Systèmes Linéaires Continus Invariants

SLCI2 - Réduction de modèle

Cours

Programme PSI/MP 2022 (LIEN)		
Id	Compétence développée	Connaissances associées
B3-02	Préciser les limites de validité d'un modèle.	Point de fonctionnement. Non-linéarités (courbure, hystérésis, saturation, seuil) et retard pur.
B2-08	Simplifier un modèle.	Linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement. Pôles dominants et réduction de l'ordre du modèle : – principe ; – justification ; – limites.

Réduction de modèles

1.I. Introduction

Les systèmes linéaires continus invariants sont souvent représentés par des fonctions de transfert complexes dont chaque terme présente des pôles différents.

Nous allons voir qu'il est parfois possible de simplifier un modèle (une fonction de transfert) afin d'obtenir une approximation fiable simplement de la réponse du système associé par diminution de l'ordre.

Cette simplification doit être abordée dans deux contextes différents :

- Réponse temporelle d'un système à un échelon
- Réponses harmoniques des systèmes

La simplification du modèle d'un système permettant d'obtenir une approximation de sa réponse à un échelon ne sera pas la même que celle conduisant à l'obtention de ses caractéristiques harmoniques.

1.I.1 Réduction de modèles - Pôles dominants et réponse temporelle

1.I.1.a Principe

Soit un système :

- Causale (degré du numérateur inférieur au degré du dénominateur)
- Stable (pas de pôles nuls ou positifs ie $\alpha < 0$)
- De fonction de transfert générale :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{\prod(1+T_i p) \prod\left(1 + \frac{2z_i}{\omega_{0_i}} p + \frac{p^2}{{\omega_{0_i}}^2}\right)}{\prod(1+T_i p) \prod\left(1 + \frac{2z_i}{\omega_{0_i}} p + \frac{p^2}{{\omega_{0_i}}^2}\right)}$$

Nous avons vu que la réponse à un tel système à un échelon est une somme d'exponentielles décroissantes ou de produits d'exponentielles décroissantes multipliées par des fonctions sinusoïdales.

$$s(t) = \sum K_i \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t} + \sum K_j e^{a_j t} \sin(b_j t)$$

Avec p_i les pôles réels à partie réelle strictement négative et a_j les parties réelles strictement négatives des pôles complexes conjugués.

Pour les systèmes stables, les exponentielles décroissantes le sont d'autant plus que le coefficient p_i ou a_j devant le temps t est grand en valeur absolue. Autrement dit, plus le pôle s'éloigne de l'axe des ordonnées (axe des imaginaires) dans la partie gauche (parties réelles négatives), plus l'exponentielle est décroissante. Les effets temporels de ces pôles sont donc très vite négligeables devant des pôles plus près de l'axe des imaginaires. On définit donc comme **pôles dominants** les pôles les plus près de l'axe des ordonnées.

Plus les pôles de la fonction de transfert seront éloignés des pôles dominants, plus ils pourront être négligés par rapport aux pôles dominants, ce qui permettra de diminuer l'ordre de la fonction de transfert en négligeant ceux-ci. On appelle cela la **réduction de modèle**.

On ne simplifiera à l'aide des pôles dominants **que le dénominateur** des fonctions de transfert.

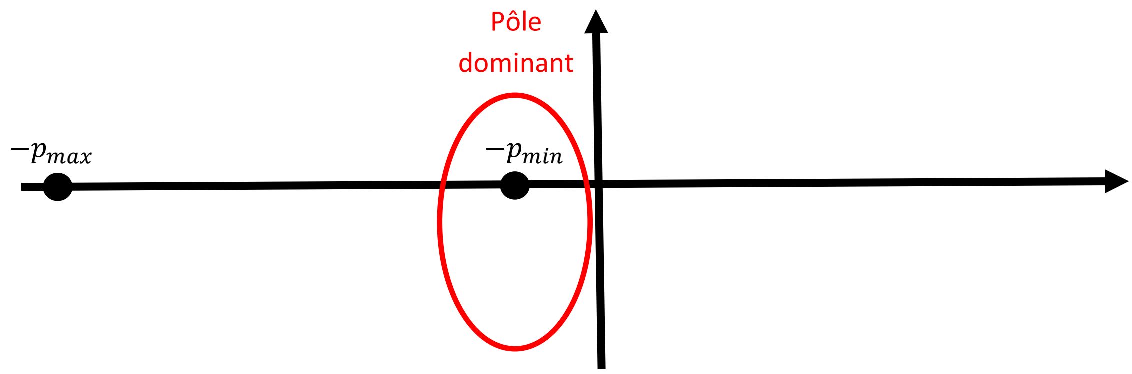
Dans les systèmes automatiques mêlant équations électriques et mécaniques, les constantes de temps sont souvent très éloignées ($\tau_{elec} \ll \tau_{méca}$), il sera alors simple d'estimer les performances d'un système en réduisant son ordre.

