Concours National Commun - Session 2013

Corrigé de l'épreuve de mathématiques II
Filière MP

Matrice de Gram, équation matricielle et étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre p

Corrigé par M.TARQI [1]

Premier exercice

Matrice de Gram et application

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on peut utiliser l'expression du produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et écrire
$$(u_i|u_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}m_{kj}.$$
On trouve donc le coefficient d'indice (i,j) de la matrice ${}^tMM$, donc $G(u_1,...,u_n) = {}^tMM$.

2. Il est clair que $G(u_1,...,u_n)$ est symétrique puisque, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(u_i|u_j) = (u_j|u_i)$. Soit maintenant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de taille n. On a
$${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j\right)^2 \geq 0,$$
donc $G(u_1,...,u_n)$ est positive. Enfin si la famille $(u_1,...,u_n)$ est libre la matrice $G(u_1,...,u_n)$ est inversible, en effet, s'il existe $\lambda_1,...,\lambda_n$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_i = 0$ (les C_i désignent les colonnes de $G(u_1,...,u_n)$), alors on aura $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(u_i|u_j) = (u_i|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j u_j) = 0$ et ceci pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, donc $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j u_j = 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.
Conclusion : La matrice symétrique positive $G(u_1,...,u_n)$ est définie si et seulement si, la famille $(u_1,...,u_n)$ est libre.

3. (a) On choisit $u_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$, on voit bien que $(u_i|u_j) = \min(i,j)$, donc la matrice A_n est une matrice de Gram, comme la famille $(u_1,...,u_n)$ est libre, la matrice A_n est définie positive. D'autre part, la matrice $R_n = (r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $r_{ij} = 1$ si $i \leq j$ et 0 sinon vérifie ${}^tR_nR_n = A_n$.

1. Veuillez adresser toute remarque, correction ou suggestion à l'auteur : medtarqi@yahoo.fr

(b) Le système ${}^tR_4Z = Y$ s'écrit :

$$\begin{cases} z_1 & = 1 \\ z_1 + z_2 & = 2 \\ z_1 + z_2 + z_3 & = 3 \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 & = 4 \end{cases}$$

Donc $Z =^t (1,1,1,1)$. Le système $R_4X = Y$ s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_3 + x_4 & = 1 \\ x_4 & = 1 \end{cases},$$

dont la solution est $X =^t (0,0,0,1)$.
Si X une solution de $A_4X = Y$ ou encore de ${}^tR_4R_4X = Y$, alors R_4X est solution l'équation ${}^tR_4Z = Y$, donc l'étude précédente assure que $X =^t (0,0,0,1)$ est l'unique solution du système inversible $A_4X = Y$.

Deuxième exercice

Résolution de l'équation $X^2 + 3X = A$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. La matrice A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 0$. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres de A sont des droites vectorielles.

2. Il est clair que le sous-espace propre associé à la valeur $\lambda_1 = 10$ est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on prend par exemple e_1 ce vecteur. De même on prend $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_3 = 0$, la résolution du système $AX = 0$ conduit au sous-espace propre engendré par le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3. Puisque la matrice est diagonalisable, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice Δ de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. D'après le choix de la base, on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$.

5. (a) L'égalité $v^2 + 3v = u$ n'est autre que la traduction vectorielle de l'égalité matricielle $B^2 + 3B = A$.

   (b) u est un polynôme en v, donc u et v commutent. v commute avec u et donc laisse stable les trois droites propres de u. Ainsi une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u est également une base de vecteurs propres de v ou encore, alors pour la même matrice P, $V = P^{-1}BP$ est une matrice diagonale.

(c) On a :
$$B^2+3B=A \Leftrightarrow PV^2P^{-1}+3PVP^{-1}=P\Delta P^{-1} \Leftrightarrow V^2+3V=\Delta,$$
ce qui conduit au système :
$$\begin{cases} \alpha_1^2+3\alpha_1=10, \\ \alpha_2^2+3\alpha_2=4, \\ \alpha_3^2+3\alpha_3=0. \end{cases}$$
On trouve $\alpha_1 \in \{2,-5\}$, $\alpha_2 \in \{1,-4\}$ et $\alpha_3 \in \{0,-3\}$. D'où les $2^3=8$ solutions pour V :
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
Chaque valeur de V donne une valeur pour B : $B=PVP^{-1}$.

