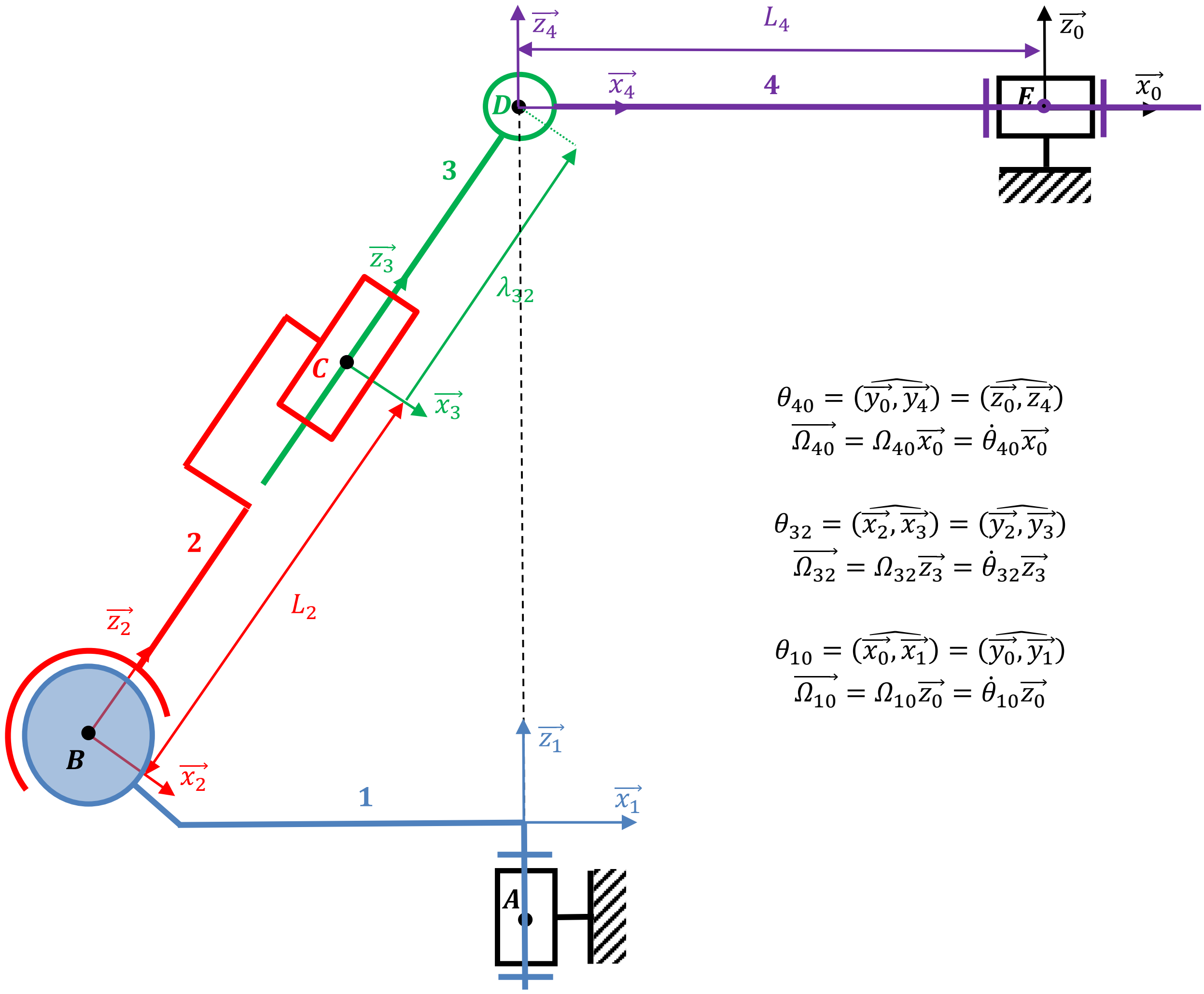
Fermeture cinématique 3D

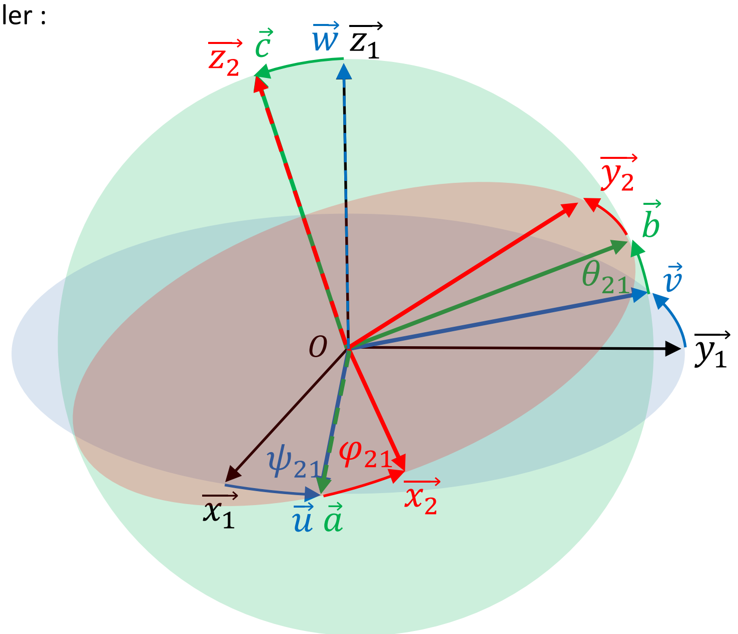


$$\theta_{40} = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_4}}) = (\widehat{\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_4}})$$
$$\overrightarrow{\Omega_{40}} = \Omega_{40}\overrightarrow{x_0} = \dot{\theta}_{40}\overrightarrow{x_0}$$

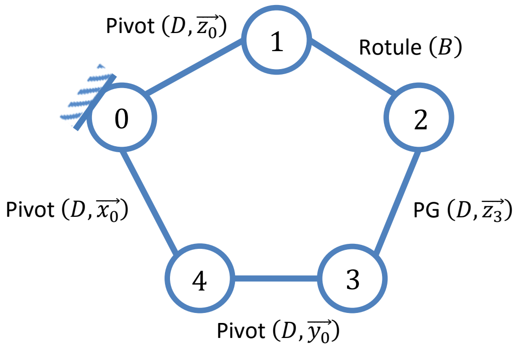
$$\theta_{32} = (\widehat{\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{y_3}})$$
$$\overrightarrow{\Omega_{32}} = \Omega_{32}\overrightarrow{z_3} = \dot{\theta}_{32}\overrightarrow{z_3}$$

$$\theta_{10} = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}})$$
$$\overrightarrow{\Omega_{10}} = \Omega_{10}\overrightarrow{z_0} = \dot{\theta}_{10}\overrightarrow{z_0}$$

Compte tenu de la géométrie tridimensionnelle du système, on paramètre la rotation dans la rotule à l'aide des angles d'Euler :



Question 1: Etablir le graphe des liaisons du système



Question 2: Faire le bilan du nombre d'inconnues, d'équations et de la mobilité du système et conclure sur sa résolution

$$\gamma = L - P + 1 = 1$$
$$E_c = 6\gamma = 6$$
$$I_c = 1 + 3 + 2 + 1 + 1 = 8$$
$$m = 1 + 1 = 2$$

Mobilité interne de la pièce 2.

Bilan : 6 inconnues pour 6 équations, on peut résoudre le système.

Question 3: Après avoir exprimé les matrices de passage R_{32}, R_{21} et R_{10}, donner l'expression de R_{30} en fonction de celles-ci sans détailler le calcul

$$\overrightarrow{x_3} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{32} \\ \sin\theta_{32} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2} \quad ; \quad \overrightarrow{y_3} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_{32} \\ \cos\theta_{32} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2} \quad ; \quad \overrightarrow{z_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_2}$$

$$R_{32} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{32} & -\sin\theta_{32} & 0 \\ \sin\theta_{32} & \cos\theta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{21} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{yx} & R_{zx} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{zy} \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{10} \\ \sin\theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \quad ; \quad \overrightarrow{y_1} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_{10} \\ \cos\theta_{10} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \quad ; \quad \overrightarrow{z_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

$$R_{10} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{10} & -\sin\theta_{10} & 0 \\ \sin\theta_{10} & \cos\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{B}_3 \underset{R_{32}}{\rightarrow} \mathfrak{B}_2 \underset{R_{21}}{\rightarrow} \mathfrak{B}_1 \underset{R_{10}}{\rightarrow} \mathfrak{B}_0$$
$$\mathfrak{B}_3 \underset{R_{30}=R_{10}R_{21}R_{32}}{\rightarrow} \mathfrak{B}_0$$

