Modélisation mathématique des épidémies : Cas (Covid-19)

Présenté par : Imad RAHHALI

Encadré par : M. Hassane SADDIKI

PLAN

1. Introduction à l'épidémiologie
2. Les modèles mathématiques en épidémiologie
3. Présentation du modèle SIR
4. Résolution numérique et analytique du modèle SIR
5. Amélioration du modèle SIR
6. Conclusion

Introduction à l'épidémiologie

Introduction à l'épidémiologie

Peste noir :

Entre 30% et 50% de la population européenne.

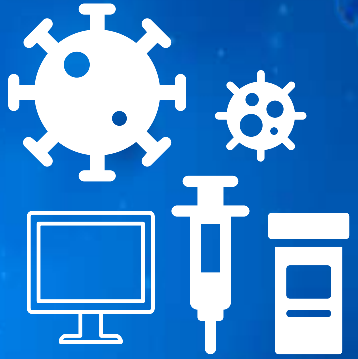
La grippe espagnole :

Entre 50 et 100 Millions de personnes.

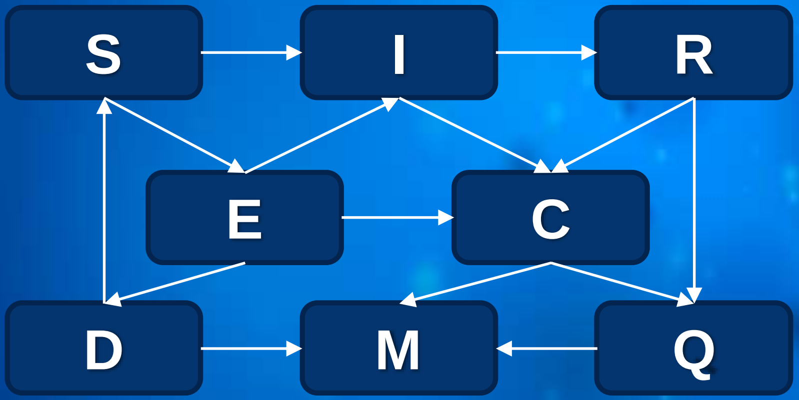
Covid-19 :

Plus de 6 Millions de personnes.

Les modèles mathématiques en épidémiologie



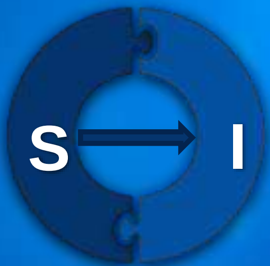
Les modèles mathématiques en épidémiologie



S : Sains
I : Infectés
R : Rétablis
E : Exposés
C :Porteurs sans symptômes
D : Décédés
M : immunité à la naissance
Q : infectieux isolés par quarantaine

Les modèles mathématiques en épidémiologie

- Modèle SI :

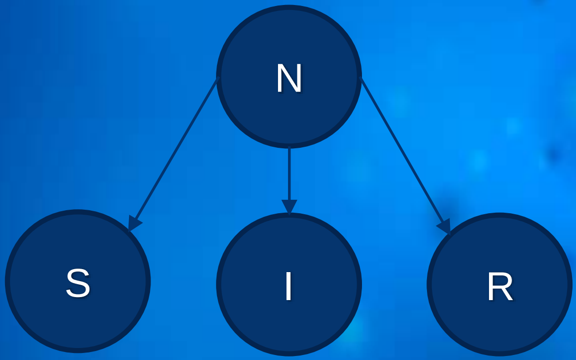


S : Susceptibles

I : Infectées

- Modèle SIS :

Présentation du modèle SIR

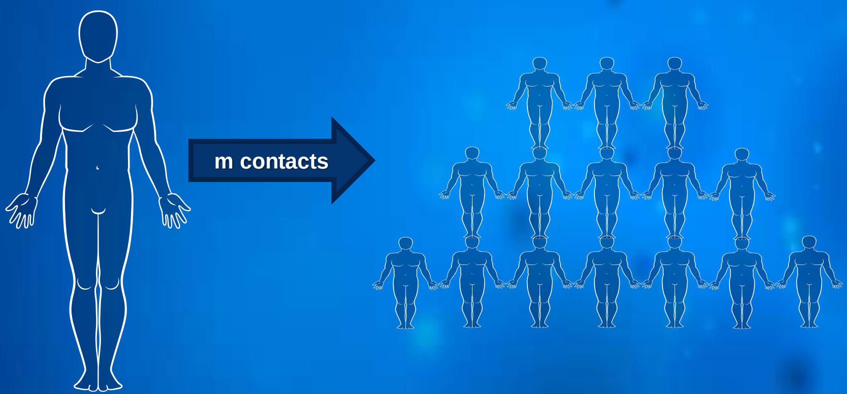


$$N = S(t)+I(t)+R(t)$$

N : Population totale
S : Sains
I : Infectés
R : Rétablis

S(t) : Taille de la sous-population des sains à l'instant t
I(t) : Taille de la sous-population des infectés à l'instant t
R(t) : Taille de la sous-population des rétablis à l'instant t
t : Temps mesuré en jours

