# CORRIGÉ DU DM N°11 (E3A PSI 2015)

## Préliminaires

1. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base orthonormale de $E$. Notons $u$ l'unique endomorphisme de $E$ tel que $u(e_1)=e_1$ et $\forall i\geqslant 2,\ u(e_i)=0$. $u$ est un endomorphisme de $E$ de rang $1$. Il est symétrique (puisque sa matrice dans une base orthonormale est symétrique, ici diagonale). Enfin, si $x\in E$ alors $(u(x)|x)=(x|e_1)^2$ (puisque $x=\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i$) et donc $(u(x)|x)\geqslant 0$. Finalement, $u\in T$.

   Cependant, $-u\notin T$ puisque $(-u(e_1)|e_1)=-1<0$. $T(E)$ n'est donc pas stable par combinaisons linéaires et n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

2. **a)** (*Question de cours*). On a :

$$\mathbf{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{p}(AB)_{i,i}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}A_{i,k}B_{k,j}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}A_{i,k}B_{k,j}=\sum_{k=1}^{p}(BA)_{k,k}=\mathbf{tr}(BA).$$

   **b)** (*Question de cours*).
   Si $B$ est semblable à $A$, il existe une matrice inversible $P$ telle que $P^{-1}AP=B$ et alors

$$\mathbf{tr}(B)=\mathbf{tr}(P^{-1}AP)=\mathbf{tr}(PP^{-1}A)=\mathbf{tr}(A).$$

   **c)** En particulier, la trace d'une matrice représentant $u$ dans une base ne dépend pas de la base choisie (puisque deux choix de bases donnent deux matrices semblables). On peut donc définir la trace de $u$ comme la trace de l'une quelconque des matrice le représentant.

3. Un hyperplan de $E$ est un sous-espace de $E$ dont un supplémentaire est de dimension $1$, c'est à dire de dimension $p-1$.

   **a)** C'est **FAUX**. $G$ ne contient pas le vecteur nul et n'est donc même pas un espace vectoriel.

   **b)** C'est **VRAI**. Soit $a\in G$ ; si $x\in H\cap \mathrm{Vect}(a)$ il existe un scalaire $k$ tel que $x=ka$. Si $k\neq 0$ alors $a=x/k\in H$ ce qui est faux. On a ainsi $k=0$ et donc $x=0$. On en déduit que $\mathrm{Vect}(a)$ et $H$ sont en somme directe. Par dimension, il sont supplémentaires.

   **c)** C'est **VRAI**. Si $a$ est non nul et orthogonal à $H$ alors il n'est pas dans $H$ (seul le vecteur nul est dans $H$ et orthogonal à $H$). La question précédente montre qu'il engendre un supplémentaire de $H$ dans $E$.

   **d)** C'est **VRAI**. Par théorème du rang, la dimension du noyau d'une forme linéaire non nulle est égale à la dimension de l'espace moins $1$. Ce noyau est donc un hyperplan de l'espace.

   **e)** C'est **VRAI**, toujours grâce au théorème du rang.

4. L'application est bien définie et, avec les questions précédentes, est symétrique. De plus,

$$\langle \lambda f+g,h\rangle=\mathbf{tr}((f+\lambda g)\circ h)=\mathbf{tr}(\lambda f\circ h+g\circ h)=\lambda\mathbf{tr}(f\circ g)+\mathbf{tr}(g\circ h)=\lambda\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$$

   ce qui donne la linéarité par rapport à la première variable. Notons enfin $A$ une matrice représentant $f$ dans une base orthonormée. On a ${}^tA=A$ par symétrie de $f$ et

$$\langle f,f\rangle=\mathbf{tr}(A^2)=\mathbf{tr}({}^tAA)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}A_{i,j}^2$$

   C'est une quantité positive qui n'est nulle que si $A$, et donc aussi $f$, est nulle. On a donc le caractère défini positif et notre application définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}(E)$.

