

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

<u>Détection des ondes gravitationnelles</u>	2
I. <u>Interféromètre de Michelson</u>	2
A. <u>Interférences entre deux ondes monochromatiques cohérentes</u>	2
B. <u>Source monochromatique</u>	2
C. <u>Influence de la largeur spectrale du LASER</u>	3
II. <u>Prise en compte des fluctuations de puissance du LASER</u>	4
A. <u>Influence des fluctuations de puissance</u>	4
B. <u>Dispositif de POUND DREVER HALL</u>	5
C. <u>Filtrage du signal détecté - choix du filtre</u>	5
D. <u>Résultat du filtrage</u>	6
<u>Optique physique et photographie</u>	8
I. <u>L'énergie lumineuse</u>	8
II. <u>Courbe de noircissement d'une émulsion photosensible</u>	8
III. <u>Montage</u>	9
IV. <u>Dispersion de la lumière</u>	10
<u>Exercices de chimie</u>	11
I. <u>Magnésium et corrosion</u>	11
II. <u>Purification de l'acide nitrique</u>	12

Détection des ondes gravitationnelles

Le théorie d'Einstein de la relativité générale prévoit l'existence de phénomènes ondulatoires associés aux champ de gravitation : les ondes gravitationnelles. Depuis leur prédiction, en 1916 par EINSTEIN, aucune expérience n'a permis de détecter directement ces ondes. Les effets attendus sont en effet extrêmement faibles : en pratique, il faut déceler une variation de longueur avec une précision de l'ordre de 10^{21} ! Une telle précision semble aujourd'hui accessible à l'aide d'interféromètres de MICHELSON de très grandes dimensions (bras de plusieurs kilomètres). Les projets LIGO aux États-Unis et VIRGO en Europe devraient bientôt fournir leurs premières observations.

Conventions relatives au signal lumineux:

Une onde lumineuse monochromatique de pulsation ω est caractérisée par un signal lumineux s , dont la représentation complexe en un point M donné est de la forme $\underline{s}(M, t) = a \exp j(\omega t - \varphi(M))$ où a est l'amplitude constante de l'onde et $\varphi(M)$ sa phase au point considéré. L'éclairement I associé est relié au signal s par $I = |\underline{s}|^2$. On prendra $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ pour la vitesse de la lumière dans le vide.

I. Interféromètre de Michelson

A. Interférences entre deux ondes monochromatiques cohérentes

On étudie la superposition de deux ondes lumineuses monochromatiques, de même pulsation ω et de même amplitude a . Au point M considéré, l'onde 1 possède une phase $\varphi_1(M)$ et l'onde 2, une phase $\varphi_2(M)$.

1. Exprimer le signal lumineux $\underline{s}(M, t)$ résultant de la superposition de ces deux ondes au point M , en fonction de a , ω , t , $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$.
2. Montrer que l'éclairement observé en M peut s'écrire sous la forme : $I(M) = 2 I_0 [1 + \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))]$ et exprimer I_0 en fonction de a . Quel est le sens concret de I_0 ?
3. On pose $\delta \varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$. Démontrer la condition que doit vérifier $\delta \varphi(M)$ pour que soit observé en M un maximum d'éclairement ? A quelle condition sur $\delta \varphi(M)$ l'éclairement est-il minimal en M ?

B. Source monochromatique

La figure 1 représente le dispositif interférentiel utilisant un interféromètre de MICHELSON : la séparatrice, S , inclinée de 45° par rapport aux miroirs M_1 et M_2 est idéalisée : elle n'introduit aucun déphasage supplémentaire. L'interféromètre est supposé réglé en « lame d'air ». Les « bras » de l'interféromètre ont pour longueurs $d_1 = AB$ et $d_2 = AC$. On note $\delta_0 = 2(d_2 - d_1)$. Le bras 2 a une longueur fixée, notée $d_2 = L$. Le miroir M_1 peut être translaté (lors d'un « chariotage »). Le LASER utilisé comme source émet un faisceau très fin, parfaitement perpendiculaire à M_1 de sorte que les deux faisceaux qui émergent de l'interféromètre sont exactement superposés sur le détecteur.

Le LASER est tout d'abord supposé parfaitement monochromatique, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$.

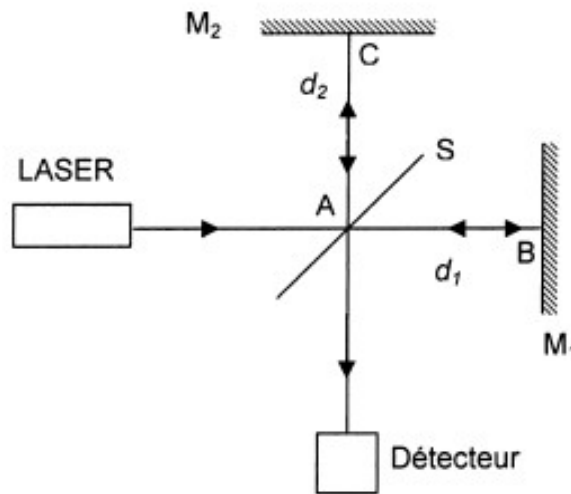


Figure 1 : Interféromètre de MICHELSON

L'éclairement reçu par le détecteur lorsque l'un des miroirs est occulté, est noté I_0 .

4. A quelle condition sur δ_0 dit-on que l'interféromètre de MICHELSON est au contact optique ? Décrire brièvement comment procéder pour déterminer le contact optique.
5. Exprimer l'éclairement $I(\delta_0)$ reçu par le détecteur, en fonction de I_0 , λ et δ_0 .

La théorie d' EINSTEIN de la relativité générale prévoit qu'une onde gravitationnelle provoque une variation de la longueur relative des bras, ce qui se traduit par un changement de différence de marche entre les deux signaux optiques qui interfèrent. En présence d'un onde gravitationnelle, la différence de marche entre les deux ondes optiques au niveau du détecteur devient : $\delta = \delta_0 + L \varepsilon$ où ε est appelée amplitude de l'onde gravitationnelle. C'est une quantité extrêmement petite, dont l'ordre de grandeur attendu est $\varepsilon = 10^{-21}$.

6. En effectuant un développement limité au premier ordre en ε déterminer la variation d'éclairement $\Delta I_{og} = I(\delta) - I(\delta_0)$ induite par l'onde gravitationnelle en fonction de I_0 , δ_0 , L , λ et ε .
7. L'éclairement I_0 étant donné, comment faut-il choisir δ_0 pour que la variation d'éclairement ΔI_{og} soit aussi grande que possible en valeur absolue ?
8. Pour améliorer la sensibilité de détection, il est intéressant de choisir une longueur L très grande. (pour les applications numériques, on prendra $L = 100$ km). Déterminer numériquement la variation relative $\frac{\Delta I_{og}}{I_0}$ maximale attendue pour $\varepsilon = 10^{-21}$.

En réalité, les miroirs et la séparatrice sont distants de « seulement » quelques kilomètres (trois kilomètres pour le projet européen VIRGO), mais la longueur effective des bras est allongée à l'aide d'un dispositif optique (interféromètre de Fabry-Pérot) non étudié ici.

C. Influence de la largeur spectrale du LASER

En fait le LASER n'est pas une source parfaitement monochromatique. Il possède une largeur spectrale non nulle. On le considère comme la superposition de sources quasi monochromatiques de pulsations ω . L'éclairement spectral en pulsation sera désigné par $I_{0\omega}$. Plus précisément, si l'un des miroirs de l'interféromètre est occulté (donc si une seule onde lumineuse parvient au détecteur), les composantes de pulsation comprises dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$ donnent sur le détecteur un éclairement $dI_0 = I_{0\omega} d\omega$. Considérons un LASER possédant un profil spectral rectangulaire en pulsation, de largeur $\Delta\omega$ centré sur la pulsation ω_0 , de la forme :

$$I_{0\omega} = K \text{ (constante) si } \omega \in [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}] \text{ et sinon } I_{0\omega} = 0.$$

9. Pourquoi est-il légitime de sommer les éclairements associés à des signaux de pulsations différentes? Exprimer l'éclairement total I_0 reçu par le détecteur, si l'un des miroirs est occulté, en fonction de K et $\Delta\omega$.

10. Supposons que la différence de marche entre les deux ondes soit δ . Si aucun des miroirs n'est occulté, exprimer l'éclairement dI associé aux composantes de pulsation situées dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$ en fonction de ω , δ , $I_{0\omega}$, c et $d\omega$.

11. En déduire que l'éclairement $I(\delta)$ au niveau du détecteur est de la forme:

$$I(\delta) = 2I_0 \left[1 + V(\delta) \cos\left(\frac{\omega_0 \delta}{c}\right) \right] \text{ et exprimer } V(\delta) \text{ en fonction de } \Delta\omega, \delta, c. \text{ Que vaut } V(\delta) \text{ si } \Delta\omega = 0? \text{ Commenter ce résultat.}$$

12. Quelle est la signification concrète du paramètre $|V(\delta)|$? Pour une valeur donnée de la largeur $\Delta\omega$, représenter $|V(\delta)|$ en fonction de δ , en faisant apparaître les points remarquables. Justifier que le phénomène d'interférences n'est plus décelable si la différence de marche δ est nettement plus grande, en valeur absolue, que la longueur caractéristique $\ell_c = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}$. Commenter.

