SUITES DÉFINIES PAR ITÉRATION, POINTS FIXES

$(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé, Q une partie compacte dans E et $f : Q \to Q$ une application .

Partie I

Soit $b_0 \in Q$ et $(b_n)_n$ la suite définie par : $b_{n+1} = f(b_n)$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(b_n)_n$. On suppose dans cette partie seulement que f est continue .

1. (a) Montrer que $f(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$
   (b) En utilisant la compacité de Q, montrer que $f(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$
2. Montrer que toute partie fermée d'une partie compacte est aussi compacte
3. On suppose que $(b_n)_n$ est convergente de limite ℓ , soit $K = \{b_n \ /n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$
   Soit $x \in E \backslash K$ et ρ un réel tel que $0 < \rho < \|x - \ell\|$
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > n_0$, $b_n \notin B(x, \rho)$
   (b) Soit $r_0 = \min(\rho, \|x - b_0\|, ..., \|x - b_{n_0}\|)$, justifier que $r_0 > 0$ et que $B(x, r_0) \subset C_E^K$
   (c) Montrer que K est compacte .

Partie II

On suppose dans cette partie que : $\forall x \neq y$, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$

4. Soit $h : Q \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - x\|$.
   (a) Justifier que h admet un minimum atteint en un x^*,
   (b) Montrer que x^* est l'unique point fixe de f
5. Soit $x_0 \in E$ et $(x_n)_n$ la suite définie par : $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Montrer que la suite $(\|x_n - x^*\|)_n$ est monotone puis qu'elle converge .
   On pose $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - x^*\|$.
6. On veut montrer, par absurde, que $L = 0$. On suppose que $L > 0$
   (a) Etablir l'existence d'une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge vers un élément de $a \in Q$ puis que $L = \|a - x^*\|$
   (b) En considérant la suite $\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)_n$, montrer que $L = \|f(a) - x^*\|$.
   Aboutir à une contradiction, puis conclure

Partie III

On suppose dans cette partie que : $\forall (x, y) \in Q^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$
Soit $(a\ , b) \in Q^2$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ les suites définies par : $a_0 = a$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ $\quad$; $b_0 = b$ et $b_{n+1} = f(b_n)$

7. (a) Montrer que $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2$, $\|a_p - a\| \leqslant \|a_{n+p} - a_n\|$
   (b) Justifier l'existence d'une $\left(a_{\varphi(n)}\right)_n$ extraite convergente et en déduire que :
   $$\forall \varepsilon > 0 \text{ , il existe } p \geqslant 1 \text{ tel que } \|a_p - a\| < \varepsilon$$
   (c) En déduire que $f(Q)$ est dense dans Q

Suites définies par itération, points fixes

8. Soit $\varepsilon > 0$
   (a) Montrer l'existence d'un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que : $\|a_p - a\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\|b_p - b\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
   (b) En déduire que : $\|f(a) - f(b)\| \leqslant \|a - b\| + \varepsilon$
   (c) Montrer alors que : $\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|$
9. Montrer que f est injective , continue et que $f(Q)$ est fermé
10. En déduire que f est bijective .

SUITES DÉFINIES PAR ITÉRATION, POINTS FIXES

Partie I

1. (a) Soit $y \in f(\mathcal{T})$, il existe $x \in \mathcal{T}$ tel que $y = f(x)$
   $x \in \mathcal{T}$ donc il existe une suite extraite $\left(b_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge vers x .
   f étant continue de $b_{\varphi(n)+1} = f\left(b_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = y$ donc $y \in \mathcal{T}$

   (b) Soit $y \in \mathcal{T}$, alors il existe une suite extraite $\left(b_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge vers y.
   Pour $n \geqslant 1$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant 1$ et $b_{\varphi(n)} = f\left(b_{\varphi(n)-1}\right)$
   D'autre part Q est compacte, donc on peut extraire de $\left(b_{\varphi(n)-1}\right)_n$ une suite $\left(b_{\varphi(\psi(n))-1}\right)$ convergente de limite $L \in \mathcal{T}$, par suite
   $$b_{\varphi(\psi(n))} = f\left(b_{\varphi(\psi(n))-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(L) \in f(\mathcal{T})$$

