Induction électromagnétique

Table des matières

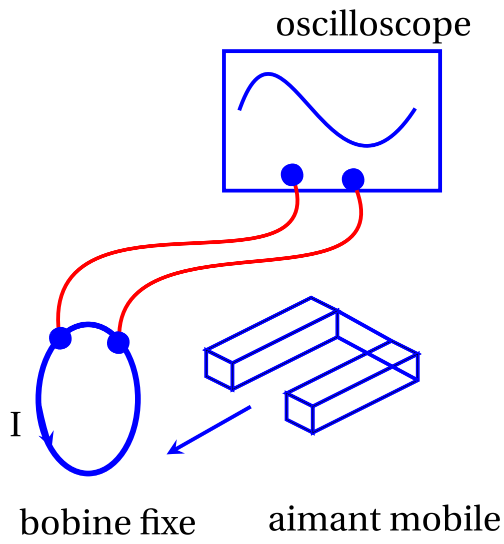
1 Phénomène d'induction

1.1 Mise en évidence du phénomène d'induction

► Expérience n° 1 : circuit fixe dans un champ magnétique variable

Considérons le montage suivant : une bobine,se trouvant dans un champ magnétique crée par l'aimant, reliée à l'oscilloscope

- l'aimant crée un champ magnétique permanent
- l'aimant est en mouvement : le champ magnétique est variable
- la bobine est fixe

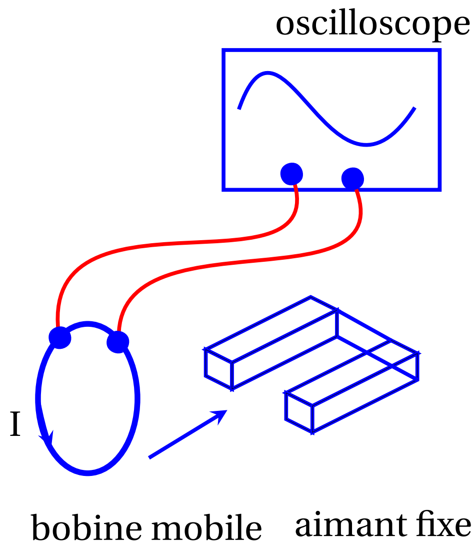


- lorsque l'aimant est immobile la tension u à l'oscilloscope devient nulle : $u = 0$
- u est positive lorsque l'aimant s'approche à la bobine,alors elle est négative lorsqu'il s'éloigne
- l'amplitude de u varie avec la vitesse de déplacement imposé à l'aimant
- la bobine se comporte comme un générateur électrocinétique,on dit qu'elle est siège du phénomène d'induction

•Conclusion : Lorsqu'un circuit fixe est soumis à un champ magnétique variable,il est siège d'u phénomène d'induction .Il s'agit de l'induction de Neumann

► Expérience n°2 : Circuit mobile dans un champ magnétique permanent

- la bibine est mobile
- l'aimant est fixe
- le champ magnétique est permanent



- si la bobine est immobile ,la tension sur l'oscilloscope $u = 0$
- si la bobine est mobile,on observe sur l'oscilloscope une tension $u \neq 0$
- la bobine se comporte comme un générateur électrocinétique,donc elle est siège du phénomène d'induction

• Conclusion : Lorsqu'un circuit se déplace dans un champ magnétique permanent ,il est siège d'un phénomène d'induction. Il s'agit de l'induction de Lorentz.

1.2 Lois de l'induction

1.2.1 Loi de Lenz

•Enoncé : Les effets magnétiques,électrocinétiques et mécaniques de l'induction sont orientés de façon à s'opposer à ses causes.

