DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Turbine à vapeur.....2
I.Préliminaires en quatre parties.....2
A.Diagramme de Clapeyron du système liquide-vapeur de l'eau.....2
B.Étude très simplifiée de l'enthalpie et de l'entropie d'un système liquide-vapeur.....2
C.Détermination de grandeurs à partir du tableau.....3
D.Détente adiabatique réversible d'un système liquide-vapeur.....4
II.Modèle de fonctionnement d'une turbine à vapeur: cycle de Rankine.....4
III.Cycle de Rankine avec soutirage.....6
Spectrométrie interférentielle de Michelson.....9
I.Interféromètre de Michelson.....9
II.Source monochromatique.....10
III.Raie à spectre rectangulaire.....10
IV.Doublet pour deux radiations d'égales contributions.....11
V.Doublet pour deux radiations de contributions inégales.....11
VI.Analyse de la raie Hα.....12

On soignera particulièrement les applications numériques en thermodynamique, le barème accordant une grosse partie des points aux résultats numériques.

Turbine à vapeur

Ce problème a pour objectif l'étude d'une turbine à vapeur fonctionnant selon le cycle de Rankine.

Ce problème ne fait pas intervenir de gaz parfaits. En conséquence, la loi $P\,v=r\,T$ n'a pas lieu d'être utilisée ici.

I. Préliminaires en quatre parties

A. Diagramme de Clapeyron du système liquide-vapeur de l'eau.

On désigne par P la pression du système liquide-vapeur et par v son volume massique.

1. Représenter l'allure du diagramme de Clapeyron (P,v) de l'eau. Représenter, sur ce diagramme l'allure de l'isotherme critique T_{Crit} et l'allure d'une isotherme. Préciser la position du point critique $Crit$. Préciser l'allure de l'isotherme critique au niveau du point $Crit$.
2. Indiquer sur le diagramme les domaines liquide (L) , liquide + vapeur $(L+V)$, et vapeur (V) .
3. Justifier la présence d'un palier sur l'isotherme $T<T_{Crit}$. Commenter.
4. On rappelle que le titre massique en vapeur x d'un système liquide-vapeur est égal au rapport entre la masse m_G d'eau à l'état de vapeur saturante et la masse totale m du système. On désigne, respectivement par :

   v_L : volume massique du liquide saturant

   h_L : enthalpie massique du liquide saturant

   v_G : volume massique de la vapeur saturante

   h_G : enthalpie massique de la vapeur saturante

   v : volume massique du système liquide-vapeur

   h : enthalpie massique du système liquide-vapeur

   - Démontrer avec soin que le titre massique en vapeur x est donné par la relation:

   $$x=\frac{(v-v_L)}{(v_G-v_L)}$$

   - Idem pour la relation:

   $$x=\frac{(h-h_L)}{(h_G-h_L)}$$

5. On désigne par $l_v(T)$ la chaleur latente massique de vaporisation à la température T . Rappeler la relation reliant $l_v(T)$ à $h_G(T)$ et $h_L(T)$.

B. Étude très simplifiée de l'enthalpie et de l'entropie d'un système liquide-vapeur

On s'intéresse ici à l'enthalpie et à l'entropie d'un kilogramme de fluide.

L'eau liquide étant très peu compressible et de volume massique négligeable par rapport au volume massique de l'eau vapeur, on admet dans cette partie que son état ne dépend que de la température T. On admet de plus que la capacité thermique massique c_L de l'eau liquide est une constante. Ces approximations sont fort exagérées et les résultats obtenus dans cette partie sont donc très approchés.

6. Déterminer l'enthalpie massique de l'eau liquide $h_L(T)$ à la température T, en supposant connue l'enthalpie massique $h_L(T_0)$ de l'eau liquide à une température T_0, en fonction de T, T_0, c_L, $h_L(T_0)$.

7. En déduire l'enthalpie massique $h(T)$ du mélange eau liquide-vapeur d'eau en équilibre à la température T, dont le titre massique de vapeur est x, en fonction de T, T_0, c_L, x, $l_v(T)$, $h_L(T_0)$.

8. Déterminer l'entropie massique de l'eau liquide $s_L(T)$ à la température T en supposant connue l'enthalpie massique $s_L(T_0)$ de l'eau liquide à une température T_0.

9. En déduire l'entropie massique $s(T)$ du mélange eau liquide-vapeur d'eau en équilibre à la température T, dont le titre massique de vapeur est x, en fonction de T, T_0, c_L, x, $l_v(T)$, $s_L(T_0)$.

(Les résultats de cette étude ne sont pas utilisés dans les parties II et III).

C. Détermination de grandeurs à partir du tableau

10. En partant du *tableau de données* et de l'étude très simplifiée précédente, déterminer par régression linéaire la valeur numérique de c_L (5 chiffres significatifs et unité). Les 5 points vous « semblent-ils tous vérifier l'hypothèse » ?

11. En partant du tableau suivant, déterminer par régression linéaire la valeur numérique de A et B si on pose $l_v(T)=A-B\times T$ (5 chiffres significatifs et unités). Les 5 points vous « semblent-ils tous vérifier l'hypothèse » ?

(Les résultats de cette étude ne sont pas utilisés dans la suite).

θ °C	P_{sat} bar	Liquide saturant		Vapeur saturante	
		v_L $(m^3.kg^{-1})$	h_L $(kJ.kg^{-1})$	v_G $(m^3.kg^{-1})$	h_G $(kJ.kg^{-1})$
35	0,056	$1{,}00.10^{-3}$	146,34	25,24	2560,67
50	0,123	$1{,}01.10^{-3}$	208,96	12,04	2587,42
100	1,013	$1{,}04.10^{-3}$	418,42	1,673	2671,44
185	11,238	$1{,}13.10^{-3}$	784,17	0,174	2778,03
285	69,200	$1{,}35.10^{-3}$	1261,11	0,028	2768,83

tableau de données

θ : température en degré Celsius avec $T(K)=\theta(°C)+273,15$

P_{sat} : pression de vapeur saturante

D. Détente adiabatique réversible d'un système liquide-vapeur

On dispose d'un cylindre indéformable muni d'un piston. Le cylindre et le piston ont des parois calorifugées. Le piston est, initialement, fixé dans une position qui délimite un volume $V=10\ litres$ dans le cylindre. L'introduction d'une masse $m=10\ g$ d'eau dans le cylindre permet d'obtenir un système liquide-vapeur en équilibre à la température $\theta=100\,°C$.

12.En utilisant les données du *tableau de données* (colonnes $v_L\ (m^3.kg^{-1})$ et $v_G\ (m^3.kg^{-1})$), calculer le titre massique en vapeur x de ce système. On rappelle que la vapeur d'eau n'est pas assimilée ici à un gaz parfait.

On fait subir au système liquide-vapeur défini ci-dessus une détente adiabatique réversible de la température $\theta=100\,°C$ à la température $\theta'=50\,°C$.

On admet que l'entropie massique d'un système liquide-vapeur, de titre massique en vapeur x , en équilibre à la température T est donnée (par rapport à une référence arbitraire) par la relation: $s(x,T)=c\ln T+l_v(T)\frac{x}{T}$, dans laquelle c désigne une grandeur constante. On prendra $c=4,20\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$.

13.Déterminer (expression littérale puis application numérique) le titre massique en vapeur x' du système liquide-vapeur à la fin de la détente.

14.Quel titre massique en vapeur x' aurait-on dû avoir, à la température $\theta=100\,°C$ pour qu'au cours de la détente définie ci-dessus ce titre reste constant? (Expression littérale puis application numérique).

II. Modèle de fonctionnement d'une turbine à vapeur: cycle de Rankine

Données:

- Dans la suite du problème tous les calculs se rapporteront à une masse $m=1\,kg$ de fluide.
- On admet que l'entropie massique d'un système liquide-vapeur, de titre massique en vapeur x , en équilibre à la température T est donnée par la relation: $s(x,T)=c\ln T+l_v(T)\frac{x}{T}$ dans laquelle c est une constante. La formule est, bien entendu, utilisable aux limites pour la vapeur saturante ($x=1$) ou pour le liquide saturant ($x=0$). On prendra $c=4,20\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$.
- On utilise aussi le *tableau de données* - voir plus haut - .

Le circuit secondaire d'une centrale nucléaire comporte les éléments suivants: un générateur de vapeur, une turbine, un condenseur et une pompe d'alimentation (*figure* 1). Les transformations subies par l'eau dans ce circuit sont modélisées par le cycle de Rankine décrit ci-dessous.

- $A \rightarrow B$: compression adiabatique réversible, dans la pompe d'alimentation, de la pression $P_1=0{,}056\ \text{bar}$ à la pression $P_2=69{,}200\ \text{bar}$, du liquide saturant sortant du condenseur à la pression P_1 (*état A*). Cette compression entraîne une élévation ΔT de la température du liquide.
- $B \rightarrow C$: échauffement isobare du liquide dans le générateur de vapeur qui amène le liquide de l' *état B* à l'état de liquide saturant sous la pression P_2 (*état C*).
- $C \rightarrow D$: vaporisation totale, dans le générateur de vapeur, sous la pression P_2 . Dans l' *état D* , le fluide se trouve à l'état de vapeur saturante.
- $D \rightarrow E$: détente adiabatique réversible, dans la turbine, de P_2 à P_1 . Dans l' *état E* , le fluide se trouve à l'état de fluide diphasé.
- $E \rightarrow A$: liquéfaction totale du fluide , dans le condenseur, sous la pression P_1 .

