SESSION 2022

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE 1

Q1. Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$.

Soient $n \geqslant 2$ puis $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On suppose qu'il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $x_i = x_j$.
Alors, les colonnes numéros i et j de $V(x_1, \ldots, x_n)$ sont égales et donc $V(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Q2. Soient $n \geqslant 2$ puis $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $n-1$ nombres complexes deux à distincts. Pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$P(t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & t \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n-1}^2 & t^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & t^{n-1} \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient une expression de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$ ce qui montre que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Le coefficient de t^{n-1} est le cofacteur de t^{n-1} :
$(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = V(x_1, \ldots, x_{n-1})$.
Si $V(x_1, \ldots x_{n-1}) \neq 0$, P est un polynôme de degré $n-1$ exactement, de coefficient dominant $V(x_1, \ldots, x_{n-1})$, admettant les $n-1$ nombres deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_{n-1}$, pour racines (de nouveau, déterminant ayant deux colonnes égales). Dans ce cas,

$$\forall t \in \mathbb{C},\ P(t) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (t - x_i).$$

Si $V(x_1, \ldots x_{n-1}) = 0$, P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$ admettant toujours les $n-1$ nombres deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_{n-1}$, pour racines. Dans ce cas,

$$\forall t \in \mathbb{C},\ P(t) = 0 = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (t - x_i).$$

Finalement, dans tous les cas, $\forall t \in \mathbb{C},\ P(t) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (t - x_i)$. En particulier,

$$V(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = P(x_n) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i).$$

Cette dernière égalité reste vraie si les x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas deux à deux distincts car dans ce cas, les deux membres sont nuls.

Montrons alors par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $V(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

- L'égalité est vraie quand $n = 2$ d'après la question précédente.

- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $V(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$. Alors

$$V(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = V(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \times \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i).$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Q3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-1} & 2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & (n-1)^2 & \ldots & (n-1)^{n-1} & (n-1)^n \\ n & n^2 & \ldots & n^{n-1} & n^n \end{pmatrix}$. Par linéarité par rapport à chacune des lignes et puisque le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée,

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \times 3 \times \ldots \times n \times V(1, 2, \ldots, n) = n! \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i) = n! \prod_{j=2}^{n} \left(\prod_{i=1}^{j-1} (j - i) \right) \\ &= n! \prod_{j=2}^{n} (j-1)! = \prod_{k=1}^{n} k!. \end{aligned}$$

Q4. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $a_k = e^{\frac{i(k-1)\pi}{n}}$. Les nombres a_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont n nombres complexes deux à deux distincts (car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{(k-1)\pi}{n} < 2\pi$) et tous non nuls.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2i(k-1)\pi}{n}} = 0$ (la somme des n racines n-èmes de l'unité est nulle).

Soient x_1, ..., x_n, n nombres complexes deux à deux distincts et tous non nuls. Donc, $V(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Maintenant, par linéarité par rapport à chaque colonne,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} x_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right) V(x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

La matrice $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{pmatrix}$ est donc une matrice inversible. Si toutes les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, sont nulles, alors la somme des colonnes de B est nulle puis la famille des colonnes de B est liée, ce qui contredit l'inversibilité de B. Donc, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^j \neq 0$.

EXERCICE 2

Q5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $\| \ \|$ est sous-multiplicative, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left\| \dfrac{1}{k!} A^k \right\| = \dfrac{1}{k!} \left\| A^k \right\| \leqslant \dfrac{\|A\|^k}{k!}$.

La série de terme général $\dfrac{\|A\|^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, converge et a pour somme $e^{\|A\|}$. Donc, la série de terme général $\left\| \dfrac{1}{k!} A^k \right\|$, $k \in \mathbb{N}$, converge ou encore la série de terme général $\dfrac{1}{k!} A^k$, $k \in \mathbb{N}$, converge absolument. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on en déduit que la série de terme général $\dfrac{1}{k!} A^k$ converge.

Q6.