Dans l'interféromètre réel, il est difficile de garantir que les longueurs des deux bras sont identiques à mieux que quelques mètres près. La différence de marche exacte de l'interféromètre δ_0 n'est donc pas connue précisément mais en tout état de cause, elle est inférieure à $\delta_{0,max} = 10$ m.

13. Déterminer en fonction de $\delta_{0,max}$ un ordre de grandeur de la largeur maximale $\Delta\omega_{max}$ permettant d'observer des interférences pour $\delta = \delta_{0,max}$. Estimer numériquement $\frac{\Delta\omega_{max}}{\omega_0}$.

On admet désormais que la largeur spectrale du LASER vérifie $\Delta\omega \ll \Delta\omega_{max}$ ce qui autorise à le considérer comme parfaitement monochromatique.

II. Prise en compte des fluctuations de puissance du LASER

A. Influence des fluctuations de puissance

La puissance du LASER n'est en fait pas rigoureusement constante au cours du temps, mais a tendance à fluctuer de façon aléatoire, ce qui fait varier la quantité I_0 .

14. Sous l'effet d'une fluctuation de puissance, l'éclairement I_0 devient $I_0 + \Delta I_0$. En supposant que $\varepsilon = 0$, déterminer la variation correspondante d'éclairement détecté ΔI_{fluc} en fonction de ΔI_0 , δ_0 et λ .
15. Comment doit-on choisir δ_0 pour que le signal détecté soit aussi insensible que possible aux fluctuations de puissance du LASER ? Comparer ce choix à la condition de détection optimale des ondes gravitationnelles établie à la question 7 et commenter.

B. Dispositif de POUND DREVER HALL

Le montage est modifié en intercalant sur chacun des bras une lame de verre, comme indiqué sur la figure 2. Les deux lames respectivement d'indices n_1 et n_2 possèdent exactement la même épaisseur e . Le dispositif fonctionne en présence d'une onde gravitationnelle d'amplitude ε .

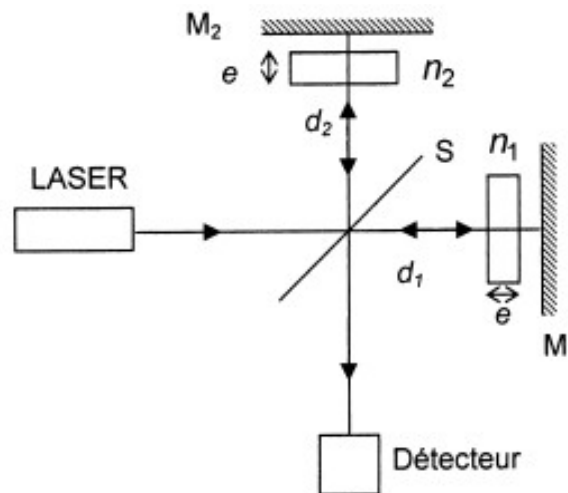


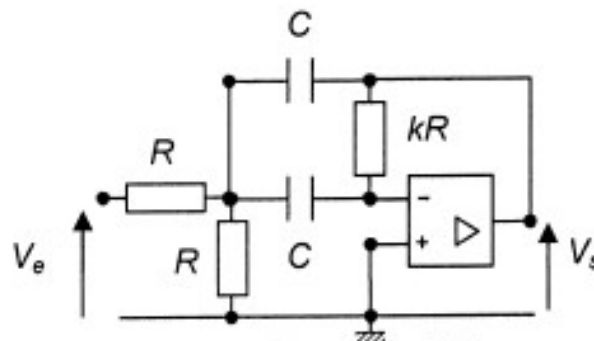
Figure 2 : Méthode de Pound Drever Hall

16. Exprimer la nouvelle différence de marche δ au niveau du détecteur en fonction de n_1 , n_2 , δ_0 , L , ε et e .
17. Les lames de verre sont en fait constituées d'un matériau dont l'indice de réfraction peut varier de façon contrôlée. On impose à n_1 et n_2 une variation sinusoïdale au cours du temps, à la pulsation Ω , selon : $n_1(t) = n - a_0 \cos(\Omega t)$ et $n_2(t) = n + a_0 \cos(\Omega t)$ où a_0 est une constante. Montrer que l'éclairement peut s'écrire : $I = 2 I_0 [1 + \cos(\Phi_0 + \alpha \varepsilon + 2 m \cos(\Omega t))]$ et exprimer les constantes Φ_0 , α et m en fonction de paramètres choisis parmi λ , L , a_0 , e et δ_0 .

C. Filtrage du signal détecté - choix du filtre

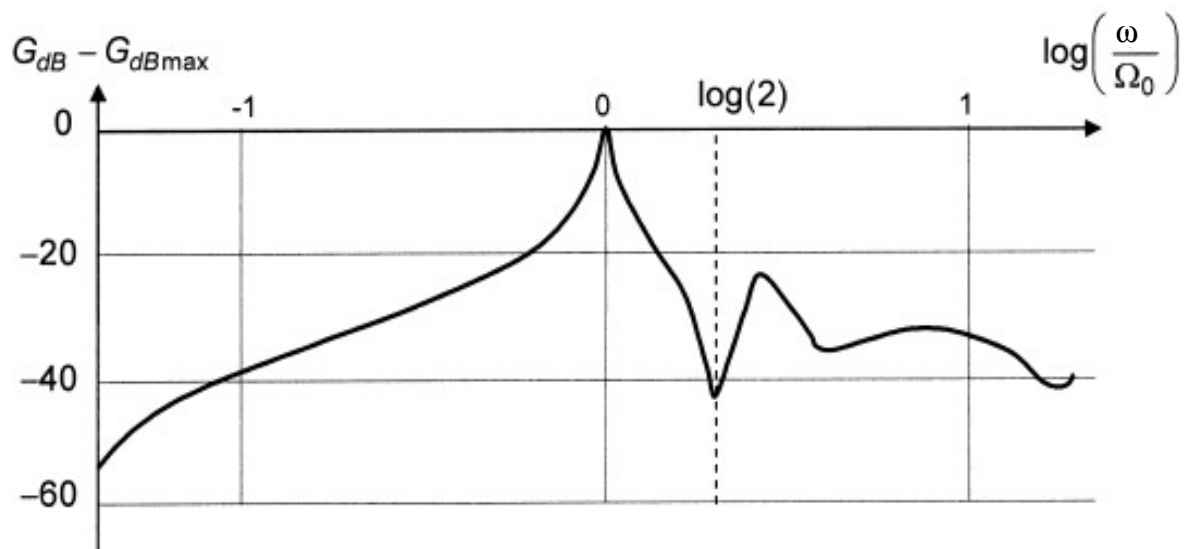
En « chariotant » le miroir M_1 , l'interféromètre est placé en position de « frange sombre », ce qui correspond à $\Phi_0 = \pi + 2K\pi$ où K est un entier. Il est alors possible de montrer (calcul non demandé) que, si $m \ll 1$, l'éclairement dépend du temps selon la loi : $I \approx 2 I_0 [m^2 + 2 m \alpha \varepsilon \cos(\Omega t) + m^2 \cos(2 \Omega t)]$. La chaîne de détection utilisée transforme ensuite l'éclairement reçu par le détecteur en une tension $V_d(t)$ proportionnelle à $I(t)$: $V_d(t) = \gamma I(t)$.

18. Déterminer la nature du filtre à utiliser pour arriver à détecter le seul terme mettant en évidence l'onde gravitationnelle.

**Figure 3 : Filtre**

19. Déterminer sans calcul la nature du filtre représenté sur la figure 3. Justifier le raisonnement avec beaucoup de précision. La tension d'entrée du filtre est en fait la tension délivrée par la chaîne de détection : $V_e(t) = V_d(t)$. Ce filtre peut-il convenir?

On utilise en réalité le filtre modifié, dont le diagramme de Bode est représenté sur la figure 4, ci-dessous :

**Figure 4 : Réponse expérimentale du filtre réel (projet LIGO)**

En pratique:

$$\Omega_0 = 1,6 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$G_{dB}(2\Omega_0) = G_{dBmax} - 43 \text{ dB} \quad (G_{dBmax} \text{ est le gain maximum du filtre})$$

20. Justifier le choix $\Omega_0 = \Omega$ afin d'extraire la composante gravitationnelle du signal.

D. Résultat du filtrage

21. Le signal de sortie $V_s(t)$ est la somme de deux composantes sinusoïdales de pulsations Ω et 2Ω d'amplitudes notées respectivement A_Ω et $A_{2\Omega}$. Déterminer ces amplitudes en

fonction de γ , I_0 , m , α , ε et des divers G_{dB} .