6. Chaque valeur de V donne une solution B de l'équation $X^2+3X=A$, donc le nombre de solution de l'équation matricielle est 8.

Problème

Étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre p

Partie I : Résultats préliminaires

1.1

1.1.1 Si P est un polynôme de degré inférieure ou égal à n, sa dérive P' est un polynôme de degré inférieure ou égal à $n-1$, donc est un élément de $\mathbb{C}_n[X]$, par conséquent $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par l'opérateur D.

1.1.2 Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $D_n^{n+1}(X^k)=0$, donc D_n est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{C}_n[X]$ (car $(1,X,X^2,...,X^n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$).

1.1.3 Comme D est nilpotent 0 est la seule valeur propre de D_n, en conséquence pour tout complexe α non nul, $D_n+\alpha I_n$ est inversible. L'inverse de $D_n+\alpha I_n$ est donnée par la formule :
$$(D_n+\alpha I_n)^{-1}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{D_n}{\alpha}+I_n\right)^{-1}=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{D_n}{\alpha}\right)^k.$$

1.2 Soit α un nombre complexe non nul, comme $D_n+\alpha I_n$ est inversible, alors pour tout polynôme R de $\mathbb{C}_n[X]$ de degré n, il existe un unique polynôme $R_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $(D_n+\alpha I_n)(R_1)=R$ ou encore

$R_1' + \alpha R_1 = R$. Cette égalité montre aussi que $\deg R_1 = \deg(\alpha R_1 + R_1') = \deg(R) = n$.
D'après la question 1.(c), on a :

$$\begin{aligned} R_1 &= (D_n + \alpha I_n)^{-1}(R) = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(\frac{D_n}{\alpha}\right)^k (R) \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^k R^{(k)}. \end{aligned}$$

1.3

1.3.1 D'après le cours, on sait que l'ensemble de solutions de l'équation différentielle linéaire avec second membre $y' - \lambda y = g$ est un espace affine de dimension 1, donc pour conclure il suffit de montre que la fonction $Y : x \mapsto G(x)e^{\lambda x}$ vérifie cette équation différentielle. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$Y' - \lambda Y = G'(x)e^{\lambda x} + \lambda G(x)e^{\lambda x} - \lambda G(x)e^{\lambda x} = g(x).$$

En conclusion, les solutions de $y' - \lambda y = g$ sont de la forme

$$x \mapsto \left(\int_0^x g(t)e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)e^{\lambda x} + ke^{\lambda x}$$

où k est une constante complexe.

1.3.2 D'après ce qui précède, la solution générale de $y' - \lambda y = R(x)e^{\lambda x}$ est de la forme :

$$x \mapsto \left(\int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t\right)e^{\lambda x} + ke^{\lambda x} = S(x)e^{\lambda x},$$

où $S(x) = \displaystyle\int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t + k$.
Il est clair que $S'(x) = R(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 D'après ce qui précède, la solution générale de $y' - \lambda y = R(x)e^{\mu x}$ est de la forme :

$$x \mapsto \left(\int_0^x R(t)e^{(\mu-\lambda)t}\,\mathrm{d}t\right)e^{\lambda x} + ke^{\lambda x}.$$

D'après un résultat classique sur les primitives, on sait qu'il existe un polynôme R_1 et $k_1 \in \mathbb{C}$ tels que $\displaystyle\int_0^x R(t)e^{(\mu-\lambda)t}\,\mathrm{d}t = R_1(x)e^{(\mu-\lambda)x} + k_1$. D'où la solution générale de $y' - \lambda y = R(x)e^{\mu x}$:

$$x \mapsto R_1(x)e^{\mu x} + ce^{\lambda x}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

En remplaçant dans l'équation différentielle $y' - \lambda y = R(t)e^{\mu t}$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$R_1'(t)e^{\mu t} + \mu R_1(t)e^{\mu t} - \lambda R_1(t)e^{\mu t} = R(t)e^{\mu t},$$

d'où $R_1' + (\mu - \lambda)R_1 = R$.

