Mécanique

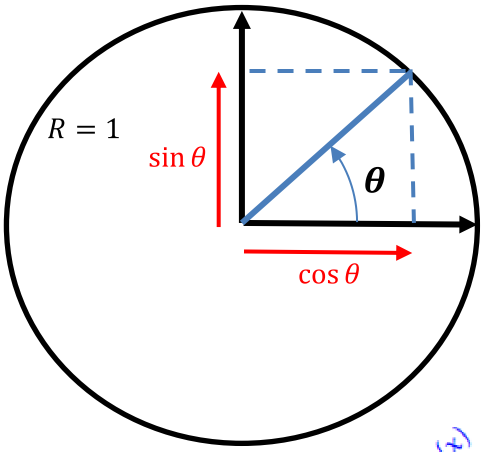
MECA1 - Cinématique

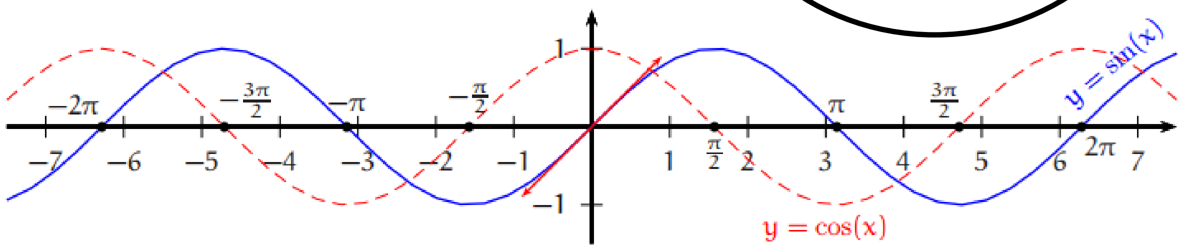
Résumé

Trigonométrie

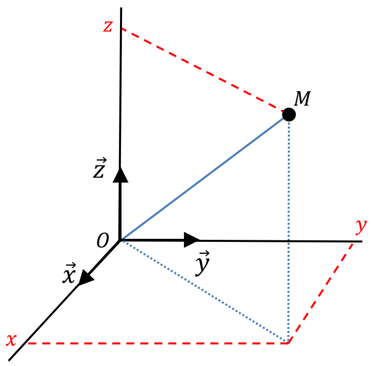
θ en degrés	0	30	45	60	90
θ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

θ degrés → radians	θ radians → degrés
$180° \rightarrow \pi\, rd$ $\theta° \rightarrow \frac{\pi}{180}\theta$	$\pi\, rd \rightarrow 180°$ $\theta\, rd \rightarrow \frac{180}{\pi}\theta$

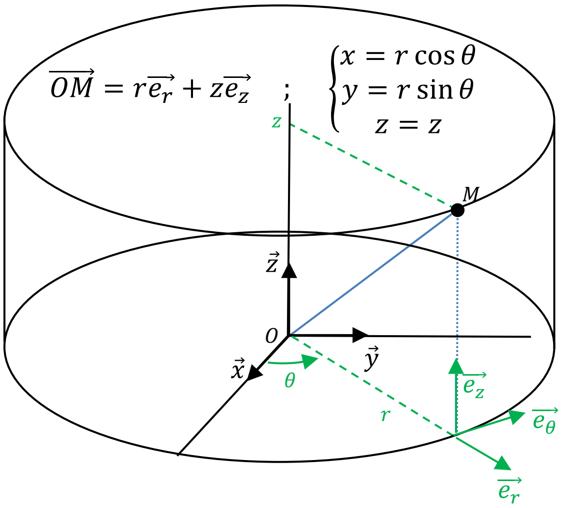


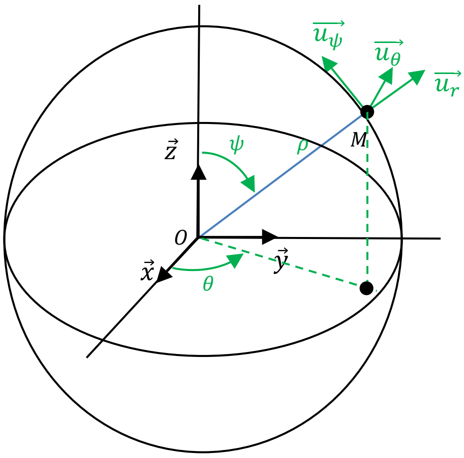


Repérage d'un point



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$





$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_r}$$

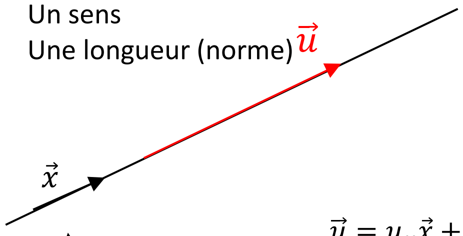
$$\begin{cases} x = \rho\sin\psi\cos\theta \\ y = \rho\sin\psi\sin\theta \\ z = \rho\cos\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \rho\sin\psi \\ \theta = \theta \\ z = \rho\cos\psi \end{cases}$$

Vecteurs

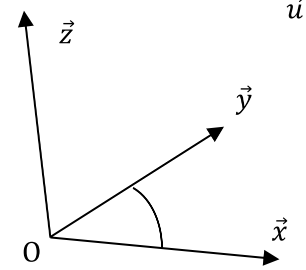
Un vecteur $\vec{u}$ est défini par :

- Une direction
- Un sens
- Une longueur (norme)

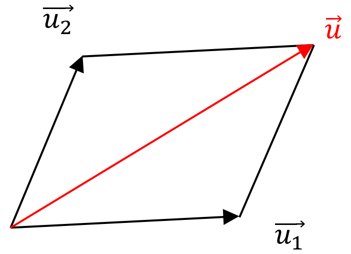


$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad : \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad : \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\vec{u} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z} = u_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + u_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + u_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

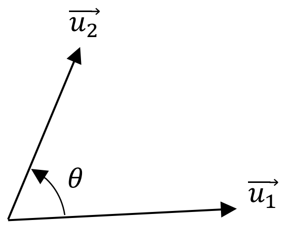


$$\vec{u} = \pm\|\vec{u}\|\vec{x} = u\vec{x}$$
$$\|\vec{u}\| = |u|$$
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2}$$



$$\overrightarrow{u_1} = u_1\overrightarrow{x_1} \quad ; \quad u_1 \in \mathbb{R}$$
$$\overrightarrow{u_2} = u_2\overrightarrow{x_2} \quad ; \quad u_2 \in \mathbb{R}$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = u_1\overrightarrow{x_1} + u_2\overrightarrow{x_2}$$

Produit scalaire



$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|cos\left(\widehat{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}}\right)$$

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = |u_1u_2|\,cos(\theta)$$

$$\text{si } \overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{u_2} \Rightarrow \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 0 \text{ car } cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{x}.\vec{x} = 1 \quad ; \quad \vec{y}.\vec{y} = 1 \quad ; \quad \vec{z}.\vec{z} = 1$$
$$\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = \vec{y}.\vec{z} = 0$$

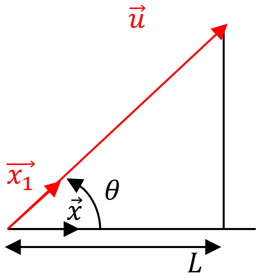
$$\overrightarrow{u_1} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad : \quad \overrightarrow{u_2} = x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = (x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z}).(x_2\vec{x} + y_2\vec{y} + z_2\vec{z}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} . \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

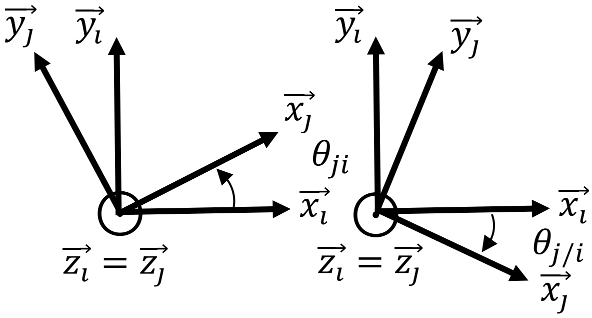
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \begin{matrix} \xleftrightarrow{x} \\ \xleftrightarrow{x} \\ \xleftrightarrow[x]{} \end{matrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Projections



$$\|\vec{u}.\vec{x}\| = L = \|\vec{u}\|\|\vec{x}\||\cos\theta| = |u\cos\theta|$$

$$\vec{u}.\vec{x} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} u\cos\theta \\ u\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = u\cos\theta$$



$$\vec{x_j} = \cos\theta_{ji}\,\vec{x_i} + \sin\theta_{ji}\,\vec{y_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{ji} \\ \sin\theta_{ji} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

$$\vec{y_j} = -\sin\theta_{ji}\,\vec{x_i} + \cos\theta_{ji}\,\vec{y_i} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

