Extrait du concours Centrale MP 2002
Positionnement d'un appareil d'imagerie médicale

Question 1: Déterminer la vitesse angulaire de chaque moteur (en tr/min) qui permet de satisfaire le critère de vitesse angulaire du cahier des charges.

Vitesse de rotation de l'effecteur :

$$\omega_s = 10°/s = 600°/min = \frac{600}{360} tr/min$$
$$\frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{1}{558}$$
$$\omega_e = 558\omega_s = \frac{600 * 558}{360} = 930\ tr/min$$

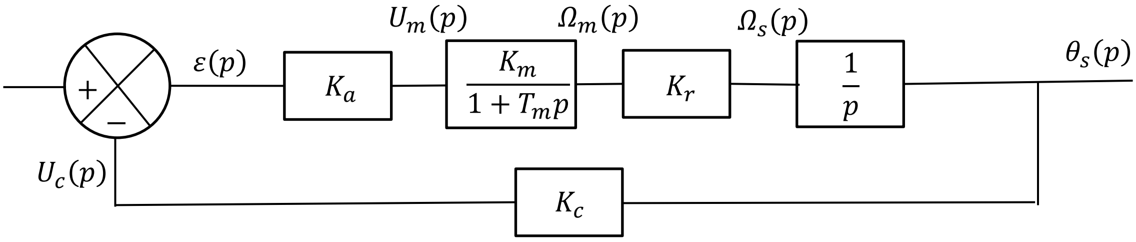
Attention : *Bien réfléchir quand un rapport de réduction est donné car ce peut être k ou 1/k. Réfléchir logiquement, entre une rotation importante du MCC et une sortie de qq degrés secondes, on voit bien que* $\omega_s = \omega_e/558$

Fonction de transfert du système

Question 2: Déterminer la valeur numérique du bloc de réducteur K_r.

$$K_r = \frac{\omega_s(p)}{\omega_e(p)} = \frac{1}{558}$$

Question 3: Déterminer la fonction de transfert en chaîne directe $FTCD(p)$, la fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p)$ et la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p)$ de cet asservissement. On simplifiera au plus les fractions obtenues. Exprimer les résultats en fonction de K_a, K_m, K_r, K_c et T_m.



$$FTCD(p) = \frac{K_a K_m K_r}{p(1 + T_m p)}$$
$$FTBO(p) = \frac{K_a K_m K_r K_c}{p(1 + T_m p)}$$

$$FTBF(p)=\frac{FTCD(p)}{1+FTBO(p)}=\frac{\frac{K_aK_mK_r}{p(1+T_mp)}}{1+\frac{K_aK_mK_rK_c}{p(1+T_mp)}}=\frac{K_aK_mK_r}{p(1+T_mp)+K_aK_mK_rK_c}$$

$$FTBF(p)=\frac{K_aK_mK_r}{K_aK_mK_rK_c+p+T_mp^2}$$

***Remarque** : bien donner un polynôme organisé en fonction de p. Pas de forme canonique si ce n'est pas demandé*

Question 4: Mettre la $FTBF$ sous forme canonique et exprimer ses coefficients caractéristiques sous forme littérale en fonction de K_a, K_m, K_r, K_c et T_m.

$$FTBF(p)=\frac{K_aK_mK_r}{p+T_mp^2+K_aK_mK_rK_c}$$

$$FTBF(p)=\frac{\frac{1}{K_c}}{1+\frac{1}{K_aK_mK_rK_c}p+\frac{T_m}{K_aK_mK_rK_c}p^2}$$

$$K=\frac{1}{K_c}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K_aK_mK_rK_c}{T_m}}$$

$$z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_aK_mK_rK_c}{T_m}}\frac{1}{K_aK_mK_rK_c}=\frac{1}{2\sqrt{K_aK_mK_rK_cT_m}}$$

Détermination des valeurs numériques du système

Question 5: Retrouver la transformée de Laplace d'un échelon U_0 par le calcul

$$e(t) = U_0 u(t)$$

$$E(p) = \int_0^{\infty} e(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} U_0 e^{-pt}dt = U_0\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{\infty} = U_0\left[0-\left(-\frac{1}{p}\right)\right] = \frac{U_0}{p}$$

