

## Planche n° 19. Suites

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable    T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice n° 1 (\*\*IT)

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle ou complexe et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}.$$

- 1) Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$ , la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et a pour limite  $\ell$ . Réciproque ? (Quand la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, on dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens de CÉSARO.)
- 2) Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Réciproque ?
- 3) On suppose de plus que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est réelle. Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est aussi.

### Exercice n° 2 (\*\*\*)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge au sens de CÉSARO et est monotone, alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

### Exercice n° 3 (\*\*IT)

Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  (série harmonique).

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$ .
- 2) Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose  $u_n = H_n - \ln(n)$  et  $v_n = H_n - \ln(n+1)$ . Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers un réel  $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  ( $\gamma$  est appelée la constante d'EULER). Donner une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-2}$  près.

### Exercice n° 4 (\*\*)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.$$

### Exercice n° 5 (\*\*\*)

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}$  (on sera amené à déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}$  et on utilisera l'exercice n° 3 : il existe une suite  $(\varepsilon_n)$  tendant vers 0 telle que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ ).

### Exercice n° 6 (\*\*I) (moyenne arithmético-géométrique)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . On pose  $u_0 = a$  et  $v_0 = b$  puis, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une limite commune que l'on ne cherchera pas à calculer (cette limite s'appelle la moyenne arithmético-géométrique des nombres  $a$  et  $b$ ).

### Exercice n° 7 (\*\*\*)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ . On pose  $u_0 = a$  et  $v_0 = b$  puis, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes et que leur limite commune est égale à  $\frac{b \sin \left( \operatorname{Arccos} \left( \frac{a}{b} \right) \right)}{\operatorname{Arccos} \left( \frac{a}{b} \right)}.$

**Exercice n° 8 (\*\*I)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle ne s'annulant pas. Montrer que si  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$  tend vers un réel  $\ell$  élément de  $[0, 1[$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors  $u_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice n° 9 (\*\*)**

Limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de

$$1) \frac{\sin n}{n} \quad 2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad 3) \frac{n!}{n^n} \quad 4) \frac{E\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right)} \quad 5) \sqrt[n]{n^2} \quad 6) \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad 7) \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3} \quad 8) \prod_{k=1}^n 2^{k/2^{2^k}}.$$

Pour 3), utiliser le n° 8.

**Exercice n° 10 (\*\*)**

Etudier la suite  $(u_n)$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$ .

**Exercice n° 11 (\*\*\*)** (Récurrences homographiques).

Dans cet exercice, on ne se pose aucune question d'existence des différentes suites considérées.

1) Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$  tel que  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$ . On considère  $(u_n)$  la suite définie par la donnée de son premier terme  $u_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ .

a) Montrer que si l'équation  $x = \frac{ax + b}{cx + d}$  a deux solutions distinctes  $\alpha$  et  $\beta$ , la suite  $\left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.

b) Montrer que si l'équation  $x = \frac{ax + b}{cx + d}$  a une solution et une seule  $\alpha$ , la suite  $\left(\frac{1}{u_n - \alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique.

2) Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$  quand la suite  $u$  vérifie :

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \quad b) \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4(u_n - 1)}{u_n}$$

(ne pas se poser de questions d'existence).

**Exercice n° 12 (\*\*)**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites définies par la donnée de  $u_0$  et  $v_0$  et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Etudier les suites  $u$  et  $v$  puis déterminer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$  en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de  $u$  et  $v$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

**Exercice n° 13 (\*\*)**

Même exercice avec  $u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2}$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}$  et  $w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ .

**Exercice n° 14 (\*\*\*)**

Soit  $u$  une suite complexe et  $v$  la suite définie par  $v_n = |u_n|$ .

On suppose que la suite  $(\sqrt[n]{v_n})$  converge vers un réel positif  $\ell$ .

Montrer que si  $0 \leq \ell < 1$ , la suite  $(u_n)$  converge vers 0 et si  $\ell > 1$ , la suite  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ .

Montrer que si  $\ell = 1$ , tout est possible.

**Exercice n° 15 (\*\*\*)**

1) Soit  $u$  une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge vers un réel  $\ell$ , alors  $(\sqrt[n]{u_n})$  converge et a même limite.

2) Etudier la réciproque.

3) Application : limites de a)  $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$  b)  $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$  c)  $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$ .

**Exercice n° 16 (\*)**

Soient  $u$  et  $v$  deux suites de réels de  $[0, 1]$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$ . Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers 1.

**Exercice n° 17 (\*\*)**

Montrer que si les suites  $(u_n^2)$  et  $(u_n^3)$  convergent alors  $(u_n)$  converge.

**Exercice n° 18 (\*\*\*)**

Etudier les deux suites  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  et  $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ .

**Exercice n° 19 (\*\*\*)**

Même exercice avec  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$ .

**Exercice n° 20 (\*\*\*)**

Même exercice avec  $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$  et  $v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$ .

**Exercice n° 21 (\*\*\*)**

Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$  et de ses premiers termes dans chacun des cas suivants :

1)  $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$ .

2)  $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = u_n$ .

3)  $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$ .

4)  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ .

5)  $\forall n \geq 2, u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + 2^n$ .

**Exercice n° 22 (\*\*\*)**

Montrer que, pour  $n \geq 2$ ,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux}) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux}).$$

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ radicaux})$ .

**Exercice n° 23 (\*\*\*)**

1) Montrer que pour  $x$  réel strictement positif, on a :  $\ln(1+x) < x < (1+x) \ln(1+x)$ .

2) Montrer que  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$  et en déduire la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ .

**Exercice n° 24 (\*\*\*)**

Soit  $(u_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$  avec  $p_n \in \mathbb{Z}$  et  $q_n \in \mathbb{N}^*$ , une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel  $x$ . Montrer que les suites  $(|p_n|)$  et  $(q_n)$  tendent vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice n° 25 (\*\*)**

Trouver un exemple de suite  $(u_n)$  divergente, telle que  $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , la suite  $(u_{kn})$  converge.

**Exercice n° 26 (\*\*\*)**

Soit  $f$  une application injective de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$ .

**Exercice n° 27 (\*\*I)**

Pour  $n \geq 1$ , soit  $u_n$  l'unique racine positive de l'équation  $x^n + x - 1 = 0$ . Etudier la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice n° 28 (\*\*)**

Etude des suites  $(u_n) = (\cos n\alpha)$  et  $(v_n) = (\sin n\alpha)$  où  $\alpha$  est un réel donné.

1) Montrer que si  $\frac{\alpha}{2\pi}$  est rationnel, les suites  $u$  et  $v$  sont périodiques et montrer dans ce cas que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent si et seulement si  $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

2) On suppose dans cette question que  $\frac{\alpha}{2\pi}$  est irrationnel .

a) Montrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si  $(v_n)$  converge .

b) En utilisant différentes formules de trigonométrie fournissant des relations entre  $u_n$  et  $v_n$ , montrer par l'absurde que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  divergent.

**Exercice n° 29 (\*\*)**

Calculer  $\inf_{\alpha \in ]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|))$ .

**Exercice n° 30 (\*\*I)**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de  $(u_n)$  tendant vers  $+\infty$ .

**Exercice n° 31 (\*\*)**

Soit  $(u_n)$  une suite de réels éléments de  $]0, 1[$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$ . Montrer que  $(u_n)$  converge vers  $\frac{1}{2}$ .