NOMBRE DE DÉRANGEMENTS

Notation :
On note :

- $\mathbb{N}$ *: l'ensemble des entiers naturels,*
- $\mathbb{R}$ *: l'ensemble des nombres réels,*
- e *: le nombre réel dont le logarithme népérien est égal* 1.

Pour x appartenant à $\mathbb{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x.
Pour tout entier naturel, on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$.
Si j et n sont deux entiers naturels fixes tels que $0 \leqslant j \leqslant n$, on note :

- $[\![j, n]\!]$ *l'ensemble des naturels k vérifiant $j \leqslant k \leqslant n$,*
- C_n^j *le nombre de parties ayant j éléments d'un ensemble de n éléments.*

On rappelle que pour tout entier naturel j élément de $[\![0, n]\!]$ on a : $C_n^j = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.

Si f est une fonction k fois dérivable sur un intervalle I (avec $k \geqslant 1$) on note f' (resp. $f^{(k)}$) sa fonction dérivée (resp. sa fonction dérivée k-ième).
Si u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, donc une suite réelle, on utilise la notation usuelle : $u(n) = u_n$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.
Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p - x| < \dfrac{1}{2}$ alors p est l'entier le plus proche de x.

On admet le résultat connu sous le nom du théorème de la convergence dominée

THÉORÈME : Convergence dominée
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_{pm}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables telle que

- ○ La série $\sum f_n$ converge simplement sur I de somme une fonction f continue par morceaux sur I ;
- ○ La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors :

- la fonction f est intégrable sur I ;
- On a l'interversion somme-intégral :

$$\int_I f = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

En outre

$$\int_I |f| = \int_I \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|.$$

Objectifs.

L'objet du problème est d'une part d'établir, pour tout entier naturel non nul, un lien entre l'entier naturel β_n le plus proche de $e^{-1}n!$ et le nombre γ_n d'éléments sans point fixe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et d'autre part, d'étudier l'écart $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.
Dans la partie I on étudie β_n et on le caractérise grâce à une récurrence, dans la partie II on étudie γ_n et on établit un lien avec β_n. La partie III est consacrée à une estimation de δ_n puis à une étude des deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \delta_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{|\delta_n|}{n}$.

Partie I: Les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$.

On définit la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ par $\alpha_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$$

Nombre de dérangements

On rappelle que pour tout x réel, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}$ est convergente, et que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$; en particulier, pour $x=-1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=e^{-1}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note : $\beta_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ et $\rho_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$.

1. **Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$.**
   (a) Expliciter α_k pour k dans $[\![0,4]\!]$.
   (b) Montrer que α_n est un entier naturel pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. **Étude de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$.**
   (a) Expliciter β_k pour k dans $[\![0,4]\!]$.
   (b) Montrer que β_n est un entier relatif pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (c) Expliciter $\beta_{n+1}-(n+1)\beta_n$ en fonction de n, pour tout entier n de $\mathbb{N}$.
   (d) Montrer que $\alpha=\beta$.
3. **Etude de ρ_n.**
   (a) Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $n!|\rho_n|\leqslant\frac{1}{n+1}$. L'inégalité est-elle stricte ?
   (c) Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.
4. **Étude d'une fonction.**
   On désigne par f la fonction définie et de classe C^1 (au moins) sur l'intervalle $]-1,1[$ à valeurs réelles, vérifiant les deux conditions :
   $$f(0)=1 \text{ et } \forall x\in]-1,1[,\ (1-x)f'(x)-xf(x)=0$$
   (a) Justifier l'existence et l'unicité de la fonction f. Expliciter $f(x)$ pour tout x de $]-1,1[$.

   Indication **:** *On trouve* $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$

   (b) Justifier l'affirmation : "f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$".
   (c) Expliciter $(1-x)f(x)$, puis en utilisant la formule de Leibniz, exprimer pour tout entier naturel n :
   $$(1-x)f^{(n+1)}(x)-(n+1)f^{(n)}(x)$$
   en fonction de n et de x.
   (d) En déduire une relation, valable pour tout entier naturel n, entre β_n et $f^{(n)}(0)$.