La tension de sortie $V_s(t)$ est encore filtrée pour obtenir une tension finale constante, fonction de I_0 et ε , qui s'écrit: $V(I_0, \varepsilon) = b A_{2\Omega} + A_\Omega$

22. Exprimer la variation $(\Delta V)_{fluc} = V(I_0 + \Delta I_0, 0) - V(I_0, 0)$ associée à une fluctuation ΔI_0 de l'éclairement du LASER.

23. Déterminer la variation $(\Delta V)_{og} = V(I_0, \varepsilon) - V(I_0, 0)$ associée à une onde gravitationnelle d'amplitude ε .

24. Application numérique: $\Delta I_0/I_0 = 10^{-5}$, $m=0,1$, $b=10^{-2}$, $\alpha = 5,9 \cdot 10^{11}$, $\varepsilon = 10^{-21}$. Évaluer numériquement le rapport: $\frac{(\Delta V)_{og}}{(\Delta V)_{fluc}}$. Peut-on détecter les ondes gravitationnelles malgré les fluctuations de puissance du LASER ?

Optique physique et photographie

Données :

célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

constante de Planck $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

I. L'énergie lumineuse

Une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ se propage dans le vide. Le champ électrique en un point (x, y, z) et à l'instant t est, en notation complexe:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \exp[j(kx - \omega t)] \vec{e}_y$$

où \vec{e}_y désigne le vecteur unitaire dirigé suivant l'axe y , et j l'unité des nombres imaginaires : $j^2 = -1$

1. Donner l'expression de la pulsation ω et de la norme du vecteur d'onde k . Application numérique.
2. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(x, y, z, t)$ associé.
3. Donner l'expression du vecteur de Poynting et de sa valeur moyenne temporelle en un point (x, y, z) donné.
4. La puissance moyenne transportée par l'onde, par unité de surface, est de 1 W.m^{-2} . A quelle amplitude E_0 du champ électrique ce flux énergétique correspond-il ? Application numérique.
5. A combien de photons par seconde et par mètre carré cette intensité correspond-elle ?

II. Courbe de noircissement d'une émulsion photosensible

On considère une réaction photochimique totale: $\gamma + A \rightarrow B$, de constante cinétique k , où A désigne le réactif, B le produit et γ un photon. On suppose que l'on peut traiter les photons comme une espèce chimique de concentration $[\gamma]$. La réaction est élémentaire, et sa cinétique est du second ordre. Le milieu est soumis à une irradiation constante de la part d'un faisceau lumineux, de sorte que la "concentration" $[\gamma]$ peut être considérée comme constante et proportionnelle à la valeur moyenne du carré du champ électrique $\langle \vec{E}^2 \rangle$.

6. Écrire une équation cinétique pour les concentrations $[A](t)$ et $[B](t)$ des espèces A et B .
7. A l'instant $t = 0$, la concentration de A est $[A]_0$, uniforme, et $[B]_0 = 0$. On appelle τ le temps d'exposition, c'est-à-dire le temps durant lequel la réaction photochimique a lieu. Exprimer les concentrations $[A](\tau)$ et $[B](\tau)$ des espèces A et B en fonction de $[A]_0$, τ , $[\gamma]$ et k .
8. La réaction $\gamma + A \rightarrow B$ provoque le noircissement d'un film photographique. On appelle "opacité" du film, après développement, le rapport entre l'intensité lumineuse transmise à travers le film et l'intensité lumineuse incidente. Le développement du film ne révèle une exposition que si la

concentration $[B]$ est supérieure à une valeur de seuil b , et on fait l'hypothèse que l'opacité est proportionnelle à la différence $[B] - b$. Un film non exposé présente toujours un léger voile d'opacité égale à v . Montrer que ce modèle rend compte qualitativement de la courbe de noircissement d'un film photographique schématisée sur la figure 1.

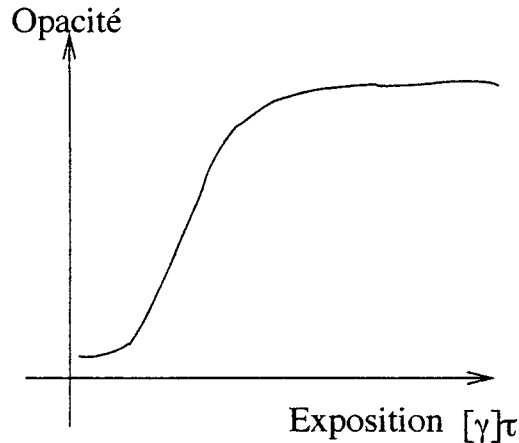


Figure 1

III. Montage

Un laser de longueur d'onde λ est utilisé dans le montage de la figure 2. Un dispositif optique forme une onde plane monochromatique, puis une lame semi-réfléchissante (en A) sépare le faisceau en deux. Après une réflexion en B , le faisceau numéro 2 vient interférer avec le faisceau numéro 1. On a représenté sur la figure les rayons arrivant en M_0 . On néglige le déphasage dû à la lame semi-réfléchissante et on admet que les réflexions en A et B ne changent pas la phase. On introduit la distance $L = AM_0$ et l'angle θ .

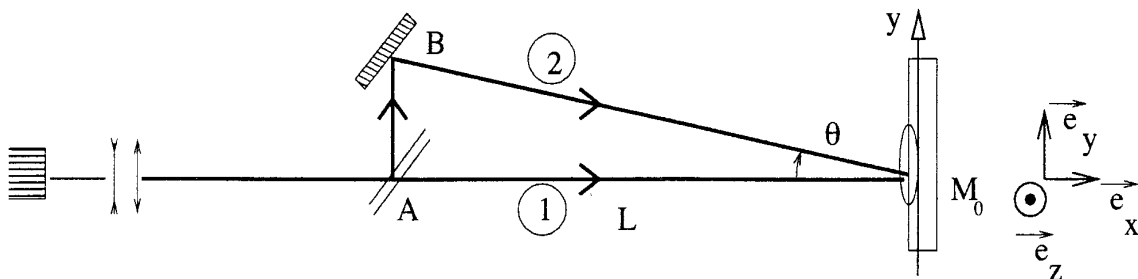


Figure 2

9. Qu'observe-t-on sur l'écran ? Illustrer par un schéma.
10. Pourquoi utilise-t-on une seule source de lumière et une lame semi-réfléchissante plutôt que deux sources de lumière pour les rayons 1 et 2 ?
11. Le point M_0 a pour coordonnées $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$. Exprimer la différence de marche entre le rayon 1 et le rayon 2 qui interfèrent en M_0 , en fonction de L et θ .
12. On s'intéresse maintenant au déphasage existant en un point M de coordonnées $(0, y, z)$ voisin de M_0 . En supposant que les faisceaux 1 et 2 sont des ondes planes monochromatiques dont les directions font entre elles un angle θ , calculer la différence de phase $\Phi_2 - \Phi_1$ entre les deux

ondes et montrer que $\Phi_2 - \Phi_1 = C - \frac{y}{a}$ où a est à exprimer à l'aide de λ et θ .

13. Le champ électrique en y vaut: $E(y) = E_0 \mathcal{R}_e(\exp j(\Phi_1(y) - \omega t) + \exp j(\Phi_2(y) - \omega t))$.

Calculer l'intensité lumineuse définie ici par $\langle \vec{E}(y)^2 \rangle$, en un point $M(0, y, z)$ proche de M_0 . On notera $I_0 = E_0^2$.

14. On place sur l'écran un film photographique. Après développement, le film présente une succession de bandes transparentes et opaques. Combien de bandes transparentes par millimètre apparaissent sur le film ? Application : $\theta = 30^\circ$.

IV. Dispersion de la lumière

Le film photographique de la question précédente, après développement, est éclairé par l'arrière (à gauche sur la figure 3) par un faisceau monochromatique cohérent de longueur d'onde λ . On s'intéresse à l'onde transmise et on applique le théorème de Huyghens-Fresnel à la surface du film. Chaque point du film se présente comme une source secondaire cohérente d'amplitude :

$S(y, z) = A + B \cos\left(\frac{2\pi y}{i}\right)$, A, B, i sont supposés connus. Le film selon y est compris entre $-\frac{d}{2}$ et $+\frac{d}{2}$.

