NORMES SUBORDONNÉES

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés non nuls, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

- On note $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$ l'ensemble formé des applications linéaires continues de E vers F.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E)$ l'ensemble formé des endomorphismes continus de E
- n et p désignent des entiers $\geqslant 2$

Une algèbre $(\mathbb{A},+,\times,\cdot)$ est dite normée s'il existe une norme N sur l'espace vectoriel $(\mathbb{A},+,\cdot)$ qui vérifie en outre deux propriétés :

$$\forall (u,v)\in\mathbb{A}^2,\ N(u\times v)\leqslant N(u)\times N(v)$$

On dit alors que N est une norme d'algèbre.

Partie I: Normes subordonnées

Soit $u\in\mathcal{L}_C(E,F)$, on pose $\||\, u \,\|| = \sup\left\{\dfrac{\|\, u\,(x)\,\|_F}{\|\, x\,\|_E},\ x\in E\setminus\{0_E\}\right\}$

1. Montrer que $\||\, u\,\||$ est bien définie
2. Montrer que $\||\,.\,\||$ est une norme sur $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E,F)$, appelée la norme subordonnée.
3. Montrer que
   (a) $\||\, u\,\|| = \sup\limits_{\|\, x\,\|_E\leqslant 1}\|\, u\,(x)\,\|_F = \sup\limits_{\|\, x\,\|_E=1}\|\, u\,(x)\,\|_F$;
   (b) $\forall x\in E,\ \|\, u\,(x)\,\|_F\leqslant \||\, u\,\||\times\|\, x\,\|_E$;
   (c) $\||\, u\,\|| = \min\left\{k\in\mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x\in E,\ \|\, u\,(x)\,\|_F\leqslant k\,\|\, x\,\|_E\right\}$.
4. (a) Montrer que $(\mathcal{L}_C(E),\||\,.\,\||)$ est une algèbre normée;
   (b) Calculer $\||\, \mathrm{Id_E}\,\||$.

Partie II: Exemples de calcul

5. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\| = \max\limits_{t\in[0,1]}|P(t)|$. Soit $u:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & P(0)\end{array}\right.$ Montrer que u est continue et calculer $\||\, u\,\||$.
6. Soient $E=C\,([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi\in E$ non nulle . On munit E de la norme usuelle $\|.\|_2$. Soit $T_\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$.
   Montrer que T_φ est continue et calculer $\||\, T_\varphi\,\||$.
7. Soient $E=C^0\,([0,1],\mathbb{R})$ et $F=C^1\,([0,1],\mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par
   $$N_1(f)=\|f\|_\infty \text{ et } N_2(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$$
   (a) On définit $T:E\to F$ par : pour toute $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue
   $T(f):[0,1]\to\mathbb{R}$, $T(f)(x)=\displaystyle\int_0^x f\,(t)\ \mathrm{d}t$.
   Montrer que T est une application linéaire continue de (E,N_1) dans (F,N_2)
   (b) Calculer $\||\, T\,\||$

NORMES SUBORDONNÉES

Partie III: Normes matricielles

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour $X \in \mathrm{M_{m,1}}(\mathbb{K})$ avec $m \in \{n,p\}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, on pose

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|, \quad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2} \quad \text{et} \quad \| X \|_\infty = \max_{i \in [\![1,m]\!]} |x_i|$$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle norme de A subordonnée aux normes sur $\mathrm{M_{p,1}}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{M_{n,1}}(\mathbb{K})$ la norme subordonnée de l'application linéaire u de $\mathrm{M_{p,1}}(\mathbb{K})$ vers $\mathrm{M_{n,1}}(\mathbb{K})$ définie par $u(X) = AX$. On la note $|\!|\!| A |\!|\!|$.

8. On munit $\mathrm{M_{p,1}}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{M_{n,1}}(\mathbb{C})$ des normes infinies $\| \,.\, \|_\infty$
   (a) Montrer que $\|AX\|_\infty \leqslant \left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty$ puis que $|\!|\!| A |\!|\!|_\infty \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|$.
   (b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{kj}|$.
   Posons $\forall j \in [\![1,p]\!]\,, a_{kj} = |a_{kj}| e^{i\theta_j}$ et soit $X_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} \\ \vdots \\ e^{-i\theta_p} \end{pmatrix}$.
   Calculer $\|X_0\|_\infty$ et montrer que $\| AX_0 \|_\infty \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|$
   (c) En déduire que $|\!|\!| A |\!|\!|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{ij}|$.
9. On munit $\mathrm{M_{p,1}}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{M_{n,1}}(\mathbb{K})$ des normes $\|.\|_1$
   (a) Montrer que $\|AX\|_1 \leqslant \left(\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|X\|_1$ et déduire $|\!|\!| A |\!|\!|_1 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.
   (b) Soit $k \in [\![1,p]\!]$ tel que $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|$, on pose $X_0 = (\delta_{ik})_{i \in [\![1,p]\!]}$.
   Calculer $\|X_0\|_1$ et montrer que $\|AX_0\|_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
   (c) En déduire $|\!|\!| A |\!|\!|_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.
10. Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, on pose