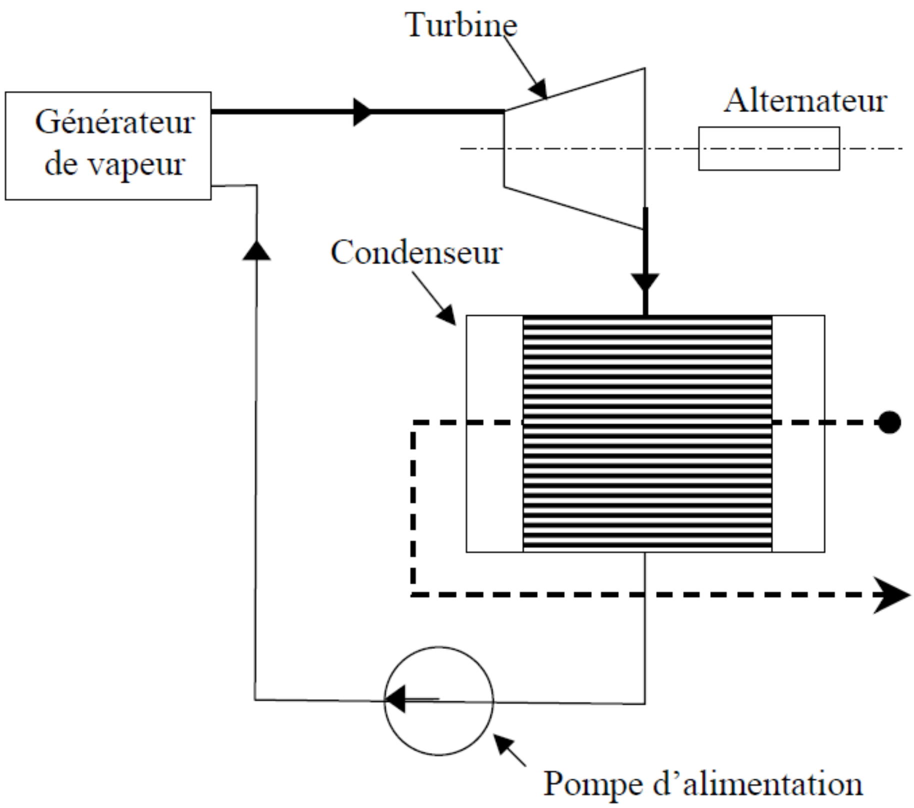


Figure 1

15.Rappeler l'expression du premier principe pour un kg de fluide en écoulement permanent.

16.Représenter avec soin le cycle décrit par l'eau dans le diagramme de Clapeyron (P, v) . Indiquer le sens dans lequel ce cycle est décrit. Indiquer les points A, B, C, D, E .

17.Qualifier chacune des cinq transformations par un ou si possible deux des qualificatifs suivants:

isentropique, isobare, isotherme.

18.Donner la valeur numérique des enthalpies massiques h_A , h_C , h_D .

19.Déterminer les entropies massiques s_A , s_B , s_C , s_D , s_E .

20.Calculer le titre x_E et l'enthalpie massique h_E du système liquide-vapeur sortant de la turbine.

21.A partir des enthalpies massiques, calculer la quantité d'énergie q_{EA} reçue par kg d'eau, par transfert thermique dans le condenseur.

22.On étudie ici la compression $A \rightarrow B$ dans la pompe.

- Rappeler l'expression de la différentielle de l'enthalpie massique dh avec $h = h(s, P)$.
- En déduire $\Delta h_{AB} = h_B - h_A$ (formule littérale puis application numérique). On fera ici l'approximation que le liquide est incompressible (isochorique) c'est à dire que le volume massique du liquide de l' eau reste constant sur l' intervalle de pression considéré et on prendra $v_L = 10^{-3}\ m^3.kg^{-1}$.
- Calculer h_B .
- La différentielle de l'entropie massique ds du liquide avec $s = s(T, P)$ s'écrit (sans faire ici d'approximation) en fonction des variables T et P : $ds = c_L \frac{dT}{T} - \alpha v_L dP$. On suppose ici que la capacité thermique du liquide est constante $c_L = 4{,}20\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}$ et que le coefficient de dilatation isobare α de l'eau liquide est constant $\alpha = 1{,}5.10^{-4}.K^{-1}$. On note ΔT l'élévation de la température du liquide dans la pompe d'alimentation avec $\Delta T \ll T$. Exprimer puis calculer ΔT . Commenter.

23.Calculer la quantité d'énergie q_{BD} reçue par kg d'eau, par transfert thermique dans le générateur de vapeur.

24.Calculer le travail w reçu par kg d'eau au cours du cycle.

25.Calculer l'efficacité η (ou rendement thermodynamique) du cycle. Comparer cette efficacité à celle η_{Carnot} d'un cycle de Carnot décrit entre les mêmes températures extrêmes. On redémontrera l'expression de η_{Carnot} .

26.Vérifier que si l'on néglige la variation d'enthalpie Δh_{AB} , le travail w peut s'exprimer en fonction des enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la turbine. Commenter.

III. Cycle de Rankine avec soutirage

On se propose de modifier l'installation par l'adjonction d'une deuxième turbine et la pratique du soutirage qui a pour but de réchauffer le liquide avant qu'il soit réinjecté dans le générateur de vapeur.

La pratique du soutirage consiste à prélever, à la sortie d'une première turbine, sous la pression $P' = 11{,}238\,\text{bar}$, une masse m' du fluide. La masse restante $m - m'$ poursuit la détente dans la deuxième turbine jusqu'à la pression P_1 .

- Cette masse m' de fluide est envoyée dans un réchauffeur. Le fluide y est mis en contact, par l'intermédiaire d'un échangeur, avec la masse $m-m'$ de liquide saturant issu du condenseur, qui a été, préalablement, comprimé de $P1$ à P' par la pompe d'alimentation (*figure* 2). Au cours de cette opération la masse m' de fluide se liquéfie sous la pression constante P' L'énergie ainsi libérée est entièrement utilisée pour réchauffer la masse $m-m'$ de liquide de la température T_1 , atteinte à la sortie du condenseur, à la température T' .
- A la sortie du réchauffeur la masse m de fluide se trouve à l'état liquide saturant dans les conditions T' , P' .
- Une pompe de reprise comprime cette masse m de liquide, de manière adiabatique, de P' à P_2 puis le refoule dans le générateur de vapeur où il subit un échauffement isobare de T' à T_2 avant de se vaporiser de nouveau.

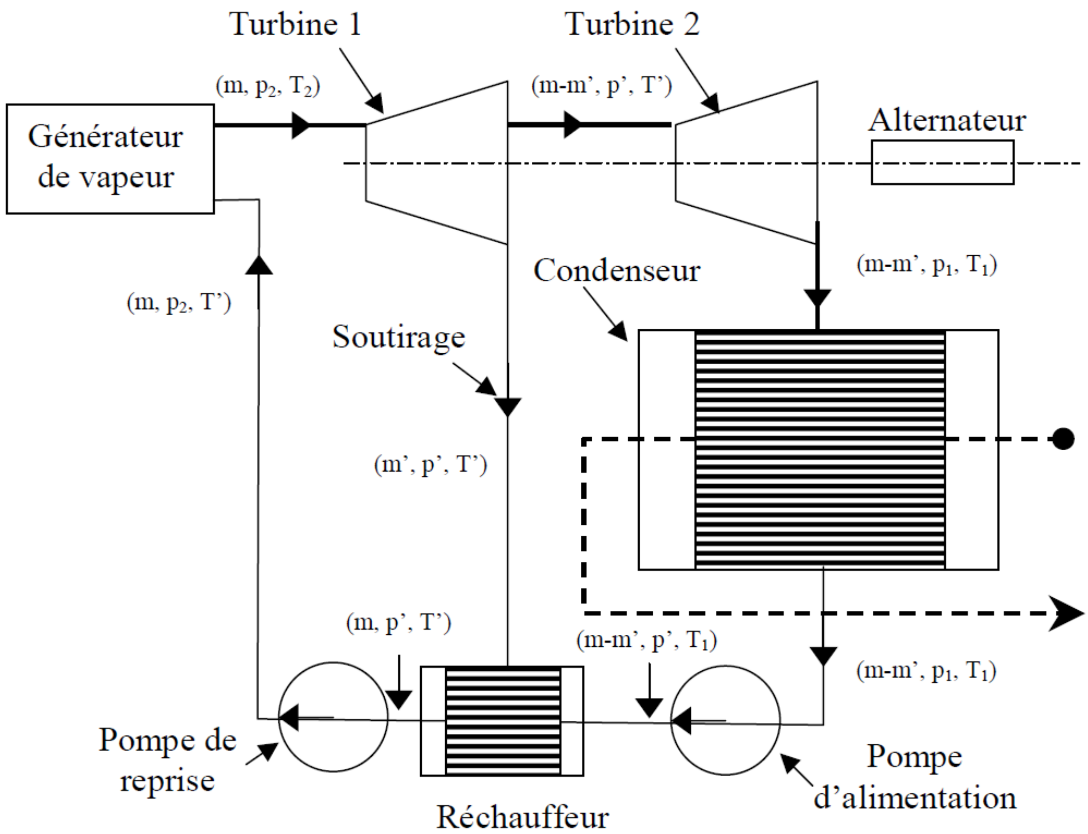


Figure 2

Dans cette étude, on négligera la variation d'enthalpie massique apportée au fluide par les pompes.

27.Représenter le cycle de Rankine avec soutirage dans le diagramme de Clapeyron (P, v) . On représentera en trois couleurs selon que la transformation concerne m' seule, $(m-m')$ seule ou toute la masse m .

28.Calculer le titre x_2 et l'enthalpie h_2 du système liquide-vapeur à la fin de la deuxième détente.

29.Calculer le titre x_1' et l'enthalpie massique h_1' du système liquide-vapeur à la fin de la première détente.

30.A partir d'un bilan enthalpique traduisant les transferts thermiques dans le réchauffeur entre la masse m' de fluide et le liquide de masse $m-m'$, calculer m' .

31.Calculer le travail total w_S reçu, par kg de fluide au cours d'un cycle avec soutirage.

32.Calculer l'efficacité η_S (ou rendement) du cycle avec soutirage. Conclure.

