Dipôle magnétique

Table des matières

1 Dipôle magnétique

1.1 Définition et modélisation

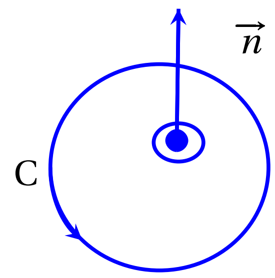
- On appelle dipôle magnétique une boucle de courant d'intensité I,dont les dimensions sont faibles par rapport à la distance d'observation .
- On modélise un dipôle magnétique par une spire de courant I

1.2 moment magnétique

Considérons une boucle de courant d'intensité I

- $\overrightarrow{S} = S\overrightarrow{n}$: vecteur surface du boucle
- le moment magnétique du boucle de courant

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\overrightarrow{S}$$



- dans le cas d'une spire circulaire de rayon R,parcourue par un courant I,le moment magnétique est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\pi R^2\overrightarrow{n}$$

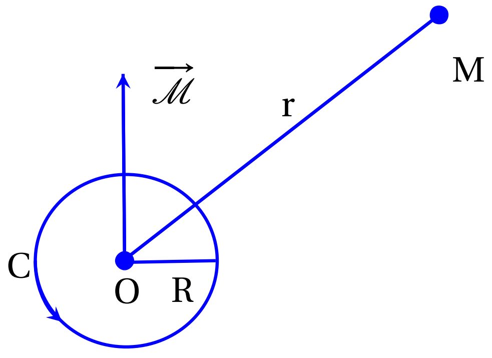
- le moment magnétique s'exprime en $A.m^2$

2 Champ magnétique crée par un dipôle

2.1 Approximation dipolaire

Elle consiste à prendre la distance r entre le point d'étude M et le boucle de courant très grande devant la dimension R du boucle

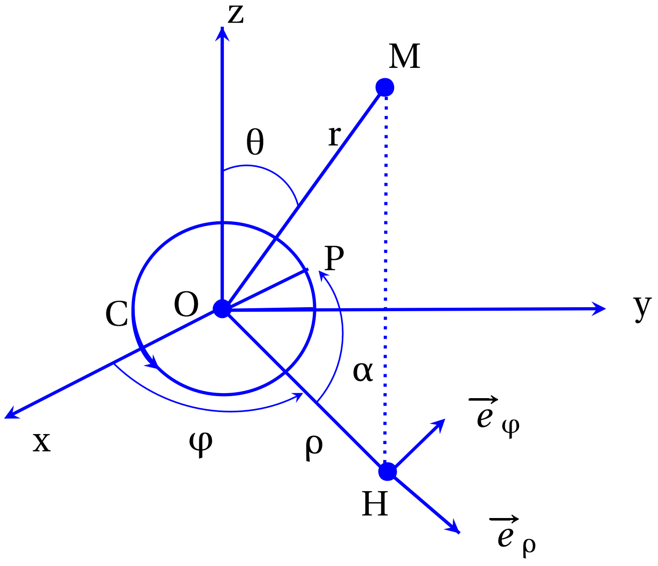
$$r >> R$$



2.2 Potentiel vecteur

- $OM = r$ et $OP = R$
- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e}_r$
- $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e}_\rho + z\overrightarrow{e}_z$
- $\overrightarrow{OP} = R\cos\alpha\overrightarrow{e}_\rho + R\sin\alpha\overrightarrow{e}_\varphi$
- dans la base $(\overrightarrow{e}_\rho, \overrightarrow{e}_\varphi, \overrightarrow{e}_z)$

$$\overrightarrow{dl} = d\overrightarrow{OP}$$
$$= -R\sin\alpha d\alpha\overrightarrow{e}_\rho + R\cos\alpha d\alpha\overrightarrow{e}_\varphi$$



- $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{\vec{dl}}{PM}$
- $PM^2 = (\vec{OM} - \vec{OP})^2 = (OM^2 + OP^2 - 2\vec{OM}.\vec{OP}) = (r^2 + R^2 - 2\vec{OM}.\vec{OP})$
- $\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{R^2}{r^2} - \frac{2\vec{OM}.\vec{OP}}{r^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{OM}.\vec{OP}}{r^3}$
- $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\oint_{(C)} \frac{1}{r}\vec{dl} + \frac{1}{r^3}\oint_{(C)} (\vec{OM}.\vec{OP})\vec{dl}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}\oint_{(C)} (\vec{OM}.\vec{OP})\vec{dl}$
- $\vec{OM}.\vec{OP} = \rho R \cos\alpha$
- $\oint_{(C)} \frac{1}{r}\vec{dl} = \frac{1}{r}\oint_{(C)} \vec{dl} = \vec{0}$
- le plan $\varphi = cte$ est un plan d'antisymétrie de la distribution donc

$$\boxed{\vec{A} = A\vec{e}_\varphi}$$

- $A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2\rho}{r^3}\int_0^{2\pi} \cos^2\alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi R^2\rho}{r^3}$
- $\sin\theta = \frac{\rho}{r}$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\pi R^2 \sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi}$$

- $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$
- $\vec{\mathcal{M}} = I\pi R^2 \vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}}$$

