

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

<u>Problème: Molécules de CO et de CO₂</u>	2
I. <u>Structure électronique</u>	2
II. <u>La molécule de CO</u>	2
A. <u>Rotation d'une molécule diatomique</u>	3
B. <u>Vibration d'une molécule diatomique</u>	4
C. <u>Interaction avec une onde électromagnétique</u>	5
III. <u>La molécule de CO₂</u>	5
A. <u>Vibrations longitudinales de la molécule CO₂</u>	6
B. <u>Interaction avec une onde électromagnétique</u>	7
1) <u>Mouvement</u>	7
2) <u>Absorption de l'onde incidente</u>	7
<u>Exercice: Électrocinétique</u>	9

Problème: Molécules de CO et de CO₂

I. Structure électronique

Données pour cette partie:

- Numéros atomiques :

$C : 6 ;$

$O : 8 ;$

- Isotopes du carbone :

Le carbone présente des isotopes : les carbones ¹², ¹³ et ¹⁴ de masses molaires respectivement $12,0000 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$, $13,0000 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ et $14,0000 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$.

- Masse molaire du carbone naturel :

$12,0111 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$

1. Qu'est-ce qu'un isotope ? Préciser sur l'exemple du carbone.
2. Connaissant la masse molaire du carbone naturel et en négligeant la présence du carbone ¹⁴, donner la fraction molaire x et la fraction massique w en carbone ¹³.
3. Donner la structure électronique du carbone et de l'oxygène. Donner la représentation de Lewis de ces deux éléments.
4. Proposer une structure de Lewis pour la molécule de CO dans laquelle les atomes vérifient la règle de l'octet. La localisation des charges vous semble-t-elle en accord l'électronégativité ?
5. Proposer une structure de Lewis pour la molécule de CO₂.
6. En utilisant la méthode VSEPR, prévoir la géométrie de la molécule de CO₂.
7. La molécule de CO présente-t-elle un caractère dipolaire ? Et celle de CO₂ ? Préciser, justifier.

II. La molécule de CO

Données pour toute la suite du problème:

- Masses molaires :

Carbone : $12,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$

Oxygène : $16,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$

- Énergie d'un photon :

$$E = h \nu$$

avec :

ν : fréquence

- Longueur d'onde λ d'une onde électromagnétique :

C'est la distance parcourue pendant une période T

$$\lambda = c T$$

- h : constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- c : vitesse de la lumière $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- N_A : nombre d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

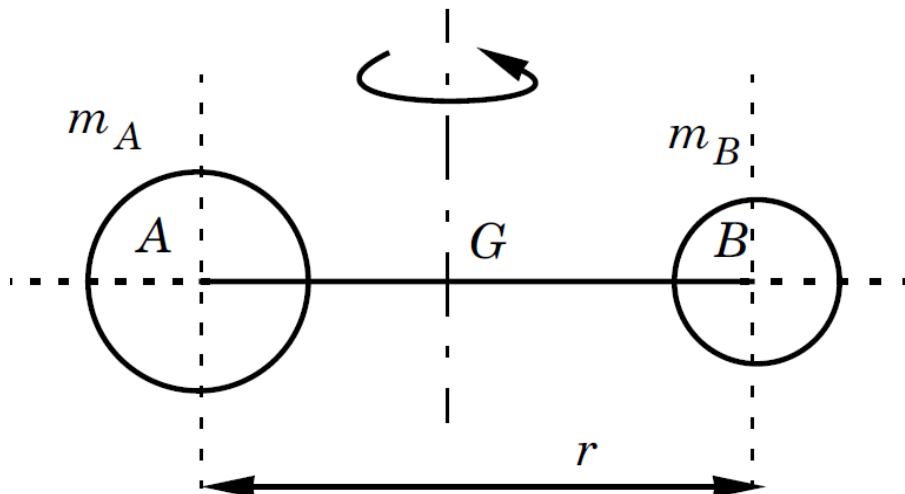
La pollution de l'air est un souci croissant qui devient crucial dans des sites sensibles où les concentrations en CO par exemple doivent faire l'objet de mesures constantes et précises. Pour ces mesures, on peut s'intéresser au pic d'absorption de CO pour la longueur d'onde $\lambda = 4,70 \mu\text{m}$.

On cherche ici des éléments sur l'origine de cette raie d'absorption du monoxyde de carbone à $\lambda = 4,70 \mu\text{m}$.

8. Calculer la fréquence correspondant à $\lambda = 4,70 \mu\text{m}$ en GHz .

On modélise une molécule AB par l'association de deux points matériels A de masse m_A et B de masse m_B . Dans toute la suite, on étudie cette molécule en se plaçant dans le référentiel barycentrique de la molécule (associé au référentiel galiléen du laboratoire).

A. Rotation d'une molécule diatomique



La molécule est supposée rigide (la distance AB notée r est supposée constante). On étudie ici la rotation de cette molécule autour d'un axe fixe Δ_G passant par G , barycentre des deux points, perpendiculaire à AB . La molécule tourne à une vitesse angulaire ω . On pose pour les

distances GA et GB : $GA=r_A^*$ et $GB=r_B^*$.

9. Démontrer l'expression de l'énergie cinétique E_C de la molécule en fonction de ω , m_A , m_B , r_A^* , r_B^* .

10. On écrit $E_C = \frac{1}{2} I \omega^2$. Établir l'expression de I en fonction de m_A , m_B et r .

Commenter éventuellement le résultat obtenu pour l'énergie cinétique à la lueur des connaissances de cours.

11. Application numérique: Calculer la valeur de I dans le cas du monoxyde de carbone. On donne distance CO : $0,115 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

L'énergie ne peut prendre n'importe quelle valeur. Elle n'est pas une grandeur continue. On montre que l'énergie liée à la rotation d'une molécule diatomique AB est quantifiée par un nombre quantique J selon la relation : $E_r = J(J+1) \frac{h^2}{8\pi^2 I}$ avec J : nombre entier naturel.

