Matrice productive

— *Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geqslant 0$. Elle est dite strictement positive si et seulement si tous ses coefficients sont strictement positifs. on notera alors $M > 0$.*

— *Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie $M - N \geqslant 0$(resp $M - N > 0$).*

— *Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si, et seulement, si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.*

Partie I: Étude d'exemples et propriétés

1. (a) En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Montrer que la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

   (b) Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que, si M est positive, alors pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

   (b) Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

Partie II: Caractérisation des matrices productives

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice productive, et soit $P = (p_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice positive telles que $P - AP > 0$.

   (a) Montrer que $P > 0$.

   (b) Soit $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$ et soit $c = \min\left\{\dfrac{x_j}{p_j} / \ 1 \leqslant j \leqslant n\right\} = \dfrac{x_k}{p_k}$.
   Établir que $c\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) \geqslant 0$. En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.

   (c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$.

      i. En remarquant que $-X \geqslant A(-X)$, montrer que X est nulle.

      ii. En déduire que $I_n - A$ est inversible.

   (d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive. (On pourra utiliser **II 1,b**). En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

2. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que$(I_n - B)^{-1}$soit positive. on note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

3. Donner une caractérisation des matrices productives.

4. Application : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.
   Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.

MATRICE PRODUCTIVE

Partie I: Étude d'exemples et propriétés

1. (a) A étant positive et $U - AU = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \geqslant 0$, donc A est productive

   (b) B étant positive. Si B est productive, alors il existe une matrice $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $X - BX > 0$. Or $X - BX = \begin{pmatrix}-4y-z\\-2x-3z\\0\end{pmatrix} > 0$, alors on doit avoir $0 > 0$. Ce qui est impossible

2. Posons $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$

   (a) Supposons que M est positive et soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ une matrice colonne positive, ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geqslant 0$.
   La matrice $MX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le coefficient de la matrice MX de position $(i,1)$ vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$ qui est positif car il est somme des termes positifs

   (b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, on pose la matrice colonne $X_j = (\delta_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n} = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $\leftarrow$ j-ème position

   La matrice X_j est positive, ce qui entraîne $MX \geqslant 0$ et comme $MX = \begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$, alors $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \ a_{ij} \geqslant 0$.
   Ainsi on vient de démontrer que $\forall j \in [\![1,n]\!]$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $a_{ij} \geqslant 0$. Donc M est positive

Partie II: Caractérisation des matrices productives

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice productive, et soit $P = (p_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice positive telles que $P - AP > 0$.

   (a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Le réel $p_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k$ est le coefficient de la matrice $P - PA$ de position $(i,1)$. Or $P - PA$ est strictement positive, donc $p_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k > 0$, ce qui assure $p_i > \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_k \geqslant 0$, alors par transitivité $p_i > 0$

   (b) Par définition de c, on a $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \ x_j \geqslant \dfrac{p_j}{p_k}x_k$ (*) et

$$\begin{aligned} c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) &= x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{p_j}{p_k}x_k \\ &\overset{(*)}{\geqslant} x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

   car le réel $x_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j$ est le coefficient de la matrice $X - AX$ de position $(k,1)$ et par hypothèse $X \geqslant AX$.

Matrice productive

- On sait que $p_k - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j > 0$ et on vient d'avoir $c\left(p_k - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j}p_j\right) \geqslant 0$, alors $c \geqslant 0$
- Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Par définition de c on a $\dfrac{x_j}{p_j} \geqslant c$ ceci entraine $x_j \geqslant cp_j \geqslant 0$, donc X est positive

(c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$.

i. On a $(-X) \geqslant A(-X)$ et $X \geqslant AX$, d'après la question précédente, X et $-X$ sont positives par conséquent les coefficients de X sont à la fois tous positifs et tous négatifs. D'où $X = 0$

ii. L'équation $(I_n - A)X = 0$ admet une seul solution $X = 0$, donc $I_n - A$ est inversible

(d) Soit X une matrice colonne positive et posons $Y = (I_n - A)^{-1}X$. Alors

$$\begin{array}{rcl} X & = & (I_n - A)(I_n - A)^{-1}X \\ & = & (I_n - A)Y \\ & = & Y - AY \end{array}$$

Comme X est positive, alors $Y - AY \geqslant 0$, d'après la question II 1,b la matrice Y est positive

- On vient de montrer que pour toute matrice positive X la matrice $(I_n - A)^{-1}X$ est positive, d'après la question II.2 la matrice $(I_n - A)^{-1}$ est positive

2. Par définition de $V = (I_n - B)^{-1}U$, on a $V - BV = (I_n - B)V = U > 0$

- Par hypothèse $(I_n - B)^{-1}$ et U sont positives, donc d'après la question II.1, V est positive. On conclut alors l'existence d'une matrice positive V telle que $V - BV > 0$

3. de II.1 et de II.2. on déduit qu'une matrice positive A est productive si, et seulement si, $I_n - A$ est inversible d'inverse positif
4. La matrice M étant positive vérifiant $2M^2 = M \quad (**)$. On a

$$\begin{array}{rcl} (I_n - M)(I_n + 2M) & = & I_n + M - 2M^2 \\ & \overset{(**)}{=} & I_n \end{array}$$

Donc $I_n - M$ est inversible d'inverse $I_n + 2M$ qui est une matrice positive (somme de deux matrice positives !) donc M est productive