LES CLASSIQUES DE LA RÉDUCTION

n désigne un entier $\geqslant 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

PROBLÈME 1: Le polynôme caractéristique de AB et BA

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

1. Établir l'égalité quand $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. On note $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\chi_{J_rB} = \chi_{BJ_r}$. *Indication : Écrire B par bloc*
   (b) Déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
3. On considère les matrices carrées d'ordre $2n$ définies comme suit
$$M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que P est inversible et vérifier que $MP = PN$
   (b) Déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$
4. **Application :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer $\chi_{A\overline{A}} \in \mathbb{R}[X]$.

PROBLÈME 2: Diagonalisation simultanée

Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.

1. Justifier que les sous-espaces propres de u sont stables par v
2. Montrer que l'endomorphisme induit v_λ par v sur chaque sous-espace propre $E_\lambda(u)$ de u est diagonalisable
3. En déduire que u et v sont diagonalisables dans une même base
4. **Application :** On donne les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
   Montrer que A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage et déterminer cette matrice de passage
5. **Généralisation :** Soit , $u_1, \dots, u_m$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant tous les u_i.

PROBLÈME 3: Racines carrées d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle une racine carrée de A toue matrice $R \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $R^2 = A$.
On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, puis montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.
2. Soit S une racine carrée de D.
   (a) Montrer que $DS = SD$. En déduire que la matrice S est diagonale.
   (b) On note alors $S = diag(s_1, \dots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, \dots, n\}$?
   (c) Que peut-on dire de $Rac(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative ?
   (d) Si on suppose toutes les valeurs propres de A positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

3. Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).
4. **Application :** Ecrire toutes les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice P que l'on déterminera.

Extrait: CCP-Math2-MP-2005

Problème 4: Racines carrées de la matrice nulle

On cherche à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.
Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée de la matrice nulle. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f.

1. Comparer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ puis montrer que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$.
2. On suppose f non nul, donc $r \geqslant 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$ pour former une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note u_i le vecteur tel que $f(u_i) = e_i$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On notera M_r cette matrice.
4. Déterminer les racines carrées dans $M_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle.
5. **Application :** Déterminer dans $M_4(\mathbb{R})$, les racines carrées de la matrice nulle.

Extrait: CCP-Math2-MP-2005

Problème 5: Racines carrées de I_n

Soit R une racine carrée de l'unité I_n.

1. Vérifier que R est une matrice inversible.
2. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.
3. Déterminer les racines carrées de l'unité I_n. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Extrait: CCP-Math2-MP-2005

Problème 6: Le produit de Kronecker

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $A \otimes B \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB')$.
2. En déduire que $A \otimes B$ est inversible si, et seulement si, A et B sont inversibles.
3. Déterminer le spectre de $A \otimes B$.
4. En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A \otimes B$.

LES CLASSIQUES DE LA RÉDUCTION

Extrait: CCP-MP

PROBLÈME 7: Les matrices du rang 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathbf{rg}(A) = 1$

1. Montrer l'existence de deux vecteurs non nuls U et V de $\mathbb{K}^n$ telles que $A = U\,{}^tV$
2. Montrer que $A^2 = \text{tr(A)A}$ et déduire π_A.
3. En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si, $\text{tr(A)} \neq 0$
4. Montrer que si $\text{tr(A)} \neq 0$, alors A est semblable dans $M_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale $\mathbf{diag}(0, \ldots, 0, \text{tr(A)})$
5. On suppose que $\text{tr(A)} = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A.
   (a) Montrer que $U \in \text{Ker}(f)$ et justifier l'existence d'une base de $\text{Ker}(f)$ de la forme $(E_1, \ldots, E_{n-2}, U)$.
   (b) Soit $W = \dfrac{1}{{}^tVV}V$. Montrer que $(E_1, \ldots, E_{n-2}, U, W)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et écrire la matrice de f dans cette base.
   (c) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $M_n(\mathbb{K})$.

Extrait: CNC-Maths2-TSI-2007

PROBLÈME 8: Matrice stochastique

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement stochastique lorsque

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2,\ a_{i,j} > 0 \tag{1}$$

$$\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \tag{2}$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement stochastique

1. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AU et en déduire que 1 est valeur propre de A.
2. (a) Soient une matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$ et un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tel que $BX = 0$. Soit $k \in [|1,n|]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_i|,\ i \in [|1,n|]\}$. Justifier l'inégalité
   $$|b_{k,k}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |b_{k,j}|$$
   (b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En appliquant **??** à la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer que $|a_{k,k} - \lambda| \leqslant 1 - a_{k,k}$, où k est l'entier défini en **??**. En déduire $|\lambda| \leqslant 1$.
   (c) On suppose que $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déduire de l'inégalité $|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leqslant 1 - a_{k,k}$ de **??** que $\cos(\theta) = 1$, puis en déduire λ.
3. (a) Montrer que $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA)$. En comparant le rang de $A - I_n$ et celui de ${}^tA - I_n$, montrer que les sous-espaces $E_1(A)$ et $E_1({}^tA)$ ont même dimension.

LES CLASSIQUES DE LA RÉDUCTION

(b) Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $V \neq 0$, tel que ${}^tAV = V$. Montrer que pour tout $i \in [|1, n|]$, on a $|v_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$. En calculant $\sum_{i=1}^{n} |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$. Montrer que ${}^tA|V| = |V|$, puis que pour tout $i \in [|1, n|]$, on a $|v_i| > 0$.

(c) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $E_1({}^tA)$. En considérant la matrice $X - \dfrac{x_1}{y_1}Y$, déterminer la dimension de $E_1({}^tA)$. Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $E_1({}^tA)$, tel que pour tout $i \in [|1, n|]$, on ait $\omega_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Montrer que, pour tout $i \in [|1, n|]$, on a $\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$.

(d) **Bilan des propriétés spectrales de A et de ${}^tA$.**
Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de A et de ${}^tA$ qui ont été démontrées dans les questions précédentes

4. A l'aide la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ définie en **??**, on considère l'application N définie de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ N(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i|$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $N(AX) \leqslant N(X)$. Retrouver le résultat de **??** : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leqslant 1$.

5. A l'aide la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, on considère la forme linéaire $\Phi \ :\ \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$$

On note $\mathrm{Ker}(\Phi)$ le noyau de Φ.

(a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

(b) Justifier que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$.

(c) Soit $X \in E_\lambda(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

(d) En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la la valeur propre 1 de la matrice A.

Extrait: CCP-PSI-2012

Les classiques de la réduction

Problème 9: Commutant

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *commutant de* u l'ensemble $\mathcal{C}(u)$ des endomorphismes qui commutent avec u ; on a :

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u\}.$$

On suppose l'endomorphisme u diagonalisable.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ ses valeurs propres. On a :

$$E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u).$$

On pose $n_i = \dim E_{\lambda_i}(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On rappelle que la base $\mathcal{B}$ est dite adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$ s'il existe pour chaque entier i compris entre 1 et p, une base $(e_1^i, \ldots, e_{n_i}^i)$ du sous-espace vectoriel $E_{\lambda_i}(u)$ telle que $\mathcal{B} = \left(e_1^1, \ldots, e_{n_1}^1, e_1^2, \ldots, e_{n_2}^2, \ldots, e_1^p, \ldots, e_{n_p}^p\right)$.

1. Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$ alors les sous-espaces $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v.
2. Pour tout entier i compris entre 1 et p, on note u_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par u. Que peut-on dire de u_i ?
3. En déduire que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si, sur une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}(u)$:

$$Mat(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & V_p \end{pmatrix}$$

   avec $V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.
4. Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} n_i^2$.
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant n$.
6. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\dim \mathcal{C}(u) = n$.
7. Déterminons les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Extrait: MATHS 3 de E3A - 2002 - Filière MP

Problème 10: Crochet de Lie

Soit A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

On note $\beta_c = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Les classiques de la réduction

1. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
   On note $\beta = (c_1, \ldots, c_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur c_i. On note alors P la matrice de passage de la base β_c à la base β et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.
   Enfin, pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose :
   $$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$
   (a) Exprimer, pour tout couple (i,j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.
   (b) Démontrer que, pour tout couple (i,j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.
   (c) En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

On suppose dans la suite que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $(P_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i,j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

2. Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
   (a) Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de ${}^tA$.
   (c) Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$) tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \overline{z}Y$.
   En calculant $\phi_A\left(X{}^tY\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.
3. En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.
   On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.
4. Démontrer que, pour tout couple (i,j), on a : $AP_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})\, P_{i,j}X$.
5. Montrer que pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, l'application linéaire $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$, $M \longmapsto MX$ est surjective
6. En déduire que A est diagonalisable.

Extrait: CCP-MP-2012

Problème 11: Translations

Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$; on considère l'application, notée $\Phi_{A,B}$, suivante

$$\Phi_{A,B} : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX + XB \end{array} \right.$$

1. Soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre a et W un vecteur propre de ${}^tB$ associé à la valeur propre b. Montrer que la matrice $V{}^tW$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$; à quelle valeur propre est-il associé ?
2. Soit λ une valeur propre de $\Phi_{A,B}$ et $Y \in M_n(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$
   (b) En déduire que pour tout polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{K}$, $P(A)\,Y = YP(\lambda I_n - B)$.
   (c) On suppose que le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit
   $$\chi_A = \prod_{\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \mu)^{m_\mu}$$

i. Montrer que $Y\chi_A(\lambda I_n - B) = 0$ et en déduire que la matrice $\chi_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible.

ii. En déduire qu'il existe $a \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a) I_n - B$ ne soit pas inversible.

