Planche n° 11. Exponentielles et logarithmes. Corrigé

Exercice n° 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sqrt[n]{n}$ puis, pour x réel strictement positif, $f(x) = x^{1/x}$ de sorte que pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = f(n)$.

f est définie sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} = \frac{1 - \ln x}{x^2} x^{\frac{1}{x}}.$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ et donc f' est strictement positive sur $]0, e[$ et strictement négative sur $]e, +\infty[$. Par suite, f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. En particulier, pour $n \geqslant 3$,

$$u_n = f(n) \leqslant f(3) = u_3 = \sqrt[3]{3}.$$

Comme $u_2 = \sqrt{2} > 1 = u_1$, on a donc $\text{Max}\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \text{Max}\left\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\right\}$. Enfin, $(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$ et donc $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^6$ sur $[0, +\infty[$). Finalement,

$$\boxed{\text{Max}\left\{\sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \sqrt[3]{3} = 1,44..}$$

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel non nul n, $1 + \dfrac{1}{n}$ existe et est strictement positif. Donc, pour tout entier naturel non nul n, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ existe. De plus, pour tout entier naturel non nul n,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}\right).$$

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et donc

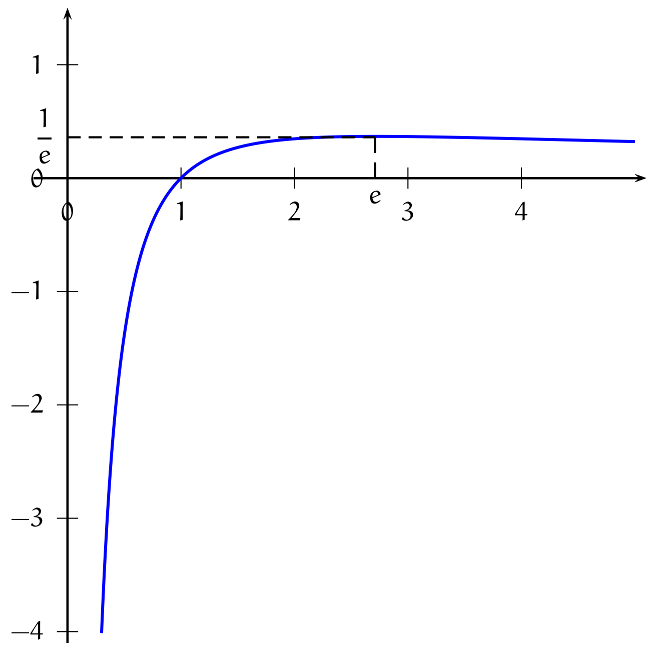
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1,$$

puis $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

Exercice n° 3

1) Pour $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. f est donc strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Le graphe de f s'en déduit facilement :



2) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$.

$$a^b = b^a \Leftrightarrow \ln(a^b) = \ln(b^a) \Leftrightarrow b\ln a = a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Si $a \geqslant 3$, puisque f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, on a alors $f(a) > f(b)$ et en particulier, $f(a) \neq f(b)$. a n'est alors pas solution.

$a = 1$ n'est évidemment pas solution. Par exemple, $a^b = b^a \Rightarrow 1^b = b^1 \Rightarrow b = 1 = a$ ce qui est exclu.

Donc, nécessairement $a = 2$ et b est un entier supérieur ou égal à 3, et donc à e, vérifiant $f(b) = f(2)$. Comme f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, l'équation $f(b) = f(2)$ a au plus une solution dans $[e, +\infty[$. Enfin, comme $2^4 = 16 = 4^2$, on a montré que :

il existe un et un seul couple (a, b) d'entiers naturels non nuls tel que $a < b$ et $a^b = b^a$, à savoir $(2, 4)$.

Exercice n° 4

1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2 &\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant \ln 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leqslant 2 \text{ et } x \neq -1 \\
&\Leftrightarrow -2 \leqslant \frac{x+1}{2x+1} \leqslant 2 \text{ et } x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} + 2 \geqslant 0 \text{ et } \frac{x+1}{2x+1} - 2 \leqslant 0 \text{ et } x \neq -1 \\
&\Leftrightarrow \frac{5x+3}{2x+1} \geqslant 0 \text{ et } \frac{-3x-1}{2x+1} \leqslant 0 \text{ et } x \neq -1 \\
&\Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \text{ et } \left(\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[\right) \text{ et } x \neq -1 \\
&\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[.}$$

2) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = x\ln\left(\sqrt{x}\right) \Leftrightarrow \ln x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln x \times \sqrt{x}\left(2 - \sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{1,4\}.}$$

3) Pour $x \in]0,+\infty[\setminus\left\{\dfrac{1}{100},\dfrac{1}{10},1\right\}$,

$$\begin{aligned}
\ln_x(10)+2\ln_{10x}(10)+3\ln_{100x}(10)=0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(10)}{\ln x}+2\frac{\ln(10)}{\ln(10x)}+3\frac{\ln(10)}{\ln(100x)}=0\\
&\Leftrightarrow \frac{(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))+2\ln x(\ln x+2\ln(10))+3\ln x(\ln x+\ln(10))}{\ln x(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))}=0\\
&\Leftrightarrow 6\ln^2 x+10\ln(10)\ln x+2\ln^2(10)=0\\
&\Leftrightarrow \ln x\in\left\{\frac{-5\ln(10)+\sqrt{13\ln^2(10)}}{6},\frac{-5\ln(10)-\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}\right\}\\
&\Leftrightarrow x\in\left\{e^{\left((-5-\sqrt{13})/6\right)\ln(10)},e^{\left((-5+\sqrt{13})/6\right)\ln(10)}\right\}\\
&\Leftrightarrow x\in\left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6},10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6},10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.}$$

4) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2^{2x}-3^{x-\frac12}=3^{x+\frac12}-2^{2x-1} &\Leftrightarrow 2^{2x}+2^{2x-1}=3^{x+\frac12}+3^{x-\frac12}\\
&\Leftrightarrow 2^{2x-1}(2+1)=3^{x-\frac12}(3+1)\Leftrightarrow 3\times 2^{2x-1}=4\times 3^{x-\frac12}\\
&\Leftrightarrow 2^{2x-3}=3^{x-\frac32}\Leftrightarrow (2x-3)\ln 2=\left(x-\frac32\right)\ln 3\\
&\Leftrightarrow x=\frac{3\ln 2-\dfrac32\ln 3}{2\ln 2-\ln 3}\Leftrightarrow x=\frac32.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac32\right\}.}$$

Exercice n° 5

Pour $x>0$, $(x^x)^x=e^{x\ln(x^x)}=e^{x^2\ln x}$ et $x^{(x^x)}=e^{x^x\ln x}$. Par suite,

$$\forall x>0,\ \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=\exp\left(\ln x\left(x^2-x^x\right)\right).$$

Or, $x^2-x^x=-x^x\left(1-x^{2-x}\right)=-e^{x\ln x}(1-e^{(2-x)\ln x})$. Quand x tend vers $+\infty$, $(2-x)\ln x$ tend vers $-\infty$. Donc, $1-e^{(2-x)\ln x}$ tend vers 1 puis x^2-x^x tend vers $-\infty$. Mais alors, $\ln x(x^2-x^x)$ tend vers $-\infty$, puis $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=\exp(\ln x(x^2-x^x))$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}=0.}$$

Exercice n° 6

On notera $\mathscr{C}_i$ le graphe de f_i.

1) Soit $x>0$. x n'est pas nul donc $\dfrac1x$ existe puis $1+\dfrac1x>0$ et $f_1(x)$ existe.

Etude en 0. Pour $x>0$, $x\ln\left(1+\dfrac1x\right)=-x\ln x+x\ln(1+x)$. Par suite, $x\ln\left(1+\dfrac1x\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $f_1(x)=\exp\left(x\ln\left(1+\dfrac1x\right)\right)$ tend vers 1. Ainsi, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f_1(x)=1$.

Posons encore $f_1(0) = 1$ et étudions la dérivabilité de f_1 en 0. Pour $x > 0$,

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - 1\right) = \frac{\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - 1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Or, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (d'après plus haut) et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - 1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

D'autre part, $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Ainsi, f_1 n'est pas dérivable en 0 mais $\mathscr{C}_1$ admet l'axe des ordonnées pour tangente en $(0, f_1(0)) = (0, 1)$.

Etude en $+\infty$. Pour $x > 0$, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = e.$$

Etude des variations de f_1. Pour $x > 0$, $f_1(x) > 0$ puis $\ln(f_1(x)) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Par suite, pour $x > 0$,

$$f_1'(x) = f_1(x) \times (\ln(f_1))'(x) = f_1(x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}\right) = f_1(x)g(x),$$

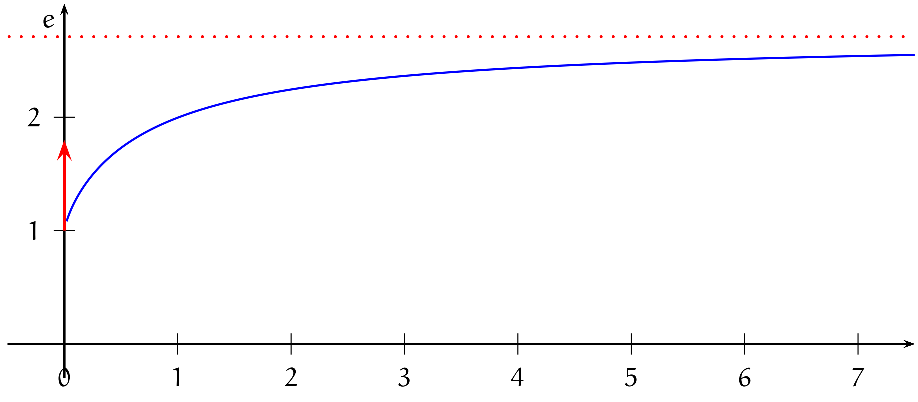
où $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}$. Sur $]0, +\infty[$, f_1' est du signe de g.