Question 6: Déterminer la valeur finale de la vitesse de rotation moteur

Application du théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty}\omega_m(t) = \lim_{p\to 0} p\Omega_m(p) = \lim_{p\to 0}\left(p\frac{K}{1+T_m p}\frac{U_0}{p}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{KU_0}{1+T_m p}\right) = KU_0$$

Question 7: Déterminer la pente à l'origine (valeur initiale de la dérivée)

Application du théorème de la valeur initiale :

$$\omega_m{}'(0) = \lim_{t\to 0}\omega_m{}'(t) = \lim_{p\to +\infty} p\mathcal{L}\left(\omega_m{}'(t)\right)$$

Or :

$$\mathcal{L}\left(\omega_m{}'(t)\right) = p\left[\mathcal{L}\left(\omega_m(t)\right) - \omega_m{}'(0)\right] = p\Omega_m(p)$$

D'où :

$$\omega_m{}'(0) = \lim_{p\to +\infty} p^2\Omega_m(p) = \lim_{p\to +\infty} p^2\frac{K}{1+T_m p}\frac{U_0}{p} = \lim_{p\to +\infty}\frac{pKU_0}{1+T_m p} = \lim_{p\to +\infty}\frac{pKU_0}{T_m p} = \frac{KU_0}{T_m}$$

Sinon, 2 autres méthodes :

- Graphique : la pente à l'origine passe par les points $(0,0)$ et (T_m, KU_0) -> pente $\frac{U_0K_m}{T_m}$
- Dérivation de la solution temporelle : $\frac{d}{dt}\left[U_0K_m\left(1-e^{-\frac{t}{T_m}}\right)\right] = -e^{-\frac{t}{T_m}}\frac{U_0K_m}{T_m}$ en $t=0$: $\frac{U_0K_m}{T_m}$

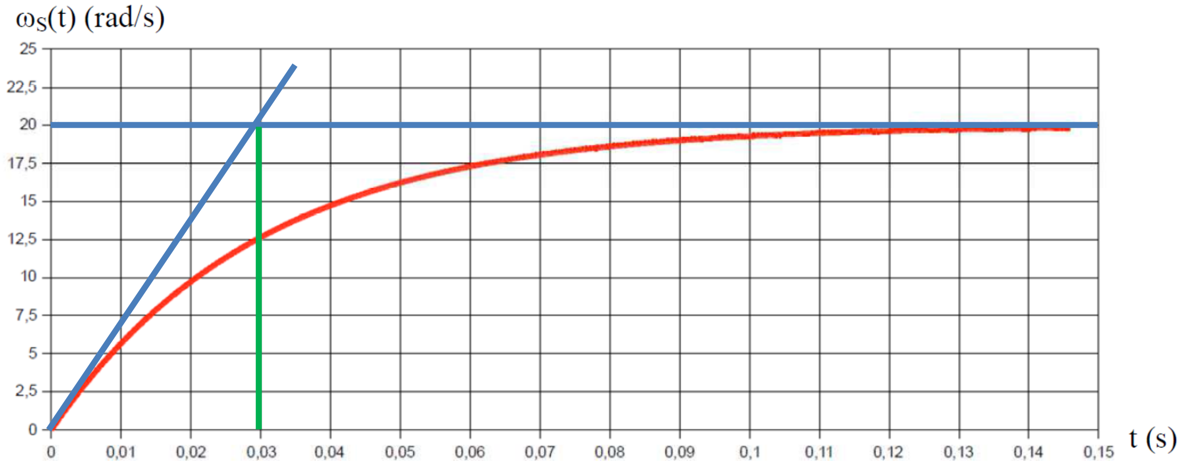
Remarque *: ce calcul pourrait vous permettre, sans calculs de la solution temporelle, de connaître par exemple l'accélération d'un système au démarrage*

