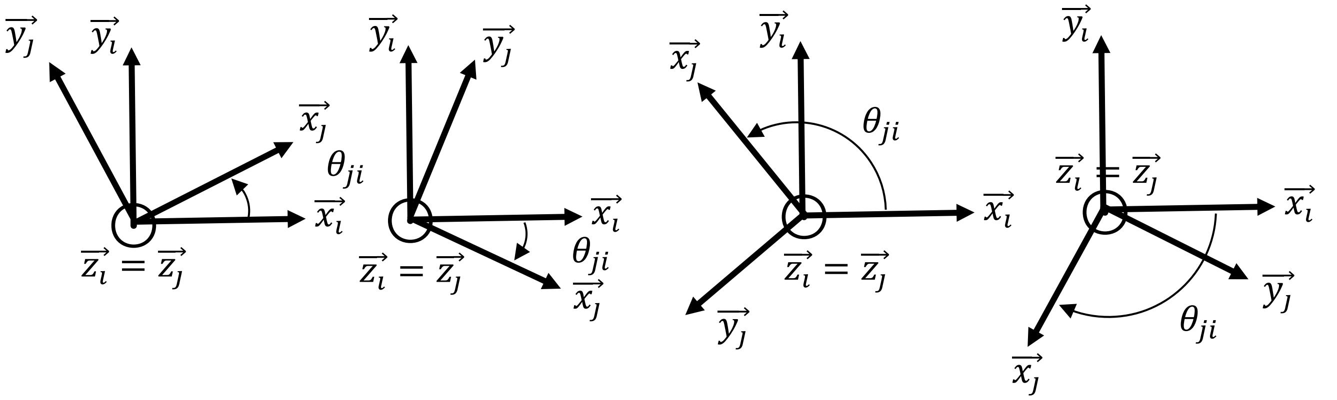
Exercice 1: Projections

La convention très généralement utilisée consiste à définir θ_{ji} pour θ de j par rapport à i :

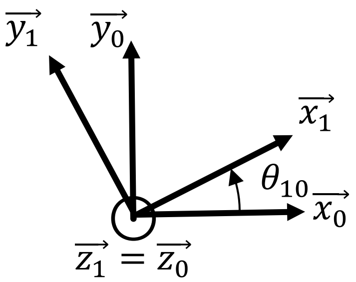
$$\theta_{ji} = \left(\widehat{\vec{x_i}, \vec{x_j}}\right) = \left(\vec{y_i}, \vec{y_j}\right)$$

La flèche sur le dessin n'a pour unique but que de dire que l'angle est l'angle de $\vec{x_i}$ vers $\vec{x_j}$ et $\vec{y_i}$ vers $\vec{y_j}$.

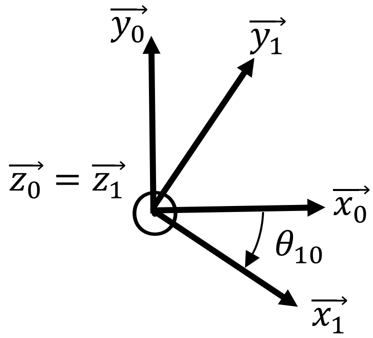
Question 1: Proposer le paramétrage angulaire des 4 situations proposées



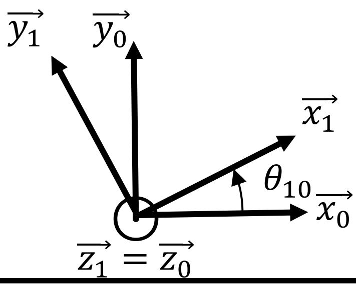
Question 2: Compléter les différentes projections proposées ci-dessous



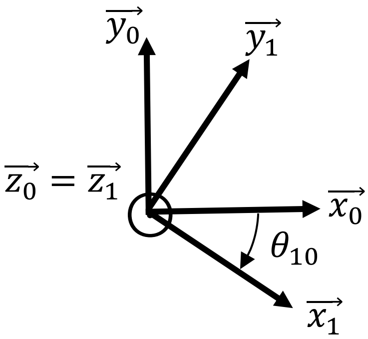
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{x_1} &= \cos\theta_{10}\,\vec{x_0} + \sin\theta_{10}\,\vec{y_0}\\ \vec{y_1} &= -\sin\theta_{10}\,\vec{x_0} + \cos\theta_{10}\,\vec{y_0}\end{aligned}}$$



