Guide d'onde à section rectangulaire

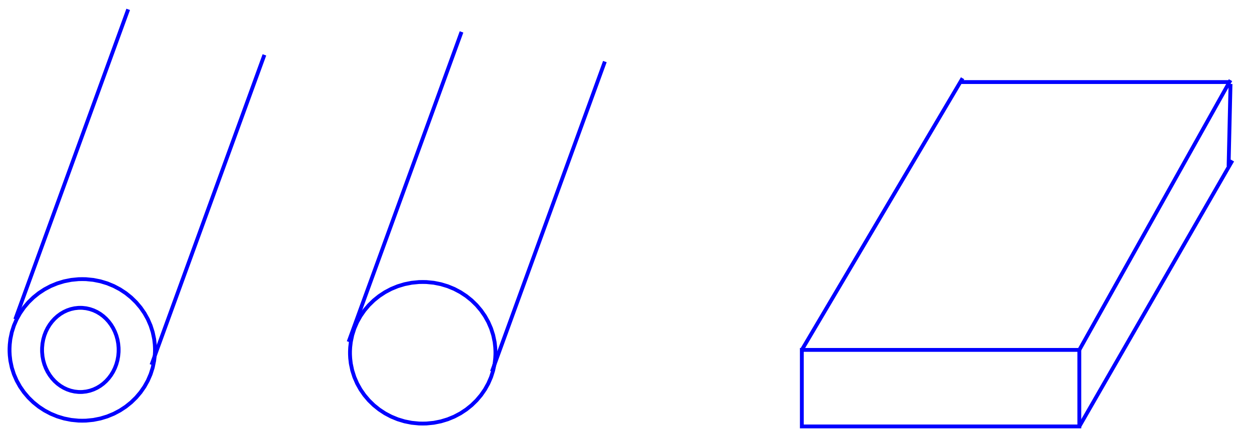
Table des matières

1 Généralité

1.1 Définition

•Définition : Un guide d'onde est une portion d'espace vide ou remplie par un diélectrique (milieu isolant) et limité par un conducteur supposée parfait ,il sert à canaliser l'OEM dans cette portion de l'espace sans dissipation de son énergie. Le guide d'onde est invariant par translation dans une direction qui sera la direction de propagation de l'OEM.

• Exemples



cable coaxial — Guide cylindrique — guide rectangulaire

1.2 Onde transverse électrique-Onde transverse magnétique

- une onde électromagnétique est dite transverse électrique (TE) si le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation
- une onde électromagnétique est dite transverse magnétique (TM) si le champ magnétique est perpendiculaire à la direction de propagation
- une onde électromagnétique est dite transverse électromagnétique (TEM) si le champ électrique et magnétique sont perpendiculaire à la direction de propagation

1.3 Conditions aux limites

Considérons l'OEMPPH de la forme : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t - kz)$ avec $\vec{E}_0 \perp \vec{e}_z$

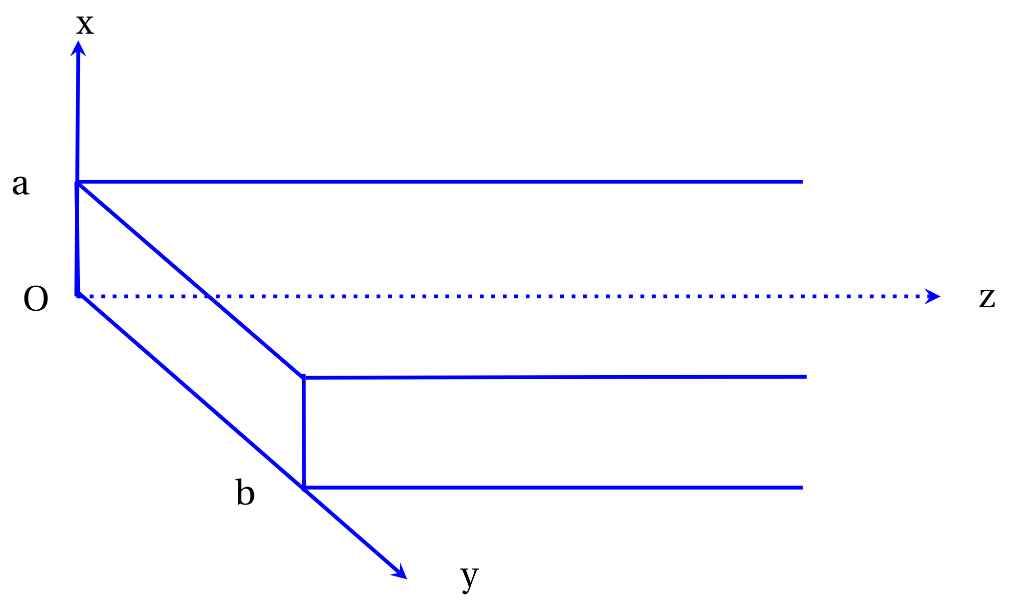
- la composante tangentielle du champ électrique doit être nulle sur les bords du guide donc E_0 doit être nul sur les bords,donc nécessairemet doit dépendre des coordonnées x, y,donc l'onde plane plane ne peut être solution de ce problème
- il est de même pour le champ magnétique (continuité de la composante normale)

• Conclusion : les conditions aux limites interdisent la propagation des ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques et imposent une forme plus complexe.

