DNS 10

Sujet

EXTRAIT E3A MP 2010

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Physique - Chimie MP

CONDUITE D'UN VEHICULE A DEUX ROUES A PROPULSION ARRIERE

Le véhicule à deux roues étudié dans ce problème est un scooter. Le système, noté (S), est constitué du scooter et de son pilote. Il est modélisé d'une manière simplifiée en considérant qu'il est représenté par un ensemble de trois solides en liaison : (S_1), la roue arrière, (S_2), la roue avant et (S_3) le reste du système.
Les roues, identiques, de rayon R et de masse m, axées sur leur centre d'inertie C_1 et C_2, possèdent un moment d'inertie $J = 3mR^2/4$ par rapport à leur axe de révolution. Elles peuvent tourner autour de leurs axes C_1x et C_2x dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'étude, considéré comme galiléen et rapporté au repère Oxyz. (figure 1)

Par souci de simplification, le système S_3 (cadre, moteur et conducteur) est assimilé à un solide de masse M, en contact avec (S_1) et (S_2) par les axes C_1x et C_2x, par des liaisons non précisées. Le centre d'inertie de (S) est noté G ; il est situé à une distance h au-dessus du sol, à la distance b_1 de l'axe C_1z et à la distance b_2 de l'axe C_2z. On note $L = C_1C_2 = b_1 + b_2$.
Les contacts (S_1 – sol) et (S_2 – sol) en I_1 et I_2 se font avec le même coefficient de frottement de glissement f. Aucune distinction entre le frottement statique ou dynamique n'est faite dans ce problème. Afin de simplifier les discussions, l'inégalité suivante est admise : $f\,h < b_1$.

Les conditions de conduite sont celles d'un mouvement plan sur plan, dans le plan Oyz de la figure 1.

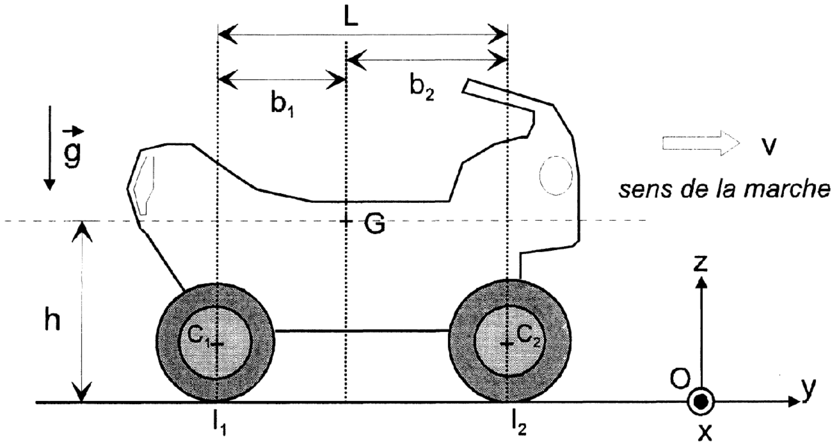


Figure 1

Caractéristiques techniques du scooter BWS 12, de marque Yamaha®, choisi pour illustration :
$L = 1{,}20$ m ; $b_1 = 0{,}50$ m ; $R = 0{,}22$ m ; $h = 0{,}73$ m ; $M = 140$ kg.

Les actions du sol sur (S_1) et (S_2) sont modélisées par des forces $T_1(t)\vec{e}_y + N_1(t)\vec{e}_z$ et $T_2(t)\vec{e}_y + N_2(t)\vec{e}_z$ s'appliquant aux points de contact respectifs I_1 et I_2.

Les liaisons $[(S_3) \to (S_1)]$ et $[(S_3) \to (S_2)]$ possèdent des moments scalaires totaux par rapport aux axes C_1x et C_2x notés respectivement $K_1(t)$ et $K_2(t)$, considérés comme des grandeurs algébriques. Ces moments prennent en compte les moments éventuels exercés par le moteur sur les roues, par les mâchoires ou les disques de frein sur les roues, par les frottements des arbres sur les essieux des roues.

Notons $V(t) > 0$ la vitesse de translation rectiligne le long de l'axe des y, du centre d'inertie G du scooter, relativement au référentiel galiléen du sol. Les vitesses angulaires des roues sont notées $\vec{\omega}_i(t) = -\omega_i(t)\,\vec{e}_x$ avec $\omega_i(t) > 0$, $i = \{1, 2\}$, compte tenu du repère choisi.

A / ETUDE DU DEMARRAGE SOUPLE

En conduite souple, les deux roues roulent sans glisser.

A*1. Démontrer que les deux roues ont la même vitesse angulaire $\omega(t)$. La calculer en fonction de $V(t)$.

A*2. Déterminer en fonction de $V(t)$ l'expression de $E_{K,S}$, l'énergie cinétique du scooter relativement à $\mathscr{R}$.

A*3. Déterminer également, toujours à l'aide de $V(t)$, la composante algébrique suivant (Ox) du moment cinétique barycentrique L^*_x de (S).