Partie II: La suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$.

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel.
Pour $n\geqslant 1$, on note :

- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$,
- γ_n le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe (τ appartenant à $\mathcal{S}_n$ est sans point fixe si pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on a $\tau(k)\neq k$).

Pour $n=0$ on adopte la convention : $\gamma_0=1$.

1. Calculer γ_1 et γ_2.
2. Classer les éléments de $\mathcal{S}_3$ selon leur nombre de points fixes et calculer γ_3.
3. On suppose dans cette question que $n=4$.

NOMBRE DE DÉRANGEMENTS

(a) Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant deux points fixes ?

(b) Quel est le nombre d'éléments τ appartenant à $\mathcal{S}_4$ ayant un point fixe ?

(c) Calculer γ_4.

4. **Relation entre les γ_k.**

(a) Rappeler sans justification le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$.

(b) Si $0 \leqslant k \leqslant n$, combien d'éléments de $\mathcal{S}_n$ ont exactement k points fixes ?

(c) Établir pour tout entier naturel n la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k = n!$.

5. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ et l'on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ lorsque la série converge.

(a) Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1.

(b) Pour tout x de $]-1,1[$, on pose $h(x) = e^x g(x)$. Justifier l'existence du développement en série entière de la fonction h sur $]-1,1[$ et expliciter ce développement.

(c) Expliciter $g(x)$ pour tout nombre réel x de $]-1,1[$. En déduire la valeur du rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$.

(d) Comparer les deux suites $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$.

(e) La fonction g est-elle définie en 1 ?

(f) La fonction g est-elle définie en -1 ?

(g) Calculer γ_8.

Partie III: Sur $\delta_n = e^{-1} n! - \beta_n$.

Pour tout entier naturel n, on note :

1. $\delta_n = e^{-1} n! - \beta_n$.
2. $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.
3. $v_n = (-1)^{n+1} J_n$.

1. **La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$.**

(a) Quelle est la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$?

(b) Etablir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

2. **Estimation intégrale de δ_n.**

(a) Justifier, pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \tag{1}$$

(b) Déduire de (1) l'expression de δ_n en fonction de v_n.

3. **Sur la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$.**

Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$; la convergence est-elle absolue ?

4. **Sur la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.**

Nombre de dérangements

(a) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{|\delta_n|}{n}$.

(b) On pose $A = -\displaystyle\int_0^1 e^x \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

i. Justifier la convergence de l'intégrale impropre A.

ii. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$ en fonction de l'intégrale A.

<u>*Indication*</u> **:** *Utiliser le DSE(0) de* $x \longmapsto \ln(1-x)$ *et le théorème de la convergence dominée cité dans le préambule*

(c) Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ et expliciter la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ en fonction de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}$.

<u>*Indication*</u> **:** *Utiliser le DSE(0) de* $x \longmapsto e^{-x}$ *et le théorème de la convergence dominée cité dans le préambule*

(d) Expliciter un nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$ vérifiant $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{600}$.

NOMBRE DE DÉRANGEMENTS

Partie I: Les suites α et β.

1. (a) On trouve $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 2$ et $\alpha_4 = 9$

   (b) On procède par récurrence sur n pour montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \alpha_n \in \mathbb{N}^*$

   - $\alpha_2 = 1 \in \mathbb{N}^*$. Le résultat est donc vrai au rang 2.
   - Soit $n \geqslant 2$ tel que $\alpha_n \in \mathbb{N}$. On a

$$\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \in \mathbb{Z}$$

De plus $\alpha_n \geqslant 1$ donc $\alpha_{n+1} \geqslant n+1-1 \geqslant n \geqslant 2$ et donc $\alpha_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et le résultat est vrai au rang $n+1$.