5. De façon immédiate, $(1,1,1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre $-3$, $(1,-1,0)$ et $(0,1,-1)$ sont vecteurs propres associés à la valeur propre $-6$. On a donc

$$\mathrm{Sp}(A)\subset\{-3,-6\},\ \mathrm{Vect}((1,1,1))\subset E_{-3}(A),\ \mathrm{Vect}((1,-1,0),(0,1,-1))\subset E_{-6}(A).$$

   Les sous-espace propres étant en somme directe, on a toutes les valeurs propres et les inclusions ci-dessus sont des égalités.

# Partie 1

1. $u_a$ est immédiatement un endomorphisme de E (par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable). Son image est égale à $\text{Vect}(a)$ et est de dimension $\leqslant 1$ (et donc le rang de $u_a$ est $\leqslant 1$). On a de plus
$$(u_a(x)|y) = (x|a)(a|y) = (x|u_a(y))$$
et $u_a$ est symétrique. Enfin, pour tout $x$, $(u_a(x)|x) = (x|a)^2 \geqslant 0$. On a donc
$$u_a \in \mathrm{T(E)}.$$

2. **a)** Comme $a \neq 0$, la famille $\mathcal{B}$ proposée est bien une base. $u_a$ envoie les élements orthogonaux à $a$ sur 0 et envoie $a$ sur $\|a\|^2 a$. La matrice cherchée est donc :
$$\text{diag}(\|a\|^2, 0, \ldots, 0.)$$
**b)** On en déduit que la matrice de $u_a^2$ est $\text{diag}(\|a\|^4, 0, \ldots, 0)$ et que :
$$\mathbf{tr}(u_a) = \|a\|^2, \ \mathbf{tr}(u_a^2) = \|a\|^4.$$
**c)** La matrice de $f \circ u_a$ dans $\mathcal{B}$ s'obtient en multipliant celle de $f$ dans $\mathcal{B}$ par celle de $u_a$, ce qui revient à multiplier la première colonne par $\|a\|^2$ et les autres par $0$. Les coefficients diagonaux de la matrice de $f \circ u_a$ sont donc $\|a\|^2\alpha, 0, \ldots, 0$, où $\alpha$ est le coefficient supérieur gauche de la matrice de $f$. En décomposant $f(a)$ sur $\text{Vect}(a)$ et son orthogonal, on obtient $f(a) = \alpha a + y$ et ainsi $(f(a)|a) = \|a\|^2\alpha$. On en déduit que les coefficients diagonaux de $f \circ u_a$ sont :
$$(f(a)|a), 0, \ldots, 0.$$
**d)** En particulier,
$$\mathbf{tr}(f \circ u_a) = (f(a)|a).$$

3. Comme $u \in \mathrm{T}$, on notera que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(b)$ (inclusion et égalité par dimension).
**a)** Comme $u(b) \in \text{Im}(u)$, il existe donc un scalaire $\mu$ tel que $u(b) = \mu b$. En prenant le produit scalaire avec $b$, il vient $0 \leqslant (u(b)|b) = \mu\|b\|^2$ et comme $\|b\|^2 > 0$, on a donc $\mu \geqslant 0$.
**b)** Soit $x \in \mathrm{E}$. $u(x) \in \text{Im}(u)$ et il existe $k$ tel que $u(x) = kb$. En prenant le produit scalaire avec $b$, il vient $k = \frac{(u(x)|b)}{\|b\|^2}$. Mais comme $u$ est symétrique, $(u(x)|b) = (x|u(b)) = \mu(x|b)$ et ainsi
$$u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)b.$$
**c)** $\mu$ ne peut donc être nul (sinon $u$ le serait) et comme on a vu que $\mu \geqslant 0$, on conclut que :
$$\mu > 0.$$
**d)** Posons $a = \sqrt{\mu}d\frac{b}{\|b\|}$. La question $3.b$ donne
$$\forall x \in \mathrm{E}, \ u(x) = (x|a)a = u_a(x).$$

4. La question 1 montre que $\varphi$ va bien de E dans T(E). La question 3 indique que tout élément de T(E) admet un antécédent et on a donc surjectivité de $\varphi$.
Comme $\varphi(a) = \varphi(-a)$, on montre que $\varphi$ n'est pas injective en considérant un vecteur $a$ non nul (et il y en a puisque $p \geqslant 1$). L'application $\varphi$ n'est donc pas injective.