1ère solution. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, posons $f(A) = e^A$ puis, pour $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, posons $f_k(A) = \dfrac{1}{k!}A^k$ de sorte que $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$. Soit $R > 0$ puis $\mathscr{B}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon R de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \|\ \|)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $A \in \mathscr{B}$, $\|f_k(A)\| = \dfrac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \dfrac{\|A\|^k}{k!} \leqslant \dfrac{R^k}{k!}$ puis $\|f_k\|_{\infty,\mathscr{B}} \leqslant \dfrac{R^k}{k!}$. La série numérique de terme général $\dfrac{R^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, converge et a pour somme e^R. On en déduit que la série de fonctions de terme général f_k, $k \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur $\mathscr{B}$. Puisque chaque fonction f_k, $k \in \mathbb{N}$, est continue sur $\mathscr{B}$ en tant que produit de fonctions continues sur $\mathscr{B}$, on en déduit que f est continue sur $\mathscr{B}$.

Ainsi, pour tout $R > 0$, la fonction $A \mapsto e^A$ est continue sur la boule fermée de centre 0 et de rayon R. Mais alors, la fonction $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2ème solution. Soit $(A, H) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\left\|e^{A+H} - e^A\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left((A+H)^k - A^k\right)\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left\|(A+H)^k - A^k\right\|}{k!}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On développe $(A+H)^k$ (sans utiliser la formule du binôme de Newton car A et H ne commutent pas nécessairement). On obtient une somme de 2^k termes tous produits de k matrices égales à A ou H. $(A+H)^k - A^k$ est une somme de $2^k - 1$ tels termes à l'exception du terme $AA\dots A$. $\left\|(A+H)^k - A^k\right\|$ est majoré par une somme analogue où on a remplacé A par $\|A\|$ et H par $\|H\|$ ou encore

$$\left\|(A+H)^k - A^k\right\| \leqslant (\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k.$$

On en déduit que

$$\left\|e^{A+H} - e^A\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|+\|H\|} - e^{\|A\|}.$$

Quand H tend vers 0, $e^{\|A\|+\|H\|} - e^{\|A\|}$ tend vers 0 et donc $e^{A+H} - e^A$ tend vers la matrice nulle quand H tend vers 0_n. Ceci montre la continuité de la fonction $M \mapsto e^M$ en A.

Q7. Soit $H \in (B_o(0,r) \setminus \{0\})$.

$$\left\|\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}H^k\right\| \leqslant \frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = \frac{e^{\|H\|} - 1 - \|H\|}{\|H\|}.$$

De plus, $\dfrac{e^{\|H\|} - 1 - \|H\|}{\|H\|} \underset{H \to 0}{=} \dfrac{o(\|H\|)}{\|H\|} \underset{H \to 0}{=} o(1)$. Donc, $\dfrac{e^{\|H\|} - 1 - \|H\|}{\|H\|}$ tend vers 0 quand H tend vers 0_n. On en déduit que $\dfrac{1}{\|H\|}\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}H^k$ tend vers la matrice nulle quand H tend vers 0_n.

Pour $H \in B_o(0,r) \setminus \{0\}$, posons $\varepsilon(H) = \dfrac{1}{\|H\|}\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}H^k$ si $H \neq 0$ et posons d'autre part, $\varepsilon(0) = 0$. ε est une fonction définie sur $B_o(0,r)$, tendant vers 0 quand H tend vers 0 et vérifiant pour tout $H \in B_o(0,r)$,

$$e^H - I_n - H = \|H\|\varepsilon(H).$$

Ainsi, $e^{0_n + H} \underset{H \to 0}{=} e^{0_n} + H + o(H)$. De plus, la fonction $H \mapsto H$ est linéaire. Ceci montre que la fonction $A \mapsto e^A$ est différentiable en 0_n et que sa différentielle en 0_n est l'application $H \mapsto H$.

Ainsi, $f\ :\ A \mapsto e^A$ est différentiable en 0_n et $df_{0_n} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

PROBLEME

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Q8. A est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.
$\mathrm{rg}\,(A-(a-b)I_3)=\mathrm{rg}(bJ)\leqslant 1$. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A-(a-b)I_3))\geqslant 3-1=2$ puis $(a-b)$ est valeur propre d'ordre au moins 2 de A. Il manque une valeur propre λ de A. La trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A, chacune comptée un nombre de fois égale à son ordre de multiplicité. Donc,

$$3a=\mathrm{Tr}(A)=\lambda+2(a-b)$$

puis $\lambda=a+2b$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A)=(a+2b,a-b,a-b)$ (y compris quand $a+2b=a-b$ ce qui équivaut à $b=0$). Mais alors, $A\in S_3^+\Leftrightarrow a+2b\geqslant 0$ et $a-b\geqslant 0$.

