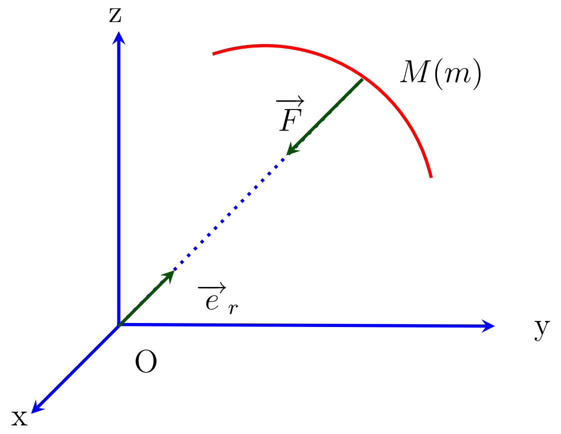
Mouvements dans un champ de forces centrales conservatives-mouvement newtonien

Table des matières

1 Force centrale conservative

1.1 Force centrale

Définition 1 : On définit une force centrale comme étant une force dont le support passe,à tout instant, par un point fixe appelé centre de force dans un référentiel d'étude.



• le support de la force $\overrightarrow{F}$ passe par le point O à chaque instant ,il s'agit d'une force centrale

Définition 2 : Une force centrale est dite Conservative s'elle s'écrit sous la forme

$$\boxed{\overrightarrow{F}=-\overrightarrow{grad}E_p(r)=-\frac{dE_p}{dr}\overrightarrow{e}_r=F(r)\overrightarrow{e}_r}$$

- $F(r)=-\dfrac{dE_p}{dr}$ avec $E_p(r)$: l'énergie potentielle associée à la force $\overrightarrow{F}$
- $\overrightarrow{e}_r=\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$: vecteur unitaire
- $OM=r$

Autrement :

- l'intensité d'une force centrale conservative dépend uniquement de la distance r et non de la direction $\overrightarrow{e}_r$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F})=\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F}=0$

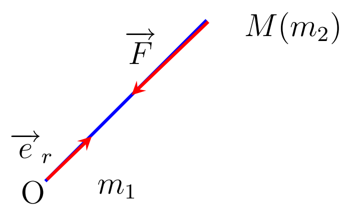
• Exemples

▶ Force gravitationnelle

- la force appliquée par m_1 sur m_2 est :

$$\overrightarrow{F}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e}_r$$

- le support de $\overrightarrow{F}$ passe à chaque instant par le point fixe O donc il s'agit d'une force centrale



- l'énergie potentielle associée à $\overrightarrow{F}$: $\boxed{E_p = -\frac{\alpha}{r} + cte}$ avec $\alpha = Gm_1m_2$ (chapitre 3)
- la force gravitationnelle dérive de l'énergie potentielle et s'écrit sous la forme : $\overrightarrow{F} = F(r)\overrightarrow{e}_r$ avec $\boxed{F(r) = -\frac{dE_p}{dr}}$

Conclusion : la force gravitationnelle est une force centrale conservative

▶ Force coulombienne
la force coulombienne s'écrit sous la forme : (voir l'éléctrostatique)

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{e}_r}$$

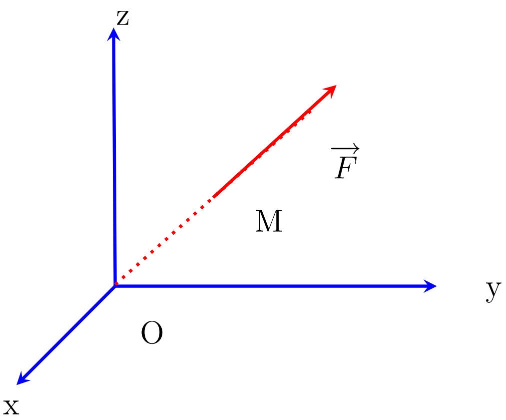
est une force centrale conservative

1.2 Conservation du moment cinétique

1.2.1 Théorème du moment cinétique

- $\left(\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt}\right)_{R_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F})$
$= \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = r\overrightarrow{e}_r \wedge F\overrightarrow{e}_r = 0$

