Chapitre 33. Produits scalaires. Espaces euclidiens

Plan du chapitre

1 Produit scalaire .... **page 2**
1.1 Formes bilinéaires .... page 2
1.2 Définition d'un produit scalaire .... page 2
1.3 Exemples fondamentaux .... page 3
1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz .... page 6
2 Norme hilbertienne .... **page 8**
2.1 Définition d'une norme .... page 8
2.2 Définition de la norme hilbertienne .... page 9
2.3 Carré scalaire d'un vecteur .... page 11
2.4 Identités de polarisation .... page 11
2.5 Théorème de Pythagore .... page 12
2.6 Identité du parallélogramme .... page 12
3 Orthogonalité .... **page 13**
3.1 Vecteurs orthogonaux .... page 13
3.2 Orthogonal d'une partie .... page 13
4 Familles orthonormales .... **page 14**
4.1 Définition .... page 14
4.2 Propriétés .... page 16
4.3 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt .... page 17
4.4 Bases orthonormées .... page 20
4.4.1 Existence de bases orthonormées en dimension finie .... page 20
4.4.2 Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme en base orthonormée .... page 21
5 Projections et symétries orthogonales .... **page 21**
5.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie .... page 21
5.2 Projections orthogonales .... page 23
5.2.1 Projection orthogonale sur un vecteur non nul .... page 23
5.2.2 Projection orthogonale sur un hyperplan .... page 24
5.2.3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Distance à un tel sous-espace .... page 25
5.3 Symétries orthogonales .... page 29

1 Produit scalaire

1.1 Formes bilinéaires

DÉFINITION 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Une **forme bilinéaire** sur E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables c'est-à-dire

$$\forall (u_1, u_2, v) \in E^3,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 \varphi(u_1, v) + \lambda_2 \varphi(u_2, v)$$
et
$$\forall (u, v_1, v_2) \in E^3,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(u, v_1) + \lambda_2 \varphi(u, v_2).$$

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \times y \end{array}$ est un exemple fondamental de forme bilinéaire (sur $\mathbb{R}$).

DÉFINITION 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit φ une forme bilinéaire sur E.

- φ est **symétrique** si et seulement si $\forall (u, v) \in E^2,\ \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.
- φ est **positive** si et seulement si $\forall u \in E,\ \varphi(u, u) \geqslant 0$.
- φ est **définie** si et seulement si $\forall u \in E,\ \varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Remarque. Si φ est une forme bilinéaire quelconque, on a nécessairement $\varphi(0, 0) = 0$ (ou encore $u = 0 \Rightarrow \varphi(u, u) = 0$) et plus généralement, pour tout u de E, $\varphi(u, 0) = 0$. En effet, pour $u \in E$ donné, l'application $v \mapsto \varphi(u, v)$ est linéaire et s'annule donc en 0.

⇨ **Commentaire** . *Si φ est une forme bilinéaire, on peut résumer en une seule proposition les deux mots « définie et positive » : φ est définie et positive si et seulement si*

$$\forall u \in E \setminus \{0\},\ \varphi(u, u) > 0.$$

Exemples.

• Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & xy' - yx' \end{array}$. φ est une forme bilinéaire (n-linéarité du déterminant en dimension n) qui n'est pas définie car si $u = (1, 0) \neq (0, 0)$, alors $\varphi(u, u) = 1 \times 0 - 0 \times 1 = 0$ mais qui est positive car pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(u, u) = xy - yx = 0 \geqslant 0$.

• Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & xx' - yy' \end{array}$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est ni définie car $\varphi((1, 1), (1, 1)) = 1^2 - 1^2 = 0$, ni positive car $\varphi((0, 1), (0, 1)) = 0^2 - 1^2 = -1 < 0$.

• Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & xy' \end{array}$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas symétrique car $\varphi((1, 0), (0, 1)) = 1$ et $\varphi((0, 1), (1, 0) = 0 \neq 1$. ❏

1.2 Définition d'un produit scalaire

DÉFINITION 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire sur E, symétrique, positive et définie.

Un **espace préhilbertien réel** est un couple (E, φ) où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ est un produit scalaire sur E.
Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien réel où de plus l'espace vectoriel E est de dimension finie.

⇨ **Commentaire** .

◇ *Dans la pratique, pour vérifier qu'une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire, on commence par vérifier d'abord la symétrie puis on vérifie la linéarité par rapport à la première variable, la deuxième linéarité résultant de la première et de la symétrie :*

$$\varphi(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, u) = \lambda_1 \varphi(v_1, u) + \lambda_2 \varphi(v_2, u) = \lambda_1 \varphi(u, v_1) + \lambda_2 \varphi(u, v_2).$$

◇ *Un espace préhilbertien est un couple (E, φ). Si on change l'un des deux éléments de ce ce couple, et en particulier, si on remplace le produit scalaire φ par un autre produit scalaire sans changer l'espace E, on obtient un autre espace préhilbertien.*

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour $((x,y),(x',y')) \in E^2$, on pose $\varphi((x,y),(x',y')) = xx' + \frac{1}{2}(xy'+yx') + yy'$.

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Solution 1.

• φ est une application de $\left(\mathbb{R}^2\right)^2$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $((x,y),(x',y')) \in E^2$.

$$\varphi((x,y),(x',y')) = xx' + \frac{1}{2}(xy'+yx') + yy' = x'x + \frac{1}{2}(x'y+y'x) + y'y = \varphi((x',y'),(x,y)).$$

Donc, φ est une forme symétrique sur E.

• Soient $((x,y),(x',y'),(x'',y'')) \in E^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda(x,y)+\mu(x',y'),(x'',y'')) &= \varphi((\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y'),(x'',y'')) \\
&= (\lambda x+\mu x')x'' + \frac{1}{2}((\lambda x+\mu x')y'' + (\lambda y+\mu y')x'') + (\lambda y+\mu y')y'' \\
&= \lambda\left(xx'' + \frac{1}{2}(xy''+yx'') + yy''\right) + \mu\left(x'x'' + \frac{1}{2}(x'y''+y'x'') + y'y''\right) \\
&= \lambda\varphi((x,y),(x'',y'')) + \mu\varphi((x',y'),(x'',y'')).
\end{aligned}$$

φ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Soit $(x,y) \in E$. $\varphi((x,y),(x,y)) = x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geqslant 0$. Donc, φ est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur E.

• Soit $(x,y) \in E$.

$$\begin{aligned}
\varphi((x,y),(x,y)) = 0 &\Rightarrow \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 0 \\
&\Rightarrow \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3y^2}{4} = 0 \text{ (car si } \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 \neq 0 \text{ ou } \frac{3y^2}{4} \neq 0, \text{ alors } \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0) \\
&\Rightarrow y = 0 \text{ et } x + \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0 \\
&\Rightarrow (x,y) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur E et finalement, φ est un produit scalaire sur E.

Dans la pratique, quand un produit scalaire est donné, le produit scalaire de deux vecteurs u et v est rarement noté $\varphi(u,v)$. Il est fréquemment noté $\langle u,v\rangle$ ou $(u|v)$ ou $u|v$ dans le cas général ou $u.v$ pour faire de la géométrie en dimension 2 ou 3. Si E est $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la notation $P.Q$ ou $u.v$ ou $f.g$ pourrait être confondue avec le produit de deux polynômes, de deux suites ou de deux fonctions et serait donc trop ambigüe.

1.3 Exemples fondamentaux

On donne ici une liste de produits scalaires usuels. On n'effectue pas toutes les démonstrations. Les démonstrations explicitement effectuées constituent des questions classiques de problèmes de concours.

• Sur $E = \mathbb{R}$, on pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x|y = x \times y$. L'application $(x,y) \mapsto x|y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}$.

• Plus généralement, sur $E = \mathbb{R}^n$, on pose pour tout $(x,y) = ((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $x|y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. L'application $(x,y) \mapsto x|y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé le **produit scalaire canonique** sur $\mathbb{R}^n$ (ou aussi produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$). L'utilisation du mot canonique fait référence à la base canonique en un sens qui sera expliqué plus loin dans la section « Familles orthonormales ».

• Sur $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour tout $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $X|Y = X^T Y$ (en identifiant une matrice de format $(1,1)$ et son unique coefficient). L'application $(X,Y) \mapsto X|Y$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car si on pose $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, alors

$$X^TY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

• Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $A|B = \mathrm{Tr}(A^TB)$. Vérifions que l'application $(A, B) \mapsto A|B$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$$\mathrm{Tr}(A^TB) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}\right)}_{\text{coefficient ligne } j\text{, colonne } j \text{ de } A^TB} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

On reconnaît le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, l'application $(A, B) \mapsto A|B$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ceci achève la démonstration.

On peut néanmoins vérifier directement, sans référence au produit scalaire canonique, que l'application $(A, B) \mapsto A|B$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais c'est beaucoup plus maladroit :

- Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. $A|B = \mathrm{Tr}\left(A^TB\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(A^TB\right)^T\right) = \mathrm{Tr}\left(B^TA\right) = B|A$. Donc, l'application $(A, B) \mapsto A|B$ est symétrique.

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $A \mapsto \mathrm{Tr}\left(A^TB\right)$ est linéaire par bilinéarité du produit matriciel et par linéarité de la transposition et de la trace.

- Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{Tr}\left(A^TA\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si tous les $a_{i,j}$ sont nuls et donc la forme bilinéaire, symétrique $(A, B) \mapsto A|B$ est définie, positive.

• Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on pose pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$. Vérifions-le explicitement.

- Soit $(P, Q) \in E^2$. L'application $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$ (en tant que polynôme) et donc $P|Q$ existe dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $(P, Q) \mapsto P|Q$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

- Soit $(P, Q) \in E^2$. $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t)\ dt = \int_0^1 Q(t)P(t)\ dt = Q|P$. Donc, l'application $(P, Q) \mapsto P|Q$ est symétrique.

- L'application $(P, Q) \mapsto P|Q$ est bilinéaire par bilinéarité du produit de deux polynômes et linéarité de l'intégrale.

- Soit $P \in E$. $P|P = \int_0^1 P^2(t)\ dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. De plus,

$$\begin{aligned} P|P = 0 &\Rightarrow \int_0^1 P^2(t)\ dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, 1],\ P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}. \end{aligned}$$

Donc, $(P, Q) \mapsto P|Q$ est définie, positive.

On a montré que l'application $(P, Q) \mapsto P|Q$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur E et donc un produit scalaire sur E.

• Sur $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, on pose pour $(f, g) \in E^2$, $f|g = \int_a^b f(t)g(t)\ dt$. L'application $(f, g) \mapsto f|g$ est un produit scalaire sur E. La démonstration de ce résultat est quasiment identique. Il y a simplement une nuance à la fin de la démonstration :

$$\begin{aligned} f|f = 0 &\Rightarrow \int_a^b f^2(t)\ dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [a, b],\ f^2(t) = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

Exercice 2. On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge ($\ell^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des suites réelles *de carré sommable*).