1.2.2 Loi de Faraday

•Enoncé : La $f.e.m$ induite dans un circuit fermé est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux du champ magnétique qui le traverse.

$$e_m = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

1.3 Circuit fixe dans un champ magnétique variable : induction de Neumann

- les variations temporelles du champ magnétique induisent une composante du champ électrique qui se traduit par l'équation de Maxwell-Faraday
  - $e_m(t) = \oint_{(C)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl}$
  - $\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{d}{dt}\iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = \iint_{(S)} \dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\overrightarrow{dS}$
  - $e_m = -\dfrac{d\phi}{dt}$ donc $\oint_{(C)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = -\iint_{\Sigma} \dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}}$$

- Pour un circuit filiforme de contour (C),soumis un champ magnétique variable,le flux de $\overrightarrow{B}(t)$ à travers une surface Σ s'appuyant sur un contour (C) est donné par :

$$\phi(t) = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = \oint_{(C)} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dl}$$

- la force électromotrice induite est donnée par

$$e_m = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\oint_{(C)} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{dl} = \oint_{(C)} -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}.\overrightarrow{dl}$$

- On définit le champ électromoteur de Neumann par

$$\boxed{\overrightarrow{E}_m = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}}$$

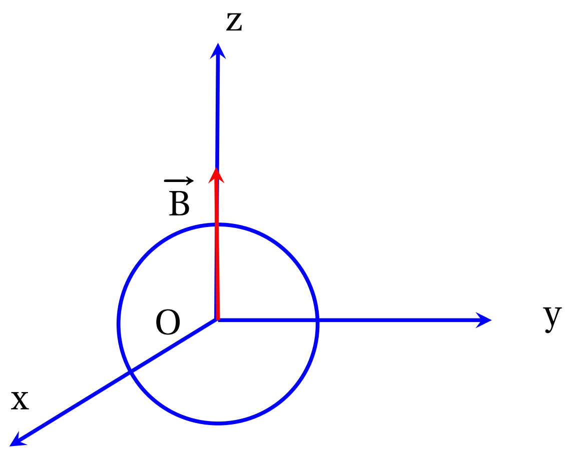
- la force électromotrice est donnée par

$$\boxed{e_m = \oint_{(C)} \overrightarrow{E}_m.\overrightarrow{dl}}$$

•Exemple : spire dans un champ magnétique sinusoïdal

Considérons une spire circulaire de rayon R,placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan de la spire et variant sinusoïdalement au cours du temps :

$$\vec{B}(t) = B_m \cos(\omega t)\vec{e}_z$$



- le flux de $\vec{B}$: $\phi(t) = \iint_{(S)} \vec{B}.\vec{dS} = B_m \pi R^2 \cos(\omega t)$
- la f.e.m : $e(t) = -\dfrac{d\phi(t)}{dt} = B_m \pi R^2 \omega \sin(\omega t)$

1.4 Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent

Considérons un circuit (C) mobile dans un champ magnétique permanent $\vec{B}$.Soit $\mathscr{R}$ un référentiel absolu et $\mathscr{R}'$ un référentiel lié au circuit (C)

► Champ électromoteur de Lorentz

- la vitesse des charges de conduction : $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$
  avec $\vec{v}_e$: vitesse d'entraînement ou vitesse du circuit
  et $\vec{v}_r$: vitesse relative
- la force de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}_r \wedge \vec{B})$
- $\vec{E}$: le champ électrique défini dans le référentiel $\mathscr{R}$
- $\vec{v}_r \wedge \vec{B}$: grandeur homogène à un champ électrique,responsable de l'effet Hall
- $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$:grandeur homogène à un champ électrique,provoquant le mouvement des charges du circuit,on l'appelle Champ électromoteur $\vec{E}_m$

$$\boxed{\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}}$$

• Conclusion : Lors du déplacement d'un conducteur (circuit) dans un champ magnétique permanent,les charges de conduction sont mises en mouvement par une force

$$q\vec{E}_m = q\vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

- $\vec{v}_e$: vitesse de déplacement d'un conducteur dans $\mathscr{R}$
- $\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$: champ électromagnétique de Lorentz

