SESSION 2022

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

I - Inégalité d'interpolation des dérivées

I.A - Cas particulier $K = 1$

Q 1. f et f' sont définies et continues sur le segment $[0,1]$ et donc bornées sur ce segment. Donc, $\|f\|_\infty$ et $\|f'\|_\infty$ existent dans $\mathbb{R}$.

Puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$, pour tout $x \in [0,1]$, on peut écrire $f(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^{x} f'(t)\,dt$ puis

$$|f(x)| \leqslant \left|\int_{x_1}^{x} f'(t)\,dt\right| + |f(x_1)| \leqslant |x - x_1|\,\|f'\|_\infty + |f(x_1)| \leqslant \|f'\|_\infty + |f(x_1)|.$$

Ainsi, $\|f'\|_\infty + |f(x_1)|$ est un majorant de $\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}$ et puisque $\|f\|_\infty$ est le plus petit de ces majorants,

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + |f(x_1)|.$$

Q 2. Soit $C \in]0,1[$. Soient $f\ :\ x \mapsto e^{\frac{1}{2}(1-C)x}$ et $x_1 = 1$.

$$\|f'\|_\infty + C\,|f(x_1)| = \frac{1}{2}(1-C)e^{\frac{1}{2}(1-C)} + Ce^{\frac{1}{2}(1-C)} = \frac{C+1}{2}e^{\frac{1}{2}(1-C)} < e^{\frac{1}{2}(1-C)} = \|f\|_\infty.$$

Pour ce choix de fonction f et de réel $x_1 \in [0,1]$, l'inégalité (I.2) est fausse.

I.B - Cas particulier $K = 2$

Q 3. Soit $x \in [0,1]$. f est continue sur $[x_1, x_2]$, dérivable sur $]x_1, x_2[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$. Mais alors, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f',

$$\left|f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| = |f'(x) - f'(c)| \leqslant |x - c|\|(f')'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty.$$

Q 4. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f'(x)| \leqslant \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| + \left|f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leqslant \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1} + \|f''\|_\infty,$$

puis, comme à la question Q1, $\|f'\|_\infty \leqslant \dfrac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1} + \|f''\|_\infty$.

Q 5. D'après la question précédente, en prenant $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1} > 0$,

$$\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + (C-1)\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right) \leqslant \|f''\|_\infty + C\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right).$$

D'autre part, d'après la question Q1,

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + |f(x_1)| \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1} + |f(x_1)| + |f(x_2)| = \|f''\|_\infty + C\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right)$$

et finalement, $\operatorname{Max}\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right) \leqslant \|f''\|_\infty + C\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right)$.

I.C - Cas général par l'interpolation de Lagrange

Q 6. Ψ est une application de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^K$. Soient $(P,Q) \in \left(\mathbb{R}_{K-1}[X]\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda P + \mu Q) &= \left((\lambda P + \mu Q)(x_1), \dots, (\lambda P + \mu Q)(x_K)\right) = \lambda\left(P(X_1), \dots, P(x_K)\right) + \mu\left(Q(x_1), \dots, Q(x_K)\right)\\ &= \lambda\Psi(P) + \mu\Psi(Q).\end{aligned}$$

Donc, $\Psi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_{K-1}[X], \mathbb{R}^K\right)$. Soit alors $P \in \operatorname{Ker}(\Psi)$. P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $K-1$ s'annulant en les K réels deux à deux distincts $x_1, \dots, x_K$. On en déduit que $P = 0$.

Donc $\operatorname{Ker}(\Psi) = \{0\}$ puis Ψ est injectif. Enfin, puisque $\dim\left(\mathbb{R}_{K-1}[X]\right) = \dim\left(\mathbb{R}^K\right) = K < +\infty$, Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Q 7. Notons $(e_1, \dots, e_K)$ la base canonique de $\mathbb{R}^K$. Pour $j \in [\![1, K]\!]$, posons $L_j = \Psi^{-1}(e_j)$. Alors, pour tout $j \in [\![1, K]\!]$, L_j est un élément de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tel que $\Psi(L_j) = e_j$. Maintenant, si $f \in \mathscr{C}^k([0,1])$ puis $P = \sum_{j=1}^{K} f(x_j) L_j \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$,

$$(P(x_1), \dots, P(x_K)) = \Psi(P) = \sum_{j=1}^{K} f(x_j)\Psi(L_j) = \sum_{j=1}^{K} f(x_j) e_j = (f(x_1), \dots, f(x_K))$$

et donc P est un élément de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tel que $\forall \ell \in [\![1, K]\!]$, $P(x_\ell) = f(x_\ell)$.

