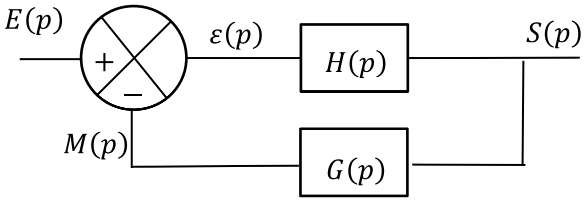
Systèmes Linéaires Continus Invariants

SLCI1 - Performances

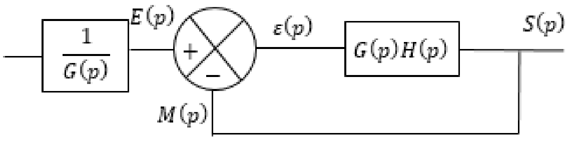
Résumé

Systèmes asservis

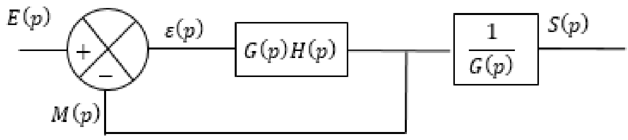


$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$



	1° ordre	2° ordre
Seul	$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$	$H(p) = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$
Bouclé Retour unitaire	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}$ $\tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1+K_{BO}}$	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1+\frac{2z_{BF}}{\omega_{0BF}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0BF}}^2}}$ $\omega_{0BF} = \omega_{0BO}\sqrt{1+K_{BO}}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}$ $z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}}$

Performances des systèmes

Stabilité	Rapidité	Précision	Allure de la réponse
Pôles FTBF Revers FTBO $\Delta\varphi$ - ΔG	$tr_{5\%}$ t_m ω_{c_0} - BP_0	ε_s ε_v Influence perturbations	2° ordre z & $D_{\%}$

Stabilité

Définition

Système :

Stable ∀ Entrée bornée ⇒ Sortie bornée

Asymptotiquement ? ∀ Entrée convergente ⇒ Sortie convergente

Condition fondamentale de stabilité

Système stable

$Re(Pôles\ FTBF) < 0$

Critères de stabilité

Algébrique

Parties réelles des pôles : FTBF

Graphique

Revers : FTBO

Critère graphique du Revers

Bode

Abscisse	Ordonnée
ω	G_{dB} & φ^0

Nyquist

Abscisse	Ordonnée
$Re(\underline{H})$	$Im(\underline{H})$

Black

Abscisse	Ordonnée
φ^0	G_{dB}

Etude de la FTBO → Stabilité de la FTBF

Critère du Revers = Cas particulier du critère de Nyquist

Etude du lieu de la FTBO par rapport au point critique :

$(|H_{j\omega}|, \varphi_{j\omega}) = (1, -180°)\ ou\ (G, \varphi_{j\omega}) = (0, -180°)$

Condition d'application : FTBO sans pôles à partie réelle strictement positive (BO stable = suffisant)

Critère de Nyquist simplifié

Un système en BF est asymptotiquement stable si le lieu de Nyquist complet de la BO ne fait pas le tour du point critique dans le sens horaire

Critère du Revers

Un système asservi est stable en BF si, en décrivant le lieu de transfert de la BO dans le sens des pulsations ω croissantes dans le plan de

- Bode : à la pulsation
  - Et à $\omega_{c_0} / G_{dB} = 0$, $\varphi > -180°$
  - Et à $\omega / \varphi = -180°, G_{dB} < 0$
- Nyquist : le point critique est à gauche $\omega \nearrow$
- Black : le point critique est à droite $\omega \nearrow$

