SESSION 2023

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP/MPI

I - Résultats préliminaires

I.A - Calcul d'une intégrale classique

I.A.1)

Q 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \geqslant \dfrac{1}{(1+1^2)^n} = \dfrac{1}{2^n}$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que $I_n \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2^n}\,dt = \frac{1}{2^n}$.

Q 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^{2n}}\right)$ avec $2n \geqslant 2 > 1$. Par suite, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit l'existence de K_n.

Ensuite, $K_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Q 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $t \geqslant 1$, l'inégalité $(t-1)^2 \geqslant 0$ fournit $t^2+1 \geqslant 2t > 0$ puis $\dfrac{1}{t^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2t}$ et donc $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n t^n}$. Par croissance de l'intégration,

$$0 \leqslant K_n \leqslant \frac{1}{2^n}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\,dt = \frac{1}{2^n}\left[-\frac{1}{(2n-1)t^{2n-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(2n-1)2^n}.$$

On en déduit que $|n2^n K_n| \leqslant \dfrac{n}{2n-1} \leqslant 1$.

On a montré que $K_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n2^n}\right)$.

Q 4. En particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ puis $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \underset{n\to+\infty}{=} o(I_n)$ d'après la question Q1. Mais alors

$$K_n = I_n + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \underset{n\to+\infty}{=} I_n + o(I_n).$$

Ceci montre que $K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.

Q 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux fonctions $t \mapsto -\dfrac{1}{2n(1+t^2)^n}$ et $t \mapsto t$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Au vu de la convergence des différentes intégrales, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned}
K_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = K_{n+1} + \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} \times t\,dt \\
&= K_{n+1} + \left[-\frac{1}{2n(1+t^2)^n} \times t\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2n(1+t^2)^n}\,dt \\
&= K_{n+1} + \lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{2n(1+t^2)^n} + \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{2n(1+t^2)^n}\,dt \\
&= K_{n+1} + \frac{1}{2n}K_n.
\end{aligned}$$

Q 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} K_n$. Pour $n \geqslant 2$, on a alors

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times K_1 = \frac{(2n-2)\times(2n-3)\times(2n-4)\times\ldots\times 2\times 1}{((2n-2)\times(2n-4)\times\ldots\times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$.

D'après la formule de Stirling,

$$K_n = \frac{4n^2}{(2n)(2n-1)} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}((n)!)^2} \times \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}}{2^{2n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}(2\pi n)} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

D'après la question Q4, on en déduit que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

I.A.2)

Q 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $u = t\sqrt{n}$ et donc $t = \dfrac{u}{\sqrt{n}}$ puis $dt = \dfrac{du}{\sqrt{n}}$, on obtient

$$\sqrt{n} I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n}\,du = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n}\,du.$$

Q 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour tout $u \in [0,+\infty[$, $f_n(u) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^{-n} \text{ si } u \in \left[0,\sqrt{n}\right] \\ 0 \text{ si } u > \sqrt{n} \end{cases}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du$.

- Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Soit $u \in [0,+\infty[$. Pour $n \geqslant u^2$, $f_n(u) = \left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right)}$ puis

$$f_n(u) \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n\left(\frac{u^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-u^2+o(1)}.$$

Donc, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :\ u \mapsto e^{-u^2}$. De plus, la fonction f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

- Soit $n \geqslant 2$. Pour $u \in \left[0,\sqrt{n}\right]$,

$$0 \leqslant f_n(u) = \frac{1}{\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^n} = \frac{1}{1+u^2+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{u^2}{n}\right)^k} \leqslant \frac{1}{1+u^2},$$

ce qui reste vrai pour $u > \sqrt{n}$ puis $n = 1$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $u \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant f_n(u) \leqslant \varphi(u)$ où φ est la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$. De plus, la fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ car dominée par $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$.

D'après le théorème de convergence dominée,

- (chaque fonction f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$),
- la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$,
- la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du\right)_{n\geqslant 1}$ converge,

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du = \int_0^{+\infty} f(u)\,du$.

