DNS

Sujet

Corde

I. Solution de l'équation d'onde de Le Rond d'Alembert

L'onde de déplacement transversal le long d'une corde tendue $\Psi(x,t)$ vérifie l'équation d'onde de Le Rond d'Alembert $\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}=0$ avec $c=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où T désigne la norme de la tension de la corde et μ la masse linéique de la corde.

1. Déterminer de deux façons différentes la dimension de c . Quelle est la signification physique de cette grandeur ?
2. La solution peut s'écrire sous la forme $\Psi(x,t)=f(t-\frac{x}{c})+g(t+\frac{x}{c})$. Vérifier que toute fonction de la forme $f=f(t-\frac{x}{c})$ est solution de cette équation. Idem pour une fonction $g=g(t+\frac{x}{c})$. Justifier que chacune de ces deux solutions correspond à une onde progressive.
3. On peut aussi chercher les solutions sous forme à variables séparées. On pose alors $\Psi(x,t)=f(x)\times g(t)$ (par commodité, on a adopté ici les notations f et g mais ces fonctions n'ont rien à voir avec les fonctions f et g précédentes). On justifiera soigneusement que si $F(x)=G(t)\,\forall x,t$, ces fonctions sont égales à une même constante. Physiquement la solution doit rester finie pour $t\rightarrow\pm\infty$ .Montrer que $f(x)$ et $g(t)$ vérifient chacune une équation différentielle du second ordre dont les solutions (non demandées ici) sont des fonctions sinusoïdales. On introduira une pulsation ω et on posera $k=\frac{\omega}{c}$.
4. On adopte ici une approche différente indépendamment de l'approche précédente. On cherche des solutions sinusoïdales et on travaille en complexes. On pose donc $\underline{\Psi}(x,t)=\underline{\Psi}(x)\ \exp(j\ \omega\ t)$.

- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\Psi}(x)$. On posera $k=\frac{\omega}{c}$.

- Montrer, en écrivant la solution avec des exponentielles complexes, que l'on retrouve une somme de deux ondes progressives pour la solution. (Remarque: prendre des constantes complexes pour les constantes d'intégration: $\underline{A}=A\exp(j\varphi_A)$ et $\underline{B}=B\exp(j\varphi_B)$). Écrire la solution en réel obtenue.

- Montrer, en écrivant la solution directement avec des fonctions trigonométriques, que l'on retrouve une somme de deux ondes stationnaires pour la solution. Écrire la solution en réel obtenue.

II. Coefficient de réflexion d'une onde

Une onde transversale sinusoïdale incidente $\underline{\Psi_i}(x,t)=\Psi_o \ \exp j(\omega t-kx)$ se propage sur une corde selon l'axe Ox dans le sens positif.

A. Premier cas

En $x=L$, l'extrémité de la corde étant fixée, l'onde se réfléchit. On écrit l'onde totale sous la forme $\underline{\Psi}(x,t)=\Psi_o \ \exp j(\omega t-kx)+\underline{\Psi_r} \ \exp j(\omega t+kx)$ où $\underline{\Psi_r}$ est inconnu.

5. Déterminer $\underline{\Psi_r}$ et en déduire le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r}$, défini comme le rapport des amplitudes complexes (juste après) sur (juste avant) la réflexion.
6. Écrire la solution en réel obtenue $\Psi(x,t)$.
7. Quelle est l'amplitude A de l'onde résultante en fonction de x . Que peut-on dire des nœuds et des ventres ?
8. Tracer la courbe donnant $\frac{A}{\Psi_o}$ en fonction de x .

B. Deuxième cas

Autre situation: en fait en $x=L$ la corde est reliée à une autre corde de nature différente. Le coefficient de réflexion $\underline{r}$ est supposé connu et vaut $\underline{r}=r\exp(j\alpha)$.

9. Déterminer l'amplitude A de l'onde résultante sur la corde étudiée en fonction de x (on rappelle que pour un nombre complexe $\underline{z}$, on a $|\underline{z}|^2=\underline{z}\,\underline{z}^*$ où $\underline{z}^*$ désigne le nombre complexe conjugué.
10. Tracer la courbe donnant $\frac{A}{\Psi_o}$ en fonction de x avec $r=-0{,}2$. Conclure: que peut-on dire des nœuds et des ventres dans ce cas?

III. Modes propres

La corde est fixée à ses deux extrémités en $x=0$ et en $x=L$. Elle a été mise en mouvement au départ (par exemple , on a tiré simplement en un point de la corde vers le haut), puis elle est abandonnée à elle même. On étudie les oscillations libres de cette corde. On se demande si il est théoriquement possible d'obtenir un mouvement dans lequel tous les points de la corde vibrent sinusoïdalement à la même fréquence. Bien entendu, les conditions initiales à respecter risquent d'être difficiles. Un tel mode de vibration de la corde où tous les points vibrent à la même fréquence est appelé mode normal ou mode propre (voir: « vecteur propre » en mathématiques).

