

---

**Force de Laplace**

---

**Table des matières**

<b>1</b>	<b>Force de Laplace</b>	<b>2</b>
1.1	Force de Lorentz . . . . .	2
1.2	Effet Hall . . . . .	2
1.3	Force de Laplace . . . . .	3
1.4	Travail de la force de Laplace sur un circuit filiforme fermé . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Dipôle magnétique rigide dans un champ extérieur</b>	<b>5</b>
2.1	Énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique rigide dans un champ magnétostatique extérieur uniforme . . . . .	5
2.2	Action d'un champ magnétostatique extérieur sur un dipôle magnétique rigide . . . . .	6

# 1 Force de Laplace

## 1.1 Force de Lorentz

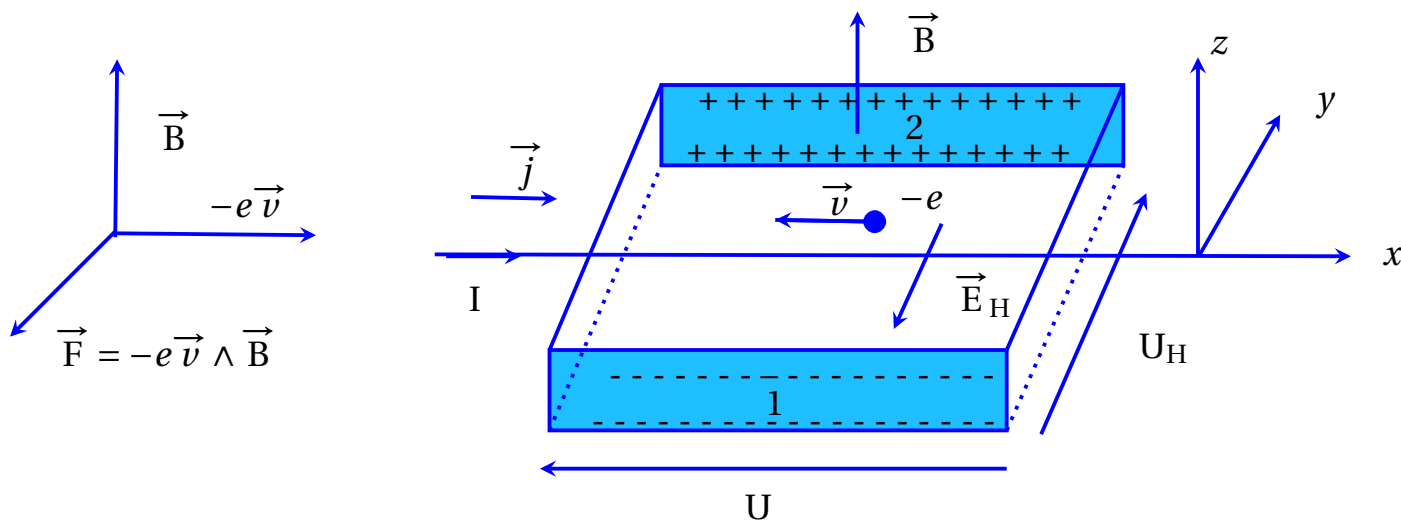
Une charge  $q$ , animé d'une vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , dans un champ électromagnétique subit la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{F}_{el} + \vec{F}_m$$

- $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$  : force électrique
- $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  : force magnétique