3. Conclure que si le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) + \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$
4. Soient $(Y_1, \cdots, Y_p)$ une famille libre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Z_1, \cdots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^{p} Y_i{}^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \cdots, Z_p$ sont tous nuls.
5. On suppose ici que les matrices A et B sont diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$ et on désigne par $(U_1, \cdots, U_n)$ et $(W_1, \cdots, W_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et ${}^tB$. En considérant la famille $\left(U_i{}^t W_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

Extrait: CNC-Math II-2006

Problème 12: Matrices réelles d'ordre 3 vérifiant $A^3 + A = 0$

Soit A une matrice réelle d'ordre 3 telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Vérifier que $u^3 + u = 0$ et que u n'est pas l'endomorphisme nul.
2. (a) On suppose que u est injectif ; montrer que $u^2 = -\mathrm{id}_E$ et trouver une contradiction.
   (b) Justifier alors que $\dim \mathrm{Ker} u \in \{1, 2\}$.
3. Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}u$ et $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E)$. Quelles sont alors les valeurs possibles de la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E)$?
4. On pose $F = \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E)$
   (a) Vérifier que F est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur F.
   (b) Vérifier que $v^2 = -\mathrm{id}_F$.
   (c) Préciser le déterminant de v^2 en fonction de la dimension de F et en déduire que $\dim F = 2$.
   (d) Montrer que l'endomorphisme v n'a aucune valeur propre réelle.
5. On considère un vecteur e'_1 non nul de $\mathrm{Ker}u$, un vecteur e'_2 non nul de F et on pose $e'_3 = u(e'_2)$.
   (a) Montrer que la famille (e'_2, e'_3) d'éléments de F est libre.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E et écrire la matrice B de u dans cette base.
   (c) Que peut-on alors dire des matrices A et B ?

Extrait: CNC-PSI-2006

Problème 13: Sous-espace caractéristique

On considère une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé. Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note :

- m_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, c'est à dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P.
- P_i le polynôme défini par $P_i(X) = (X - \lambda_i)^{m_i}$.
- F_i le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}((f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\mathrm{m_i}})$.

*** *** ***

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_i sont stables par f. On note f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i
2. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.
3. Exprimer le polynôme caractéristique de f à l'aide de ceux de f_i
4. Justifier que P_i est un polynôme annulateur de f_i et déduire le polynôme caractéristique de f_i à l'aide de $d_k = \dim F_k$
5. Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de f_i, puis comparer $\dim F_i$ et la multiplicité m_i

Extrait: Naval-1989

Problème 14: Endomorphismes cyclique

Soit f un endomorphisme cyclique de E, c'est-à-dire il existe un vecteur x_0 de E tel que : $E = \text{Vect}\big(f^k(x_0) \mid k \in \mathbb{N}\big)$

1. **Une base adaptée de E**

   On désigne par m le plus grand nombre entier naturel tel que :

   $$(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)) \text{ est libre et } (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^m(x_0)) \text{ est liée.}$$

   (a) Justifier l'existence d'un tel nombre entier naturel m, puis montrer par récurrence sur k que les vecteurs $f^{m+k}(x_0)$ appartiennent à $\mathbf{Vect}\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$.

   (b) En déduire que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0))$ est une base de E, puis que $m = n$.

   Dans toute la suite de ce problème, on convient de poser $f^n(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k f^k(x_0)$ et on désigne alors par P le polynôme de $K[X]$ défini par $P(X) = X^n - \sum_{k=1}^{n-1} p_k X^k$

2. **Matrice et polynôme annulateur de f**

   (a) Écrire la matrice M de f dans la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$.

   (b) Montrer que les n endomorphismes Id, f, f^2, $\ldots$, f^{n-1} sont indépendants, puis en déduire qu'il n'existe aucun polynôme Q non nul de degré strictement inférieur à n tel que $Q(f) = 0$.

   (c) Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(f) = f^n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k f^k$ des vecteurs de la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ puis en déduire que $P(f) = 0$.

3. **Caractérisation des endomorphismes cycliques diagonalisables**

   (a) On considère une valeur propre λ de f et un vecteur propre associé x.
   Calculer $f^k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que $P(\lambda) = 0$.

   (b) On considère une valeur propre λ de f. Déterminer le rang de l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$ à l'aide de sa matrice, puis en déduire la dimension du sous-espace propre associé à λ.

   (c) Établir que l'endomorphisme cyclique f est diagonalisable si et seulement s'il possède n valeurs propres distinctes.

4. **Étude du commutant de f lorsque f est cyclique**

   (a) Montrer que le commutant $C(f) = \{g \in L(\mathbb{C}^n) \mid g \circ f = f \circ g\}$ est une sous-algèbre de $L(\mathbb{C}^n)$.

   (b) Soient deux endomorphismes u et v appartenant à $C(f)$.
   Montrer, si $u(x_0) = v(x_0)$, que $u = v$.

   (c) Soit g un endomorphisme pour lequel on pose $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$.

   Montrer que si g appartient à $C(f)$ alors $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

(d) En déduire que le commutant $C(f)$ est de dimension n et démontrer qu'il admet pour base $(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.

Extrait: Epreuve commun-EPITA

Problème 15: Polynôme minimal en un vecteur

— E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

— π_f le polynôme minimal de f

— $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \ /P \in \mathbb{K}[X]\}$

— Pour $x \in E$, on pose $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(f)(x) = 0\}$ et $E_x = E_f(x) = \{ \ P(f)(x) \ / \in \mathbb{K}[X]\}$

*** *** ***

1. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_x \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $I_x = (\pi_x) = \pi_x \mathbb{K}[X]$
2. On pose $k = \deg(\pi_f)$ et $r = \deg(\pi_x)$
   (a) Vérifier que $r \leqslant k$
   (b) Montrer que E_x est un sous-espace vectoriel de E
   (c) Montrer que $\dim E_x = r$ et en donner une base
   (d) Montrer que $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et en donner une base
3. Soient x_1 et x_2 de deux éléments de E
   (a) On suppose que $E_{x_1} \cap E_{x_2} = \{0\}$, montrer que $\pi_{x_1+x_2} = ppcm(\pi_{x_1}, \pi_{x_2})$
   (b) On suppose que π_{x_1} et π_{x_2} sont premiers entre eux . Montrer que $E_{x_1+x_2} = E_{x_1} \oplus E_{x_2}$
4. Soient $x_1, x_2, ..., x_p$ des vecteurs de E
   (a) On suppose que $E_{x_1}, E_{x_2} \ , ..., E_{x_p}$ sont en somme directe . Montrer que :
   $$\pi_{x_1+x_2+...+x_p} = \mathbf{ppcm}\left(\pi_{x_1}, \pi_{x_2}, .., \pi_{x_p}\right)$$
   (b) On suppose que $\pi_{x_1}, \pi_{x_2} \ , ..., \pi_{x_p}$ sont deux à deux premiers entre eux . Montrer que :
   $$E_{x_1+x_2+...+x_p} = E_{x_1} \oplus E_{x_2} \oplus ... \oplus E_{x_p}$$
5. Soit P un facteur irréductible de π_f de multiplicité α
   (a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(P^\alpha(f))$. Montrer qu'il existe un entier $\alpha_x \leqslant \alpha$ tel que : $\pi_x = P^{\alpha_x}$
   (b) En déduire qu'il existe $x \in \mathrm{Ker}(P^\alpha(f))$ tel que $\pi_x = P^\alpha$

   Indication **:** *On pourra raisonner par l'absurde en supposant que* $\forall x \in Ker(P^\alpha(f))$ $, \alpha_x < \alpha$
6. En déduire qu'il existe $x \in E$ tel que : $\pi_x = \pi_f$

Extrait: Concours Commun 1996-ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD

LES CLASSIQUES DE LA RÉDUCTION

PROBLÈME 1: Le polynôme caractéristique de AB et BA

1. Les deux matrices $XI_n - AB$ et $XI_n - BA$ sont semblables
2. (a) On écrit $B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$ avec C matrice carrée d'ordre r. Alors, par un produit matriciel par blocs, on obtient
$$BJ_r = \begin{pmatrix} C & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_rB = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Les matrices $XI_n - BJ_r$ et $XI_n - J_rB$ sont triangulaires par blocs, alors
$$\begin{aligned} \chi_{BJ_r}(X) &= \det(XI_n - BJ_r) \\ &= \begin{vmatrix} XI_r - C & 0 \\ -E & XI_{n-r} \end{vmatrix} = X^{n-r}\chi_C(X) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \chi_{J_rB}(X) &= \det(XI_n - J_rB) \\ &= \begin{vmatrix} XI_r - C & -D \\ 0 & XI_{n-r} \end{vmatrix} = X^{n-r}\chi_C(X) \end{aligned}$$
D'où l'égalité

(b) Dans le cas général, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec $r = \mathbf{rg}(A)$ et P, Q inversibles.
$$\chi_{AB}(X) = \chi_{Q^{-1}ABQ}(X) = \chi_{J_rPBQ}(X)$$
donc
$$\chi_{AB}(X) = \chi_{PBQJ_r}(X) = \chi_{BQJ_rP}(X) = X^p\chi_{BA}(X)$$
3. On note $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$

(a) On a $\det(P) = 1$, donc P est inversible. Par un produit matriciel par blocs
$$MP = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$PN = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(b) M et N sont semblables, donc elles ont le même déterminant. Et puisque
$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \det(XI_{2n} - M) \\ &= \begin{vmatrix} XI_n - BA & B \\ 0 & XI_n \end{vmatrix} = X^n\chi_{BA}(X) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \chi_N(X) &= \det(XI_{2n} - N) \\ &= \begin{vmatrix} XI_n & B \\ 0 & XI_n - AB \end{vmatrix} = X^n\chi_{AB}(X) \end{aligned}$$
Donc $X^n\chi_{AB}(X) = X^n\chi_{BA}(X)$, puis $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

4. **Application :** On a $\chi_{A\overline{A}}(X) = \det\left(XI_n - A\overline{A}\right)$, donc en conjuguant
$$\overline{\chi_{A\overline{A}}}(X) = \det\left(XI_n - \overline{A}A\right) = \chi_{\overline{A}A}(X)$$
Or pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, on obtient donc $\overline{\chi_{A\overline{A}}} = \chi_{A\overline{A}}$ et par conséquent $\chi_{A\overline{A}} \in \mathbb{R}[X]$

Les classiques de la réduction

Problème 2: Diagonalisation simultanée

1. u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre
2. L'endomorphisme induit d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable
3. Posons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$, m_i l'ordre de multiplicité de λ_i, $E_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id_E})$, $\mathcal{B}_i$ base de E_i et $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{m_1}} & & & (0) \\ & \boxed{\lambda_2 I_{m_2}} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{\lambda_p I_{m_p}} \end{pmatrix}$$

Or pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'endomorphisme v_{λ_i} est diagonalisable, donc il existe une base $\mathcal{C}_i$ de E_i pour laquelle $D_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(v_{\lambda_i})$ est diagonale. Soit finalement $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{C}_i$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & & (0) \\ & \boxed{D_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{D_p} \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $\mathcal{C}$ est une base de diagonalisation de u et v.