► Force électromotrice

- le déplacement d'un circuit dans un champ magnétique permanent $\vec{B}$ joue le rôle d'un générateur électrique de force électromotrice e_m
- la puissance de la force électromotrice de Lorentz $(e_m.i)$ est compensée par celle des actions de Laplace exercée sur le circuit

$$\boxed{\mathscr{P}_L + e_m.i = 0}$$

- Considérons un élément AB de circuit se déplace dans un champ magnétique permanent
$\mathscr{P}_L = \int_A^B i(\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B})\overrightarrow{v}_e = -i\int_A^B (\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{dl} = -i\int_A^B \overrightarrow{E}_m.\overrightarrow{dl}$
- $\mathscr{P}_L = -e_m.i$

$$\boxed{e_m = \int_A^B \overrightarrow{E}_m.\overrightarrow{dl} = \int_A^B (\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{dl}}$$

- la force électromotrice du circuit (C) est donnée par

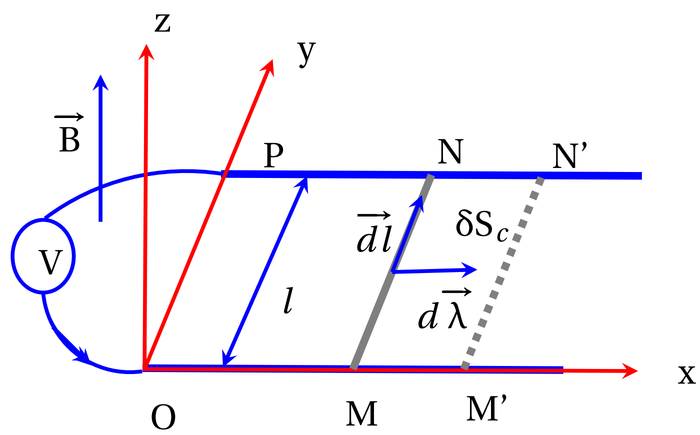
$$\boxed{e_m = \oint_{(C)} \overrightarrow{E}_m.\overrightarrow{dl} = \oint_{(C)} (\overrightarrow{v}_e \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{dl}}$$

- l'existence de courants induits est liée au caractère non conservatif de la circulation du champ électromoteur
- $\delta W_L = i d\phi$ donc $\mathscr{P}_L = i\dfrac{d\phi}{dt} = -e_m i$

$$\boxed{e_m = -\frac{d\phi}{dt}}$$

► Exemple n°1 : Barreau conducteur mobile sur des rails

Le système est constitué d'un barreau conducteur MN,de longueur l,glissant le long de deux rails parallèles,perpendiculairement à leur direction. Le système est placé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e}_z$.



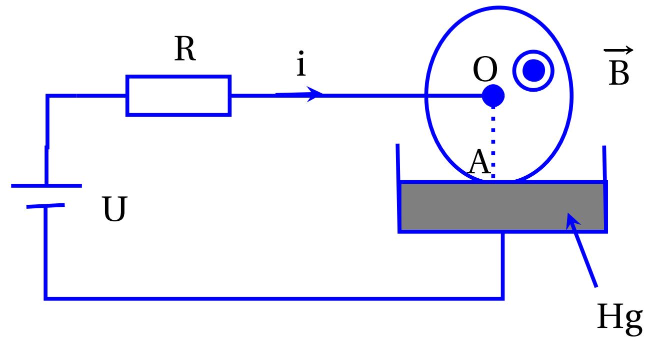
- V est un voltmétre.
- à $t = 0$,le barreau est au repos
- à t,le barreau est lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e}_x$,puis abondonné à elle même.