A*4. Appliquer le théorème du moment cinétique barycentrique à chaque roue, puis le théorème de la résultante dynamique au système complet.
En déduire que l'accélération du scooter peut s'écrire sous la forme $a(t)=\dfrac{dV(t)}{dt}=-\dfrac{K_1+K_2}{R\lambda}$, la constante λ étant à exprimer en fonction de m et M.

A*5. Grâce à la relation fondamentale de la dynamique appliquée à (S) dans $\mathscr{R}$, ainsi que par l'application du théorème du moment cinétique barycentrique à ce même système, montrer que les composantes verticales N_1 et N_2 des résultantes des torseurs d'actions de contact en I_1 et I_2 vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} N_1+N_2=(2m+M)g \\ -b_1N_1+b_2N_2=\alpha(K_1+K_2) \end{cases}$$

En déduire que ces composantes peuvent s'écrire sous la forme :

$$N_1=\frac{b_2(M+2m)g}{L}-\alpha\frac{K_1+K_2}{L} \quad \text{et} \quad N_2=\frac{b_1(M+2m)g}{L}+\alpha\frac{K_1+K_2}{L}.$$

Pour valider les résultats précédents, exprimer α en fonction de m, M, h et R.

A*6. Démontrer que les composantes horizontales T_1 et T_2 des résultantes des torseurs d'actions de contact en I_1 et I_2 peuvent s'écrire sous la forme :

$$T_1=-\beta\frac{K_1}{R}+\gamma\frac{K_2}{R} \quad \text{et} \quad T_2=-\beta\frac{K_2}{R}+\gamma\frac{K_1}{R}.$$

Pour valider le résultat précédent, exprimer β et γ en fonction de m et M.

Lorsque la masse m est négligeable devant M, les résultats précédents conduisent à :

$$m=0\ ;\ \alpha=h/R\ ;\ \beta=1\ ;\ \gamma=0\ ;\ \lambda=M\ ;\ a(t)=-\frac{K_1(t)+K_2(t)}{MR}\ ;\ T_1(t)=-\frac{K_1(t)}{R}\ ;$$

$$T_2(t)=-\frac{K_2(t)}{R}\ ;\ N_1(t)=\frac{Mb_2g}{L}-\frac{h}{RL}\left[K_1(t)+K_2(t)\right]\ \text{et}\ N_2(t)=\frac{Mb_1g}{L}+\frac{h}{RL}\left[K_1(t)+K_2(t)\right].$$

*Dans la suite de cette partie, **sauf à la question B*2**, l'approximation précédente est supposée valable. En effet, dans chaque question, la masse des roues est négligeable devant celle du reste du système. Il est donc légitime d'utiliser ces résultats simplifiés.*

L'étude porte sur la phase d'accélération du scooter, en supposant que seule la roue arrière est motrice et que les frottements au niveau des essieux C_1x et C_2x sont négligeables, soit $K_1=cte$ et $K_2=0$ dans cette phase.

A*7a. Quel est le signe de K_1 compatible avec le sens de la marche du scooter ?

A*7b. A quelle condition la roue arrière peut-elle décoller ? Est-ce possible dans ce cas ?

A*7c. Le « wheeling » correspond au cabrage du scooter sur sa roue arrière. A quelle condition sur l'accélération a, le « wheeling » peut-il être évité ?

A*7d. A quelle condition la roue avant peut-elle déraper ? Est-ce envisageable ?

A*7e. Quelle condition doit satisfaire l'accélération a du scooter pour éviter le dérapage arrière ?

A*7f. En utilisant la condition : $f h < b_1$, donner l'expression littérale de l'accélération limite a_{lim} permettant une conduite « en sécurité » sans soulèvement, ni dérapage des roues. Calculer numériquement a_{lim} avec les données suivantes : $f = 0,2$ et $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

B / ETUDE DU DEMARRAGE EN DERAPAGE ARRIERE

Considérons un démarrage dans le même sens avec les mêmes conditions $K_1 = cte$ et $K_2 = 0$. Au départ, il y a dérapage arrière, sans « wheeling » ni dérapage à l'avant.

B*1. Déterminer en particulier, par un raisonnement simple, le sens de la vitesse de glissement de la roue arrière par rapport au sol.

B*2. Dans le cadre des hypothèses proposées, écrire, sans le résoudre, le système de 7 équations aux 7 inconnues $a(t), \omega_1(t), \omega_2(t), T_1, T_2, N_1, N_2$ sans négliger, à ce stade, la masse m des roues devant la masse M du reste du système. Préciser de façon claire les théorèmes associés à chaque équation.

B*3. A l'aide d'arguments énergétiques qualitatifs, justifier que cette phase d'accélération en dérapage arrière soit qualifiée de « burn » en anglais, dans le jargon des motards.

C / REPARTITION DU FREINAGE A LA DECELERATION – CONDUITE SURE

Dans la phase de freinage souple du scooter, toujours dans la direction Oy, il est fait l'hypothèse d'un roulement sans glissement du véhicule. Pour cela, on applique aux deux roues un freinage se traduisant par des moments constants K_1 et K_2.

