DNS

Sujet

Fente, fentes de Young, réseau

I. Une fente diffractante

Une onde plane de longueur d'onde λ , se propage suivant l'axe z . Elle traverse en $z=0$ un écran opaque repéré par les axes Cx et Cy , dans lequel on a percé une fente de centre C de largeur a suivant x , de hauteur h suivant y . L'observation se fait sur un écran perpendiculaire à l'axe z , situé à grande distance D de la fente.

1. Exprimer l'amplitude $\underline{E}(\alpha,\beta)$ diffractée à grande distance par cette fente, dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ de coordonnées (α,β,γ) dans les axes (x,y,z) . On pose $S=ah$. Donner l'expression de $\underline{E}(\alpha,\beta=0)$.
2. Préciser ce que devient l'amplitude $\underline{E}(\alpha,\beta)$ dans le cas où la hauteur h suivant y est « très grande ».
3. La fente de départ est désormais centrée non plus en $x=0$ mais en $x=x_0$. Démontrer la nouvelle expression notée $\underline{E}'(\alpha,\beta)$ de $\underline{E}(\alpha,\beta)$ et celle de $\underline{E}'(\alpha,\beta=0)$. Commenter: le centrage de l'écran diffractant dans le faisceau a-t-il une influence sur l'éclairement à grande distance?
4. Donner l'expression de l'éclairement $\mathscr{E}(\alpha,\beta)$ sur l'écran. On notera $\mathscr{E}_0$ l'éclairement maximum sur l'écran.
5. Tracer la fonction $\mathscr{E}(\alpha,\beta=0)$.
6. Écrire $\mathscr{E}(x,y)$, x et y désignant ici les coordonnées du point d'observation sur l'écran.

II. Fentes de Young

L'écran est maintenant percé de deux fentes identiques à la précédente, parallèles à l'axe y et distantes de d dans la direction x , disposées à égale distance du point C .

7. Exprimer l'amplitude $\underline{E}''(\alpha,\beta)$ diffractée à grande distance par les deux fentes. Donner l'expression de $\underline{E}''(\alpha,\beta=0)$.

8. En déduire l'éclairement $\mathcal{E}(\alpha,\beta)$. Montrer que l'éclairement donné par les deux fentes peut s'écrire comme le produit de deux fonctions dont on donnera la signification physique.

9. Tracer la fonction $\mathcal{E}(\alpha,\beta=0)$ pour deux fentes dont l'écartement est 10 fois supérieur à leur largeur ($d/a=10$). Comparer à celle obtenue avec une fente unique de même largeur a et commenter.

10. Qu'obtient-on pour $a\rightarrow 0$? Commenter.

III. Réseau

L'écran est maintenant percé d'un nombre N , très grand, de fentes identiques parallèles et équidistantes, qui constituent un réseau de période d . La hauteur h de ces fentes h suivant y est « très grande ».On pourra supposer, pour le calcul, que les fentes sont centrées en $x=d, 2d, \ldots nd, \ldots Nd$. On fait désormais $\beta=0$ de sorte que les grandeurs étudiées ne dépendent plus que de α .

11. Déterminer $\underline{E}(\alpha)$ et $\mathcal{E}(\alpha)$. Montrer que $\mathcal{E}(\alpha)$ s'écrit comme le produit de l'éclairement donné par une fente unique par la fonction $f(\alpha)=\left[\dfrac{\sin(\pi\alpha N\frac{d}{\lambda})}{\sin(\pi\alpha\frac{d}{\lambda})}\right]^2$, dont on précisera la signification.

12. Étudier et tracer $f(\alpha)$. Préciser les coordonnées des maximas. Préciser la largeur des pics à la base. Montrer qu'on retrouve la loi des réseaux.

13. Comparer l'éclairement obtenu avec un réseau à celui donné par deux fentes de même largeur a et de même écart d . Commenter.