2. Soit K est une partie compacte et F une partie fermée telle que $F \subset K$.
   Soit $(a_n)_n \in F^{\mathbb{N}} \subset K^{\mathbb{N}}$. Or K est compacte, donc on peut extraire une suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)_n$ convergente vers un élément $\ell \in K$. Or F est fermée et $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ une suite de F convergente $a_{\varphi(n)} \to \ell$ donc $\ell \in F$

3. (a) Posons $\varepsilon = \|x-\ell\| - \rho$, on a $\varepsilon > 0$ et $b_n \to \ell$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
   $$\forall n > n_0, \|b_n - \ell\| < \|x-\ell\| - \rho$$
   Pour $n > n_0$, on a $\|b_n - x\| \geqslant \|x-\ell\| - \|b_n - \ell\| > \rho$. Donc $b_n \notin B(x,\rho)$

   (b) L'inégalité $r_0 \leqslant \rho$ donne l'inclusion $B(x,r_0) \subset B(x,\rho)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$
   - Si $n > n_0$, alors $b_n \notin B(x,\rho)$ par suite $b_n \notin B(x,r_0)$
   - Si $n \leqslant n_0$, on a $r_0 \leqslant \|x-b_k\|$ donc $b_k \notin B(x,r_0)$

   Par suite $K \cap B(x,r_0) = \emptyset$ donc $B(x,r_0) \subset C_E^K$

   (c) Soit $x \in C_E^K$, alors il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x,r_0) \subset C_E^K$. Donc C_E^K est une partie ouverte par suite K est fermée. K est donc une partie fermée contenue dans Q qui est compacte, d'où K est compacte

Partie II

4. (a) On a pour tout $(x,y) \in Q^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x-y\|$ donc f est continue , par suite h l'est aussi. En outre Q est compact , donc h est bornée et atteint ses bornes. En particulier , il existe $x^* \in Q$ tel que : $h(x^*) = \inf\limits_{x\in Q} h(x)$

   (b) Montrons que x^* est l'unique point fixe
   - Supposons que $f(x^*) \neq x^*$, posons $a = f(x^*)$, on a $a \neq x^*$ donc :
   $$h(a) = \|f(a) - a\| = \|f(a) - f(x^*)\| < \|a - x^*\| = \|f(x^*) - x^*\| = h(x^*)$$
     Ce qui est absurde , donc $a = x^*$ c'est-à-dire que : $f(x^*) = x^*$
   - **Unicité:** Soit u est un point fixe de f, supposons que $u \neq x^*$, alors $\|f(u) - f(x^*)\| < \|u - x^*\|$.
     Par suite $\|u - x^*\| < \|u - x^*\|$ ce qui est absurde

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \|x_{n+1} - x^*\| = \|f(x_n) - f(x^*)\| \leqslant \|x_n - x^*\|$
   Donc la suite $(\|x_n - x^*\|)_n$ est décroissante positive par suite elle converge

6. (a) $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de Q qui est compacte , donc il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge vers un élément de $a \in Q$.
   La suite $\left(\left\|x_{\varphi(n)} - x^*\right\|\right)_n$ est extraite de la suite $(\|x_n - x^*\|)_n$ qui converge vers L, donc elle est aussi convergente vers L.
   En outre $\left\|x_{\varphi(n)} - x^*\right\| \to \|a - x^*\|$, par unicité de la limite, on a $L = \|a - x^*\|$

(b) f est continue et $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ donc $\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)_n$ est convergente vers $f(a)$.
Donc $\left\|x_{\varphi(n)+1} - x^*\right\| = \left\|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - x^*\right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f(a) - x^*\|$.
D'une autre part $\left(\left\|x_{\varphi(n)+1} - x^*\right\|\right)_n$ est extraite de $(\|x_n - x^*\|)_n$ donc $\left\|x_{\varphi(n)+1} - x^*\right\| \to L$.
Par unicité de la limite, $L = \|f(a) - x^*\|$.
On a alors l'égalité $\|f(a) - x^*\| = \|a - x^*\|$ qu'on peut écrire

$$L = \|f(a) - f(x^*)\| = \|a - x^*\|$$

Or $L > 0$ donc $a \neq x^*$, par suite $\|f(a) - f(x^*)\| < \|a - x^*\|$ c'est-à-dire $\|f(a) - x^*\| < \|a - x^*\|$. Ce qui est absurde, donc $L = 0$ et $a = x^*$