Comme $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{N}$, on a donc prouvé que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \in \mathbb{N}$$

2. (a) On a

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 2,\ \beta_4 = 9$$

   (b) On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \big((-1)^k n(n-1)\dots(k+1)\big)$$

et β est un entier relatif comme somme de tels entiers.

   (c) On a

$$\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (n+1)! \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = (-1)^{n+1}$$

   (d) $\beta_0 = \alpha = 1$ et les suites α et β vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \beta_n$$

3. (a) La suite de terme général $z_k = \dfrac{(-1)^k}{k!}$ vérifie les hypothèses de la règle spéciale (signe alterné, décroissance en module et convergence vers 0). La série correspondante a donc un reste d'ordre n, ρ_n, du signe de $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc $\rho_n$qui est positif si n est impair et négatif si n est pair.

   (b) La règle spéciale indique aussi que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\rho_n| \leqslant \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

c'est à dire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n!|\rho_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

L'inégalité est stricte car sinon $\rho_n \in \mathbb{Q}$. Or

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{\beta_n}{n!} + \rho_n$$

Donc $e^{-1} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.

Remarque : *Si (a_n) est une suite réelle, strictement décroissante et de limite nulle, alors S la somme de la série $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n$ est strictement compris entre les sommes partielles S_n et S_{n+1}, en conséquence,*

$$|R_n| = |S - S_n| < |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$$

Où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

Dans notre question la suite $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n \geqslant 0}$ est strictement décroissante et donc on a une inégalité stricte.

Nombre de dérangements

(c) On a $\dfrac{\beta_n}{n!} + \rho_n = e^{-1}$ et donc

$$\forall n \geqslant 1,\ |\beta_n - n!e^{-1}| = |-n!\rho_n| < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

D'après le préambule, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.
L'inégalité est stricte car $\dfrac{1}{k!}$ est strictement décroissante et donc on a une inégalité stricte dans le résultat sur les reste s provenant de la règle spéciale

(d) On a $\dfrac{\beta_n}{n!} + \rho_n = e^{-1}$ et donc

$$\forall n \geqslant 1,\ |\beta_n - n!e^{-1}| = |-n!\rho_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

D'après le dernier rappel du préambule, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.

4. (a) Sur $]-1,1[$, on a

$$f(0) = 1,\ f'(x) - \frac{x}{1-x}f(x) = 0$$

Comme $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est continue sur $]-1,1[$, le théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire s'applique et f existe et est unique (on a ici un problème de Cauchy).
En écrivant que $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - 1$, on obtient que $x \mapsto -x - \ln(1-x)$ est une primitive sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$. Il existe alors une constante c telle que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = c\exp\left(-x - \ln(1-x)\right) = \frac{ce^{-x}}{1-x}$$

Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $c = 1$ et donc que

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

(b) L'expression précédente montre, par théorèmes généraux, que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Remarque : *On peut aussi montrer par récurrence sur n que $f \in C^n(]-1,1[)$ est vraie pour tout n en utilisant seulement l'équation différentielle.*

(c) On a donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1-x)f(x) = e^{-x}$$

En dérivant $n+1$ fois cette relation par formule de Leibniz, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (1-x)^{(k)} f^{(n+1-k)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}$$

$(1-x)^{(k)}$ étant nul pour $k \geqslant 2$, ceci devient

$$(1-x)f^{(n+1)}(x) - (n+1)f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}$$

(d) Appliquons cette relation en $x = 0$:

$$f^{(n+1)}(0) = (n+1)f^{(n)}(0) + (-1)^{n+1}$$

Les suites (β_n) et $(f^{(n)}(0))$ ont même premier terme et vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1 : elles sont égales et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = f^{(n)}(0)$$

Partie II: La suite γ.

