

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.
- Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.
- Tous les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatibles avec les données fournies.

Le sujet de cette épreuve est constitué de deux parties indépendantes : la première partie est notée sur **4 points**, la deuxième sur **16 points**.

## Partie 1 : Turbine à gaz

De la vapeur d'eau évolue dans une turbine horizontale, de section constante  $\Sigma$ , munie d'une hélice. À l'extérieur, la température est constante et vaut  $T_0 = 35^\circ\text{C}$ . La vapeur est admise dans la turbine à la température  $T_1 = 400^\circ\text{C}$  et la pression  $P_1 = 6,0 \text{ bar}$ , et ressort à la température  $T_2 = 100^\circ\text{C}$  sous pression  $P_2 = 1,0 \text{ bar}$ . Le débit massique au travers de la turbine vaut  $D_m = 1 \text{ kg.s}^{-1}$ . On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait et on note  $c_p$  sa chaleur massique.

### Données :

- Masse molaire de l'eau :  $M_e = 18 \text{ g.mol}^{-1}$ .
- Coefficient isentropique :  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,3$ .
- Constante des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .
- Expression de l'entropie molaire d'un gaz parfait en fonction de la température  $T$  et de la pression  $P$  :

$$S_m(T, P) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{P}{P_1}\right) + S_m(T_1, P_1)$$

- Expression des deux principes de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire :
  - $D_m \left[ (h_s + e_{c,s} + e_{p,s}) - (h_e + e_{c,e} + e_{p,e}) \right] = P_u + P_{th}$  ;
  - $D_m (s_s - s_e) = \frac{P_{th}}{T_0} + s_{crée}$ .

avec  $h$  l'enthalpie massique,  $e_c$  l'énergie cinétique massique et  $e_p$  l'énergie potentielle massique du fluide ;  $P_u$  la puissance mécanique utile qu'il reçoit et  $P_{th}$  la puissance thermique reçue,  $s_{crée}$  l'entropie créée par unité de temps et où l'on a noté  $e$  les grandeurs en entrée et  $s$  celles en sortie.

On néglige les variations d'énergie cinétique.

1. Sachant que le but d'une turbine est de récupérer une puissance mécanique, les pertes thermiques sont donc a priori faibles. Exprimer, en

- fonction de  $D_m$ ,  $c_p$ ,  $T_1$  et  $T_2$ , la puissance maximale cédée à la turbine dans l'hypothèse d'un écoulement adiabatique.
2. Calculer la variation d'entropie du fluide entre l'entrée et la sortie de la turbine. Justifier que le résultat obtenu est contradictoire avec l'hypothèse d'un écoulement adiabatique.  
On suppose que la transformation est réversible dans la turbine.
  3. Dédire du second principe de la thermodynamique la puissance  $P_{th}$  cédée par la vapeur d'eau à l'extérieur.
  4. En déduire la puissance  $P_u$  cédée à la turbine.

## Partie 2 : Vibromètre

### 1. Vibromètre mécanique

La figure 1 représente le schéma de principe d'un dispositif mécanique de mesure de vibrations. Ce dernier est constitué d'une masse  $m$ , d'un ressort de raideur  $k$ , d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\alpha$  et d'un traceur qui donne le mouvement de la masse  $m$  en fonction du temps. L'ensemble est rigidement lié au système mécanique dont on veut étudier les vibrations.

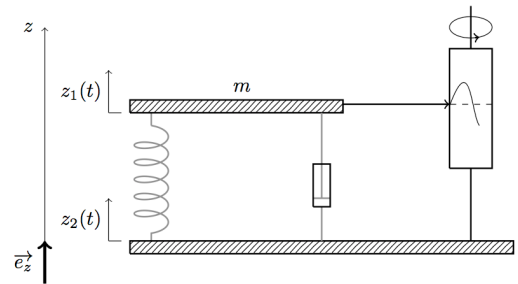


Figure 1 : Vibromètre mécanique.

On repère le mouvement de la masse  $m$  par  $z_1(t)$  et on suppose que celui de la base est de la forme  $z_2(t) = Z_2 \sin(\omega t)$ . L'origine de l'axe  $(Oz)$  vertical ascendant est prise à la position d'équilibre du système. L'étude est faite dans le référentiel du laboratoire  $(R)$  supposé galiléen. On note  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$  le champ de pesanteur supposé uniforme.

