DNS

Sujet

Diffusion thermique dans un fil électrique

Toute l'étude est réalisée en régime permanent.

I. Première partie

On considère un fil métallique cylindrique, homogène, de section droite S dont le périmètre vaut p et de longueur L . Le rayon de ce fil est supposé petit par rapport à sa longueur. Le métal constitutif possède une conductivité thermique λ , une résistivité électrique ρ , une masse volumique μ et une capacité thermique massique c .

Dans la première partie de l'étude, les parois latérales du fil sont parfaitement calorifugées et les extrémités sont maintenues à des températures T_1 et T_2 (avec $T_1>T_2$ grâce à des thermostats. La température $T(x)$ dans le fil ne dépend que de l'abscisse x (*Figure* 1) avec $T(0)=T_1$ et $T(L)=T_2$.

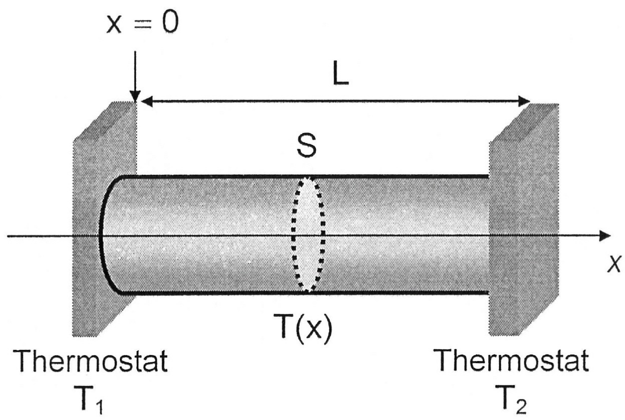


Figure 1

1. Rappeler la loi de Fourier pour une densité volumique de courant thermique notée $\vec{j}_{th}$;

exprimer le flux (ou puissance) thermique Φ_{th} traversant une section droite S du fil.

2. Établir, à l'aide d'un bilan énergétique sur une tranche élémentaire du fil de section S et de longueur dx, l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$. En déduire la loi de répartition de $T(x)$ en fonction de T_1, T_2, L et x. Tracer schématiquement cette répartition de température en fonction de x.

3. Exprimer la puissance thermique Φ_2 cédée à la source de température T_2 en fonction de λ, S, T_1, T_2 et L.

II. Deuxième partie

Le fil est maintenant parcouru par un courant électrique continu d'intensité I répartie uniformément sur toute la section S (*Figure* 2).

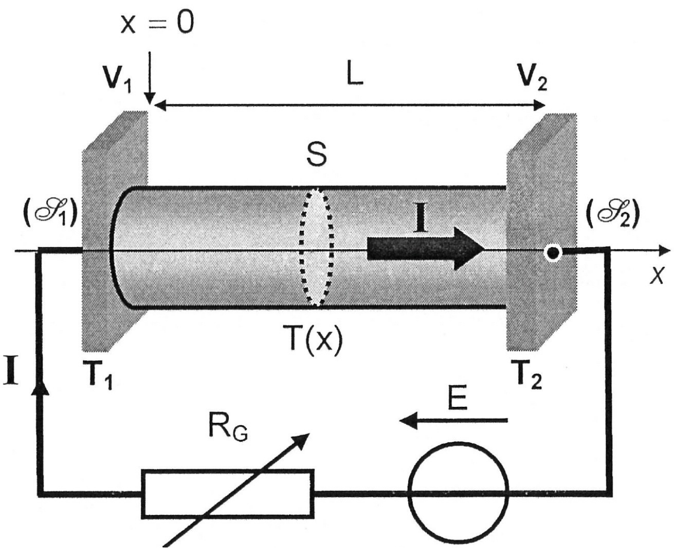


Figure 2

Les sections terminales ($\mathscr{S}_1$) et ($\mathscr{S}_2$) sont maintenues simultanément à des températures constantes T_1 et T_2 et à des potentiels constants V_1 et V_2. Après établissement d'un régime stationnaire, les surfaces isothermes et équipotentielles sont des plans orthogonaux à l'axe Ox.