Nombre de dérangements

1. S_1 possède un unique élément (l'identité) et $\gamma_1 = 0$.
   Dans S_2, il y a l'identité et la transposition $(1,2)$. On a donc $\gamma_2 = 1$
2. L'identité de $[\![1,3]\!]$ a trois points fixes.
   Les transpositions $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,3)$ ont un point fixe.
   Les cycles $(1,2,3)$, $(1,3,2)$ n'ont pas de point fixe et on a donc
$$\gamma_3 = 2$$
3. (a) τ a deux points fixes si, et seulement, si deux éléments sont permutés et deux autres laissés fixes c'est à dire si, et seulement, si τ est une transposition. Il y a donc $\binom{4}{2} = 6$ telles permutations.
   (b) τ possède un unique point fixe a si, et seulement, si τ permute circulairement les éléments de $[\![1,4]\!] \setminus \{a\}$ (deux choix possibles). Comme on a quatre choix pour a, il y a $8 = 2 \times 4$ telles permutations.
   (c) Si un élément possède trois points fixes, il en a quatre et c'est l'identité. Il y a 24 éléments dans S_4. On a donc
$$\gamma_4 = 24 - 6 - 8 - 1 = 9$$

   Remarque : *Pour $p \in [\![2,n]\!]$, le nombre de p-cycle de S_n égale* $\dfrac{A_n^p}{p} = \dfrac{n!}{p\,(n-p)!}$
4. (a) On a $\mathbf{Card}\,(S_n) = n!$.
   (b) Une permutation possédant exactement k points fixes est caractérisée par le choix de ces points fixes (k parmi n) et une permutation sans points fixes des $n-k$ restant (γ_{n-k} choix). Ainsi, il y a $C_n^k \gamma_{n-k}$ permutations ayant k points fixes.
   (c) S_n est la réunion disjointe des ensembles $T_{n,k}$ des éléments de S_n ayant exactement k points fixes. En passant au cardinal, on a donc
$$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_{n-k}$$
   Comme $C_n^k = C_n^{n-k}$, on a donc (avec un changement d'indice $j = n-k$)
$$n! = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \gamma_j$$
5. (a) On a bien sûr $\gamma_n \leqslant n!$ (il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations) et donc $\left(\dfrac{\gamma_n}{n!}\right)$ est borné. Par définition, la série entière a un rayon de convergence au moins égal à 1.
   (b) g est, par définition, développable en série entière de rayon de convergence au moins 1, exp est développable en série entière de rayon de convergence infini. h est donc développable en série entière de rayon de convergence au moins égal à $\min(1, +\infty) = 1$ et son développement s'obtient par produit de Cauchy :
$$\forall x \in]-1,1[,\ h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \ \text{ avec } \ c_k = \sum_{j=0}^{n} \frac{\gamma_j}{j!(n-j)!} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\gamma_j = 1$$
   (c) On en déduit que
$$\forall x \in]-1,1[,\ h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$
   et donc
$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = f(x)$$
   On en déduit (si une fonction est développable, son développement est le développement de Taylor) que
$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n$$
   Comme $\dfrac{\beta_n}{n!} \sim e^{-1}$, alors le rayon de convergence vaut exactement 1.

NOMBRE DE DÉRANGEMENTS

(d) Le calcul de la question précédente et l'unicité du développement en série entière indique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \gamma_n$$

(e) $\dfrac{\beta_n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$ est le terme général d'une série divergente. g n'est donc pas définie en 1.

(f) De la même façon, g n'est pas définie en -1 (série grossièrement divergente).

(g) On a $\gamma_8 = \alpha_8 = 14833$

Partie III: Sur $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.

