

DNS

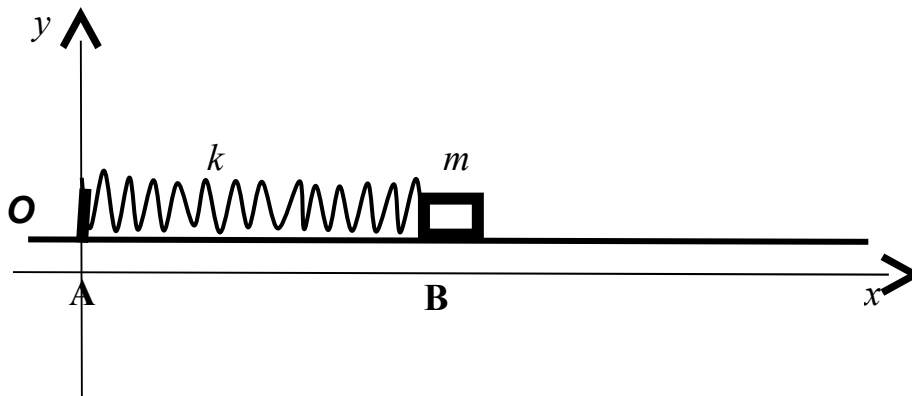
Sujet

Ressort et frottement.....	1
I. Pas de frottements.....	1
II. Frottement fluide.....	2
III. Frottement solide.....	2
A. Plage d'équilibre.....	2
B. Mouvement.....	3

Ressort et frottement

Un mobile ponctuel B de masse m est fixé à l'extrémité d'un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité A est fixée en O dans le référentiel d'étude.

Le point B peut se déplacer sur l'horizontale Ox . Il est repéré par son abscisse x , l'origine de l'axe étant en O . Initialement la masse est au repos et le ressort est non tendu.



L'accélération de la pesanteur vaut g .

I. Pas de frottements

A partir de $t=0$, on soumet le point B à une force constante $\vec{F} = F_0 \vec{u}_x$ et on néglige tout frottement.

1. Quelles sont les quatre forces agissant sur la masse en B ?
2. Écrire, pour le point B , le principe fondamental sous forme vectorielle et projeter sur les deux axes. En déduire l'équation différentielle du mouvement.

3. Résoudre et déterminer $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
4. Comment retrouver l'expression de la position d'équilibre B_{eq} de B à partir de l'expression obtenue pour $x(t)$? On notera cette abscisse x_{eq} .

II. Frottement fluide

Le point B est soumis à la force constante $\vec{F} = F_0 \vec{u}_x$ depuis $t=0$ et on prend en compte une force de frottement fluide agissant sur B : $\vec{F}' = -\alpha \vec{v}$ (avec \vec{v} : vitesse de B).

5. Écrire l'équation différentielle en introduisant les grandeurs canoniques Q (coefficient de qualité) et ω_0 (pulsation propre).
6. En supposant $Q > 1/2$, déterminer $x(t)$ (on définira Ω : pseudopulsation)

III. Frottement solide

Le point B est soumis à la force constante $\vec{F} = F_0 \vec{u}_x$ et on prend en compte uniquement les forces de frottement solide (de coefficient de frottement f - f désigne une constante -) qui apparaissent lors du mouvement d'un solide sur un autre solide.

Ces forces obéissent aux lois de Coulomb du frottement solide :

On pose pour la réaction : $\vec{R} = R_x \vec{u}_x + R_y \vec{u}_y$

- si le corps glisse, la réaction est inclinée en sens contraire du mouvement et

$$\left| \frac{R_x}{R_y} \right| = f$$

- si le corps ne glisse pas, alors $\left| \frac{R_x}{R_y} \right| < f$ (inégalité à prendre au sens large)

C'est $R_x \vec{u}_x$ qui traduit l'existence de frottement solide puisque elle s'oppose au glissement et que l'on pourrait appeler composante de frottement.

A. Plage d'équilibre

Il faudra alors remplacer la notion de position d'équilibre B_{eq} (retrouvée plus haut) par la notion de «plage d'équilibre» autour de B_{eq} .

On admet pour l'instant l'existence de cette plage d'équilibre.

On suppose le mobile soumis à \vec{F} à l'équilibre en B_{eq} d'abscisse x_{eq} . On déplace B en x de telle sorte que la masse soit encore dans la plage d'équilibre et reste donc immobile dans cette nouvelle position quand on libère la masse B sans lui communiquer de vitesse.

7. Appliquer le principe fondamental à la masse placée dans la nouvelle position et projeter sur les deux axes afin d'exprimer R_x et R_y .
8. En déduire en utilisant la loi de Coulomb une inégalité entre $|x - x_{eq}|$, f , m , g , k .