2.3 Champ magnétique crée par le dipole

- $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi$ avec $\mathcal{M} = I\pi R^2$
- $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$
- $\vec{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$
- $B_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d(\sin\theta A_\varphi)}{d\theta} = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{2\cos\theta}{r^3}$
- $B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{d(rA_\varphi)}{dr} = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^3}$
- $B_\varphi = 0$

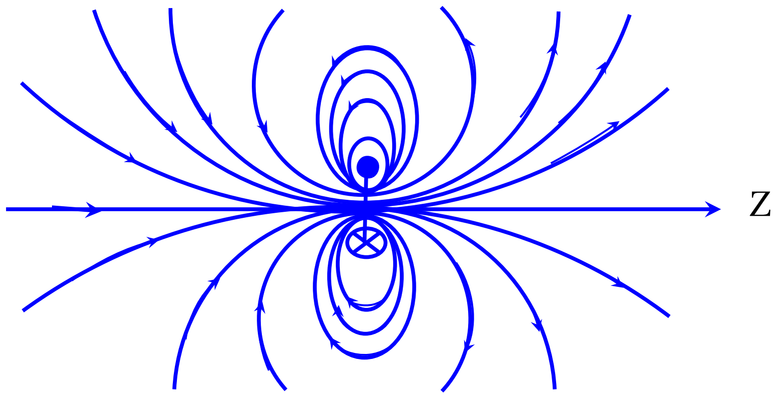
► Expression intrinsèque
$\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{\mathcal{M}}.\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{\mathcal{M}}}{r^3}\right]}$$

► lignes de champ

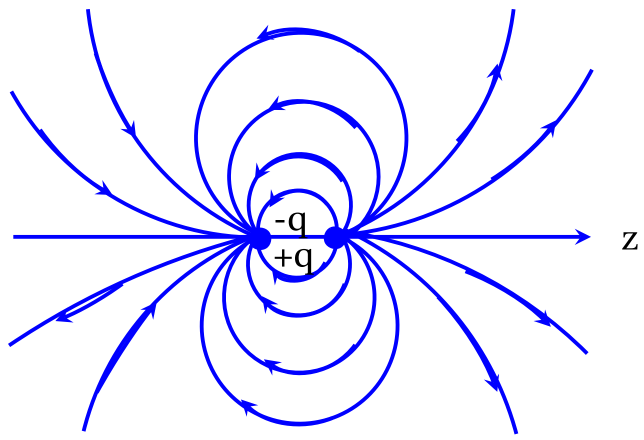
- l'équation des lignes de champ est donnée par : $\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{0}$
- $\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta}$
- $2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta = \frac{dr}{r}$

$$r = r_0 \sin^2\theta$$

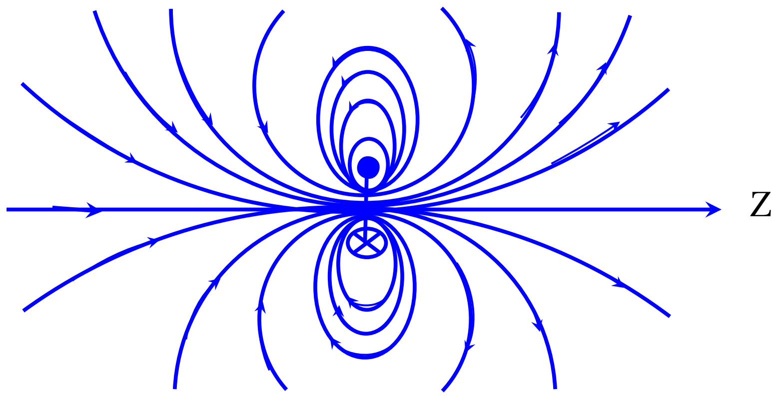


2.4 Comparaison des propriétés des champs électrostatique et magnétostatique

▶ Cartes du champ



dipôle électrostatique



dipôle magnétostatique

- les deux cartes obtenus sont clairement distinctes,car les comportements des champs au voisinage de leurs sources sont très différents : le champ électrostatique diverge à partir de ses sources (les charges) alors que le champ magnétostatique tourbillonne autour des siennes (courants)

▶ autres propriétés

	champ électrostatique	champ magnétostatique
source	charges fixes	charges en mouvement (courants)
Champ	$d\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{r}}{r^3}$	$d\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\overrightarrow{dC}\wedge\overrightarrow{r}}{r^3}$
Relations de passage	$\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{1\to 2}$	$\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0\,\overrightarrow{j}_s \wedge \overrightarrow{n}_{1\to 2}$
circulation	$\mathscr{C} = \oint_{(C)} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dl} = 0$	$\mathscr{C} = \oint_{(C)} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 \sum_k \varepsilon_k I_k$
flux	$\oiint_{(S)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{(S)} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = 0$
dipôle	$\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{P_-P_+}$ (vecteur polaire)	$\overrightarrow{\mathscr{M}} = I\,\overrightarrow{S}$ (vecteur axial)
champ dipolaire	$\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{e}_r)\overrightarrow{e}_r - \overrightarrow{p}}{r^3}$	$\overrightarrow{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\overrightarrow{\mathscr{M}}.\overrightarrow{e}_r)\overrightarrow{e}_r - \overrightarrow{\mathscr{M}}}{r^3}$