

# **DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ**

**calculatrice: autorisée**

**durée: 4 heures**

## **Sujet**

<u>L'expérience originelle de Fourier</u> .....	2
I. <u>Transfert thermique par conduction dans un barreau</u> .....	2
A. <u>Loi de Fourier</u> .....	2
B. <u>Analogies entre grandeurs thermiques et électrocinétiques</u> .....	2
C. <u>Équation de la chaleur</u> .....	2
D. <u>Cas du régime dépendant du temps</u> .....	3
E. <u>Cas du régime stationnaire indépendant du temps</u> .....	3
II. <u>Étude d'un dispositif expérimental utilisé par Joseph Fourier en 1806</u> .....	3
A. <u>Équation de propagation de la chaleur avec fuites thermiques latérales</u> .....	4
B. <u>Étude du régime stationnaire indépendant du temps</u> .....	4
C. <u>Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux</u> .....	5
III. <u>Propagation de la chaleur et séries de Fourier</u> .....	5
A. <u>Propagation de la chaleur, sans fuite latérale, en régime dépendant du temps</u> .....	6
B. <u>Décomposition en série de Fourier</u> .....	6
<u>Effet de peau</u> .....	8
I. <u>Preliminaires</u> .....	8
II. <u>Effet de peau en électromagnétisme</u> .....	9
A. <u>Fil en continu</u> .....	9
B. <u>Répartition de courant en alternatif</u> .....	9
C. <u>Résistance du fil en alternatif</u> .....	10
III. <u>Effet de peau en thermodynamique</u> .....	11

# L'expérience originale de Fourier

On étudie la conduction de la chaleur (ou diffusion thermique) à pression constante dans un solide homogène, isotrope, de masse volumique  $\rho$ , de capacité thermique à pression constante  $c$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . On désigne par  $h$  le coefficient de transfert conducto-convectif entre le solide et l'air, lorsque le solide est en contact direct avec l'air ambiant. Ces quatre grandeurs  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  et  $h$  sont supposées indépendantes de la température  $T$ .

Dans le cas du fer, pour les applications numériques on prendra:

- Masse volumique :  $\rho = 7,86 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- Capacité thermique massique :  $c = 460 \text{ J.kg}^{-1} . \text{K}^{-1}$
- Conductivité thermique :  $\lambda = 81 \text{ u.S.I.}$
- Coefficient de transfert conducto-convectif entre le fer et l'air :  $h = 10 \text{ W.m}^{-2} . \text{K}^{-1}$

## I. Transfert thermique par conduction dans un barreau

### A. Loi de Fourier

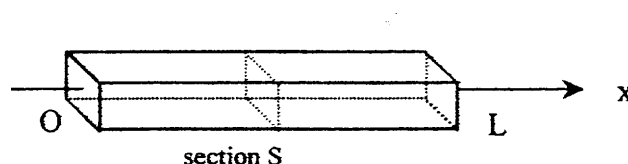
1. Énoncer la loi de Fourier pour la conduction thermique, en définissant les différentes grandeurs utilisées et en précisant l'unité dans le système international des unités (S.I.).
2. Relier cette loi au second principe de la Thermodynamique.

### B. Analogies entre grandeurs thermiques et électrocinétiques

3. Dans le domaine électrique, la loi d'Ohm présente des analogies avec la loi de Fourier. Donner un tableau de correspondance entre le flux thermique  $\Phi$ , le vecteur densité volumique de courant thermique, la conductivité thermique, la température, le gradient de température  $\vec{\nabla} T$  et les grandeurs électriques analogues.

### C. Équation de la chaleur

Soit un barreau de longueur  $L$ , de section droite carrée de surface  $S$  et dont le côté est très inférieur à  $L$ . Ce barreau est entouré par une enveloppe adiabatique. On considère qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale et que la température est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend que de son abscisse  $x$  et du temps  $t$ .



4. En effectuant un bilan enthalpique pour la partie de barreau située entre les sections d'abscisses  $x$  et  $x+dx$ , montrer que la température  $T(x, t)$  dans le barreau est solution de l'équation

aux dérivées partielles, appelée équation de la chaleur ( ou de la diffusion thermique) :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

#### D. Cas du régime dépendant du temps

En régime dépendant du temps, pour une diffusion thermique sur une distance  $d$ , il faut une durée de l'ordre de  $\tau_d$ .

5. À partir des grandeurs  $\rho$ ,  $c$ ,  $d$  et  $\lambda$ , construire une grandeur homogène à une durée et donner l'expression de  $\tau_d$  appelé temps caractéristique de diffusion thermique.
6. Application numérique: calculer pour le fer les temps caractéristiques  $\tau_{d1}$  et  $\tau_{d2}$  pour des extensions spatiales sur les distances  $d_1 = 10 \text{ cm}$  et  $d_2 = 50 \text{ cm}$ . Exprimer chaque résultat en utilisant une unité adéquate. Commenter ces résultats.

#### E. Cas du régime stationnaire indépendant du temps

Les extrémités  $x=0$  et  $x=L$  de ce barreau sont en contact avec deux sources idéales de chaleur de températures respectivement égales à  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_1 > T_2$ .

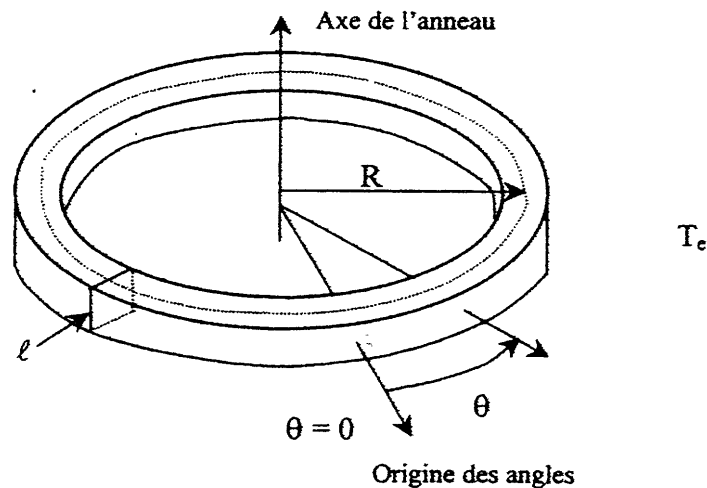
7. Déterminer la température  $T(x)$  dans une section droite du barreau en régime stationnaire indépendant du temps.
8. Établir la relation entre le flux thermique  $\Phi$  traversant une section droite du barreau en régime permanent et les températures  $T_1$  et  $T_2$ .
9. En déduire l'expression de la résistance thermique  $R_{th}$  du barreau.

## II. Étude d'un dispositif expérimental utilisé par Joseph Fourier en 1806

Un des dispositifs expérimentaux utilisés par Fourier était constitué d'un anneau de fer ayant la forme d'un tore d'axe  $Oz$ , de rayon moyen  $R$  et de section carrée de côté  $\ell$  ( avec  $\ell$  très inférieur à  $R$  ). Plusieurs petites loges, de dimensions négligeables, remplies de mercure, dans lesquelles plongent des thermomètres, étaient percées en divers endroits de l'anneau représenté sur la figure.

Sous une section droite de l'anneau, prise pour origine des angles  $\theta=0$ , on place un dispositif de chauffage à la distance  $R$  de l'axe. On considère que la température est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend que de l'angle  $\theta$  et de  $t$  :  $T=T(\theta, t)$ . On se limite au domaine où  $\theta$  est compris entre  $-\pi$  et  $\pi$  radians, en remarquant que l'on doit avoir, par raison de symétrie  $T(-\theta, t)=T(\theta, t)$ .

10. Montrer que le vecteur densité volumique de courant thermique  $\vec{j}$  a pour direction le vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$  de la base cylindrique et préciser son expression  $\vec{j}=j\vec{u}_\theta$  en fonction notamment d'une dérivée de la température  $T$ . Vérifier la dimension du  $j$  déterminé dans le calcul précédent.



### A. Équation de propagation de la chaleur avec fuites thermiques latérales

L'anneau est placé dans l'air ambiant de température  $T_e$  uniforme et indépendante du temps. Selon la loi de Newton, le flux thermique conducto-convectif sortant par l'élément de surface latérale  $dS_{lat}$  de l'anneau, et donc cédé à l'air ambiant, vaut  $\delta \Phi = h(T - T_e)dS_{lat}$  où  $h$  est le coefficient de transfert conducto-convectif entre le métal et l'air, que l'on suppose constant, et  $T$  la température de la portion d'anneau considérée à l'instant  $t$ .

On considère une partie d'anneau située entre les sections repérées par les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ .

