

## Fonctions génératrices des moments [CNC-2016]

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, par la suite, les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles discrètes ou à densité. Si  $X$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , la fonction génératrice des moments de  $X$ , lorsqu'elle existe, est la fonction numérique de la variable réelle  $t$ ,  $M_X : t \longrightarrow \mathbb{E}(e^{tX})$ , où  $\mathbb{E}(e^{tX})$  désigne l'espérance de la variable aléatoire  $e^{tX}$ .

### Partie I: Variables aléatoires discrètes finies

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs  $x_1, \dots, x_r$  avec les probabilités respectives  $p_1, \dots, p_r$ , où  $r \in \mathbb{N}^*$ . On définit la fonction  $\varphi_X$  sur  $\mathbb{R}^*$  par,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \varphi_X(t) = \frac{1}{t} \ln(M_X(t))$$

1. Déterminer  $M_Z$ , lorsque  $Z$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ ,  $p \in [0, 1]$ .
2. Montrer que  $M_X$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et que pour tout entier naturel  $k$ ,  $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$ .
3. (a) Montrer que  $\varphi_X$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^*$  et prolongeable par continuité en 0. On pose  $\varphi_X(0) = \mathbb{E}(X)$  et on note encore  $\varphi_X$  la fonction ainsi prolongée.  
(b) Démontrer que  $\varphi_X$  est dérivable en 0 et calculer  $\varphi'_X(0)$  en fonction de la variance  $\mathbb{V}(X)$  de  $X$ .
4. (a) Montrer que pour tout  $u \leq 0$ ,  $e^u \leq 1 + u + \frac{1}{2}u^2$ ;  
(b) Montrer que si  $X$  ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\varphi_X(t) \leq \mathbb{E}(X) + \frac{t}{2} \mathbb{E}(X^2)$$

5. (a) Pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq r$ , on note  $f_i$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $t \longmapsto e^{tx_i}$ . Montrer que la famille  $(f_1, \dots, f_r)$  est libre.  
(b) En déduire que deux variables discrètes finies  $X$  et  $Y$  ont la même loi si, et seulement si, les fonctions  $\varphi_X$  et  $\varphi_Y$  sont égales.
6. Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont des variables discrètes finies indépendantes, alors,

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$$

7. En déduire  $M_X$ , lorsque  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $s$  et  $p$ ,  $s$  est un entier naturel non nul et  $0 \leq p \leq 1$ .
8. On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  est symétrique si  $X$  et  $-X$  ont la même loi.  
Montrer que  $\varphi_X$  est impaire si, et seulement si,  $X$  est une variable aléatoire réelle symétrique.
9. On considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires discrètes finies mutuellement indépendantes sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , qui suivent la même loi que  $X$ . On note  $m$  l'espérance de  $X$  et  $\sigma$  son écart-type que l'on suppose strictement positif.

On pose, pour tout entier naturel non nul,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$ .

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$  et tout réel non nul  $t$ ,

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

- (b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{S_n^*}(t) = \frac{t}{2}$ .

### Partie II: Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète réelle infinie, notons  $I_X$  l'ensemble des réels  $t$  pour lesquels  $M_X$  existe.

10. (a) Montrer que, pour tous réels  $a, b, c$  tels que  $a \leq b \leq c$  et tout réel  $x$ ,  $e^{bx} \leq e^{ax} + e^{cx}$ .  
(b) En déduire que  $I_X$  est un intervalle contenant 0.
11. Soit  $Y$  une variable aléatoire discrète réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Déterminer la fonction génératrice des moments  $M_Y$  de  $Y$ .
12. On suppose que la fonction  $M_X$  est définie sur un intervalle de la forme  $] -a, a[$ , ( $a > 0$ ). Notons  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une énumération des valeurs de  $X$ .  
Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in ] -a, a[$ ,  $u_n(t) = P(X = x_n)e^{tx_n}$  et  $x_n$ . Soit  $\alpha > 0$  tel que  $[-\alpha, \alpha] \subset ] -a, a[$ , et soit  $\rho \in ]\alpha, a[$ .