Plus explicitement,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du.$$

Q 9. D'après la question Q6, $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ et donc, d'après la question précédente,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En posant $u = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2}}$ et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}.$$

I.B - Comportement asymptotique de $1-\Phi$

Q 10. Soit $x>0$. Pour tout $t\geqslant x$, $\dfrac{t}{x}\geqslant 1$ puis

$$\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt \leqslant \int_x^{+\infty}\frac{t}{x}\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Q 11. Pour $x>0$, posons $h(x) = \sqrt{2\pi}\left(\displaystyle\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt - \frac{x}{x^2+1}\varphi(x)\right) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2+1}$. La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$\begin{aligned}h'(x) &= -e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+x^2\right) - xe^{-\frac{x^2}{2}}(2x)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\left(-\left(x^2+1\right)^2 - \left(1-2x^2-x^4\right)\right)e^{-\frac{x^2}{2}}}{\left(x^2+1\right)^2}\\ &= -\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\left(x^2+1\right)^2}.\end{aligned}$$

La fonction h' est négative sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction h est décroissante sur $]0,+\infty[$. Par suite, pour tout réel $x>0$,

$$h(x)\geqslant \lim_{u\to+\infty} h(u) = 0,$$

($\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est une intégrale convergente et on sait alors que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\int_u^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0$).

Ainsi, la fonction h est positive sur $]0,+\infty[$ et donc, pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \geqslant \frac{x}{x^2+1}\varphi(x)$.

Q 12. D'après la question Q9, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt = 1$ et donc, pour $x>0$, $1-\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt = \int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt$.

Pour $x>0$, d'après la question précédente, $\dfrac{x^2}{x^2+1}\leqslant \dfrac{x}{\varphi(x)}\displaystyle\int_x^{+\infty}\varphi(t)\,dt = \frac{x}{\varphi(x)}(1-\Phi(x))\leqslant 1$. Les deux membres de cet encadrement tendent vers 1 quand x tend vers $+\infty$ et donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\varphi(x)}(1-\Phi(x)) = 1$. On en déduit que

$$1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

I.C - Une inégalité maximale

Q 13. Soit $x>0$. Pour $\omega\in\Omega$,

$$\omega\in A \Leftrightarrow \exists i\in[\![1,n]\!]/\ |R_i(\omega)|\geqslant 3x.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\omega \in A \Leftrightarrow & \left(|R_1(\omega)| \geqslant 3x\right) \text{ ou} \\ & \left(|R_1(\omega)| < 3x \text{ et } |R_2(\omega)| \geqslant 3x\right) \text{ ou} \\ & \left(|R_1(\omega)| < 3x \text{ et } |R_2(\omega)| < 3x \text{ et } |R_3(\omega)| \geqslant 3x\right) \text{ ou} \\ & \qquad\qquad\vdots \\ & \left(|R_1(\omega)| < 3x \text{ et } |R_2(\omega)| < 3x \text{ et } \ldots \text{ et } |R_{n-1}(\omega)| < 3x \text{ et } |R_n(\omega)| \geqslant 3x\right) \\ \Leftrightarrow & \left(|R_1(\omega)| \geqslant 3x\right) \text{ ou } \left(\max_{1\leqslant \leqslant 1} |R_i(\omega)| < 3x \text{ et } |R_2(\omega)| \geqslant 3x\right) \text{ ou } \ldots \text{ ou } \left(\max_{1\leqslant \leqslant n-1} |R_i(\omega)| < 3x \text{ et } |R_n(\omega)| \geqslant 3x\right) \\ \Leftrightarrow & \; \omega \in A_1 \text{ ou } \omega \in A_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } \omega \in A_n \Leftrightarrow \omega \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.\end{aligned}$$

Donc, $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Q 14. Soit $B = \{|R_n| \geqslant x\}$. $\left(B, \overline{B}\right)$ est un système complet d'événements. Donc,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right).$$

Ensuite, $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$ et d'autre part, $A \cap \overline{B} = \left(A_1 \cap \overline{B}\right) \cup \ldots \cup \left(A_n \cap \overline{B}\right)$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &\leqslant \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(\left(A_1 \cap \overline{B}\right) \cup \ldots \cup \left(A_n \cap \overline{B}\right)\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}(B) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_p \cap \overline{B}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(|R_n| \geqslant x\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_p \cap \{|R_n| < x\}\right).\end{aligned}$$

Q 15. Si $p = n$, $A_n \cap \{|R_n| < x\} = \varnothing = A_n \cap \{|R_n - R_n| > 2x\}$ (car $x > 0$).

Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $\omega \in A_p \cap \{|R_n| < x\}$. En particulier, $|R_p(\omega)| \geqslant 3x$ et $|R_n(\omega)| < x$ puis

$$|R_n(\omega) - R_p(\omega)| \geqslant |R_p(\omega)| - |R_n(\omega)| > 3x - x = 2x$$

Finalement, $\omega \in A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}$. On a montré que $A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}$.

Q 16. Les A_p étant deux à deux disjoints, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &\leqslant \mathbb{P}\left(|R_n| \geqslant x\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_p \cap \{|R_n| < x\}\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(|R_n| \geqslant x\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(|R_n| \geqslant x\right) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^{n} \left(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}\right)\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(|R_n| \geqslant x\right) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^{n} \{|R_n - R_p| > 2x\}\right).\end{aligned}$$

Soit $p_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $|R_n - R_p| \leqslant |R_n - R_{p_0}|$.

Alors, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\{|R_n - R_p| > 2x\} \subset \{|R_n - R_{p_0}| > 2x\}$ puis $\displaystyle\bigcup_{p=1}^{n} \{|R_n - R_p| > 2x\} \subset \{|R_n - R_{p_0}| > 2x\}$ et donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^{n} \{|R_n - R_p| > 2x\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|R_n - R_{p_0}| > 2x\right) \leqslant \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}\left(|R_n - R_p| > 2x\right).$$

On a montré que

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}\left(|R_n| \geqslant x\right) + \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}\left(|R_n - R_p| > 2x\right).$$

Q 17. Soit $p_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\max\limits_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}\left(|R_n - R_p| > 2x\right) = \mathbb{P}\left(|R_n - R_{p_0}| > 2x\right)$. Puisque $|R_n - R_{p_0}| \leqslant |R_n| + |R_{p_0}|$, on a

$$\{|R_n - R_{p_0}| > 2x\} \subset \{|R_n| + |R_{p_0}| > 2x\}.$$

Ensuite, $\{|R_n| < x\} \cap \{|R_{p_0}| < x\} \subset \{|R_n| + |R_{p_0}| < 2x\}$ et donc

$$\{|R_n| + |R_{p_0}| > 2x\} \subset \{|R_n| + |R_{p_0}| \geqslant 2x\} \subset \{||R_n| \geqslant x\} \cup \{||R_{p_0}| \geqslant x\}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &\leqslant \mathbb{P}\left(|R_n| \geqslant x\right) + \mathbb{P}\left(\{||R_n| \geqslant x\} \cup \{||R_{p_0}| \geqslant x\}\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}\left(|R_n| \geqslant x\right) + \mathbb{P}\left(|R_n| \geqslant x\right) + \mathbb{P}\left(|R_{p_0}| \geqslant x\right)\\ &\leqslant 3 \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}\left(|X_p| \geqslant x\right).\end{aligned}$$