La solution cherchée s'écrit donc a priori :

$$\underline{\Psi}(x,t)=\underline{\Psi}_o \ \exp j(\omega t-kx)+\underline{\Psi}'_o \ \exp j(\omega t+kx) \quad .$$

Les inconnues sont $\underline{\Psi}_o$, $\underline{\Psi}'_o$, ω , k . On sait que $\omega=kc$, c est connu.

11. Écrire la condition aux limites en $x=0$ en en déduire $\underline{\Psi}'_o$ en fonction de $\underline{\Psi}_o$.

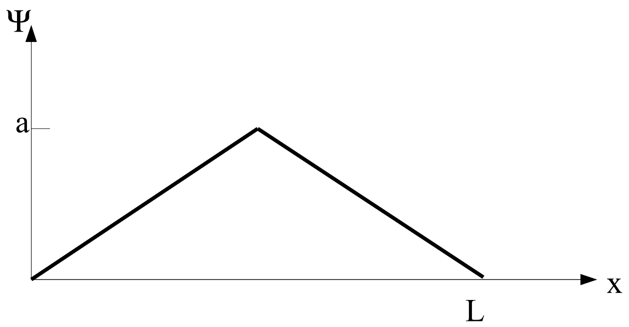
12. Écrire la condition aux limites en $x=L$ en en déduire que k ne peut pas prendre n'importe quelle valeur pour un mode propre. On introduira $m\in\mathbb{N}^*$. Quelle est la relation entre la longueur L de la corde et la longueur d'onde λ_m dans un mode propre. Commenter le résultat évident obtenu. Représenter l'allure de la corde dans les trois premiers modes.

13. Quelles sont les pulsations et les fréquences possibles pour un mode propre de vibration (en fonction de la tension et de la masse linéique de la corde) ?

14. Donner l'expression obtenue en réel pour un mode propre $\Psi_m(x,t)$ en fonction de deux constantes arbitraire A_m et B_m (ou C_m et φ_m).

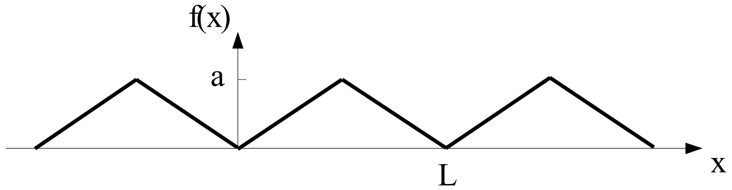
Pour une corde en oscillations libres, la solution générale se décompose selon les modes propres:
$\Psi(x,t)=\sum_m \Psi_m(x,t)$.

En $t=0$, on a tiré sur le milieu de la corde de a de telle façon que la corde ait l'allure d'un triangle et on a lâché la corde sans vitesse initiale.



On donne les développements en série de Fourier des deux fonctions périodiques suivantes:

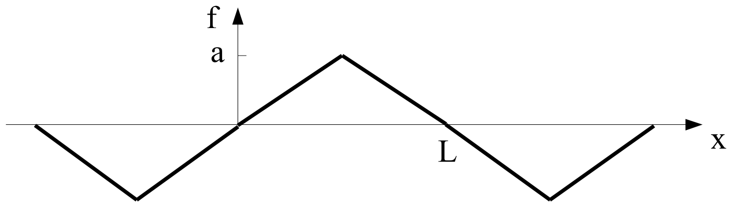
fonction périodique 1



avec:

$$f(x)=\frac{a}{2}-4\frac{a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(2\mathrm{n}+1)^2}\cos\frac{(2\mathrm{n}+1)2\pi x}{L}$$

fonction périodique 2



$$f(x)=8\frac{a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{(2\mathrm{n}+1)^2}\sin\frac{(2\mathrm{n}+1)\pi x}{L}$$

15. Écrire les conditions initiales pour la corde et en utilisant les développements fournis, déterminer $\Psi(x,t)$.

IV. Interférences multiples

La corde est fixée en $x=0$. En $x=L$, elle est excitée par un vibreur de fréquence réglable f . On étudie donc cette fois les oscillations forcées de cette corde à la fréquence f . La corde n'est plus en oscillations libres puisqu'elle est reliée à un vibreur. On peut s'attendre lorsque la fréquence d'excitation sera proche de la fréquence d'un mode propre à un phénomène de résonance, donc à une réponse importante de la corde au vibreur. L'élongation du vibreur en L est notée: $\Psi_o \exp(j\omega t)$. Les deux coefficients de réflexion en amplitude r_S et r_O sont réels et proches de: -1 . On posera $R=r_S r_O$ (légèrement plus petit que 1).

16. Écrire les ondes complexes $\underline{\Psi}_0$, $\underline{\Psi}_1$, $\underline{\Psi}_2$ ... $\underline{\Psi}_n$ qui passent en M dans le sens négatif, puis la somme de ces ondes.

