L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 3 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Exercice

(Noté sur 04 points sur 20)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1.1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A et en déduire que A possède une seule valeur propre λ à préciser.

1.2. Déterminer $\operatorname{Ker}(v - \lambda\, id_{\mathbb{R}^3})$, le sous-espace propre de v associé à son unique valeur propre λ.

1.3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

1.4. On considère l'endomorphisme $u = v - 2\, id_{\mathbb{R}^3}$ et on pose $e_1 = (1,0,0)$.

1.4.1. Montrer que l'endomorphisme u est nilpotent.

1.4.2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme u^2 puis vérifier que $e_1 \notin \operatorname{Ker} u^2$.

1.4.3. Montrer que la famille $\mathscr{B} = \big(u^2(e_1), u(e_1), e_1\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice T de v dans la base $\mathscr{B}$, puis exprimer la matrice A en fonction de T.

1.4.4. Calculer l'exponentielle de la matrice A. *On rappelle que* $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Problème

Déterminants de Cauchy et de Gram
Application au calcul de la distance à un sous-espace vectoriel

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ se notera I_p. Si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\det M$ son déterminant et ${}^t\!M$ sa transposée.

1ère Partie
Calcul du déterminant de Cauchy

On considère un entier $n \geqslant 2$ et deux suites finies $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de réels telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leqslant n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m, associé aux familles $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, est le nombre, noté Δ_m, égal au déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$.

2.1. On suppose qu'il existe $(i_1, i_2) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i_1 \neq i_2$, tel que $a_{i_1} = a_{i_2}$. Justifier que $\Delta_n = 0$.

On suppose désormais que les réels $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux **distincts** *et on considère la fraction rationnelle*

$$R = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(X - b_j)}{\prod_{k=1}^{n}(X + a_k)} \,.$$

2.2. Justifier que les polynômes $\prod_{k=1}^{n-1}(X-b_k)$ et $\prod_{k=1}^{n}(X+a_k)$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux.

2.3. Décomposition en éléments simples de la fraction R

2.3.1. Préciser les pôles de la fraction rationnelle R et vérifier qu'ils sont tous simples.

2.3.2. En déduire que la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction R est de la forme $R=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{X+a_k}$ en précisant les expressions des réels α_k en fonction des a_k et des b_k.

2.4. Application au calcul de Δ_n

2.4.1. Montrer que $\alpha_n\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$.

2.4.2. En déduire que $\alpha_n\Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1}$.

2.4.3. Calculer Δ_2 puis montrer que, pour tout $n\geqslant 2$, $\Delta_n = \dfrac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}$.

2$^{\text{ème}}$ Partie
Matrice et déterminant de Gram
Expression de la distance euclidienne à un sous-espace vectoriel

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel ; son produit scalaire sera noté $(\,.\,|\,.\,)$ et la norme associée se notera $\|.\|$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie , p_F désigne la projection orthogonale sur F.

Soit p un entier $\geqslant 2$. Pour tout $(u_1,\dots,u_p)\in E^p$, on note $G(u_1,\dots,u_p)=\big((u_i|u_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $(u_i|u_j)$. $G(u_1,\dots,u_p)$ s'appelle la *matrice de Gram* des vecteurs $u_1,\dots,u_p$; le déterminant de cette matrice, noté $|G(u_1,\dots,u_p)|$, s'appelle *déterminant de Gram*.

3.1. Cas $p=2$

Soit $(u_1,u_2)\in E^2$. Justifier que $|G(u_1,u_2)|\geqslant 0$ et que $|G(u_1,u_2)|=0$ si, et seulement si, la famille (u_1,u_2) est liée.

3.2. Vérifier que, pour tout $(u_1,\dots,u_p)\in E^p$, la matrice $G(u_1,\dots,u_p)$ est symétrique.

3.3. Cas d'une famille liée

Soit $(u_1,\dots,u_p)\in E^p$.

3.3.1. Soit $i\in\{1,\dots,p\}$ et soit $(\lambda_j)_{j\neq i}$ une famille quelconque de $p-1$ réels ; on pose $w_k=u_k$ si $k\in\{1,\dots,p\}\setminus\{i\}$ et $w_i=u_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j u_j$. Montrer que $|G(w_1,\dots,w_p)|=|G(u_1,\dots,u_p)|$.