1) Soit $(u,v) \in E^2$. Montrer que la série de terme général $u_n v_n$ converge.

2) Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.\right)$.

3) Montrer que l'application $(u,v) \mapsto u|v = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Solution 2.

1) Soit $(u,v) \in E^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 - 2|u_n v_n| + v_n^2 = (|u_n| - |v_n|)^2 \geqslant 0$ et donc $|u_n v_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + v_n^2\right)$. Par hypothèse, les séries de termes généraux respectifs u_n^2 et v_n^2 convergent. Il en est de même de la série de terme général $\dfrac{1}{2}\left(u_n^2 + v_n^2\right)$. On en déduit que la série de terme général $u_n v_n$ est absolument convergente et en particulier convergente.

2) $\ell^2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De plus, la suite nulle appartient à $\ell^2(\mathbb{R})$.
Soient $(u,v) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout entier naturel n,

$$(\lambda u_n + \mu v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda\mu u_n v_n + \mu_n^2 v_n^2.$$

Mais alors, la série de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge en tant que combinaison linéaire de séries convergentes et donc $\lambda u + \mu v \in \ell^2(\mathbb{R})$.

On a montré que $E = \ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.\right)$.

3) • Pour tout $(u,v) \in E^2$, la série de terme général $u_n v_n$ converge d'après 1). Donc, $(u,v) \mapsto u|v$ est bien une application de $\left(\ell^2(\mathbb{R})\right)^2$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $(u,v) \in E^2$.

$$u|v = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_n = v|u.$$

Donc, l'application $(u,v) \mapsto u|v$ est symétrique.

• Soient $(u,v,w) \in E^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(\lambda u + \mu v)|w &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)\, w_n \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n w_n \text{ (combinaison linéaire de séries convergentes)} \\
&= \lambda\, u|w + \mu\, v|w.
\end{aligned}$$

Donc, l'application $(u,v) \mapsto u|v$ est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Soit $u \in E$. $u|u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \geqslant 0$. De plus, si $u \neq 0$, l'un au moins des termes de la somme est strictement positif, les autres étant positifs ou nuls et donc $u|u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 > 0$. Ceci montre que $(u,v) \mapsto u|v$ est définie, positive.

On a montré que l'application $(u,v) \mapsto u|v = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur $\ell^2(\mathbb{R})$ et donc que l'application $(u,v) \mapsto u|v = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1 (inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors,

$$\forall (u,v) \in E^2,\ |\langle u,v\rangle| \leqslant \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

De plus, $|\langle u,v\rangle| = \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} \Leftrightarrow (u,v)$ liée (cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Démonstration . Soit $(u,v) \in E^2$. Si $u = 0$, l'inégalité est immédiate et est une égalité : $|\langle 0,v\rangle| = 0 = \sqrt{\langle 0,0\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}$. Dorénavant, $u \neq 0$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons

$$P(\lambda) = \langle \lambda u - v, \lambda u - v\rangle = \lambda^2\langle u,u\rangle - 2\lambda\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle.$$

Puisque $u \neq 0$, on a $\langle u,u\rangle \neq 0$ et donc P est un polynôme du second degré à coefficients réels. Puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = \langle \lambda u - v, \lambda u - v\rangle \geqslant 0$, P est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Le discriminant réduit du polynôme P est donc négatif ou nul. Ceci fournit :

$$0 \geqslant \Delta' = (\langle u,v\rangle)^2 - \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$$

puis $(\langle u,v\rangle)^2 \leqslant \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$. En tenant compte du fait que $\langle u,u\rangle \geqslant 0$, $\langle v,v\rangle \geqslant 0$ et que $\sqrt{(\langle u,v\rangle)^2} = |\langle u,v\rangle|$, en prenant la racine carrée des deux membres, on obtient

$$|\langle u,v\rangle| \leqslant \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

Déterminons maintenant les cas d'égalité :

$$\begin{aligned}
|\langle u,v\rangle| = \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} &\Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } (u \neq 0 \text{ et } \Delta' = 0)\\
&\Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } (u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}/\ P(\lambda_0) = 0)\\
&\Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } (u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}/\ \langle \lambda_0 u - v, \lambda_0 u - v\rangle = 0)\\
&\Leftrightarrow u = 0 \text{ ou } (u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R}/\ v = \lambda_0 u)\\
&\Leftrightarrow (u,v) \text{ liée.}
\end{aligned}$$

❑

On note qu'une forme équivalente de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est : $(\langle u,v\rangle)^2 \leqslant \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$.

Exemples. Puisque qu'un produit scalaire a des aspects multiples, l'inégalité de Cauchy-Schwarz a des aspects multiples. Enonçons-en explicitement deux versions :

• Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall \left((x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}, (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ (x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right).$$

• Dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ dt$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall (f,g) \in \left(C^0([a,b],\mathbb{R})\right)^2,\ \left(\int_a^b f(t)g(t)\ dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\ dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\ dt\right).$$

Exercice 3. Soient $a_1, \ldots, a_n$, n réels strictement positifs. Montrer que

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Préciser les cas d'égalité.

Solution 3. Soient $a_1, \ldots, a_n$, n réels strictement positifs. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{a_i})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2\right)\\
&\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i} \times \frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}1\right)^2 = n^2.
\end{aligned}$$

De plus, si on a l'égalité, alors il existe un réel λ tel que $(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$ ou encore, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \lambda$. Ceci impose à λ d'être strictement positif. Réciproquement, si λ est un réel strictement positif,

$$(\lambda + \ldots + \lambda)\left(\frac{1}{\lambda} + \ldots + \frac{1}{\lambda}\right) = n\lambda \times \frac{n}{\lambda} = n^2.$$

En résumé, pour tous réels strictement positifs a_1, ..., a_n, $(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$ avec égalité si et seulement si les a_i sont égaux.

Exercice 4. Soit $\mathcal{E} = \left\{\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right),\ f \text{ continue et strictement positive sur } [a, b]\right\}$.

1) Déterminer $\operatorname{Sup}(\mathcal{E})$.

2) Déterminer $\operatorname{Inf}(\mathcal{E})$. Vérifier qu'il s'agit d'un minimum et préciser les fonctions en lesquelles ce minimum est atteint.

Solution 4. Pour chaque fonction f, continue et strictement positive sur $[a, b]$ (de sorte que $\frac{1}{f}$ est aussi continue et strictement positive sur $[a, b]$), on pose $\varphi(f) = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right)$.

1) Pour $\alpha > 0$, on considère la fonction $f_\alpha\ :\ x \mapsto e^{\alpha x}$. Chaque fonction f_α est continue et strictement positive sur $[a, b]$ et donc, pour tout $\alpha > 0$, $\varphi(f_\alpha) \in \mathcal{E}$. Ensuite, pour $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(f_\alpha) &= \left(\int_a^b e^{\alpha t}\,dt\right)\left(\int_a^b e^{-\alpha t}\,dt\right) = \frac{1}{\alpha^2}\left(e^{\alpha b} - e^{\alpha a}\right)\left(-e^{-\alpha b} + e^{-\alpha a}\right)\\ &= \frac{1}{\alpha^2}\left(e^{\alpha(b-a)} + e^{\alpha(a-b)} - 2\right).\end{aligned}$$

De plus, puisque $b - a > 0$, $\frac{1}{\alpha^2}\left(e^{\alpha(b-a)} + e^{\alpha(a-b)} - 2\right) \underset{\alpha \to +\infty}{\sim} \frac{e^{\alpha(b-a)}}{\alpha^2} \underset{\alpha \to +\infty}{\to} +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. Ainsi, $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas majorée. On en déduit que

$$\operatorname{Sup}(\mathcal{E}) = +\infty.$$

2) Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a, b]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \left(\int_a^b \left(\sqrt{f(t)}\right)^2 dt\right)\left(\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 dt\right)\\ &\geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,dt\right)^2 = \left(\int_a^b dt\right)^2\\ &= (b-a)^2.\end{aligned}$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si la famille de fonctions $\left(\sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}}\right)$ est liée. Ceci équivaut à l'existence d'un réel strictement positif λ tel que, pour tout t de $[a, b]$, $\sqrt{f(t)} = \frac{\lambda}{\sqrt{f(t)}}$ ou encore, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = \lambda$.

En résumé, pour toute fonction f, continue et strictement positive sur $[a, b]$, $\varphi(f) \geqslant (b-a)^2$ avec égalité si et seulement si la fonction f est une constante strictement positive. Ceci montre que $\operatorname{Inf}(\mathcal{E})$ existe dans $\mathbb{R}$, est un minimum et enfin

$$\operatorname{Inf}(\mathcal{E}) = \operatorname{Min}(\mathcal{E}) = (b-a)^2.$$

---

2 Norme hilbertienne

2.1 Définition d'une norme

DÉFINITION 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une **norme** sur E est une application de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les quatre axiomes :

1) $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ (positivité).
2) $\forall x \in E,\ (N(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$ (axiome de séparation).
3) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité).
4) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un couple (E, N) où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N est une norme sur E s'appelle un **espace vectoriel normé** (e.v.n. en abrégé). Les espaces vectoriels normés sont étudiés en maths spé.

Une norme est fréquemment notée $\|\ \|$. Sur $E = \mathbb{R}$, la valeur absolue $|\ |$ est une norme, mais l'application $x \mapsto 2|x|$ est aussi une norme sur $\mathbb{R}$. De manière générale, si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, on peut montrer qu'il y a une infinité de normes sur E.

On verra au paragraphe suivant que l'application $\|\ \|_2\ :\ u = (x, y) \mapsto \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, appelée **norme euclidienne usuelle**. L'exercice suivant fournit deux autres exemples de norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ et $\|(x, y)\|_\infty = \text{Max}\{|x|, |y|\}$.

Montrer que $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Solution 5.

Montrons que $\|\ \|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. $\|\ \|_1$ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\|u\|_1 = |x| + |y| \geqslant 0$.
• Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|u\|_1 = 0$. Alors, $|x| + |y| = 0$ puis $|x| = |y| = 0$ puis $x = y = 0$ et donc $u = 0$.
• Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $N(\lambda u) = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| \|u\|_1$.
• Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. $\|u + v\|_1 = |x + x'| + |y + y'| \leqslant |x| + |y| + |x'| + |y'| = \|u\|_1 + \|v\|_1$.

