

Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
29/08/2022	Trains épicycloïdaux	Résumé

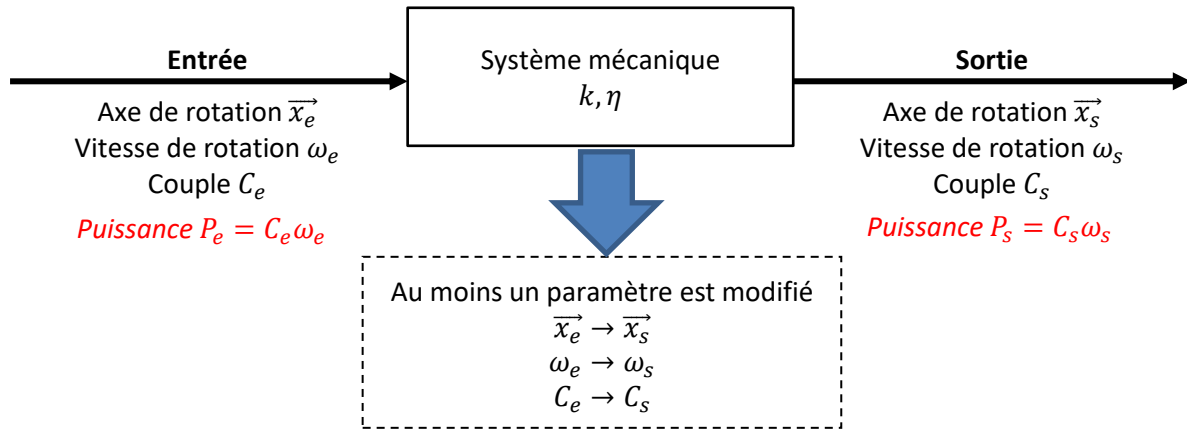
# Mécanique

## MECA1 - Trains épicycloïdaux

### Résumé



## Systèmes d'adaptation du mouvement



### Rapport de transmission

$$k = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{N_s}{N_e} \quad \omega = \frac{\pi}{30} N$$

$k < 1 \rightarrow$  Réducteur  $\omega_s < \omega_e - C_s > C_e$   
 $k = 1 \rightarrow$  Joint  $\omega_s = \omega_e$   
 $k > 1$  Multiplicateur  $\omega_s > \omega_e - C_s < C_e$

### Rendement

#### Régime stationnaire

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} = \frac{C_s \omega_s}{C_e \omega_e}$$

$$\eta = 1 \Leftrightarrow P_s = P_e$$

#### Régime instationnaire

$$\eta \neq \frac{P_s}{P_e}$$

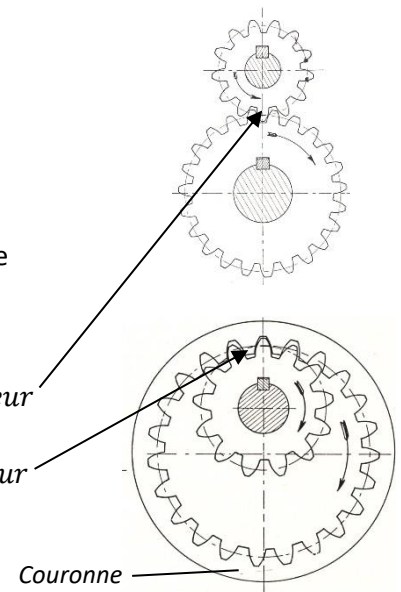
$$\frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

## Engrenages

### Rapport de transmission

1 dent de la roue menante entraîne 1 dent de la roue menée

$$k = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \begin{cases} -\frac{Z_e}{Z_s} = -\frac{d_e}{d_s} \text{ ctct extérieur} \\ +\frac{Z_e}{Z_s} = +\frac{d_e}{d_s} \text{ ctct intérieur} \end{cases}$$



### Définition

Ensemble de deux roues dentées  
Entraînement par obstacles entre  
deux axes en rotations.  
La petite roue est appelée « Pignon »