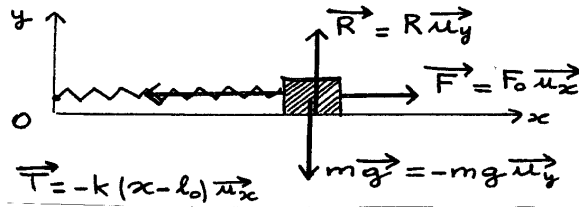
9. L'étendue de cette plage d'équilibre est notée $2X$. Donner l'expression de X (grandeur positive).
10. Justifier qualitativement l'existence de cette plage d'équilibre (c'est-à-dire montrer qualitativement que le mobile qui s'arrête dans cette plage ne repart pas).

B. Mouvement

- A partir de $t=0$, le point B est soumis à la force constante $\vec{F} = F_0 \vec{u}_x$ avec: $F_0 = n f m g$, n nombre positif. On suppose que le mobile se met alors à glisser vers B_{eq} .
11. Écrire x_{eq} en fonction de ℓ_0 , n , X ? A quelle condition sur n le mobile se met-il à bouger?
12. Appliquer le principe fondamental et écrire l'égalité issue des lois de Coulomb. En déduire l'équation différentielle vérifiée par x en fonction de ω_0 , X , n , ℓ_0 , valable pour la première phase du mouvement.
13. Préciser l'instant et la position du mobile quand sa vitesse s'annule pour la première fois. Que vaut alors $|x - x_{eq}|$?
14. On suppose que le mouvement se poursuit. Écrire la nouvelle équation différentielle vérifiée par x pour cette deuxième phase du mouvement et résoudre pour obtenir la position quand la vitesse s'annule pour la deuxième fois. Que vaut alors $|x - x_{eq}|$?
15. A.N. $n = 7,5$
- Tracer avec soin la courbe donnant la position en fonction du temps jusqu'à l'arrêt. Préciser les coordonnées des extremums.
 - Préciser les coordonnées pour l'arrêt du mouvement.
-

Réponses

1)



Les quatre forces agissant sur la masse en B (voir figure)

2)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vec{T} & + & \vec{R} & + & \vec{F} & + & m\vec{g} & = & m\vec{a} \\
 /0x & -k(x-l_0) & & & +F_0 & & & = & m\ddot{x} \\
 /0y & & R & & & & -mg & = & 0
 \end{array}$$

Equation du mouvement

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = F_0 + \frac{k}{m} l_0$$

3)

$$\text{on pose } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{donc } x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \left(\frac{F_0}{k} + l_0\right)$$

C.I. en $t=0$

$$x_{t=0} = l_0 = A + \left(\frac{F_0}{k} + l_0\right)$$

$$\dot{x}_{t=0} = 0 = B\omega_0$$

$$x = \frac{F_0}{k} (1 - \cos(\omega_0 t)) + l_0$$

4)

$$\text{A l'équilibre } \ddot{x} = 0$$

(par contre repos signifie $\dot{x} = 0$)

$$\ddot{x} = \omega_0^2 \frac{F_0}{k} \cos(\omega_0 t)$$

nul si $\cos(\omega_0 t) = 0$ donc

$$x_{eq} = \frac{F_0}{k} + l_0$$

→ On remarque que la masse oscille autour de x_{eq}

$$x_{MAX} = x_{eq} + \frac{F_0}{k} = \frac{2F_0}{k} + l_0$$

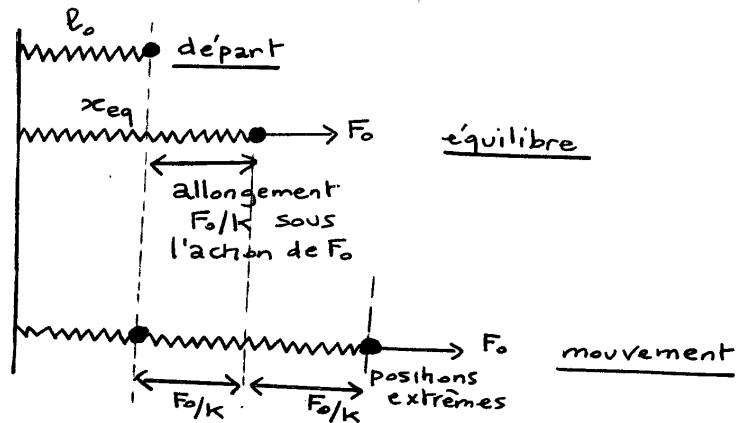
$$x_{MIN} = x_{eq} - \frac{F_0}{k} = l_0$$

→ On remarque que l'on retrouve la relation

d'équilibre connue :

$$F_0 = k(l_{eq} - l_0)$$

$\downarrow x_c$



5) L'équation différentielle devient :

$$-k(x - l_0) + F_0 - \alpha \dot{x} = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{\frac{\omega_0}{Q}} \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = \underbrace{\frac{F_0 + k l_0}{m}}_{\omega_0^2 x_{eq}}$$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

6) L'équation caractéristique est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \quad \text{négatif ici}$$

ici on a $Q > 1/2$ donc des oscillations.

