Rappel de sup : Algèbre linéaire

Dernière mise à jour 23 septembre 2018

*** *** *** ***

Plan

I. Rappels

1. Sous-espaces vectoriels

1. Sous-espaces vectoriels

Définition 1

$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ ssi $\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall x,y \in F, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \quad \alpha x+\beta y \in F \end{cases}$

Remarque. La définition précédente est équivalente à

$$F \subset E \text{ est un sous-espace vectoriel de } (E,+,.) \text{ ssi } \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall x,y \in F, \quad x+y \in F \\ \forall x \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \alpha.x \in F \end{cases}$$

Exemple 1. $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E appelés sous-espaces vectoriels triviaux de E.

Propriété 1

Soit F un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$, alors F est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire. F muni des lois restreintes, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Preuve. — F est stable pour l'addition puisque pour $(x,y) \in F^2$, on a :

$$x+y = 1.x+1.y \in F$$

— F est stable pour la multiplication externe puisque pour $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda x = \lambda x + 0x \in F \quad \text{avec } (\lambda, 0) \in \mathbb{K}^2 \quad \text{et} \quad (x,x) \in F^2$$

— si $x \in F$, son opposé $-x = (-1)x$ appartient à F.

Donc F est un sous-groupe de E, stable par multiplication scalaire.

Les quatre autres propriétés se déduisent facilement □

Exemple 2. Droite vectorielle et plan vectoriel

2. Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.
- Il est immédiat que $F \cap G \subset E$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- $F \cap G \neq \emptyset$, car ; puisque 0 appartient à F et à G (ce sont des sous-espaces vectoriels de E)
- Soient $u, v \in F \cap G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha u + \beta v \in F \cap G$. Puisque $u, v \in F$ (resp. G) et que F (resp. G) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , on en déduit que $\alpha u + \beta v \in F$ (resp. G) donc $\alpha u + \beta v \in F \cap G$.

□

Remarque. $G \cup F$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

Propriété 3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I une famille non vide et $(F_i)_{i \in I}$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.
- Pour tout $i \in I$, $F_i \subset E$, on en déduit que $\bigcap_{i \in I} F_i \subset E$
- $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ car $0 \in F_i$ pour tout $i \in I$
- Soient $u, v \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha u + \beta v \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Puisque $u, v \in F$ pour tout $i \in I$ et que F_i est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $\alpha u + \beta v \in F_i$ pour tout $i \in I$ donc $\alpha u + \beta v \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

□

Exemple 3. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, puis $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n$ est espace vectoriel

Exemple 4. Soit le système suivant pour $p, n \in \mathbb{N}^*$:

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Avec $\forall i \in 1, n$, $\forall j \in 1, p$, $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. Un tel système appelé système linéaire de n équations à p inconnues possède un ensemble de solutions $\mathrm{Sol}\,(S)$, qui est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. Montrons ce résultat.

Solution. — $0_{\mathbb{K}^p}$ est évidemment une solution de (S).

— Pour $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p), (\beta_1, \cdots, \beta_p) \in \mathrm{Sol}\,(S)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour $i \in 1, n$:

$$0 = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\alpha_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\beta_j \Rightarrow 0 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\alpha_j - \beta_j)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) - (\beta_1, \cdots, \beta_p) \in \mathrm{Sol}\,(S)$$

De plus, pour $i \in 1, n$, $\sum_{j=1}^{p} \lambda a_{i,j}\alpha_i = 0$ donc $(\lambda\alpha_1, \cdots, \lambda\alpha_p) \in \mathrm{Sol}\,(S)$ d'où le résultat.

En particulier, l'ensemble des $x = (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. □

3. Espace vectoriel engendré par une partie

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une partie A de E. On note $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A, alors :

- $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$, car $E \in \mathcal{F}_A$
- $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$ est un sous-espace vectoriel de E
- Pour tout G sous-espace vectoriel de E contenant A, on a $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F \subset G$

Définition 2

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une partie A de E. On note $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A, alors : $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$ est un sous-espace vectoriel de E, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. On l'appelle le sous-espace engendré par la partie A, noté $\mathbf{Vect}A$

Exemple 5.
1. $\mathbf{Vect}\emptyset = \{\vec{0}\}$
2. $\mathbf{Vect}E = E$

Théorème 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une famille non vide de E, alors

$$\mathbf{Vect}A := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i;\ n \in \mathbb{N},\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ (a_1, \cdots, a_n) \in A^n \right\}$$

Preuve. □

4. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 3

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme des sous-espaces vectoriels F et G l'ensemble

$$F + G := \{x + y \mid x \in F, \quad y \in G\}$$

Remarque. L'ensemble $F + G$ contient F et contient G : en effet tout élément x de F s'écrit $x = x + 0$ avec x appartenant à F et 0 appartenant à G (puisque G est un sous-espace vectoriel), donc x appartient à $F + G$. De même pour un élément de G.

Théorème 2

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Alors
1. $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Le sous-espace vectoriel $F + G$ de E est le sous-espace vectoriel de E engendré par $F \cup G$

Preuve. 1. Montrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E
- L'ensemble $F + G$ n'est pas vide car $O = O + O \in F + G$.

- Soient u et u' des éléments de $F+G$, il existe alors deux éléments de F, x et x', et deux éléments de G, y et y', tels que $u = x+y$ et $u' = x'+y'$.

  Soit λ un scalaire. En utilisant les axiomes des espaces vectoriels, on obtient :
$$\lambda u + u' = (\lambda x + x') + (\lambda y + y')$$
  Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels : $\lambda x+x' \in F$ et $\lambda y+y' \in G$ donc $\lambda u + u' \in F+G$

2. D'après la remarque précédente et le premier résultat du théorème, $F+G$ est un sous espace vectoriel contenant $F \cup G$.

   Il reste à démontrer que tout sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$ contient aussi $F+G$.

   Considérons H, un sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$, et u un élément de $F+G$. L'élément u est donc la somme d'un élément x de F et d'un élément y de G.
   Les éléments x et y appartiennent à $F \cup G$, donc ils appartiennent aussi à H, et comme H est un sous-espace vectoriel, l'élément $x+y$ appartient à H donc u est un élément de H. Donc H contient $F+G$.

□

Remarque. $F+G$ contient F et G et est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant F et G .

Définition 4: Somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E.
On dit que F et G sont en somme directe si et seulement si pour tout élément u de $F+G$, il existe un unique couple $(x; y)$ de $F \times G$ tel que $u = x+y$.
On dit aussi dans ce cas que la somme $F+G$ est directe. La somme sera notée : $F \oplus G$

Théorème 3: Propriété caractéristique

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont en somme directe
2. $F \cap G = \{0\}$
3. Pour tout $(x, y) \in F \times G$, $x+y = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$

Preuve. $1 \Rightarrow 2)$ Supposons que F et G en somme directe.
Soit $u \in F \cap G$ alors u peut s'écrire des deux manières suivantes, comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :
$$u = u + 0 = 0 + u$$
L'élément u étant un élément de $F \cap G$,donc c'est un élément de $F+G$; d'après l'unicité de l'écriture d'un élément de $F+G$, cela entraÓne : $u = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$.

$2 \Rightarrow 3)$ Soit $(x, y) \in F \times G$.
- Si $x+y = 0$, alors $x = -y \in F \cap G$. Par hypothèse $F \cap G = \{0\}$, donc $x = y = 0$
- Si $x = y = 0$, c'est évident

$3 \Rightarrow 1)$ Soit $u \in F+G$. Supposons qu'il existe deux éléments $x, x' \in F$ et deux éléments de G tels que $u = x+y$ et $u = x'+y'$, alors $x - x' + y - y' = 0$. Mais $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$, donc $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$, par suite $x = x'$ et $y = y'$.
L'écriture de u comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est donc unique.

□

Définition 5: Sous-espaces supplémentaires

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont supplémentaires si, et seulement, si $E = F \bigoplus G$.

Remarque. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors
$$\forall x \in E,\ \exists!(x_F, x_G) \in F \times G;\ x = x_F + x_G$$

Exemple 6. Soient $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$,
$$A = \{x \in [-1, 1] \mapsto \alpha x + \beta \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad B = \{f \in E \ / \ f(-1) = f(1) = 0\}$$
A et B sont évidemment des sous-espaces vectoriels de E. Montrons qu'ils sont supplémentaires.

Solution. Étudions $A \cap B$.
Soit $f \in A \cap B$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha x + \beta$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Or $f(1) = f(-1) = 0$ donc $\alpha + \beta = \alpha - \beta = 0$ puis $\alpha = \beta = 0$ et enfin $f = 0$.
Ainsi $A \cap B = \{0\}$.
Étudions $A + B$.
Analyse : On suppose $f = g + h$ avec $g \in A$ et $h \in B$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \alpha x + \beta$ et $h(1) = h(-1) = 0$.
On en déduit $\alpha + \beta = f(1)$ et $\alpha - \beta = f(-1)$ puis

$$\alpha = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) \quad \text{et } \beta = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1))$$

Ceci détermine g puis $h = f - g$.
Synthèse : Soit $f \in E$. Posons

$$\alpha = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)) \quad \text{et } \beta = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1))$$

Considérons ensuite $g : x \in [-1, 1] \mapsto \alpha x + \beta$ et $h = f - g$.
On a $f = g + h$ avec $g \in A$.
De plus $f(1) = \alpha + \beta + h(1)$ donne $h(1) = 0$ et, de même, on obtient $\mathrm{h}(-1) = 0$.
Ainsi $h \in B$.
Finalement $E = A + B$. On peut conclure que A et B sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. □

5. Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels

Définition 6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $n \in \mathbb{N}^*$, $F_1 \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On définit la somme de $F_1 \cdots, F_n$, notée $F_1 + \cdots + F_n$ ou $\sum_{i=1}^{n} F_i$:

$$F_1 + \cdots + F_n := \{x_1 + \cdots + x_n \mid (x_1, \cdots, x_n) \in F_1 \times \cdots F_n\}$$

La somme de $F_1, \cdots, F_n$ est dite directe si, et seulement, si tout élément de $F_1 + \cdots + F_n$ s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de $F_1, \cdots, F_n$.

Ce qui s'écrit avec les quantificateurs :

$$\forall x \in F_1 + \cdots + F_n, \quad \exists!(x_1, \cdots, x_n) \in F_1 \cdots \times F_n, \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Convention. $\sum_{i \in \emptyset} F_i = \{0\}$

Remarque. L'ensemble $\sum_{i=1}^{n} F_i$ contient tous les F_i où $i \in [\![1, n]\!]$.

Théorème 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors

1. $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Le sous-espace vectoriel $\sum_{i=1}^{n} F_i$ de E est le sous-espace vectoriel de E engendré par $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$

Preuve. 1. Montrons que $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E

- L'ensemble $\sum_{i=1}^{n} F_i$ n'est pas vide car $0 = \sum_{i=1}^{n} 0 \in \sum_{i=1}^{n} F_i$.
- Soient u et u' des éléments de $\sum_{i=1}^{n} F_i$, il existe alors deux éléments de chaque F_i, x_i et x'_i, tels que $u = \sum_{i1}^{n} x_i$ et $u' = \sum_{i=1}^{n} x'_i$.
  Soit λ un scalaire. En utilisant les axiomes des espaces vectoriels, on obtient :

$$\lambda u + u' = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + x'_i)$$

Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, F_i est un sous-espace vectoriel, alors $\lambda x_i + x'_i \in F_i$. Donc $\lambda u + u' \in \sum_{i=1}^{n} F_i$

2. Il est claire que $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un sous espace vectoriel contenant $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$.

   Il reste à démontrer que tout sous-espace vectoriel contenant $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ contient aussi $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

   Considérons H, un sous-espace vectoriel de E contenant $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$, et u un élément de $\sum_{i=1}^{n} F_i$. L'élément u égale à $\sum_{i1}^{n}$ où $x_i \in F_i$.

   Les éléments x_i appartiennent à $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$, donc ils appartiennent aussi à H, et comme H est un sous-espace vectoriel, l'élément $\sum_{i=1}^{n} x_i$ appartient à H donc u est un élément de H. Donc H contient $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

□

Définition 7: Somme directe

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On dit que $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si pour tout élément u de $\sum_{i=1}^{n} F_i$, il existe un unique n-uplets $(x_1, \cdots, x_n)$ de $F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $u = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

On dit aussi dans ce cas que la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe. La somme sera notée : $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$

Théorème 5: Propriété caractéristique

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe
2. $\forall p \in [\![2,n]\!]$, $\left(\sum_{i=1}^{p-1} F_i\right) \cap F_p = \{0\}$

Preuve. 1 ⇒ 2) Supposons que $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe.

Soient $p \in [\![2,n]\!]$ et $u \in \left(\sum_{i=1}^{p-1} F_i\right) \cap F_p$ alors il existe $(x_1, \cdots, x_{p-1}) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $u = \sum_{i=1}^{p-1} x_i$.

Donc $0 = \sum_{i=1}^{p-1} x_i - u$. Or 0 s'écrit d'une manière unique comme somme d'éléments de $F_1, \cdots, F_n$, cela entraÓne : $u = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$.

2 ⇒ 1) Par contraposée, on suppose que $F_1, \cdots, F_n$ ne sont pas en somme directe.