17. Écrire les ondes complexes $\underline{\Psi}'_0$, $\underline{\Psi}'_1$, $\underline{\Psi}'_2$ ... $\underline{\Psi}'_n$ qui passent en M dans le sens positif, puis la somme de ces ondes.

18. Écrire en faisant une approximation $r_O \approx -1$, l'onde résultante sous la forme $\underline{A}\sin(k\ x)\exp(j\omega t)$. Commenter éventuellement.

19. Trouver la position des nœuds et des ventres.

20. Montrer que l'amplitude au carré (cf intensité) à un ventre s'écrit sous la forme $I=\dfrac{4\Psi_o^2}{(1-R)^2+4R\sin^2(\varphi/2)}$ (fonction peigne) et donner l'allure de l'amplitude à un ventre en fonction de φ pour $R=0{,}9$ et $R=0{,}99$.

Rappel : pour tout complexe $\underline{z}$ *vérifiant* $|\underline{z}|<1$ *on a* $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\underline{z}^i=\frac{1}{(1-\underline{z})}$

Réponses

1) Dimension de c

→ soit on utilise l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{[\psi]}{L^2} = \frac{1}{[c]^2}\frac{[\psi]}{T^2}$$

donc

$$\boxed{[c] = L\,T^{-1}}$$

→ soit en utilisant l'expression de c :

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

avec $[T] = [\text{masse}]\,[\text{accélération}]$
$= M \quad L \quad T^{-2}$

$[\mu] = [\text{masse}] / [\text{longueur}]$
$= M \quad L^{-1}$

$$\frac{[T]}{[\mu]} = L^2\,T^{-2}$$

donc

$$[c] = L\,T^{-1}$$

→ c est donc une vitesse.

C'est la <u>vitesse de propagation de l'onde sur la corde</u>.

---

2)

→ $f = f(u)$ avec $u = t - \frac{x}{c}$ est solution.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$= \frac{df(u)}{du} \times 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$= \frac{df(u)}{du} \times -\frac{1}{c}$$

Finalement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} =$$

$$\left[\frac{d^2f(u)}{du^2}\left(-\frac{1}{c}\right)^2\right]-\frac{1}{c^2}\left[\frac{d^2f(u)}{du^2}\,(1)^2\right]$$

$$=0$$

Donc $f(u)$ vérifie l'équation d'onde.

→ $g=g(v)$ avec $v=t+\frac{x}{c}$

La démonstration est la même en remplaçant $(-\frac{1}{c})$ par $(+\frac{1}{c})$

Donc $g(v)$ vérifie l'équation d'onde.

→ $f(u)$ correspond à une onde progressive.

si : $t'-\frac{x'}{c}=t-\frac{x}{c}$ on a $f(x',t')=f(x,t)$

$$x'-x=c\,(t'-t)$$

Pendant $(t'-t)$, l'onde s'est propagée de $(x'-x)$ donc avec une vitesse :

$$v=\frac{x'-x}{t'-t}$$

$$\boxed{v=+c}$$

donc une progression selon le sens positif de l'axe.

→ Pour $g(v)$, $g(x',t')=g(x,t)$ si

$$x'-x=-c\,(t'-t)$$

$$\boxed{v=-c}$$

donc une progression selon le sens négatif de l'axe.

---

3) Précédemment, on s'est intéressé à la solution écrite sous forme d'ondes progressives. Ici on va trouver la solution sous forme d'ondes stationnaires.

$$\Psi(x,t)=f(x)\;g(t)$$

On reporte

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

$$g(t)\;\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\;f(x)\;\frac{d^2g(t)}{dt^2}$$

$$\frac{c^2\;\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{f(x)}=\frac{\frac{d^2g(t)}{dt^2}}{g(t)}$$

on a séparé les variables :

$$F(x) = G(t) \qquad \forall x \ \forall t$$

Pour un t donné, on doit avoir $F(x_1) = F(x_2) = F(x_3)\dots$
donc $F(x)$ est indépendant de x.
Idem pour x donné, $G(t)$ est indépendant de t

$$F(x) = G(t) = \text{constante.}$$

→ Si la constante est positive :

$$\frac{\frac{d^2g}{dt^2}}{g} = \alpha^2$$

$$g = A\ e^{+\alpha t} + B^{-\alpha t}$$

qui tendra vers l'infini si $t \to \pm\infty$

Si la constante est nulle :

$$\frac{d^2g}{dt^2} = 0$$

$$g = At + B$$

qui tendra vers l'infini si $t \to \pm\infty$

→ La constante est donc négative, sa dimension est T^{-2}, elle est donc homogène à une pulsation au carré.

$$\boxed{\frac{d^2g(t)}{dt^2} + \omega^2\ g(t) = 0}$$

puis

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \underbrace{\omega^2/c^2}_{\text{noté } k^2} f(x) = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2f(x)}{dx^2} + k^2\ f(x) = 0}$$