Il est rappelé que dans toute la sous-partie C, la masse m des roues est négligée.

C*1a. Quel est le signe de l'accélération algébrique a ?

C*1b. Si l'on freinait avec le seul frein arrière $(K_1 \neq 0,\ K_2 = 0)$, quel serait le signe de K_1 ?

C*1c. Si l'on freinait avec le seul frein avant $(K_1 = 0,\ K_2 \neq 0)$, quel serait le signe de K_2 ?

C*1d. En réalité, $K_1 \neq 0$ et $K_2 \neq 0$, chaque action possédant le même signe que ceux déterminés précédemment. Dans un diagramme $(K_1,\ K_2)$, quel est donc le quadrant utile pour une décélération souple ?

Dans le cas d'un roulement sans glissement, sans soulèvement de la roue (1), il est possible d'écrire trois inégalités portant sur K_1 et K_2.

Soit respectivement [1], [2] et [3], les inégalités résultant des lois de Coulomb appliquées aux roues (S_1) et (S_2) puis celle traduisant le signe de N_1 au contact de la roue arrière avec la chaussée.

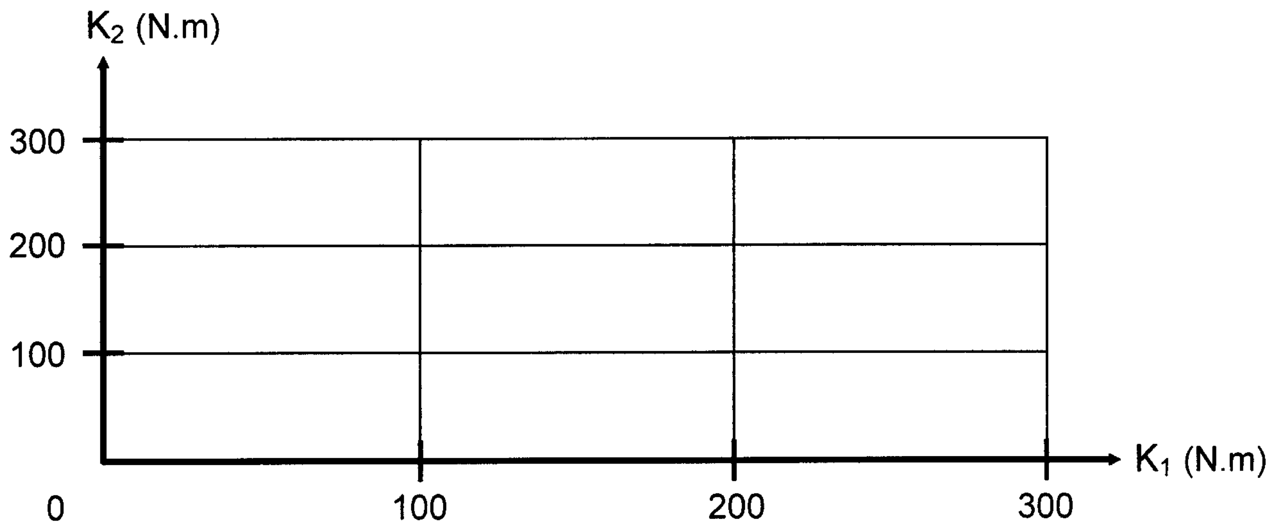
C*2a. Etablir ces trois inégalités [1], [2] et [3] portant sur K_1 et K_2.

Ces trois inégalités exprimées à leur limite particularisent trois droites dans le plan (K_1, K_2), nommées respectivement (D_1, D_2, D_3).

C*2b. Reporter ces droites dans le plan (K_1, K_2) sur le schéma fourni en annexe et représenter la zone correspondant à la conduite souple, sans décollage ni dérapage au freinage.

C*2c. Déterminer les efforts de freinage sur les roues arrière et avant (K_1, K_2) qui assurent une efficacité maximale de la décélération compatible avec les conditions de souplesse décrites ci-dessus.
Calculer la valeur absolue de la décélération et les valeurs de K_1 et K_2 correspondant à cette efficacité maximale, avec les données numériques fournies précédemment.

ANNEXE



Réponses

A1) Pour la roue arrière :

$$\overrightarrow{v}_{glissement} = \overrightarrow{v}_{I_1 \in roue 1} - \underbrace{\overrightarrow{v}_{I_1 \in sol}}_{nul}$$

$$= \overrightarrow{v_{C_1}} + \overrightarrow{I_1C_1} \wedge \overrightarrow{\omega_1}$$

$$= V(t)\,\overrightarrow{u_y} + R\,\overrightarrow{u_z} \wedge -\omega_1(t)\,\overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{0} = \left[V(t) - R\,\omega_1(t)\right]\overrightarrow{u_y}$$

$$\omega_1(t) = \frac{V(t)}{R}$$

Pour la roue avant, on trouve de même

$$\omega_2(t) = \frac{V(t)}{R}$$

finalement :

$$\overrightarrow{\omega_1} = \overrightarrow{\omega_2} = \overrightarrow{\omega} \quad \text{avec}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{\omega}(t) &= -\omega\,\overrightarrow{u_x}\\ &= -\frac{V(t)}{R}\,\overrightarrow{u_x}\end{aligned}} \qquad (1)$$

