PRODUIT DE KRONECKER

Partie I: Diagonalisation de $f_{A,B}$

1. Supposons que B est diagonalisable, alors il existe une matrice D diagonale et $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ telles que $B = PDP^{-1}$. Par transposition $B^{\mathrm{T}} = \left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}}$ et on termine par les égalités $D^{\mathrm{T}} = D$ et $\left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(P^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$, du coup B^{T} est diagonalisable.
   Inversement si B^{T} est diagonalisable, alors $B = \left(B^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ est diagonalisable
2. Soit $M, N \in M_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :
$$\begin{aligned} f_{A,B}(\alpha M + N) &= A(\alpha M + N) - (\alpha M + N)B \\ &= \alpha AM + AN - \alpha MB - NB \\ &= \alpha(AM - MB) + AN - NB \\ &= \alpha f_{A,B}(M) + f_{A,B}(N) \end{aligned}$$
   Donc $f_{A,B}$ est linéaire
3. (a) Soit X est un vecteur propre de A assoncié à α et Y un vecteur propre de B^{T} associé à β, alors
$$\begin{aligned} f_{A,B}\left(XY^{\mathrm{T}}\right) &= AXY^{\mathrm{T}} - XY^{\mathrm{T}}B \\ &= (AX)Y^{\mathrm{T}} - X\left(B^{\mathrm{T}}Y\right)^{\mathrm{T}} \\ &= \alpha XY^{\mathrm{T}} - \beta XY^{\mathrm{T}} = (\alpha - \beta) XY^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$
   Par définition $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq 0$, alors il existe $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$.
   Ainsi la matrice $XY^{\mathrm{T}} = (x_i y_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est non nulle car son coefficient de position (i_0, j_0) est $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$

   (b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}\left(B^{\mathrm{T}}\right)$, alors il existe un vecteur propre X de A associé à λ et un vecteur propre Y de B^{T} associé à μ. D'après la question précédente XY^{T} est un vecteur propre de f associé à $\lambda - \mu$. Ainsi $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(f_{A,B})$, puis l'inclusion $\{\lambda - \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\} \subset \mathrm{Sp}(f_{A,B})$
4. (a) Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
   – Le résultat est évidemnt vrai pour $k = 0$;
   Noter bien que $M^0 = (\alpha I_n + B)0 = I_n$
   – Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$ et montrons que $A^{k+1}M = M(\alpha I_n + B)^{k+1}$. On a d'abord $f_{A,B}(M) = \alpha M$, donc $AM - MB = \alpha M$ et on trouve $AM = M(\alpha I_n + B)$. Donc $A^{k+1}M = AA^kM = AM(\alpha I_n + B)^k = M(\alpha I_n + B)^{k+1}$.

   (b) Soit un polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{K}$, on écrit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, et donc $P(A)M = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k M = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k M(\alpha I_n + B)^k = M \sum_{k=0}^{d} a_k (\alpha I_n + B)^k = MP(\alpha I_n + B)$.

   (c) i. D'aprés le théorème de *Cayley-Hamilton*, $\chi_A(A) = 0$ donc $M\chi_A(\alpha I_n + B) = 0$ notons $S = X_A(\alpha I_n + B))$. Si S était inversible, alors $MS = 0 \Longrightarrow MSS^{-1} = M = 0$ ce qui est impossible puisque M est un vecteur propre, donc la matrice $\chi_A(\alpha I_n + B)$ n'est pas inversible .
   ii. Un produit de matrices $\chi_A(\alpha I_n + B) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} ((\alpha - \lambda)I_n + B)^{m_\lambda}$ n'est pas inversible alors l'une au moins des matrices intervenant dans ce produit n'est pas inversible, donc $\exists a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $(\alpha - a)I_n + B$ n'est pas inversible
5. Posons $b = a - \alpha \in \mathrm{Sp}(B)$. Ainsi on a pu écrire $\alpha = a - b$ pour un certain couple $(a, b) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)$, donc l'inclusion $\mathrm{Sp}(f_{A,B}) \subset \{\lambda - \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}$
6. **Applications :**
   (a) $\Rightarrow$) Supposons que $f_{A,B}$ est nilpotent , alors $\mathrm{Sp}(f_{A,B}) = \{0\}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \{\lambda\}$, donc $\mathrm{Sp}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Sp}(B - \lambda I_n) = \{0\}$ et les deux matrices sont nilpotentes

