

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

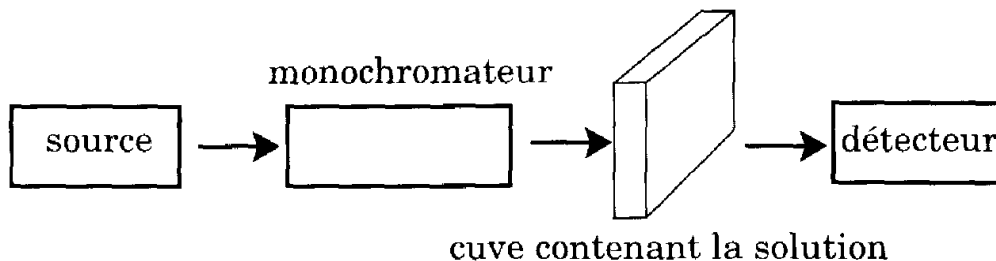
<u>Spectrophotomètre à réseau</u>	2
I. <u>Loi de Beer et Lambert</u>	2
II. <u>Diffraction par une, puis par deux fentes rectangulaires</u>	3
III. <u>Quelques propriétés des réseaux et principe du monochromateur</u>	4
IV. <u>Sélection de la longueur d'onde par positionnement précis d'un réseau par réflexion</u>	6
V. <u>Estimation de la bande passante spectrale du spectrophotomètre</u>	8
VI. <u>Détermination par spectrophotométrie de la stoechiométrie d'un complexe</u>	9

Spectrophotomètre à réseau

L'absorption des radiations lumineuses par la matière dans le domaine s'étendant du proche ultraviolet au très proche infrarouge a beaucoup d'applications en analyse chimique quantitative. Le calcul des concentrations des différentes espèces en solution, par application de la loi de Beer et Lambert, constitue la base de la colorimétrie.

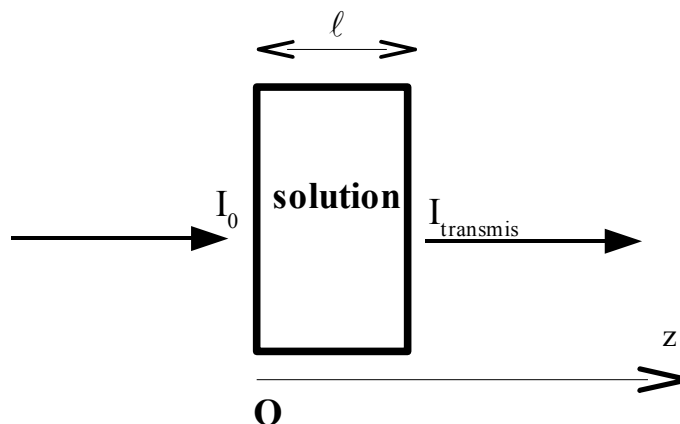
Les mesures d'absorbance des solutions sont effectuées à l'aide d'un spectrophotomètre. Globalement, un spectrophotomètre est constitué de la réunion de trois parties distinctes: la source lumineuse, le système dispersif (monochromateur) et le détecteur. Dans tout le problème, les parois de la cuve contenant la solution sont considérées comme infiniment fines, non absorbantes et non réfléchissantes.

Schéma de principe



I. Loi de Beer et Lambert

Une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ se propageant suivant la direction \vec{u}_z arrive en incidence normale sur la face d'entrée d'une cuve, d'épaisseur ℓ selon z , contenant une solution d'une substance absorbante de concentration c . La puissance par unité de surface traversant la face d'entrée vaut $I_{(z=0)} = I_0$.



Lors de la propagation de l'onde entre z et $z+dz$, la puissance par unité de surface diminue et passe de $I(z)$ à $I(z+dz)$ avec $dI = I(z+dz) - I(z)$.

On admet que les molécules de la substance en solution absorbent la lumière indépendamment les unes des autres, ce qui revient à dire que la probabilité d'absorber un photon est toujours la même pour chaque molécule, dI est alors proportionnel au nombre de photons arrivant en z et au nombre de molécules présentes dans la lamelle de liquide de surface unité et d'épaisseur dz .

1. Donner l'expression du nombre de molécules absorbantes présentes dans la lamelle de liquide de surface unité et d'épaisseur dz (on note N_A le nombre d'Avogadro).
2. On écrit finalement $dI = -\alpha(\lambda)c I(z)dz$. On désigne par $\alpha(\lambda)$ un coefficient d'absorption linéique molaire, caractéristique de l'espèce absorbante. Commenter cette appellation. Justifier l'expression de dI .
3. Établir l'expression de $I(z)$ en fonction de $\alpha(\lambda), c, I_0, z$ et en déduire l'intensité transmise notée $I(\lambda) = I(z = \ell)$ pour la longueur d'onde λ .
4. Déterminer l'absorbance $A(\lambda) = -\log_{10}\left(\frac{I(\lambda)}{I_0}\right)$. La loi de Beer et Lambert relie absorbance et concentration de la substance absorbante sous la forme $A(\lambda) = \varepsilon(\lambda)\ell c$ avec $\varepsilon(\lambda)$: coefficient d'absorption molaire. Exprimer $\varepsilon(\lambda)$.

II. Diffraction par une, puis par deux fentes rectangulaires

On considère une pupille diffractante, contenue dans le plan Oxy , constituée par l'association de deux fentes identiques de largeur a et distantes entre elles de b . Cette pupille est éclairée sous incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ . On se propose d'établir l'expression de l'intensité lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ repérée par le vecteur unitaire \vec{u} de composantes $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ (figure 1).

Valeurs numériques : $a = 0,600 \mu m$, $b = 1,600 \mu m$ et $\lambda = 589 nm$

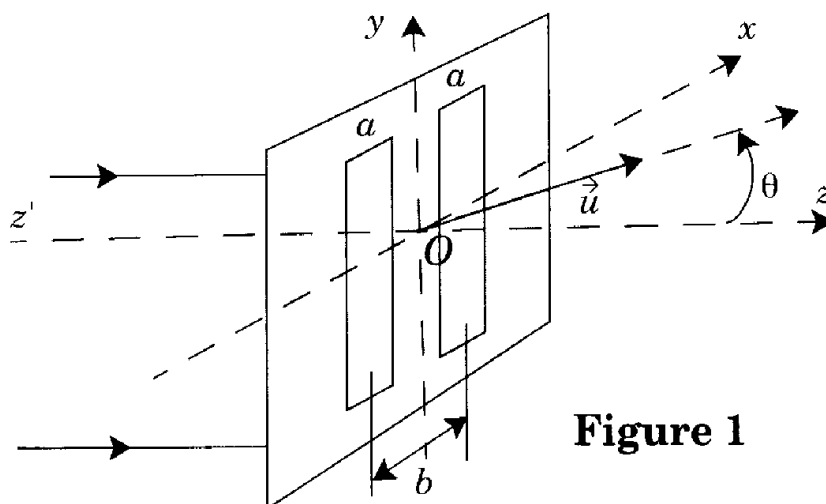


Figure 1

On pose $j^2 = -1$. En ce qui concerne les notations complexes, on travaillera en $\exp(+j\omega t)$.

5. Énoncer le principe de Huygens-Fresnel permettant de calculer l'amplitude diffractée.
6. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de préciser la hauteur h des fentes selon Oy ?
7. On ferme dans un premier temps la fente centrée en $x = -b/2$. Établir, en respectant la convention adoptée (on travaille en $\exp(+j\omega t)$) et en exprimant les résultats en fonction des notations de l'énoncé, l'expression de $\underline{s}_1(\theta)$, amplitude complexe de la vibration lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ ($\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$) définie ci-dessus par la fente restée ouverte.
8. Montrer que $\underline{s}_1(\theta)$ se met sous la forme $\underline{s}_1(\theta) = \underline{s}_F(\theta) \exp(j\Phi/2)$ où $\underline{s}_F(\theta)$ est l'amplitude complexe diffractée dans la direction θ par une fente identique centrée en $x=0$ et Φ est une fonction de θ à expliciter. Préciser la signification physique de Φ .
9. Pour quelles valeurs de θ (en degrés et en radians) $\underline{s}_1(\theta)$ est-il nul?
10. Donner l'expression $\underline{s}_2(\theta)$ de l'amplitude diffractée par l'autre fente, si elle seule est ouverte.
11. En déduire l'expression de l'intensité lumineuse $I(\theta)$, diffractée à l'infini dans la direction θ par les deux fentes, en notant $I(\theta=0) = I_0$.
12. La courbe (figure 2) représente le tracé de la fonction $I(\theta)/I_0$ pour θ variant de $-\pi/2$ à $\pi/2$. Commenter ce tracé. En particulier, on justifiera le nombre de maxima observables. Préciser l'ordre d'interférence pour chacun de ces maxima.