Cas particuliers dans Bode : se ramener à Black

F
T
B
O

Marge de gain (10 à 15 db mini)	**Calcul de ω_{c0} – Résoudre $\|H(j\omega_{c0})\| = 1$** $K_{BO} > 1 \Rightarrow$ Existence de ω_{c0}	
$\Delta G = -20\log\|H(j\omega_{-180°})\|$ $\arg H(j\omega_{-180°}) = -180°$	1° ordre classique $\frac{K_{BO}}{1+\tau_{BO}p}$ $\omega_{0BO}\sqrt{K_{BO}^2-1}$; $\omega_{0BO} = \frac{1}{\tau_{BO}}$	2° ordre classique $\frac{K_{BO}}{1+\frac{2z}{\omega_{0BO}}p+\frac{1}{\omega_{0BO}^2}p^2}$ $\omega_{0BO}\sqrt{\sqrt{(1-2z^2)^2+(K^2-1)}+(1-2z^2)}$
Marge de phase (45 à 60° mini)	1° ordre intégré : $\frac{K_{BO}}{p(1+\tau_{BO}p)}$	
$\Delta\varphi = \arg H(j\omega_{c0}) - (-\pi)$ $= \pi + \arg H(j\omega_{c0})$	$\omega_{c0} = \omega_{0BO}\sqrt{\frac{\sqrt{1+(2\tau_{BO}K_{BO})^2}-1}{2}}$; $\omega_{0BO} = \frac{1}{\tau_{BO}}$	

F
T
B
O

Conclusions

Généralement :

$\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow \omega_{c_0} \Rightarrow \searrow \varphi_{\omega_{c_0}} \Rightarrow \searrow \Delta\varphi \Rightarrow \searrow$Stabilité

Remarque

Vérifier la stabilité d'un système avant d'utiliser le théorème de la valeur finale

Stabilité 1° et 2° ordre en BF

1° ou 2° ordre en BO ⇒1° ou 2° ordre en BF : stable en BF grâce aux pôles sur BF (signe de τ ou de $z\omega_0$)

1° ou 2° ordre en BO : Stable en BF grâce au Revers sur BO – Remarque : $\Delta G = +\infty$ & $\Delta\varphi > 0$

Un 1° ordre intégré en BO permet de trouver simplement une marge de phase de 45° en $\omega_c = \frac{1}{T}$ – Attention, pour le réglage d'une TG, $G_{\omega_c}^{réel} = G_{\omega_c}^{asympt} - 3$

Précision

Systèmes

Ecart des systèmes *Au comparateur*	
Retour non unitaire	Retour unitaire
$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$	$\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

$$E(p) = \frac{a}{p^\beta} \quad ; \quad \beta > 0$$

$$FTBO(p) = K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m)}$$

$$\alpha > 0 \quad ; \quad \alpha + m > n$$

$e(t)$	$E(p)$	Ecart au comparateur
$au(t)$	$\frac{a}{p}$	ε_s ou « Ecart statique »
$atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	ε_v ou « Ecart de traînage »

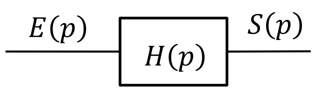
α : classe de la FTBO - Nombre d'intégrations

$\alpha + m$: ordre de la FTBO - Degré du dénominateur

Expression générale de l'écart statique

Soit une FTBF quelconque Fonction de transfert H Gain statique K $H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}$ Système stable $\Rightarrow \alpha < 0$ Système utile (ie ne tend pas vers 0 quelle que soit l'entrée) $\Rightarrow \alpha \geq 0$ $\Rightarrow \alpha = 0$	
$\Rightarrow \lim_{p \to 0} \left(H(p) \right) = K$	$\Rightarrow \varepsilon_s = E_0 (1 - K)$ ${\varepsilon_s}^{\%} = 1 - K$

Remarque



$$\forall t, s(t) = e(t) \Leftrightarrow H(p) = 1$$

Ecart A (au comparateur) des systèmes bouclés (entrée e /sortie s) et classe de la FTBO

Nature de l'entrée au comparateur			Classe du système			
$e(t)$ *Entrée système*	$E(p) = \frac{\cdots}{p^\beta}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a	$\beta = 0$	0	0	0	0
Echelon $e(t) = Eu(t)$	$\frac{E}{p}$	$\beta = 1$	$\frac{E}{1+K_{BO}}$	0	0	0
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\beta = 2$	∞	$\frac{a}{K_{BO}}$	0	0