Autrement dit, en notant les choses de manière non conventionnelle :

$$R_{10}\mathfrak{B}_1 \textit{ est un vecteur dans } \mathfrak{B}_0$$

On ne peut pas aller plus loin, faisons le calcul dans l'autre sens :

$$R_{32}\mathfrak{B}_3 \textit{ est un vecteur dans } \mathfrak{B}_2$$
$$R_{21}R_{32}\mathfrak{B}_3 \textit{ est un vecteur dans } \mathfrak{B}_1$$
$$R_{10}R_{21}R_{32}\mathfrak{B}_3 \textit{ est un vecteur dans } \mathfrak{B}_0$$

Donc $R_{10}R_{21}R_{32}$ transforme un vecteur de $\mathfrak{B}_3$ dans $\mathfrak{B}_0$
Soit :

$$R_{30} = R_{10}R_{21}R_{32}$$

Remarque : en maths, les élèves le verront bientôt

Ce calcul n'est pas demandé :

$$R_{30} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{10} & -\sin\theta_{10} & 0 \\ \sin\theta_{10} & \cos\theta_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{yx} & R_{zx} \\ R_{xy} & R_{yy} & R_{zy} \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_{32} & -\sin\theta_{32} & 0 \\ \sin\theta_{32} & \cos\theta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{30} = \begin{bmatrix} (\cos\theta_{10} R_{xx} - \sin\theta_{10} R_{xy}) & (\cos\theta_{10} R_{yx} - \sin\theta_{10} R_{yy}) & (\cos\theta_{10} R_{zx} - \sin\theta_{10} R_{zy}) \\ (\sin\theta_{10} R_{xx} + \cos\theta_{10} R_{xy}) & (\sin\theta_{10} R_{yx} + \cos\theta_{10} R_{yy}) & (\sin\theta_{10} R_{zx} + \cos\theta_{10} R_{zy}) \\ R_{xz} & R_{yz} & R_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_{32} & -\sin\theta_{32} & 0 \\ \sin\theta_{32} & \cos\theta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & R_{30} \\ & = \begin{bmatrix} (\cos\theta_{10} R_{xx} - \sin\theta_{10} R_{xy})\cos\theta_{32} + (\cos\theta_{10} R_{yx} - \sin\theta_{10} R_{yy})\sin\theta_{32} & -(\cos\theta_{10} R_{xx} - \sin\theta_{10} R_{xy})\sin\theta_{32} + (\cos\theta_{10} R_{yx} - \sin\theta_{10} R_{yy})\cos\theta_{32} & (\cos\theta_{10} R_{zx} - \sin\theta_{10} R_{zy}) \\ (\sin\theta_{10} R_{xx} + \cos\theta_{10} R_{xy})\cos\theta_{32} + (\sin\theta_{10} R_{yx} + \cos\theta_{10} R_{yy})\sin\theta_{32} & -(\sin\theta_{10} R_{xx} + \cos\theta_{10} R_{xy})\sin\theta_{32} + (\sin\theta_{10} R_{yx} + \cos\theta_{10} R_{yy})\cos\theta_{32} & (\sin\theta_{10} R_{zx} + \cos\theta_{10} R_{zy}) \\ (R_{xz}\cos\theta_{32} + R_{yz}\sin\theta_{32}) & (-R_{xz}\sin\theta_{32} + R_{yz}\cos\theta_{32}) & R_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & R_{03} \\ & = \begin{bmatrix} (\cos\theta_{10} R_{xx} - \sin\theta_{10} R_{xy})\cos\theta_{32} + (\cos\theta_{10} R_{yx} - \sin\theta_{10} R_{yy})\sin\theta_{32} & (\sin\theta_{10} R_{xx} + \cos\theta_{10} R_{xy})\cos\theta_{32} + (\sin\theta_{10} R_{yx} + \cos\theta_{10} R_{yy})\sin\theta_{32} & (R_{xz}\cos\theta_{32} + R_{yz}\sin\theta_{32}) \\ -(\cos\theta_{10} R_{xx} - \sin\theta_{10} R_{xy})\sin\theta_{32} + (\cos\theta_{10} R_{yx} - \sin\theta_{10} R_{yy})\cos\theta_{32} & -(\sin\theta_{10} R_{xx} + \cos\theta_{10} R_{xy})\sin\theta_{32} + (\sin\theta_{10} R_{yx} + \cos\theta_{10} R_{yy})\cos\theta_{32} & (-R_{xz}\sin\theta_{32} + R_{yz}\cos\theta_{32}) \\ (\cos\theta_{10} R_{zx} - \sin\theta_{10} R_{zy}) & (\sin\theta_{10} R_{zx} + \cos\theta_{10} R_{zy}) & R_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$R_{03} = \begin{bmatrix} R'_{xx} & R'_{xy} & R'_{xz} \\ R'_{yx} & R'_{yy} & R'_{yz} \\ R'_{zx} & R'_{zy} & R'_{zz} \end{bmatrix}$$