- (a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , tout  $t \in ] -\alpha, \alpha[$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq P(X = x_n)(|x_n|)^k e^{\alpha|x_n|}$$

où  $u_n^{(k)}$  désigne la dérivée  $k$ -ème de la fonction  $u_n$ .

- (b) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $M_k > 0$ , pour tout  $t \in ] -\alpha, \alpha[$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq M_k P(X = x_n) e^{\rho|x_n|}.$$

- (c) En déduire que  $M_X$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -a, a[$ , et que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$

13. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

### Partie III: Cas des variables aléatoires à densité

Si  $X$  est une variable aléatoire à densité, on note  $I_X$  l'intervalle de  $\mathbb{R}$ , qui contient 0, pour lequel  $M_X$  existe.

14. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à densité indépendantes, qui admettent respectivement des fonctions génératrices des moments  $M_X$  et  $M_Y$ , montrer que

$$\forall t \in I_X \cap I_Y, \quad M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

15. Soit  $X$  une variable aléatoire à densité possédant une fonction génératrice des moments  $M_X$  et une densité  $f$ . On suppose que cette fonction génératrice des moments soit définie sur  $I_X = ]a, b[$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < 0 < b$ , et soit  $s$  un réel tel que,  $0 < s < \min(-a, b)$ .

- (a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t^k| \leq \frac{k!}{s^k} e^{s|t|}$ .

- (b) En déduire que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{E}(|X|^k)$  est finie.

- (c) Montrer que, pour tout  $t \in ] -s, s[$ ,  $M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X^k) \frac{t^k}{k!}$

- (d) En déduire que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$

**Partie I: Cas particulier : variables aléatoires discrètes finies**

1.  $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $e^{tZ}$  est finie, par le théorème du transfert, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$M_Z(t) = \mathbb{P}(Z = 0) + e^t \mathbb{P}(Z = 1) = p(e^t - 1) + 1$$

2.  $X$  est finie, alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$  la variable  $e^{tX}$  est finie, en particulier elle admet une espérance, par le théorème du transfert, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^r e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^r p_i e^{tx_i}$$

Donc  $M_X$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , comme somme de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et pour tout entier naturel  $k$ ,

$$M_X^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^r x_i^k e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i)$$

En particulier  $M_X^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^r x_i^k \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X^k)$

3. (a) La famille  $([X = x_i])_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  est un système complet d'événements, en particulier  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ . En outre pour

tous  $t \in \mathbb{R}$  et  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on a  $e^{tx_i} > 0$ , donc  $M_X(t) = \sum_{i=1}^r e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i) > 0$ . Ainsi  $\varphi_X$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

Le développement limité à l'ordre 1 en 0 de  $M_X$  est donné par

$$M_X(t) = M_X(0) + tM_X'(0) + o(t) = 1 + t\mathbb{E}(X) + o(t)$$

Par composition  $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(X) + o(1)$ , donc  $\varphi_X$  est prolongeable par continuité en 0.

- (b) Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $M_X$  est donné par

$$M_X(t) = M_X(0) + tM_X'(0) + \frac{M_X''(0)}{2}t^2 + o(t^2) = 1 + t\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2}t^2 + o(t^2)$$

Par composition

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \frac{1}{t} \ln(M_X(t)) \\ &= \frac{1}{t} \ln \left( 1 + t\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2}t^2 + o(t^2) \right) \\ &= \frac{1}{t} \left( t\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2}t^2 - \frac{\left( t\mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2}t^2 \right)^2}{2} + o(t^2) \right) \\ &= \mathbb{E}(X) + \frac{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}{2}t + o(t) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi_X$  est dérivable en 0 et  $\varphi_X'(0) = \frac{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}{2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{2}$

4. (a) Soit  $u \leq 0$ , d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{2} e^t dt$$

La fonction  $t \mapsto \frac{(u-t)^2}{2} e^t$  est continue et positive sur  $[u, 0]$ , donc  $\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2} e^t dt \leq 0$ , soit

$$e^u \leq 1 + u + \frac{1}{2}u^2$$

(b) Soit  $t > 0$ , comme  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  on a  $x_i \leq 0$ , alors

