Théorème du moment cinétique d'un point matériel

Table des matières

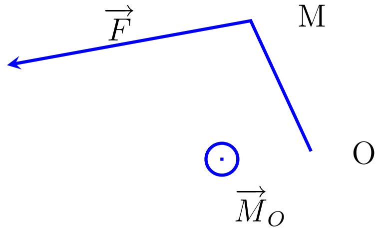
1 Moment d'une force

1.1 Moment d'une force par rapport à un point O

1.1.1 Définition

Définition : Considérons un point matériel M soumise à une force $\overrightarrow{F}$. Le moment de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport à un point O est défini par

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \text{ (N.m)}}$$



$$\boxed{||\overrightarrow{\mathcal{M}}_O|| = ||\overrightarrow{OM}||.||\overrightarrow{F}||.\sin\alpha}$$

- En coordonnées sphériques

$$\underset{(\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y, \overrightarrow{e}_z)}{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O =} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} f_x \\ f_y \\ f_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} yf_z - zf_y \\ zf_x - xf_z \\ xf_y - yf_x \end{array} \right.$$

1.1.2 Changement d'origine

Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ par rapport au point O'
$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'} = \overrightarrow{O'M} \wedge \overrightarrow{F} = (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{F}$

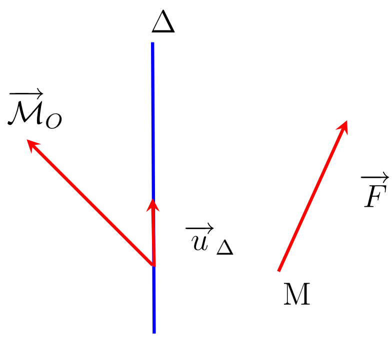
$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{F}}$$

1.2 Moment d'une force par rapport à l'axe Δ

Considérons un axe (Δ) qui passe par O.
Le moment $\mathcal{M}_\Delta$ de $\overrightarrow{F}$ par rapport à l'axe Δ

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O.\overrightarrow{u}_\Delta}$$

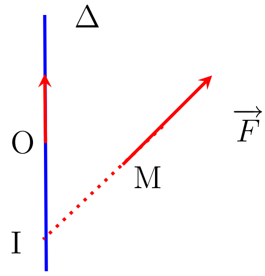
$\mathcal{M}_\Delta$: grandeur algébrique



- Si $\overrightarrow{F}$ est parallèle à Δ : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O.\overrightarrow{u}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta = 0$
- si le support de $\overrightarrow{F}$ coupe l'axe Δ en I
  - Point math

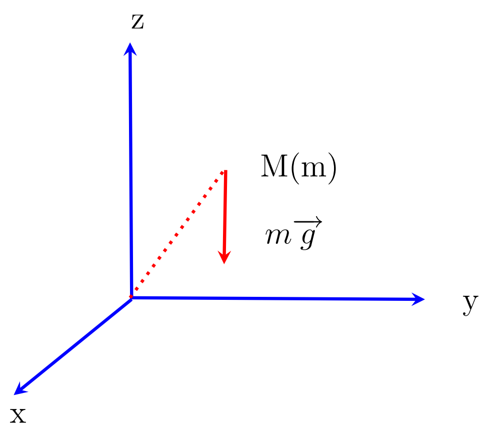
    $$\boxed{(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c} = (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}).\overrightarrow{b}}$$

  - $\mathcal{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O.\overrightarrow{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}).\overrightarrow{u}_\Delta$
    $= [(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) \wedge \overrightarrow{F}].\overrightarrow{u}_\Delta$
    $= (\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{F})\overrightarrow{u}_\Delta + (\overrightarrow{IM} \wedge \overrightarrow{F})\overrightarrow{u}_\Delta$
    $= 0$



Conclusion : le moment d'une force par rapport à un axe Δ est nul si le support de la force est parallèle à Δ, où coupe Δ en un point I.

- Application



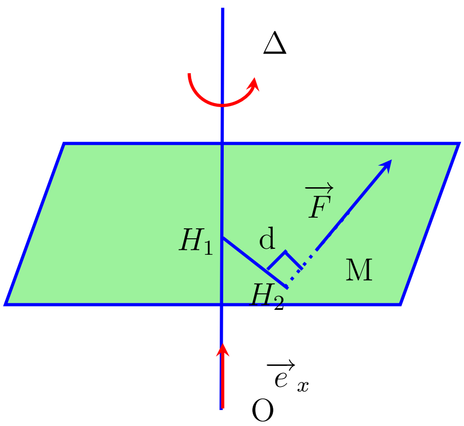
$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O \underset{(\overrightarrow{e}_x,\overrightarrow{e}_y,\overrightarrow{e}_z)}{=} = \overrightarrow{OM}\wedge m\overrightarrow{g} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \begin{vmatrix} -mgy \\ mgx \\ 0 \end{vmatrix}$$

- $\mathcal{M}_{OZ} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O.\overrightarrow{u}_z = 0$

1.3 Moment d'une force orthogonale à l'axe Δ : notion de bras de levier

- la force $\overrightarrow{F}$ appartenant au plan (P) orthogonal à l'axe Δ a pour effet de faire tourner le point matériel M autour de cet axe,son moment par rapport à Δ est non nul .