Q9. Tout d'abord, $J^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3J$.

Montrons par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $J^k=3^{k-1}J$.

- L'égalité est vraie quand $k=1$.
- Soit $k\geqslant 1$. Supposons que $J^k=3^{k-1}J$. Alors $J^{k+1}=J^k\times J=3^{k-1}J\times J=3^{k-1}\times 3J=3^{(k+1)-1}J$.

On a montré par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $J^k=3^{k-1}J$.

Cette égalité n'est pas valable quand $k=0$ car $J^0=I_3\neq 3^{-1}J$.

Les matrices $(a-b)I_3$ et bJ commutent. Donc,

$$\begin{aligned}
e^A&=e^{(a-b)I_3+bJ}=e^{(a-b)I_3}e^{bJ}=e^{a-b}I_3\times e^{bJ}\\
&=e^{a-b}\left(I_3+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}(bJ)^k\right)=e^{a-b}\left(I_3+\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}b^k3^{k-1}\right)J\right)\\
&=e^{a-b}\left(I_3+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}(3b)^k\right)J\right)=e^{a-b}\left(I_3+\frac{e^{3b}-1}{3}J\right)=e^{a-b}I_3+\frac{e^{a+2b}-e^{a-b}}{3}J\\
&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}e^{a+2b}+2e^{a-b}&e^{a+2b}-e^{a-b}&e^{a+2b}-e^{a-b}\\e^{a+2b}-e^{a-b}&e^{a+2b}+2e^{a-b}&e^{a+2b}-e^{a-b}\\e^{a+2b}-e^{a-b}&e^{a+2b}-e^{a-b}&e^{a+2b}+2e^{a-b}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

e^A est symétrique réelle. En appliquant le résultat de la question Q8 à e^A, le spectre de e^A est

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\left(e^A\right)&=\left(\frac{e^{a+2b}+2e^{a-b}+2\left(e^{a+2b}-e^{a-b}\right)}{3},\frac{e^{a+2b}+2e^{a-b}-\left(e^{a+2b}-e^{a-b}\right)}{3},\frac{e^{a+2b}+2e^{a-b}-\left(e^{a+2b}-e^{a-b}\right)}{3}\right)\\
&=\left(e^{a+2b},e^{a-b},e^{a-b}\right).
\end{aligned}$$

Les trois valeurs propres de e^A sont des réels positifs et donc $e^A\in S_3^+$.

Q10. Soit $P\in GL_n(\mathbb{R})$. L'application $f\ :\ M\mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc, f est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A\in S_n^+$. D'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, les valeurs propres de A sont des réels positifs. Soient $P\in GL_n(\mathbb{R})$ et $D=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathscr{D}_n\left(\mathbb{R}^+\right)$ telles que $A=PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(PDP^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1} \\
&= \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} PD^kP^{-1}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(P\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k\right)P^{-1}\right) = \lim_{p\to+\infty} f\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k\right) \\
&= f\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} D^k\right) \text{ (par continuité de } f \text{ sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et donc en } e^D\text{)}. \\
&= f\left(e^D\right) = Pe^DP^{-1}.
\end{aligned}$$

De plus, $e^D = \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!}, \dots, \frac{\lambda_n^k}{k!}\right) = \text{diag}\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$.

Ainsi, e^A est semblable à la matrice $\text{diag}\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$ et en particulier, $\text{Sp}\left(e^A\right) = \left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}\right)$. Puisque les λ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont des réels, les valeurs propres de la matrice e^A sont des réels positifs.

Enfin, l'application $A \mapsto {}^tA$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire. On en déduit par le même raisonnement que précédemment que ${}^t\left(e^A\right) = e^{{}^tA} = e^A$. Donc, $e^A \in S_n^+$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Q11. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in S_3^+$. Alors $a + 2b \geqslant 0$ et $a \geqslant b$.

$E(a) = \begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix}$. Déjà, $E(A)$ est symétrique réelle puis, en appliquant la question Q8 à $E(A)$,

$$\text{Sp}(E(A)) = \left(e^a + 2e^b, e^a - e^b, e^a - e^b\right).$$

Puisque a et b sont réels et que $a \geqslant b$, les trois valeurs propres de $E(A)$ sont des réels positifs. On a montré que $E(A) \in S_3^+$.