Il existe alors un élément x appartenant à $\sum_{i=1}^{n} F_i$ admettant deux décompositions distinctes en somme d'éléments de $F_1, \cdots, F_n$, c'est à dire : il existe $(x_1, \cdots, x_n), (x'_1, \cdots, x'_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \quad \text{et} \quad (x_1, \cdots, x_n) \neq (x'_1, \cdots, x'_n)$$

Soit p le plus petit élément de $[\![1,n]\!]$ tel que $x_p \neq x'_p$. L'entier p est forcément supérieur à 1 et l'égalité $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i$ implique $\sum_{i=1}^{p-1}(x_i - x'_i) = x_p - x'_p$, donc $x_p - x'_p \in \left(\sum_{i=1}^{p-1} F_i\right) \cap F_p$ ce qui montre que $\left(\sum_{i=1}^{p-1} F_i\right) \cap F_p \neq \{0\}$

□

6. Famille libre

I désigne un ensemble non vide

Définition 8

$(u_i)_{i\in I}$ est libre si, et seulement, si toute sous-famille finie de $(u_i)_{i\in I}$ est libre. C'est-à-dire :

$$\forall J \subset I, J \text{ fini}, \forall (\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J, \quad \sum_{j\in J} \lambda_j u_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, \quad \lambda_j = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est liée, ou encore que les vecteurs qui la composent sont libéralement dépendants.

— En particulier $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre si, et seulement, si $\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i = 1, \cdots, n, \quad \lambda_i = 0$

— On ne doit pas confondre non tous nuls et tous non nuls.

— Une famille réduite à un seul vecteur u est libre $\Longleftrightarrow$ $\vec{u}$ est non nul.

— Une famille de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est liée $\Longleftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, ou encore proportionnels, c'est-à-dire s'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.
Cela ne se généralise pas aux familles de plus de deux vecteurs.

— Une famille de vecteurs est liée $\Longleftrightarrow$ l'un des vecteurs qui la compose peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

— Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Cela équivaut à dire que toute sur-famille d'une famille liée est liée. En particulier toute famille contenant $\vec{0}$, ou deux vecteurs colinéaires, est liée.

Propriété 4

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f un morphisme de E dans F.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

1. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est liée, alors la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est liée.
2. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre et si f est injective, alors la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est libre.

— Si la famille $(f(u_i))_{i\in I}$ est libre, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

— Toute application linéaire transforme une famille liée en une famille liée.

— Une application linéaire injective transforme une famille libre en une famille libre.

Exercice 1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application f_n définie par :*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sin(nx) \end{array} \right.$$

1. *Soit $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que* $\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)dx = \pi\delta_{pq}$
2. *Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre*

7. Famille génératrice

Définition 9

$(u_i)_{i\in I}$ est génératrice si, et seulement, si tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de $(u_i)_{i\in I}$. C'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \ \exists J \subset I, \ J \text{ fini}, \ \exists (\lambda_j)_{j\in J} \in \mathbb{K}^J \text{ tels que } x = \sum_{j\in J} \lambda_j u_j$$

Remarque. — $(u_i)_{i\in I}$ est génératrice de E si, et seulement, si $E = \mathbf{Vect}(u_i)_{i\in I}$

— Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice

Définition 10

On dit que E est de dimension finie si E possède une famille génératrice finie.

8. Bases

Définition 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Une famille est une base de E si, et seulement, si elle est à la fois libre et génératrice

Remarque. — Un morphisme est défini de manière unique par les images des vecteurs d'une base.
— Un morphisme f de E vers F est un isomorphisme $\Longleftrightarrow f$ transforme une base de E en une base de F. Il transforme alors toute base de E en une base de F.

Propriété 5: Existence de la base

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul et de dimension finie, possède des bases finies.

Preuve. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une famille génératrice à m éléments. L'ensemble A des cardinaux des familles libres de E est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (elle contient 1, car E contient un vecteur non nul) et majoré par m. A a donc un plus grand élément n. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille libre de n éléments. Pour $x \in E$, la famille $(e_1, \cdots, e_n, x)$ est liée. Il existe donc une combinaison linéaire nulle : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \alpha x = \vec{0}$, avec au moins un coefficient non nul. Comme $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre, α est nécessairement non nul, donc $x \in \text{Vect}((e_1, \cdots, e_n))$: La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice et libre ; c'est une base □

Corollaire 1

Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé la dimension de E, noté $\dim E$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$

Preuve. Supposons l'existence de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, \cdots, v_m)$. Comme $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{B}'$ est génératrice, alors $n \leqslant m$. Comme $\mathcal{B}'$ est libre et $\mathcal{B}$ est génératrice, alors $m \leqslant n$, d'où $m = n$ □

Convention. Si E est nul, par convention $\dim E = 0$

Corollaire 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$

1. Toute famille génératrice a au moins n éléments
2. Toute famille libre a au plus n éléments

Preuve. Soit $\mathcal{B} := (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E

1. Sinon la famille $\mathcal{B}$ est liée
2. $\mathcal{B}$ étant libre, une famille génératrice a au moins n éléments

□

Corollaire 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.
Toute famille génératrice de E contient une base

Preuve. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant une famille génératrice à m éléments. L'ensemble A des cardinaux des sous-familles génératrices de E est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (elle contient m) . A a donc un plus grand élément n. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille génératrice de p éléments. Montrons que $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, si elle ne l'est pas, alors l'un de ces vecteurs est combinaisons des autres, donc il existe une famille génératrice à $p-1$ éléments, ce qui est absurde □

Corollaire 4: Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.
Toute famille libre peut être prolongée en une base de E

Preuve. Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une famille libre et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On a $p \leqslant n$

— Si $p = n$, alors $(u_1, \cdots, u_p)$ d'après le théorème 5
— Si $p \leqslant n$, alors la famille n'est pas génératrice, $\exists i \in [|1, n|]$ tel que $(u_1, \cdots, u_p, e_i)$ est libre, ainsi on vient de construire une famille libre à $p+1$ éléments. On refait ce procédé jusqu'à l'obtention d'une famille libre de n éléments, ce dernier est libre.

□

Propriété 6: Caractérisation de bases en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille formée d'exactement $n = \dim E$ vecteurs de E. On a équivalence entre :

1. $\mathcal{B}$ est une base,

2. $\mathcal{B}$ est une famille libre,
3. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.

Preuve. — Les implications (1) $\Rightarrow$ (2) et (1) $\Rightarrow$ (3) sont immédiates.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supposons la famille $\mathcal{B}$ libre et montrons qu'elle est génératrice. Soit $x \in E$. Si par l'absurde $x \notin \text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$ alors par le principe d'extension des familles libres, on peut affirmer que la famille $(e_1, \cdots, e_n, x)$ est libre. Or celle-ci est formée de $n+1$ vecteurs. C'est absurde et on peut donc conclure $x \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$. Ainsi tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ et celle-ci est donc génératrice.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supposons la famille $\mathcal{B}$ génératrice et montrons qu'elle est libre. Par l'absurde, supposons que la famille $\mathcal{B}$ est liée.
L'un des vecteurs de $\mathcal{B}$ est combinaison linéaire des autres, donc il existe une famille génératrice constituée de $n-1$ vecteurs. C'est absurde et donc on peut affirmer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

□

Exemple 7. Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1,1,1)$.

Solution. Puisque (u_1, u_2, u_3) est une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, à savoir $\mathbb{R}^3$, il suffit de prouver qu'elle est libre. L'équation $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ est équivalente successivement aux systèmes :

$$\begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ a-c = 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b+c = 0 \\ a+c = 0 \\ 2a = 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$
$$\iff a = b = c = 0.$$

La famille est libre. Pour trouver les coordonnées du vecteur $(1,1,1)$, on doit maintenant résoudre l'équation $(1,1,1) = au_1 + bu_2 + cu_3$, qui est successivement équivalente à

$$\begin{cases} b+c = 1 \\ a+c = 1 \\ a+b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b+c = 1 \\ a+c = 1 \\ a-c = 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b+c = 1 \\ a+c = 1 \\ 2a = 1 \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$
$$\iff a = b = c = 1/2.$$

On a donc $(1,1,1) = 1/2u_1 + 1/2u_2 + 1/2u_3$. On aurait pu aller un peu plus vite en remarquant que, par symétrie des trois coordonnées, on savait que $a = b = c$. □

Exemple 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$.
Considérons $B' = (u, v, w)$ la famille formée des vecteurs $u = e_2 + e_3, v = e_1 + e_3, w = e_1 + e_2$.
Montrons que B' est une base de E.

9. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
2. Si de plus $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Preuve. 1. Si $F = \{\vec{0}\}$, nous n'avons rien à démontrer. Supposons donc $F \neq \{\vec{0}\}$.

— Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des nombres d'éléments des familles libres de F. Alors $\mathcal{L}$ est non vide car $F \neq \{\vec{0}\}$. Mais par ailleurs toute famille libre de F est une famille libre de E, donc est constituée d'au plus $\dim E$ éléments ; cela montre que $\mathcal{L}$ est majorée par $\dim E$. Finalement, $\mathcal{L}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, donc possède un plus grand élément $n \leqslant \dim E$. Il existe donc une famille libre $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de F à n éléments. Montrons que $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une base de F. Cela montrera que F est de dimension finie et que $\dim F = n \leqslant \dim E$. Ce qui est sur en tout cas, c'est que $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est libre par définition.

— Montrons que $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ engendre F. Soit $x \in F$. Alors $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x)$ est liée par maximalité de n dans $\mathcal{L}$. Cela implique aussitôt que x est combinaison linéaire de $x_1, x_2, \cdots, x_n$, car on sait qu'en ajoutant à une famille libre un vecteur non combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, on conserve la liberté. Cela prouve comme voulu que $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ engendre F.

2. On suppose à présent que $\dim F = \dim E = n$. Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de F. Alors $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une famille libre de E à $n = \dim E$ éléments, donc est une base de E en vertu d'un précédent résultat. En particulier, $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ engendre E, de sorte que : $E = \text{Vect}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = F$. □

Remarque (En particulier). — Si $\dim F = 0$ alors $F = \{\vec{0}\}$
- — Si $\dim F = 1$ alors on dit que F est une droite vectorielle. Pour tout $u \in F$ tel que $u \neq \vec{0}$, $F = \text{Vect}(u)$. On dit que u est un vecteur directeur de F.
- — Si $\dim F = 2$ alors on dit que F est un plan vectoriel. Pour tout $u, v \in F$ non colinéaires, on a $F = \text{Vect}(u, v)$. On dit que u, v sont des vecteurs directeurs de F.
- — Si $\dim F = \dim E - 1$ alors on dit que F est un hyperplan vectoriel de E.

10. Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Propriété 7

Soit $(x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors
1. $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = \text{Vect}(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_p)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\text{Vect}(x_1, \cdots, \lambda x_i, \cdots, x_p) = \text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall i \neq j \in [\![1, n]\!]$,
$$\text{Vect}(x_1, \cdots, x_i + \lambda x_j, \cdots, x_p) = \text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$$

Définition 12

On appelle rang de la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ la dimension, notée $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p)$, de l'espace vectoriel engendré par cette famille.
Ainsi $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p) = \dim\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$

Exemple 9. $\text{rg}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple 10. $\text{rg}(u, v) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad u, v \text{ non colinéaires} \\ 1 & \text{si} \quad u, v \text{ colinéaires, non tous deux nuls} \\ 0 & \text{si} \quad u = v = 0 \end{cases}$

Propriété 8

Soit $(x_1, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.
1. Si $x \in \text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$, alors $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p) = \text{rg}(x_1, \cdots, x_p, x)$
2. $\text{rg}(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_p) = \text{rg}(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_p)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\text{rg}(x_1, \cdots, \lambda x_i, \cdots, x_p) = \text{rg}(x_1, \cdots, x_p)$
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall i \neq j \in [\![1, n]\!]$, $\text{rg}(x_1, \cdots, x_i + \lambda x_j, \cdots, x_p) = \text{rg}(x_1, \cdots, x_p)$

Exemple 11. On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par
$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$
1. Donner une base de F puis en donner la dimension.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

Solution. 1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :
$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} x + y &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases} \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= -\alpha \\ y &= \alpha \\ z &= \alpha \\ t &= \beta \end{cases}$$
Une base de F est donc donnée par les deux vecteurs $v_1 = (1, -1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 0, 1)$. Donc $\dim F = 2$

2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille (v_1, v_2) par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que (v_1, e_2, e_3, v_2) est une famille libre, car
$$\mathbf{rg}(v_1, e_2, e_3, v_2) = \mathbf{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

donc une base de $\mathbb{R}^4$. $\square$

Exemple 12. Complétion d'une famille libre en une base

Propriété 9

$\text{rg}(x_1, \cdots, x_p) \leqslant p$, avec égalité si, et seulement si, la famille est libre.

Preuve. $(x_1, \cdots, x_p)$ est une famille génératrice de l'espace $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ donc $\dim\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p) \leqslant p$.

Si la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre, c'est alors une base de $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ et donc $\dim\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = p$.

Inversement si $\dim\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p) = p$ alors la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est génératrice et formée de $p = \dim\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ vecteurs de $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$, c'est donc une base de $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ et en particulier cette famille est libre. $\square$

Propriété 10

Si E est de dimension finie n.
Alors $\text{rg}(x_1, \cdots, x_p) \leqslant \dim E$, avec égalité si, et seulement si, la famille est génératrice.

