

ONDE OU PARTICULE, LE PHOTON DÉFIE TOUJOURS L'INTUITION

1 Onde électromagnétique dans le vide

1.1.

La conservation de la charge électrique est l'un des postulats de l'électromagnétisme, cherchons l'équation traduisant cette conservation. Pour cela, on utilise l'équation de Maxwell-ampère et celle de Maxwell-Gauss.

- On sait que $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = 0$, soit

$$0 = \mu_0 \text{div} \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \implies 0 = \mu_0 \text{div} \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{E}) \quad (1)$$

- On remplace $\text{div} \vec{E}$ par $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on obtient

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

1.2.

Les équations de poisson relie les potentiels aux sources du champ électromagnétique

- Pour \vec{A} :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

De l'équation (M.A), et de $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$, nous avons

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

De la jauge de Lorentz, nous avons :

$$\text{div} \vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

soit

$$\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{\text{grad}} V) - \Delta \vec{A}$$

et puisque $-\vec{\text{grad}} V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, on en déduit après simplification l'équation de poisson pour \vec{A}

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad (3)$$

- Pour V :

De même et à l'aide de l'équation de M.G, de jauge de Lorentz et de $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, on montre que

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

1.3.

Le milieu est non chargé ($\rho = 0$) et non conducteur ($\vec{j} = \vec{0}$).

Pour obtenir l'équation de propagation du champ électrique \vec{E} , on se sert de l'identité vectorielle suivante :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} \quad (5)$$

soit

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = -\Delta\vec{E} \quad \text{puisque} \quad \text{div}\vec{E} = 0 \quad (6)$$

et on calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}\vec{B}) \quad (7)$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère on obtient

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (8)$$

Il vient finalement l'équation de propagation du champ électrique

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (9)$$

1.4.**1.4.1.**

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_x \quad (10)$$

Le champ électrique ci-dessus est associée à une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens des z croissants, cette onde est polarisée rectilignement selon (\vec{e}_x). Le vecteur d'onde est donné par

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z \quad (11)$$

1.4.2.

L'équation de propagation étant linéaire. En effet, elle peut s'écrire en notation complexe sous la forme :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (12)$$

Nous avons $\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}$, soit

$$-k^2\vec{E} + \mu_0\epsilon_0\omega^2\vec{E} = \vec{0} \implies \vec{E}(-k^2 + \mu_0\epsilon_0\omega^2) = \vec{0} \quad (13)$$

Le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est solution de l'équation d'onde à condition qu'on a :

$$k = \mu_0\epsilon_0\omega \implies c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (14)$$

1.4.3.

À partir de l'équation de Maxwell-Faraday, nous avons la relation de structure suivante :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x \quad (15)$$

soit

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \vec{e}_y \quad (16)$$

1.4.4.**1.4.4.1.**

Le vecteur de Poyting est donné par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (17)$$

$\vec{E} = \Re(\vec{E}) = E_0 \cos(\omega t - kz)$ et $\vec{B} = \Re(\vec{B}) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz)$, soit

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z \quad [\text{W.m}^{-2}] \quad (18)$$

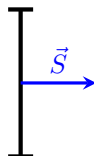
Le vecteur de Poynting représente le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique, son flux à travers une surface est la puissance électromagnétique rayonnée à travers cette surface.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\Pi} dt = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e}_z \times \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz) dt \quad (19)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z \quad \text{puisque} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz) dt = \frac{1}{2} \quad (20)$$

La direction de vecteur de poynting est confondue à celle de propagation de l'onde. Dans le vide l'énergie est transportée dans la direction de propagation de l'onde.

1.4.4.2.



$$\langle dW \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle dt = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{S} dt \quad (21)$$

soit

$$\langle dW \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S dt = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0^2 S dt \quad (22)$$

1.4.4.3.

La densité d'énergie électromagnétique est donnée par

$$u_{em} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t - kz) \quad (23)$$

puisque $\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0$ soit

$$u_{em} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad (24)$$

la moyenne au cours du temps de la densité volumique est

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \quad (25)$$

1.4.4.4.