La résistivité électrique ρ du fil est ici supposée indépendante de la température. Les dimensions du fil ne varient pas avec la température.

4. Exprimer, par application de la loi d'Ohm, la résistance dR d'une tranche élémentaire du fil, de longueur dx et de section S ; en déduire la puissance thermique volumique : $\mathscr{P}_{th,\mathrm{v}}$ produite au sein du fil, en fonction de l'intensité I, de S et ρ.

5. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$. En déduire l'expression de $T(x)$, puis celle de la densité volumique de courant de chaleur $j_{th}(x)$ en fonction de ρ,

λ , S , T_1 , T_2 , L , x et I .

6. Écrire le courant de chaleur où flux thermique Φ_{th} le long du fil, en notant $\mathscr{C}=\dfrac{\lambda S}{L}$ sa conductance thermique et R sa résistance électrique. Tracer, toujours avec $T_1>T_2$, l'allure de la répartition de température $T(x)$ en distinguant les cas où le terme $\dfrac{1}{2}RI^2$ est inférieur ou supérieur à la quantité $\mathscr{C}(T_1-T_2)$. Commenter.
7. Déterminer la puissance thermique Φ'_2 désormais cédée à la source de température T_2 Interpréter physiquement le résultat obtenu.

III. Troisième partie

Le dispositif précédent est maintenant placé dans une enceinte maintenue à une température uniforme T_a . Le fil est relié à deux bornes maintenues rigoureusement à la même température T_a . La capacité thermique de ces bornes est suffisamment grande pour que leurs températures restent constantes et égales à T_a (*Figure* 3).

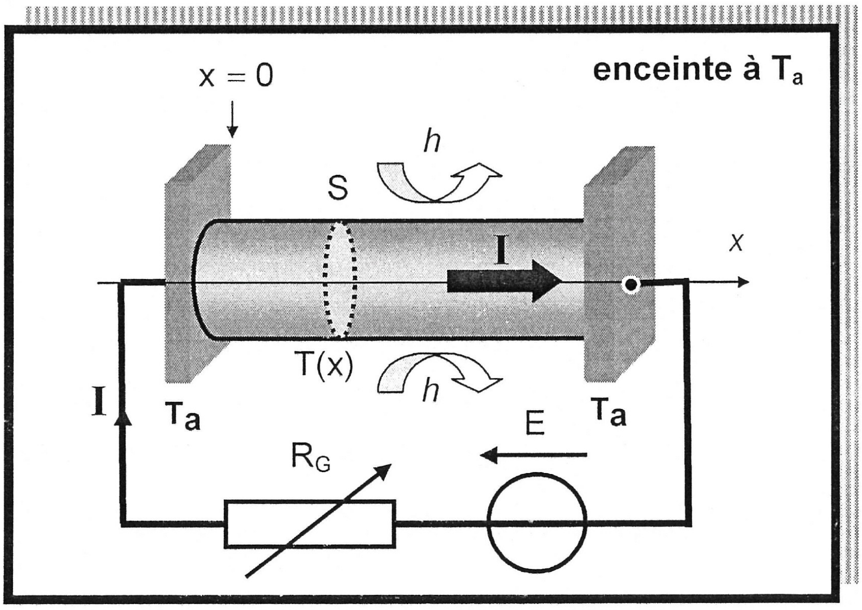


Figure 3

Le fil subit, à travers sa surface latérale Σ , des pertes thermiques conducto latérales; elles correspondent à la loi de Newton. Le coefficient d'échange par unité de surface est désigné par h .

Ce dispositif est destiné à un banc expérimental de mesure de la conductivité thermique du fil métallique ; afin d'améliorer la précision de la mesure, il convient de tenir compte de la variation de la résistivité électrique en fonction de la température, suivant la loi: $\rho(x)=\rho_a[1+\beta(T(x)-T_a)]$, où ρ_a désigne la résistivité électrique à la température T_a et β une constante positive.