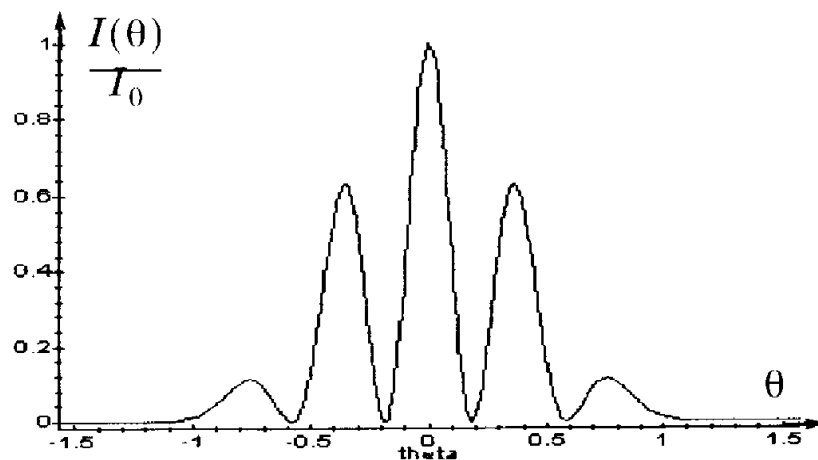


Figure 2

III. Quelques propriétés des réseaux et principe du monochromateur

On se propose d'étudier la diffraction par un réseau constitué de N fentes identiques, de largeur a et distantes entre elles de b . Les deux fentes de la *figure 1* sont remplacées maintenant par le réseau éclairé en incidence normale, et on cherche à calculer l'intensité lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ définie comme en II. On rappelle $a = 0,600 \mu\text{m}$, $b = 1,600 \mu\text{m}$. Sauf mention contraire l'onde incidente est une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ .

13. Montrer, avec précision, que l'amplitude complexe de la vibration lumineuse diffractée à l'infini par le réseau dans la direction θ s'écrit sous la forme $\underline{s}_R(\theta) = \underline{s}_F(\theta) [1 + \exp(j\Phi) + \dots + \exp(j(N-1)\Phi)]$ la fente *numéro* 1 étant centrée sur l'axe Oy . Justifier le signe des exposants dans les exponentielles. Préciser l'expression de Φ en fonction de b , θ et λ . On pose $\Phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ et $p = \frac{\delta}{\lambda}$. Que représentent δ et p ?

L'intensité lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ peut s'écrire sous la forme $I_R(\theta) = N^2 I_F(\theta) f(N, \Phi)$ en notant $I_F(\theta)$ l'intensité diffractée par une seule fente. La fonction $f(N, \Phi)$ résulte du phénomène d'interférences multiples entre les rayons diffractés par les milieux des fentes dans la direction θ .

A titre d'indication, la *figure 3a* donne les variations de la fonction $f(N, \Phi)$ pour $N=8$ et $\Phi \in [0, 15]$, mais les questions suivantes sont à traiter dans le cas général.

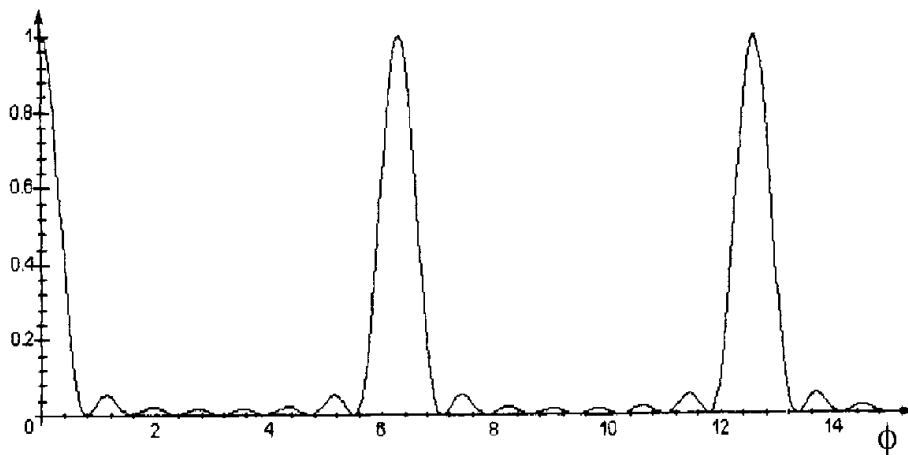


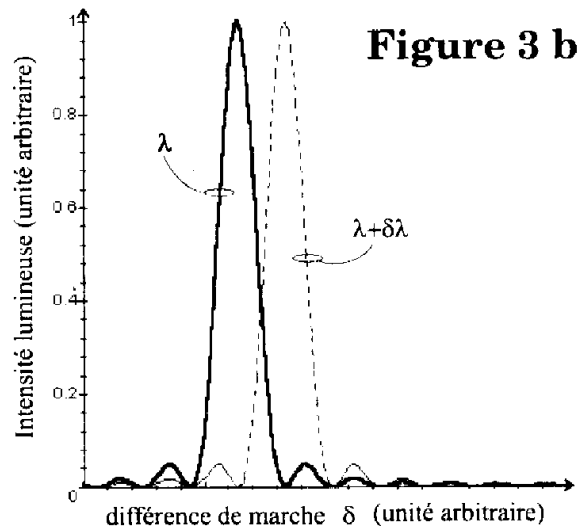
Figure 3 a

14. Par un raisonnement qualitatif sur le phénomène d'interférences (c'est-à-dire sans chercher à calculer $f(N, \Phi)$), déterminer les valeurs de δ et de p correspondant aux maxima principaux de la fonction $f(N, \Phi)$.
15. De même, déterminer les valeurs de δ et de p qui correspondent aux deux premières annulations de $f(N, \Phi)$ de part et d'autre du maximum principal d'ordre $p=0$. En déduire les valeurs de δ et de p pour les deux premières annulations de $f(N, \Phi)$ de part et d'autre du maximum principal d'ordre $p=p_0$.

16. On donne: $f(N, \Phi) = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2\left(\frac{N\Phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$. Retrouver par calcul les résultats des deux questions précédentes.

17. Dans cette question, la source lumineuse comporte deux longueurs d'onde voisines λ et $\lambda + \delta\lambda$ (avec $\delta\lambda > 0$). On dit que le réseau sépare (de façon limite) ces deux longueurs

d'onde si le maximum principal d'ordre p_0 , pour la longueur d'onde $\lambda + \delta\lambda$ coïncide avec la première annulation voisine du maximum principal d'ordre p_0 pour λ (*figure 3b*). En déduire l'expression du pouvoir de résolution $R = \lambda / \delta\lambda$ du réseau.

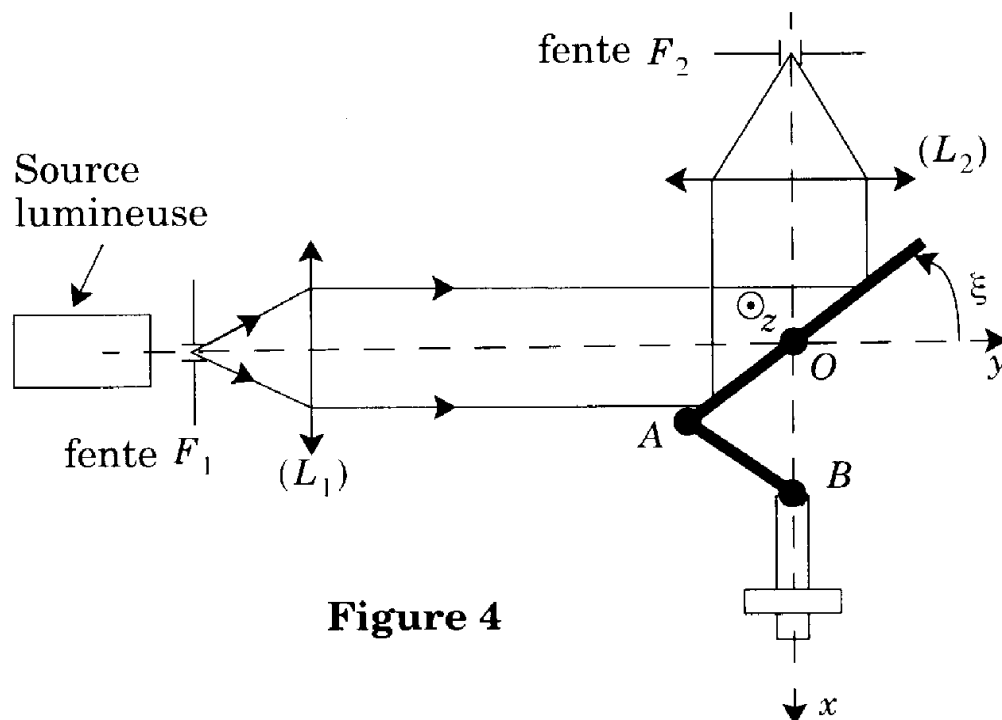


18. A l'aide du réseau décrit précédemment, on souhaite séparer dans l'ordre 1, le doublet du sodium (589 et 589,6 nm). Déterminer N , nombre de fentes nécessaires pour séparer le doublet.
19. Le réseau est éclairé en incidence normale avec une source lumineuse de spectre continu comportant des radiations comprises dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ avec $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 660 \text{ nm}$. Déterminer les intervalles angulaires en degrés $[\alpha_1, \beta_1]$ et $[\alpha_2, \beta_2]$ dans lesquels on observe respectivement les spectres d'ordre un et deux. Y-a-t-il chevauchement des spectres d'ordre 1 et 2 ?
20. Calculer $[\alpha_3]$, direction du maximum principal d'ordre 3 pour la longueur d'onde λ_1 . Conclure en ce qui concerne le chevauchement des spectres d'ordre 2 et 3.

