Planche n° 20. Limite d'une fonction en un point. Continuité en un point

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (T)**

1) Montrer en revenant à la définition que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to5\\x>5}}\frac{3x-1}{x-5}=+\infty$.

2) Montrer en revenant à la définition que $f\ :\ x\mapsto\dfrac{3x-1}{x-5}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Exercice n° 2 (*I)

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer que les fonction $\text{Min}\{f,g\}$ et $\text{Max}\{f,g\}$ sont continues en x_0.

Exercice n° 3 (IT)**

Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en chacun de ses points.

Exercice n° 4 (IT)**

1) Montrer que la fonction $x\mapsto\sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

2) Montrer que la fonction $x\mapsto\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

3) Montrer que la fonction $x\mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice n° 5 (T)**

Pour $x\neq1$, on pose $f(x)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}\text{ si }x<1\\\dfrac{\sqrt{6x-5}-b}{x-1}\text{ si }x>1\end{array}\right.$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

f est-elle prolongeable par continuité en 1 (discuter en fonction de a et b) ?

Exercice n° 6 (**)

Trouver f bijective de $[0,1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

Exercice n° 7 (IT)**

Etudier en chaque point de $\mathbb{R}$ l'existence d'une limite à droite, à gauche, la continuité de la fonction f définie par

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l}x\times\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\text{ si }x\neq0\\1\text{ si }x=0.\end{array}\right..$$

Exercice n° 8 (*)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et périodique, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice n° 9 (****)

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 telle que $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.
(Indication. Considérer $g(x)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$.)