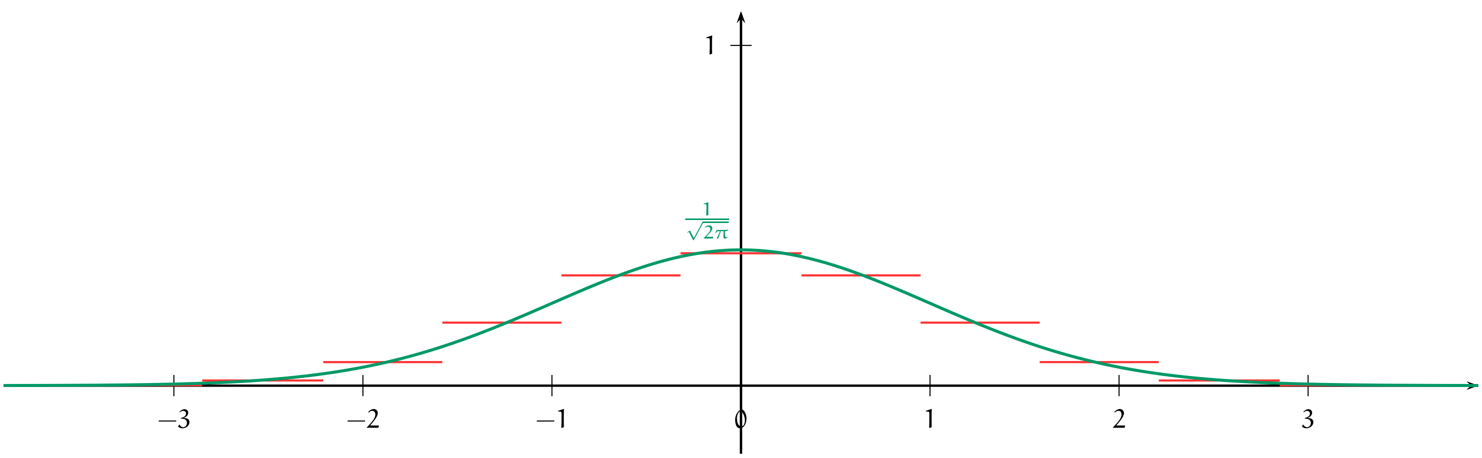
II - Etude d'une suite de fonctions

II.A - On note que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} + \frac{2(k+1)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,k+1} - \frac{1}{\sqrt{n}},$$

de sorte que la fonction B_n est définie sur $\mathbb{R}$.

Graphique quand $n = 10$. On a représenté en vert le graphe de la fonction φ et en rouge le graphe de la fonction B_n.



Q 18. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$x_{n,n-k} = -\sqrt{n} + \frac{2(n-k)}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n} + 2\sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \frac{2k}{\sqrt{n}} = -x_{n,k}.$$

Q 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et en particulier la fonction φ est bornée sur $\mathbb{R}$. D'autre part, la fonction B_n prend un nombre fini de valeurs et donc, la fonction B_n est bornée sur $\mathbb{R}$. Mais alors, la fonction $B_n - \varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions bornées sur $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de Δ_n.

Q 20. Posons $\Delta'_n = \mathrm{Sup}\{|B_n(x) - \varphi(x)|,\ x \geqslant 0\}$. Δ_n est un majorant de $\{|B_n(x) - \varphi(x)|,\ x \geqslant 0\}$ et donc $\Delta'_n \leqslant \Delta_n$. Montrons que $\Delta_n \leqslant \Delta'_n$.

Tout d'abord, la fonction φ est paire. Ensuite, pour tout réel $x \in \left]-\infty, -\sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$, on a $-x \in \left]\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$ puis $B_n(-x) = 0 = B_n(x)$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\left]-\left(x_{n,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),-\left(x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right[=\left]-x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}},-x_{n,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[=\left]x_{n-k,k}-\frac{1}{\sqrt{n}},x_{n-k,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[,$$

puis, pour $x\in\left]-x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}},-x_{n,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right[$,

$$B_n(-x)=\frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{n-k}\frac{1}{2^n}=\frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}=B_n(x).$$

En résumé, pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\left(\left\{x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}},\ k\in[\![0,n]\!]\right\}\cup\left\{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right)$, $(B_n-\varphi)(-x)=(B_n-\varphi)(x)$. On en déduit que

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left(\left\{x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}},\ k\in[\![0,n]\!]\right\}\cup\left\{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right),\ |B_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\Delta'_n.$$

Cette inégalité reste vraie si $x\in\left\{x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}},\ k\in[\![0,n]\!]\right\}\cup\left\{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ par passage à la limite à droite en chaque $x_{n,k}-\frac{1}{\sqrt{n}}$, $k\in[\![0,n]\!]$ ou en $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}$, par continuité à droite de la fonction $B_n-\varphi$.

Ainsi, Δ'_n est un majorant de $\{|B_n(x)-\varphi(x)|\,,\ x\in\mathbb{R}\}$. Ceci fournit $\Delta_n\leqslant\Delta'_n$ et finalement $\Delta_n=\Delta'_n$.