11. Quel est l'intérêt pratique de remplir les loges par du mercure ?
12. Justifier, par des calculs en coordonnées cylindriques, sans faire d'approximation, que la surface latérale élémentaire considérée  $dS_{lat}$  vaut  $4 \ell R d\theta$  et que le volume élémentaire de la partie d'anneau considéré  $d\tau$  vaut  $\ell^2 R d\theta$ .
13. Déterminer, sans faire d'approximation, le flux thermique conductif  $\Phi$  traversant selon le sens de  $\vec{u}_\theta$  une section droite du barreau en fonction de  $\lambda$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \theta}$ ,  $R$  et  $\ell$ . On tient compte ensuite de  $\ell$  très inférieur à  $R$ . Que devient l'expression de  $\Phi$  ? Vérifier que l'on obtient  $\Phi = j \ell^2$  comme si l'on pouvait considérer un  $j$  uniforme sur toute la section droite. Quelle valeur faut-il prendre pour  $j$  ?
14. En effectuant un bilan enthalpique pour la partie d'anneau considérée donner l'équation aux dérivées partielles dont la température  $T(\theta, t)$  est solution.

### B. Étude du régime stationnaire indépendant du temps.

15. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(\theta)$  en régime stationnaire dans l'anneau. On introduira la grandeur  $a = \sqrt{\frac{\ell \lambda}{4h}}$  dont on précisera la dimension.
16. Écrire l'équation caractéristique. Donner la solution de l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(\theta)$  en faisant intervenir des exponentielles, en fonction de deux constantes dépendant des conditions aux limites.

17. On donne une première condition aux limites :  $T = T_c$  pour  $\theta = 0$ , valeur fixée par le chauffage. Sur un schéma de l'anneau, représenter qualitativement le vecteur  $\vec{j}$  pour  $\theta$  entre  $-\pi$  et  $\pi$  radians. Que peut-on dire concernant la dérivabilité de  $T$  en  $\theta = 0$  ? Que peut-on prévoir par contre pour  $\frac{dT}{d\theta}$  en  $\theta = \pm\pi$ . Justifier. En déduire une deuxième condition aux limites.

18. On se limite au domaine où  $\theta$  est compris entre 0 et  $\pi$  radians. Déterminer  $T(\theta)$ . La réponse ne fera plus intervenir d'exponentielles mais un rapport de deux cosinus hyperboliques.

On se limite toujours au domaine où  $\theta$  est compris entre 0 et  $\pi$  radians. Un thermomètre 2 est placé dans la section  $A_2$  repérée par l'angle  $\theta_2$ ; un thermomètre 1 est placé dans la section  $A_1$  repérée par l'angle  $\theta_1 = \theta_2 - \Delta\theta$ ; enfin un thermomètre 3 est placé dans la section  $A_3$  repérée par l'angle  $\theta_3 = \theta_2 + \Delta\theta$ . On pose  $\Delta T = T(\theta) - T_e$ .

D'après Fourier, le rapport  $q = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{\Delta T_2}$  ne dépend que des dimensions ou de la nature de l'anneau et non de la manière dont ce solide est chauffé.

19. Démontrer qu'effectivement ce rapport ne dépend ni de  $\theta_2$ , ni de la température  $T_c$  de la section repérée par l'angle  $\theta = 0$  au-dessous de laquelle on a placé le dispositif de chauffage.

### C. Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

20. Application numérique : calculer le rapport  $q_{th}$  trouvé théoriquement pour  $\theta = \pi/4$  rad en prenant les valeurs du dispositif de Fourier, soit  $R = 16,0$  cm et  $l = 3,30$  cm.

Sur les relevés d'expériences de Fourier du 31 juillet 1806, on lit que 2 heures après le début du chauffage, les valeurs des températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires et que les thermomètres indiquent, par des lectures au tiers de degrés près :  $17,67^\circ C$  pour l'air ambiant,  $66,00^\circ C$  pour  $\theta_1 = \pi/2$  rad,  $50,67^\circ C$  pour  $\theta_2 = 3\pi/4$  rad et  $44,00^\circ C$  pour  $\theta_3 = \pi$  rad.

21. Calculer le temps caractéristique de diffusion thermique  $\tau_d$  défini précédemment pour une extension spatiale sur la distance  $d = \pi R$  et comparer sa valeur aux 2 heures attendues par Fourier.

22. Calculer le rapport  $q_{exp}$  donné par les relevés expérimentaux de Fourier et comparer à la valeur théorique  $q_{th}$  calculée précédemment.

## III. Propagation de la chaleur et séries de Fourier

C'est en étudiant la propagation de la chaleur dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites séries de Fourier.

L'anneau de la figure, chauffé comme précédemment en  $\theta = 0$ , est ensuite enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température  $T$  est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend, comme précédemment, que de l'angle  $\theta$  et du temps  $t$ . On se limite encore au domaine où  $\theta$  est compris entre  $-\pi$  et  $\pi$  rad.

**A. Propagation de la chaleur, sans fuite latérale, en régime dépendant du temps**

23. Justifier l'équation aux dérivées partielles  $\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$  dont la température  $T(\theta, t)$  est solution.

On se propose de déterminer la solution générale de cette équation en utilisant la méthode dite « à variables séparées ». Pour cela, on commence tout d'abord par chercher une solution particulière de cette équation différentielle sous la forme  $T(\theta, t) - T_\infty = f(\theta)g(t)$  où  $T_\infty$  est une constante qui désigne la température finale uniforme de l'anneau et  $g(t)$  une fonction qui tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. Dans la suite, on ne cherche pas à déterminer  $T_\infty$ .

24. Montrer que l'on peut séparer les variables c'est à dire que l'on obtient:  $F(\theta) = G(t)$  avec  $G(t) = \frac{1}{g(t)} \frac{dg(t)}{dt}$ . Préciser l'expression de  $F(\theta)$ .

25. Justifier que l'on doit poser  $F(\theta) = G(t) = \text{constante}$ . On écrit cette constante qui doit être obligatoirement négative:  $-1/\tau$ . Justifier la dimension de  $\tau$ . Justifier avec le plus de précision possible qu'on ne pouvait choisir une constante positive.

26. Résoudre l'équation différentielle en  $g(t)$  (sans préciser la constante en lien avec les conditions initiales).

27. Résoudre l'équation différentielle en  $f(\theta)$  (sans préciser les deux constantes en lien avec les conditions aux limites). Pour résoudre, on introduira, sans chercher à l'exprimer, une autre constante arbitraire positive homogène à une distance  $d$  définie par:  $d^2 = \frac{\lambda \tau}{\rho c}$ .

28. On impose à cette solution particulière, en vertu de la symétrie créée par le dispositif de chauffage initial, de vérifier  $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$ . Pour la même raison, on impose au flux thermique de conduction d'être nul en  $\theta = \pi$ . Montrer que cette solution particulière dépend alors d'un entier naturel non nul  $n$  et peut se mettre sous la forme :

$T_n - T_\infty = A_n \cos(n\theta) \exp(-\frac{t}{\tau_n})$  où l'on précisera l'expression de  $\tau_n$  en fonction de  $n$  et des autres constantes de l'énoncé.

**B. Décomposition en série de Fourier**

À l'instant  $t=0$ , la température de l'anneau  $T_0(\theta)$  est une fonction paire de  $\theta$ , fonction périodique de période  $2\pi$ . Cette fonction (qui a été obtenue plus haut *question 18*) est développable en série de Fourier:  $T_0(\theta) - T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$ .

29. Justifier que la solution générale pour  $T(\theta, t)$  peut s'écrire sous la forme  $T(\theta, t) - T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \exp(-\frac{t}{\tau_n})$ . Cette solution vérifie-t-elle les conditions aux limites ?

30. Comment faire pour obtenir les coefficients  $A_n$  ?

31. Déterminer les valeurs numériques des constantes de temps du fondamental, du deuxième et du troisième harmonique. Commenter la rapidité de la décroissance des harmoniques.

32. Fourier constata, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que l'état de l'anneau ne tarde pas à se confondre avec celui pour lequel les écarts de températures des différents points par rapport à la moyenne  $T_m$  doivent être proportionnels aux cosinus de l'angle qui mesure la distance à l'origine, la disposition initiale n'apportant aucun changement à ces résultats. Commenter cette constatation de Fourier.

---

## Effet de peau

Données:

$$\operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}(\vec{A}))=0$$

$$\Delta \vec{A} = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{A})$$

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$$

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) \quad \text{en cylindriques}$$

L'effet de peau se rencontre en physique lorsqu'il y a absorption de l'énergie. Ce phénomène se retrouve dans des domaines très variés : électromagnétisme, diffusion thermique par exemple.

### I. Préliminaires

Pour cette question,  $\lambda$  est une conductivité thermique,  $\rho$  une masse volumique et  $c$  une capacité thermique massique. La notation  $\omega$  désigne une pulsation.

1. Quelles sont les unités de  $\lambda$ ,  $\rho$  et  $c$ . Justifier les résultats à partir de lois physiques très simples.

2. Déterminer la dimension de la quantité:  $\sqrt{\frac{2}{(\frac{\rho c}{\lambda})\omega}}$ . Justifier la réponse.

On désigne ici par  $\sigma$  une conductivité électrique en  $S.m^{-1}$ . De même  $\mu_0$  désigne la perméabilité magnétique du vide avec  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$ .