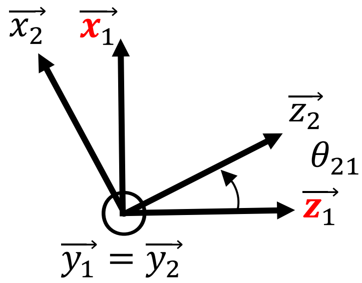
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{x_1} &= \cos\theta_{10}\,\vec{x_0} + \sin\theta_{10}\,\vec{y_0}\\ \vec{y_1} &= -\sin\theta_{10}\,\vec{x_0} + \cos\theta_{10}\,\vec{y_0}\end{aligned}}$$



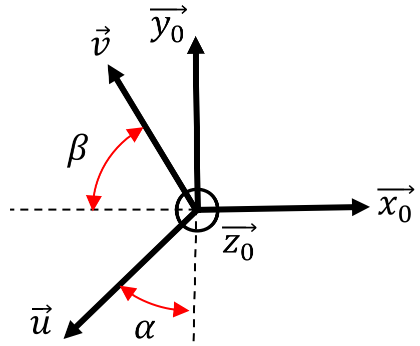
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{x_0} &= \cos\theta_{01}\,\vec{x_1} + \sin\theta_{01}\,\vec{y_1}\\ \vec{y_0} &= -\sin\theta_{01}\,\vec{x_1} + \cos\theta_{01}\,\vec{y_1}\end{aligned}}$$

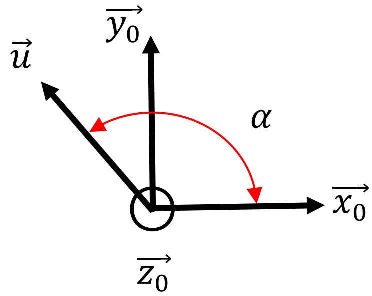


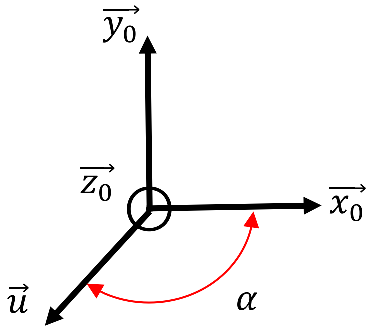
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{x_0} &= \cos\theta_{01}\,\vec{x_1} + \sin\theta_{01}\,\vec{y_1}\\ \vec{y_0} &= -\sin\theta_{01}\,\vec{x_1} + \cos\theta_{01}\,\vec{y_1}\end{aligned}}$$



$$\overrightarrow{z_2} = \cos\theta_{21}\,\overrightarrow{z_1} + \sin\theta_{21}\,\overrightarrow{x_1}$$
$$\overrightarrow{x_2} = -\sin\theta_{21}\,\overrightarrow{z_1} + \cos\theta_{21}\,\overrightarrow{x_1}$$



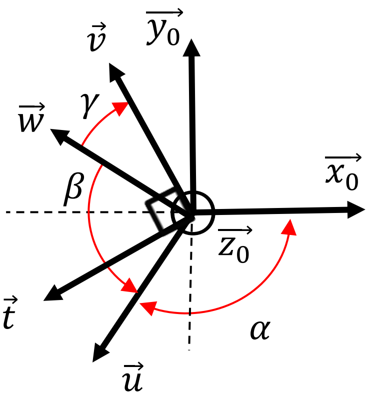




$$\vec{u} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{x_0} - \cos\alpha\,\overrightarrow{y_0}$$
$$\vec{v} = -\cos\beta\,\overrightarrow{x_0} + \sin\beta\,\overrightarrow{y_0}$$

