Planche n° 33. Matrices (partie II)

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

La totalité des exercices de la planche n° 26 (matrices, partie I) ont été reproduits dans cette planche. On devra le chercher à nouveau avec un éclairage nouveau.

Exercice n° 1 : (T)**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer $f(2e_1 - 3e_2 + 5e_3)$.

2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3) Calculer M^2 et M^3.

4) Déterminer $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

5) Calculer $(I_3 - M)\left(I_3 + M + M^2\right)$ et en déduire que $I_3 - M$ est inversible. Préciser $(I_3 - M)^{-1}$.

Exercice n° 2 : (**)

Pour x réel, on pose

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Déterminer $(A(x))^n$ pour x réel et n entier relatif.

Exercice n° 3 : (*T)**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1}.

2) Déterminer une base $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(u_1) = u_1$, $u(u_2) = u_1 + u_2$ et $u(u_3) = u_2 + u_3$.

3) Déterminer P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ ainsi que P^{-1}.

4) En déduire $f^n(e_1)$, $f^n(e_2)$ et $f^n(e_3)$ pour n entier relatif.

Exercice n° 4 : (T)**

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P & \mapsto & Q = e^{X^2}(Pe^{-X^2})' \end{array}$.

1) Vérifier que $f \in (\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.

2) Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

3) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice n° 5 : (*I)**

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, nilpotent d'indice 2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 6 : (*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Calculer A^n pour n entier relatif.

Exercice n° 7 : (**)

Montrer que $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix},\ x \in]-1,1[\right\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices (on pourra poser $x = \operatorname{th} a$).

Exercice n° 8 : (***)

1) Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

2) Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matirce triangulaire inférieure.

Exercice n° 9 : (***)

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $E = \left\{M(x,y) = xI + yJ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$. Déterminer une base de E et sa dimension.

2) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

3) Quels sont les inversibles de cet anneau ?

4) Résoudre dans E les équations suivantes :

$$a)\ X^2 = I \quad b)\ X^2 = 0 \quad c)\ X^2 = X.$$

5) Calculer $(M(x,y))^n$ pour n entier naturel non nul.

Exercice n° 10 : (***)

Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer l'existence d'au moins un couple (A, B) vérifiant les conditions de l'énoncé puis calculer BA. (Indication. Calculer $(AB)^2$ et utiliser le rang.)

Exercice n° 11 : (***)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ $(n \geqslant 2)$ définie par

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,j} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i > j \\ 0 \text{ si } i < j \end{cases}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice n° 12 : (*I)**

Déterminer l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (utiliser les matrices élémentaires).

Exercice n° 13 : (*T)**

Déterminer le rang des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

4) $(i+j+ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ **5)** $(\sin(i+j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ **6)** $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$, $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

Exercice n° 14 : (****)

Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ $(n\geqslant 2)$ contient au moins une matrice inversible.

Exercice n° 15 : (*I)** (Théorème de Hadamard).

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}|>\displaystyle\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice n° 16 : (*I)** (Matrice de Vandermonde des racines n-ièmes de l'unité).

Soit $\omega=e^{2i\pi/n}$, $(n\geqslant 2)$. Soit $A=\left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (calculer d'abord $A\overline{A}$).

Exercice n° 17 : (*I)**

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ définie par $a_{i,j}=0$ si $i>j$ et $a_{i,j}=\dbinom{i-1}{j-1}$ si $i\leqslant j$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse. (Indication : considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1)$).

Exercice n° 18 : (I)**

On pose $u_0=1$, $v_0=0$, puis, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n+v_n$ et $v_{n+1}=u_n+2v_n$.

1) Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer A^n. En déduire u_n et v_n en fonction de n.

2) En utilisant deux combinaisons linéaires intéressantes des suites u et v, calculer directement u_n et v_n en fonction de n.

Exercice n° 19 : (**)

Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ puis B l'élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ défini par $B=\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A.

