Planche n° 9. Les nombres complexes. Corrigé

Exercice n° 1

Dans les questions qui suivent, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation proposée.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(3-i)z+2+i=0 \Leftrightarrow z=\frac{-2-i}{3-i} \Leftrightarrow z=\frac{(-2-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \Leftrightarrow z=\frac{-5-5i}{10} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Donc, $\mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(1+2i)\overline{z}+i=0 \Leftrightarrow \overline{(1+2i)\overline{z}+i}=0 \Leftrightarrow (1-2i)z-i=0 \Leftrightarrow z=\frac{i}{1-2i} \Leftrightarrow z=\frac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{-2+i}{5} \Leftrightarrow z=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i.$$

Donc, $\mathscr{S}=\left\{-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right\}$.

3) a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(3-i)z+(1+i)\overline{z}=1+i &\Leftrightarrow (3-i)(x+iy)+(1+i)(x-iy)=1+i\\ &\Leftrightarrow (4x+2y)+i(2y)=1+i\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4x+2y=1\\ 2y=1\end{array}\right. \quad \text{(par identification des parties réelles et imaginaires)}\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}\\ x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{2}i\right\}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(3-i)z-(3+i)\overline{z}=0 \Leftrightarrow (3-i)(x+iy)-(3+i)(x-iy)=0 \Leftrightarrow i(-2x+6y)=0 \Leftrightarrow x=3y.$$

Donc, $\mathscr{S}=\{y(3+I),\ y\in\mathbb{R}\}$. Géométriquement, $\mathscr{S}$ est la droite d'équation $y=\frac{x}{3}$ (en identifiant nombre complexe et point du plan).

Exercice n° 2

• $z_1=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{\frac{i\pi}{3}}$.

• $z_2=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{i\pi}{4}}$.

• $z_3=-2\sqrt{3}+2i=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=4e^{i\frac{5i\pi}{6}}$.

• $z_4=e^{\frac{i\pi}{2}}$, $z_5=e^{-\frac{i\pi}{2}}$, $z_6=3e^{i\pi}$ et $z_7=e^0$.

Exercice n° 3

1) Soit $z\in\mathbb{C}$. $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ (à connaître par cœur).

2) $\Delta'=1^2-2=-1=i^2$. L'équation a donc deux solutions non réelles et conjuguées, à savoir $z_1=\frac{1}{2}(-1+i)$ et $z_2=\frac{1}{2}(-1-i)$.

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout complexe z, on a

$$\begin{aligned} z^2 - 2z\cos\theta + 1 &= (z-\cos\theta)^2 + 1 - \cos^2\theta = (z-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = (z-\cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2 \\ &= (z - \cos\theta - i\sin\theta)(z - \cos\theta + i\sin\theta) = (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

L'équation proposée a donc deux solutions (pas nécessairement distinctes) $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = e^{-i\theta}$.
De plus, $\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$ et ces solutions sont distinctes si et seulement si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.
Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, l'équation s'écrit $(z-1)^2 = 0$ et admet une solution double, à savoir 1.
Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, l'équation s'écrit $(z+1)^2 = 0$ et admet une solution double, à savoir -1.

4) Soit (E) l'équation $z^2 - (6+i)z + (11+13i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (6+i)^2 - 4(11+13i) = -9-40i$. Comme $40 = 2\times 20 = 2\times(4\times 5)$ et que $4^2 - 5^2 = 16 - 25 = -9$, on est en droit de deviner que $\Delta = (4-5i)^2$. Si on ne devine pas, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 = -9-40i &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -9 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-9)^2 + (-40)^2} xy < 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -9 \\ x^2 + y^2 = 41 \\ xy < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 16 \\ y^2 = 25 \\ xy < 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow (x,y) = (4,-5) \text{ ou } (x,y) = (-4,5). \end{aligned}$$

L'équation (E) a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1 = \dfrac{6+i+4-5i}{2} = 5-2i$ et $z_2 = \dfrac{6+i-4+5i}{2} = 1+3i$.

5) Soit (E) l'équation $2z^2 - (7+3i)z + (2+4i) = 0$. Son discriminant est $\Delta = (7+3i)^2 - 8(2+4i) = 24+10i$. Comme $10 = 2\times 5 = 2\times(5\times 1)$ et que $5^2 - 1^2 = 24$, on est en droit de deviner que $\Delta = (5+i)^2$. L'équation proposée a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1 = \dfrac{7+3i+5+i}{4} = 3+i$ et $z_2 = \dfrac{7+3i-5-i}{4} = \dfrac{1}{2}(1+i)$.