→ La solution finale sera de la forme :

$$\Psi_{(x,t)} = \sum_i A_i \cos(k_i x + \phi_i)\ \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$(\text{avec } \omega_i = k_i c)$$

---

4) Même étude mais on étudie dès le départ des solutions sinusoïdales :

$$\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\Psi}(x)\ \exp(j\omega t)$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

$\rightarrow$
$$\frac{\partial^2 \underline{\Psi}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\Psi}(x,t)}{\partial t^2} = 0$$
$$\frac{d^2\underline{\Psi}(x)}{dx^2}\exp(j\omega t) - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2\underline{\Psi}(x)\exp(j\omega t) = 0$$
$$\boxed{\frac{d^2\underline{\Psi}(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\Psi}(x) = 0}$$

$\rightarrow$ équation caractéristique :
$$r^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \text{avec } \omega^2 = k^2c^2$$
$$\underline{\Psi}(x) = \underline{A}\exp jkx + \underline{B}\exp -jkx$$
$$\underline{\Psi}(x,t) = \underline{A}\exp j(\omega t + kx) + \underline{B}\exp j(\omega t - kx)$$
$$\boxed{\Psi(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_A) + B\cos(\omega t - kx + \varphi_B)}$$

La solution monochromatique apparait comme la somme de deux OPPM, une vers les $x<0$, l'autre vers les $x>0$.

$\rightarrow$ mais si on travaille avec des fonctions trigonométriques
$$\underline{\Psi}(x) = \underline{A}'\cos kx + \underline{B}'\sin kx$$
$$\underline{\Psi}(x,t) = \underline{A}'\cos kx\exp j\omega t + \underline{B}'\sin kx\exp j\omega t$$
$$\boxed{\Psi(x,t) = A'\cos kx\cos(\omega t + \varphi'_A) + B'\sin kx\cos(\omega t + \varphi'_B)}$$

La solution monochromatique apparait comme la somme de deux OPM stationnaires (décalées de $\frac{\lambda}{4}$ dans l'espace)

---

5)
$$\underline{\Psi}(x,t) = \Psi_o\exp j(\omega t - kx) + \underline{\Psi}_r\exp j(\omega t + kx)$$
doit être nul en $x = L$

C.L. $$0 = \Psi_o\exp j(\omega t - kL) + \underline{\Psi}_r\exp j(\omega t + kL)$$

donc
$$\boxed{\underline{\Psi}_r = -\Psi_o\exp(-2jkL)}$$

Finalement :
$$\underline{\Psi}_i(x,t) = \Psi_o\exp j(\omega t - kx)$$
$$\underline{\Psi}_r(x,t) = -\Psi_o\exp(-2jkL)\exp j(\omega t + kx)$$
$$= -\Psi_o\exp j(\omega t - k(2L - x))$$

$$\underline{r} = \frac{\underline{\Psi}_r(L,t)}{\underline{\Psi}_i(L,t)}$$

$$= \frac{-\Psi_0 \exp j(\omega t - k(2L-L))}{\Psi_0 \exp j(\omega t - kL)}$$

$$\boxed{\underline{r} = -1}$$

L'onde réfléchie a la même amplitude ($|\underline{r}| = 1$)
mais subit un déphasage de π à la réflexion ($\underline{r} = \exp j\pi$)

---

6)
$$\underline{\Psi}(x,t) = \Psi_0 \exp j(\omega t - kx) - \Psi_0 \exp j(\omega t - k(2L-x))$$
$$= \Psi_0 \exp j(\omega t - kL) \underbrace{\left(\exp j\,k(L-x) - \exp -j\,k(L-x)\right)}_{+2j \sin k(L-x)}$$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \underbrace{-2\Psi_0 \sin k(L-x)}_{A(x)} \sin(\omega t - kL)}$$

---

7)
$$\boxed{A = |A(x)| = 2\Psi_0 \,|\sin k(L-x)|}$$

noeuds :

$$A = |A(x)| = 0$$
$$\sin k(L-x) = 0$$
$$k(L-x) = m\pi$$
$$L - x = m\frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{x_N = L - m\frac{\lambda}{2} \qquad m \in \mathbb{N}}$$

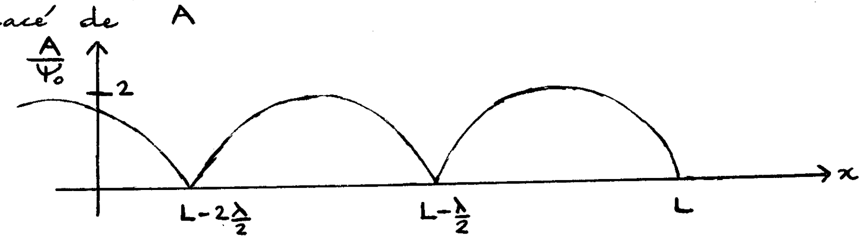
ventres :

$$A = |A(x)| = 2\Psi_0$$
$$\sin k(L-x) = \pm 1$$
$$k(L-x) = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

