DNS

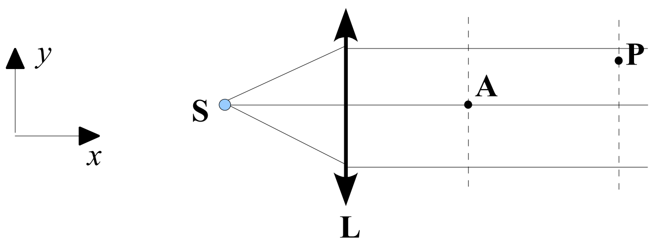
Sujet

Réfractométrie avec un interféromètre de Mach-Zehnder

La réfractométrie est l'ensemble des techniques optiques de mesure de l'indice de réfraction d'un milieu matériel. Dans les premières questions, pour les formules littérales, l'indice de l'air est noté n_{air} mais pour la suite dans les formules littérales on fera $n_{air}=1$. L'intensité d'une onde lumineuse de grandeur complexe en P : $\underline{s}(P,t)$ est $I=\underline{s}\,\underline{s}^*$ où $\underline{s}^*$ désigne la grandeur conjuguée.

I. Préliminaires

Soit une source de lumière S considérée comme ponctuelle et monochromatique (la longueur d'onde -dans le vide- est $\lambda=628\,nm$), centrée sur F , foyer objet d'une lentille collimatrice (L) . Les rayons incidents issus de F donnent, après (L) un faisceau parallèle.

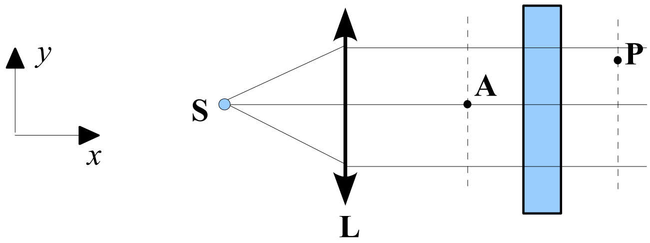


L'amplitude complexe du faisceau incident au point A , situé sur l'axe optique de la lentille, est notée $\underline{a}_0=a_0\exp(-i\varphi_0)$, la grandeur lumineuse complexe instantanée en A valant $\underline{s}_0(A,t)=\underline{a}_0\exp(i\omega t)$.

1. Déterminer l'intensité de l'onde en A .

2. Déterminer l'amplitude complexe de l'onde en P avec $\vec{AP}=x\vec{u}_x+y\vec{u}_y+z\vec{u}_z$ et déterminer l'intensité de l'onde en P .

On place entre A et P , perpendiculairement au faisceau incident une lame à faces parallèles d'indice n et d'épaisseur e .

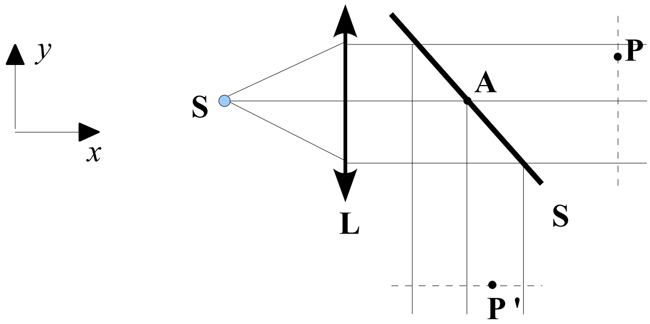


3. Donner l'expression du chemin optique supplémentaire pour l'onde en P (par rapport au cas précédent) dû à la présence de la lame.

