SESSION 2020

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

Q1. La matrice A est symétrique réelle et donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral.

$\text{rg}\,(A - I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ (car les trois colonnes sont égales et non nulles). D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}\,(A - I_3)) = 3 - 1 = 2$. Donc, 1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2 et même exactement 2 car A est diagonalisable.

La dernière valeur propre λ est fournie par la trace de A : $\lambda + 1 + 1 = \text{Tr}(A) = 6$ et donc $\lambda = 4$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(A) = (1, 1, 4) \text{ et } \chi_A = (X - 1)^2(X - 4).}$$

$E_1(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Donc, $E_1(A) = \text{Vect}\,(U_1, U_2)$ où $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (U_1 et U_2 sont deux vecteurs non colinéaires du plan $E_1(A)$ et donc (U_1, U_2) est une base de $E_1(A)$).

On sait que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux (pour le produit scalaire usuel). Donc, $E_4(A) = (E_1(A))^{\perp} = \text{Vect}\,(U_3)$ où $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ où } D = \text{diag}(1, 1, 4) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Déterminons P^{-1} (pour la suite de l'exercice). Notons $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}'$ la base (U_1, U_2, U_3). On a $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et donc $P^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$. Or,

$$\left\{\begin{array}{l} U_1 = E_1 - E_2 \\ U_2 = E_1 - E_3 \\ U_3 = E_1 + E_2 + E_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E_2 = E_1 - U_1 \\ E_3 = E_1 - U_2 \\ U_3 = E_1 + (E_1 - U_1) + (E_1 - U_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E_1 = \dfrac{1}{3}(U_1 + U_2 + U_3) \\ E_2 = \dfrac{1}{3}(-2U_1 + U_2 + U_3) \\ E_3 = \dfrac{1}{3}(U_1 - 2U_2 + U_3) \end{array}\right.$$

et donc

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Q2. Soit $B = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \text{diag}(1, 1, 2)$. Alors, $B^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Déterminons B explicitement.

$$B = P\Delta P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Si } B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ alors } B^2 = A.}$$

Q3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4^n \\ -1 & 0 & 4^n \\ 0 & -1 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.}$$

Q4. μ_A est un diviseur unitaire de χ_A d'après le théorème de Cayley-Hamilton, admettant toute valeur propre de A pour racine et à racines simples car A est diagonalisable. Donc,

$$\boxed{\mu_A = (X-1)(X-4).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par μ_A s'écrit $X^n = Q_n \times \mu_A + a_nX + b_n \quad (*)$ où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. Puisque μ_A est un polynôme annulateur de A, en évaluant en A, on obtient

$$A^n = a_nA + b_nI_3.$$

Déterminons a_n et b_n. En évaluant les deux membres de l'égalité $(*)$ en 1 et 4, on obtient $\left\{\begin{array}{ll} a_n + b_n = 1 & \text{(I)} \\ 4a_n + b_n = 4^n & \text{(II)} \end{array}\right.$ et donc $a_n = \dfrac{4^n-1}{3}$ ((II)-(I)) et $b_n = \dfrac{4-4^n}{3}$ (4(I)-(I)). Donc,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{4^n-1}{3}A + \frac{4-4^n}{3}I_3.}$$

EXERCICE II

Q5. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, posons $A_p = \dfrac{1}{p}I_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p \in GL_n(\mathbb{R})$ (car $\det(A_p) = \dfrac{1}{p^n} \neq 0$).
La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente, de limite 0_n qui n'est pas inversible

Ainsi, il existe une suite convergente d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge et dont la limite n'est pas dans $GL_n(\mathbb{R})$. Donc,

$$\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas fermé dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q6. On sait que l'application $d\ :\ A \mapsto \det(A)$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})/\ \det(A) \in \mathbb{R}^*\} = d^{-1}(]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$. $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant que réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}$. Donc, $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

$$\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ est ouvert dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q7. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. M admet un nombre fini de valeurs propres non nulles et on peut considérer $\rho = \mathrm{Min}\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M) \setminus \{0\}\}$. Par construction, pour tout $\lambda \in]0, \rho[$, λ n'est pas valeur propre de M et donc $M - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon > 0$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_\infty$. Il existe $\lambda \in]0, \varepsilon[$ tel que la matrice $N = M - \lambda I_n$ soit inversible. De plus, $\|M - N\|_\infty = \|\lambda I_n\|_\infty = \lambda < \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in GL_n(\mathbb{R})/\ \|M - N\|_\infty < \varepsilon.$$

Ceci montre que

$$\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q8. Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$. On suppose d'abord A inversible :

$$\chi_{AB} = \det(XI_n - AB) = \det\left(A\,(XI_n - BA)\,A^{-1}\right) = \det(A) \times \det(XI_n - BA) \times \frac{1}{\det(A)} = \det(XI_n - BA)$$
$$= \chi_{BA}.$$