Pour déterminer le signe de g, étudions d'abord les variations de g sur $]0, +\infty[$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Il en est de même de f_1'. f_1 est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On en déduit $\mathscr{C}_1$.



2) Domaine de définition de f_2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_2(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } 1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>0 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } \frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln\frac{1}{2}}<1$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } \ln(x^2-5x+6)>\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-5x+6>\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+\frac{11}{2}>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$$

f_2 est définie sur $D = \left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.

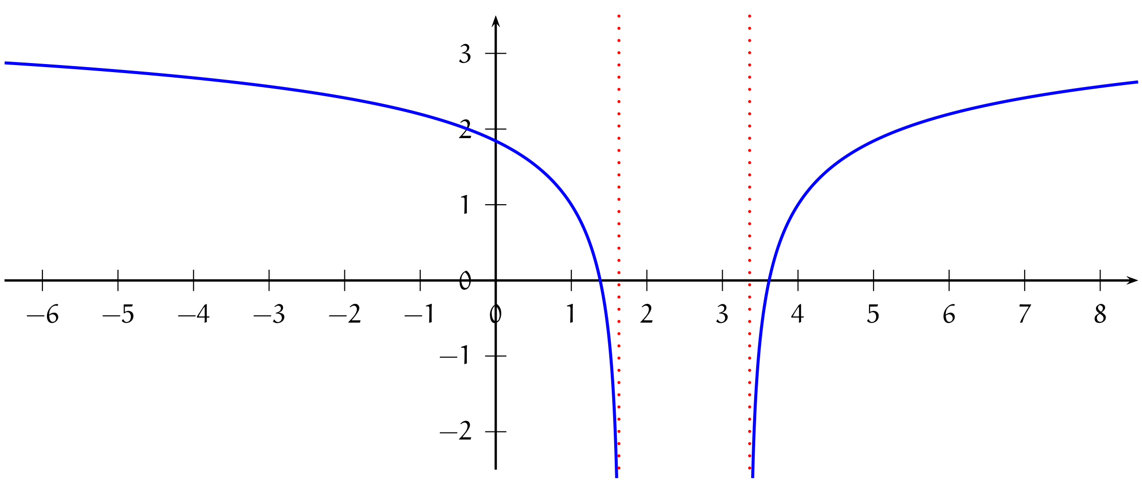
Variations de f_2. La fonction $x \mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$. Comme $\frac{5+\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{2}$ et que $\frac{5-\sqrt{3}}{2} < \frac{5}{2}$, la fonction $x \mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme népérien est strictement croissante. La fonction $x \mapsto 1+\frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln 2}$ a le même sens de variations et finalement f_1 est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.

Axe de symétrie Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D \Leftrightarrow \frac{5}{2}-x \in D$ et de plus, $\left(\frac{5}{2}-x\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}-x\right)+6 = x^2-5x+6$. Par suite,

$$\forall x \in D,\ f_1\left(\frac{5}{2}-x\right) = f_1(x).$$

$\mathscr{C}_1$ admet donc la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ pour axe de symétrie.

Le calcul des limites est facile et on en déduit $\mathscr{C}_2$.



Exercice n° 7

Pour tout $x \in]0,1[$, x et $1-x$ sont strictement positifs et donc $x^x(1-x)^{1-x}$ existe.

Par stricte croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, il est équivalent de démontrer que

$$\forall x \in]0,1[,\ x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2).$$

Pour $x \in]0,1[$, posons $f(x) = x\ln(x)+(1-x)\ln(1-x)$. f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout x de $]0,1[$,

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x} = \ln(x) - \ln(1-x).$$

Pour $x \in]0,1[$,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln(1-x) \Leftrightarrow x > 1-x \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ et négative sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. La fonction f admet donc un minimum en $\frac{1}{2}$ et ce minimum est égal à

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

Ceci montre que $\forall x \in]0,1[,\ x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x) \geqslant -\ln(2)$ et donc que

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.}$$

Planche n° 12. Fonctions puissances. Corrigé

Exercice n° 1

1) La fonction $u_1 : x \mapsto x^2+1$ est définie sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $f_1 = \sqrt{u_1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $u_1 : x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $f_1 = \sqrt{u_1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $u_2 : x \mapsto x^3+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Donc, la fonction $f_2 = \sqrt[3]{u_2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Etudions la dérivabilité de la fonction f_2 en -1. Pour $x \neq -1$,

$$\frac{f_2(x)-f_2(-1)}{x-(-1)} = \frac{\sqrt[3]{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}}{x+1} = \frac{\sqrt[3]{x^2-x+1}}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2}.$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f_2(x)-f_2(-1)}{x-(-1)} = +\infty$. La fonction f_2 n'est pas dérivable en -1.

En résumé, la fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et pas dérivable en -1.

3) Soit $x\in\mathbb{R}$. $f_3(x)$ existe $\Leftrightarrow x^3-x^4 \geqslant 0$. Or, pour tout réel x,

$$\operatorname{sgn}\left(x^3-x^4\right) = \operatorname{sgn}\left(x^3(1-x)\right) = \operatorname{sgn}\left(x(1-x)\right).$$

Donc, pour tout réel x, $f(x)$ existe si et seulement si $x\in[0,1]$. Le domaine de définition de la fonction f_3 est $[0,1]$.

La fonction $u_3 : x\mapsto x^3-x^4$ est dérivable sur $]0,1[$ et strictement positive sur $]0,1[$. Donc, la fonction $f_3 = \sqrt{u_3}$ est dérivable sur $]0,1[$.

Dérivabilité en 0 (à droite). Pour $x\in]0,1]$,

$$\begin{aligned}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} &= \frac{\sqrt{x^3(1-x)}}{x} = \frac{\sqrt{x^3}\sqrt{1-x}}{x} \text{ (car } x^3\geqslant 0 \text{ et } 1-x\geqslant 0)\\ &= \frac{x^{3/2}}{x}\sqrt{1-x} = \sqrt{x}\sqrt{1-x}.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = 0$. La fonction f_3 est dérivable en 0.

Dérivabilité en 1 (à gauche). Pour $x\in[0,1[$,

$$\begin{aligned}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} &= \frac{\sqrt{x^3(1-x)}}{x-1} = -\frac{\sqrt{x^3}\sqrt{1-x}}{1-x}\\ &= -\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = -\infty$. La fonction f_3 n'est pas dérivable en 1.

En résumé, la fonction f_3 est définie sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$ et pas dérivable en 1.

Exercice n° 2

1) Pour tout réel x, $f_1(x) = \sqrt{x^2+1}$ puis

$$f_1'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2) Pour tout réel x, $f_2(x) = \left(x^3+1\right)^{1/3}$ puis, pour tout réel x différent de -1,

$$f_2'(x) = \frac{1}{3}\times\left(3x^2\right)\times\left(x^3+1\right)^{-2/3} = \frac{x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}.$$

3) Pour tout réel x, $f_3(x) = \left(x^2+x+1\right)^{-3/4}$ puis pour tout réel x

$$f_3'(x) = -\frac{3}{4} \times (2x+1) \times \left(x^2+x+1\right)^{-7/4} = -\frac{3(2x+1)}{4\left(\sqrt[4]{x^2+x+1}\right)^7}.$$

4) Pour tout réel x, $f_4(x) = x\left(x^2+1\right)^{-1/2}$ puis, pour tout réel x

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= 1 \times \left(x^2+1\right)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)\left(x^2+1\right)^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

5) f_5 est définie sur $]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$, dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$,

$$f_5'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}} = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^{3/2}(x-1)^{1/2}} \text{ si } x > 1 \\ \dfrac{1}{(-1-x)^{3/2}(1-x)^{1/2}} \text{ si } x < -1 \end{cases}.$$

Exercice n° 3

1) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) = +\infty$.

• Pour tout $x < 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1}+x &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-x} = \frac{x+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-x} \\ &= \frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)} = \frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) = -\frac{1}{2}$.

2) Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3+1}-x &= \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2} = \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}. \end{aligned}$$

Le dénominateur de cette fraction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right) = 0$.

3) • **1 ère solution.** Pour $x \geqslant -\frac{7}{2}$ et $x \neq 1$,

$$\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = \frac{\left(\sqrt{2x+7}-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)} = \frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)} = \frac{2}{\sqrt{2x+7}+3}$$

et donc $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = \frac{1}{3}$.

2 ème solution. Pour $x \geqslant -\dfrac{7}{2}$, posons $f(x) = \sqrt{2x+7}$. Pour $x \geqslant -\dfrac{7}{2}$ et $x \neq 1$,

$$\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

f est dérivable en 1 et donc $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1} = f'(1) = \frac{2}{2\sqrt{2\times 1+7}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

• **1 ère solution.** Pour $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$ et $x \neq -2$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+5}-1}{\sqrt{3x+15}-3} &= \frac{\left(\sqrt{2x+5}-1\right)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)\left(\sqrt{3x+15}+3\right)}{\left(\sqrt{3x+15}-3\right)\left(\sqrt{3x+15}+3\right)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)} = \frac{(2x+4)\left(\sqrt{3x+15}+3\right)}{(3x+6)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)}\\ &= \frac{2\left(\sqrt{3x+15}+3\right)}{3\left(\sqrt{2x+5}+1\right)}\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{2x+5}-1}{\sqrt{3x+15}-3} = \frac{2\times 6}{3\times 2} = 2$.