Question 8: Déterminer par le domaine de Laplace la réponse temporelle du moteur $\boldsymbol{\omega_m(t)}$ en exprimant le résultat en fonction de $\boldsymbol{U_0}$, $\boldsymbol{K_m}$ et $\boldsymbol{T_m}$

$$u_m(t) = U_0 u(t)$$
$$E(p) = \frac{U_0}{p}$$
$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K_m}{1+Tp}\frac{U_0}{p} = \frac{K_m U_0}{p(1+Tp)}$$
$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+Tp}$$
$$\frac{K_m U_0}{p(1+Tp)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+Tp}$$
$$\frac{K_m U_0}{p} = \frac{A}{p}(1+Tp) + B \Rightarrow \boldsymbol{B}_{p=-\frac{1}{T}} = \frac{K_m U_0}{-\frac{1}{T}} = -K_m U_0 T$$
$$\frac{K_m U_0}{(1+Tp)} = A + \frac{B}{1+Tp}p \Rightarrow \boldsymbol{A}_{p=0} = \frac{K_m U_0}{(1)}$$
$$S(p) = \frac{K_m U_0}{p} - \frac{K_m U_0 T}{1+Tp} = K_m U_0\left[\frac{1}{p} - \frac{T}{1+Tp}\right] = K_m U_0\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{T}}\right]$$
$$\omega_m(t) = K_m U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T_m}}\right)u(t)$$

Question 9: En déduire l'expression de l'évolution temporelle de $\boldsymbol{\omega_s(t)}$

$$\omega_s(t) = K_r\omega_m(t) = K_r K_m U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T_m}}\right)u(t)$$



Question 10: Déterminer les valeurs numériques expérimentales de K_m et T_m en réalisant les tracés utiles à leur détermination sur le document réponse 5-1.

Attention, courbe en sortie du réducteur :
La valeur finale est $K_m K_r U_0$.
On a :

$$K_m K_r U_0 = 20$$

$$K_m = \frac{20}{K_r U_0} = \frac{558 * 20}{10} = 1116\, rad.s^{-1}.V^{-1}$$

On fait la pente à l'origine, elle coupe la valeur finale en un point d'abscisse T_m.

$$T_m = 0{,}03 \approx \frac{1}{30}$$

Sinon, si on n'avait pas l'asymptote :

- à $t = T_m$, on est à $0{,}63 K_m K_r U_0$
- à $t = 3T_m$, on est à $0{,}95 K_m K_r U_0$

Question 11: Calculer K_c dans les unités du système international

$$K_c = \frac{5}{2\pi} V.rd^{-1} = 0{,}796\, V.rd^{-1}$$

Question 12: Déterminer la $FTBO$ numérique du système à l'aide de toutes les valeurs obtenues ou fournies précédemment

$$FTBO(p) = \frac{K_a K_m K_r K_c}{p(1+T_m p)} = \frac{1116 * \frac{1}{558} * 0{,}796 * 6{,}28}{p\left(1+\frac{1}{30}p\right)} = \frac{10}{p\left(1+\frac{1}{30}p\right)}$$

