

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Mouvement d'un point matériel sur un disque en rotation.....	2
I. Mouvement sur le disque.....	3
A. Mise en mouvement.....	3
1) Phase précédant la mise en mouvement du point matériel.....	3
2) Conditions initiales du mouvement.....	4
B. Mouvement.....	4
1) Équations différentielles du mouvement dans le cas général avec frottement.....	4
2) Résolution des équations dans le cas sans frottement.....	5
3) Résolution dans le cas particulier d'un guidage avec frottement.....	5
II. Sortie du disque.....	5
Automobile roulant en ligne droite.....	7
I. Généralités.....	9
A. Grandeurs cinétiques.....	9
B. Actions extérieures.....	9
II. Étude de la phase d'accélération.....	9
A. Les équations.....	9
B. Équation différentielle dans le cas particulier du non glissement.....	9
1) A partir des équations précédentes.....	9
2) A partir de l'énergie.....	10
3) Intégration de l'équation différentielle dans le cas du non glissement.....	10
C. Cas général (on ne suppose pas le non glissement) mais l'on néglige la masse des roues et des essieux.....	10
III. Étude d'une phase de freinage.....	11
A. Les équations.....	11
B. Freinage optimal sans glissement.....	11
C. Distance d'arrêt.....	11

Mouvement d'un point matériel sur un disque en rotation

Pour les applications numériques, on prendra :

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$R = 1 \text{ m}$$

$$h = 1 \text{ m}$$

$$a = 0,1 \text{ m}$$

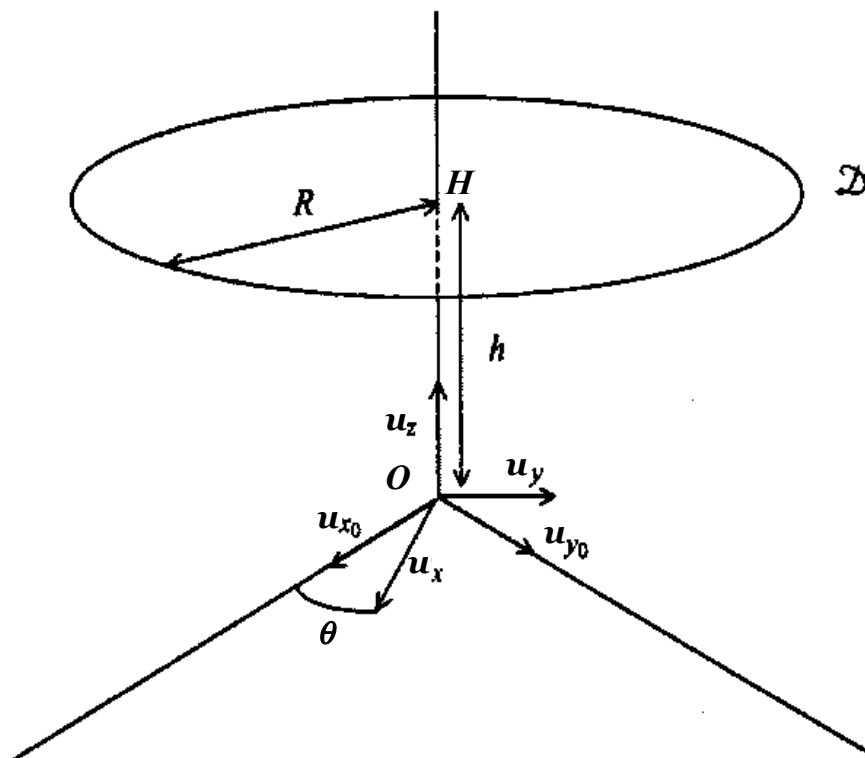
$$m = 0,01 \text{ kg}$$

$$\mu_s = 0,53$$

$$\mu_d = 0,36$$

Soit un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{u}_{x0}, \vec{u}_{y0}, \vec{u}_z)$, où \vec{u}_z représente la verticale ascendante.

Par rapport à ce référentiel, on considère un disque horizontal en acier, D , de rayon R et de centre H . Le disque peut tourner autour de l'axe vertical \vec{u}_z passant par son centre H et se situe à une hauteur h du sol horizontal. On considère le référentiel $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ lié au disque.



Le mouvement de rotation du disque par rapport à \mathcal{R}_0 est repéré par l'angle $\theta = (\vec{u}_{x0}, \vec{u}_x)$, positif si $(\vec{u}_{x0}, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est direct. Les axes \vec{u}_{x0} et \vec{u}_x sont confondus à l'instant de la mise en mouvement du disque qui sera pris comme origine des temps. Le mouvement donné au disque (à $t=0$) est un mouvement de rotation uniformément accéléré, caractérisé par l'accélération

angulaire $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$ avec $\alpha > 0$.

Le seul champ de forces externe est le champ de pesanteur terrestre que l'on considérera comme uniforme, $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.

On étudie le mouvement d'une pièce de monnaie placée sur le disque. Une pièce de monnaie en cuivre est posée sur le disque. Elle est assimilée à un point matériel M , de masse m . Elle est placée sur le disque avant sa mise en mouvement en $A(a, 0, h)$ donc $0 < a < R$. Le contact entre M et D est caractérisé par un coefficient de frottement solide statique $\mu_s > 0$ et un coefficient de frottement solide dynamique μ_d ($0 < \mu_d < \mu_s$). On note : \vec{R} la force de contact exercée par le disque sur le point M avec $\vec{N} = N\vec{u}_z$ sa composante normale au disque et $\vec{T} = T_x\vec{u}_x + T_y\vec{u}_y$ sa composante dans le plan du disque.

I. Mouvement sur le disque

A. Mise en mouvement

On s'intéresse dans cette partie au mouvement de M dans \mathcal{R} , c'est-à-dire, au mouvement de la pièce par rapport au disque. On note: $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

1) Phase précédant la mise en mouvement du point matériel

On suppose dans cette première phase que M reste immobile dans \mathcal{R} . On désigne par $\vec{\omega}_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0}(t) = \omega_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0}(t)\vec{u}_z$ le vecteur rotation instantanée de $\mathcal{R}|\mathcal{R}_0$.

1. Que vaut le vecteur vitesse de M relativement à \mathcal{R} . Exprimer le vecteur vitesse de M dans \mathcal{R}_0 en fonction de a et de $\omega_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0}(t)$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
2. Que vaut le vecteur accélération de M relativement à \mathcal{R} . Exprimer le vecteur accélération de M dans \mathcal{R}_0 dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
3. Exprimer $\omega_{\mathcal{R}|\mathcal{R}_0}(t)$ et $\theta(t)$ en fonction de α et de t .
4. Exprimer la durée du premier tour en fonction de α .
5. Donner l'expression des forces d'inertie dans \mathcal{R} (force d'inertie d'entraînement normale centrifuge, force d'inertie d'entraînement tangentielle) dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de m , a , α et t . Justifier que la force d'inertie de Coriolis est ici nulle.
6. Appliquer vectoriellement le principe fondamental de la dynamique du point à la pièce M placée en A dans le référentiel \mathcal{R} et en déduire trois équations.
7. Donner l'expression de $\|\vec{T}\|$ en fonction de t .
8. Rappeler les lois de Coulomb sur le frottement entre deux solides dans le cas du non glissement. En déduire la condition pour que l'hypothèse (M est en équilibre dans \mathcal{R} au point A) soit vérifiée.
9. On souhaite qu'au démarrage du disque (à $t=0^+$) le point M reste immobile Exprimer l'accélération maximale α_{MAX} du disque pour que ce souhait soit réalisé. A.N: calculer α_{MAX} et préciser l'unité.

10. On suppose $\alpha < \alpha_{MAX}$.

- Exprimer, en fonction de α et du rapport $\beta(\alpha) = \frac{\alpha_{MAX}}{\alpha}$ le temps t_1 au bout duquel le point M se met en mouvement.
- Exprimer, en fonction de α et β , la vitesse angulaire de rotation ω_1 atteinte par le disque lorsque le point M se met en mouvement.