$$\boxed{\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{cte}}$$

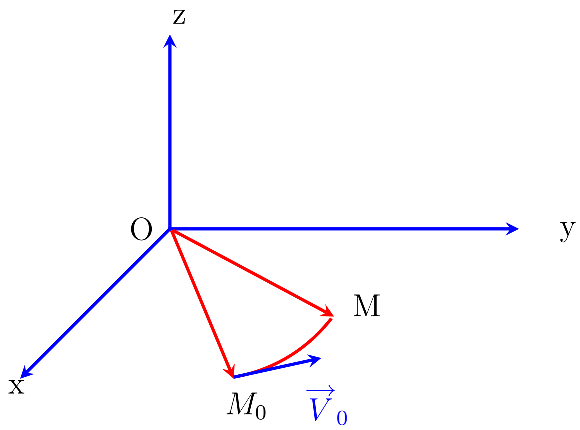


Conclusion : Le moment cinétique d'une force centrale se conserve ,on dit qu'il s'agit d'une constante de mouvement

• Cas particulier : moment cinétique du point M est nul
$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{0}$: la particule est abandonnée sans vitesse initiale ou avec avec une vitesse dont le support passe par O . À tout instant $\overrightarrow{OM}$ reste colinéaire à $\overrightarrow{V}(M/R_g)$ et le mouvement de M est rectiligne selon la droite OM_0 .

1.2.2 Première conséquence : Planéité de la trajectoire

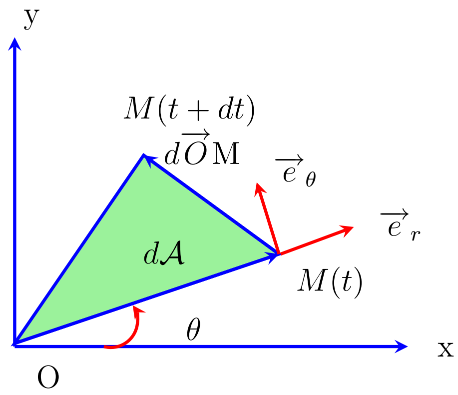
- $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{cte}$
- à $t = 0$,$\overrightarrow{OM}_0$,$\overrightarrow{V}_0$ sont dans le plan (oxy)
- $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m\overrightarrow{V}_0$ donc $\overrightarrow{L}_O$ est colinéaire à $t = 0$ $\overrightarrow{u}_z$
- puisque $\overrightarrow{L}_O$ reste colinéaire avec $\overrightarrow{u}_z$ alors $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{V}$ restent dans le plan (oxy) donc le mouvement est plan



Conclusion : le mouvement d'un point matériel soumise à une force centrale est plan

1.2.3 Deuxième conséquence : loi des aires

- $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}$
- $\overrightarrow{V} = \dot{r}\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta$
- $\overrightarrow{L}_O = r\overrightarrow{e}_r \wedge m(\dot{r}\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta)$
  $= mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{cte}$
- $\boxed{r^2\dot{\theta} = C\text{,constante des aires}}$



$$\boxed{L_O = mC \Rightarrow C = \frac{L_O}{m} = r^2\dot{\theta}}$$

▶ $d\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\right|\right| = \frac{1}{2}\left|\left|r\overrightarrow{e}_r \wedge (dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta)\right|\right| = \frac{1}{2}\left|\left|r^2 d\theta\overrightarrow{e}_z\right|\right|$

$$\boxed{d\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2 d\theta}$$

▶ la vitesse aréolaire

Définition : On définit la vitesse aréolaire par

$$\boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}}$$

▶ Loi des aires

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}Ct + cte$

Loi des aires :