Présentation du modèle SIR



- m : Nombre de contacts par jours en moyenne
- $\frac{I(t)}{N}$: La proportion des infectés
- $m\frac{I(t)}{N}S(t)$: Le nombre de contacts entre les infectés et les personnes susceptibles
- p : La probabilité d'infection
- $m\frac{I(t)}{N}S(t)\,p\Delta t$: le nombre des nouveaux infectés dans Δt jours
- **β** = m*p (taux d'infection)

$$S(t+\Delta t) - S(t) = -\frac{\beta}{N}S(t)I(t)\Delta t$$

Présentation du modèle SIR

Sains $\xrightarrow{\beta}$ Infectés $\xrightarrow{\gamma}$ Rétablis

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta\frac{S(t)I(t)}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta\frac{S(t)I(t)}{N} - \gamma I(t) \quad (3)$$

β = m*p (taux d'infection)
γ = 1/D (taux de guérison)
m : Nombre de contacts par jours en moyenne
p : Probabilité d'infection
D : Durée d'infection

Résolution numérique et analytique du modèle SIR

Résolution numérique du modèle SIR

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f\left(t_n, y_n\right)\right)$$

Résolution numérique du modèle SIR

Paramètres d'entrée (β > γ) :

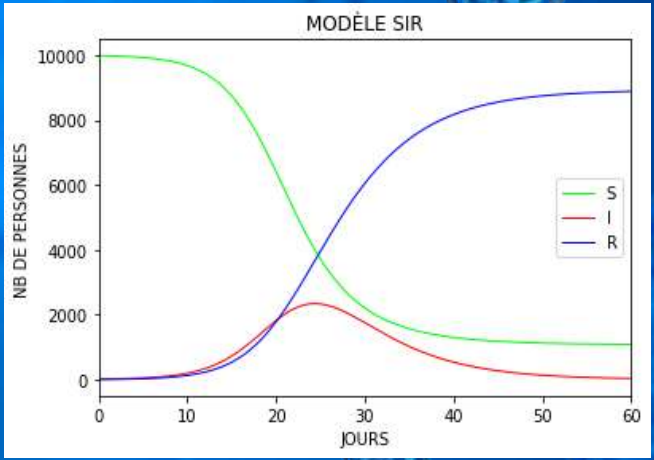
N = 10000

I = 10

R = 0

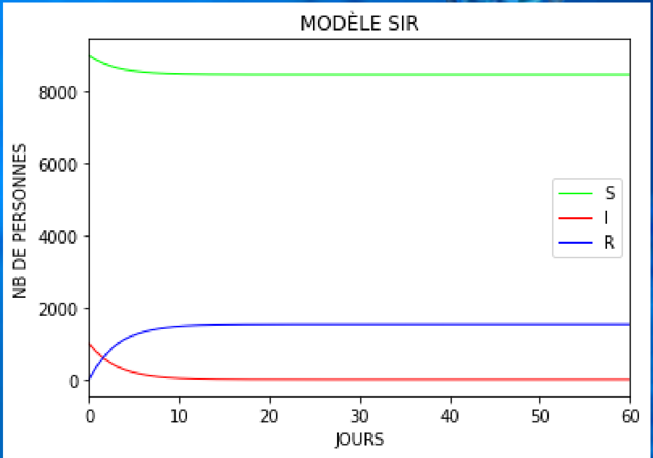
$\beta = 0{,}5$

$\gamma = 0{,}2$



Résolution numérique du modèle SIR

Paramètres d'entrée (β < γ) :
N = 10000
I = 1000
R = 0
β = 0,2
γ = 0,5



Résolution analytique du modèle SIR

Résolution analytique du modèle SIR

- On récrit l'équation (1) du modèle SIR de cette manière :

$$I = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{S'}{S}\right) \quad \text{(avec } \Omega = \frac{\beta}{N}\text{)} \quad \textit{(4)}$$