A2) Energie cinétique de $S / \mathcal{R}$:

$$E_{K,S} = E_{K,S1} + E_{K,S2} + E_{K,S3}$$

avec :

$$E_{K,S3} = \frac{1}{2} M\, V(t)^2 \qquad (\text{système en translation})$$

$$E_{K,S1} = \frac{1}{2} m\, V(t)^2 + \frac{1}{2} J_{G_1 x\, roue}\, \omega_1^2 \qquad (\text{th de König})$$

$$= \frac{1}{2} m\, V(t)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4} m R^2 \omega_1^2$$

$$= \frac{7}{8} m\, V(t)^2$$

$$E_{K,S2} = \frac{7}{8} m\, V(t)^2$$

finalement :

$$\boxed{E_{K,S} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{7}{2} m\right) V(t)^2} \qquad (2)$$

A3) Moment cinétique barycentrique de $S/\mathcal{R}$ en projection selon x

$$L^*_{x,S} = L_{x,S_1/\mathcal{R}^*_S} + L_{x,S_2/\mathcal{R}^*_S} + L_{x,S_3/\mathcal{R}^*_S}$$

avec

→ pour S_1, en désignant par $\mathcal{R}^*_{S_1}$ le référentiel barycentrique de S_1 associé à $\mathcal{R}$, et en appliquant le th de König.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{par exemple}}}{\overrightarrow{L}_{S_1/\mathcal{R}^*_S}(G)} = \overrightarrow{L}^*_{S_1/\mathcal{R}^*_{S_1}} + \overrightarrow{GC_1} \wedge \underbrace{\overrightarrow{P}^*_{S_1/\mathcal{R}^*_{S_1}}}_{\text{nul}}$$

$$L_{x,S_1/\mathcal{R}^*_S} = J\,(\overrightarrow{\omega}\,\overrightarrow{u_x})$$

$$= \frac{3}{4}\,m R^2 \times -\omega$$

→ pour S_2, résultat identique

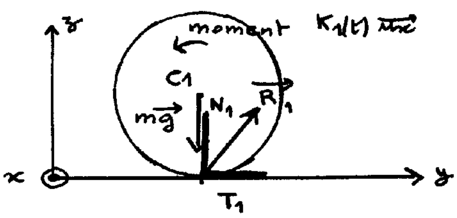
→ pour S_3, le moment cinétique de S_3 dans son référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*_{S_3}$ est nul en l'absence de rotation propre. La quantité de mouvement de S_3 dans $\mathcal{R}^*_{S_3}$ est nulle par définition de $\mathcal{R}^*_{S_3}$ et donc, en appliquant à nouveau le théorème de König, on obtient

$$L_{x,S_3/\mathcal{R}^*_S} = 0$$

finalement :

$$\boxed{L^*_{x,S} = -\frac{3}{2}\,m R^2\,\omega} \quad (3)$$

A4) → Théorème du moment cinétique à la roue 1 dans son référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*_{S_1}$



Les moments de $m\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{N_1}$ sont nuls donc on trouve

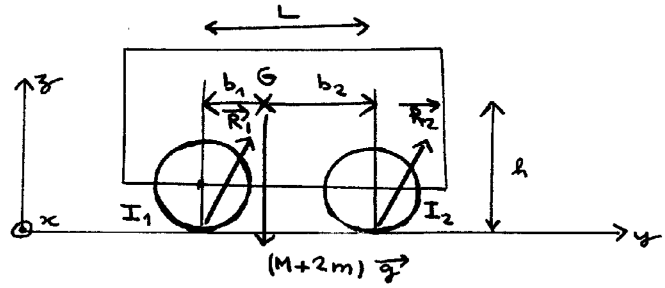
$$K_1(t) + T_1(t)\,R = J\,\frac{d(\overrightarrow{\omega}\cdot\overrightarrow{u_x})}{dt}$$

A 5) On cherche $N_1(t)$ et $N_2(t)$.

– On a déjà obtenu précédemment :

$$(6) \qquad N_1(t) + N_2(t) = (M+2m)\,g$$

– On applique le théorème du moment cinétique à S en G dans le référentiel barycentrique, en projection selon x.