3.3.2. En déduire que si la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée, alors $|G(u_1,\dots,u_p)|=0$.

3.4. Cas d'une famille libre

On considère ici une famille libre $(u_1,\dots,u_p)$ d'éléments de E et on note $(e_1,\dots,e_p)$ une base orthonormée du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{u_1,\dots,u_p\})$. Soit $B=\big(b_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont tels que, pour tout $j\in\{1,\dots,p\}$, $u_j=\sum_{k=1}^{p}b_{k,j}\,e_k$.

3.4.1. Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\dots,p\}$, exprimer le produit scalaire $(u_i|u_j)$ à l'aide des coefficients de la matrice B.

3.4.2. En déduire que $G(u_1,\dots,u_p)={}^tBB$.

3.4.3. Montrer alors que $|G(u_1,\dots,u_p)|>0$.

3.5. Application au calcul de la distance à un sous-espace vectoriel

On considère un sous-espace vectoriel F de E, de dimension finie $n\geqslant 2$, et on note $(v_1,\dots,v_n)$ une base quelconque de F.

3.5.1. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$|G(v_1, \dots, v_n, x)| = |G\big(v_1, \dots, v_n, p_F(x)\big)| + \|x - p_F(x)\|^2 |G(v_1, \dots, v_n)|.$$

3.5.2. En déduire que, pour tout $x \in E$, la distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F, notée $d(x, F)$, est donnée par :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{|G(v_1, \dots, v_n, x)|}{|G(v_1, \dots, v_n)|}}.$$

3.6. Un exemple de matrice de Gram

Soit n un entier naturel ≥ 2 ; on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $<\,,\,>$ son produit scalaire canonique. On note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = \min(i, j)$ pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, et on considère les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ définis par :

$$\forall\, k \in \{1, \dots, n\}, \quad v_k = \sum_{i=1}^{k} e_i.$$

3.6.1. Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

3.6.2. Calculer le produit scalaire $<v_i, v_j>$, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$; en déduire que A_n est une matrice de Gram.

3.6.3. Montrer que la matrice A_n est orthogonalement diagonalisable et que ses valeurs propres sont strictement positives.

3ème Partie
Application au calcul d'un minimum

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'élément X^k de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ se notera P_k ; en particulier, $P_0 = 1$.

On considère l'application $(\,.\,|\,.\,)$ définie sur $\mathbb{R}[X]^2$ par : $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t, \quad (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2.$

4.1. Montrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$.

4.2. Calcul d'une distance

Soit p un entier $\geqslant 2$ et soit $(n_k)_{1 \leq k \leq p}$ une suite finie d'entiers naturels deux à deux distincts.

4.2.1. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, exprimer le produit scalaire $(P_{n_i}|P_{n_j})$ en fonction de n_i et n_j.

4.2.2. En utilisant les résultats de la première partie, exprimer le déterminant de la matrice de Gram $G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$ en fonction des entiers $n_1, \dots, n_p$.

4.2.3. Montrer que $\big(P_{n_1}, \dots, P_{n_p}\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

4.2.4. On note $\mathscr{W}_p$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $\big(P_{n_1}, \dots, P_{n_p}\big)$.

Montrer que, pour tout entier naturel r, $d(P_r, \mathscr{W}_p) = \dfrac{1}{\sqrt{2r+1}} \displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{|n_k - r|}{n_k + r + 1}.$

4.3. Application au calcul d'un minimum

Soit n un entier $\geqslant 2$ et soit $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \psi(a_1, \dots, a_n) = \int_0^1 \Big(1 - a_1 t - \cdots - a_n t^n\Big)^2 \mathrm{d}t.$$

4.3.1. À l'aide d'une interprétation euclidienne, montrer qu'il existe un unique point $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ en lequel l'application ψ atteint son minimum, autrement dit :

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \psi(x_1, \dots, x_n)$$

4.3.2. Calculer $\psi(a_1, \dots, a_n)$ en fonction de n.

FIN DE L'ÉPREUVE