Corrigé proposé par :
A. Habib
CPA Marrakech

Corrigé du CNC 2012 : Physique 2

1er Problème : Champ magnétique et induction

1 Partie1 : Magnétostatique dans le vide

1.1 Équation de Maxwell

1.1.1 Les équation de Maxwell :

√ $\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}}$; $\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}}$; $\boxed{\vec{\nabla}.\vec{B}(M,t) = 0}$; $\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}}$

1.1.2 Les équations Maxwell en régime stationnaire :

√ $\boxed{\vec{\nabla}.\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}$; $\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M) = 0}$; $\boxed{\vec{\nabla}.\vec{B}(M) = 0}$; $\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)}$

1.2 Loi de Biot et Savart

1.2.1

√ Expression de $\vec{B}$ une distribution volumique :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau(P)}$$

√ Expression de $\vec{B}$ une distribution linéique :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_D \frac{I\vec{dl}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}}$$

1.2.2 Direction du champ B pour un plan de symétrie P :

√ Le champ $\vec{B}$ est $\perp$ au plan de **symétrie** : $\boxed{\vec{B}(M) \perp (P)}$

1.2.3 Direction du champ B pour un plan d'anti-symétrie P :

√ Le champ $\vec{B}$ est $\in$ dans le plan d'**anti-symétrie** : $\boxed{\vec{B}(M) \in (P)}$

1.3 Flux du champ magnétique

1.3.1 Propriété fondamental du flux :

$\surd$ Le flux du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est $\boxed{\text{conservatif}}$.

$\surd$ Expression intégrale de la conservation du flux :

$$\boxed{\oint_{\Sigma} \overrightarrow{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{S}(\mathrm{M}) = 0}$$

1.3.2

$\surd$ Déduire une relation de passage :

On applique la consevation du flux à un cylindre de bases $\mathrm{d}S_1$ et $\mathrm{d}S_2$ $(= \mathrm{d}S_1)$ et de hauteur h $(\Sigma = dS_1 \cup dS_{lat} \cup dS_2)$.

$$\int_{dS_1} \overrightarrow{B}_1(M_1).\mathrm{d}\overrightarrow{S}_1 + \int_{\mathrm{dS_{lat}}} \overrightarrow{B}(\mathrm{M}).\mathrm{d}\overrightarrow{S}(\mathrm{M}) + \int_{\mathrm{dS_2}} \overrightarrow{B}_2(\mathrm{M_2}).\mathrm{d}\overrightarrow{S}_2 = 0$$

Lorsque $h \to 0$, alors : $\int_{dS_{lat}} \overrightarrow{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{S}(\mathrm{M}) \to 0$ et $M_1 \equiv M_2 \equiv M + -\mathrm{d}\overrightarrow{S}_1 = \mathrm{d}\overrightarrow{S}_2 = \mathrm{dS}\overrightarrow{n}_{12}$, on trouve : $\boxed{B_{2n} = B_{1n}}$

1.3.3

$\surd$ **<u>Non</u>**, il n'y a pas de monopole magnétique.
$\surd$ Les lignes de champ du champ magnétique sont **<u>fermées</u>**.

1.4 Circulation du champ magnétique

1.4.1 Théorème d'Ampère :

$\surd$ Établissement du théorème d'Ampère :
$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B}(M) = \mu_0 \overrightarrow{j}(M) \Rightarrow \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \overrightarrow{j}(\mathrm{M}).\mathrm{d}\overrightarrow{S} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \overrightarrow{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \overrightarrow{j}(\mathrm{M}).\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ (Stockes) :
$\Rightarrow$

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \overrightarrow{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma(\Gamma)} \overrightarrow{j}(\mathrm{M}).\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mu_0 \mathrm{I}_{\mathrm{enl}_\Gamma}}$$

$\surd$ Cette formule reste valable dans l'ARQS. Mais pas en régime hautement variable.