4. Déterminer l'amplitude complexe de l'onde en P et déterminer l'intensité de l'onde en P.

Dans la suite du problème, pour simplifier, même dans les formules littérales on fera $n_{air}=1$ *, ce qui revient en quelque sorte à faire comme si les expériences se passaient dans le vide.*

On place cette fois en A une lame semi transparente ou séparatrice (S), inclinée de $45°$ par rapport au faisceau incident. Cette séparatrice est décrite par un coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r}$ et un coefficient de transmission en amplitude $\underline{t}$. On ne se posera pas ici le problème de l'épaisseur de la lame. On donne $\overrightarrow{AP}=x\vec{u}_x+y\vec{u}_y+z\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{AP'}=x'\vec{u}_x+y'\vec{u}_y+z'\vec{u}_z$



5. Déterminer l'amplitude complexe et l'intensité de l'onde en P.

6. Déterminer l'amplitude complexe et l'intensité de l'onde en P'.

7. On désigne par R le coefficient de réflexion en intensité (intensité réfléchie en A sur intensité incidente en A) et par T le coefficient de transmission en intensité (intensité transmise en A sur intensité incidente en A). Donner l'expression de R et T en fonction de $\underline{r}, \underline{r}*, \underline{t}, \underline{t}*$.

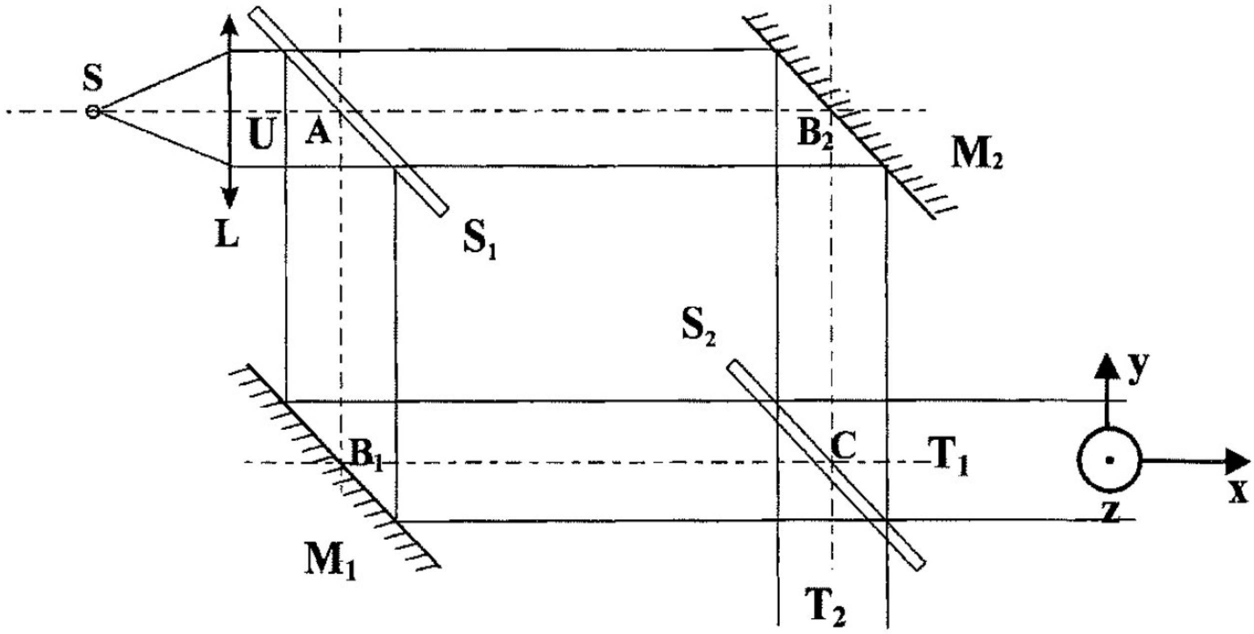
8. Montrer que la conservation de l'énergie implique une relation entre R et T. Quelle autre relation doit-on avoir pour que la lame soit effectivement <u>semi</u>-transparente.

9. On donne pour la lame étudiée: $\underline{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{i}{\sqrt{2}}$ et $\underline{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette lame vérifie-t-elle les relations espérées.

II. L'interféromètre

L'interféromètre est constitué par deux lames séparatrices S_1 et S_2 et deux miroirs M_1 et

M_2 disposés aux quatre sommets A , C , B_1 et B_2 d'un rectangle. Une source ponctuelle de lumière est placée au foyer objet de 1a lentille (L) pour éclairer l'interféromètre en « lumière parallèle ».