- **On dérive l'équation par rapport à t:**

$$I' = \frac{1}{\Omega}\left(-\frac{S'^2}{S^2} + \frac{S''}{S}\right) \quad \textbf{\textit{(5)}}$$

- **On injecte l'équation (4) dans l'équation (3) du modèle SIR :**

$$I' = -(\Omega S - \gamma)\,\frac{1}{\Omega}\left(\frac{S'}{S}\right) \quad \textbf{\textit{(6)}}$$

- **(5) – (6) donne :**

$$S\frac{d^2S}{dt^2} - \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 + (\gamma - \Omega S)S\,\frac{dS}{dt} = 0 \quad \textbf{\textit{(7)}}$$

- **On introduit la fonction:**

$$\Phi = \frac{dt}{dS} \quad \textbf{\textit{(8)}}$$

- **On obtient donc l'équation :**

$$\frac{d\Phi}{dS} + \frac{\Phi}{S} = (\gamma - \Omega S)\Phi^2 \quad \textbf{\textit{(9)}}$$

- **C'est une équation différentielle de Bernoulli dont la solution est donnée par :**

$$\Phi = \frac{1}{S(C1 - \gamma\ln(S) + \Omega S)} \quad \text{(C1 est une constante d'intégration)} \quad \textit{(10)}$$

(voir annexe pour démonstration)

Résolution analytique du modèle SIR

- L'inverse de la relation *(8)* donne:

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{dS}{dt} \quad \textit{(11)}$$

- **D'après l'équation *(1)* on a:**

$$I = -\frac{1}{\Omega}(C1 - \gamma \ln S + \Omega S) \quad \textit{(12)}$$

- **Et en utilisant les équations (1) et (2) on obtient**

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\gamma}{\Omega}\left(\frac{S'}{S}\right) \quad \textit{(13)}$$

- **Donc la relation entre S(t) et R(t) est:**

$$R(t) = -\frac{\gamma}{\Omega}\ln\left(\frac{S(t)}{C2}\right)$$ **(C2 une constante d'intégration)** ***(14)***

- **Si on prend S(0)=N1 et Z(0)=0 pour t=0 donc C2=N1 et on obtient:**

$$R = = -\frac{\gamma}{\Omega}\ln\left(\frac{S}{N1}\right) \quad \textit{(15)}$$

- **Et comme S(0)+I(0)+R(0)=N :**

$$C1 = -\Omega N + \gamma \ln N1 \quad \textit{(16)}$$

- **On remplace C1 dans l'équation *(9)* et donc *(11)* devient:**

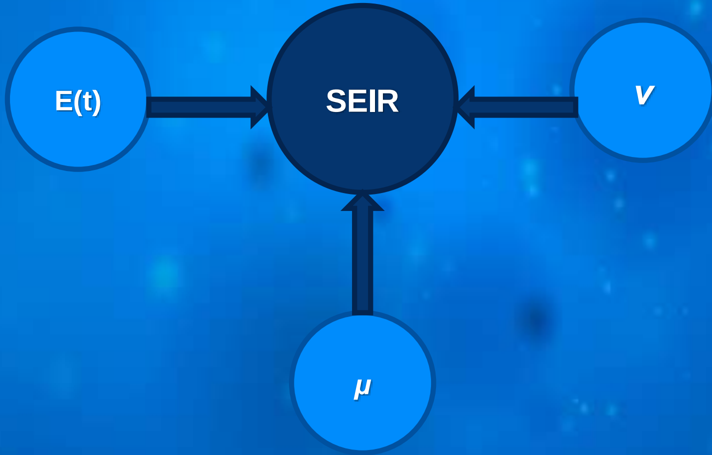
$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{S(-\Omega N - \gamma \ln(\frac{S}{N1}) + \Omega S)} \quad \textit{(17)}$$

