

Premier problème :
Étude de quelques aspects mécaniques d'une roue de voiture

Première partie
Équilibrage d'une roue de voiture

1.1. Étude cinétique

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= R \vec{e}_Y \\ \vec{g} &= -g \vec{e}_Z = -g \vec{K}_o \\ \vec{OO'} &= X_o(t) \vec{I}_o + Y_o(t) \vec{J}_o + Z_o(t) \vec{K}_o\end{aligned}$$

1.1.1. Vecteur position $\vec{O'A}$

$$\vec{O'A} = \vec{O'O} + \vec{OA} \quad \text{tels que :} \quad \begin{cases} \vec{O'O} = e \vec{I}_o \\ \vec{OA} = R (\cos \theta \vec{J}_o + \sin \theta \vec{K}_o) \end{cases}$$

Soit :

$$\vec{O'A} = \begin{pmatrix} e \\ R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)}$$

1.1.2. Vecteur position $\vec{O'G}$

$$\vec{O'G}(m + \Delta m) = \Delta m \vec{O'A} + m \vec{O'O} \implies \vec{O'G} = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} (e \vec{I}_o + R (\cos \theta \vec{J}_o + \sin \theta \vec{K}_o))$$

Soit :

$$\vec{O'G} = \frac{m}{m + \Delta m} \begin{pmatrix} e \\ R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)}$$

1.1.3. Vitesse de A dans \mathcal{R}

$${}_{\mathcal{R}}\vec{v}_A = \left(\frac{d\vec{O'A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = R\dot{\theta} (-\sin \theta \vec{J}_o + \cos \theta \vec{K}_o)$$

Soit :

$${}_{\mathcal{R}}\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\dot{\theta} \sin \theta \\ R\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)}$$

1.1.4. Moment cinétique de A dans \mathcal{R} calculé en O'

$${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_A(O') = \overrightarrow{O'A} \wedge \Delta m {}^{\mathcal{R}}\vec{v}_A = \Delta m R \dot{\theta} \left(R \vec{I}_o - e \cos \theta \vec{J}_o - e \sin \theta \vec{K}_o \right)$$

Soit :

$${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_A(O') = \Delta m R \dot{\theta} \begin{pmatrix} R \\ -e \cos \theta \\ -e \sin \theta \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)}$$

1.1.5. Le référentiel barycentrique est tout référentiel dont le centre est le barycentre du système et dont les axes sont parallèles à ceux du repère Galiléen. Le référentiel barycentrique de la roue parfaite est \mathcal{R} .

1.1.6. Théorème de Koenig relatif au moment cinétique

$${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_O = {}^{\mathcal{R}^*}\vec{\sigma}_O + {}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_O(G) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} {}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_O(G) = M \overrightarrow{OG} \wedge {}^{\mathcal{R}}\vec{v}_G \\ M : \text{masse total du système} \end{cases}$$

1.1.7. Moment cinétique de la roue parfaite R dans \mathcal{R} calculé en O'

$${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_R(O') = I_{\Delta X} \dot{\theta} \vec{I}_o = \frac{mR^2}{2} \dot{\theta} \vec{I}_o$$

Soit :

$${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_R(O') = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)}$$

1.1.8. Moment cinétique ${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}(O')$ de la roue complète

$${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}(O') = {}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_R(O') + {}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_A(O')$$

Soit :

$${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}(O') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta} + \Delta m R^2 \dot{\theta} \\ -\Delta m R \dot{\theta} e \cos \theta \\ -\Delta m R \dot{\theta} e \sin \theta \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)}$$

1.2. Étude dynamique

$$\vec{R} \begin{pmatrix} R_{X_o} \\ R_{Y_o} \\ R_{Z_o} \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)} \quad \vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m + \Delta m)g \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)} \quad \vec{C} \begin{pmatrix} C_{X_o} \\ C_{Y_o} \\ C_{Z_o} \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)} \quad \vec{\Gamma}(t) \begin{pmatrix} \Gamma(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)}$$

1.2.1. Mouvement sans frottements $\iff \vec{R} \cdot \vec{J}_o = 0 \implies \boxed{R_{Y_o} = 0}$

1.2.2. Une liaison pivot est parfaite si le moment des actions de contact par rapport à l'axe de rotation est nul.

Liaison pivot parfaite $\iff \mathcal{P}_{\text{contact}} = 0$ (puissance des actions de contacte)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{contact}} &= \vec{C} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \quad (\text{Mouvement de rotation autour d'un axe fixe}) \\ &= 0 \iff \vec{C} \text{ est perpendiculaire à } \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \iff \boxed{C_{X_o} = 0} \end{aligned}$$

1.2.3. Théorème du centre d'inertie :

Soit un système de points matériels, de quantité de mouvement \vec{p} dans un référentiel \mathcal{R} , soumis sous la résultante des actions extérieures \vec{f} dans \mathcal{R} ; le mouvement de ce système est régi par l'équation vectorielle :

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{f}$$

1.2.4. Théorème du moment cinétique :

Dans un référentiel Galiléen \mathcal{R} , la dérivée par rapport au temps du moment cinétique ${}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_O$ d'un système matériel \mathcal{R} , en un point fixe O , est égale au moment ${}^{\mathcal{R}}\vec{M}_O(\vec{f})$ par rapport à O de la résultante des forces \vec{f} appliquées sur le système.