Conclusions

$\nearrow$ Classe $\Rightarrow$ $\nearrow$ Précision

Si ε fini, $\nearrow K_{BO} \Rightarrow \nearrow$ Précision

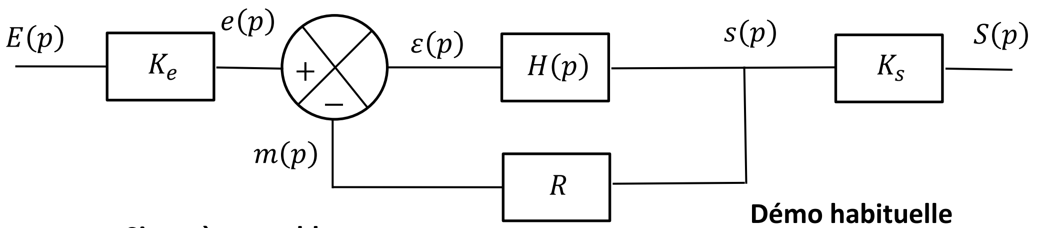
Si Classe 0, $\varepsilon_v = \infty$

Remarques

Une intégration

$\Rightarrow$ Ecart statique nul et Ecart de traînage fini

Erreur d'un système général



Si système stable

$$\Sigma = \lim_{t\to\infty}\big(E(t) - S(t)\big) \quad ; \quad A = \lim_{t\to\infty}\big(\varepsilon(t)\big)$$

$\Sigma \propto A$ si $R = K_e K_s$ soit, $\Sigma = 0 \Leftrightarrow A = 0$

On dit aussi que l'écart est nul si entrée = sortie

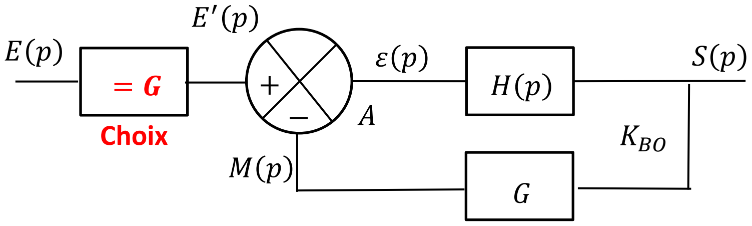
Démo habituelle

À t_∞ : $A = K_e E - \frac{R}{K_s} S$

On veut : $A = 0$ si $E = S$

$$K_e E - \frac{R}{K_s} S = \left(K_e - \frac{R}{K_s}\right) S = 0 \Rightarrow R = K_e K_s$$

Cas généralement traité : Système de classe supérieure ou égale à 1 : $\alpha \geq 1$

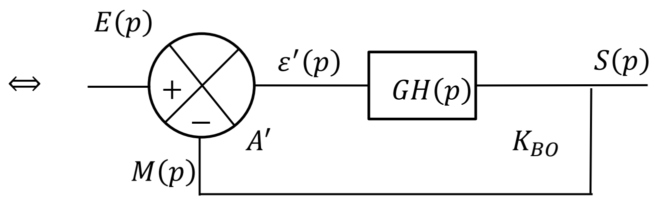


Ce choix permet : $\Sigma \propto A$

Attention : entrée de boucle pour le calcul de A multipliée par G

Ce choix permet la modification suivante

$\Leftrightarrow$



Si gain K_s en sortie, ne pas l'oublier : $= G/K_s$

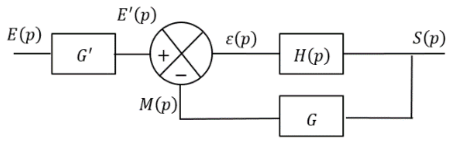
Tableau de A'		
$e(t)$	$\alpha = 1$	$\alpha = n > 2$
Dirac	0	0
Echelon E	0	0
Rampe at	$\frac{a}{K'_{BO}}$	0

Expression de K_{BF} – $FTBO$ de classe α

Retour unitaire $K_{CD} = K_{BO}$		Retour non unitaire G $K_{BO} = K_{CD}G$	
$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$K_{BF} = \dfrac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = 1$ & $\varepsilon_s = 0$!	$K_{BF} = \dfrac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = \dfrac{1}{G}$

1 - Classe 1 et retour unitaire : $K_{BF} = 1$ & $\varepsilon_s = 0$
2 - Connaissant K_{BF}, on retrouve $\varepsilon_s = E(1 - K_{BF})$
3 - Dans le cas du système général précédent, le gain statique du système complet s'écrit $K_{Comp} = K_E K_S K_{BF}$ et $\Sigma = E\left(1 - K_{Comp}\right)$
4 - K_{BF} d'un système de FTBO de classe 0 ne sera jamais unitaire