Partie II : Expression des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_p)$

2.1 **Cas où $P = (X-\lambda)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$**
Une application $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_p)$ si et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ a_n f^{(n)}(x) + ... + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0$ ou encore si et seulement si, $(\mathscr{D} - \lambda I)^n(f) = 0$.
D'où

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathscr{D} - \lambda I)^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{n-k} \lambda^{n-k} f^{(k)}(x) = 0$$

et donc

$$e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{n-k} \lambda^{n-k} f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (e^{-\lambda x})^{n-k} f^{(k)}(x) = \frac{d^n(e^{-\lambda x} f(x))}{dx^n} = 0.$$

Ainsi $e^{-\lambda x} f(x)$ est un polynôme R de degré inférieure ou égal à $n-1$, donc $f(x) = R(x)e^{\lambda x}$.
Réciproquement ; si $x \mapsto e^{-\lambda x} f(x)$ est une fonction polynomiale de degré inférieure ou égal à $n-1$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{d^n(e^{-\lambda x} f(x))}{dx^n} = 0$ et on conclut avec la formule de Binôme.

2.2

2.2.1 L'endomorphisme $Q(\mathscr{D})$ est un polynôme en $\mathscr{D}$; donc il commute avec $(\mathscr{D} - \lambda I)$.

2.2.1 Une fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de $(\mathscr{E}_P)$ si et seulement si, $(\mathscr{D} - \lambda I) \circ Q(\mathscr{D})(f) = 0$ ou encore si et seulement si, $Q(\mathscr{D}) \circ (D - \lambda I)(f) = Q(\mathscr{D})(f' - \lambda f) = 0$, ceci est équivalent à dire que $f' - \lambda f$ est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_Q)$.

2.3 Le résultat est vrai si $n = 1$; en effet, la solution générale de $y' - \lambda y = 0$ est de la forme $x \mapsto R(x)e^{\lambda x}$ avec $R(x) = 1$.
Posons $Q = (X-\lambda)^{n-1}$ de tel sorte que $P = (X-\lambda)Q$ et supposons que la solution générale de l'equation différentielle $(D - \lambda I)^{n-1}(f) = 0$ s'écrit sous la forme $x \mapsto R(x)e^{\lambda x}$ où $R \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$.
Si f est solution de l'équation $(\mathscr{E}_P)$, alors $f' - \lambda f$ est solution de $(\mathscr{E}_Q)$, donc il existe $R \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) - \lambda f(x) = R(x)e^{\lambda x}$, et d'après la question 1.3.2, f est de la forme $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$ avec $\deg S = \deg R + 1$ (car $S' = R$). La propriété est donc démontrée pour l'ordre n, on conclut par la suite avec le principe de récurrence.

2.4 **Un exemple** : $P_1 = X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X-1)(X+1)^3$. La solution de l'équation différentielle $(\mathscr{D} + I)^3(y) = 0$ est de la forme $x \mapsto R(x)e^{-x}$ où $R \in \mathbb{C}_2[X]$. Maintenant si f est solution de $(\mathscr{E}_{P_1})$, alors $f' - f$ est solution l'équation différentielle $(\mathscr{E}_Q)$, donc il existe $R \in \mathbb{C}_2[X]$ tel que $f' - f = R(x)e^{-x}$, donc f est de la forme $x \mapsto R_1(x)e^{-x} + ce^x$ (d'après 1.3.3) avec la relation $R_1' - 2R_1 = R$.