$$\left(\frac{d{}^{\mathcal{R}}\vec{\sigma}_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = {}^{\mathcal{R}}\vec{M}_O(\vec{f})$$

1.2.5. Bilan des forces dans \mathcal{R} non Galiléen

$$\vec{R} \begin{pmatrix} R_{X_o} \\ 0 \\ R_{Z_o} \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)} \quad \vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(m + \Delta m)g \end{pmatrix}_{(\vec{I}_o, \vec{J}_o, \vec{K}_o)} \quad \vec{f}_{ie} = -(m + \Delta m)\ddot{Y}_o(t) \vec{J}_o \text{ et } \vec{f}_{ic} = \vec{0}$$

1.2.6. Théorème du centre d'inertie dans \mathcal{R}

$$(m + \Delta m) {}^R \vec{a}_G = R_{X_o} \vec{I}_o - (m + \Delta m) \ddot{Y}_o(t) \vec{J}_o + (R_{Z_o} - (m + \Delta m)g) \vec{K}_o$$

$${}^R \vec{a}_G = \left(\frac{d^2 O'G}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} R \dot{\theta}^2 (-\cos \theta - \sin \theta), \text{ avec } \dot{\theta}(t) = \omega \text{ ou } \theta(t) = \omega t + \theta_o$$

1.2.7. Projection de l'équation précédente (obtenue en 1.2.6.) suivant \vec{J}_o

$$\Rightarrow -\Delta m R \omega^2 \cos \theta = -(m + \Delta m) \ddot{Y}_o(t)$$

D'où :

$$\ddot{Y}_o(t) = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} R \omega^2 \cos(\omega t + \theta_o) \quad (1)$$

1.2.8. Théorème du moment cinétique dans \mathcal{R}

$$\left(\frac{d{}^R \vec{\sigma}(O')}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{M}_{O'}(\vec{P}) + \vec{M}_{O'}(\vec{R}) + \vec{M}_{O'}(\vec{f}_{ie}) + \vec{C} + \vec{\Gamma}$$

$$\text{tels que : } \begin{cases} \vec{M}_{O'}(\vec{P}) = \vec{O'G} \wedge (m + \Delta m)\vec{g} = \Delta m g (e \vec{J}_o - R \cos \theta \vec{I}_o) \\ \vec{M}_{O'}(\vec{f}_{ie}) = \vec{O'G} \wedge \vec{f}_{ie} = \Delta m \ddot{Y}_o(t) (-e \vec{K}_o + R \sin \theta \vec{I}_o) \\ \left(\frac{d{}^R \vec{\sigma}(O')}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \Delta m R \omega^2 e (\sin \theta \vec{J}_o - \cos \theta \vec{K}_o) \\ \vec{C} + \vec{\Gamma}(t) = C_{Y_o} \vec{J}_o + C_{Z_o} \vec{K}_o + \Gamma(t) \vec{I}_o \end{cases}$$

1.2.9. Projection de l'équation précédente (obtenue en 1.2.8.) suivant \vec{I}_o

$$0 = \Gamma(t) - \Delta m g R \cos \theta + (\Delta m)^2 \ddot{Y}_o(t) R \sin \theta$$

$$\text{tels que : } \Gamma(t) = \Delta m g R \cos \omega t \left(1 - R \omega^2 \frac{\Delta m}{g(m + \Delta m)} \sin \omega t \right)$$

1.3. Applications**1.3.1.**

$$\ddot{Y}_o(t) = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} R \omega^2 \cos(\omega t) \implies \dot{Y}_o(t) = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} R \omega \sin(\omega t)$$

$$Y_o(t) = \frac{\Delta m}{m + \Delta m} R (1 - \cos \omega t) = \frac{Y_{o \max}}{2} (1 - \cos \omega t) \quad , \quad \text{Mouvement de translation sinusoïdal}$$

$$Y_{o \max} = 2R \frac{\Delta m}{m + \Delta m}$$

$$1.3.2. \quad \varphi \text{ étant faible} \implies OA = OB = OD \quad \text{et} \quad AB = Y_o(t) \implies Y_o(t) = D\varphi(t)$$

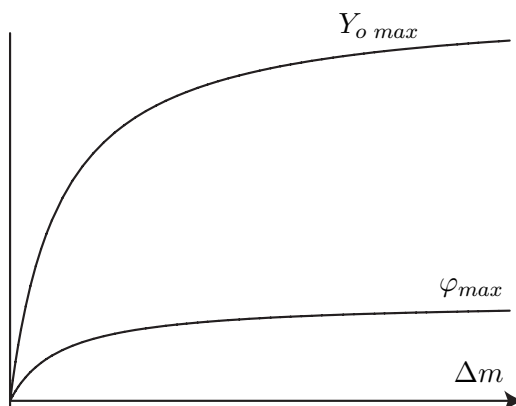
$$\text{D'où :} \quad Y_{o \max} = D\varphi_{\max}$$

1.3.3. Pour une roue complète parfaite

$$Y_{o \max} = \varphi_{\max} = 0$$

1.3.4.

$$Y_{o \max} = 2R \frac{\Delta m}{m + \Delta m} \quad \text{et} \quad \varphi_{\max} = 2R \frac{\Delta m}{D(m + \Delta m)}$$

**1.3.5. Le conducteur va ressentir des vibrations au niveau du volant!!!**

1.3.6. Le but est de changer la position du centre de masse de la roue et le positionner sur l'axe $O'X$: pour se faire, il suffit de placer la masse Δm en une position symétrique, par rapport à O'' , au point A .