On suppose maintenant A quelconque. Puisque $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles, convergente, de limite A.

$$\begin{aligned}
\chi_{AB} &= \det(XI_n - AB) = \det\left(\lim_{p\to+\infty}(XI_n - A_pB)\right)\\
&= \lim_{p\to+\infty}\det(XI_n - A_pB)\ \text{(par continuité du déterminant)}\\
&= \lim_{p\to+\infty}\det(XI_n - BA_p)\ (\text{car } A_p \in GL_n(\mathbb{R}))\\
&= \det(XI_n - BA) = \chi_{AB}.
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \chi_{AB} = \chi_{BA}.}$$

$A = E_{1,1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = E_{2,1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. $AB = 0_2$ et $BA = E_{2,1} = B$.
Puisque $AB = 0_2$, $\mu_{AB} = X$. Puisque $B \neq 0$ et $B^2 = 0$, $\mu_{BA} = X^2$. A et B sont un exemple de matrices telles que AB et BA n'aient pas même polynôme minimal.

Q9. Si $GL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, par continuité du déterminant et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\det(GL_n(\mathbb{R})) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ ce qui est faux (car les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles). Donc,

$$\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas connexe par arcs.}}$$

PROBLEME

Partie I - Exemples, propriétés

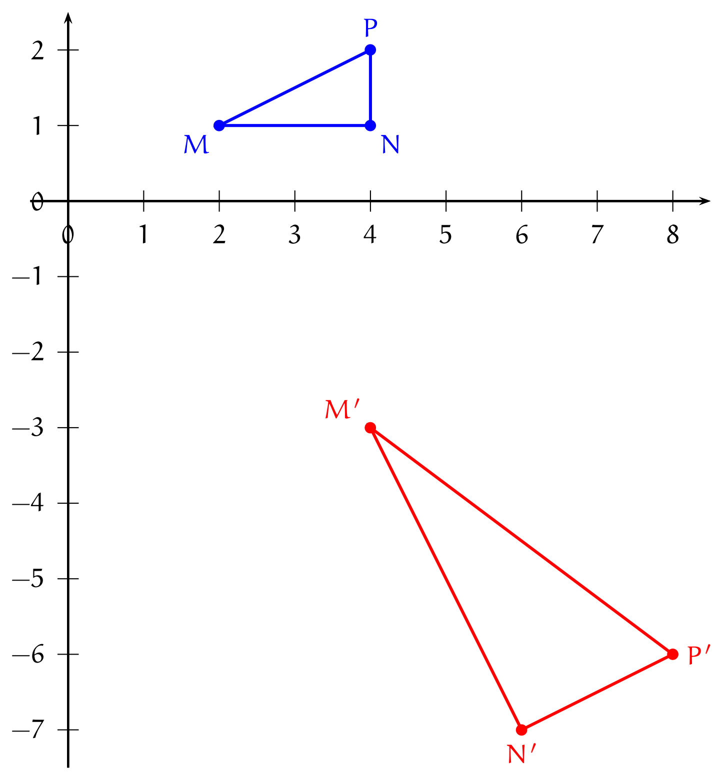
Q10. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. $A = \sqrt{5}B$ où $B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B. La matrice de v dans la base orthonormée $\mathscr{B}$, à savoir B, est une matrice orthogonale car ses deux colonnes sont unitaires et orthogonales (pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$). Donc v est un automorphisme orthogonal et $u = \sqrt{5}v$. Puisque v est un automorphisme orthogonal, pour tout x dans E,

$$\|u(x)\| = \left\|\sqrt{5}v(x)\right\| = \sqrt{5}\|v(x)\| = \sqrt{5}\|x\|.$$

$$\boxed{A \text{ est la matrice d'une similitude de rapport } \sqrt{5}.}$$

Q11. Puisque $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, le point M' a pour coordonnées $(4, -3)$. De même, les points N' et P' ont pour coordonnées respectives $(6, -7)$ et $(8, -6)$.



$\text{aire}\,(MNP) = \dfrac{MN \times NP}{2} = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$. D'autre part,

$$\text{aire}\,(M'N'P') = \frac{1}{2}\text{abs}\left(\det\left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}\right)\right) = \frac{1}{2}\text{abs}\left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\right) = 5.$$

Donc, $\text{aire}\,(M'N'P') = \left(\sqrt{5}\right)\text{aire}\,(MNP)$.