### Train d'engrenages simple

### Définition

Succession en série de plusieurs engrenages

### Rendement

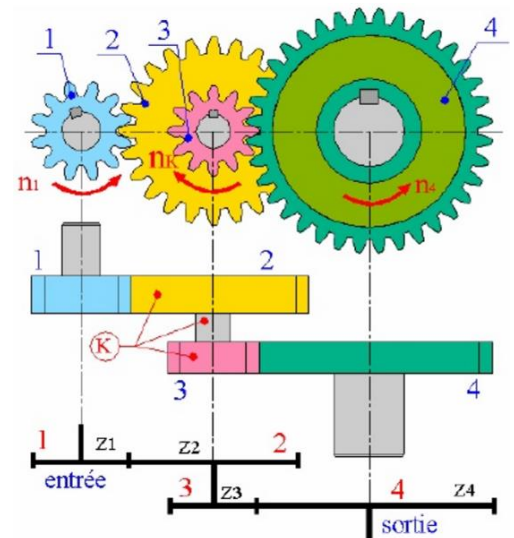
Soient  $n$  engrenages entre  $n+1$  roues dentées  
Soit  $\eta_i$  le rendement l'engrenage  $i$  entre les roues  $i$  et  $i+1$

$$\eta = \frac{P_{n+1}}{P_1} = \frac{P_{n+1}}{P_n} \frac{P_n}{P_{n-1}} \dots \frac{P_2}{P_1} \quad \eta_i = \frac{P_{i+1}}{P_i}$$

$$= \eta_n \eta_{n-1} \dots \eta_1$$

$$\eta = \prod_{i=1}^n \eta_i$$

### Exemple



### Rapport de transmission

$k_i$

$$= \pm \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}$$

$$= \pm \frac{Z_i}{Z_{i+1}}$$

$$k = \pm \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}$$

$$= \pm \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \dots \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$= \pm k_n k_{n-1} \dots k_1$$

$$k = \pm \frac{Z_n}{Z_{n+1}} \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \dots \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$= \pm \frac{Z_1}{Z_{n+1}}$$

$$= \pm k_n k_{n-1} \dots k_1$$

$$k = \pm \prod_{i=1}^n k_i = \pm \frac{Z_1}{Z_{n+1}}$$

### Formule de Willis

$$k = (-1)^n \prod \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}}$$

$n$  contacts extérieurs

Attention

Le signe ne peut être déterminé par le  $(-1)^n$  pour des engrenages coniques qui changent les axes de rotation – Il faut le déterminer « à la main »

Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
29/08/2022	Trains épicycloïdaux	Résumé

## Train épicycloïdal

### Définition

Engrenages dont les axes des roues dentées ne sont pas tous fixes entre eux  
Il existe 4 types de trains épicycloïdaux

### Composants

2 Planétaires intérieurs et/ou extérieurs  
1 Porte satellite et 1, 2, 3... satellites

### Propriétés

3 « entrées sortie »  
1 paramètre fixé  $\Rightarrow$  Réducteur/Multiplicateur  
Très fortes réductions

### Remarque

Attention : bloquer le porte satellite revient à ne plus avoir de train épicycloïdal !!!