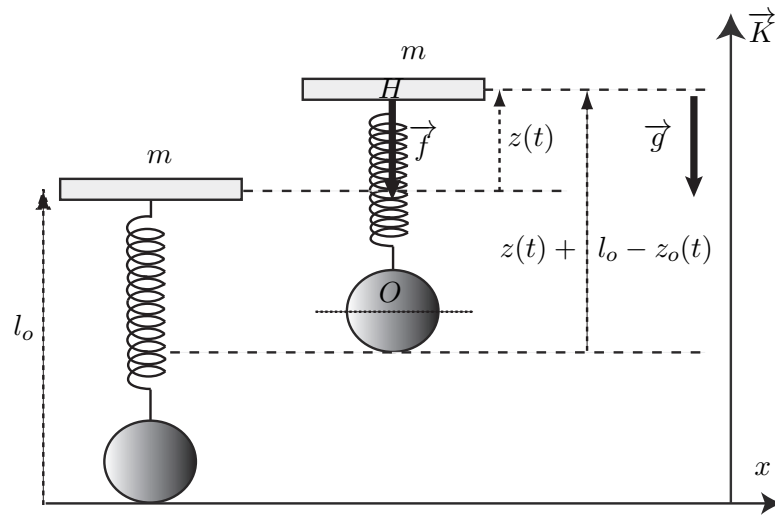
Deuxième partie**Modélisation d'une suspension d'automobile****2.1. Équation différentielle**

2.1.1. L_o : longueur à vide du ressort et l_o sa longueur à l'équilibre.

A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$ avec $\vec{P} = -mg\vec{K}$ et $\vec{f} = -k(l_o - L_o)\vec{K}$

$$\text{Soit :} \quad \Delta l_o = L_o - l_o = \frac{mg}{k}$$

2.1.2. Bilan des forces exercées sur la masse m



- Action de pesanteur

$$\vec{P} = -mg\vec{K}$$

- Action du ressort

$$\vec{f} = -k(\vec{OH}(t) - L_o\vec{K}) = -k(-\Delta l_o + z(t) - z_o(t))\vec{K}$$

- Action se l'amortisseur fluide

$$\vec{F} = -\alpha\vec{v}_r = -\alpha(\dot{z}(t) - \dot{z}_o(t))\vec{K}$$

2.1.3. Théorème de la résultante cinétique

$$-mg\vec{K} - k(-\Delta l_o + z(t) - z_o(t))\vec{K} - \alpha(\dot{z}(t) - \dot{z}_o(t))\vec{K} = m\ddot{z}(t)\vec{K}$$

Par projection de l'équation suivant \vec{u}_z tel que $k\Delta l_o = mg$, on en déduit l'équation suivante :

$$m\ddot{z}(t) + \alpha\dot{z}(t) + kz(t) = f(t) \quad (2) \quad \text{avec} \quad \boxed{f(t) = \alpha\dot{z}_o(t) + kz_o(t)}$$

2.1.4. L'équation (2) pourra s'écrire sous la forme

$$z(t) + 2\frac{\beta}{\omega_o}\dot{z}(t) + \frac{1}{\omega_o^2}\ddot{z}(t) = G(t) \quad (3) \quad \text{tels que :} \quad \boxed{\begin{cases} G(t) = \frac{f(t)}{k} = \frac{\alpha}{k}\dot{z}_o(t) + z_o(t) \\ \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \beta = \frac{\alpha\omega_o}{2k} = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}} \end{cases}}$$

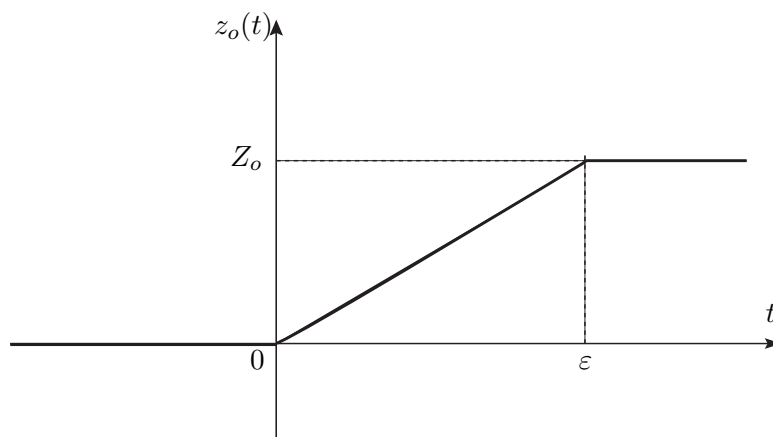
k et m deux constantes; $\beta = f(\alpha)$: d'où sa nomination coefficient d'amortissement réduit.

