DNS

Sujet

Synthèse d'ouverture

I. Optique géométrique: étude d'une lunette astronomique

Une lunette astronomique est schématisée par deux lentilles minces convergentes, l'une notée L_1 et appelée objectif, de distance focale $f'_1=50\,cm$ et l'autre, notée L_2 et appelée oculaire, de distance focale $f'_2=2\,cm$. Le plan focal image de L_1 est confondu avec le plan focal objet de L_2 . Le centre optique de L_1 est noté O_1 et celui de L_2 est noté O_2 . Le point focal image de L_1 est noté F'_1 et le point focal objet de L_2 est noté F_2 . La lunette est utilisée dans les conditions de Gauss.

A. Grossissement

1. Sur un schéma représenter le trajet du rayon émergent associé à un rayon incident parallèle à l'axe optique.

2. Sur un autre schéma, représenter le trajet du rayon émergent associé à un rayon incident faisant un angle α avec l'axe optique. On notera B' le point d'intersection de ce rayon avec le plan focal image de L_1 et α' l'angle que fait le rayon émergent de L_2 avec l'axe optique.

3. Déterminer le grossissement (angulaire) $G=\alpha'/\alpha$ en fonction de f'_1 et f'_2 . Calculer la valeur numérique de G .

B. Vignettage

Les rayons des lentilles L_1 et L_2 sont respectivement R_1 et R_2 avec $R_2=R_1/4$.

4. On considère le faisceau issu du point A à l'infini sur l'axe optique et le faisceau issu d'un point B à l'infini, hors de l'axe, émettant un faisceau faisant un angle α avec l'axe optique. Sur un schéma, tracer la marche des rayons extrêmes (passant par les bords de L_1) de faisceaux issus de A et de B (utiliser deux couleurs différentes).

5. Montrer que si l'on suppose que toutes les sources ponctuelles à l'infini émettent avec une même intensité lumineuse, l'image obtenue donnée par la lentille L_2 est plus sombre à la périphérie.

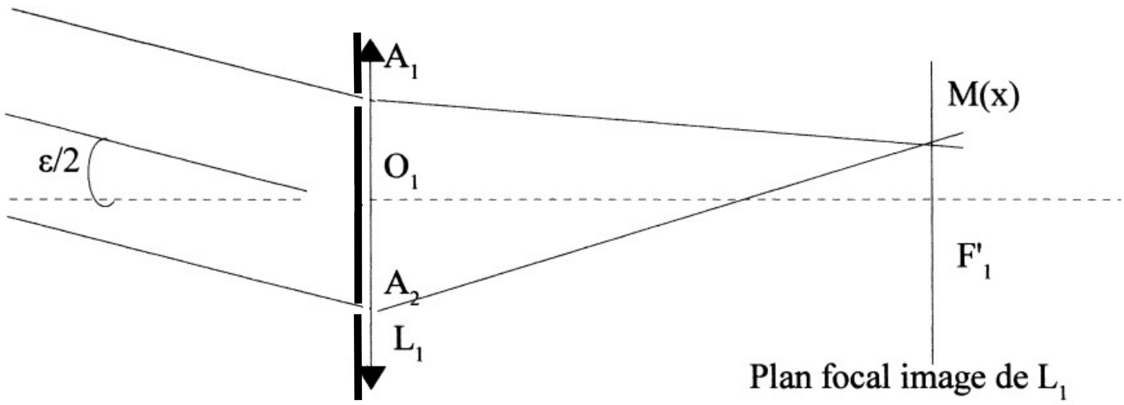
(phénomène de vignettage).

6. Calculer la valeur α_1 de α telle que tous les rayons d'angle $\alpha<\alpha_1$ qui traversent L_1 vont traverser aussi L_2 . Quelle condition doit vérifier R_2 pour que cet angle existe. Montrez que cette valeur était prévisible.

II. Optique physique: interférences avec des fentes de Young

On utilise la lunette précédente qu'on dirige vers un groupe de deux étoiles très voisines S_1 et S_2 que l'on suppose ponctuelles. Elles émettent une même lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda=0{,}6\,\mu m$ d'intensités respectives $I_{S1}=I_1$ et $I_{S2}=I_2$. La face d'entrée de l'objectif est masquée par un écran, représenté sur la figure, percé de deux fines fentes de Young notées A_1 et A_2 , parallèles et perpendiculaires au plan de cette figure, plan qui contient les sources S_1 , S_2 et l'axe optique. On peut faire varier la distance, notée a , entre ces deux fentes fines. Les fentes sont supposées de très grande longueur par rapport à leur largeur.