1.4.2

$\surd$ Établissement du seconde relation de passage :

Théorème d'Ampère pour un contour ABCDA $(AB = CD = dl$ et $BC = DA = h)$: $\oint_{ABCDA} \overrightarrow{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{l} = \mu_0 \mathrm{I}_{\mathrm{enl}}$.
Lorsque $h \to 0$, alors : $\int_{BC} \overrightarrow{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{l} \to 0$, $\int_{DA} \overrightarrow{B}(M).\mathrm{d}\overrightarrow{l} \to 0$ et $M_1 \equiv M_2 \equiv M$; $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = dl\overrightarrow{t}$ où $\overrightarrow{t}$ est un vecteur unitaire tangent à la surface en M, il vient :

$$\boxed{B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 j_s}$$

1.5 Champ et potentiel d'un dipôle magnétique

1.5.1

√ Relation entre potentiel-vecteur et le champ magnétique : $\boxed{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}}$

1.5.2

√ Expression du champ $\overrightarrow{B}$ en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\left|\begin{array}{l}\frac{3rz}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\\ 0\\ \frac{2z^2-r^2}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\end{array}\right.}$$

2 Partie 2 : Chute d'un aimant dans un cylindre métallique

2.1 Courant induit dans le conducteur

√ Expression de $\overrightarrow{A}$ dans le conducteur :

$$\boxed{\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\frac{a}{[a^2+(z-z_A)^2]^{3/2}}\overrightarrow{u}_\theta}$$

√ *Mq* $\overrightarrow{A}$ dépend du temps :

Puisque l'aimant est en chute, alors $z_A = z_A(t)$ d'où $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}(M,t)$.

2.1.1

√ Expression du champ électrique induit $\overrightarrow{E}$: $\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial\overrightarrow{A}(M,t)}{\partial t}$, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{3\mu_0\mathcal{M}a}{4\pi}\frac{z-z_A}{[a^2+(z-z_A)^2]^{\frac{5}{2}}}v\overrightarrow{u}_\theta}$$

2.1.2

√ Expression du courant induit $\overrightarrow{j}$: $\overrightarrow{j} = \sigma\overrightarrow{E}$ (Loi d'Ohm), soit :

$$\boxed{\overrightarrow{j} = -v\frac{3\mu_0\mathcal{M}a\sigma}{4\pi}\frac{z-z_A}{[a^2+(z-z_A)^2]^{\frac{5}{2}}}v\overrightarrow{u}_\theta}$$

2.2 Force exercée sur l'aimant

2.2.1

√ Expression de la force élémentaire : $\mathrm{d}^2\overrightarrow{F}$ exercée sur $\mathrm{d}V = ead\theta dz$:

* La force de LAPLACE (force magnétique) exercé par l'aimant sur le conducteur est : $d^2\overrightarrow{F}' = \overrightarrow{j}\,dV \wedge \overrightarrow{B}$.
*D'après le principe de l'action et de la réaction, la force exercée sur l'aimant est : $d^2\overrightarrow{F} = -\,d^2\overrightarrow{F}'$. Soit :

$$\boxed{d^2\overrightarrow{F} = -\frac{3\mu_0^2\mathcal{M}^2 a\sigma}{(4\pi)^2}dV \left| \begin{array}{l} -\frac{(2(z-z_A)^2-a^2)(z-z_A)}{[(z-z_A)^2+a^2]^5} \\ 0 \\ \frac{3a(z-z_A)^2}{[(z-z_A)^2+a^2]^5} \end{array}\right.}$$

√ Expression de dF_z exercé par un couronne dz :

$$\boxed{dF_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} d^2\overrightarrow{F}.\overrightarrow{u}_z = -v\frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2 a^3\sigma e}{8\pi}\frac{(z-z_A)^2}{[(z-z_A)^2+a^2]^5}dz}$$

2.2.2

√ Détermination de la force de freinage $\overrightarrow{F}$ (selon Oz) exercée sur l'aimant : On a $\overrightarrow{F} = F_z\overrightarrow{u}_z$, avec :

$$F_z = -v\frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2 a^3\sigma e}{8\pi}\int_{z=0}^{L}\frac{(z-z_A)^2}{[(z-z_A)^2+a^2]^5}dz = -\alpha v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2\sigma e}{8\pi a^4}\int_{-\frac{z_A}{a}}^{L}\frac{x^2}{(1+x^2)^5}dx}$$