2 ème solution. Pour $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$, posons $f(x) = \sqrt{2x+5}$ et $g(x) = \sqrt{3x+15}$. Pour $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$ et $x \neq -2$,

$$\frac{\sqrt{2x+5}-1}{\sqrt{3x+15}-3} = \frac{\sqrt{2x+5}-1}{x+2} \times \frac{x+2}{\sqrt{3x+15}-3} = \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \times \frac{x-(-2)}{g(x)-g(-2)}.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{2x+5}-1}{\sqrt{3x+15}-3} = \frac{f'(-2)}{g'(-2)} = \frac{\dfrac{2}{2\sqrt{2\times(-2)+5}}}{\dfrac{3}{2\sqrt{3\times(-2)+15}}} = 2$.

Exercice n° 4

Domaine de définition. Soit x un réel. $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 1$ et $\dfrac{x^3}{x-1} \geqslant 0$.

Pour $x \neq 1$, $\dfrac{x^3}{x-1}$ a le même signe que $x(x-1)$. Donc pour $x \neq 1$, $\dfrac{x^3}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

$$\text{f est définie sur } D =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[.$$

Dérivabilité en 0 à gauche. Soit $x < 0$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2\times x}{x-1}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $-\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ tend vers 0 et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$.

$$\text{f est donc dérivable (à gauche) en 0 et } f'(0) = 0.$$

Etude en $+\infty$. Pour $x > 1$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}} = \frac{x}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}.$$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Ensuite, pour $x > 1$,

$$f(x) - x = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} - x = x\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} - 1\right) = x\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1\right)}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1}$$

$$= x\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1} = x\frac{\frac{1/x}{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1}.$$

L'expression précédente tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

Etude en $-\infty$. Pour $x < 0$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = -\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Ensuite, pour $x < 0$,

$$f(x) + x = -\frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + x = -\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} + 1}.$$

L'expression précédente tend vers $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc $f(x) - \left(-x - \frac{1}{2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$. On en déduit que la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$.

Dérivée et variations. Pour $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^3}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x|^3}{|x-1|}\right) = \frac{1}{2}\left(3\ln(|x|) - \ln(|x-1|)\right)$$

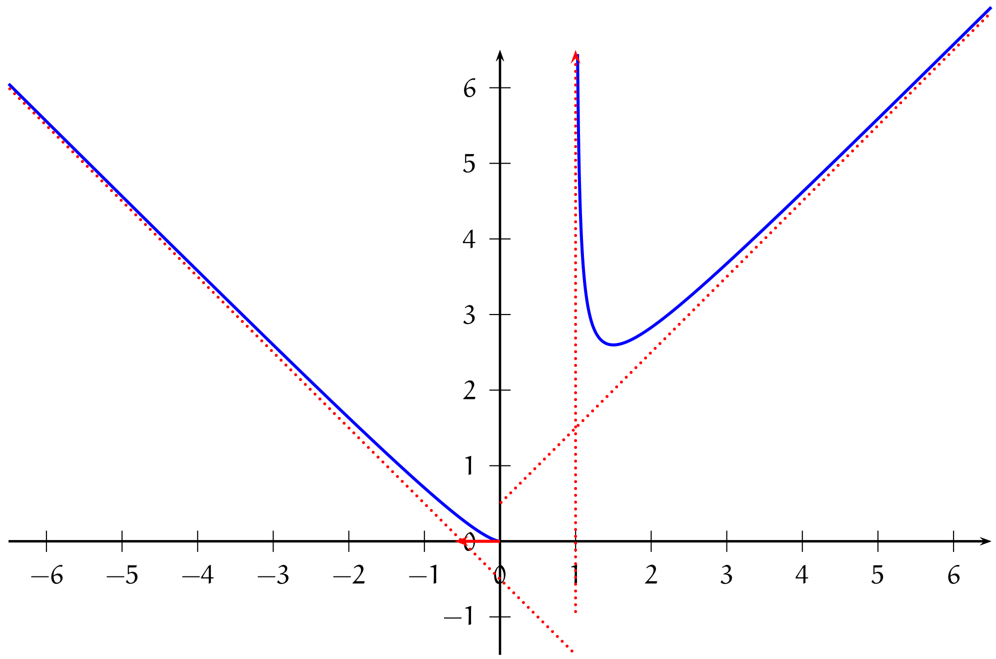
puis

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{2x-3}{2x(x-1)}.$$

Pour $x \in D$, $f(x) > 0$ et $x(x-1) > 0$, donc pour tout x de D, $f(x)$ est du signe de $2x - 3$. On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe.



Exercice n° 6 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2^{4\cos^2 x+1} + 16.2^{4\sin^2 x-3} = 20 &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1} + 16 \times 2^{1-4\cos^2 x} = 20 \Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} - 10 + 16 \times 2^{-4\cos^2 x} = 0 \\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} - 10 + \frac{16}{2^{4\cos^2 x}} = 0 \Leftrightarrow (2^{4\cos^2 x})^2 - 10 \times 2^{4\cos^2 x} + 16 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x} = 2 \text{ ou } 2^{4\cos^2 x} = 8 \Leftrightarrow 4\cos^2 x = 1 \text{ ou } 4\cos^2 x = 3 \\
&\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right).
\end{aligned}$$

Planche n° 13. Fonctions trigonométriques. Corrigé

Exercice n° 1

1) La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire. On l'étudie et on construit son graphe sur $[0, \pi]$. On obtient ensuite son graphe complet par réflexion d'axe (Oy), ce qui fournit son graphe sur $[-\pi, \pi]$, puis par translations de vecteur $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction f_1 est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout x de $[0, \pi]$

$$f_1'(x) = -2\sin(x) - 2\sin(2x) = -2\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = -2\sin(x)(1 + 2\cos(x)).$$

La fonction sinus s'annule en 0 et π et est strictement positive sur $]0, \pi[$. Donc la fonction f_1' est du signe de $-1 - 2\cos(x)$ sur $]0, \pi[$. Ensuite, pour $x \in]0, \pi[$,

$$-1 - 2\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3},$$

et

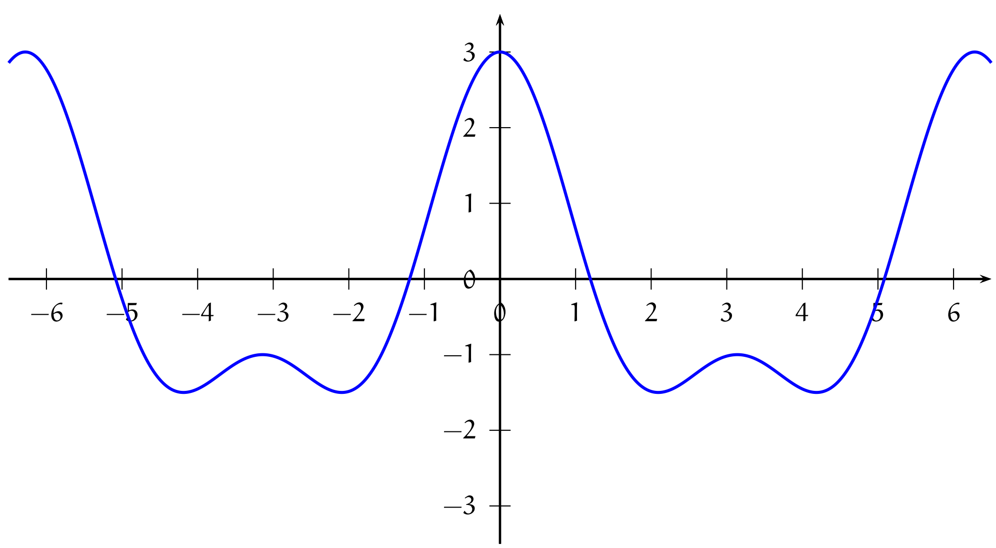
$$-1 - 2\cos(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{2\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } \cos \text{ sur } [0, \pi].)$$

Ainsi, la fonction f_1' est strictement négative sur $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$, strictement positive sur $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ et s'annule en 0, $\frac{2\pi}{3}$ et π.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_1 sur $[0, \pi]$:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f_1'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f_1	3	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1

Graphe de f_1.



2) Pour tout réel x, $2 - \cos(x) \neq 0$ et donc, la fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire. On l'étudie sur $[0, \pi]$.

La fonction f_2 est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout x de $[0, \pi]$

$$f_2'(x) = \frac{\cos(x)(2 - \cos(x)) - \sin(x)(\sin(x))}{(2 - \cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}.$$

La fonction f_2' est du signe de $2\cos(x) - 1$ sur $[0, \pi]$. Ensuite, pour $x \in [0, \pi]$,

$$2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3},$$

et

$$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } \cos \text{ sur } [0, \pi].)$$

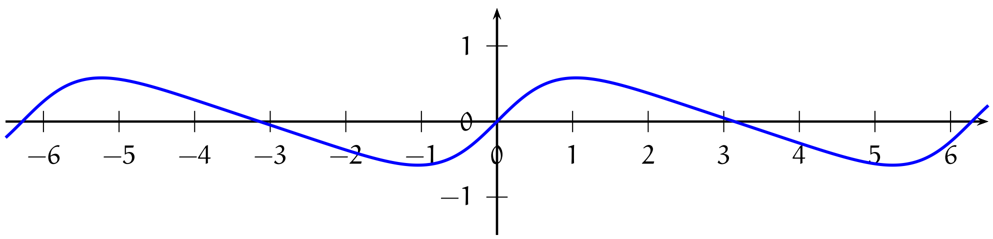
Ainsi, la fonction f_2' est strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{3}$. On note que

$$f_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57\ldots$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_2 :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

Graphe de f_2.



