DM N°1 (pour le 12/09/2015)

Le but de ce problème est de mettre en évidence, dans un cas particulier, une méthode de calcul approché de la plus grande racine positive d'une équation algébrique, ainsi que d'estimer la qualité de cette approximation.

PARTIE I

On considère l'équation :

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$$

1. Montrer qu'elle admet 3 racines réelles distinctes vérifiant :

$$-2 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2.$$

2. Justifier la relation : $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, puis en déduire les inégalités : $|x_2| < |x_1| < |x_3|$.

3. On considère l'ensemble E des suites réelles vérifiant, pour tout n entier naturel, la relation :

$$u_{n+3} - u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

3.a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

3.b. Soit ϕ l'application de E dans $\mathbb{R}^3$ qui à un élément u de E associe (u_0, u_1, u_2). Montrer que ϕ est un isomorphisme et en déduire que E est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.

3.c. Montrer que les suites de termes généraux respectifs x_1^n, x_2^n et x_3^n sont des éléments de E.

4. On considère le système (S) :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1 \end{cases}$$

4.a. Montrer qu'il admet une solution unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et déterminer λ_3.
Vérifier en particulier qu'il est non nul.

4.b. Expliciter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3).

5.a. Justifier l'existence d'une unique suite a élément de E telle que :

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1.$$

5.b. Montrer que la suite a est croissante et que, pour tout n supérieur ou égal à 2, a_n est strictement positif.

5.c. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que , pour tout n entier naturel, on ait :

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_3 x_3^n.$$

5.d. On pose, pour $n \geqslant 2$:

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Montrer que la suite b ainsi définie converge vers x_3.

6. Écrire une procédure en Python permettant de calculer a_n et b_n lorsque n varie entre 2 et 100.

PARTIE II

Dans cette partie, on se propose d'estimer la rapidité de convergence de la suite b et de l'accélérer.

A. Une première estimation de la rapidité de convergence

On pose, pour tout n entier naturel :

$$\varepsilon_n = b_n - x_3.$$

1. Justifier, lorsque n tend vers l'infini :

$$\varepsilon_n \sim (x_1 - x_3)\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n.$$

2. En déduire l'existence d'une constante K tels que, pour tout n entier naturel on ait :

$$|b_n - x_3| \leqslant K \times \left|\frac{x_1}{x_3}\right|^n.$$

B. Utilisation des suites dominantes.

On rappelle que si u_n et v_n sont les termes respectifs d'ordre n de deux suites réelles u et v, on dit que "v domine u" s'il existe un indice p et une constante M tels que, pour tout $n \geqslant p$:

$$|u_n| \leqslant M|v_n|.$$

On notera : $u_n = O(v_n)$.

1. Montrer que l'on peut écrire :

$$\varepsilon_n = \frac{\left(\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n(x_1 - x_3)\right] + \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^n(x_2 - x_3)\right]\right)}{1 + \alpha_n},$$

où α_n est le terme général d'une suite qui converge vers 0 et que l'on précisera.

2. On pose :

$$\beta = \max\left\{\left|\frac{x_2}{x_3}\right|, \left|\frac{x_2 x_1}{x_3^2}\right|, \left|\frac{x_1}{x_3}\right|^2\right\}.$$

Vérifier l'inégalité :

$$\beta < \left|\frac{x_1}{x_3}\right|.$$

Montrer que l'on peut écrire :

$$(1)\;\; b_n = x_3 + \left[\gamma\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n\right] + O(\beta^n)$$

où on a posé :

$$\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}(x_1 - x_3).$$

C. Accélération de la convergence

Dans cette partie, on se propose d'utiliser la relation (1) pour trouver une suite qui converge vers x_3 plus rapidement que b.

1. On pose, pour $n \geqslant 3$:

$$c_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n - b_{n-1}}.$$

Après avoir formé : $c_n - \dfrac{x_1}{x_3}$, justifier :

$$(2)\;\; c_n = \frac{x_1}{x_3} + O\left[\left(\frac{\beta x_3}{x_1}\right)^n\right].$$

2. On définit la suite u par son terme général, pour $n \geqslant 3$:

$$u_n = \frac{b_{n+1} - c_n b_n}{1 - c_n}.$$

Montrer que l'on a :

$$(3)\;\; u_n = x_3 + O(\beta^n).$$

On pourra pour cela considérer la quantité : $u_n - x_3$

3. En quoi peut-on dire que "la convergence de la suite a été accélérée" ?

4. Écrire une procédure en Python permettant de calculer u_n.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