

FONCTIONS D'EULER

Préliminaire.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On admettra dans tout le problème que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie I

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} par :

$$\forall x > 0, u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right).$$

1. (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, u_n(x) \geq 0$.
- (b) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite du problème, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $S(1)$.

2. (a) Prouver que S est dérivable sur $[a, b]$.
- (b) En déduire que S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que lorsque p tend vers l'infini : $\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} = \ln p + \gamma + o(1)$.

4. (a) Prouver que :

$$\sum_{n=1}^p \left(u_n(x+1) - u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).$$

- (b) En déduire que :

$$\forall x > 0, S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).$$

5. Soit φ la fonction définie de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{1}{x} \exp \left(-\gamma x + S(x) \right).$$

- (a) Montrer que $\forall x > 0, \varphi(x+1) = x \varphi(x)$.

- (b) Vérifier que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Calculer $\varphi'(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\varphi'(1)$?

6. Pour $n \geq 1$, soit φ_n la fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall x > 0, \varphi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Montrer que $\forall x > 0, \ln \left(\varphi_n(x) \right)$ tend vers $S(x) - x\gamma - \ln x$ quand n tend vers $+\infty$.

7. On note $\pi_p = \prod_{n=1}^p \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$ (p entier naturel > 0).

- (a) Prouver la convergence de la suite $(\pi_p)_{p \geq 1}$ vers une limite $L(x)$.

FONCTIONS D'EULER

(b) En déduire que : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \frac{L(x)}{x} \exp(-x\gamma)$.

Partie II: Fonction Gamma d'Euler

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

8. (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ .

(b) Calculer $\Gamma(1)$.

(c) Montrer que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

9. Pour n entier naturel ≥ 1 , on définit la fonction g_n de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} par :

$$t \rightarrow \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t < n, \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}$$

(a) Prouver que : $\forall t \geq 0$, $\exp(-t) \geq 1 - t$.

En déduire que : $\forall t \geq 0$, $\forall n \geq 1$, $0 \leq g_n(t) \leq \exp(-t)$.

(b) Montrer alors que :

$$\forall x > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).$$

10. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la fonction I_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt.$$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction I_n .

(b) Prouver que :

$$\forall x > 0, \forall n \geq 1, \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x I_n(x).$$

(c) Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$ et en déduire que :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \varphi(x).$$

Partie III: Fonction Digamma

Dans toute cette partie, $x \in]0, 1[$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^n t dt$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit les fonctions :

— v_n de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} par : $\forall t > 0$, $v_n(t) = \frac{x^n}{n!} \exp(-t) (\ln t)^n$

— T_n de $]1, +\infty[$ dans \mathbb{R} par : $\forall u > 1$, $T_n(u) = \int_{1/u}^u v_n(t) dt$

(a) Pour $u > 1$ donné, montrer que la série de fonctions de terme général v_n converge normalement sur $\left[\frac{1}{u}, u\right]$.

(b) Justifier que : $\forall u > 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^u \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\right) dt$.

FONCTIONS D'EULER

13. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \int_0^1 \exp(-t) |\ln t|^n dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{x^n}{n!} \int_1^{+\infty} \exp(-t) (\ln t)^n dt.$$

(a) Montrer que :

$$\forall p \geq 0, \sum_{n=0}^p (a_n + b_n) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-t + x |\ln t|) dt.$$

(b) En déduire que la série de fonctions de terme général T_n converge normalement sur $]1, +\infty[$.

14. (a) Vérifier que $\forall x \in]0, 1[$, $\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \exp(-t) (\ln t)^n \right) dt$.

(b) Prouver alors que :

$$\forall x \in]0, 1[, \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t) (\ln t)^n dt \right).$$

15. (a) A l'aide des parties I et II, vérifier que :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

puis que $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right)$.

(b) En admettant que l'on peut intervertir dans la formule précédente les deux sommations, prouver que :

$$\forall x \in]0, 1[, \Gamma(1+x) = \exp \left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) \right).$$

(c) Démontrer alors le résultat : $\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t dt = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$.

FONCTIONS D'EULER

Preliminaire.

