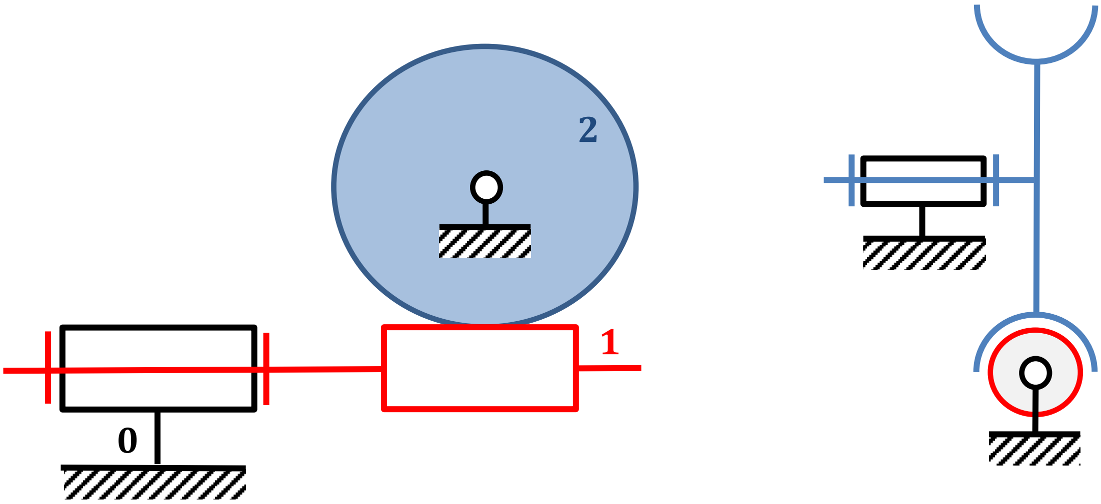
Soit :

$$\boxed{\frac{C_2}{C_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\Omega_{10}}{\Omega_{20}} = \frac{1}{k}}$$

1.VIII.1.c Solution Roue et vis sans fin

Le système de roue et vis sans fin permet d'obtenir de très faibles rapports de réduction, voire même de créer des systèmes irréversibles, c'est-à-dire que seule la vis entraîne la roue, l'inverse est impossible.





Déterminons le rapport statique au signe près (dépend des conventions choisies sur les axes des pièces, la définition des couples, et le positionnement de la roue 2).

Nous avions montré en cinématique que :

$$\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = \pm\frac{1}{Z_2} = k$$

Dans le cas du système « Roue / Vis sans fin », la démonstration de la relation entrée/sortie en statique est plus difficile à démontrer. Sans rentrer dans les détails, voici la relation entrée/sortie en couples au signe près :

$$\boxed{\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{k}}$$

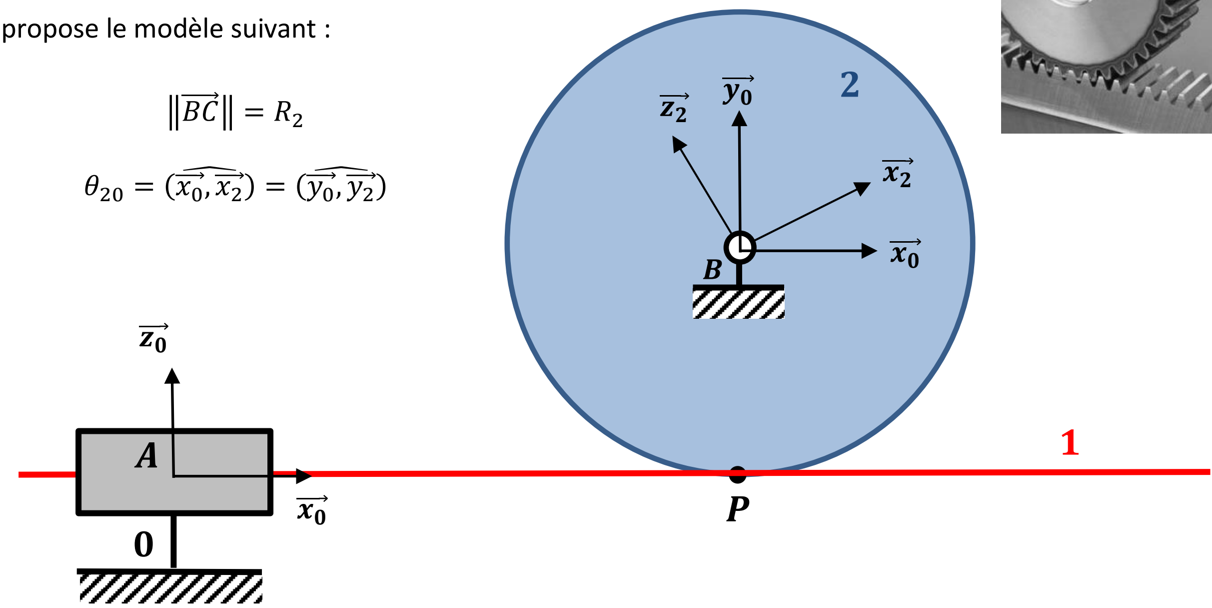
1.VIII.2 Transformation Rotation/Translation