8. Proposer, en raisonnant sur une tranche élémentaire de fil de longueur dx et de section S, un bilan des flux thermiques en présence en déduire l'équation différentielle vérifiée par la grandeur $\theta(x)=T(x)-T_a$ sous la forme: $\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}+m^2\theta(x)=-k$. Exprimer m^2 en fonction du périmètre p de la section droite, de h, λ, ρ_a, β, S et I, puis écrire k en fonction de λ, ρ_a, S et I.

9. Montrer que. selon la valeur de l'intensité I du courant, trois types de solutions mathématiques de $\theta(x)$ sont attendues. (aucune résolution de l'équation différentielle n'est demandée)

On réalise l'expérience suivante : le fil est alimenté par un courant dont l'intensité I_0 correspond au cas particulier où $m^2=0$.

10. Préciser la valeur I_0 de cette intensité en fonction de h, p, ρ_a, β et S. Résoudre équation différentielle qui en résulte en établissant la loi de variation de la température $\theta(x)$. Illustrer son évolution à l'aide d'un schéma. Analyser physiquement le résultat obtenu.

11. Exprimer la résistance électrique R_a du fil, à la température uniforme T_a puis celle de sa résistance R dans le cadre de l'expérience précédente (lorsqu'il est parcouru par l'intensité I_0) en fonction de R_a, β, k et L. En déduire la variation relative de résistance $\delta=\frac{R-R_a}{R_a}$ puis l'écrire en fonction des grandeurs h, p, λ, L et S.

12. Le coefficient d'échange h étant déterminé par ailleurs à l'aide d'une autre expérience, proposer le mode de détermination de la conductivité thermique λ du métal constituant le fil.

Réponses

1) Loi de Fourier :

La densité volumique de courant thermique de conduction est proportionnelle à : $-\overrightarrow{\text{grad}}\,T$

$$\boxed{\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\,T}$$

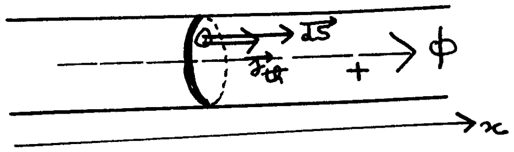
Ici, puisque $T = T(x)$

$$\boxed{\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \frac{dT}{dx} \overrightarrow{u_x}}$$

A travers une section droite :

$$\phi_{th} = \iint_S \overrightarrow{j_{th}}\, \overrightarrow{dS}$$

avec $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}\, \overrightarrow{u_x}$
$\overrightarrow{dS} = dS\, \overrightarrow{u_x}$



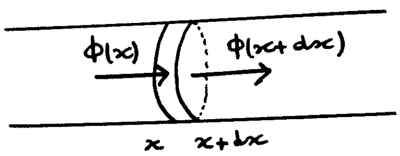
$$\phi_{th} = \iint j_{th}\, dS$$

$$= j_{th}\, S$$

$$\boxed{\phi_{th}(x) = -\lambda\, S\, \frac{dT(x)}{dx}}$$

---

2) $\rightarrow$ Bilan thermique pendant dt à une tranche dx :



A pression supposée constante :

$$\cancel{d^2H} = \delta^2 Q_{reçu} + \cancel{\delta^2 Q_{produit}}$$

en régime permanent
H est indépendant
du temps

pas de terme
de source ici

$$0 = \phi(x)\, dt - \phi(x+dx)\, dt$$

(éventuellement :

$$0 = -\frac{d\phi(x)}{dx}\, dx\, dt \quad)$$

on en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{c}\phi \text{ est uniforme} \\ (\text{indépendant de } x)\end{array}}$$

d'où puisque :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = \text{constante}}$$

mais puisque le problème demande une "équation différentielle", on répondra :