Q 8. Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule en au moins $K - k$ réels deux à deux distincts de $[0, 1]$.

- $f - P$ s'annule en les K réels deux à deux distincts $x_1, \dots, x_K$. Le résultat est donc vrai quand $k = 0$ et si $K = 1$, il n'y a plus rien à dire. Dorénavant, $K \geqslant 2$.
- Soit $k \in [\![0, K-2]\!]$. Supposons que $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule en $K - k$ réels deux à deux distincts $a_1, \dots, a_{K-k}$ de $[0, 1]$ où la numérotation est telle que $a_1 < \dots < a_{K-k}$.
Pour chaque $j \in [\![1, K-k-1]\!]$, $f^{(k)} - P^{(k)}$ est continue sur $[a_j, a_{j+1}]$, dérivable sur $]a_j, a_{j+1}[$ et prend la même valeur en a_j et a_{j+1}. D'après le théorème de Rolle, pour chaque $j \in [\![1, K-k-1]\!]$, il existe $b_j \in]a_j, a_{j+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(b_j) - P^{(k+1)}(b_j) = 0$. Puisque $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < a_{K-k-1} < b_{K-k-1} < a_{K-k}$, les b_j sont $K - k - 1$ réels deux à deux distincts de $[0, 1]$ en lesquels la fonction $f^{(k+1)} - P^{(k+1)}$ s'annule.

Le résultat est démontré par récurrence.

Q 9. Soit $k \in [\![0, K-1]\!]$. La question précédente montre que la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$ en un certain réel c_k. Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\left|f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)\right| &= \left|f^{(k)}(c_k) - P^{(k)}(c_k) + \int_{c_k}^{x} \left(f^{(k+1)}(t) - P^{(k+1)}(t)\right) dt\right| = \left|\int_{c_k}^{x} \left(f^{(k+1)}(t) - P^{(k+1)}(t)\right) dt\right| \\
&\leqslant |x - c_k| \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty \\
&\leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty.
\end{aligned}$$

Q 10. En particulier, pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, $\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)} - P^{(K)}\right\|_\infty = \left\|f^{(K)}\right\|_\infty$ car $\deg(P) \leqslant K - 1$ puis

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty + \left\|P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \left\|P^{(k)}\right\|_\infty.$$

Maintenant, pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, $\left\|P^{(k)}\right\|_\infty = \left\|\sum_{j=1}^{K} f(x_j) L_j^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{K} |f(x_j)| \left\|L_j^{(k)}\right\|_\infty \leqslant C \sum_{j=1}^{K} |f(x_j)|$ où $C = \operatorname{Max}\left\{\left\|L_j^{(k)}\right\|_\infty,\ 1 \leqslant j \leqslant K,\ 0 \leqslant k \leqslant K-1\right\}$. C est un réel strictement positif, ne dépendant que de $x_1, \dots, x_K$, et pas de f tel que

$$\operatorname{Max}\left\{\left\|f^{(k)}\right\|_\infty,\ 0 \leqslant k \leqslant K-1\right\} \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)|.$$

II - Dérivation $\mathscr{C}^k$ pour les séries de fonctions

II.A - Enoncé général

Q 11. Il existe $C > 0$ (indépendant de n) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$,

$$\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f_n^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f_n(x_\ell)|.$$

Par hypothèse, la série numérique de terme général $\left\|f_n^{(K)}\right\|_\infty + C\displaystyle\sum_{\ell=1}^{K}|f_n(x_\ell)|$ converge et il en est de même de la série de terme général $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$. Ceci montre que pour tout $k \in [\![0, K]\!]$, la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Q 12. σ est une bijection de $[0, 1]$ sur $[a, b]$, strictement croissante sur $[0, 1]$ (de sorte que $0 \leqslant \sigma^{-1}(x_1) < \ldots \sigma^{-1}(x_K) \leqslant 1$) et de classe C^K sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n = f_n \circ \sigma$ de sorte que $f_n = g_n \circ \sigma^{-1}$. g_n est de classe C^K sur $[0, 1]$ et pour tout $k \in [\![0, K]\!]$ et tout $x \in [a, b]$, $g_n^{(k)}(x) = (b-a)^k f_n^{(k)}(\sigma(x))$. Puisque σ est une bijection de $[0, 1]$ sur $[a, b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, K]\!]$,