2.2. Réponse indicielle

2.2.1. Profil de la route : $z_o(t)$

$$\vec{v}_o = v_o\vec{I} = \frac{dx}{dt}\vec{I} \Leftrightarrow x(t) = v_ot + x_o$$

$$\begin{cases} x \leq x_o & \boxed{z_o(t) = 0} \\ x_o \leq x \leq x_1 & z_o(t) = ax + b \quad (C.I) \\ x \geq x_1 & \boxed{z_o(t) = Z_o} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = ax_o + b \\ Z_o = ax_1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{Z_o}{\varepsilon v_o} \\ b = -\frac{Z_o}{\varepsilon v_o} x_o \end{cases} \text{ ou } \boxed{z_o(t) = \frac{Z_o}{\varepsilon} t}$$



2.2.2. Équations horaires $z_o(t)$

$$z_o(t) = \frac{Z_o}{\varepsilon} t \quad \text{pour} \quad t \in [0, \varepsilon]$$

$$z_o(t) = Z_o \quad \text{pour} \quad t \in [\varepsilon, +\infty[$$

2.2.3. Unités dans le (SI)

grandeur	k	α
unité (SI)	$kg.s^{-2}$	$kg.s^{-1}$

Applications numériques : $\omega_o = 10 s^{-1}$ et $\beta = 1,25$

2.2.4. Expression de $G(t)$ pour t entre 0 et ε

$$\begin{cases} G(t) = \frac{Z_o}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha}{k} + t \right) \\ \text{avec : } \begin{cases} 0 \leq t \leq \varepsilon = 10^{-3} s \\ \frac{\alpha}{k} = 0,25 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{k} \gg t \quad \forall t \in [0, \varepsilon]$$

$$\text{D'où : } \boxed{G(t) \approx \frac{Z_o \alpha}{\varepsilon k}} \quad \text{constant.}$$

2.2.5.

$$G(t) = \frac{Z_o \alpha}{\varepsilon k}$$

L'équation différentielle (3) s'écrit pour $t \in [0, \varepsilon]$:

$$z(t) + 2\frac{\beta}{\omega_o} \dot{z}(t) + \frac{1}{\omega_o^2} \ddot{z}(t) = \frac{Z_o \alpha}{\varepsilon k} \quad (4)$$

Solution générale de l'équation (4) :

$$z(t) = A \exp r_1 t + B \exp r_2 t + C \text{ avec } A \text{ et } B \text{ constantes d'intégration}$$

C : solution particulière de l'équation (4)

r_1 et $r_2 > r_1$ sont solutions de l'équation caractéristique :

$$1 + 2r \frac{\beta}{\omega_o} + \frac{r^2}{\omega_o^2} = 0 \text{ de discriminant } \Delta = \frac{\beta^2 - 1}{\omega_o} > 0 \text{ car } \beta < 1$$

$$\text{Soient : (avec } r_2 > r_1) \quad \begin{cases} C = \frac{Z_o \alpha}{\varepsilon k} \\ r_1 = -\omega_o \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \right) \\ r_2 = \omega_o \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \right) \end{cases}$$

2.2.6.

$$z(t) = A \exp r_1 t + B \exp r_2 t + C$$

$$\text{Conditions initiales : } z(0) = 0 \text{ et } \dot{z}(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{r_2 C}{r_2 - r_1} \\ B = +\frac{r_1 C}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

$$\text{Soient : } \begin{cases} z(t) = \frac{C}{r_2 - r_1} (r_2 - r_1 - r_2 \exp r_1 t + r_1 \exp r_2 t) \\ \dot{z}(t) = \frac{C r_1 r_2}{r_2 - r_1} (\exp r_2 t - \exp r_1 t) \end{cases}$$

Dans le cadre de l'approximation admise ($|\varepsilon r_1| \ll 1$ et $|\varepsilon r_2| \ll 1$) :

$$1 + \exp \varepsilon r_1 \approx 1 + r_1 \varepsilon \quad \text{et} \quad 1 + \exp \varepsilon r_2 \approx 1 + r_2 \varepsilon$$

$$\text{Soient : } \begin{cases} z(\varepsilon) \approx \frac{C}{r_2 - r_1} (r_2 - r_1 - r_2 (1 + r_1 \varepsilon) + r_1 (1 + r_2 \varepsilon)) \\ \dot{z}(\varepsilon) \approx \frac{C r_1 r_2}{r_2 - r_1} ((1 + r_2 \varepsilon) - (1 + r_1 \varepsilon)) = C r_1 r_2 \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{ou : } \boxed{\begin{cases} z(\varepsilon) \approx 0 \\ \dot{z}(\varepsilon) \approx Z_o \omega_o^2 \frac{\alpha}{k} = 2,5 \text{ ms}^{-1} \neq 0 \end{cases}}$$

2.2.7. Pour $t \in [\varepsilon, +\infty[$ l'équation différentielle (3) s'écrit :

$$z(t) + 2 \frac{\beta}{\omega_o} \dot{z}(t) + \frac{1}{\omega_o^2} \ddot{z}(t) = Z_o \quad (5)$$