3) f_3 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, paire et 2π-périodique. f_3 est continue sur D en tant que somme de fonctions continues sur D. On étudie f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_3(x) = \tan x + \cos x$ et si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_3(x) = -\tan x + \cos x$.

Etude en $\frac{\pi}{2}$. $\lim_{x \to \pi/2} |\tan x| = +\infty$ et $\lim_{x \to \pi/2} \cos x = 0$. Donc, $\lim_{x \to \pi/2} f(x) = +\infty$. La courbe représentative de la fonction f_3 admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.

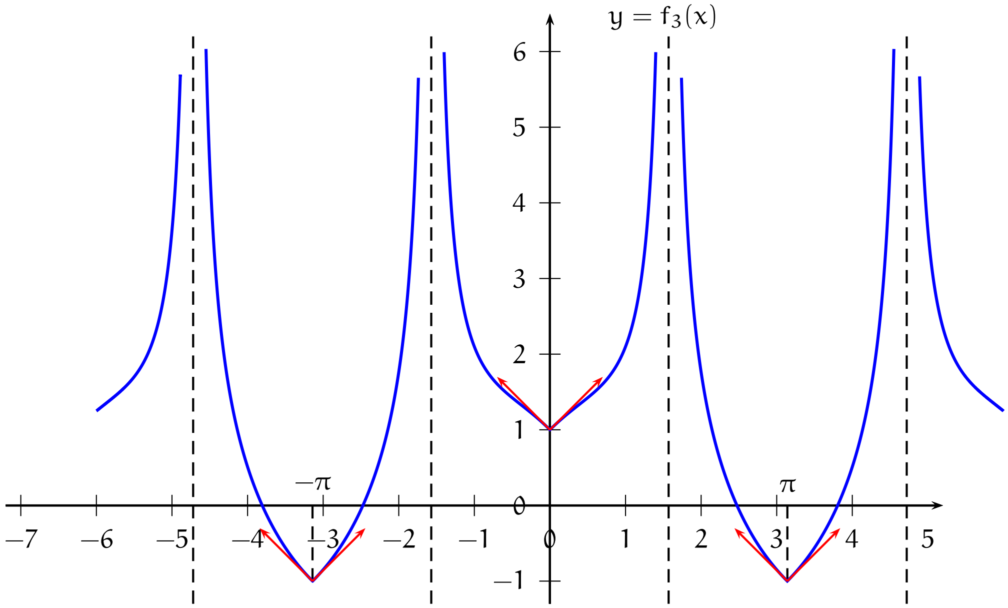
Dérivabilité et dérivée. f_3 est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$ et pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_3'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$.
f_3 est dérivable à droite en 0 et $(f_3)_d'(0) = 1$. Par symétrie, f_3 est dérivable à gauche en 0 et $(f_3)_g'(0) = -1$. f_3 n'est pas dérivable en 0.
De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_3)_g'(\pi) = -1$ et $(f_3)_d'(\pi) = 1$, et n'est donc pas dérivable en π.

Variations. f_3 est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Puis, pour x élément de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 1 - 1 = 0.$$

La fonction f_3' est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc la fonction f_3 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Graphe de f_3.



4) La fonction f_4 est 2π-périodique. On l'étudie sur $[-\pi, \pi]$. Pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$2\cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}.$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $f_4(x)$ existe si et seulement si $x \neq -\frac{2\pi}{3}$ et $x \neq \frac{2\pi}{3}$. On étudie la fonction f_4 sur $D = \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

Etude en $\frac{2\pi}{3}$. Quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $2\cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs supérieures et quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs supérieures, $2\cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs inférieures. D'autre part, quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$, $2\sin(x) + 1$ tend vers $\sqrt{3} + 1$ qui est strictement positif. On en déduit que

$$\lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^-} f_4(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to \frac{2\pi}{3}^+} f_4(x) = -\infty.$$

Etude en $-\frac{2\pi}{3}$. Quand x tend vers $-\frac{2\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $2\cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs supérieures, $2\cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs supérieures. D'autre part, quand x tend vers $-\frac{2\pi}{3}$, $2\sin(x) + 1$ tend vers $-\sqrt{3} + 1$ qui est strictement négatif. On en déduit que

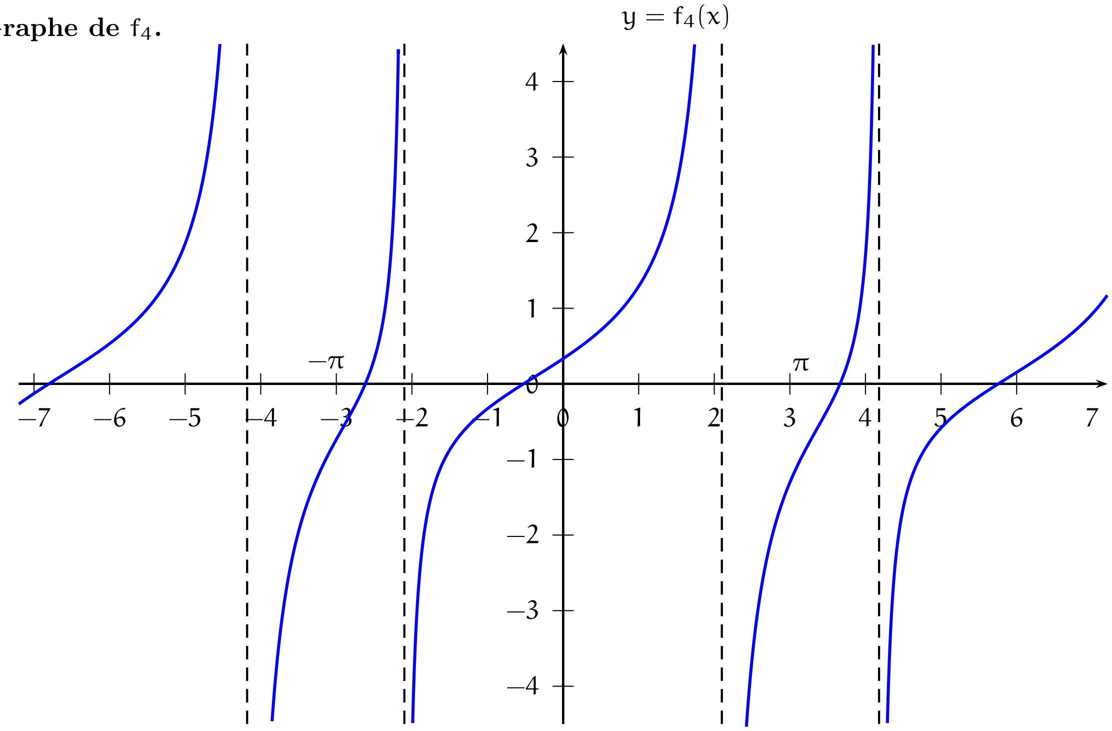
$$\lim_{x \to -\frac{2\pi}{3}^-} f_4(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\frac{2\pi}{3}^+} f_4(x) = -\infty.$$

Dérivée. La fonction f_4 est dérivable sur D et pour tout x de D,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{(2\cos(x))(2\cos(x) + 1) - (2\sin(x) + 1)(-2\sin(x))}{(2\cos(x) + 1)^2} = \frac{4 + 2\cos(x) + 2\sin(x)}{(2\cos(x) + 1)^2} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right)}{(2\cos(x) + 1)^2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{(2\cos(x) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout x de D, $4 + 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 4 - 2\sqrt{2} > 0$ et donc la fonction f_4' est strictement positive sur D. La fonction f_4 est donc strictement croissante sur $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[$ et sur $\left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ (mais pas sur $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$).

Graphe de f_4.



Exercice n° 2

1) Pour x réel , on a :

$$\begin{aligned}
\cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)^4\left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)^6\\
&= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\\
&= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix}-2e^{8ix}-3e^{6ix}+8e^{4ix}+2e^{2ix}-12+2e^{-2ix}+8e^{-4ix}-3e^{-6ix}-2e^{-8ix}+e^{-10ix})\\
&= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)\\
&= -\frac{1}{512}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6).
\end{aligned}$$

(**Remarque.** La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc obligatoire. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix}, e^{-4ix},... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix}, e^{4ix},...) Par suite,

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{512}\left(\left[\frac{\sin 10x}{10}-\frac{\sin 8x}{4}-\frac{\sin 6x}{2}+2\sin 4x+\sin 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}-6\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{512}\left(-\frac{1}{4}\times\sqrt{3}+2\left(-\sqrt{3}\right)-\pi\right)=\frac{9\sqrt{3}+4\pi}{2048}.
\end{aligned}$$

2) Pour x réel, on a

$$\begin{aligned}
\cos^4 x\sin^7 x &= \cos^4 x\sin^6 x\times\sin x = \cos^4 x(1-\cos^2 x)^3\sin x\\
&= \cos^4 x\sin x - 3\cos^6 x\sin x + 3\cos^8 x\sin x - \cos^{10} x\sin x.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{3} + \frac{\cos^{11} x}{11}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= -\frac{1}{5} \times \frac{1}{32}(1 - 9\sqrt{3}) + \frac{3}{7} \times \frac{1}{128}(1 - 27\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{512}(1 - 81\sqrt{3}) + \frac{1}{11} \times \frac{1}{2048}(1 - 243\sqrt{3}) \\
&= \frac{1}{2^{11} \times 3 \times 5 \times 7 \times 11}(-14784(1 - 9\sqrt{3}) + 7920(1 - 27\sqrt{3}) - 1540(1 - 81\sqrt{3}) + 105(1 - 243\sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2\ 365\ 440}(-8299 + 18441\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Exercice n° 3