$$\begin{aligned}\left\|g_n^{(k)}\right\|_{\infty,[0,1]} &= \mathrm{Sup}\left\{\left|g_n^{(k)}(x)\right|,\ x \in [0, 1]\right\} = (b-a)^k \mathrm{Sup}\left\{\left|f_n^{(k)}(\sigma(x))\right|,\ x \in [0, 1]\right\}\\ &= (b-a)^k \mathrm{Sup}\left\{\left|f_n^{(k)}(t)\right|,\ t \in [a, b]\right\} = (b-a)^k \left\|f_n^{(k)}\right\|_{\infty,[a,b]}.\end{aligned}$$

En particulier, la série numérique de terme général $\left\|g_n^{(K)}\right\|_{\infty,[0,1]} = (b-a)^K \left\|f_n^{(K)}\right\|_{\infty,[a,b]}$, $n \in \mathbb{N}$, converge ou encore, la série de fonctions de terme général $g_n^{(K)}$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement sur $[a, b]$. D'autre part, pour chaque $\ell \in [\![1, K]\!]$, la série numérique de terme général $g_n\left(\sigma^{-1}(x_\ell)\right) = f_n(x_\ell)$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument.

D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, la série numérique de terme général $\left\|g_n^{(k)}\right\|_{\infty,[0,1]}$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Il en est de même des séries numériques de termes généraux respectifs $\left\|f_n^{(k)}\right\|_{\infty,[a,b]} = \dfrac{\left\|g_n^{(k)}\right\|_{\infty,[0,1]}}{(b-a)^k}$, $n \in \mathbb{N}$, pour $0 \leqslant k \leqslant K-1$. On a montré que pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément et simplement sur $[a, b]$.

Q 13. Ainsi,

- La série de fonction de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement vers F_0 sur $[a, b]$.
- Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est de classe C^K sur $[a, b]$.
- Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$, $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $[a, b]$.
- La série de fonctions de terme général $f_n^{(K)}$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur $[a, b]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme généralisé, la fonction F_0 est de classe C^K sur $[a, b]$ et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre K s'obtiennent par dérivation terme à terme ou encore, pour tout $k \in [\![0, K]\!]$, $F_0^{(k)} = F_k$.

II.B - Application sur un exemple

Q 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto (-1)^n 2^{-nx^2}$ est continue sur $[a, b]$ et admet donc des primitives sur $]0, +\infty[$. Soit g_n une primitive donnée d'une primitive donnée de la fonction $x \mapsto (-1)^n 2^{-nx^2}$ sur $]0, +\infty[$. La fonction f_n est nécessairement de la forme $x \mapsto g_n(x) + \alpha_n x + \beta_n$, $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$. Maintenant, une telle fonction est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et admet pour dérivée seconde la fonction $x \mapsto (-1)^n 2^{-nx^2}$. Enfin,

$$f_n(1) = f_n(2) = 0 \Leftrightarrow \beta_n + g_n(1) = 2\alpha_n + \beta_n + g_n(2) = 0 \Leftrightarrow \beta_n = -g_n(1) \text{ et } \alpha_n = -\frac{1}{2}\left(-g_n(1) + g_n(2)\right).$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de f_n.

Q 15. Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leqslant 1 < 2 \leqslant b$. Soient $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Les séries numériques de termes généraux respectifs $f_n(1)$ et $f_n(2)$ sont absolument convergentes. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f_n''(x)| = 2^{-nx^2} \leqslant 2^{-na^2}$$

puis $\|f_n''\|_{\infty,[a,b]} \leqslant 2^{-na^2} = \left(\dfrac{1}{2^{a^2}}\right)^n$. Puisque $0 < \dfrac{1}{2^{a^2}} < 1$ (car $a > 0$), la série numérique de terme général $\|f_n''\|_{\infty,[a,b]}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge ou encore la série de fonctions de terme général f_n'', $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[a, b]$. D'après la question Q12, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur $[a, b]$. Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b]$ tel que $[1, 2] \subset [a, b]$, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

D'après la question Q13, F est de classe C^2 sur tout segment $[a,b]$ tel que $[1,2] \subset [a,b]$ et donc sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ et donc sur $]0,+\infty[$.