Preuve. L'espace $\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$ est inclus dans E donc $\dim\text{Vect}(x_1, \cdots, x_p) \leq \dim E$.
De plus, puisqu'il y a inclusion, il y a égalité des dimensions si, et seulement si, les espaces sont égaux i.e. si, et seulement si, la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est génératrice de E. $\square$

11. Dimension d'un espace vectoriel produit

Théorème 7: Dimension d'un espace vectoriel produit

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $E \times F$ est de dimension finie et : $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Preuve. Soient $(e_1, e_2, ..., e_m)$ une base de E et $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F. Alors $((e_1, 0), (e_2, 0), \cdots, (e_m, 0), (0, f_1), \cdots, (0, f_m))$ est une base de $E \times F$. En particulier, $E \times F$ est de dimension finie et : $\dim(E \times F) = m + n = \dim E + \dim F$. $\square$

Corollaire 5

Soient $E, E_1, \cdots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espace vectoriel s, alors $\prod_{k=1}^{n} E_k$ est de dimension finie et

$$\dim \prod_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} \dim E_k$$

En particulier E^n est de dimension finie et $\dim E^n = n.\dim E$

12. Supplémentarité en dimension finie

Propriété 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \cdots, F_n$ de sous-espaces vectoriels de E telle que l somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ soit directe. On a alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \Leftrightarrow \dim(E) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$$

Propriété 12

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie alors

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

Preuve. L'application de $F \times G \to E$, qui à tout (x, y) de $F \times G$ associe $x + y$, est un isomorphisme d'espace vectoriel $\square$

Propriété 13

On peut former une base de E en accolant une base de F et une base de G.
Une telle base est dite adaptée à la supplémentarité de F et G.

Preuve. Soient $B = (e_1, \cdots, e_p)$ et $C = (f_1, \cdots, f_q)$ des bases des espaces F et G.

Formons la famille $D = (e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_q)$ et montrons que c'est une base de E.
Supposons $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q = 0$.
On a $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = -(\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q) \in F \cap G$. Or les espaces F et G sont supplémentaires donc $F \cap G = \{0\}$ et par suite $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_q f_q = 0$. Puisque les familles B et C sont libres on a alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ et $\mu_1 = \cdots = \mu_q = 0$. Ainsi la famille D, constituée de $p + q = \dim E$ éléments, est libre. Donc c'est une base de E □

Théorème 8

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F possède un supplémentaire dans E.

Preuve. En tant que sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie, F est lui aussi de dimension finie. Si $F = \{0\}$ ou $F = E$, alors E est un supplémentaire de F dans E. Supposons désormais $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Alors F possède une base $(e_1, e_2, ..., e_p)$. Cette famille $(e_1, e_2, ..., e_p)$ étant libre dans E, on peut la compléter en une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E via le théorème de la base incomplète. Posons alors $G = \text{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n)$ et montrons que F et G sont supplémentaires dans E.

— Montrons que $E = F + G$. Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans $(e_1, e_2, ..., e_n)$. Introduisons l'élément $f = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k \in F$ et $g = \sum_{k=p+1}^{n} x_k e_k \in G$. Alors $A = f + g$

— Montrons que $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Soit $x \in F \cap G$ de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_p)$ dans la base $(e_1, e_2, ..., e_p)$ de F et de coordonnées $(x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n)$ dans la base $(e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n)$ de G. On a alors l'égalité $\sum_{k=1}^{p} x_k e_k - \sum_{k=p+1}^{n} x_k e_k = \vec{0}$. La liberté de la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ implique aussitôt la nullité de tous les x_k, $k \in [\![1, n]\!]$, et donc que $x = \vec{0}$ comme voulu.

□

13. Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 13

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. On dit que F et G sont en somme directe si, et seulement, si $F \cap G$

Propriété 14

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.

1. Alors $F + G$ et $F \cap G$ sont de de dimension finie et :
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \qquad \text{(Formule de Grassmann)}$$
2. En particulier, si F et G sont en somme directe : $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Preuve. La réunion d'une famille génératrice de F et d'une famille génératrice de G donne une famille génératrice de $F + G$. Par suite l'espace $F + G$ est de dimension finie. Puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F, l'espace $F \cap G$ possède un supplémentaire H dans F. Montrons que H et G sont supplémentaires dans $F + G$.
Puisque $H \subset F$, on a $H = H \cap F$ et donc $H \cap G = H \cap F \cap G = H \cap (F \cap G) = \{0\}$
Puisque $F + G = H + (F \cap G) + G$ avec $F \cap G \subset G$, on a aussi $F + G = H + G$.
Ainsi H et G sont supplémentaires dans $F + G$.
Par supplémentarité de H et $F \cap G$ dans F on a $\dim F = \dim H + \dim(F \cap G)$.
Par supplémentarité de H et G dans $F+G$ on a aussi $\dim(F+G) = \dim H + \dim G$.
On en déduit $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$. □

Propriété 15: première caractérisation de la supplémentarité

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement,si
$$\dim F + \dim G = \dim E \text{ et } F \cap G = \{0\}$$

Preuve. Si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0\}$ sont vérifiées.
Supposons que $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{0\}$. Par la formule de Grassman $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - 0 = \dim E$. Par inclusion et égalité des dimensions on a $F + G = E$ et donc F et G sont supplémentaires dans E. □

Propriété 16: Deuxième caractérisation de la supplémentarité

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement,si

$$\dim F + \dim G = \dim E \text{ et } F + G = E$$

Preuve. L'implication directe est évidente.
Supposons que $\dim F + \dim G = \dim E$ et $F + G = E$. Alors via la formule de Grassmann on a tout de suite $F \cap G = \{0\}$ □

II. Applications linéaires

E ,F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .

Soit f une application de E dans F où E et F sont deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.

1. Applications linéaires

Rappel :

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$.
On dit que f est linéaire (ou morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) si et seulement si :
- **Additivité** $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y)$;
- **Homogénéité** $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

si et seulement si

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$$

Notation. On note
1. $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
2. Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$ et ses éléments sont appelés endomorphismes.

Exemple 13.
1. Prenons $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, alors $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
2. Si E est l'ensemble des suites complexes convergentes, alors $u \longmapsto \lim u$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
3. $P \longmapsto P'$ est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.
4. $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \longmapsto f' \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est linéaire.

Exemple 14. Montrons que les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont du type $\varphi_{a,b} : z \in \mathbb{C} \longmapsto az + b\overline{z}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Solution.
- Soient $a, b \in \mathbb{C}$, pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{a,b}(tz + z') &= a(tz + z') + b\overline{tz + z'} \\ &= taz + az' + b\left(t\overline{z} + \overline{z'}\right) \\ &= t(az + b\overline{z}) + az' + b\overline{z'} \\ &= t\varphi_{a,b}(z) + \varphi_{a,b}(z') \end{aligned}$$

$\varphi_{a,b}$ est donc linéaire.

— Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z = \Re(z) + i\Im(z)$ d'où

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\Re(z) + i\Im(z)) \\ &= \Re(z) f(1) + \Im(z) f(i) \\ &= \frac{z + \overline{z}}{2} f(1) + \frac{z - \overline{z}}{2i} f(i) \\ &= z\underbrace{\left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(i)}{2i}\right)}_{a} + \underbrace{\left(\frac{f(1)}{2} - \frac{f(i)}{2i}\right)}_{b}\overline{z} \\ &= \varphi_{a,b}(z) \end{aligned}$$

□

Exemple 15. Les applications $\mathbb{K}$-linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ sont celles du type $x \in \mathbb{K} \longmapsto ax$ avec $a \in \mathbb{K}$.

Solution. En effet :
- $\forall a \in \mathbb{K}$, l'application $x \longmapsto ax \in \mathcal{L}(\mathbb{K})$;
- si $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-linéaire, alors $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = f(1_{\mathbb{K}}x) = xf(1_{\mathbb{K}})$, on prend alors $a = f(1_{\mathbb{K}})$.

□

Propriété 17

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x_1, \cdots, x_n \in E$, $\forall \lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \lambda\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Corollaire 6

Si $S \subset E$ ou si S est une famille quelconque de vecteurs de E, alors

$$f(\mathbf{Vect} S) = \mathbf{Vect} f(S)$$

Preuve. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \cdots, x_n \in S$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ alors $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{Vect} S$ qui est un sous-espace vectoriel donc $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in \mathbf{Vect} S$. On a donc l'inclusion

$$\mathbf{Vect} S \supset \{\text{combinaison linéaires finies d'éléments de } S\}$$

D'autre part on montre que l'ensemble des combinaison linéaires finies d'éléments de S est un sous-espace vectoriel de E qui contient S

— On a alors $S \subset \mathbf{Vect} S$, d'où $f(S) \subset f(\mathbf{Vect} S)$, et $f(\mathbf{Vect} S)$ est un sous-espace vectoriel de F car $\mathbf{Vect} S$ est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\mathbf{Vect} f(S) \subset f(\mathbf{Vect} S)$

— D'autre part si $z \in \mathbf{Vect} S$, z s'écrit $z = f(x)$ où $x \in \mathbf{Vect} S$: $\exists \lambda_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, $\exists y_1, \cdots, y_m \in S$, $x = \sum_i \alpha_i y_i$. On a donc $z = f(x) = \sum_i \alpha_i \underbrace{f(y_i)}_{\in f(S)}$. Donc z est combinaison linéaire d'éléments de $f(S)$, $z \in \mathbf{Vect} f(S)$.

□

2. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$

Propriété 18

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

$\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E,F), +, .)$

Preuve. $\mathcal{L}(E,F)$ est une partie de $\mathcal{F}(E,F)$, non vide puisque l'application nulle est linéaire.
Si f et g sont deux applications linéaires, leur somme est toujours linéaire. On remarque enfin que si α est un élément de $\mathbb{K}$, l'application αf est aussi linéaire. □

Corollaire 7

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
$\mathcal{L}(E)$ et E^* sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .

Propriété 19: Composition d'applications linéaires

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$

Preuve. Il est facile de démontrer que gof est linéaire de E dans G. □

Corollaire 8

Si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G, gof est un isomorphisme de E sur G.

Preuve. la composée de deux applications bijectives (resp. linéaires) est bijective (resp. linéaire). □

Propriété 20

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Preuve. Bien sûr, f^{-1} est bijective de F sur E. Il ne nous reste qu'à montrer que f^{-1} est linéaire.
Soit $y, y' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda y + y') &= f^{-1}(\lambda f(x) + f(x')) \\ &= f^{-1}(f(\lambda x + x')) \\ &= \lambda x + x' = \lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y') \end{aligned}$$

□

3. Images d'un sous-espace vectoriel

Théorème 9

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels , f une application linéaire de E dans F, H un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de F

1. L'image (directe) $f(H)$ de H par f est un sous-espace vectoriel de F .
2. L'image réciproque $f^{-1}(G)$ de G par f est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. 1. On a bien $f(H) \subset F$.

— $f(H) \neq \emptyset$ car $\vec{0} \in H$

— Soit alors $X, Y \in f(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe $x, y \in H$ tels que $X = f(x)$ et $Y = f(x)$. Posons $z = \lambda x + y$; alors $z \in H$ car H est un sous-espace vectoriel de E. La linéarité de f assure les égalités :

$$\lambda X + Y = \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y) \in f(H)$$

ce qui montre que $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F

2. On a bien $f^{-1}(G) \subset E$.

— $f^{-1}(G) \neq \emptyset$ car $\vec{0} \in G$

— Soit alors $x, y \in f^{-1}(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition $f(x) \in G$ et $f(y) \in G$ et puisque G est sous-espace vectoriel de F, alors $\lambda f(x) + f(y) \in G$. Posons $z = \lambda x + y$; la linéarité de f assure les égalités :

$$f(z) = f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \in G$$

ce qui montre que $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E

□

Définition 14

Soit f une application linéaire de E dans F

1. $\mathrm{Im} f = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de f ;
2. $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le noyau de f

Propriété 21: Surjection et injection

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. f est injective si, et seulement, si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$
2. f est surjective si, et seulement, si $\mathrm{Im}(f) = F$

Propriété 22: Injectivité et liberté

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est injective alors f transforme toute famille libre de vecteurs de E en famille libre de vecteurs de F.

Preuve. Supposons que f soit injective et soit $L = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = 0_F$. Par linéarité de f on a $f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) = 0_F$. Donc $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0_E$ et puisque la famille L est libre, $\forall k \, [\![1, n]\!]$, $\alpha_k = 0$. Ainsi la famille $f(L)$, par définition $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est libre. Donc si f est injective alors elle transforme toute famille libre finie de vecteurs de E en famille libre de vecteurs de F.

C'est aussi vrai pour une famille quelconque (pas forcément finie) : si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre quelconque de vecteurs de E alors pour $J \subset I$, J fini, $(x_i)_{i \in J}$ est libre donc $(f(x_i))_{i \in J}$ aussi. Donc (ceci étant vrai pour tout J), $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre. □

Remarque. La réciproque est vraie : Supposons que f change toute famille libre de E en une famille libre d'éléments de F, alors en particulier, comme $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$ la famille (x) est libre, donc $(f(x))$ est une famille libre de F. Ainsi $f(x) \neq 0_F$. On a donc $\forall x \in E$, $x \neq 0_E \Rightarrow f(x) \neq 0_F$. En prenant la contraposée on retrouve la propriété précédente, qui assure que f est injective.

