

---

Mouvement d'un solide autour d'un axe de direction fixe

---

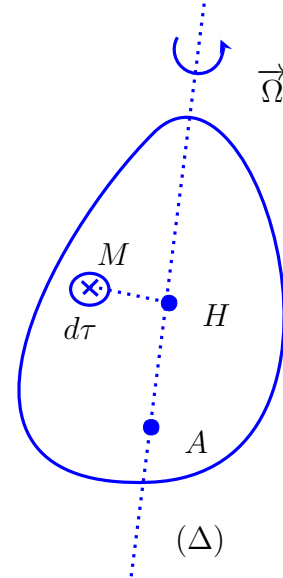
## Table des matières

<b>1</b>	<b>Moment cinétique d'un solide</b>	<b>2</b>
1.1	Moment cinétique d'un solide ayant un point fixe . . . . .	2
1.2	Moment d'inertie . . . . .	2
1.2.1	Définition . . . . .	2
1.2.2	Théorème d'Huygens . . . . .	3
1.2.3	Expression générale du moment cinétique . . . . .	4
1.2.4	Moment cinétique d'un solide par rapport à l'axe de rotation fixe . . . . .	4
1.2.5	Cas particuliers . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Etude énergétique des solides</b>	<b>5</b>
2.1	Energie cinétique d'un solide . . . . .	5
2.2	Calcul de la puissance d'une action exercée sur un solide . . . . .	6
2.3	Théorème de puissance cinétique . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Mouvement d'un solide autour d'un axe de direction fixe</b>	<b>7</b>
3.1	Equations de la dynamique . . . . .	7
3.2	Cas du roulement sans glissement . . . . .	8
3.3	Cas du roulement avec glissement . . . . .	9

# 1 Moment cinétique d'un solide

## 1.1 Moment cinétique d'un solide ayant un point fixe

- le solide en rotation autour de  $\Delta$
- $\vec{\Omega}$  : vitesse de rotation du solide autour de  $\Delta$
- $A$  : un point du solide qui se trouve sur  $\Delta$  :  $\vec{v}(A) = \vec{0}$
- $M$  : un point de du solide
- $H$  : projection orthogonale de  $M$  sur  $\Delta$



- le moment cinétique du solide  $(S)$  dans un référentiel  $(R)$  en un point  $A$

$$\vec{L}_A = \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge dm \vec{v}(M)$$

- $\vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$
- $\vec{L}_A = \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge dm (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}) = \left( \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM}^2 dm \right) \vec{\Omega} - \iiint_{(S)} (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{AM} dm$
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$
- $\vec{L}_A = \left( \iiint_{(S)} \overrightarrow{AM}^2 dm \right) \vec{\Omega} - \iiint_{(S)} (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) dm$   
 $= \left( \iiint_{(S)} \overrightarrow{HM}^2 dm \right) \vec{\Omega} - \iiint_{(S)} (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm$

## 1.2 Moment d'inertie

### 1.2.1 Définition

- **Définition** : On définit le moment d'inertie  $J_\Delta$  d'un solide par rapport à l'axe  $(\Delta)$  par :

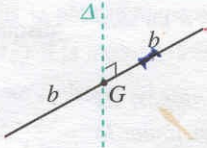
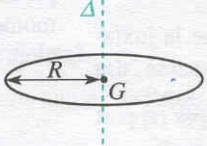
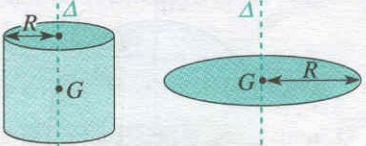
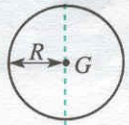
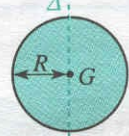
$$J_\Delta = \iiint_{(S)} r^2 dm$$

avec  $r = HM$  : la distance entre le point  $M$  du solide et l'axe de  $\Delta$

- Pour un système discret  $S = \{P_i(m_i)\}_{i=1 \dots N}$  le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  est donné par

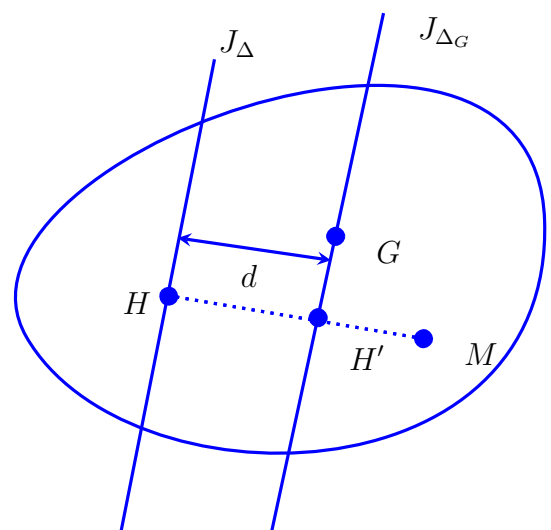
$$J_\Delta = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2$$