1.I.1.b Exemple

Soit le système de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{p_{min}}\right)\left(1 + \frac{p}{p_{max}}\right)}$$

Les deux pôles de H sont $-p_{min}$ et $-p_{max}$, $-p_{max}$ étant celui qui a la partie réelle la plus grande en valeur absolue. $-p_{min}$ est donc le pôle dominant.



Les pôles étant relativement éloignés, on propose de simplifier la fonction de transfert obtenue pour étudier la réponse temporelle de ce système à un échelon E_0 :

$$H'(p) \approx \frac{K}{1 + \frac{p}{p_{min}}}$$

La réponse temporelle à un échelon E_0 du système de fonction de transfert $H'(p)$ est :

$$s'(t) = KE_0(1 - e^{-p_{min}t})$$

Si l'on souhaite la réponse du système de fonction de transfert $H(p)$, on a :

$$S(p) = \frac{KE_0}{p\left(1 + \frac{p}{p_{min}}\right)\left(1 + \frac{p}{p_{max}}\right)} = \frac{A}{1 + \frac{p}{p_{min}}} + \frac{B}{1 + \frac{p}{p_{max}}} + \frac{C}{p}$$

$$S(p)=\frac{Ap\left(1+\frac{p}{p_{max}}\right)+Bp\left(1+\frac{p}{p_{min}}\right)+C\left(1+\frac{p}{p_{max}}\right)\left(1+\frac{p}{p_{min}}\right)}{p\left(1+\frac{p}{p_{min}}\right)\left(1+\frac{p}{p_{max}}\right)}$$

$$=\frac{Ap+A\frac{p^2}{p_{max}}+Bp+B\frac{p^2}{p_{min}}+C\left(1+\frac{p}{p_{min}}+\frac{p}{p_{max}}+\frac{p^2}{p_{min}p_{max}}\right)}{p\left(1+\frac{p}{p_{min}}\right)\left(1+\frac{p}{p_{max}}\right)}$$

$$S(p)=\frac{C+\left(A+B+\frac{C}{p_{min}}+\frac{C}{p_{max}}\right)p+\left(\frac{A}{p_{max}}+\frac{B}{p_{min}}+\frac{C}{p_{min}p_{max}}\right)p^2}{p\left(1+\frac{p}{p_{min}}\right)\left(1+\frac{p}{p_{max}}\right)}$$

$$S(p)=\frac{C+\left(\frac{(A+B)p_{min}p_{max}+C(p_{min}+p_{max})}{p_{min}p_{max}}\right)p+p^2\frac{Ap_{min}+Bp_{max}+C}{p_{min}p_{max}}}{p\left(1+\frac{p}{p_{min}}\right)\left(1+\frac{p}{p_{max}}\right)}$$

$$\begin{cases}C=KE_0\\ \frac{(A+B)p_{min}p_{max}+C(p_{min}+p_{max})}{p_{min}p_{max}}=0\\ \frac{Ap_{min}+Bp_{max}+C}{p_{min}p_{max}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=KE_0\\ (A+B)p_{min}p_{max}+C(p_{min}+p_{max})=0\\ Ap_{min}+Bp_{max}+C=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C=KE_0\\ \left(-\frac{Bp_{max}+C}{p_{min}}+B\right)p_{min}p_{max}+C(p_{min}+p_{max})=0\\ A=-\frac{Bp_{max}+C}{p_{min}}\end{cases}$$

$$\left(-\frac{Bp_{max}+C}{p_{min}}+B\right)p_{min}p_{max}+C(p_{min}+p_{max})=0$$

$$\left(\frac{-Bp_{max}-C+Bp_{min}}{p_{min}}\right)p_{min}p_{max}+C(p_{min}+p_{max})=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{B(p_{min}-p_{max})-C}{p_{min}}+C\frac{p_{min}+p_{max}}{p_{min}p_{max}}=0$$

$$\Leftrightarrow B(p_{min}-p_{max})-C+C\frac{p_{min}+p_{max}}{p_{max}}=0$$

$$\Leftrightarrow B(p_{min}-p_{max})+C\left(\frac{p_{min}+p_{max}}{p_{max}}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow B(p_{min}-p_{max})+C\frac{p_{min}}{p_{max}}=0$$

$$\Leftrightarrow B = -C\frac{p_{min}}{p_{max}(p_{min} - p_{max})}$$

Soit :

$$A = -\frac{Bp_{max} + C}{p_{min}} = -\frac{-C\frac{p_{min}}{p_{max}(p_{min} - p_{max})}p_{max} + C}{p_{min}} = C\left(\frac{p_{min}}{(p_{min} - p_{max})p_{min}} - \frac{1}{p_{min}}\right)$$
$$= C\frac{p_{max}}{(p_{min} - p_{max})p_{min}}$$

On a finalement :

$$S(p) = KE_0\left[\frac{\frac{p_{max}}{(p_{min} - p_{max})p_{min}}}{1 + \frac{p}{p_{min}}} + \frac{-\frac{p_{min}}{p_{max}(p_{min} - p_{max})}}{1 + \frac{p}{p_{max}}} + \frac{1}{p}\right]$$