$$\boxed{x_V = L - (2m+1)\frac{\lambda}{4} \qquad m \in \mathbb{N}^*}$$

---

8) Tracé de A



---

9)
$$\underline{\Psi}(x,t) = \Psi_0 \exp j(\omega t - kx) + \underline{\Psi}_r \exp j(\omega t + kx)$$

avec $\underline{r} = \dfrac{\underline{\Psi}(r) \exp j(\omega t + kL)}{\Psi_0 \exp j(\omega t - kL)}$

donc $\underline{\Psi}_r = \underline{r}\, \Psi_0 \exp -2jkL$

finalement :

$$\underline{\Psi}(x,t) = \Psi_0 \exp j(\omega t - kx) + \underline{r}\, \Psi_0 \exp j(\omega t - k(2L - x))$$
$$= \Psi_0 \exp j\omega t \left[\exp(-jkx) + \underline{r} \exp(-jk(2L-x))\right]$$

$$A^2 = \underline{\Psi}(x,t)\, \underline{\Psi}^*(x,t)$$
$$= \Psi_0^2 \left[\exp -jkx + \underline{r} \exp -jk(2L-x)\right] \times \left[\exp jkx + \underline{r}^* \exp jk(2L-x)\right]$$
$$= \Psi_0^2 \left(1 + \underline{r}\,\underline{r}^* + \underline{r} \exp -jk2(L-x) + \underline{r}^* \exp jk2(L-x)\right)$$
$$= \Psi_0^2 \left(1 + |\underline{r}|^2 + 2 \mathcal{R}_e\left(\underline{r} \exp -j2k(L-x)\right)\right)$$

$$\boxed{A = \Psi_0 \left(1 + |\underline{r}|^2 + 2 \mathcal{R}_e\left(\underset{\downarrow\, r \exp j\alpha}{\underline{r}} \exp -j2k(L-x)\right)\right)^{1/2}}$$

$$\boxed{A = \Psi_0 \left(1 + r^2 + 2r \cos\left(2k(L-x) - \alpha\right)\right)^{1/2}}$$

---

10) A.N. $\underline{r} = -0,2$

$$\frac{A}{\Psi_0} = \left(1 + 0,04 + 2 \times 0,2 \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(L-x) - \pi\right)\right)^{1/2}$$
$$= \left(1,04 - 0,4 \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(L-x)\right)\right)^{1/2}$$

— L'amplitude est minimale quand le cos vaut 1

$$\left(\frac{A}{\Psi_0}\right)_{MIN} = (1,04 - 0,4)^{1/2} = 0,8$$

$$\cos \frac{4\pi}{\lambda}(L-x) = 1$$
$$\frac{4\pi}{\lambda}(L-x) = m\, 2\pi$$
$$x = L - m\frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{A_{MIN} = 0,8\, \Psi_0 \quad \text{pour} \quad x_N = L - m\frac{\lambda}{2}}$$

— L'amplitude est maximale quand le cos vaut -1

$$\left(\frac{A}{\Psi_0}\right)_{MAX} = (1,04 + 0,4)^{1/2} = 1,2$$

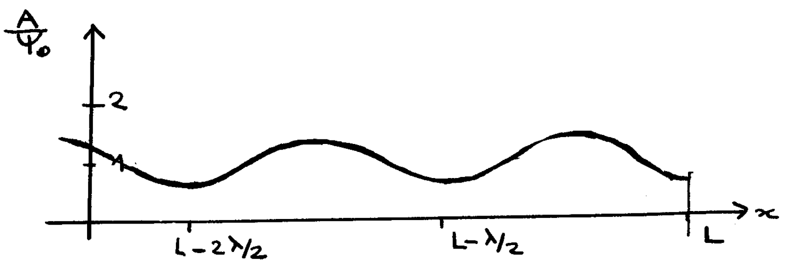
$$\cos \frac{4\pi}{\lambda}(L-x) = -1$$

$$\frac{4\pi}{\lambda}(L-x) = m\,2\pi + \pi$$

$$x = L - (2m+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$\boxed{A_{MAX} = 1{,}2\,\Psi_0 \quad \text{pour} \quad x_V = L-(2m+1)\frac{\lambda}{4}}$$

Ici ($\underline{r}$ réel négatif), les noeuds et ventres sont aux mêmes points.
Mais l'amplitude aux noeuds n'est plus nulle.
L'amplitude aux ventres n'est plus double.



---

11) $$\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\Psi_0} \exp j(\omega t - kx) + \underline{\Psi_0'} \exp j(\omega t + kx)$$

C.L. en $x=0$ on a un noeud

$$0 = \underline{\Psi_0} \exp j\omega t + \underline{\Psi_0'} \exp j\omega t$$

$$\boxed{\underline{\Psi_0'} = -\underline{\Psi_0}}$$

$$\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\Psi_0} \exp j\omega t \underbrace{\left(\exp(-jkx) - \exp(jkx)\right)}_{-2j\sin(kx)}$$

$$\boxed{\underline{\Psi}(x,t) = -2j\underline{\Psi_0} \sin(kx) \exp j\omega t}$$

---

12) C.L. en $x=L$ on a un noeud

$$0 = -2j\underline{\Psi_0} \sin(kL) \exp j\omega t$$

Si on fait $\underline{\Psi_0} = 0$ la méthode échoue.