4. Soit u et v respectivement les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B.
   - On a $AB = BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, donc $uv = vu$
   - $\chi_A = X^2(X-3)$ est scindé et $\dim E_0(A) = 3 - \mathbf{rg}(A) = 2 = m(0)$, donc u est diagonalisable
   - $\chi_B = (X-1)(X-4)^2$ est scindé et $\dim E_4(B) = 3 - \mathbf{rg}(B - 4I_3) = 2 = m(4)$, donc v est diagonalisable

   D'après ce qui précède u et v sont codiagonalisables
   - On a $E_0(u) = \mathbf{Vect}(c_1 = (-1, 1, 0), c_2 = (1, 0, 1))$ et $E_3(u) = \mathbf{Vect}(c_3 = (-1, -1, 1))$
   - $v(c_1) = 7c_1 + 6c_2$, $v(c_2) = -3c_1 - 2c_2$ et $v(c_3) = 4c_3$, donc

   $$\underset{\mathcal{C}}{\mathrm{Mat}}(v) = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \quad \text{où} \quad \mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$$

   On note v_0 la restriction de v sur $E_0(u)$, alors $\underset{(c_1,c_2)}{\mathrm{Mat}}(v_0) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $\chi_{v_0} = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$. Les sous-espaces propres de v_0 sont $E_1(v_0) = \mathbf{Vect}(c_1 + 2c_2 = (1, 1, 2))$ et $E_4(v_0) = \mathbf{Vect}(c_1 + c_2 = (0, 1, 1))$
   - Soit $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (-1, -1, 1)$. On a bien (v_1, v_2, v_3) est une base et

   $$\underset{(v_1,v_2,v_3)}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underset{(v_1,v_2,v_3)}{\mathrm{Mat}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP = \mathbf{diag}(0, 0, 3)$ et $P^{-1}BP = \mathbf{diag}(1, 4, 4)$

5. On procède par récurrence sur m. Précisément, on prouve pour $m \geqslant 1$ la propriété suivante :

   $\mathcal{P}_m$: Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, pour toute famille de m endomorphismes de E, $u_1, \dots, u_m$, diagonalisables et commutant deux à deux, il existe une base diagonalisant tous les u_i.

   La propriété est vraie pour $m = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour $m - 1$, et prouvons-la au rang m. Soit λ une valeur propre de u_1, et E_λ le sous-espace propre associé. Alors $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda I_E)$ est stable par chaque u_i, pour $i \geqslant 2$, puisque u_i commute avec u_1. Notons $v_{i,\lambda}$ la restriction de u_i à E_λ. Alors on a une famille de $m - 1$ endomorphismes de E_λ, $v_{2,\lambda}, \dots, v_{m,\lambda}$ qui commutent, et qui sont diagonalisables (rappelons que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable reste diagonalisable). Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de E_λ qui diagonalise chaque $v_{i,\lambda}$, pour $i \geqslant 2$. Elle diagonalise aussi $v_{1,\lambda}$ puisque $v_{1,\lambda} = \lambda I_{E_\lambda}$. Il suffit alors de réunir les bases $\mathcal{B}_\lambda$, pour λ décrivant l'ensemble des valeurs propres de u_1, pour obtenir une base de E qui diagonalise tous les u_i.

Problème 3: Racines carrées d'une matrice

1. Les sous espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$ sont de dimension $\geqslant 1$ et en somme directe. Leur somme a donc une dimension au moins égale à n. Comme elle est incluse dans $\mathbb{R}^n$, sa dimension est en réalité égale à n et chaque $E_{\lambda_i}(A)$ a une dimension égale à 1. Notons (f_i) une base de $E_{\lambda_i}(A)$. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Si P est la matrice de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ aux f_i alors $P^{-1}AP$ est la matrice dans la base (f_i) de l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par choix des f_i, cette matrice est $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et on a donc

   $$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

   Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$ et $S = P^{-1}RP$. On a $R^2 = A$ si et seulement si $P^{-1}R^2P = D$ (il y a équivalence car on revient en arrière en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite) c'est à dire $S^2 = D$. On peut donc écrire

   $$Rac(A) = P.Rac(D).P^{-1}$$

2. (a) On a $SD = S^3 = DS$. On fait le produit matriciel pour obtenir

   $$\forall i, j,\ S_{i,j}\lambda_j = \sum_{k=1}^{n} S_{i,k}D_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} D_{i,k}S_{k,j} = \lambda_i S_{i,j}$$

   Les λ_k étant deux à deux distincts, on a donc

   $$\forall i \neq j,\ S_{i,j} = 0$$

   et S est diagonale.

   (b) On a alors $S^2 = diag(s_1^2, \dots, s_n^2)$. Comme $S^2 = D$, on a donc

   $$\forall i,\ s_i^2 = \lambda_i$$

   (c) Si il existe un i tel que $\lambda_i < 0$, les relations précédentes sont impossible et donc

   $$Rac(A) = \emptyset$$

   (d) Si tous les λ_i sont positifs, on vient de voir que

   $$Rac(D) \subset \{diag(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}) /\ \forall i,\ \varepsilon_i = \pm 1\}$$

   Réciproquement, si $S = diag(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n})$ (où $\varepsilon_i = \pm 1$) alors $S^2 = D$. L'inclusion ci-dessus est une égalité.

3. L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est une bijection de $Rac(A)$ dans $Rac(D)$.

   — Si $\lambda_1 < 0$, on a vu en 2.d que $Rac(A) = \emptyset$. Il n'y a donc pas de racine carrée pour A.

— Si $\lambda_1 \geqslant 0$ alors une racine carrée de D est connue par le choix des ε_i et

$$Rac(A) = \{P.diag(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}).P^{-1} /\ \forall i,\ \varepsilon_i = \pm 1\}$$

Deux choix différents des ε_i donneront deux racines carrées distinctes de D sauf dans le cas où $\lambda_1 = 0$. On a donc

$$Card(Rac(A)) = 2^{n-1} \text{ si } \lambda_1 = 0$$

$$Card(Rac(A)) = 2^{n} \text{ si } \lambda_1 > 0$$

4. $(0, 1, 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 0. $(1, 1, -1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1. Avec la trace, on voit que la dernière valeur propre est 16. Une résolution de système montre que $(2, -1, 1)$ est vecteur propre associé. On pose donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $P^{-1}AP = diag(0, 1, 16)$. A admet quatre racines carrées qui sont

$$P.diag(0, 1, 4).P^{-1},\ P.diag(0, -1, 4).P^{-1},\ P.diag(0, 1, -4).P^{-1},\ P.diag(0, -1, -4).P^{-1}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/3 & -5/3 & 5/3 \\ -5/3 & 1/3 & -1/3 \\ 5/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7/3 & 5/3 & -5/3 \\ 5/3 & -1/3 & 1/3 \\ -5/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque bien sûr que les matrices sont deux à deux opposées.

Problème 4: Racines carrées de la matrice nulle

1. L'hypothèse $R^2 = 0$ se traduit par $f \circ f = 0$ et donc par

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

Or, le théorème du rang indique que $r + dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$. Comme $dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant r$, on a donc

$$r \leqslant \frac{n}{2}$$

2. La famille $\mathcal{B}$ ayant n éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice pour conclure que c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Supposons donc que

$$(*)\ :\ \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i = 0$$

Avec les notations de l'énoncé, ceci s'écrit

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(u_i) + \sum_{i=r+1}^{n-r} e_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i = 0$$

En composant par f, on obtient (avec $f^2 = 0$ et $f(e_i) = 0$ si $i \in \{r+1, \dots, n-r\}$)

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i e_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i f(u_i) = 0$$

Comme $(e_1, \dots, e_r)$ est libre, les β_i sont nuls. En reportant dans $(*)$ et comme $(e_1, \dots, e_{n-r})$ est libre, les α_i sont aussi nuls. Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre et c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

Les classiques de la réduction

3. Par choix des vecteurs de $\mathcal{B}$, on a (définition par blocs)

$$M_r = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Si R est une racine carrée de 0 alors soit $R = 0$ soit il existe une matrice inversible P et un entier $r \in [[1, E\left(\frac{n}{2}\right)]]$ telle que $R = PM_rP^{-1}$.
   Réciproquement, la matrice nulle est une racine carrée de 0 et si $r \leqslant \dfrac{n}{2}$, un produit par blocs montre que $M_r^2 = 0$ et donc $(PM_rP^{-1})^2 = PM_r^2P^{-1} = 0$. Ainsi,

$$Rac(0) = \{PM_rP^{-1}/\ P \in GL_n(\mathbb{R}),\ r \in [\![1, E\,(n/2)]\!]\} \cup \{0\}$$

5. Dans le cas $n = 4$, les racines carrées de 0 sont 0 et les matrices semblables à l'une des deux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problème 5: Racines carrées de l'unité

1. L'hypothèse $R^2 = I_n$ montre que R est une involution, elle est donc inversible.
2. $X^2 - 1$ est un polynôme qui annule R. Comme il est scindé à racines simples, R est diagonalisable. En outre, les valeurs propres de R sont racines de $X^2 - 1$ et ne peuvent valoir que 1 ou -1. Ainsi, R est semblable à une matrice diagonale où les coefficients diagonaux valent 1 ou -1.
3. Ce qui précède montre que

$$Rac(I_n) \subset \left\{P.diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n).P^{-1}/\ P \in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall i,\ \varepsilon_i \in \{-1, +1\}\right\}$$

   Réciproquement $D = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ verifie $D^2 = I_n$ quand les ε_k valent 1 ou -1 et $(PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = I_n$.
   L'inclusion précédente est donc une égalité.

