Déterminants de Vandermonde et de Cauchy

Partie I: Déterminant de Vandermonde

Soit $n \geqslant 2$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres complexes distincts. On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. On les donnera sous forme factorisée.
2. Démontrer que $x \longmapsto V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ est une fonction polynomiale de x dont on précisera le degré.
3. En déduire que $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - \alpha_i)$.
4. En déduire l'expression générale de $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
5. Déduire une condition suffisante et nécessaire pour que la matrice $M = \left(\alpha_j^{i-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit inversible

Partie II: Matrice circulante

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes, $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On pose $P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$

6. En calculant la k-ième colonne de AM, justifier l'égalité $A.M = M.\mathbf{diag}\left(P(1), P(\omega_1), \cdots, P(\omega_{n-1})\right)$
7. En déduire $\det(A)$

Partie III: Déterminant de Cauchy et déterminant de Hilbert

Soit A_n la matrice définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \dots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \dots & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \dots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{pmatrix}$$

Où a_1,..., a_n, b_1,...,b_n sont $2n$ réels tels que toutes les sommes $a_i + b_j$ soient non nulles.

8. Que vaut $\det A$ si deux des b_j sont égaux.
9. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts. Soit R_n la fraction rationnelle définie par

$$R_n(X) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)}{\prod_{i=1}^{n} (X + b_i)}$$

Déterminants de Vandermonde et de Cauchy

(a) Justifier que R_n s'ecrit d'une façon unique de la forme $R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X+b_i}$.

Où λ_1,..., λ_n sont des nombres complexes

(b) Déterminer λ_n et vérifier qu'il est non nul

(c) Notons $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A_n, montrer que

$$\det(A_n) = \frac{1}{\lambda_n}\det(C_1, ..., C_{n-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j) = \frac{1}{\lambda_n} R_n(a_n) \det(A_{n-1})$$

(d) En déduire que

$$\det(A_n) = \frac{\mathrm{V}(a_1, ..., a_n)\mathrm{V}(b_1, ..., b_n)}{\prod\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

10. Soit $H_n = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de Hilbert d'ordre n.
En utilisant ce qui précède, montrer que

$$\det(H_n) = \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k!\right)^3}{n!^2 \times \prod\limits_{k=1}^{2n} k!}$$

Déterminants de Vandermonde et de Cauchy

1. Un calcul immédiat montrer que $V(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_2-\alpha_1$. On a ensuite :

$$\begin{aligned}
V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2-\alpha_1^2 & \alpha_3^2-\alpha_1^2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1 \\ (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_1) & (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3+\alpha_1)\end{vmatrix}\\
&= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2+\alpha_1 & \alpha_3+\alpha_1\end{vmatrix}\\
&= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2).
\end{aligned}$$

2. On pose

$$P(x)=V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & x\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 & x^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} & x^{n-1}\end{vmatrix}$$

   Alors si on développe ce déterminant par rapport à la dernière colonne, on trouve que P est un polynôme de degré au plus $n-1$, et de coefficient de x^{n-1} égale à $V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$.

3. On remarque que $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ sont n racines distinctes de P (puisque dans ce cas le déterminant comporte deux colonnes identiques). On en déduit donc, d'après la question précédente, que

$$V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},x)=V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(x-\alpha_i).$$

4. On évalue la formule précédente en $x=\alpha_n$, on obtient $V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n)=V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\prod\limits_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)$.

   On démontre par récurrence que
$$V(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_j-\alpha_i)\,.$$

   — **Base de récurrence :** Pour $n=2$, c'est fait.

   — **Héridité :** Soit $n\geqslant 2$ et $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ des nombres complexes. Supposons que $V(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_j-\alpha_i)$.

   Soit $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ des nombres complexes. D'après la question précédente , on a

$$\begin{aligned}
V(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}) &= V(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\prod_{i=1}^{n}(\alpha_{n+1}-\alpha_i)\\
&= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_j-\alpha_i)\prod_{i=1}^{n}(\alpha_{n+1}-\alpha_i)\\
&= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(\alpha_j-\alpha_i)
\end{aligned}$$

   Récurrence achevée.