14. Repérer trois dimensions caractéristiques du profil d'éclairement, les relier aux trois dimensions caractéristiques du réseau: a , d et $L=Nd$ largeur du réseau. Vérifier que les dimensions dans le plan de l'objet diffractant et celles dans le plan de sa figure de diffraction sont dans un rapport inverse.

15. On admet que le réseau peut séparer deux longueurs d'onde proches λ et $\lambda+\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda\ll\lambda$) si les directions de diffraction maximale correspondant chacune de ces longueurs d'onde dans un ordre p donné sont espacées de plus que la mi-largeur du pic principal de diffraction d'ordre p (critère de Rayleigh), exprimer le pouvoir de résolution théorique $\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}}$ de ce spectromètre (on fera ici l'approximation des petits angles).

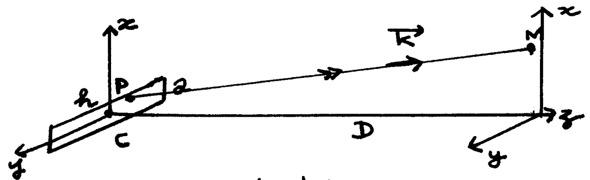
16. Application numérique : calculer $\Delta\lambda_{min}$ dans le cas d'un réseau comportant $500\,traits/mm$ utilisé dans l'ordre 1 et éclairé sur $L=1\,cm$ (pour $\lambda=500\,nm$).

17. En réalité, le pouvoir de résolution est plus souvent limité par le fait que l'onde incidente sur le réseau, issue d'une fente de largeur A non nulle à l'entrée du collimateur de focale f' a une largeur angulaire $\Delta\theta_i=\dfrac{A}{f'}$ (dans l'approximation des petits angles). On veut que les deux pics de diffraction correspondant à λ et $\lambda+\Delta\lambda$ soient séparés. Déterminer la limite de résolution $\Delta\lambda_{min}$ en pratique pour l'ordre p .

18. Calculer $\Delta\lambda_{min}$ (valeurs numériques supplémentaires nécessaires: $A=100\,\mu m$ et $f'=200\,mm$).

Réponses

1)



On travaille ici en $\exp(j\omega t)$

Les retards sont donc en $\exp -j\varphi$ (avec $\varphi > 0$)

Ici on a un terme en $\exp -j\vec{k}\,\overrightarrow{PM} = \underbrace{\exp -j\vec{k}\,\overrightarrow{CM}}_{\text{indépendant de P}}\ \exp j\vec{k}\,\overrightarrow{CP}$

$$\underline{E} = A \iint_{\text{plan } xCy} t(x,y)\ \exp(j\vec{k}\,\overrightarrow{CP})\ dx\,dy \qquad \text{(A constante de proportionnalité)}$$

$$= A \int_{x=-a/2}^{a/2} \int_{y=-h/2}^{h/2} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\ \vec{u}_{PM}\,\overrightarrow{CP}\right) dx\,dy$$

$$= A \int_{x=-a/2}^{a/2} \int_{y=-h/2}^{h/2} \exp j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)\ dx\,dy$$

$$= A \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x\right) dx \int_{y=-h/2}^{h/2} \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right) dy$$

$$= A\ a\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ h\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\beta h}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{\underline{E}_{(\alpha,\beta)} = A\,S\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\beta h}{\lambda}\right)}$$

$$\boxed{\underline{E}(\alpha,\beta=0) = A\,S\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)}$$

---

2) Si h est "grand", $\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\beta h}{\lambda}\right)$ n'est non nul que pour β très petit. Il n'y a diffraction que selon x et pas selon y.