Solution générale de l'équation (5) :

$$z(t) = A' \exp r_1 t + B' \exp r_2 t + Z_o \text{ avec } A' \text{ et } B' \text{ constantes d'intégration}$$

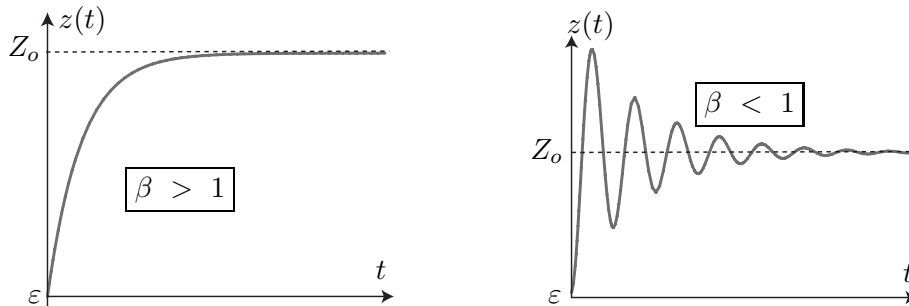
$$\text{Conditions initiales : } z(\varepsilon) = 0 \text{ et } \dot{z}(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A' = -\frac{r_2 Z_o}{r_2 - r_1} \exp - r_1 \varepsilon \\ B' = +\frac{r_1 Z_o}{r_2 - r_1} \exp - r_2 \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{Soient : } \boxed{\begin{cases} A' \approx -\frac{Z_o r_2}{r_2 - r_1} = \frac{Z_o}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) \\ B' \approx +\frac{Z_o r_1}{r_2 - r_1} = \frac{Z_o}{2} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) \end{cases}}$$

$$z(t) = \frac{Z_o}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) \exp r_1 t + \frac{Z_o}{2} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \right) \exp r_2 t + Z_o$$

2.2.8.

$$\beta = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$$



2.2.9. Le vieillissement entraîne une diminution du coefficient β qui tendra vers une valeur inférieure à 1. Dans ces conditions lorsque le véhicule rencontre un obstacle sur la route, fini le confort pour les usagers (passagers).

2.2.10. Hors sécurité !!

2.3. Réponse harmonique

$$z_o(t) = Z_o \cos \omega t \quad \text{et en représentation complexe :} \quad \underline{z}(t) = \underline{Z} \exp i \omega t$$

2.3.1. Fonction de transfert : $\underline{H}(i\omega) = \underline{Z}/\underline{Z}_o$. En notation complexe, l'équation différentielle (3) s'écrit :

$$\underline{z}(t) + 2\frac{\beta}{\omega_o} \dot{\underline{z}}(t) + \frac{1}{\omega_o^2} \ddot{\underline{z}}(t) = \frac{\alpha}{k} \dot{\underline{z}}_o(t) + \underline{z}_o(t)$$

$$\text{ou : } \underline{z}(t) \left(1 + 2i\beta \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega^2}{\omega_o^2} \right) = \underline{z}_o(t) \left(i\omega \frac{\alpha}{k} + 1 \right) = \underline{z}_o(t) \left(2i\beta \frac{\omega}{\omega_o} + 1 \right)$$

D'où :

$$H(i\omega) = \frac{1 + 2i\beta \frac{\omega}{\omega_o}}{1 + 2i\beta \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}$$

2.3.2. Gain en décibel $G(\omega)$

$$G(\omega) = 20 \log_{10} H(\omega) = 10 \log_{10} \left(\frac{1 + 4\beta^2 \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2} \right)^2 + 4\beta^2 \frac{\omega^2}{\omega_o^2}} \right)$$

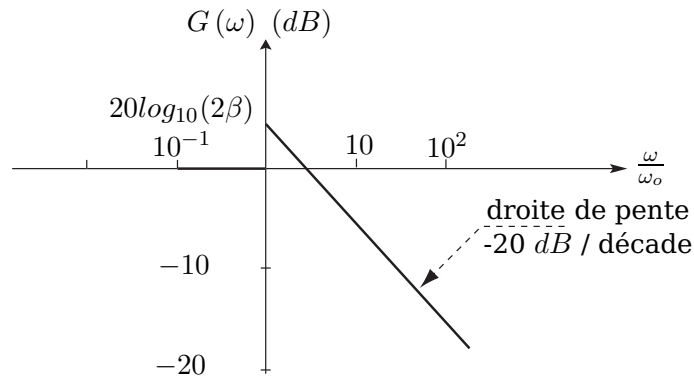
○ pour $\omega \ll \omega_o$

$G(\omega) \sim 0$ droite horizontale

○ pour $\omega \gg \omega_o$

$$G(\omega) \sim -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right) + 20 \log_{10} (2\beta) \quad \text{droite oblique de pente -20 décibel par décade}$$

2.3.3. Diagramme (asymptotique) de Bode



Le gain est maximum au voisinage des faibles fréquences et s'atténue au voisinage des hautes fréquences.