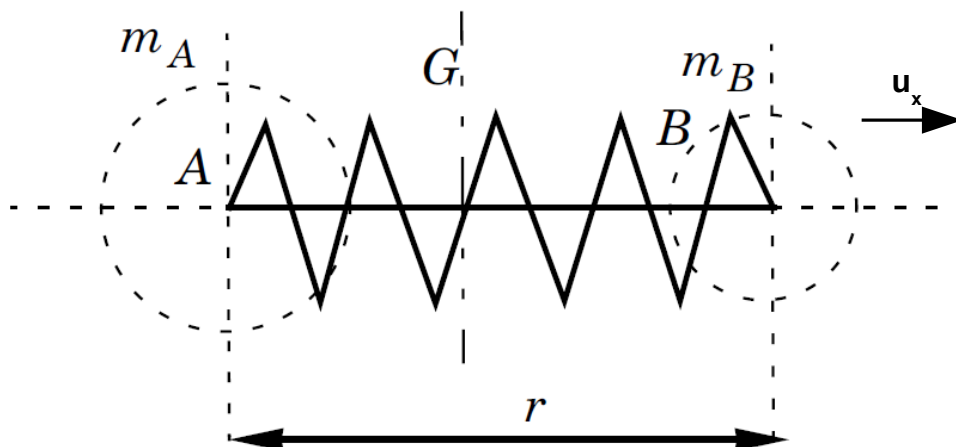
12. Calculer la valeur de la fréquence de la raie spectrale correspondant à la transition entre les deux niveaux d'énergie (de rotation) $J=0$ et $J=1$.

13. Même question pour la transition de rotation $J=0$ à $J=2$.

14. La rotation moléculaire permet-elle d'expliquer seule la raie d'absorption à $\lambda = 4,70 \mu\text{m}$?

B. Vibration d'une molécule diatomique

On modélise la vibration d'élongation le long de la liaison AB par l'association des deux points matériels $A(m_A)$ et $B(m_B)$ reliés par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide r_0 (on néglige toute autre interaction). On note $r(t)$ la distance AB . À l'équilibre, la distance est notée r_e . L'axe orienté de A vers B est noté $x'x$ et a pour vecteur unitaire \vec{u}_x .



15. Justifier avec précision que, dans le cas étudié ici, le référentiel barycentrique est galiléen.

16. Quelle est l'expression vectorielle de la force subie par B (en fonction des grandeurs définies dans cette partie II B) ? Idem pour la force subie par A ?

17. Quelle est la relation simple évidente entre r_e et r_o ? Justifier rapidement.
18. Donner l'expression vectorielle de l'accélération de B dans le référentiel barycentrique en fonction de $\frac{d^2 r}{dt^2}$ et des masses. Idem pour l'accélération de A .
19. Appliquer le principe fondamental au point B . Idem pour le point A . Conclure. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $X = r - r_e$. Commenter éventuellement le résultat obtenu pour cette équation à la lueur des connaissances de cours.
20. Déterminer $r(t)$ sachant qu'en $t=0$ on a $r = r_M$, les deux points étant alors sans vitesse.
21. Calculer la valeur de k correspondant à un mouvement oscillant de longueur d'onde $\lambda = 4,70 \mu m$.

C. Interaction avec une onde électromagnétique

On suppose que l'atome A porte une charge $-q$ et l'atome B une charge $+q$. On suppose que l'interaction électrostatique entre les atomes est déjà prise en compte dans la force de rappel du ressort. On envoie alors sur la molécule alignée dans la direction \vec{u}_x une onde électromagnétique de pulsation ω de telle façon que les atomes soient chacun soumis au champ électrique : $\vec{E}(t) = E \vec{u}_x = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

Sous l'effet de l'onde électromagnétique, les atomes se déplacent selon l'axe $x'x$.

22. Appliquer le principe fondamental à chacun des deux points lorsque la molécule interagit avec le champ électrique de l'onde. Pourquoi ne faut-il pas écrire de forces d'inertie ?
23. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par X s'écrit : $\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X = \frac{q}{\mu} E$ où l'on précisera l'expression de la constante μ .
24. Résoudre en régime forcé. Donner l'expression de l'amplitude X_{Max} des oscillations en fonction de q , E_0 , μ , ω et ω_0 .
25. Tracer X_{Max} en fonction $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$. Quel phénomène se produit pour $\omega = \omega_0$? Est-ce physiquement possible ? Commenter.

III. La molécule de CO_2

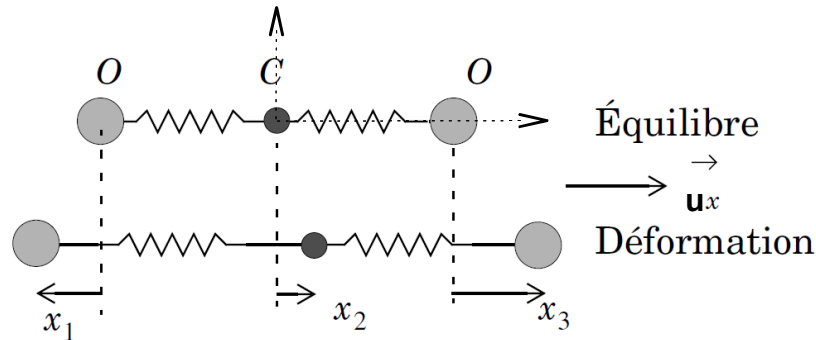
L'augmentation de la concentration du CO_2 atmosphérique lié à l'activité humaine est l'une des causes principales du réchauffement climatique observé depuis un siècle.

On suppose que la molécule est parfaitement linéaire : les trois atomes restent alignés dans la direction du vecteur unitaire \vec{u}_x . On suppose que chaque liaison CO est indépendante de l'autre. Les atomes sont assimilés à des points matériels de masse m_A pour l'oxygène et m_B pour le carbone. On néglige l'action de la pesanteur et on considère le système isolé formé par une seule molécule.

Dans toute la suite, on étudie cette molécule en se plaçant dans le référentiel barycentrique de la molécule (associé au référentiel galiléen du laboratoire).

A. Vibrations longitudinales de la molécule CO_2

On modélise l'interaction de l'atome de carbone central avec les atomes d'oxygène par deux ressorts de raideur k et de longueur au repos r_o identiques avec $k=1,42 \cdot 10^3 \text{ N.m}^{-1}$ et $r_o=0,166 \text{ nm}$. En dehors de l'équilibre, chaque atome est repéré par son déplacement par rapport à sa position d'équilibre par les abscisses: x_1 , x_2 , x_3 . On remarquera que la grandeur x_1 sur la figure fournie est négative.