- **On intègre cette équation et on obtient t en fonction de S:**

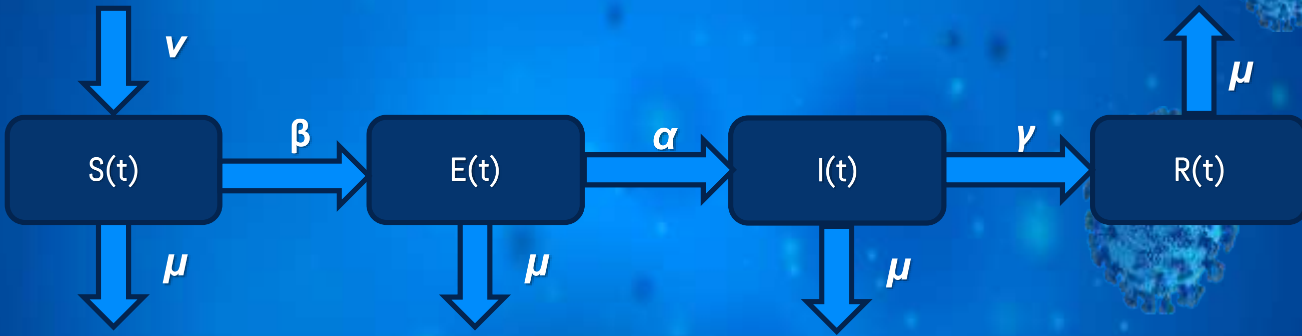
$$t = \int_{S(0)}^{S(t)} \frac{d\xi}{\xi(-\beta - \gamma \ln(\xi/N1) + \beta\xi/N)} \quad \textit{(18)}$$

Amélioration du modèle SIR

Amélioration du modèle SIR : Modèle SEIR



Amélioration du modèle SIR : Modèle SEIR



v : Taux de natalité
μ : Taux de mortalité
α : Taux d'incubation
β : Taux d'infection
γ : Taux de guérison

Amélioration du modèle SIR : Modèle SEIR

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta\frac{S(t)I(t)}{N} + \nu N(t) - \mu S(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta\frac{S(t)I(t)}{N} - \alpha E(t) - \mu E(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\alpha E(t) - \gamma I(t) - \mu R(t)$$

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$$

Amélioration du modèle SIR : Modèle SEIR

Paramètres d'entrée :

N = 100000

I = 10000

E=1000

R = 0

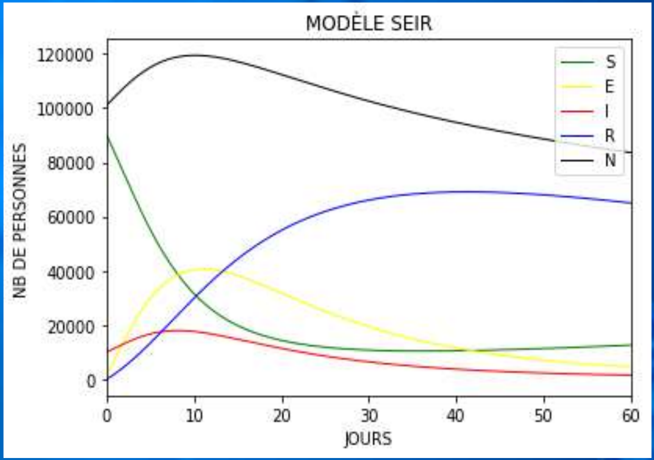
$\beta = 0,5$

$\gamma = 0,2$

$\alpha = 0,07$

$v = 0,009$

$\mu = 0,01$



Amélioration du modèle SIR : Modèle SEIR

Modèle SIR

V.S

Modèle SEIR

CONCLUSION

Merci pour votre attention!

ANNEXES

Démonstration de la solution obtenue pour l'équation (9) [équation de Bernoulli en Φ]

- *On commence par l'équation (9) :*

$$\frac{d\Phi}{dS} + \frac{\Phi}{S} = (\gamma - \Omega S)\Phi^2$$

- *On introduit $v = \Phi S$, on a donc :*

$$\frac{d}{dS}\left(\frac{v}{S}\right) = \frac{1}{S}\frac{dv}{dS} - \frac{v}{S^2} = \frac{1}{S}\frac{dv}{dS} - \frac{\Phi}{S}$$

- *Alors l'équation (9) peut s'écrit comme :*

$$\frac{1}{S}\frac{dv}{dS} = (\gamma - \Omega S)\,\frac{v^2}{S^2}$$

- *On divise par $\frac{v^2}{S}$ et on obtient :*

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dS} = \frac{d}{dS}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{\gamma}{S} + \Omega$$