Question 4: Justifier le fait que l'on choisisse le point D malgré le fait qu'il y a plus d'inconnues en rotation dans la liaison en B

Deux choix sont possibles :

- Point où il y a le plus d'inconnues en rotation : B
- Vu le problème, 4 des 5 liaisons sont définies en D car c'est le point de concours des 3 axes

On choisit le point D car il n'y a qu'un seul torseur à déplacer, les rotations seront définies dans la base 3 et le produit vectoriel fera apparaître uniquement 2 termes.
Sinon, on peut exprimer la somme des 4 autres en D, puis déplacer cette somme en B. On aura alors 4 rotation en produit vectoriel de $\overrightarrow{BD}$, c'est donc plus simple de choisir D

Question 5: Donner les torseurs cinématiques associés à chacune des liaisons en leurs points caractéristiques. Vous exprimerez le torseur de la rotule dans la base 3 en justifiant ce choix

$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_3}$ Bien choisir la base 3 pour simplifier le produit vectoriel lors du changement de point
$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & W_{32} \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_3}$
$\{\mathcal{V}_{43}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_4}$
$\{\mathcal{V}_{04}\} = \begin{Bmatrix} P_{04} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0}$

Question 6: Exprimer tous les torseurs au point choisi précédemment

$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$	
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_3}$	$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} P_{21}\overrightarrow{x_3} + Q_{21}\overrightarrow{y_3} + R_{21}\overrightarrow{z_3} \\ (L_2+\lambda_{32})Q_{21}\overrightarrow{x_3} - (L_2+\lambda_{32})P_{21}\overrightarrow{y_3} \end{Bmatrix}_D$	$\vec{V}(D,1/0) = \vec{V}(B,1/0) + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21}}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L_2+\lambda_{32}) \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_3} \wedge \begin{bmatrix} P_{21} \\ Q_{21} \\ R_{21} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_3}$ $= \begin{bmatrix} (L_2+\lambda_{32})Q_{21} \\ -(L_2+\lambda_{32})P_{21} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_3}$
$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & W_{32} \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_3}$	$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_3} \\ W_{32}\overrightarrow{z_3} \end{Bmatrix}_D$	
$\{\mathcal{V}_{43}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_4}$	$\{\mathcal{V}_{43}\} = \begin{Bmatrix} Q_{43}\overrightarrow{y_4} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$	
$\{\mathcal{V}_{04}\} = \begin{Bmatrix} P_{04} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{04}\} = \begin{Bmatrix} P_{04}\overrightarrow{x_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$	

Question 7: Etablir les deux équations vectorielles issues de la fermeture de chaîne cinématique