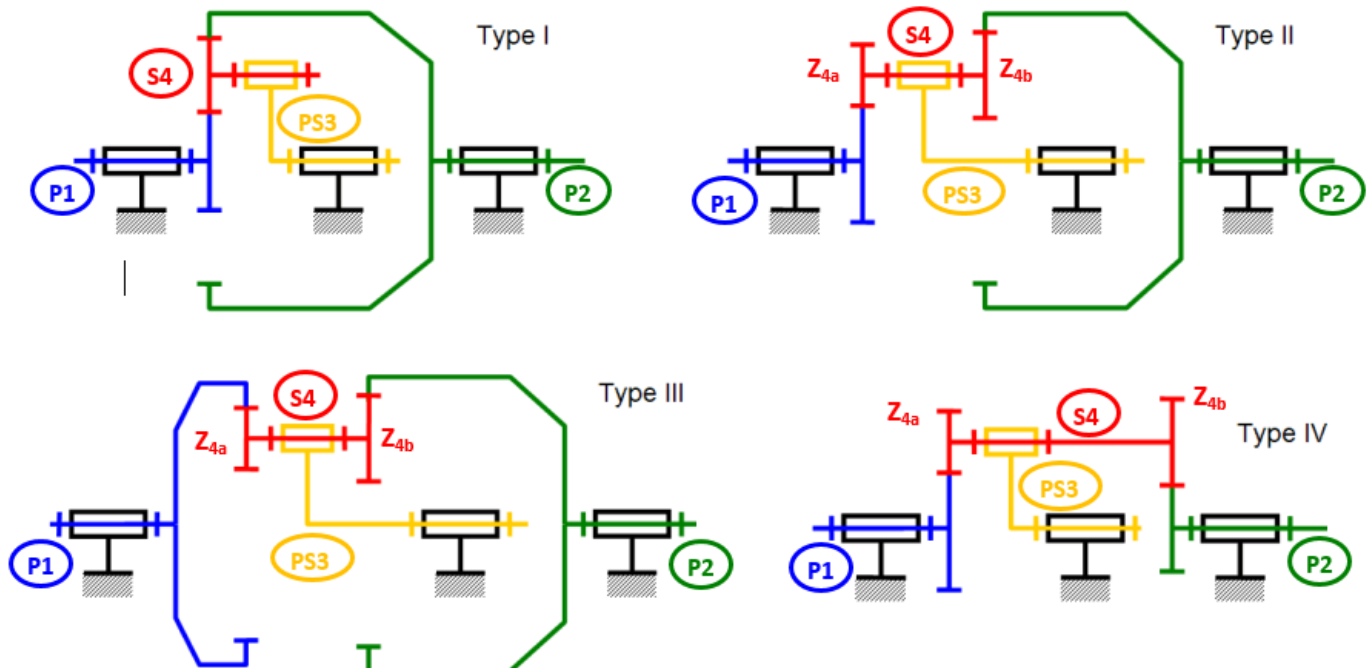
### Raison d'un train épicycloïdal

$$\lambda = \frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = \frac{\omega_{2/0} - \omega_{3/0}}{\omega_{1/0} - \omega_{3/0}} = (-1)^n \prod \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}}$$

$$\lambda \omega_{1/0} + (1 - \lambda) \omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$$

**Astuce : référentiel porte satellite – Train simple**

**Remarque :** Penser, si nécessaire, à exploiter les relations entre rayons des différentes roues dentées  
La raison est le rapport de réduction du train simple lorsque le porte satellite est bloqué



**Remarque :** Si l'une des égalités  $\begin{cases} \omega_{2/0} = \omega_{3/0} \\ \omega_{1/0} = \omega_{3/0} \\ \omega_{1/0} = \omega_{2/0} \end{cases}$  est vérifiée, alors  $\omega_{1/0} = \omega_{2/0} = \omega_{3/0}$

Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
29/08/2022	Trains épicycloïdaux	Résumé

### Méthodes de calcul de la relation entrée/sortie

Exemples de calcul  
Type 1

#### Méthode 1

##### Formule de Willis par rapport au porte satellite 3

$$\lambda = \frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = \frac{\omega_{2/0} - \omega_{3/0}}{\omega_{1/0} - \omega_{3/0}} = (-1)^n \prod \frac{Z_{menantes}}{Z_{menées}}$$

$$\frac{\omega_{2/3}}{\omega_{1/3}} = (-1)^1 \frac{Z_1 Z_4}{Z_4 Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\lambda_{Type I} = -\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{R_1}{R_2}$$

$$-\frac{R_1}{R_2} \omega_{1/0} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} \omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0$$

#### Méthode 2

##### Exploitation du roulement sans glissement

RSG en I entre 1 & 4 et J entre 4 & 2

$$\vec{V}(I, 1/4) = \vec{0} \text{ \& } \vec{V}(J, 4/2) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(I, 1/0) - \vec{V}(I, 4/0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(J, 4/0) - \vec{V}(J, 2/0) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} (-R_1 \omega_{1/0}) - (R_4 \omega_{4/3} - R_1 \omega_{3/0}) = 0 \\ (-R_4 \omega_{4/3} - R_2 \omega_{3/0}) - (-R_2 \omega_{2/0}) = 0 \end{cases}$$