3. Écrire la loi d'Ohm locale dans un conducteur (fixe). Écrire l'équation de Maxwell-Ampère (on utilisera ici  $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$  où  $c$  désigne la vitesse de la lumière dans le vide).

4. En utilisant les deux lois précédentes, déterminer la dimension du produit  $\mu_0 \sigma$  sous la forme  $L^n T^p$  ( $L$  : longueur et  $T$  : temps) où  $n$  et  $p$  sont des entiers relatifs à préciser. Établir alors une longueur possible en fonction de  $\mu_0$ ,  $\sigma$  et  $\omega$ .

On rappelle les notations exponentielles pour  $i$  (avec  $i^2 = -1$ ) et  $-i$ . On a :  $i = \exp(i\pi/2)$  et  $-i = \exp(-i\pi/2)$ . On considère l'équation différentielle suivante  $\frac{d^2 \underline{y}(x)}{dx^2} - 2 \frac{i}{\delta^2} \underline{y}(x) = 0$  où  $\delta$  est un réel positif et  $\underline{y}(x)$  une fonction à valeurs complexes.

5. Écrire l'équation caractéristique et en déduire les deux solutions possibles. (Pour résoudre, il est pratique d'écrire  $i$  ou  $-i$  en notation exponentielle).

6. En déduire que la solution générale de cette équation est de la forme



$$y(x) = \underline{A} \exp\left((1+i)\frac{x}{\delta}\right) + \underline{B} \exp\left(-(1+i)\frac{x}{\delta}\right) \text{ avec } \underline{A} = A \exp(i\varphi_A) \text{ et } \underline{B} = B \exp(i\varphi_B) .$$

7. Résoudre aussi l'équation  $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2\frac{i}{\delta^2} y(x) = 0$  .

On pourra se servir de ces résultats dans la suite du problème.

## II. Effet de peau en électromagnétisme

On considère un fil de cuivre cylindrique de rayon  $R=0,90\text{ mm}$  et de longueur  $L$  très grande devant le rayon  $R$  . Ce fil est placé dans le vide. On note  $\sigma_0$  sa conductivité électrique supposée constante. On appelle  $(Oz)$  l'axe du fil de vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  .

On prendra  $\sigma_0 = 6,2 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$  ;  $\epsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  .

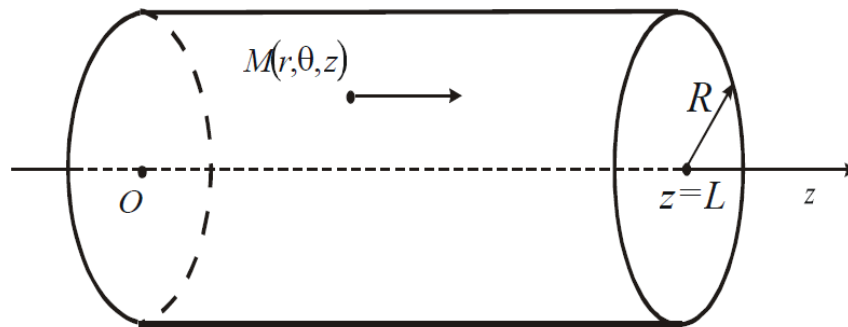


Figure 1 : géométrie du fil de cuivre

### A. Fil en continu

On applique une différence de potentiel  $U$  constante entre les deux extrémités du fil de cuivre (avec  $U = V(z=0) - V(z=L)$  ).

8. En supposant que le champ électrique créé dans le cuivre est uniforme, donner l'expression littérale du vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  en fonction de  $\sigma_0$  ,  $U$  ,  $L$  et d'un vecteur unitaire.
9. Donner alors l'expression littérale de l'intensité du courant traversant le fil de cuivre dans le sens de  $\vec{u}_z$  et en déduire l'expression littérale de la résistance électrique  $R_{elec}$  de ce fil de cuivre.
10. Application numérique : calculer la résistance linéique (par unité de longueur)  $r$  de ce fil. Préciser l'unité.

### B. Répartition de courant en alternatif

Dans la suite du problème, un courant sinusoïdal d'intensité  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$  ( soit en complexe :  $\underline{I}(t) = \underline{I}_0 \exp(i\omega t)$  avec  $\underline{I}_0 = I_0 \exp(i\varphi)$  ) traverse le fil de cuivre. Dans ce cas, la densité volumique de courant  $\vec{j}$  n'est plus uniforme dans le fil.

11. Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère sous la forme  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$  où  $\vec{j}_D$  est appelé

densité volumique de courant de déplacement.

12. En passant aux grandeurs complexes associées, exprimer  $\vec{j}$  et  $\vec{j}_D$  en fonction notamment de  $\vec{E}$ . Montrer, en comparant les amplitudes réelles de ces deux termes, que l'on peut négliger le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère. ( On donne : la fréquence du courant est inférieure au térahertz ( $1\text{ THz} = 10^{12}\text{ Hz}$ ) ).

Désormais, on commettra cette approximation.

13. En partant de la forme locale de la loi d'Ohm, de l'équation de Maxwell-Ampère et de l'équation de Maxwell-Faraday, établir que le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  satisfait à l'équation différentielle suivante :  $\Delta \vec{j} = \xi \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$  où l'on exprimera  $\xi$  en fonction des constantes du problème.

14. Que devient cette équation quand on passe aux grandeurs complexes associées. On écrit le vecteur densité volumique de courant sous la forme complexe  $\vec{j}(r, t) = \underline{j}_0(r) \exp(i\omega t) \vec{u}_z$  où  $r$  est la distance d'un point  $M$  du fil par rapport à l'axe. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $\underline{j}_0(r)$  :  $\frac{d^2 \underline{j}_0(r)}{dr^2} - 2 \frac{i}{\delta^2} \underline{j}_0(r) = -\frac{1}{r} \frac{d \underline{j}_0(r)}{dr}$ . On précisera l'expression de  $\delta$ .

15. Calculer  $\delta$  à la fréquence de  $1\text{ GHz}$ . Comparer cette grandeur au rayon du fil de cuivre.

### C. Résistance du fil en alternatif

La résolution de l'équation différentielle obtenue ci-dessus n'est pas demandée. On admettra donc que la densité de courant diminue lorsque l'on se rapproche de l'axe du cylindre (lorsque le rayon  $r$  diminue). La distance caractéristique sur laquelle se réalise cette décroissance est naturellement  $\delta$ .

On propose donc le modèle suivant : la conductivité électrique est une fonction exponentielle de la distance  $r$  :  $\sigma(r) = \sigma_0 \exp\left(\frac{r-R}{\delta}\right)$ .

16. Tracer l'allure de la fonction  $\sigma(r)$ . Pour préciser la courbe, on étudiera et on tracera la tangente à la courbe en  $r=R$ . Quelle est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses ?

17. Justifier le fait que, en haute fréquence, on utilise des câbles formés de multiples brins de cuivre très fins isolés électriquement les uns des autres (appelés fils de Litz). Justifier aussi le fait que l'on recouvre les conducteurs en cuivre des circuits imprimés d'ordinateurs d'une mince pellicule d'argent.

On se propose maintenant de calculer la résistance du fil avec le modèle de conductivité variable  $\sigma(r)$ . On découpe la section circulaire du fil de cuivre en éléments de surface annulaires de largeur  $dr$ . On découpe ainsi le fil en éléments de volume ( voir *figure 2* ).

18. Quelle est la conductance électrique élémentaire  $dG$  d'un tel élément de volume ? On l'exprimera en fonction de  $r$ ,  $\sigma(r)$ ,  $dr$  et  $L$ .

19. Comment sont branchés entre eux ces éléments de volume ? En déduire la conductance totale

$G$  du fil en fonction de  $\delta$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $\sigma_0$ . Simplifier en tenant compte des ordres de grandeur. Commenter le résultat obtenu. Quelle serait la résistance du fil si tout le courant passait uniformément dans une peau d'épaisseur  $\delta$  en surface.

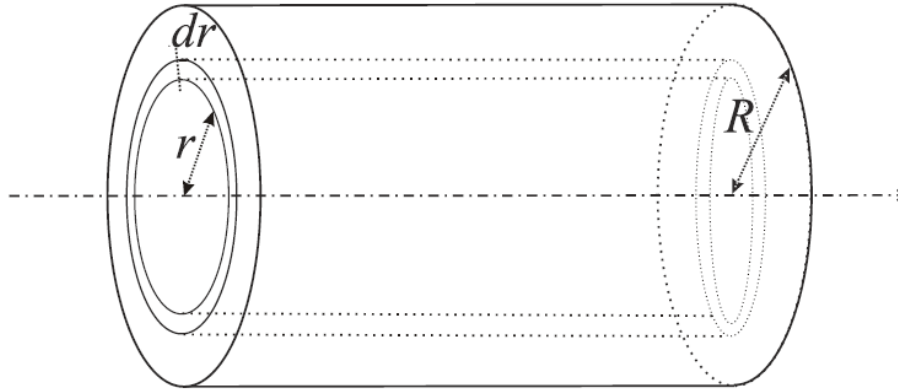


Figure 2 : découpage en volumes élémentaires

### III. Effet de peau en thermodynamique

Soit un milieu homogène de conductivité thermique  $\lambda$ , de masse volumique  $\rho$  et de capacité thermique massique à pression constante  $c$  remplissant le demi-espace  $z > 0$ . Le problème est invariant par toute translation selon  $Ox$  et  $Oy$ .