Les deux lames séparatrices et les deux miroirs sont initialement inclinés de $45°$ par rapport aux faisceaux incidents. La séparatrice S_1 partage le faisceau incident en un faisceau transmis et un faisceau réfléchi ; le premier se réfléchit sur le miroir M_2 et le second sur le miroir M_1 avant d'atteindre la séparatrice S_2 qui les recombine, dans le faisceau interférentiel (T_2) d'une part, et dans le faisceau interférentiel (T_1) d'autre part .

Les coefficients de réflexion et de transmission pour les amplitudes de chacune des deux lames séparatrices identiques S_1 et S_2 valent $\underline{r}$ et $\underline{t}$. Pour les miroirs M_1 et M_2 , on suppose que les coefficients de réflexion pour les amplitudes valent 1 . Les déphasages à la réflexion sur tes miroirs parfaits M_1 et M_2 ne seront pas pris en compte, intervenant symétriquement sur les deux voies.

L'amplitude complexe du faisceau incident (U) au point A est notée $\underline{a}_0$, les amplitudes complexes des faisceaux transmis (T_1) et (T_2) sont respectivement notées $\underline{a}_1$ et $\underline{a}_2$.

10.Indiquer les deux ondes qui se superposent pour donner le faisceau (T_1) . Exprimer l'amplitude de chacune de ces ondes et en déduire finalement l'amplitude $\underline{a}_1$ en fonction de $\underline{a}_0$ et du déphasage retard Φ_0 correspondant à chacun des bras $S_1M_1S_2$ et $S_1M_2S_2$, de chemins optiques égaux. En déduire l' intensité I_1 du faisceau (T_1) .

11.Indiquer les deux ondes qui se superposent pour donner le faisceau (T_2) . Exprimer l'amplitude de chacune de ces ondes et en déduire finalement l'amplitude $\underline{a}_2$ en fonction de $\underline{a}_0$ et du déphasage retard Φ_0 . En déduire l' intensités I_2 du faisceau (T_2) .

12.Commenter le résultat obtenu.

On souhaite obtenir des franges interférentielles rectilignes. On effectue une petite rotation des deux miroirs M_1 , et M_2 , d'un même petit angle ε dans le sens trigonométrique autour de leurs axes respectifs $B_1 z$ et $B_2 z$, perpendiculaires au plan xy .

On ne s'intéresse dans la suite qu'au faisceau interférentiel (T_1) .

13.On nomme O un point du champ d'interférence où le déphasage entre les deux ondes qui interfèrent est nul ; expliquer pourquoi les phases $\phi_1(P,t)$ et $\phi_2(P,t)$ en un point P quelconque du champ d'interférence sont de la forme: $\phi_1(P,t)=\omega t-\vec{k}_1\overrightarrow{OP}+\alpha$ et $\phi_2(P,t)=\omega t-\vec{k}_2\overrightarrow{OP}+\alpha$; on ne demande pas, dans cette question, de calculer $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ ni α .

14.Préciser les composantes cartésiennes des vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ en fonction de la longueur d'onde λ , et du petit angle ε de rotation des miroirs.