Exercice n° 4

On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de $1+i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$.
On a aussi, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x+iy)^2 = 1+i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ xy > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1) \\ y^2 = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \\ xy > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x,y) \in \left\{\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}, \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\right\}.$$

Les racines carrées de $1+i$ sont donc aussi $\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$. Puisque $\mathrm{Re}(e^{i\pi/8}) = \cos\dfrac{\pi}{8} > 0$, on obtient $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$, ou encore

$$e^{i\pi/8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

et donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ et } \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Exercice n° 5

1) On a $a = e^{2i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $b = e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} = e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5} = 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
1, z, z^2, z^3 et z^4 sont les cinq racines cinquièmes de 1 dans $\mathbb{C}$. Par suite, $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$. Mais alors

$$a + b = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1$$

et

$$ab = (z+z^4)(z^2+z^3) = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1 \text{ (car } z^5 = 1).$$

a et b sont donc les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ dont les racines sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Enfin, puisque $\dfrac{2\pi}{5}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $a>0$. Par suite, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$. D'autre part, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)>0$ et donc,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=+\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

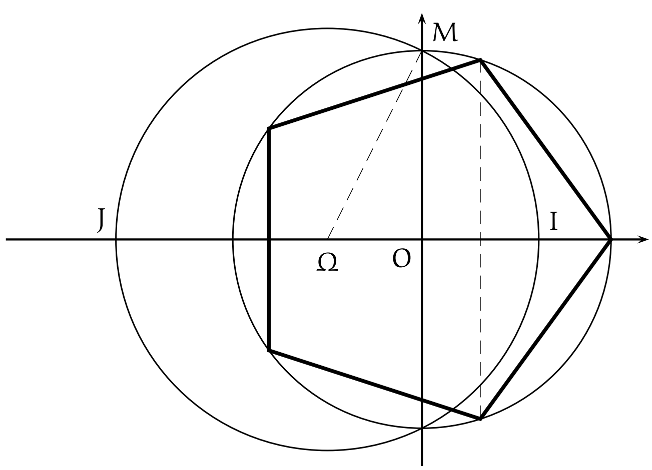
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\text{ et }\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.}$$

De même, en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Enfin, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

2) Le rayon du grand cercle vaut, d'après le théorème de Pythagore :

$$R=\sqrt{\Omega O^2+OM^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

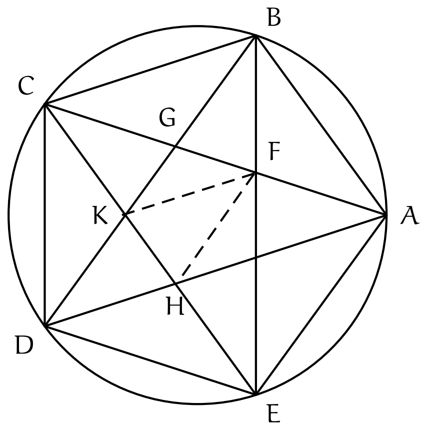
Donc $x_I=x_\Omega+R=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_J=x_\Omega-R=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Par suite, $x_I+x_J=x_I\times x_J=-1$ puis $x_I=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $x_J=2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$. Ceci montre que les médiatrices des segments $[O,I]$ et $[O,J]$ coupent le cercle de centre O et de rayon 1 en quatre des cinq sommets du pentagone.



3) Posons $x=\dfrac{AF}{AC}$. D'après le théorème de Thales (je vous laisse vérifier les parallélismes par exemple par la réciproque du théorème de Thales dans EBC),

$$x=\frac{AF}{AC}=\frac{HK}{HC}=\frac{FG}{FC}=\frac{AC-2AF}{AC-AF}=\frac{1-2x}{1-x}.$$

Donc $x^2-3x+1=0$ et puisque $x<1$, $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Puis
$\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{AC-AF}{AC}=1-x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{FG}{AF}=\dfrac{AC-2AF}{AF}=\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}-2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Définition du **nombre d'or**.

On veut que C partage le segment $[A,B]$ de telle sorte que $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$ (« $\dfrac{\text{petit}}{\text{moyen}}=\dfrac{\text{moyen}}{\text{grand}}$ ») c'est-à-dire, en posant $a=AB$ et $x=AC$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{a-x}{x}$ ou encore $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\dfrac{x}{a}-1=0$ et donc, puisque $\dfrac{x}{a}>0$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\text{Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre } \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=0,618\ldots}$$

On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport $\dfrac{a}{x}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618\ldots$

Exercice n° 6.