√ La valeur approchée de α :

On a $\underline{L \gg a}$ et si $\underline{z_A \gg a}$ alors : $\alpha \simeq \frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2\sigma e}{8\pi a^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^5}dx = \frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2\sigma e}{8\pi a^4}I$

$$\boxed{\alpha \simeq \frac{9\mu_0^2\mathcal{M}^2\sigma e}{8\pi a^4}I = \frac{45\mu_0^2\mathcal{M}^2\sigma e}{1024 a^4}}$$

2.2.3

√ Application numérique :

$$\boxed{\alpha = 0,145\,\mathrm{kg.s^{-1}} \simeq 0,15\,\mathrm{kg.s^{-1}}}$$

2.3 Mouvement de chute de l'aimant

2.3.1

√ Écrire l'équation différentielle du mouvement :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dz}{dt} = g} \quad (\tau = \frac{m}{\alpha})$$

√ Expression de la vitesse v :

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \tau g\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

√ Expression de la position $z_A(t)$:

$$\boxed{z_A(t) = g\tau^2\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) + \tau g t}$$

2.3.2

$\surd$ Vitesse limite : Lorsque $t \gg \tau$ on atteint le régime permanent : $v = v_l =$ cte (vitesse limite).

$\surd$ Expression de la vitesse limite :

$$\boxed{v_l = \frac{mg}{\alpha} = g\tau}$$

$\surd$ Expression de la constante du temps :

$$\boxed{\tau = \frac{m}{\alpha}}$$

2.3.3

$\surd$ Applications numériques :

$$\boxed{v_l = 0,13\,\text{m.s}^{-1}} \quad ; \quad \boxed{\tau = 13,3\,\text{ms}} \quad ; \quad \boxed{z_A(\tau) = 0,64\,\text{mm}}$$

$\surd$ *Commentaire* : le temps caractéristique du régime transitoire τ est très faible, on peut négliger la durée de ce régime.

2.3.4

$\surd$ Temps total de chute T de l'aimant : On a $v(t) \simeq v_l$, donc : $\boxed{T = \frac{L}{v_l} = 11,5\,\text{s}}$

$\surd$ Temps de chute libre (dans l'air) T' : $\boxed{T' = \sqrt{\frac{2L}{g}} = 0,55\,\text{s}}$

$\surd$ *Commentaire* : $T' \ll T$, l'amortissement par induction est plus important l'amortissement par les frottements de l'air.

2.3.5

$\surd$ Ce système peut être utilisé comme amortisseur électromagnétique.

$2^{\text{ème}}$ Problème : Étude d'un moteur thermique

1 Partie 1 : Généralités sur les moteurs thermiques

1.1

$\surd$ *Impossibilité d'un moteur monotherme* :

Considérons une machine monotherme (i.e. en contact avec une seule source (T_0). Alors :
- Premier principe : $\Delta U_{cycle} = 0 = W + Q \Rightarrow W = -Q$.
- Deuxième principe : $\Delta S_{cycle} = 0 = \frac{Q}{T_0} + S^c \Rightarrow Q = -T_0 S^c < 0 \Rightarrow W > 0$: c'est donc un récepteur (pas moteur).

1.2

1.2.1

$\surd$ *Sens des transferts thermiques* :
Un moteur :
- reçoit l'énergie thermique de la source chaude (Q_1 est reçue).
- cède l'énergie thermique à la source froide (Q_2 est cédée).

$\surd$ *Signes des énergies thermiques* :
- $Q_1 > 0$ car elle est reçue par le moteur
- $Q_2 < 0$ car elle est cédée par le moteur

1.2.2

$\surd$ *Condition du rendement maximale* : les transformations sont $\boxed{\text{réversibles}}$.