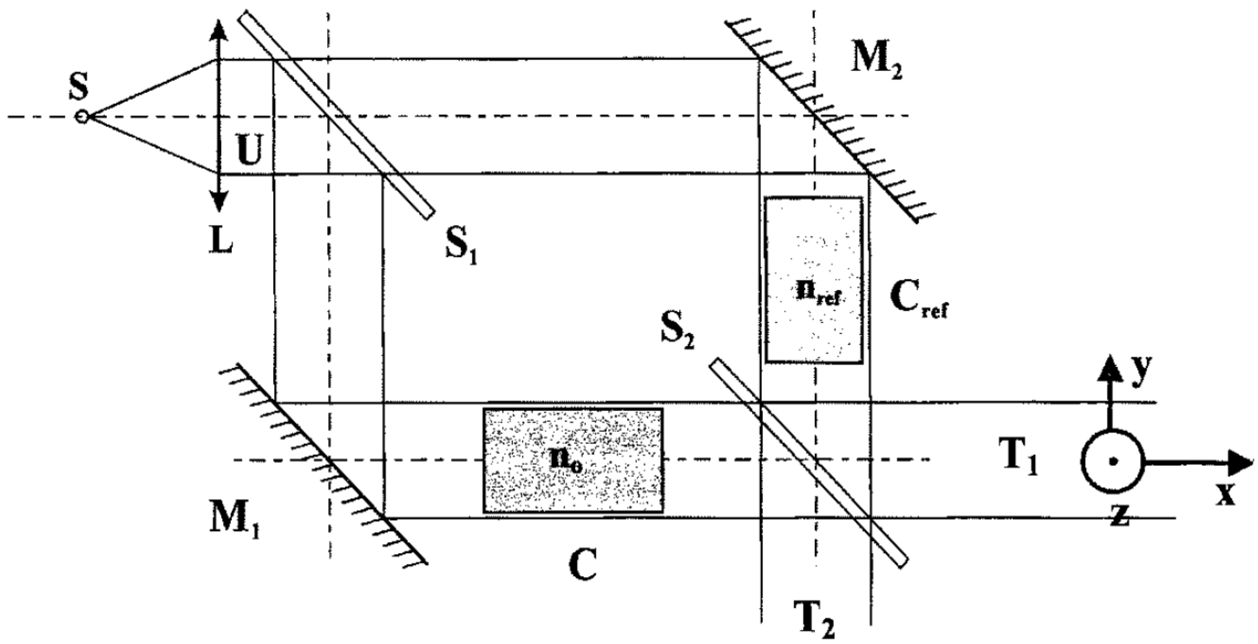
15.En déduire les valeurs du déphasage $\Delta\phi=\phi_2(P,t)-\phi_1(P,t)$ et de l'ordre d'interférence p au point P en fonction de ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) .

Dans toute la suite, on place un écran dans le plan yOz .

16.Trouver la valeur de l'interfrange en fonction de la longueur d'onde λ et du petit angle ε . Application numérique : $\lambda=628\,nm$; $\varepsilon=5.10^{-4}\,rad$. Calculer l'inter-frange.

III. Mesure de l'indice

On dispose de deux cuves parfaitement identiques. L'une est la cuve de mesure (C) et l'autre la cuve de référence (C_{ref}) . On considère pour les calculs que les parois d'une cuve sont d'épaisseur nulle.



On introduit, sans modifier la valeur de l'angle ε , la cuve de mesure (C) et la cuve de référence (C_{ref}) dans tes bras de l'interféromètre. On admettra, l'angle ε étant petit, que le déphasage supplémentaire apporté lors de la traversée d'une cuve est le même que si la cuve était traversée en incidence normale. On considère que, sur chacune des deux voies, la longueur de liquide traversé vaut $e_o = 1\,cm$.

17. Y a-t-il, par rapport à la situation précédente, déplacement des franges si $n_o = n_{ref}$? Justifier votre réponse.

Les deux cuves sont initialement toutes deux remplies par le même liquide (celui de référence, d'indice $n_{réf}$ supposé connu avec une très grande précision); à l'aide d'une pompe et d'un circuit mélangeur, on fait passer très progressivement l'indice dans la cuve de mesure de la valeur $n_{réf}$ à le valeur finale n_o à mesurer; le liquide de la cuve de référence reste inchangé.

18. Montrer, en raisonnant sur l'ordre d'interférence, que le décompte du nombre de franges qui « défilent » entre le début et la fin de cette expérience et le repérage du sens de ce défilement permettent de mesurer la valeur de l'écart d'indice $(n_o - n_{ref})$.

19. On a $\lambda = 628\,nm$ et $e_o = 1\,cm$. Sachant qu'on peut arriver à détecter un déplacement de $1/10^{ème}$ de frange. quelle est la plus petite variation d'indice détectable a priori ? Commenter.