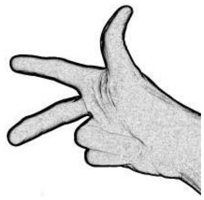
Produit vectoriel

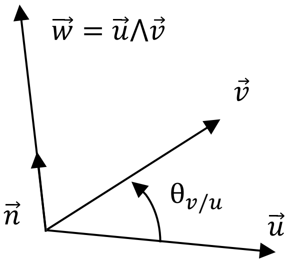
Données

$$\vec{u} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{x} + v_y\vec{y} + v_z\vec{z}$$

$$\theta_{v/u} = \widehat{(\vec{u},\vec{v})}$$



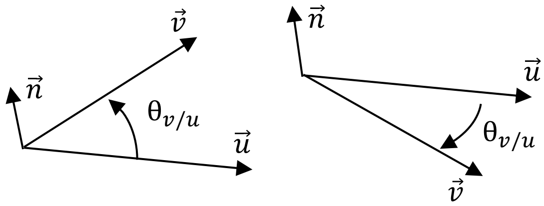


Définition

$$\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin\widehat{(\vec{u},\vec{v})}\,\vec{n}$$

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\left|\sin\widehat{(\vec{u},\vec{v})}\right|$$

Le sens de $\vec{w}$, c'est-à-dire le signe selon $\vec{n}$ du produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est simplement obtenu à l'aide des 3 doigts



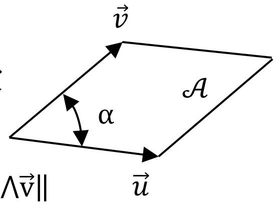
Important : $\vec{n}$ est tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ forme un trièdre direct quand $\theta_{v/u} \in [0,90]$

Propriétés

$$\vec{u}//\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$$

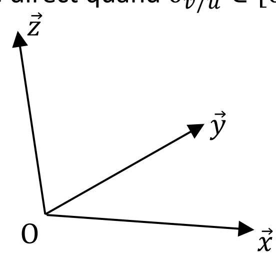
$$\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$$

$$\forall k \in \mathbb{R}, k\vec{v}\wedge\vec{u} = \vec{v}\wedge k\vec{u}$$

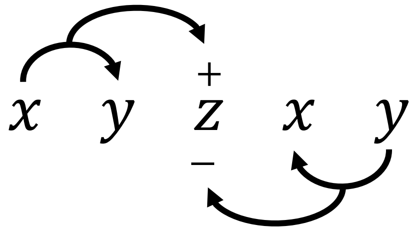


$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$

$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\||\sin\alpha| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$



$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\vec{x}\wedge\vec{y} = \vec{z}\ ;\ \vec{y}\wedge\vec{z} = \vec{x}\ ;\ \vec{z}\wedge\vec{x} = \vec{y}$$

$$\vec{y}\wedge\vec{x} = -\vec{z}\ ;\ \vec{z}\wedge\vec{y} = -\vec{x}\ ;\ \vec{x}\wedge\vec{z} = -\vec{y}$$

Changement de base de dérivation

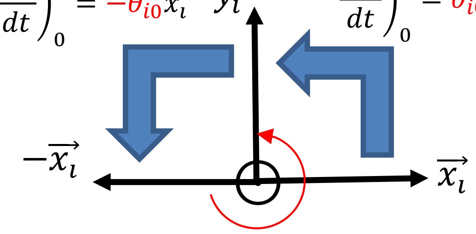
Formule de Bour

Soient deux bases $\mathfrak{B}_i(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{y_i},\overrightarrow{z_i})$ et $\mathfrak{B}_j(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{y_j},\overrightarrow{z_j})$ et un vecteur $\vec{v}$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j + \overrightarrow{\Omega_{j/i}} \wedge \vec{v}$$

Remarque : $\forall \mathfrak{B}_i , \left.\frac{df(t)}{dt}\right)_i = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_i}}{dt}\right)_0 = -\dot{\theta}_{i0}\overrightarrow{x_i} \qquad \left.\frac{d\overrightarrow{x_i}}{dt}\right)_0 = \dot{\theta}_{i0}\overrightarrow{y_i}$$



$$\overrightarrow{\Omega_{i0}} = \dot{\theta}_{i0}\overrightarrow{z_i} = \dot{\theta}_{i0}\overrightarrow{z_j}$$

Cinématique du point

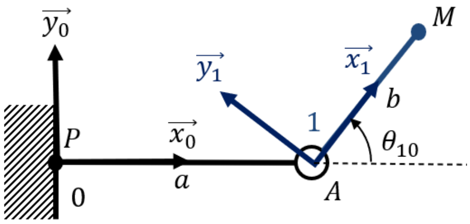
$$\overrightarrow{OM} = X_M\overrightarrow{x_0} + Y_M\overrightarrow{y_0} + Z_M\overrightarrow{z_0}$$

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_0$$
$$= \frac{dX_M}{dt}\overrightarrow{x_0} + \frac{dY_M}{dt}\overrightarrow{y_0} + \frac{dZ_M}{dt}\overrightarrow{z_0}$$
$$= \dot{X}_M\overrightarrow{x_0} + \dot{Y}_M\overrightarrow{y_0} + \dot{Z}_M\overrightarrow{z_0}$$

Si P fixe dans R_0 : $\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0$$
$$= \ddot{X}_M\overrightarrow{x_0} + \ddot{Y}_M\overrightarrow{y_0} + \ddot{Z}_M\overrightarrow{z_0}$$



$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d(a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1})}{dt}\right)_0 = \left.\frac{da\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{db\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 = b\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 = b\overrightarrow{\Omega_{10}}\wedge\overrightarrow{x_1} = b\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0 = \left.\frac{db\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0 = b\left[\left.\frac{d\dot{\theta}_{10}}{dt}\right)_0\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_{10}\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0\right]$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = b\left[\ddot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_{10}\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0\right] = b\left[\ddot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}_{10}^2\overrightarrow{x_1}\right]$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{10}}\wedge\overrightarrow{y_1} = \dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_1}\wedge\overrightarrow{y_1} = -\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{x_1}$$

Mécanique du solide

Solide indéformable

$$\forall(P_i,P_j) \in S, \forall t, \left\|\overrightarrow{P_iP_j}\right\| = cste$$

Notations

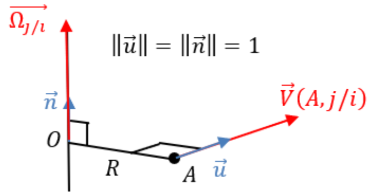
$\vec{V}(A \in S_j/S_i)$ $\vec{V}(A, S_j/S_i)$ $\vec{V}(A, j/i)$

Propriétés

$$\vec{V}(A,i/j) = -\vec{V}(A,j/i)$$
$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = -\overrightarrow{\Omega_{ij}}$$

Vecteur rotation

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \Omega_{ji}\vec{n} = \dot{\theta}_{ji}\vec{n}$$



Mécanique du solide

Formule de Varignon – Changement de point

$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{\Omega_{ji}} \wedge \overrightarrow{AB}$$
$$\vec{V}(B,j/i) = \vec{V}(A,j/i) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{ji}}$$

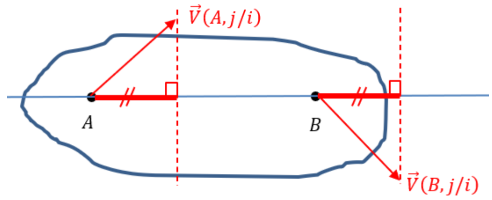
Pour retenir

Symétrie : $AB\Omega BA$

Babar : $BABA\Omega$ ($BABAR$ en statique)

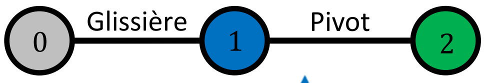
Equiprojectivité

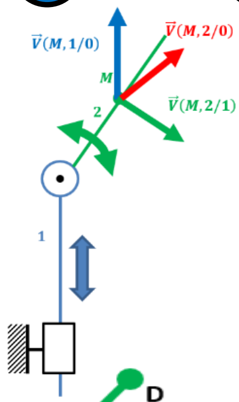
$$\forall (A,B) \in S_j, \vec{V}(A,j/i).\overrightarrow{AB} = \vec{V}(B,j/i).\overrightarrow{AB}$$