On a montré que $\|\ \|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Montrons que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. $\|\ \|_\infty$ est bien une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

• Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|u\|_\infty \geqslant 0$.
• Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|u\|_\infty = 0$. Alors, $\text{Max}\{|x|, |y|\} = 0$ puis $|x| \leqslant 0$ et $|y| \leqslant 0$ puis $x = y = 0$ et donc $u = 0$.
• Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si par exemple, $|x| \geqslant |y|$, alors $|\lambda x| = |\lambda||x| \geqslant |\lambda||y| = |\lambda||y|$ et donc

$$\|\lambda u\|_\infty = \text{Max}\{|\lambda x|, |\lambda y|\} = |\lambda x| = |\lambda||x| = |\lambda|\|u\|_\infty.$$

• Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. $|x + x'| \leqslant |x| + |x'| \leqslant \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ et $|y + y'| \leqslant |y| + |y'| \leqslant \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$. Par suite,

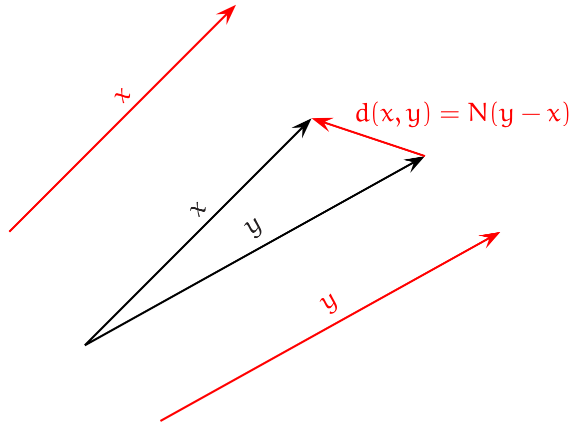
$$\|u + v\|_\infty = \text{Max}\{|x + x'|, |y + y'|\} \leqslant \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

On a montré que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Quand une norme est donnée, on peut mesurer la **distance** entre deux vecteurs :

DÉFINITION 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et N une norme sur E. La distance associée à cette norme est l'application d définie sur E^2 par :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = N(y - x).$$



Cette distance a les propriétés suivantes :

Théorème 2.
1) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) \geqslant 0$.
2) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
3) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x)$.
4) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Démonstration . 1) est vrai par positivité de N. Si x et y sont deux vecteurs de E tels que $d(x, y) = 0$, alors $N(x - y) = 0$ puis $x - y = 0$ d'après l'axiome de séparation et donc 2) est vrai.

Soient x et y deux éléments de E. $d(x, y) = N(y - x) = N(-(x - y)) = |-1|\, N(x - y) = N(x - y) = d(y, x)$. Donc, 3) est vrai.

Soient enfin x, y et z trois éléments de E.

$$d(x, y) = N(y - x) = N((y - z) + (z - x)) \leqslant N(y - z) + N(z - x) = d(x, z) + d(z, y).$$

Donc, 4) est vrai.

❏

Définition 6. Un vecteur u de E est dit **unitaire** pour la norme N si et seulement si $N(u) = 1$.

2.2 Définition de la norme hilbertienne

Théorème 3. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour $x \in E$, on pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
$\|\ \|$ est une norme sur E.

Démonstration . Pour tout x de E, $\langle x, x\rangle$ est un réel positif et donc $\|x\|$ existe dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\|\ \|$ est une application de E dans $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in E$. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geqslant 0$.
- Soit $x \in E$. $\|x\| = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$.
- Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \|y\|^2 \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

et donc, en prenant la racine carrée des deux membres, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

On a montré que $\|\ \|$ est une norme sur E. ❏

Définition 7. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour $x \in E$, on pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

La norme $\|\ \|$ est appelée **norme hilbertienne** si E est de dimension quelconque, **norme euclidienne** si E est de dimension finie et dans tous les cas, **norme associée au produit scalaire** $\langle\ ,\ \rangle$.

Dans $\mathbb{R}^n$, la **norme euclidienne usuelle** est l'application notée $\|\ \|_2$ et définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

C'est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

On s'intéresse maintenant aux cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour la norme hilbertienne :

Théorème 4. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $\|\ \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x = 0$ ou $(x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+/\ y = \lambda x)$.

⇨ **Commentaire** . *On a l'habitude de résumer le théorème précédent avec la phrase un peu fausse : « l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens » (la phrase est un peu fausse car dire que x et y ont même sens ne veut rien dire quand x ou y sont nuls).*

Démonstration . Reproduisons les différentes étapes ayant permis d'établir l'inégalité triangulaire dans le théorème 3 :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leqslant \|x\|^2 + 2\sqrt{\langle x, y\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \|y\|^2 \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si chacune des inégalités intermédiaires est une égalité car si l'une des inégalités intermédiaires est stricte, alors $\|x+y\|^2 < (\|x\| + \|y\|)^2$. Donc,

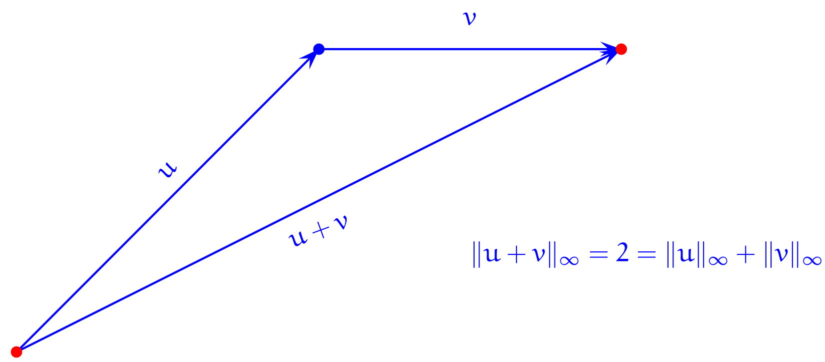
$$\begin{aligned}
\|x+y\| = \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \\
&\Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, y\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \text{ et } \langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| \\
&\Leftrightarrow (x, y) \text{ liée et } \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^+ \text{ (cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ y = \lambda x \text{ et } \langle x, \lambda x\rangle \in \mathbb{R}^+) \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ y = \lambda x \text{ et } \lambda\|x\|^2 \in \mathbb{R}^+) \\
&\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+/\ y = \lambda x) \text{ (car si } x \neq 0,\ \|x\|^2 > 0).
\end{aligned}$$

❑

Il ne faut pas croire que toute norme est associée à un produit scalaire ou encore, il ne faut pas croire que si N est une norme, il existe nécessairement un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ tel que, pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Le théorème 4 est un outil parmi d'autres permettant de se convaincre qu'une norme donnée n'est pas une norme hilbertienne : si on trouve un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire où les vecteurs ne sont pas « colinéaires et de même sens », la norme considérée ne peut être une norme hilbertienne.

Vérifions par exemple que la norme $\|\ \|_\infty$ de l'exercice 5 (pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|u\|_\infty = \text{Max}\{|x|, |y|\}$) n'est pas une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Soient $u = (1, 1)$ et $v = (1, 0)$. Il est clair que u et v ne sont pas colinéaires. Pourtant, $\|u + v\|_\infty = \|(2, 1)\|_\infty = 2 = 1 + 1 = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$. Donc, $\|\ \|_\infty$ ne peut être associée à un produit scalaire.



Ainsi, pour la norme $\| \ \|_\infty$, « le plus court chemin n'est pas toujours la ligne droite » car le trajet en ligne droite joignant les deux points rouges et le trajet en deux étapes, passant par le point bleu ont la même longueur.

Par contre, pour toute norme N, « la ligne droite est toujours un plus court chemin » : soit u un vecteur et λ un réel positif.

$$N(u) + N(\lambda u) = N(u) + |\lambda| N(u) = (1+\lambda)N(u)$$

puis

$$N(u+\lambda u) = N((1+\lambda)u) = |1+\lambda| N(u) = (1+\lambda)N(u) = N(u) + N(\lambda u).$$

2.3 Carré scalaire d'un vecteur

DÉFINITION 8. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit u un vecteur de E.

Le produit scalaire de u par lui-même peut se noter u^2 et s'appelle le **carré scalaire** du vecteur u. On a donc

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = u^2.$$

Avec cette nouvelle notation, on a immédiatement les identités remarquables suivantes (par bilinéarité et symétrie du produit scalaire) :

Théorème 5. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

• $\forall (u,v) \in E^2$, $(u+v)^2 = u^2 + 2\langle u, v\rangle + v^2$.
• $\forall (u,v) \in E^2$, $(u-v)^2 = u^2 - 2\langle u, v\rangle + v^2$.
• $\forall (u,v) \in E^2$, $\langle u+v, u-v\rangle = u^2 - v^2$.

2.4 Identités de polarisation

Les égalités $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ ou $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ sont des égalités exprimant la norme (hilbertienne) en fonction du produit scalaire. Il s'avèrera utile le moment venu de savoir aussi exprimer le produit scalaire en fonction de la norme uniquement. C'est l'objet du théorème 6 qui donne les **identités de polarisation** :

Théorème 6. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

• $\forall (u,v) \in E^2$, $\langle u, v\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$.

• $\forall (u,v) \in E^2$, $\langle u, v\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

• $\forall (u,v) \in E^2$, $\langle u, v\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

DÉMONSTRATION . La première identité découle de l'identité $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$ et la deuxième découle de l'identité $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$.

La troisième identité s'obtient en retranchant membre à membre les deux égalités précédentes.

❏

2.5 Théorème de Pythagore

Théorème 7 (théorème de Pythagore). Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient u et v deux éléments de E.

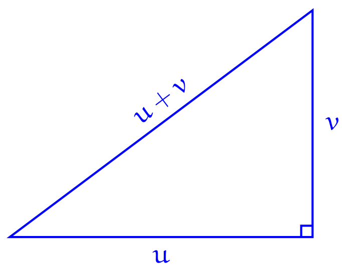
$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$

Démonstration. Soient u et v deux vecteurs. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$ et par suite,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$

❏

On dira plus loin (ou on rappellera) que deux vecteurs u et v sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ si et seulement si $\langle u, v\rangle = 0$. Le théorème de Pythagore affirme donc que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si et seulement si u et v sont orthogonaux. On note que le théorème de Pythagore est désormais une équivalence et que l'expression « d'après la réciproque du théorème de Pythagore » devient obsolète.



$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

On peut se demander si le théorème 7 se généralise à strictement plus de deux vecteurs. Soient $u_1, \dots, u_n$, n vecteurs de E. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a

$$\|u_1 + \ldots + u_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \langle u_i, u_j\rangle.$$

Ainsi, **si** pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $\langle u_i, u_j\rangle = 0$, **alors** $\|u_1 + \ldots + u_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$. Mais la réciproque est fausse car l'égalité $\|u_1 + \ldots + u_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$ n'entraîne rien de plus que $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \langle u_i, u_j\rangle = 0$.

2.6 Identité du parallélogramme

Théorème 8 (identité du parallélogramme). Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient u et v deux éléments de E.