- le champ électromoteur : $\overrightarrow{E}_m = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = v\overrightarrow{e}_x \wedge B\overrightarrow{e}_z = -vB\overrightarrow{e}_y$
- $e_m = \int_M^N \overrightarrow{E}_m.\overrightarrow{dl} = \int_M^N -Bv\overrightarrow{e}_y.dl\overrightarrow{e}_y = -Bvl$
- $\overrightarrow{d\lambda} = \overrightarrow{v}.dt$
- $e_m = \int_{MN} (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{dl} = -\dfrac{1}{dt}\int_{MN} (\overrightarrow{d\lambda} \wedge \overrightarrow{dl}).\overrightarrow{B} = -\dfrac{1}{dt}\int \overrightarrow{B}.\overrightarrow{\delta^2 S_c}$

$$\boxed{e_m = -\frac{d\phi}{dt}}$$

► Exemple n°2 : Roue de Barlow

Un disque métallique de rayon OA = a peut tourner sans frottement dans le plan vertical autour de l'axe Oz. Il est alimenté sur son axe,au point O,par un générateur de tension U,le circuit étant fermé au point A,où la circonférence trempe dans un bain de mercure,la résistance totale du circuit est R.



- le disque tourne autour de Oz avec une vitesse $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$
- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ donc $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta$
- $\vec{B} = -B\vec{e}_z$
- le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v}(M) \wedge \vec{B} = -r\omega\vec{e}_\theta \wedge (-B\vec{e}_z) = -rB\omega\vec{e}_r$
- la force électromotrice $e_m = \int_O^A \vec{E}_m.\vec{dl} = \int_0^A -r\omega B\vec{e}_r.(dr\vec{e}_r)$

$$e_m = -\frac{1}{2}\omega a^2 B$$

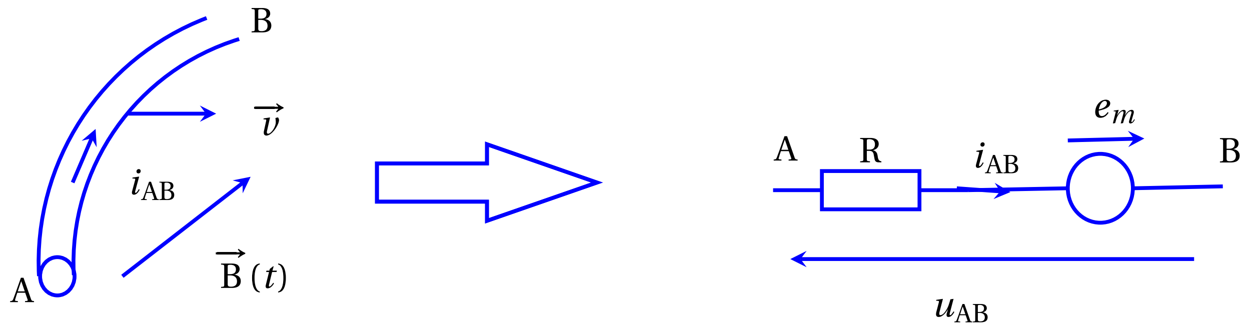
1.5 Loi d'Ohm généralisé

Considérons un conducteur ohmique (portion AB d'un circuit) qui est soit :

- placé dans un champ magnétique variable B(t)
- en vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique permanent

Le conducteur ohmique vérifié la lio d'ohm généralisé

$$\boxed{u_{AB} = R.i_{AB} - e_m}$$



1.6 Loi d'Ohm locale

- la loi d'Ohm locale est donnée par

$$\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E}}$$

  avec γ : conductivité du milieu (S.m^{-1})
- pour un circuit mobile

$$\boxed{\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + R_H\vec{j} \wedge \vec{B})}$$

2 Auto-induction

2.1 Inductance propre

Tout circuit parcouru par un courant i crée un champ magnétique $\vec{B}$ dans lequel il est plongé.