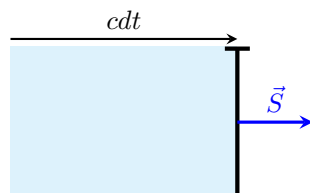
La longueur d'onde de De Broglie est donné par

$$p = \frac{h}{\lambda} \implies \vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{e}_z = \hbar \vec{k} \quad (26)$$

L'énergie d'un photon est donnée par $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, ce qui donne

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon}{c} \vec{e}_z \quad (27)$$

1.4.4.5.



Les photons qui traversent \vec{S} entre t et $t + dt$ sont contenus à l'instant t dans le cylindre de base S et de hauteur cdt , soit de volume $d\tau = S c dt$. Comme il y a n photons d'énergie ε par unité de volume, la surface \vec{S} est traversée pendant dt par l'énergie

$$dW = n d\tau \varepsilon = n S c \varepsilon dt \quad (28)$$

et de quantité de mouvement

$$\delta \vec{p} = \frac{\delta W}{c} \vec{e}_z = n \varepsilon S dt \vec{e}_z \quad (29)$$

1.4.4.6.

On a

$$\vec{g} = \frac{\delta \vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{\delta W}{d\tau} \vec{e}_z \quad (30)$$

Ainsi, l'énergie traversant S pendant dt est :

$$\delta W = \vec{\Pi} \cdot \vec{S} dt = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{S} dt \quad (31)$$

$$\boxed{\frac{\delta \vec{p}}{d\tau} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{c^2 \mu_0}} \quad (32)$$

d'où

$$\boxed{\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}} \quad (33)$$

1.4.4.7.

L'intensité I du faisceau est donné par

$$\boxed{I = \frac{1}{S} \frac{dW}{dt} = nc\varepsilon = nch\nu} \quad (34)$$

L'intensité est donnée aussi par $I = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\|$. Ainsi, dans ce qui précède, on peut en déduire que $\langle \vec{\Pi} \rangle = c\langle u_{em} \rangle \vec{e}_z$, il vient donc

$$\boxed{I = c\langle u_{em} \rangle} \quad (35)$$

1.4.4.8.

•

$$I = nch\nu \implies n = \frac{I}{h\nu c} \quad \text{A.N } n = 1,1 \times 10^{13} \text{ m}^{-3}$$

•

$$I = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \implies E_0 = \sqrt{2Ic\mu_0} \quad \text{A.N } E_0 = 868,1 \times 10^{13} \text{ V.m}^{-1}$$

2 Mise en évidence du caractère corpusculaire du photon

2.1. Le corps noir et la catastrophe ultraviolette

2.1.1.

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{du}{d\nu} \quad \text{avec } u \text{ la densité volumique d'énergie} \quad (36)$$

$$[\text{énergie}] = \text{ML}^2 \cdot \text{T}^{-2} \implies [u] = \text{ML}^{-1} \cdot \text{T}^{-2} \quad (37)$$

d'où

$$[u_\nu(\nu, T)] = [u] \cdot T = \text{ML}^{-1} \cdot \text{T}^{-1} \quad (38)$$

2.1.2.

La densité spectrale d'énergie est fonction de c , de ν et de $k_B T$

$$u_\nu^{\text{RJ}} = A \cdot c^\alpha \nu^\beta (k_B T)^\gamma \quad (39)$$

A est une constante adimensionnée. Cherchons α , β et γ :

•

$$[u_\nu^{\text{RJ}}(\nu, T)] = [c]^\alpha [\nu]^\beta [k_B T]^\gamma \quad (40)$$

• $k_B T$ est une énergie : $[k_B T] = \text{ML}^2 \text{T}^{-2}$, c est une vitesse $[c] = \text{LT}^{-1}$ et ν la fréquence : $[\nu] = \text{T}^{-1}$

• soit

$$\text{ML}^{-1} \text{T}^{-1} = (\text{LT}^{-1})^\alpha (\text{T}^{-1})^\beta (\text{ML}^2 \text{T}^{-2})^\gamma \quad (41)$$