Toute l'étude qui suit se fait dans le plan focal image de L_1 de sorte que la présence de l'oculaire n'a pas d'importance dans cette partie.



On dispose la lunette de sorte que S_1 et S_2 soient symétriques par rapport à son axe optique. Celui-ci fait donc les angles $\epsilon/2$ avec la direction de S_1 et $-\epsilon/2$ avec celle de S_2 , ϵ étant la distance angulaire entre S_1 et S_2 . Le dispositif est représenté sur la figure. Seuls trois rayons issus de S_1 sont représentés sur cette figure.

7. Les deux étoiles constituent-elles des sources cohérentes? Que peut-on en déduire en ce qui concerne les éclairements qu'elles produisent dans le plan focal image de L_1 ?

A. Interférences avec une seule étoile

On cherche l'aspect du plan focal image de L_1 si S_1 était seule.

8. Exprimer la différence de marche, au point M d'abscisse x , entre les deux ondes issues de S_1 , passant par A_1 et A_2 , en fonction de a , ϵ , x et f'_1 , distance focale de L_1 . On suppose $f'_1 \gg |x|$.

9. En déduire l'éclairement au point M en fonction de a , ϵ , x , f'_1 , λ et I_1 .

10. Déterminer l'interfrange de la figure d'interférences ainsi produite en fonction de λ , f'_1 et a . Faire l'application numérique pour $a=6\,mm$ et $f'_1=50\,cm$.

11. Reprendre les questions précédentes pour S_2 supposée seule.

B. Interférences avec une étoile double

12. Déterminer l'éclairement total au point M résultant des deux composantes de l'étoile double.

13. Observe-t-on des franges d'interférences et si oui, quel est l'interfrange? Justifier la réponse.

On suppose, désormais, que les étoiles S_1 et S_2 émettent un rayonnement de même intensité.

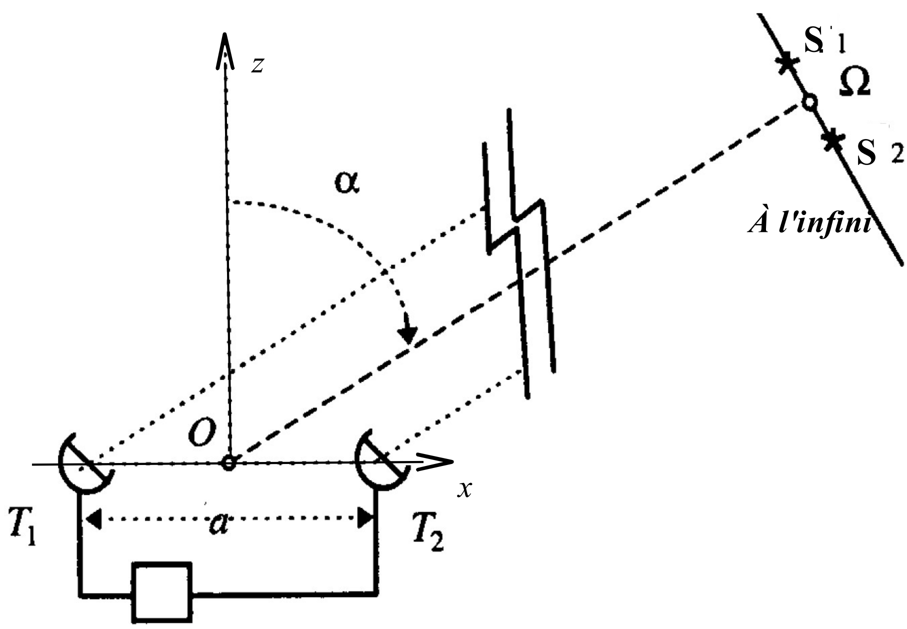
14. En mettant l'éclairement sous forme d'une somme d'un terme constant et d'un produit de deux fonctions sinusoïdales, déterminer les valeurs maximales et minimales de l'éclairement selon les valeurs de x .

15. En déduire le contraste du système de franges et montrer que les franges disparaissent pour certaines valeurs de a .

16. Application numérique : la plus petite distance entre A_1 et A_2 pour laquelle les franges disparaissent est $a_m=71\,mm$. Calculer la distance angulaire entre les deux composantes de l'étoile double.