1.VIII.2.a Solution Pignon/Crémaillère

On propose le modèle suivant :

$$\|\overrightarrow{BC}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = (\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}})$$



Appelons $\vec{F} = F\overrightarrow{x_0}$ l'effort appliqué sur la pièce 1 dans la glissière en A et $\overrightarrow{F_{21}} = F_x^{21}\overrightarrow{x_0} + F_y^{21}\overrightarrow{y_0}$ l'effort de la du pignon 2 sur la crémaillère 1 en P_2

Appelons $\overrightarrow{C_2} = C_2\overrightarrow{z_0}$ le couple de sortie, transmis par la pièce 2 à la sortie selon l'axe $(B,\overrightarrow{z_0})$

L'équation du TRS sur l'axe $\overrightarrow{x_0}$ appliqué au solide 1 donne :

$$F = -F_x^{21} = F_x^{12}$$

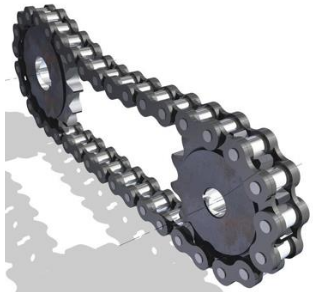
L'équation du TMS sur $\overrightarrow{z_0}$ appliqué au solide 2 donne :

$$-C_2 + R_2F_x^{12} = 0$$

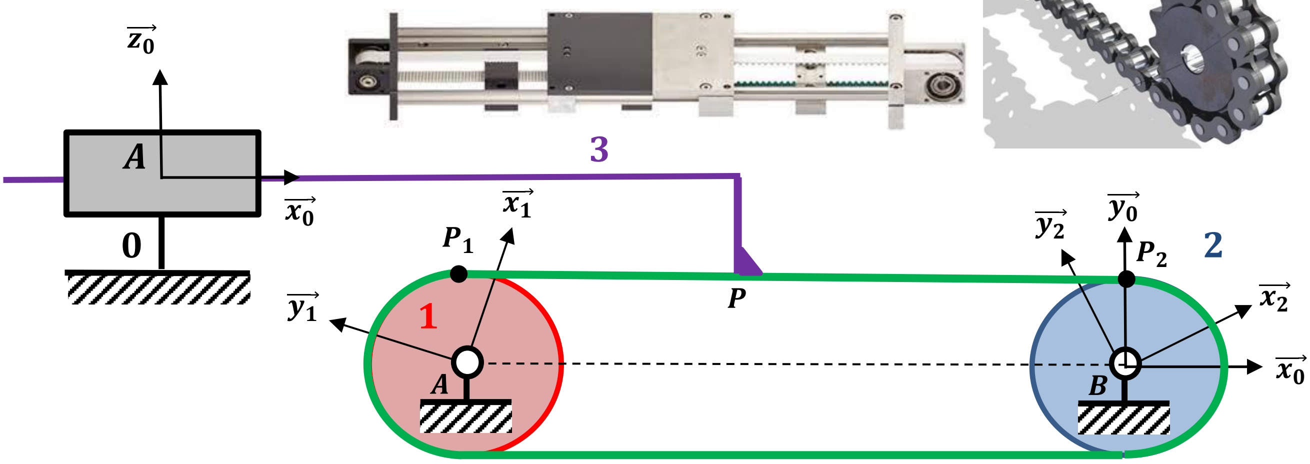
Soit :

$$C_2 = R_2F_x^{12} = R_2F$$

1.VIII.2.b Solution Poulie/Courroie – Pignon/Chaine



On propose le modèle suivant :



Supposons que seule la poulie 1 est soumise à un couple extérieur $C_1\overrightarrow{z_0}$.