Si z_k est l'affixe complexe de M_k et a_k est l'affixe complexe de A_k, le problème posé équivaut au système :

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!],\ z_k+z_{k+1}=2a_k \text{ et } z_n+z_1=2a_n.$$

Résolvons le système constitué des $n-1$ premières équations

$$\left\{\begin{array}{l} z_1+z_2=2a_1\\ z_2+z_3=2a_2\\ z_3+z_4=2a_3\\ \quad\quad\vdots\\ z_{n-2}+z_{n-1}=2a_{n-2}\\ z_{n-1}+z_n=2a_{n-1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_2=2a_1-z_1\\ z_3=2a_2-2a_1+z_1\\ z_4=2a_3-2a_2+2a_1-z_1\\ \quad\quad\vdots\\ z_{n-1}=2a_{n-2}-2a_{n-3}+\ldots+(-1)^{n-3}a_1+(-1)^{n-2}z_1\\ z_n=2a_{n-1}-2a_{n-2}+2a_{n-3}+\ldots+2(-1)^{n-2}a_1+(-1)^{n-1}z_1\end{array}\right.$$

La dernière équation s'écrit alors $2a_{n-1}-2a_{n-2}+2a_{n-3}+\ldots+2(-1)^{n-2}a_1+(-1)^{n-1}z_1+z_1=2a_n$ ou encore

$$(1-(-1)^n)\,z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+\ldots+2(-1)^{n-1}a_1$$

• Si n est impair, cette dernière équations est équivalente à

$$z_1=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+\ldots+(-1)^{n-1}a_1$$

En reportant cette expression dans les $n-1$ premières équations, on obtient le fait que le problème posé a une solution et une seule.

• Si n est pair, la dernière équation s'écrit

$$0\times z_1=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+\ldots-a_1$$

Si $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+\ldots-a_1\neq 0$, le problème posé n'a pas de solution.

Si $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \ldots - a_1 = 0$, la dernière équation est vérifiée par tout nombre complexe z_1. Le système se réduit alors aux $n-1$ premières équations. Le problème posé a dans ce cas une infinité de solutions.

Remarque. Si n est pair, on peut poser $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$. La condition $a_{2p} - a_{2p-1} + a_{2p-2} - a_{2p-3} + \ldots + a_2 - a_1 = 0$ s'écrit encore

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}} = \overrightarrow{0}.$$

Quand $n = 4$, équivaut au fait que le quadrilatère considéré est un parallélogramme.

Exercice n° 7

Soit $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. $\dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = e^{2i\alpha}$. Donc,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\}/\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = \omega_k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\}/\ i(\omega_k + 1)z = \omega_k - 1.\end{aligned}$$

Maintenant, pour $k \in \{-1, 0, 1\}$,

$$\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z},$$

ce qui est exclu pour $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\}/\ z = \frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k + 1)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\}/\ z = \frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)}}{i\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)}\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\}/\ z = \frac{2i\sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)}{i\left(2\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{-1, 0, 1\}/\ z = \tan\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Exercice n° 8

$$\begin{aligned}(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow C = r_{A,\frac{\pi}{3}}(B) \text{ ou } C = r_{A,-\frac{\pi}{3}}(B) \Leftrightarrow c - a = (-j^2)(b - a) \text{ ou } c - a = (-j)(b - a) \\ &\Leftrightarrow (-1 - j^2)a + j^2b + c = 0 \text{ ou } (-1 - j)a + jb + c = 0 \Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(j^2\right)^2 a + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(ja + j^2b + c\right)\left(j^2a + jb + c\right) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + \left(j + j^2\right)(ab + ac + bc) = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \\ &\Leftrightarrow -a^2 + ab + ac - bc - b^2 + bc + ba - ac - c^2 + ca + cb - ab = 0 \\ &\Leftrightarrow (c - a)(a - b) + (a - b)(b - c) + (b - c)(c - a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(c - a)(a - b) + (a - b)(b - c) + (b - c)(c - a)}{(b - c)(c - a)(a - b)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a} + \frac{1}{a - b} = 0.\end{aligned}$$

Exercice n° 9

Le discriminant de l'équation $Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0$ vaut

$$(5-14i)^2 + 8(5i+12) = -75 - 100i = 25(-3-4i) = (5(1-2i))^2.$$

L'équation $Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0$ admet donc les deux solutions $Z_1 = \dfrac{5-14i+5-10i}{2} = 5-12i$ et $Z_2 = \dfrac{5-14i-5+10i}{2} = -2i$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de l'équation proposée} &\Leftrightarrow z^2 \text{ est solution de l'équation } Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0\\
&\Leftrightarrow z^2 = 5-12i = (3-2i)^2 \text{ ou } z^2 = -2i = (1-i)^2\\
&\Leftrightarrow z = 3-2i \text{ ou } z = -3+2i \text{ ou } z = 1-i \text{ ou } z = -1+i.
\end{aligned}$$

Exercice n° 10

Soient z un complexe non nul, M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1.