Le moment du poids étant nul, il reste, en utilisant (3)

$$\vec{u_x} \cdot \left(\vec{GI_1} \wedge \vec{R_1} + \vec{GI_2} \wedge \vec{R_2} \right) = \frac{d}{dt} L^*_{x,S}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -b_1 \\ -h \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ T_1 \\ N_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 \\ b_2 \\ -h \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ T_2 \\ N_2 \end{vmatrix}$$

$$N_2 b_2 - N_1 b_1 + h\,(T_1 + T_2) = -\frac{3}{2} m R^2 \frac{d\omega}{dt}$$

avec (5) et (1)

$$N_2 b_2 - N_1 b_1 + h\,(M+2m) \frac{dV}{dt} = -\frac{3}{2} m R \frac{dV}{dt}$$

$$N_2 b_2 - N_1 b_1 = \frac{dV}{dt} \left(-\frac{3}{2} m R - h\,(M+2m) \right)$$

avec (7)

$$\boxed{N_2 b_2 - N_1 b_1 = (K_1+K_2) \frac{\frac{h}{R}(M+2m) + \frac{3}{2} m}{M + \frac{7}{2} m}} \qquad (8)$$

$$\left(\alpha = \frac{2h\,(M+2m) + 3Rm}{R\,(2M+7m)} \right)$$

De (6) et (8)

$$N_1 + N_2 = (M+2m)\,g$$

$$-b_1 N_1 + b_2 N_2 = \alpha\,(K_1+K_2)$$

on tire alors (cf énoncé) avec $b_1 + b_2 = L$

$$\boxed{\begin{aligned} N_1 &= \frac{b_2}{L} (M+2m)\,g - \alpha \frac{K_1+K_2}{L} \\ N_2 &= \frac{b_1}{L} (M+2m)\,g + \alpha \frac{K_1+K_2}{L} \end{aligned}} \qquad (9)$$

$$\boxed{K_1(t) \quad + \quad T_1(t)\ R \quad = -\frac{3}{4} m R^2 \frac{d\omega}{dt}} \quad (4)$$

→ Idem pour la roue 2

$$\boxed{K_2(t) \quad + \quad T_2(t)\ R \quad = -\frac{3}{4} m R^2 \frac{d\omega}{dt}} \quad (4')$$

→ Théorème de la résultante cinétique au système complet dans $\mathcal{R}$

$$(M+2m)\vec{g} \ + \vec{T_1} + \vec{N_1} \ + \vec{T_2} + \vec{N_2} = (M+2m)\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$/y \quad \boxed{T_1(t) \quad + T_2(t) \quad = (M+2m)\frac{dV}{dt}} \quad (5)$$

$$/z \quad \boxed{-(M+2m)\,g \quad + N_1(t) \quad + N_2(t) = 0} \quad (6)$$

finalement en tenant compte de (1) : $\omega(t) = \frac{V(t)}{R}$

$$(4) \qquad T_1(t) = -\frac{3}{4} m \frac{dV}{dt} - \frac{K_1(t)}{R}$$

$$(4') \qquad T_2(t) = -\frac{3}{4} m \frac{dV}{dt} - \frac{K_2(t)}{R}$$

on reporte dans (5)

$$T_1(t) + T_2(t) = (M+2m)\frac{dV}{dt}$$

$$-\frac{\left(K_1(t) + K_2(t)\right)}{R} = \left(M + \frac{7}{2} m\right)\frac{dV}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -\frac{\left(K_1(t) + K_2(t)\right)/R}{\left(M + \frac{7}{2} m\right)}} \quad (7)$$

$$\left(\lambda = \frac{2M + 7m}{2}\right)$$

remarque : en utilisant le théorème de la puissance cinétique, on trouvait le résultat plus rapidement

$$\frac{dE_{K,S}}{dt} = \overbrace{\vec{K_1}\,\frac{d\vec{\omega_1}}{dt} + \vec{K_2}\,\frac{d\vec{\omega_2}}{dt}}^{\text{Puissance forces intérieures}}$$

$$\left(M+\frac{7}{2}m\right) V(t) \frac{dV}{dt} = -\left(K_1(t) + K_2(t)\right) \frac{d\omega}{dt} \xrightarrow{} V/R$$

A 5) De (4) on tire :

$$T_1(t) = -\frac{3}{4} m R \frac{d\omega}{dt} - \frac{K_1(t)}{R}$$

avec (1) : $$= -\frac{3}{4} m \frac{dV}{dt} - \frac{K_1(t)}{R}$$

et (7) : $$= \frac{3}{4} m \frac{\frac{K_1(t)+K_2(t)}{R}}{(M+\frac{7}{2}m)} - \frac{K_1(t)}{R}$$

$$\boxed{T_1(t) = \frac{K_1}{R} \times -\left(\frac{M+\frac{11m}{4}}{M+\frac{7m}{2}}\right) + \frac{K_2}{R}\left(\frac{\frac{3}{4}m}{M+\frac{7m}{2}}\right)} \quad (10)$$

Idem $T_2(t)$ en permutant les indices 1 et 2 (10')

$$\left(\beta = \frac{4M+11m}{4M+14m} \right.$$

$$\left. \gamma = \frac{3m}{4M+14m} \right)$$

On suppose $m \ll M$. En faisant $m=0$, on obtient :