$\surd$ *Définition du rendement* : Le rendement est défini par : $\boxed{\eta = \frac{-W}{Q_1}}$

$\surd$ *L'expression de* $\eta_{\max}$ pour le cycle **réversible** : $\boxed{\eta_{\max} = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$

1.3 Cycle réel

1.3.1

$\surd$ *Expression de l'entropie créée* S_c ($\Delta S_{cycle} = 0$) : $\boxed{S_c = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}}$

1.3.2

$\surd$ *L'expression du rendement* η' pour le cycle réel : $\boxed{\eta' = 1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2}{Q_1} S_c}$

$\surd$ *Commentaire* : Puisque $S_c > 0$ et $Q_1 > 0$, le rendement du cycle réel est inférieur à celui du cycle réversible ($\eta' < \eta_{\max}$).

2 Partie 2 : Moteur à combustion interne

2.1 Cycle réversible

2.1.1

$\surd$ *Calcul du nombre de moles initiales n_A :* $\boxed{n_A = \frac{P_A V_A}{R T_A} = 0,02\,\text{mol.L}^{-1}}$ (GP)

2.1.2

$\surd$ Relation entre T_A et T_B : La transformation "A→Bs" est ad. rév. $\Rightarrow$ $\boxed{T_A V_A^{\gamma-1} = T_{Bs} V_B^{\gamma-1}}$ $(V_B = V_{Bs})$.

$\surd$ Expression de T_{Bs} : $\boxed{T_{Bs} = T_A r^{\gamma-1}}$ $(r = \frac{V_A}{V_B})$

2.1.3

$\surd$ *Valeur de* $r_{\max}$ pour éviter l'autoallumage (ie : $T_{Bs} < T' = 603$ K) : $\boxed{r < \left(\frac{T'}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = r_{\max} = 5,7}$

2.2 Cycle réel :

2.2.1

$\surd$ *Montrer l'égalité ?* :

Les transformations A→Bs et C→Ds sont **adiabatiques réversibles** donc :

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_{Bs} V_{Bs}^{\gamma-1} \quad et \quad T_C V_C^{\gamma-1} = T_{Ds} V_{Ds}^{\gamma-1}$$

puisque : $\underline{V_C = V_B = V_{Bs} \text{ et } V_A = V_D = V_{Ds}}$, en multipliant les deux équations on trouve : $\boxed{T_A T_C = T_{Bs} T_{Ds}}$

2.2.2

$\surd$ *Montrer l'expression de T_B* :
On a :

$$\eta_c = \frac{T_{Bs} - T_A}{T_B - T_A} \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A + \frac{T_{Bs}}{\eta_c} - \frac{T_A}{\eta_c} \quad ; \quad (T_{Bs} = T_A r^{\gamma-1}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_B = T_A \left[1 + \frac{1}{\eta_c}(r^{\gamma-1} - 1)\right]}$$

2.2.3

2.2.3.1

$\surd$ *Expression de Q_{BC} de la transformation isochore B→C :*
Loi de Joule + 1er principe $\Rightarrow n_A C_v (T_C - T_B) = \Delta U = Q_{BC}$; $(W_e = 0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{Q_{BC} = n_A C_v (T_C - T_B)}$

2.2.3.2

$\surd$ *Montrer l'expression de T_C :*
Les fuites thermiques sont négligeables ($Q_e = 0$) donc : $Q_{BC} = \underbrace{Q_e}_{=0} + n\mathcal{P}_{cal}$, d'où : $\boxed{T_C = T_B + \frac{n\mathcal{P}_{cal}}{n_A C_v}}$

2.2.4

$\surd$ *Montrer l'expression de T_D :*
On a : $\eta_d = \frac{T_D - T_C}{T_{Ds} - T_C} \quad \Rightarrow \quad T_D = T_C + \eta_d T_{Ds} - \eta_d T_C$; avec $T_{Ds} = T_C T_A / T_{Bs} = T_C / r^{\gamma-1}$ (d'après **2.1.2** et **2.2.1**).
d'où :

$$\boxed{T_D = T_C \left[1 + \eta_d\left(\frac{1}{r^{\gamma-1}} - 1\right)\right]}$$