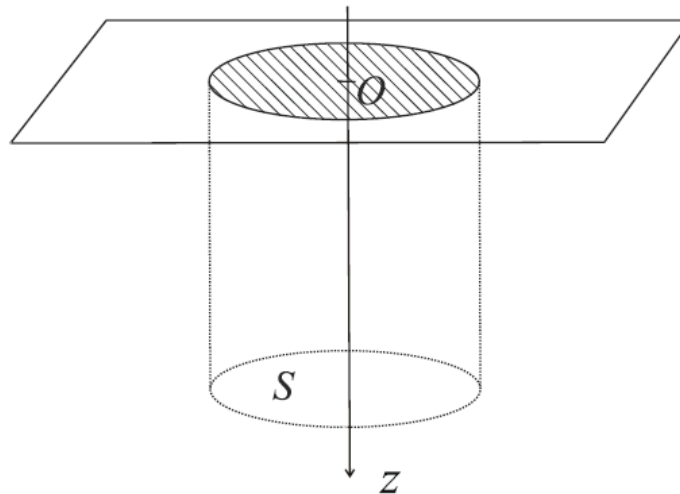


Figure 3 : géométrie du milieu semi-infini

La température  $T(z, t)$  dans le milieu étudié vérifie l'équation  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ .

20. Quelle est l'unité de la quantité  $a$  ?

Le milieu homogène est un sol. On s'intéresse à des variations de température sinusoïdales dans le temps dont on notera  $\omega$  la pulsation. La notation complexe sera une nouvelle fois utilisée.

21. Justifier le fait que l'on puisse se limiter à l'étude de variations sinusoïdales de température.
22. Dans le sol, on recherche une solution sous la forme  $T(z, t) = T_0 + \text{Re}(\underline{f}(z)\exp(i\omega t))$ .  
Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{f}(z)$ , fonction a priori à valeurs complexes.
23. En introduisant la grandeur  $\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ , trouver l'expression générale physiquement acceptable de  $\underline{f}(z)$  en tenant compte du domaine de définition de  $z$  entre zéro et l'infini. On devra éliminer l'une des deux solutions obtenues dont on justifiera qu'elle n'a ici pas de sens physique.
24. Écrire finalement  $T(z, t)$  en introduisant deux constantes supplémentaires qu'on ne cherchera pas à déterminer.
25. Pour le sol, on donne  $a = 2 \cdot 10^{-7}$  unités S.I.. Calculer la valeur numérique de  $\delta$  dans les cas où l'on s'intéresse à des variations journalières de la température puis dans le cas où l'on s'intéresse à des variations annuelles de la température.
26. Il est d'usage d'enterrer les canalisations à au moins 80 centimètres de profondeur. Justifier.
-

Réponses

L'expérience originelle de Fourier

1)

$$\vec{\phi}_{\text{CONDUCTION}} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$$

$\uparrow$  densité volumique de courant thermique de conduction       $\uparrow$  conductivité thermique       $\uparrow$  gradient de T  
 $\text{W.m}^{-2}$                                    $\text{W.K}^{-1}\text{m}^{-1}$                                    $\text{K.m}^{-1}$

2)

Le signe moins

dans la loi de Fourier indique que le transport spontané de "chaleur" s'effectue du "chaud" vers le "froid" (en sens contraire du gradient T) conformément au deuxième principe de la thermodynamique.

3)

Thermique	électrique
$\Phi$	I (intensité en A)
$\vec{\phi}_{\text{CONDUCTION}}$	$\vec{\phi}_{\text{ELECTRIQUE}}$ (vecteur densité de courant électrique volumique en $\text{A.m}^{-2}$ )
$\lambda$	$\gamma$ (conductivité électrique en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )
T	V (potentiel électrique en V)
$-\vec{\text{grad}} T$	$\vec{E}$ (champ électrique en $\text{V/m}$ )
$(\vec{\phi}_{\text{CONDUCTION}} = -\lambda \vec{\text{grad}} T)$	$(\vec{\phi}_{\text{ELECTRIQUE}} = \gamma \vec{E})$
	cf $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ $= \gamma (-\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$ et si $\vec{E}_m = 0$ alors $\vec{j} = -\gamma \vec{\text{grad}} V$ analogie entre $-\vec{\text{grad}} T$ et $-\vec{\text{grad}} V$ )

4)

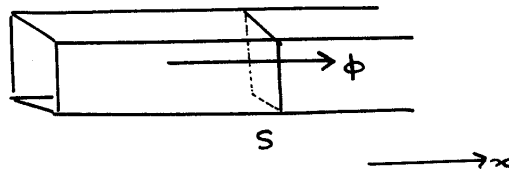
→ On donne  
donc

$$T = T(x, t)$$

$$\begin{aligned}\vec{j} &= -\lambda \vec{\text{grad}} T \\ &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x\end{aligned}$$

$$\vec{j} = j(x, t) \vec{u}_x$$

→



Le flux  $\phi$ , compté positivement selon  $x$ , à travers une section droite  $S$  vaut :

$$\begin{aligned}\phi_{(x,t)} &= \iint_S \vec{j} \cdot dS \vec{u}_x \\ &= \iint_S j(x, t) dS\end{aligned}$$

$$\phi_{(x,t)} = j(x, t) S$$

→ Bilan enthalpique en  $x, t$   
(pour le volume élémentaire entre  $x$  et  $x+dx$   
pour la durée élémentaire entre  $t$  et  $t+dt$ )

$$dH_p = S^2 Q_p$$

$$= S^2 Q_{\text{recu}} + \cancel{S^2 Q_{\text{produit}}}$$

nul car  
absence de  
sources

$$dm c \frac{\partial T}{\partial t} dt = (\phi_{(x,t)} - \phi_{(x+dx,t)}) dt$$

$$\cancel{p S dx} c \cancel{\frac{\partial T}{\partial t} dt} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cancel{dx} \cancel{dt}$$

$$\cancel{p} \cancel{S} c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$p c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{pc}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

5) On introduit la diffusivité :  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

La dimension de  $D$  est obtenue facilement :

$$\frac{[T]}{[L]^2} = \frac{1}{[D]} \frac{[T]}{[T]}$$

donc

$$[D] = [L]^2 [T]^{-1}$$

( $D$  en  $m^2 s^{-1}$ )

Pour obtenir un temps caractéristique, on écrit

$$D = d^2 \tau_d^{-1}$$

$$\tau_d = \frac{d^2}{D}$$

$$\tau_d = d^2 \frac{\rho c}{\lambda}$$

6) A.N.

$$\begin{array}{ll} d_1 = 0,10 \text{ m} & \tau_{d_1} = 7,5 \text{ minutes} \\ d_2 = 0,50 \text{ m} & \tau_{d_2} = 3 \text{ heures} \end{array}$$

Le temps de diffusion est proportionnel à  $d^2$ .  
Si  $d \times 5$ ,  $\tau \times 25$ .

7) En régime stationnaire

$T = T(x)$  et l'équation 4) devient :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$$\begin{array}{l} T = Ax + B \\ \text{C.L.} \quad \left| \begin{array}{l} T_1 = A \cdot 0 + B \\ T_2 = A L + B \end{array} \right. \end{array}$$

$$T = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{L} x$$

8)

$$\vec{j} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$$

$$\vec{j} = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{L} \vec{u}_x$$

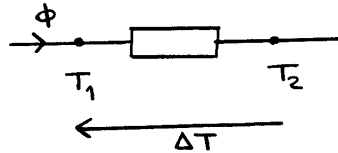
(indépendant de  $x$ )

$$\phi_{(x)} = f(x) S$$

$$\phi = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2)$$

(indépendant de S)

9)



$$\Delta T = R_{th} \phi$$

$$(T_1 - T_2) = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S} \phi$$

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}$$

10)

$$T = T(\theta, r)$$

avec

$$\vec{j} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$$

$$\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial r} \\ r \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial \phi} \end{array} \right.$$

donc

$$\vec{j} = - \underbrace{\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}}_j \vec{u}_\theta$$

Vérification de dimension

$$\begin{array}{lcl} \text{unités} & \vec{j} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} & \frac{\partial T}{\partial \theta} \text{ en } K \text{ rad}^{-1} \\ & \nearrow \quad \nwarrow & \nearrow \quad \nwarrow \\ W m^{-2} & W m^{-1} K^{-1} & r \text{ en } m \end{array}$$