III. Synthèse d'ouverture

Au lieu d'utiliser une lunette dont l'objectif est masqué par un écran percé de deux fentes, on couple deux télescopes identiques T_1 et T_2 , de diamètre négligeable par rapport à la ligne de base $a=T_1T_2$ (figure). Les télescopes sont mobiles sur des rails.



La lumière est reçue par un détecteur ponctuel placé au foyer image de chaque télescope.

La position moyenne de l'étoile double est repérée par l'angle α que fait, avec la normale à $T_1 T_2$, notée Oz, la direction $O\Omega$, O étant le milieu de $T_1 T_2$. L'écart angulaire entre les deux étoiles S_1 et S_2 est toujours noté ϵ .Le rayonnement est quasi-monochromatique et centré sur la longueur d'onde $\lambda=0{,}6\ \mu m$ et les étoiles S_1 et S_2 émettent un rayonnement de même intensité : $I_{S1}=I_{S2}=I_S$.

Un dispositif annexe permet de faire interférer les ondes optiques issues des deux foyers images en introduisant une différence de marche supplémentaire L_S déterminée.

17.L'axe Ox est horizontal. On le suppose par exemple orienté vers l'ouest. Expliquer sans calcul pourquoi l'angle α n'est pas constant au cours du temps. Les télescopes sont orientables pour que la lumière soit toujours recueillie au foyer.

18.Exprimer, en fonction de λ , α , L_S , a et ϵ , la différence de phase ϕ_1 associée à S_1 et la différence de phase ϕ_2 associée à S_2 .

19.Montrer que l'éclairement total I s'écrit: $I=4 I_S\left[1+\cos\left(\frac{\pi b \epsilon}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi\frac{\ell+L_S}{\lambda}\right)\right]$, b et ℓ étant des longueurs que l'on déterminera en fonction de a et de α . Quelle est la variable dont dépend I ?

20.Que devient l'expression de $I(\alpha)$ sachant que α reste très faible ? On étudie $I(\alpha)$ en fonction de α . Comment peut-on distinguer une étoile double d'une étoile simple ?

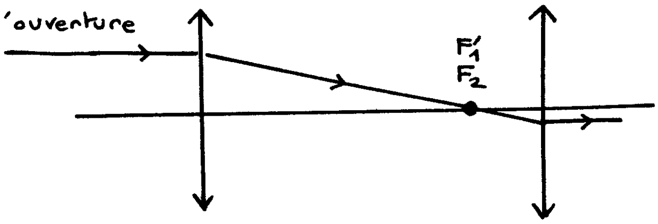
21.Trouver, en milliseconde d'arc, la plus petite distance angulaire que l'on a pu détecter si la valeur maximale de a est $a_{MAX}=6{,}10\,m$. Quel est l'intérêt d'un tel système par rapport à celui décrit dans la partie précédente?

22.On s'arrange généralement pour que $L_S=-\ell$. Quelle en est la raison ?

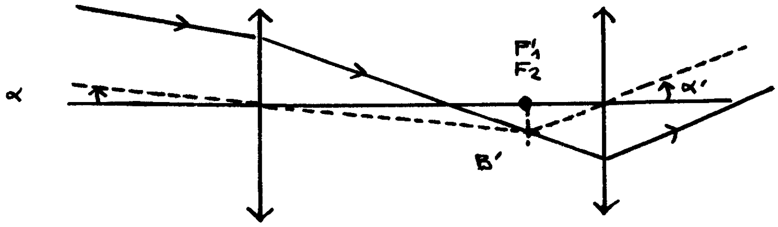
Réponses

Synthèse d'ouverture

1)



2)



(sur cette figure $\alpha < 0$
$\alpha' > 0$)

3) angles "petits" donc : $\alpha = \dfrac{\overline{F_2B'}}{f'_1}$ (<0)

$$\alpha' = -\dfrac{\overline{F_2B'}}{f'_2} \quad (>0)$$

grossissement algébrique :