- $[J_\Delta] = ML^2$
- unité de  $J_\Delta$  :  $kg.m^2$
- $J_\Delta$  est toujours positif

moment d'inertie d'une tige rectiligne, de section négligeable de longueur $2b$ et de masse $m$ , par rapport à sa médiatrice		$J_\Delta = \frac{1}{3} m b^2$
moment d'inertie d'un cerceau de section négligeable, de rayon $R$ et de masse $m$ , par rapport à son axe		$J_\Delta = m R^2$ nous pouvons vérifier que ce résultat est immédiat de par la définition de $J_\Delta$
moment d'inertie d'un disque, ou d'un cylindre plein, de rayon $R$ et de masse $m$ , par rapport à son axe		$J_\Delta = \frac{1}{2} m R^2$
moment d'inertie d'une sphère creuse, de rayon $R$ et de masse $m$ , par rapport à son diamètre		$J_\Delta = \frac{2}{3} m R^2$
moment d'inertie d'une sphère pleine, de rayon $R$ et de masse $m$ , par rapport à son diamètre		$J_\Delta = \frac{2}{5} m R^2$

### 1.2.2 Théorème d'Huygens

- un solide ( $S$ ) de masse  $M$  et de centre d'inertie  $G$
- $J_{\Delta_G}$  : moment d'inertie du solide par rapport à  $\Delta_G$  passant par le centre de masse  $G$
- $J_\Delta$  : moment d'inertie du solide par rapport à  $\Delta$
- $d$  : la distance entre les deux axes



$$\begin{aligned}
\blacktriangleright J_{\Delta} &= \iiint_{(S)} HM^2 dm = \iiint_{(S)} (\overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M})^2 dm \\
&= \iiint_{(S)} HH'^2 dm + 2\overrightarrow{HH'} \cdot \iiint_{(S)} \overrightarrow{H'M} dm + \iiint_{(S)} H'M^2 dm \\
&= md^2 + \overrightarrow{HH'} \cdot \iiint_{(S)} (\overrightarrow{H'G} + \overrightarrow{GM}) dm + J_{\Delta_G} \\
\blacktriangleright \overrightarrow{H'G} &\perp \overrightarrow{HH'} \\
\blacktriangleright \iiint_S \overrightarrow{GM} dm &= \vec{0}
\end{aligned}$$

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_G} + md^2$$

c'est le théorème de Huygens

### 1.2.3 Expression générale du moment cinétique

$$\vec{L}_A = J_{\Delta} \vec{\Omega} - \iiint_{(S)} (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \overrightarrow{HM} dm$$

le premier terme est parallèle à l'axe de rotation, alors que le second lui est perpendiculaire

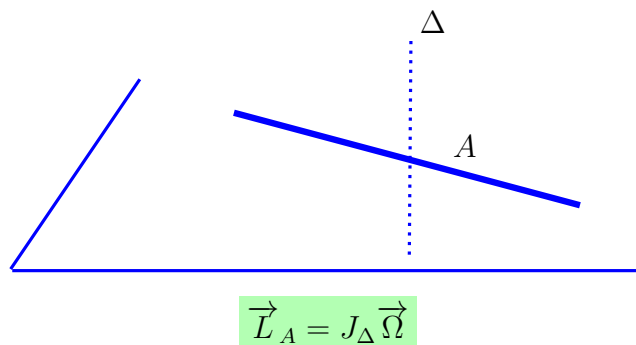
### 1.2.4 Moment cinétique d'un solide par rapport à l'axe de rotation fixe

- $\vec{u}$  : vecteur unitaire porté sur l'axe de rotation
- $A$  : point de l'axe de rotation ( $\Delta$ )

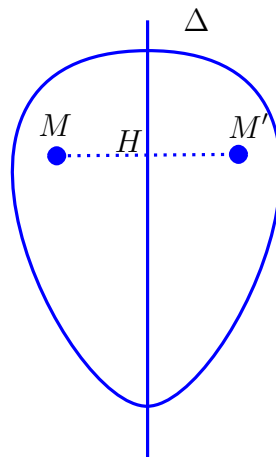
$$L_{\Delta} = \vec{L}_A \cdot \vec{u} = J_{\Delta} \Omega$$

### 1.2.5 Cas particuliers

- Si le solide est contenu dans un plan est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation alors  $A = H$



