SESSION 2022

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE

Q1. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Donc, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puis $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k)t^k = pt((1-p)t)^{k-1}$. La série de terme général $\mathbb{P}(X=k)t^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge si et seulement si $t \in \left]-\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p}\right[$ et pour $t \in \left]-\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p}\right[$,

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} pt((1-p)t)^{k-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}.$$

Ensuite, on sait que X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1 et dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$. Puisque $\dfrac{1}{1-p} > 1$, 1 appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p}\right[$ et donc G_x est dérivable en 1 puis X admet une espérance. De plus, pour $t \in \left]-\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p}\right[$, $G_X'(t) = p\dfrac{(1-(1-p)t)+(1-p)t}{(1-(1-p)t)^2} = \dfrac{p}{(1-(1-p)t)^2}$ puis

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

Q2. Il y a 10^4 codes équiprobables et donc la probabilité demandée est $p = 10^{-4}$.

Q3. Ici, $X(\Omega) = [\![1, 10^4]\!]$. Pour $k \in [\![1, 10^4]\!]$, on note A_k l'événement $\{X = k\}$ et p_k sa probabilité. On a $p_1 = \dfrac{1}{10^4}$ puis d'après la formule des probabilités composées, pour $k \in [\![2, 10^4]\!]$,

$$\begin{aligned}
p_k &= \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) \text{ (car } A_k \subset \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) \times \ldots \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-2}}}\left(\overline{A_{k-1}}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \\
&= \frac{10^4-1}{10^4} \times \frac{10^4-2}{10^4-1} \times \ldots \times \frac{10^4-(k-1)}{10^4-(k-2)} \times \frac{1}{10^4-(k-1)} \\
&= \frac{1}{10^4} \text{ (produit télescopique).}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, 10^4]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{10^4}$ et donc, X suit la loi uniforme sur $[\![1, 10^4]\!]$. On en déduit que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{10^4+1}{2}$.

Q4. Ici, on effectue une même expérience autant de fois que nécessaire, de manière indépendante et X est le rang du premier succès. X suit donc une loi géométrique de paramètre $p = 10^{-4}$. Donc, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puis pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = 10^{-4}\left(1-10^{-4}\right)^{k-1}$. Enfin, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p} = 10^4$.

Q5. *Informatique Pour Tous.*

```
code=4714
n=int(input(' Taper un code à 4 chiffres : '))
k=1
while n!=code :
      n=int(input(' Taper un code à 4 chiffres : '))
      k+=1
print('Vous avez trouvé le code en '+str(k)+' essais.')
```

Q6. *Informatique Pour Tous.*

```
def crypte (m):
   C=[ ]
   for x in m:
       a=(x+5)\%10
       C.append(a)
   return C
```

PROBLEME

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Q7. La fonction $h\ :\ t \mapsto e^{it^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction H est définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $H'(x) = h(x) = e^{ix^2}$. Ensuite, la fonction H' est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction H est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q8. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = -t$, on obtient

$$H(-x) = \int_0^{-x} e^{it^2}\ dt = \int_0^{x} e^{i(-u)^2}\ (-du) = -\int_0^{x} e^{iu^2}\ du = -H(x).$$

La fonction H est impaire.

Q9. On sait que pour tout réel x,

$$e^{ix^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(ix^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} x^{2n}.$$

La fonction H est la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h qui s'annule en 0. On sait alors que H est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et que son développement s'obtient par primitivation terme à terme. Plus précisément, pour tout réel x,

$$H(x) = H(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Q10. Soit $x > 0$. L'application $\varphi\ :\ t \mapsto t^2$ est une bijection de $[0, x]$ sur $\left[0, x^2\right]$, strictement croissante et de classe C^1 sur $[0, x]$. On peut poser $u = t^2$ et donc $t = \sqrt{u}$ puis $dt = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$. On obtient

$$H(x) = \int_0^{x} e^{it^2}\ dt = \int_0^{x^2} e^{iu}\ \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\ du.$$

Q11. Soit $x > 4\pi^2$ (?). $H(x) - H\left(\sqrt{2\pi}\right) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\ du$. Les deux fonctions $u \mapsto \dfrac{1}{i}e^{iu}$ et $u \mapsto -\dfrac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[4\pi^2, x^2\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient :

$$\begin{aligned}
H(x) - H\left(\sqrt{2\pi}\right) &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{iu}}{i\sqrt{u}}\right]_{2\pi}^{x^2} + \frac{1}{2i}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,du\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix^2}}{ix} - \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2i}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,du\right)\\
&= -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,du.
\end{aligned}$$

Q12. Il s'agit de montrer que la fonction H a une limite dans $\mathbb{C}$ quand x tend vers $+\infty$. Pour $x > 4\pi^2$, $\left|-i\frac{e^{ix^2}}{2x}\right| = \frac{1}{2x}$.