Q 21. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, posons $u_k=\frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$. Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}-1=\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\times\frac{k!(n-k)!}{n!}-1=\frac{n-k}{k+1}-1=\frac{n-1-2k}{k+1}.$$

1er cas. Supposons n pair. Posons $n=2p$ où $p\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]=[\![0,2p-1]\!]$, $\frac{u_{k+1}}{u_k}-1=\frac{2p-1-2k}{k+1}$. Si $k\leqslant p-1$,alors $\frac{u_{k+1}}{u_k}-1>0$ puis $u_{k+1}>u_k$ et si $k\geqslant p$, $u_{k+1}<u_k$. On a donc

$$B_{2p}\left(x_{2p,0}\right)<B_{2p}\left(x_{2p,1}\right)<\ldots<B_{2p}\left(x_{2p,p}\right)\text{ et }B_{2p}\left(x_{2p,p}\right)>B_{2p}\left(x_{2p,p+1}\right)>\ldots>B_{2p}\left(x_{2p,2p}\right).$$

En tenant compte de $x_{2p,p}=0$, ceci montre que la fonction B_{2p} est décroissante sur $[0,+\infty[$.

2ème cas. Supposons n impair. Posons $n=2p+1$ où $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]=[\![0,2p-1]\!]$, $\frac{u_{k+1}}{u_k}-1=\frac{2(p-k)}{k+1}$. Si $k\leqslant p-1$,alors $\frac{u_{k+1}}{u_k}-1>0$ puis $u_{k+1}>u_k$, si $k\geqslant p+1$, $u_{k+1}<u_k$ et enfin $u_p=u_{p+1}$. On a donc

$$B_{2p+1}\left(x_{2p+1,0}\right)<B_{2p}\left(x_{2p+1,1}\right)<\ldots<B_{2p}\left(x_{2p+1,p-1}\right)\text{ et }B_{2p+1}\left(x_{2p+1,p}\right)=B_{2p+1}\left(x_{2p+1,p+1}\right)\text{ et}$$
$$B_{2p}\left(x_{2p+1,p+1}\right)>B_{2p}\left(x_{2p+1,p+2}\right)>\ldots>B_{2p+1}\left(x_{2p+1,2p+1}\right).$$

Ensuite, $x_{2p+1,p+1}-\frac{1}{\sqrt{2p+1}}=\frac{2(p+1)-(2p+1)}{\sqrt{2p+1}}-\frac{1}{\sqrt{2p+1}}=0$. Dans ce cas également, la fonction B_{2p+1} est décroissante sur $[0,+\infty[$.

II.B -

Q 22. Soit $n\geqslant 1$. Pour $k\in[\![0,n]\!]$,

$$k\in I_n\Leftrightarrow x_{n,k}\in[0,\ell+1]\Leftrightarrow 0\leqslant-\sqrt{n}+\frac{2k}{\sqrt{n}}\leqslant\ell+1\Leftrightarrow\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant\frac{n+(\ell+1)\sqrt{n}}{2}.$$

Ainsi, $k\in I_n$, $k\geqslant\frac{n}{2}$ puis k tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. De même, $n-k\geqslant\frac{n-(\ell+1)\sqrt{n}}{2}$ puis $n-k$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Ensuite, $\frac{1}{k}\leqslant\frac{2}{n}$ et $\frac{1}{n-k}\leqslant\frac{2}{n-(\ell+1)\sqrt{n}}$ donc $O\left(\frac{1}{k}\right)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $O\left(\frac{1}{n-k}\right)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n}\right)$. On peut noter que « les deux $O\left(\frac{1}{n}\right)$ ne dépendent pas de k mais uniquement de n ».

D'après la formule de Stirling,

$$\begin{aligned}k!(n-k)! &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k\sqrt{2\pi k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}\sqrt{2\pi(n-k)}\left(1+O\left(\frac{1}{n-k}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} 2\pi e^{-n}k^{k+\frac12}(n-k)^{n-k+\frac12}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

Q 23. On en déduit que

$$\begin{aligned}B_n\left(x_{n,k}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}\times\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2\pi e^{-n}k^{k+\frac12}(n-k)^{n-k+\frac12}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{n^{n+\frac12}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{(2k)^{k+\frac12}(2n-2k)^{n-k+\frac12}}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+\frac12}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+\frac12}}.\end{aligned}$$