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{E}(\alpha,\beta) \text{ tel que } && \underline{E}(\alpha,\beta\neq 0) \simeq 0 \\ & && \underline{E}(\alpha,\beta=0) = A\,S\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\end{aligned}}$$

---

3) Si la fente est centrée en $x = x_0$, $y = 0$, il faut changer les bornes d'intégration:

$$\underline{E}'(\alpha,\beta) = A \int_{x=x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+a/2} \int_{y=-h/2}^{h/2} \exp j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)\ dx\,dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{E}'(\alpha,\beta) = \exp j\frac{2\pi\alpha x_0}{\lambda}\ \underline{E}(\alpha,\beta) \\ &\underline{E}'(\alpha,\beta=0) = \exp j\frac{2\pi\alpha x_0}{\lambda}\ \underline{E}(\alpha,\beta=0)\end{aligned}}$$

Il apparaît un terme de phase supplémentaire. Ce qui ne change rien à l'éclairement puisque l'œil est insensible à la phase.

---

4) On définit l'éclairement par

$$\mathcal{E} = \underline{E}(\alpha,\beta)\,\underline{E}^*(\alpha,\beta)$$

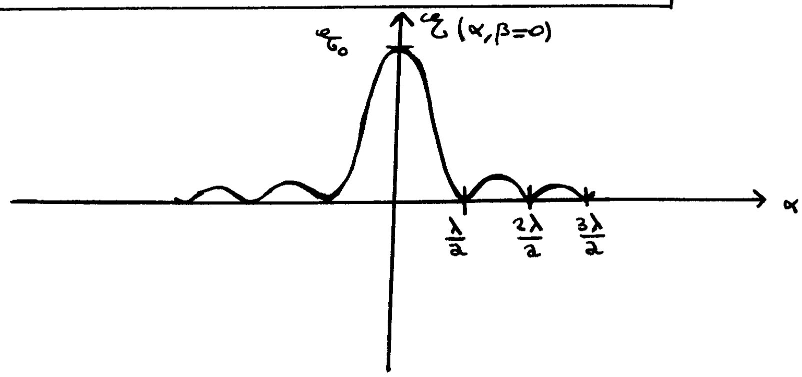
$$\mathcal{E}(\alpha,\beta) = \underbrace{A^2 S^2}_{\mathcal{E}_0}\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\beta h}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{E}(\alpha,\beta) = \mathcal{E}_0\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\beta h}{\lambda}\right)}$$

---

5)

$$\boxed{\mathcal{E}(\alpha,\beta=0) = \mathcal{E}_0\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)}$$



---

6) Avec $\alpha \approx \frac{x}{D}$ et $\beta \approx \frac{y}{D}$

$$\boxed{\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}_0\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda D}x\right)\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi h}{\lambda D}h\right)}$$

démonstration

$$\vec{u}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|} \quad \begin{array}{l|l} & \dfrac{x_M - x_P}{\sqrt{(x_M-x_P)^2+(y_M-y_P)^2+D^2}} \\ \vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z & \dfrac{y_M - y_P}{\sqrt{}} \\ & \dfrac{D}{\sqrt{}} \end{array}$$

avec $x_P \ll x_M$

$y_P \ll y_M$

$D \gg x_M$ et $D \gg y_M$

$$\vec{u}_{PM} \simeq \left|\begin{array}{l} x_M/D \\ y_M/D \\ 1 \end{array}\right.$$

---

7) Puisqu'il y a deux fentes diffractantes, il suffit d'utiliser deux fois la formule vue en 3.

$$\underline{E}''(\alpha,\beta) = \exp j\frac{2\pi\alpha\, d/2}{\lambda}\ \underline{E}(\alpha,\beta) + \exp -j\frac{2\pi\alpha\, d/2}{\lambda}\ \underline{E}(\alpha,\beta)$$

$$= 2\ \underline{E}(\alpha,\beta)\ \cos\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{\underline{E}''(\alpha,\beta) = 2\,AS\ \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi\beta h}{\lambda}\right)\ \cos\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)}$$

$$\boxed{\underline{E}''(\alpha,\beta=0) = 2\,AS\ \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ \cos\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)}$$