Composition du mouvement

$$\vec{V}(M,2/0) = \vec{V}(M,2/1) + \vec{V}(M,1/0)$$
$$\overrightarrow{\Omega_{20}} = \overrightarrow{\Omega_{21}} + \overrightarrow{\Omega_{10}}$$





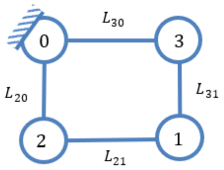
Champ des accélérations

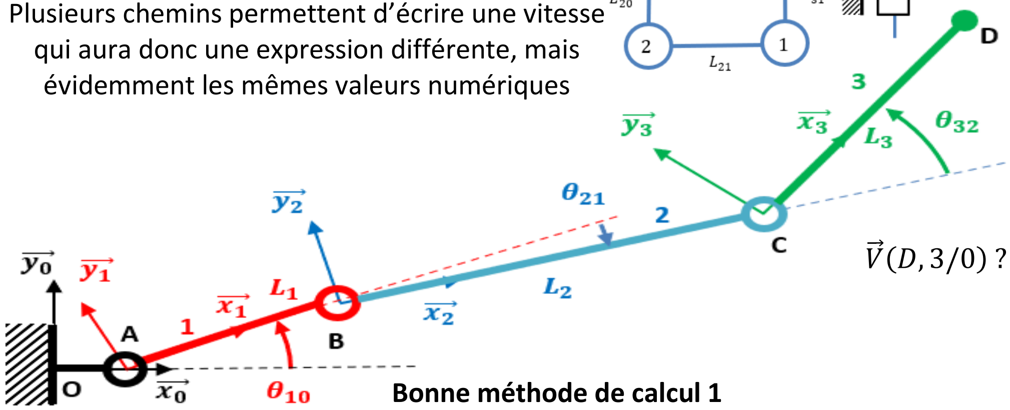
$$\vec{\Gamma}(B,j/i) = \vec{\Gamma}(A,j/i) + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{ji}}}{dt}\right)_i \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{ji}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{ji}} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

Cas des chaines fermées

$$\vec{V}(M,1/0) = \vec{V}(M,1/3) + \vec{V}(M,3/0)$$
$$\vec{V}(M,1/0) = \vec{V}(M,1/2) + \vec{V}(M,2/0)$$

Plusieurs chemins permettent d'écrire une vitesse qui aura donc une expression différente, mais évidemment les mêmes valeurs numériques





Bonne méthode de calcul 1
Chasles PUIS dérivation des vecteurs position

$$\vec{V}(D,3/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d(L_1\overrightarrow{x_1} + L_2\overrightarrow{x_2} + L_3\overrightarrow{x_3})}{dt}\right)_0 = L_1\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 + L_2\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_0 + L_3\left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_0$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 = \dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1} \quad ; \quad \left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_0 = (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_2} \quad ; \quad \left.\frac{d\overrightarrow{x_3}}{dt}\right)_0 = (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_3}$$

$$\vec{V}(D,3/0) = L_3(\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_3} + L_2(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_2} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

Bonne méthode de calcul 2
Composition du mouvement PUIS formule de Varignon

$$\vec{V}(D,3/0) = \vec{V}(D,3/2) + \vec{V}(D,2/1) + \vec{V}(D,1/0)$$
$$\vec{V}(D,3/2) = \vec{V}(C,3/2) + \overrightarrow{\Omega_{32}} \wedge \overrightarrow{CD} = L_3\dot{\theta}_{32}\overrightarrow{y_3} \quad ; \quad \vec{V}(D,2/1) = L_3\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{y_3} + L_2\dot{\theta}_{21}\overrightarrow{y_2}$$
$$\vec{V}(D,1/0) = L_3\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_3} + L_2\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_2} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$
$$\vec{V}(D,3/0) = L_3(\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_3} + L_2(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\overrightarrow{y_2} + L_1\dot{\theta}_{10}\overrightarrow{y_1}$$

Cas du contact

Privilégier la méthode 2

Cinématique du contact

Définitions

I le point de contact géométrique entre les deux solides à l'instant t

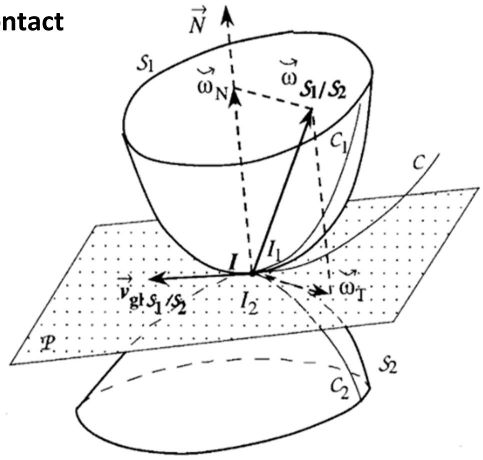
I_1 le point de contact lié au solide S_1 confondu avec I à l'instant t

I_2 le point de contact lié au solide S_2 confondu avec I à l'instant t

$\overrightarrow{\omega_T}$ le roulement contenu dans le plan tangent

$\overrightarrow{\omega_N}$ le pivotement normal au plan tangent en I

$$\overrightarrow{\omega_{S_1/S_2}} = \overrightarrow{\omega_T} + \overrightarrow{\omega_N}$$



Vitesse de glissement

$$\overrightarrow{v_{gl}}(S_1/S_2) = \vec{V}(I, S_1/S_2)$$
$$\overrightarrow{v_{gl}}(S_1/S_2) = -\overrightarrow{v_{gl}}(S_2/S_1)$$
$$\overrightarrow{v_{gl}}(S_1/S_2) = \vec{V}(I, S_1/\mathcal{R}) - \vec{V}(I, S_2/\mathcal{R})$$

Roulement sans glissement

$$\vec{V}(I, S_1/S_2) = \vec{V}(I, S_2/S_1) = \vec{0}$$
$$\vec{V}(I, S_1/\mathcal{R}) = \vec{V}(I, S_2/\mathcal{R})$$

Torseur cinématique

Notations

$$\{\mathcal{V}_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{ji}} \\ \vec{V}(M, j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} P_{ji}\overrightarrow{x_0} + Q_{ji}\overrightarrow{y_0} + R_{ji}\overrightarrow{z_0} \\ U_{ji}\overrightarrow{x_0} + V_{ji}\overrightarrow{y_0} + W_{ji}\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} P_{ji} & U_{ji} \\ Q_{ji} & V_{ji} \\ R_{ji} & W_{ji} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{ji}} \\ \vec{V}(M, j/i) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{ji}} \\ \vec{V}(N, j/i) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{ji}} \\ \vec{V}(M, j/i) + \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{\Omega_{ji}} \end{Bmatrix}_N$$

Torseur glisseur (rotation)

$$\exists M / \{\mathcal{V}_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{ji}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$
$$\forall P, \overrightarrow{\Omega_{ji}} \perp \vec{V}(P, j/i)$$

Composition du mouvement

$$\{\mathcal{V}_{kj}\} + \{\mathcal{V}_{ji}\} = \{\mathcal{V}_{ki}\}$$

Torseur couple (translation)

$$\forall M, \{\mathcal{V}_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M, ji) \end{Bmatrix}_M$$

Addition

Doit être réalisée au même point

Automoment

C'est un invariant

$$A_{\{\mathcal{V}_{ji}\}} = \frac{1}{2}\{\mathcal{V}_{ji}\} \odot \{\mathcal{V}_{ji}\} = cste$$

Egalité

$$\{\mathcal{V}_{21}\} = \{\mathcal{V}_{10}\}$$

Au même point, donne deux équations vectorielles

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{21}} = \overrightarrow{\Omega_{10}} \\ \vec{V}(P, 2/1) = \vec{V}(P, 1/0) \end{cases}$$