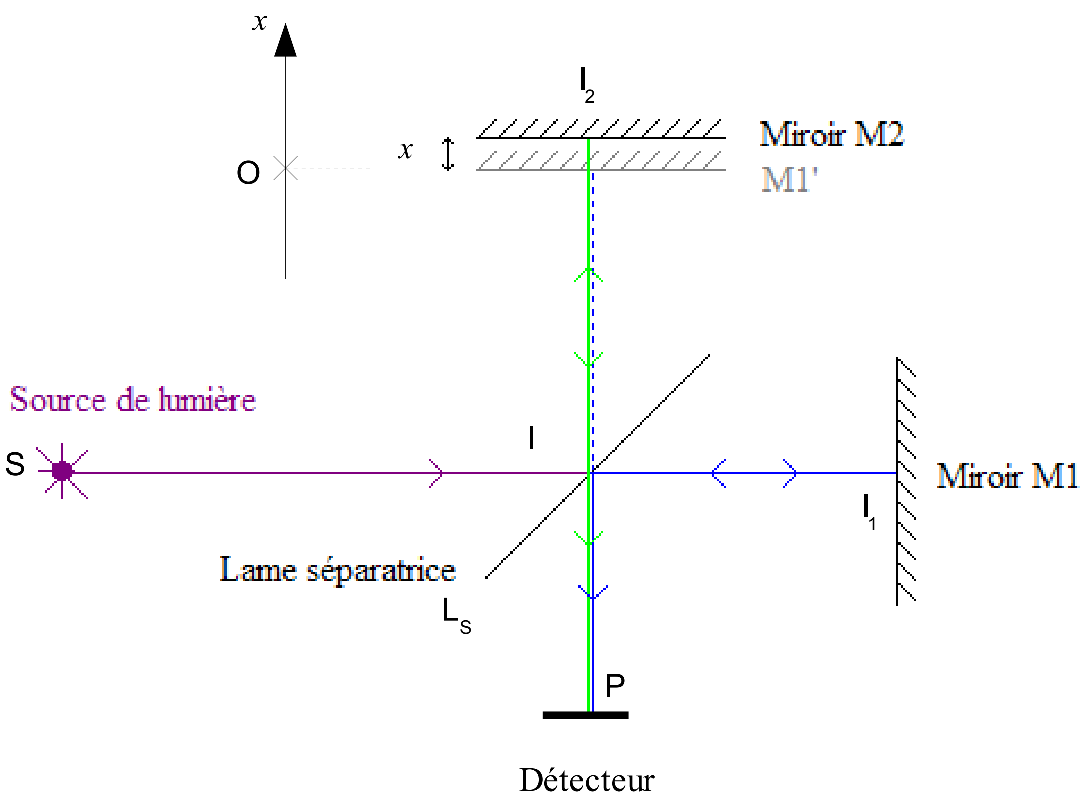
Spectrométrie interférentielle de Michelson

Nous proposons de reprendre l'étude spectrale de sources lumineuses, telle qu'elle a été initialement menée par Michelson en 1891, en spectrométrie interférentielle.

Donnée :
Vitesse de la lumière dans le vide $c=2{,}997\,792\,458.10^{8}\ m.s^{-1}\approx 3.10^{8}\ m.s^{-1}$

I. Interféromètre de Michelson

On éclaire la lame semi-transparente ou séparatrice L_S , supposée infiniment mince, d'un interféromètre de Michelson avec une source ponctuelle S . Celle-ci envoie un pinceau lumineux dans le voisinage du centre I de L_S ; l'un des miroirs M_1 est fixe, alors que le second M_2 est mobile selon une direction Ox normale à son plan. Le centre I_1 de M_1 , S et I sont alignés.



Un détecteur est placé en un point P , de telle sorte que sa faible surface de détection soit normale à la direction I_2I , laquelle est définie par I et le centre I_2 de M_2 . Les deux rayons, l'un transmis par la séparatrice, réfléchi sur M_1 , réfléchi sur la séparatrice: $S I I_1 I P$ et l'autre réfléchi sur la séparatrice, réfléchi sur M_2 , transmis par la séparatrice: $S I I_2 I P$, sont cohérents, de même intensité et interfèrent en P .

Le détecteur enregistre l'intensité de l'onde résultant de l'interférence des deux rayons.

Sur le schéma, on a aussi dessiné M'_1 symétrique du miroir M_1 par rapport à la séparatrice (il n'y a pas de miroir M'_1).

1. On désigne par x le déplacement du miroir *M2* , compté à partir de la distance minimale de $I I_2$ égale à $I I_1$ .Montrer que, si on suppose que l'air est assimilable au vide, la différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent en P est $\delta=2x$.

II. Source monochromatique

On se place dans le cas où la source émet une onde monochromatique, dont la fréquence ν_0 correspond à la longueur d'onde $\lambda_0=550\,nm$.

2. Calculer ν_0 . Quelle est la couleur de celle radiation ?
3. Montrer, en partant de l'expression de l'amplitude des ondes, que l'intensité de l'onde détectée a pour expression : $I(\tau)=\frac{I(0)}{2}[1+\cos(2\pi\nu_0\tau)]$ où τ est une durée que l'on exprimera en fonction de x et de la vitesse c de la lumière dans le vide. On a posé $I(0)=I(\tau=0)$.

III. Raie à spectre rectangulaire

La source est une lampe à vapeur de cadmium qui émet un groupe d'ondes monochromatiques, centré autour d'une fréquence moyenne ν_0 correspondant à la longueur d'onde $\lambda_0=643{,}8\,nm$.

On désigne par $I_\nu(\nu)$ l'intensité spectrale de la source, c'est-à-dire la contribution relative de chaque fréquence à l'intensité de l'onde émise par la source. On pose ici $d\,I(0)=I_\nu(\nu)\,d\nu$ En 1892, Michelson a déterminé la largeur totale à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2}$ de cette radiation en adoptant un modèle rectangulaire pour $I_\nu(\nu)$ centré sur la fréquence ν_0 :

$$I_\nu(\nu)=A \quad \text{pour} \quad \nu_0-\frac{\Delta\nu_{1/2}}{2}\leqslant\nu\leqslant\nu_0+\frac{\Delta\nu_{1/2}}{2} \quad \text{et}$$
$$I_\nu(\nu)=0 \quad \text{autrement} \quad .$$

4. Calculer ν_0 . Quelle est la couleur de celle radiation ?
5. Montrer que l' intensité détectée peut se mettre sous la forme: $I(\tau)=\frac{I(0)}{2}[1+\gamma_t(\tau)\cos(2\pi\nu_0\tau)]$, $\gamma_t(\tau)$ étant une fonction que l'on déterminera. Préciser l'expression de $I(0)$ en fonction de A et $\Delta\nu_{1/2}$.
6. Démontrer l'expression du facteur de visibilité des franges d'interférence, c'est-à-dire la quantité $V=\frac{(I_M-I_m)}{(I_M+I_m)}$, I_M étant l'intensité maximale et I_m l'intensité minimale au voisinage de la valeur τ .

7. Tracer l'allure des graphes $|\gamma_t(\tau)|$ et $I(\tau)$ en précisant les valeurs remarquables.
8. En augmentant x à partir d' une valeur nulle, on obtient une première annulation de V pour $x=15{,}9\,cm$.
   - Quelle valeur $\Delta\nu_{1/2}$ Michelson a-t-il obtenu (formule littérale puis application numérique) ?
   - Calculer $L_t = c/\Delta\nu_{1/2}$ appelée longueur de cohérence temporelle.
   - En déduire l'écart en longueur d'onde $\Delta\lambda_{1/2}$ correspondant, formule littérale puis application numérique (en picomètre).

IV. Doublet pour deux radiations d'égales contributions

La source précédente est remplacée par une lampe à vapeur de mercure qui émet deux radiations, de fréquences respectives : $\nu_1=\nu_0-\frac{\Delta\nu_{1/2}}{2}$ et $\nu_2=\nu_0+\frac{\Delta\nu_{1/2}}{2}$ et dont les contributions en intensité dans le plan d'observation sont égales. On pose donc $I_1(0)=I_2(0)$. La longueur d'onde correspondant à ν_0 est $\lambda_0=578\,nm$.

9. Calculer ν_0 . Quelle est la couleur de cette radiation ?
10. Montrer que l' intensité détectée est donnée par la même expression que précédemment, mais $\gamma_t(\tau)$ est une fonction différente que l'on déterminera. Préciser $I(0)$ en fonction de $I_1(0)=I_2(0)$.
11. En déduire le facteur de visibilité ainsi que les graphes $|\gamma_t(\tau)|$ et $I(\tau)$.
12. Entre les deux premières valeurs de τ qui annulent V , on compte 277 pics d'intensité. En déduire $\Delta\nu_{1/2}$, L_t et $\Delta\lambda_{1/2}$.
13. Une analyse attentive du graphe $V(\tau)$, obtenu expérimentalement, montre que V décroît lorsque τ augmente. Proposer une interprétation physique simple et déterminer la nouvelle expression de $\gamma_t(\tau)$ en utilisant les résultats de la partie III.

V. Doublet pour deux radiations de contributions inégales

On considère une source qui émet aussi deux radiations, de fréquences respectives $\nu_1=\nu_0-\frac{\Delta\nu_{1/2}}{2}$ et $\nu_2=\nu_0+\frac{\Delta\nu_{1/2}}{2}$ mais de contributions différentes: $I_1(0)$ et $I_2(0)=\mu\, I_1(0)$, μ étant un facteur positif.

14. Montrer que l' intensité détectée peut se mettre sous la forme: $I(\tau)=\frac{I(0)}{2}[1+\Re\{\underline{\gamma_t}(\tau)\exp(2i\pi\nu_0\tau)\}]$ où

   $\underline{\gamma_t}=C1\exp(-i\pi\Delta\nu_{1/2}\tau)+C2\exp(i\pi\Delta\nu_{1/2}\tau)$ ν_0 étant la fréquence moyenne $\frac{(\nu_1+\nu_2)}{2}$ et $\Delta\nu_{1/2}$ la différence des fréquences $(\nu_2-\nu_1)$ et $(C1\ ,\ C2)$ deux facteurs à déterminer en fonction de μ .

15.Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument α_t de $\underline{\gamma_t}$.

16.Quelle relation existe-t-il entre le facteur de visibilité V des franges d'interférence et $\underline{\gamma_t}$? Donner l'expression de V en fonction de μ et de $\cos(\pi \Delta \nu_{1/2} \tau)$.