On écrit la fermeture de chaîne cinématique de la chaîne 012340 :

$$\{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{32}\} + \{\mathcal{V}_{43}\} + \{\mathcal{V}_{04}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} P_{21}\overrightarrow{x_3} + Q_{21}\overrightarrow{y_3} + R_{21}\overrightarrow{z_3} \\ (L_2+\lambda_{32})Q_{21}\overrightarrow{x_3} - (L_2+\lambda_{32})P_{21}\overrightarrow{y_3} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} R_{32}\overrightarrow{z_3} \\ W_{32}\overrightarrow{z_3} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} Q_{43}\overrightarrow{y_4} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D + \begin{Bmatrix} P_{04}\overrightarrow{x_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{10}\overrightarrow{z_0} + P_{21}\overrightarrow{x_3} + Q_{21}\overrightarrow{y_3} + R_{21}\overrightarrow{z_3} + R_{32}\overrightarrow{z_3} + Q_{43}\overrightarrow{y_4} + P_{04}\overrightarrow{x_0} \\ (L_2+\lambda_{32})Q_{21}\overrightarrow{x_3} - (L_2+\lambda_{32})P_{21}\overrightarrow{y_3} + W_{32}\overrightarrow{z_3} \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{y_4} = \overrightarrow{y_3}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{04}\overrightarrow{x_0} + R_{10}\overrightarrow{z_0} + P_{21}\overrightarrow{x_3} + (Q_{21}+Q_{43})\overrightarrow{y_3} + (R_{21}+R_{32})\overrightarrow{z_3} \\ (L_2+\lambda_{32})Q_{21}\overrightarrow{x_3} - (L_2+\lambda_{32})P_{21}\overrightarrow{y_3} + W_{32}\overrightarrow{z_3} \end{Bmatrix}_D = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Question 8: Choisir la/les bases de projection de ces deux équations vectorielles

Equation en rotation	Equation en vitesse
$\boldsymbol{BASE}\ 3$	$\boldsymbol{BASE}\ 3$

Question 9: Déterminer les 6 équations scalaires du problème dans la base choisie précédemment

$$\overrightarrow{x_0} = R'_{xx}\overrightarrow{x_3} + R'_{xy}\overrightarrow{y_3} + R'_{xz}\overrightarrow{z_3}$$
$$\overrightarrow{z_0} = R'_{zx}\overrightarrow{x_3} + R'_{zy}\overrightarrow{y_3} + R'_{zz}\overrightarrow{z_3}$$

$$\begin{cases} P_{04}R'_{xx} + R_{10}R'_{zx} + P_{21} = 0 \\ P_{04}R'_{xy} + R_{10}R'_{zy} + (Q_{21} + Q_{43}) = 0 \\ P_{04}R'_{xz} + R_{10}R'_{zz} + (R_{21} + R_{32}) = 0 \\ (L_2 + \lambda_{32})Q_{21} = 0 \\ -(L_2 + \lambda_{32})P_{21} = 0 \\ W_{32} = 0 \end{cases}$$

Question 10: En déduire la relation cinématique liant la vitesse d'entrée $\boldsymbol{\Omega_{10}}$ et la vitesse de sortie $\boldsymbol{\Omega_{40}}$ en fonction de $\boldsymbol{R'_{zx}}$ et $\boldsymbol{R'_{xx}}$

$$\begin{cases} P_{04}R'_{xx} + R_{10}R'_{zx} = 0 \\ P_{04}R'_{xy} + R_{10}R'_{zy} + Q_{43} = 0 \\ P_{04}R'_{xz} + R_{10}R'_{zz} + (R_{21} + R_{32}) = 0 \\ Q_{21} = 0 \\ P_{21} = 0 \\ W_{32} = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$P_{04}R'_{xx} = -R_{10}R'_{zx}$$
$$P_{40} = R_{10}\frac{R'_{zx}}{R'_{xx}}$$

$$P_{40} = R_{10}\frac{\cos\theta_{10} R_{zx} - \sin\theta_{10} R_{zy}}{(\cos\theta_{10} R_{xx} - \sin\theta_{10} R_{xy})\cos\theta_{32} + (\cos\theta_{10} R_{yx} - \sin\theta_{10} R_{yy})\sin\theta_{32}}$$