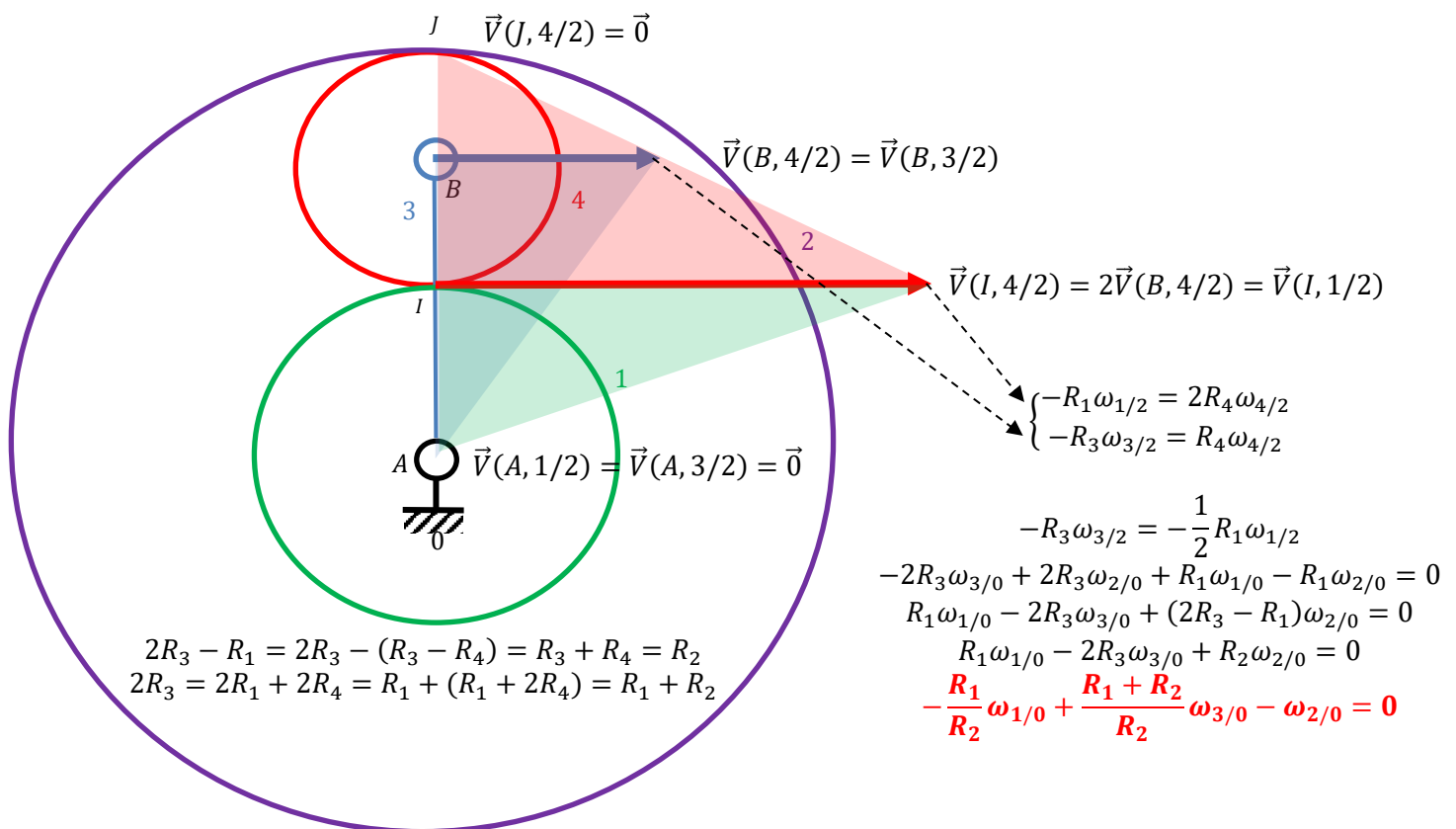
$$\begin{cases} -R_1 \omega_{1/0} - R_4 \omega_{4/3} + R_1 \omega_{3/0} = 0 \\ -R_4 \omega_{4/3} - R_2 \omega_{3/0} + R_2 \omega_{2/0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_4 \omega_{4/3} = R_1 \omega_{3/0} - R_1 \omega_{1/0} \\ R_4 \omega_{4/3} = R_1 \omega_{3/0} - R_1 \omega_{1/0} \end{cases}$$