Problème 6: Le produit de Kronecker

1. Les deux matrices sont carrées d'ordre n^2. Le bloc de position (i, j) dans $(A \otimes B)(A' \otimes B')$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} B a'_{kj} B' = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{kj}\right) BB'$$

   En outre le bloc de position de (i, j) dans $(AA') \otimes (BB')$ vaut $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a'_{kj}\right) BB'$. D'où l'égalité demandée
2. Si A et B sont inversibles alors $(A \otimes B)\left(A^{-1} \otimes B^{-1}\right) = I_n \otimes I_n = I_{n^2}$ donc $A \otimes B$ est inversible.
   Si A n'est pas inversible alors il existe A' tel que $AA' = O_n$ et alors $(A \otimes B)(A' \otimes I_n) = 0$ avec $A' \otimes I_n \neq 0$ donc $A \otimes B$ n'est pas inversible.
   Un raisonnement semblable s'applique dans le cas où B n'est pas inversible.
3. Il existe P, Q matrices inversibles telles que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

avec λ_i et μ_i les valeurs propres de A et B. On observe que que

$$\left(P^{-1}\otimes Q^{-1}\right)(A\otimes B)(P\otimes Q)=\left(P^{-1}AP\right)\otimes\left(Q^{-1}BQ\right)$$

qui est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_i\mu_j$. Les valeurs propres de $A\otimes B$ sont les produits des valeurs propres de A et B

4. On note que $P^{-1}\otimes Q^{-1}=(P\otimes Q)^{-1}$ de sorte que $A\otimes B$ est semblable à la matrice triangulaire précédente et donc

$$\chi_{A\otimes B}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(X-\lambda_i\mu_j)$$

On en déduit $\det(A\otimes B)=(\det A\det B)^n$ et la relation $\mathrm{tr(A\otimes B)}=\mathrm{tr\,(A)\,tr\,(B)}$

Problème 7: Les matrices du rang 1

1. $\mathbf{rg}A\neq 0$, donc au moins une colonne $C_{i_0}\neq 0$. Or $\dim\mathbf{Vect}(C_1,\cdots,C_n)=\mathbf{rg}A=1$, donc toutes les colonnes sont proportionnelles. Soit $U=C_{i_0}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, on a : $a_{i,j}$ est le i-ème coefficient de $C_j=\lambda_jX$, donc $a_{i,j}=\lambda_jx_i$, d'où $A=U^tV$ avec $V=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ non nul.

2. $A^2=U\left({}^tVU\right)^tV={}^tVU.U^tV=\mathrm{Tr}\,(A)\,U^tV=\mathrm{Tr}\,(A)\,A$.
Le polynôme $X^2-\mathrm{Tr}\,(A)\,X$ est un polynôme annulateur de A, donc π_A divise $X^2-\mathrm{Tr}\,(A)\,X$. La matrice A n'est pas scalaire car $\mathbf{rg}(A)=1$, donc $\pi_A=X^2-\mathrm{Tr}\,(A)\,X=X\,(X-\mathrm{Tr}\,(A))$

3. A est diagonalisable si, et seulement si, π_A est scindé à racines simples. Or $\pi_A=X\,(X-\mathrm{Tr}\,(A))$ est scindé à racines simples si, et seulement, si $\mathrm{Tr}\,(A)\neq 0$

4. Si $\mathrm{tr(A)}\neq 0$ les sous-espaces propres de A sont supplementaires dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable et donc semblable à la matrice $diag(0,\cdots,0,\mathrm{tr(A)})$ car $\dim\mathrm{Ker}A=n-1$ et $\dim\mathrm{Ker}(A-\mathrm{Tr}\,(A)\,I_n)=1$.

5. (a) On a $AU=U^tVU={}^tVUU=\mathrm{tr(A)U}=0$, donc $U\in\mathrm{Ker}f$, qu'on complète par $(E_1,\cdots,E_{n-2})$ pour avoir $(E_1,\cdots,E_{n-2},U)$ base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) $\mathbf{Card}\,(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}=\{E_1,\cdots,E_{n-2},U,W\}=n=\dim M_{n,1}(\mathbb{K})$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.
   Supposons que $\lambda_1E_1+\cdots+\lambda_{n-2}E_{n-2}+\lambda_{n-1}U+\lambda_nW=0$, on multiplie par A à gauche et on tient compte que $E_1,\cdots,E_{n-2},U\in\mathrm{Ker}f=\mathrm{Ker}A$, donc $0=\lambda_nAW=\lambda_nU$, or $U\neq 0$, donc $\lambda_n=0$, d'où $\lambda_1E_1+\cdots+\lambda_{n-2}E_{n-2}+\lambda_{n-1}U=0$, or la famille $(E_1,\cdots,E_{n-2},U)$ est libre car base de $\mathrm{Ker}f$, donc $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.
   on a $f(E_1)=\cdots=f(E_{n-1})=f(U)=0$ car $(E_1,\cdots,E_{n-2},W)$ base de $\mathrm{Ker}f$, d'autre part $f(W)=AW=U$, donc

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\,(f)=\left(\begin{array}{ccc|cc}0&\cdots&0&0&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&0\\ \hline 0&\cdots&0&0&1\\ 0&\cdots&0&0&0\end{array}\right)=J$$

   qui est semblable à $A=\underset{\mathcal{B}_0}{\mathrm{Mat}}\,(f)$, où $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$
   (c) D'aprés la question précédente toute matrice de rang 1 est de trace nulle est semblable à J, dont toutes ces matrices sont semblables entre elles.

Problème 8: Matrice stochastique

LES CLASSIQUES DE LA RÉDUCTION

1. La i-ième coordonnée de AU est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}u_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ d'après (2). On en déduit que

$$AU = U$$

c'est à dire que U est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 (U étant non nul).

2. (a) Comme $BX = 0$, sa k-ième coordonnée est nulle $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}x_j = 0$ ce qui donne

$$b_{k,k}x_k = -\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} b_{k,j}x_j$$

L'inégalité triangulaire donne (avec la définition de k)

$$|b_{k,k}||x_k| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |b_{k,j}||x_j| \leqslant |x_k| \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |b_{k,j}|$$

Comme $|x_k| > 0$ (X n'est pas nul), on en déduit l'inégalité demandée.

(b) $B = A - \lambda I_n$ est bien non inversible (puisque λ est valeur propre) et la question précédente donne (les coefficients non diagonaux de B étant ceux de A)

$$|a_{k,k} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|$$

Avec la propriété ($ST > 0$) on a donc

$$|a_{k,k} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} a_{k,j} - a_{k,k} = 1 - a_{k,k}$$

Avec la seconde forme de l'inégalité triangulaire, on en déduit que $|\lambda| - a_{k,k} \leqslant 1 - a_{k,k}$ et donc que

$$|\lambda| \leqslant 1$$

(c) Si $|\lambda| = 1$, on a égalité ci-dessus et on doit donc avoir égalité dans l'inégalité triangulaire c'est à dire avoir $1 - a_{k,k} = |\lambda| - a_{k,k} = |\lambda - a_{k,k}| = |e^{i\theta} - a_{k,k}|$. En élevant cette identité au caré, on obtient après simplification $-2a_{k,k} = -2\cos(\theta)a_{k,k}$. Comme $a_{k,k} \neq 0$, on a $\cos(\theta) = 1$ et donc

$$\lambda = 1$$

3. (a) Le déterminant est invariant par transposition et donc A et ${}^tA$ ont mêmes valeurs propres (puisque même polynôme caractéristique). En particulier, $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA)$.
Le rang est aussi invariant par transposition (le rang d'une matrice est égal au rang de ses colonnes ou de ses lignes). Les images de $A - I_n$ et de ${}^tA - I_n$ ont donc même dimension. Par théorème du rang, on a alors

$$\dim(E_1(A)) = n - \mathrm{rg}(A - I_n) = n - \mathrm{rg}({}^tA - I_n) = \dim(E_1({}^tA))$$

(b) La i-ième coordonnée de ${}^tAV$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}v_j$. Elle vaut aussi v_i (car ${}^tAV = V$). Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|v_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}v_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{j,i}v_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$$

En sommant ces inégalités, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|v_j| \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\right)$$

Avec la propriété (2), cette ingéalité est une égalité. Toutes les inégalités intermédiaires sont donc aussi (par exemple par l'absurde) des égalité. On a donc

$$\forall i,\ |v_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$$

Ceci signifie exactement que ${}^tA|V| = |V|$ (pour tout i, les deux vecteurs ont même i-ième coordonnée). Si, par l'absurde, il existait un i tel que $|v_i| = 0$ alors on aurait $0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|v_j|$ ce qui donnerait la nullité pour tout j de $a_{i,j}|v_j|$ (une somme de suantité positives n'est nulle que si toutes les quantités sont nulles) et donc de tous les v_j (propriété (1)). Ceci contredit $V \neq 0$. Ainsi

$$\forall i,\ |v_i| > 0$$

(c) Y étant un élément non nul de $E_1({}^tA)$, on a $\forall i,\ y_i \neq 0$. On peut en particulier poser $Z = X - \frac{x_1}{y_1}Y$. C'est un élément de $E_1({}^tA)$ dont la première coordonnée est nulle. Avec la question précédente (en contraposant), c'est donc le vecteur nul. X est donc multiple de Y et

$$\dim(E_1({}^tA)) = 1$$

Soit V un vecteur non nul de $E_1({}^tA)$ et $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}|V|$. Ω est un élément de $E_1({}^tA)$ (question **??**) dont les coordonnées sont > 0 à somme égale à 1.
Ω est le seul élément ayant ces propriétés car tout autre élément de $E_1({}^tA)$ est multiple de Ω (et la somme des coordonnées est multiple dans le même rapport).
Enfin, ${}^tA\Omega = \Omega$ s'écrit

$$\forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$$

(d) Les valeurs propres de A sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus, $E_1(A)$ est de dimension 1 et une base en est $(1, \dots, 1)$.
Les valeurs propres de ${}^tA$ sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus, $E_1({}^tA)$ est de dimension 1 et les coordonnées d'un vecteur propres sont toutes > 0 ou toutes < 0.

4. N est positive, vérifie l'axiome de séparation ($N(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ car les ω_i sont > 0), est homogène ($N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$) et vérifie l'inégalité triangulaire ($N(X+Y) \leqslant N(X) + N(Y)$ est conséquence de l'ingéalité triangulaire dans $\mathbb{C}$). N est donc une norme.