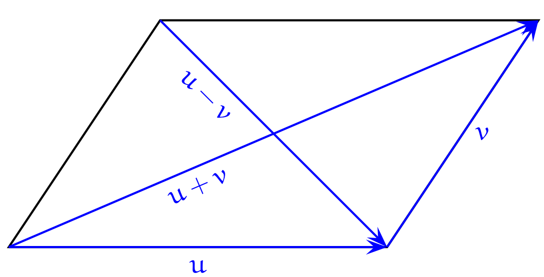
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

Démonstration. Soient u et v deux vecteurs. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$ et $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$. En additionnant membre à membre ces deux égalités, on obtient

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

❏

On interprète géométriquement cette égalité. Si u et v sont deux vecteurs, $u+v$ et $u-v$ sont les diagonales du parallélogramme bâti sur u et v :



$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Ainsi, la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

3 Orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION 9. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient u et v deux éléments de E.

Les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si $\langle u, v\rangle = 0$.

Il faut prendre garde au fait que $\langle u, v\rangle = 0 \not\Rightarrow u = 0$ ou $v = 0$ (mais bien sûr, $u = 0$ ou $v = 0 \Rightarrow \langle u, v\rangle = 0$ ou encore, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur).

3.2 Orthogonal d'une partie

DÉFINITION 10. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit A une partie de E.

Si A est non vide, l'**orthogonal de** A, noté $A^\perp$, est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp = \{y \in E / \forall x \in A,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Si A est vide, l'orthogonal de A est E par convention :

$$\varnothing^\perp = E.$$

Notation. Quand A est un singleton $\{x\}$ où x est un élément de E, $A^\perp = \{x\}^\perp$ s'écrit plus simplement $x^\perp$. Ainsi, si $A \neq \varnothing$, on a $A^\perp = \bigcap\limits_{x \in A} x^\perp$.

La première propriété importante de l'orthogonal d'une partie est d'être toujours un sous-espace vectoriel de E, même si A n'est pas un sous-espace vectoriel de E :

Théorème 9. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit A une partie de E.

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

DÉMONSTRATION . Si A est vide, $A^\perp = E$ est un sous-espace de E. Dorénavant, $A \neq \varnothing$.
Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de A et donc $0 \in A^\perp$.
Soient $(y_1, y_2) \in \left(A^\perp\right)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout x de A, par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \lambda_1\langle x, y_1\rangle + \lambda_2\langle x, y_2\rangle = 0,$$

et donc $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in A^\perp$. Ceci montre que $A^\perp$ est un sous-espace de E. ❏

Théorème 10. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors

$$\{0\}^\perp = E \quad \text{et} \quad E^\perp = \{0\}.$$

DÉMONSTRATION . Tout vecteur de E est orthogonal au vecteur nul et donc $E \subset \{0\}^\perp$ puis $E = \{0\}^\perp$.

Soit $y \in E^\perp$. y est donc orthogonal à tout vecteur de E et en particulier, y est orthogonal à lui-même : $\langle y, y\rangle = 0$. Ceci impose $y = 0$. Donc, $E^\perp \subset \{0\}$ puis $E^\perp = \{0\}$ car $E^\perp$ est un sous-espace de E.

❏

Théorème 11. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $(A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp)$.
2) $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.

DÉMONSTRATION .

1) Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tel que $A \subset B$. Si $A = \varnothing$, alors $B^\perp \subset E = A^\perp$. Sinon, $A \neq \varnothing$ puis $B \neq \varnothing$ car $A \subset B$. Dans ce cas, pour $y \in E$,

$$y \in B^\perp \Rightarrow \forall x \in B,\ \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \forall x \in A,\ \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow y \in A^\perp.$$

Ceci montre encore une fois que $B^\perp \subset A^\perp$.

2) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Si $A = \varnothing$, alors $\text{Vect}(A) = \{0\}$ puis $(\text{Vect}(A))^\perp = E = A^\perp$. Dorénavant, on suppose $A \neq \varnothing$.

Puisque $A \subset \text{Vect}(A)$, on a $(\text{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$ d'après 1). Inversement, tout élément de $A^\perp$ est orthogonal à tout élément de A puis à toute combinaison linéaire d'éléments de A par bilinéarité du produit scalaire. Ceci montre que $A^\perp \subset (\text{Vect}(A))^\perp$ et finalement que $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$. ❏

Théorème 12. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1) $F \cap F^\perp = \{0\}$.
2) $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.

Démonstration .

1) $F \cap F^\perp$ est un sous-espace de E en tant qu'intersection de sous-espaces de E. En particulier, $\{0\} \subset F \cap F^\perp$. Inversement, si x est un élément de $F \cap F^\perp$, x est en particulier orthogonal à lui-même et donc $x = 0$. Ceci montre que $F \cap F^\perp \subset \{0\}$ puis que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

2) Un élément de F est orthogonal à tout vecteur orthogonal à tous les vecteurs de F et donc est un élément de $\left(F^\perp\right)^\perp$. Ceci montre que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.

❏

⇨ **Commentaire** . *On pourrait s'attendre à ce que le **bi-orthogonal** $\left(F^\perp\right)^\perp$, plus simplement noté $F^{\perp\perp}$, soit égal à F. Ceci est faux en général mais difficile à appréhender en maths sup. En maths spé, on analyse des exemples où l'inclusion $F \subset F^{\perp\perp}$ est stricte. Néanmoins, on verra plus loin que si E est un espace euclidien ou encore si dim$(E) < +\infty$, alors $F = F^{\perp\perp}$.*

Exercice 6. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Solution 6. $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$. Donc, $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F + G)^\perp \subset G^\perp$ puis $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Inversement, un élément de $F^\perp \cap G^\perp$ est orthogonal à tout élément de F et à tout élément de G puis à toute somme d'un élément de F et d'un élément de G par bilinéarité du produit scalaire. Ceci montre que $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$ et finalement que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

4 Familles orthonormales

4.1 Définition

Définition 11. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient I un ensemble non vide d'indices puis $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I.

La famille $(e_i)_{i \in I}$ est **orthogonale** si et seulement si

$$\forall (i, j) \in I^2,\ (i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0).$$

La famille $(e_i)_{i \in I}$ est **orthonormale** (ou **orthonormée**) si et seulement si

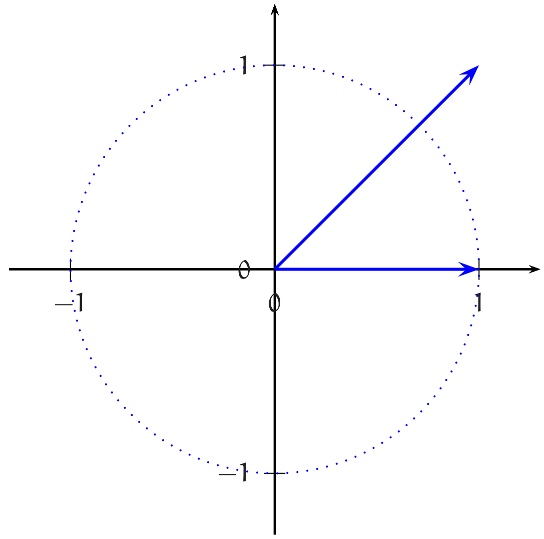
$$\forall (i, j) \in I^2,\ \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right. .$$

Remarques.

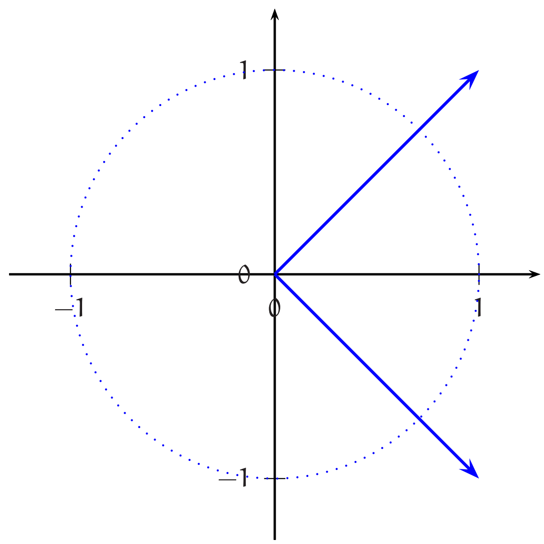
• Il est clair qu'une famille orthonormale est en particulier une famille orthogonale.
• La condition $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ est équivalente à la condition $\|e_i\| = 1$ ou encore les vecteurs d'une famille orthonormale sont unitaires.

Exemples. On munit $E = \mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel.

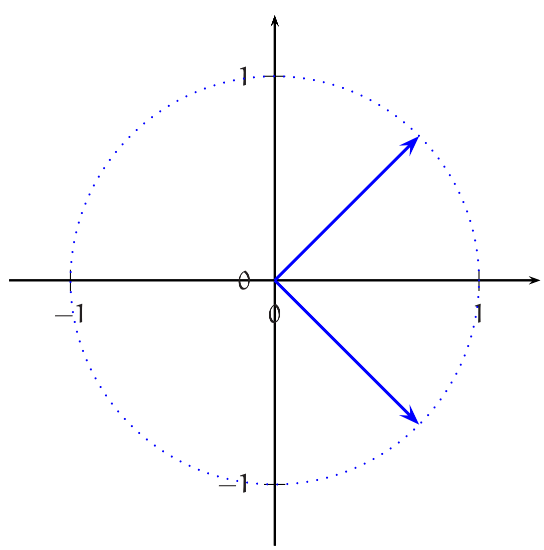
• Soient $u_1 = (1, 1)$ et $v_1 = (1, 0)$. $\langle u_1, v_1 \rangle = 1 \times 1 + 1 \times 0 = 1 \neq 0$. Donc, la famille (u_1, v_1) n'est pas une famille orthogonale.



• Soient $u_2 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$. $\langle u_2, v_2\rangle = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ et $\|u_2\|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$. Donc, la famille (u_2, v_2) est une famille orthogonale mais n'est pas une famille orthonormale.



• Soient $u_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $v_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $\langle u_3, v_3\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ et $\|u_3\|^2 = \|v_3\|^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. Donc, la famille (u_3, v_3) est une famille orthonormale.



❏

4.2 Propriétés

Théorème 13. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Une famille orthogonale de vecteurs **tous non nuls** est libre.

Une famille orthonormale est libre.

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat quand la famille de vecteurs est finie.

• Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 &\Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \langle e_j, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\rangle = 0\\ &\Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = 0 \text{ (par bilinéarité du produit scalaire)}\\ &\Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \lambda_j \langle e_j, e_j\rangle = 0 \text{ (car pour } i \neq j,\ \langle e_i, e_j\rangle = 0)\\ &\Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \lambda_j = 0 \text{ (car } e_j \neq 0 \Rightarrow \langle e_j, e_j\rangle \neq 0).\end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

• Une famille orthonormale est en particulier une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Donc, une famille orthonormale est libre.