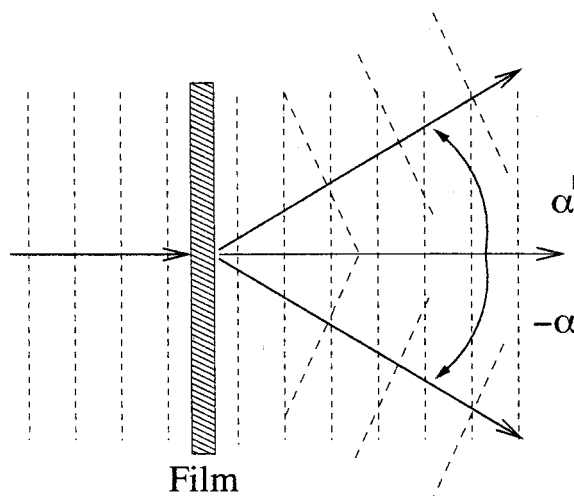


Figure 3

15. Déterminer l'onde transmise et montrer qu'elle fait apparaître trois termes qui correspondent à trois ondes planes, l'une se propageant horizontalement, les deux autres respectivement suivant un angle α et $-\alpha$ avec l'horizontale.

16. On remplace le faisceau de longueur d'onde λ par un faisceau de longueur d'onde λ' différente. Montrer que l'angle α est modifié en α' . Écrire une relation entre λ , λ' , α et α' . En déduire que ce film photographique possède le pouvoir de disperser la lumière blanche ou polychromatique. Comment s'appelle un tel dispositif optique ?

Exercices de chimie

I. Magnésium et corrosion

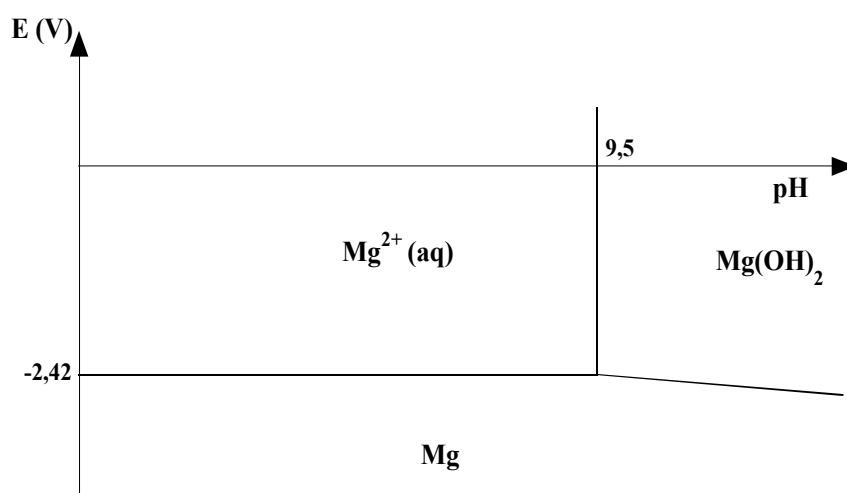
Données:

potentiel standard: $E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,44 \text{ V}$

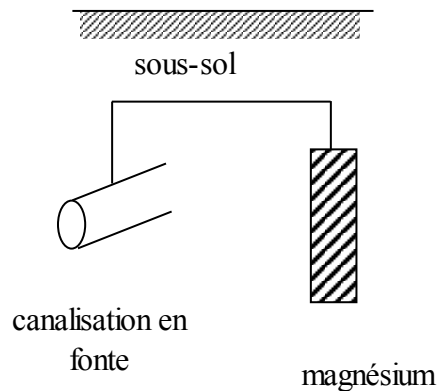
constante d'autoprotolyse de l'eau: $K_e = 10^{-14}$

$$\frac{2,302 RT}{F} = 0,060 \text{ V}$$

Le diagramme potentiel-pH du magnésium est tracé ci-dessous pour une concentration de travail $c_{\text{tr}} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.



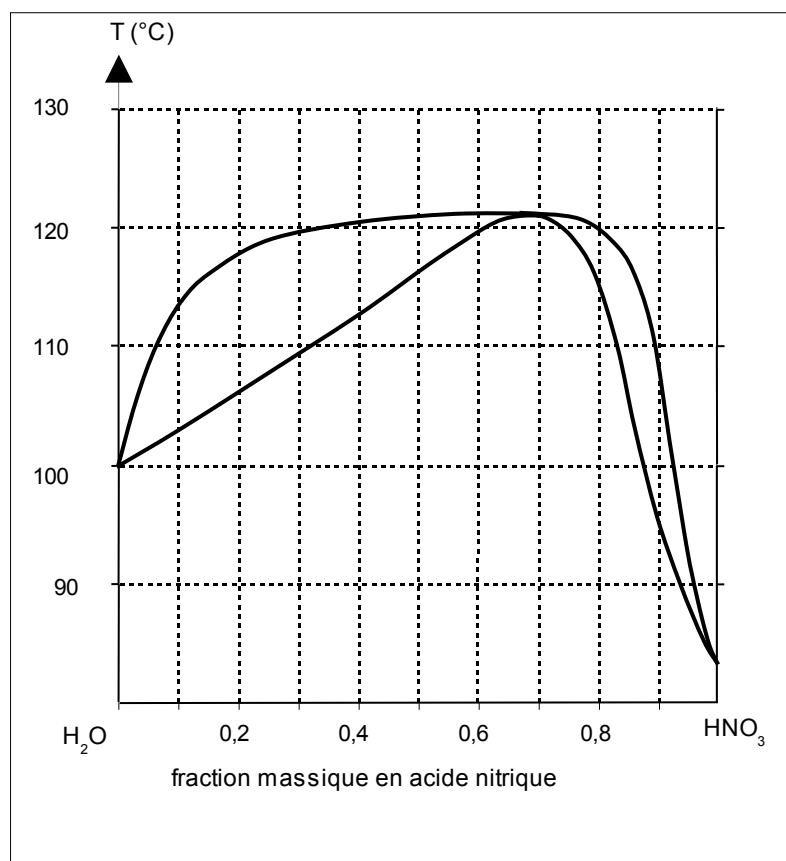
1. Définir les termes corrosion, immunité, passivation. Indiquer dans quelle(s) zone(s) du diagramme intervient chacun de ces phénomènes ?
2. Déterminer le potentiel standard du couple Mg^{2+}/Mg d'après le diagramme potentiel-pH.
3. Calculer le produit de solubilité K_s de l'hydroxyde de magnésium Mg(OH)_2 .
4. Une canalisation en fonte (alliage à base de fer) est enterrée dans le sol. Pour la protéger de la corrosion on la relie à une électrode de magnésium elle aussi enterrée. La canalisation en fonte est ainsi protégée de la corrosion. Justifier avec précision pour quelle raison. Écrire les demi-réactions au niveau de chaque métal dans le sens effectif. Quel rôle joue l'électrode de magnésium : est-elle anode ou cathode ? Comment s'appelle ce mode de protection ?



5. Exprimer la durée de vie t d'une électrode en fonction de sa masse m , de l'intensité du courant de protection I , de la constante de Faraday \mathcal{F} et de la masse molaire du magnésium.

II. Purification de l'acide nitrique

Une solution d'acide nitrique contient $x_0 = 40\%$ d'acide nitrique en masse. La courbe d'ébullition isobare (sous 1 bar) du mélange acide nitrique-eau est indiquée ci-dessous.



1. Indiquer à quels états du mélange correspondent les quatre domaines du diagramme. (le reproduire rapidement sur la copie). Comment s'appelle le point A situé à l'intersection de ces quatre domaines ? Ses coordonnées sont $x_A = 68,4\%$ et $T_A = 122\text{ °C}$.
2. Le mélange contenant 40 % d'acide nitrique en masse est chauffé lentement. Quelle est sa température d'ébullition ? Quelle est la fraction massique d'acide nitrique de la première bulle de vapeur ?

Le mélange est introduit dans une colonne à distiller. Le gaz s'élève lentement dans cette colonne et le liquide y descend, le mélange restant constamment à l'équilibre thermique dans la zone de colonne où il se trouve. La température est inhomogène dans cette colonne ; la température au sommet est T_h et la température à la base, T_b .