On note ϕ_{propre} le flux propre du circuit c'est-à-dire le flux du champ $\vec{B}$ à travers la surface du circuit

•Définition : On appelle inductance propre du circuit (L) la grandeur suivante

$$L = \frac{\phi_{propre}}{i}$$

L s'exprime en henry(H)

▸ Inductance propre d'un solénoïde rectiligne

Un solénoïde infini,d'axe Oz,de rayon R de longueur $l >> R$,de n spires par unité de longueur,parcourues par un courant d'intensité I

- $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z = \mu_0 \frac{N}{l} I \vec{e}_z$
- $\phi_{propre} = \iint_{Solénoïde} \vec{B}\,\vec{dS} = N \iint_{Spire} \vec{B}\,\vec{dS} = NB\pi R^2$
- l'inductance d'un solénoïde de longueur l

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi R^2}$$

2.2 Force électromotrice d'auto-induction

•Définition : on appelle force électromotrice d'auto-induction la quantité suivante

$$e_{propre} = -\frac{d\phi_{propre}}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

2.3 Loi d'Ohm généralisé

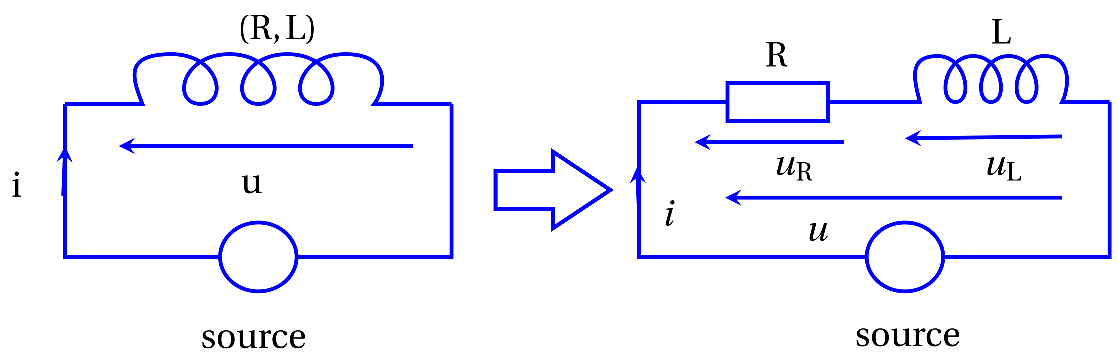
Considérons un élément d'un circuit (bobine) dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_{ext}$,parcourue par un courant i

- le champ magnétique totale

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{propre}}$$

- la f.e.m d'induction est donc

$$\boxed{e = e_{ext} + e_{propre}}$$



- la loi d'Ohm généralisé

$$\boxed{u = R.i - e_{propre} - e_{ext} = R.i + L\frac{di}{dt} - e_{ext}}$$

- si $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$ alors $e_{ext} = 0$

$$\boxed{u = R.i + L\frac{di}{dt}}$$

2.4 Energie magnétique

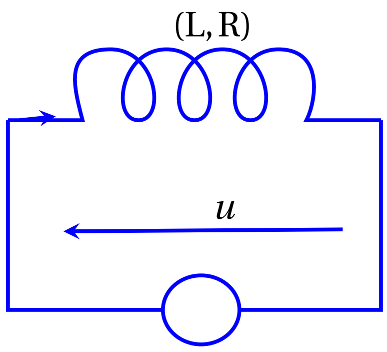
•Définition : On définit la densité de l'énergie magnétique associée au champ magnétique $\overrightarrow{B}$ par

$$\omega_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- l'énergie magnétique est donnée par

$$\mathscr{E}_m = \iiint_{espace} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

- $\mathscr{E}_m$ représente l'énergie cédée par le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ aux porteurs de charges
- considérons le circuit suivant



source de tension

- $u = Ri - e_{propre} = Ri + L\frac{di}{dt}$
- la puissance fournie par la source : $\mathscr{P}_{source} = u.i$
- la puissance dissipée par effet Joule : $\mathscr{P}_{Joule} = Ri^2$
- bilan de puissance : $u.i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}$
- $\mathscr{P}_{source} = \mathscr{P}_{Joule} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$
- la quantité $\mathscr{P}_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ représente la puissance magnétique

$$\mathscr{P}_m = \frac{d\mathscr{E}_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$$