En identifiant

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \implies \boxed{\alpha = -3, \beta = 2 \text{ et } \gamma = 1} \quad (42)$$

Finalement

$$u_{\nu}^{\text{RJ}}(\nu, T) = A \frac{k_B T}{c^3} \nu^2 \quad (43)$$

2.1.3.

$$u^{\text{RJ}} = A \frac{k_B T}{c^3} \int_0^{+\infty} \nu^2 d\nu \quad (44)$$

La fonction à intégrer est parabolique, son intégrale diverge lorsque la fréquence augmente, la difficulté provient donc des hautes fréquences.

2.1.4.

La catastrophe ultraviolette, consiste en le fait que la densité volumique d'énergie u^{RJ} est infinie à hautes fréquences. Bien que son expression s'accorde avec les observations expérimentales à basses fréquences, alors qu'elle ne l'est pas à hautes fréquences (fig)

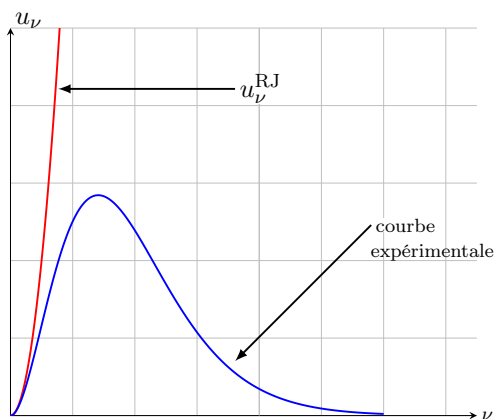


FIGURE 1 – Répartition de la densité spectrale u_{ν} du rayonnement : courbe expérimentale-courbe donnée correspondant à la densité de RAYLEIGH-JEANS

2.1.5.

Pour s'accorder avec les observations expérimentaux, il faut que $\int_0^{+\infty} u_{\nu}^{\text{RJ}}(\nu, T) d\nu$ soit finie à haute et à basse fréquence

- À basses fréquences

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} f(\nu/T) = C^{\text{te}}$$

- À hautes fréquences

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(\nu/T) = 0$$

, puisque $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu^2 = +\infty$

2.1.6.

Nous avons

$$u(\nu, T) = u_{\nu}^{\text{RJ}}(\nu, T) f\left(\frac{\nu}{T}\right) = A \frac{k_B T}{c^3} \nu^2 \times f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (45)$$

En identification ce résultat avec la formule expérimentale proposée par WIEN

$$u_{\nu}^w(\nu, T) = B \nu^3 e^{-\frac{a\nu}{T}} = A \frac{k_B T}{c^3} \nu^2 \times f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (46)$$

ce qui donne

$$f\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{B c^3}{A k_B T} \nu e^{-\frac{a\nu}{T}} \quad (47)$$

d'où $f\left(\frac{\nu}{T}\right) \propto \nu e^{-\frac{a\nu}{T}}$ à haute fréquence.

2.1.7.

$$f(\nu/T) = \frac{\frac{h\nu}{k_B T}}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = \frac{\frac{\nu}{\nu_q}}{e^{\frac{\nu}{\nu_q}} - 1} \quad \text{avec} \quad \nu_q = \frac{k_B T}{h} \quad (48)$$

- Si $\nu \ll \nu_q$, on aura en effectuant un DL à l'ordre 1 en ν/ν_q , soit : $e^{\nu/\nu_q} \approx 1 + \nu/\nu_q$, ce qui donne pour $f(\nu/T)$

$$f(\nu/T) \approx 1 \quad \text{à basses fréquences} \quad (49)$$

- Si $\nu \gg \nu_q$, c'est-à-dire, $e^{\nu/\nu_q} \gg 1$ et donc

$$f(\nu/T) \approx \frac{\nu/\nu_q}{e^{\nu/\nu_q}} = \frac{\nu}{\nu_q} e^{-\frac{\nu}{\nu_q}} \quad (50)$$

d'où on retrouve bien les limites à hautes et à basses fréquences avec $C^{\text{te}} = 1$

2.1.8.