- Dans un mouvement à force centrale le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des surfaces égales pendant des intervales de temps égaux .
- la vitesse aréolaire constante s'exprime par

$$\boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}}$$

1.2.4 Formules de Binet

- $\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{r}\overrightarrow{e}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta \Rightarrow V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$
- On pose $u = \dfrac{1}{r} \Rightarrow \dfrac{dr}{du} = -\dfrac{1}{u^2}$
- $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{du}\dfrac{du}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -r^2\dot{\theta}\dfrac{du}{d\theta}$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = -C\frac{du}{d\theta}}$$

on obtient la première formule de Binet

$$\boxed{V^2 = C^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]}$$

- $\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\overrightarrow{e}_\theta$ de même on montre la deuxième formule de Binet

$$\boxed{\overrightarrow{a} = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\overrightarrow{e}_r}$$

1.3 Conservation de l'énergie mécanique

1.3.1 Conservation de l'énergie mécanique

- La seule force $\overrightarrow{F}$ appliqué au point matériel M est conservative,donc l'énergie mécanique de M dans le référentiel R_g galiléen se conserve au cours du mouvement
- $\mathcal{E}_m(M/R_g) = \mathcal{E}_c(M/R_g) + \mathcal{E}_p(M/R_g) = \dfrac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}_m(t=0) = \mathcal{E}_m$

1.3.2 Energie potentielle effective $\mathcal{E}_{peff}$

- $\mathcal{E}_m(M/R_g) = \mathcal{E}_c(M/R_g) + \mathcal{E}_p(M/R_g) = \dfrac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p(r)$
- $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$
- $C = r^2\dot{\theta}$
- $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \mathcal{E}_p(r)$

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)}$$

- l'énergie cinétique radiale $\mathcal{E}_{cr}$

$$\boxed{\mathcal{E}_{cr} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2}$$

- l'énergie cinétique orthoradiale $\mathcal{E}_c^{orth}$

$$\boxed{\mathcal{E}_c^{orth} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2}$$

- On définit l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{peff}$ par

$$\boxed{\mathcal{E}_{peff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)}$$

- l'énergie mécanique s'écrit sous la forme

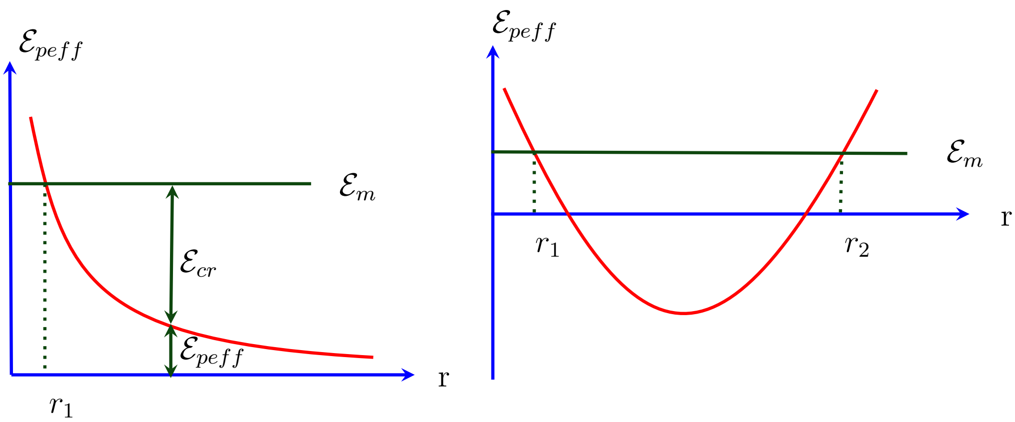
$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{cr} + \mathcal{E}_{peff} = cte}$$

c'est l'intégrale première de l'énergie

- utilité de $\mathcal{E}_{peff}$: elle permet de déterminer les domaines accessibles à la trajectoire de la particule qui vérifient

$$\boxed{\mathcal{E}_m \geqslant \mathcal{E}_{peff}}$$

$\mathcal{E}_{cr} = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{peff} \geqslant 0 \Rightarrow \mathcal{E}_m \geqslant \mathcal{E}_{peff}$



