Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Notations :

— *n désigne un entier, $n \geqslant 2$*

— *On note $E = M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;*

— *Les éléments de E sont notés $M = (m_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$;*

— *la matrice élémentaire $E_{i\,j}$ est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i-ème ligne et sur la j-ème colonne, qui vaut 1. On donne aussi la formule*

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{I,\ell}$$

— *Lorsque A et B sont des éléments de E, on note $A\,.\,B$ leur produit.*

— *Si $M \in E$, on note $\mathrm{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel engendré par M*

— *$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ algèbre des formes linéaires sur E.*
On rappelle que : $\dim(E) = \dim(E^*)$.

— *Si $M = (m_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$, on note $\mathrm{Tr}\,(M)$ le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{k\,k}$. A chaque matrice U de E, on associe :*

  — *L'application T_U de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T_U(M) = \mathrm{Tr}\,(U.M)$.*

  — *L'ensemble $H_U = \{M \in E \quad / \quad \mathrm{Tr}\,(U.M) = 0\}$.*

Partie I: Généralités, exemples.

1. (a) Montrer que Tr est une application linéaire.
   (b) Pour $U \in E$, prouver que l'application T_U est dans E^*.
   (c) Soit $U \in E$; reconnaître $\mathrm{Ker}\,(T_U)$, et montrer que H_U est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $A = (a_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ des éléments de E.
   (a) Montrer que $\mathrm{Tr}\,(A\,.\,B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j\,i}b_{i\,j}$.
   (b) En déduire les identités suivantes :
      i. $Tr({}^tA.B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}b_{i\,j}$
      ii. $Tr(B.A) = Tr(A.B)$
3. Soit U dans E.
   (a) Si $U = 0$, déterminer $\dim H_U$.
   (b) Si $U \neq 0$, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$.
   En déduire $\dim H_U$.
4. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $T_{i\,j} = T_{E_{j\,i}}$.
   (a) Les indices k et ℓ étant fixés, calculer $T_{i\,j}(E_{k\,\ell})$
   (b) Montrons que $(T_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de E^*.
5. Montrer que l'application φ de E vers E^* : $U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
6. On considère un hyperplan vectoriel H de E.
   (a) Quelle est sa dimension ?
   (b) Soit A une matrice non nulle de E qui n'appartient pas à H, montrer que : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.
   (c) Construire alors un élément ψ de E^* tel que $H = \mathrm{Ker}\,(\psi)$.
   (d) Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Partie II: Tout hyperplan contient une matrice inversible

On se propose dans cette partie de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.

Pour $1 \leqslant r \leqslant n$, on note $R_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i\,i}$.

7. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $P = (p_{i\,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec

$$\begin{cases} p_{i+1,\,i} = 1 & 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ p_{1,\,n} = 1 & \\ p_{i,\,j} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

   (a) Montrer que P est inversible.

   (b) Prouver que P appartient à l'hyperplan H_{R_r}.

8. En déduire que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.
   Indication : lorsque $H = H_U$, avec U de rang r, on rappelle l'existence de matrices S_1 et S_2 inversibles telles que $S_1.U.S_2 = R_r$.

Partie III: Les hyperplans de $M_n(\mathbb{R})$ stable par produit

Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ stable par la multiplication des matrices.

On se propose de montrer que H est une sous-algèbre

Cela revient à démontrer que $\mathrm{I}_n \in H$. Raisonnons par absurde, on suppose que $\mathrm{I}_n \notin H$

9. (a) Montrer que H et $\mathbf{Vect}(\mathrm{I}_n)$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{R})$

   (b) Soit p la projection sur $\mathbf{Vect}(\mathrm{I}_n)$ parallèlement à H. Montrer que p est un morphisme d'algèbres

10. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \in H$. Montrer que $A \in H$

11. (a) Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Calculer $E_{i,j}^2$ puis montrer que $E_{i,j} \in H$

    (b) En déduire que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on a $E_{i,i} \in H$

12. Conclure

Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Partie I: Généralités, exemples.

1. (a) En notant $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Pour tout $1\leqslant i\leqslant n$, le coefficient (i,i) de $\lambda A+B$ est $\lambda a_{ii}+b_{ii}$. Ainsi, on a bien $Tr\,(\lambda A+B)=\lambda Tr\,(A)+Tr\,(B)$. Donc Tr est une forme linéaire.

   (b) Soit $U\in E$. L'application T_U est bien définie de E à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Soit $A,\,B\in E$ et$\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} T_U\,(\lambda A+B) &= Tr\,(U\,(\lambda A+B)) \\ &= Tr\,(\lambda UA+UB) \\ &= \lambda Tr\,(UA)+Tr\,(UB)=\lambda T_U\,(A)+T_U\,(B) \end{aligned}$$

   (c) Soit $U\in E$; par définition $\operatorname{Ker}(T_U)=\{M\in E \quad / \quad T(U.M)=0\}=H_U$, donc H_U est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des éléments de E.