- Si l'axe instantané de rotation est un axe de symétrie du solide



$$\vec{L}_A = J_\Delta \cdot \vec{\Omega}$$

ou  $A$  est un point de l'axe instantané de rotation

## 2 Etude énergétique des solides

### 2.1 Energie cinétique d'un solide

- $\mathcal{E}_c(R) = \iiint_{(S)} \frac{1}{2} \vec{v}^2(M) dm$
- $M$  et  $B$  deux points quelconques du solide
- $\vec{v}(M) = \vec{v}(B) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BM}$
- $\mathcal{E}_c(R) = \iiint_{(S)} \frac{1}{2} \vec{v}(M) (\vec{v}(B) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BM}) dm$
- $\mathcal{E}_c(R) = \frac{1}{2} \left( \vec{V}(B) \cdot \iiint_{(S)} \vec{V}(M) dm + \vec{\Omega} \cdot \left( \iiint_{(S)} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M) dm \right) \right)$

$$\mathcal{E}_c(R) = \frac{1}{2} \left( \vec{V}(B) \cdot \vec{P} + \vec{L}_B \cdot \vec{\Omega} \right)$$

• **Conclusion** : L'énergie cinétique d'un solide s'exprime comme la moitié du comoment des torseurs cinétique et cinématique

$$\mathcal{E}_c(R) = \frac{1}{2} \left( \vec{V}(B) \cdot \vec{P} + \vec{L}_B \cdot \vec{\Omega} \right)$$

► Solide en translation

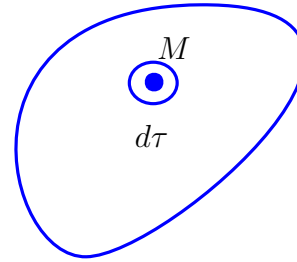
$$\mathcal{E}_c(R) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(G/R)$$

► Solide en rotation autour d'un axe fixe

$$\mathcal{E}_c(R) = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$$

## 2.2 Calcul de la puissance d'une action exercée sur un solide

On s'intéresse au cas d'une force volumique agissant sur tous les points d'un solide



$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{P}(R) &= \iiint_{(V)} \vec{f}_v(M) \cdot \vec{v}(M) d\tau = \iiint_{(V)} \vec{f}_v(M) \cdot (\vec{v}(B) + \overrightarrow{BM} \wedge \vec{\Omega}) d\tau \\ &= \left( \iiint_v \vec{f}_v(M) d\tau \right) \cdot \vec{v}(B) + \left( \iiint_v (\overrightarrow{BM} \wedge \vec{f}_v(M)) d\tau \right) \cdot \vec{\Omega} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(R) = \vec{F} \cdot \vec{v}(B) + \vec{\mathcal{M}}_B \cdot \vec{\Omega}$$

• **Conclusion** : La puissance d'une action sur un solide est égale au comoment du torseur de cette action, avec le torseur cinématique.

$$\mathcal{P}(R) = \vec{F} \cdot \vec{v}(B) + \vec{\mathcal{M}}_B \cdot \vec{\Omega}$$

► Solide en translation

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(G)$$

► Solide en rotation autour d'un axe fixe

$B$  : un point sur l'axe  $\vec{v}(B) = \vec{0}$

$$\mathcal{P} = \vec{\mathcal{M}}_B \cdot \vec{\Omega} = \mathcal{M}_\Delta \Omega$$

► Force appliquée en point  $B$ , alors  $\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{0}$

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(B)$$

► cas d'une couple

$$\mathcal{P} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}$$

► puissance des actions intérieures

la puissance des actions intérieures est liée à la déformation d'un système. Pour un solide cette puissance est nulle

$$\mathcal{P}_{int} = 0$$

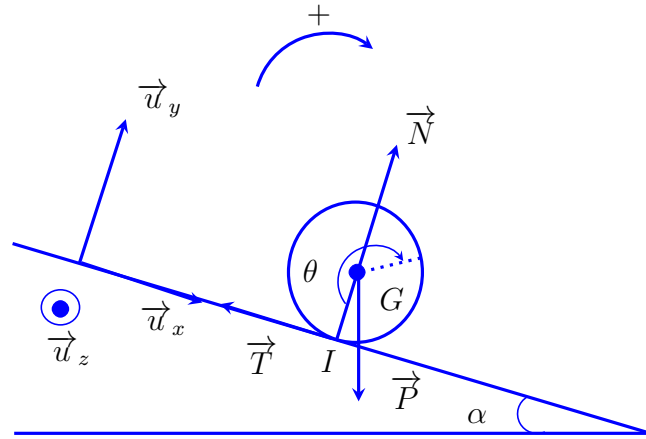
## 2.3 Théorème de puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen on a :