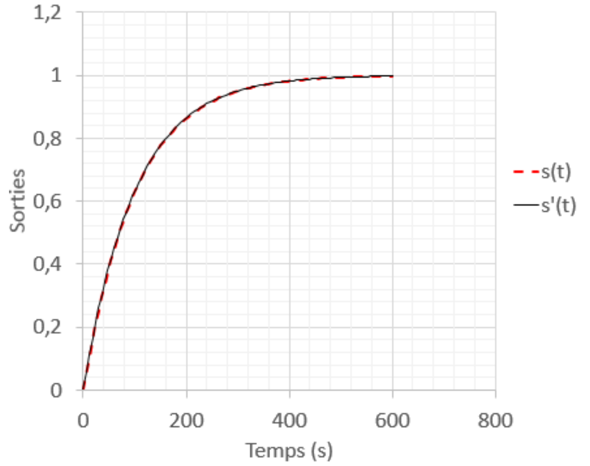
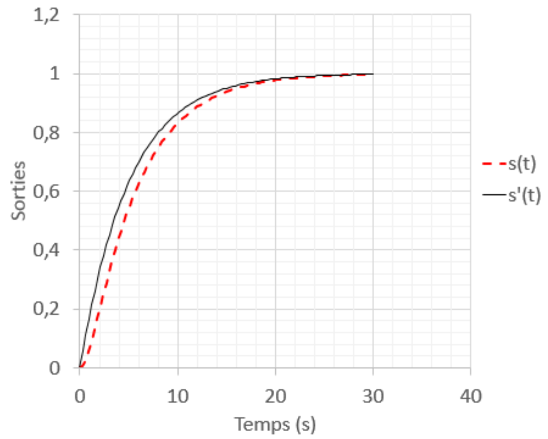
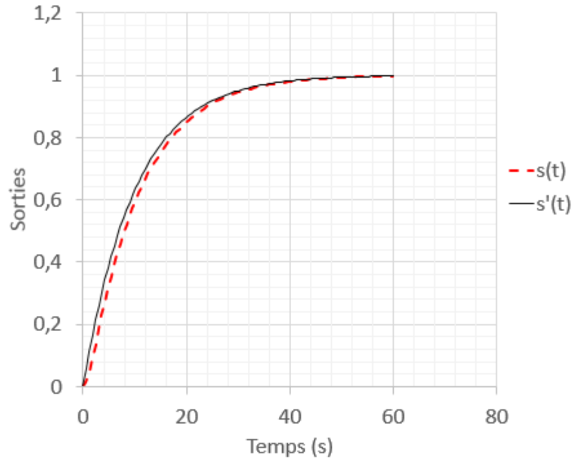
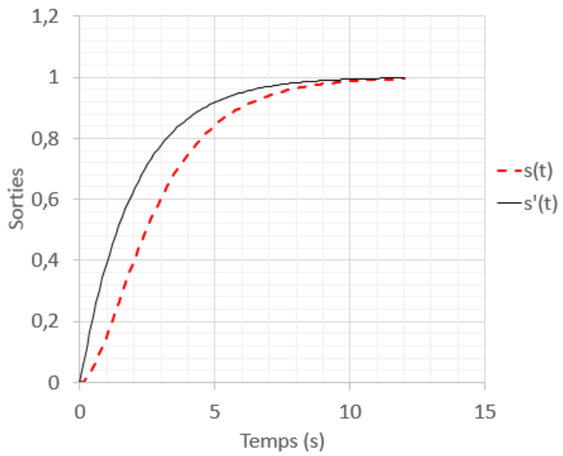
$$S(p) = KE_0\left[\frac{\frac{p_{max}}{p_{min} - p_{max}}}{p + p_{min}} - \frac{\frac{p_{min}}{p_{min} - p_{max}}}{p + p_{max}} + \frac{1}{p}\right]$$

$$s(t) = KE_0\left[1 + \frac{p_{max}}{p_{min} - p_{max}}e^{-p_{min}t} + \frac{p_{min}}{p_{max} - p_{min}}e^{-p_{max}t}\right] = [KE_0 + s_{min}(t) + s_{max}(t)]$$

$$s_{min}(t) = KE_0\frac{p_{max}}{p_{min} - p_{max}}e^{-p_{min}t}$$

$$s_{max}(t) = KE_0\frac{p_{min}}{p_{max} - p_{min}}e^{-p_{max}t}$$

On propose ci-dessous une comparaison des courbes de réponse réelle et du modèle simplifié pour différents couples de valeurs de p_{min} et p_{max} avec $KE_0 = 1$:

$(1,100)$	$(1,5)$
	
$(1,10)$	$(1,2)$
	

Plus l'écart entre les deux pôles est grand, plus l'approximation est bonne. On voit bien qu'à partir d'un facteur 10 entre les deux pôles réels, l'approximation est quasiment confondue à la courbe de réponse réelle.