20. L'indice de réfraction d'un milieu varie en fonction de la température. Pour les liquides usuels, le coefficient de température $\frac{dn}{dT}$ se situe entre $4.10^{-4}\,K^{-1}$ et $8.10^{-4}\,K^{-1}$. Pour obtenir une bonne exactitude de mesure d'indice, le milieu est stabilisé en température. Quelle doit être la stabilité de la température de l'enceinte contenant le liquide, si l'on veut assurer des mesures d'indice à 10^{-5} près ?

Réponses

1) $$I = \underline{s}_0 \, \underline{s}_0^*$$
$$= \underline{a}_0 \, \underline{a}_0^*$$
$$\boxed{I = a_0^2}$$

---

2) $\underline{s}(P,t) = \underline{a}(P) \exp(i\omega t)$ avec

$$\underline{a}(P) = \underline{a}(A) \exp(-i \vec{k} \cdot \overrightarrow{AP}) \qquad \vec{k} \begin{vmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{AP} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

$$= \underline{a}_0 \exp(-i k x)$$

$$\boxed{\underline{a}(P) = \underline{a}_0 \exp\left(-i \frac{2\pi n_{air}}{\lambda} x\right)}$$

Ce résultat est prévisible : le chemin optique entre la surface d'onde passant par A et celle passant par P est $n_{air} x$. Le déphasage retard vaut donc $\frac{2\pi}{\lambda}(n_{air} x)$.

$$I = \underline{a}(P) \, \underline{a}(P)^*$$

$$\boxed{I = a_0^2}$$

L'intensité dans le faisceau parallèle ne change pas entre A et P

---

3) Par rapport au cas précédent où la traversée e dans l'air était comptabilisée par un chemin optique ($n_{air} e$), ici cette traversée correspond à ($n e$) soit un chemin optique supplémentaire

$$\boxed{\delta = (n - n_{air}) e}$$

---

4) $$\underline{a}(P) = \underline{a}(P)_{précédent} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda}(n - n_{air}) e\right)$$

$$\boxed{\underline{a}(P) = \underline{a}_0 \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \left(n_{air} \, x + (n - n_{air}) e\right)\right)}$$

$$\boxed{I = a_0^2}$$

---

5) $$\boxed{\underline{a}(P) = \underline{t}\ \underline{a_o}\ \exp\left(-i\,\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}$$

$$I(P) = \underline{a}(P)\ \underline{a}(P)^*$$

$$\boxed{I(P) = \underline{t}\,\underline{t}^*\ a_o^2}$$

---

6) $$\underline{a}(P') = \underline{a}(A)\ \exp\left(-i\,\vec{k}\,\overrightarrow{AP'}\right) \times \underline{r}$$ avec $y'<0$

$$\vec{k}\begin{vmatrix}0\\-k\\0\end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{AP'}\begin{vmatrix}x'\\y'\\z'\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\underline{a}(P') = \underline{r}\ \underline{a_o}\ \exp\left(i\,\frac{2\pi}{\lambda}\,y'\right)}$$

$$\boxed{I(P') = \underline{r}\,\underline{r}^*\ a_o^2}$$

---

7) $$\boxed{\begin{aligned} R &= \underline{r}\,\underline{r}^* \\ T &= \underline{t}\,\underline{t}^* \end{aligned}}$$

---

8) $$I_{incidente} = I_{réfléchie} + I_{transmise}$$

$$I_o = R\,I_o + T\,I_o$$

$$\boxed{R + T = 1}$$

Semi-transparente :