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

avec $\boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

finalement :

$$x = e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) + x_{eq}$$

$$\text{et } \ddot{x} = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(-\frac{\omega_0}{2Q} \right) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \\ + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (-A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t)$$

C.I. en $t=0$

$$x_{t=0} = l_0 = A + x_{eq}$$

$$\text{donc } A = -\frac{F_0}{K}$$

$$\dot{x}_{t=0} = 0 = -\frac{\omega_0}{2Q} A + B \omega$$

$$B = -\frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

$$x = -\frac{F_0}{K} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(\cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \sin \omega t \right) + x_{eq}$$

remarque

On peut vouloir écrire le résultat sous l'autre forme:

$$\rightarrow \cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \sin \omega t$$

on veut

$$\rightarrow C \cos(\omega t - \varphi)$$

par identification:

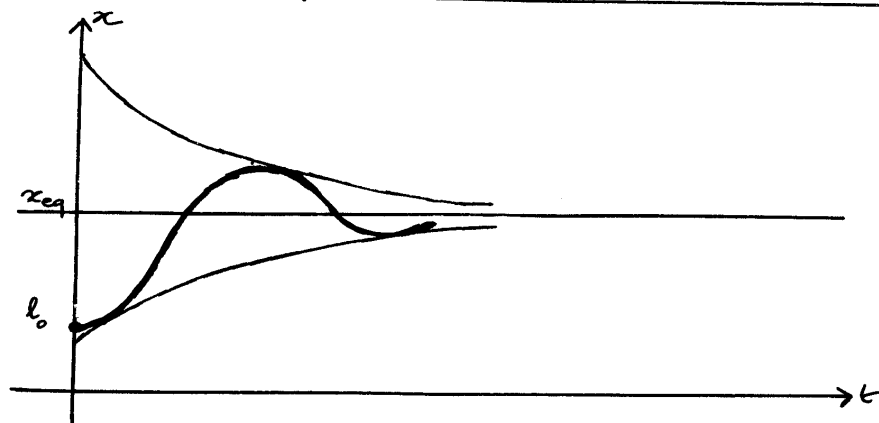
$$C \cos \varphi \cos \omega t + C \sin \varphi \sin \omega t$$

$$\text{donc } \left. \begin{aligned} C \cos \varphi &= 1 \\ C \sin \varphi &= \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \end{aligned} \right\}$$

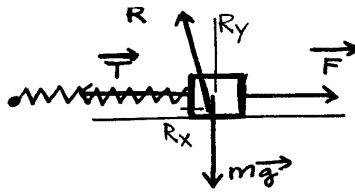
je choisis $C > 0$ donc φ tel que $\begin{cases} \cos \varphi > 0 \\ \sin \varphi > 0 \end{cases}$

$$\text{finalement } \begin{aligned} C &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \\ \varphi &= \arctan \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \end{aligned}$$

$$x = -\frac{F_0}{K} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos \left(\omega t - \arctan \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \right) + x_{eq}$$



7)



La masse est dans la plage d'équilibre (donc \vec{a} est nul)
 La vitesse initiale étant nulle, \vec{v} reste nul.

$$\begin{array}{l} \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} + m\vec{g} = \vec{0} \\ \text{/Ox} \quad R_x - k(x - l_0) + F_0 = 0 \\ \text{/Oy} \quad R_y - mg = 0 \end{array}$$

soit

$R_x - k(x - x_{eq})$	$= 0$
$R_y - mg$	$= 0$

8) En l'absence de glissement

$$\left| \frac{R_x}{R_y} \right| \leq f$$

$$\frac{k|x - x_{eq}|}{mg} \leq f$$

$ x - x_{eq} \leq \frac{fmg}{k}$	si $x \in$ plage d'équilibre
-----------------------------------	------------------------------

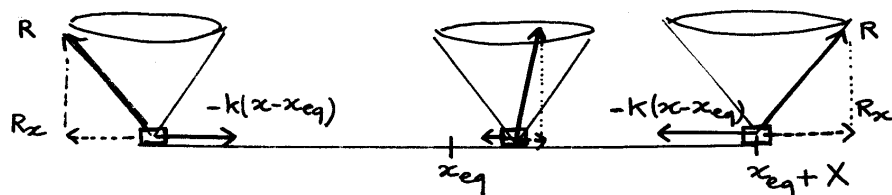
9) on pose

$X = \frac{fmg}{k}$

pour la plage d'équilibre, on a :

$x_{eq} - X \leq x \leq x_{eq} + X$

10) \rightarrow Dans la plage d'équilibre, on a la force : $-k(x - x_{eq})$
 et la force de frottement : R_x qui s'équilibrent à l'arrêt.