1.I.1.c Applications

1.I.1.c.i Application 1

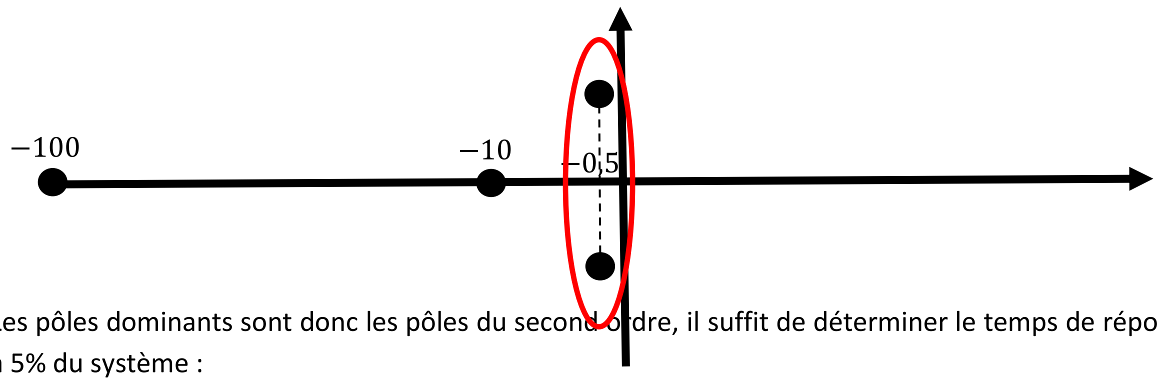
Soit le système suivant :

$$H(p)=\frac{1}{(1+0{,}1p)(1+0{,}01p)(1+p+p^2)}$$

Question : $tr_{5\%}$?

Pour les premiers ordres, les pôles sont : $p_1=-10 \quad ; \quad p_2=-100$

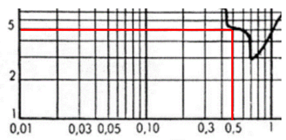
Pour le second ordre : $\omega_0=1 \quad ; \quad z=0{,}5 \quad ; \quad Re(p_3)=-z\omega_0=-0{,}5$



Les pôles dominants sont donc les pôles du second ordre, il suffit de déterminer le temps de réponse à 5% du système :

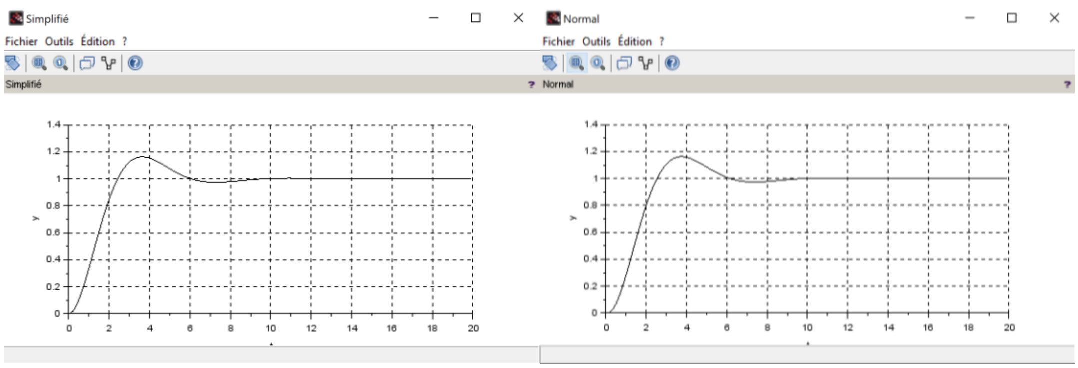
$$H(p)\underset{tr_{5\%}}{\approx}\frac{1}{(1+p+p^2)}$$

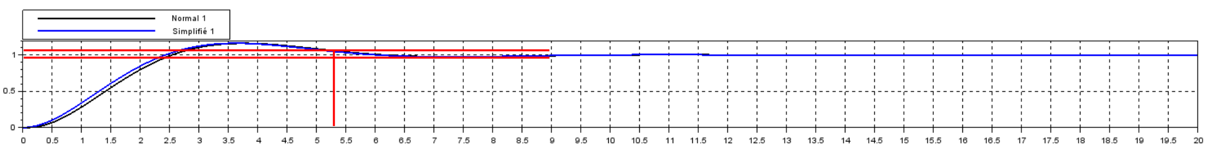
A l'aide de l'abaque des second ordres :



$$tr_{5\%}\approx\frac{5}{\omega_0}=5\,s$$

Voyez ci-dessous la comparaison des deux réponses, système normal et système simplifié…