5. La matrice M est inversible si, et seulement si,

Partie I: Matrice circulante

Déterminants de Vandermonde et de Cauchy

Effectuons le calcul demandé. On obtient que la k-ième colonne de AM est égale à $AC_k(M)$ où $C_k(M)$ est la k-ième colonne de M, alors

$$\begin{aligned}
AC_k(M) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_{k-1} \\ \omega_{k-1}^2 \\ \vdots \\ \omega_{k-1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + a_2\omega_{k-1} + \cdots + a_n\omega_{k-1}^{n-1} \\ a_n + a_1\omega_{k-1} + a_2\omega_{k-1}^2 + \cdots + a_{n-1}\omega_{k-1}^{n-1} \\ \vdots \\ a_2 + a_3\omega_{k-1} + \cdots + a_1\omega_{k-1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P(\omega_{k-1}) \\ P(\omega_{k-1})\,\omega_{k-1} \\ \vdots \\ P(\omega_{k-1})\,\omega_{k-1}^{n-1} \end{pmatrix} = P(\omega_{k-1})\, C_k(M)
\end{aligned}$$

la k-ième colonne de M multipliée par $a_1 + a_2\omega^{k-1} + \cdots + a_n\omega^{(k-1)(n-1)}$. En notant

$$P(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1},$$

on a donc d'une part

$$\det(AM) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})\det(M)$$

et d'autre part

$$\det(AM) = \det(A)\det(M).$$

Puisque le déterminant de M est non nul (c'est un déterminant de Vandermonde), on a :

$$\det(A) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}).$$

• Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de P^2 est

$$\alpha_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k+l-2)(u-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} (\omega^{k+l-2})^u.$$

Or, $\omega^{k+l-2} = 1 \Leftrightarrow k+l-2 \in n\mathbb{Z}$. Mais, $0 \le k+l-2 \le 2n-2 < 2n$ et donc, $k+l-2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k+l-2 \in \{0,n\} \Leftrightarrow k+l = 2$ ou $k+l = n+2$. Dans ce cas, $\alpha_{k,l} = n$. Sinon,

$$\alpha_{k,l} = \frac{1-(\omega^{k+l-2})^n}{1-\omega^{k+l-2}} = \frac{1-1}{1-\omega^{k+l-2}} = 0.$$

Ainsi, $P^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. • Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne k, colonne l de $P\overline{P}$ est

$$\beta_{k,l} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)}\omega^{-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} (\omega^{k-l})^{u-1}.$$

Or, $\omega^{k-l} = 1 \Leftrightarrow k-l \in n\mathbb{Z}$. Mais, $-n < -(n-1) \le k-l \le n-1 < n$ et donc $k-l \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k = l$. Dans ce cas, $\beta_{k,l} = n$. Sinon, $\beta_{k,l} = 0$. Ainsi, $P\overline{P} = nI_n$ (ce qui montre que $P \in GL_n(\mathcal{C})$ et $P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P}$). Calculons enfin PA. Il faut d'abord écrire proprement les coefficients de A. Le coefficient ligne k, colonne l de A peut s'écrire a_{l-k+1} si l'on adopte la convention commode $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et plus généralement pour tout entier relatif k, $a_{n+k} = a_k$. Avec cette convention d'écriture, le coefficient ligne k, colonne l de PA vaut

Déterminants de Vandermonde et de Cauchy

$$\sum_{u=1}^{n}\omega^{(k-1)(u-1)}a_{l-u+1}=\sum_{v=l-n+1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v.$$

Puis on réordonne cette somme pour qu'elle commence par a_1.

$$\begin{aligned}\sum_{v=l-n+1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v&=\sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v+\sum_{v=l-n+1}^{0}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v\\&=\sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v+\sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n}\ \text{(en posant } w=v+n)\\&=\sum_{v=1}^{l}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v+\sum_{w=l+1}^{n}\omega^{(k-1)(l-w)}a_w\\&=\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(l-v)}a_v=\omega^{(k-1)(l-1)}\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\end{aligned}$$

(le point clé du calcul précédent est que les suites (a_k) et (ω^k) ont la màłme période n ce qui s'est traduit par $\omega^{(k-1)(l-w+n)}a_{w+n}=\omega^{(k-1)(l-v)}a_v$). Pour k élément de $[\![1,n]\!]$, posons alors $S_k=\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v$. On a montré que $PA=(\omega^{(k-1)(l-1)}S_k)_{1\leq k,l\leq n}$.

Par linéarité par rapport àă chaque colonne, on a alors

$$\det(PA)=\det(\omega^{(k-1)(l-1)}S_k)_{1\leq k,l\leq n}=(\textstyle\prod_{k=1}^{n}S_k)\times\det(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leq k,l\leq n}=(\prod_{k=1}^{n}S_k)\times\det P.$$

Donc $(\det P)(\det A)=(\prod_{k=1}^{n}S_k)\det P$ et finalement, puisque $\det P\neq 0$,

$$\boxed{\det A=\textstyle\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{v=1}^{n}\omega^{(k-1)(1-v)}a_v\right).}$$

Par exemple, pour $n=3$, $\det A=(a_1+a_2+a_3)(a_1+ja_2+j^2a_3)(a_1+j^2a_2+ja_3)$.

Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k)\in[\![1,n]\!]^2$, de la matrice A vaut a_{k-j} avec la convention : si $-(n-1)\leqslant u\leqslant -1$, $a_u=a_{n+u}$.

Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k)\in[\![1,n]\!]^2$, de la matrice $A\Omega$ vaut

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^{n}a_{u-j}\omega^{(u-1)(k-1)}&=\sum_{v=-(j-1)}^{n-j}a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)}=\sum_{v=-(j-1)}^{-1}a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)}+\sum_{v=0}^{n-j}a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)}\\&=\sum_{v=-(j-1)}^{-1}a_{v+n}\omega^{(v+n+j-1)(k-1)}+\sum_{u=0}^{n-j}a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)}\ \text{(car } a_{v+n}=a_v \text{ et } \omega^n=1)\\&=\sum_{u=n-j+1}^{n-1}a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)}+\sum_{u=0}^{n-j}a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)}=\sum_{u=0}^{n-1}a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)}\\&=\omega^{(j-1)(k-1)}\sum_{u=0}^{n-1}a_u\omega^{u(k-1)}.\end{aligned}$$

Pour $k\in[\![1,n]\!]$, posons $S_k=\sum_{u=0}^{n-1}a_u\omega^{u(k-1)}$. Le coefficient ligne j, colonne k de $A\Omega$ vaut donc $\omega^{(j-1)(k-1)}S_k$. Par passage au détereminant, on en déduit que :

$$\det(A\Omega)=\det\left(\omega^{(j-1)(k-1)}S_k\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}=(\textstyle\prod_{k=1}^{n}S_k)\det(\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$$

(S_k est en facteur de la colonne k) ou encore $(\det A)(\det\Omega)=(\prod_{k=1}^{n}S_k)(\det\Omega)$. Enfin, Ω est la matrice de Vandermonde des racines n-èmes de l'unité et est donc inversible puisque celles-ci sont deux àă deux distinctes. Par suite $\det\Omega\neq 0$ et après simplification on obtient

Déterminants de Vandermonde et de Cauchy

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^{n} S_k \text{ où } S_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u \omega^{u(k-1)}.}$$

Par exemple, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = S_1S_2S_3 = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$ où $j = e^{2i\pi/3}$.
Un calcul bien plus simple sera fourni dans la planche

Partie II: Déterminant de Cauchy

1. Si deux des b_j sont égaux, $\det(A)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales.
2. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts. Soient λ_1,..., λ_n, n nombres complexes tels que $\lambda_n \neq 0$. On a

$$\det A = \frac{1}{\lambda_n}\det(C_1, ..., C_{n-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j) = \det B,$$

où la dernière colonne de B est de la forme $(R(a_i))_{1\leq i\leq n}$ avec $R = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{X+b_j}$. On prend $R = \frac{(X-a_1)...(X-a_{n-1})}{(X+b_1)...(X+b_n)}$. R ainsi définie est irréductible (car $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_i \neq -b_j$). Les pàťles de R sont simples et la partie entière de R est nulle. La décomposition en éléments simples de R a bien la forme espérée. Pour ce choix de R, puisque $R(a_1) = ... = R(a_{n-1}) = 0$, on obtient en développant suivant la dernière colonne

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} R(a_n)\Delta_{n-1},$$

avec

$$\lambda_n = \lim_{z\to -b_n} (z+bn)R(z) = \frac{(-b_n - a_1)...(-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1)...(-b_n + b_{n-1})} = \frac{(a_1+b_n)...(a_{n-1}+b_n)}{(b_n - b_1)...(b_n - b_{n-1})}.$$

Donc

$$\forall n \geq 2,\ \Delta_n = \frac{(a_n - a_1)...(a_n - a_{n-1})(b_n - b_1)...(b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2)...(a_n + b_n)..(a_2 + b_n)(a_1 + b_n)}\Delta_{n-1}.$$

En réitérant et compte tenu de $\Delta_1 = 1$, on obtient

$$\boxed{\Delta_n = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(b_j - b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_1,...,a_n)\mathrm{Van}(b_1,...,b_n)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)}.}$$

Dans le cas particulier où $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_i = b_i = i$, en notant H_n le déterminant (de Hilbert) àă calculer : $H_n = \frac{\mathrm{Van}(1,2,...,n)^2}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(i+j)}$. Mais,

$$\prod_{1\leq i,j\leq n}(i+j) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k!}{\left(\prod_{k=1}^{n} k!\right)^2},$$

et d'autre part,

$$\mathrm{Van}(1,2,...,n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(j-i) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(j-i)\right) = \prod_{i=1}^{n-1}(n-i)! = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n} k!.$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ H_n = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} k!\right)^3}{n!^2 \times \prod_{k=1}^{2n} k!}.}$$