17.Trouver, en fonction de μ , les valeurs minimale V_m et maximale V_M de V lorsque τ varie. Donner l'allure du graphe $V(\tau)$.

18.Que deviennent V et α_t dans les cas extrêmes où $\mu=0$ et $\mu=1$? Commenter.

VI. Analyse de la raie H_o

L'analyse fine de la raie H_o de la série de Balmer de l'atome d'hydrogène révèle que cette radiation est constituée d'un doublet non symétrique, car le facteur de visibilité V varie avec τ comme le montre le graphe précédent, mais V_m n'est pas nul. La longueur d'onde, associée à la moyenne des fréquences, est $\lambda_0=656,3\,nm$, Michelson a constaté que la première valeur minimale du facteur de visibilité était atteinte pour $x=8,5\,mm$ et valait $0,15$.

19.Calculer la fréquence ν_0 de la radiation de longueur d'onde λ_0 .

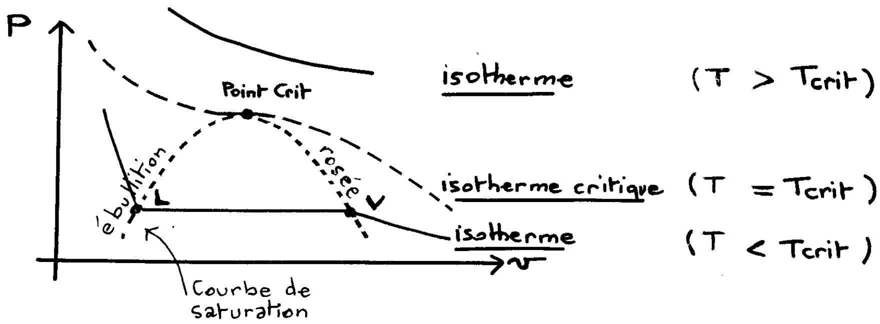
20.Trouver $\Delta \nu_{1/2}$ et $\Delta \lambda_{1/2}$ en précisant leurs unités.

21.En déduire μ et α_t .

Réponses

Turbine à vapeur

1)

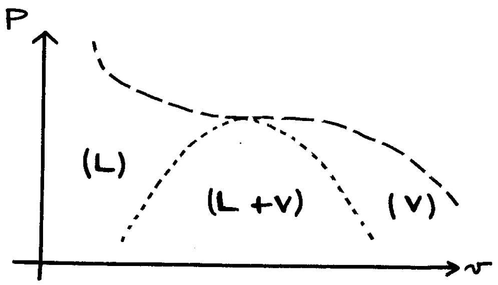


Au niveau du point critique, l'isotherme critique est à tangente horizontale avec point d'inflexion

$$\left(\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T_{crit}} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_{T_{crit}} = 0 \right)$$

---

2)



---

3) Sur l'isotherme $T < T_c$ donc à température constante, au niveau du domaine diphasé, il y a changement d'état. Pour un corps pur, ce changement d'état a lieu à P constante d'où le palier à la pression de vapeur saturante $P = P^*_{SAT}(T)$

(en lien avec variance pour fluide pur diphasé = 1 donc si T est fixé, P est connu).

---

4)
$$V = V_{\text{Liquide}} + V_{\text{vapeur}}$$
$$m\,v = m_L\, v_L + m_G\, v_G$$

avec $x = \dfrac{m_G}{m}$

et $m = m_L + m_G$

$$v = (1-x)\, v_L + x\, v_G$$

$$\boxed{x = \dfrac{v - v_L}{v_G - v_L}}$$

Pour l'enthalpie, la démonstration est identique

$$H = H_{\text{Liquide}} + H_{\text{Vapeur}}$$
$$h = (1-x)\, h_L + x\, h_G$$

$$\boxed{x = \dfrac{h - h_L}{h_G - h_L}}$$

---

5)
$$\boxed{l_v(T) = h_G(T) - h_L(T)}$$

(cf $Q_P = \Delta H$, le changement d'état a lieu à pression constante)

---

6)
$$dh_L = c_L\, dT \underbrace{+ \ldots dP}_{\text{on néglige ce terme ici}}$$

$$\int_{T_0}^{T} dh_L = \int_{T_0}^{T} c_L\, dT$$

$$h_L(T) - h_L(T_0) = c_L\,(T - T_0)$$

$$\boxed{h_L(T) = c_L\,(T - T_0) + h_L(T_0)}$$

---

7) deux méthodes :

→ soit, à partir du $h_L(T)$ trouvé en 5), on vaporise x kg :

$$h(T) = h_L(T) + x\, \ell_V(T)$$

→ soit, on part de 4) (et 5) et 6)) :

$$h(T) = (1-x)\, h_L(T) + x\, h_G(T)$$
$$= (1-x)\, h_L(T) + x\left(h_L(T) + \ell_V(T)\right)$$

$$\boxed{h(T) = x\, \ell_V(T) + c_L(T-T_0) + h_L(T_0)}$$

---

8)

$$ds_L = c_L \frac{dT}{T} \underbrace{+ \dots dP}_{}$$, on néglige ce terme ici

$$\int_{T_0}^{T} ds_L = \int_{T_0}^{T} c_L \frac{dT}{T}$$

$$\boxed{s_L(T) = c_L \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_L(T_0)}$$

---

9) deux méthodes :

→ soit, à partir du $s_L(T)$ trouvé en 8), on vaporise x kg :
La vaporisation à T, sous la pression d'équilibre est réversible et pour un kg : $\Delta s_{\text{vaporisation}} = \frac{\ell_V(T)}{T}$
(pas de création). Donc pour x kg :

$$s(T) = s_L(T) + x\, \frac{\ell_V(T)}{T}$$

→ soit, on utilise :

$$s(T) = (1-x)\, s_L(T) + x\, s_G(T)$$
$$= (1-x)\, s_L(T) + x\left(s_L(T) + \frac{\ell_V(T)}{T}\right)$$
$$= s_L(T) + x\, \frac{\ell_V(T)}{T}$$

$$\boxed{s(T) = x\, \frac{\ell_V(T)}{T} + c_L \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_L(T_0)}$$

remarque :

on obtient

$$s(T) = x\, \frac{\ell_V(T)}{T} + c_L \ln(T) + \underbrace{s_L(T_0) - c_L \ln(T_0)}$$

$$s(T) = x\, \frac{\ell_V(T)}{T} + c_L \ln(T) + \text{constante}$$

Cette dernière écriture est choquante car elle fait intervenir le ln d'une grandeur dimensionnée : $\ln T$. Ne pas oublier alors que la constante contient le $\ln T_0$ complémentaire.

10) → En partant des données pour le liquide (saturant)

θ (°C)	h_L (kJ.kg^{-1})
35	146,34
50	208,96
100	418,42
185	784,17
285	1261,11

et de la formule en 5)

$$h_L(T) = c_L T \underbrace{- c_L T_0 + h_L(T_0)}_{\text{constante}}$$

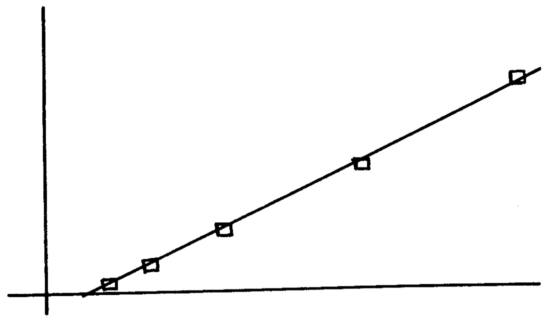
on réalise la <u>régression linéaire</u>

$$\boxed{h_L(T) \text{ en fonction de } \theta \quad (\text{ou de } T = \theta + 273,15)}$$

Le coefficient directeur donne c_L :

$$\boxed{c_L = 4,4411 \text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}}$$

Le coeff de corrélation est proche de 1 (corr = 0,99958).
On peut estimer que les points sont "assez bien alignés".
En visualisant sur l'écran de la calculatrice la droite :



Les points vérifient-ils l'hypothèse : <u>on ne peut répondre à la question</u>... Le dernier point est sans doute haut ... <u>Il faudrait</u> <u>tenir compte de la précision des mesures</u> (tests statistiques...). Si les chiffres fournis sont tous significatifs, on peut "subodorer" que les écarts ne s'expliquent pas et que l'hypothèse proposée est fausse pour l'ensemble des 5 points.

11) on réalise la régression linéaire

$$\boxed{\ell_V(T) = h_G(T) - h_L(T) \quad \text{en fonction de } T}$$

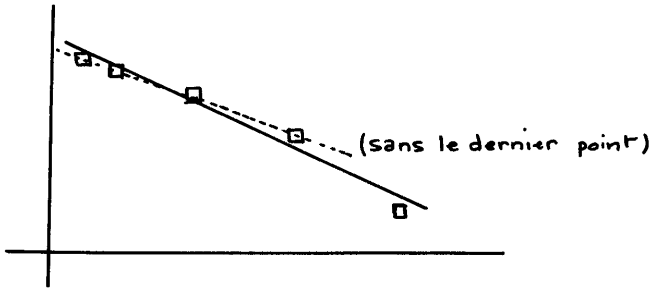
on trouve

$$\ell_V(T) = A - B\,T$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 3548,4 \ \mathrm{kJ.kg^{-1}} \\ B &= 3,5605 \ \mathrm{kJ.kg^{-1}\,K^{-1}} \\ corr &= -0,98964 \end{aligned}}$$

$|corr| \simeq 1$ ... les points sont "assez bien alignés"



on peut se demander si le dernier point n'est pas à rejeter... Il faudrait faire des tests statistiques précis pour répondre à la question.