*Modélisation de la molécule de CO_2 .
La grandeur x_1 est négative sur la figure.*

26. Justifier que référentiel barycentrique de la molécule est ici galiléen. Préciser la position du point G à l'équilibre. Justifier rapidement.
27. Que peut-on dire ici quant à la longueur des ressorts r_e à l'équilibre ?
28. Rappeler la définition du barycentre avec origine en G . Montrer, avec le plus de précision possible, la relation suivante: $m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0$.
29. Appliquer le principe fondamental à chacun des trois points en utilisant les notations k , m_A , m_B , r_1 (longueur du ressort de gauche), r_2 (longueur du ressort de droite), r_o (longueur à vide des ressorts). On désignera, provisoirement ici, les composantes scalaires de accélérations sur l'axe par a_1 , a_2 , a_3 .
30. Écrire les trois relations ci-dessus en faisant intervenir uniquement k , m_A , m_B , x_1 , x_2 , x_3 .

31. Montrer que x_1 et x_3 vérifient un système de la forme : $\frac{d^2 x_1}{dt^2} + a x_1 + b x_3 = 0$ et $\frac{d^2 x_3}{dt^2} + a x_3 + b x_1 = 0$. Exprimer a et b en fonction de k , m_A , m_B .

On recherche les solutions harmoniques du système (les trois masses vibrent à la même pulsation ω). Dans ce cas, on peut associer aux grandeurs $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ les grandeurs complexes

$\underline{x}_1(t) = \underline{A}_1 \exp(j\omega t)$, $\underline{x}_2(t) = \underline{A}_2 \exp(j\omega t)$ et $\underline{x}_3(t) = \underline{A}_3 \exp(j\omega t)$ où les \underline{A}_i sont a priori complexes.

32. Déterminer les deux seules valeurs de ω qui conduisent à des coefficients \underline{A}_i non tous nuls.

On désignera la plus petite de ces pulsations par ω_I et l'autre par ω_{II} . et on les exprimera en fonction de k , m_A , m_B .

33. Calculer numériquement ω_I et ω_{II} .

Les solutions harmoniques ainsi déterminées correspondent à deux sortes de mouvements.

34. On suppose que la molécule vibre dans le *mode I* c'est à dire à la pulsation ω_I . Déterminer dans ce cas le rapport $\underline{A}_3/\underline{A}_1$. Comparer le mouvement des deux atomes d'oxygène ? Quel est le mouvement de l'atome de carbone ? Pouvait-on prévoir la valeur de la pulsation ?

35. On suppose que la molécule vibre dans le *mode II* c'est à dire à la pulsation ω_{II} . Déterminer dans ce cas le rapport $\underline{A}_3/\underline{A}_1$. Comparer le mouvement des deux atomes d'oxygène ?

36. A quel domaine du spectre électromagnétique les pulsations ω_I et ω_{II} appartiennent-elles ? On calculera les longueurs d'onde correspondantes.

B. Interaction avec une onde électromagnétique

Les liaisons CO de la molécule CO_2 sont polarisées : chaque atome d'oxygène porte une charge $-\delta e$ et l'atome de carbone une charge $+2\delta e$ (e est la charge élémentaire et δ une constante positive inférieure à 1). On suppose que l'interaction électrostatique entre les atomes est déjà prise en compte dans les forces de rappel des ressorts. On envoie sur la molécule alignée dans la direction \vec{u}_x une onde électromagnétique de telle façon que les atomes soient soumis au champ électrique : $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$

1) Mouvement

Sous l'effet de l'onde électromagnétique, les atomes se déplacent comme précédemment.

37. Établir le système d'équations vérifié par $x_1(t)$ et $x_3(t)$.

38. On résout ce système en régime sinusoïdal forcé, en utilisant la notation complexe et en posant : $\underline{x}_1(t) = \underline{A}_1 \exp(j\omega t)$, $\underline{x}_3(t) = \underline{A}_3 \exp(j\omega t)$. Exprimer \underline{A}_1 et \underline{A}_3 .

39. Montrer l'existence d'une résonance pour une valeur particulière de ω . Que valent \underline{A}_1 et \underline{A}_3 à la résonance ? Commenter.

2) Absorption de l'onde incidente

40. On appelle $\vec{p}(t)$ le moment dipolaire résultant de la molécule. Exprimer $\vec{p}(t)$ en fonction de δ , e , x_1 , x_2 , x_3 .

41. Écrire $\vec{p}(t)$ en fonction de δ , e , E_0 , ω , ω_{II} , m_A , m_B et t .

42. Un dipôle électrique oscillant à la pulsation ω avec une amplitude p_0 émet un rayonnement qui transporte en moyenne une puissance : $P = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}$ (où μ_0 est la perméabilité du vide).

Exprimer la puissance électromagnétique P émise par la molécule de CO_2 en fonction de δ , e , E_0 , ω , ω_{II} , μ_0 , c , m_A et m_B .

43. L'onde incidente se propage selon z . L'énergie rayonnée par les molécules est prélevée de l'onde incidente, qui voit donc son intensité $I(z)$ (en watt/m^2) diminuer avec z selon

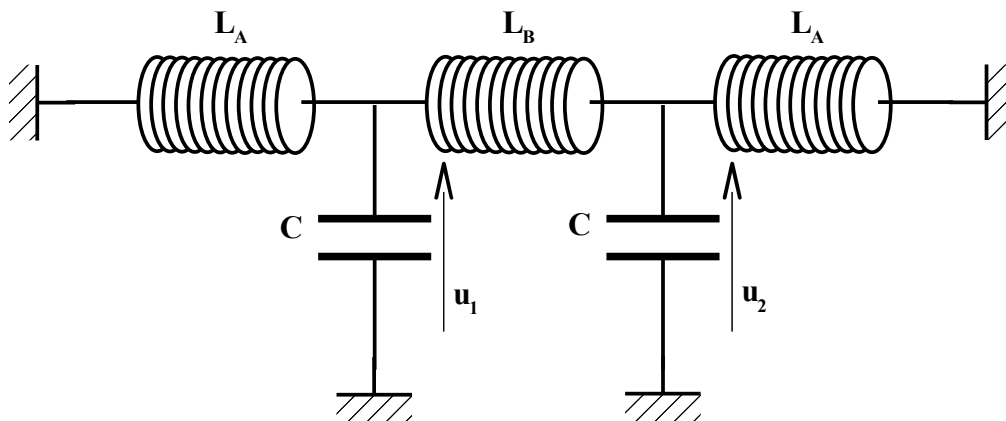
une loi de la forme $\frac{dI(z)}{dz} = -\alpha I(z)$ (α est une constante positive s'écrivant en fonction des grandeurs précédentes et de la densité volumique de molécules dans le milieu. α est proportionnel à P). Quelle est la dimension de α ?