$\Leftarrow$) S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que les deux matrices $\mathrm{Sp}\,(A-\lambda I_n) = \mathrm{Sp}\,(B-\lambda I_n) = \{0\}$ sont nilpotentes, alors $\mathrm{Sp}\,(A) = \mathrm{Sp}\,(B) = \{\lambda\}$ et par suite $\mathrm{Sp}\,(f_{A,B}) = \{0\}$, ainsi $f_{A,B}$ est nilpotent

(b) $\Rightarrow$) S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = B = \lambda I_n$, alors $f_{A,B} = 0$

$\Leftarrow$) Supposons que $f_{A,B} = 0$, alors pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, on a $AM = MB$. Écrivons $A = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}E_{i,j}$ et $B = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j}E_{i,j}$ dans la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$, pour $i,j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$AE_{i,j} = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} a_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}$$

et

$$E_{i,j}B = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} b_{k,\ell}E_{i,j}E_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} b_{j,\ell}E_{i,\ell}$$

L'égalité $AE_{i,j} = E_{i,j}B$ montre que $a_{i,i} = b_{j,j}$ et pour $k \neq i$ et $\ell \neq j$, on a $a_{k,i} = b_{j,\ell} = 0$, ceci est vrai pour out $i,j \in [\![1,n]\!]$, alors en posant $\lambda = a_{1,1} = b_{1,1}$, on a bien $A = B = \lambda I_n$

7. Supposons que $\sum\limits_{i=1}^{p} Y_i{}^tZ_i = 0$, on multiplie cette égalité à droite par un $\overline{Z}_j$ où $1 \leqslant j \leqslant p$ fixe, mais quelconque d'où $\sum\limits_{i=1}^{p} a_iY_i = 0$ où $a_i = {}^tZ_i\overline{Z}j$, or $(Y_1,\ldots,Y_p)$ une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les a_i sont tous nuls en particulier $a_j = {}^tZ_j\overline{Z}_j = \|\, Z_k \,\|_2^2 = 0$ et donc $\forall j \in [\![1,p]\!]\,, \quad Z_j = 0$.
La réciproque est bien évidente.

8. (a) Soit $(\alpha_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^{n^2}$ tels que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}X_i{}^tY_j = 0$ et pour $i \in [\![1,n]\!]$ posons $Z_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}Y_j$. On a alors $\sum\limits_{i=1}^{p} X_i{}^tZ_i = 0$ et la famille $(X_1,\ldots,X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les Z_i sont tous nuls. La famille $(Y_1,\cdots,Y_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les $\alpha_{i,j}$ sont tous nuls. La famille $\left(X_i{}^tY_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre de cardinal n^2 qui est la dimension de $M_n\,(\mathbb{K})$, donc c'est bien une base de $M_n\,(\mathbb{K})$

(b) La base $(X_i{}^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est formée par des vecteurs propres de $f_{A,B}$, donc $f_{A,B}$ est diagonalisable

9. (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\,(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\,(B)$, alors $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\,(A)$, car la matrice A est réelle, donc $\overline{\lambda} - \mu \in \mathrm{Sp}\,(f_{A,B})$

(b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\,(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\,(B)$. Les valeurs propres de $f_{A,B}$ sont réelles, en particulier $\lambda - \mu$ et $\overline{\lambda} - \mu$ sont réelles et par différence $2i\mathrm{Im}(\lambda) = \lambda - \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. Ainsi λ est réel et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\,(A) \subset \mathbb{R}$, donc χ_A est scindé. De même χ_B est aussi scindé

(c) Par hypothèse $f_{A,B}(M) = \alpha M$ et $BX = \mu X$, donc

$$\begin{aligned} A(MX) &= f_{A,B}(M)X + MBX \\ &= \alpha MX + \mu MX \\ &= (\alpha+\mu)\,MX \end{aligned}$$