Q 24. $1+\dfrac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = 1-\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\dfrac{2k}{n} = \dfrac{2k}{n}$ et $1-\dfrac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = 1+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}-\dfrac{2k}{n} = 2-\dfrac{2k}{n}$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}+\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\\ &= \left(\frac{2k}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}+\frac12\left(-\sqrt{n}+\frac{2k}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}-\frac12\left(-\sqrt{n}+\frac{2k}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}}\\ &= \left(\frac{2k}{n}\right)^{k+\frac12}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+\frac12}\end{aligned}$$

et donc

$$B_n\left(x_{n,k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}.$$

Ensuite, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in I_n$, $0\leqslant x_{k,n}\leqslant \ell+1$ puis $0\leqslant\dfrac{x_{k,n}}{\sqrt{n}}\leqslant\dfrac{\ell+1}{\sqrt{n}}$. Ceci montre que $\dfrac{x_{k,n}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et donc aussi $\dfrac{x_{k,n}^2}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} &= e^{\frac{n+1}{2}\ln\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\left(\frac{n}{2}+O(1)\right)\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2n}+O\left(\frac{x_{n,k}^4}{n^2}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}+O\left(\frac1n\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}+O\left(\frac1n\right)}\\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}\left(1+O\left(\frac1n\right)\right)} \text{ (car } \frac{x_{n,k}^2}{2} \underset{n\to+\infty}{=} O(1))\\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} = e^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{x_{n,k}^2}{2}+O\left(\frac{x_{n,k}^2}{\sqrt{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{x_{n,k}^2}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

et de même $\left(1-\dfrac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{x_{n,k}^2}{2}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

Finalement, en tenant compte de $O\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

$$\begin{aligned} B_n\left(x_{n,k}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+O\left(\dfrac{1}{n}\right)}{e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)e^{\frac{x_{n,k}^2}{2}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Q 25. Ainsi, $\left|B_n\left(x_{k,n}\right) - \varphi\left(x_{k,n}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{=} e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (car $e^{-\frac{x_{n,k}^2}{2}} \leqslant 1$). On note que dans tout ce qui a précédé, les différents O ne sont jamais des fonctions de k mais uniquement des fonctions de n (car ces O sont à chaque fois majorés par une expression indépendante de k).
Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tels que pour $n \geqslant n_0$, pour tout $k \in I_n$, $\left|B_n\left(x_{k,n}\right) - \varphi\left(x_{k,n}\right)\right| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{n}}$.

Ensuite, la fonction φ est continue sur le segment $[0,\ell]$ et donc uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Par suite, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,\ell]^2$, si $|x-y| \leqslant \alpha$, alors $\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Soit $n_0' \geqslant n_0$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{n_0}} \leqslant \alpha$. Soit $n \geqslant n_0'$.
Soit $x \in [0,\ell]$. Il existe $k \in I_n$ tel que $x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant x < x_{n,k} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et donc tel que $|x - x_{n,k}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \alpha$. Pour $n \geqslant n_0'$,

$$\begin{aligned} |B_n(x) - \varphi(x)| = \left|B_n\left(x_{n,k}\right) - \varphi(x)\right| &\leqslant \left|B_n\left(x_{n,k}\right) - \varphi\left(x_{n,k}\right)\right| + \left|\varphi\left(x_{n,k}\right) - \varphi(x)\right| \\ &\leqslant \frac{M}{\sqrt{n}} + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Enfin, il existe $n_1 \geqslant n_0'$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $\dfrac{M}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$. Pour tout $n \geqslant n_1$, pour tout $x \in [0,\ell]$,

$$|B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{n}} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

puis $\sup\limits_{x\in[0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

II.C -

Q 26. Soit $\ell > 0$. Puisque $\varphi(\ell) > 0$, il existe n_2 tel que pour $n \geqslant n_2$,

$$B_n(\ell) \leqslant \varphi(\ell) \sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \varphi(\ell).$$

Pour $n \geqslant n_2$,

$$|B_n(\ell)| \leqslant |B_n(\ell) - \varphi(\ell)| + |\varphi(\ell)| \leqslant \varphi(\ell).$$

Q 27. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, on peut choisir $\ell > 0$ tel que $\varphi(\ell) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$. Pour tout réel $x \in [\ell,+\infty[$ et tout $n \geqslant n_2$, (puisque les fonctions φ et B_n sont décroissantes sur $[\ell,+\infty[$)

$$|B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant B_n(x) + \varphi(x) \leqslant B_n(\ell) + \varphi(\ell) \leqslant 3\varphi(\ell) \leqslant \varepsilon.$$

Soit $n_0 = \mathrm{Max}\{n_1, n_2\}$. Soit $n \geqslant n_0$.
Soit $x \in [0,+\infty[$. Si $x \in [0,\ell]$, $\sup\limits_{[0,\ell]} |B_n - \varphi| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$ et si $x \in [\ell,+\infty[$, $|B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$. Donc, pour $n \geqslant n_0$, $\Delta_n \leqslant \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant n_0 \Rightarrow \Delta_n \leqslant \varepsilon)$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_n = 0$.