On fait $\sin kL = 0$

$$kL = m\pi \qquad m \in \mathbb{N}^*$$

Pour un mode propre

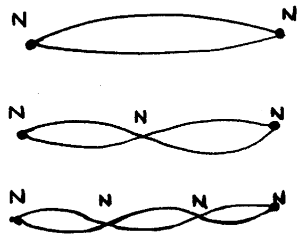
$$\boxed{k_m = \frac{m\pi}{L}}$$

remarque

$$\frac{2\pi}{\lambda_m} = \frac{m\pi}{L}$$

$$L = m\,\frac{\lambda_m}{2}$$

Pour un mode propre, la longueur L est un nombre entier de fuseaux



mode 1

mode 2

mode 3

---

13) pulsations propres

$$\omega_m = k_m\, c$$

$$= m\,\frac{\pi c}{L}$$

fréquences propres

$$N_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$$

$$\boxed{N_m = m\,\frac{c}{2L}}$$

$$\boxed{N_m = m\,\frac{\sqrt{T/\mu}}{2L}}$$

---

14) Pour le mode m $\left(k_m = \frac{m\pi}{L} \quad \omega_m = m\frac{\pi c}{L}\right)$

$$\underline{\Psi}_m(x,t) = -2j\,\underline{\Psi}_{o_m}\,\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\,\exp\left(j\,\frac{m\pi c}{L}t\right)$$

$$\boxed{\Psi_m(x,t) = C_m \,\sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\left(\frac{m\pi c}{L}t + \varphi_m\right)}$$

ou

$$\boxed{\Psi_m(x,t) = \sin\frac{m\pi x}{L}\left(A_m \cos\frac{m\pi c t}{L} + B_m \sin\frac{m\pi c t}{L}\right)}$$

---

15)
$$\Psi_{(x,t)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi x}{L}\left(A_m \cos\frac{m\pi c t}{L} + B_m \sin\frac{m\pi c t}{L}\right)$$

On écrit les conditions initiales

En $t=0$
$$\begin{cases} \Psi(x,t=0) = f(x) \\ \dot{\Psi}(x,t=0) = 0 \end{cases}$$

donc
$$\boxed{f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi x}{L}\, A_m}$$
$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi x}{L}\,\frac{m\pi c}{L}\,B_m \quad \text{d'où} \quad \boxed{B_m = 0}$$

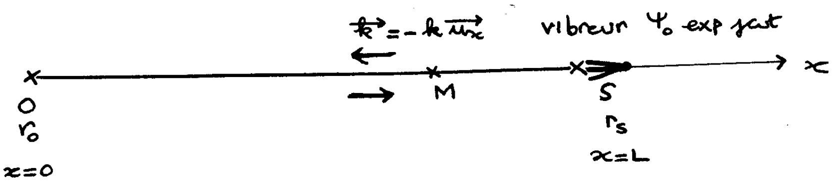
<u>$f(x)$ se développe en sinus</u> (développement en série de Fourier d'une fonction <u>impaire</u>).

On prolonge la fonction pour obtenir une fonction impaire de période $2L$. On obtiendrait
$$A_m = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{+L} \underset{\uparrow \text{ fonction prolongée}}{f(x)} \sin\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

les résultats sont donnés (fonction périodique 2)
$$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L}\cos\frac{(2n+1)\pi c t}{L}}$$

---

16)



en M
$$\underline{\Psi}_0 = \Psi_0 \exp j(\omega t - \underbrace{\cancel{\varphi_S}}_{\text{nul}} - \vec{k}\,\vec{SM})$$
$$= \Psi_0 \exp j(\omega t - (-k\,\vec{u_x}\,(x-L)\,\vec{u_x}))$$
$$\boxed{\underline{\Psi}_0(M,t) = \Psi_0 \exp j(\omega t - k(L-x))}$$

L'onde 1 a fait en plus, un aller-retour (déphasage retard $\varphi = 2kL$) et un réflexion en O et une réflexion en S (multiplier par r_0, par r_S soit par $R = r_0 r_S$)
$$\boxed{\underline{\Psi}_1 = \underline{\Psi}_0 \quad R \exp(-2jkL)}$$

$$\underline{\Psi}_2(M,t) = \underline{\Psi}_1 \; R \; \exp(-2jkL)$$
$$= \underline{\Psi}_1 \; R \; \exp -j\varphi$$
$$= \underline{\Psi}_0 \; R^2 \; \exp -2j\varphi$$

$$\boxed{\underline{\Psi}_n(M,t) = \underline{\Psi}_0(M,t) R^n \; \exp -nj\varphi}$$

$$\underline{\Psi}_{-}(M,t) = \underline{\Psi}_0(M,t) \sum_{n=0}^{\infty} R^n \exp -jn\varphi$$

avec $\sum_{n=0}^{N} a q^n = a \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$