$$= R_{10}\frac{\cos\theta_{10}\sin\psi_{21}\sin\theta_{21} + \sin\theta_{10}\cos\psi_{21}\sin\theta_{21}}{\left(\cos\theta_{10}(\cos\psi_{21}\,cos\,\varphi_{21} - \sin\psi_{21}\cos\theta_{21}\,sin\,\varphi_{21}) - \sin\theta_{10}(\sin\psi_{21}\,cos\,\varphi_{21} + \cos\psi_{21}\cos\theta_{21}\,sin\,\varphi_{21})\right)\cos\theta_{32} + \left(\cos\theta_{10}(-\cos\psi_{21}\,sin\,\varphi_{21} - \sin\psi_{21}\cos\theta_{21}\,cos\,\varphi_{21}) - \sin\theta_{10}(-\sin\psi_{21}\,sin\,\varphi_{21} + \cos\psi_{21}\cos\theta_{21}\,cos\,\varphi_{21})\right)\sin\theta_{32}}$$

$$= R_{10}\frac{(\cos\theta_{10}\sin\psi_{21} + \sin\theta_{10}\cos\psi_{21})\sin\theta_{21}}{\cos\theta_{10}\cos\psi_{21}\,cos\,\varphi_{21}\cos\theta_{32} - \cos\theta_{10}\sin\psi_{21}\cos\theta_{21}\,sin\,\varphi_{21}\cos\theta_{32} - \sin\theta_{10}\sin\psi_{21}\,cos\,\varphi_{21}\cos\theta_{32} - \sin\theta_{10}\cos\psi_{21}\cos\theta_{21}\,sin\,\varphi_{21}\cos\theta_{32} - \cos\theta_{10}\cos\psi_{21}\,sin\,\varphi_{21}\sin\theta_{32} - \cos\theta_{10}\sin\psi_{21}\cos\theta_{21}\,cos\,\varphi_{21}\sin\theta_{32} + \sin\theta_{10}\sin\psi_{21}\,sin\,\varphi_{21}\sin\theta_{32} - \sin\theta_{10}\cos\psi_{21}\cos\theta_{21}\,cos\,\varphi_{21}\sin\theta_{32}}$$

$$= R_{10}\frac{\sin(\psi_{21} + \theta_{10})\sin\theta_{21}}{\cos\theta_{10}\cos\psi_{21}\,cos\,\varphi_{21}\cos\theta_{32} - \cos\theta_{10}\sin\psi_{21}\cos\theta_{21}\,sin\,\varphi_{21}\cos\theta_{32} - \sin\theta_{10}\sin\psi_{21}\,cos\,\varphi_{21}\cos\theta_{32} - \sin\theta_{10}\cos\psi_{21}\cos\theta_{21}\,sin\,\varphi_{21}\cos\theta_{32} - \cos\theta_{10}\cos\psi_{21}\,sin\,\varphi_{21}\sin\theta_{32} - \cos\theta_{10}\sin\psi_{21}\cos\theta_{21}\,cos\,\varphi_{21}\sin\theta_{32} + \sin\theta_{10}\sin\psi_{21}\,sin\,\varphi_{21}\sin\theta_{32} - \sin\theta_{10}\cos\psi_{21}\cos\theta_{21}\,cos\,\varphi_{21}\sin\theta_{32}}$$

Bla…Bla…Bla

Question 11: Quelle est la seule rotation non nulle dans la rotule en $\boldsymbol{B}$

Rotation R_{21} liée à la mobilité interne

Question 12: Que se passerait-il cinématiquement si l'on remplaçait la liaison 3/2 par une liaison pivot ?

On voit que : $W_{32} = 0$
Cinématiquement, cela ne poserait pas de problèmes, il resterait 5 inconnues pour 6 équations
On verra en 2° année que cela correspond à un degré d'hyperstatisme.

Question 13: Comment bloquer la mobilité interne de la pièce 2 ?

Deux solutions :

- Changer la liaison 3/2 en liaison encastrement (ou glissière si on veut garder l'isostatisme)
- Changer la liaison 2/1 en une liaison rotule à doigt afin d'annuler R_{21} :
  - Rainure dans le plan $(B, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{z_2})$
  - Doigt dans la direction $\overrightarrow{x_2}$