---

12) On connaît le volume massique

$$\boxed{v = \frac{V}{m}}$$

A.N. $$v = \frac{10\ 10^{-3}}{10\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{v = 1,00 \ \mathrm{m^3\,kg^{-1}}}$$

d'où à $\theta = 100°C$

$$\boxed{x = \frac{v - v_L}{v_G - v_L}}$$

A.N. $$x = \frac{1,00 - 1,04\ 10^{-3}}{1,673 - 1,04\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{x = 59,7\ \%}$$

---

13) La détente de θ à θ' est <u>isentropique</u> donc :

$$s'(x',T') = s(x,T)$$

$$c \ln T' + \ell_v(T') \frac{x'}{T'} = c \ln T + \ell_v(T) \frac{x}{T}$$

$$\boxed{x' = \left(c \ln \frac{T}{T'} + \ell_v(T) \frac{x}{T} \right) \frac{T'}{\ell_v(T')}}$$

A.N.

$$x' = \frac{\left(4{,}20 \ln \frac{373{,}15}{323{,}15} + \frac{(2671{,}44 - 418{,}42)\, 0{,}597}{373{,}15} \right) 323{,}15}{(2587{,}42 - 208{,}96)}$$

$$\boxed{x' = 57{,}2\,\%}$$

---

14) On veut que $x_{final} = x_{initial} = x'$

$$s'(x',T') = s(x',T)$$

$$c \ln T' + \ell_v(T') \frac{x'}{T'} = c \ln T + \ell_v(T) \frac{x'}{T}$$

$$\boxed{x' = \frac{c \ln \frac{T}{T'}}{\frac{\ell_v(T')}{T'} - \frac{\ell_v(T)}{T}}}$$

A.N.

$$x' = \frac{4{,}20 \ln \frac{373{,}15}{323{,}15}}{\frac{2587{,}42 - 208{,}96}{323{,}15} - \frac{2671{,}44 - 418{,}42}{373{,}15}}$$

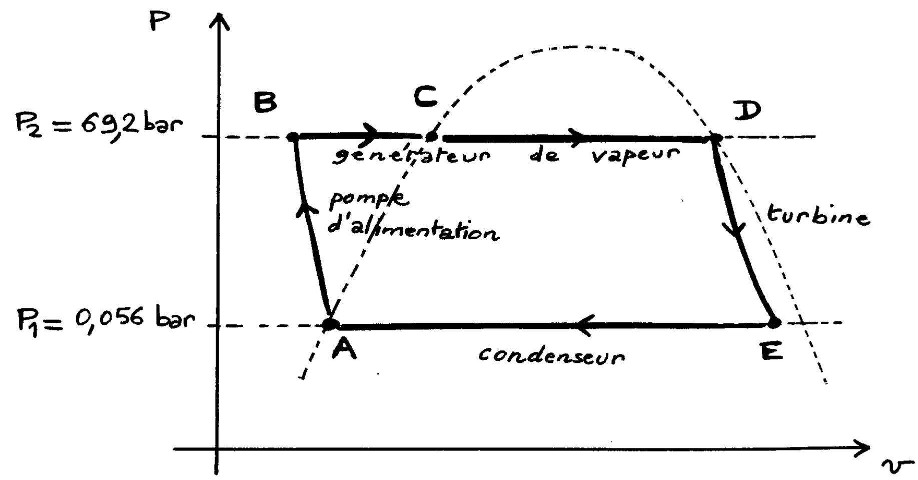
$$\boxed{x' = 45{,}7\,\%}$$

---

15) $$\boxed{h_{sortie} - h_{entrée} = w_{technique} + q}$$

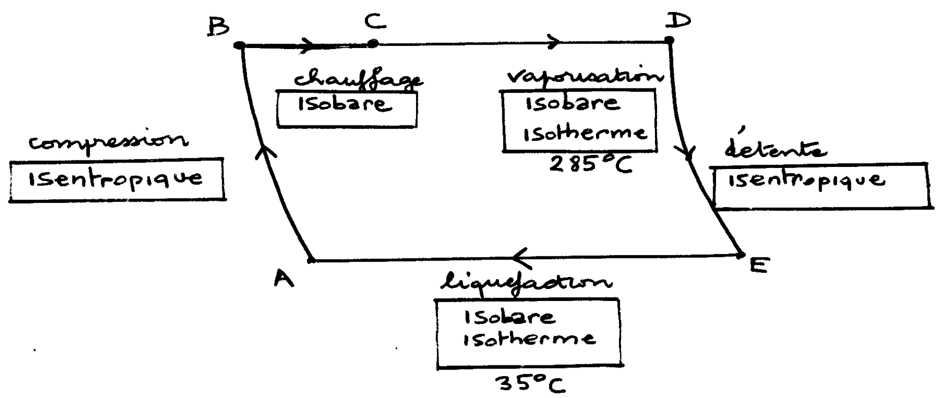
---

16) cycle décrit par l'eau :



---

17)



---

18)

$$\boxed{\begin{aligned} h_A &= h_L(35°C) = 146,34 \text{ kJ kg}^{-1} \\ h_C &= h_L(285°C) = 1261,11 \text{ kJ kg}^{-1} \\ h_D &= h_G(285°C) = 2768,83 \text{ kJ kg}^{-1} \end{aligned}}$$

---

19) On utilise la formule $s(x,T) = c \ln T + \ell_v(T)\frac{x}{T}$

avec $x=0$ si liquide saturant

$x=1$ si vapeur saturante

$$s_A = c \ln T_1$$

$$= 4,2 \ln(35+273,15)$$

$$\boxed{s_A = 24,068 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}$$

$$s_C = c \ln T_2$$
$$= 4{,}2 \ln (285 + 273{,}15)$$
$$\boxed{s_C = 26{,}563 \text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}}$$

$$s_D = c \ln T_2 + \ell_V(T_2)\,\frac{1}{T_2}$$
$$= 4{,}2 \ln (285+273{,}15) + \frac{2768{,}83 - 1261{,}11}{285 + 273{,}15}$$
$$\boxed{s_D = 29{,}265 \text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}}$$

La compression étant isentropique :

$$\boxed{s_B = s_A = 24{,}068 \text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}}$$

La détente étant isentropique :

$$\boxed{s_E = s_D = 29{,}265 \text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}}$$

---

20) En E, le système est diphasé :

$$s_E = c \ln T_1 + \frac{\ell_V(T_1)}{T_1}\,x_E$$

$$\boxed{x_E = \frac{(s_E - c \ln T_1)\;T_1}{\ell_V(T_1)}}$$

$$\text{A.N.} = \frac{(29{,}265 - 4{,}2 \ln 308{,}15)}{2560{,}67 - 146{,}34}\,308{,}15$$

$$\boxed{x_E = 66{,}3\%}$$

Puis :

$$h_E = x_E\, h_G(T_1) + (1 - x_E)\, h_L(T_1)$$

$$\boxed{h_E = 1747{,}57 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

---

21) Dans le condenseur, il n'y a pas de travail technique

$$h_A - h_E = q_{EA} + \cancel{w_{techn}}$$

$$\boxed{q_{EA} = h_A - h_E}$$

A.N.

$$\boxed{q_{EA} = -1601{,}23 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

(<u>négatif</u> puisque dans le condenseur, le fluide perd de l'énergie thermique)

---

22) Pompe de A à B

$\longrightarrow$ $dh = T\,ds + v\,dP$

$\longrightarrow$ La compression est isentropique

$dh = v\,dP$ avec $v \approx v_L$ constante

$= v_L\,dP$

$h_B - h_A = v_L\,(P_B - P_A)$

$$\boxed{h_B - h_A = v_L\,(P_2 - P_1)}$$

A.N. v_L en $m^3\,kg^{-1}$

P en Pascal (1 bar $\Rightarrow 10^5$ Pa)

Δh est obtenu en <u>J kg^{-1}</u>

$h_B - h_A = 10^{-3}\,(69{,}2 - 0{,}056)\,10^5$

$= 6914{,}4 \text{ J kg}^{-1}$

$$\boxed{h_B - h_A = 6{,}91 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{h_B = 153{,}25 \text{ kJ kg}^{-1}}$

$\longrightarrow$ $ds = c_L \dfrac{dT}{T} - \alpha\, v_L\, dP$

La compression est isentropique donc $ds = 0$

$$\frac{dT}{T} = \frac{\alpha\, v_L}{c_L}\, dP$$

Les variations sont "petites", on peut donc écrire (inutile d'intégrer puis faire ensuite un calcul approché)

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{\alpha\, v_L}{c_L}\, \Delta P$$

soit

$$\boxed{\Delta T = \frac{\alpha\, v_L}{c_L}\,(P_2 - P_1)\, T_1}$$

A.N.

$$= \frac{1{,}5\ 10^{-4}\ \ 10^{-3}\ \ (69{,}2 - 0{,}056)\ 10^{+5}\ \ 308{,}15}{4{,}20\ \ 10^{3}}$$

(attention : c_L en $\mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$)

$$\boxed{\Delta T = 0{,}076\ \mathrm{K}}$$

→ La variation d'enthalpie massique au niveau de la pompe est faible.
L'élévation de température de l'eau liquide durant la compression est négligeable.

---

23) Il n'y a pas de travail technique dans le générateur de vapeur

$$\boxed{q_{BD} = h_D - h_B}$$

A.N.

$$= 2768{,}83 - 153{,}25$$

$$\boxed{q_{BD} = 2615{,}58\ \mathrm{kJ\,kg^{-1}}}$$

---

24) Au cours d'un cycle

$$w + q_{chaud} + q_{froid} = 0$$

(on peut remarquer que sur un cycle $\underline{w = w_{techn}}$ puisque $\Delta(Pv) = 0$)

$$w + q_{BD} + q_{EA} = 0$$

$$\boxed{w = -(q_{BD} + q_{EA})}$$

A.N.

$$\boxed{w = -1014{,}35\ \mathrm{kJ\,kg^{-1}}}$$

négatif car le fluide fournit de l'énergie mécanique.