2.5 **Cas général :** D'après la question 1.3, le résultat est vrai pour tout polynôme de degré 1, supposons qu'il est démontré pour tout polynôme de degré inférieure ou égal à $n \in \mathbb{N}$ et soit P un polynôme de degré $n+1$. En divisant par son coefficient dominant, on peut supposer P unitaire. On pose $P = (X-\lambda)Q$ avec $Q = \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ (comme dans la question 2.5). Soit maintenant f une solution de $(\mathscr{E}_P)$, alors $f' - \lambda f$ solution de $(\mathscr{E}_Q)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) - \lambda f(x) = \sum_{k=1}^{r} R_k(x) e^{\lambda_k x},$$

où $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$. Deux cas sont possibles :

- 1er cas : $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\lambda \neq \lambda_k$ (λ racine simple de P) : Une solution particulière de $y' - \lambda y = R_k(x)e^{\lambda_k x}$ est de la forme $f_k : x \mapsto S_k(x)e^{\lambda_k x}$ où S_k est un polynôme de même degré que R_k. D'après le principe de superposition, la solution générale de $y'(x) - \lambda y(x) = \sum_{k=1}^{r} R_k(x)e^{\lambda_k x}$ est de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{r} f_k(x) + ce^{\lambda x} = \sum_{k=1}^{r} S_k(x)e^{\lambda_k x} + ce^{\lambda x}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

- 2eme cas : $\exists k_0 \in [\![1, r]\!]$, $\lambda = \lambda_{k_0}$ (λ racine d'ordre $m_{k_0} + 1$) : La solution de $y - \lambda y = R_{k_0}(x)e^{\lambda x}$ est de la forme $x \mapsto S_{k_0}(x)e^{\lambda x}$ où S_{k_0} est un polynôme tel que $S'_{k_0} = R_{k_0}$ ($\deg S_{k_0} \leq m_{k_0}$). Donc la solution de $y'(x) - \lambda y(x) = \sum_{k \neq k_0} R_k(x)e^{\lambda_k x} + R_{k_0}e^{\lambda x}$ est de la forme ,

$$x \mapsto \sum_{k \neq k_0} f_k(x) + S_{k_0}(x)e^{\lambda x} = \sum_{k \neq k_0} S_k(x)e^{\lambda_k x} + S_{k_0}(x)e^{\lambda x}.$$

On voit donc que la propriété est bien vérifiée pour le polynôme P.

2.6 D'après le cours, l'ensemble de solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_P)$ est un espace vectoriel de dimension $n = \deg P$. D'autre part, toute solution de $(\mathscr{E}_P)$ est combinaison linéaire des éléments de la famille $\mathscr{F} = \bigcup_{k=1}^{r} \{x \mapsto e^{\lambda_k x}, x \mapsto xe^{\lambda_k x}, ..., x \mapsto x^{m_k-1}e^{\lambda_k x}\}$(d'après 2.5), de plus on peut vérifier que cette famille est libre et comme $\text{card}\mathscr{F} = \sum_{k=1}^{r} m_k = \deg P$, alors $\mathscr{F}$ est une base de $(\mathscr{E}_P)$ ce qui permet de conclure.

2.7 **Un autre exemple :** La division euclidienne du polynôme P_2 par $(X-1)^3$ conduit à la factorisation : $P_2 = (X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2$. Donc les solutions de $(\mathscr{E}_{P_2})$ sont de la forme

$$x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x + (dx + e)e^{ix} + (fx + g)e^{ix}$$

où a, b, c, d, e, f, g sont des nombres complexes.

Partie III : Application

3.1

3.1.1 Il est clair que $g_n = nf_{\frac{1}{n}} - nf_0$, donc $g_n \in E_f$ et comme $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est base, alors on peut trouver des complexes $\alpha_{1,n}, ..., \alpha_{p,n}$ tels que $g_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k,n}\varphi_k$.

3.1.2 On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x)$, donc la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f'.

3.2

3.2.1 Supposons que la fonction $x \mapsto \delta_2(a_1, x)$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, alors on aura, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\delta_2(a_1, x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a_1) & \varphi_2(a_1) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix} = 0,$$

et donc $\varphi_2(x) = \dfrac{\varphi_2(a)}{\varphi_1(a)}\varphi_1(x)$ (car $\varphi_1(a) \neq 0$), donc φ_1 et φ_2 sont colinéaires, ce qui est absurde. En conséquence il existe un réel a_2 tel que $\delta_2(a_1, a_2) \neq 0$ et dans ce cas la matrice $\Delta_2(a_1, a_2)$ est inversible.