IV. Sélection de la longueur d'onde par positionnement précis d'un réseau par réflexion

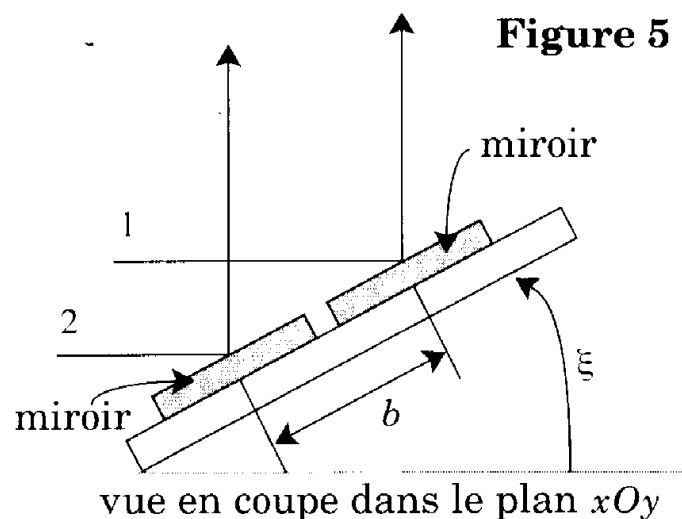
Un réseau par réflexion peut être décrit comme l'association de miroirs identiques de largeur a distants de b . Le schéma de principe d'un monochromateur à réseau par réflexion est indiqué ci-contre.

Une source lumineuse polychromatique, comportant des radiations comprises dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ éclaire une fente source F parallèle à Oz placée au foyer objet d'une lentille convergente L_1 de distance focale image f'_1 . Le réseau par réflexion est fixé sur une monture mobile en rotation autour de l'axe Oz parallèle aux traits du réseau et peut donc pivoter autour de l'axe Oz . Cette monture est mise en mouvement par un bras de levier articulé à un bras de même longueur, solidaire d'un écrou mobile le long d'une vis sans fin de grande qualité. On note $OA = AB = L$. Une fente F_2 parallèle à Oz , est placée au niveau du foyer image d'une lentille L_2 de distance focale image f'_2 .

**Figure 4**

Application numérique : $a=0,600 \mu\text{m}$, $b=1,600 \mu\text{m}$, $L=5,00 \text{ cm}$, $\lambda_1=400 \text{ nm}$ et $\lambda_2=660 \text{ nm}$.

Les miroirs étant de grande dimension perpendiculairement au plan de la figure, on se contente d'étudier le phénomène de diffraction dans ce plan.

**Figure 5**

On suppose dans un premier temps que les largeurs des fentes F_1 et F_2 sont négligeables. Le rayon diffracté considéré est donc ici perpendiculaire au rayon incident correspondant.

21. Exprimer en fonction de l'angle ξ (voir *figure 4* et *figure 5*) la différence de marche $\delta = \delta_{1/2}$ en F_2 , du rayon 1 par rapport au rayon 2 après diffraction (les deux miroirs sont consécutifs).
22. Pour quelle valeur ξ_0 de ξ cette différence de marche est-elle nulle ?
23. À λ donné, comparer les positions du réseau pour lesquelles les ordres $p = +1$ puis $p = -1$ sont observés en F_2 . Dans la suite, on impose $0 < \xi < \xi_0$, on prendra alors $p > 0$. Justifier ce résultat.
24. On souhaite utiliser le spectre d'ordre $+1$ donné par ce réseau. On note ξ_1 (respectivement ξ_2) la valeur de l'angle ξ pour laquelle on récupère une radiation de longueur d'onde λ_1 (respectivement λ_2) au niveau de la fente F_2 . Déterminer les valeurs numériques de ξ_1 et de ξ_2 en degrés.
25. Établir, pour le spectre d'ordre $+1$, la relation entre la position x du point B , extrémité de l'écrou mobile, et la longueur d'onde λ . Mettre cette relation sous la forme $x = g(\lambda, b, L)$.
26. Calculer les valeurs numériques de x_1 et x_2 correspondant à λ_1 et λ_2 ainsi que la valeur numérique de la course $\Delta = x_2 - x_1$, de l'écrou permettant de balayer le spectre d'ordre 1 de λ_1 à λ_2 .
27. Donner l'expression de la fonction $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ ainsi que sa valeur numérique minimale puis maximale sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$. Avec quelle précision δx faut-il contrôler la position de l'écrou mobile pour que la longueur d'onde au niveau de la fente F_2 soit déterminée à 2 nm près.

V. Estimation de la bande passante spectrale du spectrophotomètre

Le réseau, éclairé comme au IV, est utilisé dans l'ordre 1.

Les fentes F_1 et F_2 sont centrées respectivement sur les axes optiques de L_1 et de L_2 mais on tient compte maintenant de la largeur η des fentes F_1 et F_2 en supposant a priori que $\eta \ll f'_2 = f'_1$.

28. Donner la valeur maximale i_{\max} puis minimale i_{\min} de l'angle d'incidence i sur le réseau à ξ fixé en fonction de ξ, η, f'_1 . En déduire l'« erreur » δi sur i définie par $\delta i = (i_{\max} - i_{\min})/2$. Donner de même l'« erreur » sur l'angle d'émergence.
29. Donner l'expression générale pour $\delta_{1/2}$ en faisant intervenir l'angle d'incidence i et un angle i' (à définir avec soin) pour la direction considérée après diffraction. En déduire la relation entre i , i' et λ à l'ordre 1.
30. En déduire « l'erreur » $\delta \lambda$ (en lien avec la largeur des fentes) puis la largeur $\Delta \lambda$ du domaine de longueur d'onde des radiations pénétrant dans la fente F_2 après passage par F_1 et réflexion sur le réseau pour un réseau utilisé dans l'ordre 1, en fonction des données $\xi, b, \eta, f' = f'_1 = f'_2$.

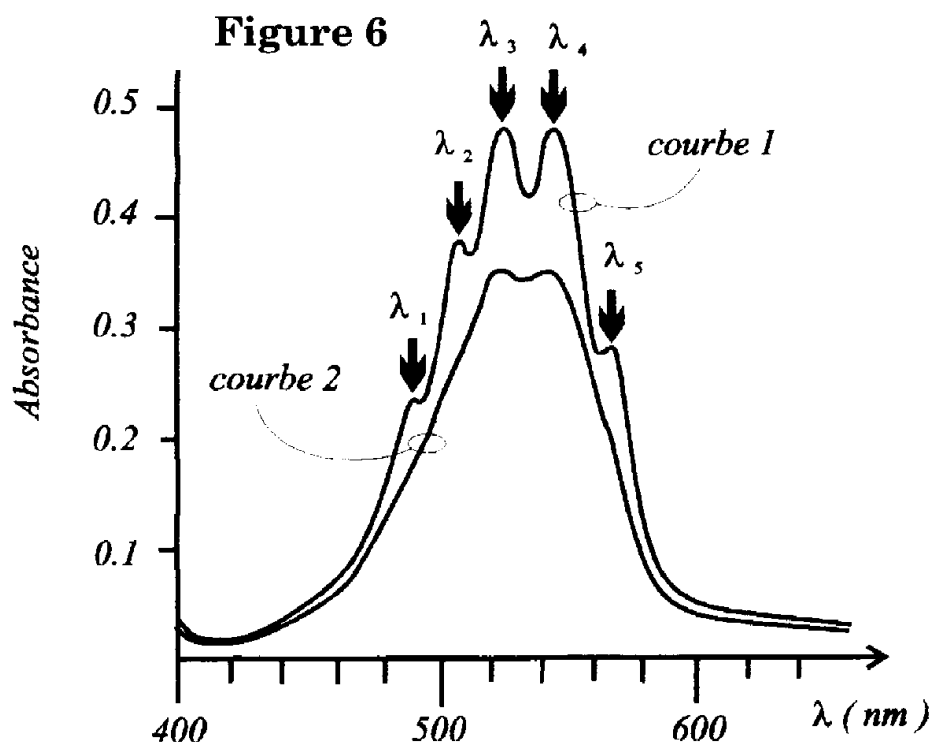
31. Donner la valeur maximale de $\Delta\lambda$ dans le domaine accessible à ξ . Application numérique:
 $f' = 50,0 \text{ mm}$, $\eta = 0,500 \text{ mm}$.