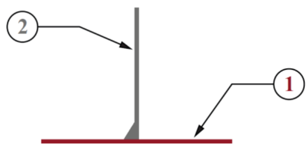
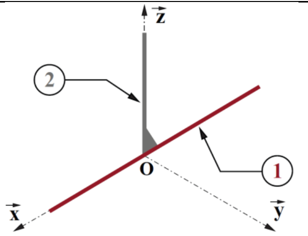
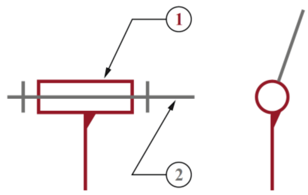
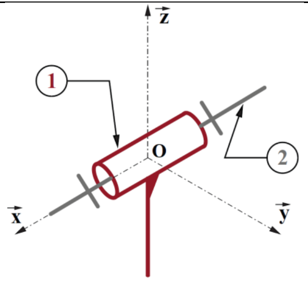
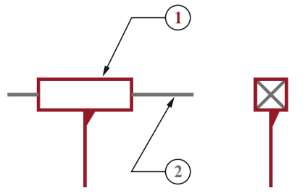
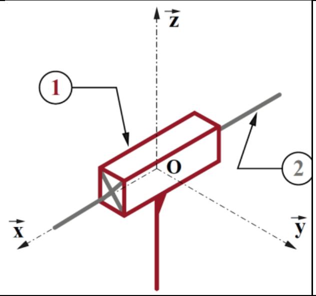
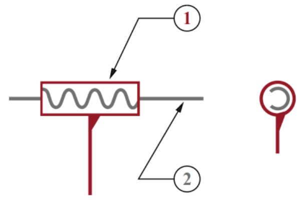
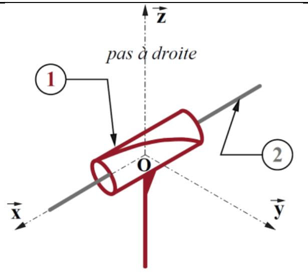
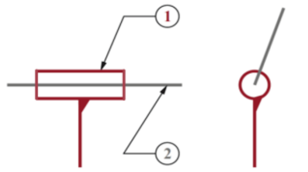
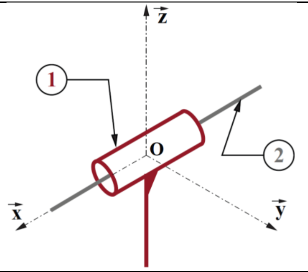
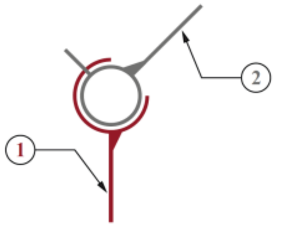
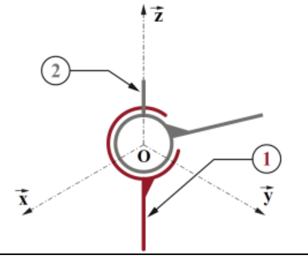
Dans la même base, donne 6 équations scalaires

$$\begin{Bmatrix} P_{21} & U_{21} \\ Q_{21} & V_{21} \\ R_{21} & W_{21} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{10} & U_{10} \\ Q_{10} & V_{10} \\ R_{10} & W_{10} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{21} = P_{10} \\ Q_{21} = Q_{10} \\ R_{21} = R_{10} \\ U_{21} = U_{10} \\ V_{21} = V_{10} \\ W_{21} = W_{10} \end{cases}$$

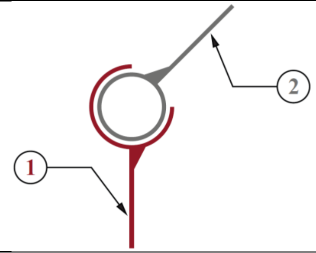
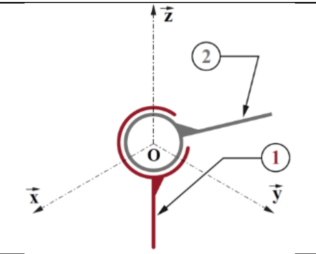
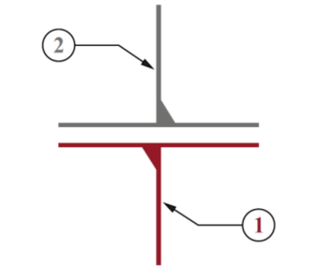
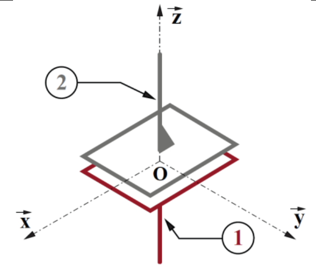
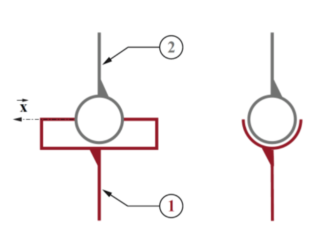
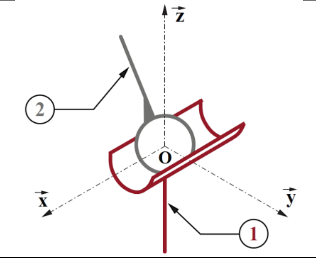
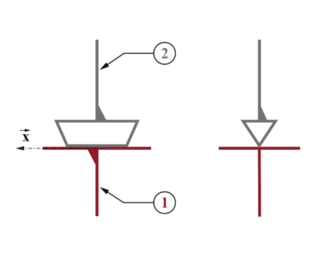
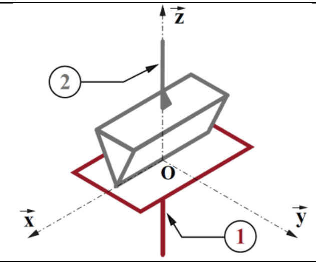
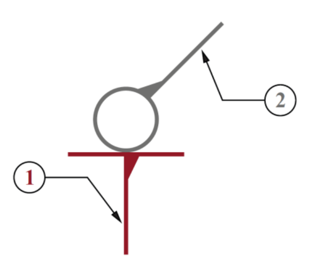
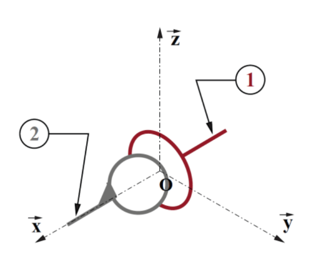
Comoment

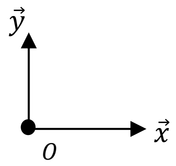
$$\{\mathcal{V}_{21}\} \odot \{\mathcal{V}_{10}\}$$
$$= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{21}} \\ \vec{V}(M, 21) \end{Bmatrix}_M \odot \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{10}} \\ \vec{V}(N, 1/0) \end{Bmatrix}_N$$
$$= \overrightarrow{\Omega_{21}}.\vec{V}(P, 1/0) + \overrightarrow{\Omega_{10}}.\vec{V}(P, 2/1)\ \forall P$$

Liaisons normalisées en cinématique

Liaison	Elem Géom	2D	3D	$\{\mathcal{V}_{21}\}$ Forme canonique	Validité	$\mathfrak{B}$	I_c
Encastrement E	RAS			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	— — —	0
Pivot P	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	1
Glissière Gl	$\vec{x}$			$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\vec{x}$ — —	1
Hélicoïdale He	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $U_{21} = \frac{pas}{2\pi} P_{21}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	1
Pivot Glissant PG	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	2
Rotule à doigt Sphérique à doigt	O Rainure $(O,\vec{x},\vec{z})$ Doigt $\vec{z}$			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	O	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	2

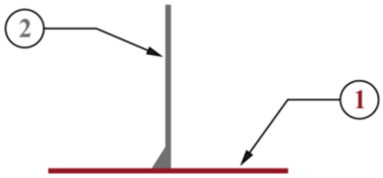
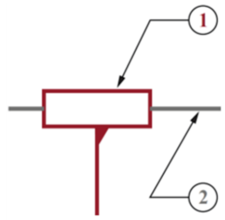
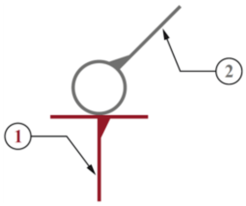
Liaisons normalisées en cinématique

Rotule R Sphérique S	O			$\begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	O	— — —	3
Appui plan AP	$\vec{z}$			$\begin{Bmatrix} 0 & \boldsymbol{U_{21}} \\ 0 & \boldsymbol{V_{21}} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	— — $\vec{z}$	3
Linéaire annulaire LA Sphère cylindre SC	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & U_{21} \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	O	$\vec{x}$ — —	4
Linéaire rectiligne LR Cylindre Plan CP	$\{(O,\vec{x}),\vec{z}\}$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & \boldsymbol{U_{21}} \\ 0 & \boldsymbol{V_{21}} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	$(O,\vec{x},\vec{z})$	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	4
Ponctuelle Pct Sphère-plan SP	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & \boldsymbol{V_{21}} \\ R_{21} & \boldsymbol{W_{21}} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	5