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = 0}$$

→

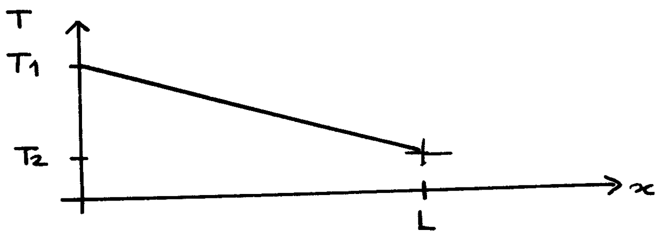
$$T = Ax + B$$

C.L. en 0 : $T_1 = B$

en L : $T_2 = AL + B$

$$A = -\frac{(T_1 - T_2)}{L} \qquad B = T_1$$

$$\boxed{T = -(T_1 - T_2)\frac{x}{L} + T_1}$$



---

3)

$$j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$= \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$$

$$\phi = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$$

(on retrouve $\Delta T = R_{th}\,\phi$ avec $R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}$)

ϕ est uniforme donc en $x = L$

$$\boxed{\phi_2 = \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)}$$

---

4) $\rightarrow$ On connait la formule

$$R_{\text{electrique}} = \frac{1}{\gamma_{elec}} \frac{\ell}{s}$$

On va donc trouver ici :

$$\boxed{dR = \rho \frac{dx}{S}}$$

Démonstration :

- au lieu de :

$$R = \frac{U}{I}$$

ici, on écrira

$$dR = \frac{dU}{I}$$

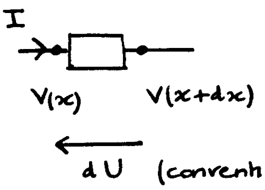
- On part de $\vec{j}_{elec}$ uniforme avec $\vec{j}_{elec} = j_{elec}\,\vec{u_x}$

et donc
$$I = \iint \vec{j}_{elec}\,\vec{dS}$$
$$I = j_{elec}\,S$$

et
$$dV = -\vec{E}\,\vec{d\ell}$$
$$= -\frac{\vec{j}_{elec}}{\gamma_{elec}}\,\vec{d\ell}$$
$$= -\rho\, j_{elec}\, dx$$

(inutile d'intégrer ici pour trouver U)

ici $dV = V(x+dx) - V(x)$



(convention récepteur)

alors que :
$$dU = V(x) - V(x+dx)$$

$$dU = \rho\, j_{elec}\, dx$$

- on obtient effectivement :

$$dR = \frac{dU}{I} = \frac{\rho\, dx}{S}$$

→ La puissance thermique dégagée par effet Joule est :

$$P_J = R\ I^2$$

Ici pour la résistance élémentaire parcourue par I

$$dP_J = dR\ I^2$$
$$= \frac{\rho\, dx}{S}\ I^2$$

ce qui correspond à une puissance volumique :

$$\mathcal{P}_{th,v} = \frac{dP_J}{d\tau} = \frac{\frac{\rho\, dx}{S}\ I^2}{S\, dx}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{th,v} = \frac{\rho}{S^2}\ I^2}$$

remarque :

Cette formule était connue.

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{reçue par charges}}}{d\tau} = \vec{j}_{elec}\,\vec{E}$$

pour un conducteur ohmique ($\vec{j}_{elec} = \gamma \vec{E}$), on retrouve la puissance par effet Joule

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j}_{elec}\ \frac{\vec{j}_{elec}}{\gamma}$$
$$= \frac{j_{elec}^2}{\gamma}$$
$$= \rho \left(\frac{I}{S}\right)^2$$

5) Bilan thermique pendant dt à une tranche dx

$$\underbrace{\cancel{d^2H}}_{\text{régime permanent}} = \delta^2 Q_{\text{reçu}} + \delta^2 Q_{\text{produit}}$$

$$0 = -\frac{d\Phi(x)}{dx}\, dx\, dt + \frac{\rho\, I^2}{S^2}\ \underbrace{S\, dx}_{d\tau}\ dt$$

$$0 = \lambda S \frac{d^2T(x)}{dx^2}\, dx\, dt + \frac{\rho\, I^2}{S}\, dx\, dt$$

donc

$$\boxed{\frac{d^2T(x)}{dx^2} = -\frac{\rho\, I^2}{\lambda S^2}}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\rho I^2}{\lambda S^2}x + A$$

$$\boxed{T = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}x^2 + Ax + B}$$