Puisque $\frac{1}{2x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, il en est de même de $-i\frac{e^{ix^2}}{2x}$.

La fonction $u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $[2\pi, +\infty[$. De plus, $\left|\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\right| = \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ et donc $\frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} \underset{u\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\right)$ avec $\frac{3}{2} > 1$. On en déduit que la fonction $u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et finalement sur $[2\pi, +\infty[$. En particulier, la fonction $x \mapsto -\frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,du$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand x tend vers $+\infty$. Mais alors, la fonction H a une limite dans $\mathbb{C}$ quand x tend vers $+\infty$ ou encore $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ est une intégrale convergente.

Q13. *Informatique Pour Tous.*

```python
def I(f,a,b,n):
    h=(b-a)/n
    S=0
    x=a
    for k in range(n):
        S+=f(x)
        x+=h
    return h*S
```

Q14. *Informatique Pour Tous.*

```python
def g(t):
    return exp(1j*t**2)

def H(x,n):
    return I(g,0,x,n)
```

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Q15. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. $\left|e^{-x^2(t^2-i)}\right| = \left|e^{-x^2t^2}e^{ix^2}\right| = e^{-x^2t^2}$ et $\left|t^2 - i\right| = \sqrt{(t^2-i)(t^2+i)} = \sqrt{t^4+1}$.

Q16. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque pour tout réel t, on a $t^2 - i \neq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, cette fonction est paire.

Pour $t > 0$, $\left|\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| = \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4}} = \frac{1}{t^2}$ et donc $\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $2 > 1$. Donc, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ puis sur un voisinage de $-\infty$ par parité et finalement sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $g(x)$.

On a montré que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} \end{array}$ de sorte que pour tout réel x, $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,t)\ dt$.

• Pour tout réel x, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $]-\infty,+\infty[$.

• Pour tout réel t, la fonction $x \mapsto \Phi(x,t)$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$.

• Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|\Phi(x,t)| = \dfrac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et positive sur $]-\infty,+\infty[$, intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ car négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et $-\infty$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

Q17. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons pour tout $t \in]-\infty,+\infty[$, $g_n(t) = \dfrac{e^{-x_n^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\ dt = 2\int_0^{+\infty} g_n(t)\ dt$ (par parité de g_n).

• Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |g_n(t)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-x_n^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = \ell(t)$. De plus, la fonction ℓ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,+\infty[$, $|g_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} = \varphi(t)$ où la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et de plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\ dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\ dt = \int_0^{+\infty} 0\ dt = 0.$$

Mais alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 2 \times 0 = 0$.

On a montré que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 0$. On sait alors que la fonction g a une limite en $+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Par parité, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Q18. On reprend la fonction Φ de la question Q16. Soit $[a,b]$ un segment contenu dans $]0,+\infty[$. Φ admet sur $[a,b] \times \mathbb{R}$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R},\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}.$$

De plus, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| = 2xe^{-x^2t^2} \leqslant 2be^{-a^2t^2} = \varphi_1(t)$. La fonction φ_1 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ car négligeable en $+\infty$ et $-\infty$ devant $\dfrac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées.

Ainsi,

- Pour chaque $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]-\infty,+\infty[$.
- La fonction Φ admet sur $[a,b] \times \mathbb{R}$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x vérifiant
  • pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]-\infty,+\infty[$
  • pour tout $t \in]-\infty,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,b]$
  • Il existe une fonction $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue par morceaux et intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ telle que, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times]-\infty,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_1(t)$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction g est de classe C^1 sur $[a,b]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ contenu dans $]0,+\infty[$, la fonction g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}^*$ par parité et de plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = -2x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2(t^2-i)}\ dt.$$

Q19. Soit $x > 0$. En posant $u = tx$, on obtient

$$g'(x) = -2e^{ix^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(xt)^2}\ x dt = -2e^{ix^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\ du = -2\sqrt{\pi} e^{ix^2}.$$

Q20. Posons $P = 1$ et $Q = X^2 - i$ puis $R = \dfrac{1}{X^2-i} = \dfrac{P}{Q}$.

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1}{X^2 - e^{\frac{i\pi}{2}}} = \frac{1}{\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X + e^{\frac{i\pi}{4}}\right)}.$$

Donc, il existe deux complexes a et b tels que $R = \dfrac{a}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \dfrac{b}{X + e^{\frac{i\pi}{4}}}$. Puisque $e^{\frac{i\pi}{4}}$ est un pôle simple de R, on sait que $a = \dfrac{P\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)}{Q'\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)} = \dfrac{1}{2e^{\frac{i\pi}{4}}} = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$. Par parité de R, $b = -a = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$. Finalement,

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} - \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{X + e^{\frac{i\pi}{4}}}\right).$$