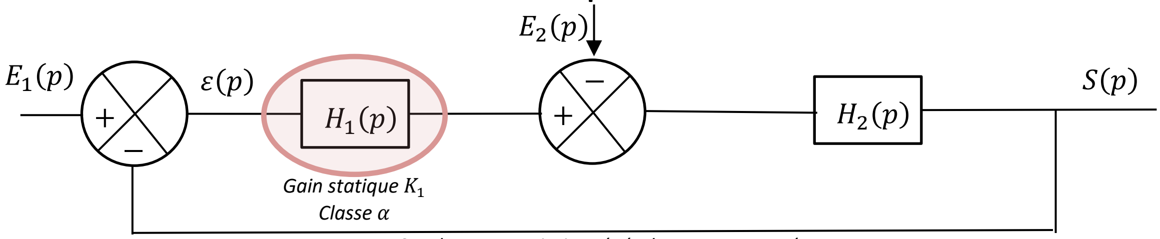
Choix du gain G' - Systèmes à retour G



$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$G' = \dfrac{1 + K_{BO}}{K_{CD}}$	$G' = G$

$G = G' : \Sigma \propto A$

Influence des perturbations

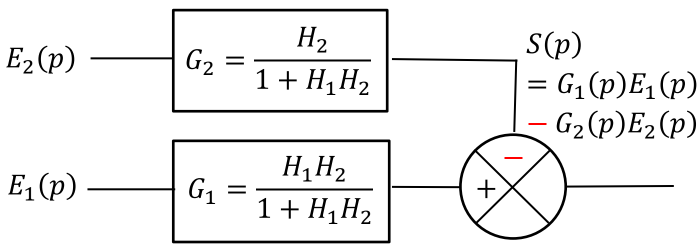


Cas du retour unitaire généralement rencontré

$$\varepsilon_1 = \lim_{t \to \infty}\left(E_1(t) - S(t)\right)\Big|_{E_2=0}$$

$$\varepsilon_2 = \lim_{t \to \infty}\left(\cancel{E_1(t)} - S(t)\right)\Big|_{E_1=0}$$

$E_2(p)$	$\varepsilon_2 = 0$ si $H_1(p)$ est de classe
Impulsion	≥ 0
Echelon	≥ 1
Rampe	≥ 2



ε_2 si α	$= 0$	$= 1$	≥ 2
Dirak	0	0	0
Echelon	$\dfrac{K_2 E_2^0}{1 + \boldsymbol{K_1} K_2}$ ou $\dfrac{E_2^0}{\boldsymbol{K_1}}$	0	0
Rampe	$+\infty$	$\dfrac{E_2^0}{\boldsymbol{K_1}}$	0

Conclusions

La classe de la partie en amont d'une perturbation influence l'écart qu'elle engendre
Une impulsion est toujours annulée. Un échelon est annulé par 1/p.
Une rampe produit un écart constant si 1/p, nul si 1/p²
Si $\varepsilon_2 \neq 0$: $\nearrow K_1 \Rightarrow \searrow \varepsilon_2$ – Chaque intégration diminue « d'un degré » l'effet de la perturbation
Appliquer le TVF si écart ni nul ni infini : $\varepsilon_2 = \lim_{p \to 0}\left(+pG_2(p)E_2(p)\right)$ (selon signe comparateur 2)

L'effet de E_2 sur S est l'opposé de ε_2 car ε_2 est « entrée-sortie » : $\Delta S = -\varepsilon_2$

Rapidité

$S_\infty = \lim_{t\to+\infty} s(t)$ t à partir duquel $\left(1-\frac{X}{100}\right)S_\infty < s(t) < \left(1+\frac{X}{100}\right)S_\infty$ $t_m = \min_i t_i / s(t_i) = S_\infty$

$\omega_{c_0} = \omega / \left|H_{j\omega}\right| = 1; G_{dB} = 0$ $BP_o : \omega / G_{dB} \geq 0$ $\omega_c = \omega / G_{dB} = G_o - 3$ $BP : \omega / G_{dB} \geq G_0 - 3$