Cas n°1 Cas n°2

- ▶ cas n°1 : le domaine accessible $[r_1, \infty[$ c'est l'état de diffusion
- ▶ cas n°2 : le domaine accessible est $[r_1, r_2]$ c'est l'état liée

2 Champ de force centrale newtonien

2.1 Force newtonienne

Définition : Un point matériel M de masse m ,situé à une distance r du centre de force O est soumis à une force centrale newtonienne si elle est de la forme

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e}_r} \text{ avec } K = cte$$

- la force $\overrightarrow{F}$ est attractive si $K > 0$
- la force $\overrightarrow{F}$ est repulsive si $K < 0$
- la force $\overrightarrow{F}$ est conservative donc $\overrightarrow{F} = -\dfrac{d\mathcal{E}_p}{dr}\overrightarrow{e}_r \Rightarrow \mathcal{E}_p = -\dfrac{K}{r} + cte$
- par convention on choisit : $cte = 0$ pour que : $\lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{E}_p(r) = 0$

$$\boxed{\mathcal{E}_p(r) = -\frac{K}{r}}$$

▶ Exemples

- Force gravitationnelle ($K = Gm_1m_2$) : $\overrightarrow{F} = -G\dfrac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e}_r$

$$\boxed{\mathcal{E}_p^{grav}(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}}$$

- Force électrostatique ($K = -\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}$) : $\overrightarrow{F}_{1\to2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{e}_{1\to2}$

$$\boxed{\mathcal{E}_p^{elec}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}}$$

2.2 Etude des trajectoires en champ newtonien

2.2.1 Etude énergétique

- l'énergie potentielle newtonienne : $\mathcal{E}_p(r) = -\dfrac{K}{r}$
- l'énergie potentielle effective : $\mathcal{E}_{peff} = \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{K}{r}$

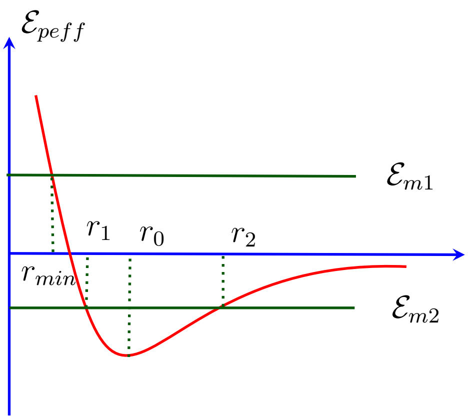
▶ Cas d'une force attractive : $K > 0$

l'énergie potentielle effective admet un minimum pour la distance r_0

- $\dfrac{d\mathcal{E}_{peff}}{dt} = -m\dfrac{C^2}{r^3} + \dfrac{K}{r^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \dfrac{mC^2}{K}$ et $r \to \infty$
- l'énergie potentielle effective minimale est alors

$$\mathcal{E}_{peff}(r_0) = -\frac{1}{2}\frac{K^2}{mC^2} = -\frac{K}{2r_0}$$

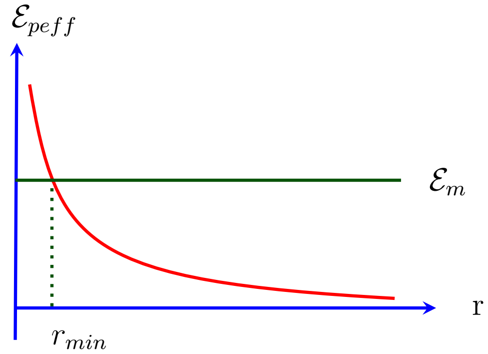
- l'énergie potentielle effective s'annule en $r^* = \dfrac{1}{2}\dfrac{mC^2}{K} = \dfrac{r_0}{2}$