   (a) Par définition $AB=(c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $c_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$, donc

$$T(A\,.\,B)=\sum_{i=1}^{n}c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i\,k}b_{k\,i}$$

   (b) i. On écrit ${}^tA=\left(a'_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, avec $a'_{ij}=a_{ji}$. D'après la question précédente

$$T\left({}^tAB\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a'_{j\,i}b_{i\,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i\,j}b_{i\,j}$$

   ii. Par symétrie

$$T\,(BA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{i\,k}a_{k\,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i\,k}b_{k\,i}=T\,(AB)$$

3. Soit U dans E.

   (a) Si U est la matrice nulle, alors T_U est l'application nulle, par le théorème du rang $\dim H_U=\dim E=n^2$.

   (b) Si $U=(u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ n'est pas la matrice nulle, alors il existe $(j_0,i_0)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $u_{j_0i_0}\neq 0$. Le calcul de $UE_{i_0j_0}$ donne

$$UE_{i_0j_0}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}u_{k\ell}E_{k\ell}E_{i_0j_0}=\sum_{k=1}^{n}u_{ki_0}E_{kj_0}$$

   Donc $T_U\,(E_{i_0j_0})=T\,(UE_{i_0j_0})=T\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_{ki_0}E_{kj_0}\right)=u_{j_0i_0}\neq 0$

   On tire que $\operatorname{Im}T_U=\mathbb{R}$ et par le théorème du rang $\dim H_U=n^2-1$.

4. Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on note $T_{i\,j}=T_{E_{j\,i}}$.

   (a) Soit $(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$, on a $E_{ji}E_{k\ell}=\delta_{ik}E_{j\ell}$, donc

$$T_{ij}\,(E_{k\ell})=T\,(E_{ji}E_{k\ell})=\delta_{ik}T\,(E_{j\ell})=\delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

   (b) Montrons que $(T_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de E^*.
   La famille contient exactement n^2 éléments et $\dim E^\star=n^2$, donc il suffit de montrer sa liberté. Soit, alors $(\alpha_{i\,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathbb{R}^{n^2}$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i\,j}T_{i\,j}=0$.
   Pour $(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$, on a

$$0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i\,j}T_{i\,j}\,(E_{k\ell})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i\,j}\delta_{ik}\delta_{j\ell}=\alpha_{k\ell}$$

5. L'application φ de E vers E^* est linéaire. En effet : Soit $U, V \in E$ et $\lambda \in R$, alors pour tout $M \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda U + V)(M) &= T_{\lambda U+V}(M) \\
&= T((\lambda U + V)M) = T(\lambda UM + VM) \\
&= \lambda T(UM) + T(VM) = \lambda T_U(M) + T_V(M) \\
&= (\lambda\varphi(U) + \varphi(V))(M)
\end{aligned}$$

Donc $\varphi(\lambda U + V) = \lambda\varphi(U) + \varphi(V)$.
D'après la question $II.2$) l'application φ est injective. Vu $\dim E = \dim E^*$, alors φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels

6. On considère un hyperplan vectoriel H de E.
   (a) $\dim H = n^2 - 1$
   (b) Soit $A \in E \setminus H$, alors $H \cap \mathbf{Vect}(A) = \{0\}$ et puisque $\dim H + \dim \mathbf{Vect}(A) = \dim E$ on obtient $E = H \oplus \mathrm{Vect}(A)$.
   (c) Pour $x \in E$, il existe un unique $(x_H, \lambda_x) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $x = x_H + \lambda_x.A$. On définit ψ par $\psi(x) = \lambda_x$.
   — ψ est une forme linéaire ?
   Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe deux couples uniques $(x_H, y_H) \in H^2$ et $(\alpha_x, \alpha_y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = x_H + \alpha_x.A$ et $y = y_H + \alpha_y.A$. On écrit
   $$\lambda.x + y = \underbrace{\lambda.x_H + y_H}_{\in H} + \underbrace{(\lambda.\alpha_x + \alpha_y).A}_{\in \mathbf{Vect}(A)}$$
   Puis $\psi(\lambda x + y) = \lambda.\alpha_x + \alpha_y = \lambda.\psi(x) + \psi(y)$, donc ψ est linéaire
   — $\mathrm{Ker}(\psi)$?
   Soit $x \in E$, alors $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$ équivaut à $\alpha_x = 0$ si, et seulement, si $x \in H$. Donc $\mathrm{Ker}(\psi) = H$
   (d) ψ est une forme linéaire, d'après la question précédente, il existe un élément $U \in E$ tel que $\ell = T_U$, puis $H = \mathrm{Ker}\psi = \mathrm{Ker}(T_U) = H_U$

Partie II: Tout hyperplan contient une matrice inversible

Pour $1 \leqslant r \leqslant n$, on note $R_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i\,i}$.