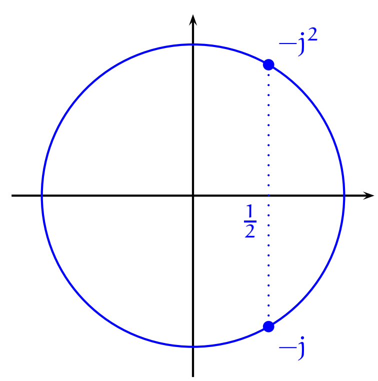
$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1,$$

et

$$|z| = |z-1| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1| \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = -j \text{ ou } z = -j^2.$$



Exercice n° 11

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$. Puisque $1 - ix \neq 0$, z est bien défini et $|z| = \dfrac{|1+ix|}{|1-ix|} = \dfrac{|1+ix|}{\left|\overline{1+ix}\right|} = 1$.

Enfin, $z = \dfrac{-1+ix+2}{1-ix} = -1 + \dfrac{2}{1-ix} \neq -1$. On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1+ix}{1-ix} \in U \setminus \{-1\}.$$

Réciproquement, soit $z \in U \setminus \{-1\}$. Il existe un réel $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
z = e^{i\theta} &= \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1 + i\tan\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}(1 - i\tan\frac{\theta}{2})}\\
&= \frac{1 + i\tan\frac{\theta}{2}}{1 - i\tan\frac{\theta}{2}} \ (\cos\frac{\theta}{2} \neq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),
\end{aligned}$$

et z est bien sous la forme voulue avec $x = \tan\dfrac{\theta}{2} \in \mathbb{R}$.

Exercice n° 12

• Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1-\cos\theta+i\sin\theta=0 \Leftrightarrow \cos\theta=1 \text{ et } \sin\theta=0 \Leftrightarrow \theta\in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Donc, $\dfrac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ existe pour $\theta\notin 2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel θ,

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}&=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\cos(\theta/2)-i\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)+i\cos(\theta/2)}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}}\\&=-i\,\text{cotan}(\frac{\theta}{2}).\end{aligned}$$

- 1er cas. $\text{cotan}\,\dfrac{\theta}{2}>0\Leftrightarrow\dfrac{\theta}{2}\in\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\Leftrightarrow\theta\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,\pi+2k\pi[$.

Dans ce cas, la forme trigonométrique de $\dfrac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ est $\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{-i\pi/2}$ (module= $\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et argument= $-\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$).

$$\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}=\left[\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right),-\frac{\pi}{2}\right].$$

- 2ème cas. $\text{cotan}\,\dfrac{\theta}{2}<0\Leftrightarrow\theta\in\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi+2k\pi,2(k+1)\pi[$.

Dans ce cas,

$$\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}=-\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\pi/2}=\left|\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|e^{i\pi/2},$$

et donc,

$$\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}=\left[-\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right),\frac{\pi}{2}\right].$$

- 3ème cas. $\text{cotan}\,\dfrac{\theta}{2}=0\Leftrightarrow\theta\in\pi+2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\dfrac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}=0$.

• Pour $\theta\notin2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})}=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}=i\,\text{cotan}\,\frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta\in\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,\pi+2k\pi[$, $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\left[\text{cotan}\,\dfrac{\theta}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Si $\theta\in\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi+2k\pi,2(k+1)\pi[$, $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=\left[-\text{cotan}\,\dfrac{\theta}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Si $\theta\in\pi+2\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=0$.

Exercice n° 13

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^9=(2e^{i\pi/3})^9=2^9e^{3i\pi}=-512$.

La forme algébrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à l'addition.
La forme trigonométrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

Exercice n° 14

$i=e^{i\pi/2}$ et les racines quatrièmes de i sont donc les $e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}$, $k\in\{0,1,2,3\}$. Ensuite,

$$-\frac{8\sqrt{2}}{1+i}=-\frac{8}{e^{i\pi/4}}=-8e^{-i\pi/4}=8e^{3i\pi/4}.$$

Les racines cubiques de $-\dfrac{8\sqrt{2}}{1+i}$ sont donc les nombres $2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{-1, 0, 1\}$, ou encore les trois nombres $2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i)$, $2e^{-5i\pi/12}$ et $2e^{11i\pi/12}$.

Exercice n° 15

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

$$|1+z+\ldots+z^{n-1}| \leqslant 1+|z|+|z|^2+\ldots+|z|^{n-1} < |z|^n+|z|^n+\ldots+|z|^n = n|z|^n = |nz^n|,$$

et en particulier, $1+z+\ldots+z^{n-1} \neq nz^n$. Par contraposition, si $1+z+\ldots+z^{n-1}-nz^n = 0$, alors $|z| \leqslant 1$.

Exercice n° 16

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient M, A et B les points d'affixes respectives z, 1 et -1.