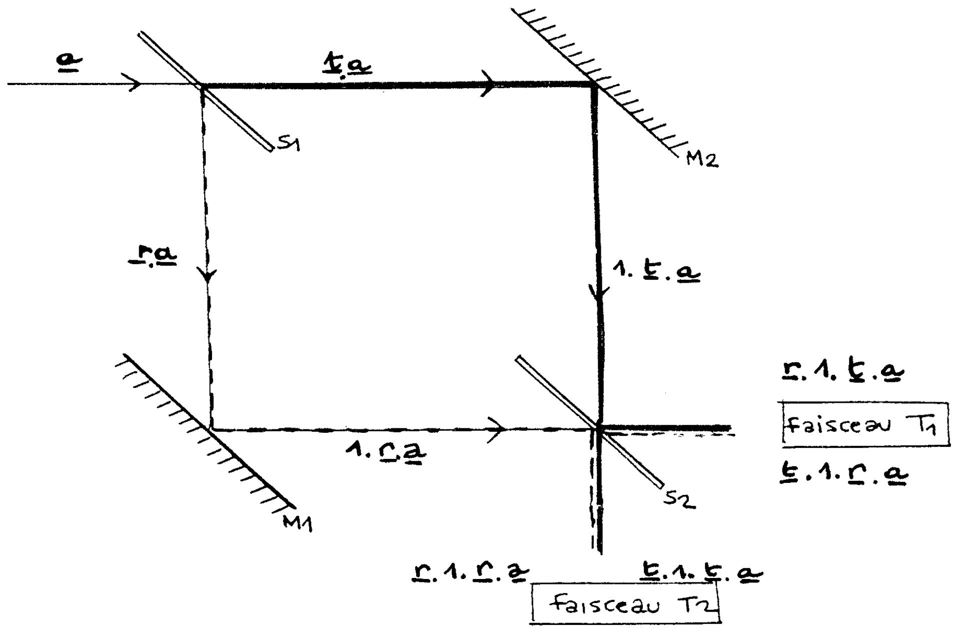
$$\boxed{R = T}$$

---

9) Il faut $R = T = \frac{1}{2}$

$$R = \underline{r}\,\underline{r}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$T = \underline{t}\,\underline{t}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$



10) faisceau T_1, deux ondes :

$$\underline{r}\,\underline{t}\,\underline{a}_0 \exp -j\phi_0$$
$$\underline{t}\,\underline{r}\,\underline{a}_0 \exp -j\phi_0$$

$$\underline{a}_1 = (\underline{r}\,\underline{t} + \underline{t}\,\underline{r})\,\underline{a}_0 \exp -j\phi_0$$

$$\boxed{\underline{a}_1 = 2\,\underline{r}\,\underline{t}\,\underline{a}_0 \exp -j\phi_0}$$

$$I_1 = 4\,\underline{r}\,\underline{r}^*\,\underline{t}\,\underline{t}^*\,a_0^2$$

$$I_1 = 4\,\underset{1/2}{\underset{\uparrow}{R}}\,\underset{1/2}{\underset{\uparrow}{T}}\,a_0^2$$

$$\boxed{I_1 = a_0^2}$$

---

11) faisceau T_2, deux ondes :

$$\underline{r}\,\underline{r}\,\underline{a}_0 \exp -j\phi_0$$
$$\underline{t}\,\underline{t}\,\underline{a}_0 \exp -j\phi_0$$

$$\boxed{\underline{a}_2 = (\underset{-1/2}{\underset{\uparrow}{\underline{r}^2}} + \underset{1/2}{\underset{\uparrow}{\underline{t}^2}})\,\underline{a}_0 \exp -j\phi_0}$$

$$\boxed{\underline{a}_2 = 0}$$

$$\boxed{I_2 = 0}$$

---

12) On pouvait prévoir :

$$I_0 = I_1 + I_2$$

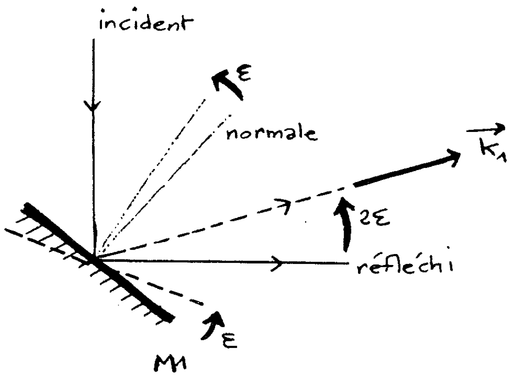
on a bien vérifié la conservation de l'énergie avec