32. Un bon test permettant de juger de la qualité d'un spectrophotomètre de Travaux Pratiques consiste à comparer le spectre expérimental d'absorption (courbe 2 *figure 6*) de l'ion MnO_4^- obtenu avec cet appareil et le spectre de référence disponible dans la littérature scientifique (courbe 1).

Ce dernier présente cinq pics d'absorption en :

$$\lambda_1 = 490 \text{ nm} ; \lambda_2 = 506 \text{ nm} ; \lambda_3 = 526 \text{ nm} ; \lambda_4 = 546 \text{ nm} ; \lambda_5 = 564 \text{ nm}$$

- En exploitant la courbe 1 estimer la largeur de la bande passante en longueur d'onde $\Delta\lambda_{ref}$ de l'appareil utilisé pour établir le spectre de référence.
- Expliquer le désaccord entre les deux courbes.
- Estimer la bande spectrale $\Delta\lambda$ de l'appareil testé en Travaux Pratiques à partir de ces données expérimentales. Comparer au résultat précédent déduit de la largeur des fentes.

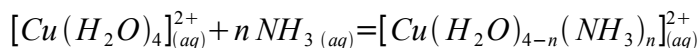


VI. Détermination par spectrophotométrie de la stoechiométrie d'un complexe

Le cuivre (II) forme avec l'ammoniac des complexes plus stables qu'avec l'eau. Il y a formation de complexes successifs. On se propose de présenter la méthode des variations continues ou méthode

de Job qui permet de déterminer le nombre de ligands au sein d'un complexe.

On étudie la formation du complexe cuivre (II)-ammoniac, dont on note la constante d'équilibre β_n :



Une solution de sulfate de cuivre (II) est une solution bleue pâle dont la couleur devient beaucoup plus intense lorsqu'on ajoute une solution d'ammoniaque car il se forme le complexe aminé.

Protocole expérimental:

On dispose d'une solution de sulfate de cuivre (II) et d'une solution d'ammoniac de concentrations identiques $c_0 = 0,044 \text{ mol.L}^{-1}$. Dans différents béchers, on réalise les mélanges indiqués ci-dessous (volume total de chaque mélange: $V_T = 20 \text{ mL}$) et on mesure l'absorbance A de chaque mélange à $\lambda = 620 \text{ nm}$, longueur d'onde où l'absorption est maximale, (voir *tableau*). On a ajouté 2 g de nitrate d'ammonium dans chaque bécher afin d'empêcher la précipitation de l'hydroxyde de cuivre(II).

Lorsque plusieurs espèces absorbent à une longueur d'onde donnée λ , l'absorbance A s'exprime de façon additive en fonction des coefficients d'absorption molaires ε_i et des concentrations c_i des espèces absorbantes: $A(\lambda) = \sum_i \varepsilon_i(\lambda) \ell c_i$. On note ε_{Cu} et ε_{cpx} les coefficients d'absorption molaires des ions $[Cu(H_2O)_4]_{(aq)}^{2+}$ (noté Cu^{2+}) et $[Cu(H_2O)_{4-n}(NH_3)_n]_{(aq)}^{2+}$ (noté $[Cu(NH_3)_n]^{2+}$), c_{Cu} et c_{cpx} les concentrations des ions Cu^{2+} et $[Cu(NH_3)_n]^{2+}$ dans un mélange étudié, ℓ ($\ell = 1 \text{ cm}$) la longueur de la cuve du spectrophotomètre. On a $\varepsilon_{cpx} > \varepsilon_{Cu}$.

Bécher N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$V_{Cu^{2+}} / \text{mL}$	2,5	3,0	3,5	3,75	4,0	4,25	4,5	5,0	5,5	6,0	12	20
V_{NH_3} / mL	17,5	17	16,5	16,25	16	15,75	15,5	15,0	14,5	14,0	8,0	0
A	0,224	0,262	0,305	0,327	0,329	0,326	0,319	0,309	0,295	0,275	0,134	0,080

33. A quelle partie du spectre visible correspond la longueur d'onde $\lambda = 620 \text{ nm}$. Commenter la valeur numérique expérimentale de λ correspondant à l'absorption maximale.

34. On pose $A_0 = \varepsilon_{Cu} c_0 \ell$. Préciser la nature d'une solution dont l'absorbance est A_0 et trouver dans le tableau la valeur numérique de A_0 .

35. Quelle est la condition, vérifiée ici, pour que l'absorbance d'un mélange étudié, dans un bécher quelconque, soit égale à $A = (\varepsilon_{Cu} c_{Cu} + \varepsilon_{cpx} c_{cpx}) \ell$?

36. Quelle est la valeur de $x = \frac{V_{NH_3}}{V_T}$ notée x_S en fonction de n pour laquelle le mélange est stoechiométrique.

37. Écrire le tableau d'avancement (nombre de moles à l'équilibre) dans le cas d'un bécher

quelconque en fonction de V_{NH_3} , V_T , c_0 et de l'avancement à l'équilibre ξ puis en fonction de V_{NH_3} , V_T , c_0 , c_{cpx} (c_{cpx} désigne la concentration du complexe à l'équilibre dans le bécher étudié).

38. En déduire l'expression de l'absorbance A , pour le bécher étudié, en fonction de V_{NH_3} , V_T , c_0 , c_{cpx} , ϵ_{Cu} , ϵ_{cpx} et ℓ . Exprimer l'absorbance, relative au même bécher, notée A' , s'il n'y avait pas eu de réaction, en fonction de A_0 et x .

39. On définit l'absorbance corrigée A_{cor} par $A_{cor} = A - A'$. Montrer que $A_{cor} = K c_{cpx}$ et donner l'expression de la constante K .

40. Compléter le tableau de données par les deux lignes: x et A_{cor} .

41. La réaction est supposée quantitative (« totale »),

- Quel est le réactif limitant si $x < x_S$. Exprimer dans ce cas c_{cpx} en fonction de c_0 , x et n .
- Quel est le réactif limitant si $x > x_S$. Exprimer c_{cpx} .
- Exprimer c_{cpx} si $x = x_S$.

42. Prévoir l'allure du graphe de A_{cor} en fonction de x lorsque la réaction est totale. Comment peut-on déduire simplement du maximum la valeur de n .

43. En supposant ce dernier résultat utilisable ici, déterminer la formule du complexe étudié.

44. Il faut tenir compte de β_n . La réaction n'est plus considérée comme « totale ». Donner la relation entre c_{cpx} et c_0 , x , n , β_n . Pour quelle valeur de x , la concentration en complexe est-elle maximale? Conclure sur le bien fondé de la méthode de détermination de n .

45. Pour la réaction, on a $\log(\beta_n) = 12,6$. Calculer les concentrations à l'équilibre en $x = x_S$. La réaction était-elle « totale »?

Réponses

Spectrophotomètre à réseau

1) Dans un volume $S dz$ le nombre de moles vaut

$$dn = S dz c$$

soit en molécules, N_A désignant le nombre d'Avogadro

$$dN = N_A S dz c$$

et par unité de surface

$$dN_{/m^2} = N_A dz c$$

2) dI est négligé (les photons sont absorbés entre z et $z+dz$)
 \rightarrow est proportionnel au nombre de photons en z donc
 proportionnel à $I(z)$

est proportionnel au nombre de molécules dans la tranche dz soit $N_A dz c$

$$D'où \quad dI = - I(z) dz c \propto (\lambda)$$

\uparrow
 coefficient de proportionnalité

\rightarrow unité de α

$$[\alpha] = [c]^{-1} [dz]^{-1}$$

$$\alpha \text{ en } (\text{mol/L})^{-1} (\text{m})^{-1}$$

d'où les qualificatifs :

molaire linéique

$$3) \quad \begin{aligned} I \, dI &= -\alpha c I \, dz \\ \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} &= -\alpha c \int_0^z dz \\ \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) &= -\alpha c z \end{aligned}$$

$$I = I_0 \exp(-\alpha c z)$$

L'intensité transmise (cuve d'épaisseur l) est :

$$I(\lambda) = I_0 \exp(-\alpha c l)$$

4) L'absorbance A est donnée par

$$A(\lambda) = -\log \frac{I}{I_0}$$

$$= \frac{-\ln \frac{I}{I_0}}{\ln 10}$$

$$A(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\ln(10)} \ell c$$

$$E(\lambda)$$

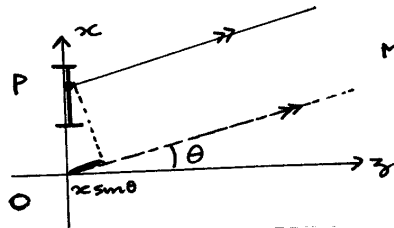
$$E(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\ln(10)} = \frac{\alpha(\lambda)}{2,3}$$

5) Enoncé du principe de Huyghens-Fresnel :

Tout point P d'une surface atteinte par la lumière issue d'une source ponctuelle devient source secondaire d'ondelettes sphériques cohérentes. Ces ondelettes ont d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente et à la surface dS en P et de pulsation et de phase identiques à celles de l'onde incidente.