11. On suppose ici que le point M reste immobile au démarrage mais se met en mouvement avant la fin du premier tour du disque. Montrer que $\alpha_{MIN} < \alpha < \alpha_{MAX}$. Exprimer α_{MIN} en fonction de α_{MAX} . A.N: calculer α_{MIN} et $\beta_{MIN} = \beta(\alpha = \alpha_{MIN})$.

2) Conditions initiales du mouvement

On suppose désormais $\alpha \leq \alpha_{MIN}$ de sorte que M se met en mouvement après la fin du premier tour du disque.

12. Montrer que l'on peut alors considérer que $\beta^2 \gg 1$ et que la vitesse angulaire de rotation ω_1 atteinte par le disque lorsque le point M se met en mouvement est quasiment indépendante de l'accélération angulaire et vaut quasiment $\omega_1 = \sqrt{\alpha_{MAX}}$. A.N: calculer ω_1 .

13. Donner l'expression de t_1 .

14. On étudie la réaction à la fin de cette première phase en $t = t_1^-$. Exprimer T_x et T_y en $t = t_1^-$. Comparer les deux composantes en exprimant $\left| \frac{T_x}{T_y} \right|$. Préciser numériquement.

B. Mouvement

Le point M placé initialement en $A(a, 0, 0)$ se met en mouvement.

La vitesse de rotation ω du disque est supposée constante après le démarrage.

1) Équations différentielles du mouvement dans le cas général avec frottement

15. Donner l'expression des forces d'inertie dans \mathcal{R} (force d'inertie d'entraînement normale centrifuge, force d'inertie de Coriolis). Donner leur expression dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de m , ω , x , y , \dot{x} et \dot{y} . Justifier que la force d'inertie d'entraînement tangentielle est ici nulle.

16. Rappeler les lois de Coulomb sur le frottement entre deux solides dans le cas du glissement.

Montrer alors que, dans le cas étudié, la composante \vec{T} s'écrit sous la forme $\vec{T} = K mg \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

avec \vec{v} : vitesse de M dans \mathcal{R} . Préciser la constante K .

17. Écrire les équations différentielles du mouvement de M vérifiées par x , y .

18. En $t = t_1^+$, au début de cette phase de mouvement (action de la force centrifuge...etc), l'accélération est selon \vec{u}_x . Dédire des équations précédentes, l'expression de l'accélération initiale. Donner son expression en tenant compte de $\omega = \omega_1 = \sqrt{\alpha_{MAX}}$ en fonction de $(\mu_s - \mu_d)$ et de g . A.N.: calculer la valeur de l'accélération initiale.

2) Résolution des équations dans le cas sans frottement

On se propose de résoudre les équations différentielles précédentes dans le cas sans frottement. Le point M se trouve initialement en $A(a, 0, 0)$ sans vitesse dans \mathcal{R} . La vitesse de rotation ω du disque est constante.

19. Montrer l'analogie entre une force de Coriolis et la force subie par une particule chargée dans un champ magnétique. Pour résoudre, on utilisera ici la technique utilisée pour une particule chargée dans un champ magnétique.

20. Écrire les équations différentielles du mouvement de M vérifiées par x , y .

21. On pose $\underline{Z}(t) = x(t) + iy(t)$ avec $i = \sqrt{-1}$. Écrire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par $\underline{Z}(t) = x(t) + iy(t)$. Résoudre cette équation à partir de l'équation caractéristique et des conditions initiales. Pour simplifier, on changera d'origine des temps et l'on fera $t=0$ au démarrage du mouvement du point M .

22. En déduire $x(t)$ et $y(t)$.

23. A quel instant t_2 la pièce arrive-t-elle au bord du disque ? Commenter le résultat simple obtenu en analysant le problème dans \mathcal{R}_0 . A.N. Calculer t_2 . On choisira $\omega = \omega_1 = \sqrt{\alpha_{MAX}}$.

3) Résolution dans le cas particulier d'un guidage avec frottement

On envisage désormais l'existence d'une rainure sur le disque selon l'axe x . Une pointe au centre de la pièce coulisse dans cette rainure. La pièce est désormais guidée selon l'axe x . On suppose que ce guidage se fait sans frottement supplémentaire. Le terme de réaction supplémentaire dû au guidage est $\vec{R}' = R' \vec{u}_y$. La réaction due au disque se fait toujours avec frottement. Elle s'écrit désormais puisque le glissement est selon \vec{u}_x : $\vec{R} = N \vec{u}_z + T \vec{u}_x$.

Le point M se trouve initialement en $A(a, 0, 0)$ sans vitesse dans \mathcal{R} . La vitesse de rotation ω du disque est constante. On fait $t=0$ au démarrage du mouvement du point M .

24. Appliquer vectoriellement le principe fondamental de la dynamique du point à la pièce M dans le référentiel \mathcal{R} et en déduire trois équations.

25. Justifier que $T = -\mu_d mg$.

26. Déterminer $x(t)$.

27. A quel instant t'_2 la pièce arrive-t-elle au bord du disque ? A.N. Calculer t'_2 . On choisira $\omega = \omega_1 = \sqrt{\alpha_{MAX}}$.

28. Déterminer la vitesse \vec{v}'_2 de la pièce lorsqu'elle arrive au bord du disque. A. N. Calculer v'_2 . On choisira $\omega = \omega_1 = \sqrt{\alpha_{MAX}}$.

II. Sortie du disque

On étudie la suite du mouvement dans le cadre du mouvement guidé décrit ci-dessus: pièce guidée selon l'axe x , vitesse de rotation ω du disque constante.

29. Déterminer la vitesse initiale \vec{V}_0 par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 de M au début de la chute dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Expression littérale puis application numérique en choisissant

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\alpha_{MAX}} \quad .$$

30. Déterminer la durée de la chute et la norme de la vitesse au sol. Expression littérale puis application numérique.

Automobile roulant en ligne droite

On étudie le mouvement en ligne droite d'une automobile (S) . On considère le référentiel terrestre \mathcal{R} associé au repère $(Oxyz)$ comme étant galiléen. On note $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ le trièdre associé. G désigne le centre d'inertie de l'ensemble du véhicule (S) et le référentiel du centre de masse de (S) est noté \mathcal{R}^* .

On considère que la voiture (S) (voir figure) est composée de 3 systèmes notés $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$.

Le système $(S1)$ est constitué par l'essieu de longueur L et les deux roues avant de la voiture: la roue 1 et la roue 1'. La masse de $(S1)$ est m_1 , son moment d'inertie par rapport à son axe G_1y est J_1 , le rayon des roues est a . On note G_1 le centre d'inertie de $(S1)$. Les roues avant sont assimilées à deux disques de centre O_1 et O'_1 .

Les roues avant sont motrices. Elles sont donc soumises, de la part du moteur, pendant la phase d'accélération à un couple de forces de moment $\vec{T} = \Gamma \vec{u}_y$ avec $\Gamma > 0$.

La roue 1 est en contact avec le sol au point I_1 . La roue 1' est en contact avec le sol au point I'_1 . La résultante des actions de contact du sol sur la roue 1 au point I_1 est représentée par: $\vec{F}_1 = T_1 \vec{u}_x + N_1 \vec{u}_z$. La résultante des actions de contact du sol sur la roue 1' au point I'_1 est identique: $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1 = T_1 \vec{u}_x + N_1 \vec{u}_z$.

On appelle \mathcal{R}_1^* le référentiel du centre de masse de $(S1)$. $(S1)$ est animé dans \mathcal{R}_1^* d'un mouvement de rotation autour de G_1y de vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_y$.

Le système $(S2)$ est constitué par l'essieu de longueur L et les deux roues arrière de la voiture: la roue 2 et la roue 2'. La masse de $(S2)$ est m_2 , son moment d'inertie par rapport à son axe G_2y est J_2 , le rayon des roues est a . On note G_2 le centre d'inertie de $(S2)$. Les roues arrière sont assimilées à deux disques de centre O_2 et O'_2 .

Les roues arrière sont porteuses, non motrices.