Q12. Soit $u \in \text{Sim}(E)$. Il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$. Si pour $x \in E$, on a $u(x) = 0$ alors $\|x\| = \dfrac{1}{k}\|u(x)\| = 0$ et donc $x = 0$. Ceci montre que $\text{Ker}(u) = \{0\}$ puis que u est injectif. Puisque $\dim(E) < +\infty$, on en déduit que $u \in GL(E)$.

$$\boxed{\text{Sim}(E) \subset GL(E).}$$

Vérifions maintenant que Sim(E) est un sous-groupe de $GL(E)$.

- Pour tout $x \in E$, $\|Id_E(x)\| = \|x\| = 1\|x\|$ avec $1 > 0$. Donc Id_E est un élément de Sim(E).
- Soit $(u, u') \in (\text{Sim}(E))^2$. Il existe $(k, k') \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$ et $\|u'(x)\| = k'\|x\|$. Mais alors, pour tout $x \in E$,

$$\|u \circ u'(x)\| = \|u(u'(x)\| = k\|u'(x)\| = kk'\|u(x)\|.$$

  Puisque $kk' > 0$, ceci montre que $u \circ u' \in$ Sim(E).
- Soit $u \in$ Sim(E). Soit $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \left\|u\left(u^{-1}(x)\right)\right\| = k\left\|u^{-1}(x)\right\|$$

  et donc $\left\|u^{-1}(x)\right\| = \dfrac{1}{k}\|x\|$. Puisque $\dfrac{1}{k} > 0$, ceci montre que $u^{-1} \in$ Sim(E).

En résumé, Sim(E) est contenu dans $GL(E)$, contient Id_E, est stable pour la loi $\circ$ et pour le passage à l'inverse. Ceci montre que Sim(E) est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$ et donc que

$$\boxed{(\text{Sim}(E), \circ) \text{ est un groupe.}}$$

Q13. Posons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
{}^tAA = I_n &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \delta_{i,j} \\
&\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \delta_{i,j} \text{ (car } \mathscr{B} \text{ est orthonormée)} \\
&\Leftrightarrow u(\mathscr{B}) \text{ est une base orthonormée de } E \\
&\Leftrightarrow u \in O(E) \text{ (d'après un théorème de cours).}
\end{aligned}$$

On a montré que $u \in O(E) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathbb{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

Soit u une similitude de rapport $k > 0$. Pour tout $x \in E$, $\left\|\dfrac{1}{k}u(x)\right\| = \dfrac{1}{k}\|u(x)\| = \|x\|$ et donc $\dfrac{1}{k}u \in O(E)$ puis $\dfrac{1}{k}\text{Mat}_{\mathbb{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$. Inversement, si $\dfrac{1}{k}\text{Mat}_{\mathbb{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\dfrac{1}{k}u \in O(E)$ et donc u est une similitude de rapport k. Dit autrement,

$$\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k \text{ si et seulement si } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = kM \text{ avec } M \in O_n(\mathbb{R}).}$$

Q14. En notant C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de A, on a $\|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 3$ et $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_2\rangle = 0$. Donc, $\dfrac{1}{3}A \in O_3(\mathbb{R})$ puis l'endomorphisme de matrice u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une similitude de rapport 3. Soit $v = \dfrac{1}{3}u$ de sorte que $v \in O\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $u = 3v$.

Soit $f \in O(E)$. $u^{-1} \circ f \circ u = \dfrac{1}{3} \times 3v^{-1} \circ f \circ v = v^{-1} \circ f \circ v \in O(E)$ car $(O(E), \circ)$ est un groupe.

Q15. Par hypothèse, l'image par u de la sphère unité et une certaine sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors, $\left\|\dfrac{1}{\|x\|}x\right\| = \dfrac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$. Donc, $\left\|u\left(\dfrac{1}{\|x\|}x\right)\right\| = r$ puis $\dfrac{1}{\|x\|}\|u(x)\| = r$ et finalement, $\|u(x)\| = r\|x\|$ ce qui reste vrai pour $x = 0$.

Ainsi, il existe $k > 0$ (à savoir $k = r$), tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\|$ et donc u est une similitude de E.

Partie II - Assertions équivalentes

Q16. Soit u une similitude de rapport $k > 0$. Soit $v = \dfrac{1}{k}u$. Alors $v \in O(E)$ et $u = kv = (kId_E) \circ v$. u est donc la composée d'une homothétie non nulle de E et d'un élément de $O(E)$.
Inversement, soient α un réel non nul et $v \in O(E)$ puis $u = (\alpha Id_E) \circ v$. Si $\alpha > 0$, $u = \alpha v$ est une similitude de rapport α. Si $\alpha < 0$, on écrit $u = \alpha' v'$ où $\alpha' = -\alpha > 0$ et $v' = -v \in O(E)$ (car si A est la matrice de v dans une certaine base orthonormée de E, alors $A' = -A$ est la matrice de $-v$ dans cette même base puis ${}^tA'A' = {}^tAA = I_n$).