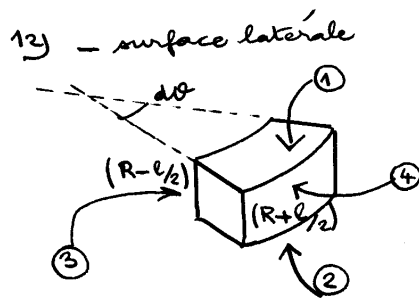
dimension (le radian ne correspond pas à une dimension)

$$\frac{[Puissance]}{L^2} \stackrel{?}{=} \frac{[Puissance]}{L \theta} \frac{1}{L} \theta$$

exact

- 11) Pour que les thermomètres indiquent la température du tore, on remplit les loges avec du mercure pour qu'il y ait contact parfait. De plus le mercure est un bon conducteur (métal liquide).





$$dS_1 = \int_{r=R-\frac{l}{2}}^{R+\frac{l}{2}} r dr d\theta = \frac{(R+\frac{l}{2})^2 - (R-\frac{l}{2})^2}{2} d\theta$$

$$= R l d\theta$$

$$dS_2 = \text{idem} = R l d\theta$$

$$dS_3 = \int_{z_{\text{moyen}}-\frac{l}{2}}^{z_{\text{moyen}}+\frac{l}{2}} (R-\frac{l}{2}) d\theta dz = (R-\frac{l}{2}) l d\theta$$

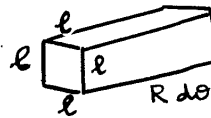
$$dS_4 = \int_{z_{\text{moyen}}-\frac{l}{2}}^{z_{\text{moyen}}+\frac{l}{2}} (R+\frac{l}{2}) d\theta dz = (R+\frac{l}{2}) l d\theta$$

$$dS_{\text{latéral}} = dS_1 + dS_2 + dS_3 + dS_4$$

$$= l d\theta (2R + (R-\frac{l}{2}) + (R+\frac{l}{2}))$$

$$dS_{\text{lat}} = 4 l R d\theta$$

(comme pour un parallélépipède rectangle de périmètre de base  $4l$  et de hauteur  $R d\theta$ )



- volume

$$r = R + \frac{l}{2} \quad z = z_{\text{moyen}} + \frac{l}{2}$$

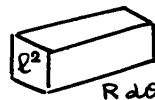
$$dV = \int \int \int dr r d\theta dz$$

$$r = R - \frac{l}{2} \quad z = z_{\text{moyen}} - \frac{l}{2}$$

$$= \frac{(R+\frac{l}{2})^2 - (R-\frac{l}{2})^2}{2} l d\theta$$

$$dV = l^2 R d\theta$$

(comme pour un parallélépipède rectangle de surface de base  $l^2$  et de hauteur  $R d\theta$ )



13) On compte positivement  $\Phi$  selon  $+\vec{u}_\theta$

$$\Phi = \iint \vec{r} \cdot dS \vec{u}_\theta$$

$$\downarrow$$

$$dr dz$$

$$z = z_{\text{moyen}} + \frac{l}{2} \quad r = R + \frac{l}{2}$$

$$= \int_{z = z_{\text{moyen}} - \frac{l}{2}}^{z = z_{\text{moyen}} + \frac{l}{2}} \int_{r = R - \frac{l}{2}}^{r = R + \frac{l}{2}} -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} dr dz$$

$$\boxed{\phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \ln \frac{R + \frac{l}{2}}{R - \frac{l}{2}} l}$$

$$= -\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \ln \frac{1 + \frac{l}{2R}}{1 - \frac{l}{2R}} l$$

approximation:

$$\underbrace{\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}_{\approx \ln(1+2\varepsilon)} \approx 2\varepsilon = \frac{l}{R}$$

$$\boxed{\phi = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} l^2}$$

ce qui revient à faire:

$$\phi = \gamma l^2$$

(γ étant pris au centre de la section, quand r=R)

14) bilan enthalpique:

$$d^2 H = S^2 Q_{\text{regu}} + \cancel{S^2 Q_{\text{produit}}}$$

$$\downarrow$$

$$S^2 Q_{\text{regu}} \text{ (conduction)} + S^2 Q_{\text{regu}} \text{ (conduction-convection)}$$

$$\rho m c \frac{\partial T}{\partial t} dt = (\phi_{(\theta, t)} - \phi_{(\theta + d\theta, t)}) dt - h (T - T_e) dS_{\text{lat}} dt$$

$$\rho dV c \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta dt - h (T - T_e) dS_{\text{tot}} dt$$

$$\rho l^2 R d\theta c \frac{\partial T}{\partial t} dt = \frac{\lambda}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} l^2 d\theta dt - h (T - T_e) 4 l R d\theta dt$$

$$\frac{\rho R^2 c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4 h R^2}{\lambda l} (T - T_e)$$

finalement:

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{4 h}{\lambda} \frac{R^2}{l} (T - T_e) + \frac{\rho c}{\lambda} R^2 \frac{\partial T}{\partial t}}$$

15) On pose  $a = \sqrt{\frac{h\lambda}{4h}}$

L'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{R^2}{a^2} (T - T_e) + \frac{P_c}{\lambda} R^2 \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

↓ dimensions  
température      idem

donc  $\frac{R}{a}$  est sans dimension et

$a$  est une longueur

En régime stationnaire :

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} = \frac{R^2}{a^2} (T - T_e)$$

16) Equation caractéristique :

$$r^2 = \frac{R^2}{a^2}$$

$$r = \pm \frac{R}{a}$$

En prenant comme variable  $T - T_e$

$$(T - T_e) = A e^{\frac{R}{a}\theta} + B e^{-\frac{R}{a}\theta}$$

17)

$T(\theta)$  est une fonction paire de  $\theta$

$\theta$  est proportionnel à la dérivée de  $T$   
c'est donc une fonction impaire de  $\theta$

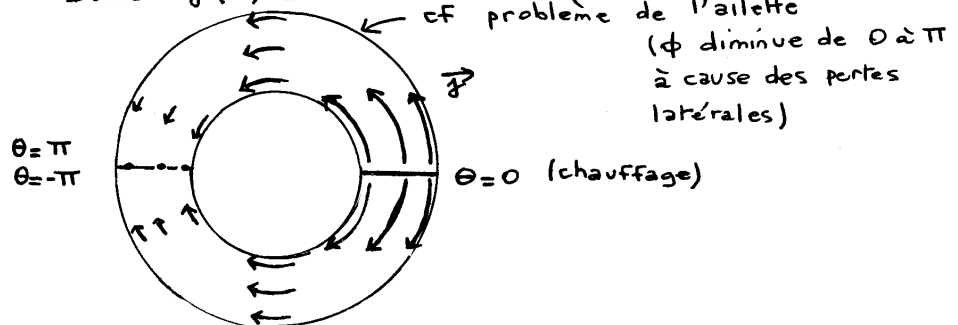
$$\text{Donc } \theta(-\theta) = -\theta(\theta)$$

Ces deux grandeurs sont périodiques.

$$\text{On a donc } T(-\pi) = T(\pi)$$

$$\text{on a aussi } \begin{cases} \theta(-\pi) = \theta(\pi) & (\text{périodicité}) \\ \theta(-\pi) = -\theta(\pi) & (\text{imparité}) \end{cases}$$

$$\text{Donc } \theta(\pi) = 0$$



$$\vartheta(\theta=0^+) = -\vartheta(\theta=0^-)$$

$$\left(\frac{dT}{d\theta}\right)_{0^+} = -\left(\frac{dT}{d\theta}\right)_{0^-} \quad (\neq 0)$$

$$T \text{ n'est pas dérivable en } 0 \quad (\text{cf source de chauffage})$$

Par contre, en  $\theta = \pi$  ou  $-\pi$ , il n'y a pas de source

$$T \text{ est dérivable en } \pm\pi$$

$$\left(\frac{dT}{d\theta}\right)_{\pm\pi} = 0 \quad (\text{cf vu précédemment})$$

13) on étudie  $0 \leq \theta \leq \pi$

$$T - T_e = A e^{\frac{R}{2}\theta} + B e^{-\frac{R}{2}\theta}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{R}{2} (A e^{\frac{R}{2}\theta} - B e^{-\frac{R}{2}\theta})$$

C.L.

$$\text{en } 0 : T_c - T_e = A + B$$

$$\text{en } \pi : 0 = \frac{R}{2} (A e^{\frac{R}{2}\pi} - B e^{-\frac{R}{2}\pi})$$

$$\text{d'où } B = A e^{\frac{2R\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} T_c - T_e &= A + A e^{\frac{2R\pi}{2}} \\ &= e^{\frac{R\pi}{2}} A (e^{-\frac{R\pi}{2}} + e^{\frac{R\pi}{2}}) \end{aligned}$$

$$A = \frac{(T_c - T_e) e^{-\frac{R\pi}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{R\pi}{2}}$$

$$B = \frac{(T_c - T_e) e^{\frac{R\pi}{2}}}{2 \operatorname{ch} \frac{R\pi}{2}}$$