Cas des mécanismes plans dans $(O,\vec{x},\vec{y})$

$$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

Encastrement		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$\forall P$	$I_c^{2D} = 0$
Glissière $\vec{x}$		$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$\forall P$	$I_c^{2D} = 1$
Pivot $(O,\vec{z})$		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$(O,\vec{z})$	$I_c^{2D} = 1$
Ponctuelle $(0,\vec{y})$		$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$(O,\vec{y})$	$\boldsymbol{I_c^{2D} = 2}$

Aide-mémoire

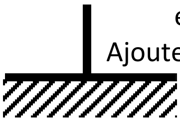
Elément géométrique	1 point O	1 direction $\vec{x}$	1 axe $(O,\vec{x})$	Une normale (droite ou plan)
Liaisons concernées	Rotule Rotule à doigt	Glissière Appui Plan	Pivot Pivot Glissant Hélicoïdale *Sphère cylindre*	Linéaire rectiligne (Droite+Direction) Ponctuelle (Droite)

Lieux de validité	O	$\forall P$	$\forall P \in (O,\vec{x})$	Une normale (droite ou plan)
Liaisons concernées	Rotule Rotule à doigt *Sphère Cylindre*	Glissière Appui Plan	Pivot Pivot Glissant Hélicoïdale	Linéaire rectiligne (Plan) Ponctuelle (Droite)

Modélisation – Paramétrage – Graphe des liaisons

Classes d'équivalence

Ensemble de pièces sans mouvements relatifs
Représentées par des traits entre les liaisons et zones d'intérêt



Ajouter un « peigne » au bâti

Schémas cinématiques

Ensemble de classes d'équivalences et de liaisons entre ces classes
Schéma cinématique minimal : simplification maximale des mouvements

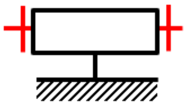
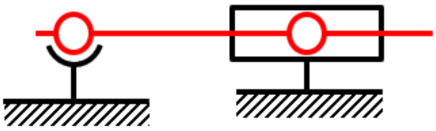


Schéma d'architecture : représentation de chaque liaison fidèle à la réalité

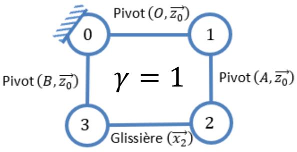


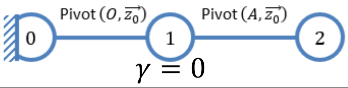
Paramétrage 2D

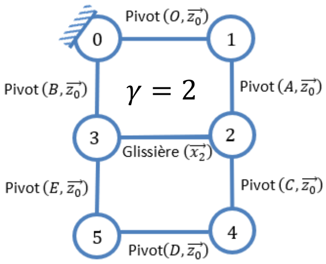
Numéros de pièces $(0,1,2,3\dots)$ et bases associées $(\vec{x_i},\vec{y_i},\vec{z_i})$
Vecteurs fixes $(\vec{u_i},\vec{v_i},\vec{w_i})$
Points $(A,B,C,D\dots)$
Longueurs $(L_1,L_{21},L_{21}\dots)$ et angles fixes (α_i)
Longueurs (λ_{ji}) avec conventions $(\overrightarrow{AB}=\lambda_{ji}\vec{x_i})$ et angles variables (θ_{ji})

Graphe des liaisons

Nombre de cycles indépendants
$\gamma = L - P + 1$

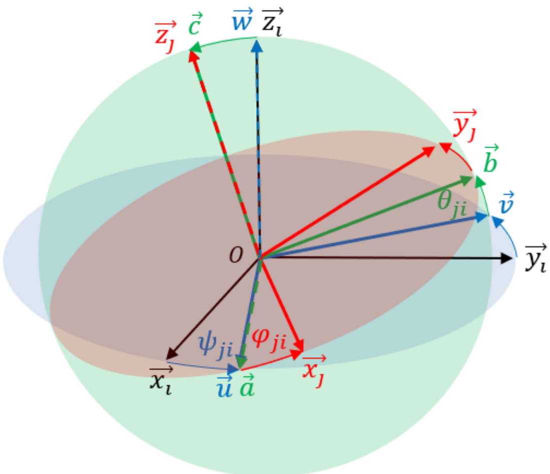


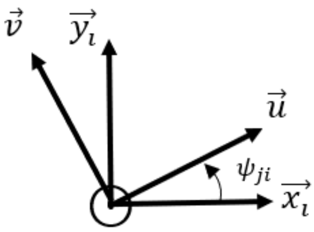




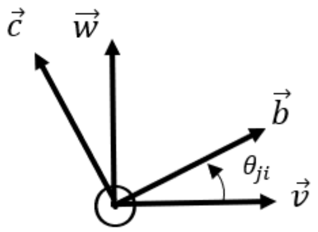
Paramétrage 3D – Les angles d'Euler

Précession ψ_{ji}
Nutation θ_{ji}
Rotation propre φ_{ji}

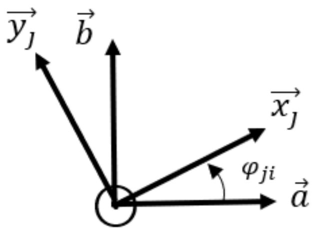




$\vec{z_i}=\vec{w}$



$\vec{u}=\vec{a}$



$\vec{c}=\vec{z_j}$

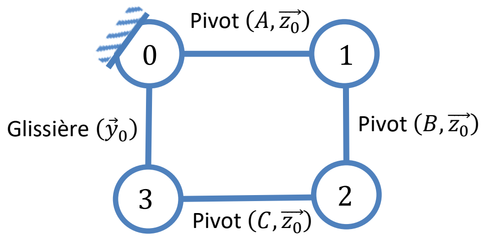
$$\begin{cases}\vec{u}=\cos\psi_{ji}\,\vec{x_i}+\sin\psi_{ji}\,\vec{y_i}\\ \vec{v}=-\sin\psi_{ji}\,\vec{x_i}+\cos\psi_{ji}\,\vec{y_i}\\ \vec{w}=\vec{z_i}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{a}=\vec{u}\\ \vec{b}=\cos\theta_{ji}\,\vec{v}+\sin\theta_{ji}\,\vec{w}\\ \vec{c}=-\sin\theta_{ji}\,\vec{v}+\cos\theta_{ji}\,\vec{w}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{x_j}=\cos\varphi_{ji}\,\vec{a}+\sin\varphi_{ji}\,\vec{b}\\ \vec{y_j}=-\sin\varphi_{ji}\,\vec{a}+\cos\varphi_{ji}\,\vec{b}\\ \vec{z_j}=\vec{c}\end{cases}$$

Méthode d'application de fermeture géométrique plane

Réaliser le graphe des liaisons présentant $\gamma = L - P + 1$ chaines fermées indépendantes. Il faut réaliser γ fermetures géométriques indépendantes. En 2D, on obtient donc $E_c = 3\gamma$ équations non linéaires à résoudre dans lesquelles les inconnues sont les paramètres géométriques $(\lambda_{ii}, \theta_{ii})$.



