Cinématique et Cinétique des solides indéformables

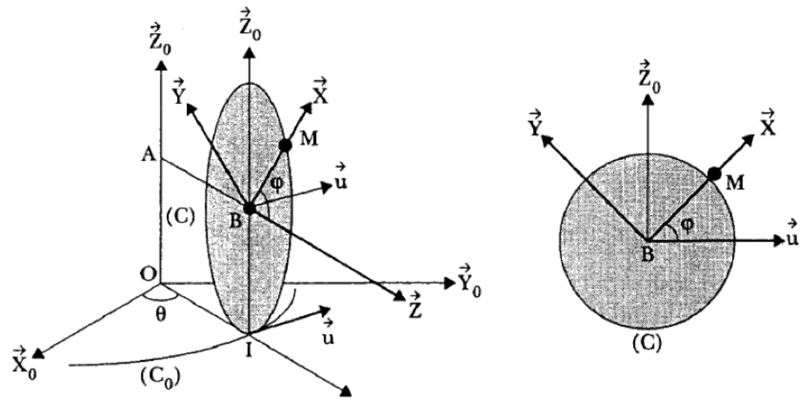
Exercice 1. ***Éléments cinématiques***

Soit $R_0(0, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$ un repère fixe orthonormé direct et deux constantes positives a et b. On considère le cercle (C_o) du plan $(\overrightarrow{OX_0}, \overrightarrow{OY_0})$, de centre 0 et de rayon a,lié à R_0. On considère le cercle (C), de centre B et de rayon b, répondant à chaque instant aux deux conditions suivantes :

- *(C) reste en contact avec (C_o) en un point I, de manière que $\overrightarrow{IB} = b\overrightarrow{Z_o}$.*
- *L'axe de (C) coupe $\overrightarrow{OZ_o}$ en A de manière à ce que $\overrightarrow{OA} = b\overrightarrow{Z_o}$.*

On lié au cercle (C) un trièdre orthonormé direct $(B, \overrightarrow{X}\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ constituant le repère R, tel que $\overrightarrow{Z} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. On définit le repère orthonormé direct $(B, \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{Z_o})$ constituant le repère R' en posant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Z_o} \bigwedge \overrightarrow{Z}$.

On pose $(\widehat{\overrightarrow{OX_o}, \overrightarrow{0I}}) = \theta$ et $(\widehat{\overrightarrow{Bu}, \overrightarrow{BX}}) = \varphi$ (fonctions de t). Soit M le point (lié à R), défini par $\overrightarrow{BM} = b\overrightarrow{X}$.

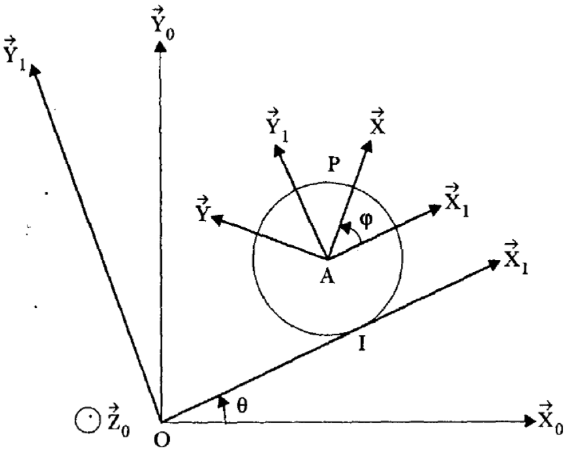


1. *Calculer $\overrightarrow{V}(M/R_0)$ et $\overrightarrow{a}(M/R_0)$*
2. *Si R' est le repère relatif et R_o le repère absolu, on calculera :*
   (a) *$\overrightarrow{V}(M/R')$ et $\overrightarrow{a}(M/R')$*
   (b) *$\overrightarrow{V}(M\epsilon R'/R_0)$ et $\overrightarrow{a}(M\epsilon R'/R_0)$*
   (c) *Retrouver la vitesse absolue et l'accélération absolue calculées à la première question.*
3. (a) *Calculer la vitesse de glissement, $\overrightarrow{V}(I\epsilon R/R_0)$ du disque (C) par rapport à R_o.*
   (b) *Calculer $\overrightarrow{a}(I\epsilon R/R_0)$ et montrer que si $\overrightarrow{V}(I\epsilon R/R_0) = 0$ alors $\overrightarrow{a}(I\epsilon R/R_0)$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AI}$.*