$$\frac{d\mathcal{E}_c(R)}{dt} = \mathcal{P}_{ext}(R)$$

### 3 Mouvement d'un solide autour d'un axe de direction fixe

On va travailler sur un exemple d'un cylindre dévalant une pente



- Cylindre homogène de masse  $m$  et de rayon  $R$  est posé sans vitesse initiale sur le support incliné
- On repère le cylindre dans  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  par la position de son centre de masse  $G(x, R, 0)$  et l'angle  $\theta$  dont il a tourné
- à  $t = 0, x = 0$  et  $\theta = 0$
- $\vec{T} = -T\vec{u}_x; \vec{N} = N\vec{u}_z$
- le vecteur rotation du cylindre

$$\vec{\Omega} = -\dot{\theta}\vec{u}_z$$

#### 3.1 Equations de la dynamique

► Théorème du centre de masse

$$m\vec{a}(G) = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= mg \sin \alpha & - & T \\ 0 &= N & - & mg \cos \alpha \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

► Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{N}) + \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{T}) = \vec{GI} \wedge \vec{T}$$

$$\bullet \vec{L}^* = J_{Gz}\vec{\Omega} = \frac{1}{2}mR^2\vec{\Omega} = -\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$-\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} = (-R\vec{u}_y \wedge -T\vec{u}_x) \cdot \vec{u}_z = -RT$$

- **Synthèse** : il existe 4 inconnues :  $T, N, \ddot{x}$  et  $\ddot{\theta}$ , or on ne dispose que de 3 équations donc il y a une indétermination, il est nécessaire de supposer l'absence ou la présence du glissement.

### 3.2 Cas du roulement sans glissement

#### ► Résolution des équations

- $\vec{v}_g = \vec{v}(I_2) - \vec{v}(I_1) = \vec{0}$
- $\vec{v}(I_1) = \vec{0}$  :  $I_1$  un point du sol
- $\vec{v}(I_2) = \vec{v}(G) + \vec{I_2G} \wedge \vec{\Omega} = \dot{x}\vec{u}_x + R\vec{u}_y \wedge (-\dot{\theta})\vec{u}_z = (\dot{x} - R\dot{\theta})\vec{u}_x = \vec{0}$

$$\dot{x} - R\dot{\theta} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} N & = & mg \cos \alpha \\ T & = & \frac{1}{3}mg \sin \alpha \\ \ddot{x} & = & \frac{2}{3}g \sin \alpha \\ \ddot{\theta} & = & \frac{2g \sin \alpha}{3R} \end{array} \right.$$

- **Conclusion** : Pour qu'il ait effectivement roulement sans glissement, il faut d'après les lois de Coulomb que  $T \leq fN$ , ou  $f$  est le coefficient de frottement sol-cylindre

$$f \geq \frac{1}{3} \tan \alpha$$

donc le roulement sans glissement n'est possible que pour un sol pas trop incliné. Si on augmente l'angle  $\alpha$  le cylindre finit par glisser.

#### ► Approche énergétique

- en cas du roulement sans glissement le cylindre ne possède qu'un seul degré de liberté : le cylindre a un degré de liberté de translation et un de rotation mais ils sont reliés par la condition du roulement sans glissement  $\dot{x} = R\dot{\theta}$
- $\mathcal{P}^{nc} = (\vec{T} + \vec{N}) \cdot \vec{v}(I_2) + \vec{\mathcal{M}}_{I_2}(\vec{T} + \vec{N}) \cdot \vec{\Omega}$  : puissance des forces non conservatives
- $I_2$  un point du cylindre infiniment proche de  $I$
- roulement sans glissement  $\vec{v}(I_2) = \vec{0}$
- contact ponctuel donne  $\vec{\mathcal{M}}_{I_2}(\vec{T} + \vec{N}) = \vec{0}$
- $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_m = cte$  : le mouvement du cylindre est conservatif
- $\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_C^* + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}J_{Gz}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2$
- $z(G)$  : altitude de  $G$
- $\mathcal{E}_p = mgz(G) + cte = -mgx \sin \alpha + cte$
- l'intégrale première du mouvement est donc

$$\mathcal{E}_m = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 - mRg \sin \alpha = cte$$

En dérivant on trouve

$$\ddot{\theta} = \frac{2g \sin \alpha}{3R}$$



### 3.3 Cas du roulement avec glissement

- la loi de Coulomb :  $T = fN$
- on obtient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} N & = & mg \cos \alpha \\ T & = & fmg \cos \alpha \\ \ddot{x} & = & g \sin \alpha \left( 1 - \frac{f}{\tan \alpha} \right) \\ \ddot{\theta} & = & \frac{2fg \cos \alpha}{R} \end{array} \right.$$