Révision de l'algèbre linéaire

Exercice 3.1 (Matrice d'Attila).

Soit n dans $\mathbb{N}^*$, et soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.2 (CCP PSI 2005).

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant ij\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 0$. Calculer A^p pour p dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3.3.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est nilpotente d'indice 3.
2. Montrer qu'il n'existe pas X dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = A$.

Exercice 3.4.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.5.

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $A + B = AB$. Montrer que $I_n - A$ est inversible.

Exercice 3.6.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

1. Soit N une matrice nilpotente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les matrices $I_n - N$ et $I_n + N$ sont inversibles.
2. On note A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $I_n + A$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3.7.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit M dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $M = \left(C_{j-1}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$. Montrer que M est inversible et donner son inverse.

Exercice 3.8 (CCP MP 2006 et 2007).

Soit n dans $\mathbb{N}^*$, soient u et v les aplications linéaires définies sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], u(P) = P(X+1) \text{ et } v(P) = P(X-1).$$

1. Déterminer le rang de $f = u - v$ à partir de sa matrice.
2. Retrouver ce résultat par une autre méthode.

Exercice 3.9.

Étudier en fonction de λ dans $\mathbb{R}$ le rang de la matrice $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$.

RÉVISION DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE

EXERCICE 3.10 (Navale MP 2006).

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A et B ne sont pas semblables.
2. Montrer que A et C sont semblables.
   Indication de la rédaction : on cherchera la matrice de l'endomorphisme associé à C dans une nouvelle base obtenue par permutation des vecteurs de la base canonique.

EXERCICE 3.11.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Déterminer la trace des endomorphismes suivants :

1. une homothétie h de rapport λ,
2. un projecteur p,
3. une symétrie s.

EXERCICE 3.12.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que l'ensemble $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}\,(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et en déterminer la dimension.
2. Donner une base de H.
3. Soit ϕ l'application, qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associe $\phi(M) = \mathrm{Tr}\,(M)\, I_n - M$. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa trace.
4. Etablir que $\phi \circ \phi = (n-2)\phi + (n-1)\,\mathrm{Id}$. En déduire que pour $n \geqslant 2$, l'application ϕ est inversible et déterminer son inverse.

EXERCICE 3.13.

Soient A dans $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, B dans $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et C dans $\mathrm{M}_{m,q}(\mathbb{R})$. On note r le rang de A et s le rang de B.

1. Montrer que le rang de la matrice $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ est égal à $r + s = \mathbf{rg}A + \mathbf{rg}B$.
2. Comparer le rang de la matrice $M_2 = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ avec $r + s$.
3. On suppose que B est inversible. Montrer qu'alors le rang de la matrice $M_2 = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ est encore égal à $r + s = \mathbf{rg}A + \mathbf{rg}B$.

EXERCICE 3.14 (CCP PSI 2005).

Soit $N = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{pmatrix}$ où $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ et $M = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice définie par : $i \neq j \Rightarrow b_{ij} = 2a_{ij}$ et $b_{ii} = a_i - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_j$.

Révision de l'algèbre linéaire

1. Calculer N^2.
2. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 3.15 (CCP PSI 2005).

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $C(J) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MJ = JM\}$.

1. Montrer que $C(J)$ est un sous-espace vectoriel et en donner une base. L'ensemble $C(J)$ est appelé *commutant* de J.
2. Existe-t-il une inclusion entre $C(J)$ et $D(J) = \{Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid Y^2 = J\}$? Trouver $D(J)$.

Exercice 3.16 (Centrale PSI 2006).

Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$.

1. Déterminer le rang de M en fonction de A et B.
2. Calculer M^{-1} quand elle existe.

Exercice 3.17.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $3n$. Soit f un endomorphisme de E tel que $\mathbf{rg} f = 2n$ et $f^3 = 0$.
Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f^2$ et trouver une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.18 (Centrale MP 2005).

Montrer que les matrices triangulaires réelles qui commutent avec leur transposée sont diagonales.

Exercice 3.19 (Polytechnique MP 2005).

Soit A dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On pose, pour M dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\Delta_A(M) = AM - MA$.

1. Calculer les puissances de Δ_A.
2. Montrer que si A est nilpotente, alors Δ_A est nilpotente.

Exercice 3.20 (Mines-Ponts MP 2006).

1. Soit f une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour tout A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.
2. Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour tout A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $g(AB) = g(BA)$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

Exercice 3.21 (Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Montrer que pour tout ϕ dans le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice A telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \phi(M) = \mathrm{Tr}\,(AM)\,.$$

Exercice 3.22 (Centrale MP 2006).

Trouver les A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\setminus\{0\}\,,\ AB = BA = 0.$

Révision de l'algèbre linéaire

Exercice 3.23 (TPE MP 2006, CCP MP 2007).

Soient A et B fixées dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \mathrm{Tr}(X)\, A = B$.

Exercice 3.24 (Centrale MP PSI et PC 2007).

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Etant donnée une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $X + {}^tX = \mathrm{Tr}(X)\ M$.