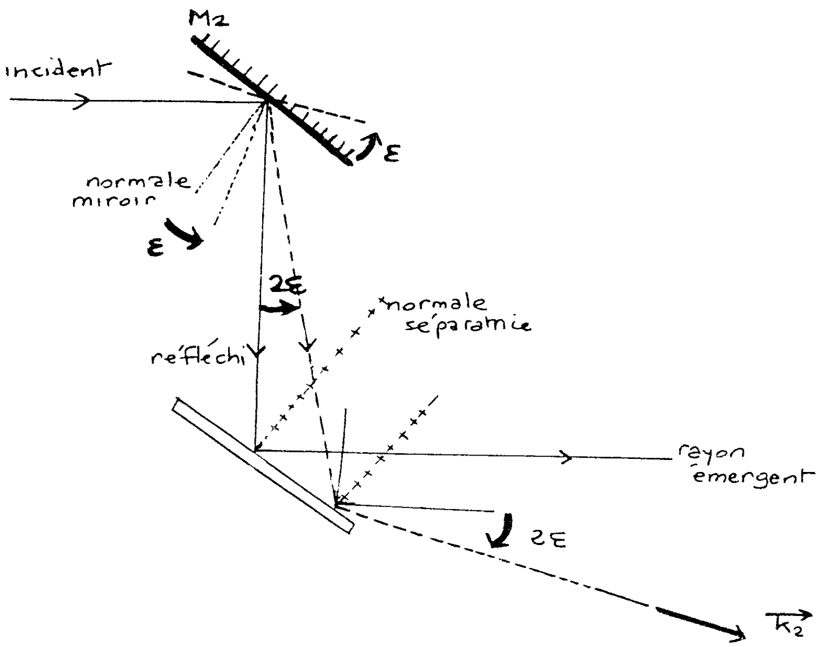
$$I_1 = I_0$$
$$I_2 = 0$$

<u>Toute l'énergie se retrouve dans le faisceau 1</u>

---

13)





Si un miroir tourne d'un certain angle, le rayon réfléchi tourne d'un angle double
(facile à démontrer en comparant l'angle d'incidence avant et après la rotation du miroir)

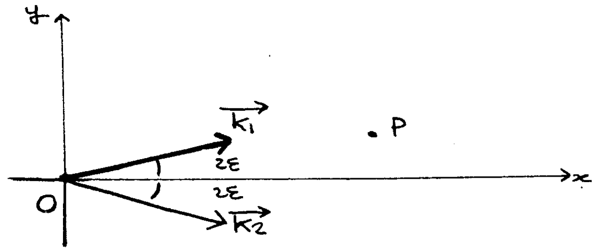
Ici, cf figures

→ si M_1 tourne de ε, $\vec{k_1}$ tourne de 2ε

→ si M_2 tourne de ε, $\vec{k_2}$ tourne de (-2ε)

Le faisceau T_1 est formé de l'onde plane $\vec{k_1}$ et de l'onde plane $\vec{k_2}$ qui interfèrent.

On suppose qu'en O, les ondes 1 et 2 sont en phase.



$$\phi_1(O,t) = \omega t + \alpha$$
$$\phi_2(O,t) = \omega t + \alpha$$

Les phases en P sont donc, en tenant compte des retards

$$\boxed{\begin{aligned}\phi_1(P,t) &= \phi_1(O,t) - \vec{k_1}\,\overrightarrow{OP}\\ \phi_2(P,t) &= \phi_2(O,t) - \vec{k_2}\,\overrightarrow{OP}\end{aligned}}$$

---

14)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{k_1} &= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\cos 2\varepsilon\ \vec{u_x} + \sin 2\varepsilon\ \vec{u_y}\right)\\ \vec{k_2} &= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\cos 2\varepsilon\ \vec{u_x} - \sin 2\varepsilon\ \vec{u_y}\right)\end{aligned}}$$