(7) $$\frac{dV}{dt} = -\frac{K_1(t) + K_2(t)}{MR} \qquad (\lambda = M)$$

(4) $$T_1(t) = -\frac{K_1(t)}{R}$$

(4') $$T_2(t) = -\frac{K_2(t)}{R}$$

(9) $$N_1(t) = \frac{b_2}{L} Mg - \frac{h}{L}\frac{K_1(t)+K_2(t)}{R} \qquad (\alpha = \frac{h}{R})$$

(9') $$N_2(t) = \frac{b_1}{L} Mg + \frac{h}{L}\frac{K_1(t)+K_2(t)}{R}$$

A 7 a)

(7) devient

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{K_1}{MR}$$

Le scooter accélère si $\frac{dV}{dt} > 0$ (avec $V>0$, $V\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(V^2)$ doit être positif pour que $\|\vec{V}\|$ augmente)

$$\boxed{K_1 < 0}$$

A 7 b) Le raisonnement fait jusqu'à présent suppose contact des roues avec le sol donc $N_1 \geq 0$ (sinon décollage de la roue arrière)

Pas de décollage si

$$N_1 \geq 0$$

$$\underbrace{\frac{b_2\, Mg}{L}}_{\text{positif}} \geq \underbrace{\frac{h}{L}\frac{K_1}{R}}_{\text{négatif car } K_1<0}$$

Pas de décollage de la roue arrière

A 7 c) Le wheeling suppose que la roue avant quitte le sol. Pour éviter cela, il faut que le contact de la roue avant avec le sol subsiste donc :

$$N_2 \geq 0$$

$$\frac{b_1}{L} Mg + \frac{h}{L}\frac{K_1}{R} \geq 0$$

$$\frac{b_1}{L} Mg - \frac{h}{L} M \frac{dV}{dt} \geq 0$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} \leq \frac{b_1}{h} g}$$

A 7 d) Le raisonnement fait jusqu'à présent suppose le non-glissement des roues. Ceci est vérifié pour la roue avant si :

$$\left|\frac{T_2}{N_2}\right| \leq f$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, il faut reprendre les calculs dans l'hypothèse du glissement.

Ici T_2 est nul (et on suppose $N_2 > 0$) donc pas de glissement pour la roue avant.

A 7 e) Idem pour la roue arrière.

Non glissement si :

$$\left|\frac{T_1}{N_1}\right| \leq f \qquad \text{avec } T_1>0 \text{ et } N_1>0$$

$$\frac{-K_1/R}{\frac{b_2 M g}{L} - \frac{h}{L}\frac{K_1}{R}} \leq f$$

$$\frac{M\frac{dV}{dt}}{\frac{b_2 M g}{L} + \frac{h}{L} M \frac{dV}{dt}} \leq f$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} \leq g\,\frac{f\,b_2/L}{1 - f\,h/L}}$$

A 7 f) Si l'accélération est trop grande, il peut y avoir wheeling (la roue avant décolle) ou dérapage (pour la roue arrière).

On doit comparer les deux limites obtenues pour chercher la limite minimale.

$$\frac{b_1}{h}g \overset{?}{>} \frac{f\,b_2/L}{1 - f\,h/L}\,g$$

avec $f\,h/b_1 < 1$

(donc $f\,h/L < 1$ aussi)

$$\frac{b_1}{h} - \frac{f\cancel{h}\,b_1}{L\,\cancel{h}} \overset{?}{>} f\,\frac{b_2}{L}$$

$$\frac{b_1}{h} \overset{?}{>} f\,\frac{(b_2+b_1)}{L}$$

$$\frac{b_1}{h} > f \qquad \text{O.K.}$$

Finalement

$$\boxed{a_{lim} = \frac{f\,b_2/L}{1 - f\,h/L}\,g}$$

A.N.
$$= \frac{0{,}2\ \ 0{,}7/1{,}2}{1 - 0{,}2\ \ 0{,}73/1{,}2}\ 9{,}8$$

$$\boxed{a_{lim} = 1{,}30\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$

B 1) La roue arrière est la roue motrice.

Au démarrage, en $t=0^+$,

$$v_{I_1 \in sol} = 0$$

$$v_{I_1 \in roue} = -R\,\omega_1 \quad (\text{avec } \omega_1 > 0)$$

donc

$$v_{glissement} = v_{I_1 \in roue} - v_{I \in sol}$$

$$\boxed{v_{glissement\ roue\ arrière} < 0}$$

B 2) équations

relation non glissement pour la roue avant

$$V(t) = R\,\omega_2(t)$$

$$\boxed{a(t) = R\,\frac{d\omega_2(t)}{dt}} \qquad (1\ \text{bis})$$

théorème moment cinétique pour la roue 1 dans son référentiel barycentrique

$$\boxed{K_1 + T_1(t)\,R = -\frac{3}{4}\,m\,R^2\,\frac{d\omega_1}{dt}} \qquad (4\ \text{bis})$$

théorème moment cinétique pour la roue 2 dans son référentiel barycentrique

$$\boxed{T_2(t)\,R = -\frac{3}{4}\,m\,R^2\,\frac{d\omega_2}{dt}} \qquad (4'\ \text{bis})$$