---

8) $\mathcal{E}(\alpha,\beta) = \underline{E}''\ \underline{E}''^*$

$$\boxed{\mathcal{E}(\alpha,\beta) = \underbrace{\mathcal{E}_0\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\beta h}{\lambda}\right)}_{\text{éclairement correspondant à la diffraction par une fente}} \times \underbrace{4\cos^2\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)}_{\text{facteur multiplicatif dû au phénomène d'interférences entre deux fentes}}}$$

Remarque : $\left(4\cos^2\frac{\pi\alpha d}{\lambda} = 2\left(1+\cos\frac{2\pi\alpha d}{\lambda}\right)\right)$

---

9) $\mathcal{E}(\alpha,\beta=0) = 4\,\mathcal{E}_0\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ \cos^2\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)$

avec $a = d/10$

$$\boxed{\mathcal{E}(\alpha,\beta=0) = 4\,\mathcal{E}_0\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha}{\lambda}a\right)\ \cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{\lambda}10a\right)}$$

Pour une fente de largeur a, on avait

$$\boxed{\mathcal{E}(\alpha,\beta=0) = \mathcal{E}_0\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha}{\lambda}a\right)}$$

(voir tracés page suivante)

On remarquera que les franges brillantes qui devraient exister en $\alpha = \frac{\lambda}{a}, \frac{2\lambda}{a}$ ... etc sont totalement éteintes car elles sont centrées sur un minimum de la figure de diffraction.

---

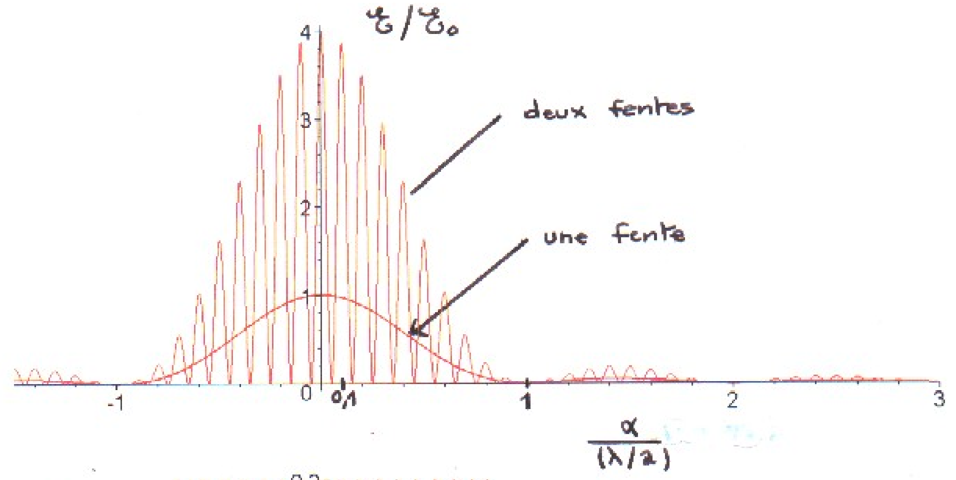
10) Si $a \to 0$ $\quad \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right) \to 1\ \forall\alpha$

La diffraction est uniforme $\forall\alpha$

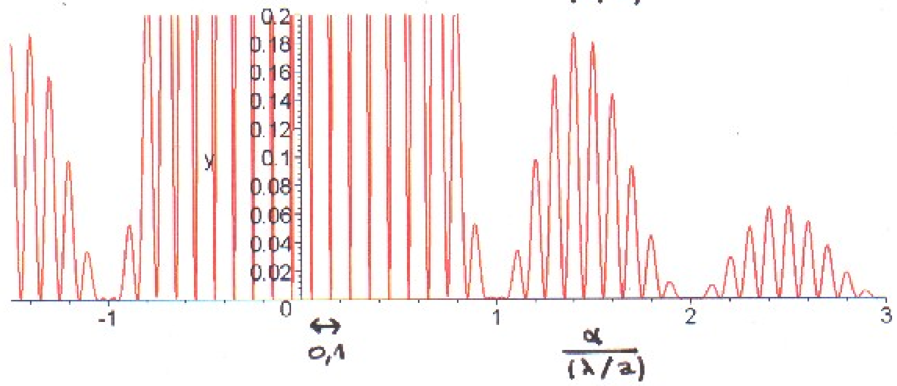
Une fente se comporte alors comme une <u>source isotrope</u> et <u>l'on n'observera que le phénomène d'interférences</u>.