## 1.2 Effet Hall

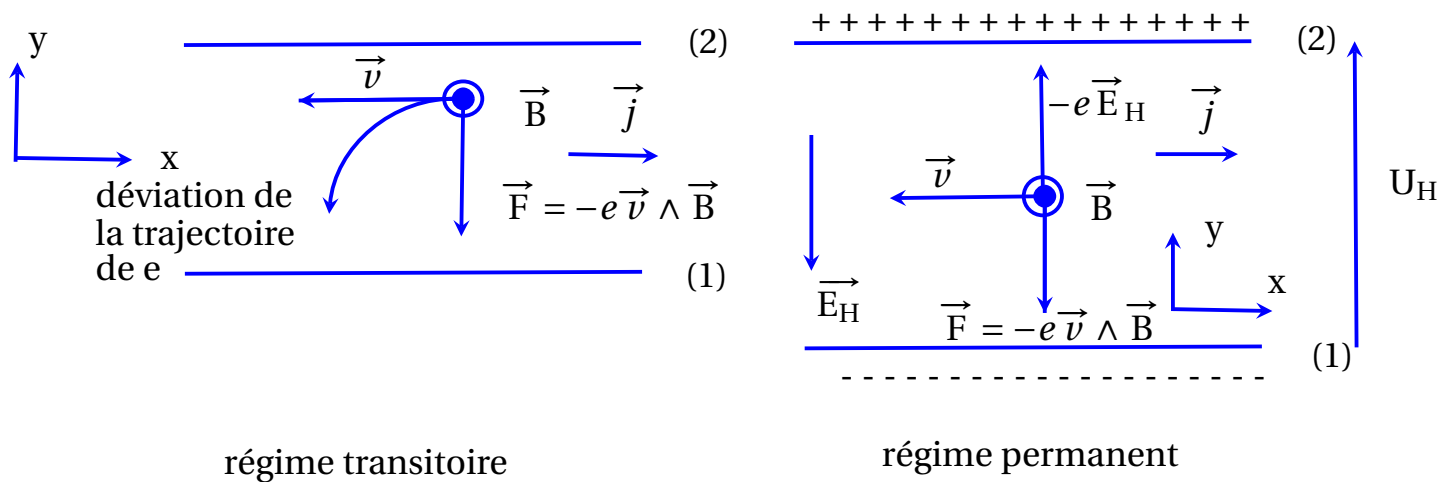
Considérons un fil conducteur de longueur  $a$  selon  $Ox$  et de largeur  $b$  selon  $Oy$  et d'épaisseur  $c$  selon  $Oz$ . Une tension  $U$  continue, appliquée entre les faces du conducteur orthogonales à  $Ox$ , fait circuler un courant continu d'intensité  $I$  et de densité de courant uniforme  $\vec{j} = \frac{I}{bc}\vec{e}_x$ . Le conducteur est placé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ .



### ► Régime transitoire

Pendant le régime transitoire, tout électron de conduction ( $q = -e$ ) subit :

- une force électrique  $\vec{F}_{el} = q\vec{E}_0 = -e\frac{U}{a}\vec{e}_x$  qui tend à le déplacer dans le sens des  $x$  décroissants
- une force magnétique  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -e(-v\vec{e}_x) \wedge (B\vec{e}_z) = -evB\vec{e}_y$  qui tend à dévier la trajectoire de l'électron vers la face (1).
- les électrons de conduction se dirigent et s'accumulent sur la face (1) qui se charge négativement, la face (2) se charge positivement
- les charges surfaciques qui apparaissent sur les deux faces créent un champ magnétostatique appelé **Champ de Hall**  $\vec{E}_H$  dirigé de la face (2) vers la face (1)
- les électrons de conduction seront soumis à une troisième force  $\vec{F}_H = q\vec{E}_H$ , dirigé selon  $Oy$ , qui tend à compenser la force magnétique (voir figure)



### ► Régime permanent

- la force magnétique est compensée par la force créée par le champ Hall
- le champ de Hall est déterminé par

$$\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

- $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -Bv\vec{e}_y$
- $\vec{j} = nq\vec{v} = nev\vec{e}_x$
- $\vec{E}_H = -\frac{1}{ne}Bj\vec{e}_y$

$$\vec{E}_H = R_H \vec{B} \wedge \vec{j} \quad \text{avec} \quad R_H = -\frac{1}{ne}$$

$R_H$  : constante de Hall

### ► Tension de Hall

- $\vec{E}_H = -\overrightarrow{\text{grad}}U_H \Rightarrow E_H = -\frac{dU_H}{dy} \Rightarrow U_H = -R_H j B \int_{-b/2}^{b/2} dy$

$$U_H = -R_H B j b = -R_H \frac{BI}{c}$$

### ► Ordre de grandeur

- dans le cas de l'argent :  $n = 6.10^{28} m^{-3}$  pour  $c = 0,1 mm$ ,  $B = 1 T$ ,  $I = 5 A$  on obtient  $U_H = 52 \mu V$
- la tension  $U_H$  est observable pour les semi-conducteurs ( $n \approx 10^{22} m^{-3}$ )