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|^2}$$

   Montrer que $|\!|\!| A |\!|\!|_2 \leqslant \|A\|_2$. A-t-on l'égalité des normes $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|_2$ et $\| \,.\, \|_2$

Normes subordonnées

Partie I: Normes subordonnées

Soit $u \in \mathcal{L}_C(E,F)$

1. u est une application linéaire continue, donc il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que:
$$\forall x \in E, \quad \| u(x) \|_F \leqslant k \| x \|_E$$
En particulier: $\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \dfrac{\| u(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant k$. Ceci montre que l'ensemble $\left\{ \frac{\| u(x) \|_F}{\| x \|_E},\ x \in E \setminus \{0_E\} \right\}$ est majoré de $\mathbb{R}$ et puisqu'il est non vide , d'après l'axiome de la borne supérieure, il admet une borne supérieure. D'où l'existence de $\| u \|$.

2. Pour $f \in \mathcal{L}_C(E,F)$, f est bornée sur $\mathcal{B}_f(0,1)$ donc l'application $\forall f \in \mathcal{L}_C(E,F)$, $\| f \| \in \mathbb{R}^+$. Soient $f, g \in \mathcal{L}_C(E,F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:
   - **Séparation:** Si $\| f \| = 0$ alors $\forall x \in E \setminus \{0\}, f(x) = 0$. Or f est linéaire, donc en particulier $f(0) = 0$. On déduit que $f = 0$.
   - **Homogènéité:** $\| \alpha f \| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|\alpha f(x)\|_F}{\| x \|_E} = |\alpha| \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\| x \|_E} = |\alpha|\ \| f \|$.
   - **Inégalité triangulaire:** Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on a:
   $$\frac{\| (f+g)(x) \|_F}{\| x \|_E} = \frac{\| f(x) + g(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant \frac{\| f(x) \|_F}{\| x \|_E} + \frac{\| g(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant \| f \| + \| g \|$$
   Donc $\dfrac{\| (f+g)(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant \| f \| + \| g \|$, ceci vrai pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, alors par passage à la borne supérieure, on aboutit à
   $$\| f + g \| \leqslant \| f \| + \| g \|$$

   On déduit que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_C(E,F)$.

3. (a)
   - Montrons que $\| u \| \leqslant \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$:
   Soit $x \in E \setminus \{0\}$, alors $\dfrac{x}{\| x \|_E}$ est de norme 1, donc $\left\| u\left(\dfrac{1}{\|x\|_E} x\right) \right\|_F \leqslant \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$. Or u est linéaire donc $\dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$, puis $\| u \| \leqslant \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$
   - Puisque la sphère $S(0,1)$ est incluse dans $\mathcal{B}_f(0,1)$ la boule unité fermée, alors
   $$\sup_{\| x \|_E = 1} \| u(x) \|_F \leqslant \sup_{\| x \|_E \leqslant 1} \| u(x) \|_F$$
   - Montrons que $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| \leqslant \| u \|$:
   Soit $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leqslant 1$
     - Si $x = 0$, alors $\| u(x) \|_F = 0 \leqslant \| u \|$;
     - Si $x \neq 0$, alors $\dfrac{\| u(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant \| u \|$ d'où $\|u(x)\|_F \leqslant \| u \| \| x \|_E \leqslant \| u \|$ car $\| x \|_E \leqslant 1$. Ainsi $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\| \leqslant \| u \|$

   (b) Soit $x \in E$, alors si $x = 0$ c'est fini, sinon $\dfrac{\| u(x) \|_F}{\| x \|_E} \leqslant \| u \|$, donc l'inégalité
   $$\| u(x) \|_F \leqslant \| u \| \times \| x \|_E$$

   (c)
   - Montrons que $\inf\{k \in \mathbb{R} / \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\} \leqslant \| u \|$:
   Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\left\| \frac{1}{\|x\|_E} x \right\|_E = 1$ donc $\left\| u\left(\frac{1}{\|x\|_E} x\right) \right\|_F \leqslant \| u \|$. Or u est linéaire donc $\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leqslant \| u \|$ d'où $\|u(x)\|_F \leqslant \| u \| \, \|x\|_E$.
   On déduit que $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant \| u \| \, \|x\|_E$ donc $\| u \| \in \{k \in \mathbb{R} / \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\}$ d'où $\inf\{k \in \mathbb{R} / \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\} \leqslant \| u \|$.