# Partie 2

1. $\{\Phi(x) \mid x \in \mathrm{E}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (elle contient $\mathrm{N}(f - u_0)^2 = \mathrm{N}(f)^2$) et minorée par $0$. Elle possède donc une borne inférieure $m(f)$.

2. On développe par multilinéarité :
$$\Phi(x) = \langle f - u_x, f - u_x \rangle = \mathrm{N}(f)^2 - 2\langle f, u_x \rangle + \mathrm{N}(u_x)^2.$$
Or, $\mathrm{N}(u_x^2) = \langle u_x, u_x \rangle = \mathbf{tr}(u_x^2) = \|x\|^4$ (question 1.2.2) et $\langle f, u_x \rangle = \mathbf{tr}(f \circ u_x) = (f(x)|x)$ (question 1.2.$d$) et donc :
$$\Phi(x) = \mathrm{N}(f)^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^4.$$

3. Ainsi (on utilise la symétrie de $f$ et $\|y\| = 1$) :

$$\begin{aligned} h_x(t) &= \Phi(x+ty) \\ &= \mathrm{N}(f)^2 - 2(x+ty|f(x)+tf(y)) + \|x+ty\|^4 \\ &= \mathrm{N}(f)^2 - 2((x|f(x)) + 2t(x|f(y)) + t^2(y|f(y))) + (\|x\|^2 + 2t(x|y) + t^2)^2 \\ &= t^4 + 4(x|y)t^3 + (4(x|y)^2 + 2\|x\|^2 - 2(y|f(y)))t^2 \\ &\quad +(-4(x|f(y)) + 4\|x\|^2(x|y))t + \mathrm{N}(f)^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^2, \end{aligned}$$

et $h_x$ est polynomiale de degré $4$.

4. $f$ est symétrique donc diagonalisable da ns une base orthonormale . Quitte à renuméroter les vecteurs de cette base $(e_i)$, il est toujours possible de supposer que les valeurs propres respectives $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont ordonnées comme dans l'énoncé.

5. Dans la base $\mathcal{C}$, $f$ est représentée par $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ et $f\circ f$ par $\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\dots,\lambda_p^2)$. On a donc :

$$\mathrm{N}(f) = \sqrt{\mathbf{tr}(f\circ f)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}\,.$$

6. Soit $z \in \mathrm{E}$ de norme $1$ ; il peut alors s'écrire $z = z_1e_1 + \cdots + z_pe_p$ avec $z_1^2 + \cdots + z_p^2$. On a alors :

$$(z|f(z)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2 \leqslant \lambda_p \sum_{i=1}^{p} z_i^2 = \lambda_p\,.$$

Ceci montre (en passant à la borne supérieure) que $\alpha \leqslant \lambda_p$. $z = e_p$ étant un élément de norme $1$ pour lequel l'inégalité ci-dessus est une égalité, on conclut que :

$$\alpha = \max_{\|z\|=1}(z|f(z)) = \lambda_p\,.$$

Si $(z|f(z)) = \lambda_p$, on a pour tout $i$, $\lambda_i z_i^2 = \lambda_p z_i^2$. Dès que $\lambda_i \neq \lambda_p$, on a donc $z_i = 0$. $z$ est donc combinaison linéaire des $e_i$ tels que $\lambda_i = \lambda_p$. C'est ainsi un élément de $\ker(f - \lambda_p \mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$.
Réciproquement, si $z$ est de norme $1$ et élément de $\ker(f - \lambda_p \mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$, on a $(z|f(z)) = \lambda_p$ par le calcul ci-dessus.