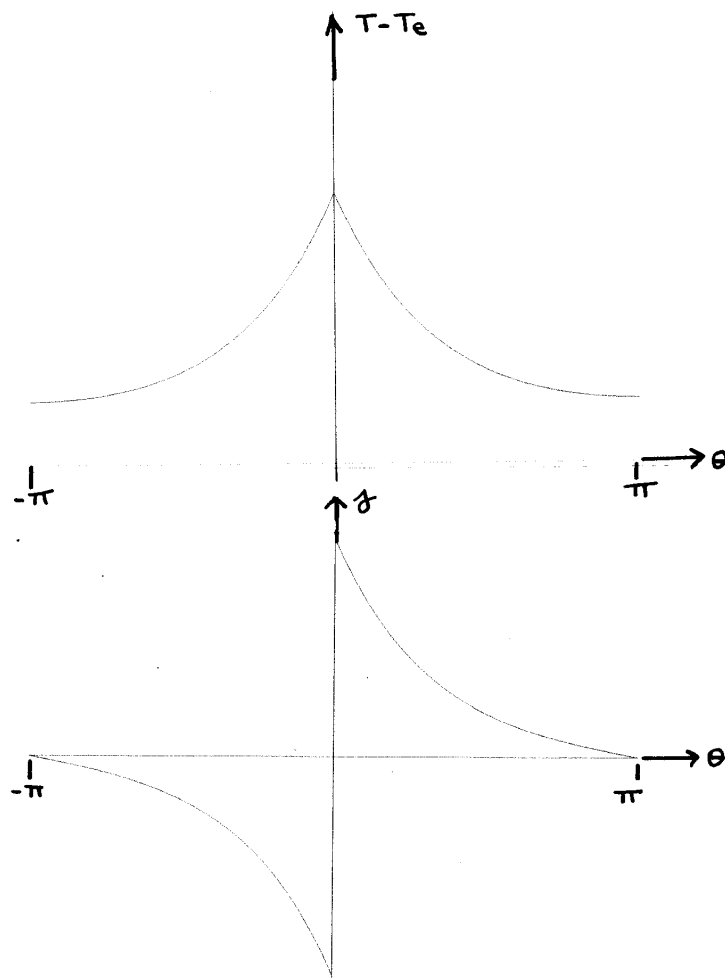
$$(T - T_e) = \frac{(T_c - T_e)}{2 \operatorname{ch} \frac{R\pi}{2}} e^{-\frac{R\pi}{2}} e^{\frac{R}{2}\theta} + e^{\frac{R\pi}{2}} e^{-\frac{R}{2}\theta}$$

$$(T - T_e) = (T_c - T_e) \frac{\operatorname{ch} \frac{R}{2}(\pi - \theta)}{\operatorname{ch} \frac{R}{2}\pi}$$

remarque

Solution complète pour  $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$$(T - T_e) = (T_c - T_e) \frac{\cosh \frac{R}{2}(\pi - |\theta|)}{\cosh \frac{R}{2}\pi}$$



13)

$$\Delta T = \Delta T_{\max} \frac{\cosh \frac{R}{2}(\pi - \theta)}{\cosh \frac{R}{2}\pi}$$

on a :

$$\Delta T_1 = \Delta T_{\max} \frac{\cosh \frac{R}{2}(\pi - \theta_2 + \Delta \theta)}{\cosh \frac{R}{2}\pi}$$

$$\Delta T_2 = \Delta T_{\max} \frac{\cosh \frac{R}{2}(\pi - \theta_2)}{\cosh \frac{R}{2}\pi}$$

$$\Delta T_3 = \Delta T_{\max} \frac{\operatorname{ch} \frac{R}{2} (\pi - \theta_2 - \Delta \theta)}{\operatorname{ch} \frac{R}{2} \pi}$$

L'expression de  $q$  est donc

$$\begin{aligned} q &= \frac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{\Delta T_2} \\ &= \frac{\operatorname{ch} \frac{R}{2} (\pi - \theta_2 + \Delta \theta) + \operatorname{ch} \frac{R}{2} (\pi - \theta_2 - \Delta \theta)}{\operatorname{ch} \frac{R}{2} (\pi - \theta_2)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{R}{2} (\pi - \theta_2)} \frac{1}{2} \left( \frac{\exp \frac{R}{2} (\pi - \theta_2 + \Delta \theta)}{\exp - \frac{R}{2} (\pi - \theta_2 + \Delta \theta)} + \frac{\exp \frac{R}{2} (\pi - \theta_2 - \Delta \theta)}{\exp - \frac{R}{2} (\pi - \theta_2 - \Delta \theta)} \right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{R}{2} (\pi - \theta_2)} + \left( \frac{\exp \frac{R}{2} (\pi - \theta_2)}{\exp - \frac{R}{2} (\pi - \theta_2)} \frac{\operatorname{ch} \frac{R}{2} \Delta \theta}{\operatorname{ch} \frac{R}{2} \Delta \theta} \right) \\ &= \frac{\operatorname{ch} \frac{R}{2} (\pi - \theta_2)}{\operatorname{ch} \frac{R}{2} (\pi - \theta_2)} \quad 2 \quad \operatorname{ch} \left( \frac{R}{2} \Delta \theta \right) \end{aligned}$$

$$q = 2 \operatorname{ch} \left( \frac{R}{2} \Delta \theta \right)$$

20) A.N.

$$q = 2,24$$

théorique

21)

$$\tau_d = \frac{\rho c d^2}{\lambda} \quad \text{avec } d = \pi R$$

A.N.

$$d \approx 50 \text{ cm}$$

$$\tau_d \approx 3 \text{ h (calculé précédemment)}$$

De "l'ordre de grandeur" du temps de 2h attendu par Fourier. Sans doute faudrait-il être plus précis sur la définition et la signification de  $\tau_d$ .

22) A.N.

$$q_{\exp} = \frac{(66 - 17 \frac{2}{3}) + (44 - 17 \frac{2}{3})}{(50 \frac{2}{3} - 17 \frac{2}{3})}$$

$$q_{\exp} = 2,26$$

Accord de bonne qualité semble-t-il. Les mesures de températures étant à  $\frac{1}{3}$  de degré. Il faudrait faire un calcul d'erreur.

23) En l'absence de fuites latérales, l'équation 14) devient

$$\frac{\partial^2 T(\theta, t)}{\partial \theta^2} = \frac{\rho c}{\lambda} R^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

24) La température finale (on aura alors  $\frac{\partial T_{\infty}}{\partial t} = 0$ ) vérifiera donc

$$\frac{d^2 T_{\infty}(\theta)}{d\theta^2} = 0$$

(on aurait d'ailleurs  $T_{\infty}$  uniforme)

En faisant la différence, on comprend qu'on doit s'intéresser à  $T(\theta, t) - T_{\infty}(\theta)$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (T(\theta, t) - T_{\infty}) = \frac{\rho c}{\lambda} R^2 \frac{\partial}{\partial t} (T(\theta, t) - T_{\infty})$$

$$g(t) \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = \frac{\rho c}{\lambda} R^2 f(\theta) \frac{dg(t)}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{\lambda}{\rho c R^2} \frac{\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2}}{f(\theta)}}_{F(\theta)} = \underbrace{\frac{\frac{dg(t)}{dt}}{g(t)}}_{G(t)}$$

25)  $\rightarrow F(\theta) = G(t) \quad \forall \theta \text{ et } \forall t$

Pour un  $\theta$  donné, on devra donc avoir

$$G(t_1) = G(t_2) = G(t_3) = \dots = F(\theta)$$

donc  $G(t)$  est une constante indépendante de  $t$

Pour un  $t$  donné, on aura de même

$F(\theta)$  est une constante indépendante de  $\theta$

$$F(\theta) = G(t) = \text{constante}$$

$\rightarrow \frac{\frac{dg}{dt}}{g} = \text{constante}$

$\downarrow$  dimension  $\frac{[g]/T}{[g]}$

La constante est donc un  $[\text{temps}]^{-1}$

→ Si la constante est positive,  $g$  va diverger vers  $\pm \infty$ .  
 Impossible : la température ne peut partir vers l'infini.  
 Le texte l'indique d'ailleurs :  $g(t)$  tend vers 0 si  $t \rightarrow \infty$ .

Remarque

→ Soit  $\frac{dg}{dt} = \frac{g}{\tau}$   
 $g = g_0 e^{\frac{t}{\tau}}$  impossible.  
 → Soit  $\frac{dg}{dt}$  et  $g$  du même signe  
 $g \frac{dg}{dt} > 0$   
 $\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(g^2) > 0$   
 $g^2$  augmente indéfiniment  
 impossible.