---

25) $$\eta = \frac{-w}{q_{chaud}}$$

$$= \frac{1014,35}{2615,58}$$

$$\boxed{\eta = 38,8\ \%}$$

"Rendement" de Carnot

$$\left.\begin{array}{l} q_{chaud} + q_{froid} + w_{reversible} = 0 \\ \dfrac{q_{chaud}}{T_{chaud}} + \dfrac{q_{froid}}{T_{froid}} = 0 \end{array}\right\} \quad \eta_{rev} = \frac{-w_{rev}}{q_{chaud}} = 1 + \frac{q_{froid}}{q_{chaud}} = 1 - \frac{T_{froid}}{T_{chaud}}$$

$$\boxed{\eta_{rev} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}}$$

A.N.

$$\boxed{\eta_{rev} = 44,8\ \%}$$

On trouve $\eta < \eta_{rev}$.
En lien avec l'irréversibilité de la transformation BC (toutes les autres transformations étant réversibles).
On y chauffe l'eau liquide sous la pression 69,2 bar de 35,076 °C à 285 °C en utilisant une source à la température 285°C.

---

26) On a vu en 24)

$$w = -(q_{BD} + q_{EA})$$

$$= -(h_D - h_B + h_A - h_E)$$

$$= \underbrace{(h_E - h_D)}_{\substack{w_{tech} \\ turbine}} + \underbrace{(h_B - h_A)}_{\substack{w_{tech} \\ pompe}}$$

En négligeant le Δh_{AB} pompe, on vérifie que le seul travail est $W_{tech\ turbine}$

remarque

on supposant $h_B = h_A$

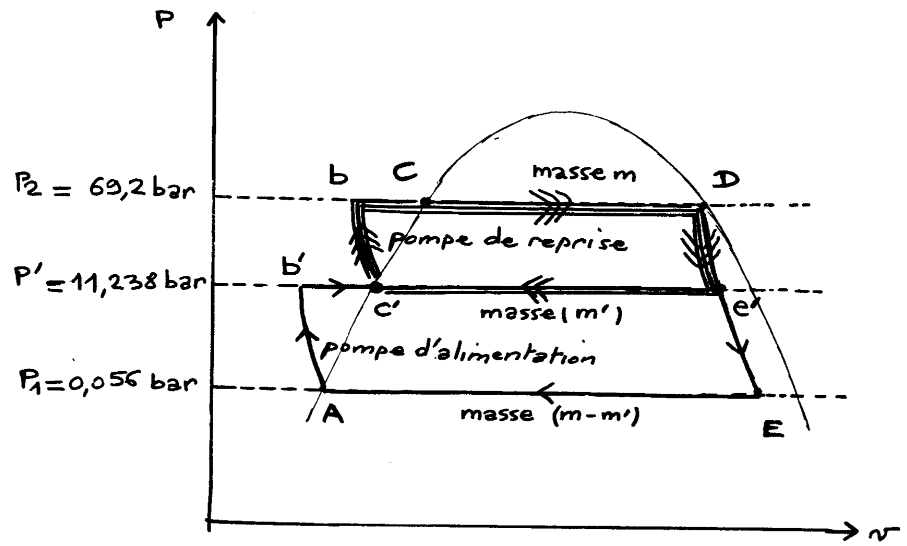
on obtient

$$\eta = \frac{-(h_E - h_D)}{h_D - h_A}$$

$$\eta = 38,9\ \%$$

---

27)



→ On retrouve les points A C D E précédents.

→ b'e' correspond au réchauffeur

→ $T' = 185°C$

---

28) A la fin de la deuxième détente, on se retrouve en E déjà étudié

$$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = x_E = 66,3\ \% \\ h_2 = h_E = 1747,57\ \text{kJ kg}^{-1} \end{array}}$$

---

29) A la fin de la première détente, on se trouve en (e')

avec $s_{e'} = s_D = 29,265 \text{ kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

$$x_{e'} = \frac{(s_{e'} - c \ln T')\ T'}{l_V(T')}$$

$$\boxed{x'_1 = x_{e'} = 81,1\ \%}$$

et $h_{e'} = x_{e'}\, h_G(T') + (1 - x_{e'})\, h_L(T')$

$$\boxed{h'_1 = h_{e'} = 2401,66 \text{ kJ kg}^{-1}}$$

---

30) Dans le réchauffe , $\Delta H = 0$ avec

$$\Delta H = m'\,(h_{c'} - h_{e'}) + (m - m')\,(h_{c'} - h_{b'})$$

soit :

$$0 = m'\,(h_{c'} - h'_1) + (1 - m')\,(h_{c'} - h_A)$$

(on fait l'approximation $h_{b'} = h_A$ puisque l'on néglige l'enthalpie apportée par la pompe d'alimentation)

$$\boxed{m' = \frac{h_{c'} - h_A}{h'_1 - h_A}}$$

A.N.

$$m' = \frac{784,17 - 146,34}{2401,66 - 146,34}$$

$$\boxed{m' = 0,283 \text{ kg (par kg)}}$$

---

31) En négligeant les Δh des pompes

$$W_S = W_{\substack{\text{tech} \\ \text{turbines}}}$$

$$= m\,(h_{e'} - h_D) + (m - m')\,(h_E - h_{e'})$$

$$\boxed{W_S = 1\ (h'_1 - h_D) + (1 - m')\,(h_E - h'_1)}$$

A.N. $\boxed{W_S = -\ 836,28 \text{ kJ kg}^{-1}}$

remarque :

On peut procéder comme dans la partie précédente

$Q_{chaud} = q_{bD}$

$= h_D - h_b$

$= h_D - h_{c'}$

en négligeant le Δh de la pompe de reprise

$= 1984{,}66 \text{ kJ kg}^{-1}$

$Q_{froid} = (1-m')$

$= (1-m')(h_A - h_E)$

$= -1148{,}38 \text{ kJ kg}^{-1}$

$W_S = -(Q_{chaud} + Q_{froid})$

$= -836{,}28 \text{ kJ kg}^{-1}$

---

32)

$$\eta_S = \frac{-W_S}{q_{bD}}$$

$$\boxed{\eta_S = 42{,}1\ \%}$$

$> \eta \ (= 38{,}9\%)$

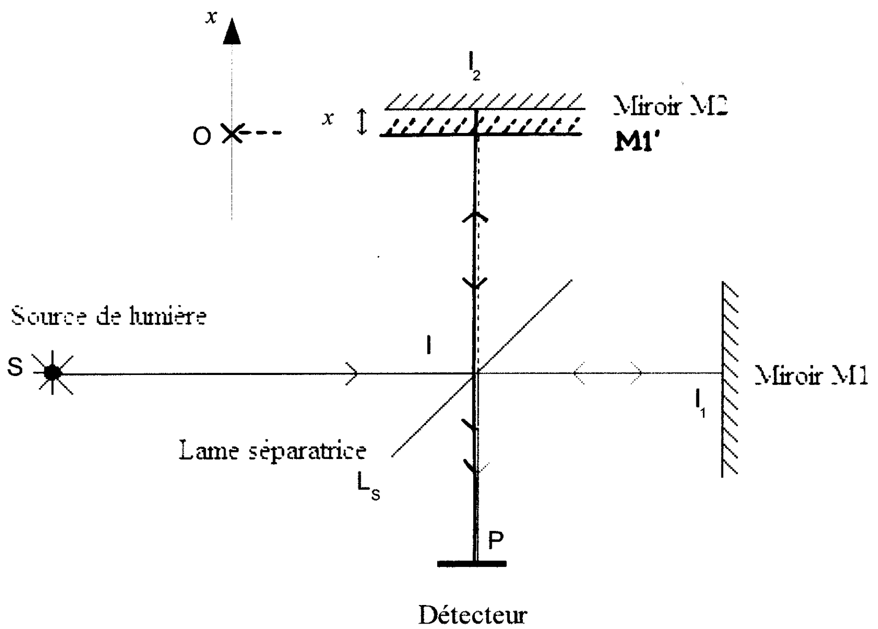
car l'irréversibilité est moins grande en décomposant le réchauffage en deux étapes (b'c' et bC)

Bien entendu

$\eta_S < \eta_{rev\ Carnot} \ (= 44{,}8\%)$

---

spectrométrie interférentielle de Michelson



1) Le trajet 2 est plus long de x à l'aller et de x au retour.

Donc $\delta = n_{air} \times (2x)$

Si on fait $n_{air} = 1$, alors :

$$\boxed{\delta = 2x}$$

---

2) $\lambda_0 = 550\ nm$

$\boxed{\text{raie verte ("vert chou")}}$

$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$

A.N. $= \frac{3 . 10^8}{550\ 10^{-9}}$

$$\boxed{\nu_0 = 5{,}45\ 10^{14}\ Hz}$$

---

3) On a

$$\varphi = 2\pi p$$
$$= 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$
$$= \frac{2\pi \nu_0 \delta}{c}$$
$$= 2\pi \nu_0 \tau$$

en posant : $\tau = \frac{\delta}{c}$

$$\boxed{\tau = \frac{2x}{c}}$$

Démonstration de la formule :

$$\underline{\Psi_1} = \Psi_0 \exp -j\omega t$$
$$\underline{\Psi_2} = \Psi_0 \exp j\varphi \quad \exp -j\omega t$$
$$\underline{\Psi} = \underline{\Psi_1} + \underline{\Psi_2}$$
$$= \Psi_0 \ (1 + \exp j\varphi) \ \exp -j\omega t$$
$$\underline{\Psi}\,\underline{\Psi}^* = \Psi_0^2 \ (1 + \exp j\varphi) \ (1 + \exp -j\varphi)$$
$$= 2\Psi_0^2 \ (1 + \cos\varphi)$$

$$I(\tau) = 2\Psi_0^2 (1 + \cos 2\pi\nu_0\tau)$$
$$I(0) = 2\Psi_0^2 (1 + \quad 1 \quad)$$

finalement

$$\boxed{I(\tau) = \frac{I(0)}{2} (1 + \cos 2\pi\nu_0\tau)}$$

---

4) $\lambda_0 = 643{,}8 \text{ nm}$

$$\boxed{\text{raie rouge}}$$

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$
$$= \frac{3.10^8}{643{,}8 \ 10^{-9}}$$

$$\boxed{\nu_0 = 4{,}66 \ 10^{14} \text{ Hz}}$$

---

5)