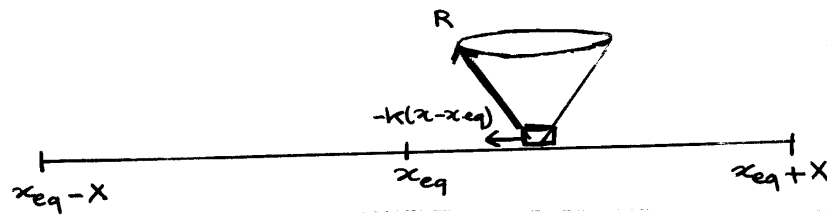


→ On suppose ici que le mobile repart alors qu'il s'était arrêté dans la plage d'équilibre.

Il repart vers sa position d'équilibre x_e avec une accélération \ddot{x}

On représente la réaction (désormais sur le cône de frottement) juste après le démarrage.

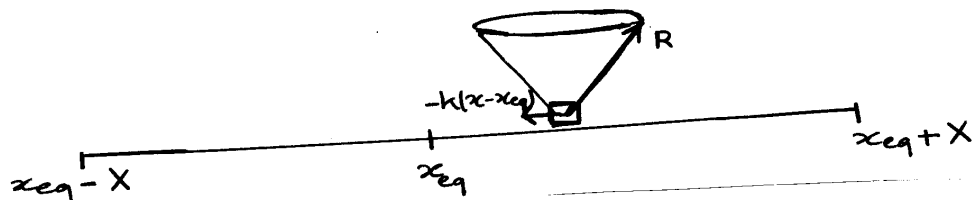
première possibilité : $R_x < 0$



Cette solution ne convient pas car $\vec{R} \cdot \vec{v} > 0$

or les frottements doivent s'opposer au mouvement ici.

deuxième possibilité : $R_x > 0$



Cette solution ne convient pas : on aurait $v > 0$

(le point repart pour fuir la position d'équilibre !)

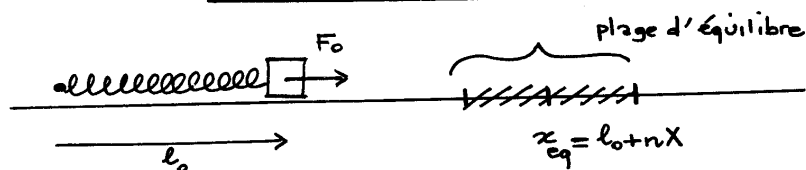
(remarquer : problème aussi car $\vec{R} \cdot \vec{v} > 0$)

Donc, dans la plage, si \vec{v} est nul il le reste.

11)

$$x_{eq} = \frac{F_0}{k} + l_0$$

$$x_{eq} = nX + l_0$$



Le mobile se met à bouger si sa position de départ ne se trouve pas dans la plage d'équilibre

Ici, il faut
$$l_0 \leq x_{eq} - X$$

$$\leq (n-1)X + l_0$$

donc

$$n \geq 1$$

12) Pendant la première phase, la vitesse est positive donc $R_x < 0$

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a} \\ \text{/ox} \quad -k(x - x_{eq}) + R_x = m\ddot{x} \\ \text{/oy} \quad \downarrow \\ \quad nX + l_0 \quad R_y - mg = 0 \end{array}$$

et $\left| \frac{R_x}{R_y} \right| = f$ avec $R_x < 0$

$$\begin{aligned} R_x &= -fmg \\ &= -kX \end{aligned}$$

finalement

$$-k(x - l_0) + kX(n-1) = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - l_0) = \omega_0^2(n-1)X$$

13) On résout :

$$\begin{aligned} (x - l_0) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + (n-1)X \\ \text{C.I. } x - l_0 &= 0 = A + (n-1)X \\ \dot{x} &= 0 = B\omega_0 \end{aligned}$$

$$(x - l_0) = (n-1)X (1 - \cos \omega_0 t)$$

$$\dot{x} = (n-1)X \omega_0 \sin \omega_0 t$$

La vitesse s'annule en $t_1 = T/2$ avec $T = 2\pi/\omega_0$ en x_1 avec $(x_1 - l_0) = 2(n-1)X$

$$x_1 - x_{eq} = (n-2)X$$