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad e^{tx_i} \leq 1 + tx_i + \frac{t^2}{2}x_i^2$$

Par le théorème du transfert et par positivité de la probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tX}) &= \sum_{i=1}^r e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^r \left(1 + tx_i + \frac{t^2}{2}x_i^2\right) \mathbb{P}(X = x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^r \mathbb{P}(X = x_i) + t \sum_{i=1}^r x_i \mathbb{P}(X = x_i) + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^r x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) \\ &\leq 1 + t\mathbb{E}(X) + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}(X^2) \end{aligned}$$

Finalement, la croissance de  $\ln$  et l'inégalité de convexité:  $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$ , donnent

$$\varphi_X(t) \leq \mathbb{E}(X) + \frac{t}{2}\mathbb{E}(X^2)$$

Une telle inégalité reste valable si  $t = 0$ , car  $\varphi_X(0) = \mathbb{E}(X)$

5. (a) Quitte à réordonner les  $x_i$ , on peut supposer que  $x_1 > x_2 > \dots > x_r$ . Supposons qu'il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  tels que  $\sum_{i=1}^r \lambda_i f_i = 0$ . Cela signifie que, quelque soit  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $\sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(t) = 0$ , autrement dit pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :  $\sum_{i=1}^r \lambda_i e^{tx_i} = 0$ . Factorisons par  $e^{tx_1}$  :  $e^{tx_1} \sum_{i=1}^r \lambda_i e^{t(x_i-x_1)} = 0$ . Mais  $e^{tx_1} \neq 0$  donc :  $\sum_{i=1}^r \lambda_i e^{t(x_i-x_1)} = 0$ . Lorsque  $t \rightarrow +\infty$  alors  $e^{t(x_i-x_1)} \rightarrow 0$  (pour tout  $i \geq 2$ , car  $x_i - x_1 < 0$ ). Donc pour  $i \geq 2$ ,  $\lambda_i e^{t(x_i-x_1)} \rightarrow 0$  et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :  $\lambda_1 = 0$ .

Le premier coefficients est donc nul. On repart de la combinaison linéaire qui est maintenant  $\sum_{i=2}^r \lambda_i f_i = 0$  et en appliquant le raisonnement ci-dessus on prouve par récurrence  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ . Donc la famille  $(f_1, \dots, f_r)$  est libre.

- (b)  $\Rightarrow$  Si  $X$  et  $Y$  suivent la même loi, alors  $X(\Omega) = Y(\Omega)$  et  $\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$ . On tire  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$  et par le théorème du transfert pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(Y = x) = \mathbb{E}(e^{tY})$$

Donc les fonctions  $\varphi_X$  et  $\varphi_Y$  sont égales;

$\Leftrightarrow$  Posons  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$  l'ensemble des valeurs prises effectivement par  $X$  et  $Y$  tels que  $x_1 > \dots > x_n$  et  $y_1 > \dots > y_m$ . L'hypothèse  $\varphi_X = \varphi_Y$  donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n e^{tx_i} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^m e^{ty_j} \mathbb{P}(Y = y_j)$$

Par unicité de l'écriture  $n = m$ ,  $x_i = y_i$  et  $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(Y = y_i)$

6. Soit  $t \in \mathbb{R}^*$ , les deux variables  $e^{tX}$  et  $e^{tY}$  sont indépendantes, car  $X$  et  $Y$  le sont, donc

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(e^{t(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{tX} e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{tX}) \mathbb{E}(e^{tY})$$

Par définition, on a

$$\varphi_{X+Y}(t) = \frac{1}{t} \ln(M_{X+Y}(t)) = \frac{1}{t} \ln(\mathbb{E}(e^{tX})) + \frac{1}{t} \ln(\mathbb{E}(e^{tY})) = \varphi_X(t) + \varphi_Y(t)$$

Pour  $t = 0$ , on a  $\varphi(0) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \varphi_X(0) + \varphi_Y(0)$ . Bref