Q 16. De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2^{x^2}}\right)^n = -\frac{1}{2^{x^2}} \frac{1}{1+\frac{1}{2^{x^2}}} = -\frac{1}{2^{x^2}+1}.$$

Q 17. On prend toujours $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. D'après la question Q5, pour tout $x \in [1,2]$,

$$|F(x)| \leqslant \|F\|_{\infty,[1,2]} \leqslant \|F''\|_{\infty,[1,2]} + C\left(|F(1)| + |F(2)|\right) = \|F''\|_{\infty,[1,2]} = \frac{1}{2^{1^2}+1} = \frac{1}{3}.$$

On a montré que pour tout $x \in [1,2]$, $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$.

III - Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

III.A - Construction de la suite $(\phi(j))_{j\in\mathbb{N}}$ ***et majoration de*** $\mathbb{P}(A_j)$

Q 18. La série de terme général a_n^2, $n \in \mathbb{N}$, converge. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose alors $R_k = \displaystyle\sum_{n>k} a_n^2$. On sait que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie et converge vers 0.

- Il existe un rang k_0 tel que, pour $k \geqslant k_0$, $R_k \leqslant 1 = \dfrac{1}{8^0}$. On pose $\phi(0) = \text{Min}\left\{k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{n>k} a_n^2\right\} \leqslant \dfrac{1}{8^0}$.

- Soit $j \geqslant 0$. Supposons avoir construit des entiers $\phi(0)$, $\phi(1)$, ..., $\phi(j)$ tels que $\phi(0) < \phi(1) < \ldots < \phi(j)$ et $\forall k \in [\![0,j]\!]$, $\displaystyle\sum_{n>\phi(k)} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^k}$. Il existe un rang k_0 tel que, pour $k \geqslant k_0$, $\displaystyle\sum_{n>k} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^{j+1}}$ de sorte que $\left\{k \geqslant \phi(j)+1 / \displaystyle\sum_{n>k} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^{j+1}}\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. On pose $\phi(j+1) = \text{Min}\left\{k \geqslant \phi(j)+1,\ \displaystyle\sum_{n>k} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^{j+1}}\right\}$.

On a ainsi construit par récurrence une suite $(\phi(j))_{j\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, strictement croissante, telle que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \sum_{n>\phi(j)} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^j}.$$

Q 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = -1 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{2} = 0$ et d'autre part, d'après la formule de KÖENIG-HUYGENS,

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) - \left(\mathbb{E}(X_n)\right)^2 = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Soit $j \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} X_n a_n\right) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n \mathbb{E}(X_n) = 0.$$

Ensuite, puisque les variables X_n, $n \in \mathbb{N}$, sont mutuellement indépendantes et en particulier deux à deux indépendantes. Il en est de même des variables $a_n X_n$ puis

$$\mathbb{V}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n^2 \mathbb{V}(X_n) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n^2.$$

En particulier, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{V}\left(S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right) \leqslant \displaystyle\sum_{n>\phi(j)} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^j}$.

Q 20. D'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(A_j\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\left(S_{\phi(j+1)}-S_{\phi(j)}\right)-\mathbb{E}\left(S_{\phi(j+1)}-S_{\phi(j)}\right)\right|>\frac{1}{2^j}\right)\\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}\left(S_{\phi(j+1)}-S_{\phi(j)}\right)}{\left(\dfrac{1}{2^j}\right)^2}\leqslant\frac{1/8^j}{1/4^j}=\frac{1}{2^j}.\end{aligned}$$

III.B - Inégalité maximale de Lévy $\mathbb{P}\left(B_j\right)\leqslant 2\mathbb{P}\left(A_j\right)$

Q 21. Soit $(m,m')\in[\![\phi(j),\phi(j+1)]\!]^2$ tel que $m<m'$. Soit $\omega\in B_{j,m'}$. Puisque $m\in[\![\phi(j),m'-1]\!]$, par définition de $B_{j,m'}$, on a $\left|S_m(\omega)-S_{\Phi(j)}(\omega)\right|\leqslant\dfrac{1}{2^j}$ et donc $\omega\notin B_{j,m}$. Ceci montre que $B_{j,m}\cap B_{j,m'}=\varnothing$.