44. Montrer que $I(z)$ varie selon une loi de forme exponentielle. Sur quelle distance, l'intensité est-elle divisée par 10 ?

45. L'onde est très fortement absorbée lorsque $\omega \rightarrow \omega_H$. Justifier. Expliquer qualitativement pourquoi on n'observe aucune absorption lorsque $\omega \rightarrow \omega_I$.

Exercice: Électrocinétique

1. La loi d'Ohm (relation entre u et i) s'écrit en convention récepteur pour une bobine d'inductance L : $u = L \frac{di}{dt}$. Retrouver avec soin l'expression de la loi d'Ohm pour un condensateur de capacité C . Préciser sur le schéma nécessaire le sens adopté pour u , pour i et indiquer l'armature dont la charge est appelée q dans la démonstration.
2. Dans le montage ci dessous, établir (par exemple en appliquant la loi des nœuds en termes de potentiels à chacun des deux nœuds) les deux équations différentielles vérifiées par $u_1(t)$ et $u_2(t)$.



3. On recherche les solutions harmoniques du système (les deux tensions - et les intensités - vibrent à la même pulsation ω). Dans ce cas, on peut associer aux grandeurs $u_1(t)$ et $u_2(t)$ des grandeurs complexes en $\exp(j\omega t)$. Déterminer les deux seules valeurs de ω qui conviennent. On désignera la plus petite de ces pulsations par ω_I et l'autre par ω_{II} et on les exprimera en fonction de C , L_A , L_B .

Réponses

Molécules de CO et de CO₂

1. isotope : même élément (même numéro atomique Z)
 mais si le nombre de protons Z est le même,
le nombre de neutrons N diffère.
 Le nombre de masse $A = Z + N$ diffère.

Exemple :

$^{12}_6\text{C}$	$^{13}_6\text{C}$
$Z=6$	$Z=6$
$A=12$	$A=13$
$N=6$	$N=7$

2. On pose M_C : masse molaire du carbone
 M_{C12} : _____ du carbone 12
 M_{C13} : _____ du carbone 13
 m : masse d'un échantillon de C
 m_{C12} : masse de carbone 12 dans l'échantillon
 m_{C13} : masse de carbone 13 dans l'échantillon
 n : nombre de moles dans l'échantillon en C
 n_{C12} : nombre de moles de carbone 12 dans l'échantillon
 n_{C13} : nombre de moles de carbone 13 dans l'échantillon

On cherche :

$$x = \frac{n_{C13}}{n}$$

avec $n = n_{C12} + n_{C13}$

$$w = \frac{m_{C13}}{m}$$

avec $m = m_{C12} + m_{C13}$

Calcul : par exemple, on peut faire

$$\begin{aligned} m &= m_{C12} + m_{C13} \\ n M_C &= n_{C12} M_{C12} + n_{C13} M_{C13} \end{aligned}$$

en divisant par n

$$M_C = \frac{n - n_{C13}}{n} M_{C12} + \frac{n_{C13}}{n} M_{C13}$$

$$M_C = (1 - x) M_{C12} + x M_{C13}$$

relation assez évidente qui traduit que s'il y a $x = 10\%$ en moles de C^{13} et donc $1-x = 90\%$ en moles de C^{12} , alors la masse molaire est égale à $90\% M_{C^{12}} + 10\% M_{C^{13}}$.

$$x = \frac{M_C - M_{C^{12}}}{M_{C^{13}} - M_{C^{12}}}$$

$$\text{A.N.} = \frac{12,0111 - 12,0000}{13,0000 - 12,0000}$$

$$x = 1,11\%$$

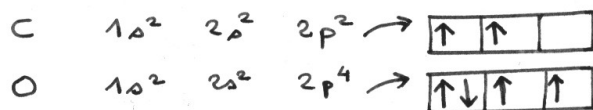
$$w = \frac{n_{C^{13}} M_{C^{13}}}{n M_C}$$

$$w = x \frac{M_{C^{13}}}{M_C}$$

$$\text{A.N.} = 0,0111 \frac{13}{12,0111}$$

$$w = 1,20\%$$

3)



représentation de Lewis :



4) Structure de Lewis pour CO ($4 + 6 = 10$ électrons à répartir)



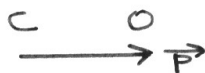
où le C avec 5 électrons (au lieu de 4) porte une charge -
 où le O avec 5 électrons (au lieu de 6) porte une charge +

Ces charges formelles ne sont pas en lien avec l'électronégativité
 puisque O est plus électronégatif que C.

On pourrait donc s'attendre à ce que O porte la charge négative et non positive.

remarque :

expérimentalement CO est une molécule dipolaire, la charge \ominus étant bien portée par le carbone.

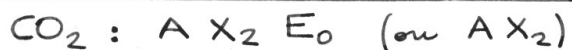


5)



6) C est lié à deux atomes, il n'y a pas de doublet libre sur le carbone.

La molécule est donc du type



Elle est donc de :

structure linéaire

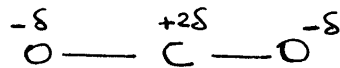


7)

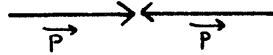
CO est un dipôle orienté de
C vers O

(vu au niveau des charges formelles)

CO₂ est symétrique. En tenant compte de l'électronégativité plus élevée de O, on peut s'attendre à



soit deux dipôles opposés identiques



le moment dipolaire sera nul

CO₂ n'est pas dipolaire
(c'est un quadripôle)

8)

$$\begin{aligned} \lambda &= c T \\ &= c \frac{1}{\nu} \end{aligned}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

A.N.

$$\begin{aligned} &= \frac{3 \cdot 10^8}{4,7 \cdot 10^{-6}} \\ &= 63,8 \cdot 10^{12} \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$\nu = 63,8 \cdot 10^3 \text{ GHz}$$

9)

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_A v_A^{*2} + \frac{1}{2} m_B v_B^{*2} \\ &= \frac{1}{2} m_A (r_A^* \omega)^2 + \frac{1}{2} m_B (r_B^* \omega)^2 \end{aligned}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \underbrace{(m_A r_A^{*2} + m_B r_B^{*2})}_{I} \omega^2$$