- l'inductance propre s'écrit aussi

$$L = \frac{1}{\mu_0 i^2}\iiint_{espace} B^2 d\tau$$

▶ Exemple : solénoïde infini

considérons un solénoïde de longueur l de section S contenant N spires de rayon R telle que $l >> R$

- $B = \mu_0\frac{N}{l}i$ à l'intérieur et nul à l'extérieur

- $\mathscr{E}_m = \frac{B^2}{2\mu_0} S.l = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l} i^2$
- $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l}$

3 Induction mutuelle entre deux circuits filiformes fermés

3.1 Inductance mutuelle de deux circuits

Considérons deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) fermés

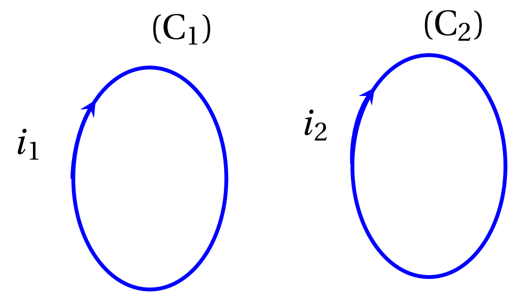
- $\phi_{1\to2}$: flux de $\overrightarrow{B}_1$ crée par (C_1) à travers la (C_2) est proportionnel à i_1

$$\phi_{1\to2} = M_{12} i_1$$

- $\phi_{2\to1}$: flux de $\overrightarrow{B}_2$ crée par (C_2) à travers la (C_1) est proportionnel à i_2

$$\phi_{2\to1} = M_{21} i_2$$

- $M_{12} = M_{21} = M$
- M représente l'inductance mutuelle

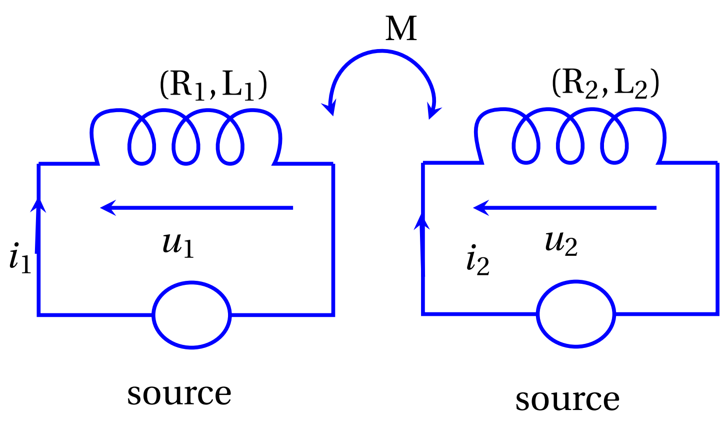


$$\phi_{1\to2} = M i_1 \text{ et } \phi_{2\to1} = M i_2$$

• Remarque : Contrairement à l'inductance propre qui est toujours positive,l'inductance mutuelle peut être positve ou négative