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E) &\Rightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Rightarrow |(z-1)^n| = |(z+1)^n| \Rightarrow |z-1|^n = |z+1|^n \\
&\Rightarrow |z-1| = |z+1| \text{ (car } |z-1| \text{ et } |z+1| \text{ sont des réels positifs)} \\
&\Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}[AB] \Rightarrow M \in (Oy) \\
&\Rightarrow z \in i\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n((z+1)^n - (z-1)^n) = -(-1)^n((z-1)^n - (z+1)^n).$$

Par suite,

$$z \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow (z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Leftrightarrow (-z-1)^n - (-z+1)^n = 0 \Leftrightarrow -z \text{ solution de } (E).$$

Les solutions de (E) sont imaginaires pures et les solutions non nulles sont deux à deux opposées.

3) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]/\ z-1 = e^{2ik\pi/n}(z+1) \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = \frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = \frac{e^{ik\pi/n}+e^{-ik\pi/n}}{e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{-2i\sin\frac{k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (E) sont les nombres de la forme $i\,\text{cotan}\,\dfrac{k\pi}{n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Exercice n° 17

A- Solutions algébriques. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, posons $z = x+iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$.

1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2+y^2 = (1-x)^2+y^2 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble cherché est la droite (Oy) (car le point d'affixe 1 n'appartient pas à (Oy)).

2) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
|Z| = 2 &\Leftrightarrow (1+x)^2+y^2 = 4((1-x)^2+y^2) \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-10x+3 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}x+1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2 = \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{4}{3}$ (car le point d'affixe 1 n'appartient pas à ce cercle).

3) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$Z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=\overline{Z}\Leftrightarrow\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\Leftrightarrow(1+z)(1-\overline{z})=(1-z)(1+\overline{z})\Leftrightarrow z-\overline{z}=\overline{z}-z\Leftrightarrow z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}.$$

L'ensemble cherché est la droite (Ox) privé du point de coordonnées $(1,0)$.

4) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$$\begin{aligned}Z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=-\overline{Z}\Leftrightarrow\frac{1+z}{1-z}=-\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}&\Leftrightarrow(1+z)(1-\overline{z})=-(1-z)(1+\overline{z})\\&\Leftrightarrow 1-z\overline{z}=-1+z\overline{z}\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1.\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre O et de rayon 1, privé du point de coordonnées $(1,0)$.

B- Solutions géométriques (pour 1), 3) et 4)). Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et 1, M le point d'affixe z et $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché.

1)

$$M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow|z+1|=|z-1|\Leftrightarrow AM=BM\Leftrightarrow M\in\text{med}[AB]=(Oy).$$

3) Soit $M\neq B$.

$$\begin{aligned}M\in\mathscr{E}&\Leftrightarrow z=-1\text{ ou }z\neq-1\text{ et }\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=0\ (\pi)\\&\Leftrightarrow M=A\text{ ou }M\neq A\text{ et }(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})=0\ (\pi)\\&\Leftrightarrow M\in(AB)\setminus\{B\}.\end{aligned}$$

et on retrouve la droite (Ox) privée du point $B(1,0)$.

4) Soit $M\neq B$.

$$\begin{aligned}M\in\mathscr{E}&\Leftrightarrow z=-1\text{ ou }z\neq-1\text{ et }\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)\\&\Leftrightarrow M=A\text{ ou }M\neq A\text{ et }(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}\ (\pi)\\&\Leftrightarrow M\text{ est sur le cercle de diamètre }[AB]\text{ privé de }B.\end{aligned}$$

et on retrouve le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $B(1,0)$.

Exercice n° 18

Soit f la transformation considérée.

1) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3,-1)$.

2) $\omega=2\omega+3\Leftrightarrow\omega=-3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3,0)$.

3) $\omega=i\omega+1\Leftrightarrow\omega=\frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i=e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (appelée aussi quart de tour direct) et de centre $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

4) $\omega=(1-i)\omega+2+i\Leftrightarrow\omega=1-2i$. Comme $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1,-2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Exercice n° 19

1) Soit $z\in\mathbb{C}$. $\text{sh}\,z$ et $\text{ch}\,z$ sont définis et donc, $\text{th}\,z$ existe si et seulement si $\text{ch}\,z\neq0$. Or,

$$\text{ch}\,z=0\Leftrightarrow e^z+e^{-z}=0\Leftrightarrow-e^{2z}=1\Leftrightarrow e^{2z+i\pi}=1\Leftrightarrow2z+i\pi\in2i\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow z\in i\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right).$$

$\text{th}\,z$ existe si et seulement si $z\notin i\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$ ou encore $z\notin i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.