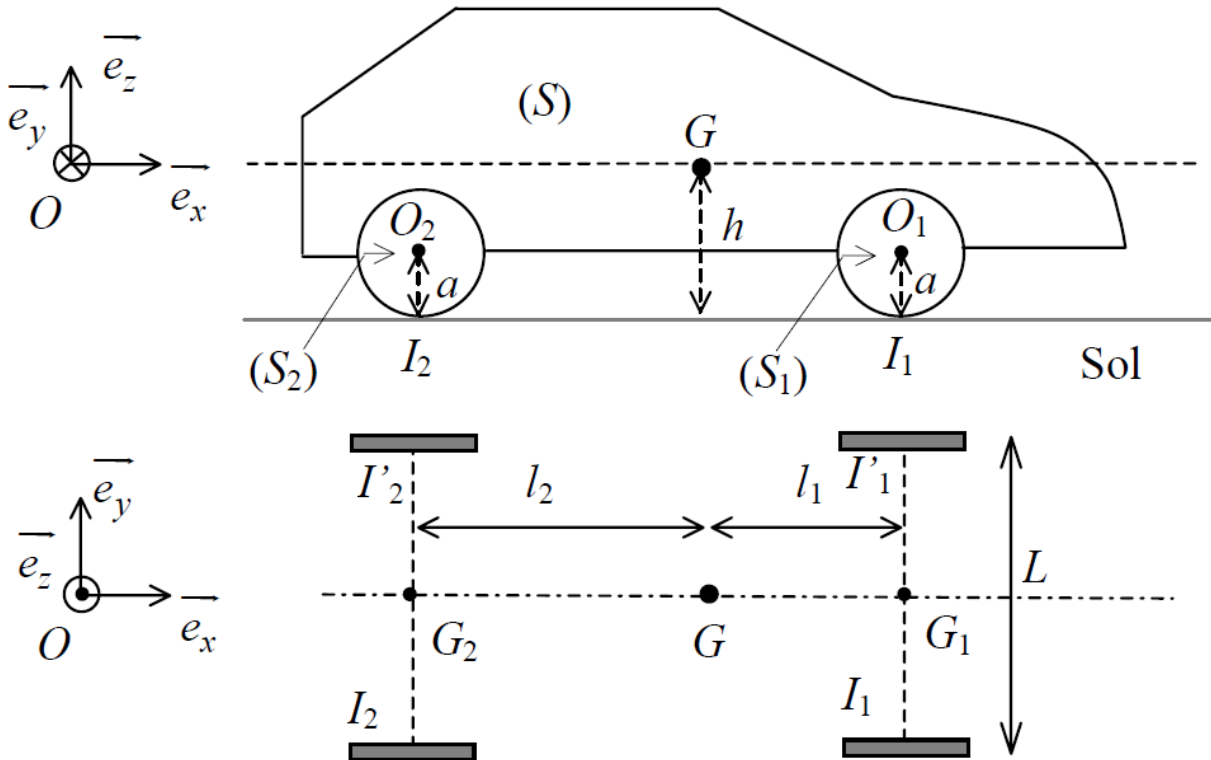
La roue 2 est en contact avec le sol au point I_2 . La roue 2' est en contact avec le sol au point I'_2 . La résultante des actions de contact du sol sur la roue 2 au point I_2 est représentée par: $\vec{F}_2 = T_2 \vec{u}_x + N_2 \vec{u}_z$. La résultante des actions de contact du sol sur la roue 2' au point I'_2 est identique: $\vec{F}'_2 = \vec{F}_2 = T_2 \vec{u}_x + N_2 \vec{u}_z$.

On appelle \mathcal{R}_2^* le référentiel du centre de masse de $(S2)$. $(S2)$ est animé dans \mathcal{R}_2^* d'un mouvement de rotation autour de G_2y de vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_y$.

Le système $(S3)$, de masse M , est constitué du reste de la voiture (carcasse, moteur). On

néglige les mouvements de (S_3) par rapport à \mathcal{R}^* .

Le centre d'inertie G de l'ensemble (S) du véhicule se trouve à une hauteur h du sol. L'axe Gz se trouve à une distance ℓ_1 de G_1z et une distance ℓ_2 de G_2z (voir figures).



Le coefficient de frottement, noté f_0 , entre une roue et le sol est identique pour les quatre roues. On ne distingue pas coefficient de frottement statique (coefficient d'adhérence) et coefficient de frottement dynamique (coefficient de glissement).

On considère que les forces de frottement de l'air sur le véhicule sont équivalentes à une force unique \vec{F}_{air} appliquée en G avec $\vec{F}_{air} = -K v^2 \vec{u}_x$ lorsque la voiture se déplace d'un mouvement de translation rectiligne suivant l'axe Ox . On donne $K = \frac{\rho C_x S}{2}$ où : ρ est la masse volumique de l'air avec $\rho = 1,23 \text{ kg.m}^{-3}$, le C_x est le coefficient de traînée aérodynamique qui dépend du profil de la voiture avec $C_x = 0,3$, v est la vitesse de la voiture, enfin S est la valeur du maître couple, c'est-à-dire l'aire de la plus grande section transversale de la voiture avec $S = 1,93 \text{ m}^2$.

On note $\vec{OG}(t) = x(t) \vec{u}_x$ et $v(t) = \frac{dx}{dt}$

Données numériques :

$$\ell_1 = 1,3 \text{ m}$$

$$\ell_2 = 1,7 \text{ m}$$

$$h=0,8\text{ m}$$

$$a=0,3\text{ m}$$

$$M=1370\text{ kg}$$

$$g=9,81\text{ m.s}^{-2}$$

I. Généralités

A. Grandeurs cinétiques

1. Donner l'expression de la quantité de mouvement du véhicule (S) dans le référentiel \mathcal{R} .
2. On veut exprimer le moment cinétique du véhicule (S) dans le référentiel \mathcal{R}^* . En utilisant avec précision le théorème de König pour $(S1)$, pour $(S2)$ puis pour $(S3)$, montrer que la projection de ce moment cinétique selon \vec{u}_y s'exprime simplement en fonction de J_1 , J_2 , ω

B. Actions extérieures

3. Quelles sont les actions extérieures s'exerçant sur l'ensemble du véhicule (S) . Faire un schéma rapide en y notant ces actions et en mettant notamment en évidence les points d'application des forces. Le couple moteur $\vec{T} = \Gamma \vec{u}_y$ est-il à prendre en compte dans cette liste?
4. Quelles sont les actions extérieures s'exerçant sur le système $(S1)$. Les liaisons de cet ensemble avec la reste de la voiture sont supposées parfaites (on inventera donc éventuellement 5 inconnues à ce niveau). Le couple moteur $\vec{T} = \Gamma \vec{u}_y$ est-il à prendre en compte ici?
5. Quelles sont les actions extérieures s'exerçant sur le système $(S2)$?

II. Étude de la phase d'accélération

Les grandeurs connues sont: $M, m_1, m_2, J_1, J_2, a, h, L, \ell_1, \ell_2, K, f_0, g$ et Γ . On ne fait a priori aucune supposition quant au glissement ou non glissement des roues.

A. Les équations

6. Écrire le théorème du centre d'inertie dans \mathcal{R} pour la voiture. En déduire deux relations notées (1) et (2).
7. Écrire le théorème du moment cinétique pour la voiture dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* en G en projection selon Gy . La relation obtenue est notée (3).
8. Écrire le théorème du moment cinétique en projection en G_1 pour le système $(S1)$ dans \mathcal{R}_1^* . La relation obtenue est notée (4).
9. Écrire le théorème du moment cinétique en projection en G_2 pour le système $(S2)$ dans \mathcal{R}_2^* . La relation obtenue est notée (5).

B. Équation différentielle dans le cas particulier du non glissement

1) A partir des équations précédentes

10. Démontrer l'expression de la vitesse de glissement $\vec{v}_{gl} = v_{gl} \vec{u}_x$ des roues et en déduire la

relation de non glissement.

11. Pour cette question, on suppose le non glissement des roues. Écrire l'équation différentielle du deuxième ordre relative à $x(t)$. Cette équation ne peut faire intervenir que des grandeurs connues.