3. Où se trouvent la température la plus haute et la température la plus basse ? Justifier. Que valent ces températures T_h et T_b ? Quelles sont les compositions des deux phases obtenues aux extrémités de la colonne ?
 4. Une masse de mélange égale à 1 kg est introduite dans la colonne. Quelle est la masse de solution acide récupérée, une fois que le mélange est entièrement séparé ?
 5. Pour obtenir de l'acide nitrique pur, il faut utiliser un corps susceptible d'absorber l'eau de la solution. Quel composé connaissez-vous, qui soit apte, de par son caractère hydrophile, à remplir ce rôle ?
-

RéponsesDétection des ondes gravitationnelles

$$1) \Delta(M, t) = a \exp j(\omega t - \varphi_1(M)) + a \exp j(\omega t - \varphi_2(M))$$

$$\Delta(M, t) = a \exp j\omega t (\exp -j\varphi_1(M) + \exp -j\varphi_2(M))$$

$$2) I(M) = |\Delta|^2.$$

$$= \Delta \Delta^*$$

$$= a^2 (\exp -j\varphi_1 + \exp -j\varphi_2) (\exp j\varphi_1 + \exp j\varphi_2)$$

$$= a^2 (1 + 1 + \exp j(\varphi_2 - \varphi_1) + \exp -j(\varphi_2 - \varphi_1))$$

$$I(M) = 2a^2 (1 + \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)))$$

on pose $I_0 = a^2$

C'est l'intensité de l'onde 1 ou l'intensité de l'onde 2

$$3) \text{ Maximum si } \cos \delta\varphi = 1 \quad (I = 4I_0)$$

$$\delta\varphi_{\max} = n 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Minimum si } \cos \delta\varphi = -1 \quad (I = 0)$$

$$\delta\varphi_{\min} = \pi + n 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

4) La différence de marche vaut :

$$\delta_{2/1} = 2(d_2 - d_1)$$

$$\delta_{2/1} = \delta_0$$

Au contact optique $d_2 = d_1$ donc

$$\delta_0 = 0$$

réglage :

- L'interféromètre étant "en lame d'air" est éclairé avec une source étendue
On observe des anneaux

- Pour l'anneau d'ordre p ,

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2(d_2 - d_1) \cos i}{\lambda}$$

- Si l'on se rapproche, en chariotant, du contact optique $(d_2 - d_1)$ diminue et donc $\cos i$ augmente si on suit l'anneau d'ordre p . Ce qui veut dire que i (donc le rayon de l'anneau) diminue.

Les anneaux vont mourir au centre

- Si l'on s'éloigne du réglage correct, les anneaux semblent au contraire surgir du centre.
- Le réglage est correct lorsque l'on obtient une teinte uniforme (teinte plate)

$$5) \quad I(\delta_0) = 2 I_0 (1 + \cos \delta \varphi)$$

$$I(\delta_0) = 2 I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta_0}{\lambda} \right)$$

$$\begin{aligned} 6) \quad I(\delta) &= 2 I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi(\delta_0 + L\varepsilon)}{\lambda} \right) \\ &= 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi \delta_0}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi L\varepsilon}{\lambda} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sin \left(\frac{2\pi \delta_0}{\lambda} \right) \sin \left(\frac{2\pi L\varepsilon}{\lambda} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{au premier ordre en } \varepsilon : \cos \left(\frac{2\pi L\varepsilon}{\lambda} \right) = 1$$

$$\sin \left(\frac{2\pi L\varepsilon}{\lambda} \right) = \frac{2\pi L\varepsilon}{\lambda}$$

$$I(\delta) = 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi \delta_0}{\lambda} \right) - \frac{2\pi L\varepsilon}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi \delta_0}{\lambda} \right) \right)$$

$$\Delta I_{0g} = I(\delta) - I(\delta_0)$$

$$\Delta I_{0g} = - \frac{4\pi L\varepsilon I_0}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi \delta_0}{\lambda} \right)$$

7) ΔI_{og} grand en valeur absolue si

$$\sin \frac{2\pi \delta_0}{\lambda} = \pm 1$$

$$\frac{2\pi \delta_0}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\delta_0 = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad \left| \frac{\Delta I_{\text{og}}}{I_0} \right|_{\text{max}} &= \frac{4\pi L E}{\lambda} \\ &= \frac{4\pi \cdot 100 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-21}}{1,06 \cdot 10^{-6}} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\Delta I_{\text{og}}}{I_0} \right|_{\text{max}} = 1,19 \cdot 10^{-9}$$

Cette variation est très faible et l'expérience pour la mettre en évidence est difficile.

9) On sait que des signaux de pulsations différentes n'interfèrent pas et que l'on doit alors sommer les intensités

Pour un miroir seul,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\omega=0}^{\infty} I_{0\omega} d\omega \\ &= \int_{\omega=\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} K d\omega \end{aligned}$$

$$I_0 = K \Delta\omega$$

$$10) \quad dI = 2 dI_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \lambda &= c T \\ &= c \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

$$dI = 2 I_{0\omega} d\omega \left(1 + \cos \frac{\omega \delta}{c} \right)$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad I &= \int_{\omega=0}^{\infty} 2 I_{0\omega} d\omega (1 + \cos \frac{\omega \delta}{c}) \\
 &= \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} 2 K (1 + \cos \frac{\omega \delta}{c}) d\omega \\
 &= 2 \frac{I_0}{\Delta\omega} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} (1 + \cos \frac{\omega \delta}{c}) d\omega \\
 &= 2 \frac{I_0}{\Delta\omega} \left(\Delta\omega + \left[\frac{\sin \frac{\omega \delta}{c}}{\frac{\delta}{c}} \right]_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \right) \\
 &= 2 I_0 \left(1 + \frac{\frac{\delta}{c} \left(\sin \left(\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) \frac{\delta}{c} \right) - \sin \left(\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) \frac{\delta}{c} \right) \right)}{\Delta\omega} \right) \\
 &= 2 I_0 \left(1 + \frac{2 \sin \left(\frac{\Delta\omega \delta}{2c} \right) \cos \frac{\omega_0 \delta}{c}}{\frac{\Delta\omega \delta}{c}} \right) \\
 \boxed{I} &= 2 I_0 \left(1 + \underbrace{\sin C \left(\frac{\Delta\omega \delta}{2c} \right)}_{V(\delta)} \cos \frac{\omega_0 \delta}{c} \right)
 \end{aligned}$$

avec

$$\boxed{V(\delta) = \sin C \left(\frac{\Delta\omega \delta}{2c} \right)}$$

Si $\Delta\omega = 0$, on trouve $V(\delta) = 1$ $\left(\left(\frac{\sin x}{x} \right)_{x=0} = 1 \right)$

soit $I = 2 I_0 (1 + \cos \frac{\omega_0 \delta}{c})$

on retrouve effectivement l'intensité pour une source monochromatique

12) Si on cherche la valeur du contraste pour δ

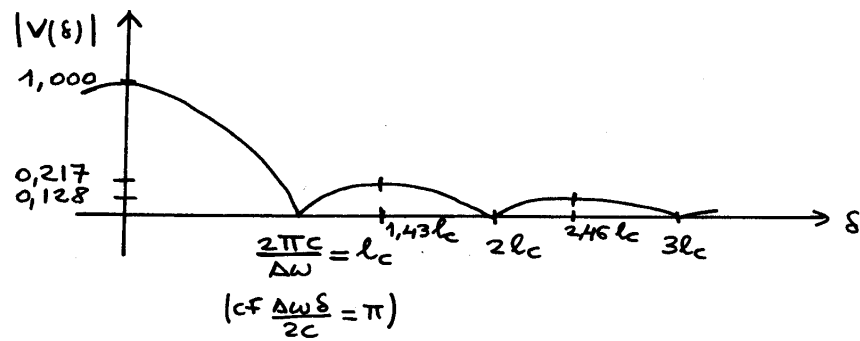
$$C(\delta) = \frac{I_{MAX}(\delta) - I_{MIN}(\delta)}{I_{MAX}(\delta) + I_{MIN}(\delta)}$$

(I_{MAX} est la valeur du maximum pour δ , s'il y avait un maximum local en δ

I_{MIN} idem mais pour un minimum)

$$= \frac{2 I_0 (1 + |V(\delta)|) - 2 I_0 (1 - |V(\delta)|)}{2 I_0 (1 + |V(\delta)|) + 2 I_0 (1 - |V(\delta)|)}$$

$$\boxed{C(\delta) = |V(\delta)|}$$



Si le contraste devient trop faible, les interférences ne sont plus visibles. C'est le cas si l'on se trouve sur le lobe 2 ou les suivants donc si $s > l_c$ (longueur de cohérence)

remarque : le modèle adopté ici (raie à profil rectangulaire) indique les interférences reviennent (faiblement) pour $s > l_c$.

Ce modèle est en fait simplifié et dans la réalité pour $s >$ longueur de cohérence (ex : longueur du train d'onde) les interférences ne reviennent plus car il n'y a plus de cohérence temporelle.

13)

$$s < l_c$$

$$s_0 < \frac{2\pi c}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\omega < \frac{2\pi c}{s_0}$$

et pour le $s_{0,\max} = 10\text{ m}$

$$\Delta\omega_{\max} = \frac{2\pi c}{s_{0,\max}}$$

$$\frac{\Delta\omega_{\max}}{\omega_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0 s_{0,\max}}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\frac{\Delta\omega_{\max}}{\omega_0} = \frac{\lambda}{s_{0,\max}}$$

$$\text{A.N.} = \frac{1,06 \cdot 10^{-6}}{10}$$

$$\frac{\Delta \omega_{\max}}{\omega_0} = 9,106 \cdot 10^{-6}$$

14) $I = 2 I_0 (1 + \cos \frac{\omega_0}{c} \delta) \rightarrow \delta = \delta_0$
 $\Delta I_{\text{fluc}} = 2 \Delta I_0 (1 + \cos \frac{\omega_0}{c} \delta_0)$
 $\Delta I_{\text{fluc}} = 2 \Delta I_0 (1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} \delta_0))$

15) Le signal est insensible aux fluctuations du laser si $\Delta I_{\text{fluc}} = 0$

soit

$$\cos(\frac{2\pi}{\lambda} \delta_0) = -1$$

$$\frac{2\pi \delta_0}{\lambda} = (2n' + 1)\pi \quad n' \in \mathbb{Z}$$

$$\delta_0 = (2n' + 1) \lambda / 2$$

condition incompatible avec celle de détection optimale

$$\delta_0 = (2n + 1) \lambda / 4$$

Puisque l'on veut favoriser la détection des ondes gravitationnelles on favorisera $\delta_0 = (2n + 1) \lambda / 4$.