Appelons $\overrightarrow{F_{c1}} = F_{c1}\overrightarrow{x_0}$ l'effort de la courroie sur la poulie 1 en P_1. Compte tenu du fait que la poulie 2 n'est pas soumise à un couple, l'action $\overrightarrow{F_{c1}} = F_{c1}\overrightarrow{x_0}$ en P_2 est nulle (si les liaisons sont parfaites).

Appelons $\overrightarrow{F_{c3}} = F_{c3}\overrightarrow{x_0}$ l'effort de la courroie sur la poulie 1 en P

Appelons $\vec{F} = F\overrightarrow{x_0}$ l'effort transmis par la pièce 3 à l'extérieur

En isolant le solide 1 et en lui appliquant le TMS sur l'axe $\overrightarrow{z_0}$, on obtient :

$$C_1 - R_1 F_{c1} = 0 \Rightarrow C_1 = R_1 F_{c1}$$

Supposons que la courroie se comporte comme un solide rigide entre P_1 et P, on montre alors en l'isolant et en projetant l'équation du TRS sur $\overrightarrow{x_0}$ que :

$$F_{1c} + F_{3c} = 0 \Rightarrow F_{1c} = -F_{3c}$$

En isolant la pièce 3 et en lui appliquant le TRS sur $\overrightarrow{x_0}$, on obtient :

$$-F + F_{c3} = 0 \Rightarrow F_{c3} = F$$

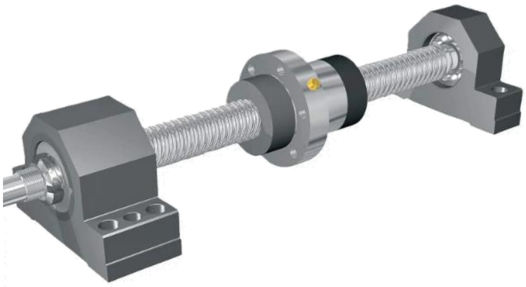
Soit finalement :

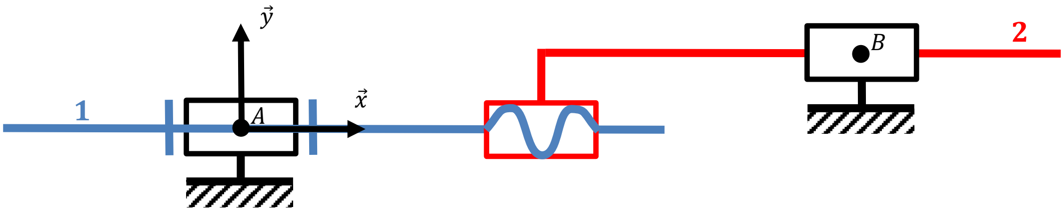
$$F_{c3} = F = F_{1c} = -\frac{C_1}{R_1}$$

$$F = -\frac{C_1}{R_1}$$

1.VIII.2.c Vis/écrou

N'oublions pas la solution vis/écrou, ou liaison hélicoïdale.





Définissons $\overrightarrow{F_{21}} = F_{21}\vec{x}$ et $\overrightarrow{C_{21}} = C_{21}\vec{x}$ les efforts/couples de la pièce 2 sur la pièce 1 dans la liaison hélicoïdale.

Nous redémontrerons le rapport en efforts d'une hélicoïdale dans un TD de seconde année quand nous aborderons le TEC. Je vous rappelle ici la relation proposée quand nous avons défini le torseur de la liaison hélicoïdale :

$$\boxed{\frac{F_{21}}{C_{21}} = -\frac{2\pi}{p}}$$

Pour rappel :

- Pas à droite négatif
- Si n filets, $p = n * px$ avec px pas axial