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$n et pour tout réel x,

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = \left((1+i)^2 - 2(1+i) + 2\right) e^{(1+i)x} = (1 + 2i - 1 - 2 - 2i + 2)e^{(1+i)x} = 0.$$

Planche n° 14. Fonctions trigonométriques réciproques. Corrigé

Exercice n° 1

1) $\text{Arcsin}\, x$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\sin(\text{Arcsin}\, x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et

$$\text{pour tout } x \text{ de } [-1,1],\ \sin(\text{Arcsin}\, x) = x.$$

2) $\text{Arcsin}(\sin x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x - 2k\pi < \dfrac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(x - 2k\pi)) = x - 2k\pi.$$

De plus, on a $k \leqslant \dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{1}{4} < k + \dfrac{1}{2}$ et donc $k = \left\lfloor \dfrac{x}{2\pi} + \dfrac{1}{4} \right\rfloor$ puis

$$\text{Arcsin}(\sin x) = x - 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{4} \right\rfloor.$$

• S'il existe un entier relatif k tel que $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors $-\dfrac{\pi}{2} < \pi - x + 2k\pi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x + 2k\pi)) = \pi - x + 2k\pi.$$

De plus, $k \leqslant \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{1}{4} < k + \dfrac{1}{2}$ et donc $k = \left\lfloor \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{1}{4} \right\rfloor$ puis

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \pi - x + 2\pi \left\lfloor \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{4} \right\rfloor.$$

3) $\text{Arccos}\, x$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\cos(\text{Arccos}\, x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et

$$\text{pour tout } x \text{ dans } [-1,1],\ \cos(\text{Arccos}\, x) = x.$$

4) $\text{Arccos}(\cos x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[0,\pi]$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $2k\pi \leqslant x < \pi + 2k\pi$, alors $\text{Arccos}(\cos x) = x - 2k\pi$ avec $k = \left\lfloor \dfrac{x}{2\pi} \right\rfloor$.

• S'il existe un entier relatif k tel que $-\pi + 2k\pi \leqslant x < 2k\pi$ alors $\text{Arccos}(\cos x) = \text{Arccos}(\cos(2k\pi - x)) = 2k\pi - x$ avec $k = \left\lfloor \dfrac{x+\pi}{2\pi} \right\rfloor$.

5) Pour tout réel x, $\tan(\text{Arctan}\, x) = x$.

6) $\text{Arctan}(\tan x)$ existe si et seulement si x n'est pas dans $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et pour ces x, il existe un unique entier relatif k tel que $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Dans ce cas, $\text{Arctan}(\tan x) = \text{Arctan}(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi$ avec $k = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$.

Exercice n° 2

1) 1ère solution. Posons $f(x) = \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x$ pour x dans $[-1,1]$.

f est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. De plus, pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur $]-1,1[$ puis sur $[-1,1]$ par continuité de f en -1 et en 1. Pour tout x de $[-1,1]$, $f(x) = f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}.}$$

2ème solution. Il existe un unique réel θ dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$, à savoir $\theta = \text{Arccos}\, x$. Puisque $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, on a encore $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ puis $\text{Arcsin}(\cos\theta) = \text{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ et donc

$$\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \text{Arccos}(\cos\theta) + \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

2) **1ère solution**. Pour x réel non nul, posons $f(x) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x}$. Notons que f est impaire.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour x non nul, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 0$. f est donc constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}^*$). Donc, pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 = \dfrac{\pi}{2}$, et puisque f est impaire, pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\dfrac{\pi}{2}$ (on peut aussi écrire que f est constante sur $]-\infty, 0[$ et donc que pour $x < 0$, $f(x) = f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$). Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(x).}$$

On doit noter que la dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}^*$ mais que f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

2ème solution Pour x réel strictement positif donné, il existe un unique réel θ dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$ à savoir $\theta = \mathrm{Arctan}\,x$. Mais alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} &= \mathrm{Arctan}(\tan\theta) + \mathrm{Arctan}(\mathrm{cotan}\,\theta) = \mathrm{Arctan}(\tan\theta) + \mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)\\ &= \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(car θ et $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ sont éléments de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.)

3) $\cos^2(\mathrm{Arctan}\,a) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arctan}\,a)} = \dfrac{1}{1+a^2}$. De plus , $\mathrm{Arctan}\,a$ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(\mathrm{Arctan}\,a) > 0$. On en déduit que pour tout réel a, $\cos(\mathrm{Arctan}\,a) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Ensuite,

$$\sin(\mathrm{Arctan}\,a) = \cos(\mathrm{Arctan}\,a)\tan(\mathrm{Arctan}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(\mathrm{Arctan}\,a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \text{ et } \sin(\mathrm{Arctan}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

4) D'après 3),

$$\cos(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) = \cos(\mathrm{Arctan}\,a)\cos(\mathrm{Arctan}\,b) - \sin(\mathrm{Arctan}\,a)\sin(\mathrm{Arctan}\,b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà , puisque $ab \neq 1$, que $\cos(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) \neq 0$ et donc que $\tan(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b)$ a un sens. Immédiatement,

$$\tan(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1er cas. Si $ab < 1$ alors $\cos(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) > 0$ et donc $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Dans ce cas, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$.

2ème cas. Si $ab > 1$ alors $\cos(\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b) < 0$ et donc $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$. Si de plus $a > 0$, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b > -\dfrac{\pi}{2}$ et donc $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b$ est dans $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$. Dans ce cas, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b - \pi$ est dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et a même tangente que $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab}$. Donc, $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b - \pi = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab}$ ou encore $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab} + \pi$. Si $a < 0$, on trouve de même $\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-ab} - \pi$.

En résumé,

$$\boxed{\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b = \begin{cases} \text{Arctan}\, \dfrac{a+b}{1-ab} \text{ si } ab < 1 \\ \text{Arctan}\, \dfrac{a+b}{1-ab} + \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \text{Arctan}\, \dfrac{a+b}{1-ab} - \pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}.}$$

Exercice n° 3

Pour x réel, on pose $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\sqrt{t}\, dt$.

La fonction $t \mapsto \text{Arcsin}\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \text{Arcsin}\sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$.

De plus, $x \mapsto \sin^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De même, la fonction $t \mapsto \text{Arccos}\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y \mapsto \int_0^y \text{Arccos}\sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x \mapsto \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\sqrt{t}\, dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x\cos x\,\text{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x}) - 2\sin x\cos x\,\text{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x}) \\ &= 2\sin x\cos x\,(\text{Arcsin}(|\sin x|) - \text{Arccos}(|\cos x|)). \end{aligned}$$

On note alors que f est π-périodique et paire. Pour x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 2\sin x\cos x(x-x) = 0$. f est donc constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \text{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{1/2} \text{Arccos}\sqrt{t} dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\, dt = \frac{\pi}{4}$. Mais alors, par parité et π-périodicité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice n° 4

1) 1ère solution. Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ et donc $-1 < \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}} \times \sqrt{x^2+1} \\ &= \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctan}'(x). \end{aligned}$$

Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $f_1(x) = \text{Arctan}\, x + C$.
$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \text{Arctan}\, x.}$$

2ème solution. Pour x réel donné, posons $\theta = \text{Arctan}\, x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \sqrt{\cos^2\theta}\tan\theta = \cos\theta\tan\theta \text{ (car } \cos\theta > 0) \\ &= \sin\theta, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \operatorname{Arcsin}(\sin\theta) = \theta \text{ (car } \theta \text{ est dans } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[) \\ &= \operatorname{Arctan} x. \end{aligned}$$

2) 1ère solution. Pour tout réel x, $-1 < -1+\dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant -1+2 = 1$ avec égalité si et seulement si $x=0$. f_2 est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, f_2 est paire. Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\operatorname{Arctan} x + C$ (y compris $x=0$ puisque f est continue en 0).
$x=0$ fournit $C=0$ et donc, pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\operatorname{Arctan} x$. Par parité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan}|x|.}$$

2ème solution. Soit $\theta = \operatorname{Arctan} x$ pour x réel donné. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta(1-\tan^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$\begin{aligned} f_2(x) = \operatorname{Arccos}(\cos(2\theta)) &= \left\{\begin{array}{l} 2\theta \text{ si } \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ -2\theta \text{ si } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right] \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} 2\operatorname{Arctan} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -2\operatorname{Arctan} x \text{ si } x \leqslant 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} 2\operatorname{Arctan} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 2\operatorname{Arctan}(-x) \text{ si } x \leqslant 0 \end{array}\right. \\ &= 2\operatorname{Arctan}|x|. \end{aligned}$$

3) La fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ car pour x élément de $[-1,1]$, $1-x^2$ est élément de $[0,1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0).
$\dfrac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $]-1,1]$, et nul si et seulement si $x=1$. f_3 est donc définie et continue sur $]-1,1]$, dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. Pour x dans $]-1,0[\cup]0,1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $]0,1[$, $f_3'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\right)'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $[0,1]$ (par continuité en 0 et en 1) $f_3(x) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + C$. $x=1$ fournit $C = \dfrac{\pi}{4}$. Donc, pour tout x de $[0,1]$

$$f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x.$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ f_3(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x.}$$

Si x est dans $]-1,0[$, $f_3'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\dfrac{3}{2}\operatorname{Arcsin}\right)'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $]-1,0]$ (par continuité) $f_3(x) = \dfrac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x + C'$. $x=0$ fournit $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in]-1,0],\ f_3(x) = \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{\pi}{4}.}$$