1.I.1.c.ii Application 2

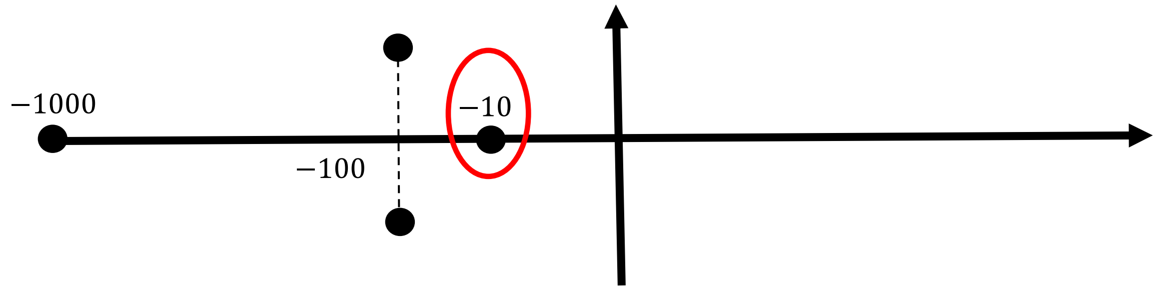
Soit le système suivant :

$$H(p) = \frac{1}{(1+0{,}1p)(1+0{,}001p)(1+0{,}02p+0{,}0001p^2)}$$

Question : $tr_{5\%}$?

Pour les premiers ordres, les pôles sont : $p_1 = -10 \quad ; \quad p_2 = -1000$

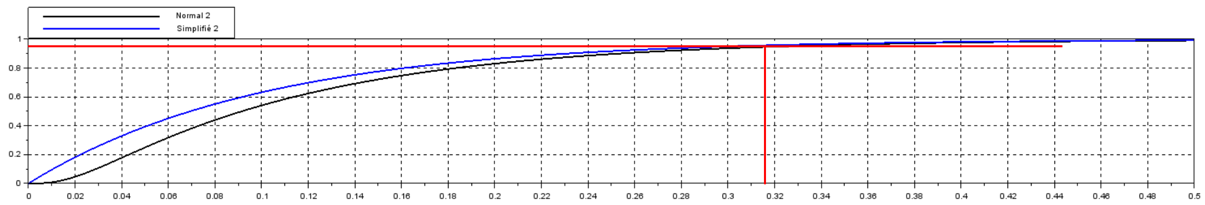
Pour le second ordre : $\omega_0 = 100 \quad ; \quad z = 1 \quad ; \quad Re(p_3) = -z\omega_0 = -100$



$$H(p) \underset{t_{r5\%}}{\approx} \frac{1}{1+0{,}1p}$$

$$t_{r5\%} \approx 3\tau_1 = 0{,}3\ s$$

Comparaison des réponses normale et simplifiée :



1.I.1.d Conclusion

On pourra donc généralement simplifier un modèle de système en fonction de ses pôles en prenant, selon le cas :

- Le pôle réel dominant et on proposera un système du 1° ordre
- Les pôles complexes conjugués et on proposera un système du second ordre

On saura alors rapidement donner une estimation de ses performances de rapidité.

1.I.2 Réduction de modèles – Pulsation et réponse fréquentielle

Soit une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{\prod(1+T_i p)\prod\left(1+\frac{2z_i}{\omega_{0i}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0i}}^2}\right)}{\prod(1+T_i p)\prod\left(1+\frac{2z_i}{\omega_{0i}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0i}}^2}\right)}$$

Telle que les polynômes de degré 2 sont à pôles complexes (ie $z < 1$).

Le gain d'une telle fonction de transfert s'écrit :

$$G = 20\log\left(\frac{K}{p^\alpha} \frac{\prod|1+T_i p|\prod\left|1+\frac{2z_i}{\omega_{0i}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0i}}^2}\right|}{\prod|1+T_i p|\prod\left|1+\frac{2z_i}{\omega_{0i}}p+\frac{p^2}{{\omega_{0i}}^2}\right|}\right)$$

$$G = 20\log K + \sum 20\log|1+T_i j\omega| + \sum 20\log\left|1+\frac{2z_i}{\omega_{0i}}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{{\omega_{0i}}^2}\right| - \sum 20\log|1+T_i j\omega| - \sum 20\log\left|1+\frac{2z_i}{\omega_{0i}}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{{\omega_{0i}}^2}\right| - \alpha 20\log|j\omega|$$

$$G = G_0 + G_1^n + G_2^n - G_1^d - G_2^d - G_\alpha$$

Avec n pour numérateur, d pour dénominateur, 1 pour premier ordre et 2 pour second ordre, $G_0 = 20\log K$ et $G_\alpha = \alpha 20\log|j\omega|$.

De manière analogue, on montre que la phase d'une telle fonction s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \varphi_1^n + \varphi_2^n - \varphi_1^d - \varphi_2^d - \varphi_\alpha \quad ; \quad \varphi_\alpha = \alpha\frac{\pi}{2}$$

1.I.2.a Non prise en compte d'un terme

Attention, la discussion ici ne porte que sur les termes $G_1^n, G_2^n, G_1^d, G_2^d$ et $\varphi_1^n, \varphi_2^n, \varphi_1^d, \varphi_2^d$. En effet, G_0 n'est pas nul et doit être pris en compte, G_α et φ_α ne sont pas nuls aux basses fréquences.