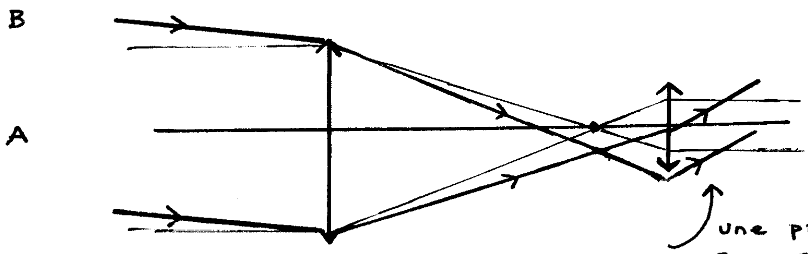
$$G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$$

$$\boxed{G = -\dfrac{f'_1}{f'_2}}$$

A.N. $= -\dfrac{50}{2}$

$$\boxed{G = -25}$$

4)



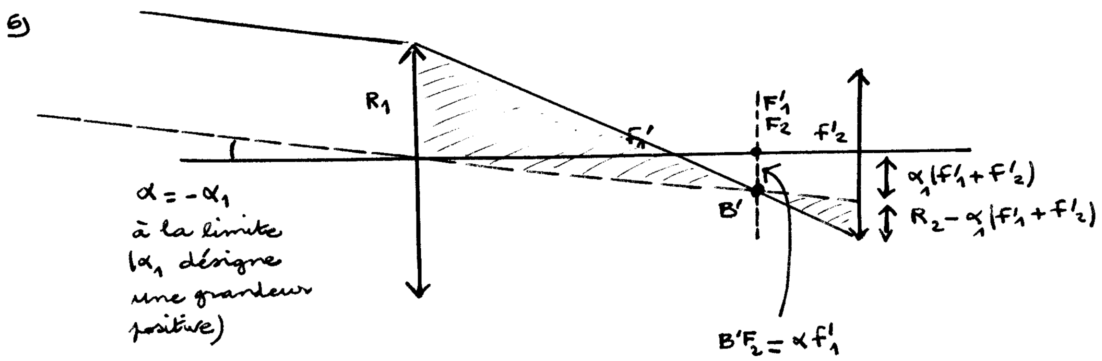
une partie de la lumière sera arrêtée par la monture de l'oculaire

5) Toute la lumière issue de A sur l'axe traverse l'oculaire. <u>Une partie de la lumière issue de B, hors de l'axe, ne peut traverser l'oculaire</u>. Le point B apparaîtra plus sombre.

L' image sera plus sombre à la périphérie

---

5)



A la limite, en considérant les triangles semblables hachurés :

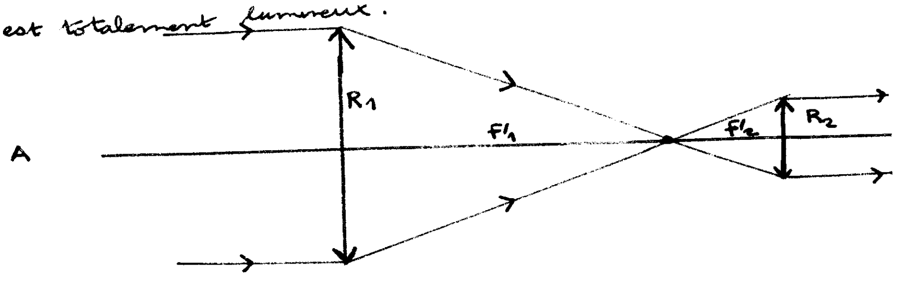
$$\frac{R_2-\alpha_1(f'_1+f'_2)}{f'_2}=\frac{R_1}{f'_1}$$

$$\boxed{\alpha_1=\frac{R_2 f'_1-R_1 f'_2}{f'_1\,(f'_1+f'_2)}}$$

ce qui suppose – $\alpha_1>0$ – .

$$\boxed{R_2>R_1\frac{f'_2}{f'_1}}$$

Dans le cas limite $R_2=R_1\dfrac{f'_2}{f'_1}$ seul le point A sur l'axe est totalement lumineux.