2) *A partir de l'énergie*

On revient au cas général (on ne suppose plus le non glissement) et on envisage une approche énergétique du problème.

12. En utilisant éventuellement le théorème de König pour (S1), pour (S2) puis pour (S3), donner l'expression de l'énergie cinétique du véhicule (S) dans \mathcal{R} .

13. Rappeler le théorème de la puissance cinétique et l'appliquer au véhicule (S) dans \mathcal{R} . On fera notamment intervenir v_{gl} . Faut-il tenir compte de la puissance correspondant au couple $\vec{T} = \Gamma \vec{u}_y$? Justifier.

14. Retrouver l'équation différentielle du deuxième ordre relative à $x(t)$ obtenue ci-dessus.

3) *Intégration de l'équation différentielle dans le cas du non glissement*

Le fonctionnement avec glissement n'a pas lieu à cause d'une puissance moteur insuffisante.

15. Donner l'expression de la vitesse limite, notée v_{lim} , atteinte par la voiture.

16. Application numérique: calculer v_{lim} en $km.h^{-1}$. On prendra $\Gamma = 300 N.m$.

17. Écrire l'équation différentielle du mouvement en faisant intervenir la variable $u(t) = \frac{v(t)}{v_{lim}}$ et intégrer afin de trouver $v(t)$ en considérant $v(t=0) = 0$.

C. Cas général (on ne suppose pas le non glissement) mais l'on néglige la masse des roues et des essieux

La masse de (S1) et celle de (S2) sont très petites devant celle de (S), ce qui revient à poser $m_1 = m_2 = 0$ et $J_1 = J_2 = 0$.

18. Réécrire les équations (1) à (5) dans le cadre de cette approximation.

19. Donner alors l'expression de T_1 , T_2 , N_1 et N_2 en fonction de $M, a, h, \ell_1, \ell_2, g$ et Γ . Commenter le signe de la composante de frottement T_1 . Commenter la dépendance de N_1 et N_2 avec Γ .

20. A quelle condition sur Γ aucune roue ne décolle-t-elle? Application numérique. Cette condition est supposée vérifiée dans la suite de l'étude de la phase d'accélération.

21. A quelle condition sur Γ y a-t-il roulement sans glissement? Exprimer Γ_{MAX} qui assure un roulement sans glissement des roues de la voiture.

22. Application numérique : calculer les valeurs de Γ_{MAX} pour $f_0 = 0,7$ (pneus en bon état et route sèche), pour $f_0 = 0,4$ (route mouillée) et pour $f_0 = 0,1$ (route verglacée).

23. Comment varie Γ_{MAX} en fonction de f_0 et commenter les conséquences en terme de

conception de voiture. Même question Γ_{MAX} en fonction h . Idem pour Γ_{MAX} en fonction de ℓ_2 .

III. Étude d'une phase de freinage

Pendant une phase de freinage, les roues avant sont soumises, au lieu du couple $\vec{T} = \Gamma \vec{u}_y$, à un couple de forces $\vec{F}_1 = \Gamma_1 \vec{u}_y$ avec $\Gamma_1 < 0$. De même les roues arrière sont soumises à $\vec{F}_2 = \Gamma_2 \vec{u}_y$ avec $\Gamma_2 < 0$. On pose comme précédemment $m_1 = m_2 = 0$ et $J_1 = J_2 = 0$.

Pour les applications numériques, on envisagera les deux cas $f_0 = 0,7$ et $f_0 = 0,1$.

A. Les équations

24. Réécrire les équations (1) à (5).

25. Exprimer T_1 , T_2 , N_1 , N_2 et commenter le signe de ces différentes grandeurs. Peut-il théoriquement y avoir soulèvement des roues. Préciser s'il s'agit des roues avant ou arrière. Écrire l'inégalité, supposée vérifiée, pour qu'il n'y ait pas soulèvement en faisant intervenir $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$.

26. Application numérique: calculer la valeur limite de $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$.

B. Freinage optimal sans glissement

27. Écrire le système d'inégalités dont Γ_1 et Γ_2 sont solutions pour que le freinage s'effectue sans glissement.

28. Résoudre graphiquement: on représentera dans le plan XY avec $X = (-\Gamma_2)$ et $Y = (-\Gamma_1)$ le domaine solution de ce système d'inégalités.

29. On souhaite que, dans le cadre du non glissement, la phase de freinage soit la plus brève possible. Montrer qu'il faut choisir $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$ maximal. Montrer alors que $|\Gamma_1 + \Gamma_2|_{MAX} = f_0 M g a$.

30. Application numérique: calculer $|\Gamma_1 + \Gamma_2|_{MAX}$. Commenter.

C. Distance d'arrêt

31. Dans ce cas limite de freinage optimal sans glissement, l'action des frottements de l'air est négligeable, donner l'expression de l'accélération au cours du freinage et de la distance parcourue d avant l'arrêt pour une vitesse initiale v_0 .

32. Application numérique:

- calculer d pour $f_0 = 0,7$ et $v_0 = 130 \text{ km/h}$
- calculer d pour $f_0 = 0,1$ et $v_0 = 50 \text{ km/h}$.

Réponses

Mouvement d'un point matériel sur un disque en rotation

1) Le point est immobile sur le disque qui tourne

$$\vec{v}/R_0 = \vec{0}$$

il décrit donc un cercle par rapport à R_0

$$\vec{v}/R_0 = a \omega(t) \vec{u}_y$$

2) Pour la même raison :

$$\vec{a}/R_0 = \vec{0}$$

Dans R_0 , l'accélération est celle d'un mouvement circulaire non uniforme

$$\vec{a}/R_0 = a \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_y - a \omega_{(t)}^2 \vec{u}_x$$

$$\vec{a}/R_0 = a(\alpha \vec{u}_y - \omega_{(t)}^2 \vec{u}_x)$$

3)

$\alpha = \text{constante}$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$$

$$\omega = \alpha t$$

(ω nul en $t=0$)

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

(θ nul en $t=0$)

4)

donc $t = \sqrt{\frac{2\theta}{\alpha}}$

au bout d'un tour: $\theta = 2\pi$ donc la durée du tour est

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

5) Dans R non galiléen, la force d'inertie à ajouter est

$$\vec{F}_i = -m \vec{a}/R_0$$

puisque :

$$\vec{\Sigma F} = m \vec{a}/R_0 \quad \text{dans } R_0 \text{ galiléen}$$

soit

$$\vec{\Sigma F} - m \vec{a}/R_0 = \vec{0}$$

$$\underbrace{\vec{\Sigma F} + \vec{F}_i}_{\vec{0}}$$

(dans R , le point est immobile : il est en équilibre et au repos)

on a donc

$$\vec{F}_c = -m a (\alpha \vec{u}_y - \omega^2 \vec{u}_x)$$

avec

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}}^{\text{normale}} = m \omega^2 \overline{HM}$$

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} = m \omega^2 a \vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{\text{tangentielle}} = -m a_y \vec{u}_y$$

$$\vec{F}_{\text{tangentielle}} = -m a \alpha \vec{u}_y$$

La force d'inertie de Coriolis est nulle

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m \vec{\omega}_{R/R_0} \wedge \vec{v}_{/R}$$

presque

$$\vec{v}_{/R} = \vec{0}$$

(équilibre et repos)

6) Principe fondamental dans R non galiléen :

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{inertie}} = \vec{0}$$

soit :

$$\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} + \vec{F}_{\text{tangentielle}} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{ccccccc} T_x & + & 0 & + & m\omega^2 a & + & 0 & = & 0 \\ T_y & + & 0 & + & 0 & - & m a \alpha & = & 0 \\ N & - & mg & + & 0 & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

7) donc

$$T_x = -m\omega^2 a \quad \text{avec } \omega = \alpha t$$

$$T_y = m\alpha a$$

$$\|\vec{T}\| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$$

$$\|\vec{T}\| = m\alpha \sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$$