C.L. $T_1 = B$

$$T_2 = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}L^2 + AL + B$$

d'où :

$$B = T_1$$

$$A = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}L$$

finalement :

$$T = -\frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}x^2 + \frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}Lx + \frac{T_2-T_1}{L}x + T_1$$

$$\boxed{T = \frac{\rho I^2}{2\lambda S^2}x(L-x) - (T_1-T_2)\frac{x}{L} + T_1}$$

$$j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\boxed{j_{th} = -\frac{\rho I^2}{2S^2}(L-2x) + \frac{\lambda}{L}(T_1-T_2)}$$

---

6)

$$\Phi_{th} = j_{th}\, S$$

$$= -\frac{\rho I^2}{2S}(L-2x) + \frac{\lambda S}{L}(T_1-T_2)$$

avec $\mathcal{C} = \frac{\lambda S}{L}$

et $R = \frac{\rho L}{S}$

$$\boxed{\Phi_{th}(x) = -\frac{1}{2}RI^2\left(1-2\frac{x}{L}\right) + \mathcal{C}(T_1-T_2)}$$

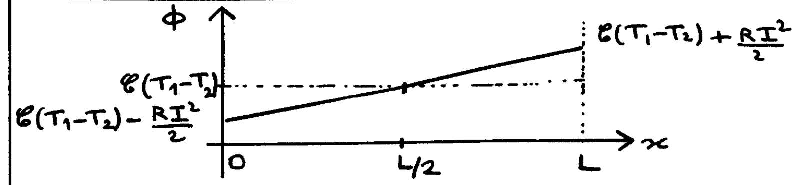
$$\boxed{T(x) = \frac{1}{\lambda S}\left(\frac{1}{2}RI^2 x\left(1-\frac{x}{L}\right) - \mathcal{C}(T_1-T_2)\,x\right) + T_1}$$

remarque :

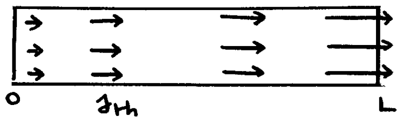
On peut tracer $\phi(x)$ dans les deux cas proposés avec $\phi_{Th}(x=0) = \mathcal{C}(T_1-T_2) - \frac{1}{2}RI^2$

$\phi_{Th}(x=L) = \mathcal{C}(T_1-T_2) + \frac{1}{2}RI^2$

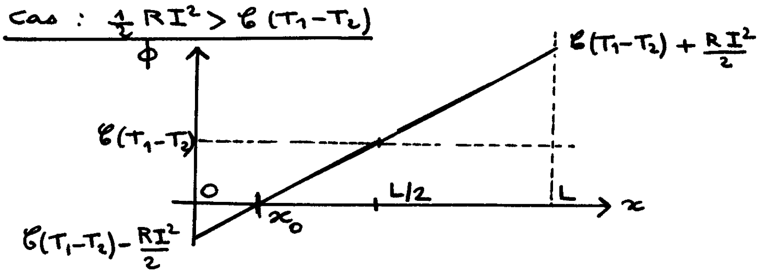
cas : $\frac{1}{2}RI^2 < \mathcal{C}(T_1-T_2)$



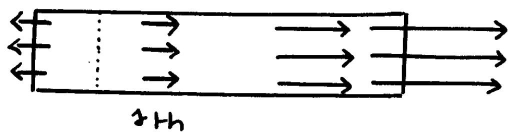
ϕ toujours positif



cas : $\frac{1}{2}RI^2 > \mathcal{C}(T_1-T_2)$



ϕ négatif pour x "petit".