$$dI = \frac{dI(0)}{2} (1 + \cos 2\pi\nu\tau)$$
$$= \frac{I_\nu \, d\nu}{2} (1 + \cos 2\pi\nu\tau)$$

$$I = \int_{\nu_0-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0+\frac{\Delta\nu}{2}} \frac{A\,d\nu}{2}\,(1+\cos 2\pi\nu\tau)$$

$$= \frac{A}{2}\left(\Delta\nu + \frac{\left[\sin 2\pi\nu\tau\right]_{\nu_0-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0+\frac{\Delta\nu}{2}}}{2\pi\tau}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left(\Delta\nu + \frac{\sin 2\pi(\nu_0+\frac{\Delta\nu}{2})\tau - \sin 2\pi(\nu_0-\frac{\Delta\nu}{2})\tau}{2\pi\tau}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\Delta\nu\left(1 + \frac{2\sin\pi\Delta\nu\tau}{2\pi\Delta\nu\tau}\cos(2\pi\nu_0\tau)\right)$$

$$I(\tau) = \frac{A\,\Delta\nu}{2}\left(1 + \operatorname{sinc}(\pi\Delta\nu\tau)\cos(2\pi\nu_0\tau)\right)$$

$$I(0) = \frac{A\,\Delta\nu}{2}(1+1)$$

$$\boxed{I(0) = A\,\Delta\nu}$$

$$\boxed{I(\tau) = \frac{I(0)}{2}\left(1 + \gamma_t(\tau)\cos(2\pi\nu_0\tau)\right)}$$

$$\boxed{\gamma_t(\tau) = \operatorname{sinc}(\pi\Delta\nu\tau)}$$

---

6) La fréquence du $\cos(2\pi\nu_0\tau)$, la variable étant τ, est égale à ν_0

La fréquence du $\sin(\pi\Delta\nu\tau)$ est $\frac{\Delta\nu}{2}$ ($\ll \nu_0$)

Au voisinage de τ, le sin (donc $\gamma_t(\tau)$) varie peu quand $\cos(2\pi\nu_0\tau)$ varie. On peut y considérer $\gamma_t(\tau)$ comme une constante.

$$\boxed{I_{max}(\tau) = \frac{I(0)}{2}\left(1 + |\gamma_t(\tau)|\right)}$$

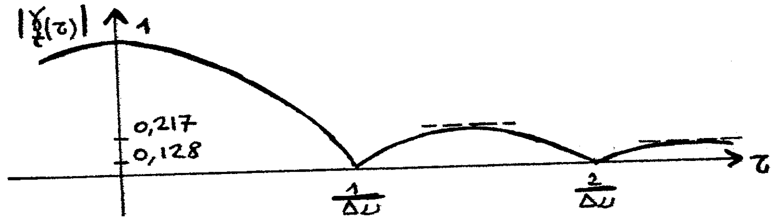
$$\boxed{I_{min}(\tau) = \frac{I(0)}{2}\left(1 - |\gamma_t(\tau)|\right)}$$

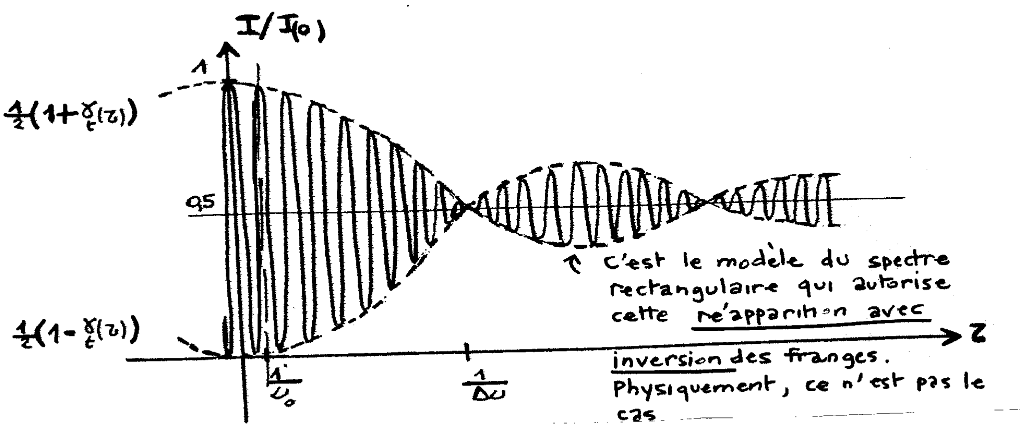
$$V(\tau) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

$$\boxed{V(\tau) = |\gamma_t(\tau)|}$$

---

7) graphes :





---

8) → la première annulation a lieu pour $\tau = \frac{1}{\Delta\nu}$

donc $\Delta\nu = \frac{1}{\tau_{annulation}}$

$$\boxed{\Delta\nu = \frac{c}{2x_{annulation}}}$$

A.N. $= \frac{3.10^8}{2 \times 15{,}9\ 10^{-2}}$

$$\boxed{\Delta\nu = 9{,}43\ 10^8\ \text{Hz}}$$

→ la longueur de cohérence

$$L_t = \frac{c}{\Delta\nu} \quad \text{ou} \quad c\,\tau_{annulation}$$

$$\boxed{L_t = (2x)_{annulation}}$$

$$\boxed{L_t = 31{,}8\ \text{cm}}$$

→ $\Delta\lambda_{1/2}$

Pour des variations "petites", on utilise le calcul différentiel

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$d\lambda = -c\,\frac{d\nu}{\nu^2}$$

$$= -\frac{\lambda^2}{c}\,d\nu$$

Ici $\Delta\lambda$ et $\Delta\nu$ désignent des grandeurs positives

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c}\,\Delta\nu$$

$$\boxed{\Delta\lambda_{1/2} = \frac{\lambda_0^2}{L_t}}$$

A.N. $$= \frac{(643{,}8\ 10^{-9})^2}{31{,}8\ 10^{-2}}$$

$$\Delta\lambda_{1/2} = 1{,}30\ 10^{-12}\ \text{m}$$

$$\boxed{\Delta\lambda_{1/2} = 1{,}30\ \text{pm}}$$

---

9) Doublet jaune du mercure.

$$\boxed{\text{couleur jaune}}$$

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

$$= \frac{3.\ 10^{8}}{578\ 10^{-9}}$$

$$\boxed{\nu_0 = 5{,}19\ 10^{14}\ \text{Hz}}$$

---

10) $$I(\tau) = \frac{I_1(0)}{2}(1+\cos 2\pi\tau\nu_1) + \frac{I_2(0)}{2}(1+\cos 2\pi\tau\nu_2)$$

avec $I_2(0) = I_1(0)$

$$= \frac{I_1(0)}{2}\Big(2 + \underbrace{\cos 2\pi\tau\nu_1 + \cos 2\pi\tau\nu_2}_{2\cos\left(2\pi\tau\frac{\nu_2-\nu_1}{2}\right)\ \cos\left(2\pi\tau\frac{\nu_2+\nu_1}{2}\right)}\Big)$$

avec $\nu_1 = \nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}$

$\nu_2 = \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$

$$I(\tau) = I_1(0) \left(1 + \cos(\pi\tau\Delta\nu)\,\cos(2\pi\tau\nu_0)\right)$$

$$I(0) = I_1(0) \ (1 + 1)$$

$$\boxed{I(0) = 2\,I_1(0)}$$

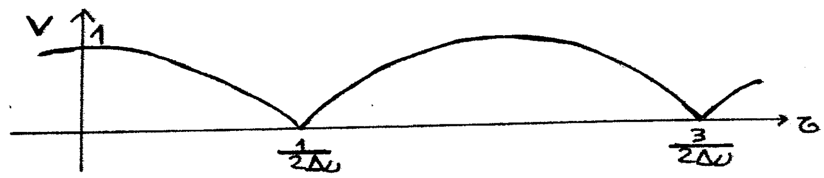
$$I(\tau) = \frac{I(0)}{2} \left(1 + \gamma_t \cos(2\pi\tau\nu_0)\right)$$

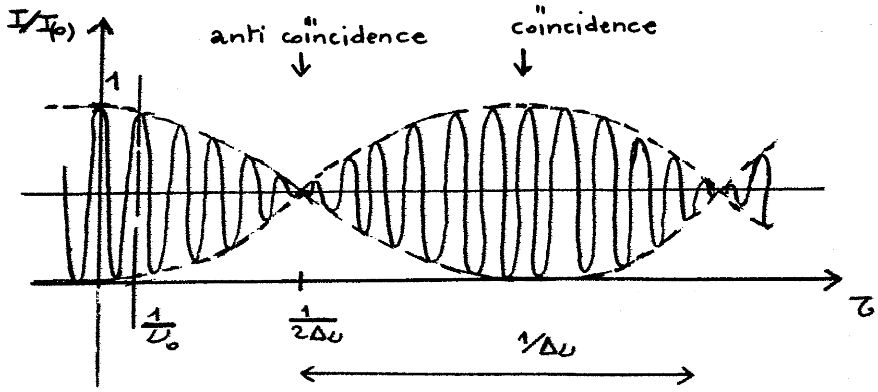
$$\boxed{\gamma_t = \cos(\pi\tau\Delta\nu)}$$

