

1) Il existe une grande similitude entre les attractions Coulombienne et Newtonienne concernant deux points $P(q \text{ ou } m)$ et $M(q' \text{ ou } m')$:

$$\vec{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u}_{PM} \quad \vec{F}_{m \rightarrow m'} = -\frac{m'mg}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Le théorème de Gauss de la gravitation s'écrit ainsi : $\oint \vec{G} \cdot d\vec{S}_{ext} = -4\pi g m_{int}$

2-4) La distribution est invariante par rotation suivant θ et ϕ : la norme du champ ne dépend que de r . Tous les plans contenant \vec{CM} sont des plans de symétrie pour la distribution donc des plans de symétrie pour le champ : $\vec{G}_T(M)$ appartient à tous ces plans, il est donc dirigé suivant \vec{e}_r .

On choisit comme surface de Gauss la sphère centrée en C et de rayon r : $\oint \vec{G} \cdot d\vec{S}_{ext} = 4\pi r^2 G_T(r)$

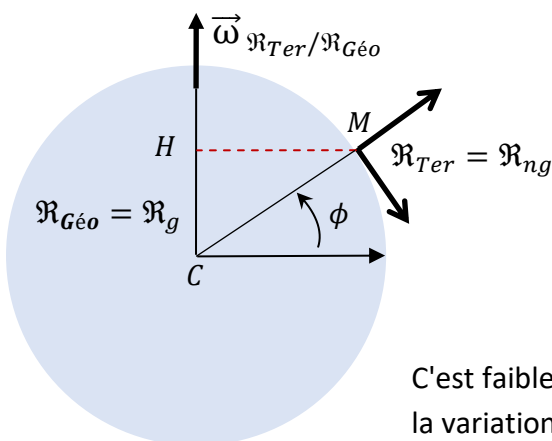
$$\vec{G}_T(r) = -\frac{gM_T \vec{e}_r}{(R_T+z)^2} = -\frac{gM_T \vec{e}_r}{R_T^2 \left(1+\frac{z}{R_T}\right)^2} \sim -\frac{gM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right) \vec{e}_r \quad \text{On observe une variation de 1\% en } z = 31,9 \text{ km}$$

$$5 \& 6) \quad \overrightarrow{grad}(\|\vec{G}_T(r)\|) = -\frac{2gM_T \vec{e}_r}{(R_T+z)^3} \sim -\frac{2gM_T \vec{e}_r}{R_T^3} \text{ si } z \ll R_T$$

Considérons un objet de longueur L , ses deux extrémités ne subissent pas la même force gravitationnelle. Si on s'intéresse au produit "**gradient de gravité** * L ", on a accès à la **différence des forces de gravité** subies par les extrémités de l'objet. Ceci est très utile dans le cas de la stabilisation d'un satellite ...

$$\left\| -\frac{2gM_T \vec{e}_r}{R_T^3} \right\| \sim 3,08 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2} = 3,08 \mu\text{gal.cm}^{-1} \text{ Valeur faible, sa mise en évidence nécessite grand soin.}$$

7-9) La force d'inertie a pour expression $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM} = mR_T \cos \phi \omega^2 \vec{u}$



$$\vec{G}_T \quad \text{Dirigé vers } C$$

$$\vec{g} = -\frac{gM_T \vec{e}_r}{R_T^2} + R_T \cos \phi \omega^2 \vec{u}$$

$$\text{A l'équateur, } \frac{\|\vec{a}_e\|}{\|\vec{G}_T\|} = \frac{R_T^3 \omega^2}{gM_T} = 0,345 \%$$

C'est faible mais pas tant que ça ! Il faut s'élever de 10 km pour que la variation due à l'altitude atteigne ce niveau.

10) La période des petites oscillations est $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, sa mesure nous permet d'accéder à g .

11) Lorsque l'horloge à Paris décrit 86400 périodes ($T_P = 1,0000 \text{ s}$), il s'est écoulé un jour (86400 s).