Exercice 2. ***la vitesse de glissement***

Soit $R_1(0; \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_o})$ un repère orthonormé direct déduit d'un repère fixe orthonormé direct $R_o(0; \overrightarrow{X_o}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_o})$ par une rotation $\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_o) = \dot{\theta}\overrightarrow{Z_o}$ On matérialise l'axe $\overrightarrow{OX_1}$ sur lequel un cercle (C) de centre A et de rayon a est astreint à se déplacer en restant dans le plan $(\overrightarrow{OX_0}, \overrightarrow{OY_0})$ Si I est le point de contact et P un point lié au cercle, on pose : $\overrightarrow{OI} = r\overrightarrow{X_1}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AX_1}, \overrightarrow{AP}}) = \varphi$ On peut aussi définir le repère orthonormé direct lié au cercle (C) par $R(A, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z_0})$ avec $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{X}$ où $\overrightarrow{X}$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{AP}$. Tous les résultats seront exprimés dans la base associée au repère $R(A, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_0})$

1. *Calculer la vitesse de glissement, $\overrightarrow{v}(I\epsilon C/R_1)$, du cercle (C) sur la droite $\overrightarrow{OX_1}$. évaluer $\overrightarrow{v}(I/R_1)$, $\overrightarrow{v}(I/R)$ et retrouver $\overrightarrow{v}(I\epsilon C/R_1)$.*
2. *Donner l'expression du vecteur accélération de la particule de contact I, $\overrightarrow{a}(I\epsilon C/R_1)$*
3. *On étudie le mouvement de P dans R_0 considéré comme absolu.si R_1 est repère relatif, donner les expressions :*
   - (a) *des vitesses relatives $\overrightarrow{v}(P/R_1)$. d'entraînement $\overrightarrow{v}(P\epsilon R_1/R_0)$ et absolue $\overrightarrow{v}(P/R_0)$·*
   - (b) *des accélérations relative $\overrightarrow{a}(P/R_1)$. d'entraînement $\overrightarrow{a}(P\epsilon R_1/R_0)$, complémentaire $\overrightarrow{a_c}$ et absolue $\overrightarrow{a}(P/R_0)$.*



Réponce : *1.*$\overrightarrow{v}(I\epsilon C/R_1) = (\dot{r} + a\dot{\varphi})\overrightarrow{X_1}$ *2.* $\overrightarrow{a}(I\epsilon C/R_1) = (\ddot{r} + a\ddot{\varphi})\overrightarrow{X_1} + a\dot{\varphi}^2\overrightarrow{Y_1}$

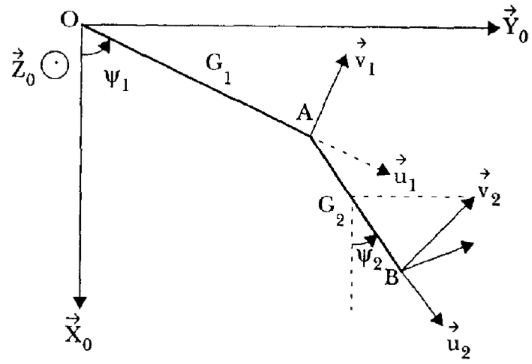
3. (a) $\overrightarrow{a}(P/R_0) = (\ddot{r} - a\ddot{\varphi}\sin\varphi - a\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\overrightarrow{X_1} + (a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\overrightarrow{Y_1}$ *(b)* $\overrightarrow{a}(P\epsilon R_1/R_0) = -(r\dot{\theta}^2 + a\dot{\theta}^2\cos\varphi + a\ddot{\theta} + a\ddot{\theta}\sin\varphi)\overrightarrow{X_1}(-a\dot{\theta}^2 - a\dot{\theta}^2\sin\varphi + r\ddot{\theta} + r\ddot{\theta}\cos\varphi)\overrightarrow{Y_1}$

$\overrightarrow{a_c} = -2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\overrightarrow{X_1} + (2\dot{r}\dot{\theta} - 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi)\overrightarrow{Y_1}$

Exercice 3. ***les paramétres cinétiques***

Dans le plan vertical $(\overrightarrow{OX_o}, \overrightarrow{OY_0})$ d'un repère fixe orthonormé direct $R_o(0; \overrightarrow{X_o}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_o})$ où $\overrightarrow{OX_o}$ est la verticale descendante, on considère le mouvement d'un pendule double constitué de deux tiges rectilignes homogènes (OA) et (AB) respectivement de la masse m_1 et m_2, de longueur l_1 et l_2, et de centre de gravité G_1 et G_2, articulées en A.

