Les classiques de la sommabilité

On pose pour tout réel $x \in]1,+\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}$

Problème 1: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n)-1)$

Dans cette partie, z un nombre complexe tel que $|z| < 2$ et $(u_{n,p})$ est une famille de nombres complexes définie pour n et p entiers naturels, $n \geqslant 2$, $p \geqslant 2$ par $u_{n,p} = \frac{z^n}{p^n}$.

L'objectif de cette partie est de calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n)-1)$

1. (a) Justifier que, pour tout $p \geqslant 2$, la série $\sum_{n\geqslant 2} u_{n,p}$ est absolument convergente et calculer $S_p = \sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{p^n}\right|$
   (b) En déduire que la famille $(u_{n,p})_{n\geqslant 2, p\geqslant 2}$ de nombres complexes est sommable.
2. (a) Démontrer que $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n)-1)\, z^n$
   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n)-1)$

Problème 2: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)$

On rappelle que $\forall x \in]-1,1]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$.

Dans ce problème on calcule la valeur de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)$.

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

1. (a) Montrer que $x_{n-1} - x_n \sim \frac{1}{2n^2}$
   (b) En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel γ
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \gamma$.
3. On considère la suite double $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{\substack{n\geqslant 2\\ k\geqslant 2}}$.
   (a) Justifier que, pour tout $n \geqslant 2$, la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{kn^k}$ est absolument convergente;
   (b) Vérifier que $S_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kn^k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
   (c) En déduire que la famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{\substack{n\geqslant 2\\ k\geqslant 2}}$ est sommable. .

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k) = \gamma$.

PROBLÈME 3: Calcul de trois sommes $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}} \frac{1}{p^2\,q^2}$, $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p\mid q}} \frac{1}{p^2\,q^2}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^{\star})^2\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2\,q^2}$.

Dans cette partie on se propose de calculer les trois sommes

$$A = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}} \frac{1}{p^2\,q^2},\ B = \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p\mid q}} \frac{1}{p^2\,q^2} \text{ et } C = \sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^{\star})^2\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2\,q^2}.$$

On considère la suite double $\left(\dfrac{1}{p^2\,q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ et les ensembles

$$I = \left\{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2} \mid p \text{ divise } q\right\}$$

et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad J_n = \left\{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2} \mid p\wedge q = n\right\} \text{ et } I_n = \{(p,np) \mid p\in\mathbb{N}^*\}$$

1. Montrer que $\left(\dfrac{1}{p^2\,q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable et calculer $A = \displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}} \frac{1}{p^2\,q^2}$

2. (a) Justifier que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2\,q^2}\right)_{(p,q)\in I}$ est sommable;
   (b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de I;
   (c) Par le théorème de la sommation par paquets calculer $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p\mid q}} \frac{1}{p^2\,q^2}$.

3. (a) Vérifier que: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{(p,q)\in J_n} \frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{n^4}\sum_{(p,q)\in J_1} \frac{1}{p^2q^2}$;
   (b) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$;
   (c) Déduire la valeur de la somme $C = \displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2\,q^2}$

PROBLÈME 4: Sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$

Soit a et b deux réels strictement positifs.
On propose d'étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

1. On suppose, dans cette question, que la famille $\left(\dfrac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable
   (a) Donner un équivalent de $\dfrac{1}{a^n+b^m}$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis de $\dfrac{1}{a^n+b^m}$ lorque $m\to+\infty$ (discuter selon les valeurs de a et b).
   (b) En déduire que $a>1$ et $b>1$.

2. On suppose que $a>1$ et $b>1$. On pose $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ et $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$

Les classiques de la sommabilité

(a) Montrer majoration de $\dfrac{1}{a^n+b^m} \leqslant \dfrac{1}{2}\alpha^n.\beta^m$

(b) Etudier la sommabilité de $(\alpha^n\beta^m)$ puis conclure .

Problème 5: Étude d'une sommabilité

On considère la suite double $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$, définie par: $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^\alpha + q^\beta}$

1. Montrer que si $\alpha \leqslant 1$ ou $\beta \leqslant 1$, alors $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ n'est pas sommable.

On suppose dans ce qui suit que $\alpha > 1$ et $\beta > 1$

2. Soit $p \geqslant 1$ fixé. Montrer que la série $\sum\limits_{q\geqslant 1} u_{p,q}$ est convergente. On note $X_p = \sum\limits_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$

3. On considère la fonction $\varphi_p : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{p^\alpha + t^\beta} \end{array} \right.$.

   (a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t$, puis montrer que
$$\int_1^{+\infty} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t \leqslant X_p \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t$$

   (b) En déduire que:
$$\frac{1}{p^\gamma}\int_{p^{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{+\infty} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant X_p \leqslant \frac{1}{p^\gamma}\int_0^{+\infty} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t$$
   Où γ est une constante que l'on déterminera.

4. Conclure que $X_p \sim \dfrac{C}{p^\gamma}$, où C est une constante à préciser

5. Étudier la sommabilité de la famille