La série de Riemann définissant $\zeta(x)$ converge si et seulement si $x > 1$, donc

L'ensemble de définition de la fonction ζ est $]1, +\infty[$.

Partie I

1. (a) Par concavité de la fonction \ln , on a : $\forall t > 0$, $\ln t \leq t - 1$, d'où, avec $t = 1 + \frac{x}{n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, u_n(x) \geq 0$$

- (b) Du développement limité de $t \mapsto \ln(1+t)$ en 0, on déduit, pour $x > 0$ fixé :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{x}{n} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{d'où} \quad u_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2};$$

il en résulte, par comparaison à une série de Riemann, que la série numérique $\sum u_n(x)$ converge, cela pour tout $x > 0$, autrement dit :

La série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2. (a) Les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $[a, b]$, avec

$$\forall x \in [a, b], u'_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \quad \text{d'où} \quad |u'_n(x)| = \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{b}{n^2}.$$

Or, la série numérique $\sum \frac{b}{n^2}$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur $[a, b]$; *a fortiori*, elle converge uniformément sur tout segment de $[a, b]$; comme on vient de voir que $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, b]$, on peut appliquer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions :

S est dérivable sur $[a, b]$ (et $S' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$). En particulier

S est dérivable sur $[a, b]$.

- (b) Le résultat précédent est établi pour tout couple (a, b) tel que $0 < a < b$; par conséquent :

$$S \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et : } \forall x > 0, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

3. Par définition des u_n , on a :

$$\sum_{n=1}^p u_n(1) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^p (\ln(n+1) - \ln n) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \ln(p+1)$$

d'où, puisque $\gamma = S(1)$,

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \ln p - \gamma = \sum_{n=1}^p u_n(1) + \ln(p+1) - \ln p - S(1) = \sum_{n=1}^p u_n(1) - S(1) + \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

qui tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, puisque $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$. Autrement dit :

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \underset{p \rightarrow \infty}{=} \ln p + \gamma + o(1).$$

FONCTIONS D'EULER

4. (a) Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$; on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_n(x+1) - u_n(x) &= \frac{x+1}{n} - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) - \frac{x}{n} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln(n+x+1) + \ln(n+x) \end{aligned}$$

En sommant, il reste après l'hécatombe :

$$\sum_{n=1}^p (u_n(x+1) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} + \ln(1+x) - \ln(p+1+x).$$

(b) Soit $x > 0$ fixé; on a pour $p \in \mathbb{N}^*$, d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p u_n(x+1) - \sum_{n=1}^p u_n(x) &\underset{p \rightarrow \infty}{=} \ln p + \gamma + o(1) + \ln(1+x) - \ln(p+1+x) \\ &\underset{p \rightarrow \infty}{=} \gamma + \ln(1+x) - \ln\left(1 + \frac{1+x}{p}\right) + o(1), \end{aligned}$$

d'où, par unicité de la limite lorsque p tend vers l'infini : $S(x+1) - S(x) = \gamma + \ln(1+x)$, autrement dit :

$$\boxed{\forall x > 0, S(x+1) = S(x) + \gamma + \ln(1+x).}$$

5. (a) Soit $x > 0$; d'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) &= \frac{1}{x+1} \exp\left(-\gamma(x+1) + S(x+1)\right) \\ &= \frac{1}{x+1} \exp\left(-\gamma(x+1) + S(x) + \gamma + \ln(x+1)\right) \\ &= \frac{1}{x+1} \exp\left(-\gamma x + S(x)\right) \exp\left(\ln(x+1)\right) \\ &= \exp\left(-\gamma x + S(x)\right), \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\forall x > 0, \varphi(x+1) = x \varphi(x).}$$

(b) Nous avons vu que S était dérivable sur $]0, +\infty[$, donc, \exp étant dérivable sur \mathbb{R} , en vertu des théorèmes opératoires classiques :

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

J'applique les formules de dérivation d'un produit et d'une fonction composée :

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \exp\left(-\gamma x + S(x)\right) + \frac{1}{x} \left(-\gamma + S'(x)\right) \exp\left(-\gamma x + S(x)\right),$$

soit

$$\boxed{\forall x > 0, \varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x} - \gamma + S'(x)\right) \cdot \varphi(x).}$$

