Concours Communs Marocain - Session 2007

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Divers démonstration du théorème fondamental de l'algèbre

Corrigé par Mohamed TARQI

PREMIÈRE PARTIE : MÉTHODES ANALYTIQUES

A. Résultats préliminaires

1a. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\big||P(z)| - |a_d z^d|\big| \leq \left|P(z) - a_d z^d\right| \leq \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k.$$

D'où

$$\left|\frac{|P(z)|}{|a_d||z^d|} - 1\right| \leq \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \frac{1}{|z|^{d-k}},$$

la quantité majorante tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini.

1b. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $R > 0$ tel que $\forall |z| > R$, $\left|\frac{|P(z)|}{|a_d||z^d|} - 1\right| \leq 1$ ou encore $\frac{1}{2} < \frac{|P(z)|}{|a_d||z^d|} \leq \frac{3}{2}$. On a nécessairement

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|P(z)|}{|a_d||z^d|} \leq 2.$$

2a. Soit D un disque fermé borné de $\mathbb{C}$, donc est un compact de $\mathbb{C}$ et comme l'application $z \to |P(z)|$ est continue sur D alors elle est bornée et atteinte ses bornes. En particulier $\inf\limits_{z\in D} |P(z)|$ existe est bien défini.

2b. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel $|P(z_0)| = \inf\limits_{z\in D} |P(z)|$. D'après la question 2.$(b)$ $\lim\limits_{|z|\to\infty} |P(z)| = +\infty$, alors il existe $R > 0$ tel que $\forall |z| \geq R$, on a $|P(z)| > |P(z_0)|$. Ceci entraîne que $z \to |P(z)|$ atteinte sa borne inférieure sur le disque fermé $\overline{D}(O, R)$.

B. Première méthode analytique

1a. La continuité de l'application $t \to \alpha^k Q(\alpha t)$ au point $t = 0$ entraîne l'existence d'un réel R positif tel que $|t| < R$ entraîne $|\alpha^k Q(\alpha t)| \leq \frac{1}{2}$.

Si $R > 1$, alors on a $\forall t_0 \in]0, 1[$, $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq \dfrac{1}{2}$. Si $R < 1$, là encore on a $\forall t_0 \in]0, R[\subset]0, 1[$, $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq \dfrac{1}{2}$.

1b. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \left|Q_1(\alpha t_0) - 1 + b(\alpha t_0)^k\right| &= \left|Q_1(\alpha t_0) - 1 + t_0^k\right| \\ &= \left|\alpha^k t_0^k Q(\alpha t_0)\right| \\ &\leq \frac{1}{2} t_0^k. \end{aligned}$$

D'où

$$\big||Q_1(\alpha t_0)| - |1 - t_0^k|\big| \leq \frac{1}{2} t_0^k,$$

inégalité qui s'écrit encore

$$|Q_1(\alpha t_0)| \leq 1 - \frac{1}{2} t_0^k < 1.$$

2. Inégalité d'Argand : Désignant par a_k le premier coefficient non nul qui suit $a_0 = 1$ dans le développement de $Q_1(z)$ suivant les puissances croissantes, nous pouvons écrire :

$$Q_1(z) = 1 + b_k X^k + X^k Q(z)$$

avec Q un polynôme tel que $Q(0) = 0$. Alors d'après la question précédente, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $|Q_1(\alpha t_0)| < 1$ où α une racine k-ième de $\dfrac{-1}{b_k}$.

Donc, si on prend $\delta = \gamma + \alpha t_0$, on aura $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$.
3. Application : Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes et z_0 un complexe tel que $|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$. Si $P(z_0) \neq 0$, alors d'après la dernière question il existe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $|P(\delta)| < |P(z_0)|$, ce qui est absurde.