$$\mathcal{E}(\alpha,\beta=0) = 4\,\mathcal{E}_0\ \cos^2\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)$$

$$= 2\mathcal{E}\ \left(1+\cos\frac{2\pi\alpha d}{\lambda}\right)$$



$\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$
deux fentes
une fente
0,1
$\frac{\alpha}{(\lambda/2)}$



y
0,1
$\frac{\alpha}{(\lambda/2)}$

remarque :

On se doit de remarquer que $\mathcal{E}_0 = A^2 S^2$
$= A^2 a^2 h^2$

tend alors vers 0.

La luminosité du phénomène tend vers zéro puisque la lumière ne passe quasiment plus.

11) En utilisant la formule vue en 3)

$$\underline{E}(\alpha) = A\,S\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\underbrace{\left[\exp j\frac{2\pi\alpha d}{\lambda} + \exp 2j\frac{2\pi\alpha d}{\lambda} + \dots + \exp Nj\frac{2\pi\alpha d}{\lambda}\right]}_{\exp j\frac{2\pi\alpha d}{\lambda}\ \frac{1-\exp\left(Nj\frac{2\pi\alpha d}{\lambda}\right)}{1-\exp\left(j\frac{2\pi\alpha d}{\lambda}\right)}}$$

$$= A\,S\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ \frac{\exp\left(j\frac{2\pi\alpha d}{\lambda}\right)\exp\left(j\frac{N\pi\alpha d}{\lambda}\right)}{\exp\left(j\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)}\ \frac{-2j\sin\left(\frac{N\pi\alpha d}{\lambda}\right)}{-2j\sin\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)}$$

$$\boxed{\underline{E}(\alpha) = A\,S\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\ \exp\left(j\frac{(N+1)d}{2}\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)\ \frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha N d}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)}}$$

on remarquera que le terme de phase obtenu correspond à la phase du rayon passant par le milieu du réseau.

$$\boxed{\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{E}_0\ \underbrace{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)}\ \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha N d}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)}\right)^2}_{f(\alpha)}}$$

éclairement correspondant à la diffraction par une fente

facteur multiplicatif traduisant le phénomène d'interférences pour les N fentes du réseau

12) Tracé de $f(\alpha)$

→ la période du numérateur $\sin^2\left(\frac{\pi\alpha N d}{\lambda}\right)$ vaut : $\frac{\lambda}{Nd}$

la période du dénominateur $\sin^2\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)$ vaut : $\frac{\lambda}{d}$

→ la période de $f(\alpha)$ est donc $\frac{\lambda}{d}$

Pour $\alpha = 0$ (ou $p\frac{\lambda}{d}$) $f(\alpha) = N^2$ (cF étudier la limite)
entier

Le numérateur s'annule pour $\alpha = m \frac{\lambda}{Nd}$ (m entier) ce qui (sauf pour $p\frac{\lambda}{d}$) correspond à $f(\alpha)=0$.

