POLYNÔMES DE BEZOUT

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes nuls ou dont le degré est inférieur ou égal à k. Le coefficient binomial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ sera noté C_n^k, ou bien $\binom{n}{k}$, au choix. On suppose n entier supérieur ou égal à 1 dans toute la suite.

1. (a) Montrer l'existence de polynômes f_n et g_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, tels que :

$$(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$$

ceci par développement de $((1-X)+X)^{2n-1}$, ou autrement.

NB : *On ne demande pas de calculer leurs coefficients*

(b) Préciser les polynômes f_1, f_2 et f_3.

2. Déterminer en fonction de f_n et de g_n tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$$

Démontrer l'unicité de f_n et de g_n.

3. (a) Montrer que $f_n(1-X) = g_n(X)$.

(b) Calculer $f_n(0)$, $f_n(1)$ et $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

4. (a) Dans tout ce qui suit, x désigne une variable réelle. Pour x tendant vers 0, démontrer la formule asymptotique suivante : $f_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})$.

(b) En déduire les coefficients du polynôme f_n.

(c) L'équation $f_n(x) = 0$ peut-elle avoir une racine positive ou nulle ?

5. (a) Établir, pour tout x réel, la relation

$$nf_n(x) - (1-x)f_n'(x) = nC_{2n-1}^n x^{n-1}$$

(b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ ne peut pas avoir deux racines réelles strictement négatives.

6. Pour tout x réel, on pose : $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

Suivant la parité de n, donner le tableau des variations de la fonction h_n.

7. (a) Démontrer que, pour tout $x \neq 1$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n}$.

(b) Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $f_n(1)$ trouvée plus haut ?

8. Discuter selon n le nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

9. Prouver que les racines de $f_n(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, sont de modules strictement inférieurs à 1.

Polynômes de Bezout

1. (a) Comme $2n-1 \geq 1$, $1 = (1-X+X)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{2n-1-k}$

   soit $1 = (1-X)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{n-1-k}\right) + X^n \left(\sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k}\right)$

   posons
$$f_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k X^k (1-X)^{n-1-k}$$
   et
$$g_n(X) = \sum_{k=n}^{2n-1} C_{2n-1}^k X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^{n+k} X^k (1-X)^{n-1-k}$$
   f_n et g_n sont des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$

   (b) $f_1(X) = 1$, $f_2(X) = 2X+1$, $f_3(X) = 6X^2+3X+1$

2. Si $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$ alors $(1-X)^n (A(X) - f_n(X)) = X^n (g_n(X) - B(X))$
   0 est racine d'ordre au moins n de $(1-X)^n (A(X) - f_n(X))$ donc de $(A(X) - f_n(X))$
   il existe donc un polynôme Q tel que $A(X) = f_n(X) + X^n Q$ et $X^n (g_n(X) - (1-X)^n Q - B(X)) = 0$
   Comme X^n n'est pas le polynôme nul alors $B(X) = g_n(X) + (1-X)^n Q$
   réciproquement si $A(X) = f_n(X) + X^n Q$ *et* $B(X) = g_n(X) - (1-X)^n Q$ alors $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$
   Donc $\begin{cases} (1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1 \\ A, B \in \mathbb{R}[X] \end{cases} \Longleftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X] , \begin{cases} A(X) = f_n(X) + X^n Q \\ B(X) = g_n(X) - (1-X)^n Q \end{cases}$
   si A est de degré inférieur ou égal à $n-1$, nécessairement $Q = 0$ donc il y a unicité de f_n et g_n

3. (a) Si $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$ alors $(X)^n f_n(1-X) + (1-X)^n g_n(1-X) = 1$
   $f_n(1-X)$ et $g_n(1-X)$ sont des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui vérifient $(1-X)^n g_n(1-X) + X^n f_n(1-X) = 1$
   d'après l'unicité de f_n et g_n $f_n(1-X) = g_n(X)$ et $g_n(1-X) = f_n(X)$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-x)^n f_n(x) + x^n g_n(x) = 1$ donc pour $x = 0$ on obtient $f_n(0) = 1$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}$ donc pour $x = 1$ on obtient $f_n(1) = C_{2n-1}^{n-1} = C_{2n-1}^n$

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(1-x) = g_n(x)$ et $(1-x)^n f_n(x) + x^n g_n(x) = 1$ donc pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = g_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}$

4. (a) Si $x \neq 1$ dons si $x \in]-1, 1[$, $f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} + x^{n-1} \frac{x g_n(x)}{(1-x)^n}$

   comme $\lim_{x \to 0} \frac{x g_n(x)}{(1-x)^n} = 0$, $f_n(x) \underset{x \to 0}{=} (1-x)^{-n} + o\left(x^{n-1}\right)$

   (b) f_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $f_n(x)$ est la partie régulière du développement limité d'ordre $(n-1)$ de $(1-x)^{-n}$

   or $(1-x)^{-n} \underset{x \to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-n)...(-n-k+1)}{k!} (-1)^k x^k + o(x^{n-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n+k-1}^k x^k + o(x^{n-1})$

   donc $f_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^k X^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^{n-1} X^k$

   (c) Les coefficients de f_n sont tous positifs, le coefficient constant est 1, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) \geq 1$
   L'équation $f_n(x) = 0$ n'a pas de racine positive ou nulle