Corollaire 9

Si E admet une base finie $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.
Alors f est injective si, et seulement, si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre dans F .

Preuve. $\Rightarrow$ *« Déjà vu ! »* : une base est en effet en particulier une famille libre donc c'est bon.

$\Leftarrow$ Montrons que f est injective : soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. Montrons que $x = 0_E$. $\mathcal{B}$ est une base donc x s'écrit (de manière unique) : $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. (avec $\forall i\, [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$).

$$\begin{aligned} f(x) = 0_F &\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0_F \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = 0_F \end{aligned}$$

Comme $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre, on a $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$. Par conséquent $x = \sum_{i=1}^{n} 0_{\mathbb{K}} e_i = 0_E$.

□

Propriété 23

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est surjective si, et seulement, si l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F

Preuve. Soit maintenant G une famille génératrice de E. On a $f(E) = f(\mathbf{Vect}G) = \mathbf{Vect}f(G)$.

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\Leftrightarrow f(E) = F \\ &\Leftrightarrow \mathbf{Vect}f(G) = F \\ &\Leftrightarrow f(G) \text{ engendre } F \end{aligned}$$

□

4. Détermination d'une application linéaire

Propriété 24

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.

Propriété 25: Applications linéaires et bases

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$. Soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de F.
Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que : $\forall i \in I, f(e_i) = v_i$.

- l'application f est injective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre dans F.
- l'application f est surjective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice dans F.
- l'application f est bijective si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de F.

On retiendra en particulier : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
L'application f est un isomorphisme si et seulement si f transforme une base de E en une base de F. Elle transforme alors toute base de E en une base de F.

5. L'anneau des endomorphismes

Exercice 2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *f est une homothétie ;*
2. *$\forall x \in E$, $f(x)$ est proportionnel à x ;*
3. *$\forall x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.*

Preuve.
- Un sens est évident : (1) $\Rightarrow$ (2). En effet soit $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f = h_\alpha$. Alors il est clair que pour tout x, $f(x) = \alpha x$ est proportionnel à x.
- Mais attention, pour (2) $\Rightarrow$ (1), il faut voir que (2) ne garantit pas que le coefficient de proportionnalité est le même pour chaque x. En termes plus mathématiques, (2) garantit que $\forall x \in E$, $\exists \alpha_x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \alpha_x x$ et on doit montrer que $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $f(x) = \alpha x$. Il s'agit en fait de montrer que, $\forall x, y \in E$, $\alpha_x = \alpha_y$. Prenons x et y non nuls :
  - Premier cas : la famille (x, y) est libre. On a $\alpha_{x+y}(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \alpha_x x + \alpha_y y$. Ainsi $\alpha_{x+y} x + \alpha_{x+y} y = \alpha_x x + \alpha_y y$ soit encore $(\alpha_{x+y} - \alpha_x) x + (\alpha_{x+y} - \alpha_y) y = 0_E$. (x, y) est libre donc $\alpha_{x+y} = \alpha_x = \alpha_y$

— Deuxième cas : (x, y) est liée. x et y sont non nuls donc $\exists w \in \mathbb{K}^*$, $y = wx$. $\alpha_y y = f(y) = f(wx) = wf(x) = w\alpha_x x = \alpha_x y$, soit $(\alpha_y - \alpha_x) y = 0_E$. Comme $y \neq 0$, $\alpha_x = \alpha_y$.

Donc dans tous les cas $\alpha_x = \alpha_y$. Donc $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E^*$, $f(x) = \alpha x$. C'est vrai aussi si x est nul : $f(0_E) = 0_E = \alpha 0_E$. Donc $f = h_\alpha$.

□

Théorème 10

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau d'élément nul l'endomorphisme nul et d'élément unité l'endomorphisme identité (noté I ou Id).
De plus, les éléments inversibles de cet anneau $\mathrm{GL}(E)$ sont les automorphismes de E.

Preuve. On sait déjà que $(L(E), +)$ est un groupe abélien de neutre $\tilde{0}$ car $(\mathcal{L}(E), +, .)$ est un espace vectoriel.
La loi de composition $\circ$ définit une loi de composition interne sur $\mathcal{L}(E)$ car la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E.
La loi $\circ$ est associative et possède un neutre Id_E qui est un endomorphisme de E.
La loi $\circ$ est distributive sur $+$ dans $\mathcal{L}(E)$. En effet, par linéarité à droite et gauche et du produit de composition, on a

$$\forall f, g, h \in \mathcal{L}(E), \quad fo(g+h) = fog + foh \quad \text{et} \quad (g+h)of = g \circ f + hof.$$

Enfin, un élément inversible de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, o)$ est un endomorphisme f pour lequel il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $fog = g \circ f = Id_E$; un tel endomorphisme est bijectif.
Inversement un automorphisme est un élément inversible de l'anneau et son inverse est son isomorphisme réciproque. □

Remarque. L'anneau $(\mathcal{L}(E), +, o)$ n'est généralement pas commutatif.

Remarque. Puisque $(\mathcal{L}(E), +, o)$ est un anneau, on peut exploiter les définitions et les résultats relatifs à cette structure. En particulier, on peut introduire les itérés de composition d'un endomorphisme.

Définition 15: Les itérés d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme de E. On pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad f^{n+1} = f^n o f$

Exemple 16. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrons $\mathrm{Ker} f^n \subset \mathrm{Ker} f^{n+1}$ et $\mathrm{Im} f^{n+1} \subset \mathrm{Im} f^n$.

Soit $x \in \mathrm{Ker} f^n$. On a $f^n(x) = 0$ donc $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0) = 0$ et ainsi $x \in \mathrm{Ker} f^{n+1}$.
Par conséquent $\mathrm{Ker} f^n \subset \mathrm{Ker} f^{n+1}$.
Soit $y \in \mathrm{Im} f^{n+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{n+1}(x)$ et alors $y = f^n(f(x)) = f^n(a)$ avec $a = f(x) \in E$ et ainsi $y \in \mathrm{Im} f^n$.
Par conséquent $\mathrm{Im} f^{n+1} \subset \mathrm{Im} f^n$.

Propriété 26

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent (ie $fog = g \circ f$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^p f^p \circ g^{n-p}$$

et

$$f^{n+1} - g^{n+1} = (f-g) \sum_{p=0}^{n} f^p g^{n-p}$$

En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (I+f)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^p f^p$$

Preuve. Par opérations dans un anneau sachant que les deux éléments f et g commutent. □

Attention. L'anneau $(L(E), +, o)$ n'est pas intègre, ainsi si un produit de composition est nul, on ne pour autant affirmer qu'un des facteur est nul : $fog = 0$ n'implique par $f = 0$ ou $g = 0$.

Cependant, on peut souvent exploiter à profit le résultat suivant

Propriété 27

Si f et g sont des endomorphismes de E alors :

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g.$$

Preuve. $\Rightarrow$) Supposons $g \circ f = 0$.
Pour tout $y \in \mathrm{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On a alors $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker} g$ et ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$.
$\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$.
Pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$ car $f(x) \in \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$. Ainsi $g \circ f = 0$

□

Définition 16

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit idempotent si $f^2 = f$.
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $n \in N$ tel que $f^n = 0$.

Exemple 17. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrons que $Id - f \in \mathcal{G}L(E)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$. On a $Id = Id - f^n$.
Puisque Id et f commutent, on peut factoriser et on obtient

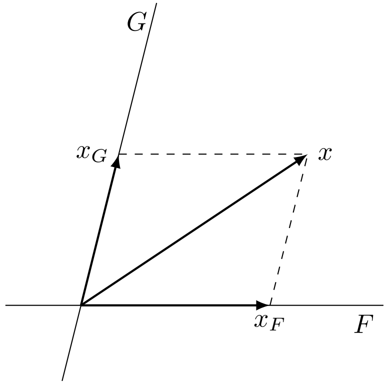
$$Id = (Id - f)o\left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k\right)o(Id - f)$$

Par suite $Id - f$ est inversible et $(Id - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

6. Projecteurs vectoriels

1. Projection vectorielle

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
Posons $p(x) = x_G$ et $q(x) = x_G$ ce qui définit des applications $p, q : E \to E$



Définition 17

— p est appelé projection sur F parallèlement à G.
— q est appelé projection sur G parallèlement à F.
— p et q sont les projections associées à la supplémentarité de F et G.

Propriété 28

p et q sont des endomorphismes de E vérifiant

$$p^2 = p, \quad q^2 = q, \quad p + q = Id \quad \text{et} \quad qop = poq = 0$$

De plus $F = \mathrm{Im} p = \mathrm{Ker} q$ et $G = \mathrm{Ker} p = \mathrm{Im} q$.

Preuve. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$.
On a $x = p(x) + q(x)$ et $y = p(y) + q(y)$ avec $p(x), p(y) \in F$ et $q(x), q(y) \in G$.
On a alors $\lambda x + \mu y = (\lambda p(x) + \mu p(y)) + (\lambda q(x) + \mu q(y))$ avec $\lambda p(x) + \mu p(y) \in F$ et $\lambda q(x) + \mu q(y) \in G$ donc

$$p(\lambda x + \mu y) = \lambda p(x) + \mu p(y) \quad \text{et} \quad q(\lambda x + \mu y) = \lambda q(x) + \mu q(y)$$

Ainsi p et q sont des endomorphismes de E.
Pour tout $x \in E$, on a $x = p(x) + q(x) = (p + q)(x)$ donc $p + q = Id$.
Aussi $p(x) = p(x) + 0$ avec $p(x) \in F$ et $q(x) \in G$ donc $p(p(x)) = p(x)$ et $q(p(x)) = 0$.
Ainsi $pop = p$ et $qop = 0$.
De même $qoq = q$ et $poq = 0$.

De plus, pour tout $x \in F$, $p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}p$.
Puisque $qop = 0$, $\mathrm{Im}p \subset \mathrm{Ker}q$.
Enfin pour tout $x \in \mathrm{Ker}q$, $x = p(x) + q(x) = p(x) \in F$.
Finalement $F \subset \mathrm{Im}p \subset \mathrm{Ker}q \subset F$ donc $F = \mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}q$.
De même $G = \mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}q$. □

Corollaire 10

$F = \mathrm{Ker}(p - Id)$ est aussi l'ensemble des vecteurs invariants par p.

Preuve. $F = \mathrm{Ker}q = \mathrm{Ker}(Id - p) = \mathrm{Ker}(p - Id) = \{x \in E \ / \ p(x) = x\}$. □

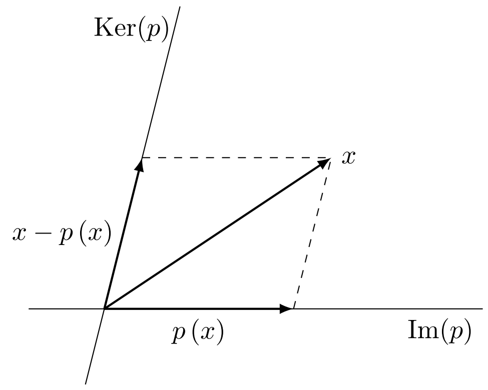
Définition 18

On appelle projecteur tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$

Propriété 29

Si p est un projecteur de E alors
- $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Ker}p$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E; autrement-dit $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$
- p est la projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Preuve. Commençons par établir que $\mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}(p - Id)$.
L'inclusion $\mathrm{Ker}(p - Id) \subset \mathrm{Im}p$ est immédiate et l'inclusion $\mathrm{Im}p \subset \mathrm{Ker}(p - Id)$ découle de l'égalité $p^2 = p$.
Soit $x \in \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Ker}p$.
On a $p(x) = x$ et $p(x) = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Im}p \cap \mathrm{Ker}p = \{0\}$.
Soit $x \in E$. Posons $a = p(x)$ et $b = x - p(x)$.
On a $a \in \mathrm{Im}p$, $x = a + b$ et $p(b) = p(x) - p^2(x) = 0$ donc $b \in \mathrm{Ker}p$.
Ainsi $\mathrm{Im}p + \mathrm{Ker}p = E$ et finalement $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Ker}p$ sont supplémentaires dans E.
Enfin, pour tout $x \in E$, x s'écrit de façon unique $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$ et on a $p(x) = a$.
L'application p apparaît donc comme la projection sur F parallèlement à G. □



2. Projecteurs associés à une décomposition

Soient $E_1, \cdots, E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E réalisant une décomposition en somme directe.

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ x = x_1 + \cdots + x_n$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $p_i(x) = x_i$ ce qui définit $p_i : E \to E$.

Définition 19

Les applications $p_1, \cdots, p_n$ ainsi définies sont appelées projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$

Propriété 30

p_i est la projection sur $F = E_i$ parallèlement à $G = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E_j$.