6) On étudie ici la diffraction selon x (cf $\vec{u} = \sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_z$). La coordonnée y n'intervenant pas dans les calculs, il est inutile de préciser la hauteur des fentes.

7)



On travaille en $\exp i(\omega t - \varphi)$ avec pour référence le rayon arrivé en M et passé par O.

Pour le rayon diffracté en P

$$\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda}$$

avec δ différence de marche de PM / OM.

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (-x \sin\theta)$$

et

$$\Delta_1(\theta, t) = A_0 \exp i(\omega t - \frac{2\pi OM}{\lambda}) \int_{x=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}} \exp -i\varphi dx$$

donc, à une constante multiplicative C près :

$$\underline{\Delta}_1(\theta) = C \int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{b+a}{2}} \exp\left(j \frac{2\pi x \sin\theta}{\lambda}\right) dx$$

remarque :

on pourrait faire aussi :

$$\underline{\Delta}_1(\theta; t) = A_0 \int \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{PM})) dx$$

$$= A_0 \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})) \int \exp(j \vec{k} \cdot \vec{OP}) dx$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \begin{vmatrix} \sin\theta & x \\ 0 & y \\ \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= A_0 \exp(j(\omega t - k OM)) \int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{b+a}{2}} \exp(j \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda} x) dx$$

le calcul :

$$\underline{\Delta}_1(\theta) = C \frac{\exp(j \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda} \frac{b+a}{2}) - \exp(j \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda} \frac{b-a}{2})}{j \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda}}$$

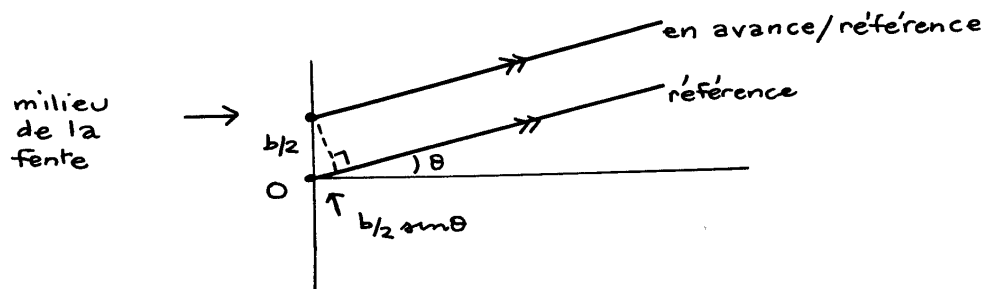
$$= C \exp(j \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda} \frac{b}{2}) \frac{2j \sin(\frac{2\pi \sin\theta}{\lambda} \frac{a}{2})}{j \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda}}$$

$$\underline{\Delta}_1(\theta) = C a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \sin\theta}{\lambda} a\right) \exp(j \frac{\pi \sin\theta}{\lambda} b)$$

3) → Si on considère une fente centrée ($b=0$) alors

$$\underline{\Delta}_F(\theta) = C a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \sin\theta}{\lambda} a\right)$$

→ Si on désigne par $\phi/2$ la phase retard du rayon passant par O par rapport au rayon passant par le centre de la fente considérée dans la direction θ



donc $\phi/2 = \frac{2\pi}{\lambda} b/2 \sin \theta$

$$\phi/2 = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta$$

et finalement, on a bien :

$$\underline{\Delta_1(\theta)} = \underline{\Delta_F(\theta)} \exp i(\phi/2)$$

9) L'amplitude diffractée $\Delta_F(\theta)$ (ou $\Delta_1(\theta)$) est nulle pour

$$\text{sinc}\left(\frac{\pi \sin \theta a}{\lambda}\right) = 0$$

$$\frac{\pi \sin \theta a}{\lambda} = m\pi \quad m \in \mathbb{Z}^*$$

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}$$

avec la condition

$$-1 \leq \sin \theta \leq +1$$

$$-\frac{a}{\lambda} \leq m \leq \frac{a}{\lambda}$$

A.N.

$$-1,019 \leq m \leq 1,019$$

donc deux valeurs $m=+1$ et $m=-1$

m	θ_{rad}	$\theta_{\text{degré}}$
+1	1,379	79
-1	-1,379	-79

10) Pour trouver $\underline{\Delta_2}$, il suffit de faire $b \rightarrow -b$ dans $\underline{\Delta_1}$

$$\underline{\Delta_2(\theta)} = \underline{\Delta_F(\theta)} \exp -i\phi/2$$

11) On cherche d'abord l'amplitude totale :

$$\begin{aligned}\Delta(\theta) &= \Delta_1(\theta) + \Delta_2(\theta) \\ &= \Delta_F(\theta) (\exp(i\phi/2) + \exp(-i\phi/2)) \\ &= 2 \Delta_F(\theta) \cos \phi/2\end{aligned}$$

$$\Delta(\theta) = 2 C a \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \sin \theta a}{\lambda}\right) \cos \phi/2$$

$$I(\theta) = \Delta(\theta) \Delta^*(\theta)$$

$$= 4 C a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \sin \theta a}{\lambda}\right) \cos^2 \phi/2$$

En posant $I(\theta=0) = I_0$

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \sin \theta a}{\lambda}\right) \cos^2 \phi/2$$

$$\text{avec } \phi = \frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda}$$

remarque

En passant à l'angle double ϕ pour retrouver la forme traditionnelle de la fonction interférence

$$I(\theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \sin \theta a}{\lambda}\right) \frac{1 + \cos \phi}{2}$$

12) On s'intéresse aux maximums de la fonction interférence

$$\cos \frac{\phi}{2} = \pm 1$$

$$\frac{\phi}{2} = p\pi \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \theta = p \frac{\lambda}{b}$$

avec la condition

$$-1 \leq \sin \theta \leq +1$$

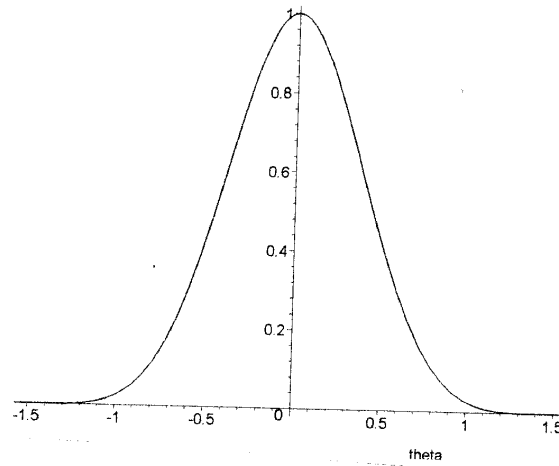
$$-\frac{b}{\lambda} \leq p \leq \frac{b}{\lambda}$$

A.N.

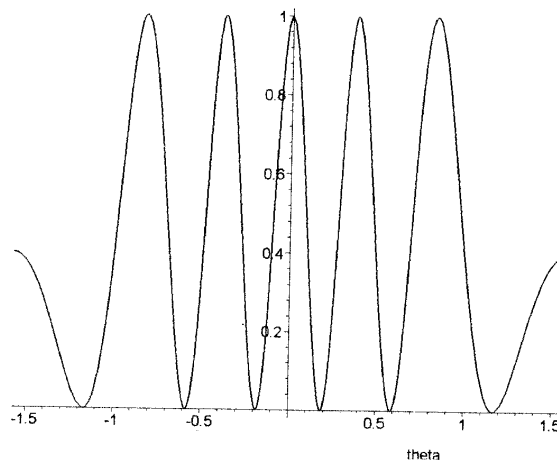
$$-2,72 \leq p \leq 2,72$$

donc 5 maximums d'interférences

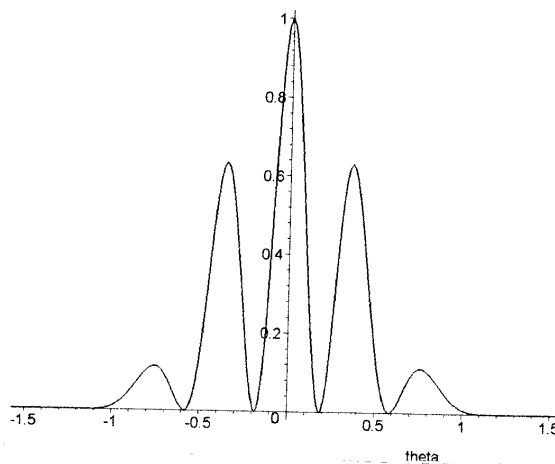
$$P = 0, \pm 1, \pm 2$$



diffraction
(on ne voit que
le lobe central)