- *L'intégration de cette équation donne :*

$\frac{1}{v} = -\gamma\ln(S) + \Omega S + C1$ *(C1 une constante d'intégration)*

- On obtient donc **Φ** :

$$\Phi = \frac{v}{S} = \frac{1}{= S(-\gamma\ln(S) + \Omega S + C1)}$$

Modèle SIR (β > γ)

```python
import matplotlib.pyplot as plt
N=10000
S=N-10
I=10
R=0
taxis=[]
Saxis=[]
Iaxis=[]
Raxis=[]
beta=0.5
gamma=0.2
dt=0.001
t=0
while t<60:
    taxis.append(t)
    Saxis.append(S)
    Iaxis.append(I)
    Raxis.append(R)
    kS1=-(beta/N)*S*I
    kI1=(beta/N)*S*I-gamma*I
    S2=S+kS1*dt
    I2=I+kI1*dt
    kS2=-(beta/N)*S2*I2
    kI2=(beta/N)*S2*I2-gamma*I2
    S=S+(kS1+kS2)*dt/2
    I=I+(kI1+kI2)*dt/2
    R=N-S-I
    t=t+dt
plt.title("MODÈLE SIR")
plt.plot(taxis,Saxis,color=(0,1,0),linewidth=1.0,label='S')
plt.plot(taxis,Iaxis,color=(1,0,0),linewidth=1.0,label='I')
plt.plot(taxis,Raxis,color=(0,0,1),linewidth=1.0,label='R')
plt.xlim(0,60)
plt.legend()
plt.xlabel('JOURS')
plt.ylabel('NB DE PERSONNES')
plt.show()
```

Modèle SIR (β < γ)

```
import matplotlib.pyplot as plt
N=10000
S=N-1000
I=1000
R=0
taxis=[]
Saxis=[]
Iaxis=[]
Raxis=[]
beta=0.2
gamma=0.5
dt=0.001
t=0
while t<60:
    taxis.append(t)
    Saxis.append(S)
    Iaxis.append(I)
    Raxis.append(R)
    kS1=-(beta/N)*S*I
    kI1=(beta/N)*S*I-gamma*I
    S2=S+kS1*dt
    I2=I+kI1*dt
    kS2=-(beta/N)*S2*I2
    kI2=(beta/N)*S2*I2-gamma*I2
    S=S+(kS1+kS2)*dt/2
    I=I+(kI1+kI2)*dt/2
    R=N-S-I
    t=t+dt
plt.title("MODÈLE SIR")
plt.plot(taxis,Saxis,color=(0,1,0),linewidth=1.0,label='S')
plt.plot(taxis,Iaxis,color=(1,0,0),linewidth=1.0,label='I')
plt.plot(taxis,Raxis,color=(0,0,1),linewidth=1.0,label='R')
plt.xlim(0,60)
plt.legend()
plt.xlabel('JOURS')
plt.ylabel('NB DE PERSONNES')
plt.show()
```

Modèle SEIR

```python
import matplotlib.pyplot as plt
N=100000
S=N-10000
I=10000
E=1000
R=0
taxis=[]
Saxis=[]
Iaxis=[]
Raxis=[]
Eaxis=[]
Naxis=[]
beta=0.8
gamma=0.2
alpha=0.07
nu=0.009
mu=0.01
dt=0.001
t=0
while t<60:
    taxis.append(t)
    Saxis.append(S)
    Eaxis.append(E)
    Iaxis.append(I)
    Raxis.append(R)
    Naxis.append(N)
    kS1=-(beta/N)*S*I +nu*N-mu*S
    kE1=(beta/N)*S*I -alpha*E-mu*E
    kI1=alpha*E-gamma*I-mu*I
    kR1=gamma*I-mu*R
    S2=S+kS1*dt
    E2=E+kE1*dt
    I2=I+kI1*dt
    R2=R+kR1*dt
    kS2=-(beta/N)*S2*I2
    kE2=(beta/N)*S2*I2 -alpha*E2-mu*E2
    kI2=(beta/N)*S2*I2-gamma*I2
    kR2=gamma*I2-mu*R2
    S=S+(kS1+kS2)*dt/2
    E=E+(kE1+kE2)*dt/2
    I=I+(kI1+kI2)*dt/2
    R=R+(kR1+kR2)*dt/2
    N=S+E+I+R
    t=t+dt
plt.title("MODÈLE SEIR")
plt.plot(taxis,Saxis,color='green',linewidth=1.0,label='S')
plt.plot(taxis,Eaxis,color='yellow',linewidth=1.0,label='E')
plt.plot(taxis,Iaxis,color='red',linewidth=1.0,label='I')
plt.plot(taxis,Raxis,color='blue',linewidth=1.0,label='R')
plt.plot(taxis,Naxis,color='black',linewidth=1.0,label='N')
plt.xlim(0,60)
plt.legend()
plt.xlabel('JOURS')
plt.ylabel('NB DE PERSONNES')
plt.show()
```