LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

On notera indifféremment P pour désigner un polynôme ou la fonction polynomiale associée

Partie I: Polynômes et nombres de Bernoulli

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que:

$$Q' = P \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. On peut donc définir une unique suite de polynômes $(B_p)_p$ déterminée par $B_0 = 1$ et telle que pour $p \geqslant 1$

$$B'_p = pB_{p-1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 B_p(t)dt = 0.$$

Les B_p s'appellent les polynômes de Bernoulli.
On pose $\beta_p = B_p(0)$. La suite de réels $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la suite des nombres de Bernoulli.

   (a) Calculer B_1, B_2 et B_3, ainsi que les nombres β_1, β_2 et β_3.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le degré de B_n?

   (c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$

   (d) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que : $B_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \beta_{n-k} X^k$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrer que $C_n = B_n$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_{2n+1} = 0 = B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$

4. (a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que le polynôme B_{2n+1} ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

   (b) En déduire que les polynômes $B_{2n} - \beta_{2n}$ sont de signes constants sur $[0, 1]$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 2$. Montrer que: $\beta_{2n} = \dfrac{-1}{(n+1)(2n+1)} \sum_{k=0}^{2n-2} C_{2n+2}^k \beta_k$

6. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a: $B_n(x) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$

   (b) En déduire une relation entre $B_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ et β_{2n}.

   (c) Montrer que $\max_{t\in[0,1]} |B_{2n}(t)| = |\beta_{2n}|$

7. Montrer, par récurrence, que $\forall n \geqslant 1$: $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$

8. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^p = \dfrac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - \beta_{p+1}\right)$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \geqslant 3$. Montrer la formule de Faulhaber

$$p\sum_{k=1}^{n} k^{p-1} = n^p + \frac{p}{2}n^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-2} C_p^k \beta_{p-k} n^k$$

Les polynômes de Bernoulli

Partie II: Fonction Zéta de Riemann et nombres de Bernoulli

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $t \in]0,1[$: $1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi t) = \dfrac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\varphi_n : t \longmapsto \dfrac{B_n(t) - \beta_n}{\sin(\pi t)}$ sur $]0,1[$.
Montrer que φ_n est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

12. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

13. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t$
    (a) Trouver une relation entre $I_{n+2,k}$ et $I_{n,k}$
    (b) En déduire, selon la parité de n, l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k

14. Soit $n, N \in \mathbb{N}^*$. On pose $J_{n,N} = \displaystyle\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,\mathrm{d}t$
    (a) En utilisant la question 10, trouver une expression de $J_{n,N}$ en fonction de n, N et β_{2n}
    (b) En déduire la valeur de $\zeta(2n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$ en fonction de n et β_{2n}
    (c) En dénduire les valeurs de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$

15. Montrer que $\zeta(2n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et en déduire $\beta_{2n} \sim 2(-1)^{n+1}\dfrac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$

Partie III: Formule d'Euler-MacLaurin

16. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[n, n+1]$, $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, on pose
$$T_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_n^{n+1} f^{(k)}(t)B_k(t-n)\,\mathrm{d}t \text{ où } f^{(k)} \text{ désigne la dérivée } k\text{-ième de } f$$
    (a) Exprimer T_0 en fonction de T_1, puis, pour tout entier $k \geqslant 1$, T_k en fonction T_{k+1}
    (b) En déduire que: $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(n+1)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{p} \frac{(-1)^{k-1}\beta_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(n+1) - f^{(k-1)}(n)\right) - T_p$

17. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^{2p}([a,b], \mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer la formule d'Euler-Maclaurin:
$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) - R_p$$
avec $R_p = \dfrac{1}{(2p)!}\displaystyle\int_a^b f^{(2p)}(t)B_{2p}(t - \mathrm{E}(t))\,\mathrm{d}t$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x

Partie IV: Application

18. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z \neq 1$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité: $\dfrac{z}{2}.\dfrac{e^z+1}{e^z-1} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_{2k}}{(2k)!}z^{2k} - \frac{z^{2n+1}}{e^z-1}\int_0^1 \frac{B_{2n}(t)}{(2n)!}e^{tz}\,\mathrm{d}t$

19. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 2\pi$. Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_{2k}}{(2k)!}z^{2k} = \frac{z}{2}.\frac{e^z+1}{e^z-1} - 1$