Comme on vient de voir, la formule trouvée par Planck, élimine la catastrophe ultraviolette. Elle reproduit aussi, tous les résultats expérimentaux (loi de Wien et loi de Stefan). L'hypothèse de Planck est derrière l'avènement de la quantification, qui permet d'expliquer d'autres phénomènes, à part le rayonnement des corps noir, qui sont totalement inexplicables par la physique classique.

2.2. Effet photoélectrique : l'existence du photon**2.2.1.**

- Lorsque la tension U augmente, le courant I augmente et tend vers une limite. Cette limite augmente avec l'intensité de la radiation incidente
- Le courant s'annule pour $U = -U_0$

2.2.2.

$$W_{\text{ext}} = h\nu_0 \quad (51)$$

2.2.3.

L'électron acquiert l'énergie $E = h\nu$ au moment où il est encore dans le métal, pour l'extraire il faut W_{ext} , et donc il sera émis par une énergie cinétique telle que

$$E = E_c + W_{\text{ext}} \quad \text{soit} \quad E_c = h(\nu - \nu_0) \quad (52)$$

2.2.4.**2.2.4.1.**

- La fréquence seuil est donnée par :

$$\nu_0 = \frac{W_{\text{ext}}}{h} \quad \text{A.N} \quad \nu_0 = 5,439 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

- Les fréquences correspondantes des deux radiations de longueurs d'ondes $\lambda_1 = 490 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 660 \text{ nm}$ sont

$$\begin{aligned} - \text{ Pour } \lambda_1 = 490 \text{ nm} \quad \nu_1 &= \frac{c}{\lambda_1} = 6,122 \times 10^{14} \text{ Hz} \geq \nu_0; \\ - \text{ Pour } \lambda_2 = 660 \text{ nm} \quad \nu_2 &= \frac{c}{\lambda_2} = 4,545 \times 10^{14} \text{ Hz} \leq \nu_0 \end{aligned}$$

La radiation de longueur d'onde $\lambda_1 = 490 \text{ nm}$ est seule permettant l'extraction des électrons.

2.2.4.2.

$$E_c = h(\nu_1 - \nu_0) \quad \text{A.N} \quad E_c = 0,254 \text{ eV} \quad (53)$$

2.2.4.3.

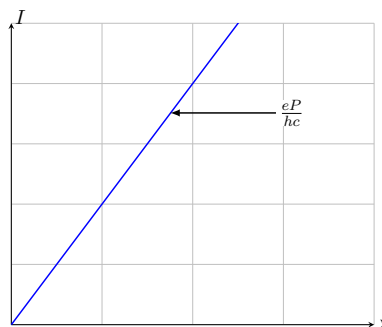
Le nombre de photons par unité de temps arrivant sur la cathode est :

$$N = \frac{P}{h\nu_1} \quad \text{A.N} \quad N = 2,218 \times 10^{12} \text{ s}^{-1} \quad (54)$$

2.2.4.4.

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = Ne \quad \text{soit} \quad I = \frac{P}{h\nu} e = \frac{Pe}{hc} \lambda \quad (55)$$

2.2.4.5.

FIGURE 2 – Tracé de I en fonction de λ

2.2.4.6.

$$R_q = \frac{N^{\text{émis}}}{N^{\text{reçus}}} = \frac{I}{I_0} \quad \text{A.N} \quad R_q = 11,25\% \quad (56)$$

2.2.5.

L'effet photoélectrique a été découvert et décrit quantitativement par HERTZ en 1887. Cet effet peut être interprété par la théorie ondulatoire classique, sauf que cette théorie ne peut pas expliquer l'existence d'un *effet de seuil* : l'effet photoélectrique est observé pour $\nu \geq \nu_0$. L'explication est fournie par Einstein en 1905, en considérant la radiation constituée de photons d'énergie $h\nu$ qui peut être transmise totalement à l'électron et le faire extraire.

2.3. L'effet Compton : la confirmation du photon

2.3.1.