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$$

7.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(s, p)$ , alors  $X = \sum_{i=1}^s X_i$ , où  $X_1, \dots, X_s$  sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .  
 Pour  $t \in \mathbb{R}$ , les variables  $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_s}$  sont indépendantes, donc

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^s e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^s \mathbb{E}(e^{tX_i}) = (p(e^t - 1) + 1)^s$$

8.  $\Leftarrow$ ) Supposons que  $X$  est une variable aléatoire réelle symétrique, alors  $X(\Omega) = -X(\Omega)$  et pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on a  $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x)$ .  
 On montre que  $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{-tX}) = \mathbb{E}(e^{tX})$ , pour le faire on fixe  $t \in \mathbb{R}$ , par le théorème du transfert

$$\mathbb{E}(e^{-tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{-tx} \mathbb{P}(X = x)$$

l'application  $x \mapsto -x$  est une bijection de  $X(\Omega)$  vers lui même, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-tX}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(X = -x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} \mathbb{P}(X = x) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX}) \end{aligned}$$

Donc pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ , on a  $\varphi_X(-t) = -\varphi_X(t)$  et pour  $t = 0$ , on a  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(-X)$ , cela entraîne  $\mathbb{E}(X) = 0$ , c'est-à-dire  $\varphi_X(0) = 0$ . On conclut alors  $\varphi_X$  est impaire.

$\Rightarrow$ ) Soit  $t \in \mathbb{R}^*$ , on a

$$\varphi_{-X}(t) = \frac{1}{t} \ln(\mathbb{E}(e^{-tX})) = -\varphi_X(-t) = \varphi_X(t)$$

D'autre part  $\varphi_X(0) = 0$ , car  $\varphi_X$  est impaire, donc  $\varphi_{-X}(0) = \mathbb{E}(-X) = -\mathbb{E}(X) = 0$ , ceci montre que  $\varphi_X = \varphi_{-X}$ . D'après la question 5b,  $X$  et  $-X$  ont la même loi

9. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}^*$ . On a  $\mathbb{E}(S_n) = nm$  et  $\mathbb{V}(S_n) = n\sigma^2$ , d'autre part les variables  $t \frac{X_1 - m}{\sigma\sqrt{n}}, \dots, t \frac{X_n - m}{\sigma\sqrt{n}}$  sont finies et mutuellement indépendantes, et par un calcul direct

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n^*}(t) &= \frac{1}{t} \ln(\mathbb{E}(e^{tS_n^*})) = \frac{1}{t} \ln\left(\mathbb{E}\left(e^{t \sum_{i=1}^n \frac{X_i - m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{t} \ln\left(\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{t \frac{X_i - m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) = \frac{1}{t} \ln\left(\prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{t \frac{X_i - m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) \quad \text{Par indépendance} \\ &= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \ln\left(\mathbb{E}\left(e^{t \frac{X_i - m}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \ln\left(e^{\frac{-tm}{\sqrt{n}\sigma}} \mathbb{E}\left(e^{t \frac{X_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \ln\left(e^{\frac{-tm}{\sqrt{n}\sigma}}\right) + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \ln\left(\mathbb{E}\left(e^{t \frac{X_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right)\right) \\ &= \frac{-nm}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{i=1}^n \varphi_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\ &= \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad \text{car } \forall i, \varphi_{X_i} = \varphi_X \end{aligned}$$

(b) Le développement limité à l'ordre 1 en 0 de  $\varphi_X$  donne

$$\begin{aligned}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= \varphi_X(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\varphi'_X(0) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{E}(X) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\frac{\mathbb{V}(X)}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= m + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\frac{\sigma^2}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\varphi_{S_n^*}(t) &= \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(m + \frac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \frac{t}{2} + o(1)\end{aligned}$$

On en déduit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{S_n^*}(t) = \frac{t}{2}$ .