26)

$$\frac{\frac{dg}{dt}}{g} = -\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{dg}{dt} + \frac{g}{\tau} = 0$$

$$g = g_0 e^{-t/\tau}$$

27)

$$\frac{\frac{d^2 f}{d\theta^2}}{f} = -\frac{1}{\frac{\lambda \tau}{\rho c}} R^2$$

↓  
 dimension rien  
 $\frac{[f] / [\text{radian}]}{[f]}$   
 sans dimension

$\frac{\lambda \tau}{\rho c}$  est donc une distance au carré

On pose  $d^2 = \frac{\lambda}{\rho c} \tau$



$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + \frac{R^2}{d^2} f = 0$$

$$f(\theta) = \alpha \cos \frac{R}{d} \theta + \beta \sin \frac{R}{d} \theta$$

( $\alpha$  et  $\beta$  : deux constantes arbitraires)

28)  $T(\theta, t)$  est paire en  $\theta$  donc  $\beta$  est nul  
 $f(\theta, t)$  est nul en  $\pi$

donc  $f'(\theta)$  nul en  $\pi$

$$f(\theta) = \alpha \cos\left(\frac{R}{d} \theta\right)$$

$$f'(\theta) = -\alpha \frac{R}{d} \sin\left(\frac{R}{d} \theta\right)$$

$$f'(\pi) = -\alpha \frac{R}{d} \sin\left(\frac{R}{d} \pi\right) = 0$$

Si on fait  $\alpha = 0$ , il ne reste rien de la solution étudiée.  
 On fait alors

$$\frac{R}{d} \pi = n\pi \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$d_n = \frac{R}{n}$$

Finalement, pour ce mode  $n$  (avec  $\alpha g_0 = A_n$ )

$$T_n - T_\infty = A_n \cos(n\theta) \exp -t/\tau_n$$

$$\text{avec } \tau_n = \frac{\rho C}{\lambda} d_n^2$$

$$\tau_n = \frac{\rho C}{\lambda} \frac{R^2}{n^2}$$

29) Les différents modes sont des solutions indépendantes, vérifiant chacune les conditions aux limites ( $f$  nul en  $\theta = 0$  et en  $\theta = \pm\pi$ )

La solution générale s'écrit donc comme une somme. Elle vérifie aussi les C.L.

$$T - T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \exp -t/\tau_n$$

30) Il faut alors vérifier les conditions initiales.

En  $t=0$

$$(T_{|\theta, t=0} - T_{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta$$

développement en série  
de Fourier d'une fonction paire  $F(\theta)$

avec

$$A_n = \frac{1}{2 \times 2\pi} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=+\pi} (T_{|\theta, t=0} - T_{\infty}) \cos(n\theta) d\theta$$

31)

$$\tau_1 = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{R^2}{1} = 1143 \text{ s}$$

$$\tau_2 = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{R^2}{2^2} = 286 \text{ s}$$

$$\tau_3 = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{R^2}{3^2} = 127 \text{ s}$$

Les modes sont en  $e^{-t/\tau}$  donc les modes élevés disparaissent bien plus rapidement ( $\tau$  en  $\frac{1}{n^2}$ )

32) Finalement, il ne reste que le premier mode :

$$T_{|\theta, t} - T_{\infty} \simeq A_1 \cos \theta \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$$

qui est bien proportionnel à  $\cos \theta$

## Effet de peau

$$1) \quad \vec{j} = -\lambda \vec{\text{grad}} T \quad \text{donc } \lambda \text{ en } \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{W.m}^{-2} & & \text{K.m}^{-1} \end{array}$$

$$dm = \rho \, d\tau \quad \text{donc } \rho \text{ en } \text{kg.m}^{-3}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{kg} & & \text{m}^3 \end{array}$$

$$dh = c \, dT \quad \text{donc } c \text{ en } \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{J.kg}^{-1} & & \text{K} \end{array}$$

$$2) \quad \frac{\lambda}{\rho c} \text{ en } \frac{\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}}{\text{kg.m}^{-3} \cdot \text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}} \quad \frac{\lambda}{\rho c} \text{ en } \text{m}^2.\text{s}^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow \\ & & \text{W.s} \end{array}$$

$$\omega \text{ en } \underbrace{\text{rad.s}^{-1}}_{\text{pas de dimension}} \text{ donc}$$

$$\sqrt{\frac{2}{(\frac{\rho c}{\lambda}) \omega}} \text{ a pour dimension } \left( \frac{\text{L}^2 \text{T}^{-1}}{\text{T}^{-1}} \right)^{1/2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{(\frac{\rho c}{\lambda}) \omega}} \text{ est une longueur (voir } \delta \text{ en thermique)}$$

3) Loi d'Ohm:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Equation de Maxwell-Ampère:  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

4) Donc dans un conducteur ohmique:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

au niveau des dimensions:

$$[\mu_0 \sigma \vec{E}] = \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

$$[\mu_0 \sigma] [E] = \frac{1}{[c]^2} \frac{[E]}{[T]}$$

$$[\mu_0 \sigma] = \frac{1}{\text{L}^2 \text{T}^{-2} \text{T}}$$

$$[\mu_0 \sigma] = \text{L}^{-2} \text{T}^1$$

$$\text{or } [\omega] = T^{-1}$$

$$\text{donc } [\mu_0 \sigma \omega] = L^{-2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \sigma \omega}} \text{ est une longueur}$$

(voir  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$  en électromagnétisme)

5)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2i}{\delta^2} y = 0$$

$$r^2 = \frac{2i}{\delta^2}$$

$$= \frac{2}{\delta^2} \exp(i\frac{\pi}{2})$$

$$r = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \exp(i\frac{\pi}{4})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \pm \frac{1}{\delta} (1+i)$$

6)

$$y(x) = A \exp(r_1 x) + B \exp(r_2 x)$$

$$y(x) = A \exp\left((1+i)\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-(1+i)\frac{x}{\delta}\right)$$

7) Idem mais  $i \rightarrow -i$ 

$$y(x) = A \exp\left((1-i)\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-(1-i)\frac{x}{\delta}\right)$$

8) Puisque le champ est uniforme  $\frac{dV}{dz} = \frac{\Delta V}{\Delta z}$ 

$$\vec{E} = - \frac{\Delta V}{\Delta z} \vec{u}_z$$

$$= - \frac{V(z=0) - V(z=L)}{0 - L} \vec{u}_z$$

$$= \frac{U}{L} \vec{u}_z$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \frac{U}{L} \vec{u}_z$$

9)

$$I_{\text{selon } +\vec{u}_z} = \iint_{\text{section}} \vec{J} \cdot dS \vec{u}_z$$

$$I = \sigma_0 \frac{U}{L} \pi R^2$$

$$R_{elec} = \frac{U}{I}$$

$$R_{elec} = \frac{L}{\sigma_0 \pi R^2}$$

10) résistance linéique

$$r = \frac{R_{elec}}{L}$$

$$r = \frac{1}{\sigma_0 \pi R^2}$$

A.N.

$$= \frac{1}{6,2 \cdot 10^7 \pi (0,9 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$r = 6,34 \cdot 10^{-3} \Omega m^{-1}$$

11)

$$\vec{rot B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \underbrace{\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\vec{J}_D} \right)$$

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

12)

$$\vec{J} = \sigma_0 \vec{E}$$

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 i \omega \vec{E}$$

On pourra négliger  $\vec{J}_D$  devant  $\vec{J}$  pour un "bon conducteur",  
il faut pour cela que:

$$\epsilon_0 \omega \ll \sigma_0$$

$$f \ll \frac{\sigma_0}{2\pi \epsilon_0}$$

A.N.

$$f \ll \frac{6,2 \cdot 10^7}{2\pi \cdot 8,84 \cdot 10^{-12}}$$

$$f \ll 1,1 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$

Ici  $f$  est inférieure à  $10^{18} \text{ Hz}$   
donc l'inégalité est parfaitement vérifiée

$$13) \quad \vec{J} = \sigma_0 \vec{E} \quad (1)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (2)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

De (3) avec (1) :  $\vec{\text{rot}} \vec{J} = -\sigma_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

On prend le  $\vec{\text{rot}}$  :  $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{J} = -\sigma_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B}$

avec (2) :  $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{J} = -\sigma_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$

Puis avec :

$$\Delta \vec{J} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{J} - \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{J}$$

$$\Delta \vec{J} = - \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{J}$$

car  $\text{div} \vec{J}$  est nul (prendre la divergence de (2), on sait que  $\text{div} \vec{\text{rot}} = 0$ )

finalment :

$$\Delta \vec{J} - \underbrace{\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}}_{\text{c}_s \text{ (énoncé)}} = \vec{0}$$

14)