C. Deuxième méthode analytique

1. f est le rapport de deux fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = -\frac{e^{i\theta}P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = -\frac{ire^{i\theta}P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2} = ir\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$$

2a. La fonction $r \to \dfrac{1}{P(re^{i\theta})}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, donc d'après le théorème de dérivation sous-signe intégral, la fonction $r \to F(r)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall r \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} F'(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{ir}\int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{ir}\left[f(r,\theta)\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Car $\theta \to f(r,\theta)$ est 2π-périodique, donc $\forall r \in \mathbb{R}^*, \quad F'(r) = 0$ et puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$, F' est constante sur $\mathbb{R}$.
2b. On sait, d'après la partie préliminaire, qu'il existe $R > 0$ tel que $\forall |z| > R$, on a $\dfrac{1}{|P(z)|} \leq \dfrac{2}{|a_d||z|^d}$, donc $\forall r \geq R$, $\dfrac{1}{|P(re^{i\theta})|} \leq \dfrac{2}{|a_d|r^d}$ et par conséquent :

$$|F(r)| \leq \frac{4\pi}{r^d}.$$

Donc

$$\lim_{r\to+\infty} F(r) = 0.$$

2c. On a $F(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a_0} = \frac{2\pi}{a_0}$. D'où $\forall r \geq 0, \quad F(r) = F(0)$, c'est-à-dire F est une fonction constante, ce qui est en contradiction avec le fait que $\lim_{r\to\infty} F(r) = 0$. Donc notre hypothèse, P ne s'annule pas, est fausse. Donc on a montré que tout polynôme non constant à coefficients complexes possède une racine complexe.

DEUXIÈME PARTIE : MÉTHODES ALGÉBRIQUE

A. Premiers résultats

1a. Soit $P(X) = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$ un tel polynôme. Supposons, pour simplifier, que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x\longrightarrow-\infty} P(x) = -\infty$

$$\exists A \in \mathbb{R}^{+*} \ tel\ que\ x \geq A \Longrightarrow P(x) \geq 1 \ et\ x \leq -A \Longrightarrow P(x) \leq -1,$$

en particulier $P(-A) < 0 < P(A)$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]-A, A[$ tel que $P(\alpha) = 0$.
1b. Soit f un endomorphisme de E. Puisque E est de dimension impaire, le polynôme caractéristique de f est donc de degré impaire et par conséquent admet au moins une racine, c'est-à-dire f admet au

moins une valeur propre.
1c. Le polynôme minimal de A divise tout polynôme annulant A, en particulier il divise le polynôme $X^2 + X + 1$. Or le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines, alors A n'a pas de valeurs propres réelles. Mais, puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, l'endomorphisme associé à A a nécessairement des valeurs propres réelles ce qui est absurde.
2a. Soit $x \in \ker(u - \lambda id_E)$. on a

$$u(v(x)) - \lambda v(x) = v(u(x)) - \lambda v(x) = v(\lambda x) - \lambda v(x) = 0$$

donc $v(x) \in \ker(u - \lambda id_E)$, donc $v(\ker(u - \lambda id_E)) \subset \ker(u - \lambda id_E)$. De même on montre $\ker(u - \lambda id_E)$ est stable par u.
Si $y \in \mathrm{Im}(u - \lambda id_E)$, il existe x de E tel que $y = (u - \lambda id_E)(x)$. On a alors

$$u(y) = u((u - \lambda id_E)(x)) = v(u(x)) \in \mathrm{Im}(u - \lambda id_E)$$

donc $u(\mathrm{Im}(u - \lambda id_E)) \subset \mathrm{Im}(u - \lambda id_E)$, de même $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E)$ est stable par v.
2b. Le résultat est triviale si u est une homothétie. Supposons que u n'est pas une homothétie. E étant de dimension impaire, donc u admet au moins une valeur propre λ, alors l'un des sous-espaces $\ker(u - \lambda id_E)$ ou $\mathrm{Im}(u - \lambda id_E)$, d'après le théorème du rang, est de dimension impaire, et les deux sont stables par u et v, de plus ils sont des sous-espaces stricts.
3. Dans ces conditions le polynôme caractéristique possède une racine réelle, donc Sp(u) est non vide. Procédons par récurrence sur n, avec $\dim E = 2n + 1$.
Si $n = 0$, la proposition est évidement vérifiée, supposons la vérifie pour tout entier $\leq n - 1$.
Soit $\lambda \in$ Sp(u). L'un des sous-espaces $E_1 = \ker(u - \lambda id_E)$ ou $E_2 = \mathrm{Im}(u - \lambda id_E)$, par exemple E_1, est de dimension impaire et les deux sont stables par u et v. Soient u_1 et v_1 les endomorphismes de E_1 induites par u et v.
- Si $\dim E_1 = 2k + 1 < 2n + 1$, l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer que u_1 et v_1 ont un vecteur propre commun, un vecteur propre de u_1(resp : v_1) est un vecteur propre de u (resp : v).
- Si $\dim E_1 = 2n + 1$, alors $E_1 = E$ et $u = \lambda id_E$ et tout vecteur propre de v est un vecteur propre de u.

B. Endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension impaire

1. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors ${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^t M +^t N = \lambda \overline{M} + \overline{N} = \overline{\lambda M + N}$, donc $\lambda M + N \in \mathcal{F}$ et par conséquent $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel réel.
2. Soit $M = (a_{lk})_{1 \leq l,k \leq n}$ une matrice de $\mathcal{F}$, alors $\forall l \in \{1, ..., n\}$, $a_{ll} = \overline{a_{ll}}$ et $a_{kl} = \overline{a_{lk}}$ pour $k \neq l$. Donc si on pose $a_{kl} = A_{k,l} + iB_{kl}$, alors on a d'une manière unique :

$$M = \sum_{k=1}^{n} a_{ll} E_{ll} + \sum_{k<l} A_{kl}(E_{kl} + E_{lk}) + \sum_{k<l} B_{kl}(i(E_{kl} - E_{lk}).$$

On déduit facilement $\dim \mathcal{F} = n + 2\dfrac{n(n-1)}{2} = n^2$, entier impair.
3a. Il est clair que les applications u et v sont linéaires. Si $M \in \mathcal{F}$, on a

$$\begin{aligned} {}^t(u(M)) &= \frac{1}{2}({}^t M {}^t A + \overline{A}^t M) \\ &= \frac{1}{2}(\overline{M}^t A + \overline{AM}) = \overline{u(M)}, \end{aligned}$$

donc $u(M) \in \mathcal{F}$. De même $v(M) \in \mathcal{F}$ et par conséquent u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.
3b. Soit $M \in \mathcal{F}$, alors

$$\begin{aligned} u(v(M)) &= u\left(\frac{1}{2}(AM +^t \overline{A})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(A\left[\frac{1}{2i}(AM - M^t\overline{A})\right] + \frac{1}{2i}\left[(AM - M^t\overline{A})\right]^t \overline{A}\right) \\ &= \frac{1}{4i}\left(A^2 M - M({}^t\overline{A})^2\right) \end{aligned}$$

De même $vu(M) = \dfrac{1}{4i}\left(A^2 M - M({}^t\overline{A})^2\right)$, et par conséquent $uv = vu$.
u et v sont deux endomorphismes commutables de l'espace vectoriel $\mathcal{F}$, de dimension impaire n^2, car n

est impaire. Donc d'après la question **A.3**, u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.
3c. Les conditions $u(M_0) = \lambda M_0$ et $v(M_0) = \mu M_0$ sont équivalentes à

$$\begin{cases} AM_0 + M_0^t\overline{A} = 2\lambda M_0 \\ AM_0 - M_0^t\overline{A} = 2i\mu M_0 \end{cases}$$

Donc on a $AM_0 = (\lambda + i\mu)M_0$.
Posons $M_0 = [C_1, C_2, ..., C_n]$ avec $C_1, C_2, ..., C_n$ les colones de M_0. Comme $M_0 \neq 0$, il existe $l_0 \in [1, n]$ tel que $C_{l_0} \neq 0$, alors on a nécessairement $AC_{l_0} = (\lambda + i\mu)C_{l_0}$, c'est-à-dire $\lambda + i\mu$ est une valeur propre de A.
4a. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension impaire et A sa matrice dans une base quelconque, d'après la dernière question A admet une valeur propre, ce qui est équivalent à dire que f admet une valeur propre.
4b. Soient u et v deux endomorphismes commutables, donc, d'après la dernière question, leur spectres sont non vides, le même raisonnement de la question **A.3** s'applique.