1. *Déterminer le vecteur moment cinétique ,$\overrightarrow{\sigma_0}(OA/R_0)$, en O, de la tige par rapport au repère R_0.*
2. *Donner l'expression de l'énergie cinétique, $T(OA/R_o)$, de la tige (OA) par rapport à R_o.*
3. *Déterminer le vecteur moment cinétique, $\overrightarrow{\sigma_{G2}}(AB/R_0)$, en G_2, de la tige (AB) par rapport à R_o.*
4. *Donner l'expression de l'énergie cinétique, $T(AB/R_o)$, de la tige (OA) par rapport à R_o.*
5. *Déterminer l'énergie cinétique, $T(\Sigma/R_o)$, du système (Σ) ainsi constitué par rapport à R_o.*



Réponce : *1.*$\overrightarrow{\sigma_O}(OA/R_0) = \frac{m_1 l_1^2}{3}\dot{\psi}_1\overrightarrow{Z_0}$ *2.* $T(OA/R_0) = \frac{m_1 l_1^2}{6}\dot{\psi_1}^2$ *3.* $\overrightarrow{\sigma_{G2}}(AB/R_0) = \frac{m_2 l_2^2}{12}\dot{\psi}_2\overrightarrow{Z_0}$

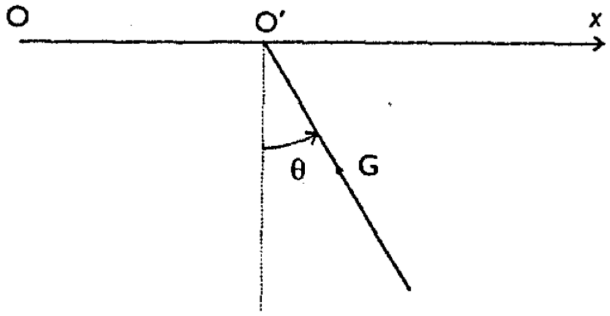
4. $T(AB/R_o) = \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\psi_1}^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\psi_2}^2 + l_1 l_2\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2\cos(\psi_1 - \psi_2)) + \frac{m_2 l_2^2}{24}\dot{\psi_2}^2$

$T(\Sigma/R_o) = \frac{m_2}{2}(l_1^2\dot{\psi_1}^2 + \frac{l_2^2}{4}\dot{\psi_2}^2 + l_1 l_2\dot{\psi}_1\dot{\psi}_2\cos(\psi_1 - \psi_2)) + \frac{m_2 l_2^2}{24}\dot{\psi_2}^2 + \frac{m_1 l_1^2}{6}\dot{\psi_1}^2$

Exercice 4. ***l'énergie cinétique d'une barre***

On suspend une barre homogène de longueur L et de masse m par une de ses extrémités O' à l'axe horizontal (Ox) d'un repère fixe. On note θ l'angle que forme cette barre avec la verticale.

L'extrémité 0' se déplace le long de l'axe (Ox) à la vitesse $\dot{x}$. Le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe perpendiculaire (suivant l'axe Oz) à la tige et passant G vaut $J = \frac{mL^2}{12}$. Calculer l'énergie cinétique de la barre dans le référentiel terrestre. On appellera G le barycentre de la tige.

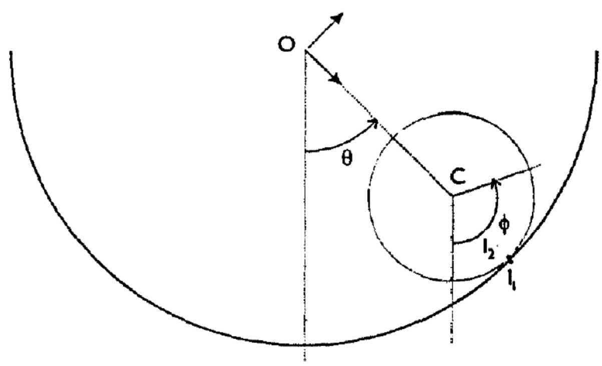


Réponce : $E_c = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{3}l^2\dot{\theta}^2)$

Exercice 5. ***roulement sans glissement***

Un cylindre homogène de masse m, de centre C et de rayon r, roule sans glisser à l'intérieur d'un autre cylindre, fixe, d'axe horizontal, de centre 0 et de rayon R. On appelle θ l'angle que fait la direction OC avec la verticale. On note aussi Φ l'angle dont a tourné le petit cylindre intérieur par rapport à la verticale.