Preuve. Les espaces F et G sont supplémentaires.
Notons p la projection sur F parallèlement à G.
Pour tout $x \in E$, on peut écrire de façon unique $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_j \in E_j$.
On a alors $x = x_i + y$ avec $x_i \in F$ et $y = \sum_{j \neq i} x_j \in G$.
Par suite $p(x) = x_i = p_i(x)$. Ainsi $p = p_i$ □

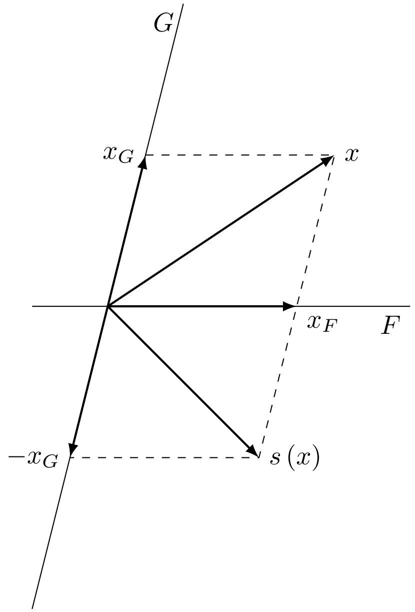
Propriété 31

On a les relations $Id_E = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $p_i^2 = p_i$ et $p_i o p_j = 0$ si $i \neq j$.

Preuve. $Id_E = \sum_{i=1}^{n} p_i$ car on a l'égalité $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i = p_i(x)$ pour tout $x \in E$.
$p_i^2 = p_i$ car p_i est une projection.
Pour $i \neq j$, $p_i o p_j = 0$ car $\text{Im}p_j = F_j \subset \text{Ker}p_i$. □

7. Symétries vectorielles

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ vérifiant $x = x_F + x_G$.
Posons $s(x) = x_F - x_G$; on définit ainsi une application $s : E \to E$.



Définition 20

s est appelée la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G

Exemple 18.
1. Si $F = E$ et $G = \{0\}$ alors $s = \text{id}$
2. Si $F = \{0\}$ et $G = E$ alors $s = -\text{id}$

Théorème 11

L'application s est un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = Id$.
De plus $F = \text{Ker}(s - I)$ et $G = \text{Ker}(s + I)$

Preuve. Introduisons la projection vectorielle p sur F parallèlement à G et $q = Id - p$ sa projection complémentaire.
Pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = x_F - x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
On a alors $p(x) = x_H$ et $q(x) = x_G$.
Par définition de l'application s, on a aussi $s(x) = x_F - x_G$ et donc $s(x) = p(x) - q(x) = (p - q)(x)$.
On en déduit que $s = p - q = 2p - Id$ et donc s est un endomorphisme de E par opération sur les endomorphismes de E.
De plus p et Id commutent, on a $s^2 = (2p - Id)^2 = 4p^2 - 4p + Id = Id$ car $p^2 = p$.
Enfin $\text{Ker}(s - Id) = \text{Ker}(2p - 2Id) = \text{Ker}(p - Id) = F$ et $\text{Ker}(s + Id) = \text{Ker}2p = \text{Ker}p = G$. □

Remarque. Durant la démonstration, on a vu la relation remarquable et utile $s = 2p - Id$.

Remarque. $F = \text{Ker}(s - Id)$ est l'espace des vecteurs invariants par s.
$G = \text{Ker}(s + Id)$ est l'espace des vecteurs changés en leur opposé par s.

Corollaire 11

s est un automorphisme de E et $s^{-1} = s$.

Définition 21

La symétrie s' par rapport à G et parallèlement à F est appelée symétrie complémentaire de s.

Propriété 32

$s' = -s$

Preuve. Soit $x \in E$. On peut écrire $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
On a $s(x) = x_F - x_G$ et $s'(x) = x_G - x_F$ donc $s'(x) = -s(x)$ et ainsi $s' = -s$. □

Théorème 12

Si s est un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = Id$ alors

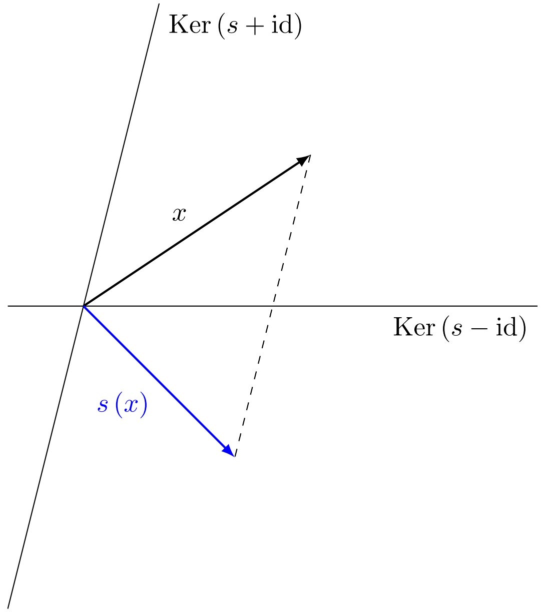
1. $\mathrm{Ker}(s - Id)$ et $\mathrm{Ker}(s + Id)$ sont supplémentaires dans E,
2. s est la symétrie vectorielle par rapport à $F = \mathrm{Ker}(s - Id)$, parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(s + Id)$.

Preuve.

1. Posons $p = \dfrac{1}{2}(s + Id) \in \mathcal{L}(E)$.
   Puisque s et Id commutent, on a $p^2 = \dfrac{1}{4}(s^2 + 2s + Id) = \dfrac{1}{2}(s + Id) = p$.
   L'endomorphisme p est un projecteur de E. On en déduit que $F = \mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}(p - Id)$ et $G = \mathrm{Ker}p$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
   Or $F = \mathrm{Ker}(p - Id) = \mathrm{Ker}\left[\frac{1}{2}(s - Id)\right] = \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $G = \mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}\left[\frac{1}{2}(s + Id)\right] = \mathrm{Ker}(s + Id)$.
   Ainsi $\mathrm{Ker}(s - Id)$ et $\mathrm{Ker}(s + Id)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

2. De plus, pour tout $x \in E$, on peut écrire de façon unique $x = a + b$ avec $a \in F = \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $b \in G = \mathrm{Ker}(s + Id)$. On a alors $s(x) = s(a) + s(b)$.
   Or $s(a) = a$ car $a \in \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $s(b) = -b$ car $b \in ker(s + Id)$.
   Ainsi $s(x) = a - b$ et on reconnaît à travers l'action de s, la symétrie vectorielle par rapport à F est parallèlement à G

□



8. Applications linéaires en dimension finie

1. Isomorphisme et dimension

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E de dimension finie $n \geqslant 1$. Alors pour tout $x \in E$, il existe une unique $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Avec les notations ci-dessus on dit que les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont appelés composantes de x dans $\mathcal{B}$. On note parfois $x(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ ou $x\left|\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{matrix}\right.$

Théorème 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes.

Si $\dim E \geqslant 1$ et $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} & \to & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Preuve. exo □

Corollaire 12

Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si, et seulement, si $\dim E = \dim F$

Preuve.
— Si F est de dimension finie n, F et E sont tous deux isomorphes à $\mathbb{K}^n$ via le théorème , donc isomorphes entre eux.
— Réciproquement, supposons E et F isomorphes. Nous pouvons alors nous donner un isomorphisme f de E sur F et une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. Nous savons alors, f étant un isomorphisme de E sur F, que $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une base de F. Cela montre que F est de dimension finie n.

□

Théorème 14: $\mathcal{L}(E, F)$ en dimension finie

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et : $\dim\mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Preuve. Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $n = \dim E$.
Notons φ l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & F^n \\ f & \to & (f(e_i))_{i=1}^n \end{array}\right.$ Alors φ est linéaire car pour toutes $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \varphi(f + \lambda g) &= ((f + \lambda g)(e_i))_{i=1}^n \\ &= (f(e_i) + \lambda g(e_i))_{i=1}^n \\ &= (f(e_i))_{i=1}^n + \lambda (g(e_i))_{i=1}^n \\ &= \varphi(f) + \lambda\varphi(g) \end{aligned}$$

φ est bijective. L'application φ est donc un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur F^p, ce qui montre que $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et que $\dim\mathcal{L}(E, F) = \dim F^n = n\dim F$ □

Corollaire 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, alors $\mathcal{L}(E)$ et E^* sont de dimension finie et $\dim\mathcal{L}(E) = n^2$ et $\dim E^* = n$

2. Théorème du rang

Théorème 15

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

1. f réalise un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans E vers $\mathrm{Im} f$.
2. Si E est de dimension finie, alors $\dim E = \dim\mathrm{Ker} f + \dim(\mathrm{Im} f)$

Preuve.
1. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans E,c'est-à-dire $E = G \oplus \mathrm{Ker} f$, et g la restriction de f à G.
il est évident que $g \in \mathcal{L}(G, \mathrm{Im} f)$.
— g est injective, en effet : $\mathrm{Ker} g = G \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$
— g est surjective, en effet : Soit $y \in \mathrm{Im} f$, de sorte qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $E = G + \mathrm{Ker} f$, donc il existe $x_G \in G$ et $x_K \in \mathrm{Ker} f$ tels que $x = x_G + x_K$. On obtient $g(x_G) = y$
2. D'après ce qui précède $\dim E = \dim G + \dim\mathrm{Ker} f$. Or $\dim G = \dim\mathrm{Im} f$, donc $\dim E = \dim\mathrm{Im} f + \dim\mathrm{Ker} f$

□

Définition 22

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathrm{Im} f$ est de dimension finie, sa dimension est appelée le rang de f. On le note $\mathrm{rg} f$.

Remarque. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} f &= f(E) \\ &= f(\mathbf{Vect} e_1, \cdots, e_n) \\ &= \mathbf{Vect} f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Im} f$ est de dimension finie avec $\dim\mathrm{Im} f \leqslant \dim E$ car $\dim\mathrm{Im} f$ est engendrée par une famille de longueur $\dim E$.

Propriété 33: Injectivité, surjectivité et rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim E$.
2. f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim F$.

Preuve. 1. $\Rightarrow$) Si f est injective, $\mathcal{B}$ est libre donc $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ aussi donc $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\text{Im} f$ donc $\mathbf{rg} f = \dim E$.
$\Leftarrow$) Si $\mathbf{rg} f = \dim E$, $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de longueur $\dim E$ de $\text{Im} f$ de dimension $\dim E$ donc $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est libre.

2. $\text{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F donc $\mathbf{rg} f \leqslant \dim F$ et on a

$$\begin{aligned} \mathbf{rg} f = \dim F \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Im} f = F \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbf{rg} f \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.
— Si $\dim F < \dim E$, alors $\mathbf{rg} f \leqslant \dim F < \dim E$ donc f ne peut pas être injective.
— Si $\dim F > \dim E$, $\mathbf{rg} f \leqslant \dim E < \dim F$ donc f ne peut pas être surjective.

□

Propriété 34

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même</u> dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective ;
2. f est surjective ;
3. f est bijective ;
4. $\text{rg} f = \dim F$.

Preuve. D'après le théorème du rang, compte tenu de $\dim E = \dim F = n$, on a :

$$\dim \text{Ker} f = 0 \Longleftrightarrow \dim \text{Im} f = n \Longleftrightarrow \text{rg} f = n$$

□

Propriété 35

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel s de dimension finie et G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a :

1. $\text{rg}(gof) \leqslant \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$
2. Si g injective alors $\text{rg}(gof) = \text{rg}(f)$.
3. Si f surjective alors $\text{rg}(gof) = \mathbf{rg}(g)$.

Preuve. $\text{rg}(g \circ f) = \dim \text{Im}(g \circ f) = \dim g(f(E))$. D'une part, $g(f(E)) = \text{Im} g_{|\text{Im} f}$ donc $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}\left(g_{|\text{Im} f}\right) \leqslant \dim f(E) = \text{rg} f$ avec égalité quand g est injective. D'autre part, $g(f(E)) \subset g(F) = \text{Im} g$ donc $\text{rg}(g \circ f) \leqslant \text{rg} g$ avec égalité quand f est surjective. □

9. Formes linéaires

Définition 23: Forme linéaire

Une forme linéaire est un élément de l'ensemble $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et on rappelle que $\dim E^* = \dim E$.