III - Applications

III.A - Théorème central limite

Q 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_u^v f(x)\ dx - \int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\ dx = \int_u^{u_n} f(x)\ dx + \int_{v_n}^{v} f(x)\ dx + \int_{u_n}^{v_n} (f(x) - f_n(x))\ dx.$$

Ensuite, pour n suffisamment grand, la fonction $f - f_n$ est bornée sur I puis

$$\left|\int_{u_n}^{v_n} (f(x) - f_n(x))\ dx\right| \leqslant \left|\int_{u_n}^{v_n} |f(x) - f_n(x)|\ dx\right| \leqslant |u_n - v_n|\, \|f - f_n\|_\infty .$$

$|u_n - v_n|\,\|f - f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} |u-v|\times 0 = 0$ et donc $\displaystyle\int_{u_n}^{v_n} (f(x) - f_n(x))\ dx \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. D'autre part, $\displaystyle\int_u^{u_n} f(x)\ dx + \int_{v_n}^{v} f(x)\ dx \underset{n\to+\infty}{\to} \int_u^{u} f(x)\ dx + \int_v^{v} f(x)\ dx = 0$.

Finalement, $\displaystyle\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\ dx$ tend vers $\displaystyle\int_u^{v} f_n(x)\ dx$ quand n tend vers $+\infty$.

Q 29. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$ où de plus $\mathbb{P}(Y_i = 1)\ \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(Y_i = 0)$. La variable Y_i suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Puisque les variables X_i, $i \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes, il en est de même des variables Y_i, $i \in \mathbb{N}^*$. On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$. Donc, $T_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ puis, pour $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = j) &= \binom{n}{j}\frac{1}{2^n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{j}\frac{1}{2^n} \\ &= \left(\left(x_{n,j} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(x_{n,j} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) B_n(x_{n,j}) = \int_{x_{n,j}-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{n,j}+\frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x)\ dx.\end{aligned}$$

Q 30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}S_n + \frac{n}{2}$. Ensuite,

$$u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v \Leftrightarrow \frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leqslant \frac{S_n}{2} + \frac{n}{2} \leqslant \frac{n + v\sqrt{n}}{2} \Leftrightarrow T_n \in J_n.$$

Donc, $\mathbb{P}\left(u \leqslant \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right) = \mathbb{P}(T_n \in J_n) = \displaystyle\sum_{j\in J_n} \mathbb{P}(T_n = j)$.

Q 31. $\dfrac{n + u\sqrt{n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2} > 0$ et donc pour n suffisamment grand, $\dfrac{n + u\sqrt{n}}{2} \geqslant 0$. De même, $\dfrac{n + v\sqrt{n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2} < n$ et donc pour n suffisamment grand, $\dfrac{n + v\sqrt{n}}{2} \leqslant n$. Mais alors, pour n suffisamment grand, $J_n \subset [\![0, n]\!]$.

D'autre part, $\dfrac{n + v\sqrt{n}}{2} - \dfrac{n + u\sqrt{n}}{2} = \dfrac{(v - u)n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et donc, pour n suffisamment grand, $\dfrac{n + v\sqrt{n}}{2} - \dfrac{n + u\sqrt{n}}{2} \geqslant 2 > 1$ de sorte qu'il existe au moins deux entiers consécutifs compris au sens large entre $\dfrac{n + u\sqrt{n}}{2}$ et $\dfrac{n + v\sqrt{n}}{2}$.