2) Soit $z\notin i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.

$$\text{th}\,z=0\Leftrightarrow\text{sh}\,z=0\Leftrightarrow e^z=e^{-z}\Leftrightarrow e^{2z}=1\Leftrightarrow2z\in2i\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow z\in i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\cap i\pi\mathbb{Z}=\varnothing$, $\operatorname{th} z=0$ si et seulement si $z\in i\pi\mathbb{Z}$.

3) Soit $z\notin i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. Posons $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}|\operatorname{th} z|<1 &\Leftrightarrow \left|e^z-e^{-z}\right|^2<\left|e^z+e^{-z}\right|^2 \Leftrightarrow \left(e^z-e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}}-e^{-\overline{z}}\right)<\left(e^z+e^{-z}\right)\left(e^{\overline{z}}+e^{-\overline{z}}\right)\\ &\Leftrightarrow -e^{z-\overline{z}}-e^{-(z-\overline{z})}<e^{z-\overline{z}}+e^{-(z-\overline{z})}\Leftrightarrow 2(e^{2iy}+e^{-2iy})>0\\ &\Leftrightarrow \cos(2y)>0\end{aligned}$$

Par suite,

$$\left\{\begin{array}{l}|\operatorname{Im} z|<\frac{\pi}{2}\\ |\operatorname{th} z|<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|y|<\frac{\pi}{2}\\ \cos(2y)>0\end{array}\right. \Leftrightarrow |y|<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow z\in\Delta.$$

4) Soit $z\in\Delta$. D'après 1), $\operatorname{th} z$ existe et d'après 3), $|\operatorname{th} z|<1$. Donc $z\in\Delta\Rightarrow \operatorname{th} z\in U$. Ainsi, th est une application de Δ dans U.

Soit alors $Z\in U$ et $z\in\Delta$.

$$\operatorname{th} z=Z\Leftrightarrow \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}=Z\Leftrightarrow e^{2z}=\frac{1+Z}{1-Z}.$$

Puisque $Z\neq -1$, $\frac{1+Z}{1-Z}\neq 0$ et on peut poser $\frac{1+Z}{1-Z}=re^{i\theta}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$.
Puisque $|Z|<1$,

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)=\frac{1+Z}{1-Z}+\frac{1+\overline{Z}}{1-\overline{Z}}=\frac{2\left(1-|Z|^2\right)}{|1-Z|^2}>0$$

et donc $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

En posant $z=x+iy$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}e^{2z}=\frac{1+Z}{1-Z}&\Leftrightarrow e^{2z}=re^{i\theta}\Leftrightarrow e^{2x}=r\text{ et }2y\in\theta+2\pi\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln r\text{ et }y\in\frac{\theta}{2}+\pi\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ z=\frac{1}{2}\ln r+\frac{\theta}{2}+k\pi.\end{aligned}$$

Puisque $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\frac{\theta}{2}\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ puis

$$\frac{\theta}{2}+k\pi\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow k=0.$$

Mais alors,

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{th} z=Z\\ z\in\Delta\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\ln r\\ \\ y=\frac{\theta}{2}\end{array}\right..$$

Ainsi, tout élément Z de U a un et un seul antécédent z dans Δ (à savoir $z=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right|+\frac{i}{2}\operatorname{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$, $\operatorname{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ désignant l'argument de $\frac{1+Z}{1-Z}$ qui est dans $]-\pi,\pi[$).

th réalise donc une bijection de Δ sur U.

Exercice n° 20

Réflexivité. Soit z un élément de P. Puisque $z=\frac{z\cos(0)+\sin(0)}{-z\sin(0)+\cos(0)}$, il existe un réel θ tel que $z=\frac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}$ (à savoir $\theta+0$) et donc $z\mathscr{R}z$. On a montré $\forall z\in P$, $z\mathscr{R}z$ et donc que $\mathscr{R}$ est réflexive.

Symétrie. Soient z et z' deux éléments de P tels que $z\mathscr{R}z'$. Il existe un réel θ tel que $z' = \dfrac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}$. On en déduit que $z'(-z\sin(\theta)+\cos(\theta)) = z\cos(\theta)+\sin(\theta)$ puis que $z(\cos(\theta)+z'\sin(\theta)) = z'\cos(\theta)-\sin(\theta)$.

Supposons $\cos(\theta)+z'\sin(\theta) = 0$. On ne peut avoir $\sin(\theta) = 0$ car alors $\cos(\theta) = 0$ ce qui est absurde, les fonctions sin et cos ne s'annulant pas simultanément. Donc, $\sin(\theta) \neq 0$ puis $z' = -\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ et en particulier z' est un réel. Ceci est absurde car la partie imaginaire de z' n'est pas nulle et donc $\cos(\theta)+z'\sin(\theta) \neq 0$.