❏

Exercice 7.

1) Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^*$, calculer $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(px)\ dx$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $s_n(x) = \sin(nx)$. Montrer que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Solution 7.

1) Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(px)\ dx = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x))\ dx$.

Si $n \neq p$, alors $n - p \neq 0$ et $n + p \neq 0$ (car $n + p \geqslant 2$). Dans ce cas,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(px)\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x))\ dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((n-p)x)}{n-p} - \frac{\sin((n+p)x)}{n+p}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Si $p = n$, alors

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(px)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(2nx))\ dx = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi - \left[\frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{2\pi}\right) = 1.$$

En résumé,

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(px)\ dx = \delta_{n,p}.$$

2) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques (à valeurs dans $\mathbb{R}$). Pour $(f, g) \in E^2$, posons

$$(f|g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx.$$

Vérifions que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E. $(\ |\ )$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, clairement bilinéaire et symétrique. De plus, pour $f \in E$, $(f|f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(x))^2\ dx \geqslant 0$ et enfin,

$$\begin{aligned}(f|f) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2\ dx = 0\\ &\Rightarrow \forall x \in [0, 2\pi],\ (f(x))^2 = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité)}\\ &\Rightarrow f = 0.\end{aligned}$$

Donc, $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E. D'après 1), la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale de l'espace préhilbertien $(E, (\ |\ ))$. En particulier, la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

4.3 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

On se donne un sous-espace vectoriel F de dimension finie n de l'espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. On va dégager un procédé permettant d'obtenir une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de F connaissant une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de F.

Théorème 14. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille **libre** de n vecteurs de E.

Il existe une famille orthonormale $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et une seule telle que

1) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\text{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k} = \text{Vect}\,(e_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$.

2) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle u_k, e_k\rangle > 0$.

Démonstration . Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre. On montre par récurrence sur n l'existence et l'unicité de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$.

• Soit $n = 1$. La famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant 1} = (u_1)$ est libre. En particulier, $u_1 \neq 0$ et donc u_1 endendre une droite vectorielle $D = \text{Vect}\,(u_1)$. On veut que $\text{Vect}\,(e_1) = \text{Vect}\,(u_1)$ et donc nécessairement $e_1 \in \text{Vect}\,(u_1)$. Par suite, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $e_1 = \lambda u_1$.
Ensuite, $\|e_1\| = \|\lambda u_1\| = |\lambda|\,\|u_1\|$ puis $\|e_1\| = 1 \Rightarrow |\lambda| = \dfrac{1}{\|u_1\|} \Rightarrow e_1 = \pm\dfrac{1}{\|u_1\|}u_1$ (il n'y a plus que deux vecteurs e_1 possibles mais l'unicité de e_1 n'est pas encore assurée).
Enfin, $\langle u_1, e_1\rangle = \lambda\langle u_1, u_1\rangle = \lambda\,\|u_1\|^2$. Par suite, $\langle u_1, e_1\rangle > 0 \Rightarrow \lambda\,\|u_1\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$ car $\|u_1\|^2 > 0$. Donc, nécessairement,

$$e_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1.$$

Ceci montre l'unicité du vecteur e_1. Réciproquement, e_1 est un vecteur non nul de la droite $\text{Vect}\,(u_1)$ et donc $\text{Vect}\,(e_1) = \text{Vect}\,(u_1)$. Ensuite, $\|e_1\| = \dfrac{1}{\|u_1\|}\,\|u_1\| = 1$. Enfin, $\langle u_1, e_1\rangle = \dfrac{1}{\|u_1\|} \times \|u_1\|^2 = \|u_1\| > 0$. Donc, le vecteur e_1 convient.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat acquis pour n. Soit $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ une famille libre de $n+1$ vecteurs de E.
En particulier, $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de n vecteurs de E. Par hypothèse de récurrence, il existe une famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ et une seule verifiant : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\text{Vect}\,(e_i)_{1\leqslant i\leqslant k} = \text{Vect}\,(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\langle e_k, u_k\rangle > 0$.
Il reste à vérifier l'existence et l'unicité de e_{n+1} tel que $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ soit orthonormale, puis $\text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ et $\langle u_{n+1}, e_{n+1}\rangle > 0$.

Nécessairement, $e_{n+1} \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n, u_{n+1})$ et donc il existe des réels λ_1, $\ldots$, λ_n et λ tels que $e_{n+1} = \lambda u_{n+1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Nécessairement,

$$0 = \langle e_{n+1}, e_i\rangle = \lambda\langle u_{n+1}, e_i\rangle + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\langle e_j, e_i\rangle = \lambda\langle u_{n+1}, e_i\rangle + \lambda_i \quad (*)$$

et donc $\lambda_i = -\lambda\langle u_{n+1}, e_i\rangle$ puis $e_{n+1} = \lambda e'_{n+1}$ où

$$e'_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\langle u_{n+1}, e_i\rangle e_i.$$

Le vecteur $e'_{n+1} = u_{n+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle u_{n+1}, e_i\rangle e_i$ ne peut être nul car dans le cas contraire, $u_{n+1} \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$ ce qui contredit la liberté de la famille $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$. L'égalité $\|e_{n+1}\| = 1$ impose $|\lambda| = \dfrac{1}{\|e'_{n+1}\|}$ puis $e_{n+1} = \pm\dfrac{1}{\|e'_{n+1}\|}e'_{n+1}$ (de nouveau, il n'y a plus que deux possibilités pour e_{n+1} et c'est la condition de signe $\langle u_{n+1}, e_{n+1}\rangle > 0$ qui va nous permettre de choisir entre ces deux possibilités). On a

$$\langle u_{n+1}, e'_{n+1}\rangle = \langle u_{n+1}, u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\langle u_{n+1}, e_i\rangle e_i\rangle = \|u_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\langle u_{n+1}, e_i\rangle^2.$$

Vérifions que la dernière quantité est strictement positive. Mais,

$$\left\| u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \left(u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \right) \left(u_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_j \rangle e_j \right)$$
$$= \|u_{n+1}\|^2 - 2\langle u_{n+1}, \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \rangle + \left(\sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_j \rangle e_j \right)$$
$$= \|u_{n+1}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle^2 + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle \langle u_{n+1}, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle$$
$$= \|u_{n+1}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle^2 = \|u_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle^2 = \langle u_{n+1}, e'_{n+1} \rangle.$$

Donc, $\langle u_{n+1}, e'_{n+1} \rangle = \left\| u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \right\|^2 > 0$ (car $u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \neq 0$). Or, $\langle u_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \lambda \langle u_{n+1}, e'_{n+1} \rangle$.

La condition $\langle u_{n+1}, e_{n+1} \rangle > 0$ et le fait que $\langle u_{n+1}, e'_{n+1} \rangle > 0$ impose $\lambda > 0$ puis $e_{n+1} = \dfrac{1}{\|e'_{n+1}\|} e'_{n+1}$. Ceci montre l'unicité du vecteur e_{n+1}.

Il reste à vérifier que le vecteur e_{n+1} convient. Le vecteur e_{n+1} est bien défini (car $e'_{n+1} \neq 0$) et unitaire. Les égalités $(*)$ montrent que e_{n+1} est orthogonal aux vecteurs e_1, ..., e_n et finalement, la famille $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est orthonormale. Ensuite,

$$\text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n, e'_{n+1}) = \text{Vect}\left(e_1, \ldots, e_n, u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \right) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n, u_{n+1})$$
$$= \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})\,.$$

Enfin, $\langle u_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \dfrac{1}{\|e'_{n+1}\|} \langle u_{n+1}, e'_{n+1} \rangle = \dfrac{1}{\|e'_{n+1}\|} \left\| u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \|e'_{n+1}\| > 0$ car la famille $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est libre. Donc, le vecteur e_{n+1} convient.

L'existence et l'unicité de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est démontrée par récurrence.

❏

⇨ **Commentaire** .

◇ *La démonstration précédente commence par le cas* $n = 1$ *où on apprend à créer, pour un vecteur non nul* u *donné, un vecteur* e *unitaire, colinéaire à* u *et de même sens que* u *: « on divise* u *par sa norme ». On dit que l'on a* ***normé*** *le vecteur* u.

◇ *La démonstration aurait été certainement plus brève si on n'avait pas voulu à tout prix l'unicité de la famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *grâce à la condition* $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle u_k, e_k \rangle > 0$.

◇ *A ce stade du chapitre, on n'a pas les moyens de comprendre la signification du vecteur* $u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i$ *ou aussi de comprendre pourquoi on a considéré l'expression* $\left\| u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_i \rangle e_i \right\|^2$*. On ne peut que constater que ça marche. Nous reviendrons plus loin sur la signification géométrique de ces calculs, dans le paragraphe « projection orthogonale ».*

◇ *Si la famille* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est déjà orthonormée, il est clair que son orthonormalisée est elle-même. Plus généralement, si la famille* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est orthogonale (et libre), son orthonormalisée est la famille* $\left(\dfrac{1}{\|u_1\|} u_1, \ldots, \dfrac{1}{\|u_n\|} u_n \right)$.

◇ *On note enfin que si* $F = \textit{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$ *où* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est libre, alors* $(u_1, \ldots, u_n)$ *est une base de* F *et son orthonormalisée* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base orthonormée de* F *(puisque d'autre part,* $F = \textit{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$*).*

DÉFINITION 12. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille **libre** de n vecteurs de E.

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ du théorème 14 s'appelle l'**orthonormalisée de SCHMIDT** (ou plus simplement l'**orthonormalisée**) de la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

On doit absolument mémoriser :

Définition de l'orthonormalisée de la famille libre $(u_1, \dots, u_n)$:
C'est l'unique famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ telle que

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle u_k, e_k \rangle > 0$.

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

- $e_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|} u_1$.
- $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $e_{k+1} = \dfrac{1}{\|e'_{k+1}\|} e'_{k+1}$ où

$$e'_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1}, e_i \rangle e_i.$$

Exemple. On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit P le plan d'équation $3x - y + 2z = 0$. Une base de ce plan est (u_1, u_2) où $u_1 = (1, 3, 0)$ et $u_2 = (0, 2, 1)$. On veut maintenant une base orthonormée de ce plan. L'orthonormalisée (e_1, e_2) de la famille libre (u_1, u_2) convient.

$\|u_1\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}$ puis $e_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|} u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1, 3, 0)$.
$\langle u_2, e_1 \rangle = 0 \times \dfrac{1}{\sqrt{10}} + 2 \times \dfrac{3}{\sqrt{10}} + 1 \times 0 = \dfrac{6}{\sqrt{10}}$ puis

$$e'_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 = (0, 2, 1) - \frac{6}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3, 0) = \frac{1}{10}(-6, 2, 10) = \frac{1}{5}(-3, 1, 5).$$

$\|e'_2\| = \dfrac{1}{5}\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2} = \dfrac{\sqrt{35}}{5}$ puis $e_2 = \dfrac{1}{\|e'_2\|} e'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{35}}(-3, 1, 5)$.