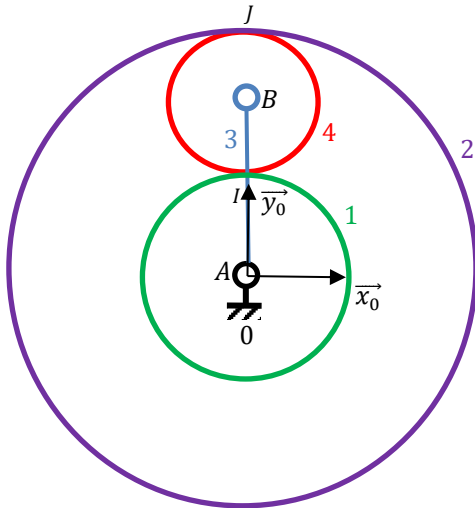
$$\begin{cases} -\frac{R_1}{R_2} \omega_{1/0} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} \omega_{3/0} - \omega_{2/0} = 0 \end{cases}$$

#### Méthode 3

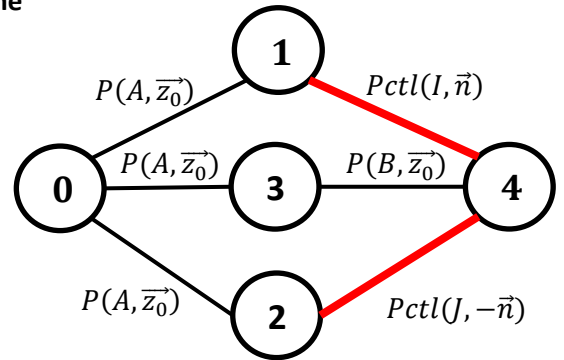
##### Résolution graphique



Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
29/08/2022	Trains épicycloïdaux	Résumé



#### Méthode 4 Fermeture de chaîne



$$V(\mathbf{0}/\mathbf{1}) + V(\mathbf{1}/\mathbf{4}) + V(\mathbf{4}/\mathbf{3}) + V(\mathbf{3}/\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{0/1} & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{1/4} & 0 \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{4/3} & 0 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{3/0} & 0 \end{pmatrix}_A = \{\mathbf{0}\}$$

Expression en  $I$  pour exploiter le RSG

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 R_{0/1} \\ R_{0/1} & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{1/4} & 0 \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R_4 R_{4/3} \\ R_{4/3} & 0 \end{pmatrix}_I + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 R_{3/0} \\ R_{3/0} & 0 \end{pmatrix}_I = \{\mathbf{0}\}$$

$$R_1 R_{0/1} - R_4 R_{4/3} + R_1 R_{3/0} = 0$$

$$V(\mathbf{0}/\mathbf{3}) + V(\mathbf{3}/\mathbf{4}) + V(\mathbf{4}/\mathbf{2}) + V(\mathbf{2}/\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{0/3} & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{3/4} & 0 \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{4/2} & 0 \end{pmatrix}_J + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{2/0} & 0 \end{pmatrix}_A = \{\mathbf{0}\}$$

Expression en  $J$  pour exploiter le RSG

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_2 R_{0/3} \\ R_{0/3} & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_4 R_{3/4} \\ R_{3/4} & 0 \end{pmatrix}_J + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{4/2} & 0 \end{pmatrix}_J + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_2 R_{2/0} \\ R_{2/0} & 0 \end{pmatrix}_J = \{\mathbf{0}\}$$

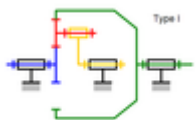
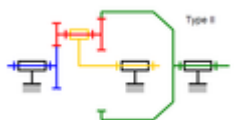
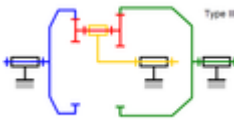
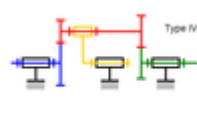
$$R_2 R_{0/3} + R_4 R_{3/4} + R_2 R_{2/0} = 0$$



$$\begin{cases} R_1 R_{0/1} - R_4 R_{4/3} + R_1 R_{3/0} = 0 \\ R_2 R_{0/3} - R_4 R_{4/3} + R_2 R_{2/0} = 0 \\ R_4 R_{4/3} = R_1 R_{0/1} + R_1 R_{3/0} \\ R_2 R_{0/3} - R_1 R_{0/1} - R_1 R_{3/0} + R_2 R_{2/0} = 0 \\ R_4 R_{4/3} = R_1 R_{0/1} + R_1 R_{3/0} \\ R_2 R_{0/3} - R_1 R_{0/1} - R_1 R_{3/0} + R_2 R_{2/0} = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{R_1}{R_2} R_{1/0} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} R_{3/0} - R_{2/0} = 0$$