10) On cherche r_A^* et r_B^* . On écrit la définition du barycentre G

$$\begin{aligned} 0 &= m_A \overrightarrow{GA} + m_B \overrightarrow{GB} \\ \text{soit } \left| \begin{array}{l} 0 &= -m_A r_A^* + m_B r_B^* \end{array} \right. \end{aligned}$$

De plus:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} \\ \left| \begin{array}{l} r &= r_B^* - (-r_A^*) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Avec ces deux relations, on trouve:

$$r_A^* = \frac{m_B}{m_A + m_B} r$$

$$r_B^* = \frac{m_A}{m_A + m_B} r$$

finallement :

$$I = m_A r_A^{*2} + m_B r_B^{*2}$$

$$= m_A \frac{m_B^2}{(m_A + m_B)^2} r^2 + m_B \frac{m_A^2}{(m_A + m_B)^2} r^2$$

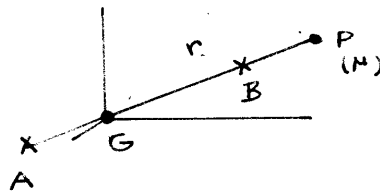
$$I = \frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)} r^2$$

on a trouvé :

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} r^2 \omega^2$$

ce résultat était prévisible.

On sait que pour un problème à deux points, l'énergie cinétique dans le référentiel barycentrique est celle du point fictif (mobile réduit) P de masse μ .



on devait donc obtenir :

$$E_c = \frac{1}{2} \mu v^2$$

\downarrow avec $v = r\omega$
 avec $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

13) A.N.

masse d'un atome C : $\frac{M_C}{N_A}$

masse d'un atome O : $\frac{M_O}{N_A}$

$$I = \frac{M_C M_O}{(M_C + M_O) N_A} r^2$$

A.N.

$$= \frac{\overbrace{12 \cdot 10^{-3} \quad 16 \cdot 10^{-3}}^{M = 1,14 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} \frac{1}{(12 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-3}) \quad 6,02 \cdot 10^{23} \quad (0,115 \cdot 10^{-9})^2}$$

$$I = 1,51 \cdot 10^{-46} \text{ kg m}^2$$

- 12) Par exemple, si la molécule passe du niveau d'énergie correspondant à $J=0$, au niveau plus élevé $J=1$ il y a absorption d'un photon d'énergie $h\nu$.

$$\begin{aligned} \Delta E_r &= h\nu \\ E_{r_{\text{final}}} - E_{r_{\text{initial}}} &= h\nu \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \text{niveau } J \quad \quad \text{nul} \end{aligned}$$

$$\frac{J(J+1)h^2}{8\pi^2 I} - 0 = h\nu$$

$$\nu = \frac{J(J+1)h}{8\pi^2 I} \quad (J=1)$$

A.N.

$$= \frac{1 \times 2 \times 6,63 \cdot 10^{-34}}{8 \pi^2 \cdot 1,51 \cdot 10^{-46}}$$

$$= 0,111 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

$$\nu = 111 \text{ GHz}$$

- 13) Pour la transition de $J=0$ à $J=2$ on utilise la même formule avec $J=2$

Précédemment $J(J+1) \rightarrow 2$

Ici $J(J+1) \rightarrow 6$

On trouve un ν trois fois plus grand

$$\nu = 334 \text{ GHz}$$

- 14) Pour expliquer la raie à $\lambda = 4,70 \mu\text{m}$ ($\nu = 63,8 \cdot 10^3 \text{ GHz}$), il faut imaginer un J final tel que $J(J+1) = 1145$ soit un $J \simeq 33,8$.

Cette valeur n'est pas entière, ce qui ne convient pas. De plus, il peut sembler étrange que le 33ème ou 34ème niveau d'énergie

soit ainsi favorisé...

- 15) Le texte indique qu'on néglige toute autre interaction que celles dues au ressort. Il n'y a donc que des forces intérieures pour le système.

Le système est donc isolé

système isolé donc
accélération de G nulle

Le référentiel barycentrique est donc galiléen (translation uniforme par rapport à \mathcal{R}_{labo} galiléen)

16)

$$\begin{aligned}\vec{F}_B &= -k(r-r_0) \vec{u}_x \\ \vec{F}_A &= +k(r-r_0) \vec{u}_x\end{aligned}$$

- 17) A l'équilibre, on a $r=r_e$ et les forces sont nulles donc $k(r_e-r_0)=0$.

$$r_e = r_0$$

- 18) On a déjà vu que

$$\begin{aligned}\vec{G}_B &= \Gamma_B^* \vec{u}_x \\ &= \frac{m_A}{m_A+m_B} r \vec{u}_x \\ \vec{G}_A &= -\Gamma_A^* \vec{u}_x \\ &= -\frac{m_B}{m_A+m_B} r \vec{u}_x\end{aligned}$$

d'où, en dérivant deux fois par rapport au temps, les accélérations

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \frac{m_A}{m_A+m_B} \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_x \\ \vec{a}_A &= -\frac{m_B}{m_A+m_B} \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_x\end{aligned}$$

- 19) Le principe fondamental pour B donne:

$$-k(r-r_0) \vec{u}_x = m_B \frac{m_A}{m_A+m_B} \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_x$$

pour A on obtient :

$$k(r-r_0) \vec{ux} = m_A \times \frac{-m_B}{m_A+m_B} \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{ux}$$

les deux résultats sont identiques :

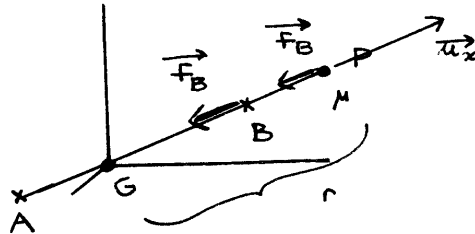
$$-k(r-r_0) = \frac{m_A m_B}{m_A+m_B} \frac{d^2 r}{dt^2}$$

soit (puisque $r_0 = r_e$)

$$\boxed{-k X = \frac{m_A m_B}{m_A+m_B} \frac{d^2 X}{dt^2}}$$

Ce résultat était prévisible.