- si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m1}$: le domaine accessible $[r_{min}, +\infty[$ est non borné : état de diffusion
- si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m2}$: le domaine accessible $[r_1, r_2]$ est borné : état lié

▶ Cas d'une force répulsive $K < 0$

$\mathcal{E}_{peff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r} > 0$ il n'y a que des états de diffusion



le domaine accessible est $[r_{min}, +\infty[$: état de diffusion

2.2.2 Equation de la trajectoire

- PFD : $m\overrightarrow{a}(M/R_g) = \overrightarrow{F}$
- on pose $u = \frac{1}{r}$
- formule de Binet : $\overrightarrow{a} = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\overrightarrow{e}_r$
- $-mC^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\overrightarrow{e}_r = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{e}_r = -Ku^2\overrightarrow{e}_r$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{mC^2}}$$

- la solution générale : $u_1(\theta) = A\cos(\theta + \varphi)$
- la solution particulière : $u_2 = \frac{K}{mC^2}$
- $u = \frac{1}{r} = \frac{K}{mC^2} + A\cos(\theta + \varphi) = \frac{1 + e\cos(\theta + \varphi)}{p}$
  - ▶ $\boxed{p = \frac{mC^2}{K}}$: paramètre du conique
  - ▶ $\boxed{e = Ap}$: excentricité du conique
- En prenant l'axe ox comme l'axe de symétrie de la conique ,le changement θ en $-\theta$ laisse invariant la fonction $r(\theta)$ donc $\varphi = 0$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

- la nature de la trajectoire dépend de la valeur de l'excentricité e

$e > 1$	$e = 1$	$e < 1$	$e = 0$
hyperbole	prabole	ellipse	cercle

2.2.3 Energie et nature des trajectoires

La relation entre l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et l'excentricité du conique peut s'obtenir par deux méthodes :

- à partir du Vecteur de Range-lenz : $\vec{A} = \dfrac{1}{K}\left(\vec{V}(M/R_g) \wedge \vec{L}_O(M/R_g)\right) - \vec{e}_r$

$$\boxed{e = \left\|\vec{A}\right\|}$$

  - $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \vec{0}$: $\vec{A}$ est une constante de mouvement

- Méthode directe
  - $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} - \dfrac{K}{r}$
  - $C = r^2\dfrac{d\theta}{dt}$ et $p = \dfrac{mC^2}{K}$
  - $r(t) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$
  - $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$
  - $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \dfrac{e}{p}r^2\sin\theta$
  - $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{e}{p}r^2\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{Ce}{p}\sin\theta}$$

  - $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{eC}{p}\sin\theta\right)^2 + \dfrac{1}{2}mC^2\left(\dfrac{1}{p}(1+e\cos\theta)\right)^2 - \dfrac{K}{p}(1+e\cos\theta)$

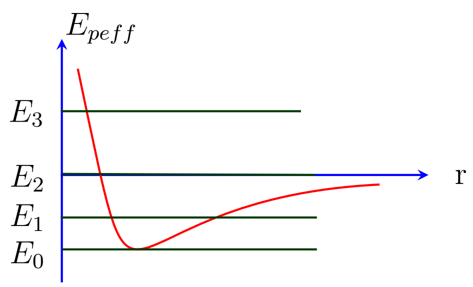
    $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}\dfrac{mC^2}{p}\dfrac{e^2}{p} + \dfrac{mC^2}{p}\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{2} + e\cos\theta\right) - \dfrac{K}{p}(1+e\cos\theta) = \dfrac{K}{2p}(e^2-1)$

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{K}{2p}(e^2-1)} \text{ ou } \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{K^2}{2mC^2}(e^2-1)}$$

- la nature de la trajectoire directement de l'énergie mécanique

$e = 0$	$0 < e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
cercle	ellipse	parabole	hyperbole
$\mathcal{E}_m = -\dfrac{K}{2mC^2}$	$\mathcal{E}_m < 0$	$\mathcal{E}_m = 0$	$\mathcal{E}_m > 0$