3.2.2 De même , supposons que la fonction $x \mapsto \delta_{k+1}(a_1, ..., a_k, x)$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, alors on aura, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\delta_{k+1}(a_1, ..., a_k, x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(a_1) & \dots & \varphi_k(a_1) & \varphi_{k+1}(a_1) \\ \varphi_1(a_2) & \dots & \varphi_k(a_2) & \varphi_{k+1}(a_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(a_k) & \dots & \varphi_k(a_k) & \varphi_{k+1}(a_k) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_k(x) & \varphi_{k+1}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant par rapport à la dernière ligne conduit à une relation de type

$$\beta_1\varphi_1(x) + ... + \beta_k\varphi_k(x) + \delta_k(a_1, ..., a_k)\varphi_{k+1}(x) = 0 \ \text{(les } \beta_i \text{ sont des constantes)}$$

et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\varphi_{k+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_k)$ (car $\delta_k(a_1, ..., a_k) \neq 0$), ce qui est absurde. Ainsi il existe un réel a_{k+1} tel que $\delta_{k+1}(a_1, ..., a_k, a_{k+1}) \neq 0$.

3.3

3.3.1 D'après la relation (1) on a, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $g_n(a_i) = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(a_i)\alpha_{k,n}$, cette relation se traduit matriciellement par l'égalité $Z_n = MY_n$.

3.3.2 On sait que la suite de vecteurs colonnes $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge vers le vecteur Y de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ de composantes $(f'(a_1), ..., f'(a_p))$, et comme $Y_n = M^{-1}Z_n$, la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge vers $M^{-1}Y$, car l'application $X \mapsto M^{-1}X$ est continue sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

3.3.3 Puisque la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge, alors la suites $(a_{k,n})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{C}$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. $\forall k \in [\![1, p]\!]$, on note $\alpha_k = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{k,n}$, donc la relation (1) montre que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\varphi_k(x),$$

donc $f' \in E_f$.

3.4 Si $h \in E_f$, alors h est une combinaison linéaire des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (les f_τ sont derivebles dans $\mathbb{R}$), donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme précédemment on montre que $h' \in E_f$. Le même raisonnement se fait maintenant pour h' au lieu de h, donc $h'' = (h')' \in E_f$, une récurrence sur l'ordre de dérivée permet de conclure, ainsi tous les éléments de E_f sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent E_f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui est évidement stable par l'opérateur $\mathscr{D}$.

3.5 D'après le théorème de Cayley-Hamilton $\mathcal{D}$ est racine de son polynôme caractéristique P, c'est à dire$P(\mathcal{D}) = 0$, en particulier $P(\mathcal{D})(f) = 0$, donc f est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_P)$. D'après le résultat de la question 2.6, si $P = (-1)^n \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{m_k}$ où $n = \deg P$, f est de forme $x \mapsto \sum_{k=1}^{r} R_k(x)e^{-\lambda_k x}$ avec $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$.

Inversement, si f est de type $x \mapsto \sum_{k=1}^{r} R_k(x)e^{-\lambda_k x}$, alors pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_\tau(x) = f(x+\tau) = \sum_{k=1}^{r} R_k(x+\tau)e^{\lambda_k \tau}e^{\lambda_k x} = \sum_{k=1}^{r} S_k(x)e^{-\lambda_k x}$$

où S_k est un polynôme de même degré que R_k, donc f_τ prend la même forme que f, autrement dit,

$$E_f = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{r}\{x \mapsto e^{\lambda_k x}, x \mapsto xe^{\lambda_k x}, ..., x \mapsto x^{m_k-1}e^{\lambda_k x}\}\right),$$

c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension finie.

• • • • • • • • • • • •