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{A} - i \mu_0 \sigma_0 \omega \vec{A} = \vec{0}$$

on projette selon  $\vec{u}_z$  puisque :  $\Delta \vec{A} = \underbrace{\Delta_{xx}}_{\uparrow \text{nul}} \vec{u}_x + \underbrace{\Delta_{yy}}_{\uparrow \text{nul}} \vec{u}_y + \underbrace{\Delta_{zz}}_{\uparrow z} \vec{u}_z$

$$\Delta z - i \mu_0 \sigma_0 \omega z = 0$$

on fait  $z = J_0(r) \exp(i\omega t)$

$$\Delta J_0(r) - i \mu_0 \sigma_0 \omega J_0(r) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dJ_0(r)}{dr} \right) - i \mu_0 \sigma_0 \omega J_0(r) = 0$$

on pose  $s = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dJ_0(r)}{dr} \right) - \frac{2i}{s^2} J_0(r) = 0$$

$$\frac{d^2 J_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_0(r)}{dr} - \frac{2i}{s^2} J_0(r) = 0$$

15) A.N.

$$s = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6,2 \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot 10^9}}$$

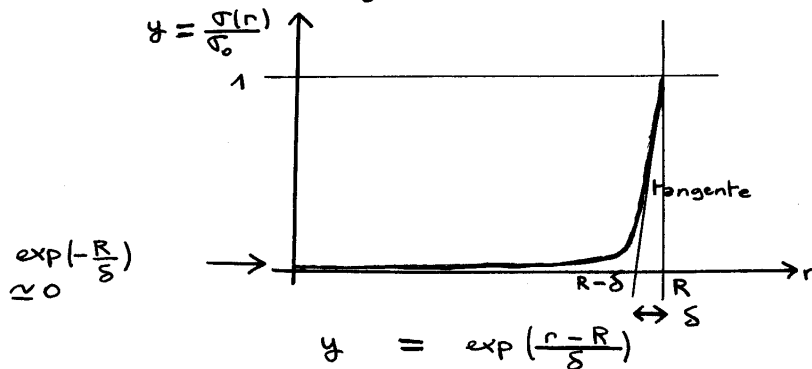
$$s = 2,0 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\begin{array}{ccc} \delta & \ll & R \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0,002 \text{ mm} & & 0,9 \text{ mm} \end{array}$$

16) Le courant passe sous quelques  $\delta$  en surface (épaisseur de peau)

Modèle proposé :

$$\frac{\sigma(r)}{\sigma_0} = \exp\left(\frac{r-R}{\delta}\right)$$



équation de la tangente en  $r=R$  :

$$\rightarrow \frac{dy}{dr} = \frac{1}{\delta} \exp\left(\frac{r-R}{\delta}\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dr}\right)_{r=R} = \frac{1}{\delta}$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{\delta} r + B$$

$$1 = \frac{1}{\delta} R + B$$

$$y - 1 = -\frac{1}{\delta} (R - r)$$

intersection avec l'axe des abscisses :

$$y = 0$$

$$r = R - \delta$$

Remarque :  $\delta \ll R$

La figure ci-dessus n'est pas du tout à l'échelle.

17) Sauf en surface,  $\sigma$  est quasiment. Donc, en haute fréquence :

- Pour augmenter la conduction, il suffit de recouvrir la surface d'argent, meilleur conducteur que le cuivre.
- Pour augmenter la conduction, il suffit tout en gardant le même volume de conducteur d'augmenter la surface.

on utilise alors des câbles multibrins.

remarque



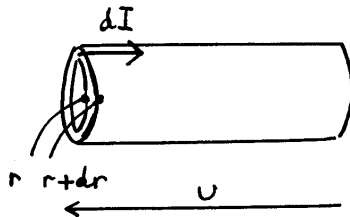
$$\text{1 seul câble : } \left. \begin{array}{l} S = 2\pi r h \\ V = \pi r^2 h \end{array} \right\} \frac{S}{V} = \frac{2}{r}$$



$$\text{N câbles et même volume : } \left. \begin{array}{l} S' = N 2\pi r' h \\ V = N \pi r'^2 h \end{array} \right\} \frac{S'}{V} = \frac{2}{r'} = \frac{2}{\frac{r}{\sqrt{N}}} = \frac{2}{r} \sqrt{N}$$

La surface latérale est multipliée par  $\sqrt{N}$ .  
Donc la conduction sera supérieure.

18)



rappel formules

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$$

$$G = \sigma \frac{S}{L}$$

Ici

$$dG = \frac{\sigma 2\pi r dr}{L}$$

19) Ces éléments sont placés en parallèle ( $U$  commun et  $I = \int dI$ )  
On doit donc sommer les  $dG$ .

$$G = \int_{r=0}^R \frac{\sigma_0 \exp\left(\frac{r-R}{\delta}\right) 2\pi r dr}{L}$$

$$= \frac{2\pi\sigma_0}{L} \exp\left(-\frac{R}{\delta}\right) \int_{r=0}^R \exp\left(\frac{r}{\delta}\right) r dr$$

calcul

On intègre  $\int \exp \frac{r}{\delta} r dr$  par parties.



$$d(uv) = u dv + v du$$

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

soit avec ces notations:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ici

$$\int \underbrace{r}_u \underbrace{\exp \frac{r}{\delta}}_{dv} dr$$

$$= \left[ r \delta \exp \frac{r}{\delta} \right] - \int \delta \exp \frac{r}{\delta} dr$$

$$= \left[ r \delta \exp \frac{r}{\delta} \right] - \left[ \delta^2 \exp \frac{r}{\delta} \right]$$

finallement

$$\int_{r=0}^R \exp\left(\frac{r}{\delta}\right) r dr = \left[ r \delta \exp \frac{r}{\delta} - \delta^2 \exp \frac{r}{\delta} \right]_0^R$$

$$= \left[ \delta \exp \frac{r}{\delta} (r - \delta) \right]_0^R$$

$$= \delta \exp \frac{R}{\delta} (R - \delta) + \delta^2$$

$$G = \frac{2\pi\sigma_0}{L} \delta \left( (R - \delta) + \delta e^{-R/\delta} \right)$$

$\delta \ll R$  négligeable

$$G = \frac{\sigma_0 2\pi R \delta}{L}$$

Si le courant passait uniformément sous l'épaisseur  $\delta$ , on obtiendrait

$$R = \frac{1}{\sigma_0} \frac{L}{\delta} \xrightarrow{L \rightarrow 2\pi R \delta}$$

Ce qui correspond au résultat obtenu.

La résistance est la même que si le courant passait uniformément sous l'épaisseur  $\delta$

20)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

dimension

$$\frac{[\theta]}{[L]^2} = \frac{1}{[a]} \frac{[\theta]}{[T]}$$

$$[a] = L^2 T^{-1}$$

$$a \text{ en } m^2 s^{-1}$$

21) On va étudier l'effet des variations journalières de température (question 25) ou des variations annuelles. On va donc étudier des grandeurs périodiques. On pourra décomposer en série de Fourier (donc selon des fonctions sinusoïdales)

remarque

on verra, (futur cours de maths), que la conclusion restera la même pour des fonctions non périodiques par utilisation de la transformée de Fourier

22)

$$T(z, t) = T_0 + f(z) \exp(i\omega t)$$

doit vérifier

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} \exp(i\omega t) = \frac{1}{a} i\omega f(z) \exp(i\omega t)$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{i\omega}{a} f(z)$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = i \frac{2}{s^2} f(z)$$

23) La solution pour  $f(z)$  a été donnée en 6)

$$\begin{aligned} f(z) &= A \exp\left((1+i)\frac{z}{s}\right) + B \exp\left(-(1+i)\frac{z}{s}\right) \\ &= A \exp\frac{z}{s} \exp i\frac{z}{s} + B \exp -\frac{z}{s} \exp -i\frac{z}{s} \end{aligned}$$

On remarque puisque  $z$  varie entre 0 et l'infini que le facteur  $\exp \frac{z}{\delta}$  tendra alors vers l'infini. La température pourrait tendre au bout vers l'infini, ce qui n'a pas de sens physique. On fera  $A=0$  pour éliminer cette solution qui n'a pas de sens physique.

$$I(z) = B \exp -\left(\frac{z}{\delta}\right) \exp -\left(i \frac{z}{\delta}\right)$$

24)

$$I(z, t) = T_0 + B \exp -\frac{z}{\delta} \exp i(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

$\hookrightarrow B \exp i\varphi_B$

$$T(z, t) = T_0 + B \exp -\frac{z}{\delta} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi_B)$$

25) Pour l'alternance jour - nuit ( $T = 1$  jour)

$$\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 2 \cdot 10^{-7}}{2\pi / (24 \times 3600)}}$$

$$\delta = 7,4 \text{ cm}$$

Pour l'alternance des saisons ( $T = 1$  an)

$$\delta' = \delta \sqrt{365,25}$$

$$\delta' = 1,42 \text{ m}$$

26) Au bout de quelques  $\delta'$  on ne sent plus les variations de température de surface. Dans une cave, enterrée sous quelques m, on ne sentira pas l'alternance été - hiver.

Pour une canalisation, avec  $z = 80 \text{ cm}$ 

$$\exp\left(-\frac{z}{\delta'}\right) = \exp -\frac{0,8}{1,42}$$

$$= 57\%$$

On ne ressentira que 57% des variations de température été - hiver. Les tuyaux d'eau ne gèleront pas.