### Raison des 4 types de trains épicycloïdaux

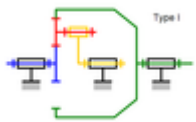
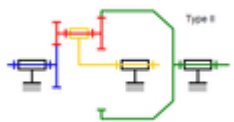
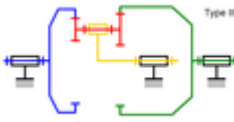
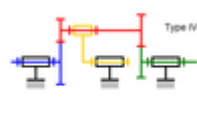
Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
			
$\lambda = (-1)^1 \frac{Z_1 Z_4}{Z_4 Z_2}$	$\lambda = (-1)^1 \frac{Z_1 Z_{4b}}{Z_{4a} Z_2}$	$\lambda = (-1)^0 \frac{Z_1 Z_{4b}}{Z_{4a} Z_2}$	$\lambda = (-1)^2 \frac{Z_1 Z_{4b}}{Z_{4a} Z_2}$
$\lambda = -\frac{Z_1}{Z_2}$	$\lambda = -\frac{Z_1 Z_{4b}}{Z_{4a} Z_2}$	$\lambda = \frac{Z_1 Z_{4b}}{Z_{4a} Z_2}$	$\lambda = \frac{Z_1 Z_{4b}}{Z_{4a} Z_2}$

### Relations entre couples des trains épicycloïdaux

La relation entre les couples extérieurs sur les arbres 1, 2 et 3 ( $C_1, C_2, C_3$ ), en régime permanent sans frottements, est obtenue à partir de 2 PFS en moment autour des axes de rotation :

L'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  est en équilibre :  $C_1 + C_2 + C_3 = 0$

Le porte satellite 4 est en équilibre : Relation à écrire pour chaque type

Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
			
$R_4 F_{1 \rightarrow 4} - R_4 F_{2 \rightarrow 4} = 0$	$R_{4a} F_{1 \rightarrow 4} - R_{4b} F_{2 \rightarrow 4} = 0$	$-R_{4a} F_{1 \rightarrow 4} - R_{4b} F_{2 \rightarrow 4} = 0$	$R_{4a} F_{1 \rightarrow 4} + R_{4b} F_{2 \rightarrow 4} = 0$
$\frac{C_1}{R_1} - \frac{C_2}{R_2} = 0$	$R_{4a} \frac{C_1}{R_1} - R_{4b} \frac{C_2}{R_2} = 0$	$-R_{4a} \frac{C_1}{R_1} - R_{4b} \frac{C_2}{R_2} = 0$	$R_{4a} \frac{C_1}{R_1} + R_{4b} \frac{C_2}{R_2} = 0$

### Conditions de montage des trains épicycloïdaux

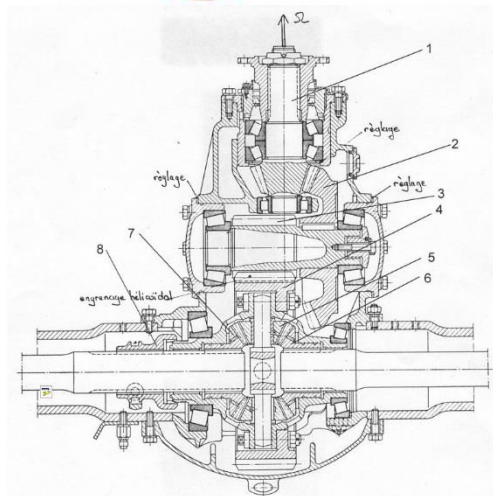
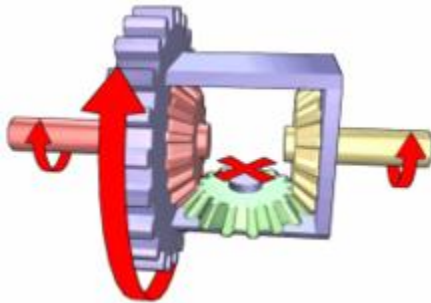
Compte tenu des dimensions des différents éléments, on a les conditions géométriques suivantes

Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
$R_3 = R_1 + R_4$ $R_3 = R_2 - R_4$	$R_3 = R_1 + R_{4a}$ $R_3 = R_2 - R_{4b}$	$R_3 = R_1 - R_{4a}$ $R_3 = R_2 - R_{4b}$	$R_3 = R_1 + R_{4a}$ $R_3 = R_2 + R_{4b}$

