Noyaux et images itérés

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E un espace vectoriel réel de dimension n. Si f est un endomorphisme de E, on définit la suite $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'endomorphismes de E par $f^0 = id_E$ et , pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = fof^k$.

Partie I: Noyaux et images itérés

On se propose, dans cette partie, de montrer, pour tout endomorphisme f de E, l'existence d'un entier p vérifiant:

$$\begin{cases} 1 \leqslant p \leqslant n \\ E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im} f^p \end{cases} \tag{1}$$

1. Donner, en justifiant votre réponse, une valeur de p vérifiant (1) lorsque f est un automorphisme de E.
   On étudie maintenant et jusqu'à la fin du problème, le cas où f est un endomorphisme non bijectif quelconque de E.
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\text{Ker} f^k \subset \text{Ker} f^{k+1}$ et $\text{Im} f^{k+1} \subset \text{Im} f^k)$.
3. Montrer que,$\forall k \in \mathbb{N}$, l'égalité Ker f^k = Ker f^{k+1} équivaut à l'égalité $\text{Im} f^k = \text{Im} f^{k+1}$,et qu'elle entraine $\text{Im} f^j = \text{Im} f^k$ pour tout $j \geqslant k$.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, établir une relation entre les dimensions des sous espaces $\text{Im} f^k$, $\text{Im} f^{k+1}$ et $\text{Im} f^k \cap \text{Ker } f$.
5. On note $a_k = \dim(\text{Ker } f^k)$. Montrer que la suite $(\ a_k\ )_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'il existe un entier k tel que $a_k = a_{k+1}$.
6. En déduire l'existence d'un entier naturel non nul p qui vérifie les deux conditions:
   (i) $\forall k \in \{0, .., p-1\}, \text{Ker } f^k \neq \text{Ker } f^{k+1}$
   (ii) Ker f^p = Ker f^{p+1}.
7. Montrer que $\forall k \geqslant p$ Ker f^k = Ker f^{k+1}.
8. Montrer que $E = \text{Ker } f^p \oplus \text{Im} f^p$.
9. Vérifier que l'entier p déterminé à la question (6) est le plus petit entier naturel vérifiant (1).

Partie II: Application à l'étude d'endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, p désigne l'entier déterminé en (6)

10. On suppose que $p = n$.
    (a) Quelle est la dimension de Ker f^k pour $k \in \{0, ..., n-1\}$? en déduire que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
    (b) Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$ et soit $L = \{g \in \mathcal{L}(E) \ / \ gof = fog\}$.Montrer que $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$ est une base de E.
    (c) Soit $g \in L$. Montrer qu'il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $g(a) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(a)$.
    (d) Montrer que $g = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.
    (e) Déterminer la dimension de L .
11. On suppose que p est compris strictement entre 1 et n, et que E = Ker f^p. soit e un élément de E tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$.
    (a) Établir que la famille $(e, f(e), ..., f^{p-1}(e))$ est libre. On notera G le sous espace de E qu'elle engendre
    (b) Soit φ un élément de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tel que $\varphi(f^{p-1}(e)) \neq 0$.
    Quelle est la dimension du s.e.v H de E^* engendré par $(\varphi o f^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$?.
    (c) Soit $F = \bigcap\limits_{\Psi\in H} \text{Ker } \Psi$. Montrer que F est stable par f et que $E = F \oplus G$.