2.3.4. Pulsation ω en fonction de λ

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x(t) = vt + x_o \Rightarrow z_o(t) = Z_o \cos \omega t = Z_o \cos \frac{\omega}{v} (x - x_o) = z_o(x)$$

$$\lambda \text{ étant la période spatiale} \Leftrightarrow z_o(x + \lambda) = z_o(x) \Leftrightarrow \frac{\omega}{v} \lambda = 2\pi$$

$$\text{d'où : } \boxed{\omega = 2 \frac{v_o \pi}{\lambda}}$$

2.3.5. Rallye Paris-Dakar

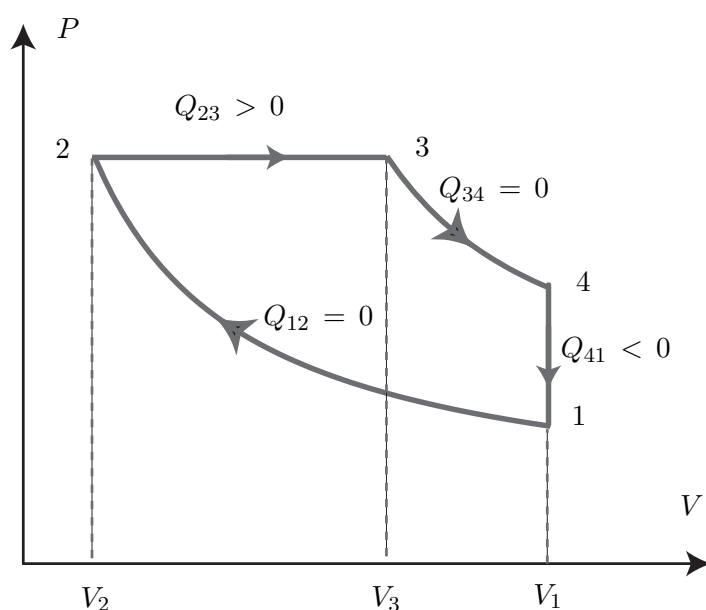
$$v_{min} = 10 \frac{\lambda \omega_o}{2\pi}$$

2.3.6. On conseille aux pilote d'abaisser leurs vitesse au niveau de cette zone !!

Deuxième problème :
Étude thermodynamique d'un moteur de voiture

Première partie
Étude qualitative du cycle

Le cycle étudié est celui d'un moteur thermique. Or un moteur ditherme ne peut que fournir du travail $W = - \int p dV < 0$ (surface délimitée par le cycle dans le plan de Clapyron (P, V)) : c'est le cas lorsque le cycle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre .



Deuxième partie
Étude quantitative du cycle

2.1. Point 2

2.1.1. Température T_2

La transformation (12) est adiabatique réversible

Loi de Laplace $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \tau^{\gamma-1}$

Application numérique : $T_2 = 750 \text{ K}$

2.1.2. Pression P_2

Loi de Laplace $T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}, \Rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_1 \tau^{\gamma}$

Application numérique : $P_2 = 25 \times 10^5 \text{ Pa}$

2.2. Point 3

2.2.1. Rapport des températures α

$$\alpha = \frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{T_3}{T_1}$$

2.2.2. Température T_3

$$T_3 = \alpha T_1 = 3000 \text{ K}$$

2.2.3. Pression P_3

$$P_3 = P_2 = 25 \times 10^5 \text{ Pa}$$

2.3. Point 4

2.3.1. Température T_4

$$T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \quad ; \quad T_3 = \alpha T_1 \quad \text{et} \quad T_2 = T_1 \tau^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 \left(T_3 \frac{V_2}{T_2} \right)^{\gamma-1} = \alpha^\gamma V_2^{\gamma-1} T_1 \tau^{-(1-\gamma)^2}$$

soit :

$$T_4 = \alpha^\gamma \tau^{\gamma(1-\gamma)} T_1$$

Application numérique :

$$T_4 \simeq 2080 \text{ K}$$

2.3.2. Pression P_4

$$\frac{P_4}{T_4} = \frac{P_1}{T_1} \Rightarrow P_4 = \alpha^\gamma \tau^{\gamma(1-\gamma)} P_1$$

Application numérique :

$$P_4 \simeq 7,00 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Troisième partie Rendement d'un cycle moteur

3.1. Rendement η d'un cycle moteur compte tenu de la vocation du moteur :

$$\eta = \frac{\text{transfert d'énergie utile pour l'utilisateur}}{\text{Transfert d'énergie dépensée pour faire fonctionner le moteur}}$$

3.2. Rendement du cycle théorique

3.2.1. Expression de η

$$\eta = -\frac{W}{Q_{23}} \quad \text{avec} \quad \Delta U_{cycle} = W + Q_{23} + Q_{41} = 0$$

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = m c_p (T_3 - T_2) \quad \text{et} \quad Q_{41} = \Delta H_{41} = m c_v (T_1 - T_4)$$

$$\text{soit :} \quad \eta = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \right)$$

3.2.2.

$$\eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{T_1}{T_3} \left(\frac{1 - \frac{T_4}{T_1}}{1 - \frac{T_2}{T_3}} \right) = 1 + \frac{1}{\gamma \alpha} \left(\frac{1 - \alpha^\gamma \tau^{\gamma(1-\gamma)}}{1 - \frac{T_2}{T_3}} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1}{T_3} = \frac{1}{\alpha} \tau^{\gamma-1}$$

soit :