On peut alors écrire

$$z = \frac{z'\cos(\theta)-\sin(\theta)}{\cos(\theta)+z'\sin(\theta)} = \frac{z'\cos(-\theta)+\sin(-\theta)}{-z'\sin(-\theta)+\cos(-\theta)}.$$

Le réel $\theta' = -\theta$ est tel que $z = \dfrac{z'\cos(\theta')-\sin(\theta')}{-z'\sin(\theta')+\cos(\theta')}$ et donc $z'\mathscr{R}z$.

On a montré que pour tous éléments z et z' de P, si $z\mathscr{R}z'$ alors $z'\mathscr{R}z$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est symétrique.

Transitivité. Soient z, z' et z'' trois éléments de P tels que $z\mathscr{R}z'$ et $z'\mathscr{R}z''$. Il existe donc des réels θ et θ' tels que $z' = \dfrac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}$ et $z'' = \dfrac{z'\cos(\theta')+\sin(\theta')}{-z'\sin(\theta')+\cos(\theta')}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
z'' &= \frac{z'\cos(\theta')+\sin(\theta')}{-z'\sin(\theta')+\cos(\theta')} = \frac{\dfrac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}\cos(\theta')+\sin(\theta')}{-\dfrac{z\cos(\theta)+\sin(\theta)}{-z\sin(\theta)+\cos(\theta)}\sin(\theta')+\cos(\theta')} \\
&= \frac{(z\cos(\theta)+\sin(\theta))\cos(\theta')+(-z\sin(\theta)+\cos(\theta))\sin(\theta')}{-(z\cos(\theta)+\sin(\theta))\sin(\theta')+(-z\sin(\theta)+\cos(\theta))\cos(\theta')} \\
&= \frac{z(\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')+\sin(\theta)\cos(\theta')+\cos(\theta)\sin(\theta')}{-z(\sin(\theta)\cos(\theta')+\cos(\theta)\sin(\theta'))+\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')} \\
&= \frac{z\cos(\theta+\theta')+\sin(\theta+\theta')}{-z\sin(\theta+\theta')+\cos(\theta+\theta')}.
\end{aligned}$$

Le réel $\theta'' = \theta+\theta'$ est tel que $z'' = \dfrac{z\cos(\theta')-\sin(\theta')}{-z\sin(\theta')+\cos(\theta')}$ et donc $z\mathscr{R}z''$. On a montré que pour tous éléments z, z' et z'' de P, si $z\mathscr{R}z'$ et $z'\mathscr{R}z''$, alors $z\mathscr{R}z''$. Par suite, la relation $\mathscr{R}$ est transitive.

Finalement, la relation $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. Par suite, $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur P.

On peut montrer que les classes d'équivalences pour la relation $\mathscr{R}$ sont des cercles centrés sur l'axe des ordonnées.

Exercice n° 21

1) Montrons que la restriction de f à D, notée g, est bien une application de D dans P.
Soit $z \in D$. On a $|z| < 1$ et en particulier $z \neq i$. Donc, $f(z)$ existe. De plus,

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}(f(z)+\overline{f(z)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+i}{z-i}+\frac{\overline{z}-i}{\overline{z-i}}\right) = \frac{1}{2}\frac{2z\overline{z}-2}{(z-i)(\overline{z-i})} = \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} < 0.$$

Donc, $f(z)$ est élément de P. g est donc une application de D dans P.

2) Montrons que g est injective. Soit $(z,z') \in D^2$.

$$g(z) = g(z') \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{z'+i}{z'-i} \Rightarrow zz'+iz'-iz+1 = zz'+iz-iz'+1 \Rightarrow 2i(z'-z) = 0 \Rightarrow z = z'.$$

Donc g est injective.

3) Montrons que g est surjective. Soient $z \in D$ et $Z \in P$.

$$g(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = Z \Leftrightarrow z+i = zZ-iZ \Leftrightarrow z(Z-1) = i(Z+1) \Leftrightarrow z = \frac{i(Z+1)}{Z-1},$$

(ce qui montre que Z admet au plus un antécédent dans D, à savoir $z = \dfrac{i(Z+1)}{Z-1}$, mais on le sait déjà car g est injective).
Il reste cependant à vérifier que $\dfrac{i(Z+1)}{Z-1}$ est défini et est effectivement dans D).

Réciproquement, le nombre $\dfrac{i(Z+1)}{Z-1}$ est bien défini puisque Z est dans P et donc $Z \neq 1$. De plus, puisque $\mathrm{Re}(Z) < 0$, $\left|\dfrac{i(Z+1)}{Z-1}\right| = \dfrac{|Z+1|}{|Z-1|} < 1$ (Z étant strictement plus proche de -1 que de 1) et donc $\dfrac{i(Z+1)}{Z-1} \in D$. Finalement g est une bijection de D sur P, et :

$$\boxed{\forall z \in P,\ g^{-1}(z) = \frac{i(z+1)}{z-1}.}$$

Exercice n° 22 Pour n naturel non nul, on pose $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)}$.