Pour chaque chaine fermée, on obtient :

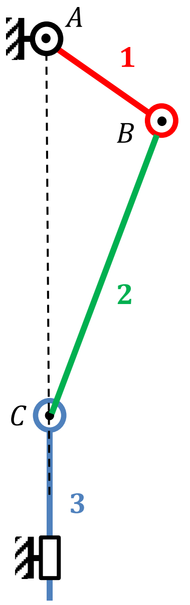
- Une équation vectorielle par relation de Chasles donnant deux équations scalaires projetées dans une base :

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\vec{x_i} = 0 \\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}).\vec{y_i} = 0 \end{cases}$$

- Une équation scalaire par fermeture angulaire sur $\vec{z_i}$ (relation de Chasles angulaire) :

$$(\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_1}}) + (\widehat{\vec{x_1}, \vec{x_2}}) + (\widehat{\vec{x_2}, \vec{x_3}}) + (\widehat{\vec{x_3}, \vec{x_0}}) = 0$$

Exemple :



$$L_1\vec{x_1} + L_2\vec{x_2} - L_3\vec{x_3} - \mathrm{L}_0\vec{x_0} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \cos\theta_{10} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \cos\theta_{30} - L_0 = 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \sin\theta_{30} = 0 \end{cases}$$

$$(\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_1}}) + (\widehat{\vec{x_1}, \vec{x_2}}) + (\widehat{\vec{x_2}, \vec{x_3}}) + (\widehat{\vec{x_3}, \vec{x_0}}) = \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0 \\ L_1 \cos\theta_{10} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \cos\theta_{30} - L_0 = 0 \\ L_1 \sin\theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \sin\theta_{30} = 0 \end{cases}$$

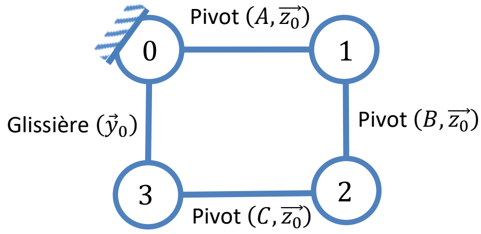
Dans c'exemple, il est possible d'exprimer 3 paramètres géométriques en fonction d'un 4° à choisir. Ce n'est pas toujours très évident et les formules peuvent au choix faire apparaitre les fonction $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ et $\tan^{-1}$ avec des conditions de validité

De manière générale, à partir du/des système(s) non linéaire obtenu(s), il existe plusieurs stratégies de résolution :

- Mise en place d'une démarche permettant d'établir une relation explicite du type $s = f(e)$ ou $e = f(s)$ (exemple souvent rencontré pour faire disparaitre un paramètre angulaire : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)
- Obtenir une relation implicite du type $f(e, s) = 0$ à résoudre numériquement avec une méthode type Newton ou Dichotomie.

Méthode d'application de fermeture cinématique

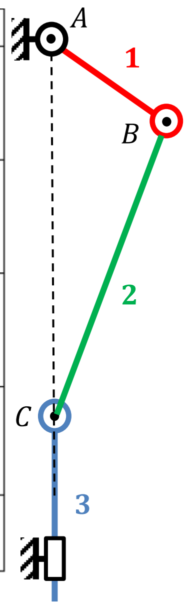
Rappel des notations : $\{\mathcal{V}_{ji}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{ji} \\ 0 & V_{ji} \\ R_{ji} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_k} \quad ou \quad \begin{Bmatrix} 0 & v_{ji}^x \\ 0 & v_{ji}^y \\ \omega_{ji}^z & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_k}$



Réaliser le graphe des liaisons présentant $\gamma = L - P + 1$ chaines fermées indépendantes. Il faut réaliser γ fermetures cinématiques indépendantes. En 2D, on obtient donc $E_c = 3\gamma$ équations linéaires à résoudre dans lesquelles les inconnues sont les paramètres cinématiques (R_{ji}, U_{ji}, V_{ji}).

Pour chaque chaine fermée, écrire la fermeture cinématique associée : $\{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{03}\} + \{\mathcal{V}_{32}\} = \{0\}$

Exprimer les torseurs en un même point		
$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_0} \\ -L_2 R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B$	$\vec{V}(B,3/2) = \vec{V}(C,3/2) + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{32}}$ $= L_2\overrightarrow{x_2} \wedge R_{32}\overrightarrow{z_2} = -L_2 R_{32}\overrightarrow{y_2}$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} R_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$	RAS
$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ L_1 R_{10}\overrightarrow{y_1} \end{Bmatrix}_B$	$\vec{V}(B,3/2) = \vec{V}(A,3/2) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{32}}$ $= -L_1\overrightarrow{x_1} \wedge R_{10}\overrightarrow{z_1} = L_1 R_{10}\overrightarrow{y_1}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}_B$	RAS
Important : ne pas garder la notation verticale afin d'éviter des projections qui pourraient gêner la suite et ne pas faire apparaître de $\dot{\lambda}$ ou $\dot{\theta}$		



Obtenir les deux équations vectorielles de la fermeture : $\begin{Bmatrix} (R_{32} + R_{21} + R_{10})\overrightarrow{z_0} \\ V_{03}\overrightarrow{y_0} + L_1 R_{10}\overrightarrow{y_1} - L_2 R_{32}\overrightarrow{y_2} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Choisir une base de projection pour obtenir les 3 équations scalaires de la fermeture :

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \ (1) \\ -L_1 \sin\theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (2) \\ V_{03} + L_1 \cos\theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -L_1 \sin\theta_{10} & 0 & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 \\ L_1 \cos\theta_{10} & 0 & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{21} \\ R_{32} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : tout paramètre géométrique est supposé connu, une résolution géométrique ayant au préalable permis de les déterminer en fonction de l'entrée.

Résoudre le système linéaire en fonction de l'entrée donnée (R_{10} ici) : $\begin{cases} R_{32} = f_1(R_{10}) \\ R_{21} = f_2(R_{10}) \\ V_{30} = f_3(R_{10}) \end{cases}$

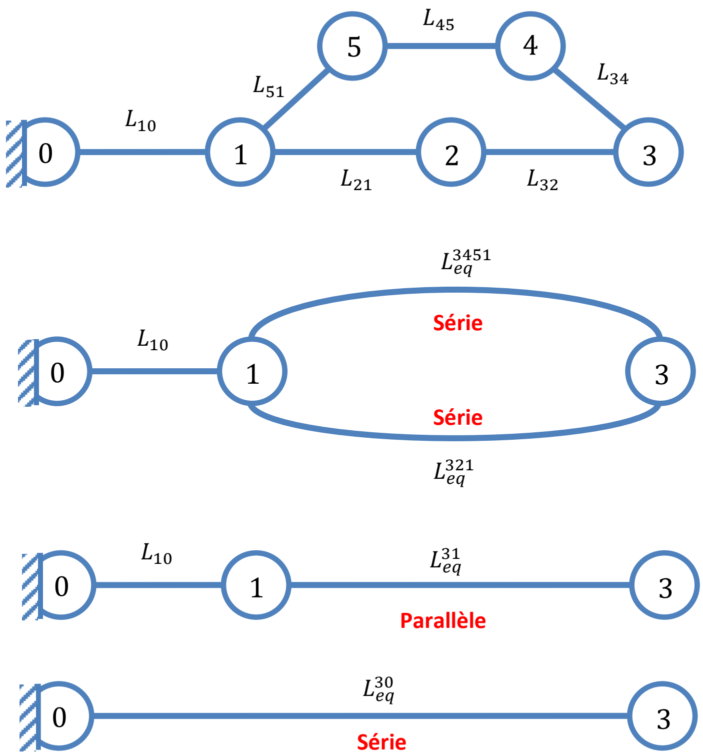
Pour un mécanisme plan à une mobilité, il y 4 inconnues, 3 équations par chaine et 1 inconnue fixée (entrée).

Il est possible de résoudre ce système numériquement ainsi :

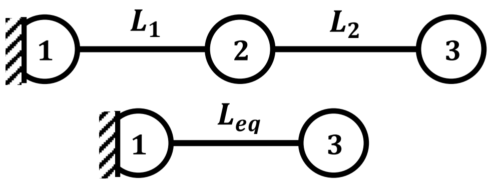
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 \\ 0 & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{21} \\ R_{32} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{10} \\ L_1 \sin\theta_{10} R_{10} \\ -L_1 \cos\theta_{10} R_{10} \end{bmatrix}$$

Liaisons équivalentes

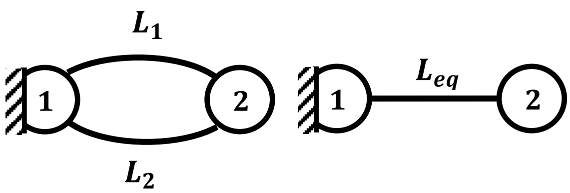
Si besoin, décomposer le problème en sous problèmes



Liaisons en série



Liaisons en parallèle



Choisir un point P

(Liaison reconnue ? Point commun ? Quel déplacement ?)

Choisir une base B

(Liaison reconnue ? Base commune ? Vecteur de déplacement ?)

Poser $\{\mathcal{T}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{n/1} & L_{n/1} \\ Y_{n/1} & M_{n/1} \\ Z_{n/1} & N_{n/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$

Utiliser $\{\mathcal{V}_{n/1}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$

Indicer les différentes liaisons :

$\{\mathcal{V}_{2/1}{}^{1}\}, \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{2}\} \dots \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{n}\}$

Utiliser $\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{1}\} = \dots = \{\mathcal{V}_{2/1}{}^{n}\}$

Exprimer les torseurs au même point P et dans la même base $\mathfrak{B}$

Déterminer le torseur équivalent

Etudier si l'ensemble des 6 composantes forme une famille libre ou non

Si normalisée, proposer nom et EG de la liaison

Dépendance entre colonnes ? Mauvais choix de point ?