(d) Soit $X \in M_{n,1}\,(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, l'application $E \longrightarrow M_{n,1}\,(\mathbb{R})$, $M \longmapsto MX$ est clairement linéaire. Soit $Y \in M_{n,1}\,(\mathbb{R})$, comme $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est non nulle , alors il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. Soit M la matrice dont la i_0-ème colonne vaut $\dfrac{1}{x_{i_0}}Y$ et dont toutes les autres colonnes sont nulles , on a bien $MX = Y$

(e) Soit X un vecteur propre de B et $(M_1,\cdots,M_{n^2})$ une base de diagonalisation de $f_{A,B}$ et posons $Y_i = M_iX$ pour tout $i \in \left[\left[1,n^2\right]\right]$. D'après la surjection précédente $(Y_1,\cdots,Y_{n^2})$ est une famille génératrice de $M_{n,1}\,(\mathbb{R})$ dont on peut extraire une base β. D'après la question 9c une telle base est constituée de vecteurs propres de A. Donc A est diagonalisable

10. (a) $T : E \longrightarrow E$, $M \longmapsto M^{\mathrm{T}}$ est linéaire vérifiant $T^2 = \mathrm{id}_E$, donc T est un automorphisme de E

(b) Soit $M \in E$, on a :

$$\begin{aligned} T \circ f_{A,B} \circ T^{-1}(M) &= T \circ f_{A,B}({}^tM) \\ &= T(A^tM - {}^tMB) \\ &= M^tA - {}^tBM \\ &= f_{-{}^tB,-{}^tA}(M) \end{aligned}$$

Donc $f_{-B^{\mathrm{T}},-A^{\mathrm{T}}}$ et $f_{A,B}$ sont semblables

(c) $\Leftarrow$) D'après la question 8
$\Rightarrow$) A est diagonalisable, d'après la question 9.
Les deux applications $f_{-B^{\mathrm{T}},-A^{\mathrm{T}}}$ et $f_{A,B}$ sont semblables donc $f_{-B^{\mathrm{T}},-A^{\mathrm{T}}}$ est diagonalisable, et toujours d'après la question 9, ${}^tB$ est diagonalisable, donc B l'est aussi

Partie II: Étude via les translations

11. Dans la suite on note les endomorphismes de E suivants :

$$g_A : M \longmapsto AM \quad \text{et} \quad d_B : M \longmapsto MB$$

(a) On vérifie par récurrence simple sur $k \in \mathbb{N}$ que $g_A^k = g_{A^k}$ et $d_B^k = d_{B^k}$, puis par linéarité pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(g_A) = g_{P(A)}$ et $P(d_B) = d_{P(B)}$

(b) D'après la question précédente un polynôme est annulateur de A si, et seulement, s'il est annulateur de g_A. g_A est diagonalisable si, et seulement, s'il existe un polynôme P scindé à racines simples annulateur de g_A si, et seulement, s'il existe un polynôme P scindé à racines simples annulateur de A si, et seulement, si A est diagonalisable.
De même pour B

12. (a) u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre

(b) L'endomorphisme induit d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable

(c) Posons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$, m_i l'ordre de multiplicité de λ_i, $F_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathrm{F}})$, $\mathcal{B}_i$ base de F_i et $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ base adaptée à la décomposition $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{m_1}} & & & (0) \\ & \boxed{\lambda_2 I_{m_2}} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{\lambda_p I_{m_p}} \end{pmatrix}$$

Or pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'endomorphisme v_{λ_i} est diagonalisable, donc il existe une base $\mathcal{C}_i$ de F_i pour laquelle $D_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(v_{\lambda_i})$ est diagonale. Soit finalement $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathcal{C}_i$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & & (0) \\ & \boxed{D_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{D_p} \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $\mathcal{C}$ est une base de diagonalisation de u et v.