Q12. Posons $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^+)$. Alors,

$${}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda y_i^2 \geqslant 0.$$

Soit $A \in S_n$.

• Supposons $A \in S_n^+$. A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients réels positifs. Posons $A = PD{}^tP$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^+)$. Soient $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $Y = {}^tPX$. D'après le début de la question,

$${}^tXAX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t\left({}^tPX\right)D\left({}^tPX\right) = {}^tYDY \geqslant 0.$$

Donc, $A \in S_n^+ \Rightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geqslant 0$.

• Supposons que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geqslant 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A puis $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

$${}^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda{}^tXX = \lambda\|X\|^2.$$

Puisque $X \neq 0$, $\|X\|^2 > 0$ puis $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{\|X\|^2} \geqslant 0$. Les valeurs propres de A sont donc des réels positifs.

Finalement, $\forall A \in S_n$, $(A \in S_n^+ \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geqslant 0)$.

Q13. Soient $(A, B) \in (S_n^+)^2$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2$. $\alpha A + \beta B \in S_n$ car S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tX(\alpha A + \beta B)X = \alpha{}^tXAX + \beta{}^tXBX \geqslant 0.$$

On a montré que $\alpha A + \beta B \in S_n^+$.

Soit $(A, B) \in (S_n)^2$. $AB \in S_n \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB{}^tA = AB \Leftrightarrow BA = AB$. Donc, si A et B ne commutent pas, AB n'est même pas symétrique. Par exemple, si $A = E_{1,1} \in S_2$ et $B = E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,1} + E_{2,2} \in S_2$, alors $AB = E_{1,1} + E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2$.

Q14. Soit $A \in S_n^+$. D'après le théorème spectral, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients réels positifs.
Posons $A = PD{}^tP$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^+)$. Soient $\Delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ puis $R = P\Delta{}^tP$. R est orthogonalement semblable à une matrice diagonale à coefficients réels positifs et donc $R \in S_n^+$. De plus,

$$R^2 = P\Delta{}^tPP\Delta{}^tP = P\left(\Delta^2\right){}^tP = PD{}^tP = A.$$

Q15. On pose $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{i,k}u_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}$ car U est symétrique. De même, $b_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} v_{l,i}v_{l,j}$ et finalement

$$c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} v_{l,i}v_{l,j}\right).$$

Déjà, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $c_{j,i} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,j}u_{k,i}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} v_{l,j}v_{l,i}\right) = c_{i,j}$ et donc $A * B \in S_n$.

Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $l \in [\![1, n]\!]$, posons $X_l = (v_{l,i}x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tX(A * B)X &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ic_{i,j}x_j = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_ja_{i,j}\left(\sum_{l=1}^{n} v_{l,i}v_{l,j}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} v_{l,i}x_ia_{i,j}v_{l,j}x_j\right) = \sum_{l=1}^{n} {}^tX_lAX_l \geqslant 0 \text{ (car } A \in S_n^+\text{)}. \end{aligned}$$

Donc, $A * B \in S_n^+$.

Q16. On pose $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $T_N = \left(\sum_{p=0}^{N} \dfrac{a_{i,j}^p}{p!}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et donc,

$$\lim_{N\to+\infty} T_N = \left(e^{a_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = E(A).$$

Q17. S_n est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'application $\begin{array}{rccc} f_X : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & {}^tXMX \end{array}$ est linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc continue sur cet espace. L'ensemble $K_X = f_X^{-1}([0, +\infty[)$ est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ ($[0, +\infty[$ est le complémentaire de l'ouvert $]-\infty, 0[$) par l'application continue f_X.

Mais alors, $S_n^+ = S_n \cap \left(\bigcap_{X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} K_X\right)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^{*p} \in S_n^+$ car $A^{*0} = I_n \in S_n^+$ par par récurrence sur p d'après la question Q16. Mais alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $T_N \in S_n^+$ par récurrence sur N et d'après la question Q13. Puisque S_n^+ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, toute suite convergente d'éléments de S_n^+ converge dans S_n^+. En particulier,

$$E(A) = \lim_{N\to+\infty} T_N \in S_n^+.$$