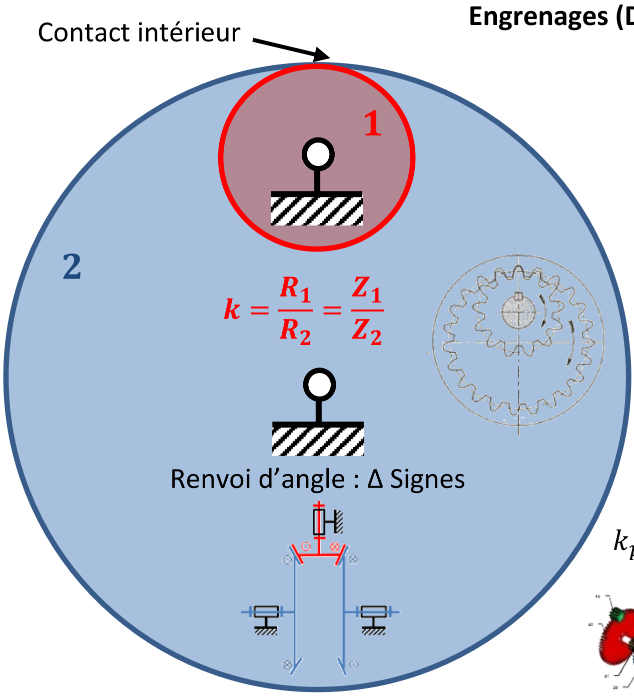
Dépendances similaire entre composantes des deux colonnes ? Mauvais choix de base ?

Transformation du mouvement

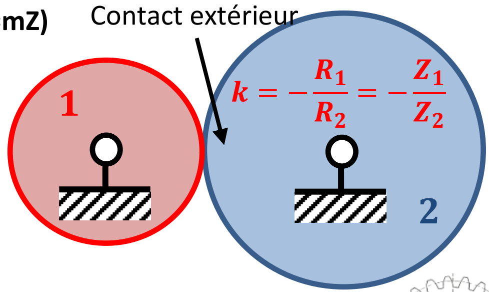
Tout rapport de réduction est donné sous la forme $k = \frac{Mvt_{20}}{Mvt_{10}}$

L'action 1 est $Ext \rightarrow 1$ et l'action 2 est $Ext \rightarrow 2$ (sinon, les signes changent)

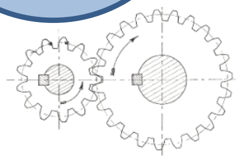
Engrenages (D=mZ)



$$k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$



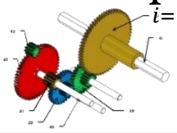
$$k = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$



Train d'engrenages – Formule de WILLIS

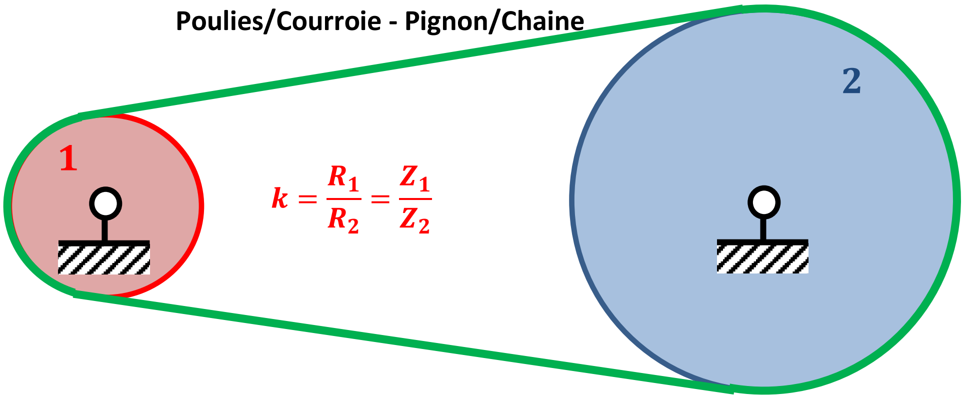
(p engrenages, $p+1$ roues dentées)

$$k_{p+1/1} = \prod_{i=1}^{p} k_{i+1/i} = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}}$$



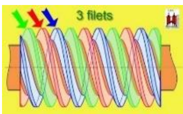
$$= (-1)^n \prod_{i=1}^{p} \frac{D_{menantes}}{D_{menées}}$$

Poulies/Courroie - Pignon/Chaine

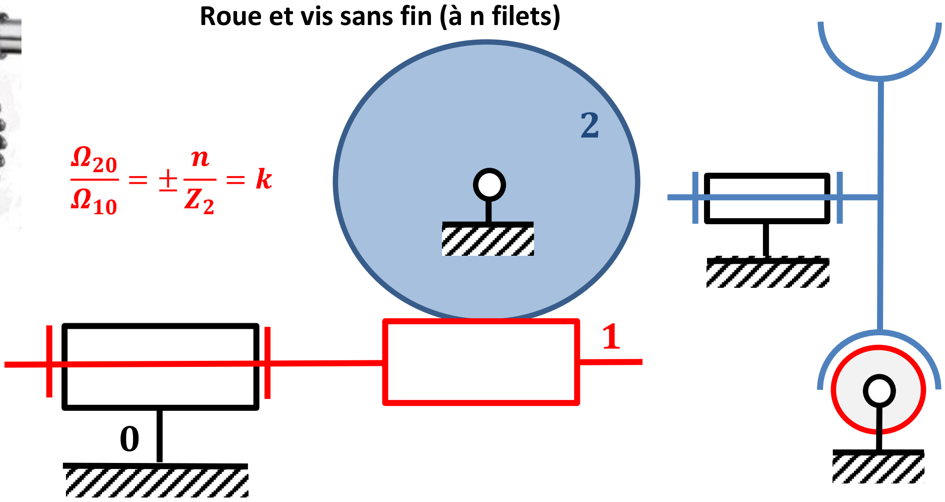


$$k = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Roue et vis sans fin (à n filets)

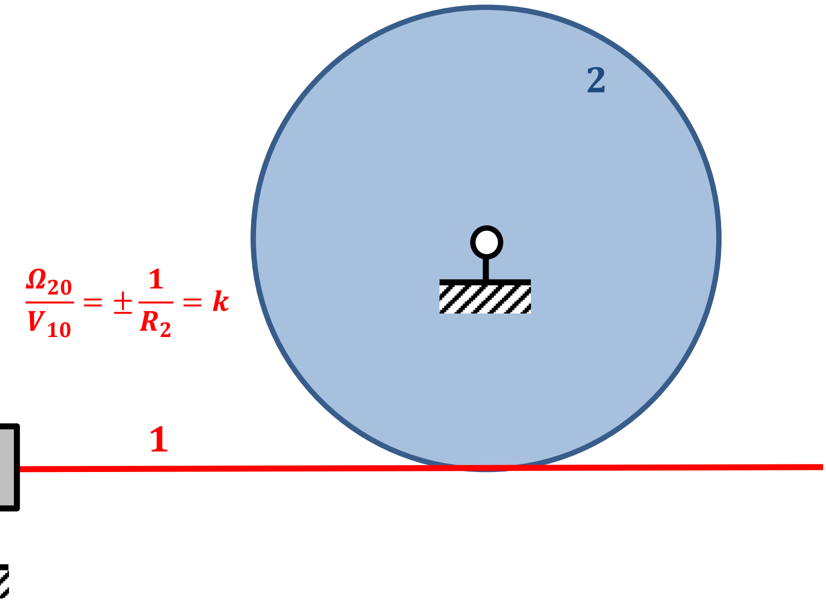


$$\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = \pm \frac{n}{Z_2} = k$$