---

11) $V = |\gamma_t|$

$$\boxed{V_{(\tau)} = |\cos(\pi\tau\Delta\nu)|}$$





---

12) période de γ_t : $\pi T \Delta\nu = 2\pi$ soit $T = \frac{2}{\Delta\nu}$

période de $|\gamma_t|$: $T = \frac{1}{\Delta\nu}$

période de $\cos 2\pi\tau\nu_0$: $2\pi T\nu_0 = 2\pi$ soit $T = \frac{1}{\nu_0}$

On donne $\dfrac{\frac{1}{\Delta\nu}}{\frac{1}{\nu_0}} = 277$

$$\boxed{\Delta\nu = \frac{\nu_0}{277}}$$

A.N. $= \dfrac{5{,}19\ 10^{14}}{277}$

$$\boxed{\Delta\nu = 1{,}87\ 10^{12}\,Hz}$$

et $L_t = \dfrac{c}{\Delta\nu}$

$= \dfrac{c}{\nu_0}\, 277$

$$\boxed{L_t = 277\,\lambda_0}$$

A.N. $= 277 \times 578\,nm$

$$\boxed{L_t = 0{,}16\,mm}$$

et $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda_0^2}{L_t}$

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{277}}$$

A.N. $= \dfrac{578\,nm}{277}$

$$\boxed{\Delta\lambda = 2{,}09\,nm}$$

---

13) Les deux raies du doublet sont elles-mêmes non monochromatiques. On peut modéliser chaque raie par un profil rectangulaire de largeur $\delta\nu$

$$I = \frac{I_1(0)}{2}\left(1 + \mathrm{sinc}(\pi\tau\,\delta\nu_1)\ \cos(2\pi\tau\nu_1)\right) + \frac{I_2(0)}{2}\left(1 + \mathrm{sinc}(\pi\tau\,\delta\nu_2)\ \cos(2\pi\tau\nu_2)\right)$$

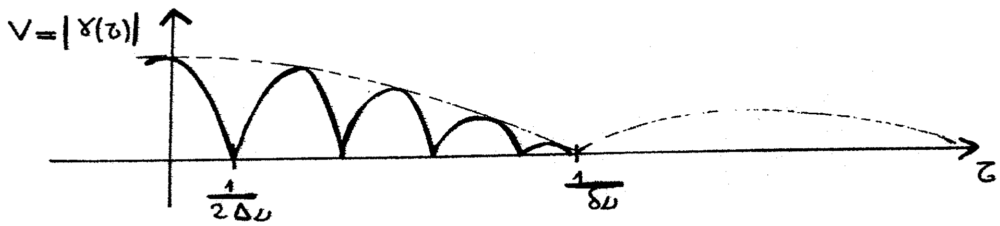
en supposant $I_1(0) = I_2(0)$ $\left(= \frac{I(0)}{2}\right)$

$\delta\nu_1 = \delta\nu_2 = \delta\nu$

$$I = \frac{I(0)}{2}\left(1 + \gamma(\tau)\cos 2\pi\tau\nu_0\right)$$

avec

$$\boxed{\gamma(\tau) = \mathrm{sinc}(\pi\tau\,\delta\nu)\,\cos(\pi\tau\Delta\nu) \qquad (\delta\nu < \Delta\nu)}$$



---

14) $$I = \frac{I_1(0)}{2}\left(1+\cos(2\pi\tau\nu_1)\right) + \frac{I_2(0)}{2}\left(1+\cos(2\pi\tau\nu_2)\right)$$

$$= \frac{I_1(0)}{2}\left(1+\cos(2\pi\tau\nu_1)\right) + \mu\frac{I_1(0)}{2}\left(1+\cos(2\pi\tau\nu_2)\right)$$

$$= \frac{I_1(0)}{2}(1+\mu) + \frac{I_1(0)}{2}\left(\cos(2\pi\tau\nu_1) + \mu\cos(2\pi\tau\nu_2)\right)$$

$$= \frac{I_1(0)}{2}(1+\mu)\left[1 + \frac{\cos(2\pi\tau\nu_1) + \mu\cos(2\pi\tau\nu_2)}{1+\mu}\right]$$

$$= \frac{I_1(0)}{2}(1+\mu)\left[1 + \mathcal{R}_e\left\{\frac{\exp(j2\pi\tau\nu_1) + \mu\exp(j2\pi\tau\nu_2)}{1+\mu}\right\}\right]$$

$$I = \frac{I_1(0)}{2}(1+\mu)\left[1 + \mathcal{R}_e\left\{\frac{\left(\exp(-j2\pi\tau\frac{\Delta\nu}{2}) + \mu\exp(j2\pi\tau\frac{\Delta\nu}{2})\right)\exp(j2\pi\nu_0\tau)}{1+\mu}\right\}\right]$$

$$\boxed{I(0) = I_1(0)\,(1+\mu)}$$

$$\boxed{\underline{\gamma}_t(\tau) = \underbrace{\frac{1}{1+\mu}}_{C_1}\exp(-j\pi\Delta\nu\tau) + \underbrace{\frac{\mu}{1+\mu}}_{C_2}\exp(j\pi\Delta\nu\tau)}$$

d'où

$$\boxed{I = \frac{I(0)}{2}\left[1 + \mathcal{R}_e\left\{\underline{\gamma}_t(\tau)\exp(j2\pi\nu_0\tau)\right\}\right]}$$

---

15)

$\longrightarrow \mathcal{R}e\{\underline{\gamma}(\tau)\} = C_1 \cos(\pi\Delta\nu\tau) + C_2 \cos(\pi\Delta\nu\tau)$

$$\boxed{\mathcal{R}e\{\underline{\gamma}(\tau)\} = \cos(\pi\Delta\nu\tau)}$$

$\longrightarrow \mathcal{I}m\{\underline{\gamma}(\tau)\} = -C_1 \sin(\pi\Delta\nu\tau) + C_2 \sin(\pi\Delta\nu\tau)$

$$\boxed{\mathcal{I}m\{\underline{\gamma}(\tau)\} = \frac{\mu-1}{\mu+1} \sin(\pi\Delta\nu\tau)}$$

$\longrightarrow |\underline{\gamma}(\tau)| = \sqrt{\cos^2(\pi\Delta\nu\tau) + \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^2 \underbrace{\sin^2(\pi\Delta\nu\tau)}_{1-\cos^2(\pi\Delta\nu\tau)}}$

$$\boxed{|\underline{\gamma}(\tau)| = \sqrt{\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^2 + \frac{4\mu}{(\mu+1)^2}\cos^2(\pi\Delta\nu\tau)}}$$

$\longrightarrow$ $$\boxed{\alpha_t = \arg\left(\cos(\pi\Delta\nu\tau) + j\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)\sin(\pi\Delta\nu\tau)\right)}$$

avec $\tan(\alpha_t) = \frac{\mu-1}{\mu+1}\tan(\pi\Delta\nu\tau)$

---

16) On écrit le complexe $\underline{\gamma}(\tau)$ sous forme exponentielle.

$$I = \frac{I(0)}{2}\left[1 + \mathcal{R}e\left\{\underbrace{|\underline{\gamma}(\tau)| \exp j\alpha_t}\ \exp(j2\pi\nu_0\tau)\right\}\right]$$

$$\boxed{I = \frac{I(0)}{2}\left[1 + |\underline{\gamma}(\tau)| \cos(2\pi\nu_0\tau + \alpha_t)\right]}$$

d'où $I_{max} = \frac{I(0)}{2}(1+|\gamma|)$ et $I_{min} = \frac{I(0)}{2}(1-|\gamma|)$

$$\boxed{V_{(\tau)} = |\underline{\gamma}(\tau)|}$$

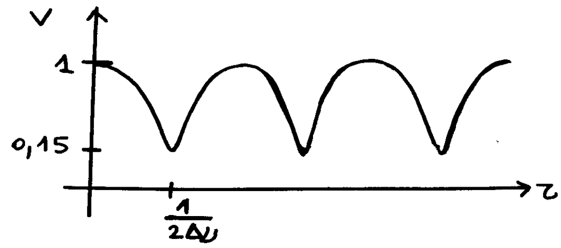
---

17) V_M pour $\cos^2(\pi\Delta\nu\tau) = 1$

V_m pour $\cos^2(\pi\Delta\nu\tau) = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} V_M &= 1 \\ V_m &= \left|\frac{\mu-1}{\mu+1}\right| \end{aligned}}$$

graphe avec par exemple $V_m = 0,15$



remarque

$V_m = 0,15$ deux possibilités

$\frac{1-\mu}{1+\mu} = 0,15$ et $\mu = 0,74$

ou

$\frac{1-\mu}{1+\mu} = -0,15$ et $\mu = \frac{1}{0,74} = 1,35$

Le signe de $\Delta\nu$ n'intervenant pas, on choisit ici une raie 2 plus faible soit $\boxed{\mu \leqslant 1}$

et $V = \frac{1-\mu}{1+\mu}$.

---

18) $\mu = 0$ il n'y a qu'une seule raie

$\boxed{V = 1}$

$I = \frac{I(0)}{2}\left(1 + \cos(2\pi\tau\nu_1)\right)$

noté $\nu - \frac{\Delta\nu}{2}$

d'où :

$\boxed{\alpha = -\pi\tau\Delta\nu}$

$\mu = 1$ doublet avec deux raies de même intensité

$\boxed{V = |\cos(\pi\tau\Delta\nu)|}$

$\boxed{\alpha = 0 \text{ ou } \pi}$ inversion des franges

---

19) $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$

$= \frac{3.10^8}{656,3\ 10^{-9}}$

$\boxed{\nu_0 = 4,57\ 10^{14}\,Hz}$

---

20) Le premier minimum de visibilité correspond à $\tau = \frac{1}{2\Delta\nu} = \frac{2x}{c}$

donc

$$\boxed{\Delta\nu = \frac{c}{4\,x_{annulation}}}$$

A.N. $$= \frac{3.10^8}{4 \times 8{,}5\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{\Delta\nu = 8{,}82\ 10^9\ \mathrm{Hz}}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2\,\Delta\nu}{c} \qquad \text{(cf 8))}$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{4\,x_{annulation}}}$$

A.N. $$= \frac{(656{,}3\ 10^{-9})^2}{4 \times 8{,}5\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{\Delta\lambda = 12{,}7\ \mathrm{pm}}$$

---

21) On a décidé de faire $\mu < 1$

(et ν raie plus faible supérieur à l'autre raie)

$$V = \frac{1-\mu}{1+\mu} = 0{,}15$$

$$\boxed{\mu = 0{,}74}$$

Au 1^er^ minimum de visibilité : $\tau = \frac{1}{2\Delta\nu}$

$$\alpha_t = \arg\left(\cos(\pi\Delta\nu\tau) + j\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)\sin(\pi\Delta\nu\tau)\right)$$

$$= \arg\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{nul}} - j\ 0{,}15\ \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right)$$

$$\boxed{\alpha_t = -\frac{\pi}{2}}$$
