# DM N°6 ( pour le 06/12/2013)

## EXERCICE 1 : Polynômes de Hilbert.

On définit la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par

$$\mathrm{H}_0 = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_n = \frac{1}{n!}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\cdots(\mathrm{X}-n+1)$$

**1.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{H}_n(x) \in \mathbb{Z}$.
En déduire que le produit de $n$ entiers consécutifs dans $\mathbb{Z}$ est divisible par $n!$.

**2.** Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{A}(x) \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'alors $\mathrm{A} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.

**3.** Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{A}(x) \in \mathbb{Z}$. A-t-on $\mathrm{A} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ ?

**4.** Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré $\leqslant n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) $\mathrm{P}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ ;
(b) $\mathrm{P}(k) \in \mathbb{Z}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$ ;
(c) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{P}(k), \mathrm{P}(k+1), \ldots, \mathrm{P}(k+n)$ sont dans $\mathbb{Z}$ ;
(d) il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tels que $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{H}_k$.

---

## EXERCICE 2 : Polynômes de Tchebychev de 1ère espèce.

**1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir l'existence et l'unicité d'un polynôme $\mathrm{T}_n \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\cos x) = \cos(nx)$$

Déterminer le degré de $\mathrm{T}_n$, sa parité, son coefficient dominant, et une relation de récurrence entre $\mathrm{T}_n, \mathrm{T}_{n+1}$ et $\mathrm{T}_{n+2}$.
Déterminer les racines de $\mathrm{T}_n$, et décomposer $\mathrm{T}_n$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

**2.** Montrer que l'on a également : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{ch}(nx)$.

**3.** Montrer que $\mathrm{T}_n$ est solution de l'équation différentielle : $(1-x^2)y" - xy' + n^2 y = 0$.
En déduire une expression des coefficients de $\mathrm{T}_n$.

---

## EXERCICE 3 : Calcul de $\zeta(2)$.

**1.** Montrer que, pour tout $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{\sin(p\alpha)}{\sin^p \alpha} = \binom{p}{1}\cot^{p-1}\alpha - \binom{p}{3}\cot^{p-3}\alpha + \binom{p}{5}\cot^{p-5}\alpha - \ldots$$

**2.** Résoudre l'équation : $\displaystyle\binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \binom{2n+1}{5}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n = 0$.
Que vaut la somme de ses racines ?

**3.** En utilisant les relations

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha \text{ et } \sin\alpha \leqslant \alpha \leqslant \tan\alpha \ (0 < \alpha < \pi/2)$$

démontrer :

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \leqslant \frac{\pi^2}{3}\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$$

En déduire la valeur de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

---

## EXERCICE 4 : Polynômes de Bernoulli et quelques applications.

**1. a)** Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\mathrm{Q}' = \mathrm{P} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

**b)** En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

- $\mathrm{B}_0 = 1$ ;
- $\forall n \geqslant 1,\ \mathrm{B}_n' = n\mathrm{B}_{n-1}$ ;
- $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \mathrm{B}_n(0)$. Les $\mathrm{B}_n$ sont les *polynômes de Bernoulli* et les $b_n$ sont les *nombres de Bernoulli*.

**c)** Expliciter $\mathrm{B}_n$ et $b_n$ pour $n \in [\![0,4]\!]$.

**2. a)** Quel est le degré de $\mathrm{B}_n$ pour $n \geqslant 1$ ?

**b)** Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $\mathrm{B}_n(0) = \mathrm{B}_n(1)$.

**c)** Prouver par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}\mathrm{X}^k\,.$$

**d)** En déduire pour $n \geqslant 1$ une expression de $b_n$ en fonction de $b_0, \dots, b_{n-1}$. Calculer $b_5$ et $b_6$.

**e)** Montrer que les polynômes $\mathrm{B}_n$ sont à coefficients rationnels.

**f)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mathrm{C}_n = (-1)^n \mathrm{B}_n(1-\mathrm{X})\,.$$

Montrer, en utilisant la définition des polynômes de Bernouli que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{C}_n = \mathrm{B}_n$.

**g)** En déduire que :

- $\forall n \geqslant 1,\ b_{2n+1} = 0$ ;
- $\forall n \geqslant 0,\ \mathrm{B}_{2n+1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

**3.** *Une application arithmétique*

**a)** Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$ :

$$\mathrm{B}_n(\mathrm{X}+1) - \mathrm{B}_n(\mathrm{X}) = n\mathrm{X}^{n-1}\,.$$

**b)** Soient $p \geqslant 1$ et $\mathrm{N} \geqslant 0$ deux entiers. On pose $\mathrm{S}_p(\mathrm{N}) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} k^p$.

Montrer que

$$\mathrm{S}_p(\mathrm{N}) = \frac{\mathrm{B}_{p+1}(\mathrm{N}+1) - b_{p+1}}{p+1}.$$

**c)** Calculer explicitement, en fonction de l'entier $\mathrm{N}$, les sommes $\mathrm{S}_p(\mathrm{N})$ pour $p = 1, 2, 3$.

**4.** *Une application analytique*

**a)** On admet que l'on a l'équivalent :

$$b_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} (-1)^{p+1}\left(\frac{p}{\pi \mathrm{e}}\right)^{2p}\sqrt{16\pi p}.$$

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!} t^n$ est égal à $2\pi$ (on pourra utiliser la formule de Stirling).

**b)** Calculer le produit au sens de Cauchy des séries entières

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{b_n}{n!} t^n\right)$$

et en déduire que, pour tout $t \in ]-2\pi, 2\pi[$, on a

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} t^n.$$

**c)** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in ]-2\pi, 2\pi[$, on a

$$\frac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n(x)}{n!} t^n.$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