On sait que pour un problème à deux points, le point fictif (mobile réduit) P de masse M est soumis à la même force que le point réel (ici B) situé de son côté



on devait donc obtenir

$$\vec{F}_B = M \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{ux}$$

$$-k(r-r_0) = \frac{m_A m_B}{m_A+m_B} \frac{d^2 r}{dt^2}$$

20)

$$-k X = M \frac{d^2 X}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{k}{M} X = 0$$

on pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_A+m_B)}{m_A m_B}}}$$

donc : $X = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$

C.I. $\begin{cases} r_m - r_0 = a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ 0 = -a\omega_0 \cdot 0 + b\omega_0 \cdot 1 \end{cases}$

$$X = (r_M - r_0) \cos \omega_0 t$$

$$r(t) = r_0 + (r_M - r_0) \cos(\omega_0 t)$$

21)

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{k}{M}}}{2\pi}$$

$$k = 4\pi^2 \omega^2 M$$

$$\text{A.N.} \quad = 4\pi^2 (63,8 \cdot 10^{12})^2 \cdot 1,14 \cdot 10^{-26}$$

$$k = 183 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-1}$$

22) → Le référentiel barycentrique, dans lequel on travaille, reste galiléen. En effet si on applique le théorème de la résultante cinétique au système complet A+B dans R_0 (référentiel du labo galiléen) on obtient

$$\underbrace{q_A \vec{E} + q_B \vec{E}}_{\text{nul puisque } q_A + q_B = 0} = (m_A + m_B) \vec{a}_{G/R_{\text{labo}}}$$

donc

$$\vec{a}_{G/R_{\text{labo}}} = \vec{0}$$

→ Principe fondamental dans R^*

• pour B :

$$-k(r-r_0) \vec{u}_x + q E \vec{u}_x = m_B \frac{d^2 r_B}{dt^2} \vec{u}_x$$

• pour A :

$$+k(r-r_0) \vec{u}_x - q E \vec{u}_x = m_A \frac{d^2 r_A}{dt^2} (-\vec{u}_x)$$

23) Chacune de ces équations donne :

$$-k(r-r_0) + q E = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \frac{d^2 r}{dt^2}$$

soit

$$-k X + q E = \mu \frac{d^2 X}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \underbrace{\frac{k}{M}}_{\omega_0^2} X = \underbrace{\frac{q}{M} E}_{E_0 \cos \omega t}$$

avec $M = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$

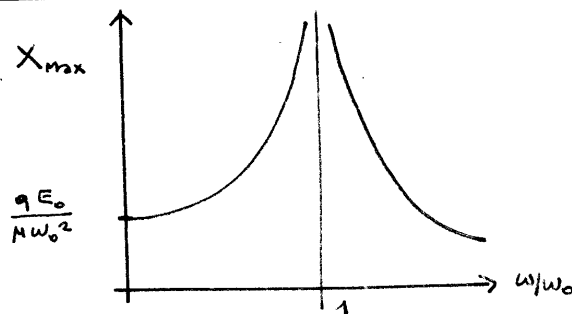
24) On cherche la solution particulière en régime forcé sinusoïdal

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X &= \frac{q}{M} E_0 \exp(j\omega t) \quad \text{avec } X \text{ en } \exp(j\omega t) \\ (j\omega)^2 X + \omega_0^2 X &= \frac{q}{M} E_0 \exp(j\omega t) \\ X &= \frac{\frac{q}{M} E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \exp(j\omega t) \end{aligned}$$

L'amplitude cherchée vaut :

$$X_{\max} = \frac{\frac{q}{M} E_0}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

25)



Pour ω égal à la pulsation propre ω_0 , il y a résonance ("réponse" maximale et absorption d'énergie maximale)

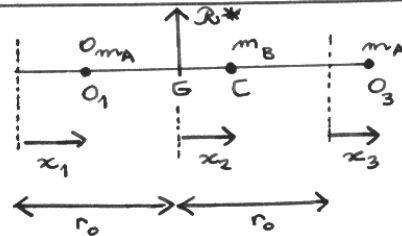
Ici, on a négligé les frottements et pour ω_0 la réponse est infinie.

En fait la réponse restera finie.

- 26) Le système est isolé (cf 15) idem)
 → L'accélération de G par rapport au référentiel du labo est donc nulle (cf théorème de la résultante cinétique au système)
 Le référentiel barycentrique est donc à nouveau galiléen.
 → A l'équilibre le point G correspond avec C (cf symétrie de la molécule)

- 27) A l'équilibre $r_e = r_0$
car pas de forces sur les masses donc les ressorts ne sont pas étirés, ni comprimés.

28)

(figure avec $x_1 > 0$)

Relation de définition du barycentre

$$m_A \overrightarrow{GO_1} + m_B \overrightarrow{GC} + m_A \overrightarrow{GO_3} = \vec{0}$$

En projection sur l'axe, on obtient :

$$\overrightarrow{GO_1} = -(r_0 - x_1)$$

$$\overrightarrow{GC} = x_2$$

$$\overrightarrow{GO_3} = r_0 + x_3$$

donc :

$$-m_A(r_0 - x_1) + m_B x_2 + m_A(r_0 + x_3) = 0$$

$$m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2 = 0$$

29) Principe fondamental pour O_1 (en projection sur l'axe x)

$$k(r_1 - r_0) = m_A a_1$$

Pour C :

$$-k(r_1 - r_0) + k(r_2 - r_0) = m_B a_2$$

Pour O_3 :

$$-k(r_2 - r_0) = m_A a_3$$

30) on a :

$$r_1 = r_0 + x_2 - x_1$$

$$r_2 = r_0 + x_3 - x_2$$

Les équations précédentes deviennent :

$$k(x_2 - x_1) = m_A \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (1)$$

$$-k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) = m_B \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (2)$$

$$-k(x_3 - x_2) = m_A \frac{d^2 x_3}{dt^2} \quad (3)$$

2) On doit éliminer x_2 en utilisant la relation (28)
c'est à dire $x_2 = -\frac{m_A}{m_B}(x_1 + x_3)$

(1) devient :

$$-k \left(\frac{m_A}{m_B}(x_1 + x_3) + x_1 \right) = m_A \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \underbrace{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) x_1}_a + \underbrace{k \frac{1}{m_B} x_3}_b = 0}$$

(3) devient

$$-k \left(x_3 + \frac{m_A}{m_B}(x_1 + x_3) \right) = m_A \frac{d^2 x_3}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x_3}{dt^2} + \underbrace{k \frac{1}{m_B} x_1}_b + \underbrace{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) x_3}_a = 0}$$