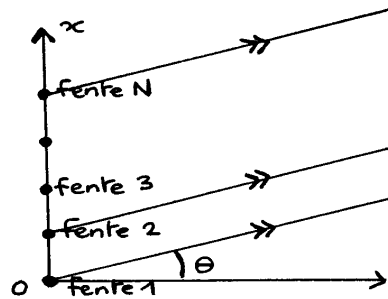


interférences
(on voit 5
maximums)

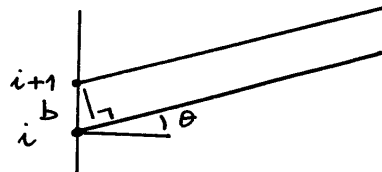


éclairement
final

13)



on désigne par δ la différence de marche du rayon passant par le centre de la fente i / rayon passant par le centre de la fente $i+1$



$$\delta = b \sin \theta$$

(indice = 1)

$$P = \frac{\delta}{\lambda}$$

(ordre d'interférences)

le déphasage retard du rayon i / rayon $i+1$ est :

$$\begin{aligned} \phi &= 2\pi P \\ &= 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\phi = \frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda}$$

on aura alors :

$$\underline{A}_1(\theta) = \underline{A}_F(\theta)$$

$$\underline{A}_2(\theta) = \underline{A}_F(\theta) \exp i\phi$$

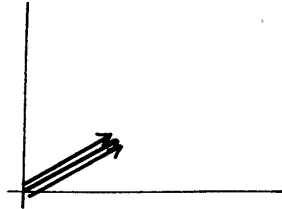
(en avance de ϕ par rapport à $\underline{A}_1(\theta)$)

$$\underline{A}_i(\theta) = \underline{A}_F(\theta) \exp i(i-1)\phi$$

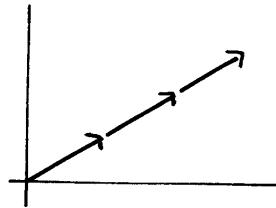
finalement :

$$\underline{A}_R(\theta) = \underline{A}_F(\theta) (1 + \exp i\phi + \dots + \exp i(N-1)\phi)$$

- 14) On s'intéresse au phénomène d'interférence entre les N rayons issus des centres des fentes
 L'interférence est constructive si les N rayons sont en phase entre eux.



construction de
Fresnel
(N rayons en phase)



donc amplitude
 N fois plus grande

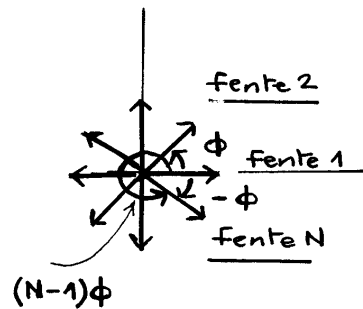
donc

$$\phi = p_0 \cdot 2\pi$$

$$p_0 \in \mathbb{Z}$$

$P = p_0$ $\delta = p_0 \lambda$

- 15) Le premier minimum au voisinage de $p=0$
 correspond à $\phi = \frac{2\pi}{N}$ soit $p = \frac{1}{N}$



construction de
Fresnel
(N rayons déphasés
de $\frac{2\pi}{N}$)

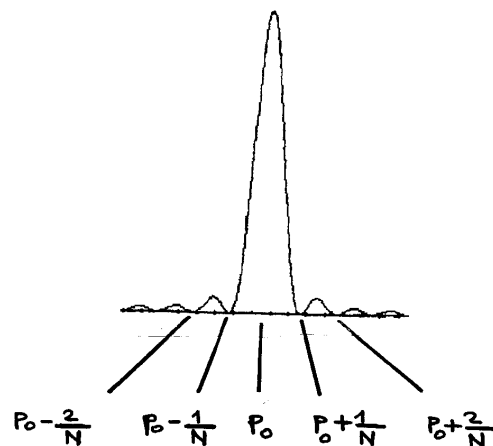
la somme est nulle

Idem dans l'autre sens.

<p>1ers minimum au voisinage de $p=0$</p> $P = \pm \frac{1}{N}$ $\delta = \pm \frac{\lambda}{N}$

De même, au voisinage P_0

<p>1ers minimum au voisinage de P_0</p> $P = P_0 \pm \frac{1}{N}$ $\delta = P_0 \lambda \pm \frac{\lambda}{N}$



16)

$$f(N, \phi) = \frac{1}{N^2} \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

→ si $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$ s'annulent

$$f(N, \phi) = \frac{1}{N^2} N^2 = 1$$

donc maximum pour

$\phi = P_0 2\pi$	$P_0 \in \mathbb{Z}$
-------------------	----------------------

→ si $\sin\left(\frac{N\phi}{2}\right)$ s'annule mais pas $\sin\frac{\phi}{2}$

$$f(N, \phi) = 0$$

donc minimum pour

$$\rightarrow \frac{N\phi}{2} = m\pi$$

$$\phi = \frac{m}{N} 2\pi \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{et} \rightarrow \frac{\phi}{2} \neq P_0 \pi$$

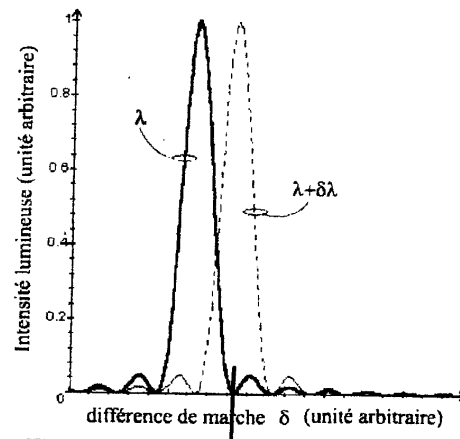
$$\phi \neq p_0 \cdot 2\pi \quad p_0 \in \mathbb{Z}$$

finalement

$$\phi = \frac{m}{N} 2\pi$$

(m n'est pas multiple de N)

17)



Pour cette différence de marche δ

- l'ordre est p_0 pour $\lambda + \delta\lambda$

- l'ordre est $(p_0 + \frac{1}{N})$ pour λ

$$\begin{aligned} \delta &= p_0 (\lambda + \delta\lambda) = (p_0 + \frac{1}{N}) \lambda \\ p_0 \lambda + p_0 \delta\lambda &= p_0 \lambda + \frac{\lambda}{N} \end{aligned}$$

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = p_0 N$$

18) A.N. doublet du sodium

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{p_0} \frac{\lambda}{\delta\lambda} \\ &= \frac{1}{1} \frac{589}{0,6} \end{aligned}$$

$$N = 982$$

19)

	spectre ordre 1	spectre ordre 2
$\lambda_1 = 400 \text{ nm}$	$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda_1}{b}$ $\alpha_1 = 14,48^\circ$	$\sin \alpha_2 = \frac{2\lambda_1}{b}$ $\alpha_2 = 30^\circ$
$\lambda_2 = 660 \text{ nm}$	$\sin \beta_1 = \frac{\lambda_2}{b}$ $\beta_1 = 24,36^\circ$	$\sin \beta_2 = \frac{2\lambda_2}{b}$ $\beta_2 = 55,59^\circ$

spectre 1 : $[14,48^\circ, 24,36^\circ]$

spectre 2 :

$[30^\circ, 55,59^\circ]$

pas de chevauchement

20)

	spectre ordre 3
$\lambda_1 = 400 \text{ nm}$	$\sin \alpha_3 = \frac{3\lambda_1}{b}$ $\alpha_3 = 48,59^\circ$

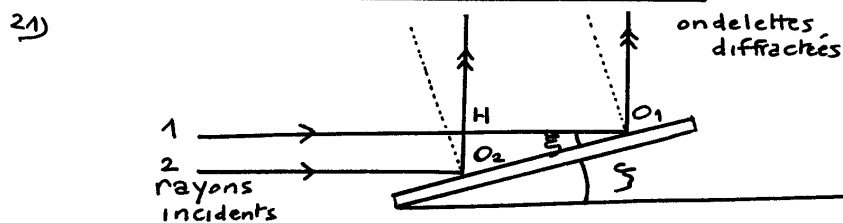
spectre 2 :

$[30^\circ, 55,59^\circ]$

spectre 3 :

$[48,59^\circ, \quad]$

il y a donc chevauchement



l'indice vaut 1

$$S_{1/2} = HO_1 - HO_2$$

$$S_{1/2} = b \cos \theta - b \sin \theta$$

22)

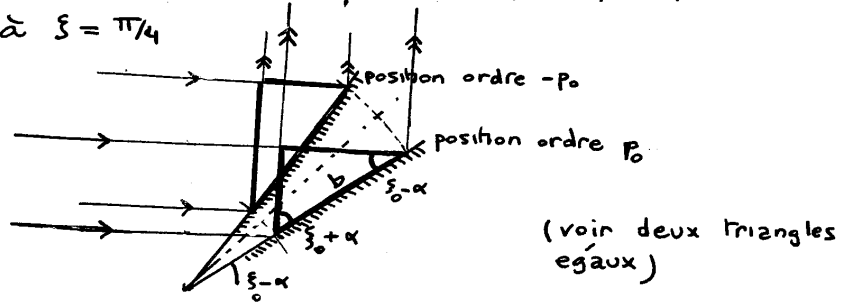
 δ est nul (cf ordre 0) pour

$$\xi_0 = \frac{\pi}{4}$$

23)

remarque

Si on considère deux positions symétriques par rapport à $\xi = \pi/4$



on trouve la même différence de marche mais de signe contraire.