En théorie classique (*cf. rayonnement*), un rayonnement électromagnétique peut interagir avec la matière. Cette dernière, absorbe le rayonnement incident de fréquence ν et le réémet dans toutes les directions avec la même fréquence. Dans l'expérience de Compton, on voit apparaître une raie diffusée de fréquence différente de celle du rayonnement incident.

2.3.2.

Il y en a plusieurs raisons de travailler avec les rayons X :

- En commençant de l'idée qu'un électron nécessite un travail minimal d'extraction, ce travail étant proportionnel à la fréquence, il faut donc un rayonnement plus énergétique assurant l'arrachement des électrons ;
- La puissance moyenne diffusée est une fonction de la fréquence, elle varie en $\frac{1}{\lambda^4}$ pour les faibles fréquences (diffusion de RAYLEIGH) et presque constante à haute fréquence ; En travaillant avec un rayonnement énergétique, on assure sa réception au détecteur ;
- La troisième raison qui sera vérifiée *a posteriori*, est le fait que le spectre de diffusion contient deux raies très proches ; pour pouvoir les séparer il faut utiliser un rayonnement dur (de fréquence élevée)

2.3.3.

Le rayonnement diffusé, contient deux composantes, une de longueur d'onde λ et une autre de longueur d'onde λ' , c'est comme quoi le rayonnement incident en traversant la feuille, il perd un peu de son énergie, la nouvelle composante (de longueur d'onde λ') sera déplacée du côté des faibles fréquences (et donc des grandes longueurs d'ondes)

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' < 0 \quad (57)$$

2.3.4.

Conservation de la quantité de mouvement du système photon+électron avant et après le choc

$$\vec{p} + \vec{0} = \vec{p}' + \vec{p}_e \quad (58)$$

soit

$$\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}' \implies p_e^2 = \vec{p}_e \cdot \vec{p}_e = (\vec{p} - \vec{p}') \cdot (\vec{p} - \vec{p}') \quad (59)$$

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{p}' = p^2 + p'^2 - 2pp'(\vec{e}_z \cdot \vec{u}) \quad (60)$$

soit

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2p \cdot p' \cos \theta \quad (61)$$

2.3.5.

Conservation de l'énergie

$$\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + \frac{hc}{\lambda'} \quad (62)$$

2.3.6.

De l'équation 61 et en remplaçant les impulsions p et p' par leur expressions, nous avons

$$p_e^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta = h^2 \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \cos \theta \right] \quad (63)$$

De l'équation 62 et on enlève au carré, on obtient

$$p_e^2 = \left[h \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + m_e c \right]^2 - m_e^2 c^2 \quad (64)$$

En égalisant les deux dernières équations, on obtient après simplification

$$(\lambda' - \lambda)m_e c = (1 - \cos \theta)h \quad (65)$$

soit

$$\Delta\lambda = -\lambda_C(1 - \cos \theta) \quad \text{avec} \quad \lambda_C = \frac{h}{m_e c} \quad (66)$$

λ_C est appelée longueur d'onde de Compton pour l'électron et sa valeur numérique est

$$\lambda_C = 2,43 \text{ pm} \quad (67)$$

elle appartient au domaine des rayons γ .

Remarque

Remarquons très bien que l'écart $\Delta\lambda$ est indépendante de λ , il ne dépend que de θ et λ_C (constante formée avec des constantes universelles (h , c et m_e)). $|\Delta\lambda|$ est borné par $2\lambda_C$, il est donc toujours plus petit ; ce qui justifie bien qu'il faut utiliser des rayons X pour pouvoir séparer le pic de Compton du pic de longueur d'onde λ .

2.3.7.

Le calcul et l'hypothèse amenés par Compton, en considérant un choc élastique entre deux particules (électron et photon), et qui s'accordent très bien avec les observations expérimentales, confirment bien le fait que le rayonnement est constitué de particules (photons)

3 Caractéristiques d'un photon

3.1. Caractéristique d'un photon de masse non nulle

3.1.1.