Généralement (selon K et z) : pour 1° & 2° ordre : $BP_o = \left[0; \omega_{c_0}\right]$ & $BP = [0; \omega_c]$

Remarque : pour une même BP, un système de gain positif plus grand répond plus vite

	1° ordre	2° ordre
Seul	$tr_{5\%} = 3\tau = \frac{3}{\omega_0}$ $\omega_c = \omega_0$ $\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{K^2-1}$ $tr_{X\%} = \alpha\tau \Leftrightarrow \alpha = \ln\frac{100}{X}$	Rapidité associée à t_m $1{,}5_{z=0} < \omega_0 t_m < 6_{z=0{,}9}$ ou $\omega_0 t_m = k'(z)$ Donc : $\nearrow \omega_0 \Rightarrow \searrow t_m$ $tr_{5\%}\omega_0 = k(z)$ (Abaque) $k(0{,}69) = 3$ – Plus rapide ($tr_{5\%}$) $k(1) = 5$ – Plus rapide sans dépassement ($tr_{5\%}$) $\omega_c = \omega_0\sqrt{\sqrt{(2z^2-1)^2+1}-(2z^2-1)}$ $\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{\sqrt{(2z^2-1)^2+(K^2-1)}+(1-2z^2)}$
Bouclé Retour unitaire	$tr_{5\%} = 3\tau_{BF} = 3\frac{\tau_{BO}}{1+K_{BO}}$ $\tau_{BO} = \frac{1}{\omega_{0_{BO}}}$ $\omega_{c_{0_{BO}}} = \omega_{0_{BO}}\sqrt{{K_{BO}}^2-1}$ $\omega_{c_{BO}} = \omega_{0_{BO}}$	$\omega_{0_{BF}} = \omega_{0_{BO}}\sqrt{1+K_{BO}}$ $tr_{5\%} = \frac{k(z_{BF})}{\omega_{0_{BF}}}$; $t_m = \frac{k'(z_{BF})}{\omega_{0_{BF}}}$; $z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}}$ $\omega_{c_{BO}} = \omega_{0_{BO}}\sqrt{\sqrt{(2{z_{BO}}^2-1)^2+1}-(2{z_{BO}}^2-1)}$ $\omega_{c_{0_{BO}}} = \omega_{0_{BO}}\sqrt{\sqrt{(2{z_{BO}}^2-1)^2+\left({K_{BO}}^2-1\right)}+(1-2{z_{BO}}^2)}$
	Conclusions $\left\{\begin{array}{l}\nearrow K_{BO}\left\{\begin{array}{l}\searrow \tau_{BF}\\ \nearrow BP_{o_{BO}}\end{array}\right.\\ \nearrow \omega_{0_{BO}}\left\{\begin{array}{l}\searrow \tau_{BF}\\ \nearrow BP_{o_{BO}} \;\&\; \nearrow BP_{BO}\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \searrow tr_{5\%}$	**Conclusions** $\left\{\begin{array}{l}\nearrow K_{BO} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\nearrow \omega_{0_{BF}}\\ \searrow k'(z_{BF})\end{array}\right.\\ \nearrow \omega_{0_{BO}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\nearrow \omega_{0_{BF}}\\ \rightarrow k'(z_{BF})\\ \nearrow BP_{o_{BO}} \;\&\; \nearrow BP_{BO}\end{array}\right.\\ \searrow z_{BO} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\searrow z_{BF}\\ \nearrow BP_{o_{BO}} \;\&\; \nearrow BP_{BO}\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \searrow t_m$ Attention : $\nearrow K_{BO}$ peut $\searrow$ ou $\nearrow tr_{5\%}$

Conclusion

Rapidité d'un système (réaction, et non $tr_{5\%}$) en BF améliorée par : $\nearrow K_{BO} \nearrow BP_{o_{BO}} \nearrow BP_{BO}$

On admet la généralisation de ces résultats

Allure de la réponse

Système du second ordre

Si $z < 1$

$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

Bouclage d'un 2° ordre

$$z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}} < z_{BO}$$

$\Rightarrow$ Diminution d'amortissement

$\Rightarrow$ Apparition ou augmentation du dépassement