2.2.5 Application numérique :

On a : $T_A = 300$ K ; $\gamma = 1{,}4$; $C_v = \frac{R}{\gamma - 1} = 20,7$ J/mol/K ; $\eta_c = \eta_d = 0{,}95$ et $r = 5$. D'où :

$$\boxed{T_B = 585\,\mathrm{K}} \quad ; \quad \boxed{T_C = 1425\,\mathrm{K}} \quad ; \quad \boxed{T_D = 782\,\mathrm{K}}$$

2.2.6

$\surd$ *Calcul de la pression P_C* : On a un GP, donc : $P_C = n_A R T_C / V_C = \frac{n_A R}{V_A} r T_C$; $(V_C = V_A / r) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_C = 23,7\,\mathrm{bar}}$

$\surd$ $P_C < 50$ bar : la contrainte est bien respectée.

2.3 Effet des frottements :

2.3.1

$\surd$ Expression de la *puissance instantanée* des frottements : $\boxed{p(t) = \overrightarrow{f}.\overrightarrow{v} = -\mu v^2}$

2.3.2

$\surd$ *Expression de la vitesse moyenne* : $\boxed{v_m = 4NL}$ (Le cylindre parcourt la distance $4L$ par cycle)

2.3.3

$\surd$ *Expression de la puissance moyenne $\mathcal{P}_f$* des frottements : $\boxed{\mathcal{P}_f = -16\mu(NL)^2}$

2.4 Puissance mécanique utile

2.4.1

2.4.1.1

$\surd$ *Expression de Q_{DA} de la transformation isochore D→A :*

Loi de Joule + 1er principe $\Rightarrow n_A C_v(T_A - T_D) = \Delta U = Q_{DA}$; $(W_e = 0) \Rightarrow \boxed{Q_{DA} = n_A C_v(T_A - T_D)}$

2.4.2

$\surd$ *Expression du travail total W échangé par le fluide aucours d'un cycle :*

Le 1er principe : $\Delta U_{cycle} = 0 = W + Q_{BC} + Q_{DA}$ d'où : $\boxed{W = -n_A C_v(T_C - T_B + T_A - T_D)}$

2.4.3

$\surd$ *Montrer l'expression de la puissance mécanique $\mathcal{P}_m$ du moteur :*

La puissance mécanique du moteur = La puissance recue du fluide $(-NW)$ + la puissance perdue par les frottements, pendant N cycles $\Rightarrow$

$$\mathcal{P}_m = -NW + \mathcal{P}_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_m = N n_A C_v(T_C - T_B + T_A - T_D) - 16\mu(NL)^2}$$

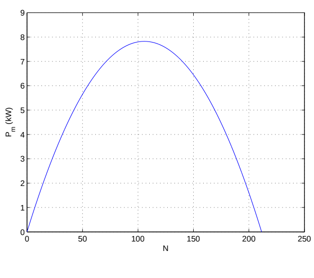
2.4.4

$\surd$ *Définition du rendement thermique η :* $\boxed{\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{NQ_{BC}}}$

$\surd$ *Expression de η :* $\boxed{\eta = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} - 16N\frac{\mu L^2}{n_A C_v(T_C - T_B)}}$

2.5 Effet de N

2.5.1 Allure de $\mathcal{P}_m = 148N - 0.7N^2$



2.5.2

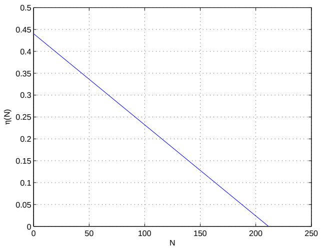
$\surd$ *Expression de $N_{\max} = N_M$:* $\frac{d\mathcal{P}_m}{dN} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N_M = \frac{n_A C_v(T_C - T_B + T_A - T_D)}{32\mu L^2}}$

$\surd$ Application numériques :

$$\boxed{N_M = 105} \quad ; \quad \boxed{\mathcal{P}_m = 7,8\,\mathrm{kW}}$$

2.5.3

$\surd$ Allure de $\eta(N) = 0.44 - 2.10^{-3}N$:



$\surd$ Valeur numérique de $\eta(N_M)$: $\boxed{\eta(N_M) = 0,23}$

$\surd$ *Commentaire* : Le rendement est faible alors que la puissance développée est maximale.