Ici $N \to \infty$ et $|q|<1$

$$\sum_0^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\boxed{\underline{\Psi}_{-}(M,t) = \underline{\Psi}_0(M,t) \frac{1}{1-R\exp -j\varphi}}$$

---

17) Dans le sens des x positifs

$$\boxed{\underline{\Psi}'_0(M,t) = r_0 \; \Psi_0 \; \exp j(\omega t - k(L+x))}$$

(trajet total $L+x$ depuis la source et reflexion en O)

$$\boxed{\underline{\Psi}'_n(M,t) = \underline{\Psi}'_0(M,t) \; R^n \; \exp -jn\varphi}$$

$$\underline{\Psi}_{+}(M,t) = \underline{\Psi}'_0(M,t) \frac{1}{1-R\exp -j\varphi}$$

---

18)

$$\underline{\Psi}(M,t) = \underline{\Psi}_{-}(M,t) + \underline{\Psi}_{+}(M,t)$$
$$= \frac{1}{1-R\exp -j\varphi} \left(\underline{\Psi}_0(M,t) + \underline{\Psi}'_0(M,t) \right)$$
$$= \frac{\Psi_0}{1-R\exp -j\varphi} \left(\exp -jk(L-x) + r_0 \exp -jk(L+x) \right) \exp j\omega t$$
$$= \frac{\Psi_0}{1-R\exp -j\varphi} \exp -j\frac{\varphi}{2} \; \underbrace{(\exp jkx + \underset{\simeq -1}{r_0} \exp -jkx)}_{+2j \sin kx} \; \exp j\omega t$$

$$\boxed{\underline{\Psi}(M,t) = \underbrace{\frac{2j\Psi_0 \exp -j\frac{\varphi}{2}}{1-R\exp -j\varphi}}_{\underline{A}} \; \sin(kx) \; \exp(j\omega t)}$$

L'amplitude complexe en M est donc $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendant} \\ \text{de } x}}{\underline{A}} \sin(kx)$

On retrouve donc des noeuds et des ventres (à toute fréquence) quoique le phénomène ne sera visible que si S correspond à un noeud (ou presque). On aura alors résonance (voir étude de $\underline{A}$) et la corde vibrera dans un mode propre.

---

19) Position des noeuds :

$$\sin kx = 0$$

$$\boxed{x_N = n\frac{\lambda}{2}}$$

Position des ventres :

$$\sin kx = \pm 1$$

$$\boxed{x_V = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}}$$

---

20) Intensité au ventre :

$$I = \underline{A}\,\underline{A}^*$$

$$= \left(\frac{2j\Psi_0 \exp -j\frac{\varphi}{2}}{1-R\exp -j\varphi}\right)\left(\frac{-2j\Psi_0 \exp j\frac{\varphi}{2}}{1-R\exp j\varphi}\right)$$

$$= \frac{4\Psi_0^2}{1+R^2-R\underbrace{(\exp -j\varphi + \exp j\varphi)}_{\underbrace{2\cos\varphi}_{1-2\sin^2\varphi/2}}}$$

$$= \frac{4\Psi_0^2}{(1+R^2-2R)+4R\sin^2\varphi/2}$$

$$\boxed{I_{\text{ventre}} = \frac{4\Psi_0^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\varphi/2}}$$

(L'intérêt de cette mise en forme est d'obtenir au dénominateur une <u>somme de deux termes positifs</u>)

$\rightarrow$ La fonction $\sin^2\alpha$ est de période : $\Delta\alpha = \pi$

Donc I est de période : $\Delta\frac{\varphi}{2} = \pi$

$\Delta\varphi = 2\pi$

$\longrightarrow \quad I_{\substack{\text{ventre}\\ \text{MAX}}} = \dfrac{4\Psi_0^2}{(1-R)^2 + 0}$

si $\varphi = m\,2\pi$

$2kL = m\,2\pi$

$L = m\dfrac{\lambda}{2}$

(la corde vibre selon un mode propre. S est donc aussi un noeud – ou quasiment –)

$$\boxed{L = m\frac{\lambda}{2} \quad \text{résonance selon mode } m \qquad A_{\substack{\text{ventre}\\ \text{MAX}}} = \frac{2\Psi_0}{1-R}}$$

$\longrightarrow \quad I_{\substack{\text{ventre}\\ \text{MIN}}} = \dfrac{4\Psi_0^2}{(1-R)^2 + 4R} = \dfrac{4\Psi_0^2}{(1+R)^2}$