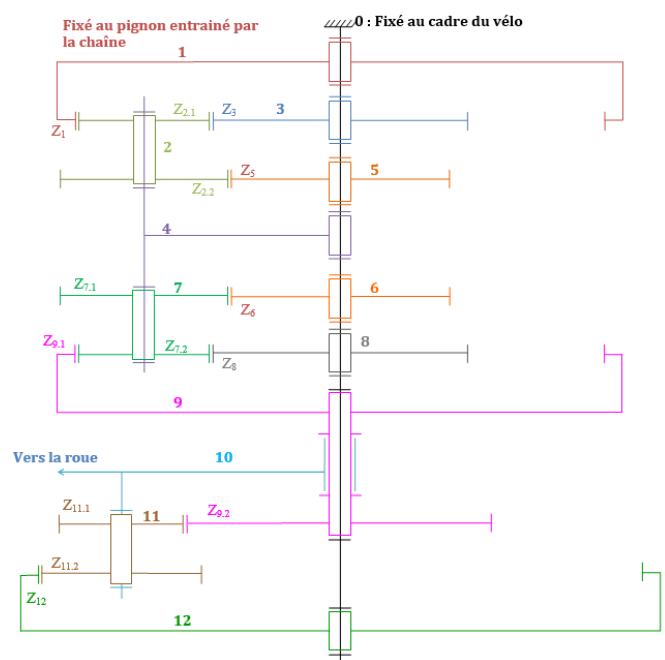
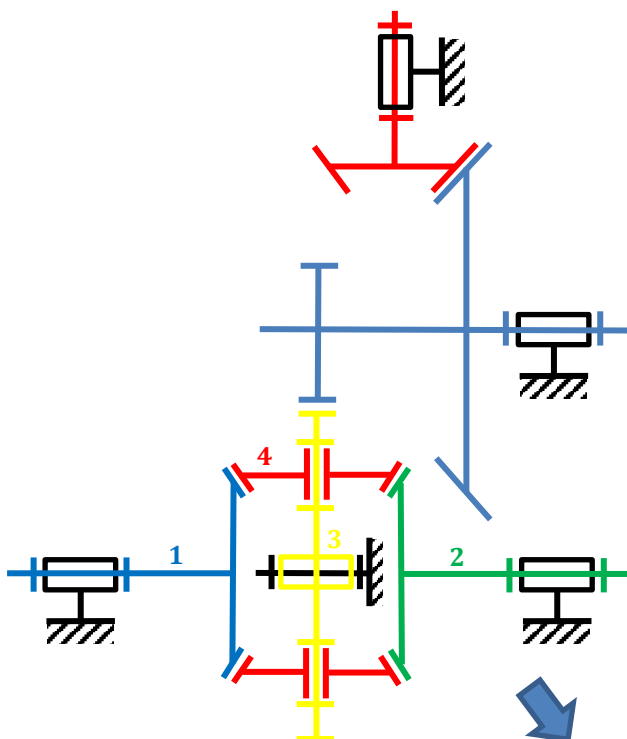
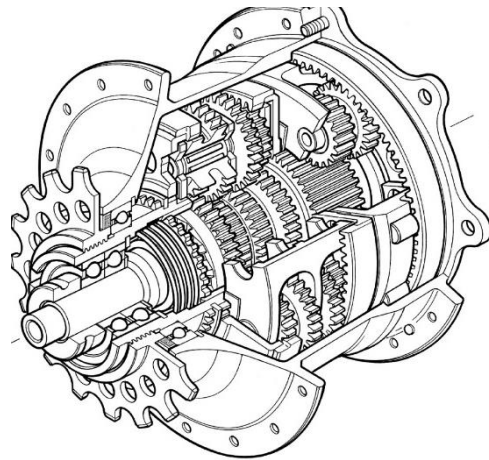
**Remarque :**  $D_i = m_i Z_i$  avec  $m_i = m_j$  si les engrenages i et j sont engrainés ensemble

Trains particuliers

Train sphérique - Différentiel



Train à étages



Remarques différentiel  
Relations d'un type 1 avec  $R_1 = R_2$ :  $\lambda = -1$

$\rightarrow C_1 = C_2 = -\frac{C_3}{2}$   
Si un couple est nul, ils le sont tous !