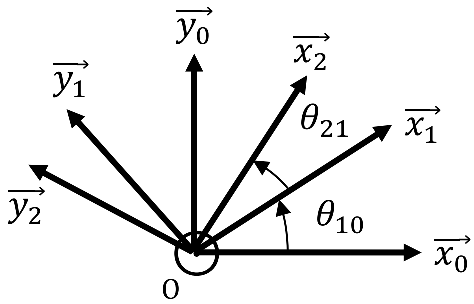
$$\vec{u} = \cos\alpha\,\overrightarrow{x_0} + \sin\alpha\,\overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{u} = \cos\alpha\,\overrightarrow{x_0} - \sin\alpha\,\overrightarrow{y_0}$$



$$\left(\widehat{\overrightarrow{x_0},\vec{t}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{x_0},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) + \left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right) + \left(\widehat{\vec{w},\vec{t}}\right) = -\alpha - \beta + \gamma + \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta - \gamma)$$
$$\vec{t} = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta - \gamma)\right]\overrightarrow{x_0} + \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta - \gamma)\right]\overrightarrow{y_0}$$
$$\vec{t} = \sin(\alpha + \beta - \gamma)\,\overrightarrow{x_0} + \cos(\alpha + \beta - \gamma)\,\overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{t} = \sin(\alpha + \beta - \gamma)\,\overrightarrow{x_0} + \cos(\alpha + \beta - \gamma)\,\overrightarrow{y_0}$$



$$\overrightarrow{x_2} = \cos(\theta_{21} + \theta_{10})\overrightarrow{x_0} + \sin(\theta_{21} + \theta_{10})\overrightarrow{y_0}$$
$$\overrightarrow{y_2} = -\sin(\theta_{21} + \theta_{10})\overrightarrow{x_0} + \cos(\theta_{21} + \theta_{10})\overrightarrow{y_0}$$

Exercice 2: Calculs de vitesses

Question 1: Calculer la vitesse $\vec{V}(D,3/0)$

Méthode 1 : Chasles avec vecteurs unitaires + Changement de base de dérivation

$$\vec{V}(D,3/0)=\left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_0=\left.\frac{d(L_1\vec{x_1}+L_2\vec{x_2}+L_3\vec{x_3})}{dt}\right)_0=L_1\left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_0+L_2\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right)_0+L_3\left.\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right)_0$$

$$\left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_0=\left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_1+\overrightarrow{\Omega_{10}}\wedge\vec{x_1}=\dot{\theta}_{10}\vec{y_1}$$

$$\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right)_0=\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right)_2+\overrightarrow{\Omega_{20}}\wedge\vec{x_2}=(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\vec{y_2}$$

$$\left.\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right)_0=\left.\frac{d\vec{x_3}}{dt}\right)_3+\overrightarrow{\Omega_{30}}\wedge\vec{x_2}=(\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\vec{y_3}$$

$$\boldsymbol{\vec{V}(D,3/0)=L_3(\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\vec{y_3}+L_2(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\vec{y_2}+L_1\dot{\theta}_{10}\vec{y_1}}$$

Méthode 2 : Composition du mouvement + Varignon

$$\vec{V}(D,3/0)=\vec{V}(D,3/2)+\vec{V}(D,2/1)+\vec{V}(D,1/0)$$

$$\vec{V}(D,3/2)=\vec{V}(C,3/2)+\overrightarrow{\Omega_{32}}\wedge\overrightarrow{CD}$$
$$\vec{V}(D,3/2)=\vec{0}+\dot{\theta}_{32}\vec{z_3}\wedge L_3\vec{x_3}=L_3\dot{\theta}_{32}\vec{y_3}$$

$$\vec{V}(D,2/1)=\vec{V}(B,2/1)+\overrightarrow{\Omega_{21}}\wedge\overrightarrow{BD}$$
$$\vec{V}(D,2/1)=\vec{0}+\dot{\theta}_{21}\vec{z_3}\wedge L_3\vec{x_3}+\dot{\theta}_{21}\vec{z_2}\wedge L_2\vec{x_2}$$
$$\vec{V}(D,2/1)=L_3\dot{\theta}_{21}\vec{y_3}+L_2\dot{\theta}_{21}\vec{y_2}$$