- 1.1. Appliquer le deuxième loi de Newton à la masse  $m$ . Montrer que l'équation de son mouvement en fonction de la variable  $z(t) = z_1(t) - z_2(t)$  s'écrit sous la forme :  $\frac{d^2 z}{dt^2} + \beta \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = -\frac{d^2 z_2}{dt^2}$ . Exprimer  $\omega_0$  et  $\beta$ .
- 1.2. On cherche une solution permanente sous la forme  $z(t) = Z \sin(\omega t - \delta)$ . Déterminer  $Z = Z(\omega)$  et  $\delta = \delta(\omega)$ .
- 1.3. Représenter la variation de  $\frac{Z}{Z_2}$  en fonction du rapport des pulsations  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , pour  $\beta = 0$  et  $\beta = 0,1$  et  $\beta = 1$ .
- 1.4. On considère le cas d'un ressort de faible raideur,  $\omega_0 \ll \omega$ . Écrire dans ce cas  $z(t)$ . Montrer que la mesure de l'amplitude  $Z$  permet de déduire l'amplitude  $Z_2$  des vibrations. Quel est le rôle du système dans ce cas ?
- 1.5. On considère le cas d'un ressort de raideur élevée,  $\omega_0 \gg \omega$ . Montrer que la mesure de l'amplitude  $Z$  permet de déduire l'accélération des vibrations. Quel est le rôle du système dans ce cas ?

## 2. Vibromètre laser

La vibrométrie laser est une technique de mesure sans contact des vibrations qui utilise l'effet Doppler. Elle est actuellement le procédé disposant de la plus haute résolution de déplacement et de vitesse, elle est utilisée dans de nombreux domaines des sciences fondamentales. Le vibromètre est un dispositif interférométrique à deux faisceaux utilisant le principe de l'interféromètre de Michelson et qui détecte la différence de phase entre une référence interne et le faisceau de mesure réfléchi sur la cible. Il permet la mesure sur des surfaces chaudes, molles, mobiles, miniatures, légères ou difficilement accessibles, sans les charger par la masse d'un accéléromètre. Il peut être utilisé à des distances de quelques centimètres à plusieurs centaines de mètres.

### Données :

- Célérité de la lumière dans le vide :  $c_0 = 3,00.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .
- Constante de Planck :  $h = 6,63.10^{-34} \text{ J.s}$ .
- $1\text{eV} = 1,6.10^{-19} \text{ J}$ .

On considère l'interféromètre de Michelson (figure 2). L'ensemble laser-élargisseur de faisceau est modélisé par une source ponctuelle placée au foyer objet d'une lentille convergente ( $L_1$ ). Les deux ondes de l'interféromètre sont issues de la même source laser de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$ . L'onde initiale est divisée en amplitude par une lame séparatrice semi-transparente (semi-réfléchissante). Une des deux ondes, appelée onde de référence, d'intensité  $I_1$ , est dirigée directement vers le photodétecteur,

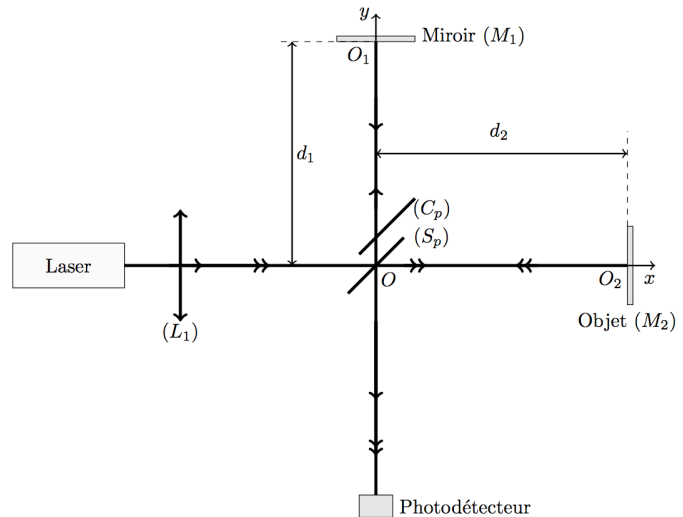


Figure 2 : vibromètre laser.

après réflexion en incidence normale sur le miroir fixe ( $M_1$ ), sans changer de fréquence. La deuxième onde, appelée sonde d'intensité  $I_2$ , est envoyée en incidence normale vers l'objet cible (représenté par le miroir mobile ( $M_2$ )) et subit un décalage Doppler avant d'interférer avec l'onde de référence au niveau du photodétecteur.

Les miroirs ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ) sont parfaitement orthogonaux entre eux et initialement à égale distance de la séparatrice ( $d_1 = d_2 = d$ ), avec  $OO_1 = d_1$  et  $OO_2 = d_2$ . L'interféromètre est placé dans l'air d'indice  $n_a = 1$ .