Diagramme de Bode de la FTBO du système

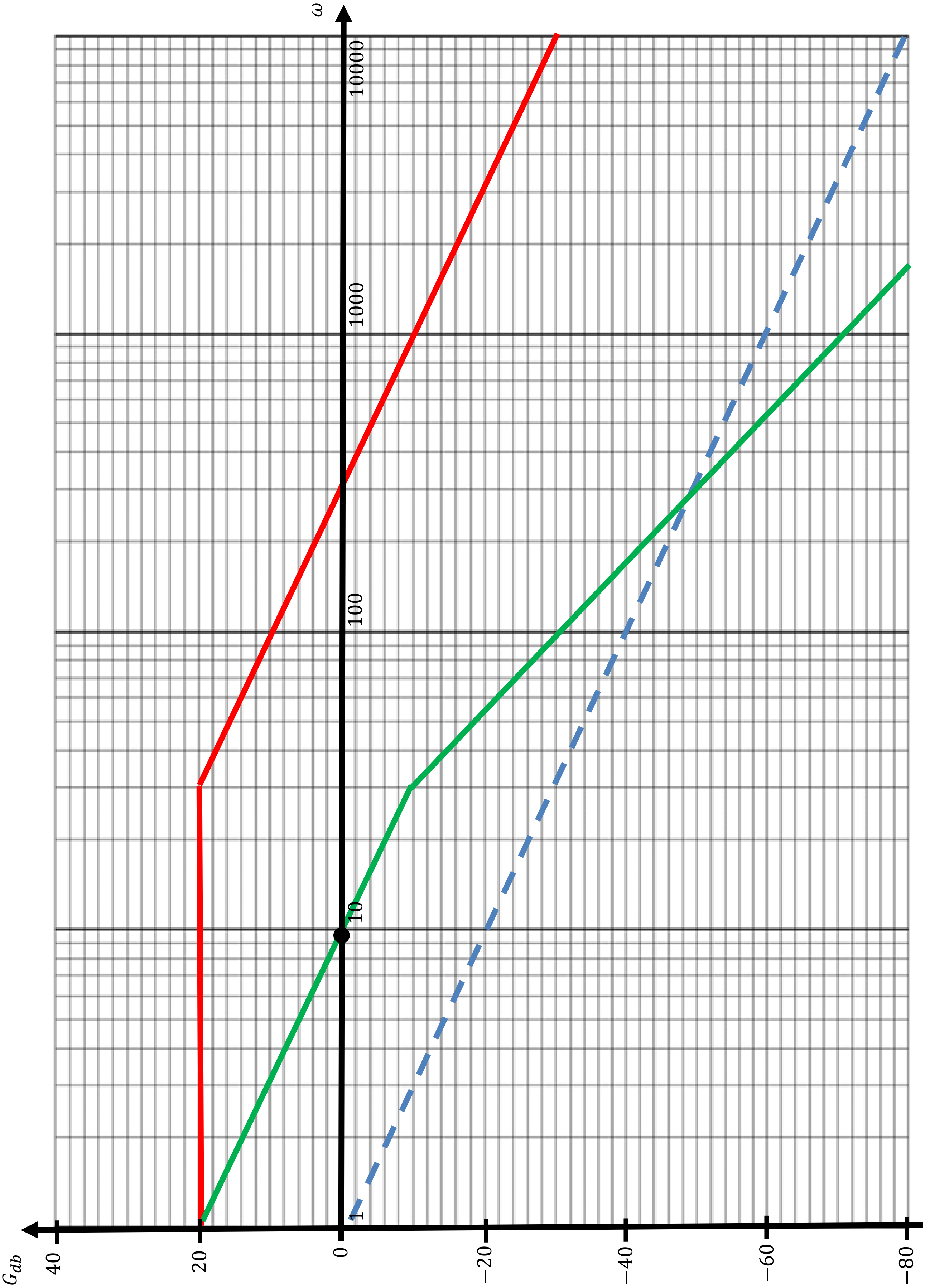
Méthodes : On peut au choix :

- *Placer un point puis respecter les pentes de -20 db/dec avant $\omega = 30$ et -40 db/dec après*
- *Tracer les diagrammes de chaque morceau de la FT puis les sommer, par exemple :*
  - *Constante 10 de gain $20\log(10) = 20$ et de phase nulle*
  - *1° ordre $\frac{1}{1+\frac{1}{30}p}$ dont la cassure est à $\omega = 30$, de gain et phase nuls avant et de pente 20 db/de cet phase $-\frac{\pi}{2}$ après (asymptotiquement…)*
  - *Intégrateur $\frac{1}{p}$ de pente -20 db/dec de $-\infty$ à $+\infty$ et passant par le point $(\omega = 1, G = 0)$ et de phase constante $\varphi = -\frac{\pi}{2}$*