$$\vec{V}(D,1/0)=\vec{V}(A,1/0)+\overrightarrow{\Omega_{10}}\wedge\overrightarrow{AD}$$
$$\vec{V}(D,1/0)=\vec{0}+\dot{\theta}_{10}\vec{z_3}\wedge L_3\vec{x_3}+\dot{\theta}_{10}\vec{z_2}\wedge L_2\vec{x_2}+\dot{\theta}_{10}\vec{z_1}\wedge L_1\vec{x_1}$$
$$\vec{V}(D,1/0)=L_3\dot{\theta}_{10}\vec{y_3}+L_2\dot{\theta}_{10}\vec{y_2}+L_1\dot{\theta}_{10}\vec{y_1}$$

Soit finalement :

$$\boldsymbol{\vec{V}(D,3/0)=L_3(\dot{\theta}_{32}+\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\vec{y_3}+L_2(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10})\vec{y_2}+L_1\dot{\theta}_{10}\vec{y_1}}$$

Attention *: Ne pas projeter si ce n'est pas demandé. Par rapport à 0 permet juste de préciser le référentiel utilisé pour le calcul de la vitesse. Bien préciser le référentiel sur les dérivées de vecteurs. Bien donner le résultat sous forme regroupée en fonction des vecteurs $\vec{y_i}$. Ne pas regrouper les vitesses, par exemple $\dot{\theta}_{20}$*

Conclusion *: Les bonnes méthodes sont :*

- *Chasles avec vecteurs unitaires + Changement de base de dérivation*
- *Composition du mouvement + Varignon*

Rappel *: Ne surtout pas faire les méthodes suivantes (cf cours cinématique pour les détails)*

- *Changement de base de dérivation + Chasles*
- *Varignon puis composition du mouvement*
- *Varignon puis dérivations de vecteurs (horrible !!!)*

Question 2: Exprimer la vitesse $\vec{V}(D,3/0)$ dans la base 0

$$\vec{V}(D,3/0) = \begin{pmatrix} -L_3(\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}+\dot\theta_{10})\sin(\theta_{32}+\theta_{21}+\theta_{10}) - L_2(\dot\theta_{21}+\dot\theta_{10})\sin(\theta_{21}+\theta_{10}) - L_1\dot\theta_{10}\sin(\theta_{10}) \\ L_3(\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}+\dot\theta_{10})\cos(\theta_{32}+\theta_{21}+\theta_{10}) + L_2(\dot\theta_{21}+\dot\theta_{10})\cos(\theta_{21}+\theta_{10}) + L_1\dot\theta_{10}\cos(\theta_{10}) \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

Rappels *:*

- *Donner le résultat sous forme verticale pour une bonne lisibilité*
- *Préciser impérativement la base à côté du vecteur*
- *Ne pas regrouper les angles et vitesses : $\dot\theta_{20}$ ne doit pas être introduit par exemple*

Question 3: Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}(D,3/0)$

$$\vec{\Gamma}(D,3/0) = \left.\frac{d\vec{V}(D,3/0)}{dt}\right)_0$$
$$= L_3(\ddot\theta_{32}+\ddot\theta_{21}+\ddot\theta_{10})\overrightarrow{y_3} + L_2(\ddot\theta_{21}+\ddot\theta_{10})\overrightarrow{y_2} + L_1\ddot\theta_{10}\overrightarrow{y_1}$$
$$-L_3(\dot\theta_{32}+\dot\theta_{21}+\dot\theta_{10})^2\overrightarrow{x_3} - L_2(\dot\theta_{21}+\dot\theta_{10})^2\overrightarrow{x_2} - L_1\dot\theta_{10}{}^2\overrightarrow{x_1}$$

Car :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_i}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{y_i}}{dt}\right)_i + \overrightarrow{\Omega_{i0}}\wedge\overrightarrow{y_i} = -\dot\theta_{i0}\overrightarrow{x_i}$$

Rappels *:*

- *Ne surtout pas dériver la vitesse projetée… Si besoin, projetez après ;)*
- *Bien penser que l'on est face à des produits*