1. (a) On a

$$|J_n| \leqslant e \int_0^1 x^n\, dx = \frac{e}{n}$$

et, par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$$

(b) (v_n) est une suite alternée, de limite nulle en l'infini. En outre

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \int_0^1 e^x(x^n - x^{n+1})\, dx \geqslant 0$$

car $\forall x \in [0,1],\ e^x(x^n - x^{n+1}) \geqslant 0$ (et les bornes sont dans le bon sens). On peut donc appliquer la règle spéciale pour affirmer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

2. (a) La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, d'après la formule de Taylor avec reste intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\, dt \end{aligned}$$

(b) Pour $x = -1$, on a donc

$$e^{-1} = \frac{\beta_n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^{-1} (-1-t)^n e^t\, dt$$

Le changement de variable $u = 1 + t$ donne alors

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} (-1-t)^n e^t\, dt &= (-1)^{n+1}\int_0^1 u^n e^{u-1}\, \mathrm{d}u \\ &= e^{-1} v_n \end{aligned}$$

Donc

$$\delta_n = n! e^{-a} - \beta_n = e^{-1} v_n$$

3. Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, il en est de même de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$.

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^x\, dx = \left[x^{n+1}e^x\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\, dx \\ &= e - (n+1)J_n \end{aligned}$$

Comme $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a donc $(n+1)J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$ et ainsi

$$J_n \sim \frac{e}{n}$$

$|v_n| = J_n$ est le terme général d'une série divergente et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \delta_n$ n'est donc pas non plus absolument convergente.

NOMBRE DE DÉRANGEMENTS

3. Avec l'équivalent précédent, on a
$$\frac{|\delta_n|}{n} = e^{-1}\frac{J_n}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$
qui est le terme d'une série absolument convergente.

4. (a) L'application $u : x \mapsto e^x \ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$. On a un unique problème d'intégrabilité au voisinage de 1. Or,
$$u(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$$
par croissances comparées. Par comparaison aux fonctions de Riemann, u est intégrable au voisinage de 1. Elle l'est donc sur $[0,1[$ et a fortiori l'intégrale A existe.

   (b) On a
$$\forall x \in [0,1[,\ -e^x \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^x x^n}{n}$$

   - $f_n : x \mapsto \dfrac{e^x x^n}{n}$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur ce segment.
   - $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ de somme la fonction $x \mapsto -e^x \ln(1-x)$ qui est continue sur $[0,1[$.
   - On a
$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \frac{J_n}{n} \sim \frac{e}{n^2}$$
qui est le terme général d'une série convergente.

   Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et donne
$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{e^x x^n}{n}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n}$$
   Comme $J_n = e|\delta_n|$, on a donc
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\delta_k|}{k} = \frac{A}{e}$$

5. On a $\dfrac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} = \circ\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente.
Le changement de variable $u = 1-x$ et le DSE(0) de exp donnent
$$A = -e\int_0^1 e^{-u}\ln(u)\, du = -e\int_0^1 \sum_{n=0} \frac{(-u)^n \ln(u)}{n!}\, du$$

   - $g_n : u \longmapsto \dfrac{(-u)^n \ln(u)}{n!}$ est une fonction continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$ (négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ au voisinage de 0 par croissances comparées).
   - $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $u \longmapsto e^{-u}\ln(u)$ qui est continue sur $]0,1]$.
   - Une intégration par parties donne, pour $a > 0$,
$$\int_a^1 u^n \ln(u)\, du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\ln(u)\right]_a^1 - \frac{1}{n+1}\int_a^1 u^n\, du$$
   En faisant tendre a vers 0 et en multipliant par $1/n!$, on obtient
$$\int_0^1 |g_n(u)|\, du = -\int_0^1 \frac{u^n \ln(u)}{n!}\, du = \frac{1}{(n+1)^2 n!}$$
   qui est le terme général d'une série convergente.

Nombre de dérangements

Le théorème d'interversion somme-intégrale s'applique et donne

$$A = -e \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(u)\, du = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$$

On a finalement

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\delta_k|}{k} = \frac{A}{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$$

6. $\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$ est le terme général d'une suite alternée vérifiant les hypothèses de la règle spéciale. On a donc

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!} \right| \leqslant \frac{1}{(N+1)^2 N!}$$

Pour $N = 4$, on a $\dfrac{1}{(N+1)^2 N!} = \dfrac{1}{600}$ et donc

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{600} \quad \text{pour} \quad \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!} = \frac{229}{288}$$