Alors qu'à Cayenne, lorsque l'horloge décrit 86400 périodes ($T_C = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_C}}$), il s'est écoulé 86548 s.

$$\text{On en déduit } T_C = 1,0017 \text{ s} \rightarrow g_C = g_P \frac{T_P^2}{T_C^2} = 9,78 \text{ m.s}^{-2}$$

Les valeurs de g sont différentes à Cayenne et à Paris pour plusieurs raisons :

- **La latitude** qui conditionne à la fois la force d'inertie (contribution négative à l'équateur) et le champ gravitationnel à cause de l'aplatissement de la Terre aux pôles (contribution positive à l'équateur)
- L'altitude qui contribue (faiblement) de façon négative : $\frac{\Delta g^{alt.}}{g} \sim \frac{2 \cdot 100}{6,7 \cdot 10^6} \sim 0,003 \%$
- Les forces de marée dues à la Lune et au Soleil
- La masse volumique hétérogène du sous-sol

12) $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \rightarrow \frac{u(g)}{g} = 2 \frac{u(T)}{T} \rightarrow \frac{u(T)}{T} \sim \frac{10^{-8}}{2 \cdot 9,8} \sim 5 \cdot 10^{-10}$ L'exigence est trop grande !

13) La raideur d'un ressort usuel est de $5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ environ. Prenons une masse de 50 g , l'élongation x du ressort à l'équilibre est de 10 cm environ : $\Delta x = \frac{m\Delta g}{k} = 1 \text{ nm}$! La technique n'est pas adaptée.

14) Un ressort de longueur nulle au repos permet de diminuer l'incertitude sur Δx car $x = l_{\text{eq}}$ et non plus $x = l_{\text{eq}} - l_0 \rightarrow u(\Delta x) = u(l_{\text{eq},2} - l_{\text{eq},1}) = \sqrt{2} u(l_{\text{eq}})$ au lieu de $u(\Delta x) = \sqrt{2} \sqrt{u^2(l_{\text{eq}}) + u^2(l_0)}$

15) Heu ? Si on en reparlait après la question 27 ? ! En faisant un effort d'imagination, on peut prédire qu'une variation de g se traduira par un angle θ à l'équilibre et une période d'oscillations différents ...

16 & 17) $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k(s - s_0)^2 - mga \sin \theta + cste \quad s = \sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta} \quad \text{Al-Kashi !}$

18) $\Gamma = mga \cos \theta - k(s - s_0) \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \left(mga - k(s - s_0) \frac{yb}{s} \right) = \cos \theta \left(mga - kyb + \frac{kys_0}{s} \right)$

19) La longueur "y" est ajustée afin d'atteindre l'équilibre pour tout θ . Si $\theta_{\text{eq}} \neq \frac{\pi}{2}$, $\Gamma = 0 \rightarrow g = \frac{kyb}{ma}$
Avec un ressort classique, $g = \frac{kyb}{ma} \left(1 - \frac{s_0}{s_{\text{eq}}} \right)$. La mesure serait possible mais nécessiterait la détermination de s_0 , s et de leur incertitude ... On abandonne l'idée ! Le ressort classique doit être tendu ($s_{\text{eq}} > s_0$)

20) $s = \sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin(\theta - \phi)} \quad \mathcal{E}'_p = \frac{1}{2} k(y^2 + b^2 + 2yb \sin(\theta - \phi)) - mga \sin \theta + cste$

21) Sans inclinaison, $\theta_{\text{eq}} = \frac{\pi}{2}$ et **peut** correspondre à un équilibre instable si $kyb > mga$ (cas de la figure)
Avec inclinaison, θ_{eq} vérifie la relation $kyb \cos(\theta_{\text{eq}} - \phi) = mga \cos \theta_{\text{eq}}$, cet équilibre est **toujours stable**.
La comparaison est biaisée mais nous répondrons ce que l'examineur veut lire :
L'inclinaison permet d'obtenir un équilibre **stable** à $\theta_{\text{eq}} \neq \frac{\pi}{2}$

22) $\Gamma' = mga \cos \theta - kyb \cos(\theta - \phi) = (mga - kyb \cos \phi) \cos \theta - kyb \sin \theta \sin \phi$

23 & 24) T.M.C. au système : $\ddot{\theta} + \frac{kyb\phi}{J} \theta = \frac{mga - kyb}{J} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{kyb\phi}{J}} \quad \theta_0 = \frac{mga - kyb}{kyb\phi} \left(= \frac{mga - kyb \cos \phi}{kyb \sin \phi} \right)$

25 & 26) $\phi = \frac{4\pi^2 J}{mg_0 a T^2} = \frac{4\pi^2 a}{g_0 T^2} = 9,9 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \quad \theta'_0 = \frac{m\Delta ga}{kyb\phi} = \frac{\Delta g}{g_0 \phi} \quad \left(\theta'_0 = \frac{m\Delta ga}{kyb \sin \phi} = \frac{\Delta g \cos \phi}{g_0 \sin \phi} \right)$
 $(mg_0 a = kyb) \quad (mg_0 a = kyb \cos \phi)$