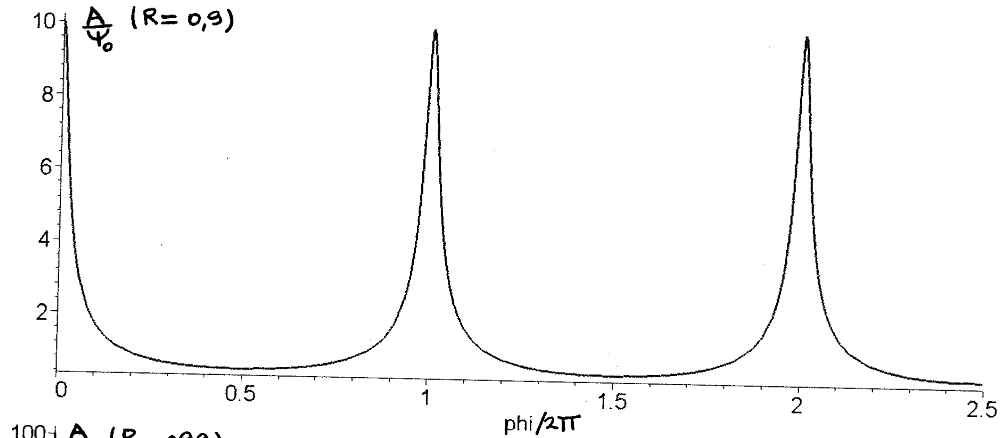
si $\varphi = m\,2\pi + \pi$

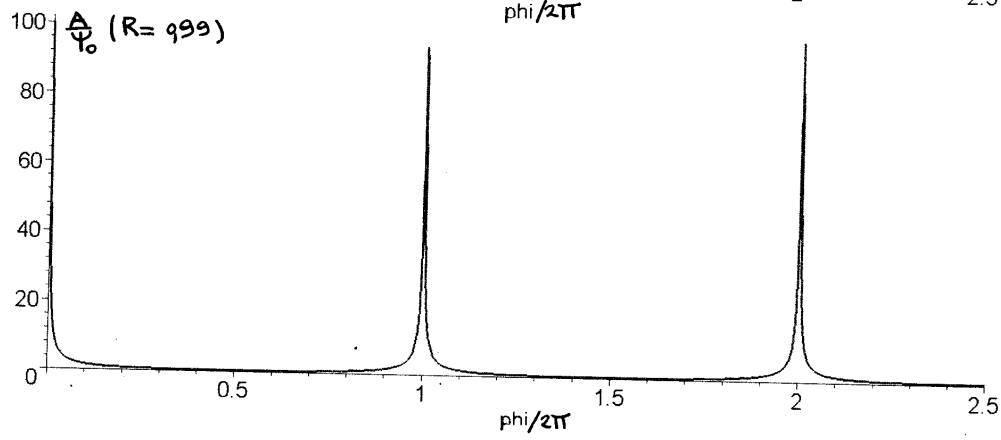
$L = m\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda}{4}$

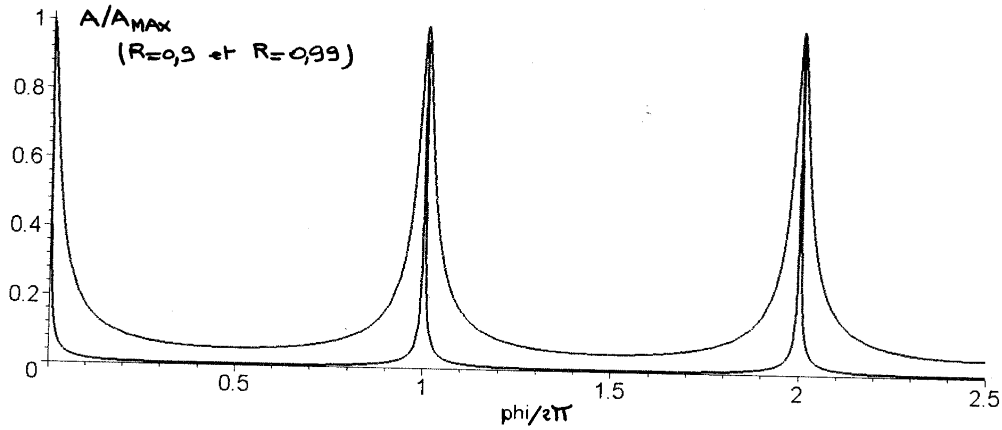
(la longueur de la corde n'est pas du tout adaptée à la fréquence. S est ici un ventre)

$$\boxed{\text{entre deux résonances} \qquad A_{\substack{\text{ventre}\\ \text{MIN}}} = \frac{2\Psi_0}{1+R}}$$

(voir courbes page suivante)


A/Ψ0 (R= 0,9)
10
8
6
4
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
phi/2π


A/Ψ0 (R= 999)
100
80
60
40
20
0
0.5
1
1.5
2
2.5
phi/2π


A/A_MAX
(R=0,9 et R=0,99)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
phi/2π