Il faudra donc développer des moyens importants pour stabiliser la puissance du laser au mieux.

16) Au lieu de
on aura

$$\delta_0 = 2(d_2 - d_1)$$

$$\delta = 2[(d_2 + (n_2 - 1)e) - (d_1 + (n_1 - 1)e)] + L\varepsilon$$

$$\delta = \delta_0 + 2(n_2 - n_1)e + L\varepsilon$$

17) $n_1 = n - a_0 \cos(\Omega t)$

$n_2 = n + a_0 \cos(\Omega t)$

donc

$$\delta = \delta_0 + 4a_0 \cos(\Omega t) e + L\varepsilon$$

$$I = 2 I_0 (1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_0 + 4a_0 e \cos(\Omega t) + L\varepsilon))$$

$$I = 2 I_0 (1 + \cos(\phi_0 + 2m \cos(\Omega t) + \alpha \varepsilon))$$

avec

$\phi_0 = \frac{2\pi\delta_0}{\lambda}$
$m = \frac{4\pi a_0 e}{\lambda}$
$\alpha = \frac{2\pi L}{\lambda}$

remarque :

$$\begin{aligned}
 I &= 2 I_0 (1 + \cos(\phi_0 + \alpha E + 2m \cos \Omega t)) \\
 &= 2 I_0 (1 + \cos(\phi_0 + \alpha E) \cos(2m \cos \Omega t) \\
 &\quad - \sin(\phi_0 + \alpha E) \sin(2m \cos \Omega t))
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \phi_0 = \pi + 2k\pi$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 I_0 (1 - \cos(\alpha E) \cos(2m \cos \Omega t) \\
 &\quad + \sin(\alpha E) \sin(2m \cos \Omega t))
 \end{aligned}$$

au premier ordre en E

$$= 2 I_0 (1 - \cos(2m \cos \Omega t) + \alpha E \sin(2m \cos \Omega t))$$

au deuxième ordre en m

$$= 2 I_0 \left(\frac{(2m \cos \Omega t)^2}{2} + \alpha E 2m \cos \Omega t \right)$$

$$\text{avec } \cos^2 \Omega t = \frac{1 + \cos(2\Omega t)}{2}$$

$$I = 2 I_0 (m^2 + m^2 \cos(2\Omega t) + 2m\alpha E \cos(\Omega t))$$

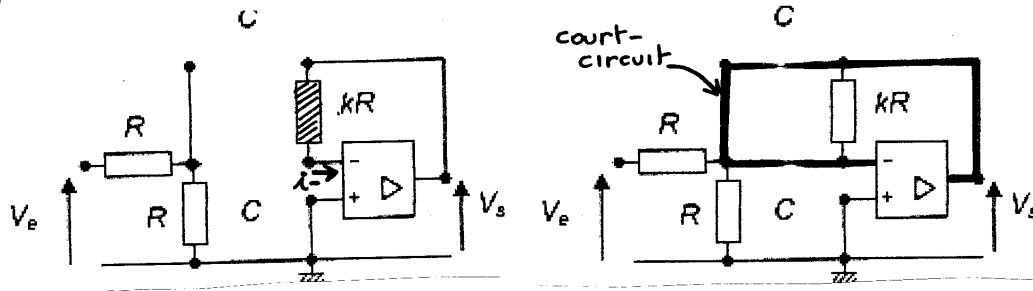
18) Pour ne conserver que le terme en E , il faut garder le terme de pulsation Ω :

- éliminer le terme continu (pulsation nulle)
- éliminer le terme de pulsation 2Ω

Ceci peut se faire avec un filtre passe bande centré sur la pulsation Ω

(dans les A.N., on trouve Ω correspond à $f = 25,5 \text{ MHz}$.
 Il faut donc garder le $25,5 \text{ MHz}$ et éliminer le
 $2f = 50,9 \text{ MHz}$)

19)



basse fréquence

$$\omega \approx 0$$

→ Les condensateurs sont des interrupteurs ouverts
 (cf $Z = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \infty$)

$$\rightarrow v_+ = 0$$

$$v_s - v^- = KR \underbrace{v^-}_{\text{nul}} = 0$$

$$v_+ = v^- = 0$$

finalement :

$$v^- = v^+ = 0$$

$$v_s = v^- = 0$$

$$\boxed{v_s = 0}$$

haute fréquence

$$\omega \approx \infty$$

→ Les condensateurs sont des interrupteurs fermés
 (cf $Z = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow 0$)

$$\rightarrow v_+ = 0$$

$$v_s = v^- \quad (\text{cf court-circuit})$$

$$v_+ = v^- = 0$$

finalement :

$$v_+ = v^- = v_s = 0$$

$$\boxed{v_s = 0}$$

Ce filtre est un passe-bande (du deuxième ordre) et
pourrait convenir.

20) Le filtre présente un gain max (résonance) en Ω_0
 et une antirésonance en $2\Omega_0$.

on fera donc $\Omega = \Omega_0$ afin d'amplifier au maximum
le signal cherché et de couper au maximum la pulsation
 $2\Omega_0$.

$$21) \quad v_e = \gamma I_o (m^2 + 2m\alpha \varepsilon \cos(\omega t) + m^2 \cos(2\omega t))$$

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \frac{V_{s\nu}}{V_{e\nu}} \\ V_{s\nu} &= V_{e\nu} 10^{G_{dB}/20} \end{aligned}$$

$$A_{1L} = \gamma I_o 2m\alpha \varepsilon 10^{G_{dB}(\omega_0)/20}$$

$$A_{2R} = \gamma I_o m^2 10^{G_{dB}(2\omega_0)/20}$$

finalemment

$$\begin{aligned} V_s = V(I_o, \varepsilon) &= b \gamma I_o m^2 10^{G_{dB}(2\omega_0)/20} \\ &+ \gamma I_o 2m\alpha \varepsilon 10^{G_{dB}(\omega_0)/20} \end{aligned}$$

$$22) \quad \Delta V_{fluc} = b \gamma \Delta I_o m^2 10^{G_{dB}(2\omega_0)/20}$$

$$23) \quad \Delta V_{org} = \gamma I_o 2m\alpha \varepsilon 10^{G_{dB}(\omega_0)/20}$$

$$24) \quad \frac{\Delta V_{org}}{\Delta V_{fluc}} = \frac{I_o}{\Delta I_o} \frac{2\alpha \varepsilon}{b m} 10^{\frac{G(\omega_0) - G_{dB}(2\omega_0)}{20}}$$

$$A.N. = 10^5 \frac{2 \cdot 5,5 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-21}}{10^{-2} \cdot 9,1} 10^{\frac{43}{20}}$$

$$\frac{\Delta V_{org}}{\Delta V_{fluc}} = 16,7$$

ce qui semble détectable.

Optique physique et photographie

1)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

A.N.

$$= \frac{2\pi}{0,6 \cdot 10^{-6}}$$

$$k = 1,05 \cdot 10^7 \text{ rad m}^{-1}$$

$$\omega = k c$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

A.N.

$$= \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{0,6 \cdot 10^{-6}}$$

$$\omega = 3,14 \cdot 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$$

2) C'est une OPPM donc $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad \text{avec} \quad \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_x \wedge E \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \exp j(kx - \omega t) \vec{e}_z$$

3) $\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ (en réel)

$$= \frac{E \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z}{\mu_0}$$

$$\vec{\pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

4) On donne $\langle \pi \rangle$ (puissance moyenne par unité de surface)

$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \langle \pi \rangle}$$

A.N.