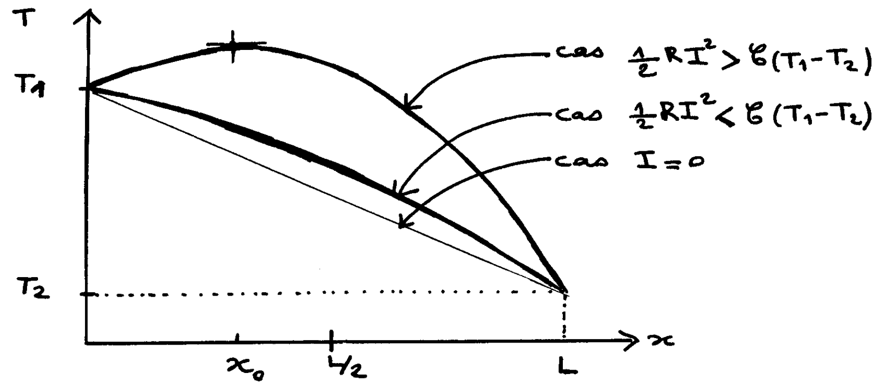
$\longrightarrow$ Pour tracer T on étudie la dérivée $\left(\frac{dT}{dx} = -\frac{j_{Th}}{\lambda} = -\frac{\phi}{\lambda S}\right)$

- si $\frac{1}{2}RI^2 < \mathcal{C}(T_1-T_2)$ $\quad \frac{dT}{dx} < 0$ pour $0 < x < L$
- si $\frac{1}{2}RI^2 > \mathcal{C}(T_1-T_2)$ $\quad \frac{dT}{dx} > 0$ pour $0 < x < x_0$

  $\frac{dT}{dx} < 0$ pour $x_0 < x < L$

avec x_0 valeur qui annule ϕ

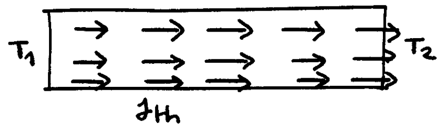
$$\boxed{x_0 = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{\mathcal{C}(T_1-T_2)}{RI^2/2}\right)}$$



Commentaire

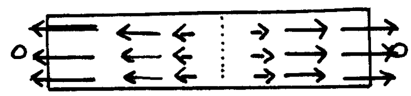
On peut considérer que l'état obtenu s'obtient par superposition de deux états stationnaires.

⟶ le premier (pas de courant électrique donc pas d'effet Joule) étudié dans la première partie :



$$\phi = \mathcal{C}(T_1 - T_2)$$
$$T = -\frac{1}{\lambda S}\mathcal{C}(T_1-T_2)x + T_1$$

⟶ le deuxième (courant électrique produisant de l'effet Joule)



$$\phi = -\frac{1}{2}RI^2\left(1-\frac{2x}{L}\right)$$
$$T = \frac{1}{\lambda S}\,\frac{1}{2}RI^2 x\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

En $x=0$ $\phi = -\frac{1}{2}RI^2$

En $x=L$ $\phi = \frac{1}{2}RI^2$

La situation étudiée est la somme de ces deux états.

On comprend que si l'effet Joule est important, pour $x < \frac{L}{2}$ on aura une abscisse x_0 telle que $\phi(x_0) = 0$, avec $T(x_0)$ maximal. Pour $x < x_0$ $\phi_{(x)}$ sera alors négatif

7) La puissance thermique cédée à la source T_2 est :

$$\boxed{\phi_2' = \mathcal{C}(T_1 - T_2) + \frac{1}{2}RI^2}$$

C'est la puissance qui passait dans la première partie ϕ_2 plus la moitié de la puissance produite par effet Joule.

---

8) Dans le bilan thermique pour la tranche dx pendant dt, il faut ajouter les échanges conducto-convectifs au niveau de la surface latérale.