Comme $S(1) = \gamma$, on a $\varphi(1) = 1$; de plus, d'après 2b,

$$S'(1) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{p+1} \right) = 1,$$

d'où finalement :

$$\boxed{\varphi'(1) = -\gamma.}$$

FONCTIONS D'EULER

6. Soient $n \geq 1$ et $x > 0$, on a par définition de φ_n :

$$\begin{aligned} \ln \varphi_n(x) &= x \ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln(x+k) \\ &= x \ln n - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \ln x \\ &= x \ln n + \sum_{k=1}^n u_n(x) - \sum_{k=1}^n \frac{x}{n} - \ln x \\ &= \sum_{k=1}^n u_n(x) - x \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) - \ln x \end{aligned}$$

D'où, par définition de S et grâce à la question 3,

$$\boxed{\forall x > 0, \ln(\varphi_n(x)) \text{ tend vers } S(x) - x\gamma - \ln x \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.}$$

7. (a) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$; π_p est dans \mathbb{R}^{+*} et

$$\ln \pi_p = \sum_{n=1}^p \frac{x}{n} - \sum_{n=1}^p \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^p u_n(x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} S(x).$$

D'où, par continuité de la fonction \exp :

$$\boxed{\text{La suite } (\pi_p)_{p \geq 1} \text{ converge vers } L(x) = \exp S(x).}$$

(b) Alors, par définition même de φ :

$$\boxed{\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{L(x)}{x} \exp(-x\gamma).}$$

Partie II

8. (a) Pour x réel, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs strictement positives et

$$f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{et} \quad t^2 f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par conséquent, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1 - x < 1$ (c'est-à-dire $x > 0$) et f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout x . Par conséquent :

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } \Gamma \text{ est }]0, +\infty[.}$$

$$(b) \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_{t=0}^{t=T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} (1 - e^{-T}) = 1 :$$

$$\boxed{\Gamma(1) = 1.}$$

(c) $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et le produit $t \mapsto t^x e^{-t}$ admet des limites nulles en 0 et en $+\infty$. Par intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

FONCTIONS D'EULER

9. (a) Par concavité de la fonction \exp , on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x \geq 1 + x$; d'où, avec $x = -t$:

$$\boxed{\forall t \geq 0, \exp(-t) \geq 1 - t.}$$

Soient alors $t \geq 0$ et $n \geq 1$; si $t \geq n$, $g_n(t) = 0$ et on a bien $0 \leq g_n(t) \leq \exp(-t)$; on suppose maintenant $0 \leq t < n$, on peut appliquer le résultat ci-dessus à $\frac{t}{n}$ et on utilise la croissance de $x \mapsto x^n$ sur \mathbb{R}^+ :

$$0 \leq 1 - \frac{t}{n} \leq \exp\left(-\frac{t}{n}\right) \quad \text{d'où} \quad 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \exp(-t).$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall n \geq 1, 0 \leq g_n(t) \leq \exp(-t).}$$

- (b) Soit $x > 0$ fixé; $f_n : t \mapsto t^{x-1}g_n(t)$ est nulle sur $[n, +\infty[$, continue sur $]0, n]$, avec $f_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$, donc, par comparaison à une intégrale de Riemann ($1 - x < 1$), f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$, avec :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

On applique alors le théorème de convergence dominée à la suite de fonction (f_n) , sur l'intervalle $]0, +\infty[$: les f_n sont continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $f : t \mapsto t^{x-1} \exp(-t)$; en effet, pour $t > 0$ fixé, on a $t < n$ pour n assez grand (précisément pour $n > t$!) et

$$\forall n > t, f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-t) t^{x-1}$$

car

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -t$$

f est continue sur $]0, +\infty[$, il ne reste qu'à vérifier l'hypothèse de domination. Or, d'après la question précédente, on a

$$\forall t > 0, \forall n \geq 1, |f_n(t)| \leq f(t),$$

qui ne dépend pas de n et enfin f est intégrable sur $]0, +\infty[$; le théorème de convergence dominée me permet alors de conclure que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt,$$

autrement dit :

$$\boxed{\forall x > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \Gamma(x).}$$