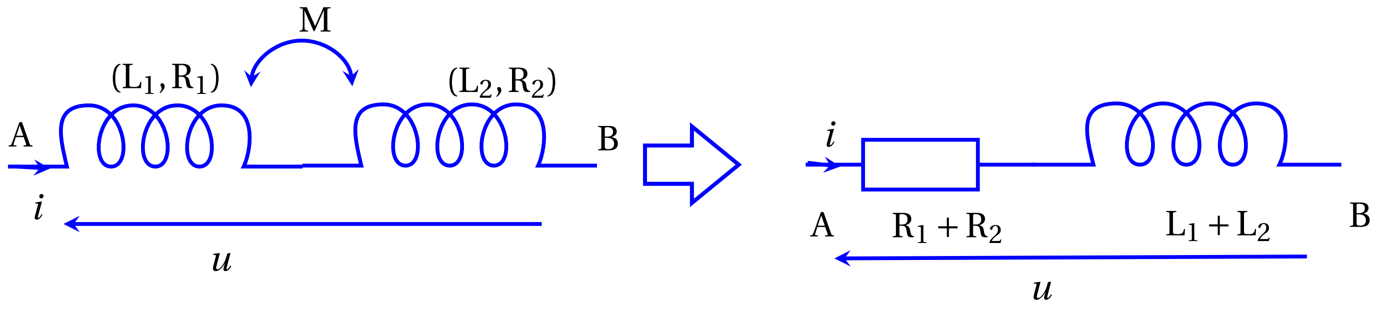
3.2 Loi d'Ohm généralisé

Considérons les deux circuits couplés par une inductance mutuelle M



- on peut écrire pour chaque circuit : $\phi = \phi_{propre} + \phi_{ext}$
- $\phi_1 = \phi_{1\to1} + \phi_{2\to1} = L_1 i_1 + M i_2$
- $\phi_2 = \phi_{2\to2} + \phi_{1\to2} = L_2 i_2 + M i_1$
- $e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$
- $e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$
- $u_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$
- $u_2 = R_2 i_2 - e_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$

3.3 Cas de deux bobines en série

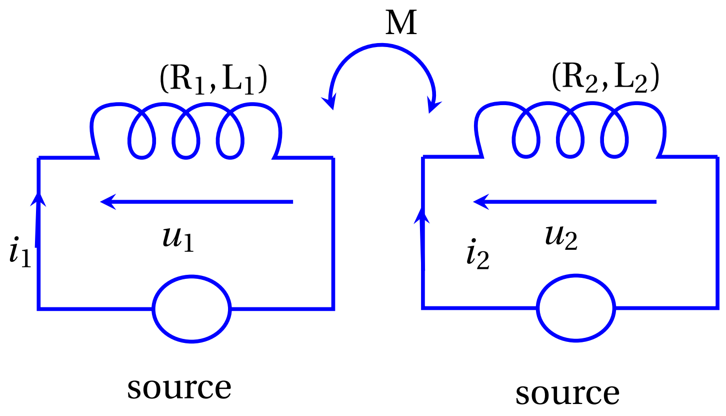


- le flux de $\vec{B}$ à travers l'ensemble des spires est $\phi = \phi_1 + \phi_2$
- $\phi = (L_1 i + Mi) + (L_2 i + Mi)$
- $L = L_1 + L_2 + 2M$

$$\boxed{\phi = Li}$$

3.4 Energie magnétique d'un système de deux circuits

Considérons deux circuits indéformables (C_1) et (C_2) couplés par inductance mutuelle M



- les sources fournissent la puissance $\mathscr{P}_{source} = u_1 i_1 + u_2 i_2 = \left(R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt}\right) i_1 + \left(R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt}\right) i_2$
- la puissance dissipée par effet Joule : $\mathscr{P}_{Joule} = R_1 i^2 + R_2 i_2^2$
- le bilan énergétique s'écrit : $\mathscr{P}_{source} = \mathscr{P}_{Joule} + \dfrac{d\mathscr{E}_m}{dt}$
- $\dfrac{d\mathscr{E}_m}{dt} = L_1 i_1 \dfrac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \dfrac{di_2}{dt} + M i_1 \dfrac{di_2}{dt} + M i_2 \dfrac{di_1}{dt}$
- $\mathscr{E}_m = 0$ lorsque les courants sont nuls
- l'énergie magnétique d'un système de deux circuits est,en absence d'autre sources de champ magnétique

$$\boxed{\mathscr{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$$