Une base orthonormée de P est (e_1, e_2) où $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1, 3, 0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{35}}(-3, 1, 5)$.

Exercice 8. On munit $E = \mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$, $P|Q = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. Déterminer une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, |\ )$.

Solution 8. On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$ de sorte que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminons l'orthonormalisée (E_0, E_1, E_2) de la famille libre (P_0, P_1, P_2). On pose au passage $Q_1 = P_1 - \langle P_1, E_0 \rangle E_0$ et $Q_2 = P_2 - \langle P_2, E_0 \rangle E_0 - \langle P_2, E_1 \rangle E_1$ (les notations E'_1 et E'_2 ne peuvent pas être utilisées puisqu'elles désignent les dérivées des polynômes E_1 et E_2).

- $\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_0^1 1^2\,dt = 1$. Donc, $\boxed{E_0 = 1}$.
- $\langle P_1, E_0 \rangle = \displaystyle\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ puis

$$Q_1 = P_1 - \langle P_1, E_0 \rangle E_0 = X - \frac{1}{2}.$$

Ensuite, $\|Q_1\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ puis

$$E_1 = \frac{1}{\|Q_1\|} Q_1 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1).$$

Donc, $\boxed{E_1 = \sqrt{3}(2X - 1)}$.

- $\langle P_2, E_0 \rangle = \displaystyle\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$ et $\langle P_2, E_1 \rangle = \sqrt{3}\displaystyle\int_0^1 \left(2t^3 - t^2\right) dt = \sqrt{3}\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ puis

$$Q_2 = P_2 - \langle P_2, E_0 \rangle E_0 - \langle P_2, E_1 \rangle E_1 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2X - 1) = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\|Q_2\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 \, dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right) dt \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{36 - 90 + 80 - 30 + 5}{180} = \frac{1}{180},\end{aligned}$$

puis

$$E_2 = \frac{1}{\|Q_2\|} Q_2 = \sqrt{180} \left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}\left(6X^2 - 6X + 1\right).$$

Donc, $\boxed{E_2 = \sqrt{5}\left(6X^2 - 6X + 1\right)}$.

Une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_2[X], \mid\,)$ est (E_0, E_1, E_2).

4.4 Bases orthonormées

Une base orthonormée (ou orthonormale) de l'espace préhlibertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est, comme son nom l'indique, une base de l'espace E qui de plus est une famille orthonormée. Rien ne prouve qu'une telle base existe.

4.4.1 Existence de bases orthonormées en dimension finie

Théorème 15. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie non nulle n.

Il existe au moins une base orthonormée de E.

Démonstration. Puisque E est de dimension finie non nulle n, E admet au moins une base $(u_1, \dots, u_n)$. Cette base est en particulier une famille libre. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ son orthonormalisée.
$(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée et en particulier, $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre. Puisque $\text{card}\,(e_1, \dots, e_n) = n = \dim(E) < +\infty$, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et finalement $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

❏

Si E est de dimension infinie, on ne sait pas dire à l'avance si l'espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ admet au moins une base orthonormée. Mais cela ne veut pas dire qu'il n'y en a pas. Par exemple, si on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire canonique : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \times \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$ (vérifiez qu'il s'agit bien d'un produit scalaire), la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], \langle\ ,\ \rangle)$.

Théorème 16 (théorème de la base orthonormée incomplète). Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie non nulle n. Soient $p \in [\![1, n]\!]$ puis $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée de E.

Si $p < n$, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

Démonstration. $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée et en particulier, $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E. On peut la compléter en $(e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ une base de E. Les vecteurs $f_1 = e_1, \dots, f_p = e_p$ vérifient les conditions : $(f_1, \dots, f_p)$ est orthonormée, $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\text{Vect}\,(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_k)$ et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle f_k, e_k\rangle > 0$. Par unicité, ce sont donc les premiers vecteurs de l'orthonormalisée de la famille $(e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$.

L'orthonormalisée de la famille $(e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ s'écrit donc $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ et convient.

❏

4.4.2 Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme en base orthonormée

Théorème 17. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie non nulle n. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base **orthonormée** de cet espace.

1) $\forall x \in E$, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ ou encore, si on pose $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \langle x, e_i \rangle.$$

2) $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$ ou encore, si on pose $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

3) $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2}$ ou encore, si on pose $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

DÉMONSTRATION .

1) Soit $x \in E$. Posons $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\langle x, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{i,j} = x_i.$$

2) Soit $(x, y) \in E^2$. Posons $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

3) Soit $x \in E$. Posons $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. D'après 2),

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

❏

5 Projections orthogonales. Symétries orthogonales

5.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

On commence par analyser le cas où $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien.

Théorème 18. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1) $\dim\left(F^\perp\right) = \dim(E) - \dim(F)$.

2) $E = F \oplus F^\perp$ ou encore $F^\perp$ est un supplémentaire de F.

DÉMONSTRATION .

1) Le résultat est clair si $E = \{0\}$ ou $F = \{0\}$ ou $F = E$. Dorénavant, E n'est pas réduit à $\{0\}$ et F n'est ni $\{0\}$, ni E (ce qui impose $\dim(E) \geqslant 2$). Soient $n = \dim(E)$ puis $p = \dim(F) \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F (qui existe puisque F est de dimension finie). D'après le théorème de la base orthonormée incomplète, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

Soit $x \in E$. Posons $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

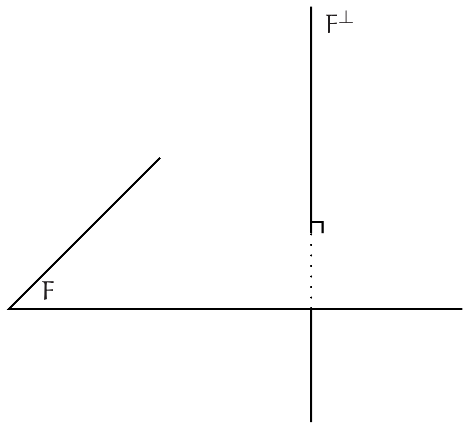
$$\begin{aligned} x \in F^{\perp} &\Leftrightarrow x \in (\text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p))^{\perp} \\ &\Leftrightarrow x \in (e_1, \ldots, e_p)^{\perp} \text{ (d'après le théorème 11, page 13)} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle x, e_i \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i = 0 \text{ (puisque } \mathcal{B} \text{ est orthonormée et d'après le théorème 17)} \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)\,. \end{aligned}$$

Donc, $F^{\perp} = \text{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. On en déduit que $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - p = \dim(E) - \dim(F)$.

2) D'après le théorème 12, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ et d'après 1), $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E)$. On en déduit que $E = F \oplus F^{\perp}$.

❏

Ainsi, si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E, $F^{\perp}$ est toujours **un** supplémentaire de F. $F^{\perp}$ s'appelle **le** supplémentaire orthogonal de F. On peut alors tenter de se représenter la situation par un dessin du genre :



En dimension infinie, on a toujours $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Mais on verra en maths spé qu'il est possible que $E \neq F + F^{\perp}$ et donc que F et $F^{\perp}$ ne sont pas toujours supplémentaires. Le dessin ci-dessus peut donc être une **représentation mentale complètement fausse** dans le cas de la dimension infinie. Néanmoins, on va voir que le théorème 18 reste vrai dans le cas où $\dim(E) = +\infty$ et $\dim(F) < +\infty$:

> **Théorème 19.** Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
>
> Alors, $E = F \oplus F^{\perp}$ ou encore $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F.

Démonstration . Encore une fois le résultat est clair si $F = \{0\}$ ou si $F = E$. On suppose dorénavant que $\{0\} \underset{\neq}{\subset} F \underset{\neq}{\subset} E$. On note $p \in \mathbb{N}^*$ la dimension de F. Puisque F est de dimension finie, il existe $(e_1, \ldots, e_p)$ base orthonormée de E.

Soit $x \in E$. Soit $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i e_i \in F$.

$$\begin{aligned} x - y \in F^{\perp} &\Leftrightarrow x - y \in \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)^{\perp} \Leftrightarrow x - y \in (e_1, \ldots, e_p)^{\perp} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle x - y, e_i \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle y, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ y_i = \langle x, e_i \rangle \text{ (d'après le théorème 17 et puisque } (e_1, \ldots, e_p) \text{ est une base orthonormée de } F. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe un vecteur y de F et un seul tel que $x - y \in F^{\perp}$ à savoir $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle\, e_i$. Ceci montre que $E = F \oplus F^{\perp}$.

❏

> **Théorème 20.** Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
>
> Alors, $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration . D'après le théorème 12, F est un sous-espace vectoriel de $F^{\perp\perp}$. De plus,

$$\dim\left(F^{\perp\perp}\right) = \dim(E) - \dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F) < +\infty.$$

On en déduit que $F^{\perp\perp} = F$.

❏

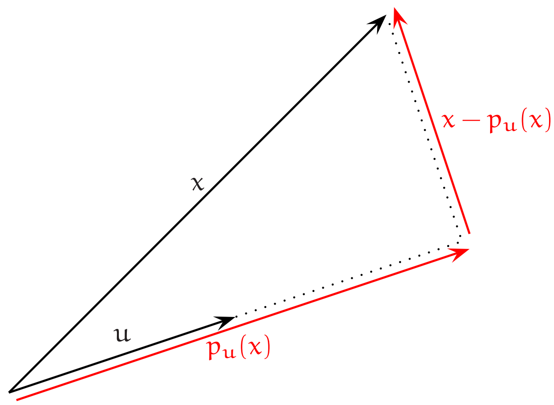
5.2 Projections orthogonales

5.2.1 Projection orthogonale sur un vecteur non nul

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit u un vecteur non nul. $D = \text{Vect}(u)$ est une droite vectorielle et en particulier, un sous-espace vectoriel de dimension finie. D'après le théorème 19, $D^\perp$ est un supplémentaire de D dans E ou encore $E = D \oplus D^\perp$. Donc, tout vecteur x de E est, de manière unique, somme d'un vecteur y de D et d'un vecteur z de $D^\perp$:

$$x = y + z.$$

Le vecteur y est par définition le projeté de x sur D parallèlement à $D^\perp$. y s'appelle le **projeté orthogonal de x sur la droite** D ou aussi, par abus de langage, le **projeté orthogonal du vecteur x sur le vecteur u**. Il se note $p_u(x)$.