Posons $Y = AX$; on a $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$ et donc (avec la dernière égalité de **??**)

$$N(AX) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i a_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\omega_i\right)|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\omega_j|x_j| = N(X)$$

Si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, on a donc $|\lambda|N(X) = N(\lambda X) = N(AX) \leqslant N(X)$ et donc (puisque $N(X) > 0$, X étant non nul) $|\lambda| \leqslant 1$. On retrouve

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{z/\ |z| \leqslant 1\}$$

5. (a) Le même calcul que ci-dessus (mais sans les modules et donc avec des égalités) donne immédiatement $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

(b) Si $X \in \mathrm{Ker}(\Phi) \cap E_1(A)$ alors $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et $\Phi(X) = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X = \lambda U$ et $0 = \Phi(X) = \Phi(\lambda U) = \lambda\sum\omega_i = \lambda$. Donc $X = 0$. $E_1(A)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi)$ sont ainsi en somme directe.
Par ailleurs, $\dim(E_1(A)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) = n-1$ (le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan). La somme de ces dimensions est égale à la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Des deux arguments précédents, on tire

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A)\bigoplus \mathrm{Ker}(\Phi)$$

(c) On suppose $AX = \lambda X$ et $\lambda \neq 1$. On a alors $\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda\Phi(X)$. $\lambda \neq 1$ indique que $\Phi(X) = 0$ c'est à dire que $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

(d) Soit f l'endomrophisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. montre que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est stable par f (si $\Phi(X) = 0$ alors $\Phi(AX) = 0$). $E_1(A)$ est aussi stable par f. Dans une base adaptée à la décomposition de **??**, la matrice de f est bloc-diagonale du type $\mathrm{diag}(1, B)$. Si 1 était valeur propre de B alors $E_1(A)$ serait de dimension ≥ 2 (on aurait deux vecteurs propres de f indépendants, l'un étant dans $E_1(A)$ et l'autre dans $\mathrm{Ker}(\Phi)$) ce qui est exclus. 1 n'est donc pas racine de χ_B. Or $\chi_f = (1 - X)\chi_B$ (déterminant diagonal par blocs) et 1 est donc racine simple de χ_f. Finalement, la valeur propre 1 est de multiplicité 1.

Problème 9: Commutant

1. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$ et $x \in E_{\lambda_i}(u)$. Ainsi $u(x) = \lambda_i.x$.
   D'une part, $v\big(u(x)\big) = v(\lambda_i.x) = \lambda_i.v(x)$, d'autre part, $v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big)$.
   Donc $u\big(v(x)\big) = \lambda_i.v(x)$, ce qui montre que $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$.
   Donc tous les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont stables par v.
2. On sait d'autre part que chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par u, ce qui autorise à considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur $E_{\lambda_i}(u)$. u_i n'est autre que l'homothétie de rapport λ_i de $E_{\lambda_i}(u)$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.
   — Si $v \in \mathcal{C}(u)$, comme chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v, on sait que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale par blocs de la forme
   $$B = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & V_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$$
   — Réciproquement, supposons que $B = \mathrm{Mat}(v)$ soit de la forme
   $$B = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & V_p \end{pmatrix} \quad \text{avec } V_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$$
   $\mathcal{B}$ étant en particulier une base de vecteurs propres de u, alors $A = \mathrm{Mat}u$ est diagonale et on peut la décomposer en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_p \end{pmatrix}$ avec $D_i = \lambda_i.I_{n_i}$ (puisque u_i est une homothétie).
   Comme $\forall\, i \in [\![1;p]\!]$, $D_i\, V_i = (\lambda_i.I_{n_i})\, V_i = V_i\, (\lambda_i.I_{n_i}) = V_i\, D_i$, alors $A\,B = B\,A$, donc $u \circ v = v \circ u$, d'où $v \in \mathcal{C}(u)$.
4. Par l'isomorphisme $v \longmapsto \mathrm{Mat}v$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $M_n(\mathbb{C})$, on obtient que $\mathcal{C}(v)$ a la même dimension que le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices ayant la forme de B.
   Ces matrices dépendent de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i^2$ coefficients arbitraires, donc peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i^2$ matrices $E_{j,k}$ de la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$. Donc $\dim \mathcal{C}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i^2$.

Les classiques de la réduction

5. Comme $\forall i \in [\![1;p]\!],\ n_i^2 \geqslant n_i,$ alors $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant \sum_{i=1}^{p} n_i = \dim E = n$ (en effet u étant diagonalisable, n est égal à la somme des dimensions des sous-espaces propres de u).
6. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. L'endomorphisme u de E représenté dans la base $\mathbb{B}$ par la matrice M de la partie **0** est tel que $\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{C}(M) = n$.
7. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Pour $M \in M_3(\mathbb{R})$ on pose v l'endomorphisme canoniquement associé à M. Alors
$$v \in \mathcal{C}(u) \Longleftrightarrow M \in (A)$$
On a $\chi_u = (1-X)^2(4-X)$, donc $\mathrm{Sp}\,(u) = \{1,4\}$
   — $E_u(4) = \mathbf{Vect}(\varepsilon_1)$, avec $\varepsilon_1 = (1,-1,1)$
   — $E_u(1) = \mathbf{Vect}(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, avec $\varepsilon_2 = (1,1,0)$ et $\varepsilon_3 = (0,1,1)$

   La famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Donc V commute avec u, si et seulement si, $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ où $\lambda, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

   Notons $P = \mathrm{P}_B^{\mathcal{B}'}$. Ainsi, les matrices commutant avec A sont
$$M = PM'P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \lambda+2a-b & -\lambda+a+b & \lambda-a+2b \\ -\lambda+2a+2c-b-d & \lambda+a+c+b+d & -\lambda-a-c+2b+2d \\ \lambda+2c-d & -\lambda+c+d & \lambda-c+2d \end{pmatrix}$$

Problème 10: Crochet de Lie

1. (a) On a $D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}$, donc
$$DE_{i,j} - E_{i,j}D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}E_{i,j} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{i,j}E_{k,k} = \lambda_i Ei,j - \lambda_j E_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j)\, E_{i,j}$$
   (b) Comme $D = P^{-1}AP$, alors $DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)\, E_{i,j}$ s'écrit $P^{-1}APE_{i,j} - E_{i,j}P^{-1}AP = (\lambda_i - \lambda_j)\, E_{i,j}$ et en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, il vient $AB_{i,j} - B_{i,j}A = (\lambda_i - \lambda_j)\, B_{i,j}$. Pour tout couple (i,j) le vecteur $B_{i,j}$ est non nul, donc il est propre à ϕ_A associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$
   (c) La famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ et l'application $M \longmapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $M_n(\mathbb{R})$, les n^2 matrices $B_{i,j}$ forment une base de $M_n(\mathbb{R})$. Ainsi il existe une base de vecteurs propres de ϕ_A, donc il est diagonalisable
2. (a) ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme réel, donc toutes ses valeurs propres sont réelles.
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $\det(A - zI_n) = \det\left({}^t(A - zI_n)\right) = \det({}^tA - zI_n)$, donc $\det(A - zI_n) = 0$ si et seulement si $\det({}^tA - zI_n) = 0$. Ainsi si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de ${}^tA$.
   (c) On a :
$$\phi_A\left(X^tY\right) = AX^tY - X^tYA = zX^tY - \overline{z}X^tY = (z - \overline{z})\, X^tY$$
Le vecteur $X^tY \neq 0$, car $X^tY = 0 \Rightarrow {}^t\overline{X}XY = 0 \Rightarrow \|\, X\,\|^2\, Y = 0$ mais $X \neq 0$, donc le réel positif $\|\, X\,\| \neq 0$, en conséquence $Y = 0$, ce qui absurde, d'où $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.

3. Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$, donc χ_A admet au moins une racine z dans $\mathbb{C}$. De la question précédente on déduit que $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z) \in \mathrm{Sp}\left(\phi_A\right) \subset \mathbb{R}$, donc $\mathrm{Im}(z) = 0$. On en déduit que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.
4. Soit (i, j) un couple, alors

$$\begin{aligned} AP_{i,j}X &= P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X \\ &= \lambda P_{i,j}X + \lambda_{i,j}P_{i,j}X \\ &= \underbrace{(\lambda + \lambda_{i,j})}_{=\mu_{i,j}}P_{i,j}X \end{aligned}$$

5. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, l'application $E \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$, $M \longmapsto MX$ est clairement linéaire. Soit $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, comme $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est non nulle , alors il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. Soit M la matrice dont la i_0-ème colonne vaut $\dfrac{1}{x_{i_0}}Y$ et dont toutes les autres colonnes sont nulles , on a bien $MX = Y$
6. Soit X un vecteur propre de A et $\left(P_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de diagonalisation de ϕ_A et posons $Y_{i,j} = P_{i,i}X$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$. D'après la surjection précédente $\left(P_{i,j}X\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est génératrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont on peut y extraire une base β. Une telle base est constituée de vecteurs propres de A. Donc A est diagonalisable

PROBLÈME 11: Translations

1. On a $AV = aV,^t BW = bW$ donc $AV = av,^t WB = b^tW$ $\Phi_{A,B}(V^tW) = AV^tW + V^tWB = (a + b)V^tW$, or $V^tW \neq 0$ donc V^tW est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre $a + b$.
2. (a) Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
   Le résultat est évidemnt vrai pour $k = 0$. NB $M^0 = I_n \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Supposons maintenant $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$ et montrons que $A^{k+1}Y = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$. On a d'abord $\Phi_{A,B} = \lambda Y$, donc $AY + YB = \lambda Y$ et on trouve $AY = Y(\lambda I_n - B)$. Donc $A^{k+1}Y = AA^kY = AY(\lambda I_n - B)^k = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$.

   (b) Soit un polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{K}$, et de degré d, donc $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_kX^k$, et donc $P(A)Y = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_kA^kY = \sum_{k=0}^{d} a_kY(\lambda I_n - B)^k = Y\sum_{k=0}^{d} a_k(\lambda I_n - B)^k = YP(\lambda I_n - B)$.