4) f_4 est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ et pour x élément de $\mathscr{D}$, on a :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\dfrac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2}\frac{1}{1+\dfrac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0. \end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 0$. Pour $-1 < x < 0$, $f(x) = \lim\limits_{\substack{t\to-1\\ t>-1}} f(t) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Arctan} 2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.
Pour $x < -1$, $f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\},\ f_4(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \pi \text{ si } x \in]-1,0[\end{array}\right. .}$$

Exercice n° 5

$0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} < \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2}$ et

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right) = \frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{5}} = \frac{7}{9}.$$

Comme $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a donc $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{7}{9}$. De même, $\operatorname{Arctan}\frac{7}{9}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{8} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}\right) = \frac{\dfrac{7}{9}+\dfrac{1}{8}}{1-\dfrac{7}{9}\times\dfrac{1}{8}} = \frac{65}{65} = 1,$$

et donc $\operatorname{Arctan}\frac{7}{9} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice n° 6

(On va retrouver le résultat de l'exercice n° 2 dans un cas particulier) Soient a et b deux réels positifs.
Alors, $\operatorname{Arctan} a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{Arctan} b \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\tan(\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b) = \frac{\tan(\operatorname{Arctan} a) - \tan(\operatorname{Arctan} b)}{1+\tan(\operatorname{Arctan} a)\tan(\operatorname{Arctan} b)} = \frac{a-b}{1+ab},$$

et donc, puisque $\operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\boxed{\forall a \geqslant 0,\ \forall b \geqslant 0,\ \operatorname{Arctan} a - \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).}$$

Soit alors k un entier naturel non nul. $\operatorname{Arctan}\dfrac{2}{k^2}=\operatorname{Arctan}\dfrac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)}=\operatorname{Arctan}(k+1)-\operatorname{Arctan}(k-1)$ (puisque $k-1$ et $k+1$ sont positifs). Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned}u_n&=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{Arctan}(k+1)-\operatorname{Arctan}(k-1))=\sum_{k=2}^{n+1}\operatorname{Arctan}k-\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Arctan}k\\&=\operatorname{Arctan}(n+1)+\operatorname{Arctan}n-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

La limite de u_n vaut donc $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\frac{2}{k^2}=\frac{3\pi}{4}.}$$

Exercice n° 7

1) f est définie et dérivable sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

2) Pour x élément de $\mathscr{D}$,

$$f'(x)=2x\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1}+(x^2-1)\frac{-2}{(2x-1)^2}\times\frac{1}{1+\dfrac{1}{(2x-1)^2}}=2x\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1}-\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x)=2xg(x)$ où $g(x)=\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x}\dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3) Pour x élément de $\mathscr{D}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\frac{1}{2x^2-2x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x(2x^3-2x^2+x)-(x^2-1)(6x^2-4x+1)}{x^2(2x^2-2x+1)^2}\\&=\frac{-2x^2(2x^2-2x+1)+2x^4-7x^2+4x-1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}=-\frac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+1}{2x^2(2x^2-2x+1)^2}.\end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4-4x^3+9x^2-4x+1=2x^2(x-1)^2+7x^2-4x+1=2x^2(x-1)^2+7\left(x-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7}>0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$, sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$. En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$. Quand x tend vers $\dfrac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}<0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$ en un certain réel x_0 de $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$. g est de plus strictement négative sur $\left]x_0,\dfrac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0,x_0[$. Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $]-\infty,0[$.

4) Enfin, puisque $f'(x)=2xg(x)$ pour $x\neq 0$, on a les résultats suivants :

sur $]-\infty,0[$, $f'>0$, sur $]0,x_0[$, $f'>0$, sur $\left]x_0,\dfrac{1}{2}\right[$, $f'<0$, sur $]\dfrac{1}{2},+\infty[$, $f'>0$. Comme $f'(0)=1>0$, on a donc : sur $]-\infty,x_0[$, $f'>0$, sur $\left]x_0,\dfrac{1}{2}\right[$, $f'<0$ et sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, $f'>0$. f est strictement croissante sur $]-\infty,x_0]$ et sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left[x_0,\dfrac{1}{2}\right[$.

Exercice n° 8

1) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin(2\operatorname{Arcsin}x)=2\sin(\operatorname{Arcsin}x)\cos(\operatorname{Arcsin}x)=2x\sqrt{1-x^2}$.

2) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\cos(2\,\text{Arccos}\,x) = 2\cos^2(\text{Arccos}\,x) - 1 = 2x^2 - 1$.

3) Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin^2\left(\dfrac{\text{Arccos}\,x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(\text{Arccos}\,x)) = \dfrac{1-x}{2}$.

Exercice n° 9

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\text{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi.$$

$\mathscr{S} = \left(\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\text{Arccos}\left(\dfrac{1}{3}\right) + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin(2x) = -\frac{1}{4} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = -\text{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = \pi + \text{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + k\pi.\end{aligned}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\tan(x) = 3 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \text{Arctan}(3) + k\pi.$$

4) Une solution est nécessairement dans $[-1,1]$ et même dans $[0,1]$.
La fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $[0,1]$. La fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$. Comme $\dfrac{\pi}{4} \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, l'équation proposée a une solution et une seule et cette solution est dans $[0,1]$.
Si $\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ alors $\sin\left(\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Réciproquement, puisque $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant \text{Arcsin}(1) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$. Dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, il y a un nombre et un seul dont le sinus vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ à savoir $\dfrac{\pi}{4}$. Donc, pour x dans $[0,1]$,

$$\begin{aligned}\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow \sin\left(\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow x^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^2}{4}(1-x^2) + x^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1-x^2)} = \frac{1}{2} \\ &\text{(car le premier membre de l'équation initiale est positif)} \\ &\Leftrightarrow x^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1-x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{5x^2}{4} + \frac{x^4}{2} \\ &\Leftrightarrow 16x^4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1-x^2) = \left(2x^4 - 5x^2 + 2\right)^2 \text{ et } 2x^4 - 5x^2 + 2 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^8 - 20x^6 + 16x^4 = 4x^8 - 20x^6 + 33x^4 - 20x^2 + 4 \text{ et } x^2 \notin \left]\frac{1}{2}, 2\right[\\ &\Leftrightarrow 17x^4 - 20x^2 + 4 = 0 \text{ et } x^2 \notin \left]\frac{1}{2}, 2\right[\Leftrightarrow x^2 \in \left\{\frac{10 - \sqrt{32}}{17}, \frac{10 + \sqrt{32}}{17}\right\} \text{ et } x^2 \notin \left]\frac{1}{2}, 2\right[\\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{10 - \sqrt{32}}{17} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}} \text{ (car } x \geqslant 0).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\sqrt{\frac{10-4\sqrt{2}}{17}}\right\}.}$$

5) Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Soit donc x un réel de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin}(2x)=\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right) &\Rightarrow \sin(\operatorname{Arcsin}(2x))=\sin\left(\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow 2x=x\sqrt{1-\left(x\sqrt{2}\right)^2}+x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \sqrt{1-2x^2}+\sqrt{2-2x^2}=2\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 1-2x^2+2-2x^2+2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)}=4\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)}=1+4x^2\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 4(4x^4-6x^2+2)=(4x^2+1)^2\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 32x^2=7 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x=-\sqrt{\frac{7}{32}}
\end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x, la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2=\frac{14}{64}\leqslant\frac{16}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$) et de plus $\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2})$ est dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Or,

$$0\leqslant\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}}+\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{7}{32}}\times\sqrt{2}\right)=\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}}+\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{16}}\leqslant 2\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{8}{16}}=2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}$$

et donc $\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}}+\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{7}{32}}\times\sqrt{2}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. De même, par parité, $\operatorname{Arcsin}\left(-\sqrt{\frac{7}{32}}\right)+\operatorname{Arcsin}\left(-\sqrt{\frac{7}{32}}\times\sqrt{2}\right)\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ ce qui achève la résolution.

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{0,-\frac{\sqrt{14}}{8},\frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.}$$

6) Soit $x\in\mathbb{R}$. $\operatorname{Arcsin}x$ existe si et seulement si $x\in[-1,1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x\in[-1,1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2}\in[-1,1]\\
&\Leftrightarrow x\in[-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2)\in[0,1]\Leftrightarrow x\in[-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2)\leqslant 1\\
&\Leftrightarrow x\in[-1,1] \text{ et } 4x^4-4x^2+1\geqslant 0\Leftrightarrow x\in[-1,1] \text{ et } (2x^2-1)^2\geqslant 0\\
&\Leftrightarrow x\in[-1,1]
\end{aligned}$$

Pour $x\in[-1,1]$, $\sin(2\operatorname{Arcsin}(x))=2\sin(\operatorname{Arcsin}x)\cos(\operatorname{Arcsin}x)=2x\sqrt{1-x^2}=\sin(\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus, $\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Par suite,

$$\begin{aligned}
x \text{ solution} &\Leftrightarrow x\in[-1,1] \text{ et } 2\operatorname{Arcsin}(x)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\
&\Leftrightarrow x\in[-1,1] \text{ et } \operatorname{Arcsin}(x)\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$

7) Par croissance de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$, si $x \leqslant 0$, $\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(x+1) \leqslant \text{Arctan}(-1)+\text{Arctan}(0)+\text{Arctan}(1) = 0$. En particulier, $\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(x+1) \neq \frac{\pi}{2}$. Une solution est donc nécessairement strictement positive.