13. Si A et B sont diagonalisables, alors g_A et d_B le sont aussi, avec g_A et d_B commutent, il vient qu'ils sont simultanément diagonalisables, donc $f_{A,B} = g_A - d_B$ est diagonalisable

Produit de Kronecker

14. (a) Pour $p \geqslant 1$, les deux endomorphismes g_A et d_B commutent, donc, d'après la formule de binôme de Newton

$$\begin{aligned} f_{A,B}^p &= (g_A - d_B)^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k g_A^k d_B^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k g_{A^k} d_{B^{p-k}} \end{aligned}$$

(b) Si A et B sont nilpotentes alors $A^n = B^n = 0$ et, par suite, $f_{A,B}^{2n} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k g_{A^k} d_{B^{2n-k}}$. Or pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, l'un des entiers k et $2n-k$ est supérieur ou égal à n, donc tous les termes figurant dans le second membre de l'égalité précédente sont nuls

Partie III: Rang de la composée des translations

15. (a) $A_{u,v}$ est une partie non vide de $\mathcal{L}(F)$, stable par combinaison

(b) Soit $b \in A_{u,v}$, alors il existe $a \in \mathcal{L}(F)$ tel que $b = uav$ et, par suite,

$$\mathrm{Ker} v \subset \mathrm{Ker} b \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} b \subset \mathrm{Im} u$$

(c) Soit $x \in F$, on décompose $v(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i$ d'où $a(v(x)) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i$ et $u(a(v(x))) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u(u_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b(v_i) = b\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right) = b(y)$ avec $y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$. Par ailleurs, $v(y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = v(x)$, donc $x - y \in \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(b)$, soit $b(x) = b(y) = (uav)(x)$

(d) Considérons l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} A_{u,v} & \longrightarrow & \mathcal{L}(G, \mathrm{Im}(u)) \\ b & \longmapsto & b_{|G} \end{array} \right.$. Φ est clairement linéaire et si $b \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ alors $\mathrm{Ker}(b)$ contient G et $\mathrm{Ker}(v)$, d'où $b = 0$ puisque $G \oplus \mathrm{Ker}(v) = F$. Ainsi Φ est injective. De plus, si $\psi \in \mathcal{L}(G, \mathrm{Im}(u))$, soit b l'application linéaire sur F définie par $b_{|G} = \psi$ et $b_{|\mathrm{Ker}(v)} = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{Ker}(v), \mathrm{Im}(u))}$. On a $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(b)$, $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $b_{|G} = \psi$ par construction, d'où $b \in A_{u,v}$ et $\Phi(b) = \psi$, ce qui prouve que Φ est surjective et finalement c'est un isomorphisme. On en déduit que $\dim(A_{u,v}) = \mathrm{rg}(u) \times \mathrm{rg}(v)$

16. **Etude d'une application :**

(a) Calcul

(b) Question précédente

(c) $\varphi_{A,B}$ est inversible si, et seulement, si $\mathbf{rg}(\varphi_{A,B}) = n^2$ si, et seulement, si $\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(B) = n$ si, et seulement, si A et B sont inversibles. Auquel cas

$$\varphi_{A,B}{}^{-1} = \varphi_{A^{-1}, B^{-1}}$$

(d) $\varphi_{A,B} = 0$ si, et seulement, si $\mathbf{rg}(A)\mathbf{rg}(B) = 0$, soit si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$

Partie IV: Produit de Kronecker

17. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]^2$, alors $E_{i,j}$ représente le $n.i + j$-ème vecteur de la base $\mathcal{B}$. En écrivant $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $b = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors

$$\begin{aligned} \varphi_{A,B}(E_{i,j}) &= \sum_{1 \leqslant k,\ell,p,q \leqslant n} a_{k,\ell} b_{q,p} E_{k,\ell} E_{i,j} E_{p,q} \\ &= \sum_{1 \leqslant k,q \leqslant n} a_{k,i} b_{q,j} E_{k,q} \end{aligned}$$

Produit de Kronecker

Donc la $ni+j$-ème colonne de $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\left(\varphi_{A,B}\right)$ vaut

$$\left(\begin{array}{c} a_{1i}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{1i}b_{nj} \\ \hline a_{2i}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{2i}b_{nj} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline a_{ni}b_{1j} \\ \vdots \\ a_{ni}b_{nj} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} a_{1i}B_j \\ \hline a_{2i}B_j \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline a_{ni}B_j \end{array}\right)$$