1. *En écrivant la condition de roulement sans glissement, établir une relation entre R, r, θ et Φ.*
2. *Calculer l'énergie cinétique du petit cylindre en fonction de m, R, r et de la dérivée première de l'angle θ.*
3. *Calculer le moment cinétique du cylindre mobile par rapport à l'axe horizontal passant par 0, et orthogonal au plan de la figure.*
4. *établir l'équation différentielle du mouvement d'une part en utilisant une méthode énergétique, d'autre part en appliquant directement les théorèmes généraux de la mécanique.*

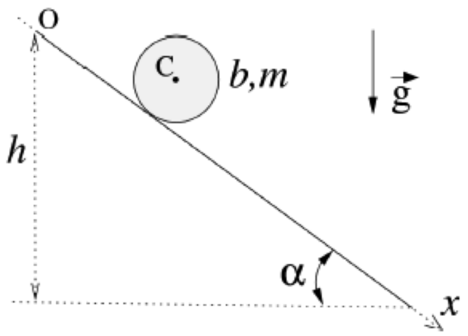


Réponce : *1.* $(R-r)\dot{\theta} + r\dot{\varphi} = 0$ *2.* $E_c = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$ *3.* $L_{Oz} = \frac{1}{2}m(R-r)\dot{\theta}(2R-3r)$ *4.* $\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\sin\theta = 0$

Exercice 6. ***Mouvement sur un plan incliné***

Soit un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale, de hauteur h. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre une roue et ce plan sont supposés égaux : $f = f_s = f_d$.

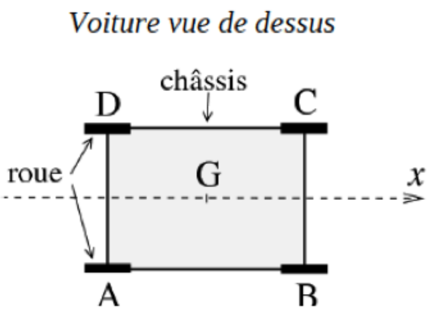
1. *Une roue, homogène, de masse m, d'épaisseur négligeable et de rayon b ($b \ll h$), est lâchée sans vitesse initiale en haut du plan incliné. Soit x la position du centre C de la roue (voir figure). On suppose que la roue reste dans le plan vertical((Ox), $\vec{g}$).*

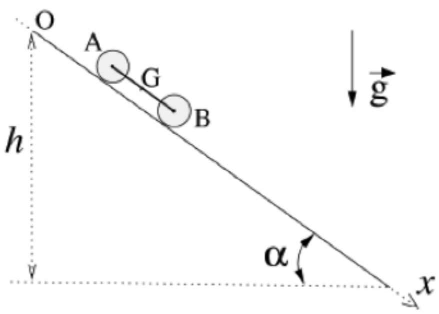


(a) *En supposant que la roue* ***roule sans glisser*** *sur le plan incliné :*
- *Déterminer l'accélération du centre C de la roue en fonction du temps.*
- *Combien de temps met la roue pour descendre le plan incliné ?*
- *A quelle condition surα, le contact roue/sol est-il vraiment sans glissement ?*

(b) *En supposant que la roue* ***roule en glissant****sur le plan incliné :*
- *Déterminer l'accélération du centre C de la roue en fonction du temps.*
- *Combien de temps met la roue pour descendre le plan incliné ?*
- *A quelle condition surα, le contact roue/sol est-il vraiment avec glissement ?*

2. *Une voiture est modélisée schématiquement par quatre roues identiques (homogènes, de masse m, de rayon b et d'épaisseur négligeable) et par un châssis rectangulaire (A,B,C,D) rigide de masse M. Le centre de gravité G du châssis est au centre du rectangle (A,B,C,D). Les roues sont fixées au châssis en A, B, C et D. La voiture est en* ***roues libres****, ainsi les roues peuvent tourner librement (liaison parfaite). La voiture est lâchée, sans vitesse initiale, en haut du plan incliné. On suppose que les roues tournent sans glisser sur le sol et que la droite (AB) reste parallèle au plan ((Ox), $\overrightarrow{g}$). Les dimensions caractéristiques de la voiture sont petites devant h.*





(a) *Déterminer l'énergie cinétique de la voiture dans le référentiel du plan incliné.*

(b) *En déduire la vitesse de la voiture lorsqu'elle arrive en bas du plan incliné ?*

Donnée : *Le moment d'inertie J d'une roue homogène, de masse m, de rayon b, par rapport à son axe de symétrie (axe perpendiculaire à la roue passant par son centre) est $J = mb^2/2$.*

Exercice 7. ***Roue motrice sur une route inclinée***

On désire faire gravir, à vitesse constante, par un cylindre plein, homogène de masse m. de rayon R. une route inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.

1. *Quel est le couple maximal à appliquer sur l'axe de ce cylindre pour qu'il gravisse sans patiner la pente ? On notera f le coefficient de frottement statique entre le cylindre et la route.*
2. *Même question, si en plus une force constante F. parallèle à la pente et dirigée vers le bas, s'applique en C.*

Réponce :

Il faut commencer par faire un schéma de la situation, en reportant les forces et en plaçant un repère qui nous servira à projeter les relations vectorielles.