Q17. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique et de son orientation canonique. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
$\|C_1\| = \|C_2\| = \sqrt{5}$ puis $A = \sqrt{5}M$ où $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Les colonnes de M sont unitaires et orthogonales et donc $M \in O_2(\mathbb{R}$. $\det(M) = 1$ et donc $M \in SO\left(\mathbb{R}^2\right)$. On sait alors que M est la matrice dans $\mathscr{B}$ d'une certaine rotation v. Soit θ la mesure élément de $]-\pi, \pi]$, de l'angle de v. Alors $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} > 0$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < 0$. Donc, $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$ puis $\theta = \mathrm{Arcsin}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

u est la composée de l'homothétie de rapport $\sqrt{5}$ et de la rotation d'angle $-\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Q18. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \left(\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\right) - \left(\|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2\right) = 4\langle x, y\rangle$$

et donc $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

Supposons que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = k^2\langle x, y\rangle$. En particulier, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = k^2\|x\|^2$ puis $\|u(x)\| = k\|x\|$ (en supposant que l'énoncé sous-entend que $k > 0$). Donc, u est une similitude de rapport k.

Réciproquement, soit u une similitude de rapport $k > 0$. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right) \\ &= k^2 \times \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = k^2\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k > 0 \text{ si et seulement si pour tout } (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = k^2\langle x, y\rangle.}$$

Q19. Soit u une similitude de rapport k. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\langle x, y\rangle = 0$. Alors, $\langle u(x), u(y) = k^2\langle x, y\rangle = 0$. Donc, u conserve l'orthogonalité.

Inversement, soit u un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$\langle e_i + e_j, e_i - e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1 = 0.$$

On en déduit que

$$0 = \langle u\left(e_i + e_j\right), u\left(e_i - e_j\right)\rangle = \langle u\left(e_i\right) + u\left(e_j\right), u\left(e_i\right) - u\left(e_j\right)\rangle = \|u\left(e_i\right)\|^2 - \|u\left(e_j\right)\|^2$$

et donc que $\|u\left(e_i\right)\| = \|u\left(e_j\right)\|$. Posons alors $k = \|u\left(e_1\right)\| = \ldots = \|u\left(e_n\right)\|$.

Si $k = 0$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|u\left(e_i\right)\| = 0$ puis $u\left(e_i\right) = 0$. u s'annule sur une base de E et donc $u = 0$. Dans ce cas, u n'est pas une similitude.
Si $k > 0$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\left\|\dfrac{1}{k}u\left(e_i\right)\right\| = 1$. D'autre part, puisque u conserve l'orthogonalité, les vecteurs $u\left(e_i\right)$ sont deux à deux orthogonaux et il en est de même des vecteurs $\dfrac{1}{k}u\left(e_i\right)$. En résumé, la famille $\left(\dfrac{1}{k}u\left(e_1\right), \ldots, \dfrac{1}{k}u\left(e_n\right)\right)$ est une base orthonormée de E.
Puisque l'endomorphisme $\dfrac{1}{k}u$ transforme une base orthonormée en une base orthonormée, on sait que $\dfrac{1}{k}u$ est un automorphisme orthogonal et donc u est une similitude de rapport k. En résumé,

$$\boxed{\text{Pour tout endomorphisme non nul } u,\ u \text{ est une similitude si et seulement si } u \text{ conserve l'orthogonalité.}}$$

Q20. Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\|u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y)\|^2 &= \langle u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y), u(\lambda x + \mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y)\rangle \\ &= \langle u(\lambda x + \mu y), u(\lambda x + \mu y)\rangle + \lambda^2 \langle u(x), u(x)\rangle + \mu^2 \langle u(y), u(y)\rangle \\ &- 2\lambda\langle u(\lambda x + \mu y), u(x)\rangle - 2\mu\langle u(\lambda x + \mu y), u(y)\rangle + 2\lambda\mu\langle u(x), u(y)\rangle \\ &= k^2 \left(\langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle + \lambda^2 \langle x, x\rangle + \mu^2 \langle y, y\rangle \right. \\ &\left. -2\lambda\langle \lambda x + \mu y, x\rangle - 2\mu\langle \lambda x + \mu y, y\rangle + 2\lambda\mu\langle x, y\rangle\right) \\ &= k^2 \|(\lambda x + \mu y) - \lambda x - \mu y\|^2 = 0\end{aligned}$$

et donc $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$. Ceci montre que $u \in \mathscr{L}(E)$. Mais alors, d'après la question Q18, si $u \neq 0$, u est une similitude de rapport k.