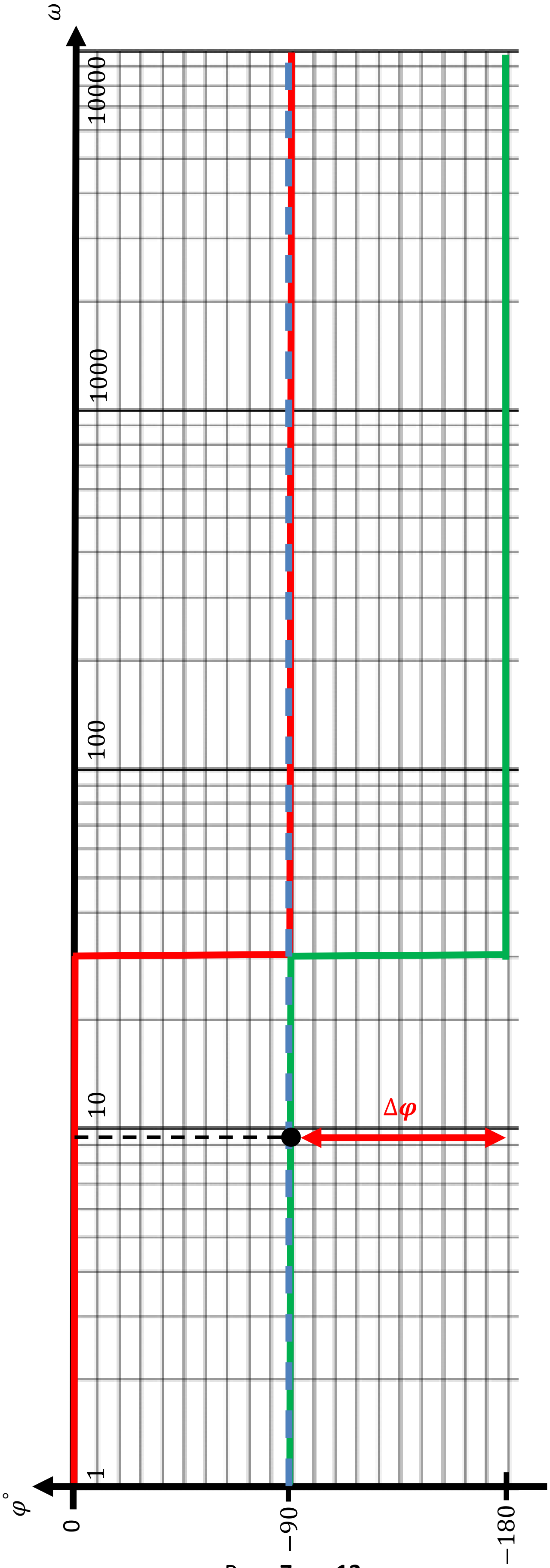
Un point facile à placer, c'est en $\omega = 1$, le gain de l'intégrateur est nul, celui du premier ordre aussi (avant 30), il reste $20\log(10) = 20$.

ATTENTION : Une erreur que je vois souvent, c'est le mauvais placement de $\omega = 30$ sur le diagramme, placé en 40…

Question 13: Tracer sur le document réponse 1-2 le diagramme de Bode asymptotiques en gain de la fonction de transfert en boucle ouverte



Question 14: Tracer sur le document réponse 1-3 le diagramme de Bode asymptotiques en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte



Question 15: Déterminer sur le document réponse 1-2, où vous placerez votre point de mesure, la valeur approximative de la pulsation de coupure à 0 db ω_{c_0} qui annule le gain de la $FTBO$ du système étudié.

Sur le diagramme asymptotique, on a exactement :

$$\omega_{c_0} = 10\, rad.s^{-1}$$

En réalité, sur le tracé réel, on a :

$$\omega_{c_0} = 9{,}5\, rad.s^{-1}$$

Question 16: Déterminer la valeur approximative de la phase pour cette pulsation sur le document réponse 1-3 en plaçant le point de votre mesure

Cf tracé :

$$\varphi_{\omega_{c_0}} \approx -90°$$

Stabilité du système

Question 17: Préciser les moyens à disposition pour étudier la stabilité d'un système bouclé, que ce soit sur sa FTBO ou sur sa FTBF

On peut soit :

- Déterminer les pôles de sa FTBF et vérifier qu'ils sont tous à partie réelle strictement négative
- Etudier la FTBO à l'aide du critère du revers dans Bode, Black ou Nyquist

Question 18: Les pôles de la FTBO permettent-ils d'appliquer le critère du revers ?

$$\frac{10}{p\left(1+\frac{1}{30}p\right)}$$

La fonction possède un pôle réel strictement négatif (-30) et un pôle nul 0 d'ordre 1. Il n'y a donc pas de pôles à partie réelle strictement positive.

On peut appliquer le critère du revers dans ce cas.