Page 8 sur 9

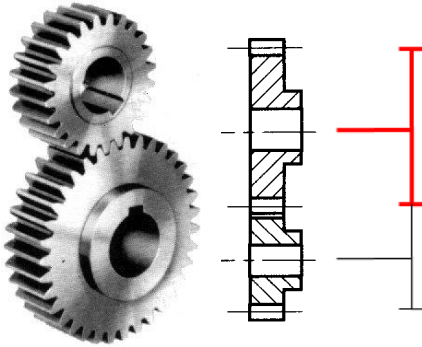
$\rightarrow 2\Omega_{3/0} = \Omega_{1/0} + \Omega_{2/0}$   
Si une roue patine (ex 1) véhicule arrêté :  
 $\rightarrow C_1 = C_2 \approx 0 \rightarrow$  Véhicule fixe  
 $\rightarrow \Omega_{2/0} = 0 \rightarrow \Omega_{1/0} = 2\Omega_{3/0}$



## Composants mécaniques

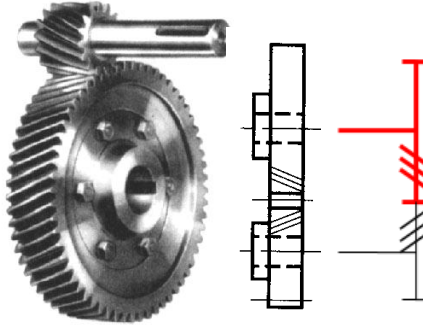
### Engrenages droits ou parallèles, cylindriques

#### A dentures droites



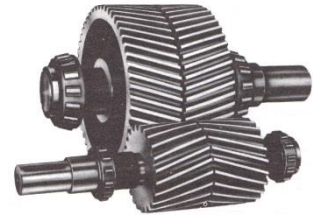
Avantages	Inconvénients
Peu coûteux	Bruit Vibrations
$\eta \approx 0,98$	

#### A dentures hélicoïdale



Avantages	Inconvénients
Peu de bruit Peu de vibrations Fortes puissances	Effort axial engendré
$\eta \approx 0,95$	

#### A chevrons



Avantages	Inconvénients
Très fortes P. Pas d'effort axial	Mise en œuvre

### Vocabulaire

Entraxe : distance entre les axes de rotation des deux roues

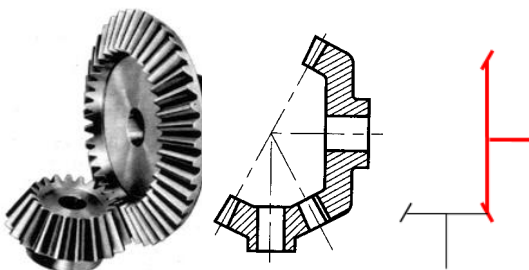
### Caractéristiques

$$d = mZ$$

$d$  diamètre primitif (mm) -  $m$  module (mm)  
 $Z$  nombre de dents

### Engrenages coniques

#### A axes concourants



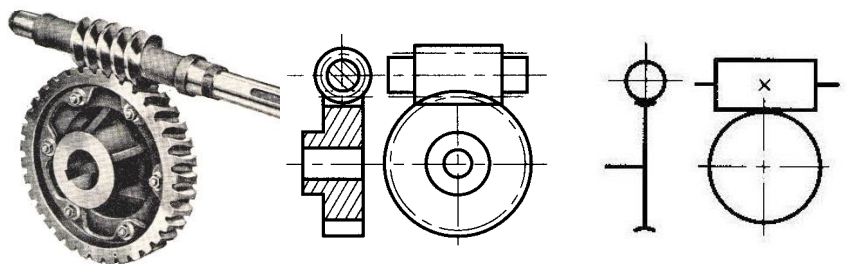
#### Condition de fonctionnement

Concurrence des sommets des cônes

Avantages	Inconvénients
Renvoie d'angle	Réglage précis

### Engrenages à roue et vis sans fin

#### Engrenages gauche



Nombre de dents = Nombre de filets

Avantages	Inconvénients
$k \gg 1$	Faible $\eta$ Effort axial important
$\eta \approx 0,60$	

### Irréversibilité ?

Roue motrice &  $\beta < \varphi$

$\beta$  angle d'hélice -  $\varphi$  angle de frottement  
Ordre de grandeur :  $6^\circ < \beta_{lim} < 10^\circ$