(Voir tracés feuille suivante)

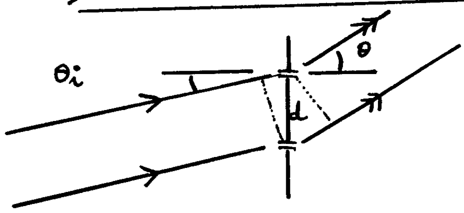
→ <u>les max</u> : pour $\frac{\alpha}{\lambda/d} = p$ (entier)

avec $\frac{f_{max}}{\mathcal{E}_0} = N^2$

→ <u>la largeur des pics à la base :</u>

$$\frac{\Delta\alpha}{\lambda/d} = \frac{2}{N}$$

→ <u>on retrouve la formule des réseaux</u>



$\delta = (d \sin\theta - d \sin\theta_i) \times$ indice

Il y a <u>maximum</u> pour

$\delta = p\,\lambda_{VIDE}$ (p entier)

$d(\sin\theta - \sin\theta_i) = p\lambda$

Ici $\sin\theta_i$ est nul (incidence normale)

$\sin\theta = p\frac{\lambda}{d}$

$$\boxed{\alpha = p\frac{\lambda}{d}}$$

---

13) Par rapport au cas de deux fentes :

– <u>l'amplitude aux maximums est plus grande</u> ($N^2\mathcal{E}_0 >> 4\mathcal{E}_0$)

– l'"accord" est bien <u>plus précis</u> : la largeur à la base vaut

$\frac{2}{N}\frac{\alpha}{(\lambda/d)} << 1\frac{\alpha}{(\lambda/d)}$

---

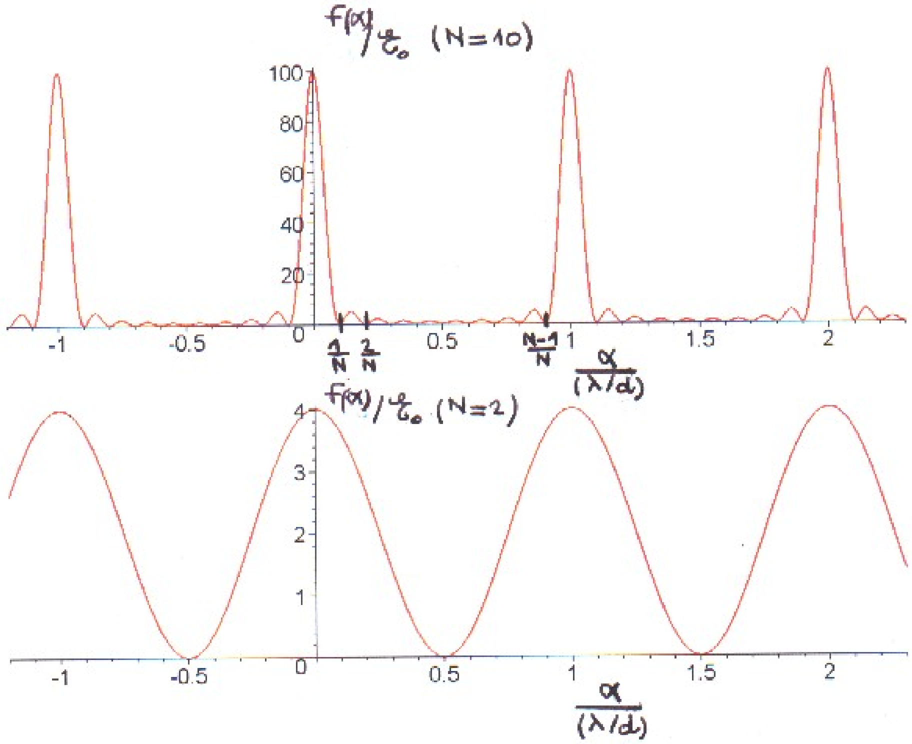
14) Les trois dimensions du réseau :