On avait :

$$\underbrace{\cancel{d^2H}}_{0} = \lambda S \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx\, dt + \frac{\rho I^2}{S} dx\, dt$$

On aura :

$$0 = \lambda S \frac{d^2T(x)}{dx^2} dx\, dt + \frac{\rho I^2}{S} dx\, dt - h\,(T_{(x)} - T_a)\, p\, dx\, dt$$

$$0 = \frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{\rho I^2}{S^2\lambda} - \frac{h p}{S\lambda}(T_{(x)} - T_a)$$

On tient compte de l'expression de $\rho = \rho_a\left(1 + \beta\left(T(x) - T_a\right)\right)$

$$0 = \frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{\rho_a I^2}{S^2\lambda} + \left(\frac{\rho_a \beta I^2}{S^2\lambda} - \frac{h p}{S\lambda}\right)(T_{(x)} - T_a)$$

et avec la variable $\theta = \left(T(x) - T_a\right)$:

$$\boxed{\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \underbrace{\left(\frac{\rho_a I^2 \beta}{\lambda S^2} - \frac{h p}{\lambda S}\right)}_{m^2} \theta(x) = - \underbrace{\frac{\rho_a I^2}{\lambda S^2}}_{k}}$$

---

9) $m^2 > 0$ $\quad \theta(x)$ = sinusoïde + constante

$m^2 = 0$ $\quad \theta(x)$ = parabole

$m^2 < 0$ $\quad \theta(x)$ = exponentielles + constante

---

10) $m^2 = 0$

$$\frac{\rho_a I_0^2 \beta}{\lambda S^2} = \frac{h p}{\lambda S}$$

$$\boxed{I_0^2 = \frac{h p S}{\rho_a \beta}}$$

et l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = -k$$

$$\theta(x) = -\frac{k}{2}x^2 + Ax + B$$

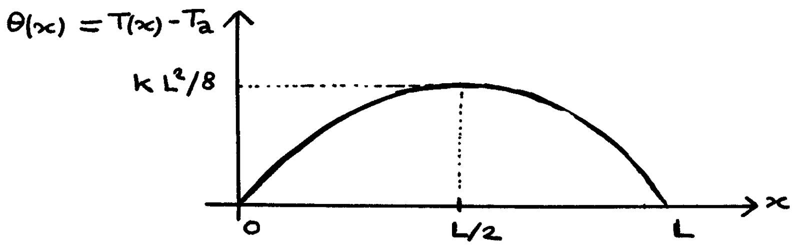
$\theta(x)$ est nul en $x=0$ et en $x=L$

C.L. $x=0$ $\quad 0 = B$

$x=L$ $\quad 0 = -\frac{k}{2}L^2 + AL + B$

$\left.\right\}$ $B=0$, $A = \frac{kL}{2}$

$$\boxed{\theta(x) = \frac{k}{2}x(L-x)}$$



La température est maximale en $x = L/2$.
Pour $m^2=0$, les pertes conducto-convectives contrebalancent exactement la partie variable de l'effet Joule (en lien avec le ρ en $T-T_a$).
Le problème se réduit à une tige maintenue à T_a à chaque extrémité avec de l'effet Joule uniforme (en lien avec $\rho = \rho_a$).
Le problème est donc symétrique (maximum en $x=L/2$ au milieu)

---

11) → $$\boxed{R_a = \frac{\rho_a L}{S}}$$

→ Pour une tranche dx

$$dR = \frac{\rho \, dx}{S}$$

$$= \frac{\rho_a \, dx}{S}\left(1+\beta\left(T(x)-T_a\right)\right)$$

$$R = R_a + \frac{R_a}{L}\beta\int_{x=0}^{x=L}(T(x)-T_a)\,dx$$

$$= R_a + \frac{R_a}{L}\beta\frac{k}{2}\underbrace{\int_0^L x(L-x)\,dx}_{\frac{L^3}{6}}$$

$$\boxed{R = R_a\left(1+\frac{\beta k L^2}{12}\right)}$$

$$\delta = \frac{R-R_a}{R_a}$$

$$\boxed{\delta = \frac{\beta k L^2}{12}}$$

avec $k = \frac{\rho_a I_0^2}{\lambda S^2}$ (cf 8))

$= \frac{h p}{\beta \lambda S}$ (cf 10))

finalement :

$$\boxed{\delta = \frac{h p L^2}{12 \lambda S}}$$

---

12) La mesure de δ permet alors de déterminer λ

avec : $\lambda = \frac{h p L^2}{12 S}\frac{1}{\delta}$