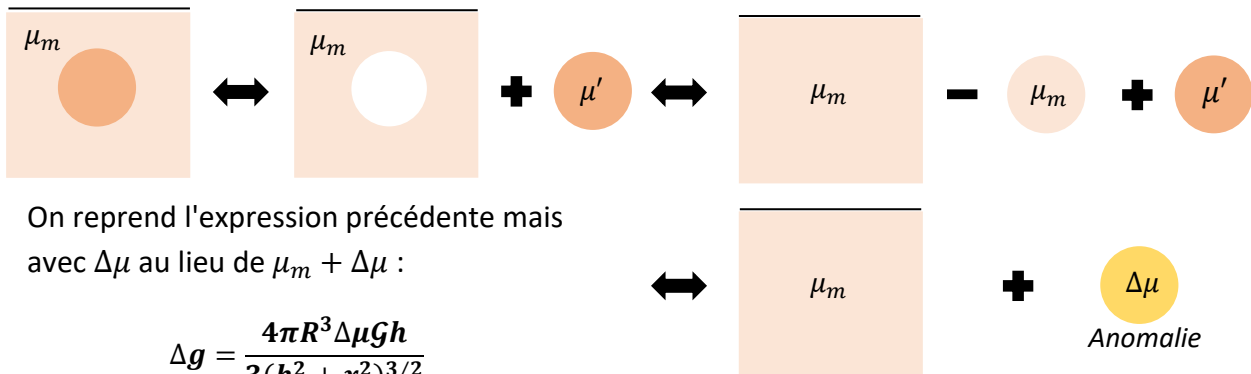
27) $\theta'_0 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \sim 0,34'$ L'angle est petit mais mesurable.

En goniométrie pure cela risque d'être un peu juste mais avec un grossissement, c'est tout à fait possible.

28) En assimilant le champ de pesanteur au champ gravitationnel $\vec{g}_B(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi R^3(\mu_m + \Delta\mu)G}{3r^2} \vec{e}_r$

$$29) g_{Bz} = \frac{4\pi R^3(\mu_m + \Delta\mu)G}{3r^2} \cos \theta = \frac{4\pi R^3(\mu_m + \Delta\mu)Gh}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

30-34) La distribution de masse peut être décomposée ainsi :



On reprend l'expression précédente mais avec $\Delta\mu$ au lieu de $\mu_m + \Delta\mu$:

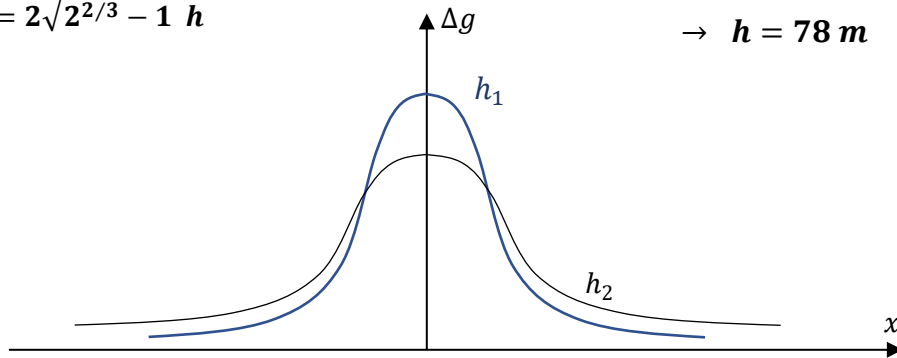
$$\Delta g = \frac{4\pi R^3 \Delta\mu G h}{3(h^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\Delta g_{max} = \frac{4\pi R^3 \Delta\mu G}{3h^2}$$

$$\Delta x_{mh} = 2\sqrt{2^{2/3} - 1} h$$

Dans le cas de la figure 8, $\Delta g_{max} = 0,28 \cdot 10^{-5} m \cdot s^{-2}$ et $\Delta x_{mh} = 120 m$