   (c) i. D'aprés le théorème de *Cayley-Hamilton*, $\chi_A(A) = 0$ donc $Y\chi_A(\lambda I_n - B) = 0$ notons $S = \chi_A(\lambda I_n - B)$). Si S était inversible $YS = 0 \Longrightarrow YSS^{-1} = Y = 0$ ce qui est impossible puisque Y est un vecteur propre, donc la matrice $\chi_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible .

   ii. Il est clair que si un produit de matrices n'est pas inversible alors l'une au moins des matrices intervenant dans ce produit n'est pas inversible.
   Or $\chi_A(\lambda I_n - B) = \displaystyle\prod_{\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} ((\lambda - \mu)I_n - B)^{m_\mu}$ n'est pas inversible donc $\exists \mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $((\lambda - \mu)I_n - B)^{m_\mu}$ n'est pas inversible et donc $\exists \mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $(\lambda - \mu)I_n - B$ n'est pas inversible .En prenant $a = \mu$ on peut en déduire qu'il existe $a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible .
3. Si le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors :
   $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}\left(\Phi_{A,B}\right) \Longrightarrow \exists a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible c'est à dire $\det((\lambda - a)I_n - B) = 0$ et donc $\lambda - a \in Sp_{\mathbb{K}}(B)$ donc $\exists b \in Sp_{\mathbb{K}}(B)$ tel que $\lambda - a = b$ d'où $\lambda = a + b$ or $a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ d'où $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$ et on conclut que $Sp_{\mathbb{K}}\left(\Phi_{A,B}\right) \subset Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$.
   Inversement, d'aprés la question **??** on voit que $Sp_{\mathbb{K}}\left(\Phi_{A,B}\right) \supset Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$. D'où l'égalité.

4. Supposons que $\sum_{i=1}^{p} Y_i {}^t Z_i = 0$, on multiplie cette égalité à droite par un $\overline{Z}_j$ où $1 \leqslant j \leqslant n$ fixe, mais quelconque d'où $\sum_{i=1}^{p} a_i Y_i = 0$ où $a_i = {}^t Z_i \overline{Z} j$, or $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les a_i sont tous nuls en particulier $a_j = {}^t Z_j \overline{Z}_j = \|Z_j\|_2 = 0$ et donc $Z_j = 0 \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant n$.
La réciproques est bien evidente.
5. La famille $(U_i^t W_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est formée par des vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$, pour montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable il suffit de montrer que c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ or il est de cardinal n^2 égal à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il suffit donc de montrrer qu'elle est libre.
En effet $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} U_i^t W_j = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} U_i {}^t Z_i = 0$ où $Z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} W_j$ d'aprés la question précédente $Z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} W_j = 0 \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ or $(W_j)_{1 \leqslant j \leqslant n})$ est aussi libre donc
$a_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leqslant i,j \leqslant n$.

PROBLÈME 12: Matrices réelles d'ordre 3 vérifiant $A^3 + A = 0$

1. On a $A^3 + A = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}} \left(u^3 + u\right)$ et $A = \underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}\,(u)$, donc $u^3 + u = 0$ et $u \neq 0$
2. (a) u injectif donc bijectif car endomorphisme en dimension finie, donc A inversible, en multipliant l'égalité $A^3 + A = 0$ par A^{-1}, on en déduit que $A^2 = -I_3$, d'où $u^2 = -id_E$. Donc $\det(u^2) = \det(-id_E)$, d'où $\det(u)^2 = -1$, impossible car $\det u \in \mathbb{R}$.
   (b) u n'est pas injective et u non nul, donc $\{0\} \subsetneq \text{Ker} u \subsetneq \mathbb{R}^3$, d'où $\dim \text{Ker} u \in \{1, 2\}$.
3. Le polynôme $X^3 + X = X\left(X^2 + 1\right)$ est annulateur de u et $X \wedge \left(X^2 + 1\right) = 1$, donc, d'après le lemme des noyaux $E = \text{Ker} u \bigoplus \text{Ker}(u^2 + id_E)$. Comme $\dim E = 3$ et $\dim \text{Ker} u \in \{1, 2\}$, alors $\dim \text{Ker}(u^2 + id_E) \in \{1, 2\}$.
4. (a) L'endomorphisme $u^2 + \mathrm{Id_E}$ est un polynôme en u, donc $F = \text{Ker}(u^2 + id_E)$ est stable par u
   (b) Soit $x \in F = \text{Ker}(u^2 + id_E)$ on a $v^2(x) = u^2(x) = -x = -\mathrm{Id_F(x)}$, donc $v^2 = -id_F$.
   (c) Posons $r = \dim F$, donc $\det\left(v^2\right) = (-1)^r$, or $\det(v^2) = (\det v)^2 \geqslant 0$, d'où r est pair avec $r \in \{1, 2\}$, donc $r = 2$.
   (d) Le polynôme $X^2 + 1$ est annulateur de v, donc $\text{Sp}_C\,(v) \subset \text{Rac}(X^2 + 1) = \emptyset$, donc v n'admet pas de valeur propre réelle
5. (a) **Card**$\{e_2', e_3'\} = 2 = \dim F$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Supposons que $\alpha e_2' + \beta e_3' = 0$. Si $\alpha \neq 0$, $u(e_2') = -\frac{\beta}{\alpha} e_2'$, alors v admet une valeur propre. Absurde, donc on a forcément $\alpha = 0$, puis $\beta u(e_2') = 0$. De même si $\beta \neq 0$, alors $u(e_2') = 0$, ce qui montre que $e_2' \in \text{Ker} u \cap F = \{0\}$. Absurde, donc $\alpha = \beta = 0$.
   (b) $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ base de E, car $E = \text{Ker} u \bigoplus F$. De plus $u(e_1') = 0, u(e_2') = e_3', u(e_3') = u^2(e_2') = -e_2'$, d'où
$$\underset{\mathcal{B}'}{\text{Mat}}\,(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (c) A et B sont semblables car elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

PROBLÈME 13: Sous-espaces caractéristiques

1. L'endomorphisme $(f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\mathrm{m_I}}$ est un polynôme en f, donc f et $(f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\mathrm{m_I}}$ commutent, donc le noyau de l'un est stable par l'autre. En particulier $F_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\mathrm{m_i}}$ est stable par f.

Les classiques de la réduction

2. Les polynômes $(X-\lambda_i)^{m_i}$, pour $i \in [\![1,r]\!]$, sont deux à deux premiers entre eux ; le théorème de décomposition des noyaux permet donc de conclure que $\mathrm{Ker}\,(\chi_f(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, avec $\chi_f(f) = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton ; donc $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$

3. l'endomorphisme stabilise les sous-espaces F_i, donc la matrice de f, relativement à une base $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$ adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, est diagonale par blocs,
$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\,(f) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & (0) \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$
Avec $A_i = \underset{\mathcal{B}_i}{\mathrm{Mat}}\,(f_i)$. Alors, $\chi_f = \prod_{i=1}^{r} \chi_{f_i}$

4. Soit $x \in F_i = \mathrm{Ker}((f-\lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\mathrm{m_i}})$, alors $(f_i - \lambda_i \mathrm{Id_{F_i}})^{\mathrm{m_i}}(\mathrm{x}) = 0$, donc $(f_i - \lambda_i \mathrm{Id_{F_i}})^{\mathrm{m_i}} = 0$, ceci montre que P_i est annulateur de f_i.
En conséquence $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\,(f_i) \subset \{\lambda_i\}$, avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\,(f_i) \neq \emptyset$, il vient que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\,(f_i) = \{\lambda_i\}$, puis $\chi_{f_i} = (X-\lambda_i)^{d_i}$ où $d_i = \dim F_i$

5. D'après la question 3, on a bien $\chi_f = \prod_{i=1}^{r} \chi_{f_i} = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{d_i}$ et d'autre part $\chi_f = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$. Par unicité de la décomposition, on a bien $d_i = \alpha_i$ et donc $P_i = \chi_{f_i}$

Problème 14: Endomorphisme cyclique

1. **Une base adaptée de E**

   (a) On peut remarquer que $x_0 \neq 0$ car sinon $E = \mathbf{Vect}(f^k(0)) = \mathbf{Vect}(0) = \{0\}$, ce qui contredit l'hypothèse $\dim(E) \geqslant 2$.
   La famille (x_0) est donc libre . Par contre pour $m \geqslant n$ la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{m}$ est de cardinal $\geqslant n+1$ en dimension n . Elle est donc liée.
   Dans la suite $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{0}, \left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{1} \cdots \left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{n}$ on passe donc au moins une fois d'une famille libre à une famille liée.
   L'ensemble des m tels que $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{m-1}$ soit libre et $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{m}$ soit lié , est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$, majoré par n. Il admet un plus grand élément.
   On montre alors par récurrence que pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{m+k}(x_0) \in \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$:

   — si $k=0$: On sait que $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m}$ est lié . Il existe une combinaison linéaire $\sum_{i=0}^{m} a_i f^i(x_0) = 0$ avec $(a_i)_{i=0}^{m} \neq (0)$
   Si $a_m = 0$ on a comme $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$ est libre $\forall i \in 0m-1,\ a_i = 0$:ABSURDE
   donc $a_m \neq 0$ et $f^m(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} -\dfrac{a_i}{a_m} f^i(x_0)$. Donc pour $k=0$ $f^{m+0}(x_0) \in \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$

   — On suppose $f^{m+k}(x_0) \in \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$, il existe donc des scalaires b_i tels que $f^{m+k}(x_0) =$

Les classiques de la réduction

$\sum_{i=0}^{m-1} b_i f^i(x_0)$ (les b_i dépendent aussi de k) . On a alors

$$f^{m+k+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i f^{i+1}(x_0) = \sum_{j=1}^{m-1} b_{j-1} f^j(x_0) + b_{m-1} f^m(x_0) = b_{m-1}\left(-\frac{a_0}{a_m}\right) f^0(x_0) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(b_{j-1} - b_{m-1}\frac{a_{m-1}}{a_m}\right) f^j(x_0)$$

et donc $f^{m+k+1}(x_0) \in \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$

— par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{m+k}(x_0) \in \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$

(b) Par définition de m la famille est libre .
Elle est aussi génératrice car $E = \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}} = \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$ d'après le **a)** en effet :

— $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1} \subset \left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ donc $\mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1} \subset \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}}$