La conservation de la charge est l'un des postulats de l'électromagnétisme, elle doit être satisfaite. En reprenant le calcul comme celui amené à la question 1.1, mais ici avec les équations de Maxwell modifiées, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = \frac{\eta^2}{\mu_0} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) \quad (68)$$

Ainsi, pour avoir $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$, il faut que

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} \right) = 0 \quad (69)$$

La jauge de Lorentz constitue donc une nécessité ici et non pas un choix.

3.1.2.

Les équations de (Maxwell-flux) et (Maxwell-Ampère) sont invariantes par rapport au cas d'un photon à masse nulle ; les potentiels V et \vec{A} restent liés aux champs par les relations :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (70)$$

Un calcul similaire à celui de la question 1.2, en tenant compte des équations de Maxwell modifiées, nous amène à montrer les relations suivantes :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \eta^2 \vec{A} - \mu_0 \vec{j} \quad \text{et} \quad \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \eta^2 V - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (71)$$

3.1.3.**3.1.3.1.**

On a

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (72)$$

soit

$$i \frac{\omega}{c^2} V(\vec{r}, t) - i \vec{k} \cdot \vec{A} = 0 \quad (73)$$

d'où

$$V(\vec{r}, t) = V_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{avec} \quad V_0 = \frac{c^2}{\omega} (\vec{k} \cdot \vec{A}_0) \quad (74)$$

3.1.3.2.

On a

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \vec{k} V - i \omega \vec{A} \quad (75)$$

soit

$$\vec{E} = i \vec{k} V_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) - i \omega \vec{A}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (76)$$

d'où

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 = i \frac{c^2}{\omega} (\vec{k} \cdot \vec{A}_0) \vec{k} - i \omega \vec{A}_0 \quad (77)$$

de même pour le champ magnétique, nous avons

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -i \vec{k} \wedge \vec{A} \quad (78)$$

soit

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{avec} \quad \vec{B}_0 = -i \vec{k} \wedge \vec{A}_0 \quad (79)$$

3.1.3.3.Puisque $\rho = 0$, l'équation de poisson de V devient

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \eta^2 V \quad (80)$$

soit

$$-k^2 V + \frac{\omega^2}{c^2} V = \eta^2 V \quad (81)$$

soit la relation de dispersion

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_c^2 \quad \text{avec} \quad \omega_c^2 = c^2 \eta^2 \quad (82)$$

La vitesse de phase est donnée par

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{k^2}} \quad (83)$$

La vitesse de groupe est obtenue en différenciant la relation de dispersion. Soit

$$2\omega d\omega = 2c^2 k dk \quad (84)$$

ainsi

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} \quad (85)$$

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{k^2}}} \quad (86)$$

3.1.3.4.

La distance L est donné par

$$L = v_{g1}t_1 = v_{g2}t_2 \quad (87)$$

ainsi l'écart Δt est

$$\Delta t = t_2 - t_1 = L \left(\frac{1}{v_{g2}} - \frac{1}{v_{g1}} \right) = \frac{L}{c} \left(\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{k_2^2}} - \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{k_1^2}} \right) \quad (88)$$

en termes de longueurs d'ondes

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left(\sqrt{1 + \frac{\eta^2 \lambda_2^2}{4\pi^2}} - \sqrt{1 + \frac{\eta^2 \lambda_1^2}{4\pi^2}} \right) \quad (89)$$

puisque $\eta\lambda_1 \ll 1$ et $\eta\lambda_2 \ll 1$, nous pouvons effectuer un DL au premier ordre en $(\lambda\eta)^2$, soit

$$\Delta t \simeq \frac{L}{c} \left(1 + \frac{\eta^2 \lambda_2^2}{8\pi^2} - 1 - \frac{\eta^2 \lambda_1^2}{8\pi^2} \right) = \frac{L\eta^2}{8\pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \quad (90)$$

On en déduit la masse du photon

$$m_\gamma = \frac{h\eta}{c} = h \sqrt{\frac{8\pi^2 \Delta t}{Lc(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}} \quad (91)$$

3.1.3.5.