Exercice 3: Cas du contact

Question 1: Calculer la vitesse $\vec{V}(C,2/0)$ par dérivation du vecteur position $\overrightarrow{AC}$

$$\vec{V}(C,2/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AC}}{dt}\right)_0 = L_1 \left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + R_2 \left.\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_0 = L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

Attention *: Ce résultat est faux ! Qui dit contact dit 3 points : Le point de contact vue de loin et chacun des points dans chacune des 2 pièces en contact. Ces 3 points ont des vitesses différentes. Dire que $\overrightarrow{BC} = R_2\overrightarrow{x_0}$ fige le point de contact à l'horizontale de B, c'est le pont « vue de loin », alors que la vitesse demandée est la vitesse du point C fixe dans 2 et qui tourne autour de B.*

On aurait pu réussir ainsi en imposant que C soit fixe dans 2 : poser le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ fixe dans 2, tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{u_2}}\right) = \alpha_2$ et $\overrightarrow{AC} = R_2\overrightarrow{u_2}$, poser le vecteur $\overrightarrow{v_2}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_2}}\right) = \frac{\pi}{2}$ et supposer C le point au contact au moment de la photo. Dans la position étudiée, $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{y_0}$ (j'ai évidemment fait exprès de ne pas mettre $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_0}$). Alors :

$$\vec{V}(C,2/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AC}}{dt}\right)_0 = L_1 \left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + R_2 \left.\frac{d\overrightarrow{u_2}}{dt}\right)_0 = R_2\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\overrightarrow{v_2} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$
$$= R_2\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\overrightarrow{y_0} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

Méthode *: Le mieux, c'est de retenir : Contact – Utiliser la méthode Composition + Varignon – Cf. question suivante*

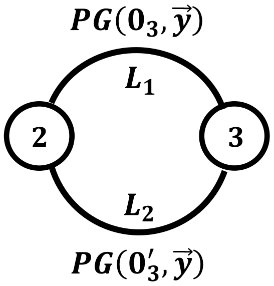
Question 2: Calculer la vitesse $\vec{V}(C,2/0)$ par composition du mouvement 2/1 et 1/0

$$\vec{V}(C,2/0) = \vec{V}(C,2/1) + \vec{V}(C,1/0)$$
$$\vec{V}(C,2/1) = \vec{V}(B,2/1) + \overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{\Omega_{21}} = -R_2\overrightarrow{x_0}\wedge\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{z_0} = R_2\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{y_0}$$
$$\vec{V}(C,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{10}} = -R_2\overrightarrow{x_0}\wedge\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0} - L_1\overrightarrow{x_1}\wedge\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0} = R_2\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_0} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$
$$\vec{V}(C,2/0) = R_2\left(\dot{\theta}_{21}+\dot{\theta}_{10}\right)\overrightarrow{y_0} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

Exercice 4: Extrait CCP PSI 2018

Question 1: Déterminer la liaison équivalente entre les pièces 2 et 3

Les liaisons sont en parallèle, il faut choisir la méthode statique pour faire des sommes (même si pour un exemple si simple, la méthode cinématique fonctionne bien !)



	S	P
C	+	=
S	=	+

$$\{T_{32}\} = \{T_{32}^1\} + \{T_{32}^2\}$$

Liaison	Torseur canonique	Changement de pt	En O_3 dans $\mathfrak{B}$
$\{T_{32}^1\}$	$\begin{Bmatrix} X_{32}^1 & L_{32}^1 \\ 0 & 0 \\ Z_{32}^1 & N_{32}^1 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{32}^1 & L_{32}^1 \\ 0 & 0 \\ Z_{32}^1 & N_{32}^1 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}}$
$\{T_{32}^2\}$	$\begin{Bmatrix} X_{32}^2 & L_{32}^2 \\ 0 & 0 \\ Z_{32}^2 & N_{32}^2 \end{Bmatrix}_{O'_3}^{\mathfrak{B}}$	$\overrightarrow{M_{O_3}^2}\left(\overrightarrow{R_{32}^2}\right) = M_{O'_3}^2\left(\overrightarrow{R_{32}^2}\right) + \overrightarrow{O_3 O'_3} \wedge \overrightarrow{R_{32}^2}$ $= \begin{pmatrix} L_{32}^2 \\ 0 \\ N_{32}^2 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} + \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{pmatrix} X_{32}^2 \\ 0 \\ Z_{32}^2 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} L_{32}^2 \\ -2aZ_{32}^2 \\ N_{32}^2 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$	$\begin{Bmatrix} X_{32}^2 & L_{32}^2 \\ 0 & -2aZ_{32}^2 \\ Z_{32}^2 & N_{32}^2 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}}$