7. (a) Les vecteurs colonnes de P sont exactement les éléments de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, donc elle est de rang n. Autrement P est inversible.
   (b)
   - Si $r = n$, alors $R_r = \mathrm{I}_n$ et $T_{R_r}(P) = \mathrm{Tr}(P) = 0$
   - Si $r = 1$, alors $R_1 = E_{11}$ et $R_1 P = E_{1n}$ puis $T_{R_r}(P) = \mathrm{Tr}(P) = 0$
   - Sinon, on a bien $P = E_{1,n} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i}$. Par multiplication

   $$\begin{aligned}
   R_r P &= \sum_{j=1}^{r} E_{j,j}E_{1,n} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n-1} E_{j,j}E_{i+1,i} \\
   &= \sum_{j=1}^{r} \delta_{j,1}E_{j,n} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{j,i+1}E_{j,i} \\
   &= E_{1,n} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{j,i+1}E_{j,i} \\
   &= E_{1,n} + \sum_{i=1}^{r-1} E_{i+1,i}
   \end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Tr}(R_r P) = 0$

   Ce qui prouve que P appartient à l'hyperplan H_{R_r}.

8. D'après ce qui précède il existe U non nulle telle $H = H_U$. Posons $r = \mathbf{rg}(U)$, il existe deux matrices S_1 et S_2 telles que $S_1.U.S_2 = R_r$.
Posons $Q = S_2PS_1$, cette matrice est inversible car elle est produit de matrices inversibles et

$$T_U\left(Q\right) = \mathrm{Tr}\left(US_2PS_1\right) = \mathrm{Tr}\left(S_1US_2P\right) = \mathrm{Tr}\left(R_rP\right) = 0$$

Donc $Q \in H$.
Bilan : Tout hyperplan de $M_n\left(\mathbb{R}\right)$ contient au moins une matrice inversible

Partie III: Les hyperplans de $M_n(\mathbb{R})$ stable par produit

9. (a) Comme H un hyperplan de $M_n\left(\mathbb{R}\right)$ et $\mathrm{I}_n \notin H$, alors $M_n\left(\mathbb{R}\right) = H \oplus \mathbf{Vect}(\mathrm{I}_n)$
   (b) p est une application linéaire, alors il suffit de de montrer que $p(\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n$ et que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors $p\left(A \times B\right) = p\left(A\right) \times p\left(B\right)$.
   —
   — Décomposons A et B selon la somme directe $M_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathbf{Vect}(\mathrm{I}_n)$:

$$A = H_A + \underbrace{\lambda_A\,\mathrm{I}_n}_{=p(A)}; \quad B = H_B + \underbrace{\lambda_B\,\mathrm{I}_n}_{=p(B)}$$

   alors :

$$A \times B = \underbrace{H_A \times H_B + \lambda_B\,H_A + \lambda_A\,H_B}_{\in H} + \underbrace{\lambda_A\lambda_B\,\mathrm{I}_n}_{\in\mathbf{Vect}(\mathrm{I}_n)}$$

   Puis

$$p\left(A \times B\right) = \lambda_A\lambda_B\,\mathrm{I}_n = p\left(A\right) \times p\left(B\right)$$

10. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Posons $A = H_A + \lambda\,\mathrm{I}_n$ avec $H_A \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; d'où :

$$A^2 = \underbrace{\left(H_A^2 + 2\lambda\,H_A\right)}_{\in H} + \lambda^2\,\mathrm{I}_n$$

   Si $A^2 \in H$, alors $\lambda^2 = 0$ c'est-à-dire $\lambda = 0$ et donc $A \in H$.
11. (a) On sait que $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{I,\ell}$, donc si $i \neq j$, alors $E_{i,j}^2 = 0 \in H$ et donc $f_{i,j} \in A$ d'après la question précédente.
    (b) Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$. Considérons un indice $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$; on observe que $E_{i,i} = E_{i,j} \times F_{j,i} \in H$.
12. Comme $\mathrm{I}_n = \sum_{i=1}^{n} E_{i,i}$, Il résulte que $\mathrm{I}_n \in H$, contrairement à l'hypothèse. On a donc établi par l'absurde que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$, stable par multiplication est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{R})$