Propriété 36

Soit φ une forme linéaire non nulle de E, alors $\text{rg}(\varphi) = 1$

Preuve. Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, $\exists x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc $\text{Im}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$ donc $\dim \text{Im}(\varphi) \geqslant 1$. Or $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$ et $\dim \mathbb{K} = 1$ d'où $\mathbf{rg}(\varphi) = 1$ et $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$. □

Propriété 37

— Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, il existe un vecteur x tel que $\varphi(x) = 1$.
— Si x est un vecteur de E non nul et E est de dimension finie, il existe une forme linéaire telle que $\varphi(x) = 1$

Preuve. □

Théorème 16: Formes linéaires en dimension finie

φ est une forme linéaire de E si, et seulement, s'il existe un unique

$(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que à $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ l'application associe $\sum_{k=1}^{n} x_k a_k$

Preuve. $\Rightarrow$ Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \varphi(e_i)$

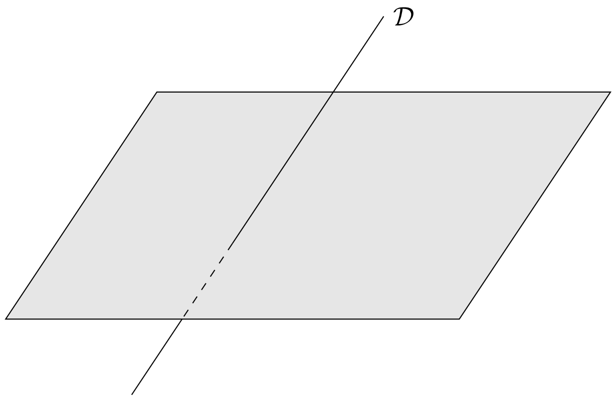
$\Leftarrow$ L'application $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$ est une forme linéaire □

Remarque. La forme linéaire φ est nulle si, et seulement, si le n-uplet $(a_1, \cdots, a_n)$ est nul

1. Hyperplans

Définition 24

On appelle hyperplan de E tout noyau d'une forme linéaire de E non nulle



Propriété 38

Soit H un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. H est un hyperplan
2. Pour tout $a \in E \setminus H$, $E = H \oplus \textbf{Vect}(a)$

Preuve. Une droite vectorielle est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul □

Propriété 39

Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 1$ sont exactement les sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$

Exemple 19. Dans $E = \mathbb{K}^n$, considérons $H = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
H est un hyperplan car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$

Propriété 40

Les hyperplans de E sont les ensembles H constitués des vecteurs $x \in E$ dont les composantes $x_1, \cdots, x_n$ sont solutions d'une équation de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ avec $a_1, \cdots, a_n$ scalaires non tous nuls.

Preuve. Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle □

Définition 25

Avec les notations qui précèdent, l'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est appelée équation de l'hyperplan H relative à la base $\mathcal{B}$.

Exemple 20.
- Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'application $f :\to \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur E.
- Soit $E = \mathfrak{F}(X, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications d'un ensemble X non vide vers $\mathbb{K}$.
  Soit x_0 est un élément particulier de X. L'application $f :\to f(x_0)$ est une forme linéaire sur E.
- Si $E = M_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'application trace qui à tout M de E associe $\text{tr}(M)$ est une forme linéaire sur E.

III. Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

1. Matrices

Définition 26

Soit deux entiers $n, p \geqslant 1$. On appelle matrice $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, ou de type (n, p), une application

$$A \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \to & a_{ij} \end{array} \right.$$

que l'on note sous forme d'un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

o? $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ ou encore $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$

Remarque (Vocabulaires).

— On notera $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
— Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés **matrices réelles**.
— Pour n quelconque et $p = 1$: les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices colonnes.
Elles sont de la forme : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
— Pour $n = 1$ et p quelconque : les matrices de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-) lignes.
Elles sont de la forme : $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$
— Pour $1 \leq i \leq n$. La matrice $L_i := \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ est appelée le i-ème vecteur ligne ou la i-ème ligne de A
— Pour $1 \leq j \leq p$. La matrice $C_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ est appelée le j-ème vecteur colonne de A
— a_{ij} est appelé coefficient d'indice (i, j) de la matrice A, il est positionné à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne de A.
— Lorsque $n = p$ on dit que la matrice est carrée, l'ensemble des matrices carrées à n lignes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
Lorsque

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ forment la **diagonale** de la matrice et ils sont appelés les éléments diagonaux de A
— La matrice $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. Opérations sur les matrices

On définit les opérations suivantes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ce sont les opérations usuelles sur les applications). Pour deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

— $A = B$ si, et seulement si, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad a_{ij} = b_{ij}$
— $A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ (Somme de deux matrices). Ainsi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

— $\lambda.A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ (Multiplication par un scalaire). Ainsi

$$\lambda. \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

— La matrice nulle est définie par $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = (0_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$

— Pour $(k,\ell)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]$, la matrice $E_{k\ell} = (\delta_{ik}\delta_{j\ell})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$

$$E_{k,\ell}=\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} &&&\ell&&&\\ &&&\downarrow&&& \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&0&\cdots&0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \longleftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

est appelée la matrice élémentaire. Tous les coefficients de la matrice $E_{k\ell}$ sont nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la ligne k et de la colonne ℓ qui vaut 1.

Théorème 17

1. $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ est une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$
3. $\dim M_{n,p}(\mathbb{K}) = np$. En particulier $\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$, $\dim M_{n,1}(\mathbb{K}) = n$ et $\dim M_{1,p}(\mathbb{K}) = p$

Définition 27

Soit n,p,q trois entiers naturels strictement positifs. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = A\times B = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!], \quad c_{ij} := \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Remarque (Disposition pratique).

$$\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,r}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{q,1} & & b_{q,j} & & b_{q,r}\end{pmatrix}}^{B} \\
\overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q}\\ \vdots & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,q} \\ \vdots & & \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q}\end{pmatrix}}^{A} & \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \downarrow & \vdots \\ \vdots \ \rightarrow & \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b_{k,j} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}}_{A\times B}
\end{array}$$

Exemple 21. $\begin{pmatrix}1&0\\-1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1\times3+0\times2) & (1\times1+0\times1)\\(-1\times3+3\times2) & (-1\times1+3\times1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1\\3&2\end{pmatrix}$

Théorème 18

Soit n,p,q,r quatre entiers naturels strictement positifs

1. **Associativité :** Soient $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C\in\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$:
$$A(BC) = (AB)C \quad \text{et} \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$
2. **Bilinéarité :**
   — Soient $A,B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: $(A+B)C = AC+BC$
   — Soient $A,B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C\in\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$: $C(A+B) = CA+CB$
3. **Élément neutre :** Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $I_nA = A = AI_p$

Preuve. 1. Posons $A = (a_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})\in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{ij})\in M_{q,r}(\mathbb{K})$. Prouvons que $A(BC) = (AB)C$ en montrant que les matrices $A(BC)$ et $(AB)C$ ont les mêmes coefficients.

Le terme d'indice (i,k) de la matrice AB est $x_{ik} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}b_{\ell k}$. Le terme d'indice (i,j) de la matrice $(AB)C$ est donc

$$\sum_{k=1}^{q} x_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}b_{\ell k}\right)c_{kj}.$$

Le terme d'indice (ℓ,j) de la matrice BC est $y_{\ell j} = \sum_{k=1}^{q} b_{\ell k}c_{kj}$. Le terme d'indice (i,j) de la matrice $A(BC)$ est donc

$$\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}\left(\sum_{k=1}^{q} b_{\ell k}c_{kj}\right).$$

Comme dans $\mathbb{K}$ la multiplication est distributive et associative, les coefficients de $(AB)C$ et $A(BC)$ coÔncident.

2. Les démonstrations se font comme celle de l'associativité.
3. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}. La matrice unité d'ordre p est telle que tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, les autres étant tous nuls.

   On peut formaliser cela en introduisant le symbole de Kronecker. Si i et j sont deux entiers, on appelle **symbole de Kronecker**, et on note $\delta_{i,j}$, le réel qui vaut 0 si i est différent de j, et 1 si i est égal à j. Donc

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

   Alors le terme général de la matrice identité I_p est $\delta_{i,j}$ avec i et j entiers, compris entre 1 et p.

   La matrice produit AI_p est une matrice appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le terme général c_{ij} est donné par la formule $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\delta_{kj}$. Dans cette somme, i et j sont fixés et k prend toutes les valeurs comprises entre 1 et p. Si $k \neq j$ alors $\delta_{kj} = 0$, et si $k = j$ alors $\delta_{kj} = 1$. Donc dans la somme qui définit c_{ij}, tous les termes correspondant à des valeurs de k différentes de j sont nuls et il reste donc $c_{ij} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}1 = a_{ij}$. Donc les matrices AI_p et A ont le même terme général et sont donc égales. L'égalité $I_nA = A$ se démontre de la même faÁon.

□

3. Transposition

Définition 28

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle matrice transposée de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$${}^tA = (a_{ji})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i,j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Remarque (Notation). La transposée de la matrice A se note aussi souvent A^T.

Exemple 22.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Théorème 19: Propriétés de la transposition

- **Linéarité :** $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$$

- **Involutivité :** $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: ${}^t({}^tA) = A$
- **Produit :** $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$

Preuve. □

Remarque. 1. L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longrightarrow & {}^tA \end{array} \right.$$

est une bijection

2. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ sont en bijections, ainsi on peut identifier une matrice ligne .....
3. La transposition échange le nombre de colonnes et le nombre de lignes, de sorte que la transposée d'une matrice de taille $n \times p$ est une matrice de taille $p \times n$.

4. Matrices définies par blocs

On peut définir une matrice $M \in M_{p+s,q+r}(\mathbb{K})$ par blocs de façon suivante

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,r}(\mathbb{K})$, $C \in M_{s,q}(\mathbb{K})$ et $D \in M_{s,r}(\mathbb{K})$

— M est dite triangulaire par blocs si et seulement si on a : $C = 0$;
— M est diagonale par blocs si : $B = 0$, et : $C = 0$;
— ${}^tM = \begin{bmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{bmatrix}$
— Lorsque A et D sont carrées, on a : $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(D)$

Pour M et M' des matrices de $M_{p+s,q+r}(\mathbb{K})$, écrites par blocs sous la forme : $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ et $M' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$. On a :

$$M + M' = \begin{bmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{bmatrix}$$

De même, pour M et M' écrites par blocs ayant des types compatibles, on a :

$$MM' = \begin{bmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{bmatrix}$$

Si $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ où $X_1 \in M_{q,1}(\mathbb{K})$ et $X_1 \in M_{r,1}(\mathbb{K})$, alors

$$MX = \begin{bmatrix} AX_1 + CX_2 \\ BX_1 + DX_2 \end{bmatrix}$$

Exemple 23. Calculer les puissances de $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent.

Propriété 41

$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si A_1 et A_2 le sont.
Au quel cas, A^{-1} est de la forme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & B_2 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$

IV. L'anneau $M_n(\mathbb{K})$

1. Puissance d'une matrice

Propriété 42

$(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau (non commutatif et non intègre si $n \geqslant 2$) d'élément nul $0 = O_n$ et d'élément unité I_n

Définition 29: Les itérés d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les itérés de A, par la relation de récurrence suivante

- $A^0 = I_n$
- Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $A^{p+1} = A \times A^p$

Exemple 24. On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution. On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. Démontrons ce résultat par récurrence.

Il est vrai pour $p=0$ (on trouve l'identité). On le suppose vrai pour un entier p et on va le démontrer pour $p+1$. On a, d'après la définition,

$$A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p-1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1}-1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est démontrée. □

Définition 30: Matrice nilpotente

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente si, et seulement, si $\exists m \in \mathbb{N}$, tel que $A^m = O_n$

Exemple 25. On pose $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente ?

Solution. Les calculs suivants :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^4 = 0.$$

montrent que N est nilpotente □

Propriété 43: Formule de binôme de Newton

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$$

Preuve. Formule de binôme dans un anneau □

Exemple 26. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de A

Solution. On pose $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente car $N^4 = 0$. Comme $A = I + N$ et les matrices N et I commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices), on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On utilise que $I^k = I$ pour tout k et surtout que $N^k = 0$ si $k \geq 4$. On obtient

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I^{p-k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{p}{k} N^k = I + pN + \frac{p(p-1)}{2!} N^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3.$$

D'o ?

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2-p+1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Propriété 44: Formule de factorisation

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B) \sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}$$

2. Matrices carrées inversibles

Définition 31

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si et seulement s'elle existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est unique, appelée l'inverse de A et se note A^{-1}

Preuve. Soient B et C deux inverses de A, $CA = I_n = BA$. Donc $B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n = C$ □

Notation. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 27. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est l'inverse de A

Exemple 28. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

Propriété 45

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et λ un sclaire non nul

1. $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
2. $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
3. $\lambda A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$
4. $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5. ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

3. Matrices diagonales

Définition 32

Soit A une matrice carrée, $A \in M_n(\mathbb{K})$.

— Les coefficients d'indice (i, i) de A sont appelées coefficients diagonaux de A. La famille $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ est appelée diagonale de la matrice A .

— A est dite diagonale si, et seulement, si tous ses coefficients hors de la diagonale sont nuls.

Exemple 29. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la matrice I_n est diagonale

Notation. — On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales.

— On note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ dont la diagonale est $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

Remarque. 1. La matrice $\mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1)$ est la matrice unité de $M_n(\mathbb{K})$

2. La matrice $\mathrm{diag}(\lambda, \cdots, \lambda) = \lambda I_n$ est appelée la matrice scalaire, en effet multiplier une matrice par λI_n revient à la multiplier par λ

Théorème 20

Soit $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $B = \mathrm{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ deux matrices diagonales et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

1. $A + B = \mathrm{diag}(\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$
2. $A \times B = \mathrm{diag}(\alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_n\beta_n)$ et $\lambda A = \mathrm{diag}(\lambda\alpha_1, \cdots, \lambda\alpha_n)$

Les matrices diagonales forment une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(K)$.