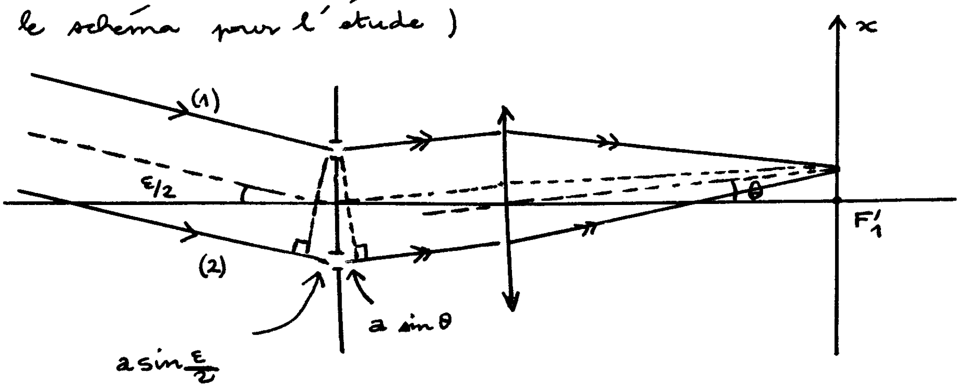
---

7) Les deux étoiles sont indépendantes. Ce sont des sources <u>incohérentes</u>. L'éclairement est donc la somme des éclairements dus à chaque étoile

$$\boxed{I_{(M)} = I_1(M) + I_2(M)}$$

---

8) Dessin (on écarte les fentes de Young de la lentille sur le schéma pour l'étude)



Conventions : je suppose ε et θ positifs sur cette figure...

$$\delta_{2/1} = \cancel{n}_{1}\, a \left(\sin\frac{\varepsilon}{2} + \sin\theta\right)$$

avec $|x| \ll f'_1$
donc $|\theta| \ll 1$
$\sin\theta = \theta = \dfrac{x}{f'_1}$

avec puisque le texte indique que les deux étoiles sont très voisines $\varepsilon \ll 1$
$\sin\dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\boxed{\delta_{2/1} = a\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{x}{f'_1}\right)}$$

---

9) $$I_{1(M)} = 2I_1\left(1 + \cos 2\pi\frac{\delta}{\lambda_{vide}}\right)$$

$$\boxed{I_{1(M)} = 2I_1\left(1 + \cos\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{x}{f'_1}\right)\right)}$$

---

10) La période spatiale de $I(x)$ correspond à l'interfrange.

$$\boxed{i = \frac{\lambda f_1'}{a}}$$

A.N.

$$= \frac{0{,}6\ 10^{-6} \times 0{,}5}{6\ 10^{-3}}$$

$$= 50\ 10^{-6}\ \text{m}$$

$$\boxed{i = 50\ \mu\text{m}}$$

---

11) Pour S_2, on change ε en $-\varepsilon$

$$\delta = a\left(-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{x}{f'_1}\right)$$

$$\boxed{I_{2(M)} = 2 I_2 \left(1 + \cos \frac{2\pi a}{\lambda}\left(-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{x}{f'_1}\right)\right)}$$

L'interfrange est le même.

---

12) On somme les éclairements :

$$I = I_1(M) + I_2(M)$$

---

13) $I_1(M)$ et $I_2(M)$ ont une période i.
La période de leur somme est donc la même et l'on observera des franges rectilignes (cf $I = I(x)$) sauf si I est uniforme

---

14)

$$I = 2I_S\left(1 + \cos\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{x}{f'_1}\right)\right) + 2I_S\left(1 + \cos\frac{2\pi a}{\lambda}\left(-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{x}{f'_1}\right)\right)$$

$$= 4I_S + 2I_S\left(\cos\frac{2\pi a}{\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{x}{f'_1}\right) + \cos\frac{2\pi a}{\lambda}\left(-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{x}{f'_1}\right)\right)$$

$$\boxed{I_{(x)} = 4I_S\left(1 + \cos\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\ \cos\frac{2\pi a x}{\lambda f'_1}\right)}$$

La valeur maximale de $I(x)$ est :

$$\boxed{I_{max} = 4I_S\left(1 + \left|\cos\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right|\right)}$$

La valeur minimale :

$$\boxed{I_{min} = 4I_S\left(1 - \left|\cos\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right|\right)}$$

---

15) le contraste :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

$$\boxed{C = \left| \cos \frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} \right|}$$

Le contraste s'annule donc pour

$$\cos \frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} = 0$$

$$\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

$$\boxed{a = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{\varepsilon}}$$

---

16) A.N.