- Inversement soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$, alors pour x de norme 1, il vient que $\|u(x)\|_F \leqslant k$, et donc $\| u \| = \sup_{\| x \|_E=1} \| u(x) \|_F \leqslant k$. Ainsi

$$||| u ||| = \inf\{k \in \mathbb{R}/\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\}$$

4. (a) Soit $u, v \in \mathcal{L}_C(E)$, alors pour tout $x \in E$, on a:

$$\| u \circ v(x) \|_E = \| u(v(x)) \|_E \leqslant ||| u ||| \, \| v(x) \|_E \leqslant ||| u ||| \,.\, ||| v ||| \,.\, \| x \|_E$$

Donc $||| u \circ v ||| \leqslant ||| u ||| \,.\, ||| v |||$ et par suite $||| \,.\, |||$ est une norme d'algèbre

(b) Par définition $||| \mathrm{Id_E} ||| = \sup_{\| x \|_E} \| x \|_E = 1$

Partie II: Exemples de calcul

5.
- u est une forme linéaire. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on a:

$$|u(P)| = |P(0)| \leqslant \|P\|$$

Donc u est lipschitzienne en 0, ce qui montre que u est continue sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme considérée

- D'une part $||| u ||| \leqslant 1$. D'autre part, pour $P = 1$, on a $\dfrac{|u(P)|}{\|P\|} = 1 \geqslant ||| u |||$.

Donc $||| u ||| = 1$

6. T_φ est bien définie et clairement linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|T_\varphi(f)| \leqslant \|\varphi\|_2 . \|f\|_2$$

donc T_φ est continue et $||| T_\varphi ||| \leqslant \|\varphi\|_2$.
Pour $f = \varphi$, on a: $|T_\varphi(\varphi)| = \|\varphi\|_2^2$, donc $||| T_\varphi ||| \geqslant \|\varphi\|_2$, puis $||| T_\varphi ||| = \|\varphi\|_2$

7. Soient $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = C^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par
$N_1(f) = \|f\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

(a) L'application T est bien définie et est clairement linéaire. Pour tout $x \in [0,1]$, $|T(f)(x)| \leqslant xN_1(f)$ donc $\|T(f)\|_\infty \leqslant N_1(f)$, puis

$$N_2(T(f)) = \|T(f)\|_\infty + \|T(f)'\|_\infty = \|T(f)\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 2N_1(f)$$

Ainsi T est continue

(b) D'après la question précédente $||| T ||| \leqslant 2$. Or

$$N_2(T(\exp)) = 2N_1(\exp)$$

Donc $||| T ||| \geqslant 2$, puis $||| T ||| = 2$

Partie III: Normes matricielles

8. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$:

(a) On a

$$\|AX\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|X\|_\infty$$

donc $|||A|||_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

Normes subordonnées

(b) On a $\|X_0\|_\infty = 1$ donc

$$|||A|||_\infty \geqslant \|AX_0\|_\infty \geqslant \left|\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j\right| = \left|\sum_{j=1}^n |a_{kj}|e^{i\theta_j}e^{-i\theta_j}\right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(c) donc $|||A|||_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$.

9. (a) On a

$$\begin{aligned}
\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ij}||x_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^n\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)|x_j| \\
&= \left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)\|X\|_\infty
\end{aligned}$$

donc $|||A|||_1 \leqslant \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$.

(b) On a $\|X_0\|_1 = 1$ et $\|AX_0\| = \sum\limits_{i=1}^n\left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| = \sum\limits_{i=1}^n |a_{ik}| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$

(c) $|||A|||_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$.

10. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned}
\|AX\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^p a_{ij}x_j\right|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^p |a_{ij}||x_j|\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2\sum_{k=1}^p |x_k|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2\|X\|_2^2 \\
&= \|A\|_2^2\|X\|_2^2
\end{aligned}$$

On déduit que $\|AX\|_2 \leqslant \|A\|_2\|X\|_2$ d'où $|||A|||_2 \leqslant \|A\|_2$.
Remarquons que pour $n = p$, on a $|||\ I_n\ ||| = 1$ et $\|\ I_n\ \|_2 = \sqrt{n}$