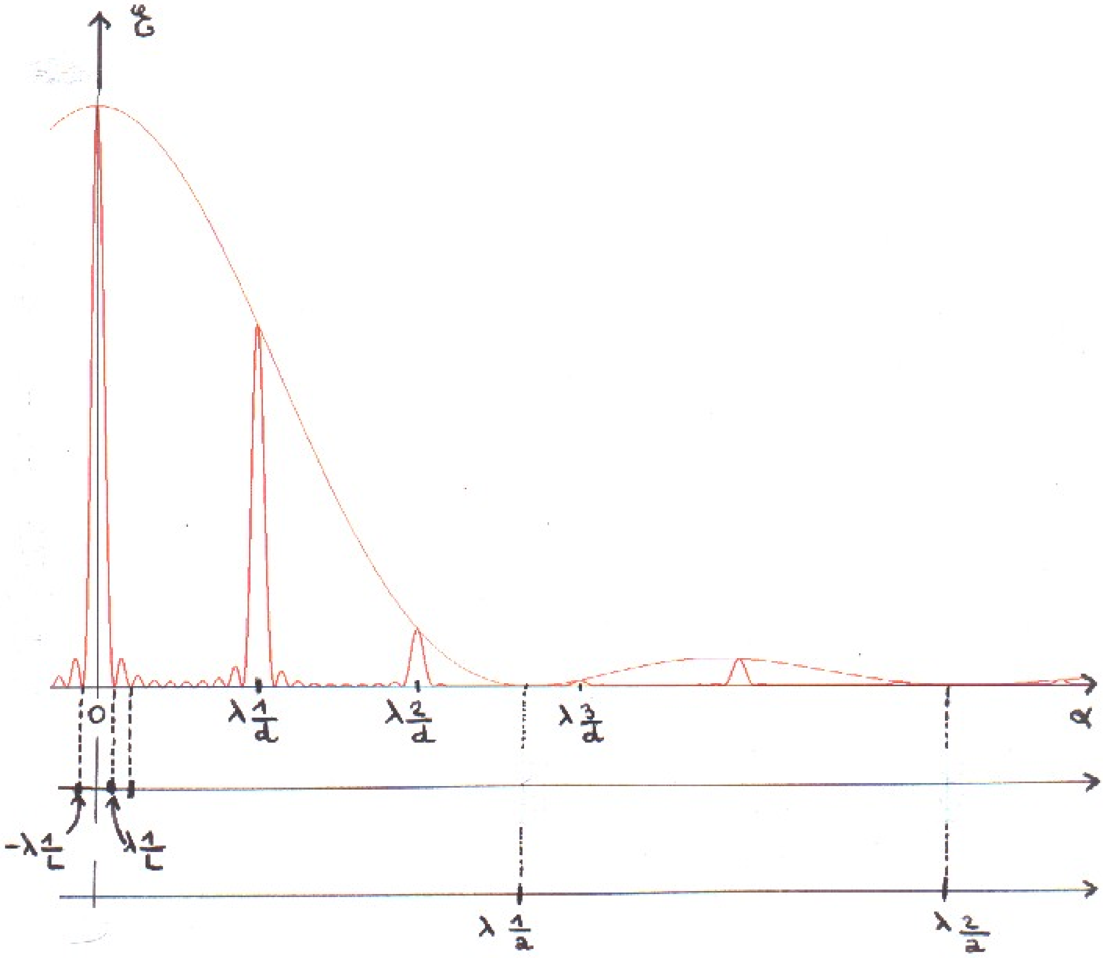
a : largeur d'une fente

d : distance entre deux fentes

L = N d : largeur du réseau

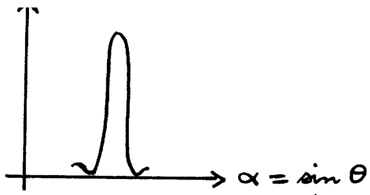
On retrouve ces trois grandeurs (à l'envers, car ici on détermine les "fréquences" spatiales) dans la courbe donnant $\mathcal{E}$


f(α)/ℰ₀ (N=10)
100
80
60
40
20
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
1/N
2/N
N-1/N
α/(λ/d)
f(α)/ℰ₀ (N=2)
4
3
2
1
0
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
α/(λ/d)