1.I.2.a.i Principe

Chacun des gains $G_1^n + G_2^n - G_1^d - G_2^d$ et chacune des phases $\varphi_1^n + \varphi_2^n - \varphi_1^d - \varphi_2^d$ est très proche de 0 pour des pulsations assez basses, puis s'en éloigne. Il est donc possible, pour certaines fréquences « assez basses », de ne pas les prendre en compte.

Les fonctions du premier ordre ont des pulsations de coupure (cassures) $\omega_i = \frac{1}{T_i}$. Les gains et phases sont proches de 0 avant ces pulsations.

Les fonctions de transfert du second ordre, ayant un coefficient $z < 1$, ne présentent qu'une seule cassure en ω_0. Les gains et phases sont proches de 0 avant ces pulsations.

Supposons que l'on s'intéresse à un système pour des pulsations inférieures à une pulsation ω_e. Il sera alors possible, en dessous de ces pulsations et en étudiant le comportement harmonique du système, de ne pas prendre en compte les fonctions de transfert présentant une cassure après ω_e.

1.I.2.a.ii Exemple

Soit la fonction de transfert :

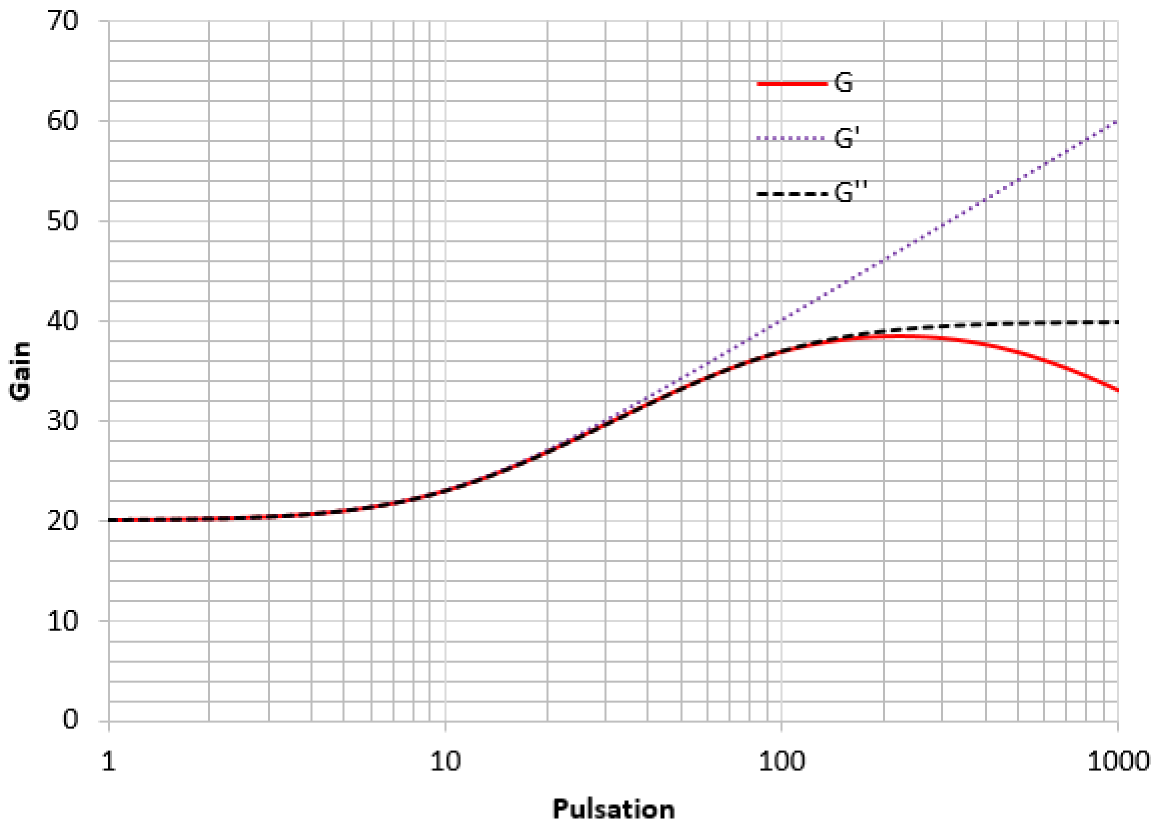
$$H(p) = K\frac{\left(1+\frac{1}{10}p\right)}{\left(1+\frac{1}{100}p\right)\left(1+\frac{1}{1000}p\right)}$$