Soit $\omega\in B_j$. Donc, $\left\{n\in[\![\phi(j)+1,\phi(j+1)]\!]/\ \left|S_n(\omega)-S_{\phi(j)}(\omega)\right|>2^{-j}\right\}\neq\varnothing$.
Soit $m=\text{Min}\left\{n\in[\![\phi(j)+1,\phi(j+1)]\!]/\ \left|S_n(\omega)-S_{\phi(j)}(\omega)\right|>2^{-j}\right\}$. Par définition de m, $\omega\in B_{j,m}$. Ainsi, pour tout $\omega\in B_j$, il existe $m\in[\![\phi(j)+1,\phi(j+1)]\!]$ tel que $\omega\in B_{j,m}$. Ceci montre que $B_j\subset\displaystyle\bigcup_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)}B_{j,m}$.

Inversement, soit $\omega\in\displaystyle\bigcup_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)}B_{j,m}$. Il existe $m\in[\![\phi(j)+1,\phi(j+1)]\!]$ tel que $\omega\in B_{j,m}$ et donc tel que $\left|S_m(\omega)-s_{\phi(j)}(\omega)\right|>2^{-j}$. Mais alors, $\text{Max}\left\{\left|S_n(\omega)-S_{\phi(j)}\right|,\ n\in[\![\phi(j)+1,\phi(j+1)]\!]\right\}>2^{-j}$ puis $\omega\in B_j$. Ceci montre que $\displaystyle\bigcup_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)}B_{j,m}\subset B_j$ et finalement que

$$B_j=\bigcup_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)}B_{j,m}.$$

Q 22. Soit $j\in\mathbb{N}$. $\left|S_{\phi(j+1)}-S_{\phi(j)}\right|>\dfrac{1}{2^j}\Rightarrow\underset{\phi(j)+1\leqslant n\leqslant\phi(j+1)}{\text{Max}}\left|S_n-S_{\phi(j)}\right|>\dfrac{1}{2^j}$ et donc $A_j\subset B_j$ puis $A_j=A_j\cap B_j$. Mais alors, puisque les $B_{j,m}$ sont deux à deux disjoints, de réunion B_j,

$$\mathbb{P}\left(A_j\right)=\mathbb{P}\left(A_j\cap B_j\right)=\mathbb{P}\left(A_j\cap\left(\bigcup_{k=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)}B_{j,m}\right)\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)}A_j\cap B_{j,m}\right)=\sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)}\mathbb{P}\left(A_j\cap B_{j,m}\right).$$

Q 23. Notons f la fonction de l'énoncé. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Notons E_α l'ensemble des $\phi(j+1)-\phi(j)$-uplets $\left(\varepsilon_{\phi(j)+1},\ldots,\varepsilon_{\phi(j+1)}\right)\in\{-1,1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}$ tels que

- pour tout $n\in[\![\phi(j),m-1]\!]$, $\left|\displaystyle\sum_{k=\phi(j)+1}^{n}\varepsilon_k a_k\right|\leqslant\dfrac{1}{2^j}$,
- $\left|\displaystyle\sum_{k=\phi(j)+1}^{m}\varepsilon_k a_k\right|>\dfrac{1}{2^j}$,
- $\left|\alpha\displaystyle\sum_{k=m+1}^{\phi(j+1)}\varepsilon_k a_k+\sum_{k=\phi(j)+1}^{m}\varepsilon_k a_k\right|>\dfrac{1}{2^j}$.

L'événement $\left|\alpha S_{\phi(j+1)}-\alpha S_m+S_m-S_{\phi(j)}\right|\cap B_{j,m}$ est la réunion disjointe des événements $\left(X_{\phi(j)+1}=\varepsilon_{\phi(j)+1}\right)\cap\ldots\cap\left(X_{\phi(j+1)}=\varepsilon_{\phi(j+1)}\right)$ c'est-à-dire $\left(X_{\phi(j)+1},\ldots,X_{\phi(j+1)}\right)=\left(\varepsilon_{\phi(j)+1},\ldots,\varepsilon_{\phi(j+1)}\right)$ où $\left(\varepsilon_{\phi(j)+1},\ldots,\varepsilon_{\phi(j+1)}\right)$ décrit E_α.

Puisque les variables X_n, $n\in\mathbb{N}$, sont indépendantes, pour $\left(\varepsilon_{\phi(j)+1},\ldots,\varepsilon_{\phi(j+1)}\right)\in E_\alpha$,

$$\mathbb{P}\left(\left(X_{\phi(j)+1},\ldots,X_{\phi(j+1)}\right)=\left(\varepsilon_{\phi(j)+1},\ldots,\varepsilon_{\phi(j+1)}\right)\right)=\frac{1}{2^{\phi(j+1)-\phi(j)}},$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| \cap B_{j,m}\right) = \frac{\text{card}\,(E_\alpha)}{2^{\phi(j+1)-\phi(j)}}$$

puis $f(\alpha) = \text{card}\,(E_\alpha) \in \mathbb{N}$.