7. **a)** Si $m(f)$ est atteint en $a$ alors $h_a$ est minimale en $a$. Sur un ouvert $\mathrm{I}$ de $\mathbb{R}$, les seuls points où une fonction $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable peut atteindre un extremum local sont les points d'annulation de la dérivée. On a donc :
$$h_a'(0) = 0.$$

**b)** On en déduit, avec la question $3$ que :

$$\forall y \in \mathrm{E} \text{ tel que } \|y\| = 1,\ (a|f(y)) = \|a\|^2(a|y)$$

(on a dérivé $h_a$ et pris la valeur en $0$). $f$ étant symétrique, ceci sécrit aussi :

$$\forall y \in \mathrm{E} \text{ tel que } \|y\| = 1,\ (f(a)|y) = \|a\|^2(a|y).$$

Ainsi, $f(a) - \|a\|^2 a$ est orthogonal à tout vecteur unitaire et donc à tout vecteur (multiplier par un scalaire ne changera pas la nullité). Comme $\mathrm{E}^\perp = \{0\}$, on a prouvé que :

$$f(a) = \|a\|^2 a.$$

**c)** Il suffit alors de reprendre l'expression obtenue en question $3$. Le terme de degré $1$ est nul, le terme constant est égal à $\Phi(a)$ et on obtient :

$$\Phi(a+ty) - \Phi(a) = t^2[(t + 2(y|a))^2 + 2(\|a\|^2 - (y|f(y)))].$$

(pour tout $y$ unitaire).

**d)** Si $m(f)$ est atteint en $a$, pour tout $y$ unitaire, $(t + 2(y|a))^2 + 2(\|a\|^2 - (y|f(y)))$ reste positif et on a donc $\|a\|^2 - (y|f(y)) \geqslant 0$. On a aussi vu plus haut que $f(a) = \|a\|^2$.
Réciproquement, si ces relations ont lieu, $f(a) = \|a\|^2 a$ donne l'identité de 7.c et la seconde condition donne alors que $\Phi(a+ty) - \Phi(a)$ reste positif. Comme $ty$ décrit E quand $t$ décrit $\mathbb{R}$ et $y$ la sphère unité, $\Phi$ atteint donc son minimum $m(f)$ en $a$.

8. On suppose $\lambda_p \leqslant 0$.

   a) On a $(y|f(y)) \leqslant 0$ pour tout $y$ unitaire (question 6). 0 vérifie les deux conditions de 7.*d* et $m(f) = \Phi(0)$.

   Réciproquement, si $m(f) = \Phi(a)$ et, par l'absurde $a \neq 0$. $a$ est alors vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\|a\|^2 > 0$ ce qui est impossible (on a supposé $\lambda_p \leqslant 0$). On a donc $a = 0$.

   b) $f_A$ n'admettant que des valeurs propres négatives, $m(f_A) = \Phi(0) = N(f-u_0)^2 = N(f)^2$. Avec la question 5 (et commeles valeurs propres sont $-6, -6$ et $-3$) on a donc

$$m(f_A) = 6^2 + 6^2 + 3^2 = 81.$$

9. On suppose que $\lambda_p > 0$.

   a) Posons $a = \sqrt{\lambda_p} e_p$. On a $f(a) = \sqrt{\lambda_p}\lambda_p e_p = \|a\|^2 a$. De plus, pour tout $y$ de norme 1, on a $(y|f(y)) \leqslant \lambda_p = \|a\|^2$. On en déduit que :

$$m(f) = \Phi(a) = N(f)^2 - 2(a|f(a)) + \|a\|^4 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 - 2\lambda_p^2 + \lambda_p^2 = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2.$$

   b) On raisonne par analyse et synthèse.

   - Supposons $m(f) = \Phi(x)$. On a alors $\lambda_p = \alpha \leqslant \|x\|^2$ et $x$ est non nul. Comme de plus $f(x) = \|x\|^2 x$ et $x$ est donc vecteur propre de $f$. Il existe donc un $i$ tel que $f(x) = \lambda_i x$. $f(x) = \|x\|^2 x$ donne $\|x\| = \sqrt{\lambda_i}$ puis on en déduit que $\lambda_p = \alpha \leqslant \lambda_i$ ce qui entraîne $\lambda_i = \lambda_p$ (car les $\lambda_k$ sont ordonnés).
   - Réciproquement, supposons que $\|x\| = \sqrt{\lambda_p}$ et que $f(x) = \lambda_p x$. On a alors immédiatement $f(x) = \lambda_p x = \|x\|^2 x$. De plus, la question 6 indique que pour tout $y$ unitaire on a $(y|f(y)) \leqslant \lambda_p = \|x\|^2$. Ceci indique (question 7.*d*) que $m(f) = \Phi(x)$.