En résumé, pour n suffisamment grand, J_n est non vide et contenu dans $[\![0, n]\!]$. On pose alors $J_n = [\![j_0, j_1]\!]$ avec $0 \leqslant j_0 < j_1 \leqslant n$. Pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right) &= \sum_{j=j_0}^{j_1} \mathbb{P}(T_n = j) = \sum_{j=j_0}^{j_1} \int_{x_{n,j}-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{n,j}+\frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x)\ dx = \int_{x_{n,j_0}-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{x_{n,j_1}+\frac{1}{\sqrt{n}}} B_n(x)\ dx \\ &= \int_{\frac{2j_0-1-n}{\sqrt{n}}}^{\frac{2j_1+1-n}{\sqrt{n}}} B_n(x)\ dx.\end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand, j_0 est le premier entier supérieur ou égal à $\dfrac{n+u\sqrt{n}}{2}$ et donc, $\dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant j_0 \leqslant \dfrac{n+u\sqrt{n}}{2}+1$ puis $u\sqrt{n}-1 \leqslant 2j_0-1-n \leqslant u\sqrt{n}+1$ et donc

$$u-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{2j_0-1-n}{\sqrt{n}} \leqslant u+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Le théorème des gendarmes montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2j_0-1-n}{\sqrt{n}} = u$. De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2j_1+1-n}{\sqrt{n}} = v$.

Ainsi, si pour n grand, $u_n = \dfrac{2j_0-1-n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \dfrac{2j_1+1-n}{\sqrt{n}}$ les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles convergeant vers u est v respectivement. Puisque la suite de fonctions (B_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ d'après la partie II, la question 28 permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right) = \int_u^v \varphi(t)\ dt.$$

Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{E}(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = 0$ et d'autre part, les variables X_i étant indépendantes et en particulier deux à deux indépendantes, $\mathbb{V}(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $v > u$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > v\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant v\right)\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geqslant v\right) = \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)|\right) \geqslant v\sqrt{n}\big)\\
&\leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\left(v\sqrt{n}\right)^2} = \frac{1}{v^2}.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $v_0 > u$ tel que $\dfrac{1}{v_0^2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et tel que $\displaystyle\int_{v_0}^{+\infty}\varphi(x)\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - \int_u^{+\infty}\varphi(x)\ dx\right| &\leqslant \left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - \mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v_0\right)\right| + \left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v_0\right) - \int_u^{v_0}\varphi(x)\ dx\right|\\
&\quad + \left|\int_u^{v_0}\varphi(x)\ dx - \int_u^{+\infty}\varphi(x)\ dx\right|\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > v_0\right) + \int_{v_0}^{+\infty}\varphi(x)\ dx + \left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v_0\right) - \int_u^{v_0}\varphi(x)\ dx\right|\\
&\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v_0\right) - \int_u^{v_0}\varphi(x)\ dx\right|.
\end{aligned}$$

Enfin, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v_0\right) - \int_u^{v_0}\varphi(x)\ dx\right| = 0$ et donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\displaystyle\left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v_0\right) - \int_u^{v_0}\varphi(x)\ dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $\displaystyle\left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - \int_u^{+\infty}\varphi(x)\ dx\right| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left(n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) - \int_u^{+\infty}\varphi(x)\ dx\right| \leqslant \varepsilon\right)$ et donc que

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \int_u^{+\infty}\varphi(x)\ dx = 1-\Phi(u).$$

De même, pour tout $v \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right) = \int_{-\infty}^{v}\varphi(x)\ dx = \Phi(v)$. On en déduit encore que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(u < \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant u\right) = 1-\Phi(u)$ et de même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < v\right) = \Phi(v)$.

III.B - Critère de tension

Q 32. Pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(S_n \geqslant x\sqrt{n}\right) + \mathbb{P}\left(S_n \leqslant -x\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant x\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant -x\right)$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty} x^2\mathbb{P}\left(|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\right) = x^2\left(\int_x^{+\infty} \varphi(t)\ dt + \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\ dt\right) = 2x^2\int_x^{+\infty} \varphi(t)\ dt = 2x^2(1 - \Phi(x)).$$

D'après la question Q12, $2x^2(1-\Phi(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. On peut donc choisir $x_0 \geqslant 1$ tel que, pour $x \geqslant x_0$, $2x^2(1-\Phi(x)) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x \geqslant x_0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x^2\mathbb{P}\left(|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\right) = 2x^2(1-\Phi(x)) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ il existe $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_x$, $x^2\mathbb{P}\left(|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\right) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Q 33.