$S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2\cos a_1$ et si pour $n \geqslant 1$, $S_n = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$ alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)} \\ &= 2\cos a_{n+1} S_n = 2^{n+1} \cos a_1 \ldots \cos a_{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$.
Ensuite, pour $n \geqslant 1$, $\sum \cos(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = \mathrm{Re}(S_n) = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$ (on obtient aussi $\sum \sin(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = \mathrm{Im}(S_n) = 0$).

Exercice n° 23

1) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ et une primitive de $x \mapsto \cos^2 x$ est $x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin(2x)$.

2) D'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3) \end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3x}{8}$.

3)

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3) \end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \sin^4 x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) - \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3x}{8}$.

Si on voulait utiliser la question précédente, on pouvait écrire $\cos^4 x + \sin^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 = 1$ et donc $\sin^4 x = 1 - \cos^4 x - \dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$ ... ou bien $\sin^4 x = \cos^4\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4) $\cos^2 x \sin^2 x = \dfrac{1}{4}\sin^2(2x) = \dfrac{1}{8}(1 - \cos(4x))$ et une primitive de $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$ est $x \mapsto \dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{32}\sin(4x)$.

5)

$$\begin{aligned} \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)^6 = -\frac{1}{64}(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{64}(2\cos(6x) - 12\cos(4x) + 30\cos(2x) - 20) = \frac{1}{32}(-\cos(6x) + 6\cos(4x) - 15\cos(2x) + 10) \end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \sin^6 x$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{192}\sin(6x) + \dfrac{3}{64}\sin(4x) - \dfrac{15}{64}\sin(2x) + \dfrac{5x}{16}$.

6) $\cos x \sin^6 x = \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos x \sin^6 x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{7}\sin^7 x$.

7) $\cos^5 x \sin^2 x = \cos x(1-\sin^2 x)^2 \sin^2 x = \sin' x \sin^2 x - 2\sin' x \sin^4 x + \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$ est $x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin^3 x - \dfrac{2}{5}\sin^5 x + \dfrac{1}{7}\sin^7 x$.

8) $\cos^3 x = \sin' x - \sin' x \sin^2 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est $x \mapsto \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$.

Exercice n° 24

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l}\cos a + \cos b + \cos c = 0\\ \sin a + \sin b + \sin c = 0\end{array}\right. &\Leftrightarrow (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0 \Leftrightarrow e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0\\
&\Rightarrow \left|e^{ia} + e^{ib}\right| = \left|-e^{ic}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|e^{ia/2}e^{ib/2}\left(e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2}\right)\right| = 1\\
&\Leftrightarrow 2\left|\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow a - b \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists \varepsilon \in \{-1, 1\}/\ b = a + \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2e^{ia}$. Réciproquement, si $e^{ib} = je^{ia}$ ou encore $b = a + \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j)e^{ia} = j^2e^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a - \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

et si $e^{ib} = j^2e^{ia}$ ou encore $b = a - \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j^2)e^{ia} = je^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(a, a + \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi\right),\ a \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \{-1, 1\},\ (k, k') \in \mathbb{Z}^2\right\}.}$$

Exercice n° 25 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > \dfrac{n}{3}$, $\dbinom{n}{3k} = 0$. La somme à calculer s'écrit donc

$$S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{3}} \binom{n}{3k} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n}{3k}.$$

Ensuite, en tenant compte de $j^{3k} = 1$ (où $j = e^{2i\pi/3}$),

$$\begin{aligned}
(1+1)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \binom{n}{6} + \ldots\\
(1+j)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}j + \binom{n}{2}j^2 + \binom{n}{3} + \binom{n}{4}j + \binom{n}{5}j^2 + \binom{n}{6} + \ldots\\
\left(1+j^2\right)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}j^2 + \binom{n}{2}j + \binom{n}{3} + \binom{n}{4}j^2 + \binom{n}{5}j + \binom{n}{6} + \ldots
\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces inégalités et en tenant compte de $1 + j + j^2 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
3\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots\right) &= (1+1)^n + (1+j)^n + \left(1+j^2\right)^n = 2^n + 2\mathrm{Re}\left((1+j)^n\right) = 2^n + 2\mathrm{Re}\left(\left(-j^2\right)^n\right)\\
&= 2^n + 2\mathrm{Re}\left(e^{in\pi/3}\right) = 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right),
\end{aligned}$$

et donc

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right).$$

Exercice n° 26 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}\right)^{k}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\left(1+e^{i\theta}\right)^{n}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\frac{in\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{-i\theta}{2}}\right)^{n}\right)\\ &= 2^{n}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos^{n}\left(\frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