Ensuite, l'application $\left(\varepsilon_{\phi(j)+1}, \ldots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_{\phi(j+1)}\right) \mapsto \left(\varepsilon_{\phi(j)+1}, \ldots, \varepsilon_m, -\varepsilon_{m+1}, \ldots, -\varepsilon_{\phi(j+1)}\right)$ est une bijection de E_α sur $E_{-\alpha}$. Par suite, $\text{card}\,(E_{-\alpha}) = \text{card}\,(E_\alpha)$ puis $f(-\alpha) = f(\alpha)$. f est donc une fonction paire.

Q 24. Supposons que l'événement B_j se réalise ou encore, supposons que $\displaystyle\bigcup_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} = B_j \neq \varnothing$.

Il existe donc $\omega \in \Omega$ puis $m \in [\![\phi(j+1, \phi(j+1)]\!]$, tels que $\left|S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| > 2^{-j}$ et pour tout $n \in [\![\phi(j), m-1]\!]$, $\left|S_n(\omega) - S_{\Phi(j)}(\omega)\right| \leqslant 2^{-j}$.

Supposons par l'absurde que pour tout $\alpha \in \{-1, 1\}$, $\left|\alpha S_{\phi(j+1)}(\omega) - \alpha S_m(\omega) + S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| \leqslant 2^{-j}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\left|S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| &= \frac{1}{2}\left|\left(S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_m(\omega) + S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right) + \left(S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_m(\omega) + S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\left|S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_m(\omega) + S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| + \left|S_{\phi(j+1)}(\omega) - S_m(\omega) + S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right|\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(2^{-j} + 2^{-j}\right) = 2^{-j}
\end{aligned}$$

ce qui est faux. Donc, il existe $\alpha \in \{-1, 1\}$ tel que $\left|\alpha S_{\phi(j+1)}(\omega - \alpha S_m(\omega) + S_m(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| > 2^{-j}$.

En résumé, si l'événement B_j n'est pas vide et si $\omega \in B_j$, il existe $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$ et $\alpha \in \{-1\}$ (dépendant de ω) tels que $\omega \in \left\{\left|\alpha S_{\phi(j)+1} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}$ et en particulier, l'événement $\left\{\left|\alpha S_{\phi(j)+1} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}$ se réalise.

Q 25. En particulier,

$$B_j \subset \bigcup_{\substack{m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!] \\ \alpha \in \{-1,1\}}} \left\{\left|\alpha S_{\phi(j)+1} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_j) &\leqslant \sum_{\substack{m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!] \\ \alpha \in \{-1,1\}}} \mathbb{P}\left(\left\{\left|\alpha S_{\phi(j)+1} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}\right) \\
&= 2 \sum_{m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]} \mathbb{P}\left(\left\{\left|S_{\phi(j)+1} - S_m + S_m - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}\right) \\
&\quad \text{(par parité de la fonction de la question Q23)} \\
&= 2 \sum_{m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]} \mathbb{P}\left(\left\{\left|S_{\phi(j)+1} - S_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap B_{j,m}\right) \\
&= 2 \sum_{m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]} \mathbb{P}\left(A_j \cap B_{j,m}\right) \\
&= 2\mathbb{P}(A_j) \text{ d'après la question Q22).}
\end{aligned}$$

III.C - Convergence de la série aléatoire $\sum X_n a_n$

Q 26. Soit $J \in \mathbb{N}$. D'après les questions Q25 puis Q23,

$$\begin{aligned}0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{j\geqslant J} B_j\right) &\leqslant \sum_{j=J}^{+\infty} \mathbb{P}(B_j) \leqslant 2\sum_{j=J}^{+\infty} \mathbb{P}(A_j)\\ &\leqslant 2\sum_{j=J}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 2 \times \frac{1}{2^J} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{J-2}}.\end{aligned}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{J\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{j\geqslant J} B_j\right) = 0$. Puisque la suite $\left(\bigcup_{j\geqslant J} B_j\right)_{J\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{J\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{j\geqslant J} B_j\right)\right) = \lim_{J\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j\geqslant J} B_j\right) = 0.$$

Q 27. Mais alors $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{J\in\mathbb{N}}\left(\bigcap\limits_{j\geqslant J} \overline{B_j}\right)\right) = 1$. Or, $\overline{B_j} = \left\{\forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!],\ \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\}$ puis $\bigcap\limits_{j\geqslant J} \overline{B_j} = \left\{\forall j \geqslant J,\ \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!],\ \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\}$ et finalement

$$\left\{\exists J \in \mathbb{N}/\ \forall j \geqslant J,\ \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!],\ \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\} = \bigcup_{J\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{j\geqslant J} \overline{B_j}\right)$$

ce qui démontre le résultat.