10. (a) Pour tout réel x , la fonction $t \mapsto (1 - t)^n t^{x-1}$ est continue sur $]0, 1]$, à valeurs positives, équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ au voisinage de 0, donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } I_n \text{ est }]0, +\infty[.}$$

- (b) L'application $\varphi :]0, n] \rightarrow]0, 1], t \mapsto \frac{t}{n}$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 , donc par la formule de changement de variable

$$\int_0^1 (1 - u)^n u^{x-1} du = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^{x-1}}{n^{x-1}} \cdot \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n^x} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

On obtient :

$$\boxed{\forall x > 0, \forall n \geq 1, \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x I_n(x).}$$

FONCTIONS D'EULER

(c) De même, pour $x > 0$ et $n \geq 2$, on intègre par parties sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \left[(1-t)^n \frac{t^x}{x} \right]_{t=0}^{t=1} + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-t)^{n-1} t^x dt$$

Comme $x > 0$, on obtient

$$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1).$$

Par une récurrence immédiate, il vient, compte tenu du fait que la relation ci-dessus reste correcte pour $n = 1$ (en étendant la définition de I_n à I_0) :

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

et donc

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \varphi_n(x).$$

Dans la partie 1., on a déterminé la limite de $(\ln \varphi_n(x))$, qui donne, par continuité de la fonction \exp , $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x)$; finalement, par unicité de la limite :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \varphi(x).$$

Partie III

11. La fonction $h : t \mapsto \exp(-t) \ln^n t$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs positives et, d'après les croissances comparées des fonctions usuelles, on a

$$h(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, h est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^n t \, dt \text{ existe.}$$

12. (a) Soit $u > 1$ fixé. on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[u, \frac{1}{u}\right]$, $|\ln t| \leq \ln u$ et $e^{-t} \leq 1$, d'où

$$\sup_{\left[u, \frac{1}{u}\right]} |v_n| \leq \frac{x^n (\ln u)^n}{n!};$$

or la série numérique (x et u étant fixés) $\sum_{n \geq 0} \frac{(x \ln u)^n}{n!}$ converge (série exponentielle, de somme $\exp(x \ln u)$).

Par conséquent :

$$\text{La série de fonctions de terme général } v_n \text{ converge normalement sur } \left[\frac{1}{u}, u\right].$$

(b) *A fortiori*, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $\left[u, \frac{1}{u}\right]$, d'où, grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\forall u > 1, \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(u) = \int_{1/u}^u \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) \right) dt.$$

FONCTIONS D'EULER

13. (a) Pour tout n de \mathbb{N} , l'existence de a_n et b_n est justifiée, et

$$a_n + b_n = \frac{x^n}{n!} \int_0^{+\infty} \exp(-t) |\ln t|^n dt$$

d'où, par linéarité de l'intégrale, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^p (a_n + b_n) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-t) \sum_{n=0}^p \frac{(x |\ln t|)^n}{n!} dt.$$

Or, pour tout $t > 0$, x étant fixé, la série numérique de terme général $\frac{(x |\ln t|)^n}{n!}$ est convergente, de somme $\exp(x |\ln t|)$; comme elle est à termes positifs, ses sommes partielles sont majorées par sa somme, d'où

$$\forall t > 0 \quad \exp(-t) \sum_{n=0}^p \frac{(x |\ln t|)^n}{n!} \leq \exp(-t) \exp(x |\ln t|) = \exp(-t + x |\ln t|).$$

Pour $t \in]0, 1]$, $\exp(-t + x |\ln t|) = \exp(-t - x \ln t) = \frac{\exp(-t)}{t^x} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et,

pour $t \geq 1$, $\exp(-t + x |\ln t|) = \exp(-t + x \ln t) = t^x \exp(-t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On en déduit, par comparaison aux intégrales de Riemann, que la fonction $t \mapsto \exp(-t + x |\ln t|)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où finalement, par croissance de l'intégrale :

$$\forall p \geq 0, \quad \sum_{n=0}^p (a_n + b_n) \leq \int_0^{+\infty} \exp(-t + x |\ln t|) dt$$

- (b) On a, pour tout $u > 1$, $|T_n(u)| \leq a_n + b_n$, d'où $\sup_{]1, +\infty[} |T_n| \leq a_n + b_n$. Or on vient de voir que la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général $a_n + b_n$ est majorée. Comme cette série est à termes positifs, il en résulte qu'elle converge et, par conséquent :

La série de fonctions de terme général T_n converge normalement sur $]1, +\infty[$.