Exercice 3.25 (Mines-Ponts MP 2007).

Soient A dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et B dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que AB est la matrice d'un projecteur.
2. Montrer que $BA = I_2$.
   Indication de la rédaction : on pourra commencer par montrer que BA est inversible.

Exercice 3.26 (Centrale PC 2005, PSI 2006, MP 2007).

1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
   Indication de la rédaction : on pourra raisonner par récurrence sur n.
3. Soient $d_1, \ldots, d_n$ dans $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $D = \mathbf{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ qui à M associe $DM - MD$. Déterminer le noyau et l'image de φ.
4. Etant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, établir l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) $\mathrm{Tr}(A) = 0$
   (b) $\exists (X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que $XY - YX = A$.

Exercice 3.27 (Polytechnique MP 2005).

Soient A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $n+1$ valeurs de λ dans $\mathbb{C}$ telles que $A + \lambda B$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 3.28.

Soient A et B deux matrices inversibles

1. vérifier que $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$
2. Montrer que si $A + B$ est inversible, alors $A^{-1} + B^{-1}$ est inversible et déterminer son inverse

Exercice 3.29.

Soient A et B deux matrices, d'ordre n, inversibles

1. Vérifier que $A(I_n + BA) = (I_n + AB)A$ et que $B(I_n + AB) = (I_n + BA)B$
2. Montrer que si I_n+AB est inversible, alors I_n+BA est inversible et $(I_n+BA)^{-1} = I_n - B(I_n+AB)^{-1}A$.

Exercice 3.30 (Matrice à diagonale strictement dominante).

$M = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :$\forall i \in \{1, ..., n\}, |a_{i,i}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que M est inversible.

RÉVISION DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE

EXERCICE 3.31 (Base de Taylor).

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A_p(X) = (X-a)^p$.

1. Montrer que $\varepsilon = (A_0, \ldots, A_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) A_k(X)$. (On pourra montrer que l'ensemble E des élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui satisfont à cette égalité est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et contient une base.)

EXERCICE 3.32 (Famille échlonnée).

Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls, à degrés échelonnés, c'est-à -dire $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$. Montrer que $(P_1, \ldots, P_n)$ est une famille libre.

EXERCICE 3.33.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que, dans ce cas, on a $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$.

EXERCICE 3.34.

Soient f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que si f et g commutent, alors $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont stables par g.
2. Prouver que si f est un projecteur alors la réciproque est vraie.

EXERCICE 3.35.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

EXERCICE 3.36.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes telle que:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad |a_{ij}| < \frac{1}{n}$$

Démontrer que $I_n + A$ est inversible

EXERCICE 3.37 (Matrice de rang $\leqslant 1$).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $\mathbf{rg}(A) \leqslant 1$

1. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que: $A = U\ {}^tV$ et $\mathrm{Tr}\,(A) = {}^t VU$
2. En déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}\,(A)\, A$

EXERCICE 3.38.

Soit $E = \{\text{matrices de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ antisymétriques}\}$ et

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longrightarrow & {}^tAM + MA \end{array} \right.$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Quelle est la trace de f ?

RÉVISION DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE

EXERCICE 3.39.

Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n. Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & B \\ A & C \end{vmatrix}$ en fonction des déterminants de A et de B.

EXERCICE 3.40 (Déterminant de Vadermonde).

Soit $n \geq 2$, pour tout $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$, on note $V(a_1, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & ... & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Montrer que $V(a_1, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

EXERCICE 3.41 (Déterminant de CAUCHY).

Soit $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, ..., b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout (i, j), $a_i + b_j \neq 0$.

Calculer le déterminant d'ordre n. $\Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \dfrac{1}{a_1 + b_2} & ... & \dfrac{1}{a_1 + b_n} \\ \dfrac{1}{a_2 + b_1} & ... & ... & \dfrac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{1}{a_n + b_1} & ... & & \dfrac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix}$. (ind. utiliser la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{(b_1 - X)...(b_{n-1} - X)}{(X + a_1)...(X + a_n)}$).

EXERCICE 3.42 (Déterminant compagnon).

Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\Delta_n(a_0, ..., a_n, x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & -x & a_{n-2} \\ 0 & & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

EXERCICE 3.43.

Soit $A \in GL_3(\mathbb{R})$ et $B \in M_3(\mathbb{R})$. Montrer que : $(\exists \varepsilon > 0) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) : |x| < \varepsilon \Rightarrow (A + xB) \in \mathcal{G}L_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 3.44.

Soient n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Établir
$$\begin{cases} \operatorname{rg}(A) = n & \Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = n \\ \operatorname{rg}(A) = n - 1 & \Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 1 \\ \operatorname{rg}(A) \leqslant n - 2 & \Rightarrow \operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)) = 0 \end{cases}$$
2. Montrer $\det(\operatorname{com}(A)) = (\det A)^{n-1}$
3. En déduire $\operatorname{com}(\operatorname{com}(A))$

EXERCICE 3.45.

Calculer le déterminant de l'endomorphisme $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M \longmapsto {}^tM$