Question 19: Enoncer le critère du Revers dans Bode

Un système asservi linéaire stable en boucle ouverte est stable en boucle fermée si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le diagramme de Bode :

- à la pulsation de coupure ω_{c_0} pour laquelle $G = 0\ dB$, le déphasage est supérieur à $-180°$
- à la pulsation $\omega_{-180°}$ pour laquelle le déphasage est égal à $-180°$, le gain est inférieur à $0\ db$

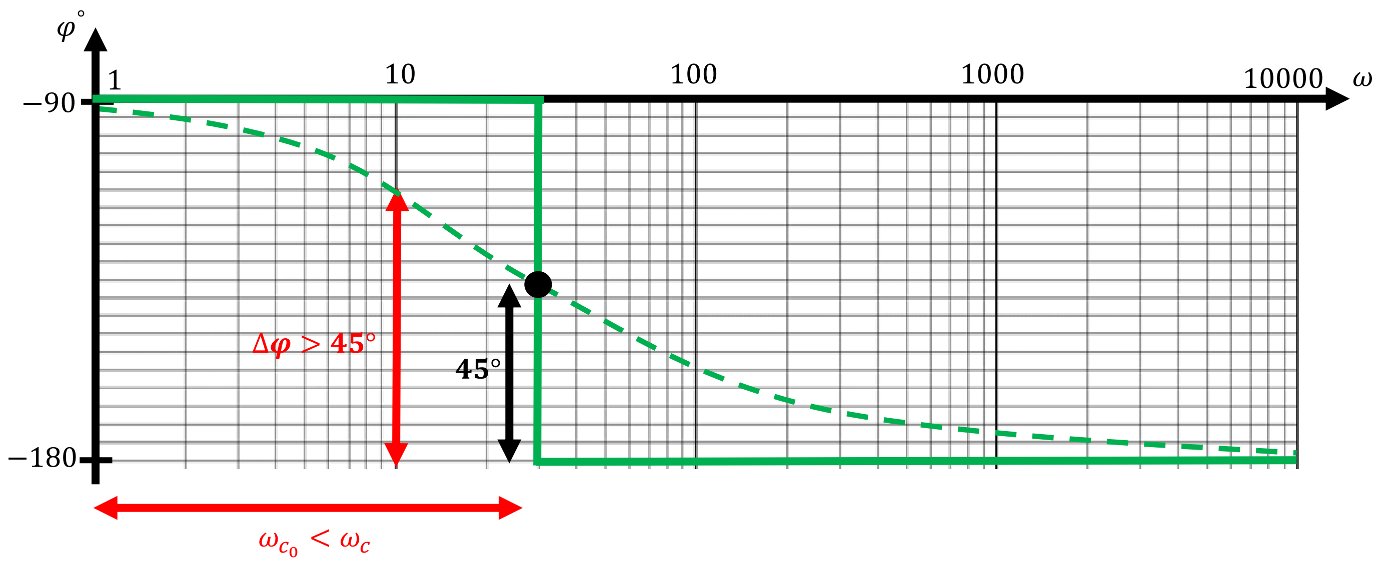
Question 20: Le système étudié est-il stable ?

On peut vérifier le critère à ω_{c_0}, le second on ne peut pas, mais comme c'est monotone décroissant (ou en utilisant Black), on a donc, 'après le critère du Revers, un système stable.

Remarque *: Bien préciser que l'on applique le critère du Revers dans Bode*

Question 21: Justifier en quelques mots le fait qu'il est certain que la marge de phase est supérieure à 45°