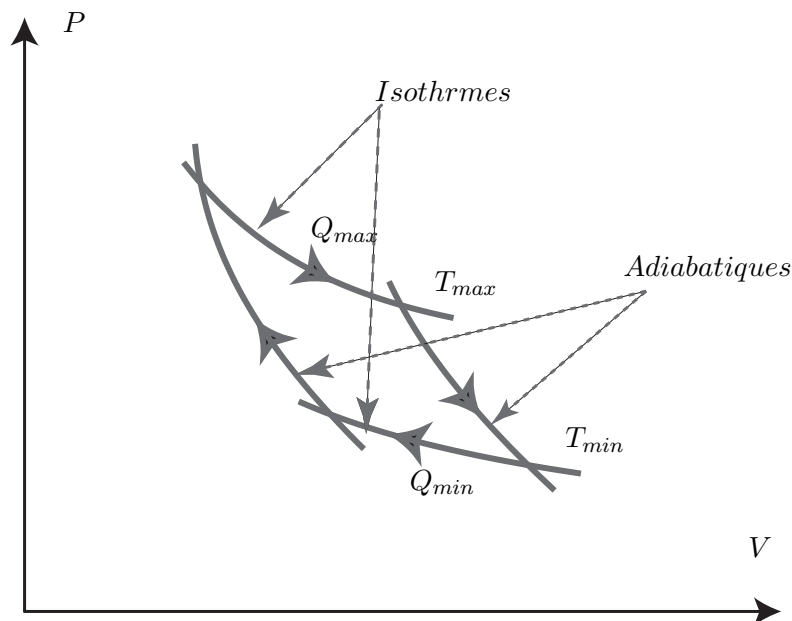
$$\eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1 - \alpha^\gamma \tau^{\gamma(1-\gamma)}}{\alpha - \tau^{\gamma-1}} \right)$$

3.2.3. Application numérique :

$$\eta \approx 43\%$$

3.3. Cycle de Carnot

3.3.1. Le cycle de Carnot est un cycle *réversible* décrit par une machine thermique ditherme ; il est constitué de deux *isothermes*, de températures égales à celles des sources, et de deux portions d'*adiabatiques* séparant les deux isothermes.

**3.3.2.** Rendement η_c du cycle moteur de Carnot

$$\eta_c = -\frac{W}{Q_{\max}} = 1 + \frac{Q_{\min}}{Q_{\max}}$$

Le 1^{er} et 2^{ème} principe de la thermodynamique :

$$\begin{cases} \Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_{\min} + Q_{\max} = 0 \\ \Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_{\min}}{T_{\min}} + \frac{Q_{\max}}{T_{\max}} = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

3.3.3.

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 90\%$$

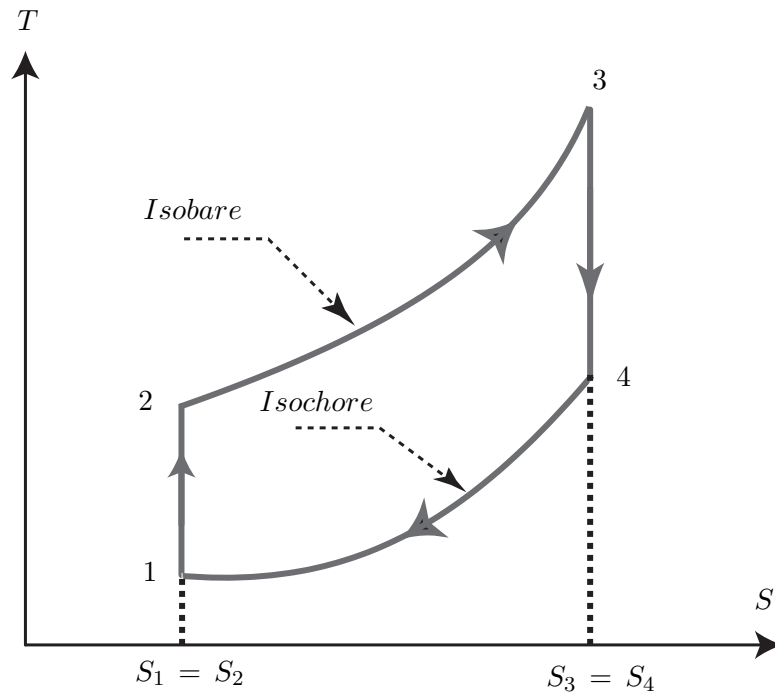
3.3.4.

$$\eta_c' > \eta$$

Le fait de considérer que les transformations $(1 \rightarrow 2)$ et $(3 \rightarrow 4)$ sont adiabatique (absence d'échanges thermiques par les parois des cylindres) réversibles (absence de frottements des pistons sur les cylindres) n'est qu'une hypothèse théorique.

Quatrième partie Prise en compte des frottements internes

4.1.