Partie III

7. (a) Par récurrence sur n , pour $n = 0$ c'est évident
Supposons que $\|a_p - a\| \leqslant \|a_{n+p} - a_n\|$, alors

$$\|a_{n+p+1} - a_{n+1}\| = \|f(a_{n+p}) - f(a_n)\| \geqslant \|a_{n+p} - a_n\| \geqslant \|a_p - a\|$$

(b) La suite $(a_n)_n$ est d'éléments d'un compact, donc elle admet une suite extraite convergente $\left(a_{\varphi(n)}\right)_n$ et, par suite, elle est de Cauchy, ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N\ , \forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \left\|a_{\varphi(n+k)} - a_{\varphi(n)}\right\| < \varepsilon$$

En particulier $\left\|a_{\varphi(N+1)} - a_{\varphi(N)}\right\| < \varepsilon$.
Posons $p = \varphi(N+1) - \varphi(N)$, on a $p > 0$ donc $p \geqslant 1$, (car $p \in \mathbb{N}$) .

$$\|a_p - a\| \leqslant \left\|a_{\varphi(N)+p} - a_{\varphi(N)}\right\| = \left\|a_{\varphi(N+1)} - a_{\varphi(N)}\right\| < \varepsilon$$

(c) Soit $a \in Q$ et $\varepsilon > 0$. Soit (a_n) la suite définie par: $a_0 = a$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ et p désignant l'entier défini ci-dessus. On a $a_p = f(a_{p-1}) \in f(Q)$ et $a_p \in B(a, \varepsilon)$, donc l'intersection $f(Q) \cap B(a, \varepsilon) \neq \emptyset$. Ainsi $f(Q)$ est dense dans Q

8. Soit $\varepsilon > 0$

(a) Q^2 est compact comme produit de deux compacts et $(z_n)_n = ((a_n, b_n))_n$ est une suite d'éléments de Q^2 donc on peut extraire une suite $(z_{\varphi(n)})$. La suite considérée est donc est de Cauchy, par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N\ , \forall k \in \mathbb{N}\ , \left\|z_{\varphi(n+k)} - z_{\varphi(n)}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

C'est-à-dire $\forall n \geqslant N\ , \forall k \in \mathbb{N}\ , \max\left(\left\|a_{\varphi(n+k)} - a_{\varphi(n)}\right\|, \left\|b_{\varphi(n+k)} - b_{\varphi(n)}\right\|\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$
Comme dans une question précédente, en posant $p = \varphi(N+1) - \varphi(N)$, on a $p \geqslant 1$, car φ est strictement croissante et :

$$\|a_p - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|b_p - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(b) Par récurrence , on a $\forall m \geqslant 0$, $\forall (x, y) \in Q^2$, $\|x - y\| \leqslant \|f^m(x) - f^m(y)\|$
On a $p \geqslant 1$ donc $\|f(a) - f(b)\| \leqslant \|f^p(a) - f^p(b)\| = \|a_p - b_p\|$
Puis à l'aide de l'inégalité triangulaire , on a :

$$\|f(a) - f(b)\| \leqslant \|a_p - b_p\| \leqslant \|b_p - b\| + \|b - a\| + \|a_p - a\| \leqslant \|a - b\| + \varepsilon$$

Suites définies par itération, points fixes

(c) D'après la question précedente , on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\|f(a) - f(b)\| \leqslant \|a - b\| + \varepsilon$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, on a $\|f(a) - f(b)\| \leqslant \|a - b\|$

Par suite $\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|$ pour tout $(a, b) \in Q^2$

9. Si $f(x) = f(y)$ alors $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| = 0$ par suite $x = y$

   f est continue car lispchitzienne. En conséquence $f(Q)$ est l'image d'un compact par une fonction continue, donc il s'agit d'un compact, en particulier c'est une partie fermée

10. On a bien $\overline{f(Q)} = Q$ et puisque $f(Q)$ est fermée , donc $f(Q) = Q$

    Par suite f est surjective puis bijective (car elle est déja injective)