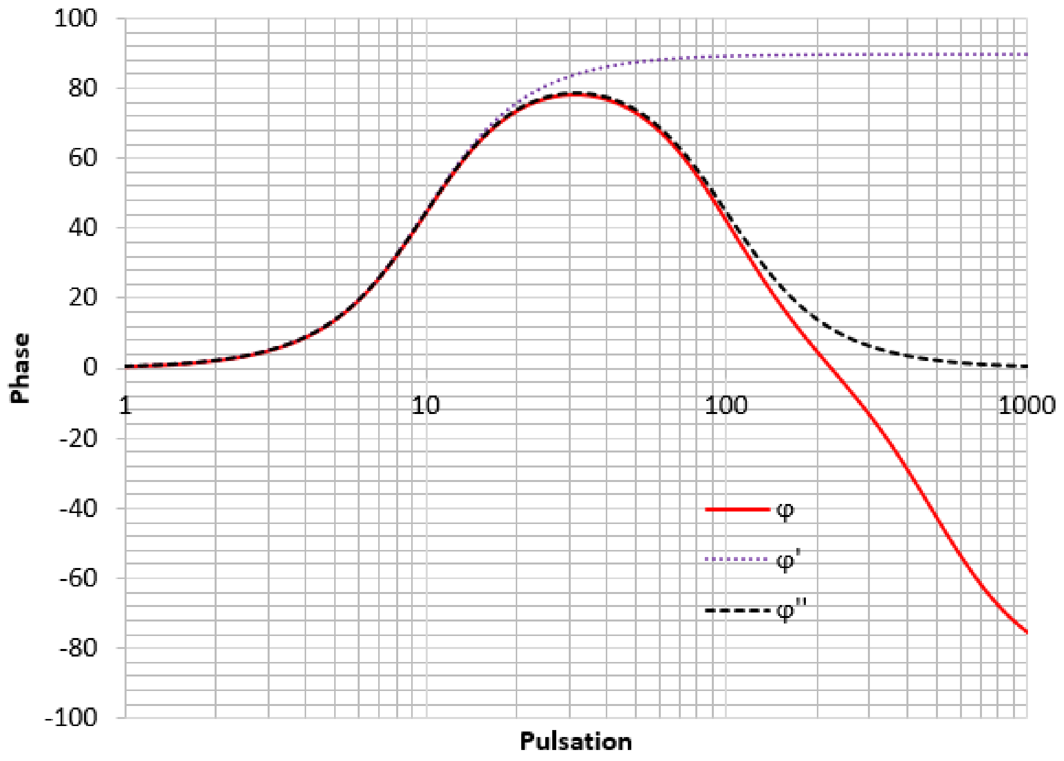
Supposons une pulsation ω_e jusqu'à laquelle on s'intéresse au comportement du système (exemple de bande passante de 0 à ω_e.

On peut proposer des simplifications de la fonction de transfert selon la zone d'étude $[0, \omega_e]$

$\omega_e = 50\ rd/s$	$\omega_e = 500\ rd/s$
$H'(p) \underset{\omega<\omega_e}{\approx} K\left(1+\frac{1}{10}p\right)$	$H''(p) \underset{\omega<\omega_e}{\approx} K\frac{\left(1+\frac{1}{10}p\right)}{\left(1+\frac{1}{100}p\right)}$

On a tracé ci-dessous les diagrammes de gain et de phase de $H(p)$, $H'(p)$ et $H''(p)$:





On voit bien qu'il est possible de négliger les gains des fonctions de transfert dont les pulsations sont supérieures à ω_e. Nous ne chercherons toutefois pas ici à estimer l'ordre de grandeur de la distance entre ω_e et les pulsations de coupures des fonctions négligées permettant de faire ou non ces approximations, les pulsations étant généralement assez éloignées.

1.I.2.b Applications

1.I.2.b.i Bande passante

Soit le système suivant :

$$H(p) = \frac{10}{(1 + 0{,}1p)(1 + 0{,}001p)(1 + 0{,}02p + 0{,}0001p^2)}$$

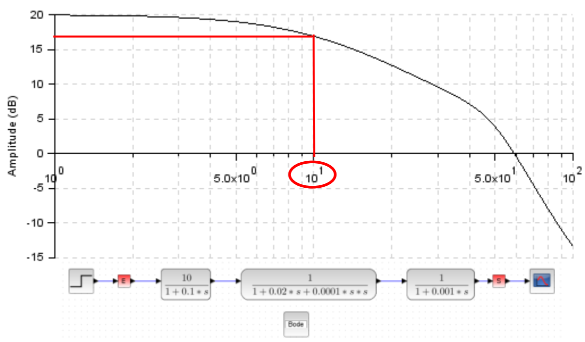
Question : Est-ce que sa bande passante respecte le critère : $BP = [0,5]$

Pour répondre, étudions les pulsations importances :

- Pour les 1° ordres : $\omega_{c_1} = 10, \omega_{c_2} = 1000$
- Pour le second ordre : $\omega_0 = 100$

On a :

$$H(p) \underset{\omega<10}{\approx} \frac{10}{(1 + 0{,}1p)}$$



Comme c'est un premier ordre, on sait que la pulsation de coupure à -3db est de $\omega_c = \omega_{c_1} = 10$, donc le critère de bande passante $BP = [0,5]$ est respecté puisqu'elle vaut environ $BP = [0,10]$.