Les ordres p_0 et $-p_0$ correspondent à des positions symétriques par rapport à $\xi_0 = \pi/4$.

Pour l'ordre 1 : $\delta = \lambda$

$$\cos \xi - \sin \xi = \frac{\lambda}{b}$$

Pour l'ordre -1 : $\delta' = -\lambda$

$$\cos \xi' - \sin \xi' = -\frac{\lambda}{b}$$

$$\sin \xi' - \cos \xi' = \frac{\lambda}{b}$$

il suffit de faire

$$\begin{cases} \sin \xi' = \cos \xi \\ \cos \xi' = \sin \xi \end{cases}$$

soit $\xi' = \frac{\pi}{2} - \xi$

les deux positions sont bien symétriques par rapport à $\xi_0 = \frac{\pi}{4}$.

24)

$$\cos \xi_1 - \sin \xi_1 = \frac{\lambda_1}{b}$$

A.N.

$$\cos \xi_1 - \sin \xi_1 = \frac{400}{1600}$$

Le solveur de la machine à calculer donne

$$\xi_1 = 34,82^\circ$$

$$\cos \xi_2 - \sin \xi_2 = \frac{\lambda_2}{b}$$

A.N.

$$\cos \xi_2 - \sin \xi_2 = \frac{660}{1600}$$

$$\xi_2 = 28,04^\circ$$

remarque

$$\cos \xi - \sin \xi = \frac{\lambda}{b} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \xi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \xi = \frac{\lambda}{b\sqrt{2}}$$

$$\cos(\xi + \xi_0) = \frac{\lambda}{b\sqrt{2}}$$

$$\text{En posant } \xi = \xi_0 - \alpha \quad \text{avec } \xi_0 = \frac{\pi}{4}$$

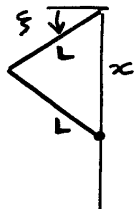
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\lambda}{b\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{b\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \alpha_1 &= 10,18^\circ & (\xi_1 = 45 - 10,18 = 34,82^\circ) \\ \alpha_2 &= 16,96^\circ & (\xi_2 = 45 - 16,96 = 28,04^\circ) \end{aligned}$$

25)

$$x = 2L \sin \xi$$

Pour exprimer $\sin \xi$ on peut repartir de

$$\cos \xi - \sin \xi = \frac{\lambda}{b}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 \xi} = \frac{\lambda}{b} + \sin \xi$$

$$\sin^2 \xi + \frac{\lambda}{b} \sin \xi - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{b^2} \right) = 0$$

$$\sin \xi = -\frac{\lambda}{2b} + \frac{1}{2} \sqrt{2 - \frac{\lambda^2}{b^2}}$$

$$x = L \left(\sqrt{2 - \frac{\lambda^2}{b^2}} - \frac{\lambda}{b} \right)$$

26) A.N.

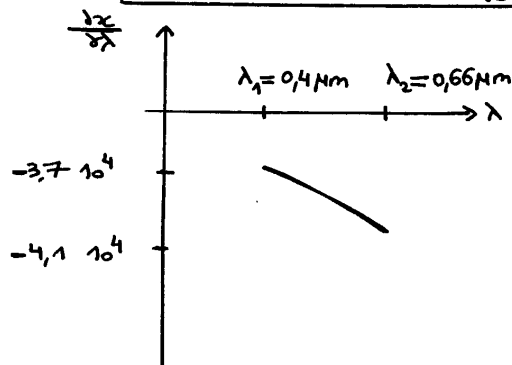
$$x_1 = 5,00 \left(\sqrt{2 - \left(\frac{0,4}{1,6} \right)^2} - \frac{0,4}{1,6} \right) = 5,71 \text{ cm}$$

$$x_2 = 5,00 \left(\sqrt{2 - \left(\frac{0,66}{1,6} \right)^2} - \frac{0,66}{1,6} \right) = 4,70 \text{ cm}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -1,01 \text{ cm.}$$

27)

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\frac{L}{b} \left(1 + \frac{\lambda/b}{\sqrt{2 - (\lambda/b)^2}} \right)$$



Dans le cas le plus défavorable, (en valeur absolue)

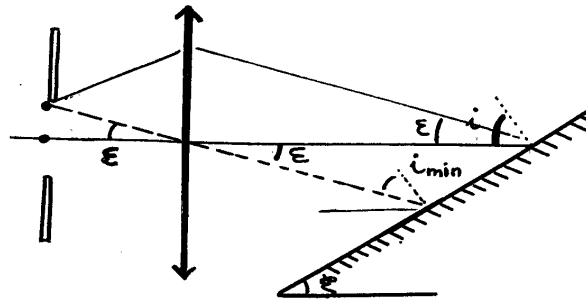
$$\begin{aligned} \delta x &= 3,7 \cdot 10^4 \delta \lambda \\ &= 3,7 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

$$\delta x = 74 \mu\text{m}$$

Il faut positionner l'écran à 74 μm près.

28)

On représente le faisceau issu du point haut de la fente source.
Ce faisceau est incliné de ε avec $\varepsilon \approx \frac{D/2}{f'_1}$
et l'angle d'incidence sur le miroir est $i_{\text{min}} = i - \varepsilon$



donc

$$i_{\min} = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) - \frac{\lambda}{2F_1}$$

Le faisceau issu du point bas de la fonte source est incliné de ε vers le haut

$$i_{\max} = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \frac{\lambda}{2F_1}$$

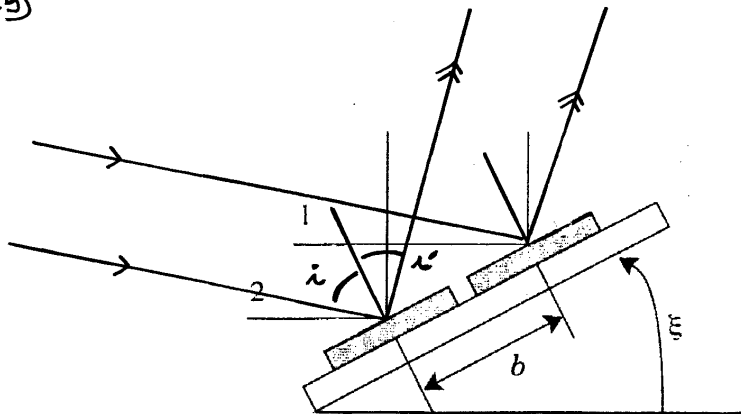
donc

$$\delta i = \frac{\lambda}{2F_1}$$

De même pour l'angle d'émergence

$$\delta i' = \frac{\lambda}{2F_2}$$

29)



i et i' sont des grandeurs supposées positives ici.
alors dans le cas général

$$\delta_{1/2} = b \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) - b \cos\left(\frac{\pi}{2} - i'\right)$$

$$\delta_{1/2} = b (\sin i - \sin i')$$

$$\begin{aligned}
 (\text{en 21}) \text{ on avait } i &= \frac{\pi}{2} - \xi \\
 i' &= \xi \\
 \text{et donc } \delta &= b (\cos \xi - \sin \xi) \quad |
 \end{aligned}$$

A l'ordre 1, on aura

$$b (\sin i - \sin i') = \lambda$$

30) Calcul mathématique : on différencie λ

$$d\lambda = b (\cos i \, di - \cos i' \, di')$$

Pour trouver le $\delta\lambda$ ("petit") ce calcul différentiel est utile. Mais pour λ_{\max} : il faut prendre i_{\max} et i'_{\min} . De même pour λ_{\min} ; il faut prendre i_{\min} et i'_{\max} d'où le "changement" de signe.

$$\begin{aligned}
 \delta\lambda &= b (\cos i \, \delta i + \cos i' \, \delta i') \\
 &\quad \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{avec } i_{\text{moyen}} & \text{avec } i'_{\text{moyen}} \\ = \frac{\pi}{2} - \xi & = \xi \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\delta\lambda = b (\sin \xi \, \frac{\eta}{2f_1} + \cos \xi \, \frac{\eta}{2f_2})$$

$$\delta\lambda = b (\sin \xi + \cos \xi) \frac{\eta}{2f'}$$

Le problème pose donc

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\max} - \lambda_{\min} &= 2 \delta\lambda \\
 &= \Delta\lambda
 \end{aligned}$$

$$\Delta\lambda = b (\sin \xi + \cos \xi) \frac{\eta}{f'}$$

31)