8) En cas de non glissement :

$$\vec{v}_{\text{gliss}} = \vec{0}$$

$$\left| \frac{T}{N} \right| \leq \mu_s$$

ce qui s'écrit ici

$$\frac{a\alpha}{g} \sqrt{1+\alpha^2+2} \leq N_5$$

9) Pour que la condition soit vérifiée en $t=0$, il faut que

$$\alpha \leq \alpha_{\text{MAX}} = \frac{N_5 g}{a}$$

A.N. $\alpha_{\text{MAX}} = \frac{0,53 \times 10}{0,1}$

$$\alpha_{\text{MAX}} = 53 \text{ rad s}^{-2}$$

10) La condition étant remplie au démarrage, le point reste immobile tant que

$$\sqrt{1+\alpha^2+2} \leq \frac{N_5 g}{a} \frac{1}{\alpha}$$

$$\sqrt{1+\alpha^2+2} \leq \underbrace{\frac{\alpha_{\text{MAX}}}{\alpha}}_{\beta(\alpha)}$$

$$t \leq \frac{(\beta^2 - 1)^{1/4}}{\sqrt{\alpha}}$$

$$t_1 = \frac{(\beta^2 - 1)^{1/4}}{\sqrt{\alpha}}$$

La vitesse atteinte lorsque le point se met en mouvement par rapport au disque est

$$\omega_1 = \alpha t_1$$

$$\omega_1 = \sqrt{\alpha} (\beta^2 - 1)^{1/4}$$

11) Le point se met en mouvement avant la fin du premier tour si

$$t_1 < \Delta t$$

$$\frac{(\beta^2 - 1)^{1/4}}{\sqrt{\alpha}} < 2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\beta^2 - 1 < 16\pi^2$$

$$\frac{\alpha_{MAX}^2}{\alpha^2} < 16\pi^2 + 1$$

$$\alpha > \frac{\alpha_{MAX}}{\sqrt{16\pi^2 + 1}} = \alpha_{MIN}$$

A.N. $\alpha_{MIN} = \frac{53}{\sqrt{16\pi^2 + 1}}$

$$\alpha_{MIN} = 4,20$$

$$\beta_{MIN} = 12,6$$

12) L'accélération du disque est suffisamment faible pour que le point se mette en mouvement (par rapport au disque) après un tour.

$$\alpha < \alpha_{MIN}$$

$$\beta > \beta_{MIN}$$

$$\beta^2 > \underbrace{16\pi^2 + 1}_{\gg 1}$$

donc

$$\omega_1 = \sqrt{\alpha} (\beta^2 - 1)^{1/4}$$

$$\approx \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta}$$

$$\omega_1 \approx \sqrt{\alpha_{MAX}}$$

La vitesse du disque lorsque le point se met en mouvement est donc fixée. Il faudra seulement plus ou moins de temps pour l'atteindre selon la valeur de l'accélération α

A.N.

$$\omega_1 = \sqrt{53}$$

$$\omega_1 = 7,3 \text{ rad s}^{-1}$$

13) on a vu

$$t_1 = \frac{(\beta^2 - 1)^{1/4}}{\sqrt{\alpha}}$$

$$t_1 \approx \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{\alpha_{\text{MAX}}}}{\alpha}$$

On vérifie, comme prévu, que t_1 augmente si α diminue

14) En $t = t_1$

$$T_x = -m\omega_1^2 a = -m\alpha_{\text{MAX}} a$$

$$T_y = m\alpha a$$

$$\left| \frac{T_x}{T_y} \right| = \beta \quad (> \beta_{\text{MIN}})$$

cf 12)

A.N.

$$\left| \frac{T_x}{T_y} \right| > 12,6$$

La composante tangentielle de la réaction est quasiment selon x .

(il ne faut pas en déduire la direction du mouvement dans la seconde phase : les accélérations, donc les forces ne sont pas continues dans notre approche)

15)

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} = m\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

(avec $\omega = \omega_1$)

$$\vec{F}_{\text{centrifuge}} = m\omega^2 (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$$

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dot{x} \\ 0 & \dot{y} \\ \omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\omega (\dot{y}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_y)$$

La rotation étant uniforme, il n'y a plus ici de force d'inertie tangentielle ($\alpha=0$)

16) Si glissement :

$$\left| \frac{T}{N} \right| = \mu_d$$

avec $\vec{T} \cdot \vec{v} < 0$

(\vec{T} est dans le sens contraire de \vec{v})

de plus $N = mg$

finallement $|T| = M_d mg$

$$\vec{T} = -M_d mg \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

17) Dans \mathcal{R} non galileen, le principe fondamental s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} + \vec{F}_{\text{coriolis}} = m\vec{a}$$

La projection selon z donnera $N = mg$ donc on peut ici simplifier :

$$\vec{T} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} + \vec{F}_{\text{coriolis}} = m\vec{a}$$

$$-M_d mg \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} + \vec{F}_{\text{centrifuge}} + \vec{F}_{\text{coriolis}} = m\vec{a}$$

$$\begin{aligned} -M_d mg \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + m\omega^2 x + 2m\omega \dot{y} &= m\ddot{x} \\ -M_d mg \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + m\omega^2 y - 2m\omega \dot{x} &= m\ddot{y} \end{aligned}$$

18) On admet que l'accélération initiale (et donc la vitesse qui apparaît) sont selon \vec{u}_x (sous l'action de la force centrifuge $m\omega^2 a \vec{u}_x$)

Les deux équations précédentes deviennent en t_1^+ ($v \approx 0$)

$$-M_d mg + m\omega^2 a + 0 = m\ddot{x}_{t_1^+}$$

$$0 + 0 - 0 = m\ddot{y}_{t_1^+}$$

on avait aussi $\omega_1^2 a = \alpha_{\text{MAX}} a = M_s g$

donc

$$\ddot{x}_{t_1^+} = (M_s - M_d) g$$

A.N. $= (0,53 - 0,36) 10$

$$\ddot{x}_{t_1^+} = 1,7 \text{ m.s}^{-2}$$

19)

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = m \vec{v} \wedge (2\vec{\omega})$$

$$\vec{F}_{\text{magnetique}} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_{\text{magnetique}} = m \vec{v} \wedge \left(\frac{q\vec{B}}{m}\right)$$

deux forces en $\vec{v} \wedge$

20) Equations du mouvement (cf 17)

$$\begin{cases} \omega^2 x + 2\omega \dot{y} = \ddot{x} & \textcircled{1} \\ \omega^2 y - 2\omega \dot{x} = \ddot{y} & \textcircled{2} \end{cases}$$

21) On fait $\textcircled{1} + i \textcircled{2}$ en posant $\underline{z} = x + iy$

$$\omega^2 \underline{z}(t) - 2i\omega \dot{\underline{z}}(t) = \ddot{\underline{z}}(t)$$

$$\ddot{\underline{z}}(t) + 2i\omega \dot{\underline{z}}(t) - \omega^2 \underline{z}(t) = 0$$

équation caractéristique:

$$r^2 + 2i\omega r - \omega^2 = 0$$

$$r = -i\omega \quad (\text{racine double})$$

donc

$$\underline{z} = (\underline{A}t + \underline{B}) e^{-i\omega t}$$

On écrit les conditions initiales

$$\begin{aligned} t=0 \quad \underline{z} &= a \\ \dot{\underline{z}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = \underline{B} \\ 0 = -i\omega a + \underline{A} \end{cases}$$

$$\underline{z} = a(1 + i\omega t) e^{-i\omega t}$$

22) $x(t)$ est la partie réelle de $\underline{z}(t)$
 $y(t)$ est la partie imaginaire de $\underline{z}(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= a (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) \\ y(t) &= a (\omega t \cos \omega t - \sin \omega t) \end{aligned}$$

23) La pièce sort du disque quand :

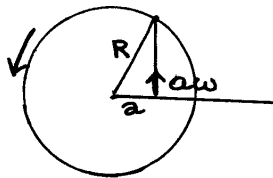
$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2$$

$$a^2(1 + \omega^2 t^2) = R^2$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a\omega}$$

Résultat plus facile à obtenir en travaillant dans R_0 .

On y voit le point se déplacer selon un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $a\omega$ et parcourir la distance $\sqrt{R^2 - a^2}$



A.N.

$$t_2 = \frac{\sqrt{1 - (0,1)^2}}{0,1 \times 7,3}$$

$$t_2 = 1,37 \text{ s}$$

24) $\vec{f}_{\text{centrifuge}} + \vec{f}_{\text{coriolis}} + \vec{R}' + \vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$$m\omega^2 x + 0 + 0 + T + 0 = m\ddot{x}$$

$$0 - 2m\omega\dot{x} + R' + 0 + 0 = 0$$

$$0 + 0 + 0 + N - mg = 0$$

25)

$$N = mg$$

$$\left| \frac{T}{N} \right| = \mu_d$$

$$|T| = \mu_d mg \quad \text{opposé à la vitesse}$$

(x augmente sous l'action de la force centrifuge)

$$\vec{T} = -M_d m g \vec{u}_x$$

26) Selon x :

$$m \omega^2 x - M_d m g = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} - \omega^2 x = -M_d g$$

$$x = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t} + \frac{M_d g}{\omega^2}$$

C.I. $\left| \begin{array}{l} a = A + B + \frac{M_d g}{\omega^2} \\ 0 = \omega (A - B) \end{array} \right.$

$$x = \left(a - \frac{M_d g}{\omega^2} \right) \cosh(\omega t) + \frac{M_d g}{\omega^2}$$

27) avec $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{M_s g}{a}$

$$x = a \left(1 - \frac{M_d}{M_s} \right) \cosh(\omega t) + a \frac{M_d}{M_s}$$

La pièce arrive au bord du disque en t'_2 avec

$$t'_2 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arccosh} \frac{R - a \frac{M_d}{M_s}}{a \left(1 - \frac{M_d}{M_s} \right)}$$

A.N.

$$t'_2 = 0,56 \text{ s}$$

28)

$$v = a \omega \left(1 - \frac{M_d}{M_s} \right) \sinh(\omega t)$$

A.N.

$$v'_2 = 6,8 \text{ m.s}^{-1}$$

29)

$$v_0 = \sqrt{(v'_2)^2 + R^2 \omega^2}$$

A.N.

$$v_0 = 9,9 \text{ m.s}^{-1}$$

30)

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

A.N.

$$v = 10,9 \text{ m.s}^{-1}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

A.N.

$$t = 0,45 \text{ s}$$

Automobile roulant en ligne droite

1)

$$\vec{P} = (M + m_1 + m_2) \vec{v}$$

2) Soit :

$$\vec{\sigma}_{(S)/R^*} = \vec{\sigma}_{(S_1)/R^*} + \vec{\sigma}_{(S_2)/R^*} + \vec{\sigma}_{(S_3)/R^*}$$

calculé par
exemple en
G

on utilise alors le th de Koenig

$$\vec{\sigma}_{(S_1)/R^*} = \vec{\sigma}_{(S_1)}^* + \overrightarrow{GG_1} \wedge m_1 \underbrace{\vec{v}_{G_1/R^*}}_{\text{nul car } G_1 \text{ fixe dans } R^*}$$

c'est à dire

$$\vec{\sigma}_{(S_1)/R_1^*}$$

↓
dont la projection
selon G_1y vaut
 $J_1 \omega \vec{u}_y$

$$\vec{\sigma}_{(S_2)/R^*} \quad \text{idem}$$

projection selon
 G_2y vaut
 $J_2 \omega \vec{u}_y$

$$\vec{\sigma}_{(S_3)/R^*} \quad \text{nul car } S_3 \text{ est immobile dans } R^*$$

finallement :

$$\vec{\sigma}_{(S)/R^*} \cdot \vec{u}_y = (J_1 + J_2) \omega$$

Soit : on applique la formule de transport du moment dans R^*

par exemple :

$$\vec{\sigma}_{(S_1)/R^*} \text{ en } G = \underbrace{\vec{\sigma}_{(S_1)/R^*} \text{ en } G_1}_{\text{c'est aussi}} + \underbrace{\overrightarrow{GG_1} \wedge m_1 \vec{v}_{G_1/R^*}}_{\text{nul}}$$

$$\vec{\sigma}_{(S_1)/R_1^*}$$

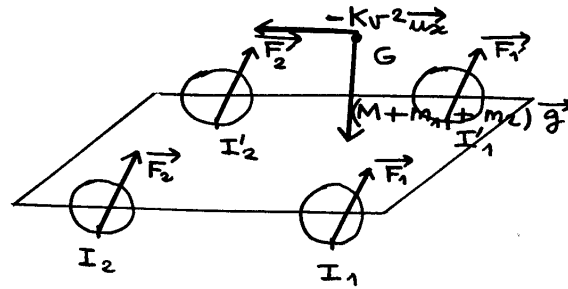
puisque $R_1^*, R_2^*,$

R^* sont ici un

seul et même référentiel

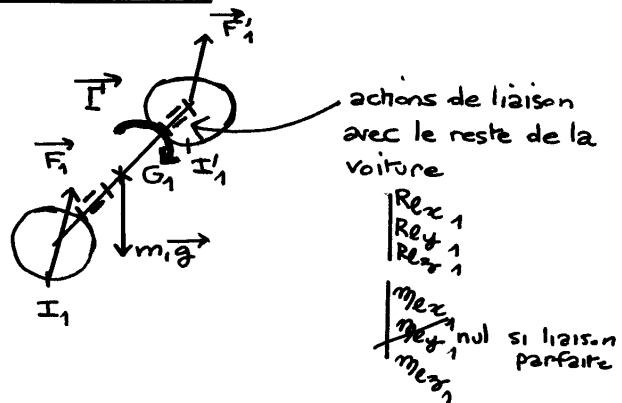
(G_1 et G_2 sont fixes
dans R^*)

3)



Le couple \vec{I} n'est pas à prendre en compte car pour (S) il s'agit d'une action intérieure.

4)



le couple \vec{I} est à prendre en compte. C'est une action extérieure pour (S1).

5) Pour (S2), il faut prendre en compte \vec{F}_2 , \vec{F}_2' , $m_2\vec{g}$ et les liaisons avec à nouveau m_{y2} nul car liaison parfaite.

6) Théorème du centre d'inertie dans R_0 pour la voiture (S)

$$2\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2 - kv^2\vec{u}_x + (M+m_1+m_2)\vec{g} = (M+m_1+m_2)\frac{d\vec{v}}{dt}$$

①	$/x$	$2T_1 + 2T_2 - kv^2$	$= (M+m_1+m_2) \frac{dv}{dt}$
②	$/z$	$2N_1 + 2N_2 - (M+m_1+m_2)g = 0$	

7) Théorème du moment cinétique dans R^* pour la voiture (S) en G (projection sur Gy)

Les moments des poids et de $-kv^2\vec{u}_x$ sont nuls en G donc il reste :

$$\vec{GI}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{GI}'_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{GI}_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{GI}'_2 \wedge \vec{F}_2 = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}^*$$

$$\begin{vmatrix} \ell_1 & T_1 \\ -\ell_2 & 0 \\ -h & N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 & T_1 \\ \ell_2 & 0 \\ -h & N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\ell_2 & T_2 \\ -\ell_2 & 0 \\ -h & N_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\ell_2 & T_2 \\ \ell_2 & 0 \\ -h & N_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 1/x & -\ell_2 N_1 & + & \ell_2 N_1 & - & \ell_2 N_2 & + & \ell_2 N_2 & = & \frac{d}{dt} \sigma_x^* \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1/y & 2(-hT_1 - \ell_1 N_1) & + & 2(-hT_2 + \ell_2 N_2) & = & \frac{d}{dt} (J_1 + J_2) \omega \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1/z & \ell_2 T_1 & - & \ell_2 T_1 & + & \ell_2 T_2 & - & \ell_2 T_2 & = & \frac{d}{dt} \sigma_z^* \end{matrix}$$

En projection selon G_y on obtient :

$$\textcircled{3} \quad -2h(T_1 + T_2) + 2(\ell_2 N_2 - \ell_1 N_1) = (J_1 + J_2) \frac{d\omega}{dt}$$