→ $h = 78 m$ Et $R = 39 m$



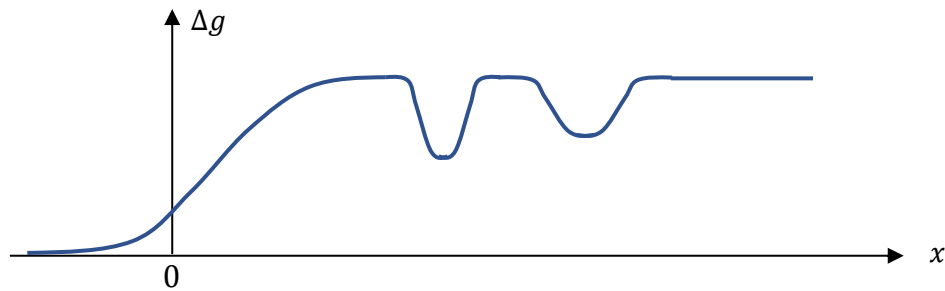
35 & 36) Le champ gravitationnel à l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique est le même que celui créé par la même masse placée au centre. Il suffit donc de placer **une boule d'or au centre** de la grotte sphérique, **la masse d'or étant égale à la masse de terre déblayée** !

On évalue $\mu_m \sim \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \rightarrow m = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu_m \sim \frac{R^3}{R_T^3} M_T = 23 \text{ tonnes}$ Ce résultat est surestimé car la croûte terrestre est moins dense ($\mu_m \sim 3 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$) $\rightarrow m = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu_m \sim 13 t$ ($R_{or} \sim 54 cm$)

A la cotation du 12 décembre 2019, cela représente un trésor de 500 millions d'euros ... Une pelle, vite !

La sensibilité des gravimètres n'est pas si fine, un gros écart autour de la valeur ne permettrait pas d'être démasqué : $\Delta m = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta\mu = \frac{h^2}{g} \Delta g = 2,4 t$ (La contribution de notre or au champ total est faible).

37) Les deux grottes créent deux **anomalies négatives**, la première étant la plus creuse :



38) $\rho j = E \rightarrow \rho \frac{I}{A} = \frac{U}{L} \rightarrow RI = U$ Avec $R = \frac{\rho L}{A}$

39) On évite ainsi des phénomènes capacitifs qui **accumuleraient des charges** aux abords des électrodes et qui **diminueraient la tension effectivement** appliquée.

40 & 41) Le milieu étant homogène, les lignes de courant sont **rectilignes**.

Le courant I se conserve à travers chaque **hémisphère** de rayon r : $j(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho I \vec{e}_r}{2\pi r^2} \rightarrow V = \frac{\rho I}{2\pi r}$

42) On superpose deux états semblables au précédent $(\vec{E}_A = \frac{\rho I \vec{e}_{rA}}{2\pi r_A^2} ; \vec{E}_B = -\frac{\rho I \vec{e}_{rB}}{2\pi r_B^2})$: $V(P) = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$

Les équipotentiels sont définies par l'équation $\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} = \text{cste}$

43 & 44) $\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{NA} + \frac{1}{NB} \right) \rightarrow f = \frac{1}{MA} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{NA} + \frac{1}{NB} \rightarrow f_{Wenner} = \frac{1}{l}$

45) $f_{Wenner} = 0,30 \text{ m}^{-1}$ Plaçons-nous aux points $M(-1,7;0)$ et $N(1,7;0)$, on lit $\Delta V = 2,4 \text{ V}$

$\rightarrow \rho = 1,0 \cdot 10^2 \Omega \cdot m$ L'accord est parfait !

46) Les lignes de courant sont des lignes de champ \vec{E} , elles sont donc **orthogonales aux équipotentiels**.

47) Si AB est faible, peu de lignes de courant traverseront la couche inférieure $\rightarrow \rho_{ap} = \rho_1$.

Si AB est très grande, la plupart des lignes de courant traverseront la couche inférieure sur une longue distance $\rightarrow \rho_{ap} = \rho_2$.

48) $\rho_1 = 400 \Omega \cdot m$ $\rho_2 = 40 \Omega \cdot m$ Nous allons donc suivre la courbe paramétrée par $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,1$

On relève figure 18 la valeur de $\frac{\rho_a}{\rho_1} = \frac{170}{400} \sim 0,43$ en $\frac{AB}{2} = 8,0 \text{ m}$.

L'intersection de la courbe paramétrée "0,1" avec l'horizontale "0,43" se produit en $\frac{AB}{2h_1} \sim 2,2$

On en déduit que h_1 est de l'ordre de 4 m .