- Exemple



- si $\mathcal{E}_m = E_0$: trajectoire circulaire
- si $\mathcal{E}_m = E_1$: trajectoire elliptique
- si $\mathcal{E}_m = E_2$: trajectoire parabolique
- si $\mathcal{E}_m = E_3$: trajectoire hyperbolique

3 Lois de Kepler-Applications aux planètes

3.1 Référentiel de Kepler

Référentiel de Kepler R_k : Son origine est est le centre d'inertie du soleil et ses axes sont parallèles à ceux de Copernic

- R_k est un bon référentiel galiléen

3.2 Lois de Kepler

Le mouvement du planète quelconque qui gravite autour du soleil est régi par les lois de Kepler

Première Loi : Dans un référentiel de Kepler,une planète (P) décrit une ellipse, de demi-grand axe a avec une période T,dont le centre du soleil s est l'un des foyers .

Deuxième Loi : Le rayon vecteur soleil-planète $\overrightarrow{SP}$ balaye des aires égales en des temps égaux .

Troisième Loi : Le rapport $\dfrac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes du système solaire .

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}}$$

- a : demi grand-axe de l'ellipse
- T : période du mouvement
- M_s : masse du soleil

3.3 Trajectoire elliptique : planètes

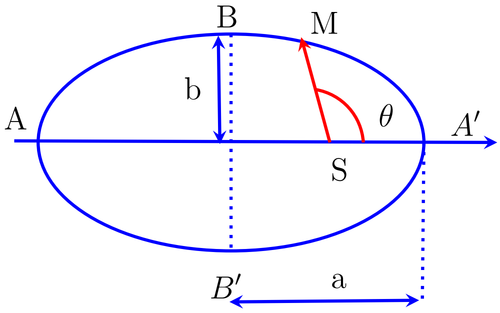
Soit une planète M de masse m qui décrit un ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b

- $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$
- Apogée (aphélie) : point A ($\dot{r} = 0$;$\theta = \pi$)

$$\boxed{r_{max} = \frac{p}{1-e}}$$

- Périgée (périhélie) : point A' ($\dot{r} = 0$;$\theta = 0$)

$$\boxed{r_{min} = \frac{p}{1+e}}$$



- demi-grand axe a : $r_{min} + r_{max} = 2a$

$$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}$$

- petit-grand axe b : $b = \sqrt{ap}$

$$\boxed{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}}$$

▶ Vitesse aréolaire

- la 2^{eme} loi de Kepler s'identifie avec la loi des aires . Le vecteur $\overrightarrow{SP}$ balaye la surface $\mathcal{A} = \pi ab$ pendant une période T .
- $\dfrac{d\mathcal{A}}{dt} = \dfrac{C}{2}$ donc $\dfrac{\mathcal{A}}{T} = \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi ab}{T}$
- $\dfrac{(\pi ab)^2}{T^2} = \dfrac{C^2}{4}$ avec $p = \dfrac{mC^2}{K} = \dfrac{b^2}{a}$; $K = GM_s m$

  donc $\dfrac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \dfrac{b^2 K}{4ma} = \dfrac{b^2 GmM_s}{4am}$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}}$$

▶ Energie mécanique $\mathcal{E}_m$

- $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{K}{r}$
- pour $\dot{r} = 0$ on a deux solutions : r_{min} et r_{max}

  $\mathcal{E}_m = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{K}{r}$ donc

$$\boxed{\mathcal{E}_m r^2 + Kr - \frac{mC^2}{2} = 0}$$

- la somme des deux solutions

$$\boxed{r_{min} + r_{max} = 2a = -\frac{K}{\mathcal{E}_m}}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{K}{2a} = -\frac{GmM_s}{2a}}$$

Conclusion : L'énergie mécanique d'une planète M(m) décrivant un ellipse de demi-grand axe a est inversement proportionnel au grand axe a

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{K}{2a} = -\frac{GmM_s}{2a}}$$