théorème de la résultante cinétique au système complet dans $\mathcal{R}$

$$\boxed{T_1(t) + T_2(t) = (M+2m)\,a(t)} \qquad (5\ \text{bis})$$

$$\boxed{N_1(t) + N_2(t) - (M+2m)\,g = 0} \qquad (6\ \text{bis})$$

théorème du moment cinétique à S complet dans son ref barycentrique

$$\boxed{N_2(t)\,b_2 - N_1(t)\,b_1 + \ell\,(T_1(t)+T_2(t)) = -\frac{3}{4}\,m\,R^2 \times \left(\frac{d\omega_1(t)}{dt} + \frac{d\omega_2(t)}{dt}\right)} \qquad (8\ \text{bis})$$

Loi de Coulomb, glissement de la roue arrière

$$\boxed{\left|\frac{T_1(t)}{N_1(t)}\right| = f}$$

B 3) Le bilan énergétique pour le scooter dans $\mathcal{R}$ donnera ici

$$\frac{dE_{K,S}}{dt} = \underbrace{\overrightarrow{K_1}\,\frac{d\overrightarrow{\omega_1}}{dt}}_{\text{puissance fournie à 1 par le couple moteur au démarrage}} + \underbrace{\overrightarrow{R_1}\,\overrightarrow{v_{I_1 \in roue1}}}_{= T_1\, v_{gliss\,1}}$$

Précédemment, en phase d'accélération avec non glissement, on avait

$$\frac{dE_{K,S}}{dt} = \overrightarrow{K_1} \frac{d\overrightarrow{\omega_1}}{dt}$$

Ici le terme supplémentaire $T_1 \, v_{gliss\,1}$ correspond à la puissance totale des actions de contact sur 1. Ce terme est négatif.
L'énergie cinétique de la machine augmente moins à cause du dérapage de la roue arrière.
La puissance consommée pour ces frottements se retrouve en "chaleur" au niveau de la roue arrière. Si on exagère le dérapage, le pneu s'use, chauffe et peut même s'enflammer.

Ex : si on bloque la machine et qu'on pousse le moteur

$$\underbrace{\frac{dE_{K,S}}{dt}}_{\simeq \text{nul}} = \underbrace{\overrightarrow{K_1} \frac{d\overrightarrow{\omega_1}}{dt}}_{>0} + \underbrace{T_1 \, v_{gliss\,1}}_{<0}$$

toute la puissance se transforme en "chaleur".

C1a) Freinage si V^2 diminue

$$\frac{dV^2}{dt} < 0$$

$$2V \frac{dV}{dt} < 0$$

$$\boxed{V a < 0}$$

Ici V est positif, le freinage correspond donc à

$$\boxed{a < 0}$$

C1b) En utilisant (7) dans ce cas :

$$a = -\frac{K_1}{MR}$$ avec $a < 0$ donc

$$\boxed{K_1 > 0}$$

C1c) Ici (7) devient

$$a = -\frac{K_2}{MR}$$

$$\boxed{K_2 > 0}$$

C1 d)

$$\boxed{\begin{matrix} K_1 > 0 \\ K_2 > 0 \end{matrix}}$$

Dans un diagramme (K_1, K_2), le quadrant concerné est donc le premier quadrant.

C2 a) inégalités :

[1] $\left|\frac{T_1}{N_1}\right| \leq f$

[2] $\left|\frac{T_2}{N_2}\right| \leq f$

[3] $N_1 \geq 0$

soit :

[1] $$\frac{K_1/R}{Mg\frac{b_2}{L} - \frac{h}{L}\left(\frac{K_1}{R}+\frac{K_2}{R}\right)} \leq f$$

$$\boxed{[1] \quad K_1\left(1+\frac{fh}{L}\right) + K_2\frac{fh}{L} - MgR\frac{f\,b_2}{L} \leq 0}$$

[2] $$\frac{K_2/R}{Mg\frac{b_1}{L} + \frac{h}{L}\left(\frac{K_1}{R}+\frac{K_2}{R}\right)} \leq f$$

$$\boxed{[2] \quad K_2\left(1-\frac{fh}{L}\right) - K_1\frac{fh}{L} - MgRf\frac{b_1}{L} \leq 0}$$