14. (a) Par définition, $\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t) dt$, où, pour tout $t > 0$: $t^x = \exp(x \ln t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln t)^n}{n!}$. Ainsi :

$$\forall x \in]0, 1[\quad \Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \exp(-t) (\ln t)^n \right) dt.$$

- (b) On a $\Gamma(1+x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(u)$. Or, on vient de voir que la série de fonctions $\sum T_n$ converge uniformément

sur $]1, +\infty[$; comme par ailleurs, pour tout n , $T_n(u) \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} v_n(t) dt$ (car v_n est intégrable sur $]0, +\infty[$),

le théorème de la double limite s'applique : la série numérique de terme général $\int_0^{+\infty} v_n(t) dt$ converge et

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{u \rightarrow +\infty} T_n(u).$$

Autrement dit :

$$\forall x \in]0, 1[\quad \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-t) (\ln t)^n dt \right).$$

FONCTIONS D'EULER

15. (a) D'après la partie **I**, on a

$$\varphi'(x) = \left(-\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \right) \cdot \varphi(x),$$

soit, puisque $\varphi = \Gamma$ d'après la dernière question de la partie **2** :

$$\boxed{\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)}.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, puisque on a $x \in]0, 1[$, on a $\left| -\frac{x}{n} \right| < 1$ et on connaît la série géométrique de raison $-\frac{x}{n}$:

$$\frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{n} \right)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{n} \right)^k$$

d'où

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{n^{k+1}},$$

soit, d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right)}.$$

(b) L'énoncé nous autorise à admettre que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \right),$$

soit, en réindexant et en changeant le nom de la variable :

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = -\frac{1}{t} - \gamma + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k t^{k-1} \zeta(k).$$

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$; en intégrant sur le segment $[\varepsilon, x]$, j'obtiens, sachant que Γ est à valeurs strictement positives :

$$[\ln \Gamma(t)]_{t=\varepsilon}^{t=x} = -\ln x + \ln \varepsilon - \gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k).$$

L'intégration terme à terme de la série est justifiée, du fait qu'il s'agit de la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à 1 — car $\left| (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} \right| \leq \frac{\zeta(2)}{2}$ pour tout $k \geq 2$ — et que l'on intègre sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence de cette série entière, où elle converge normalement. on a donc :

$$\ln \left(x \Gamma(x) \right) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) + \ln \left(\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \right),$$

cela pour tout ε de $]0, 1[$; or $\varepsilon \Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1 + \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(1) = 1$, puisque $\Gamma = \varphi$ est continue en 1 (on a vu dans la partie **1** qu'elle était dérivable sur $]0, +\infty[$). À la limite, lorsque ε tend vers 0, j'obtiens donc

$$\ln \Gamma(1+x) = -\gamma x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k),$$

soit, en appliquant la fonction exp :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \quad \Gamma(1+x) = \exp \left(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) \right)}.$$

FONCTIONS D'EULER

(c) La formule de Taylor, appliquée à la somme de la série entière évoquée ci-dessus, me donne

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\zeta(2)}{2} x^2 + o(x^2)$$

d'où

$$\Gamma(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \exp \left(-\gamma x + \frac{\zeta(2)}{2} x^2 + o(x^2) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \gamma x + \frac{\gamma^2 + \zeta(2)}{2} x^2 + o(x^2)$$

Par ailleurs, on a vu que

$$\forall x \in]0, 1[, \Gamma(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \int_0^{+\infty} \exp(-t) \frac{(\ln t)^n}{n!} dt.$$

Ainsi, la série entière $\sum \lambda_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, sa fonction somme admet en 0 le développement limité $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + o(x^2)$. D'où, par unicité de ce développement limité :

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -\gamma, \lambda_2 = \frac{\gamma^2 + \zeta(2)}{2}.$$

En particulier, sachant que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \exp(-t) \ln^2 t \, dt = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Central PSI 2002