4.2. Énoncé du second principe de la thermodynamique (principe de l'évolution) : Énoncé :

Pour tout système fermé, il existe une fonction d'état S , extensive et non conservative, appelée fonction entropie; tel qu'au cours d'une transformation finie entre les instants t_i et t_f :

$$\Delta S = S^e + S^p \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S^e : \text{terme d'échange} \\ S^p (\geq 0) : \text{terme de production ou de création} \end{cases}$$

$$\text{tels que : } \begin{cases} S^e = \int \frac{\delta Q}{T} \\ Q : \text{transfert thermique} \\ S^e > 0 \text{ pour une transformation irréversible} \\ S^e = 0 \text{ pour une transformation réversible} \end{cases}$$

Énoncé :

L'entropie S d'un système isolé ne peut que croître !

Énoncés historiques :

Énoncé de Clausius :

La chaleur ne peut pas passer d'elle même (de façon spontanée) que d'un corps chaud à un corps froid.

Communication à l'académie de Berlin , 1850

Énoncé de Thomson :

Un système en contact avec une seule source thermique ne peut, au cours d'un cycle, que recevoir du travail et fournir de la chaleur.

William Thomson (Lord Kelvin) , 1851

4.3.

- Les étapes (B) et (D) sont adiabatiques réversibles \Rightarrow isentropiques.
- Les étapes (B') et (D') sont adiabatiques irréversibles \Rightarrow augmentation d'entropie (désordre).
- Conséquences : $S'_2 > S_2 = S_1$ et $S'_4 > S_4 = S_3$

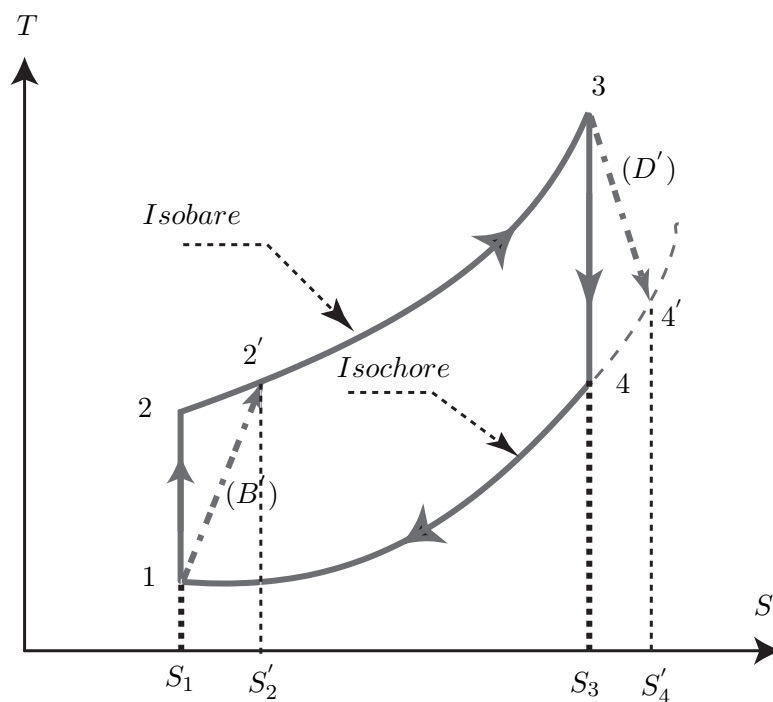


Figure 1

4.4. L'augmentation d'entropie (désordre) s'accompagne d'une augmentation d'agitation thermique :

- Le long de l'isobare (23), la température augmente de 2 à 3.
- Le long de l'isochore (41), la température diminue de 4 à 1.
- Conséquences : $T'_2 > T_2$ et $T_4 < T'_4$

4.5. On pose :

$$\beta = \frac{T'_2}{T_2} = \frac{T'_4}{T_4}$$

4.5.1. Expression du rendement η'

$$\eta' = -\frac{W'}{Q_{2'3}} \quad \text{avec} \quad \Delta U'_{cycle} = W' + Q_{2'3} + Q_{4'1} = 0$$

$$Q_{2'3} = \Delta H'_{2'3} = m c_p (T_3 - T_2') \quad \text{et} \quad Q_{4'1} = \Delta H'_{4'1} = m c_v (T_1 - T_4')$$

$$\text{soit :} \quad \boxed{\eta' = 1 + \frac{Q_{4'1}}{Q_{2'3}} = 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_1 - T_4'}{T_3 - T_2'} \right)}$$

4.5.2.

$$\boxed{\eta' = 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_1 - \beta T_4}{T_3 - \beta T_2} \right)}$$

4.5.3. On introduit le paramètre x tel que : $1 \leq x \leq \beta$

$$\text{soit :} \quad \eta(x) = 1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_1 - x T_4}{T_3 - x T_2} \right) \quad \text{avec} \quad \eta' = \eta(x = \beta) \quad \text{et} \quad \eta = \eta(x = 1)$$

puis, on étudie la fonction $\eta(x)$ dans l'intervalle $[1, \beta]$

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \frac{T_1 T_2 - T_3 T_4}{\gamma (T_3 - x T_2)^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \eta(x) \text{ est une fonction décroissante sur l'intervalle } [1, \beta]$$

$$\text{Soit :} \quad \boxed{\eta(1) = \eta > \eta(\beta) = \eta'}$$

4.5.4. Le rôle des huiles de lubrification est de minimiser les frottement des pistons sur les cylindres et, donc, minimiser les pertes par effet joule et par conséquent avoir un bon rendement des moteurs !!