Remarque. Les matrices diagonales peuvent simplement être multipliées coefficients par coefficients, parce que les zéros en dehors de la diagonale annulent les autres termes dans la formule de multiplication. Une conséquence de cela est qu'élever une matrice diagonale A à une certaine puissance revient à élever les coefficients de la diagonale de A à cette puissance :

$$\mathrm{diag}\,(a_1, \cdots, a_n)^k = \mathrm{diag}\,\left(a_1^k, \cdots, a_n^k\right)$$

Corollaire 14

Une matrice diagonale $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ d'éléments diagonaux sont tous non nuls est toujours inversible et

$$\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

4. Matrices triangulaires

Définition 33

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que A est triangulaire supérieure si, et seulement, si

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!]\,, \quad i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

2. On dit que A est triangulaire inférieure si, et seulement, si

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad i<j \Longrightarrow a_{ij}=0$$

Notation. L'ensemble des matrices triangulaire supérieure (inférieure) se note $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp $T_n^-(\mathbb{K})$)

Remarque. 1. L'application

$$\text{tran} : \left\{ \begin{array}{ccc} T_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & T_n^-(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array} \right.$$

est une bijection

2. $T_n^+(\mathbb{K}) \cap T_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

Propriété 46

$T_n^+(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Preuve. □

Remarque. Via la bijection $A \mapsto {}^tA$, on peut affirmer que $T_n^-(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(K)$.

5. Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 34

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
- On dit que A est symétrique si, et seulement, si ${}^tA = A$
- On dit que A est antisymétrique si, et seulement, si ${}^tA = -A$

Remarque. 1. A est symétrique si, et seulement, si pour tous indices i et j, $a_{ji}=a_{ij}$. Autrement dit A est symétrique par rapport à sa diagonale.
2. A est antisymétrique si, et seulement, si pour tous indices i et j, $a_{ji}=-a_{ij}$. En particulier les éléments diagonaux de A sont nuls

Notation. L'ensemble des matrices symétriques (antisymétriques) se note $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$)

Exercice 3. *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*
1. *Montrer que si $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$*
2. *Montrer que si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$*

6. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B} := (e_1,\cdots,e_n)$ une base de E.

Définition 35

Soit $x \in E$ et $(x_1,\cdots,x_n)$ les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$: $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_ie_i$

La matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice-colonne des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ et est notée $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x)$

Ainsi $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Il est clair que

$$\begin{array}{rcl} \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} : E & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longrightarrow & \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \end{array}$$

est une bijection. Lorsque $X = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x)$, on dit que x représenté par X dans la base $\mathcal{B}$, ou que X représente x dans la base $\mathcal{B}$

Définition 36

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $\mathcal{B} := (e_1,\cdots,e_n)$ une base de E, $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (v_1,\cdots,v_p)$ une famille de p éléments de E, et, pour chaque j de $\{1,\cdots,p\}$, $(v_{1j},\cdots v_{nj})$ les composantes de v_j dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall j \in \{1,\cdots,p\}, \quad v_j = \sum_{i=1}^n v_{ij}e_i$$

La matrice $(v_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{np} \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et est noté $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{F})$

7. Matrice d'une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $p = \dim E \geqslant 1$, $n = \dim F \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Pour chaque j de $\{1, \cdots, p\}$, $(a_{1j}, \cdots, a_{nj})$ les composantes de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$\forall j \in \{1, \cdots, p\}, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

Définition 37: Matrice d'une application linéaire dans des bases
La matrice $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} = \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f(\mathcal{B}))$ est appelée la matrice de l'application f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ou la matrice de l'application f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et on note $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f)$

Vacabulaire.
- Si $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, alors la matrice de f dans les bases canoniques est appelée la matrice canoniquement associée à f
- Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, la matrice $\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$ est simplement notée $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$.

Exemple 30. Soit u l'application linéaire u : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, x+y+z) \end{array}\right.$ Alors la matrice de u dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 21
L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longrightarrow & \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve.
— $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}$ est linéaire
— Nous savons que : $\dim\mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F = np = \dim M_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour montrer que l'application du théorème est bijective, il nous suffit donc de montrer qu'elle est injective.
— Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = 0_{M_{n,p}(\mathbb{K})}$. Pour tout $j \in [|1,p|]$ la matrice colonne des composantes de $f(e_j)$ est nulle, donc $f(e_j) = 0$. L'application f est une application linéaire, nulle sur la base, donc $f = 0$

□

Théorème 22: Écriture matricielle d'une application linéaire

$$\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f(x)) = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f) \times \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x)$$

Preuve. Posons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$, $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_n)$, $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = (u_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de y dans la base $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} y = u(x) &\iff \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} u_{ij} f_i \\ &\iff \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} u_{ij} x_j\right) f_i \\ &\iff \forall i \in [\![1,n]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} x_j \\ &\iff Y = UX \end{aligned}$$

□

Théorème 23: Matrice du produit

Soient E_1, E_2, E_3 trois $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$.
Soient f une application linéaire de E_1 dans E_2 et g une application linéaire de E_2 dans E_3. Alors :

$$\underset{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}{\mathrm{Mat}}(g \circ f) = \underset{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}{\mathrm{Mat}}(g) \times \underset{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}{\mathrm{Mat}}(f)$$

Preuve. Posons $B = \underset{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}{\mathrm{Mat}}(g)$, $A = \underset{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}{\mathrm{Mat}}(f)$ et $C = \underset{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}{\mathrm{Mat}}(g \circ f)$. Montrons que $C = AB$.
Posons $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, ..., e_n)$. Soit alors $j \in [|1, n|]$. La j^{ème} colonne de C est, par definition, la colonne des coordonnées de $g \,.\, f(e_j)$ dans $\mathcal{B}_3$.
Or si E_j désigne la colonne des coordonnées de e_j dans $\mathcal{B}_1$. un 1 en j^{ème} position, que des 0 ailleurs . alors AE_j est la colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}_2$. Mais pour la mme raison, $B(AE_j) = (BA)E_j$ est donc la colonne des coordonnées de $g \,.\, f(e_j)$ dans $\mathcal{B}_3$, i.e. la j^{ème} colonne de C. Pour finir, on remarque que $(BA)E_j$ n'est autre que la j^{ème} colonne du produit BA, de sorte que C et BA ont la mme j^{ème} colonne, comme prévu. □

Corollaire 15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$.
Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f), B = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g) \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g \circ f) = BA$.
Et $\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f^m)$

8. Représentation d'un isomorphisme

Dans ce paragraphe E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n

Théorème 24

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de mme dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas $\left(\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}} f\right)^{-1} = \underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f^{-1}\right)$

Preuve. — Si f est bijective, alors $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}} f \times \underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} f^{-1} = \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_F) = I_n$ et $\underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} f^{-1} \times \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}} f = \underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_E) = I_n$, donc $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}} f$ est inversible, d'inverse $\underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} f^{-1}$

— Réciproquement, si $A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f)$ est inversible, soit g l'unique application linéaire de F dans E pour laquelle $\underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} g = A^{-1}$. Alors $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} g \circ f = \underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} g \times \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}} f = A^{-1}A = I_n$ et de même $\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f \circ g) = I_n$. On en déduit que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et que $fog = \mathrm{id}_F$, donc f est bijective de E sur F □

Corollaire 16

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Preuve. Introduisons les vecteurs de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ et notons f l'unique endomorphisme de E tel que : $\forall i \in [|1, n|], \quad f(e_i) = f_i$. On a l'équivalence :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ est une base de } E &\iff f \text{ est un automorphisme de } E \\ &\iff \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \text{ est inversible} \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que : $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathcal{F})$ □

9. Application linéaire associée à une matrice

Définition 38

Si $\mathcal{B}_m$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^m$, alors

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longrightarrow & \underset{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}{\mathrm{Mat}}(f) \end{array}$$

est appelée **l'isomorphisme canonique** de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$

- Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, la matrice $\underset{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}{\mathrm{Mat}}(f)$ est appelée la matrice canoniquement associée à f
- Inversement, pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $\underset{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}{\mathrm{Mat}}(f) = A$ est appelée l'application canoniquement associée à A

Définition 39

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

1. L'application $\varphi : X \longmapsto AX$ est linéaire de $M_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$
2. Si on munit $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ de leurs bases canoniques $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$, A est la matrice d'une unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $\underset{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}{\mathrm{Mat}}(f) = A$

L'application linéaire φ (ou l'application linéaire f) est dite canoniquement associée à la matrice A.

Remarque. Soit $\mathcal{B}_k$ la base canonique de $M_{k,1}(\mathbb{K})$, alors $\underset{\mathcal{B}_p,\mathcal{B}_n}{\mathrm{Mat}}(\varphi) = A$

Définition 40: Image et noyau d'une matrice

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\varphi : X \longmapsto AX$ l'application canoniquement associée à A. On appelle :

- image de A, et on note $\mathrm{Im}(A)$, l'image $\mathrm{Im}(\varphi)$ de l'application linéaire φ ;
- noyau de A, et on note $\mathrm{Ker}(A)$, l'image $\mathrm{Ker}(\varphi)$ de l'application linéaire φ ;
- rang de A, et on note $\mathbf{rg}(A)$, le rang $\mathbf{rg}(\varphi)$ de l'application linéaire φ.

Propriété 47: Théorème du rang

Soit $A \in \mathrm{M_{n,p}}(\mathbb{K})$. Alors $\mathbf{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = p$.

Preuve. Appliquer le théorème du rang à φ □

Remarque (Premières remarques).

- Si A est dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathbf{rg}(A) \leqslant n$ et $\mathbf{rg}(A) \leqslant p$).
- Le rang d'une matrice A est nul si, et seulement, si A est elle-même la matrice nulle.
- Le rang d'une matrice A est égal à 1 si, et seulement, si A possède une colonne non nulle et si les autres colonnes de A lui sont proportionnelles.
- Le rang de A est celui de toute application linéaire susceptible d'être représentée par A.

Propriété 48: Image d'une matrice, et vecteur colonnes

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_p$ ses colonnes, alors

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\,(C_1, \cdots, C_p)$$

En particulier $\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(C_1, \cdots, C_p)$

Remarque (A retenir).

1. Les colonnes d'une matrice A forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$;
2. les lignes d'une matrice A permettent de former un système d'équations de $\mathrm{Ker}(A)$.

Exemple 31. On demande de déterminer le noyau, l'image, et le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriété 49: Caractérisation des matrices inversibles

Soit une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$$

Corollaire 17

Soient deux matrices $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Si

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = BX$$

alors $A = B$.

Propriété 50

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, une application linéaire $E \xrightarrow{u} F$, une base $\mathcal{B}$ de l'espace E et une base $\mathcal{C}$ de l'espace F.

Alors $\mathbf{rg}(u) = \mathbf{rg}\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$

Preuve. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Alors le rang de u est le rang de $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ et le rang de $A = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est le rang de $(C_1, \cdots, C_n)$, où les C_j sont les colonnes de A c'est-à-dire des vecteurs $u(e_j)$ exprimés dans la base $\mathcal{C}$. Les deux rangs sont donc égaux □

Corollaire 18: Caractérisation des matrices inversibles

Soit une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$;
2. A est inversible à gauche : $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ tq $BA = I_n$;
3. A est inversible à droite : $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ tq $AB = I_n$;
4. $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \exists! X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tq $AX = Y$;
5. $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \Longrightarrow X = 0$;
6. $\mathrm{rg}(A) = n$.

Preuve. □

10. Rang d'une matrice

Définition 41

Soit $M \in \mathrm{M_{n,,p}}(\mathbb{K})$, on appelle rang de M et on note $\mathbf{rg}(M)$ le rang de la famille $(M_1, M_2, \ldots, M_p)$ où $\forall j \in [\![1, p]\!]$, M_j est le j-ième vecteur colonne de M.

On a donc toujours $\mathbf{rg}(M) \leqslant \min(n, p)$ et $\mathbf{rg}(M) = p$ si et seulement si la famille $(M_1, M_2, \ldots, M_p)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$. De même $\mathbf{rg}(M) = n$ si et seulement si $(M_1, M_2, \ldots, M_p)$ engendre $\mathbb{K}^n$.