- **Remarque** : la mesure de la tension  $U_H$  en pratique permet de déterminer le champ magnétique : c'est le principe d'une sonde de Hall

## 1.3 Force de Laplace

### ► Définition

• **Définition** : La force de Laplace est la force exercée par le champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) sur l'ensemble des charges d'un conducteur.

$$\vec{F}_L = \vec{F}_m + \vec{F}_f$$

- $\vec{F}_m$  : force s'exerçant sur les porteur de charges mobiles
- $\vec{F}_f$  : force s'exerçant sur les charges fixes

- pour les charges mobiles :  $d\vec{F}_m = nq d\tau (\vec{E}_0 + \vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B})$
- pour les charges fixes :  $d\vec{F}_f = -nq d\tau (\vec{E}_0 + \vec{E}_H)$
- la force de Laplace appliqué sur l'élément de volume  $d\tau$  d'un conducteur  
 $d\vec{F}_L = d\vec{F}_m + d\vec{F}_f = nq d\tau \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$

$$d\vec{F}_L = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$$

- la densité volumique de la force de Laplace

$$\vec{f}_L = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

- la force de Laplace s'exerçant sur un élément de surface  $dS$  d'une nappe de courant

$$d\vec{F}_L = \vec{j}_s dS \wedge \vec{B}$$

- la force de Laplace s'exerçant sur un élément de longueur  $d\vec{l}$  d'un circuit filiforme

$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

► **Moment de force de Laplace sur un circuit filiforme (C)**

- résultante :  $\vec{F}_L = \oint_{(C)} I d\vec{l} \wedge \vec{B}$
- moment au point O :  $\vec{\Gamma}_O = \oint_C \vec{OM} \wedge (I d\vec{l} \wedge \vec{B})$
- si  $\vec{B} = \vec{B}_0$  : est uniforme on montre que

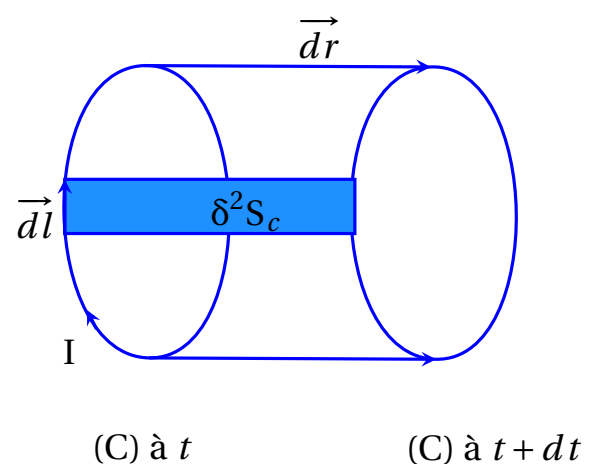
$$\vec{\Gamma}_O = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0$$

avec  $\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S}$

## 1.4 Travail de la force de Laplace sur un circuit filiforme fermé

Considérons un circuit (C) filiforme fermé parcouru par un courant électrique I. Le circuit se déplace entre les instant  $t$  et  $t + dt$  avec un vecteur  $\vec{dr}$  dans une zone de l'espace où il règne un champ magnétique  $\vec{B}$ . On note par

- $\delta^2 S_c$  : surface découpée par le déplacement de l'élément de circuit  $d\vec{l}$
- $\delta S_c$  : surface découpée par le déplacement du circuit (C)



► **Flux coupé**

- le travail élémentaire de la force de Laplace

$$\delta W_L = \oint_{(C)} (I d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dr}$$

- $(d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dr} = (\vec{dr} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B} = \delta^2 S_c \cdot \vec{B}$
- on définit le flux élémentaire coupé, c'est-à-dire le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la surface élémentaire coupée par l'élément de circuit  $d\vec{l}$ , par

$$\delta^2 \phi_c = \vec{B} \cdot \delta^2 \vec{S}_c$$

- le flux coupée par le circuit (C) lors d'un déplacement élémentaire  $\vec{dr}$

$$\delta \phi_c = \oint_{(C)} \delta^2 \phi = \oint_{(C)} \vec{B} \cdot \delta^2 \vec{S}_C$$