8) Théorème du moment cinétique dans \mathcal{R}_1^* pour le système (S1) en G_1 (projection sur $G_1 y$)

$$\vec{I} + \vec{GI}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{GI}'_1 \wedge \vec{F}'_1 + \vec{m}_{\ell_1} = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_1^*$$

$$\begin{vmatrix} 0 & T_1 \\ \ell_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & T_1 \\ -\ell_2 & 0 \\ -a & N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & T_1 \\ \ell_2 & 0 \\ -a & N_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{\ell_1 x_1} \\ 0 \\ m_{\ell_1 z_1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 1/x & -\ell_2 N_1 & + & \ell_2 N_1 & + & m_{\ell_1 x_1} & = & \frac{d}{dt} \sigma_{1x}^* \\ 1/y & I & - & 2aT_1 & + & 0 & = & \frac{d}{dt} (J_1 \omega) \\ 1/z & -\ell_2 T_1 & + & \ell_2 T_1 & + & m_{\ell_1 z_1} & = & \frac{d}{dt} \sigma_{1z}^* \end{matrix}$$

En projection selon $G_1 y$ on obtient :

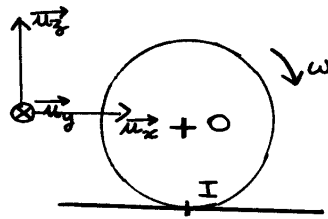
$$\textcircled{4} \quad I - 2aT_1 = J_1 \frac{d\omega}{dt}$$

9) Théorème du moment cinétique dans \mathcal{R}_2^* pour le système (S2) en G_2 (projection sur $G_2 y$)

On obtient :

$$\textcircled{5} \quad -2aT_2 = J_2 \frac{d\omega}{dt}$$

10) Vitesse de glissement d'une roue :



$$\begin{aligned}\vec{v}_{gl} &= \vec{v}_{I \in \text{roue}} - \underbrace{\vec{v}_{I \in \text{sol}}}_{\text{nul}} \\ &= \vec{v}_O + \vec{IO} \wedge \vec{\omega} \\ &\begin{vmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{v}_{gl} = (v - a\omega) \vec{u}_x}$$

relation de non glissement

$$\boxed{v = a\omega}$$

11) On suppose ici le non glissement donc $v = a\omega$

$$\textcircled{1} \quad 2T_1 + 2T_2 - kv^2 = (M + m_1 + m_2) \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\Gamma}{a} - 2T_1 = \frac{J_1}{a^2} \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{5} \quad -2T_2 = \frac{J_2}{a^2} \frac{dv}{dt}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{4} + \textcircled{5} \quad \boxed{\frac{\Gamma}{a} - kv^2 = \left(M + m_1 + m_2 + \frac{J_1}{a^2} + \frac{J_2}{a^2} \right) \frac{dv}{dt}}$$

12)

$$E_c(S)/R = E_c(S_1)/R + E_c(S_2)/R + E_c(S_3)/R$$

avec

$$\begin{aligned}E_c(S_3)/R &= \frac{1}{2} M v^2 \quad (\text{système en translation}) \\ E_c(S_1)/R &= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega^2 \quad (\text{th de König}) \\ E_c(S_2)/R &= \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega^2 \quad (\text{th de König})\end{aligned}$$

$$E_c(S)/R = \frac{1}{2} (M + m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} (J_1 + J_2) \omega^2$$

13)

$$\frac{dE_c}{dt} = \underset{\text{actions extérieures}}{P} + \underset{\text{actions intérieures}}{P}$$

le couple moteur $\vec{\Gamma}$ est intérieur, mais on doit donc ici en tenir compte.

$$\frac{dE_c}{dt} = 2(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \vec{v}_{\text{gliss}} + \vec{F}_{\text{air}} \vec{v} + \vec{\Gamma} \vec{\omega}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = 2(T_1 + T_2) v_{\text{gliss}} - K v^2 v + \Gamma \omega$$

14) On fait $v_{\text{gliss}} = 0$ donc $\omega = \frac{v}{2}$

$$E_c = \frac{1}{2} (M + m_1 + m_2 + \frac{J_1}{2^2} + \frac{J_2}{2^2}) v^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 - K v^3 + \frac{\Gamma}{2} v$$

finalement :

$$v \frac{dv}{dt} (M + m_1 + m_2 + \frac{J_1 + J_2}{2^2}) = -K v^3 + \frac{\Gamma}{2} v$$

$v=0$ est une solution parasite, il reste alors

$$\frac{\Gamma}{2} - K v^2 = (M + m_1 + m_2 + \frac{J_1 + J_2}{2^2}) \frac{dv}{dt}$$

15) On a la vitesse limite quand $\frac{dv}{dt} = 0$ soit

$$\frac{\Gamma}{2} - K v_{\text{lim}}^2 = 0$$

Le couple moteur lutte contre les frottements de l'air

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\Gamma}{2K}}$$

16)

A.N.

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{300}{0,3 K}}$$

$$\text{avec } K = \frac{\rho C_x S}{2}$$

$$= \frac{1,23 \cdot 93 \cdot 1,93}{2}$$

$$= 0,36 \text{ S.I.}$$

$$v_{Lim} = 53,0 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_{Lim} = 191 \text{ km.h}^{-1}$$

17)

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{a} - k v^2 &= (M + m_1 + m_2 + \frac{J_1 + J_2}{a^2}) \frac{dv}{dt} \\ \frac{\Gamma}{a} - k \left(\frac{\Gamma}{ak} \right) u^2 &= (M + m_1 + m_2 + \frac{J_1 + J_2}{a^2}) \frac{du}{dt} \sqrt{\frac{\Gamma}{ak}} \\ 1 - u^2 &= \underbrace{(M + m_1 + m_2 + \frac{J_1 + J_2}{a^2}) \sqrt{\frac{a}{\Gamma k}}}_{\frac{1}{\alpha}} \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{on pose } \alpha = \sqrt{\frac{\Gamma k}{a}} \frac{1}{M + m_1 + m_2 + \frac{J_1 + J_2}{a^2}}$$

$$\begin{aligned} 1 - u^2 &= \frac{1}{\alpha} \frac{du}{dt} \\ \int_0^u \frac{du'}{1 - u'^2} &= \alpha \int_0^t dt' \end{aligned}$$

$$\operatorname{arctg} u = \alpha t$$

$$u = \operatorname{th}(\alpha t)$$

$$v = v_{lim} \operatorname{th}(\alpha t)$$

18) On fait $m_1 = m_2 = 0$
 $J_1 = J_2 = 0$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 2T_1 + 2T_2 - kv^2 = M \frac{dv}{dt} \\ \textcircled{2} \quad & 2N_1 + 2N_2 - Mg = 0 \\ \textcircled{3} \quad & -2h(T_1 + T_2) + 2(l_2 N_2 - l_1 N_1) = 0 \\ \textcircled{4} \quad & \Gamma - 2aT_1 = 0 \\ \textcircled{5} \quad & -2aT_2 = 0 \end{aligned}$$

19)

$$\begin{aligned} T_2 &= 0 \\ T_1 &= \Gamma / 2a \end{aligned}$$

$$T_1 > 0$$

C'est la composante de frottement solide T_1 qui d'une certaine façon fait avancer la voiture.
grâce aux frottements (et au couple moteur) les roues motrices peuvent "pousser" le sol vers l'arrière et faire avancer la voiture.

De plus

$$\textcircled{2} \quad N_1 + N_2 = Mg/2$$

$$\textcircled{3} \quad -l_1 N_1 + l_2 N_2 = h \Gamma / 2a$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Mg}{2} \frac{l_2}{l_1 + l_2} - \frac{\Gamma h}{2a(l_1 + l_2)} \\ N_2 &= \frac{Mg}{2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} + \frac{\Gamma h}{2a(l_1 + l_2)} \end{aligned}$$

N_2 est positif
et augmente si Γ augmente

N_1 diminue si Γ augmente.
il doit être positif sinon
décollage des roues motrices.