1.I.2.b.ii Simplification numérateur – dénominateur

Supposons maintenant que deux fonctions de transfert, l'une au numérateur, l'autre au dénominateur, soient très proches, par exemple :

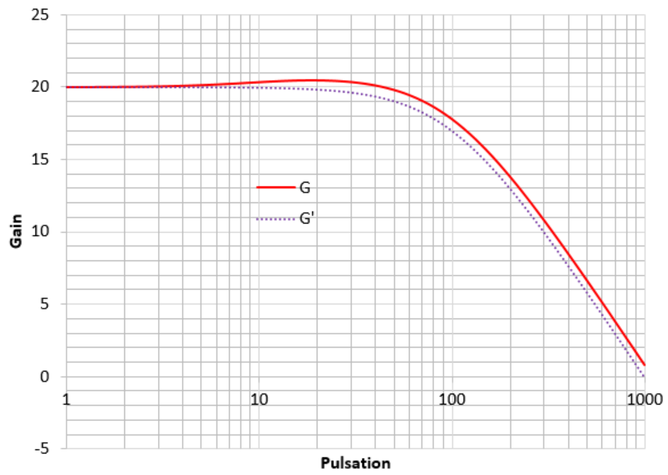
$$H(p) = K\frac{\left(1+\frac{1}{10}p\right)}{\left(1+\frac{1}{11}p\right)\left(1+\frac{1}{100}p\right)}$$

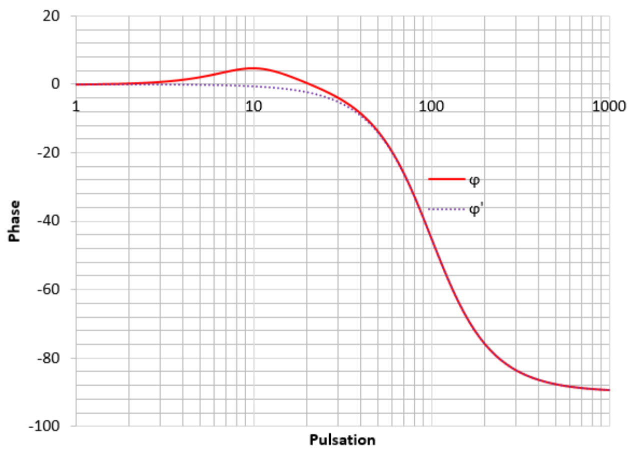
Il est possible de simplifier la fonction de transfert en supprimant ces deux fonctions de transfert car on va ajouter et retrancher au gain et à la phase des valeurs quasi égales.

On pourra se permettre d'écrire, pour l'étude harmonique du système :

$$H'(p) \underset{\forall\omega}{\approx} \frac{K}{\left(1+\frac{1}{100}p\right)}$$

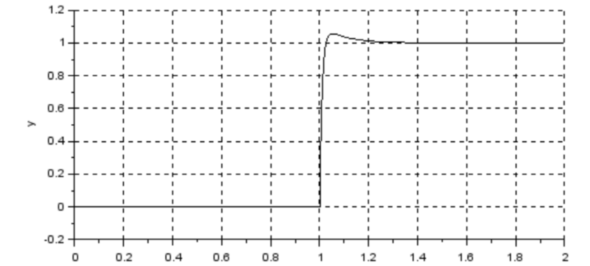
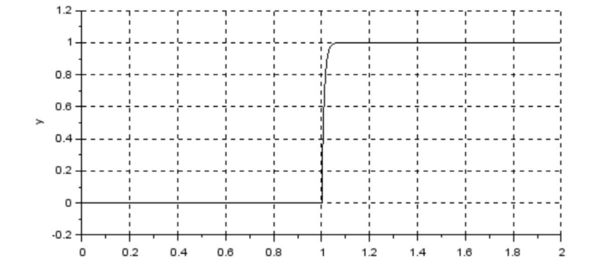
On a tracé ci-dessous les diagrammes de Bode en gain et phase de la fonction non simplifié et de la fonction simplifiée.





On peut remarquer que l'approximation est relativement correcte.

Concernant la réponse temporelle, cela a un petit effet. En effet, voici les courbes de réponse à un échelon des deux FT suivantes :

Normal	Simplifié
$H(p)=\dfrac{\left(1+\frac{1}{10}p\right)}{\left(1+\frac{1}{11}p\right)\left(1+\frac{1}{100}p\right)}$	$H(p)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{100}p}$
	

Remarque : La différence entre courbe réelle et approximée est liée à la fonction de transfert $\frac{\left(1+\frac{1}{10}p\right)}{\left(1+\frac{1}{11}p\right)}$ qui se comporte comme un correcteur à avance de phase :