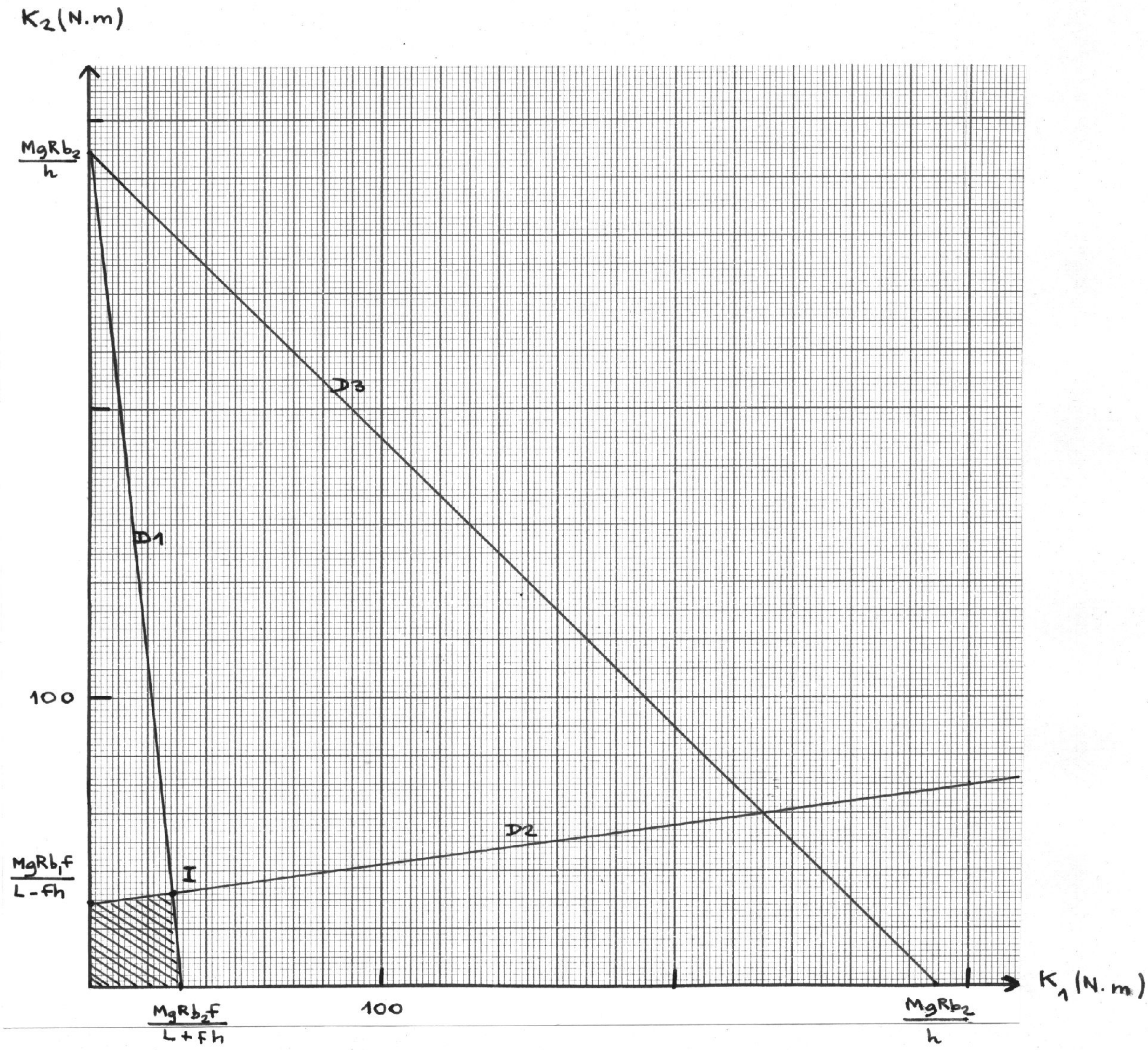
[3] $Mg\frac{b_2}{L} - \frac{h}{L}\left(\frac{K_1}{R}+\frac{K_2}{R}\right) \geq 0$

$$\boxed{[3] \quad K_1 + K_2 - MgR\frac{b_2}{h} \leq 0}$$

On remarque que $N_2 = \frac{b_1}{L}Mg + \frac{h}{L}\left(\frac{K_1}{R}+\frac{K_2}{R}\right)$ est obligatoirement positif au cours du freinage

---

C2 b) Résolution graphique



La zone qui convient est en dessous de ces droites ($K_2 < K_{2\,droite}$). Zone hachurée sur la figure.

C2c) → L'équation (7) donne

$$\boxed{\frac{K_1 + K_2}{R} = -M \quad a}$$

Le freinage est maximum pour $(K_1 + K_2)$ le plus grand possible.

→ Les inégalités [1] et [2] donnent en faisant [1] + [2]

$$\boxed{\frac{K_1 + K_2}{R} \leqslant f \, Mg}$$

La valeur maximale de $K_1 + K_2$ est donc à l'intersection des deux droites (voir point I). On trouve à ce point d'intersection :

$$K_1 = \frac{MgRf}{L}\left(b_2 - fh\right)$$

$$K_2 = \frac{MgRf}{L}\left(b_1 + fh\right)$$

A.N.

$$\boxed{\begin{array}{l} K_1 = 27{,}9 \text{ Nm} \\ K_2 = 32{,}5 \text{ Nm} \end{array}}$$

La valeur maximale de la décélération est donc

$$M\,(-a) = f\,Mg$$

$$\boxed{(-a)_{max} = f\,g}$$

A.N. $= 0{,}2 \times 9{,}8$

$$\boxed{(-a)_{max} = 1{,}96 \text{ m s}^{-2}}$$