Remarque : la constante des aires $\boxed{C = ||\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}||}$

$$\boxed{r_{min}.v_{A'} = r_{max}.v_A = C}$$

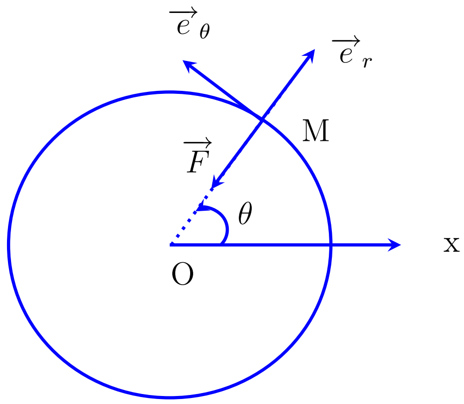
3.4 Trajectoire circulaire : satellite terrestre

- On choisit le référentiel géocentrique ,supposé galiléen,pour étudier le mouvement d'un satellite terrestre
- Considérons un satellite terrestre ,assimilé à un point matériel M de masse m décrit une orbite circulaire de centre O (centre de la terre),de rayon r,avec une vitesse angulaire ω constante .

- $\overrightarrow{V} = r\omega\overrightarrow{e}_\theta$
- $\overrightarrow{a} = -r\omega^2\overrightarrow{e}_r = -\frac{V^2}{r}\overrightarrow{e}_r$
- $m\overrightarrow{a} = -G\frac{m_T m}{r^2}\overrightarrow{e}_r$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}}}$$

R_T : rayon de la terre



- la vitesse V reste constante le long de la trajectoire circulaire
- première vitesse cosmique V_{c1}

Définition : On appelle première vitesse cosmique du satellite la vitesse V_{c1} sur l'orbite circulaire de rayon $r = R_T$,avec R_T : le rayon de la terre

$$\boxed{V_{c1} = \sqrt{g_0 R_T}}$$

- ▶ $R_T = 6400km; g_0 = 9,8ms^{-2} \Rightarrow \boxed{V_{c1} = 7,92km.s^{-1}}$
- ▶ la première vitesse cosmique est la vitesse circulaire maximale

- Période T du mouvement
  - ▶ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm_T}}$

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_T}}$$

c'est la troisième loi de Kepler ,donc le mouvement circulaire est un cas particulier du mouvement elliptique (le demi-grand axe s'identifie avec le rayon r)

- Energie mécanique $\mathcal{E}_m$
  - $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg_0\frac{R_T^2}{r}$
  - $\mathcal{E}_p = -\frac{Gmm_T}{r}$
  - $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mg_0\frac{R_T^2}{r} - mg_0\frac{R_T^2}{r}$

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -mg_0\frac{R_T^2}{2r} = \frac{\mathcal{E}_p}{2} = -\mathcal{E}_c}$$

  - $\mathcal{E}_m < 0$: état liée
- Vitesse de libération (seconde vitesse cosmique V_{c2})

Définiton : la vitesse de libération V_{c2} représente la vitesse initiale du satellite qui lui permet d'échapper l'attraction terrestre et de parvenir en un point infiniment éloigné avec une vitesse nulle .

  - conservation de l'énergie mécanique entre le sol et un point à l'infini $(\mathcal{E}_m(\infty) = 0$
    $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mV_{c2}^2 - \frac{Gmm_T}{R_T} = 0$

$$\boxed{V_{c2} = \sqrt{2g_0R_T} = \sqrt{2}V_{c1} = 11,2km.s^{-1}}$$

- Satellite géostationnaire

Définition : Un satellite est géostationnaire s'il a la même période T de rotation que la terre sur elle même

  - $T = 24h = 86400s$ et $V = R\omega = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{Gm_T}{R}}$
  - le rayon du trajectoire du cercle

$$\boxed{R = \left(\frac{T^2Gm_T}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

  - AN : $R = 42300km$ avec $R_T = 6370km$ donc l'altitude
    $h = R - R_T = 36000km = 5,6R_T$