2 Guide d'onde à section rectangulaire

2.1 Modélisation

le guide d'onde à section rectangulaire est constitué de quatres planes métalliques parfaitement conducteurs : $x=0$, $x=a$, $y=0$ et $y=b$,la longuer de ce guide est infini suivant Oz.



2.2 Notion du mode de propagation

•Définition : On appelle mode de propagation toute solution de l'équation de propagation vérifiant les conditions aux limites du guide d'onde.

chaque mode de propagation est caractérisé par deux entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$

- n : caractérise la quantification de l'amplitude en x
- m : caractérise la quantification de l'ampltide en y
- si l'amplitude de l'onde ne dépend pas de l'une des variables en le remplace par l'indice 0

► Modes $\mathrm{TE}_{n,m}$: dans ces modes l'onde électromagnétique est transverse électrique,et l'amplitude de l'onde dépend des deux variables x et y

► Modes $\mathrm{TM}_{n,m}$: dans ces modes l'onde électromagnétique est transverse magnétique,et l'amplitude de l'onde dépend des deux variables x et y

2.3 Modes $\mathrm{TE}_{n,0}$

- on suppose qu'il y a pas de dissipation de l'énergie électromagnétique donc l'amplitude du champ électrique ne dépend pas de z
- On cherche le champ électrique sous la forme

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = f(x) \exp i(\omega t - k_g z)\vec{e}_y}$$

- l'équation de propagation dans le vide : $\Delta \underline{\vec{E}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial^2 t} = \vec{0}$

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_g^2\right)f=0}$$

- l'équation caractéristique : $r^2+\frac{\omega^2}{c^2}-k_g^2=0 \Leftrightarrow r^2=k_g^2-k_0^2$, avec $k_0^2=\frac{\omega^2}{c^2}$

▶ cas n°1 : $k_g>k_0$

- la solution : $f(x)=\mathrm{A}\exp\left(x\sqrt{k_g^2-k_0^2}\right)+\mathrm{C}\exp\left(-x\sqrt{k_g^2-k_0^2}\right)$, avec A et B sont des constantes
- la continuité de la composante tangentielle du champ électrique en $x=0$ et $x=a$: $f(0)=0$ et $f(a)=0$
  $f(0)=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{C}=0 \Leftrightarrow f(x)=\mathrm{A}\left[\exp\left(x\sqrt{k_g^2-k_0^2}\right)-\exp\left(-x\sqrt{k_g^2-k_0^2}\right)\right]$
  $f(b)=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}\left[\exp\left(a\sqrt{k_g^2-k_0^2}\right)-\exp\left(-a\sqrt{k_g^2-k_0^2}\right)\right]=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}=0$

$$\boxed{f(x)=0}$$

• **Conclusion** : pour $k_g>k_0$ il n'y a pas de propagation de l'onde électromagnétique dans le guide

▶ Cas n°2 : $k_g<k_0$

- la solution : $f(x)=\mathrm{A}'\cos\left(x\sqrt{k_0^2-k_g^2}\right)+\mathrm{C}'\sin\left(x\sqrt{k_0^2-k_g^2}\right)$
- $f(0)=0 \Leftrightarrow \mathrm{A}'=0 \Leftrightarrow f(x)=\mathrm{C}'\sin\left(x\sqrt{k_0^2-k_g^2}\right)$
- $f(a)=0 \Leftrightarrow \mathrm{C}'\sin\left(a\sqrt{k_0^2-k_g^2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(a\sqrt{k_0^2-k_g^2}\right)=0 \Leftrightarrow a\sqrt{k_0^2-k_g^2}=n\pi$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

$$\boxed{\sqrt{k_0^2-k_g^2}=\frac{n\pi}{a}\,;n\in\mathbb{N}}$$

$$\boxed{k_g^2=k_n^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

- on pose $\mathrm{C}'=\mathrm{E}_n$

$$\boxed{f(x)=\mathrm{E}_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)} \text{ et } \boxed{\vec{\mathrm{E}}=\mathrm{E}_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos(\omega t-k_g z)\vec{e}_y}$$

- à $z=cte$, l'onde est stationnaire vibrant sur place avec une pulsation ω et une amplitude $\mathrm{E}_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$
- à $x=cte$,l'onde est monchromatique et progressive dans le sens des z croissants
- les modes $\mathrm{TE}_{n,0}$ sont caractérisés par des pulsations de coupure ω_{nc}
  il y a propagation : $k_g^2>0 \Leftrightarrow \frac{\omega^2}{c^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2>0 \Leftrightarrow \omega>\omega_{cn}=\frac{n\pi c}{a}$

$$\boxed{\text{pulsations de coupure des TE}_{n,0} : \omega_{nc}=\frac{n\pi c}{a}}$$

•**Conclusion** : L'existence des conditions aux limites entraîne une quantification des vecteurs d'onde. À chaque valeur de n correspnd un mode de propagation différent,et une pulsation de coupure au dessous de laquelle ce mode ne se propage pas.

- Exemples
  - mode $TE_{1,0}$: $k_1^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2}$; $\omega_{1c} = \dfrac{\pi c}{a}$
  - mode $TE_{2,0}$: $k_2^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{4\pi^2}{a^2}$; $\omega_{2c} = \dfrac{2\pi c}{a}$
- Champ magnétique
  - $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
  - après tout calcul fait on trouve

$$\left\{\begin{array}{lcl} B_x & = & \dfrac{k_g}{\omega} E_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - k_g z) \\ B_y & = & 0 \\ B_z & = & -\dfrac{E_n}{\omega}\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)\sin(\omega t - k_g z) \end{array}\right.$$

  - le champ magnétique n'est pas perpendiculaire à direction de propagation $(\vec{e}_z)$,donc n'est pas transversal

•Conclusion : dans un guide d'onde à section rectangulaire le mode TEM n'existe pas

- Vitesse de phase-Vitesse de groupe
  - vitesse de phase : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\boxed{v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_{nc}}{\omega}\right)^2}} > c}$$

  - vitesse de groupe : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk_g}$

$$\boxed{v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\omega_{nc}}{\omega}\right)^2} < c}$$

$$\boxed{v_\varphi . v_g = c^2}$$

  - $v_\varphi \neq v_g$: il y a dispersion

2.4 Modes $TE_{0,m}$

- on cherche le champ électrique sous la forme

$$\boxed{\vec{E} = f(y)\exp i(\omega t - k_g z)\,\vec{e}_x}$$

les résultats restent les mêmes,il suffit de remplacer n par m et x par y et a par b

- la relation de dispersion

$$\boxed{k_g^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2}$$

- le champ électrique

$$\boxed{\overrightarrow{E} = E_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos(\omega t - k_g z)\overrightarrow{e}_x}$$

- les fréquences de coupure

$$\boxed{\omega_{mc} = \frac{m\pi c}{b}}$$

- le champ magnétique

$$\begin{cases} B_x &= 0 \\ B_y &= \dfrac{k_g}{\omega}E_m \sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right)\cos(\omega t - k_g z) \\ B_z &= \dfrac{m\pi}{b\omega}E_m \cos\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right)\sin(\omega t - k_g z) \end{cases}$$

2.5 Modes $TE_{n,m}$

- le champ électrique doit vérifié les conditions aux limites

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{E}_1(x)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp i(\omega t - k_g z)\overrightarrow{e}_x + \underline{E}_2(y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\exp i(\omega t - k_g z)\overrightarrow{e}_y}$$

- $div\,\underline{\overrightarrow{E}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d\underline{E}_1(x)}{dx}\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right) + \dfrac{d\underline{E}_2(y)}{dy}\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right) = 0$
- $\underline{E}_1(x) = \underline{E}_{10}\cos\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right); \underline{E}_2(y) = \underline{E}_{20}\cos\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right); \dfrac{n}{a}\underline{E}_{10} + \dfrac{m}{b}\underline{E}_{20} = 0$ avec $m, n \neq 0$

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E}} = \left[\underline{E}_{10}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\overrightarrow{e}_x + \underline{E}_{20}\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\overrightarrow{e}_y\right]\exp i(\omega t - k_g z)}$$

- si $m = 0, \underline{\overrightarrow{E}} = \underline{E}_{20}\sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)\exp i(\omega t - k_g z)\overrightarrow{e}_y$
- si $n = 0, \underline{\overrightarrow{E}} = \underline{E}_{10}\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right)\exp i(\omega t - k_g z)\overrightarrow{e}_x$
- l'équation de propagation pour la composante suivant Ox

$$\Delta\underline{E}_x(x,y) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{E}_x(x,y)}{\partial t^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right]\left(\underline{E}_{10}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp i(\omega t - k_g z)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - kg^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\boxed{k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]}$$

- les pulsations de coupure pour $TE_{n,m}$

$$\boxed{\omega_{m,n,c} = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}}$$

- si $a < b : \omega_{c,min} = \dfrac{\pi c}{b}$: pulsation de coupure du mode $TE_{0,1}$

- si $\dfrac{\pi c}{b} < \omega < \pi c\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}$: seule le mode $TE_{0,1}$ se propage dans le guide,on dit qu'il s'agit d'un guide monomode
- le mode pour lequel k_g est plus grand est appelé le fondamental,ici $TE_{0,1}$