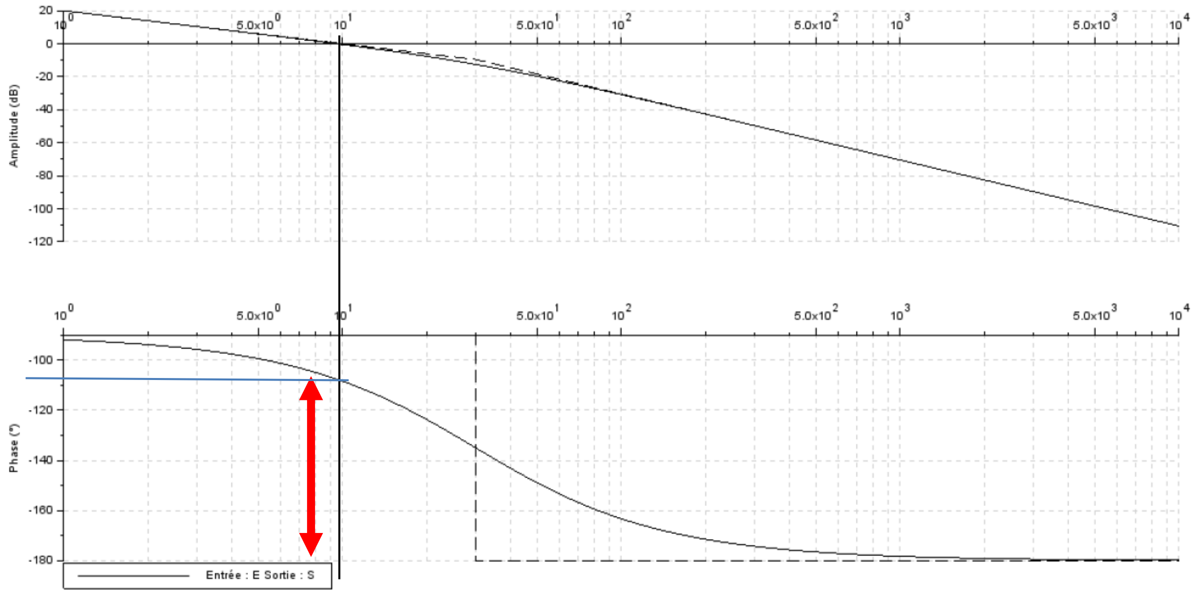
1° ordre intégré – La marge de phase est de 45° si $\omega_{c_0} = \omega_c = \frac{1}{T}$. On a $\omega_{c_0} < \omega_c$, donc $\Delta\varphi > 45°$



Marges de stabilité

Question 22: Faire apparaître à l'aide d'une double flèche la marge de phase du système sur le diagramme de Bode en phase et donner une valeur approchée de sa valeur

Remarque *: Dans les concours, on vous demande souvent de réaliser un diagramme asymptotique sur un document réponse, puis plus loin, on vous donne la courbe réelle. PENSEZ A VERIFIER votre diagramme asymptotique ;)*



$$\Delta\varphi \approx 72°$$

Attention *: certains croient que l'on peut trouver $\omega_{-180°}$ sur cette courbe de phase, mais je rappelle que l'on tend vers cette valeur sans jamais l'atteindre. La marge de gain est infinie !*
Erreur courante *: Placer la double flèche entre la courbe de phase et l'axe des abscisses ☹*

Question 23: Retrouver $\boldsymbol{\omega_{c_0}}$ par le calcul

$$G = 0$$
$$\Leftrightarrow \left|H(j\omega_{c_0})\right| = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{10}{\left|j\omega_{c_0}\left(1+\frac{1}{30}j\omega_{c_0}\right)\right|} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{10}{\omega_{c_0}\sqrt{1+\left(\frac{\omega_{c_0}}{30}\right)^2}} = 1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{{\omega_{c_0}}^2+\frac{{\omega_{c_0}}^4}{900}} = 10$$
$$\Leftrightarrow {\omega_{c_0}}^2+\frac{{\omega_{c_0}}^4}{900} = 100$$
$$\Leftrightarrow {\omega_{c_0}}^4+900{\omega_{c_0}}^2-90000 = 0$$
$$X = {\omega_{c_0}}^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow X^2+900X-90000 = 0$$
$$\Delta = 900^2+4*90000 = 1\,170\,000$$
$$X = \frac{-900\pm\sqrt{1\,170\,000}}{2} = \begin{cases} -990{,}83 & \\ 90{,}83 & ; \quad Ok\ car\ X > 0 \end{cases}$$

$$\omega_{c_0} = \sqrt{X} = 9{,}53\ rd.s^{-1} \quad ; \quad car\ \omega_{c_0} > 0$$

Question 24: Calculer les valeurs exactes du gain et de la phase en $\boldsymbol{\omega_{c_0}}$

Le calcul du gain, c'est un piège ☺ Ou une manière de vérifier ses calculs.