En travaillant au premier ordre en ε

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{k_1} &= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\vec{u_x} + 2\varepsilon\,\vec{u_y}\right)\\ \vec{k_2} &= \frac{2\pi}{\lambda}\left(\vec{u_x} - 2\varepsilon\,\vec{u_y}\right)\end{aligned}}$$

---

15) Le déphasage retard de 1 par rapport à 2 est

$$\boxed{\Delta\phi_{\substack{\text{retard}\\1/2}} = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\,\vec{OP}}$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\,4\varepsilon\,y$$

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{8\pi\varepsilon y}{\lambda}}$$

avec $\Delta\phi = 2\pi p$

$$\boxed{p = \frac{4\varepsilon y}{\lambda}}$$

---

16) L'interfrange i est le Δy correspondant à $\Delta p = 1$

$$\Delta y = \frac{\lambda}{4\varepsilon}\,\Delta p$$

$$\boxed{i = \frac{\lambda}{4\varepsilon}}$$

A.N. $$= \frac{628\ 10^{-9}}{4 \times 5\ 10^{-4}}$$

$$\boxed{i = 0{,}314\ \text{mm}}$$

---

17) En présence des cuves :

$$\phi_1(P,t) = \phi_1(O,t) - \vec{k}_1\,\vec{OP} - (n_0 - 1)\,e_0\,\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\phi_2(P,t) = \phi_2(O,t) - \vec{k}_2\,\vec{OP} - (n_{ref} - 1)\,e_0\,\frac{2\pi}{\lambda}$$

Si $n_{ref} = n_0$, $\Delta\phi$ n'a pas changé. Il n'y a donc <u>pas de déplacement des franges</u>.

---

18)

$$\Delta\Phi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\,\overrightarrow{OP} - \left[(n_{ref}-1)\,e_0 - (n_0-1)\,e_0\right]\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$= \frac{8\pi\varepsilon y}{\lambda} + (n_0 - n_{ref})\,e_0\,\frac{2\pi}{\lambda}$$

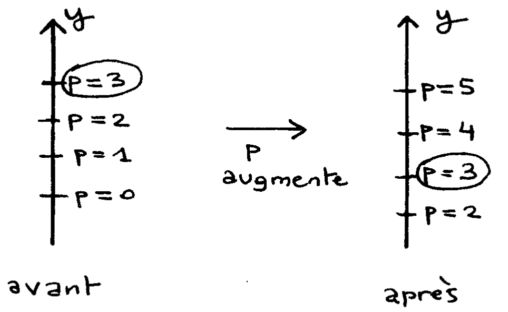
$$\boxed{p = \frac{4\varepsilon y}{\lambda} + \frac{(n_0 - n_{ref})\,e_0}{\lambda}}$$

L'ordre varie de $\frac{(n_0 - n_{ref})\,e_0}{\lambda}$ en un point repéré par y.

$$\boxed{\text{nbre de fges qui défilent } N = \frac{(n_0 - n_{ref})}{\lambda}\,e_0}$$

Sens de défilement des franges.

on suppose $(n_0 - n_{ref}) > 0$



$$\boxed{\text{Les franges défilent vers le bas si } n_0 > n_{ref}}$$

---

19)

$$N = \frac{(n_0 - n_{ref})}{\lambda}\,e_0$$

$$\boxed{\Delta N = \Delta n_0\,\frac{e_0}{\lambda}}$$

A.N. $$\Delta n_0 = \Delta N\,\frac{\lambda}{e_0}$$

$$= \frac{1}{10}\,\frac{628\;10^{-9}}{10^{-2}}$$

$$\boxed{\Delta n_0 = 6\;10^{-6}}$$

---

20)

$$4\;10^{-4} < \frac{dn}{dT} < 8\;10^{-4}$$

donc

$$\frac{1}{4\ 10^{-4}} > \frac{\Delta T}{\underbrace{\Delta n}_{10^{-5}}} > \frac{1}{8\ 10^{-4}}$$

$$0{,}025\,K > \Delta T > 0{,}0125\,K$$

$$\boxed{\text{Il faut donc stabiliser la température à } 0{,}01\,K}$$