Q 28. Supposons qu'il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \geqslant J,\ \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!],\ \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}$.
En particulier, $\forall j \geqslant J$, $\left|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}$. Puisque la série géométrique de terme général $\frac{1}{2^j}$ converge, il en est de même de la série de terme général $\left|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\right|$. Mais alors, la série de terme général $S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}$ converge et on sait qu'il en est de même de la suite $\left(S_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Ceci montre que

$$\left\{\exists J \in \mathbb{N}/\ \forall j \geqslant J,\ \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!],\ \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\} \subset \left\{\text{la suite } \left(S_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\}$$

puis que l'événement $\left\{\text{la suite } \left(S_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\}$ a aussi une probabilité égale à 1.

Q 29. Soit $\omega \in \left\{\exists J \in \mathbb{N}/\ \forall j \geqslant J,\ \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!],\ \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\}$. D'après la question précédente, la suite $\left(S_{\phi(j)}(\omega)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ converge. Posons $S = \lim\limits_{j\to+\infty} S_{\phi(j)}(\omega)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $J_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geqslant J_1$, $\frac{1}{2^j} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (J_1 existe car $\frac{1}{2^j} \underset{j\to+\infty}{\to} 0$). Soit $J_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geqslant J_2$ puis tout $n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, $\left|S_n(\omega) - S_{\phi(j)}(\omega)\right| \leqslant \frac{1}{2^j}$. Soit enfin $J_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geqslant J_3$, $\left|S_{\phi(j)}(\omega) - S\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit alors $J = \text{Max}\{J_1, J_2, J_3\}$. Pour $n \geqslant \phi(J)$, on note j_n l'unique entier tel que $\phi(j_n) \leqslant n < \phi(j_{n+1})$. Puisque $n \geqslant \phi(J)$, on a encore $\phi(j_n) \geqslant \phi(J)$ puis $j_n \geqslant J$ et donc

$$|S_n(\omega) - S| \leqslant \left|S_n(\omega) - S_{\phi(j_n)}(\omega)\right| + \left|S_{\phi(j_n)}(\omega) - S\right| \leqslant \frac{1}{2^j} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant J$, $|S_n(\omega) - S| \leqslant \varepsilon$. Donc, la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou encore la série de terme général $X_n(\omega)a_n$ converge.

Par suite, $\left\{\exists J \in \mathbb{N}/\ \forall j \geqslant J,\ \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!],\ \left|S_n - S_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\} \subset \{\text{la série } \Sigma X_n a_n \text{ converge}\}$ puis comme à la question précédente,

$$\mathbb{P}\left(\{\text{la série } \Sigma X_n a_n \text{ converge}\}\right) = 1.$$

IV - Dérivation $\mathscr{C}^k$ pour des séries aléatoires de fonctions

Q 30. Soit $\ell \in [\![1, K]\!]$. Si la série de terme général $f_n(x_\ell)$ est absolument convergente, alors en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_\ell) = 0$. On en déduit que pour n suffisamment grand, $|f_n(\ell)| \in [0, 1]$ puis $(f_n(x_\ell))^2 \leqslant |f_n(\ell)|$. On en déduit que la série de terme général $(f_n(x_\ell))^2$ converge.

Ainsi, l'hypothèse (H_2) implique l'hypothèse (H'_2).

Q 31. Supposons (H_2). D'après la question précédente, l'hypothèse (H'_2) est vérifiée. Soit $\ell \in [\![1, K]\!]$. Puisque la série de terme général $(f_n(x_\ell))^2$ converge, la question Q29 permet d'affirmer que l'événement $\left\{\text{la série } \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente}\right\}$ a une probabilité égale à 1.