Au voisinage de $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ (avec $\xi = 34,82^\circ$)

$$\Delta\lambda_{(\lambda_1)} = 22,2 \text{ nm}$$

Au voisinage de $\lambda_2 = 660 \text{ nm}$ (avec $\xi = 28,04^\circ$)

$$\Delta\lambda_{(\lambda_2)} = 21,6 \text{ nm}$$

32)

- L'appareil de référence sépare bien les pics

$$\Delta\lambda_{\text{ref}} \ll 16 \text{ nm.}$$

- L'appareil testé sépare mal.
On devine les pics λ_3 et λ_4

$$\Delta\lambda \gtrsim 20 \text{ nm}$$

- Sa qualité médiocre est peut-être en lien avec la largeur trop grande des fentes.
(cf A.N. du 31)

33)

$\lambda = 620 \text{ nm}$ correspond à orange-rouge

(cf la solution est bleue par transparence parce qu'elle absorbe la couleur complémentaire du bleu c'est à dire l'orange)

34)

L'absorbance A_0 est celle d'une solution de Cu^{2+} de concentration C_0 (pas d'ajout de NH_3). On la trouve donc au niveau du biberon n° 12

$$A_0 = 0,080$$

35)

on a $A = (\epsilon_{\text{Cu}} C_{\text{Cu}} + \epsilon_{\text{px}} C_{\text{px}}) l$ si les autres espèces présentes (H_2O , NH_3 , NO_3^- , NH_4^+ , SO_4^{2-}) n'absorbent pas à $\lambda = 620 \text{ nm}$.

36)

le mélange est stœchiométrique si

$$\frac{n_{\text{NH}_3}}{n} = \frac{n_{\text{Cu}^{2+}}}{1}$$

$$\frac{C_0 V_{\text{NH}_3}}{n} = C_0 V_{\text{Cu}^{2+}}$$

$$\frac{V_{\text{NH}_3}}{V_{\text{Cu}^{2+}}} = n$$

soit :

$$x = \frac{V_{NH_3}}{V_{NH_3} + V_{Cu^{2+}}}$$

$$x_s = \frac{n}{n+1}$$

37) Tableau d'avancement:



moles équilibre	$C_0(V_T - V_{NH_3}) - \frac{q}{e} \frac{1}{e_{eq}}$	$C_0 V_{NH_3} - n \frac{q}{e} \frac{1}{e_{eq}}$	$\frac{q}{e} \frac{1}{e_{eq}}$
ou:	$C_0(V_T - V_{NH_3}) - C_{cpx} V_T$	$C_0 V_{NH_3} - n C_{cpx} V_T$	$C_{cpx} V_T$

$$38) \quad A = (E_{Cu} C_{Cu} + E_{cpx} C_{cpx}) l$$

$$= (E_{Cu} \left[\frac{C_0(V_T - V_{NH_3})}{V_T} - \frac{C_{cpx} V_T}{V_T} \right] + E_{cpx} C_{cpx}) l$$

$$A = (E_{cpx} - E_{Cu}) C_{cpx} l + E_{Cu} C_0 \left(1 - \frac{V_{NH_3}}{V_T}\right) l$$

$$A' = E_{Cu} C_0 \left(1 - \frac{V_{NH_3}}{V_T}\right) l$$

soit

$$A' = A_0 (1 - x)$$

$$39) \quad A_{cor} = A - A'$$

$$A_{cor} = \underbrace{(E_{cpx} - E_{Cu}) l}_{K} C_{cpx}$$

40)

Bécher N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$V_{Cu^{2+}} / mL$	2,5	3,0	3,5	3,75	4,0	4,25	4,5	5,0	5,5	6,0	12	20
V_{NH_3} / mL	17,5	17	16,5	16,25	16	15,75	15,5	15,0	14,5	14,0	8,0	0
A	0,224	0,262	0,305	0,327	0,329	0,326	0,319	0,309	0,295	0,275	0,134	0,080
x	0,875	0,850	0,825	0,813	0,800	0,788	0,775	0,750	0,725	0,700	0,400	0
A'	0,010	0,012	0,014	0,015	0,016	0,017	0,018	0,020	0,022	0,024	0,048	0,080
A_{cor}	0,214	0,250	0,291	0,312	0,313	0,309	0,301	0,289	0,273	0,251	0,086	0

41) si $x < x_s$

NH_3 est le réactif limitant

$$\text{donc } \xi_{eq} = \frac{C_0 V_{\text{NH}_3}}{n} = C_{\text{cpx}} V_T$$

$$\text{soit } \boxed{C_{\text{cpx}} = \frac{C_0 x}{n}}$$

si $x > x_s$

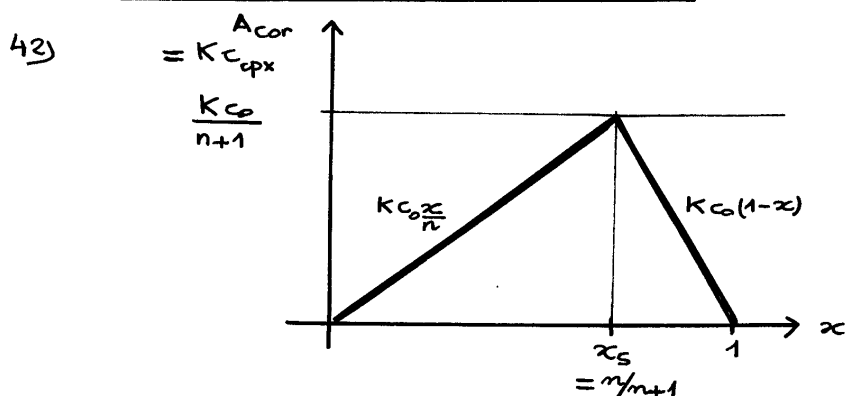
Cu^{2+} est le réactif limitant

$$\text{donc } \xi_{eq} = C_0 (V_T - V_{\text{NH}_3}) = C_{\text{cpx}} V_T$$

$$\text{soit } \boxed{C_{\text{cpx}} = C_0 (1 - x)}$$

si $x = x_s$

$$\boxed{C_{\text{cpx}} = \frac{C_0}{n+1}}$$



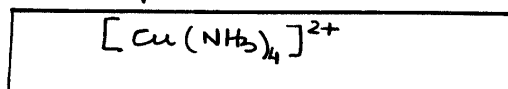
L'abscisse du maximum est $x_s = \frac{n}{n+1}$ d'où n .

43) Ici A_{cor} est maximum pour le bécher 5 donc

$$x_s = 0,8$$

$$n = 4$$

La formule du complexe est :



$$\text{avec } \beta_n = \frac{[\text{complexe}]}{[\text{Cu}^{2+}] [\text{NH}_3]^n}$$

avec $[Cu^{2+}] = C_0(1-x) - C_{cpx}$

$$[NH_3] = C_0 x - n C_{cpx}$$

$$\beta_n = \frac{C_{cpx}}{(C_0(1-x) - C_{cpx})(C_0 x - n C_{cpx})^n}$$

Pour chercher l'extremum, on fait une différentielle logarithmique

$$\ln \beta_n = \ln C_{cpx} - \ln (C_0(1-x) - C_{cpx}) - n \ln (C_0 x - n C_{cpx})$$

$$0 = \frac{dC_{cpx}}{C_{cpx}} - \frac{-C_0 dx - dC_{cpx}}{C_0(1-x) - C_{cpx}} - n \frac{C_0 dx - n dC_{cpx}}{C_0 x - n C_{cpx}}$$

à l'extremum $\frac{dC_{cpx}}{dx}$ est nul.

on fait $dC_{cpx} = 0$ on obtient alors :

$$0 = \left(\frac{C_0}{C_0(1-x) - C_{cpx}} - n \frac{C_0}{C_0 x - n C_{cpx}} \right) dx$$

$$C_0 x - n C_{cpx} = n (C_0(1-x) - C_{cpx})$$

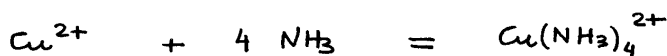
$$x = n(1-x)$$

soit :

$$\boxed{x_s = \frac{n}{1+n}}$$

Le résultat obtenu en supposant la réaction totale reste donc valable dans le cas d'une réaction équilibrée

45) Tableau d'avancement pour le bédier n°5



concentrations
à l'équilibre

$$0,2C_0 - C_{cpx}$$

$$\underbrace{0,8C_0 - 4C_{cpx}}_{4(0,2C_0 - C_{cpx})}$$

$$C_{cpx}$$

avec

$$\boxed{\beta_4 = \frac{C_{cpx}}{4^4 (0,2C_0 - C_{cpx})^5} = 10^{12,6}}$$

avec $C_0 = 0,044 \text{ mol L}^{-1}$

on trouve (en restant critique devant la calculatrice)

$$\boxed{C_{cpx} = 0,008417 \text{ mol L}^{-1} < 0,0088 \text{ mol L}^{-1}}$$

La réaction n'est pas vraiment "quantitative"