$$a_{min} = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\lambda}{2\, a_{min}}}$$

$$= \frac{0{,}6\ 10^{-6}}{2 \times 71\ 10^{-3}}$$

$$\boxed{\varepsilon = 4{,}2\ 10^{-6} \text{ rad}}$$

soit :

$$\frac{4{,}2\ 10^{-6}}{\pi} \times 180 \times 60 \times 60$$

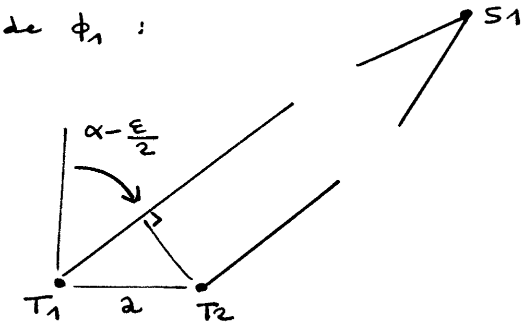
$$\boxed{\varepsilon = 0{,}87 \text{ seconde d'arc}}$$

---

17) les telescopes sont liés à la terre. La terre tourne sur elle-même et donc l'angle α change au cours du temps

---

18) Expression de ϕ_1 :



$$\delta_{1/2} = \text{indice} \times a \sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) + L_s$$

(avec indice = 1) (ajouté)

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{2\pi}{\lambda}\, a \sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{2\pi}{\lambda} L_S\\ \Phi_2 &= \frac{2\pi}{\lambda}\, a \sin\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{2\pi}{\lambda} L_S\end{aligned}}$$

remarque ε étant "petit", au premier ordre en ε

$$\sin\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\alpha \cos\frac{\varepsilon}{2} + \sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\alpha$$
$$= \sin\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\cos\alpha$$
$$\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\cos\alpha$$

---

19)

$$I_{S_1} = 2 I_S \,(1+\cos\phi_1)$$
$$I_{S_2} = 2 I_S \,(1+\cos\phi_2)$$
$$I = I_{S_1} + I_{S_2}$$
$$= 2 I_S \,(2+\cos\phi_1+\cos\phi_2)$$
$$= 4 I_S \left(1+\cos\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\cos\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)$$

remarque

$$\phi_2-\phi_1 = \frac{2\pi a}{\lambda}\left[\sin\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{2\pi a}{\lambda}\, 2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\alpha$$
$$\simeq \frac{2\pi a}{\lambda}\,\varepsilon\cos\alpha$$
$$\phi_2+\phi_1 = \frac{2\pi a}{\lambda}\left[\sin\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] + \frac{4\pi}{\lambda}L_S$$
$$= \frac{2\pi a}{\lambda}\, 2\cos\frac{\varepsilon}{2}\sin\alpha + \frac{4\pi}{\lambda}L_S$$
$$\simeq \frac{2\pi a}{\lambda}\, 2\sin\alpha + \frac{4\pi}{\lambda}L_S$$

$$\boxed{I = 4 I_S \left(1+\cos\frac{\pi a\varepsilon\cos\alpha}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(a\sin\alpha + L_S)\right)}$$

de la forme proposée avec $b = a\cos\alpha$

$\ell = a\sin\alpha$

Les grandeurs a et ε sont fixées.

$\boxed{\alpha \text{ dépend du temps donc } I = I(t)}$

---

20) α est faible donc $\cos\alpha = 1$ et $\sin\alpha = \alpha$ au premier ordre

$$\boxed{I = 4\,I_S\left(1 + \cos\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(a\alpha + L_S)\right)}$$

Le contraste C vaut $\left|\cos\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right|$ alors que pour une étoile simple, il vaut 1.

- Pour une étoile double, en général $C \neq 1$ (les minimums d'interférence ne sont pas nuls). De plus, le contraste dépend de a.

---

21) En supposant que la détermination de ε se ferait en cherchant la valeur minimale de a qui annule le contraste

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2a}$$

le ε le plus petit détectable est donc

$$\boxed{\varepsilon_{\text{détectable}} = \frac{\lambda}{2\,a_{MAX}}}$$

A.N. $$= \frac{0{,}6\ 10^{-6}}{2\times 6{,}1}$$

$$= 4{,}9\ 10^{-8}\ \text{rad}$$

$$\boxed{= 0{,}010 \text{ seconde d'arc}}$$

a est ici plus important, on pourra détecter des étoiles doubles plus proches l'une de l'autre.

---

22) $$L_S = -\ell$$
$$= -a\alpha$$

$$I = 4\,I_S\left(1 + \cos\frac{\pi a \varepsilon}{\lambda}\right)$$

comme si l'intensité détectée I était toujours celle d'une frange brillante. On récupère donc plus de lumière et l'appréciation de la nullité du contraste C(a) quand a varie sera plus précise.