3) on cherche les solutions harmoniques vérifiant donc :

$$\frac{d^2 \underline{x}_1}{dt^2} + a \underline{x}_1 + b \underline{x}_3 = 0$$

$$\frac{d^2 \underline{x}_3}{dt^2} + b \underline{x}_1 + a \underline{x}_3 = 0$$

avec $\frac{d}{dt} = j\omega$ et $\frac{d^2}{dt^2} = (j\omega)^2 = -\omega^2$

\underline{x}_1 et \underline{x}_3 vérifient donc :

$$\boxed{\begin{aligned} (a - \omega^2) \underline{x}_1 + b \underline{x}_3 &= 0 \\ b \underline{x}_1 + (a - \omega^2) \underline{x}_3 &= 0 \end{aligned}}$$

Il faut que le déterminant soit nul, sinon le système admet la seule solution, évidente, $\underline{x}_1 = 0$ et $\underline{x}_3 = 0$

Donc

$$\begin{vmatrix} (a - \omega^2) & b \\ b & (a - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - \omega^2)^2 - b^2 = 0$$

$$a - \omega^2 = \pm b$$

Avec le signe +

$$\omega_I^2 = a - b$$

$$\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m_A}}$$

Avec le signe -

$$\omega_{II}^2 = a + b$$

$$\omega_{II} = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}$$

33) Application numérique

$$\omega_I = \sqrt{\frac{1,42 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-3} / 6,02 \cdot 10^{23}}}$$

$$\omega_I = 0,231 \cdot 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega_{II} = \sqrt{1,42 \cdot 10^3 \left(\frac{1}{16 \cdot 10^{-3}} + \frac{2}{12 \cdot 10^{-3}} \right) \times 6,02 \cdot 10^{23}}$$

$$\omega_{II} = 0,443 \cdot 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$$

34) Si la molécule vibre selon le mode I ($\omega_I^2 = a - b$), les équations en 32) deviennent : (par exemple la première)

$$(a - \omega_I^2) \underline{x}_1 + b \underline{x}_3 = 0$$

$$b \underline{x}_1 + b \underline{x}_3 = 0$$

donc

$$\left(\frac{\underline{A}_3}{\underline{A}_1} \right)_{\text{mode I}} = -1$$

→ Les atomes d'oxygène vibrent en opposition de phase. Leur mouvement est symétrique par rapport au carbone

→ Le carbone ne bouge pas. Il reste à l'origine de Po^* en G.

(par exemple puisque $\underline{x}_2 = -\frac{m_A}{m_B} (\underline{x}_1 + \underline{x}_3) = 0$)

→ La pulsation est celle associée à la vibration d'un ressort avec une extrémité fixe en C donc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_A}}$

35) Si la molécule vibre selon le mode II ($\omega_{II}^2 = a + b$), l'équation en 32) devient

$$(a - \omega_{II}^2) \underline{x}_1 + b \underline{x}_3 = 0$$

$$-b \underline{x}_1 + b \underline{x}_3 = 0$$

donc

$$\left(\frac{A_3}{A_1} \right)_{\text{mode II}} = +1$$

→ les atomes d'oxygène vibrent en phase. Leur mouvement est identique dans le même sens.

→ Ici le carbone oscille lui aussi.

36) Calcul des longueurs d'onde.

$$\lambda = c T$$

$$\lambda = c \frac{2\pi}{\omega}$$

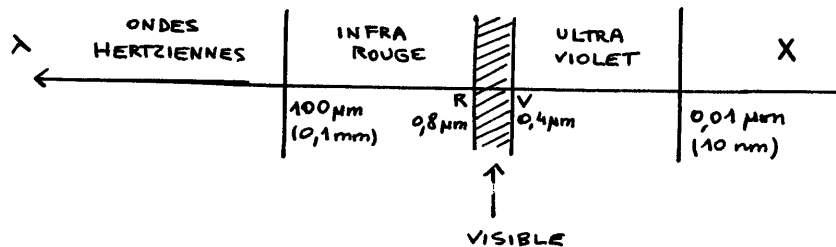
A.N.

$$\lambda_I = \frac{3 \cdot 10^8 \times 2\pi}{0,231 \cdot 10^{15}}$$

$$\lambda_I = 8,2 \mu\text{m}$$

$$\lambda_{II} = \frac{3 \cdot 10^8 \times 2\pi}{0,443 \cdot 10^{15}}$$

$$\lambda_{II} = 4,3 \mu\text{m}$$



Ces deux longueurs d'onde sont dans le domaine de l'infrarouge

37) Les équations 30) deviennent ici :

$$k(x_2 - x_1) - \delta e E = m_A \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

$$-k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) + 2\delta e E = m_B \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

$$-k(x_3 - x_2) - \delta e E = m_A \frac{d^2 x_3}{dt^2}$$

le référentiel restant galiléen (cf 22)

les équations 31) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a x_1 + b x_3 &= -\frac{\delta e E}{m_A} \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} + b x_1 + a x_3 &= -\frac{\delta e E}{m_A} \end{aligned}$$

38) En régime sinusoïdal forcé :

$$\begin{aligned} -\omega^2 x_1 + a x_1 + b x_3 &= -\frac{\delta e E}{m_A} \\ -\omega^2 x_3 + b x_1 + a x_3 &= -\frac{\delta e E}{m_A} \end{aligned}$$

La solution du système est évidente :

$$x_1 = x_3$$

En reportant dans une équation, on obtient :

$$x_1 = x_3 = \frac{-\frac{\delta e E_0}{m_A}}{\underbrace{a+b-\omega^2}_{\omega_{II}^2}} \exp(j\omega t) \quad A_1 = A_3$$

$$x_1 = x_3 = \frac{\delta e E_0 \cos \omega t}{m_A (\omega^2 - \omega_{II}^2)}$$

39) Il y a résonance pour $\omega = \omega_{II}$, ici (en négligeant les frottements) à la résonance A_1 et A_3 sont infinis.