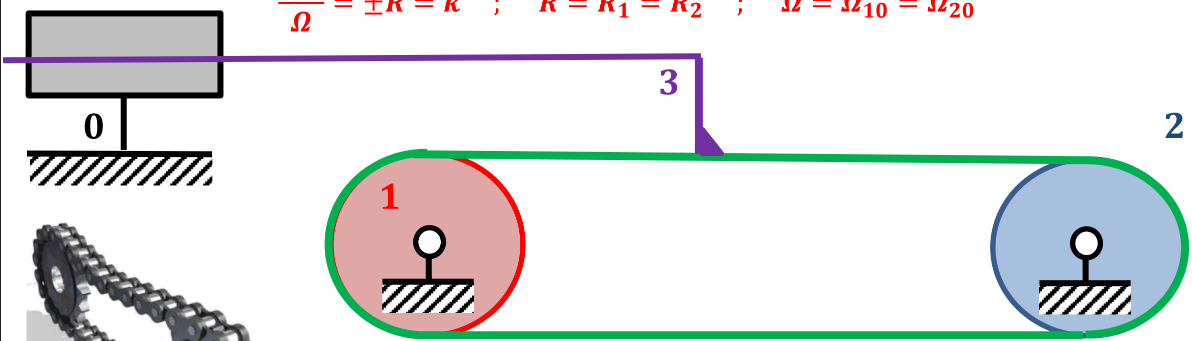
Pignon/Crémaillère

$$\frac{\Omega_{20}}{V_{10}} = \pm\frac{1}{R_2} = k$$



Poulie/Courroie – Pignon/Chaine

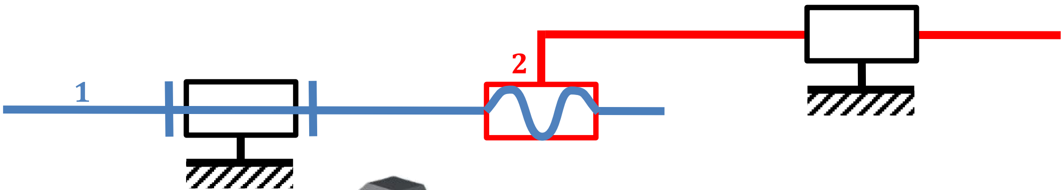
$$\frac{V_{30}}{\Omega} = \pm R = k \quad ; \quad R = R_1 = R_2 \quad ; \quad \Omega = \Omega_{10} = \Omega_{20}$$

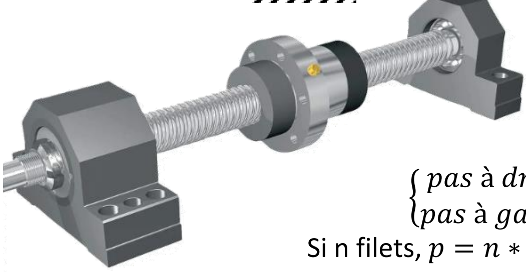


Hélicoïdale/Vis écrou

$$\frac{V_{21}}{\Omega_{21}} = \frac{p}{2\pi}$$

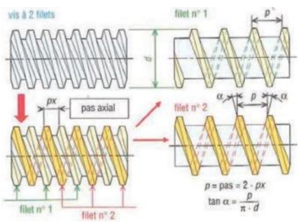
$$\frac{V_{20}}{\Omega_{10}} = -\frac{p}{2\pi} = k$$



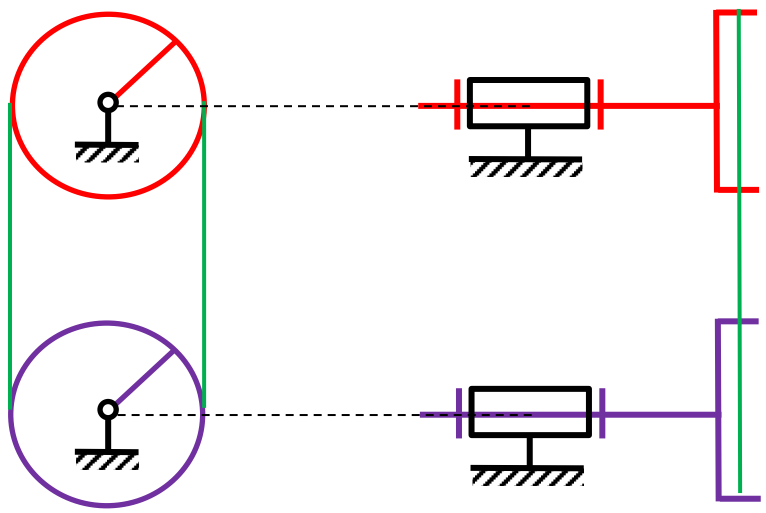


$$\begin{cases} pas\ à\ droite\ p > 0 \\ pas\ à\ gauche\ p < 0 \end{cases}$$

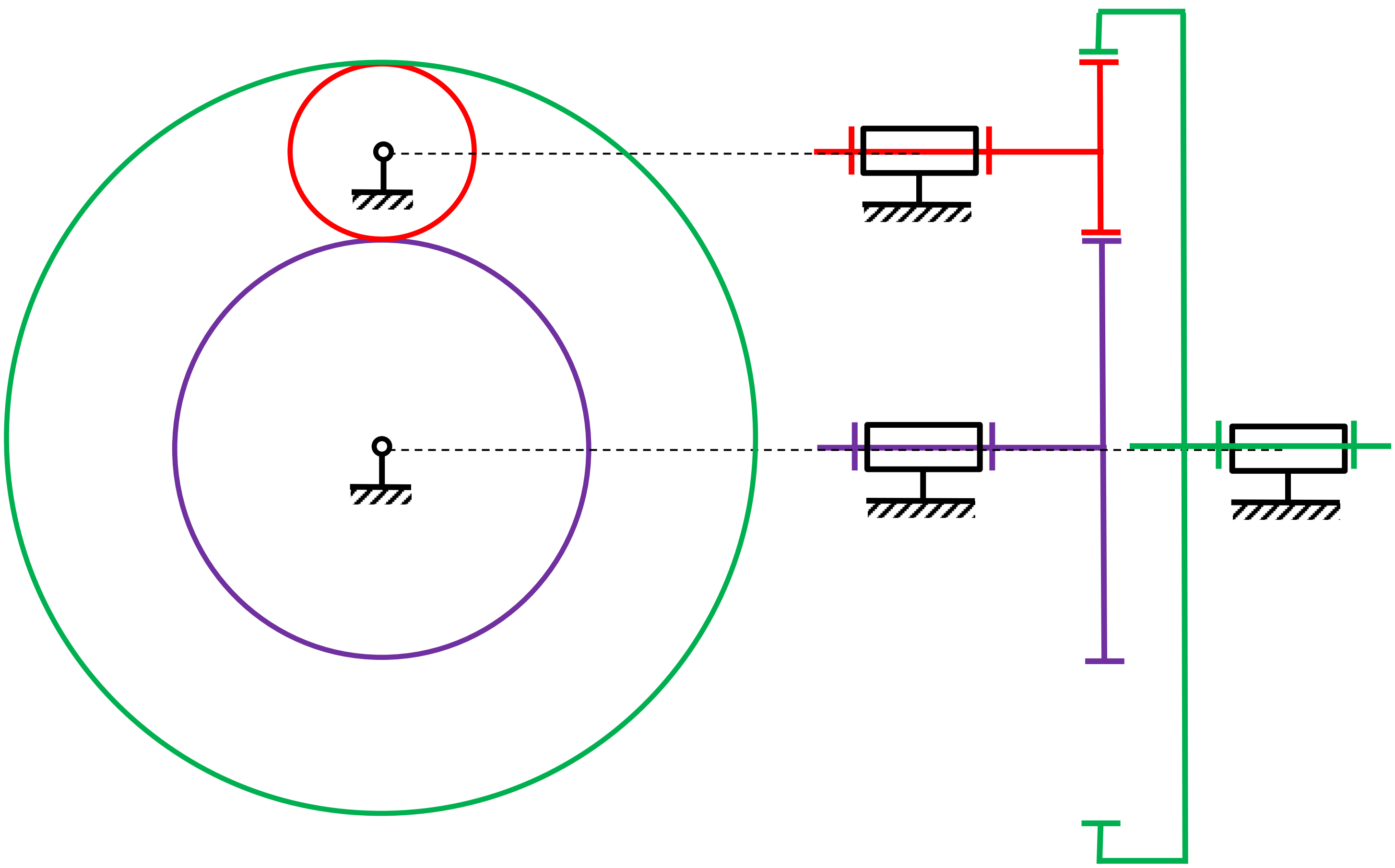
Si n filets, $p = n * px$ avec px pas axial



Modèle Poulie/Courroie



Modèle Roues dentées/Couronnes



Train épicycloïdal ? cf. fiche dédiée