Soit donc x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned}
\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) \\
&\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \tan\left(\text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1)\right) = \frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \frac{(x-1)+(x+1)}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x} \\
&\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x} \text{ et } \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow 2x^2 = 2-x^2 \text{ et } \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ et } x \notin \left\{0,\sqrt{2}\right\} \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et } \text{Arctan}(x-1)+\text{Arctan}(x+1) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (car Arctan}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right)+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right) = 0,8\ldots \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.}$$

Planche n° 15. Trigonométrie hyperbolique. Corrigé

Exercice n° 1

$$\boxed{\begin{array}{lll}\operatorname{ch}(a+b)=\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b & \text{et} & \operatorname{ch}(a-b)=\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b-\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b,\\ \operatorname{sh}(a+b)=\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b+\operatorname{ch}a\operatorname{sh}b & \text{et} & \operatorname{sh}(a-b)=\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b-\operatorname{sh}b\operatorname{ch}a\\ \operatorname{th}(a+b)=\dfrac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{1+\operatorname{th}a\operatorname{th}b} & \text{et} & \operatorname{th}(a-b)=\dfrac{\operatorname{th}a-\operatorname{th}b}{1-\operatorname{th}a\operatorname{th}b}.\end{array}}$$

Deux démonstrations :

$$\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b=\frac{1}{4}((e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b})+(e^a-e^{-a})(e^b-e^{-b}))=\frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-a-b})=\operatorname{ch}(a+b).$$

$$\operatorname{th}(a+b)=\frac{\operatorname{sh}(a+b)}{\operatorname{ch}(a+b)}=\frac{\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}b\operatorname{ch}a}{\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b}=\frac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{1+\operatorname{th}a\operatorname{th}b}$$

après division du numérateur et du dénominateur par le nombre non nul $\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b$.

En appliquant à $a=b=x$, on obtient :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{ch}(2x)=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=2\operatorname{ch}^2x-1=2\operatorname{sh}^2x+1,\ \operatorname{sh}(2x)=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x\text{ et }\operatorname{th}(2x)=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}.}$$

En additionnant entre elles les formules d'addition, on obtient les formules de linéarisation :

$$\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b)+\operatorname{ch}(a-b)),\ \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b)-\operatorname{ch}(a-b))\text{ et }\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}(a+b)+\operatorname{sh}(a-b)),$$

et en particulier

$$\operatorname{ch}^2x=\frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}\text{ et }\operatorname{sh}^2x=\frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{2}.$$

Exercice n° 2

Dérivée et variations. Pour tout réel x, $\operatorname{ch}x>0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}-1=\operatorname{th}x-1<0.$$

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Etude en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{ch}x=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\operatorname{ch}x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. De plus, pour tout réel x,

$$f(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}-x=\ln(e^x+e^{-x})-\ln 2-x=\ln(e^{-x})-x-\ln 2+\ln(1+e^{2x})=-2x-\ln 2+\ln(1+e^{2x}).$$

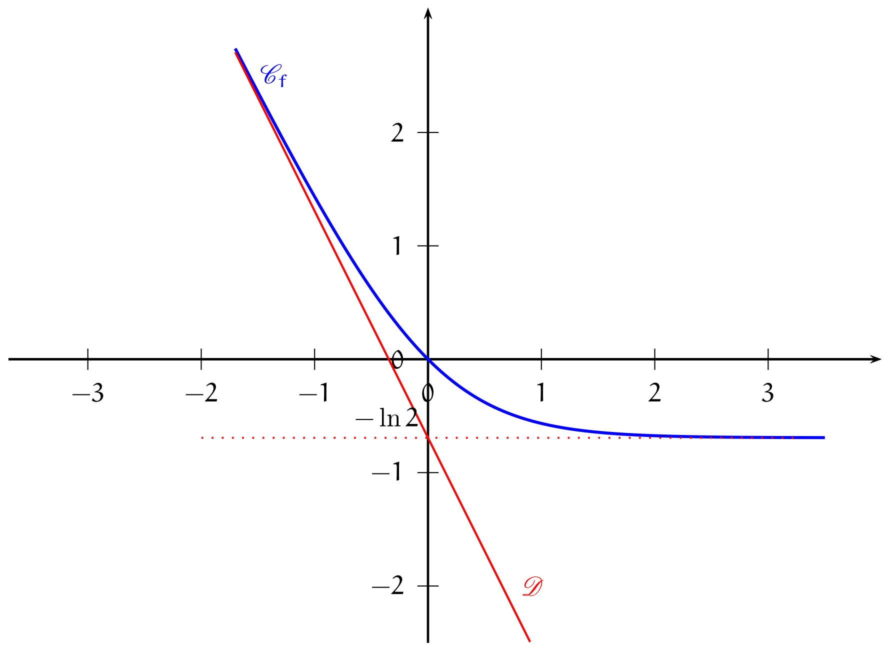
Donc, pour tout réel x, $f(x)-(-2x-\ln 2)=\ln(1+e^{2x})$. D'une part $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{2x})=\ln 1=0$ et donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-2x-\ln 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et d'autre part, pour tout réel x, $\ln(1+e^{2x})>0$ et la courbe représentative de f est strictement au dessus de $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$.

Etude en $+\infty$. Pour tout réel x,

$$f(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}-x=\ln(e^x+e^{-x})-\ln 2-x=\ln(e^x)-x-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})=-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})$$

et f tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que la droite d'équation $y=-\ln 2$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

Graphe.



Exercice n° 3

Soit x un réel.

$$S = \sum_{k=1}^{100} \operatorname{sh}(2+kx) = \frac{1}{2}\left(e^2 \sum_{k=1}^{100} e^{kx} - e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{-kx}\right).$$

Si $x = 0$ alors directement $S = 100 \operatorname{sh} 2 \neq 0$. Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$. Dans ce cas,

$$S = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2}e^{-x}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} + e^{-2}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^x}\right).$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par le réel non nul e^x. Pour $x \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} S = 0 &\Leftrightarrow e^{x+2}\left(1-e^{100x}\right) + e^{-2}\left(1-e^{-100x}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}\left(1-e^{100x}\right) + e^{-2-100x}\left(e^{100x}-1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(1-e^{100x}\right)\left(e^{x+2} - e^{-100x-2}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2} \text{ (car } x \neq 0 \text{ et donc } 1-e^{100x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x+2 = -100x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{101}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{4}{101}\right\}.}$$

Exercice n° 4

1) On a vu dans l'exercice n° 1 que pour tout réel x, $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\dfrac{1+\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th} x} = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou encore $\operatorname{th} x + \dfrac{1}{\operatorname{th} x} = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.}$$

2) Soient n un entier naturel et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

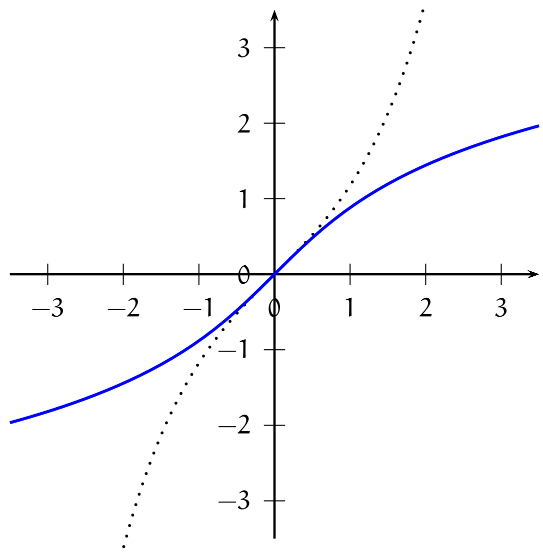
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)}\right) = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x} \text{ (somme télescopique).}$$

Ensuite, pour $x > 0$, $\text{th}(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Exercice n° 5

1) a) La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction sh réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} \text{sh}\, x, \lim\limits_{x\to+\infty} \text{sh}\, x\right[=]-\infty, +\infty[$. sh est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Graphe de argsh**.**



c) Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned} y = \text{argsh}\, x &\Leftrightarrow x = \text{sh}\, y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right) \Leftrightarrow e^y - 2x - e^{-y} = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^y) \\ &\Leftrightarrow e^y \text{ est solution de l'équation } X^2 - 2xX - 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit de l'équation $X^2 - 2xX - 1 = 0$ est $\Delta' = x^2 + 1$. Ce discriminant est toujours strictement positif et donc l'équation $X^2 - 2xX - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $X_1 = x + \sqrt{x^2+1}$ et $X_2 = x - \sqrt{x^2+1}$. Le produit de ces deux deux nombres est égal à -1. Donc, l'un de ces deux nombres est strictement positif et l'autre est strictement négatif. Le positif est le plus grand de ces deux nombres à savoir $X_1 = x + \sqrt{x^2+1}$. Donc

$$\begin{aligned} y = \text{argsh}\, x &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \text{ ou } e^y = x - \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).}$$

d) Pour tout réel x, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ (d'après ce qui précède ou à partir de $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$). Donc, argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$\text{argsh}'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.}$$

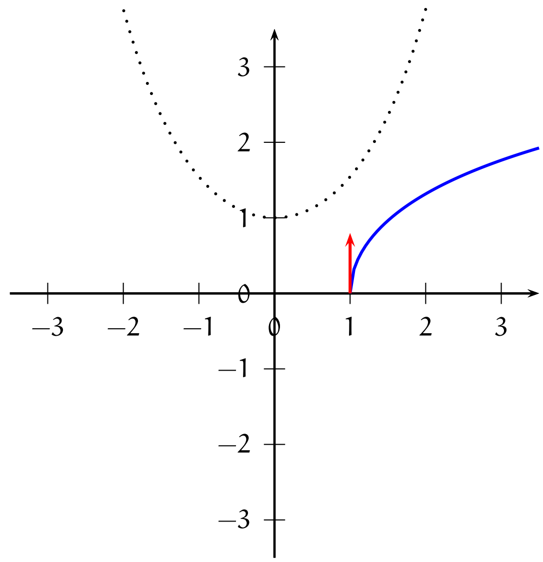
On peut aussi dériver argsh comme une réciproque. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée à savoir $\text{sh}' = \text{ch}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On sait alors que argsh est dérivable sur $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$(\operatorname{argsh})'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

car $\operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh} x) = \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh} x) + 1 = x^2 + 1$ et de plus $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) > 0$.