C. Étude du cas général

CI. Étude de l'assertion (i) de $\mathcal{P}_k$
1. Il est clair que $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de plus si $M = (a_{kl})_{1\leq k,l\leq n} \in \mathcal{G}$, alors $2a_{ll} = 0$ pour tout i et $a_{kl} = -a_{lk}$ pour $k < l$, donc $\mathcal{G}$ est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
2a. Il est clair que les applications u et v sont linéaires. Si $M \in \mathcal{G}$, on a

$$\begin{aligned} {}^t(u(M)) &= {}^tM^tA + \overline{A}^tM \\ &= \overline{M}^t\overline{A} +^t A\overline{M} = -u(M), \end{aligned}$$

donc $u(M) \in \mathcal{G}$. De même $v(M) \in \mathcal{F}$ et par conséquent u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.
Soit $M \in \mathcal{F}$, alors

$$\begin{aligned} u(v(M)) &= u(AM + M^tA) \\ &= A(AM + M^tA)^tA \\ &= A^2M^tA + AM(^tA)^2 \end{aligned}$$

De même $uv(M) = A^2M^tA + AM(^tA)^2$, et par conséquent $uv = vu$.
2b. u et v sont deux endomorphismes commutables de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{F}$, de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1}q$, avec q entier impaire. Donc d'après l'hypothèse de récurrence u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.
2ci. Les conditions $u(N_0) = \lambda N_0$ et $v(N_0) = \mu N_0$ sont équivalentes à

$$\begin{cases} AN_0 + N_0^tA = 2\lambda N_0 \\ AN_0^tA = 2i\mu N_0 \end{cases}.$$

Donc on multipliant la première équation par A et on utilisant la deuxième équation, on obtient

$$A^2N_0 + \mu N_0 - \lambda AN_0 = 0,$$

ou encore

$$(A^2 + \mu I_n - \lambda A)N_0 = 0.$$

2cii. La condition $(A^2 - \lambda A + \mu A)N_0 = (A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)N_0 = 0$ entraîne nécessairement

$$(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)W = 0.$$

2ciii. Si α n'est pas une valeur propre de A, alors $A - \alpha I_n$ est inversible, donc $(A - \beta I_n)W = 0$ et comme $W \neq 0$, alors β est une valeur propre de A. Ainsi on a montré que toute matrcie, et par conséquent tout endomorphisme, admet au moins une valeur propre.

CII. Étude de l'assertion (ii) de $\mathcal{P}_k$

1. D'après la partie **CI**, Sp(g) est non vide, donc si f est une homothétie, alors tout vecteur propre de g est un vecteur propre de f.

2a. Les deux sous-espaces F_1 et F_2 étant stables par f et g. Soient f_1 et g_1 les endomorphismes de F_1 (ou F_2) induites par f et g, l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer que f_1 et g_1 ont un vecteur propre commun, un vecteur propre de f_1(resp : g_1) est un vecteur propre de f (resp : g).

2b. Les hypothèses entraînent $0 < \dim F_1 < 2^k p$ et $0 < \dim F_2 < 2^k p$. D'après le théorème du rang on a $2^k q + 2^k r = 2^k p$, donc nécessairement $q + r = p$ et par conséquent $q < p$ car $r > 0$. Ainsi on peut utiliser un raisonnement par récurrence descendant.

D. Retour au théorème fondamental de l'algèbre

1. Montrons par récurrence sur n que $\chi_A(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right)$. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, montrons le au rang n. En développant par rapport à la première ligne, on a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -X & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} - X \end{vmatrix} =$$

$$-X \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & -X & & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} - X \end{vmatrix} - (-1)^n a_0 \begin{vmatrix} 1 & -X & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -X \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et donc d'après l'hypothèse de récurrence

$$\chi_A(X) = (-1)^n X(X^{n-1} - a_{n-1}X^{n-2} - ... - a_1) + (-1)^n a_0 = (-1)^n (X^n - a_{n-1}X^{n-1} - ... - a_1 X - a_0).$$

2. D'après l'étude précédente, l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre, autrement dit, son polynôme caractéristique $(-1)^n P$ admet au moins une racine.

3. Soit P un polynôme non constant, que l'on peut supposer unitaire, soit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Alors on peut lui associer un endomorphisme f de matrice de type A et d'après la question précédente, f admet au moins une valeur propre, c'est-à-dire son polynôme caractéristique admet une racine. D'où la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

●●●●●●●●●●●●

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr