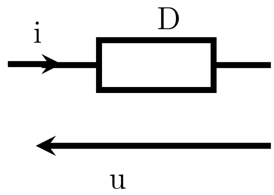
Puissance en régime sinusoidal

Table des matières

1 Puissance instantanée

1.1 Expression

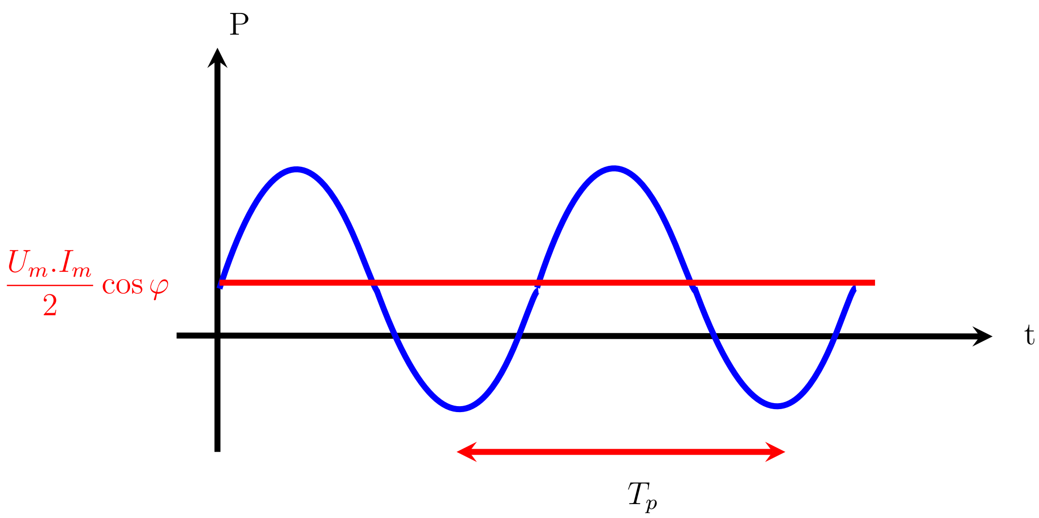


Dans le cadre de la convention recepteur la puissance consommée par un dipôle électrocinétique (D) est définie par :

$$\boxed{P(t) = u(t).i(t)}$$

En régime sinusoidal $u(t) = U_m \cos \omega t$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$
$P(t) = U_m I_m \cos \omega t. \cos(\omega t + \varphi) = \dfrac{U_m.I_m}{2}[\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$
Donc la puissance $P(t)$ est une fonction périodique de pulsation $\omega_p = 2\omega$
La période $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p} = \dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{T}{2}$

1.2 Aspect graphique



Au cours d'une période T le dipôle se comporte réellement :
- Comme un récepteur si $P > 0$
- comme un générateur si $P < 0$

2 Puissance moyenne

2.1 Définition

Dans le cas de signaux périodiques ($u(t)$ et $i(t)$) on définit la puissance moyenne consommée par un dipôle électrocinétique par :

$$\boxed{P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt} \text{ en watt : w}$$

• Remarque : En régime sinusoidal cette puissance est appelée puissance active .

2.2 Puissance moyenne d'un résistor - grandeurs éfficaces

En régime continu ($I = cte$) la puissance moyenne consommée par effet Joule s'écrit
$P_m = U.I = R.I^2$
En régime variable la puissance moyenne consommée :
$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)dt$
• Définition : On appelle intensité éfficace I la valeur de l'intensité du courant continu qui produirait le même effet Joule qu'en régime périodique .
$P_m = R.I^2$ donc l'intensité éfficace est :

$$\boxed{I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

Pour un courant sinusoidal $i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi)$
$I^2 = \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{I_m^2}{2T}\int_0^T (1 + \cos(2(\omega t + \varphi)))dt$ avec $\omega T = 2\pi$

$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

• Valeur éfficace d'une tension sinusoidale
Il s'agit de la valeur quadratique moyenne de la tension $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ sur une période T .

$$\boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

2.3 Puissance moyenne en régime sinusoidal

$u(t) = U_m\cos\omega t$ et $i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi)$
$P(t) = u(t).i(t) = \frac{U_m.I_m}{2}[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$

$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{U_m.I_m}{2}[\cos\varphi + \frac{1}{T}\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)dt]$

$$\boxed{P_m = \frac{U_m.I_m}{2}\cos\varphi}$$

avec $U_m = U\sqrt{2}$ et $I_m = I\sqrt{2}$

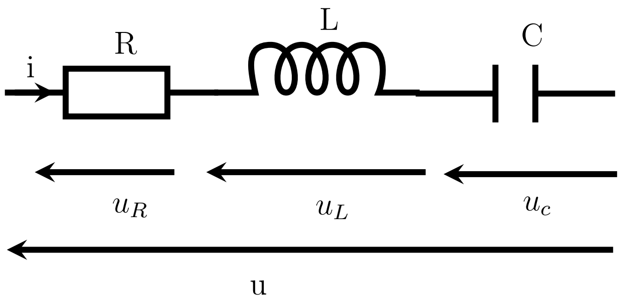
$$\boxed{P_m = U.I\cos\varphi}$$

- La puissance moyenne représente la puissance active consommée
- Le produit $U.I$ désigne la puissance apparente (V.A) du dipôle

- $\cos\varphi$ est appelé facteur de puissance

• Exemples

- Puissance moyenne d'un condensateur et d'une bobine
  Pour un condensateur le courant est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension
  Pour une bobine le courant est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la tension
  Donc $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ donc $P_m = 0$
  Le condensateur et la bobine emmagasinent de l'énergie pendant une alternance et restituent cette énergie lors de l'alternance suivante .
- Cas de RLC série



$u = u_R + u_L + u_c$
$P_m = P_R + P_L + P_c = P_R = RI^2$
La seule énergie consommée l'est par effet Joule dans la résistance .

3 Puissance en notation complexe

3.1 Définition

On définit la puissance complexe $\underline{P}$ consommée par le dipôle par

$$\boxed{\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{u}.\underline{i}^*}$$

$\underline{i}^*$ complexe conjugué de $\underline{i}$
$\underline{u} = U\sqrt{2}\exp j\omega t$ et $\underline{i} = I\sqrt{2}\exp -j\varphi \exp j\omega t = \underline{I}\sqrt{2}\exp j\omega t$ $\underline{P} = \underline{U}.\underline{I}^* = U.I\exp j\varphi$

$$\boxed{\underline{P} = UI(\cos\varphi + j\sin\varphi)}$$

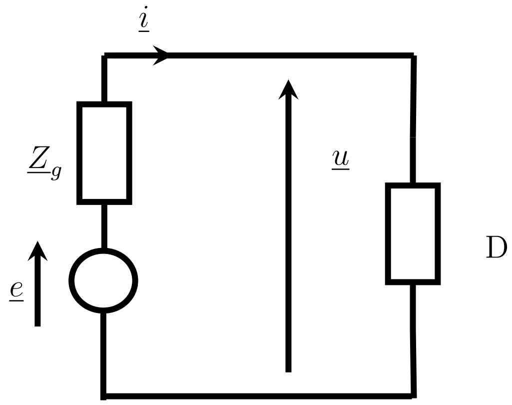
- la puissance active ou moyenne (w)

$$\boxed{P_m = Rel(\underline{P})}$$

- la puissance reactive (V.A)

$$\boxed{Im(\underline{P}) = p_r}$$

3.2 Adaptation d'impédance



Considérons un dipôle D d'impédance $\underline{Z} = R + jX$,alimenté par un générateur de $f.e.m$ $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$ d'impédance interne $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$.
La puissance moyenne consommée par un dipôle D est :
$P_m = Rel(\underline{Z}).I^2 = R.I^2$
loi de Poouillet : $\underline{i} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{Z}_g + \underline{Z}} = \dfrac{\underline{e}}{R_g + R + j(X_g + X)} \Rightarrow I^2 = \dfrac{E^2}{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2} \Rightarrow$
$P_m = \dfrac{RE^2}{(X_g + X)^2 + (R_g + R)^2}$
$P_m = f(R, X)$
P_m est maximale : $(\dfrac{\partial P_m}{\partial R})_{Xfixe} = 0$ et $(\dfrac{\partial P_m}{\partial X})_{Rfixe} = 0$
Pour simplifier les calculs on utilise la dérivée logarithmique
$\dfrac{1}{P_m}(\dfrac{\partial P_m}{\partial X})_R = (\dfrac{\partial \ln P_m}{\partial X})_R = -\dfrac{2(X_g + X)}{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2} = 0$ donc $X = -X_g$
$\dfrac{1}{P_m}(\dfrac{\partial P_m}{\partial R})_X = (\dfrac{\partial \ln P_m}{\partial R})_X = \dfrac{1}{R} - \dfrac{2(R_g + R)}{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2} = \dfrac{R_g - R}{R(R_g + R)} = 0$ donc $R = R_g$

- Résultat :

P_m est maximum si

$$\boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_g^* \Rightarrow R = R_g ; X = -X_g}$$