## Partie II: Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

10. (a) On peut écrire  $b = \lambda a + (1 - \lambda)c$ , avec  $\lambda \in [0, 1]$ , et par convexité de la fonction exponentielle

$$e^{bx} = e^{\lambda ax + (1-\lambda)cx} \leq \lambda e^{ax} + (1 - \lambda)e^{cx} \leq e^{ax} + e^{cx}$$

(b) •  $1 \in I_X$ , car  $\mathbb{E}(e^{0X}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$

• Soit  $a, c \in I_X$  tel que  $a \leq c$ . Montrons que  $[a, c] \subset I_X$ . D'après la question précédente, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{bx} \leq e^{ax} + e^{cx}$ , donc  $e^{bX} \leq e^{aX} + e^{cX}$ , et comme les deux variables positives admettent des espérances, alors la variable positive  $e^{bX}$  admet une espérance, donc  $b \in I_X$ , ainsi l'inclusion  $[a, c] \subset I_X$ . On déduit  $I_X$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

11. Soit  $t \in \mathbb{R}$ , la variable  $e^{tX}$  admet une espérance si, et seulement, si la série à termes positifs  $\sum_{n \geq 0} e^{tn} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

converge. Or la série exponentielle  $\sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!}$  converge de somme  $e^{\lambda e^t}$ , donc  $M_Y$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_Y(t) = e^{\lambda e^t - \lambda}$$

12. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}$ , l'application  $u_n : t \in ]-\alpha, \alpha[ \mapsto P(X = x_n)e^{tx_n}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et ,

$$u_n^{(k)}(t) = P(X = x_n)x_n^k e^{tx_n}$$

les inégalités  $e^{tx_n} \leq e^{|t||x_n|} \leq e^{\alpha|x_n|}$  donnent

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq P(X = x_n)|x_n|^k e^{\alpha|x_n|}$$

(b) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $\psi_k : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^k e^{(\alpha-\rho)x}$  est continue, positive, strictement décroissante sur  $\left[\frac{k}{\rho-\alpha}, +\infty\right[$  et strictement croissante sur  $\left]0, \frac{k}{\rho-\alpha}\right]$  il existe  $M_k = \psi_k\left(\frac{k}{\rho-\alpha}\right) > 0$ ,

Pour  $k = 0$ , la fonction  $\psi_k : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{(\alpha-\rho)x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , alors  $M_0 = 1$ .

Bref pour tout  $t \in ]-\alpha, \alpha[$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq P(X = x_n)|x_n|^k e^{\alpha|x_n|} = P(X = x_n)\psi_k(|x_n|)e^{\rho|x_n|} \leq M_k P(X = x_n)e^{\rho|x_n|}.$$

$t$	0	$\frac{k}{\rho-\alpha}$	$+\infty$
$\psi'_k(t)$	+	0	-
$\psi_k$	0	$M_k$	0

- (c) • Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-\alpha, \alpha[$   
 • Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $e^{\rho|x_n|} \leq e^{\rho x_n} + e^{-\rho x_n}$  et  $-\rho, \rho \in ]-\alpha, \alpha[$ , donc la série à termes positifs  $\sum_{n \geq 0} P(X = x_n) |e^{\rho|x_n|}|$  converge et, par suite, la série  $\sum_{n \geq 0} u_n^{(k)}$  converge normalement sur tout segment  $[-a, a]$  inclus dans  $]-\alpha, \alpha[$

Donc, par le théorème de dérivation terme à terme,  $M_X = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$   
 est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-\alpha, \alpha[$ , et

$$\forall t \in ]-\alpha, \alpha[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k e^{tx_n} \mathbb{P}(X = x_n)$$

En particulier pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la série  $\sum_{n \geq 0} x_n^k \mathbb{P}(X = x_n)$  est absolument convergente, donc  $X$  admet un moment d'ordre  $k$ . Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$$

13. Dans ce cas  $M_Y : t \mapsto e^{\lambda e^t - \lambda}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} M_Y'(t) &= \lambda e^t e^{\lambda e^t - \lambda} \\ M_Y'(0) &= \lambda \\ M_Y''(t) &= \lambda^2 e^t e^{\lambda e^t - \lambda} + \lambda e^{2t} e^{\lambda e^t - \lambda} \\ M_Y''(0) &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Alors  $\mathbb{E}(Y) = M_Y'(0) = \lambda$  et par la formule de Huygens kœnig