$$= \sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1}$$

$$E_0 = 27,5 \text{ V m}^{-1}$$

- 5) L'énergie d'un photon est $h\nu$ soit $h \frac{c}{\lambda}$ donc le nombre de photons par seconde et par m^2 vaut :

$$N = \frac{\langle \pi \rangle}{h c / \lambda}$$

$$A.N. = \frac{1}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 0,6 \cdot 10^{-6}}$$

$$N = 3,02 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

- 6) $A + \gamma \rightarrow B$ réaction élémentaire donc

$$-\frac{d[A]}{dt} = \frac{d[B]}{dt} = k[\gamma][A]$$

7) Pour $[A]$

$$-\frac{d[A]}{[A]} = k[\gamma] dt$$

\uparrow
cste

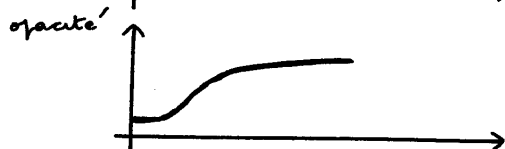
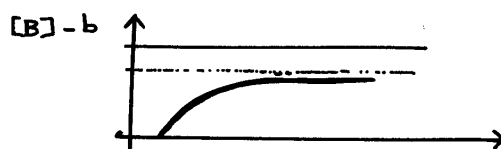
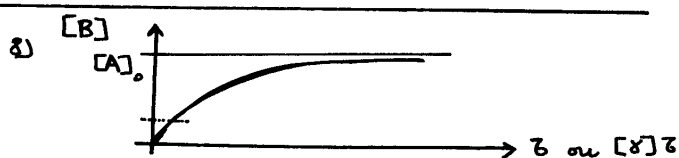
$$\ln \frac{[A]_0}{[A]} = k[\gamma] t \quad \text{d'où :}$$

$$[A]_t = [A]_0 \exp(-k[\gamma] t)$$

de plus

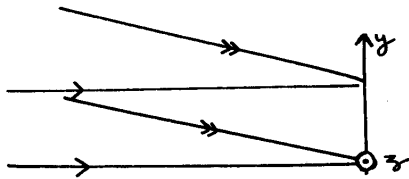
$$[A] + [B] = [A]_0 \quad \text{donc :}$$

$$[B]_t = [A]_0 (1 - \exp(-k[\gamma] t))$$



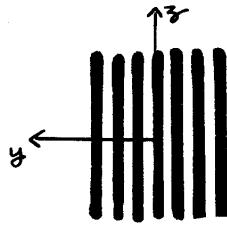
et en tenant compte du voile v toujours présent

9)



Il y a des interférences entre les deux faisceaux cohérents puisque provenant de la même source.

La différence de marche dépendra de y . Les franges sont donc rectilignes (correspondant à $y = \text{cte}$) selon z .



- 10) Deux sources différentes ne sont pas cohérentes. On ne verrait que l'addition des intensités lumineuses correspondant à chaque source et il n'y aurait pas d'interférences.

11)

$$\delta_{2/1}(M_0) = AB + BM_0 - AM_0$$

(l'indice vaut 1)

$$= L \tan(\theta) + \frac{L}{\cos(\theta)} - L$$

$$\delta(M_0) = L \left(\frac{\sin\theta + 1}{\cos\theta} - 1 \right)$$

12)

$$\phi_2 - \phi_1(M) = \frac{2\pi\delta(M_0)}{\lambda} + \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{M_0M} - \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{M_0M}$$

$$= \frac{2\pi\delta(M_0)}{\lambda} + (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \overrightarrow{M_0M}$$

$$\begin{array}{c|c} \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z & \begin{array}{l} k \cos\theta - k \\ -k \sin\theta \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{l} 0 \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

$$= \frac{2\pi\delta(M_0)}{\lambda} - k \sin\theta \quad y$$

$$\boxed{\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi \delta(M_0)}{\lambda} - \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} y}$$

$$= C - \frac{1}{2} y$$

avec :

$$a = \frac{\lambda}{2\pi \sin \theta}$$

13) En utilisant les définitions du texte :

- Pour une onde: $E = E_0 \cos(\omega t - \phi)$

$$E^2 = E_0^2 \cos^2(\omega t - \phi)$$

$$I_{\text{seule onde}} = \frac{E_0^2}{2} = \frac{I_0}{2}$$

- Pour les deux ondes: $E = E_0 (\cos(\omega t - \phi_1) + \cos(\omega t - \phi_2))$

$$E^2 = E_0^2 (\cos^2(\omega t - \phi_1) + \cos^2(\omega t - \phi_2) + 2 \cos(\omega t - \phi_1) \cos(\omega t - \phi_2))$$

$$I = E_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \langle \cos(\omega t - \phi_1) \cos(\omega t - \phi_2) \rangle \right)$$

avec

$$\cos(\omega t - \phi_1) \cos(\omega t - \phi_2) = \frac{1}{2} [\cos(2\omega t - \phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_2 - \phi_1)]$$

$$I = E_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \right)$$

$$\boxed{I = I_0 \left(1 + \underbrace{\cos(\phi_2 - \phi_1)}_{C - \frac{y}{a}} \right)}$$

14)

$$I = I_0 \left(1 + \cos \left(C - \frac{y}{a} \right) \right)$$

L'interfrange i est la période spatiale de $I(y)$

donc $\frac{i}{a} = 2\pi$

$$\boxed{i = \frac{\lambda}{\sin \theta}}$$

Le nombre de bandes par unité de longueur vaut donc
(cf fréquence spatiale)

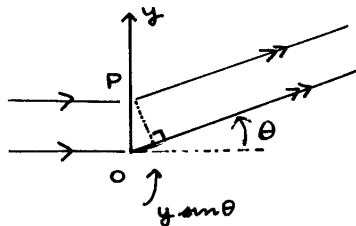
$$\boxed{\frac{1}{i} = \frac{\sin \theta}{\lambda}}$$

A.N. $\frac{1}{\lambda} = \frac{\sin(30^\circ)}{0,6 \cdot 10^{-6}}$
 $= 833 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = 833 \text{ mm}^{-1}}$$

(invisible à l'œil nu)

15) L'onde transmise est obtenue par un calcul de diffraction



on travaille (comme dans le texte) en exp-jwt.
on écrit l'onde diffractée dans la direction θ

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{T(\theta)} &= \int_{y=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (A + B \cos \frac{2\pi y}{\lambda}) \exp(-jky \sin \theta) dy \\ &\quad \underbrace{\frac{1}{2} (\exp j\frac{2\pi y}{\lambda} + \exp -j\frac{2\pi y}{\lambda})}_{\frac{1}{2} (\exp j\frac{2\pi y}{\lambda} + \exp -j\frac{2\pi y}{\lambda})} \\ &= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} A \exp(-j\frac{2\pi y \sin \theta}{\lambda}) dy \\ &\quad + \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{B}{2} \exp(-j2\pi y (\frac{\sin \theta}{\lambda} - \frac{1}{\lambda})) dy \\ &\quad + \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{B}{2} \exp(-j2\pi y (\frac{\sin \theta}{\lambda} + \frac{1}{\lambda})) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= A d \operatorname{sinc}(\pi d \frac{\sin \theta}{\lambda}) \\ &\quad + \frac{B d}{2} \operatorname{sinc}(\pi d (\frac{\sin \theta}{\lambda} - \frac{1}{\lambda})) \\ &\quad + \frac{B d}{2} \operatorname{sinc}(\pi d (\frac{\sin \theta}{\lambda} + \frac{1}{\lambda})) \end{aligned}$$

La première intégrale possède son maximum pour $\theta = 0$

La deuxième intégrale possède son maximum pour $\theta = \alpha$

avec $\frac{\sin \alpha}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\lambda}{\lambda}}$$

La troisième intégrale possède son maximum pour $\theta = -\alpha$
 Ces trois maximums correspondent aux trois ordres planes de l'énoncé

16)

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{i}$$

$$\sin \alpha' = \frac{\lambda'}{i}$$

$$\boxed{\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{\lambda'}{\lambda}}$$

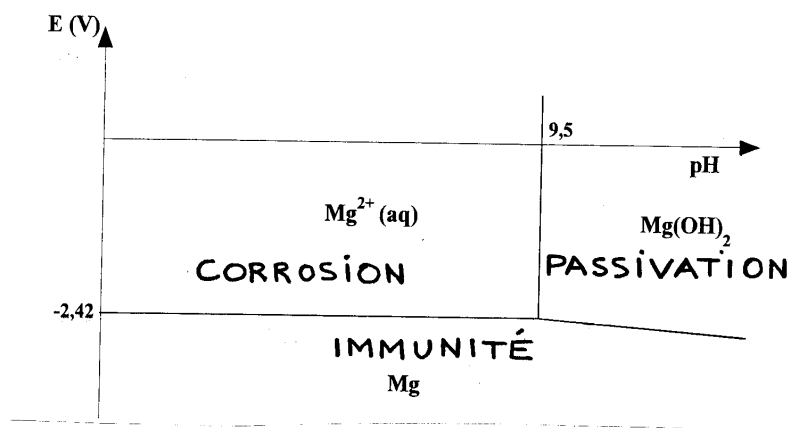
donc dispersion car $\alpha = \alpha(\lambda)$

Ce film photographique est un réseau (sinusoïdal)
 on pourra obtenir un spectre d'ordre 1 et un spectre
 d'ordre -1 symétrique.

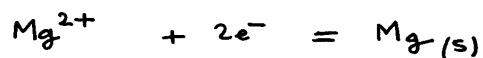
Magnésium et corrosion

1) définitions:

- corrosion : le métal se transforme en composé soluble (sous forme ionique)
- immunité : le métal est thermodynamiquement stable. Il est donc inaltéré
- passivation : il y a formation de composés insolubles (oxydes, hydroxydes) qui se déposent à la surface du métal. Selon la structure cristalline du dépôt, la corrosion peut alors être inhibée car le métal est recouvert.