On sait qu'une intersection finie (voire dénombrable) d'événements presque sûrs est un événement presque sûr. Donc, $\left\{\text{pour tout } \ell \in [\![1, K]\!], \text{ la série } \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente}\right\} = \bigcap\limits_{\ell=1}^{K} \left\{\text{la série } \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente}\right\}$ est un événement presque sûr ou encore

$$\mathbb{P}\left(\left\{\text{pour tout } \ell \in [\![1, K]\!], \text{ la série } \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente}\right\}\right) = 1.$$

Q 32. Soit $\omega \in \Omega$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n = X_n(\omega)(f_n - P_n)$.

• Pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n^{(K)} = 0$ puis $g_n^{(K)} = \pm f_n^{(K)}$ et donc $\left\|g_n^{(K)}\right\|_\infty$. On en déduit que la série de fonctions de terme général $g_n^{(K)}$ est normalement convergente sur $[0, 1]$.

• Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$, $g_n(x_\ell) = \pm(f_n(x_\ell) - P_n(x_\ell)) = 0$, on en déduit que pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$, la série de terme général $g_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

D'après la question Q11,

- pour tout $k \in [\![0, K]\!]$, la série de fonctions $\sum g_n^{(k)}$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$,
- la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n$ est de classe $\mathscr{C}^K$,
- pour tout $k \in [\![0, K]\!]$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n\right)^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n^{(k)}$.

En résumé, l'événement considéré dans la question Q32 est l'événement certain Ω et en particulier, cet événement a une probabilité égale à 1.

Q 33. Soit maintenant $\omega \in \Omega$ élément de $A \cap B$ où A est l'événement de la question Q31 et B est l'événement de la question Q32. Puisque A et B sont presque sûrs, $A \cap B$ est également presque sûrs.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n(\omega)f_n = X_n(\omega)P_n + X_n(\omega)(f_n - P_n)$. La suite de fonctions $(X_n(\omega)P_n + X_n(\omega)(f_n - P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie toutes les propriétés de la question Q32.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $k \in [\![0, K]\!]$, $(X_n(\omega)P_n)^{(k)} = \sum\limits_{j=1}^{K} X_n(\omega)f_n(x_j)\, L_j^{(k)}$.

Soit $k \in [\![0, K]\!]$. Puisque $\omega \in A$, chaque série numérique $\sum X_n(\omega)f_n(x_\ell)$, $1 \leqslant \ell \leqslant K$, converge et donc chaque série de fonctions de terme général $X_n(\omega)f_n(x_j)\, L_j^{(k)}$ converge simplement sur $[0, 1]$ et finalement la série de fonction de terme général $(X_n(\omega)P_n)^{(k)}$ converge simplement sur $[0, 1]$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_n(\omega)P_n)^{(K)} = 0$ et donc la série de fonctions de terme général $(X_n(\omega)P_n)^{(K)}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme généralisé, la série de fonctions de terme général $X_n(\omega)P_n$ a toutes les propriétés requises de cette question Q33. Il en est de même de la série de fonctions de terme général $X_n(\omega)f_n$.

On vient de montrer que l'événement $A \cap B$ est contenu dans l'événement de cette question Q33 et donc l'événement considéré a aussi une probabilité égale à 1.

Q 34. Remarque intiale. Soit $x \in]0,1]$. $\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n} > 0$ et donc la série numérique de terme général $f_n(x)$ diverge. Mais alors la série de fonctions de terme général f_n ne converge en aucun point de $]0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est de classe C^2 sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{n}\dfrac{\cos\left(\dfrac{x}{n}\right)}{1+\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)}$ puis

$$f_n''(x) = \frac{1}{n}\frac{-\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right) - \cos\left(\dfrac{x}{n}\right) \times \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{x}{n}\right)}{\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)^2}$$

puis $|f_n''(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}\dfrac{1\times(1+1)+1}{(1+0)^2} = \dfrac{3}{n^2}$. La série de fonctions de terme général f_n'' converge normalement sur $[0,1]$. L'hypothèse (H_1) est donc vérifiée avec $K = 2$.

Soient alors $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ et d'autre part, $|f_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ de sorte que pour $\ell \in \{1,2\}$, la série numérique de terme général $(f_n(x_\ell))^2$ converge. L'hypothèse (H_2') est vérifiée.

L'entier $K = 2$ convient et pour ce choix de K, l'événement de la question Q33 se réalise et a une probabilité égale à 1. On a montré que pour « presque toute répartition de signes », la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \pm f_n$ est de classe C^2 sur $[0,1]$ et que ses deux premières dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