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M_Y''(0) - M_Y'(0)^2 = \lambda$$

### Partie III: Cas des variables aléatoires à densité

14. Soit  $t \in I_X \cap I_Y$ , les deux variables  $e^{tX}$  et  $e^{tY}$  sont indépendantes, car  $X$  et  $Y$  le sont. Comme  $e^{tX}$  et  $e^{tY}$  admettent des espérances alors, par indépendance,  $e^{t(X+Y)} = e^{tX} e^{tY}$  admet une espérance et

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(e^{t(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{tX} e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{tX}) \mathbb{E}(e^{tY}) = M_X(t) M_Y(t)$$

**Remarque :** Les deux applications ne sont pas forcément égales mais elles coïncident sur  $I_X \cap I_Y$

15. (a) Soit  $t \in \mathbb{R}$ , la série à termes positifs  $\sum_{k \geq 0} \frac{|st|^k}{k!}$  converge de somme  $e^{s|t|}$ , donc pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{|st|^k}{k!} \leq e^{s|t|}$

$$\text{ou encore } |t^k| \leq \frac{k!}{s^k} e^{s|t|}.$$

- (b) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , d'après la question précédente

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |t^k| \leq \frac{k!}{s^k} e^{s|t|} \leq \frac{k!}{s^k} (e^{st} + e^{-st})$$

Soit

$$|X|^k \leq \frac{k!}{s^k} (e^{sX} + e^{-sX})$$

Les deux variables positives  $e^{sX}$  et  $e^{-sX}$  admettent des espérances car  $-s, s \in ]a, b[$ , alors par comparaison, la variable  $|X|^k$  admet une espérance.

**Remarque :** On a aussi l'inégalité  $\mathbb{E}(|X|^k) \leq \frac{k!}{s^k} (M_X(s) + M_X(-s))$  qui sera utilisée à la question suivante

- (c) Soit  $-\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_r = +\infty$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$  la fonction  $f$  est continue sur  $]a_i, a_{i+1}[$ . On va appliquer le théorème de convergence dominée sur chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$ .

Fixons  $t \in ]-s, s[$

- Pour tout  $k \in \mathbb{K}$ , l'application  $f_k : x \mapsto \frac{t^k x^k}{k!} f(x)$  est continue sur  $]a_i, a_{i+1}[$  et intégrable car  $\mathbb{E}(|X|^k)$  est finie
- La série  $\sum_{k \geq 0} f_k$  converge simplement sur  $]a_i, a_{i+1}[$  de somme  $x \mapsto e^{tx} f(x)$  qui est continue sur  $]a_i, a_{i+1}[$
- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_k(x)| dx &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left| \frac{t^k x^k}{k!} f(x) \right| dx \\ &\leq \frac{|t|^k}{k!} \mathbb{E}(|X|^k) \\ &\leq \frac{|t|^k}{k!} \frac{k!}{s^k} (M_X(s) + M_X(-s)) \\ &\leq (M_X(s) + M_X(-s)) \frac{|t|^k}{s^k} \end{aligned}$$

et la série géométrique du terme général  $\frac{|t|^k}{s^k}$  converge. Bref la série du terme général  $\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f_k(x)| dx$  converge

Donc d'après le théorème de la convergence dominée, on peut intégrer terme à terme, soit

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{tx} f(x) dx &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k x^k}{k!} f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{a_i}^{a_{i+1}} x^k f(x) dx \end{aligned}$$

Ceci vrai pour tout  $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ , alors on conclut par la relation de Chasles que, pour tout  $t \in ]-s, s[$ ,  $M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X^k) \frac{t^k}{k!}$

**Remarque :** On ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur  $\mathbb{R}$ , car  $f$  n'est pas forcément continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$

- (d)  $M_X$  est développable en série entier en 0, alors elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -s, s[$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!}$$