$$FTBO(p) = \frac{10}{p\left(1+\frac{1}{30}p\right)} \quad ; \quad FTBO(j\omega) = \frac{10}{j\omega\left(1+\frac{1}{30}j\omega\right)}$$

$$G_{dB} = 20\log|FTBO(j\omega)| = 20\log\left|\frac{10}{-\frac{\omega^2}{30}+j\omega}\right| = 20\log\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{\omega^4}{30^2}+\omega^2}}\right) = 20\log\left(\frac{10}{\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{30^2}+1}}\right)$$
$$G_{dB} = 20-20\log\left(\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{30^2}+1}\right)$$
$$G_{dB_{\omega_{c_0}}} = 20-20\log\left(\omega_{c_0}\sqrt{\frac{{\omega_{c_0}}^2}{30^2}+1}\right) = 0{,}000615\ cqfd$$

Pour la phase deux méthodes :

Bonne méthode	Mauvaise méthode
Ne pas développer le dénominateur ! $\varphi_{\omega_{c_0}} = \arg\left(FTBO\left(j\omega_{c_0}\right)\right)$ $= \arg\left(\frac{10}{j\omega_{c_0}\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega_{c_0}}{30}\right)}\right)$ $= -\arg\left(j\omega_{c_0}\right) - \arg\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega_{c_0}}{30}\right)$ $= -\frac{\pi}{2} - \mathrm{atan}\left(\frac{\omega_{c_0}}{30}\right)$ $= -1{,}878\ rd = \mathbf{-107{,}62°}$	$\varphi = \arg\left(FTBO\left(j\omega_{c_0}\right)\right)$ $= \arg\left(\frac{10}{-\frac{{\omega_{c_0}}^2}{30} + j\omega_{c_0}}\right)$ $= -\arg\left(-\frac{{\omega_{c_0}}^2}{30} + j\omega_{c_0}\right)$ $= \arg\left(-\frac{{\omega_{c_0}}^2}{30} - j\omega_{c_0}\right)$ $\sin\varphi = \frac{-\omega}{\lvert \mathrm{H} \rvert} < 0$ $\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{-\frac{{\omega_{c_0}}^2}{30}}{\sqrt{\left(\frac{{\omega_{c_0}}^2}{30}\right)^2 + {\omega_{c_0}}^2}}\right)$ $= -\cos^{-1}\left(\frac{-\omega_{c_0}}{\sqrt{{\omega_{c_0}}^2 + 30^2}}\right)$ $\varphi_{\omega_{c_0}} = -1{,}878\ rd = \mathbf{-107{,}62°}$

Question 25: En déduire la marge de phase du système

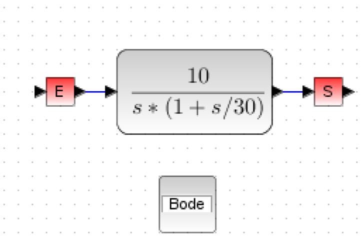
$$\Delta\varphi = 180 + \varphi_{\omega_{c_0}} = 180 - 107{,}62 = 72{,}38°$$

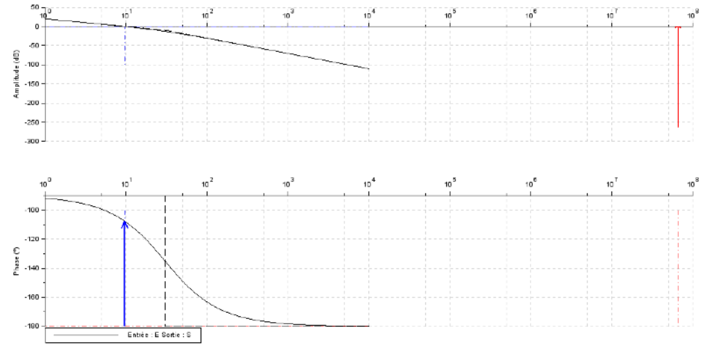
Question 26: Que peut-on dire de la marge de gain du système ?

La phase n'atteint jamais -180, on ne peut donc définir de marge de gain. On parle parfois de marge de gain infinie.

Question 27: Expliquer la marge de gain affichée

L'ordinateur résout probablement une équation du type $\varphi_\omega + 180 < \varepsilon$ et trouve une solution…





Marge de gain : 262.96dB ; Marge de phase : 72.37°

Conclusion

Question 28: Conclure quant à la capacité du système à satisfaire la marge de phase du cahier des charges.

$$\Delta\varphi = 72° > 45°$$

Le cahier des charges est vérifié