TD n°9
Équations de Maxwell

Formulaire :
Expressions de la divergence et du rotationel en coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_r}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (ra_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

On rappelle également la relation : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

Exercice 1 : Une solution des équations de Maxwell

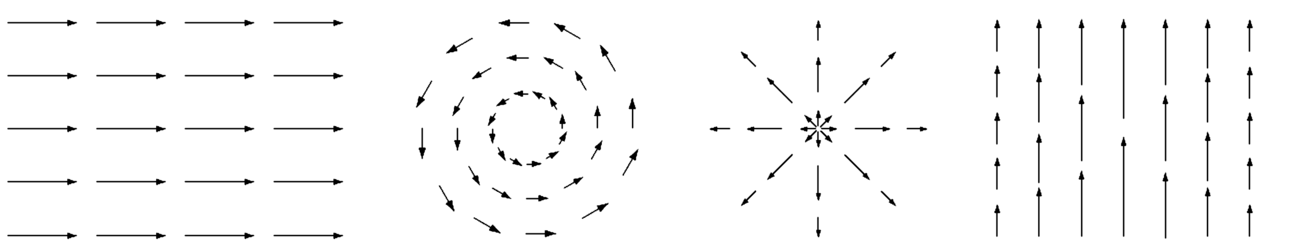
On suppose que le champ électromagnétique régnant dans une partie de l'espace vide de charges et de courants est donné par :

$$\vec{E}(M,t) = f(z)e^{-\alpha t}\vec{u_x} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M,t) = g(z)e^{-\alpha t}\vec{u_y}$$

1. Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux sont-elles vérifiées ?
2. Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une expression de $g(z)$ en fonction de $f'(z)$.
3. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une expression de $f(z)$ en fonction de $g'(z)$.
4. En déduire $f(z)$ si cette fonction est paire. On choisira $\vec{E}(0,0) = E_0\vec{u_x}$.
5. Donner l'expression du champ électromagnétique.

Exercice 2 : Lignes de champ

Les figures ci-dessous représentent, dans un plan $z = cste$, quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme $\vec{a} = a_\alpha(\beta)\vec{u_\alpha}$ où α et β sont deux coordonnées (éventuellement identiques) du repère d'espace adapté à la situation.



(a) (b) (c) (d)

Dans chaque cas, préciser l'expression du champ, donner le signe de sa divergence ainsi que la direction et le sens de son rotationel.

Exercice 3 : Effet Meissner dans un supraconducteur

Les matériaux supraconducteurs voient leur conductivité électrique devenir infinie en dessous d'une certaine température. Dans ce cas, on constate que les lignes du champ magnétique ne peuvent plus entrer dans le matériau mais doivent le contourner : c'est l'effet Meissner. Pour expliquer ce phénomène, les frères London ont ajouté aux équations de Maxwell la relation entre le vecteur densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ et le champ magnétique à l'intérieur de la plaque :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{j}) = -\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\vec{B}$$

où λ est une constante positive, caractéristique du matériau.

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite en tout point intérieur du matériau par le champ magnétique.

On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur $2d$ dans la direction $\overrightarrow{u_z}$ et d'extension infinie dans les deux autres directions. L'origine de l'axe z est prise au milieu de l'épaisseur de la plaque de sorte que les faces inférieure et supérieure aient pour équation respectivement $z = -d$ et $z = +d$. La plaque est plongée dans un champ magnétique statique et uniforme : $\vec{B}_0 = B_0\vec{u_x}$.

2. Déterminer le champ magnétique à l'intérieur de la plaque en supposant que $\vec{B}(-d) = \vec{B}(d) = \vec{B}_0$.
Astuce : L'équation de Maxwell-flux permet ici d'avoir une information sur la forme du champ.

3. En déduire le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ à l'intérieur de la plaque.

Un modèle microscopique donne :

$$\lambda^2 = \frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2}$$

avec :

$\mu_0 = 4\pi 1 \times 10^{-7}\,\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide,

$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ la masse d'un électron,

$e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$ la charge élémentaire,

n_s la densité volumique d'électrons supraconducteurs,

4. Calculer λ en prenant $n_s = 1{,}0 \times 10^{29}\,\text{m}^{-3}$.

5. Tracer les graphes des composantes non nulles de $\vec{B}$ et $\vec{j}$ en fonction de z. Donner un sens concret à λ.

6. Calculer l'épaisseur minimale $2d_m$ de la plaque pour que le champ en son milieu soit inférieur à $B_0/100$.

7. Pour $d \gg \lambda$, à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à un centième de sa valeur à la surface ?

Exercice 4 : Potentiel électrique autour d'une particule colloïdale

Une solution colloïdale est une suspension de particules de dimensions de l'ordre de 1×10^{-6} m à 1×10^{-8} m dans de l'eau. Cette taille est faible à l'échelle macroscopique, mais grande à l'échelle moléculaire. En dehors des particules colloïdales, la solution contient des ions de charge $\pm e$, considérés comme ponctuels.