Le second membre vaut la $ni+j$-ème colonne de $A\otimes B$, donc les deux matrices $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\left(\varphi_{A,B}\right)$ et $A\otimes B$ coincident, puisque elles sont de même type et elles ont les mêmes colonnes

18. De même que la question précédente
19. La relation $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$ résulte de la relation $\varphi_{A,B}\circ\varphi_{C,D}=\varphi_{AC,BD}$
20. – $I_n\otimes B$ est diagonale par blocs avec n blocs diagonaux égaux à B, donc $\det\left(I_n\otimes B\right)=\det\left(B\right)^n$
– $A\otimes I_n$ et $I_n\otimes A$ sont semblables dont ont même déterminant. D'où $\det\left(A\otimes I_n\right)=\det\left(I_n\otimes A\right)=\det\left(A\right)^n$
– Enfin, $A\otimes B=\left(A\otimes I_n\right).\left(I_n\otimes B\right)$ d'où $\det(A\otimes B)=\det\left(A\right)^n\det\left(B\right)^n$
21. Si $A=\mathbf{diag}\left(a_1,\cdots,a_n\right)$ et $B=\mathbf{diag}\left(b_1,\cdots,b_n\right)$ alors $A\otimes B=\mathbf{diag}\left(a_1b_1,\cdots,a_1b_n,\cdots,a_nb_1,\cdots,a_nb_n\right)$.
Si $A=PA_1P^{-1}$ et $B=QB_1Q^{-1}$ avec A_1 et B_1 sont diagonales, alors
$$\begin{aligned} A\otimes B &= (PA_1P^{-1})\otimes(QB_1Q^{-1}) \\ &= (P\otimes Q)(A_1\otimes B_1)\left(P^{-1}\otimes Q^{-1}\right) \\ &= (P\otimes Q)(A_1\otimes B_1)(P\otimes Q)^{-1} \end{aligned}$$
22. On a bien $M=A\otimes B$ avec $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}$.
La matrice A est réelle symétrique, donc elle est diagonalisable et ${P_1}^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$ avec $P_1=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.
La matrice B est diagonalisable, car $\chi_B=X^2-X-2=(X-2)(X+1)$ est scindé à racines simples, et ${P_2}^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$ avec $P_2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$. Donc M est diagonalisable et $P^{-1}MP=\mathbf{diag}\left(0,0,-2,4\right)$ avec $P=P_1\otimes P_2=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&1&-1&1\\-1&0&1&0\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$
23. Si A et B sont triangulaires supérieures alors $A\otimes B$ est triangulaire supérieure par blocs et les blocs diagonaux sont les multiples de B donc sont aussi triangulaires supérieurs.
Si $A=PA_1P^{-1}$ et $B=QB_1Q^{-1}$ avec A_1 et B_1 sont triangulaires supérieures, alors $A\otimes B=(P\otimes Q)(A_1\otimes B_1)(P\otimes Q)^{-1}$, donc $A\otimes B$ est trigonalisable dont la diagonale vaut $(a_1b_1,\cdots,a_1b_n,\cdots,a_nb_1,\cdots,a_nb_n)$.
Donc $\chi_{A\otimes B}(X)=\chi_{A_1\otimes B_1}(X)=\displaystyle\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(X-\lambda_i\mu_j)$
24. Soit $M\in E$, on a
$$\begin{aligned} f_{A,B}(M) &= AM-MB \\ &= AMI_n-I_nM^t\left({}^tB\right) \\ &= \varphi_{A,I_n}(M)-\varphi_{I_n,{}^tB}(M) \\ &= \left(\varphi_{A,I_n}-\varphi_{I_n,{}^tB}\right)(M) \end{aligned}$$

Donc $f_{A,B} = \varphi_{A,I_n} - \varphi_{I_n,{}^tB}$, en conséquence les deux endomorphismes ont même matrice dans la base $\mathcal{B}$, alors $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\,(f_{A,B}) = A \otimes I_n - I_n \otimes B^{\mathrm{T}}$

25. $\mathrm{Tr}\,(f_{A,B}) = n(\mathrm{Tr}\,(A) - \mathrm{Tr}\,(B))$