Remarque (Notation). Soit $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$. Si $r \neq 0$, on pose

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right) \in \mathrm{M_{n,p}}(\mathbb{K})$$

Sinon $J_{n,p,0} = 0$

Exemple 32. $\mathrm{rg}(J_{n,p,r}) = r$

Propriété 51

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \cdots, x_p \in E$ et $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ une base de E. Alors

$$\mathbf{rg}(x_1, \cdots, x_p) = \mathbf{rg}\left(\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x_1, \cdots, x_p)\right)$$

Preuve. Notons $M = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x_1, \cdots, x_p) \in \mathrm{M_{n,p}}(\mathbb{K})$, considérons φ l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans E définie sur $B_n = (e_1, \cdots, e_n)$ par $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = b_i$. φ transforme une base en une base donc c'est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E. Pour $j \in 1, p$,

$$\begin{aligned} \varphi(M_j) &= \varphi(M[1,j], M[2,j], \ldots, M[n,j]) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} M[i,j]\, e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} M[i,j]\varphi(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} M[i,j] b_i \\ &= x_j \quad \text{d'après la définition de } M \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(\mathrm{Vect}(M_1, M_2, \ldots, M_p)) = \mathrm{Vect}(\varphi(M_1), \varphi(M_2), \ldots, \varphi(M_p)) = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p)$. Posons alors

$$\widetilde{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(M_1, M_2, \ldots, M_p) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p) \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \right.$$

$\widetilde{\varphi}$ est bien définie, linéaire et injective comme φ et surjective au vu de sa définition donc $\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels donc

$$\dim \mathrm{Vect}(M_1, M_2, \ldots, M_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_p) \Leftrightarrow \mathbf{rg}(M) = \mathbf{rg}(x_1, \cdots, x_p)$$

□

Propriété 52

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions $p, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathbf{rg}(f) = \mathbf{rg}\left(\underset{B,C}{\mathrm{Mat}}(f)\right)$$

Preuve. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$, on sait que

$$\begin{aligned}
\mathbf{rg}(f) &= \dim(\mathrm{Im} f) \\
&= \dim f(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)) \\
&= \dim \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)) \\
&= \mathbf{rg}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))
\end{aligned}$$

D'après (1),

$$\begin{aligned}
\mathbf{rg}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)) &= \mathbf{rg}\left(\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))\right) \\
&= \mathbf{rg}\left(\underset{B,C}{\mathrm{Mat}}(f)\right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque Pour $M \in \mathrm{M_{n,p}}(\mathrm{K})$, $f \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ canoniquement associée à M, $B_p = (e_1, \cdots, e_p)$. Alors il est évident que $\mathbf{rg}(f) = \mathbf{rg}(M)$.
En effet, $\forall j \in 1, p$, $f(e_j) = M_j$. De plus, avec les notations de (2),

$$\begin{aligned}
f \text{ est injective} &\Leftrightarrow \mathbf{rg}(f) = p \\
&\Leftrightarrow (M_1, M_2, \ldots, M_p) \text{ est libre dans } \mathbb{K}^p \\
f \text{ est surjective} &\Leftrightarrow \mathbf{rg}(f) = n
\end{aligned}$$

Propriété 53: Rang d'un produit de matrices

Soit $A \in \mathrm{M_{p,q}}(\mathrm{K})$, $B \in \mathrm{M_{q,r}}(\mathrm{K})$. Alors :

1. $\mathbf{rg}(AB) \leqslant \min(\mathbf{rg}A, \mathbf{rg}B)$;
2. si $p = q$ et A est inversible, alors $\mathbf{rg}(AB) = \mathbf{rg}B$;
3. si $q = r$ et $B \in \mathrm{GL_q}(\mathrm{K})$, alors $\mathbf{rg}(AB) = \mathbf{rg}A$.

Preuve.
1. Soit $a \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ canoniquement associée à A et $b \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^q)$ canoniquement associée à B. $AB = \underset{B_r,B_p}{\mathrm{Mat}}(a \circ b)$ donc $\mathbf{rg}(AB) = \mathbf{rg}(a \circ b)$ avec $a \circ b : \mathbb{K}^r \longmapsto \mathbb{K}^p$. Or $\mathrm{Im}(a \circ b) \subset \mathrm{Im}a$ donc $\mathbf{rg}(a \circ b) \leqslant \mathbf{rg}a = \mathbf{rg}A$. De même, $\mathrm{Ker}b \subset \mathrm{Ker}(a \circ b)$ donc $\dim \mathrm{Ker}b \leqslant \dim \mathrm{Ker}(a \circ b)$. D'après le théorème du rang appliqué à $b \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^q)$, $\dim \mathrm{Ker}b = r - \mathbf{rg}b$ et pour $a \circ b \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^p)$, $\dim \mathrm{Ker}(a \circ b) = r - \mathbf{rg}(a \circ b)$. Ainsi, $r - \mathbf{rg}b \leqslant r - \mathbf{rg}(a \circ b)$ donc $\mathbf{rg}(a \circ b) \leqslant \mathbf{rg}b$ donc $\mathbf{rg}(AB) \leqslant \min(\mathbf{rg}A, \mathbf{rg}B)$.
2. Supposons $p = q$ et $A \in \mathrm{GL_q}(\mathrm{K})$, on sait que $\mathbf{rg}(AB) \leqslant \mathbf{rg}b$ mais aussi $B = A^{-1}AB$ d'où, d'après (1), $\mathbf{rg}b \leqslant \mathbf{rg}(AB)$.
3. Supposons $q = r$ et $B \in \mathrm{GL_r}(\mathrm{K})$, on sait que $\mathbf{rg}(AB) \leqslant \mathbf{rg}A$ mais aussi $A = ABB^{-1}$ d'où $\mathbf{rg}A \leqslant \mathbf{rg}(AB)$.

□

11. Changements de bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $B = (e_1, \cdots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \cdots, e'_n)$

Définition 42

On appelle matrice de passage de B à B' la matrice $\underset{B}{\mathrm{Mat}}(B')$, notée $\mathrm{P}_B^{B'}$

$$\mathrm{P}_B^{B'} = \underset{B}{\mathrm{Mat}}(B')$$

Remarque.
— $\mathrm{P}_B^{B'} = \underset{B',B}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_E)$
— $\mathrm{P}_B^{B} = I_n$

Propriété 54

Soient B, B', B'' trois bases de E, on a :

1. $\mathrm{P}_B^{B''} = \mathrm{P}_B^{B'} \mathrm{P}_{B'}^{B''}$
2. $\mathrm{P}_B^{B'}$ est inversible et $\left(\mathrm{P}_B^{B'}\right)^{-1} = \mathrm{P}_{B'}^{B}$

Preuve. 1. On a :

$$\begin{aligned} P_B^{B''} &= MatB'', Bid_E \\ &= \underset{B'',B}{\text{Mat}}(\text{id}_E \circ \text{id}_E) \\ &= \underset{B',B}{\text{Mat}}(\text{id}_E) \times \underset{B'',B'}{\text{Mat}}(\text{id}_E) \\ &= P_B^{B'} \times P_{B'}^{B''} \end{aligned}$$

2. $P_B^{B'} P_{B'}^{B} = P_B^B = I_n$

□

Propriété 55: Changement de base pour un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, B, B' deux bases de E et $x \in E$. Alors

$$\underset{B}{\text{Mat}}(x) = P_B^{B'} \underset{B'}{\text{Mat}}(x)$$

Preuve. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E, $x \in E$, $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ la colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ celle des composantes de x dans $\mathcal{B}'$. On a alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j e'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{n} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[i,j]\, e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[i,j]\, \beta_j \right) e_j \end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées dans une base, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_i P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[i,j]$ d'où $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$. □

Propriété 56: Changement de base pour une application linéaire

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit B, B' deux bases de E. Soit C, C' deux bases de F. Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\underset{B',C'}{\text{Mat}}(f) = \left(P_C^{C'}\right)^{-1} \underset{B,C}{\text{Mat}}(f)\, P_B^{B'}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \underset{B',C'}{\text{Mat}}(f) &= \underset{B',C'}{\text{Mat}}(\text{id}_F o f \circ \text{id}_E) \\ &= \underset{C',C}{\text{Mat}}(\text{id}_F)\, \underset{B,C}{\text{Mat}} f \underset{B',B}{\text{Mat}}(\text{id}_E) \\ &= \text{Pass}(C', C) \underset{B,C}{\text{Mat}} f P_B^{B'} \\ &= \text{Pass}^{-1}(C, C') \underset{B,C}{\text{Mat}} f P_B^{B'} \end{aligned}$$

□

Corollaire 19

Lorsque $f \in \mathcal{L}(E)$ et B, B' deux bases de E, alors

$$\underset{B'}{\text{Mat}}(f) = \left(P_B^{B'}\right)^{-1} \underset{B}{\text{Mat}}(f)\, P_B^{B'}$$

12. Matrices équivalentes et rang

Définition 43: Matrices équivalentes

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que B est équivalente à A, ou A et B sont équivalentes, si et seulement si il existe $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = PAQ$. On écrit $A \sim B$

Propriété 57

L'équivalence $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\text{M}_{\text{n,p}}(\text{K})$.

Preuve. **Réflexivité :** $A = I_n A I_p$, $I_n \in \text{GL}_\text{n}(\text{K})$ et $I_p \in \text{GL}_\text{p}(\text{K})$ donc A est équivalente à A.

Symétrie : soient $A, B \in \text{M}_{\text{n,p}}(\text{K})$ telles que B est équivalente à A, montrons que A est équivalente à B. Il existe $Q \in \text{GL}_\text{n}(\text{K})$ et $P \in \text{GL}_\text{p}(\text{K})$ telles que $B = QAP$ donc $A = Q^{-1} B P^{-1}$.

Transitivité : soient $A, B, C \in \mathrm{M_{n,p}}(\mathrm{K})$ telles que A soit équivalente à B et B soit équivalente à C, on écrit $C = QBP$ et $B = RAS$ avec $Q, R \in \mathrm{GL_n}(\mathrm{K})$ et $P, S \in \mathrm{GL_p}(\mathrm{K})$ d'où $C = QRASP$ avec $QR \in \mathrm{GL_n}(\mathrm{K})$ et $SP \in \mathrm{GL_p}(\mathrm{K})$. □

Remarque. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\underset{B,C}{\mathrm{Mat}}(f)$ est équivalente à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$.

Propriété 58: Rang et équivalence

Pour $A, B \in \mathrm{M_{n,p}}(\mathrm{K})$.
A est équivalente à B si, et seulement, si $\mathbf{rg}A = \mathbf{rg}B$.

Preuve. $\Rightarrow$) soit $M \in \mathrm{M_{n,p}}(\mathrm{K})$, $P \in \mathrm{GL_p}(\mathrm{K})$, $Q \in \mathrm{GL_n}(\mathrm{K})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{rg}(QMP) &= \mathbf{rg}(QM) \quad \text{car } P \text{ est inversible}\\ &= \mathbf{rg}(M) \quad \text{car } Q \text{ est inversible}\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Pour cela, nous utiliserons le lemme

□

Lemme

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r, il existe une base B de E et une base C de F telles que :

$$\underset{B,C}{\mathrm{Mat}}(f) = J_{n,p,r}$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ du rang $r = \mathbf{rg}f$. Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ une base de $\mathrm{Im}f$, alors, d'après le théorème de la base incomplète $\exists \varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \ldots, \varepsilon_n \in F$ tels que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ soit une base de F. Pour $i \in [\![1, r]\!]$ le vecteur $\varepsilon_i \in \mathrm{Im}f$ donc $\exists e_i \in E$ tel que $\varepsilon_i = f(e_i)$. Alors $(e_1, \cdots, e_r)$ est une famille libre de E : En effet, si $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(e_i) = 0$ or $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_r))$ est libre donc $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i = 0$.

Soit $H = \mathbf{Vect} e_1, \cdots, e_r$, montrons que $E = H \oplus \mathrm{Ker}f$.

— Soit $x \in H \cap \mathrm{Ker}f$, $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i$ et $f(x) = 0$ donc $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(e_i) = 0$. Or la famille $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_r))$ est libre donc $\forall i \in 1, r$, $\alpha_i = 0$ donc $x = 0$.

— D'après le théorème du rang

$$\begin{aligned}\dim(H + \mathrm{Ker}f) &= \dim H + \dim \mathrm{Ker}f\\ &= r + \dim \mathrm{Ker}f\\ &= p \quad \text{d'après le théorème du rang}\end{aligned}$$

Donc $E = H \oplus \mathrm{Ker}f$.

Soit $(e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}f$, alors $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E par recollement. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, $f(e_i) = \varepsilon_i$ et $\forall j \in [\![r+1, p]\!]$, $f(e_j) = 0$ d'où $\underset{B,C}{\mathrm{Mat}}(f) = J_{n,p,r}$. □

Conséquence 1

$\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}\left({}^tA\right)$

13. Matrices semblables

Définition 44

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B, et on note $A \approx B$, si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

Propriété 59

La relation $\approx$ est une relation d'équivalence dans $M_n(\mathbb{K})$

Preuve. — Réfexivité : $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $A = I_n A I_n$

— Symétrie : S'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On pose $Q = P^{-1} \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{K})$, alors $A = Q^{-1}BQ$, donc $B \approx A$

— Supposons que $A \approx B$ et $B \approx C$. Il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$.
Alors $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$ et $PQ \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc $A \approx C$ □

Remarque. Pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$ est $\underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(f)$ sont semblables.

Propriété 60

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.
En particulier $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{Tr(AB)} = \mathrm{Tr(BA)}$

Preuve. AB et BA sont des matrices carrées. En notant $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr(AB)} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{ji}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}\right)\\ &= \mathrm{Tr(BA)}\end{aligned}$$

□

Remarque. Si A et B deux matrices semblables, alors $\mathrm{Tr(A)} = \mathrm{Tr(B)}$

Exercice 4. *Soit f une forme linéaire de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad f(AB) = f(BA)$. Alors*

$$\exists \alpha \in \mathbb{K} \text{ tel que } f = \alpha \mathrm{Tr}$$

Définition 45

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle trace de l'endomorphisme f notée $\mathrm{Tr(f)}$, la trace d'une matrice représentative de f dans une base de E

Exemple 33 (Trace d'un projecteur)**.** Si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{Tr(p)} = \mathbf{rg}(\mathrm{p})$

Exemple 34 (Trace d'une symétrie)**.** Soit s une symétrie de direction G et de base F, alors $\mathrm{Tr(s)} = \dim \mathrm{F} - \dim \mathrm{G}$

Propriété 61

1. $\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire
2. $\forall f, g \in \mathcal{L}(E), \quad \mathrm{Tr(g \circ f)} = \mathrm{Tr(fog)}$