**2.1.** Dans un laser hélium-néon, le pompage est effectué entre des niveaux d'énergie de l'hélium, mais la radiation amplifiée  $\lambda_0$  correspond à une transition électronique entre deux niveaux d'énergie de l'atome de néon. La figure 3 représente un diagramme simplifié des niveaux d'énergie du néon.

**2.1.1.** Quelle est la couleur de la lumière émise par ce laser ?

**2.1.2.** Quelle relation lie la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  d'une onde à sa fréquence  $f_0$  ?

**2.1.3.** Donner l'expression de la différence d'énergie  $\Delta E$  entre les deux niveaux d'énergie concernés. Calculer numériquement  $\Delta E$  (en  $eV$ ). Préciser entre quels niveaux s'effectue la transition responsable de la lumière du laser.

**2.1.4.** Justifier que la transition est de type électronique.

**2.1.5.** Quelles propriétés du rayonnement laser sont mises à profit dans la technique de vibrométrie laser ?

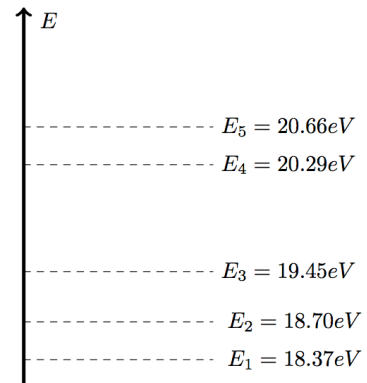


Figure 3 : Diagramme énergétique simplifié du néon.

**2.2.** Justifier que les deux ondes issues de la division d'amplitude sont mutuellement cohérentes.

**2.3.** En se servant d'un schéma clair, expliquer brièvement le rôle de la lame compensatrice. Cette compensation est-elle parfaite ?

**2.4.** Expliquer ce qu'est le contact optique. Donner l'allure du signal délivré par le photodétecteur dans ce cas.

**2.5.** Justifier la présence de la lentille mince ( $L_1$ ) placée à l'entrée de l'interféromètre de Michelson. Illustrer la réponse à l'aide d'un dessin de rayons lumineux.

Dans toute la suite, on admet que l'ensemble  $\{(S_p) + (C_p)\}$  est équivalent à une lame séparatrice théorique  $(S_p)_{th}$  qui n'introduit aucune différence de marche supplémentaire. À partir de la situation correspondant au contact optique, on translate le miroir mobile ( $M_2$ ) le long de l'axe  $Ox$  de la distance  $e$ .

**2.6.** Justifier rigoureusement, et à l'aide d'un schéma soigné, que l'interféromètre est équivalent, de point de vue chemin optique, à une lame d'air à faces parallèles. Donner l'épaisseur de cette lame.

**2.7.** Préciser la localisation des franges d'interférences et justifier qu'il s'agit d'anneaux avec ce réglage de l'interféromètre de Michelson.

**2.8.** On place le photodétecteur dans le plan focal image d'une lentille convergente ( $L_2$ ) à la sortie de l'interféromètre. Quel est le rôle cette lentille ?

**2.9.** Justifier brièvement que l'intensité lumineuse reçue par le photodétecteur s'écrit sous la forme  $I = 2I_0(1 + C \cos \varphi)$ , où  $I_1 + I_2 = 2I_0$  et  $\varphi$  est la différence de phase entre les deux ondes qui interfèrent en un point du champ d'interférence. Exprimer  $C$  en fonction de  $I_1$  et  $I_2$ .

**2.10.** Que représente  $C$  ? De quoi dépend-il ? Quelle est sa valeur maximale ?

**2.11.** Exprimer la différence de phase  $\varphi$  entre les deux ondes passant par les centres  $O_1$  et  $O_2$  des deux miroirs et interférant au centre  $P$  du photodétecteur, en fonction de l'écart  $e = OO_2 - OO_1$  et  $\lambda_0$ .

**2.12.** Justifier que l'on ne peut pas accéder au sens de déplacement de la cible mobile.

**2.13.** Pour quelles valeurs de  $\varphi$ , les interférences sont-elles constructives ? Pour quelles valeurs de  $\varphi$ , les interférences sont-elles destructives ? À quelle

variation de  $\varphi$  correspond le passage d'un maximum d'intensité au maximum suivant ?

**2.14.** La surface de la cible est mise en vibration, sa position varie au cours du temps :  $X(t) = d + e + x(t)$ ,  $x(t)$  repère la position du miroir mobile ( $M_2$ ) à partir du réglage correspondant à l'écart  $e = OO_2 - OO_1$ . Le photodétecteur produit une tension  $u(t)$  proportionnelle à l'intensité lumineuse  $I(t)$  qu'il reçoit :  $u(t) = U_0(1 + C \cos \varphi')$ ,  $U_0$  étant une constante.