On considère une particule colloïdale sphérique, de centre O, de rayon R, et portant une charge Q. Le potentiel électrostatique autour de cette particule ne dépend que de $r = OM$. Dans ce cas, $V(M) = V(r)$, donc le laplacien de V s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(rV(r))}{\mathrm{d}r^2}$$

D'autre part, la densité numérique N_+ des cations et la densité numérique N_- des anions suivent la loi de Boltzmann et s'écrivent :

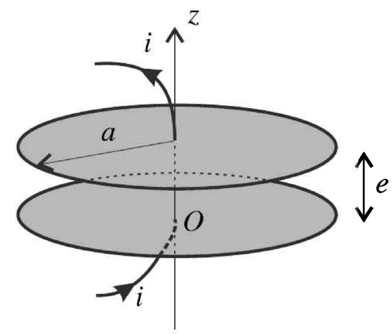
$$N_+(r) = N_0 \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_BT}\right) \quad \text{et} \quad N_-(r) = N_0 \exp\left(\frac{eV(r)}{k_BT}\right)$$

où N_0 est une constante, k_B la constante de Boltzmann, et T la température absolue.

1. Exprimer la densité volumique de charges $\rho(r)$ en fonction de $V(r)$. Simplifier cette expression en supposant que $|eV(r)| \ll k_BT$. On conservera cette approximation dans la suite.
2. Soit la fonction $U(r) = rV(r)$. Quelle équation différentielle vérifie cette fonction ? Montrer alors que :
$$V(r) = \frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$$
où A est une constante encore indéterminée, et λ une longueur caractéristique à exprimer en fonction des données.
3. En déduire l'expression du champ électrostatique autour de la particule colloïdale.
4. Déterminer la constante A en appliquant le théorème de Gauss à une surface bien choisie.
5. Quelle est la charge $Q_{tot}(r)$ contenue dans la sphère de rayon r et de centre O ? Déterminer sa limite quand $r \to +\infty$. Commenter.
6. Pourquoi dit-on que l'interaction électrostatique entre particules colloïdales est "écrantée" par les ions ?
7. La stabilité de la solution colloïdale est assurée par la répulsion électrostatique entre les particules colloïdales, sans laquelle les particules s'attireraient mutuellement et précipiteraient au fond du récipient (floculation). Expliquer qualitativement pourquoi l'ajout de sel dans la solution peut provoquer la floculation.

Exercice 5 : Bilan d'énergie dans un condensateur

Un condensateur plan est constitué par deux disques conducteurs de rayon a, distants de $e \ll a$ et d'axe (Oz). Il est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.



1. Exprimer la charge $q(t)$ portée par l'armature inférieure du condensateur en admettant que sa moyenne temporelle est nulle.

2. En déduire la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur (en convention récepteur par rapport au courant qui le traverse).

3. Donner l'expression du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du condensateur, en supposant qu'il est identique à celui d'un condensateur plan sans effets de bords en remplacant les grandeurs constantes par leur expressions dépendantes du temps.

4. Montrer alors qu'il existe un champ magnétique non nul à l'intérieur du condensateur. Donner la forme de ce champ par analyse des invariances et symétries.

5. Calculer ce champ en appliquant le théorème d'Ampère généralisé à un cercle quelconque d'axe (Oz).

6. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

On appelle $\mathcal{S}$ la surface délimitant le condensateur (cylindre de rayon a et de hauteur e).

7. Calculer le flux Φ_Π du vecteur de Poynting sortant de $\mathcal{S}$. Quel commentaire peut-on faire ?

8. D'après ce qui précède, montrer que le champ magnétique à l'intérieur du condensateur entraine la production d'un autre champ électrique. À quelle condition sur les paramètres a, ω et c, ce second champ électrique peut-il être négligé par rapport au premier ?

9. Déterminer la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} en $r = a$ dans le condensateur puis exprimer, toujours en $r = a$, le rapport η des valeurs moyennes des contributions magnétique et électrique en fonction de a, ω et c. Commenter d'après la question précédente.