2) on s'intéresse à la frontière Mg^{2+}/Mg



on a ici

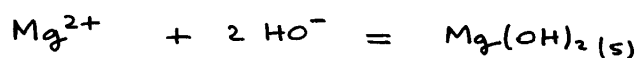
$$E_{\text{frontière}} = E_{Mg^{2+}/Mg}^{\circ} + \frac{0,06}{2} \log [Mg^{2+}]_{c_{tr}}$$

$$E_{Mg^{2+}/Mg}^{\circ} = E_{\text{frontière}} - 0,03 \log c_{tr}$$

$$\text{A.N.} \quad = -2,42 - 0,03 \log 10^{-2}$$

$$E_{Mg^{2+}/Mg}^{\circ} = -2,36 \text{ V}$$

3) On s'intéresse à la frontière $Mg^{2+} / Mg(OH)_2(s)$



on a

$$K_s = [Mg^{2+}] [HO^-]^2$$

$$= [Mg^{2+}] \frac{K_e^2}{h^2}$$

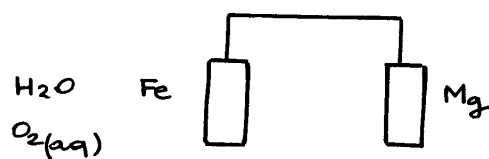
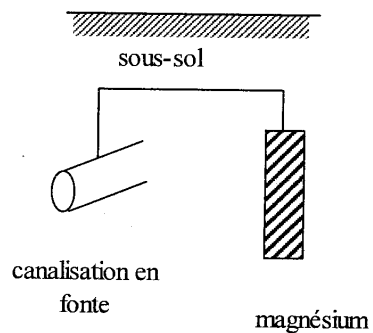
$$K_s = c_{tr} \frac{K_e^2}{h_{frontière}^2}$$

$$K_s = c_{tr} \frac{K_e^2}{(10^{-14} h_{frontière})^2}$$

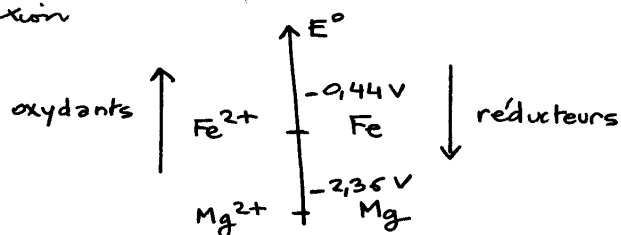
A.N. $K_s = 10^{-2} \frac{(10^{-14})^2}{(10^{-9.5})^2}$

$$K_s = 10^{-11}$$

4)



— En se contentant des E° pour une première réflexion



On retrouve que Mg est un réducteur bien plus puissant que Fe, c'est donc lui qui va s'oxyder et non pas Fe.



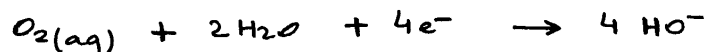
— Eécriture des demi réactions

- au niveau de l'électrode de magnésium :



- au niveau de l'électrode de fer

L'oxygène dissous (préférentiellement) sinon H_2O sont réduits :



sinon :



— Dans le fil, les électrons vont de Mg vers Fe donc le courant va de Fe vers Mg.

Mg est le pôle d'entrée du courant.

Mg est anode

Il y a bien oxydation à l'anode.

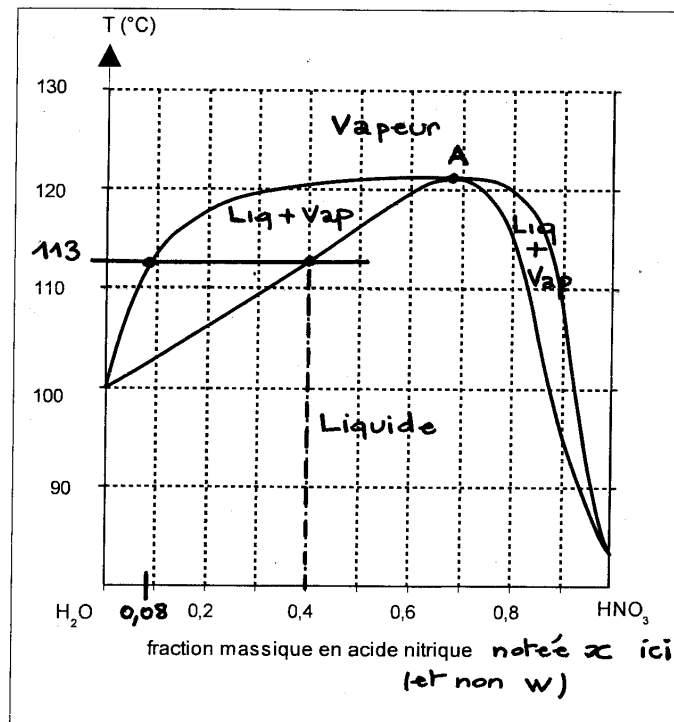
— L'anode se "dissout" donc (Mg^{2+} est soluble) on parle de protection par anode sacrificielle

5) Le nombre de moles de Mg est : $\frac{m}{M_{\text{Mg}}}$ qui donneront 2 moles d'électrons chacune

Donc $Q_{\text{charge dans le circuit}} = I t = 2 \frac{m}{M_{\text{Mg}}} F$

$$t = \frac{2 m F}{I M_{\text{Mg}}}$$

Purification de l'acide nitrique



- 1) les quatre domaines du diagramme :
voir figure ci-dessus

- le point A correspond à l'azéotrope ($x_A = 68,4\%$, $T_A = 122^\circ\text{C}$)

- 3) Le mélange avec $x_0 = 40\%$ d'acide nitrique en masse
bout à 113°C environ

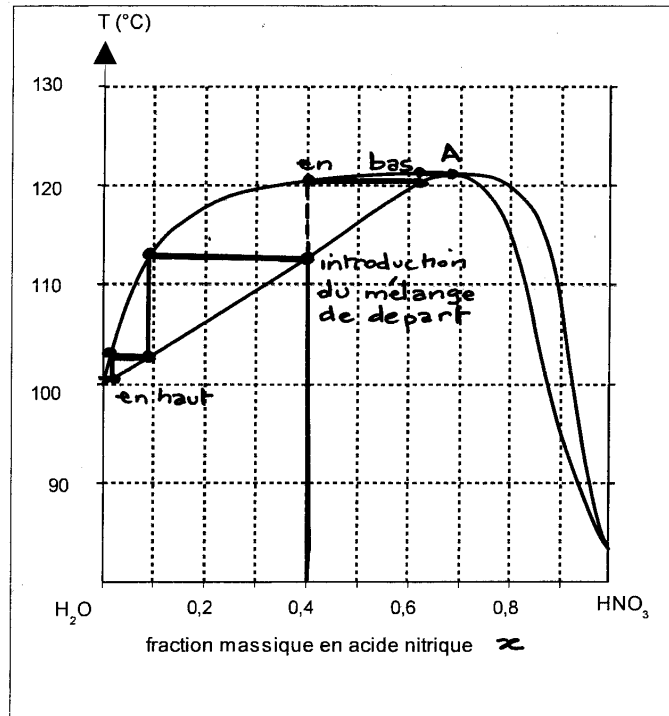
La fraction massique de la première bulle de vapeur est
8% ou 9% environ

- 3) A la base de la colonne se trouve le bouilleur où l'on chauffe.
Donc T_b est la température la plus haute.

La vapeur monte et à chaque niveau il y a équilibre liquide-vapeur à la température du niveau

En haut, en tête de colonne, la température est plus petite.

T_h est la température la plus basse



plateaux
théoriques

Dans le bas de la colonne, on recueille le liquide A ($x_A = 68,4\%$)

à la température $T_A = 122^\circ\text{C}$

En tête de colonne, on recueille l'eau vapeur ($x = 0\%$)

à la température 100°C

$$T_b = 122^\circ\text{C}$$

$$T_h = 100^\circ\text{C}$$

4) Le mélange étudié (1 kg , $x = 40\%$) contient 400 g d'acide nitrique mélangé à 600 g d'eau.

on récupère en bas l'azeotrope et en haut de l'eau.

Dans l'azeotrope, il y a 400 g d' HNO_3 et de l'eau.

La masse de l'azeotrope est

$$m_{\text{SOLUTION ACIDE}} = \frac{400}{68,4\%}$$

$$m_{\text{SOLUTION ACIDE}} = 585 \text{ g}$$

(qui contient 400 g d'acide
185 g d'eau)

En tête de colonne, on récupère les 415 g d'eau restant.

5) Un déshydratant fort utilisé en chimie est l'acide sulfurique concentré.