40) le moment dipolaire (voir figure en 28)

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum_i q_i \vec{r}_i \\ &= -\delta e \vec{GO}_1 + 2\delta e \vec{GC} - \delta e \vec{GO}_3 \\ &= [-\delta e x - (r_0 - x_1) + 2\delta e x_2 - \delta e (r_0 + x_3)] \vec{ux} \end{aligned}$$

$$\vec{P} = \delta e (2x_2 - x_1 - x_3) \vec{ux}$$

41) on utilise la relation 28)

$$\vec{P} = -\delta e (x_1 + x_3) \left(1 + 2 \frac{m_A}{m_B}\right) \vec{ux}$$

finalement en utilisant 38)

$$\vec{P} = -\delta e \times \frac{2\delta e E_0 \cos \omega t}{m_A (\omega^2 - \omega_{II}^2)} \left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\right) \vec{ux}$$

$$\vec{P} = \frac{2\delta^2 e^2}{\omega_{II}^2 - \omega^2} \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B}\right) E_0 \cos \omega t \vec{ux}$$

42) puissance

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4}{3\pi c} \frac{\delta^4 e^4}{(\omega_{II}^2 - \omega^2)^2} \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B}\right)^2 E_0^2$$

43)

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\alpha I(z)$$

dimensions

$$\frac{[I]}{L} = [\alpha] [I]$$

$$[\alpha] = L^{-1} \quad (\alpha \text{ est l'inverse d'une longueur})$$

44)

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -\alpha dz$$

→ On intègre

$$\ln I(z) = -\alpha z + \text{cste}$$

$$I(z) = e^{-\alpha z} A$$

$$I(z) = I(0) e^{-\alpha z}$$

→ L'intensité est divisée par 10 sur une distance D telle que

$$\frac{I(0)}{10} = I(0) e^{-\alpha D}$$

en prenant le ln

$$\ln \frac{1}{10} = -\alpha D$$

$$D = \frac{\ln 10}{\alpha}$$

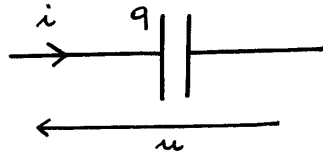
$$D = \frac{2,30}{\alpha}$$

45) Les forces électriques sur les deux atomes d'oxygène sont identiques.

Elles peuvent exciter le mode II où les deux atomes ont le même mouvement mais pas le mode I où les atomes vibrent en opposition.

Exercice électrocinétique

1)



Si on appelle q la charge de l'armature de gauche, si $i > 0$ alors q augmente donc $i = + \frac{dq}{dt}$

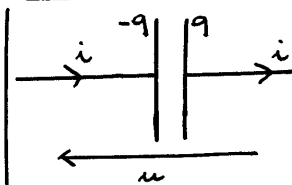
or

$$u = \frac{q}{C}$$

donc

$$i = C \frac{du}{dt}$$

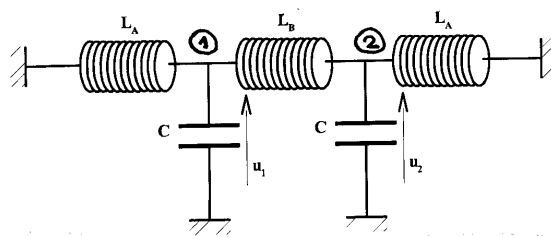
remarque



En appelant q la charge de l'armature de droite

$$\left. \begin{array}{l} i = - \frac{dq}{dt} \\ u = - \frac{q}{C} \end{array} \right\} i = C \frac{du}{dt} \quad (\text{idem})$$

2)



→ au nœud 1 en désignant par i_{LA} , i_{LB} et i_C les intensités qui arrivent au nœud

$$\begin{array}{ccccccc} i_{LA} & + & i_{LB} & + & i_C & & = 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{avec} & & \text{avec} & & -C \frac{du_1}{dt} & & \\ 0 - u_1 = L_A \frac{di_{LA}}{dt} & & u_2 - u_1 = L_B \frac{di_{LB}}{dt} & & & & \end{array}$$

on dérive l'équation aux nœuds

$$\frac{di_{L_A}}{dt} + \frac{di_{L_B}}{dt} + \frac{di_C}{dt} = 0$$

$$\boxed{\frac{0 - u_1}{L_A} + \frac{u_2 - u_1}{L_B} - C \frac{d^2 u_1}{dt^2} = 0}$$

→ au nœud 2, on obtient de la même façon.

$$\boxed{\frac{0 - u_2}{L_A} + \frac{u_1 - u_2}{L_B} - C \frac{d^2 u_2}{dt^2} = 0}$$

3) Equations :

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \overbrace{\frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_B} \right)}^a u_1 - \overbrace{\frac{1}{C L_B}}^b u_2 = 0$$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_B} \right)}_a u_2 - \underbrace{\frac{1}{C L_B}}_b u_1 = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + a u_1 - b u_2 &= 0 \\ \frac{d^2 u_2}{dt^2} + a u_2 - b u_1 &= 0 \end{aligned}}$$

On travaille avec les complexes associés puisque l'on cherche les solutions harmoniques.

$$\frac{d^2 \underline{u}_1}{dt^2} + a \underline{u}_1 - b \underline{u}_2 = 0$$

$$\frac{d^2 \underline{u}_2}{dt^2} + a \underline{u}_2 - b \underline{u}_1 = 0$$

avec $\frac{d}{dt} = j\omega$

$$\frac{d^2}{dt^2} = -\omega^2$$

$$(a - \omega^2) \underline{u}_1 - b \underline{u}_2 = 0$$

$$-b \underline{u}_1 + (a - \omega^2) \underline{u}_2 = 0$$

Si le déterminant $\begin{vmatrix} (a - \omega^2) & -b \\ -b & (a - \omega^2) \end{vmatrix}$ est non nul, ce

système n'admet qu'une seule solution. Cette solution est évidente : c'est $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = 0$

Ici on doit donc supposer le déterminant nul.

$$(a - \omega^2)^2 - b^2 = 0$$

$$a - \omega^2 = \pm b$$

Avec le signe +

$$\omega_{\text{I}}^2 = a - b$$

$$\omega_{\text{I}} = \sqrt{\frac{1}{C L_A}}$$

Avec le signe -

$$\omega_{\text{II}}^2 = a + b$$

$$\omega_{\text{II}} = \sqrt{\frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_A} + \frac{2}{L_B} \right)}$$

remarque :

On constatera l'analogie entre cet exercice et le problème précédent (cf 31) et 32))

$$\begin{array}{lcl} \text{Ici} & K & \Leftrightarrow \frac{1}{C} \\ & m & \Leftrightarrow L \end{array}$$