- le travail de la force de Laplace lors du déplacement  $\vec{dr}$

$$\delta W = I \delta \phi_c$$

- le flux coupée est donnée par

$$\delta \phi_c = \iint_{S_L} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

avec  $S_L = \delta S_C$  : la surface découpée par le déplacement du circuit

#### ► Théorème de Maxwell

- le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit à  $t$  :  $\phi(t) = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot \vec{dS}$
- le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit à  $t + dt$  :  $\phi(t + dt) = \iint_{S(t+dt)} \vec{B} \cdot \vec{dS}$
- $\Sigma = S(t) \cup \delta S \cup S(t + dt)$
- $\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 = -\phi(t) + \delta \phi_c + \phi(t + dt)$

$$d\phi = \delta \phi_c$$

• **Enoncé** : Le travail des forces de Laplace, agissant sur le circuit déplacé dans un champ magnétique extérieur permanent, est

$$\delta W_L = I \cdot d\phi$$

#### ► Energie potentielle de la force de Laplace

- $\delta W_L = -d\mathcal{E}_p = I d\phi$

$$\mathcal{E}_p = -I\phi$$

- l'évolution libre d'un circuit tend à minimiser l'énergie potentielle, donc à augmenter le flux du champ magnétique à travers le circuit.

## 2 Dipôle magnétique rigide dans un champ extérieur

### 2.1 Énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique rigide dans un champ magnétostatique extérieur uniforme

• **Dipôle magnétique rigide** : un dipôle magnétique rigide est une boucle de courant indéformable

$$\vec{\mathcal{M}} = I \iint_{(S)} dS \vec{n} = I \vec{S}$$

$$\delta W = I \cdot d\phi = d(I\phi) = d \left( I \iint_{(S)} \vec{B} \cdot dS \vec{n} \right) = d \left[ I \cdot \left( \iint_{(S)} dS \vec{n} \right) \cdot \vec{B} \right] = d(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B})$$

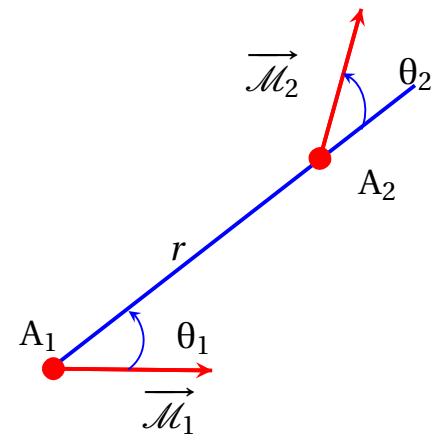
$$\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

► Exemple : Energie d'interaction de deux dipôles magnétiques rigides

Considérons deux dipôles magnétiques rigides  $A_1$  et  $A_2$ , de moments magnétiques  $\vec{\mathcal{M}}_1$  et  $\vec{\mathcal{M}}_2$ . Le dipôle  $A_1$  crée un champ magnétique au point  $A_2$  tq

$$\vec{B}_1(A_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{e}_{12}) \vec{e}_{12} - \vec{\mathcal{M}}_1}{r^3} \right]$$

avec  $\vec{e}_{12}$  : vecteur unitaire dirigée de  $A_1$  vers  $A_2$



- l'énergie du dipôle  $A_2$  dans le champ magnétique produit par  $A_1$  est

$$\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{B}_1(A_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2 - 3(\vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{e}_{12})(\vec{\mathcal{M}}_2 \cdot \vec{e}_{12})}{r^3} \right]$$

- si  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , l'énergie potentielle est minimale

$$\mathcal{E}_p = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2}{r^3}$$

si  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$  : magnéton de Bohr et  $r = a = 0,2 \text{ nm}$

$$\mathcal{E}_p = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu_B^2}{a^3} = -6,7 \cdot 10^{-12} \text{ eV}$$

## 2.2 Action d'un champ magnétostatique extérieur sur un dipôle magnétique rigide

- $\vec{F}_L = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B})$

$$\vec{F}_L = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B})$$

- si  $\vec{B}$  est uniforme :  $\vec{F}_L = \vec{0}$
- le moment de la force de Laplace lorsque  $\vec{B}$  est uniforme

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$