5. (a) En dérivant la relation $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$, on obtient :
   $(1-X)^{n-1} (n f_n(X) - (1-X) f_n'(X)) = X^{n-1} (n g_n(X) + X g_n'(X))$
   $n f_n(X) - (1-X) f_n'(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$ qui admet 0 comme racine d'ordre au moins $(n-1)$ donc il existe un réel k tel que $n f_n(X) - (1-X) f_n'(X) = k X^{n-1}$, $f_n(1) = C_{2n-1}^n$
   donc $k = n C_{2n-1}^n$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $n f_n(x) - (1-x) f_n'(x) = n C_{2n-1}^n x^{n-1}$

Polynômes de Bezout

(b) Supposons que l'équation $f_n(x) = 0$ ait au moins deux racines réelles strictement négatives, notons a et b deux racines consécutives de f_n , ($a < b < 0$)

$f_n'(a) = \dfrac{-nC_{2n-1}^n a^{n-1}}{1-a}$ donc $f_n'(a)$ est non nulle et du signe de $(-1)^n$ de même pour $f_n'(b)$

f_n garde un signe constant sur $]a, b[$, $f_n(a) = f_n(b) = 0$, $f_n'(a)$ et $f_n'(b)$ sont de même signe, on a une impossibilité

6. h_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_n'(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

h_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $\dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$ donc

si n est pair , $\lim\limits_{+\infty} h_n = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} h_n = +\infty$, si n est impair , $\lim\limits_{+\infty} h_n = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} h_n = -\infty$ donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h_{2n+1}'(x)$			$+$		
h_{2n+1}	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h_{2n}'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
h_{2n}	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$h_{2n}(1)$	$\searrow$	$-\infty$

Posons $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$ avec p et q entiers naturels

$I(p,q) = \left[\dfrac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 + \dfrac{q}{p+1} I(p+1, q-1) = \dfrac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$ si $q \geq 1$

donc $I(p,q) = \dfrac{q!p!}{(p+q)!} I(p+q, 0) = \dfrac{q!p!}{(p+q+1)!}$ $h_n(1) = I(n-1, n-1) = \dfrac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-1!} = \dfrac{1}{nC_{2n-1}^n}$

7. (a) Sur $]-\infty, 1[$, f_n est la solution vérifiant $f_n(0) = 1$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad (1-x)y' - ny = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}$$

L'équation sans second membre a pour solution toutes les fonctions : $x \to \dfrac{\lambda}{(x-1)^n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Employons la méthode de variation de la constante

$x \to \dfrac{\lambda(x)}{(1-x)^n}$ est solution de (E) sur $]-\infty, 1[$ si et seulement si $\lambda'(x) = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

donc si et seulement si $\lambda(x) = -nC_{2n-1}^n h_n(x) + cte$ sur $]-1, +\infty[$

donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{k - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n}$

$f_n(0) = 1$ donc $k = 1$ donc pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$

deux fonctions polynômes égales sur $]-\infty, 1[$ sont égales sur $\mathbb{R}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$ donc $\forall x \neq 1$, $f_n(x) = \dfrac{1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n}$

(b) f_n est continue en 1 donc $f_n(1) = \lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)}{(1-x)^n}\right) = \lim\limits_{x \to 1}\left(-nC_{2n-1}^n \dfrac{h_n(x) - h_n(1)}{(1-x)^n}\right)$

$h_n'(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$ donc $h_n^{(k)}(1) = 0$ si $1 \leq k \leq n-1$ et en utilisant la formule de Leibniz

$h_n^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{(n-1)!(n-1)!}{(n-1-k)!(k)!} x^{n-1-k}(-1)^{n-1-k}(1-x)^k$ donc $h_n^{(n)}(1) = (n-1)!\,(-1)^{n-1}$

$(h_n(x) - h_n(1)) \underset{x \to 1}{\backsim} \dfrac{(x-1)^n}{n!} h_n^{(n)}(1) = -\dfrac{(1-x)^n}{n}$ on retrouve donc que $f_n(1) = C_{2n-1}^n$

8. $x \in]-\infty, 0[$ est solution de $f_n(x) = 0$ si et seulement si $h_n(x) = \dfrac{1}{nC_{2n-1}^n} > 0$

En utilisant les variations de h_n vues au 6) on en déduit que :

Si n est impair $f_n(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 0[$ donc pas de solution sur $\mathbb{R}$

Si n est pair $f_n(x) = 0$ a une solution et une seule sur $]-\infty, 0[$ donc une solution et une seule sur $\mathbb{R}$

Polynômes de Bezout

9. $f_n(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k-1}^{n-1} z^k$ d'après 4) . Si $|z|\geq 1$, $f_n(z)=C_{2n-1}^{n-1} z^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k-1}^{n-1}\dfrac{1}{z^{k-n+1}}\right)$

   soit $B=\dfrac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k-1}^{n-1}\dfrac{1}{z^{k-n+1}}$, $|B|\leq \dfrac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} C_{n+k-1}^{n-1}=\dfrac{1}{C_{2n-1}^{n-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}(C_{n+k}^{n}-C_{n+k-1}^{n})=\dfrac{C_{2n-2}^{n}}{C_{2n-1}^{n-1}}$

   $\dfrac{C_{2n-2}^{n}}{C_{2n-1}^{n-1}}=\dfrac{n-1}{(2n-1)}<1$ donc $1+B$ ne s'annule pas et si $|z|\geq 1$, $f_n(z)\neq 0$

   donc toutes les racines complexes de $f_n(z)=0$ sont de modules strictement inférieurs à 1