**2.14.1.** Exprimer  $\varphi'$  en fonction des données utiles.

**2.14.2.** Justifier pourquoi la tension  $u(t)$  évolue dans le temps.

On suppose que l'intensité lumineuse est une fonction sinusoïdale du temps.

**2.14.3.** Montrer que la fréquence de ce signal est donnée par  $f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi'}{dt}$ .

**2.14.4.** On note  $v = \frac{dx}{dt}$  la vitesse de la cible et on suppose que, en régime quasi-sinusoïdal, le signal reçu par le photodétecteur varie avec une fréquence instantanée  $f(t)$  qui suit la relation  $f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi'}{dt}$ . Exprimer  $f(t)$  en fonction de  $v$ ,  $c_0$  et  $f_0$ . Commenter le résultat obtenu et en proposer une application.

**2.14.5.** Exprimer puis calculer numériquement le déplacement  $\Delta x_0$  correspondant au passage d'un maximum d'intensité au maximum suivant.

**2.14.6.** On suppose que la position de la cible varie de  $x_1$  à  $x_2$  ( $\Delta x = x_2 - x_1 \gg \lambda_0$ ). En utilisant le résultat précédent, montrer que l'amplitude de déplacement  $\Delta x$  peut être déterminée en fonction du nombre  $N$  de maxima du signal  $u(t)$  produit par le photodétecteur par  $\Delta x = \frac{N}{2} \lambda_0$ . Quelle est la limite inférieure de l'incertitude sur la mesure ?

**2.14.7.** La cible vibre harmoniquement avec une amplitude instantanée  $x(t) = X(t) - e = x_0 \cos(\omega t)$  telle que  $x_0 \ll \lambda_0$ . Montrer que l'expression linéarisée de la tension  $u(t)$  s'écrit sous la forme :

$$u(t) = U_0 \left( 1 + C \cos \left( 4\pi \frac{e}{\lambda_0} \right) \right) - 4\pi C \frac{x_0}{\lambda_0} U_0 \sin \left( 4\pi \frac{e}{\lambda_0} \right) \cos(\omega t)$$

**2.14.8.** Quelles sont les fréquences présentes dans la décomposition en série de Fourier du signal  $u(t)$  ? Tracer l'allure du spectre de  $u(t)$ .

On souhaite mesurer l'amplitude  $x_0$ . On applique alors le signal  $u(t)$  délivré par le photodétecteur à l'entrée d'un oscilloscope numérique.

**2.14.9.** Quelle précaution faut-il prendre si l'on souhaite numériser le signal  $u(t)$  ?

**2.14.10.** Donner l'allure du signal observé en mode AC de l'oscilloscope puis en mode DC.

L'oscilloscope intercale une capacité  $C_o$  en plus de la résistance d'entrée  $R_o$  pour réaliser un filtrage. Le filtre de la figure 4 est donc réalisé en entrée du mode AC de l'oscilloscope.

**2.14.11.** Pour supprimer la valeur moyenne, quelle fréquence faut-il éliminer dans le signal  $u(t)$  ?

**2.14.12.** En utilisant des schémas équivalents à haute puis à basse fréquence, vérifier que le filtre réalisé permet d'effectuer l'opération recherchée.

**2.14.13.** Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{\underline{u}'}{\underline{u}}$  de ce filtre et l'écrire sous la forme canonique :

$$\underline{H} = H_0 \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Exprimer  $H_0$  et  $\omega_0$ .

**2.14.14.** Exprimer la pulsation de coupure  $\omega_c$  du filtre à  $-3dB$ . Calculer  $\omega_c$  pour  $C_o = 15pF$  et  $R_o = 1M\Omega$ .

**2.14.15.** Quelle condition doit être vérifiée par  $\omega_0$  pour que le filtre permette d'effectuer l'opération recherchée ?

**2.14.16.** À quelle condition sur la fréquence de vibration  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , le filtre AC de l'oscilloscope utilisé remplit-il bien l'opération souhaitée ? Donner alors l'expression du signal de sortie  $u'(t)$ .

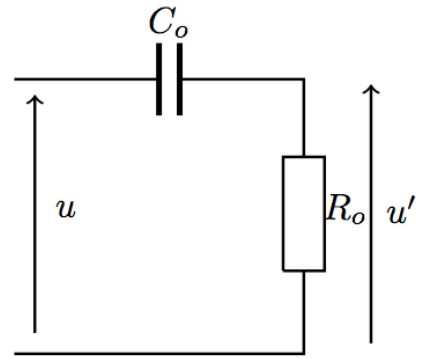


Figure 4 : filtre en entrée du mode AC de l'oscilloscope.