Noyaux et images itérés

Partie I: Noyaux et images itérés

1. Lorsque f est un automorphisme, alors $\mathrm{Ker}f = \{0\}$ et $\mathrm{Im}f = E$, alors on peut prendre $p = 1$.

2. Soient k un entier naturel et x un élément de E.
$$x \in \mathrm{Ker}f^k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}f^{k+1}.$$
On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}f^k \subset \mathrm{Ker}f^{k+1}$. Ensuite,
$$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists y \in E/\ x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z(= f(y)) \in E/\ x = f^k(z) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}f^k.$$
On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset \mathrm{Im}f^k$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vu les inclusions précédentes, on a
$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}f^k = \mathrm{Ker}f^{k+1} &\iff \dim ker f^k = \dim ker f^{k+1}\\ &\iff \mathbf{rg} f^k = \mathbf{rg} f^{k+1}\\ &\iff \mathrm{Im}f^k = \mathrm{Im}f^{k+1}\end{aligned}$$
Par récurrence sur $j \geqslant k$, on montre que $\mathrm{Im}f^j = \mathrm{Im}f^k$
   - Pour $j = k$, rien à démontrer et pour $j = k+1$ l'égalité est vérifiée
   - Soit $j \geqslant k+1$ et supposons que $\mathrm{Im}f^j = \mathrm{Im}f^k$ et montrons que $\mathrm{Im}f^{j+1} = \mathrm{Im}f^k$. L'inclusion $\mathrm{Im}f^{j+1} \subset \mathrm{Im}f^k$ est triviale car la suite $\left(\mathrm{Im}f^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Inversement soit $x \in \mathrm{Im}f^k = \mathrm{Im}f^{k+1}$, alors il existe $z_0 \in E$ tel que $x = f^{k+1}(z_0) = f\left(f^k(z_0)\right)$. Par hypothèse de récurrence $f^k(z_0) \in \mathrm{Im}f^{=}\mathrm{Im}f^j$, d'où il existe $x_0 \in E$ tel que $f^k(z_0) = f^j(x_0)$, puis $x = f^{j+1}(x_0) \in \mathrm{Im}f^{j+1}$

4. Soit g la restriction de f sur $\mathrm{Im}f^k$. On a bien $\mathrm{Im}g = g\left(\mathrm{Im}f^k\right) = \mathrm{Im}f^{k+1}$ et $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f^k$. On applique le théorème du rang à g , alors
$$\dim \mathrm{Im}f^k = \dim\left(\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f^k\right) + \dim \mathrm{Im}f^{k+1}$$

5. La suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est d'entier naturel croissante et majorée par n, donc elle ne peut pas être strictement croissante et, par suite, il existe un entier k tel que $a_k = a_{k+1}$.

6. $\{k \in \mathbb{N}\ ,\ a_k = a_{k+1}\}$ est un sous-nsemble de $\mathbb{N}^*$ car f n'est pas ijectif et non vide vide d'après la question précédente, donc il admet un plus petit élément $p \in \mathbb{N}^*$. Alors
   (i) $\forall k \in \{0, .., p-1\}, \mathrm{Ker}\ f^k \neq \mathrm{Ker}\ f^{k+1}$
   (ii) $\mathrm{Ker}\ f^p = \mathrm{Ker}\ f^{p+1}$.

7. Puisque $\mathrm{Ker}f^p = \mathrm{Ker}f^{p+1}$, d'après la question (3), $\forall k \geqslant p\ \ Ker\ f^k = \mathrm{Ker}\ f^{k+1}$.

8. Il sufiit de démontrer que $\mathrm{Ker}\ f^p \cap \mathrm{Im}f^p = \{0\}$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\ f^p \cap \mathrm{Im}f^p$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$ et $f^p(y) = 0$, soit $f^{2p}(y) = 0$, ou encore $y \in \mathrm{Ker}f^{2p} = \mathrm{Ker}f^p$, d'où $x = f^p(y) = 0$

9.
   - p est un entier naturel vérifiant (1).
   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que (1) est vérifiée et montrons que $k \geqslant p$. Pour se faire on montre que $\mathrm{Ker}f^{k+1} = \mathrm{Ker}f^k$. Soit $x \in \mathrm{Ker}f^{k+1}$, alors $f^{k+1}(x) = 0$, puis $f^{(2k)}(x) = 0$, soit $f^k(x) \in \mathrm{Im}f^k \cap \mathrm{Ker}f^k = \{0\}$, donc $x \in \mathrm{Ker}f^k$. Ainsi l'égalité souhaitée puis par définition de p, $k \geqslant p$

Partie II: Application à l'étude d'endomorphismes nilpotents

10. On suppose que $p = n$.
   (a) La suite $\left(\dim \mathrm{Ker}f^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est strictement croissante d'éléments de $[\![0,n]\!]$, donc $\dim \mathrm{Ker}\ f^k = k$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ puis on en déduit que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

NOYAUX ET IMAGES ITÉRÉS

(b) Montrons que la famille $(f^k(a))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}\in\mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k(a)=0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i=\min\{k\in[\![0,n-1]\!]\ /\ \lambda_k\neq 0\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k(a)=0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{n-1}\lambda_k f^k(a)=0 \Rightarrow f^{n-1-i}\left(\sum_{k=i}^{n-1}\lambda_k f^k(a)\right)=0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{n-1}\lambda_k f^{n-1-i+k}(a)=0\\ &\Rightarrow \lambda_i f^{n-1}(a)=0 \quad (\text{car pour } k\geqslant i+1,\ p-1-i+k\geqslant p \text{ et donc } f^{n-1-i+k}=0)\\ &\Rightarrow \lambda_i=0 \quad (\text{car } f^{n-1}(a)\neq 0)\end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i.
Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $(f^k(a))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre. Une telle famille est de cardinal $n=\dim E$, donc c'est une base de E

(c) $g(a)\in E$, donc il existe $\lambda_0,...,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}$ tels que $g(a)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k(a)$.