2) a) La fonction ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction ch réalise donc une bijection de $[, +\infty[$ sur $\left]\operatorname{ch}(0), \lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{ch} t\right[= [1, +\infty[$. ch réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

b) Graphe de argch**.**



c) Soient $x \geqslant 1$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = \operatorname{argch} x &\Leftrightarrow x = \operatorname{ch} y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) \Leftrightarrow e^y - 2x + e^{-y} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(e^y\right)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^y) \\ &\Leftrightarrow e^y \text{ est solution de l'équation } X^2 - 2xX + 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit de l'équation $X^2 - 2xX - 1 = 0$ est $\Delta' = x^2 - 1 \geqslant 0$ (car $x \geqslant 1$). Ce discriminant est toujours positif et donc l'équation $X^2 - 2xX + 1 = 0$ admet deux solutions réelles (éventuellement confondues si $x = 1$) à savoir $X_1 = x + \sqrt{x^2-1}$ et $X_2 = x - \sqrt{x^2-1}$. Le produit de ces deux deux nombres est égal à 1 et leur somme est égale à $2x \geqslant 0$. Donc, ces deux nombres sont strictement positifs. Par suite,

$$\begin{aligned} y = \operatorname{argch} x &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2-1} \text{ ou } e^y = x - \sqrt{x^2-1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \text{ ou } y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right). \end{aligned}$$

Comme le produit X_1X_2 est égal à 1 et que X_1 et X_2 sont strictement positifs, l'un des deux nombres, à savoir X_1 est plus grand que 1 et l'autre, à savoir X_2, est dans $]0, 1]$. Mais alors, $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \geqslant 0$ et $\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \leqslant 0$ (avec égalité à 0 si et seulement si $x = 1$ et dans ce cas, $X_1 = X_2 = 0$).

Comme on ne veut retenir que la solution positive, il ne reste que $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ \operatorname{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).}$$

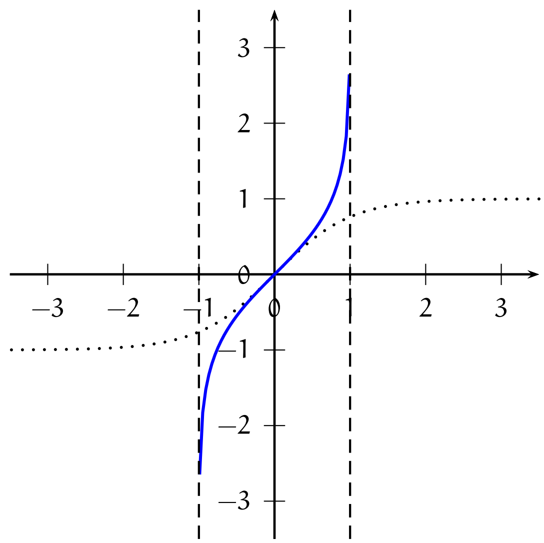
d) argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ (et pas en 1 à droite) et pour tout réel $x > 1$,

$$\operatorname{argch}'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\boxed{\forall x > 1,\ \text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$$

3) a) La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction th réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}\, x, \lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}\, x\right[=]-1, 1[$. th réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

b) Graphe de argth**.**



c) Soient $x \in]-1, 1[$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
y = \text{argth}\, x &\Leftrightarrow x = \text{th}\, y \Leftrightarrow \frac{(e^y - e^{-y})/2}{(e^y + e^{-y})/2} = x \Leftrightarrow e^y - e^{-y} = xe^y + xe^{-y}\\
&\Leftrightarrow e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^y)\\
&\Leftrightarrow (1-x)e^{2y} = 1 + x \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}\\
&\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

d) argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout réel x de $]-1, 1[$,

$$\text{argth}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \text{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.}$$

Exercice n° 6

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 + 1 \geqslant 0$ et donc $\sqrt{x^2+1}$ existe puis

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = \text{Max}\{x, -x\}.$$

Donc, $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ et $\sqrt{x^2+1} - x > 0$. L'expression proposée existe pour tout réel x. De plus,

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln\left(\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right) = \ln\left(x^2 + 1 - x^2\right) = \ln 1 = 0.$$

2) Pour $x > 0$,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}=\frac{1}{2x}\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=1.$$

3) Soit x et y deux réels.

$$\operatorname{sh}^2 x\cos^2 y+\operatorname{ch}^2 x\sin^2 y=\operatorname{sh}^2 x\cos^2 y+(1+\operatorname{sh}^2 x)\sin^2 y=\operatorname{sh}^2 x+\sin^2 y.$$

Exercice n° 7

1) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x=2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=2\Leftrightarrow e^x-4+e^{-x}=0\\&\Leftrightarrow (e^x)^2-4e^x+1=0 \text{ (après multiplication par le réel non nul } e^x)\\&\Leftrightarrow e^x \text{ est solution de l'équation } X^2-4X+1=0.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit de cette équation est $\Delta'=(-2)^2-1=3$. L'équation $X^2-4X+1=0$ admet donc deux solutions réelles distinctes à savoir $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. Ces deux nombres sont strictement positifs et donc

$$\operatorname{ch} x=2\Leftrightarrow e^x=2+\sqrt{3} \text{ ou } e^x=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \text{ ou } x=\ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Remarque. La fonction ch est paire et donc les deux nombres obtenus sont nécessairement opposés l'un de l'autre. C'est effectivement le cas car $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=4-3=1$ et donc

$$\ln\left(2-\sqrt{3}\right)=\ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)=-\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

2) Pour tout réel x, $\operatorname{ch} x\geqslant 1$. En particulier, pour tout réel x, $\operatorname{ch} x\neq\frac{1}{2}$. L'équation proposée n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice n° 8

Soient a et b deux réels et n un entier naturel.

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(ak+b)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ak+b}+\sum_{k=0}^{n}e^{-ak-b}\right)=\frac{1}{2}\left(e^b\sum_{k=0}^{n}(e^a)^k+e^{-b}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-a}\right)^k\right)$$

1er cas. Si $a=0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(ak+b)=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(b)=(n+1)\operatorname{ch}(b)$.

2ème cas. Si $a\neq 0$, alors $e^a\neq 1$ et $e^{-a}\neq 1$ puis

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(ak+b)&=\frac{1}{2}\left(e^b\frac{e^{(n+1)a}-1}{e^a-1}+e^{-b}\frac{1-e^{-(n+1)a}}{1-e^{-a}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(e^{b+\frac{(n+1)a}{2}-\frac{a}{2}}\frac{e^{(n+1)a/2}-e^{-(n+1)a/2}}{e^{a/2}-e^{-a/2}}+e^{-b-\frac{(n+1)a}{2}+\frac{a}{2}}\frac{e^{(n+1)a/2}-e^{-(n+1)a/2}}{e^{a/2}-e^{-a/2}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(e^{b+\frac{na}{2}}+e^{-b-\frac{na}{2}}\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{na}{2}+b\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Exercice n° 9

Soient a, b et c trois réels. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}a\operatorname{ch} x+b\operatorname{sh} x=c&\Leftrightarrow a\left(e^x+e^{-x}\right)+b\left(e^x-e^{-x}\right)=2c\Leftrightarrow(a+b)e^x-2c+(a-b)e^{-x}=0\\&\Leftrightarrow(a+b)\left(e^x\right)^2-2ce^x+(a-b)=0 \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^x\\&\Leftrightarrow e^x \text{ solution de l'équation } (a+b)X^2-2cX+(a-b)=0.\end{aligned}$$

1er cas. Si $b = -a$, l'équation s'écrit $-2ce^x + 2a = 0$ ou encore $ce^x = a$.

- Si $c = a = 0 (= b)$, tout réel est solution.
- Si $c = 0$ et $a = -b \neq 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $c \neq 0$ et $\dfrac{a}{c} \leqslant 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $c \neq 0$ et $\dfrac{a}{c} > 0$, l'équation a une solution et une seule à savoir $\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)$.

2ème cas. Si $b \neq -a$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ est du second degré. Son discriminant réduit est

$$\Delta' = c^2 - (a+b)(a-b) = c^2 + b^2 - a^2.$$

- Si $c^2 + b^2 - a^2 < 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et donc l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $c^2 + b^2 - a^2 = 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ admet une solution double à savoir $\dfrac{c}{a+b}$.
  - Si $\dfrac{c}{a+b} \leqslant 0$, l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
  - Si $\dfrac{c}{a+b} > 0$, l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ à savoir $\ln\left(\dfrac{c}{a+b}\right)$.
- Si $c^2 + b^2 - a^2 > 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes dont le produit est égal à $\dfrac{a-b}{a+b}$ et la somme est égale à $\dfrac{2c}{a+b}$.
  - Si $a^2 - b^2 < 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ a une solution strictement négative et une solution strictement positive. Dans ce cas, l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ a une solution et une seule.
  - Si $a^2 - b^2 > 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ a deux solutions non nulles distinctes et de même signe.
    - $\star$ Si $c(a+b) < 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ a deux solutions strictement négatives et dans ce cas l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ n'a pas de solution.
    - $\star$ Si $c(a+b) > 0$, l'équation $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b) = 0$ a deux solutions strictement positives et dans ce cas l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = c$ a deux solutions distinctes.
  - Enfin $a^2 - b^2 = 0$ est impossible car $b \neq -a$.