20) Les roues avant pourraient décoller. Pour éviter cela il faut

$$N_1 \geq 0 \text{ soit}$$

$$\Gamma \leq Mg \frac{l_2 a}{h}$$

A.N.

$$\Gamma \leq 1370 \times 981 \times \frac{1,7 \times 0,3}{0,8}$$

$$\Gamma \leq 8,57 \cdot 10^3 \text{ N.m.}$$

21) Il y a non glissement

- des roues arrière si

$$\left| \frac{T_2}{N_2} \right| \leq f_0$$

vérifié puisque $T_2 = 0$

- des roues avant (motrices) si

$$\left| \frac{T_1}{N_1} \right| \leq f_0$$

$$\frac{T_1}{N_1} \leq f_0$$

$$\Gamma/2a \leq f_0 \left(\frac{M_g}{2} \frac{l_2}{l_1+l_2} - \frac{\Gamma h}{2a(l_1+l_2)} \right)$$

$$\Gamma \leq \frac{M_g l_2 a}{h} \frac{1}{1 + \frac{l_1+l_2}{f_0}} = \Gamma_{MAX}$$

22) A.N.	f_0	$\Gamma_{MAX} / N.m$
pneus bon état route sèche	0,7	1348
route mouillée	0,4	826
route verglacée	0,1	223

23) Γ_{MAX} croît avec f_0

(il faut de bons pneus pour favoriser l'adhérence)

Γ_{MAX} croît si h diminue

(on aura intérêt à baisser G cf : voitures de course)

On trouve facilement que (dérivée)

Γ_{MAX} croît avec l_2

24) freinage :

①	$2T_1 + 2T_2 - kv^2 = M \frac{dv}{dt}$
②	$2N_1 + 2N_2 - Mg = 0$
③	$-h(T_1 + T_2) + l_2 N_2 - l_1 N_1 = 0$
④	$\Gamma_1 - 2aT_1 = 0$
⑤	$\Gamma_2 - 2aT_2 = 0$

25) ④ $T_1 = \frac{\Gamma_1}{2a} < 0$

⑤ $T_2 = \frac{\Gamma_2}{2a} < 0$

T_1 et T_2 sont dans le sens contraire de v
Cela correspond bien à un freinage.

② $N_1 + N_2 = Mg/2$

③ $-l_1 N_1 + l_2 N_2 = \frac{h}{2a} (\Gamma_1 + \Gamma_2)$

d'où

$N_1 = \frac{Mg}{2} \frac{l_2}{l_1 + l_2} - \frac{h}{2a(l_1 + l_2)} (\Gamma_1 + \Gamma_2)$ $N_2 = \frac{Mg}{2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} + \frac{h}{2a(l_1 + l_2)} (\Gamma_1 + \Gamma_2)$

N_1 est toujours positif. Il ne peut y avoir soulèvement
des roues avant

N_2 pourrait devenir négatif (soulèvement des roues
arrière)

Il n'y a pas soulèvement si

$$N_2 \geq 0$$

$$Mg l_1 \geq - \frac{h}{a} (\Gamma_1 + \Gamma_2)$$

$$Mg l_1 \geq \frac{h}{a} |\Gamma_1 + \Gamma_2|$$

$$|\Gamma_1 + \Gamma_2| \leq \frac{Mg l_1 a}{h}$$

26)

A.N.

$$|\Gamma_1 + \Gamma_2| \leq \frac{1370 \times 9,81 \times 1,3 \times 93}{0,8}$$

$$|\Gamma_1 + \Gamma_2| \leq 6,55 \cdot 10^3 \text{ N.m}$$

indépendant de f_0

27) Non glissement si

$$\left| \frac{T_1}{N_1} \right| \leq f_0$$

$$\frac{-T_1}{N_1} \leq f_0$$

$$-\frac{\Gamma_1}{2a} \leq f_0 \left(\frac{Mg}{2} \frac{l_2}{l_1+l_2} - \frac{h}{2a(l_1+l_2)} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right)$$

$$\text{et } \left| \frac{T_2}{N_2} \right| \leq f_0$$

$$\frac{-T_2}{N_2} \leq f_0$$

$$-\frac{\Gamma_2}{2a} \leq f_0 \left(\frac{Mg}{2} \frac{l_1}{l_1+l_2} + \frac{h}{2a(l_1+l_2)} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \right)$$

ce qui donne le système d'inégalités suivant :

$$(-\Gamma_1) \left[1 - \frac{f_0 h}{l_1+l_2} \right] + (-\Gamma_2) \left[-\frac{f_0 h}{l_1+l_2} \right] \leq f_0 Mg a \frac{l_2}{l_1+l_2}$$

$$(-\Gamma_1) \left[\frac{f_0 h}{l_1+l_2} \right] + (-\Gamma_2) \left[1 + \frac{f_0 h}{l_1+l_2} \right] \leq f_0 Mg a \frac{l_1}{l_1+l_2}$$

28)

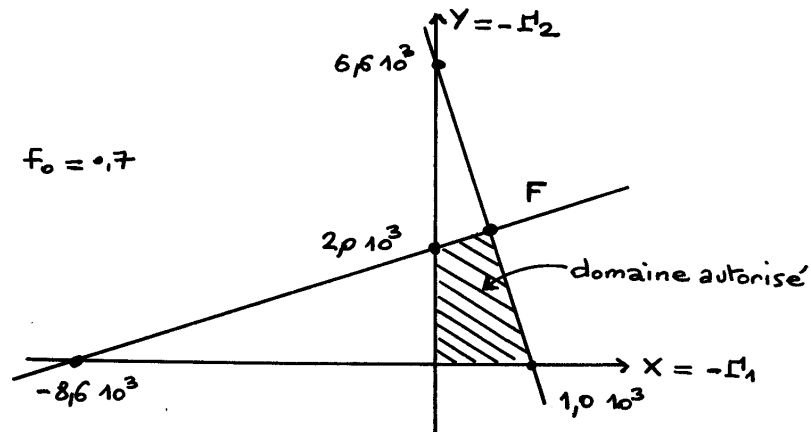
A.N. pour $f_0 = 0,7$

Les deux inégalités s'écrivent :

$$(-\Gamma_1) \quad 0,813 \quad + \quad (-\Gamma_2) \quad -0,187 \quad \leq \quad 1599$$

$$(-\Gamma_1) \quad 0,187 \quad + \quad (-\Gamma_2) \quad 1,187 \quad \leq \quad 1223$$

on trace les deux droites dans le plan $X = (-\Gamma_2)$
 $Y = (-\Gamma_1)$



29)

①

$$M \frac{dv}{dt} = -k v^2 + 2 (T_1 + T_2)$$

$$= -k v^2 + \underbrace{\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{a}}_{\text{négatif}}$$

$$M \frac{dv}{dt} = -k v^2 - \frac{|\Gamma_1 + \Gamma_2|}{a}$$

Le freinage est maximal : $(-\frac{dv}{dt})$ le plus grand possible
si $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$ est maximal

En additionnant les deux inégalités précédentes, on obtient

$$(-\Gamma_1) + (-\Gamma_2) \leq f_0 M g a$$

donc

$$|\Gamma_1 + \Gamma_2|_{\text{MAX}} = f_0 M g a$$

(point noté F sur le graphe précédent)

30)

A.N.

f_0	$ \Gamma_1 + \Gamma_2 _{\text{MAX}}$
0,7	$2,82 \cdot 10^3 \text{ N.m}$
0,1	$0,40 \cdot 10^3 \text{ N.m}$

On freine mieux si l'adhérence est meilleure.

31) On a donc, en négligeant l'action de l'air :

$$M \frac{dv}{dt} = - \frac{|F_1 + F_2|_{MAX}}{2}$$

$$= - f_0 g$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = - f_0 g} \quad (\text{cte})$$

En utilisant

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$0 - v_0^2 = 2x - f_0 g d$$

$$\boxed{d = \frac{v_0^2}{2f_0 g}}$$

32) A.N.

f_0	v_0	d
0.7	130 km/h	95 m
0.1	50 km/h	98 m