(d) Les deux applications linéaires g et $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(f^k(a))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$

(e) $L=\textbf{Vect}(f^k, 0\leqslant k\leqslant n-1)$ et $\dim L=n$

11. On suppose que p est compris strictement entre 1 et n, et que $E=\text{Ker } f^p$. soit e un élément de E tel que $f^{p-1}(e)\neq 0$.

(a) Même méthode que la question (10*b*). On notera G le sous espace de E qu'elle engendre

(b) Comme $f^p=0$, alors $H=\textbf{Vect}\left(\varphi,\varphi\circ f,\cdots,\varphi\circ f^{p-1}\right)$.
Montrons que la famille $\left(\varphi,\varphi\circ f,\cdots,\varphi\circ f^{p-1}\right)$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant p-1}\in\mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\varphi\circ f^k=0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i=\min\{k\in[\![0,n-1]\!]\ /\ \lambda_k\neq 0\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\varphi\circ f^k=0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{n-1}\lambda_k\varphi\circ f^k=0 \Rightarrow \left(\sum_{k=i}^{p-1}\lambda_k\varphi\circ f^k\right)\left(f^{p-1-i}(e)\right)=0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1}\lambda_k f^{p-1-i+k}(e)=0\\ &\Rightarrow \lambda_i f^{p-1}(e)=0 \quad (\text{car pour } k\geqslant i+1,\ p-1-i+k\geqslant p \text{ et donc } f^{p-1-i+k}=0)\\ &\Rightarrow \lambda_i=0 \quad (\text{car } f^{p-1}(e)\neq 0)\end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i.
Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $\left(\varphi,\varphi\circ f,\cdots,\varphi\circ f^{p-1}\right)$ est libre. Ainsi cette famille est une base de H et, par suite, H est de dimension p

(c) Pour $k\in[\![0,p-1]\!]$, on pose $\varphi_k=\varphi\circ f^k$.

- On a $F=\bigcap\limits_{\Psi\in H}\text{Ker}\Psi=\bigcap\limits_{k\in[\![0,p-1]\!]}\text{Ker}\varphi_k$ car la première inclusion est évidente et l'inclusion réciproque provient du fait que tout élément de H est combinaison linéaire des formes $\varphi_0,\cdots,\varphi_{p-1}$
- Soit $x\in F$, alors pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$, on a $\varphi_k(x)=0$ et, par suite, $\varphi_k(f(x))=\varphi_{k+1}(x)=0$ avec $\varphi_p=0$, donc F est stable par f
- Montrons que $F\cap G=\{0\}$. Soit $x\in F\cap G$, alors il existe $\lambda_0,\cdots,\lambda_{p-1}\in\mathbb{K}$ tels que $x=\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k f^k(e)$ et pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$, on a $\varphi_k(x)=0$. Si $x\neq 0$, on considère i le plus petit indice tel que $\lambda_i\neq 0$, alors d'une part $\varphi_{p-1-i}(x)=0$ et d'autre part $\varphi_{p-1-i}(x)=\lambda_i\varphi_{p-1}(e)\neq 0$, ce qui est absurde
- Montrons que $\dim F=n-p$.
La famille $(\varphi_0,\cdots,\varphi_{p-1})$ est libre dans E^* on la complète donc en $(\varphi_0,\cdots,\varphi_{p-1},\varphi_p,\cdots,\varphi_{n-1})$ une base de E^*. L'application

$$\Phi:\left\{\begin{array}{lll}E&\longrightarrow&\mathbb{K}^n\\ x&\longmapsto&(\varphi_0(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x))\end{array}\right.$$

est linéaire et injective, et puisque $\dim E = \dim \mathbb{K}^n$, alors il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels. Finalement l'application

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto & (\varphi_0(x), \cdots, \varphi_{p-1}(x)) \end{array} \right.$$

est linéaire surjective dont le noyau F et par le théorème du rang $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\Psi + \mathbf{rg}(\Psi)$, donc $\dim F = n - p$

On conclut donc que $E = F \oplus G$