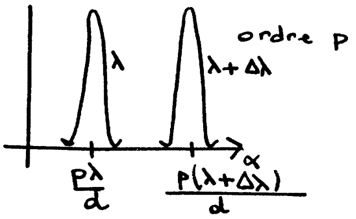
$\mathcal{E}$
0
$\lambda\frac{1}{d}$
$\lambda\frac{2}{d}$
$\lambda\frac{3}{d}$
α
$-\lambda\frac{1}{L}$
$\lambda\frac{1}{L}$
$\lambda\frac{1}{a}$
$\lambda\frac{2}{a}$

15)



$\longleftrightarrow$ largeur d'un pic de diffraction

$$\Delta\alpha = \frac{2\lambda}{L}$$



(remarque : dans la suite, p est supposé positif sinon faire $p \to |p|$)

On doit écrire que les longueurs d'onde sont séparées

$$\boxed{\theta_{\substack{\text{ordre } p\\ \lambda+\Delta\lambda}} - \theta_{\substack{\text{ordre } p\\ \lambda}} \geq \Delta\theta_{1/2} \text{ (demi-largeur)}}$$

(critère de Rayleigh)

Pour les petits angles, $\theta = \alpha$

$$\frac{p(\lambda+\Delta\lambda)}{d} - \frac{p\lambda}{d} \geq \frac{\lambda}{L}$$

$$\frac{p\,\Delta\lambda}{d} \geq \frac{\lambda}{L}$$

donc

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} = \frac{pL}{d}$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} = p\,N}$$

---

16) A.N. $n = 500$ traits mm^{-1}

$= 500\ 10^{3}$ traits m^{-1}

$d = \frac{1}{n}$

$= 2.\ 10^{-6}\,m$

$N = n\,L$

$= 5.\ 10^{3}$ traits

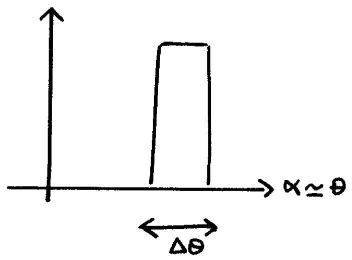
On fait $p = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}} &= 5000 \\ \Delta\lambda_{min} &= 0{,}1 \text{ nm} \end{aligned}}$$

---

17) Le faisceau incident a une largeur $\Delta\theta_i$ ($\Delta\theta_i = \frac{A}{f'}$ avec A largeur de la fente , placée au foyer objet d'une lentille de focale notée f')

→ La largeur d'un pic à considérer est alors à lier à ce $\Delta\theta_i$



on rappelle pour l'ordre p :

$$\sin\theta - \sin\theta_i = \frac{p\lambda}{d}$$

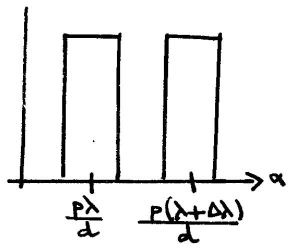
en différenciant

$$\underbrace{\cos\theta}_{\simeq 1}\, d\theta - \underbrace{\cos\theta_i}_{\simeq 1}\, d\theta_i = 0$$

$\alpha \simeq \theta$ supposé petit ; incidence normale

donc : $\boxed{\underset{\text{largeur}}{\Delta\theta} = \Delta\theta_i}$

→ Distance entre les deux raies



on écrit ici

$$\boxed{\theta_{\substack{\text{ordre } p\\ \lambda+\Delta\lambda}} - \theta_{\substack{\text{ordre } p\\ \lambda}} \geqslant \underset{\text{(largeur)}}{\Delta\theta}}$$

$$\frac{p\,\Delta\lambda}{d} \geqslant \frac{A}{f'}$$

$$\boxed{\Delta\lambda_{min} = \frac{A\,d}{p\,f'}}$$

18) A.N. $= \dfrac{100\ 10^{-6}\ 2\ 10^{-6}}{1\ \ 0{,}2}$

$$\boxed{\Delta\lambda_{min} = 1 \text{ nm}}$$

C'est la largeur de la fente et non la diffraction qui limite la résolution.