— Si $x \in \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}}$, il existe un entier p et des scalaires q_i tel que $x = \sum_{i=0}^{p} q_i f^i(x_0)$ .On a donc une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$. Donc un élément de $\mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$: $\mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{Vect}\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$

La famille est libre et génératrice .C'est donc une base de E . elle est donc de cardinal n .Donc $m = n$

$$\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1} \text{ est une base de } E \text{ et } m = n$$

2. **Matrice et polynôme annulateur de f**

(a) pour $i < n-1$, l'image du $i-$ème vecteur de base est le $(i+1)-$ème . La $i-$ème colonne de M est donc une colonne de 0 sauf ligne $i+1$ où il y a un 1 . L'image du dernier vecteur de base est $f^m(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x_0)$.
On a donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1} \end{pmatrix} , \quad m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j+1 \\ p_{i-1} \text{ si } j = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(b) On montre que $\left(f^k\right)_{k=0}^{n-1}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$:
Soit $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i = O$ (en notant O le neutre de $\mathcal{L}(E)$). Si on prend l'image de x_0 par cette relation on trouve $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0) = 0$. Mais $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{n-1}$ est une base de E : $\forall i$, $a_i = 0$

$$\left(f^k\right)_{k=0}^{n-1} \text{ est une famille libre de } \mathcal{L}(E)$$

S'il existe un polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n-1} q_k X^k$ non nul de degré $< n$ tel que $Q(f) = 0$. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} q_k f^k = O$, donc la famille $\left(f^k\right)_{k=0}^{n-1}$ est liée

(c) On a par définition des notations $P(f)(x_0) = f^n(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x_0) = 0$.
Donc pour tous $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$P(f)(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^{i+k}(x_0) = f^k\left(f^n(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x_0)\right) = f^k(0) = 0$$

L'endomorphisme $P(f)$ est nul sur une base, donc il est nul, donc $P(f) = 0$

LES CLASSIQUES DE LA RÉDUCTION

3. **Caractérisation des endomorphismes cycliques diagonalisables**

(a) Par une récurrence classique on a $f^k(x) = \lambda^k x$. Donc $P(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \lambda^i x = P(\lambda)x$. Avec $x \neq 0$ alors $P(\lambda) = 0$

(b) La matrice de $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$ est $M - \lambda \mathrm{I_n}$ soit

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

— λ est valeur propre donc le rang $M - \lambda \mathrm{I_n}$ est $\leqslant n-1$.

— La sous-diagonale de $M - \lambda \mathrm{I_n}$ montre que le rang est $\geqslant n-1$

— Donc le rang de $M - \lambda \mathrm{I_n}$ est $n-1$ et donc la dimension du noyau est 1 .

Le sous espace propre est de dimension 1

(c) $\Rightarrow$) S'il existe n valeurs propres distinctes en dimension n, l'endomorphisme est toujours diagonalisable.

$\Leftarrow$) Soit f cyclique , diagonalisable , il existe donc une base de vecteurs propres . Supposons (par l'absurde) qu'il existe dans cette base deux vecteurs distincts b_i et b_j associés à la même valeur propre λ.On a alors $b_i \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})$ et $b_j \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})$, donc le plan $\mathbf{Vect}(b_i, b_j) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})$ .Ce qui contredit le résultat de **??**. Donc il y a autant de valeurs propres distinctes que de vecteurs de base .f admet n valeurs propres distinctes.

4. **Étude du commutant de f lorsque f est cyclique**

(a) — $C(f)$ est un sous ensemble de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$

— $C(f)$ contient $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$

— $C(f)$ est stable par combinaison linéaire : si $g \circ f = f \circ g$ et $h \circ f = f \circ h$ alors pour tous scalaires λ, μ :

$$\begin{aligned} (\lambda g + \mu h) \circ f &= \lambda(g \circ f) + \mu (h \circ f) = \lambda(f \circ g) + \mu (f \circ h) \\ &= f \circ (\lambda g) + f \circ (\mu h) = f \circ (\lambda g + \mu h) \end{aligned}$$

— $C(f)$ est stable par produit interne ($\circ$) :si $g \circ f = f \circ g$ et $h \circ f = f \circ h$:

$$(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Donc $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$

(b) On suppose $u \circ f = f \circ u$, $v \circ f = f \circ v$ et $u(x_0) = v(x_0)$ .On montre par récurrence que u et v sont égaux sur la base $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{n-1}$, donc que $u = v$.

— pour $k = 0$, rien à démontrer.

— Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. Supposons que $u(f^k(x_0)) = v\left(f^k\left(x_0\right)\right)$, alors

$$\begin{aligned} u(f^{k+1}(x_0)) &= (u \circ f)\left(f^k(x_0)\right) = (f \circ u)\left(f^k(x_0)\right) = f\left(u\left(f^k(x_0)\right)\right) \\ &= f\left(v\left(f^k(x_0)\right)\right) = (f \circ v)\left(f^k(x_0)\right) = (v \circ f)\left(f^k(x_0)\right) = v\left(f^{k+1}\left(x_0\right)\right) \end{aligned}$$

Récurrence achevée

Les deux endomorphisme u et v coïncident sur une base, donc ils sont égaux

(c) Remarquons que les $(a_i)_{i=0}^{n-1}$ existent car on décompose dans une base.

On prend alors $u = g$ et $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$. Comme tout polynôme en f commute avec f alors $v \in C(f)$ et si $u = g \in C(f)$, on a $u(x_0) = v(x_0)$. On a donc d'après le **a)** $u = v$ donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$

(d) On vient de montrer que tout élément de $C(f)$ est dan $\mathbf{Vect}(f^k)_{k=0}^{n-1}$, et on a déjà utilisé que tout élément de $\mathbf{Vect}(f^k)_{k=0}^{n-1}$ est dans $C(f)$. Donc $C(f) = \mathbf{Vect}\left(f^k\right)_{k=0}^{n-1}$.
D'après la question **??** cette famille est libre . C'est donc une base de $C(f)$. Bref $C(f)$ est un sous espace vectoriel de dimension n

Problème 15: Polynôme minimal en un vecteur

1. On va montrer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \ / \ P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

   — On a $I_x \neq \emptyset$ (Car contient le polynôme nul)
   — Pour tout $(P,Q) \in I_x^2$, alors $(P-Q)(f)(x) = P(f)(x) - Q(f)(x) = 0$ donc $P - Q \in I_x$.
   — Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in I_x$, on a
   $(PQ)(f)(x) = P(f) \circ Q(f)(x) = P(f)(Q(f)(x)) = P(f)(0) = 0$ donc $PQ \in I_x$

   I_x est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ car il contient π_f, donc il existe un unique polynôme unitaire $\pi_x \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$I_x = (\pi_x) = \pi_x \mathbb{K}[X]$$

2. (a) On a $\pi_f(f) = 0$ donc $\pi_f(f)(x) = 0$ et, par suite, $\pi_f \in I_x = (\pi_x)$. Par définition de l'idéal π_x divise π_f, donc $r = \deg(\pi_x) \leqslant \deg(\pi_f) = k$

   (b) — Pour $P = 0$, on a $P(f)(x) = 0$ donc $0 \in E_x$
   — Si $y_1 = P_1(f)(x)$ et $y_2 = P_2(f)(x)$ sont deux éléments de E_x et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda y_1 + y_2 = (\lambda P_1 + P_2)(f)(x) \in E_x$.
   Donc E_x est un sous-espace vectoriel de E

   (c) Soit $y \in E_x$ alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(f)(x)$
   A l'aide de la division euclidienne il existe $(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que
$$P = Q\pi_x + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(\pi_x) = r$$
   Par suite $y = P(f)(x) = Q(f) \circ \pi_x(f)(x) + R(f)(x) = R(f)(x)$ (car $\pi_x(f)(x) = 0$)
   Posons $R = \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k$, on a alors $y = R(f)(x) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k f^k(x) \in Vect\left\{x, f(x), ..., f^{r-1}(x)\right\}$
   Ainsi $\left\{x, f(x), ..., f^{r-1}(x)\right\}$ est génératrice de E_x . On va montrer qu'elle est libre
   Soit $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f^k(x) = 0$
   Posons $P = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k X^k$. On a $P(f)(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k f^k(x) = 0$ donc $P \in I_x$ par suite π_x divise P
   Or $\deg(P) < \deg(\pi_x)$ donc $P = 0$. On en déduit que $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_{r-1} = 0$.
   Ainsi $\mathcal{B} = \left\{x, f(x), ..., f^{r-1}(x)\right\}$ est une base de E_x . Par suite $\dim E_x = r$.

   (d) $id_E \in \mathbb{K}[f]$ de plus si $h, g \in \mathbb{K}[f]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $h = P(f)$ et $g = Q(f)$ alors
$$\lambda h + g = (\lambda P + Q)(f) \in \mathbb{K}[f] \text{ et } h \circ g = (PQ)(f) \in \mathbb{K}[f]$$
   donc $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

   La famille $\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{k-1}\right)$ est libre car s'il existe des scalaires $a_0, \cdots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{k-1} a_i f^i = 0$, alors le polynôme $Q = \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i$ est annulateur de f, donc il est divisible par π_f. Or les polynômes non nuls

annulateurs de f sont de degré supérieur ou égal à k, donc $Q=0$, puis $a_0=\cdots=a_{k-1}=0$.
Il est évident que $\mathbf{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{k-1}\right) \subset \mathbb{K}[f]$. Inversement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$, en effectuant la division euclidienne de P par π_f il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} P = Q\pi_f + R \\ \deg(R) < \deg(\pi_f) \end{cases}$, alors $P(f) = R(f)$ car $\pi_f(f) = 0$ et $R(f) \in \mathbf{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{k-1}\right)$, donc $\mathbb{K}[f] \subset \mathbf{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{k-1}\right)$. Ceci montre que $\mathbb{K}[f] = \mathbf{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{k-1}\right)$ et que $\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{k-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[f]$ et $\dim \mathbb{K}\left[f\right] = k = \deg\left(\pi_f\right)$

3. Soient x_1 et x_2 de deux éléments de E

   (a) Posons $P = \mathbf{ppcm}\left(\pi_{x_1}, \pi_{x_2}\right)$, on a π_{x_1} et π_{x_2} divisent P donc $P\left(f\right)\left(x_1\right) = P\left(f\right)\left(x_1\right) = 0$
   On a alors $P\left(f\right)\left(x_1+x_2\right) = P\left(f\right)\left(x_1\right) + P\left(f\right)\left(x_2\right) = 0$ donc $\pi_{x_1+x_2}$ divise P