On veut exprimer le vecteur $p_u(x)$ en fonction des vecteurs x et u. Le vecteur $p_u(x)$ est colinéaire à u. Donc, il existe un réel λ tel que $p_u(x) = \lambda u$. Le vecteur $x - p_u(x)$ est orthogonal à u et donc

$$0 = \langle x - p_u(x), u\rangle = \langle x - \lambda u, u\rangle = \langle x, u\rangle - \lambda\langle u, u\rangle = \langle x, u\rangle - \lambda\|u\|^2,$$

et donc $\lambda = \dfrac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = \dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}$. On retiendra :

Projeté orthogonal sur un vecteur non nul u.

$$\forall x \in E,\ p_u(x) = \frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}u.$$

Projeté orthogonal sur un vecteur unitaire u.

$$\forall x \in E,\ p_u(x) = \langle x, u\rangle u.$$

On note que dans l'expression $\dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}$, la norme de u est au carré et pas à l'exposant 1. Pour s'en rappeler, on peut faire la constatation qui suit. Il est clair que le projeté du vecteur x sur le vecteur $2u$ est le même que le projeté du vecteur x sur le vecteur u. Il s'agit dans les deux cas du projeté orthogonal du vecteur x sur la droite D. Ceci fonctionne bien quand le dénominateur est au carré :

$$p_{2u}(x) = \frac{\langle x, 2u\rangle}{\langle 2u, 2u\rangle}(2u) = \frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u = p_u(x)$$

mais ne fonctionne pas avec l'expression $\dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|}u$, la norme de ce dernier vecteur doublant quand u est doublé.

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. On se donne un vecteur unitaire $u = (a, b, c)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le vecteur u.

Solution 9. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Puisque le produit scalaire considéré est le produit scalaire canonique, la base canonique est orthonormée. Pour tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, (puisque u est unitaire)

$$p_u(v) = \langle u, v\rangle u = (ax + by + cz)(a, b, c) = \left(a^2x + aby + acz, abx + b^2y + bcz, acx + bcy + c^2z\right).$$

Puisque $\begin{pmatrix} a^2x+aby+acz \\ abx+b^2y+bcz \\ acx+bcy+c^2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la matrice demandée est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(p_u\right) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

⇨ **Commentaire** .

◇ *On rappelle que la trace d'une projection est son rang. Ici, la trace de la matrice est* $a^2+b^2+c^2$ *ou encore* 1. 1 *est effectivement la dimension de* $\mathrm{Vect}(u)$ *ou encore le rang de* p_u.

◇ *On montrera en maths spé que la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée est une matrice symétrique. C'est effectivement le cas ici.*

5.2.2 Projection orthogonale sur un hyperplan

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ (donc E est de dimension finie). Soit H un hyperplan de E. $H^\perp$ est un sous-espace de dimension $n-(n-1)=1$ ou encore $H^\perp$ est une droite vectorielle. Tout vecteur non nul de $H^\perp$ engendre donc $H^\perp$. Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 13. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un hyperplan de E.

Un **vecteur normal** à l'hyperplan H est un vecteur non nul et orthogonal à H.

Un théorème immédiat est :

Théorème 21. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un hyperplan de E. Soit n un vecteur normal à H. Alors

$$H = n^\perp.$$

Théorème 22. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ puis H l'hyperplan d'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$.

Un vecteur normal à H est le vecteur u de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration . Soit $u = \sum_{i=1}^{n} a_ie_i$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ un vecteur de E. Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée,

$$\langle u, x\rangle = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$$

et donc

$$x \in H \Leftrightarrow a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \Leftrightarrow \langle u, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x \in u^\perp.$$

Donc, $H = u^\perp$ ou encore u est un vecteur normal à H.

❏

Dirigeons nous maintenant vers une expression du projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur un hyperplan H de E. Soit donc H un hyperplan de vecteur normal n (on revient à la notation n qui ne sert plus à désigner la dimension de E). Puisque $p_H = \mathrm{Id}_E - p_{H^\perp}$, pour tout vecteur x de E, le projeté orthogonal de x sur H est

$$p_H(x) = x - p_n(x) = x - \frac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2}n.$$

On retiendra :

Projeté orthogonal sur un hyperplan, de vecteur normal n.

$$\forall x \in E,\ p_H(x) = x - \frac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2}n.$$

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $3x + y - z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution 10. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{R}^3$. La base $\mathcal{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire considéré. Un vecteur normal au plan P est le vecteur $n = (3, 1, -1)$. Pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$p_n(u) = \frac{\langle u, n\rangle}{\|n\|^2} n = \frac{3x + y - z}{11}(3, 1, -1)$$

et donc

$$\begin{aligned} p_P(u) &= u - p_n(u) = (x, y, z) - \frac{3x + y - z}{11}(3, 1, -1) \\ &= \frac{1}{11}(2x - 3y + 3z, -3x + 10y + z, 3x + y + 10z) \end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} p_P = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

On note que la matrice obtenue est symétrique. On note aussi que sa trace est $\frac{1}{11}(2 + 10 + 10) = 2$ qui est aussi la dimension de P ou encore le rang de p_P.

5.2.3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Distance à un tel sous-espace

On rappelle que si F est un sous-espace de E de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$. On peut donc énoncer :

DÉFINITION 14. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace de E de dimension finie.

La **projection orthogonale sur** F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Une projection orthogonale est en particulier une projection. Rappelons alors les différentes propriétés qui en découlent. Soient F un sous-espace de E de dimension finie puis p_F la projection orthogonale sur F. La projection associée à p_F est $p_{F^\perp}$.

- $p_F \circ p_F = p_F$.
- $p_F \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp} \circ p_F = 0$ et $p_F + p_{F^\perp} = Id_E$.
- $F = \mathrm{Im}\,(p_F) = \mathrm{Ker}\,(p_{F^\perp}) = \mathrm{Ker}\,(Id_E - p_F) = \{\text{vecteurs invariants par } p_F\}$ et $F^\perp = \mathrm{Ker}\,(p_F) = \mathrm{Im}\,(p_{F^\perp})$.

On va maintenant déterminer une expression du projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sous-espace F non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie, quand on connaît une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$ de F.

Soit x un vecteur de E. Il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i.$$

De plus, puisque $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormée de F et que $p_F(x)$ est un vecteur de F, on sait que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\lambda_i = \langle p_F(x), e_i\rangle$. Le vecteur $p_F(x)$ est alors déterminé par la condition : $x - p_F(x) \in F^\perp$. Or,

$$\begin{aligned} x - p_F(x) \in F^\perp &\Leftrightarrow x - p_F(x) \in (\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k))^\perp \\ &\Leftrightarrow x - p_F(x) \in (e_1, \ldots, e_k)^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, k]\!],\ \langle x - p_F(x), e_i\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, k]\!],\ \langle x, e_i\rangle = \langle p_F(x), e_i\rangle \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, k]\!],\ \lambda_i = \langle x, e_i\rangle. \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i.}$$

On peut donner une autre lecture de l'expression ci-dessus. Pour $i \in [\![1,k]\!]$, notons p_i la projection orthogonale sur le vecteur unitaire e_i. On sait que

$$\forall x \in E,\ p_i(x) = \langle x, e_i\rangle e_i.$$

On a donc

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{k}\langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{k} p_i(x).$$

On peut énoncer :

Théorème 23. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soient F un sous-espace de E non réduit à $\{0\}$ puis $(e_1, \ldots, e_k)$ une base orthonormée de E. Alors,

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{k}\langle x, e_i\rangle e_i.$$

• On peut maintenant revenir sur les calculs effectués au cours de l'étude du procédé d'orthonormalisation de Schmidt. En fin de démonstration (page 17 et 18), nous avons dû établir que l'expression $\|u_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\langle u_{n+1}, e_i\rangle^2$ était strictement positive. C'est immédiat si on prend la peine d'interpréter géométriquement l'expression.
Puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $F = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$, le projeté orthogonal de u_{n+1} sur F est

$$p_F\left(u_{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\langle u_{n+1}, e_i\rangle e_i.$$

Toujours puisque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de F,

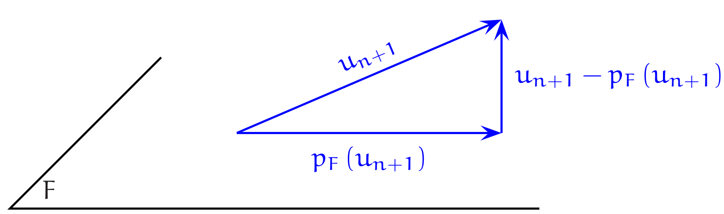
$$\sum_{i=1}^{n}\langle u_{n+1}, e_i\rangle^2 = \left\|p_F\left(u_{n+1}\right)\right\|^2 \quad \text{puis} \quad \|u_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\langle u_{n+1}, e_i\rangle^2 = \|u_{n+1}\|^2 - \left\|p_F\left(u_{n+1}\right)\right\|^2.$$

Les vecteurs $p_F\left(u_{n+1}\right)$ d'une part, et $u_{n+1} - p_F\left(u_{n+1}\right)$ d'autre part, sont orthogonaux ($p_F\left(u_{n+1}\right) \in F$ et $u_{n+1} - p_F\left(u_{n+1}\right) \in F^{\perp}$) et ont pour somme u_{n+1}. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|u_{n+1}\|^2 = \left\|p_F\left(u_{n+1}\right)\right\|^2 + \left\|u_{n+1} - p_F\left(u_{n+1}\right)\right\|^2$$

et donc

$$\|u_{n+1}\|^2 - \left\|p_F\left(u_{n+1}\right)\right\|^2 = \left\|u_{n+1} - p_F\left(u_{n+1}\right)\right\|^2 > 0.$$



• On va maintenant définir la distance d'un élément x de E à un sous-espace F de dimension finie de E. De manière générale, si A est une partie non vide de E et x un élément de E, l'ensemble de réels $\{\|x-y\|,\ y \in A\}$ et une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. $\{\|x-y\|,\ y \in A\}$ admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, qui est un réel positif. On peut donc poser

Définition 15. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient A une partie non vide de E et x un élément de E.

La **distance de** x **à** A est :

$$d(x, A) = \text{Inf}\{\|x-y\|,\ y \in A\}.$$

Théorème 24. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soient F un sous-espace de dimension finie de E et x un élément de E.

1) $\forall y \in F$, $\|x - y\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$.

2) $\forall y \in F$, $\|x - y\| = \|x - p_F(x)\| \Leftrightarrow y = p_F(x)$.

3) $d(x, F) = \text{Min}\{\|x - y\|,\ y \in F\} = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$.