Nous donnons la suite de la décomposition admise par l'énoncé.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)}{2\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)} = \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \times \frac{X - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}}{X^2 - 2X\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \times \frac{2X - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1}\\ &= \frac{1-i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} + \frac{i}{X^2 - X\sqrt{2} + 1}\right)\end{aligned}$$

En remplaçant X par $-X$ on a aussi $-\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{X + e^{\frac{i\pi}{4}}} = \dfrac{1-i}{4}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{2X + \sqrt{2}}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} + \dfrac{i}{X^2 + X\sqrt{2} + 1}\right)$ d'où le résultat.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \left[\sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi\sqrt{2}.$$

Ensuite, en posant $u = -t$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-du}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} = \pi\sqrt{2}$. Ensuite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}\right)\ dt = \left[\ln\left(\frac{t^2 - t\sqrt{2} + 1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

car $\displaystyle\lim_{t \to \pm\infty} \ln\left(\frac{t^2 - t\sqrt{2} + 1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}\right) = 0$. Finalement,

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - i}\ dt = \frac{1-i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 2i\pi\sqrt{2}\right) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}}.$$

Q21. Pour $x > 0$, $g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$ et donc

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\ dt = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}\int_0^x e^{it^2}\ dt = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \times H(x).$$

D'après la question Q17, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Quand x tend vers $+\infty$, on obtient $0 = \dfrac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\ dt$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\ dt = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ puis, par parité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}\ dt = 2\times\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i).$$

Par passage aux parties réelles et imaginaires, on obtient finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(t^2\right) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Partie III - Etude d'une série de fonctions

Q22. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En posant $m = n-1$ ou encore $n = m+1$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n\left(b_n - b_{n-1}\right) &= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=1}^{N} a_n b_{n-1} = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{m=0}^{N-1} a_{m+1} b_m \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} b_n = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0 \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(a_n - a_{n+1}\right) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0.\end{aligned}$$

La suite a converge vers 0 et la suite b est bornée. Donc, $a_{N+1}b_N$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ puis la suite $\left(a_{N+1}b_N - a_1 b_0\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque la suite a est réelle décroissante, $\left|\left(a_n - a_{n+1}\right) b_n\right| \leqslant \left(a_n - a_{n+1}\right)\|b\|_\infty$. La suite a est convergente et on sait alors que la série de terme général $a_n - a_{n+1}$ converge. Il en est de même de la série de terme général $\left(a_n - a_{n+1}\right)\|b\|_\infty$. Mais alors, la série de terme général $\left(a_n - a_{n+1}\right) b_n$ converge absolument et en particulier converge ou encore la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(a_n - a_{n-1}\right) b_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$.

La suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n\left(b_n - b_{n-1}\right)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente en tant que somme de deux suites convergentes ou encore la série de terme général $a_n\left(b_n - b_{n-1}\right)$ converge.

Q23. Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, $e^{ix} \neq 1$ puis

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} &= \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix}e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\frac{e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Q24. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. La suite $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$ (en tenant compte du fait que $\dfrac{x}{2} \in]0, \pi[$ et donc $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0$),

$$\left|b_n\right| = \left|1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| \leqslant 1 + \frac{\left|\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right|}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leqslant 1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Donc, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après la question Q22, la série de terme général $a_n(b_n - b_{n-1}) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}} = f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge. Ceci montre que la fonction S est définie sur $]0, 2\pi[$.

Q25. Soit $x \in]0, 2\pi[$. D'après les questions Q10 et Q12, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt$ est une intégrale convergente. Ensuite,

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x) - \int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right| &= \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} < +\infty \text{ (car } \frac{3}{2} > 1).\end{aligned}$$

Le réel $C = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ convient.

Q26. Soit $x > 0$. En posant $u = tx$ et donc $t = \dfrac{u}{x}$ puis $dt = \dfrac{du}{x}$, on obtient d'après la question Q10,

$$I(x) = \sqrt{x}\int_x^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u/x}}\,\frac{du}{x} = \int_x^{+\infty}\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt - \int_0^{x}\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,dt = 2\left(\lim_{t\to+\infty}H(t) - H\left(\sqrt{x}\right)\right).$$

D'après la question Q21, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}H(t) = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ et d'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}H\left(\sqrt{x}\right) = H(0) = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}I(x) = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$.

Q27. $\dfrac{e^{ix}-1}{ix} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1+ix+o(x)-1}{ix} \underset{x\to 0}{=} 1+o(1)$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ix}-1}{ix} = 1$.

D'après la question Q25, $\dfrac{e^{ix}-1}{ix}S(x) - \dfrac{I(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{e^{ix}-1}{ix}S(x) - \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,dt \underset{x\to 0^+}{=} O(1)$ et donc, d'après la question Q26,

$$S(x) \underset{x\to 0^+}{=} \frac{ix}{e^{ix}-1}\left(\frac{I(x)}{\sqrt{x}} + O(1)\right) \underset{x\to 0^+}{=} (1+o(1))\left(\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}.$$