- $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{H1}(\overrightarrow{F}).\overrightarrow{u}_\Delta = (\overrightarrow{H_1M}\wedge\overrightarrow{F})\overrightarrow{u}_\Delta = \left([\overrightarrow{H_1H_2}+\overrightarrow{H_2M}]\wedge\overrightarrow{F}\right).\overrightarrow{u}_\Delta$
  $= (\overrightarrow{H_1H_2}\wedge\overrightarrow{F}).\overrightarrow{u}_\Delta + (\overrightarrow{H_2M}\wedge\overrightarrow{F}).\overrightarrow{u}_\Delta$
  or $(\overrightarrow{H_2M}\wedge\overrightarrow{F}).\overrightarrow{u}_\Delta = 0$

$$\boxed{\left|\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})\right| = \left|\left|\overrightarrow{H_1H_2}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{F}\right|\right|}$$

- la distance $d = \left|\left|\overrightarrow{H_1H_2}\right|\right|$ entre l'axe Δ et le support D de la force $\overrightarrow{F}$ est appelée bras de levier

$$\boxed{\left|\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})\right| = d.\left|\left|\overrightarrow{F}\right|\right|}$$

2 Moment cinétique d'un point matériel dans R

2.1 Moment cinétique par rapport à un point

Définition : On appelle moment cinétique d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{V}$ par rapport à un point O dans un référentiel R la quantié :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/R)}$$

$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{V}(M/R)$: la quantité de mouvement du point M

- unité de L_O : $kg.m^2.s^{-1}$
- En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \text{m} \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{vmatrix}$$

2.2 Moment cinétique par rapport à un axe Δ

Soit un axe Δ passant par O,de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_\Delta$. La projection de $\overrightarrow{L}_O$ sur Δ est appellé moment cinétique par rapport à l'axe Δ .

$$\boxed{L_\Delta = \overrightarrow{L}_O.\overrightarrow{u}_\Delta}$$

2.3 Théorème du moment cinétique

2.3.1 Application en un point fixe dans un référentiel galiléen R_g

- $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}$
- $\dfrac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{V} \wedge m\overrightarrow{V} + \overrightarrow{OM} \wedge m\dfrac{d\overrightarrow{V}}{dt} = 0 + \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt}\right)_{Rg} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O}$$

Enoncé : Dans un référentiel galiléen R,la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\overrightarrow{L}_O(M/R)$ du point matériel M en un point fixe O est égale au moment en O de la force totale agissant sur ce point :

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt}\right)_{R} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F})}$$

2.3.2 Application par rapport à un axe fixe dans un référentiel galiléen

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt}\right)_{R}.\overrightarrow{u}_\Delta = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{u}_\Delta.\overrightarrow{L}_O) = \overrightarrow{u}_\Delta.\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \mathcal{M}_\Delta$$

$$\boxed{\left(\frac{dL_\Delta}{dt}\right)_R = \mathcal{M}_\Delta}$$

Enoncé : Dans un référentiel galiléen R,la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $L_\Delta(M/R)$ du point matériel M par rapport à un axe Δ est égale au moment par rapport à Δ de la force totale agissant sur ce point :

$$\boxed{\left(\frac{dL_\Delta(M)}{dt}\right)_R = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})}$$

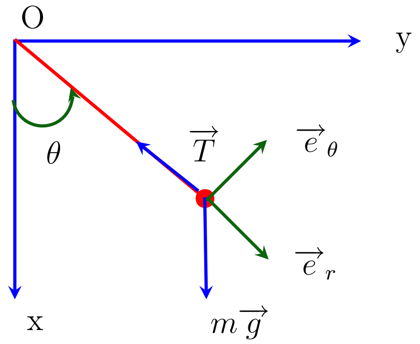
2.3.3 Application par rapport à un point mobile dans un référentiel galiléen

Le moment cinétique du point matériel est défini en un point O_1 mobile dans le référentiel galiléen :

- $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$
- $\overrightarrow{L}_{O1}(M/R) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\overrightarrow{V}(M/R)$
- $\left(\frac{d\overrightarrow{L}_{O1}(M/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}[\overrightarrow{O_1M} \wedge m\overrightarrow{V}(M/R)]\right)_R$
$= \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_R \wedge m\overrightarrow{V}(M/R) + \overrightarrow{O_1M} \wedge m\overrightarrow{a}$
$= \left[\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R - \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_R\right] \wedge m\overrightarrow{V}(M/R) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O1}(\overrightarrow{F})$

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{L}_{O1}(M/R)}{dt}\right)_R = -m\overrightarrow{V}(O_1/R) \wedge \overrightarrow{V}(M/R) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O_1}(\overrightarrow{F})}$$

2.3.4 Application : pendule simple



- $\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{e}_r$
- $\overrightarrow{V}(M/R) = l\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta$
- $\overrightarrow{L}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/R)$
$= l\overrightarrow{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\overrightarrow{e}_z = ml^2\dot{\theta}\overrightarrow{e}_z$

- $\left(\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt}\right)_R = ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{e}_z$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{g} = -mgl\sin\theta\overrightarrow{e}_z$

- T.M.C : $\left(\dfrac{d\overrightarrow{L}_O(M/R)}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{T})$

$$\boxed{l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

Pour θ : faible $\sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$