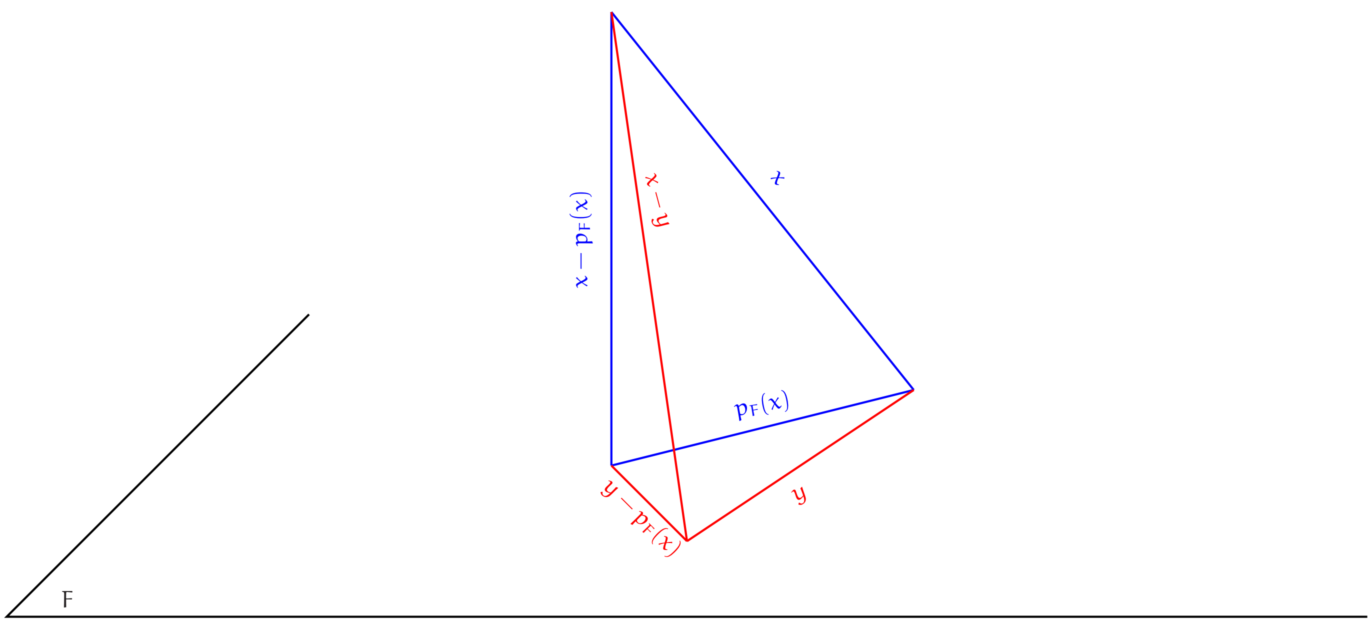
Démonstration . Soit $y \in F$. $x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$ avec $p_F(x) - y \in F$ (car $p_F(x) \in F$, $y \in F$ et car F est un sous-espace de E) et $x - p_F(x) \in F^\perp$ (ainsi, $x - y$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle et $x - p_F(x)$ est l'un des côtés de ce triangle). D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - y\|^2 = \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2.$$

Ainsi : $\forall y \in E$, $\|x - y\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$. De plus, on a l'égalité si et seulement si $\|p_F(x) - y\| = 0$ ce qui équivaut à $y = p_F(x)$ ($p_F(x)$ étant effectivement l'un des vecteurs de F).

Ceci montre que $\{\|x - y\|,\ y \in F\}$ admet un minimum, que ce minimum est atteint pour $y = p_F(x)$ et uniquement pour $y = p_F(x)$ et finalement que

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$



❑

Exercice 11. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

Déterminer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Solution 11.

• $(P_0, P_1) = (1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminons son orthonormalisée (E_0, E_1).

$\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_0^1 dt = 1$ puis $\|P_0\| = 1$ et finalement $E_0 = 1$.

$(P_1|E_0) = \displaystyle\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ puis $P_1 - (P_1|E_0)\,E_0 = X - \dfrac{1}{2}$. Ensuite,

$$\|P_1 - (P_1|E_0)\,E_0\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

et donc $E_1 = \sqrt{12}\left(X - \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$.

• Une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_1[X]$ est (E_0, E_1). Le projeté orthogonal de $Q = X^2$ sur F est

$$p_F(Q) = (Q|E_0)\, E_0 + (Q|E_1)\, E_1.$$

$(Q|E_0) = \displaystyle\int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$ et $(Q|E_1) = \sqrt{3}\displaystyle\int_0^1 \left(2t^3 - t^2\right) dt = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Donc,

$$p_F(Q) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{3}(2X-1) = X - \frac{1}{6}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\|Q - p_F(Q)\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4t^2}{3} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right) dt \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{36 - 90 + 80 - 30 + 5}{180} \\ &= \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

La distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ est donc

$$d\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \|Q - p_F(Q)\| = \frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

Exercice 12. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique : $(A, B) \mapsto (A|B) = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)$.

1) Montrer que $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance de A à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Solution 12.

1) Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$$(A|B) = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right) = \mathrm{Tr}\left(A\left(-B^T\right)\right) = -\mathrm{Tr}\left(B^T A\right) = -(B|A) = -(A|B)$$

et donc $2(A|B) = 0$ puis $(A|B) = 0$.

On a montré que $\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $(A|B) = 0$ et donc $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\left(B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow B \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp\right)$. Par suite, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

Enfin, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ont donc même dimension finie. On en déduit que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A s'écrit de manière unique sous la forme $A = B + C$ avec $B \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. On a $p_{\mathcal{S}_3(\mathbb{R})}(A) = B$ puis

$$d\left(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})\right) = \|A - B\| = \|C\|.$$

On sait que la partie antisymétrique de A est

$$C = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d\left(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Pour en finir momentanément avec les projections orthogonales, l'exercice suivant propose une caractérisation des projections qui sont des projections orthogonales.

Exercice 13. Soit $(E, |)$ un espace euclidien. Soit p une projection.

Montrer que : p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Solution 13.

• Soient F un sous-espace de E puis $p = p_F$ la projection orthogonale sur F. Montrons que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Soit $x \in E$. Puisque $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^{\perp}$, le théorème de PYTHAGORE permet d'affirmer que

$$\|x\|^2 = \|p(x) + (x - p(x))\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2,$$

et donc $\|x\| \geqslant \|p(x)\|$.

• Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis p la projection sur F parallèlement à G. On suppose que $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Montrons alors que $G = F^{\perp}$.

Le résultat est clair si $F = \{0\}$ ou $G = \{0\}$ (dans ce cas $F^{\perp} = E = G$ ou $F^{\perp} = \{0\} = G$). Dorénavant, on suppose que F et G ne sont pas réduits à $\{0\}$.

Soit $(x_1, x_2) \in (F \setminus \{0\}) \times (G \setminus \{0\})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $x = x_1 + \lambda x_2$ a pour projeté $p(x) = x_1$ (tous les vecteurs $x_1 + \lambda x_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ont le même projeté). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'hypothèse $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ fournit

$$\|x_1\|^2 = \|p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2 = \|x_1 + \lambda x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + 2\lambda (x_1|x_2) + \lambda^2 \|x_2\|^2.$$

Ainsi, pour tout réel λ, $\lambda^2 \|x_2\|^2 + 2\lambda (x_1|x_2) \geqslant 0$. L'application $\lambda \mapsto \lambda^2 \|x_2\|^2 + 2\lambda (x_1|x_2)$ est un trinôme du second degré (car $\|x_2\|^2 \neq 0$) positif sur $\mathbb{R}$. Le discriminant réduit de ce trinôme est négatif ou nul :

$$0 \geqslant \Delta' = (x_1|x_2)^2 - 4 \times \|x_2\|^2 \times 0 = (x_1|x_2)^2.$$

Puisque d'autre part, $(x_1|x_2)^2$ est un réel positif, on en déduit que $(x_1|x_2)^2 = 0$ puis que $(x_1|x_2) = 0$.

On a montré que tout vecteur de G est orthogonal à tout vecteur de F et donc que $G \subset F^{\perp}$. D'autre part, $F^{\perp}$ et G sont deux supplémentaires de F et ont donc même dimension finie. Puisque G est un sous-espace de $F^{\perp}$, on en déduit que $G = F^{\perp}$ et donc que p est une projection orthogonale.

5.3 Symétries orthogonales

DÉFINITION 16. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace de E.

La **symétrie orthogonale par rapport à** F est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.

La symétrie orthogonale à rapport à F se note s_F. Une symétrie orthogonale étant en particulier une symétrie, on peut rappeler quelques propriétés qui en découlent.

- $s_F \circ s_F = \mathrm{Id}_E$ (s_F est involutive).
- $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$ et $p_F = \dfrac{1}{2}(\mathrm{Id}_E + s_F)$.
- $F = \mathrm{Ker}(s_F - \mathrm{Id}_E) = \{$vecteurs invariants par $s_F\}$ et $F^{\perp} = \mathrm{Ker}(s_F + \mathrm{Id}_E) = \{$vecteurs changés en leur opposé par $s_F\}$.

DÉFINITION 17. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan s'appelle une **réflexion**.
Une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n-2$ s'appelle un **retournement**.

Ainsi, si $\dim(E) = 3$, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un plan et si $\dim(E) = 2$, une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
Si $\dim(E) = 3$, un retournement est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Comme pour les projections, on donne en exercice une caractérisation du fait qu'une symétrie soit une symétrie orthogonale.

Exercice 14. Soit $(E, |)$ un espace euclidien. Soit s une symétrie de E.

Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si $\forall x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Solution 14. Si on a résolu l'exercice 13 (sur les projections orthogonales) avant d'avoir résolu l'exercice 14, la solution est très simple : s est une symétrie orthogonale si et seulement si $p = \frac{1}{2}(Id_E + s)$ est une projection orthogonale si et seulement si $G = F^{\perp}$. On donne maintenant une solution où on travaille directement sur la symétrie s sans utiliser le résultat établi pour les projections.

• Soient F un sous-espace de E puis s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Soit $x \in E$. x s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

et

$$\|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|-x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2.$$

Donc, $\|s(x)\|^2 = \|x\|^2$ puis $\|s(x)\| = \|x\|$.

• Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires puis s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On suppose que $\forall x \in E$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Par hypothèse, pour tout $(x_1, x_2) \in F \times G$,

$$\|x_1\|^2 + 2(x_1|x_2) + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2 = \|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 - 2(x_1|x_2) + \|x_2\|^2,$$

et donc $4(x_1|x_2) = 0$ puis $(x_1|x_2) = 0$. Ainsi, $\forall (x_1, x_2) \in F \times G$, $(x_1|x_2) = 0$ et donc $G \subset F^{\perp}$. Puisque d'autre part $F^{\perp}$ et G ont même dimension finie, on en déduit finalement que $G = F^{\perp}$.