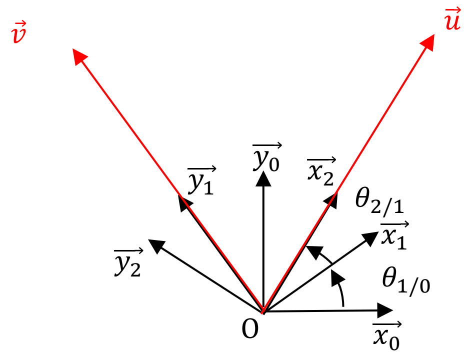
Exercice 1: Produit scalaire et vectoriel



$$\vec{u} = u\overrightarrow{x_2}$$
$$\vec{v} = v\overrightarrow{y_1}$$

Question 1: Expliciter l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1}}\right)$ en fonction des angles proposés

$$\left(\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_1}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1}}\right) = \theta_{1/2} + \frac{\pi}{2}$$

Question 2: En utilisant la formule de définition, calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$$\vec{u}.\vec{v} = u\overrightarrow{x_2}.v\overrightarrow{y_1} = uv\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{y_1} = uv\cos\left(\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1}}\right)$$
$$\vec{u}.\vec{v} = |uv|\cos\left(\theta_{1/2} + \frac{\pi}{2}\right) = -|uv|\sin\theta_{1/2} = |uv|\sin\theta_{2/1}$$

Comme précisé en cours, ne pas écrire :

$$\vec{u}.\vec{v} = u\overrightarrow{x_2}.v\overrightarrow{y_1} = |uv|\cos\left(\widehat{u\overrightarrow{x_2},v\overrightarrow{y_1}}\right)$$

Question 3: En utilisant la formule de définition, calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = u\overrightarrow{x_2}\wedge v\overrightarrow{y_1} = uv\sin\left(\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_1}}\right)\overrightarrow{z_0}$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = uv\sin\left(\theta_{1/2} + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{z_0} = uv\cos\theta_{1/2}\,\overrightarrow{z_0} = uv\cos\theta_{2/1}\,\overrightarrow{z_0}$$
$$\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$$

Comme précisé en cours, ne pas écrire :

$$\vec{u}.\vec{v} = u\overrightarrow{x_2}\wedge v\overrightarrow{y_1} = |uv|\sin\left(\widehat{u\overrightarrow{x_2},v\overrightarrow{y_1}}\right)$$

Question 4: Projeter $\vec{v}$ dans la base 2

$$\vec{v} = v\overrightarrow{y_1}$$
$$\overrightarrow{y_1} = -\sin\theta_{1/2}\,\overrightarrow{x_2} + \cos\theta_{1/2}\,\overrightarrow{y_2}$$
$$\vec{v} = -v\sin\theta_{1/2}\,\overrightarrow{x_2} + v\cos\theta_{1/2}\,\overrightarrow{y_2}$$

Question 5: En faisant intervenir des vecteurs de la même base, calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$$\vec{u}.\vec{v} = u\overrightarrow{x_2}.v\overrightarrow{y_1} = u\overrightarrow{x_2}.\left(-v\sin\theta_{1/2}\overrightarrow{x_2} + v\cos\theta_{1/2}\overrightarrow{y_2}\right)$$
$$\vec{u}.\vec{v} = uv\left(-\sin\theta_{1/2}\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{x_2} + \cos\theta_{1/2}\overrightarrow{x_2}.\overrightarrow{y_2}\right)$$
$$\vec{u}.\vec{v} = -uv\sin\theta_{1/2} = uv\sin\theta_{2/1}$$

Question 6: En faisant intervenir des vecteurs de la même base, calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = u\overrightarrow{x_2}\wedge v\overrightarrow{y_1} = u\overrightarrow{x_2}\wedge\left(-v\sin\theta_{1/2}\overrightarrow{x_2} + v\cos\theta_{1/2}\overrightarrow{y_2}\right)$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = uv\left(-\sin\theta_{1/2}\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{x_2} + \cos\theta_{1/2}\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{y_2}\right)$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = uv\left(\cos\theta_{1/2}\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{y_2}\right) = uv\cos\theta_{1/2}\overrightarrow{z_2} = uv\cos\theta_{2/1}\overrightarrow{z_0}$$

Question 7: En utilisant la notation verticale, calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$$\vec{u}.\vec{v} = u\overrightarrow{x_2}.v\overrightarrow{y_1} = u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathcal{B}_2}.v\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}^{\mathcal{B}_1} = u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathcal{B}_2}.v\begin{pmatrix}-\sin\theta_{1/2}\\\cos\theta_{1/2}\\0\end{pmatrix}^{\mathcal{B}_2}$$
$$\vec{u}.\vec{v} = -uv\sin\theta_{1/2} = uv\sin\theta_{2/1}$$

Question 8: En utilisant la notation verticale, calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = u\overrightarrow{x_2}\wedge v\overrightarrow{y_1} = u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^{\mathcal{B}_2}\wedge v\begin{pmatrix}-\sin\theta_{1/2}\\\cos\theta_{1/2}\\0\end{pmatrix}^{\mathcal{B}_2}$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v} = uv\begin{pmatrix}0\\0\\\cos\theta_{1/2}\end{pmatrix}^{\mathcal{B}_2} = uv\cos\theta_{1/2}\overrightarrow{z_2} = uv\cos\theta_{2/1}\overrightarrow{z_0}$$