   D'autre part $\pi_{x_1+x_2}\left(f\right)\left(x_1+x_2\right) = 0$ donc

$$\underbrace{\pi_{x_1+x_2}\left(f\right)\left(x_1\right)}_{\in E_{x_1}} = \underbrace{-\pi_{x_1+x_2}\left(f\right)\left(x_2\right)}_{\in E_{x_2}} \in E_{x_1} \cap E_{x_2} = \{0\}$$

   Donc $\pi_{x_1+x_2}\left(f\right)\left(x_1\right) = \pi_{x_1+x_2}\left(f\right)\left(x_2\right) = 0$ par suite π_{x_1} et π_{x_2} divisent $\pi_{x_1+x_2}$
   On en déduit que $P = \mathbf{ppcm}\left(\pi_{x_1}, \pi_{x_2}\right)$ divise $\pi_{x_1+x_2}$. Enfin les deux polynômes $\mathbf{ppcm}\left(\pi_{x_1}, \pi_{x_2}\right)$ et $\pi_{x_1+x_2}$ sont associés et unitaires, donc ils sont égaux

   (b) Supposons que π_{x_1} et π_{x_2} sont premiers entre eux .
   D'après le théorème de Bezout , il existe $(P,Q) \in \left(\mathbb{K}\left[X\right]\right)^2$ tel que $(*) : P\pi_{x_1} + Q\pi_{x_2} = 1$
   Donc $id_E = P\left(f\right) \circ \pi_{x_1}\left(f\right) + Q\left(f\right) \circ \pi_{x_2}\left(f\right)$.

   — Vérifions d'abord que $E_{x_1} \subset E_{x_1+x_2}$. Soit $y \in E_{x_1}$, il existe $U_1 \in \mathbb{K}\left[X\right]$ tel que : $y = U_1\left(f\right)\left(x_1\right)$. Mais $U_1 = U_1 P\pi_{x_1} + U_1 Q\pi_{x_2}$, soit $U_1(f) = U_1(f) \circ P(f) \circ \pi_{x_1}(f) + U_1(f) \circ Q(f) \circ \pi_{x_2}(f)$

$$\begin{aligned} y &= U_1\left(f\right)\left(x_1\right) \\ &= \underbrace{U_1(f) \circ P(f) \circ \pi_{x_1}(f)(x_1)}_{=0} + U_1(f) \circ Q(f) \circ \pi_{x_2}(f)(x_1) \\ &= U_1(f) \circ Q(f) \circ \pi_{x_2}(f)(x_1) + \underbrace{U_1(f) \circ Q(f) \circ \pi_{x_2}(f)(x_2)}_{=0} \\ &= U_1(f) \circ Q(f) \circ \pi_{x_2}(f)(x_1+x_2) \in E_{x_1+x_2} \end{aligned}$$

   De même on montre que $E_{x_2} \subset E_{x_1+x_2}$

   — Si $y \in E_{x_1} \cap E_{x_2}$ alors il existe $S_1, S_2 \in \mathbb{K}\left[X\right]$ tel que $y = S_1\left(f\right)\left(x_1\right) = S_2\left(f\right)\left(x_2\right)$.
   On a alors

$$\begin{aligned} y &= P\left(f\right) \circ \pi_{x_1}\left(f\right)\left(y\right) + Q\left(f\right) \circ \pi_{x_2}\left(f\right)\left(y\right) \\ &= P\left(f\right) \circ \pi_{x_1}\left(f\right) \circ S_1(f)(x_1) + Q\left(f\right) \circ \pi_{x_2}\left(f\right) \circ S_2(f)(x_2) \\ &= P\left(f\right) \circ S_1(f) \circ \pi_{x_1}\left(f\right)\left(x_1\right) + Q\left(f\right) \circ S_2(f) \circ \pi_{x_2}\left(f\right)\left(x_2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $E_{x_1} \cap E_{x_2} = \{0\}$.

   — Soit $y \in E_{x_1+x_2}$, il existe $P \in \mathbb{K}\left[X\right]$ tel que $y = P\left(f\right)\left(x_1+x_2\right) = P\left(f\right)\left(x_1\right) + P\left(f\right)\left(x_2\right) \in E_{x_1} + E_{x_2}$

   On en déduit que $E_{x_1+x_2} = E_{x_1} \bigoplus E_{x_2}$

4. *Généralisation :* Soient $x_1, x_2, ..., x_p$ des vecteurs de E

   (a) Supposons que E_{x_1}, E_{x_2} , ..., E_{x_p} sont en somme directe .
   Posons $P = \mathbf{ppcm}\left(\pi_{x_1}, \pi_{x_2}, .., \pi_{x_p}\right)$ on a pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $P\left(f\right)\left(x_i\right) = 0$
   Donc $P\left(f\right)\left(x_1+x_2+...+x_p\right) = P\left(f\right)\left(x_1\right) + ... + P\left(f\right)\left(x_p\right) = 0$ par suite $\pi_{x_1+x_2+...+x_p}$ divise P .

Les classiques de la réduction

D'autre part , on a $\pi_{x_1+x_2+...+x_p}(x_1+x_2+...+x_p)=0$ donc $\sum_{i=1}^{p}\underbrace{\pi_{x_1+x_2+...+x_p}(f)(x_i)}_{\in E_{x_i}}=0$

La somme $E_{x_1}+E_{x_2}+....+E_{x_p}$ étant directe , donc

$$\pi_{x_1+x_2+...+x_p}(f)(x_1)=...=\pi_{x_1+x_2+...+x_p}(f)(x_p)=0$$

On en déduit que , pour tout $i\in\{1,2,...,p\}$, π_{x_i} divise $\pi_{x_1+x_2+...+x_p}$

Par conséquent $P=\mathbf{ppcm}\left(\pi_{x_1},\pi_{x_2},..,\pi_{x_p}\right)$ divise $\pi_{x_1+x_2+...+x_p}$.

(b) Par récurrence sur p .

— Pour $p=2$ c'est déjà établi

— Soit $p\leqslant 3$. Supposons la propriété vraie pour $p-1$.
On a $E_{x_1}+E_{x_2}+...+E_{x_{p-1}}=E_{x_1+x_2+...+x_{p-1}}$ de plus $\pi_{x_1+x_2+...+x_{p-1}}=\mathbf{ppcm}\left(\pi_{x_1},\pi_{x_2},..,\pi_{x_{p-1}}\right)$
Comme π_{x_p} est premier avec π_{x_i} pour $1\leqslant i\leqslant p-1$ donc π_{x_p} est premier avec $\pi_{x_1+x_2+...+x_{p-1}}=\mathbf{ppcm}\left(\pi_{x_1},\pi_{x_2},..,\pi_{x_{p-1}}\right)$
Par suite la somme $\left(E_{x_1}+E_{x_2}+...+E_{x_{p-1}}\right)+E_{x_p}$ est directe .
Et comme $E_{x_1}+E_{x_2}+...+E_{x_{p-1}}$ est une somme directe (hypothèse de récurrence)
Donc

$$E_{x_1+x_2+...+x_p}=\bigoplus_{i=1}^{p}E_{x_i}$$

5. Soit P un facteur irréductible de π_f de multiplicité α

(a) Soit $x\in\operatorname{Ker}(P^\alpha(f))$. On a $P^\alpha(f)(x)=0$ donc π_x divise P^α
Comme P est irréductible , alors les diviseurs de P^α sont de la forme P^k avec $k\leqslant\alpha$.
En particulier il existe un entier $\alpha_x\leqslant\alpha$ tel que : $\pi_x=P^{\alpha_x}$

(b) Supposons que $\forall x\in\operatorname{Ker}(P^\alpha(f))$, $\alpha_x<\alpha$. Soit $\beta=\max\{\alpha_x\ /x\in\operatorname{Ker}(P^\alpha(f))\}$
On a $\beta<\alpha$, pour tout $x\in\operatorname{Ker}(P^\alpha(f))$, on a $P^\beta(f)(x)=P^{\beta-\alpha_x}(f)\circ P^{\alpha_x}(f)(x)=0$
Donc $P^\beta(f)(x)=0$ pour tout $x\in\operatorname{Ker}(P^\alpha(f))$. On en déduit que $\operatorname{Ker}(P^\alpha(f))=\operatorname{Ker}\left(P^\beta(f)\right)$
Posons $\pi_f=P^\alpha Q$ avec P et Q premiers entre eux . Soit $R=P^\beta Q$
On a

$$E=\operatorname{Ker}(P^\alpha(f))\bigoplus\operatorname{Ker}(Q(f))=\operatorname{Ker}\left(P^\beta(f)\right)\bigoplus\operatorname{Ker}(Q(f))$$

Pour $x\in E$, $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in\operatorname{Ker}P^\beta(f)$ et $x_2\in\operatorname{Ker}Q(f)$, donc

$$R(f)(x)=R(f)(x_1)+R(f)(x_2)=Q(f)\circ P^\beta(f)(x_1)+P^\beta(f)\circ Q(f)(x_2)=0$$

Par suite $R(f)(x)=0$ pour tout $x\in E$.
On en déduit que $R(f)=0$ et donc π_f divise R ce qui est absurde .

6. Soit $\pi_f=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}...P_m^{\alpha_m}$ la décomposition en produit de facteurs irréductibles de π_f .
D'après la question précédente , on a pour tout $i\in\{1,2,...,m\}$, il existe $x_i\in\operatorname{Ker}(P_i^{\alpha_i}(f))$ tel que : $P_i^{\alpha_i}(f)=\pi_{x_i}$
D'autre part $\pi_{x_1},\pi_{x_2},...,\pi_{x_m}$ sont deux à deux premiers entre eux , donc

$$\pi_{x_1+x_2+...+x_p}=\mathbf{ppcm}\left(\pi_{x_1},\pi_{x_2},..,\pi_{x_p}\right)=\pi_{x_1}\times\pi_{x_2}\times..\times\pi_{x_p}=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}...P_m^{\alpha_m}=\pi_f$$