$$\{T_{32}\} = \begin{Bmatrix} X_{32}^1 & L_{32}^1 \\ 0 & 0 \\ Z_{32}^1 & N_{32}^1 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}} + \begin{Bmatrix} X_{32}^2 & L_{32}^2 \\ 0 & -2aZ_{32}^2 \\ Z_{32}^2 & N_{32}^2 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} X_{32}^1 + X_{32}^2 & L_{32}^1 + L_{32}^2 \\ 0 & -2aZ_{32}^2 \\ Z_{32}^1 + Z_{32}^2 & N_{32}^1 + N_{32}^2 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ 0 & M_{32} \\ Z_{32} & N_{32} \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}}$$

Les 5 inconnues X_{32}, Z_{32}, L_{32}, M_{32} et N_{32} sont indépendantes.

$$Gl(O_3, \vec{y})$$

Remarque : si on demande le torseur cinématique, bien faire la méthode statique puis donner le torseur cinématique.

Pour info, voilà ce qu'aurait donné la méthode cinématique :

$$\{\mathcal{V}_{32}\} = \{\mathcal{V}_{32}^1\} = \{\mathcal{V}_{32}^2\}$$

Liaison	Torseur canonique	Changement de pt	En O_3 dans $\mathfrak{B}$
$\{\mathcal{V}_{32}^1\}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{32}^1 & V_{32}^1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}}$	RAS	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{32}^1 & V_{32}^1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}}$
$\{\mathcal{V}_{32}^2\}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{32}^2 & V_{32}^2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3'}^{\mathfrak{B}}$	$\overrightarrow{V^2}(O_3,3/2) = \overrightarrow{V^2}(O_3',3/2) + \overrightarrow{O_3O_3'} \wedge \overrightarrow{\Omega_{32}^2}$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ V_{32}^2 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} + \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Q_{32}^2 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2aQ_{32}^2 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{32}^2 & V_{32}^2 \\ 0 & 2aQ_{32}^2 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}}$

$$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} P_{32} & U_{32} \\ Q_{32} & V_{32} \\ R_{32} & W_{32} \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{32}^1 & V_{32}^1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{32}^2 & V_{32}^2 \\ 0 & 2aQ_{32}^2 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}}$$

$$\begin{cases} P_{32} = 0 = 0 \\ Q_{32} = Q_{32}^1 = Q_{32}^2 \\ R_{32} = 0 = 0 \\ U_{32} = 0 = 0 \\ V_{32} = V_{32}^1 = V_{32}^2 \\ W_{32} = 0 = 2aQ_{32}^2 \end{cases} \Rightarrow Q_{32}^2 = 0 \quad ; \quad \{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{32} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_3}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad Gl(O_3,\vec{y})$$

Question 2: Déterminer $\boldsymbol{l}$ en fonction de $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{\theta}$

$$R + l\cos\theta = h \Leftrightarrow l = \frac{h-R}{\cos\theta}$$

Remarque : cela ne sert pas dans les deux questions suivantes

Question 3: Déterminer la vitesse $\vec{V}(H,3/0)$ en fonction de R, l, $\dot{l}$, $\dot{\theta}$ et ω