La masse limite est donnée par

$$m_{\gamma l} = \frac{h\eta}{c} = h \sqrt{\frac{8\pi^2 \Delta t}{Lc(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}} \quad \text{A.N} \quad m_{\gamma l} = 5,04 \times 10^{-42} \text{ kg} \quad (92)$$

On a

$$\frac{m_{\gamma l}}{m_e} = 5,5 \times 10^{-12} \ll 1 \quad (93)$$

3.2. Polarisation et photon**3.2.1.**

Le champ électrique en notation réelle est donné par

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_0 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) = -E_0 \sin(\omega t - kz) \end{cases} \quad (94)$$

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) \quad (95)$$

soit

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 \quad \text{Équation cartésienne d'un cercle} \quad (96)$$

Déterminons maintenant le sens de parcours du cercle, pour cela évaluons le produit vectoriel suivant

$$\vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \begin{vmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) & -\omega E_0 \sin(\omega t - kz) \\ -E_0 \sin(\omega t - kz) & -E_0 \omega \cos(\omega t - kz) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (97)$$

il vient donc

$$\vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0^2 \vec{e}_z \quad (98)$$

Le sens de ce vecteur donne le sens de parcours. Ainsi, le sens de parcours est le sens horaire et la polarisation est droite, l'onde a une polarisation circulaire droite.

3.2.2.

Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, l'électron décrit une trajectoire contenue dans un volume V . Le nuage de points représentant les positions successives de l'électron a son barycentre M au point O

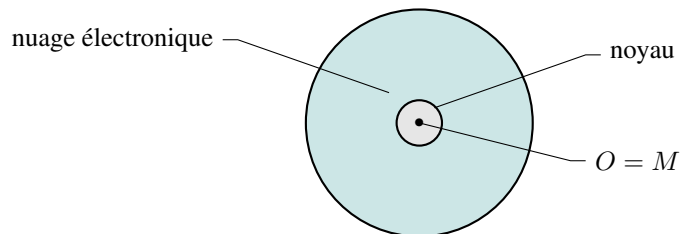


FIGURE 3 – À l'équilibre le barycentre des positions successives de l'électron est confondu avec le centre du noyau

Suite à une petite perturbation extérieure sur l'électron, le barycentre M s'écarte de sa position d'équilibre

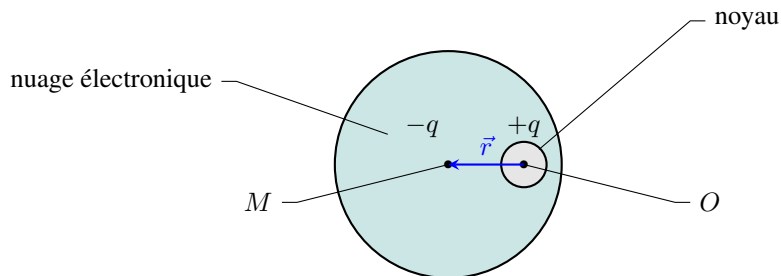


FIGURE 4 – Hors équilibre, le barycentre des positions successives de l'électron n'est plus confondu avec le centre du noyau

L'électron dans ce cas n'est soumis qu'à la force qu'applique le reste de l'atome sur lui, cette force est modélisée par la force de rappel $-m_e\omega_0^2\vec{r}$, qui rappelle l'électron vers sa position d'équilibre.

3.2.3.

La relation de structure d'une OEMPPM s'écrit

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (99)$$

comparant l'importance relative des deux forces électrique et magnétique

$$\frac{\|\vec{f}_m\|}{\|\vec{f}_e\|} = \frac{\| -e\vec{v} \wedge \vec{B} \|}{\| -e\vec{E} \|} \sim \frac{vk}{\omega} = \frac{v}{v_\phi} \sim \frac{v}{c} \ll 1 \quad \text{cas non relativiste} \quad (100)$$

la vitesse de phase est de même ordre de grandeur de c . Il est donc légitime de négliger la force magnétique devant la force électrique.

3.2.4.

Appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel d'étude considéré galiléen

$$m_e \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m_e\omega_0^2\vec{r} - \frac{m_e}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - e\vec{E} \quad (101)$$

soit

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{-e}{m_e} \vec{E} \quad (102)$$

En régime forcé et en notation complexe, l'équation précédente devient

$$-\omega^2\vec{r} + \frac{i\omega}{\tau}\vec{r} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m_e}\vec{E} \quad (103)$$

ce qui donne

$$\vec{r} = \underline{\alpha} \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \underline{\alpha} = \frac{-e}{m_e \left[\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} \right]} \quad (104)$$

3.2.5.

La puissance moyenne cédée à l'atome par l'onde se calcule en utilisant la relation suivante

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Re(\underline{f}_e^* \cdot \underline{v}) \quad (105)$$

\Re désigne la partie réelle. Ainsi,

$$\underline{f}_e^* = -e\underline{E}^* = -e \begin{vmatrix} E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \\ -iE_0 e^{-i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (106)$$

et

$$\vec{v} = i\omega\vec{r} = i\omega\alpha.\vec{E} = i\omega\alpha \begin{vmatrix} E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ iE_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (107)$$

il vient

$$\vec{f}_e^* . \vec{v} = -i\omega e\alpha (E_0^2 + E_0^2) = -2i\omega e\alpha E_0^2 \quad (108)$$

soit encore, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \right]$

$$\vec{f}_e^* . \vec{v} = \frac{2i\omega E_0^2 e^2}{m_e \left[\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} \right]} = \frac{2i\omega E_0^2 e^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{m_e \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \right]} + \frac{2\omega^2 E_0^2 e^2}{m_e \tau \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \right]} \quad (109)$$

et en déduit la partie réelle

$$\Re(\vec{f}_e^* . \vec{v}) = \frac{2\omega^2 E_0^2 e^2}{m_e \tau \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \right]} \quad (110)$$

et la puissance moyenne est

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^2 E_0^2 e^2}{m_e \tau \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \right]} \quad (111)$$

3.2.6.

Le moment de la force exercée par l'onde sur l'atome par rapport au centre O est

$$\vec{M} = \vec{OM} \wedge \vec{f}_e = \vec{r} \wedge \vec{f}_e \quad (112)$$

Le moment moyen associé peut être évalué en utilisant la relation

$$\langle \vec{M} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\vec{r} \wedge \vec{f}_e^*) \quad (113)$$

Ainsi

$$\vec{r} \wedge \vec{f}_e^* = -e\alpha \begin{vmatrix} E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ iE_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \\ -iE_0 e^{-i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{vmatrix} = 2ie\alpha E_0^2 \vec{e}_z \quad (114)$$

soit

$$\vec{r} \wedge \vec{f}_e^* = \frac{-2ie^2 E_0^2}{m_e \left[\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} \right]} \quad (115)$$

soit encore, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \right]$

$$\vec{r} \wedge \vec{f}_e^* = \frac{-2ie^2 E_0^2}{m_e \left[\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} \right]} = \frac{-2e^2 E_0^2 \omega}{m_e \tau \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \right]} - i \frac{2e^2 E_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{m_e \tau \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \right]} \quad (116)$$

ce qui donne finalement

$$\langle \vec{M} \rangle = - \frac{e^2 E_0^2 \omega}{m_e \tau \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \right]} \vec{e}_z \quad (117)$$

Ce dernier peut se mettre sous la forme

$$\langle \vec{M} \rangle = \hbar \gamma \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \gamma = - \frac{e^2 E_0^2 \omega}{\hbar m_e \tau \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \right]} \quad (118)$$

3.2.7.

\hbar est homogène à un moment cinétique, ainsi nous avons

$$\langle \vec{M} \rangle = \gamma \vec{L}_\gamma \quad (119)$$

Ainsi, de point de vue corpusculaire, le photon a un moment cinétique $\vec{L}_\gamma = \hbar \vec{e}_z$ qu'il cède à l'atome. Le coefficient de proportionnalité s'agit du rapport gyromagnétique relatif à l'électron.