## Partie 3

1. M est une matrice stochastique symétrique.

   a) On a immédiatement que $(1, \dots, 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1 (multiplier M par ce vecteur revient à sommer toutes les colonnes).

   b) Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$\lambda x_k = (MX)_K = \sum_{j=1}^{p} m_{k,j} x_j.$$

   En passant à la valeur absolue et avec l'inégalité triangulaire,

$$|\lambda|.|x_k| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |m_{k,j}|.|x_j| \leqslant |x_k| \sum_{j=1}^{p} m_{k,j} = |x_k|.$$

   Comme $X \neq 0$ (vecteur propre), on a $|x_k| > 0$ et ainsi

$$|\lambda| \leqslant 1.$$

   c) On est dans la situation de la partie 2 avec $\lambda_p = 1$ (toutes les valeurs propres sont plus petites que 1 qui est valeur propre). D'après la question 2.9.*b*, un élément de norme 1 de $\ker(f - \mathrm{I}d_E)$ donne un vecteur où $\Phi$ atteint son minimum. On peut ainsi choisir :

$$a = \frac{1}{\sqrt{p}}(1, \dots, 1).$$

   d) On a alors :

$$m(f_M) = \Phi(a) = [N(f_M - u_a)]^2$$

   et l'endomorphisme $v = u_a$ convient.

   e) On a $v(x) = (x|a)a$ et comme $\|a\| = 1$, $v$ est la projection orthogonale sur vect$(a)$ (formule sur les projections dans une base orthonormale ).

**2.** B est de rang 1 et admet donc 0 comme valeur propre avec une multiplicité $n-1$ (elle est diagonalisable et son noyau est de dimension $n-1$). De plus $(1,\dots,1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre $p$. Les sous-espaces propres étant en somme directe, il n'y a que ces deux valeurs propres (et deux sous-espaces propres de dimensions $n-1$ et $p$). On est dans le cadre de la partie 2 avec $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$ et $\lambda_p = p$. On obtient :

$$m(f_{\mathrm{B}}) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = 0.$$

De plus, $b = (1,\dots,1)$ est un vecteur de norme $\sqrt{p}$ dans le noyau de $f_{\mathrm{B}} - p\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ et

$$m(f_{\mathrm{B}}) = \Phi(b) = [\mathrm{N}(f_{\mathrm{B}} - u_b)]^2.$$

**3. a)** $\mathrm{C} = \mathrm{B} - \mathrm{I}_p$ et ainsi (en notant $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$) :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{C}) = \{-1, p-1\},\ \mathrm{E}_{-1}(\mathrm{C}) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_1 - \varepsilon_p),\ \mathrm{E}_{p-1}(\mathrm{C}) = \mathrm{vect}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_p).$$

**b)** On a cette fois (comme $p > 1$, $\lambda_p = p-1 > 0$) :

$$m(f_{\mathrm{C}}) = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2 = p-1.$$

**c)** On cherche $c$ de norme $\sqrt{p-1}$ colinéaire à $(1,\dots,1)$, il suffit de choisir :

$$c = \sqrt{\frac{p-1}{p}}(1,\dots,1) \quad \text{et} \quad w = u_c$$

**d)** Supposons que $\mathrm{N}(f_c - u)^2 = m(f_{\mathrm{C}})$ avec $u \in \mathrm{T(E)}$. D'après la surjectivité de l'application $\varphi$ de la partie 1, il existe $x$ tel que $u = u_x$. On a alors $m(f_{\mathrm{C}}) = \Phi(x)$ et donc $\|x\| = \sqrt{p-1}$ avec $x \in \ker(f - (p-1)\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$. Comme cet espace est de dimension 1, il y a deux $x$ possibles qui sont opposés. Comme $u_x = u_{-x}$, on obtient un seul élément de $\mathrm{T(E)}$ possible et il y a unicité.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