$$\vec{V}(H,3/0) = \vec{V}(H,3/2) + \vec{V}(H,2/1) + \vec{V}(H,1/0)$$

$\vec{V}(H,3/2)$	$\dot{l}\overrightarrow{y_2}$
$\vec{V}(H,2/1)$	$\vec{V}(A,2/1) + \overrightarrow{HA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{21}} = -l\overrightarrow{y_2}\wedge\omega\vec{z} = -l\omega\overrightarrow{x_2}$
$\vec{V}(H,1/0)$	$\vec{V}(I,1/0) + \overrightarrow{HI}\wedge\overrightarrow{\Omega_{10}} = \left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AI}\right)\wedge\left(\overrightarrow{\Omega_{12}} + \overrightarrow{\Omega_{23}} + \overrightarrow{\Omega_{30}}\right)$ $= -(l\overrightarrow{y_2} + R\overrightarrow{y_0})\wedge(\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{z_0} = -l(\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{x_2} - R(\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{x_0}$ Avec $\vec{V}(I,1/0) = \vec{0}$ car RSG en I $\overrightarrow{\Omega_{10}} = \overrightarrow{\Omega_{12}} + \overrightarrow{\Omega_{23}} + \overrightarrow{\Omega_{30}} = -\omega\overrightarrow{z_0} + \vec{0} + \dot{\theta}\overrightarrow{z_0} = (\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{z_0}$

$$\vec{V}(H,3/0) = \dot{l}\overrightarrow{y_2} - l\omega\overrightarrow{x_2} - l(\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{x_2} - R(\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{x_0}$$

$$\boxed{\vec{V}(H,3/0) = \dot{l}\overrightarrow{y_2} - l\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} - R(\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{x_0}}$$

Attention : présence de contact, fort risque d'erreurs par dérivation de vecteurs position :

- $\left.\frac{d\overrightarrow{OH}}{dt}\right)_0$ faisant apparaître $\left.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right)_0$ considéré comme non nul alors que $V(I,1/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OI}}{dt}\right)_0 = \vec{0}$ car RSG
- $\left.\frac{d\overrightarrow{OH}}{dt}\right)_0$ ou $\left.\frac{d\overrightarrow{IH}}{dt}\right)_0$ faisant apparaître $\left.\frac{d\overrightarrow{IA}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{dR\overrightarrow{y_0}}{dt}\right)_0 = \vec{0}$ alors que $\left.\frac{d\overrightarrow{IA}}{dt}\right)_0 = \vec{V}(A,1/0) = \vec{V}(I,1/0) + \overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{\Omega_{10}} = R\overrightarrow{y_0}\wedge(\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{z_0} = R(\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{x_0}$

Question 4: Déterminer l'expression de la vitesse ω en fonction de R, l, θ, $\dot{\theta}$ et V

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_2} = \cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{y_2} = -\sin\theta\,\overrightarrow{x_0} + \cos\theta\,\overrightarrow{y_0} \end{cases}$$

$$\vec{V}(H,3/0) = \dot{l}\overrightarrow{y_2} - l\dot{\theta}\overrightarrow{x_2} - R(\dot{\theta} - \omega)\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} -\dot{l}\sin\theta - l\dot{\theta}\cos\theta - R(\dot{\theta} - \omega) \\ \dot{l}\cos\theta - l\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

On résout :

$$\begin{pmatrix} -\dot{l}\sin\theta - l\dot{\theta}\cos\theta - R(\dot{\theta} - \omega) \\ \dot{l}\cos\theta - l\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

$$\begin{cases} -\dot{l}\sin\theta - l\dot{\theta}\cos\theta - R(\dot{\theta} - \omega) = V \\ \dot{l}\cos\theta - l\dot{\theta}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -l\dot{\theta}\tan\theta\sin\theta - l\dot{\theta}\cos\theta - R(\dot{\theta} - \omega) = V \\ \dot{l} = l\dot{\theta}\tan\theta \end{cases}$$

$$R\omega = V + l\dot{\theta}\tan\theta\sin\theta + l\dot{\theta}\cos\theta + R\dot{\theta}$$

$$\omega = \frac{V}{R} + \left(l\frac{\sin^2\theta}{R\cos\theta} + l\frac{\cos^2\theta}{R\cos\theta} + R\right)\dot{\theta}$$

$$\omega = \frac{V}{R} + \left(\frac{l}{R\cos\theta} + 1\right)\dot{\theta}$$