CORRIGÉ DU DS N°7 – CCP PSI 2001 Math 2

PREMIÈRE PARTIE
Procédé d'extrapolation de Richardson

I.1 **a)** Soit t au voisinage de 0, $t \neq 0$. Alors $\dfrac{\varphi(t)}{t^s} = \dfrac{\varphi(t)}{(\rho t)^s} \cdot \rho^s$.

Par hypothèse, la fonction $\dfrac{\varphi(t)}{(\rho t)^s}$ est bornée lorsque $t \to 0$, il en est donc de même de $\dfrac{\varphi(t)}{(\rho t)^s} \cdot \rho^s$ car ρ^s est une constante.

Conclusion : $\boxed{\varphi(t) = \mathrm{O}(t^s) \text{ lorsque } t \to 0.}$

b) Soit t au voisinage de 0, $t \neq 0$. Alors $\dfrac{\varphi(t)}{t^{k-1}} = \dfrac{\varphi(t)}{t^k} \cdot t$. C'est le produit d'une fonction bornée au voisinage de 0 par une fonction tendant vers 0, et par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t)}{t^{k-1}} = 0.}$

I.2 **a)** Par hypothèse, pour $t \to 0$, on a $\mathrm{A}(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k + t^{k+1}\varphi(t)$ avec φ une fonction bornée au voisinage de 0.

Par suite, il vient $\lim\limits_{t \to 0} t^{k+1}\varphi(t) = 0$, et donc $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} \mathrm{A}(t) = a_0.}$

b) Soit t au voisinage de 0. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1(t) &= \frac{r\mathrm{A}_0(t) - \mathrm{A}_0(rt)}{r-1} = \frac{r\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + \mathrm{O}(t^{k+1})\right) - \left(a_0 + a_1 r t + a_2 r^2 t^2 + \cdots + \mathrm{O}((rt)^{k+1})\right)}{r-1} \\
&= a_0 + \frac{r - r^2}{r-1} a_2 t^2 + \mathrm{O}(t^{k+1})
\end{aligned}$$

car d'après **I-1.a**, $\mathrm{O}\big((rt)^{k+1}\big) = \mathrm{O}(t^{k+1})$.

On en déduit : $\boxed{\mathrm{A}_1(t) = a_0 - r a_2 t^2 + \cdots + \mathrm{O}(t^{k+1}).}$

En posant $\boxed{a_{1,2} = -r a_2}$, on a donc le résultat souhaité.

c) Soit, pour $n \in [\![1, k]\!]$, $\mathrm{P}(n)$ la propriété :
« pour $t \to 0$, $\mathrm{A}_n(t) = a_0 + a_{n,n+1} t^{n+1} + a_{n,n+2} t^{n+2} + \cdots + \mathrm{O}(t^{k+1})$ »

- $\mathrm{P}(1)$ est vraie d'après la question précédente.
- Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie pour $n \in [\![1, k]\!]$ fixé.

Alors pour $t \to 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{n+1}(t) &= \frac{r^{n+1}\mathrm{A}_n(t) - \mathrm{A}_n(rt)}{r^{n+1} - 1} \\
&= \frac{r^{n+1}\left(a_0 + a_{n,n+1} t^{n+1} + a_{n,n+2} t^{n+2} + \cdots + \mathrm{O}(t^{k+1})\right) - \left(a_0 + a_{n,n+1} r^{n+1} t^{n+1} + a_{n,n+2} r^{n+2} t^{n+2} + \cdots + \mathrm{O}((rt)^{k+1})\right)}{r^{n+1} - 1}
\end{aligned}$$

On observe que le terme en t^{n+1} s'élimine, et qu'il restera une expression de la forme $a_0 + a_{n+1,n+2} t^{n+2} + \cdots + \mathrm{O}(t^{k+1})$, donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

$\boxed{\text{le D.L de } \mathrm{A}_n \text{ à l'ordre } k \text{ au voisinage de 0 est de la forme } \mathrm{A}_n(t) = a_0 + a_{n,n+1} t^{n+1} + \cdots + \mathrm{O}(t^k).}$

d) On a : $\lim\limits_{m \to \infty} r^{-m} t_0 = 0$ car $r > 1$.

Vu que $\lim\limits_{t \to 0} \mathrm{A}(t) = a_0$, par composition de limites on a donc $\boxed{\lim\limits_{m \to \infty} \mathrm{A}(r^{-m} t_0) = a_0.}$

I.3 **a)** Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors $\mathrm{A}_{p,0} = \mathrm{A}(r^{-p} t_0)$.

Or, pour t au voisinage de 0, le développement limité de A_0 à l'ordre 0 est $\mathrm{A}(t) = a_0 + \mathrm{O}(t)$.

Par suite, vu que $\lim\limits_{p \to \infty} r^{-p} t_0 = 0$, on a $\mathrm{A}(r^{-p} t_0) = a_0 + \mathrm{O}(r^{-p} t_0)$.

D'après **I-1.a**, t_0 étant une constante, on a bien $\boxed{\mathrm{A}_{p,0} = a_0 + \mathrm{O}(r^{-p}).}$

b) Soit $q \in \mathbb{N}$. Alors d'après **I-2.c**, pour $t \to 0$, $A_q(t) = a_0 + O(t^{q+1})$.

Par suite, pour $p \to +\infty$ et $q \in \{0, \dots, p\}$, $A_{p,q} = A_q(r^{-p} t_0) = a_0 + O(r^{-p(q+1)} t_0^{q+1})$, d'où $\boxed{A_{p,q} = a_0 + O(r^{-p(q+1)}).}$

On obtient donc $\boxed{\alpha(p,q) = p(q+1).}$

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Alors $A_{p,1} = A_1(r^{-p} t_0) = \dfrac{rA(r^{-p} t_0) - A(r \cdot r^{-p} t_0)}{r-1} = \dfrac{rA(r^{-p} t_0) - A(r^{-(p-1)} t_0)}{r-1}$

On a donc bien $\boxed{A_{p,1} = \dfrac{rA_{p,0} - A_{p-1,0}}{r-1}.}$

d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $q \in \{1, \dots, p\}$.

Alors $A_{p,q} = A_q(r^{-p} t_0) = \dfrac{r^q A_{q-1}(r^{-p} t_0) - A_{q-1}(r \cdot r^{-p} t_0)}{r^q - 1} = \dfrac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1}$.

De plus, $\dfrac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = \dfrac{(r^q - 1 + 1)A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = A_{p,q-1} + \dfrac{1}{r^q - 1}(A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1})$.

On obtient donc bien $\boxed{A_{p,q} = \dfrac{r^q A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}}{r^q - 1} = A_{p,q-1} + \dfrac{1}{r^q - 1}(A_{p,q-1} - A_{p-1,q-1}).}$

I.4 Pour $0 \leqslant q \leqslant p \leqslant m$, on a vu que $\alpha(p,q) = p(q+1)$, donc $\alpha(p,q)$ est maximum pour $q = p = m$ et minimum pour $p = q = 0$.

$\boxed{\text{La plus grande valeur de } \alpha(p,q) \text{ est } m(m+1)\text{, la plus petite valeur est 0.}}$

D'après **I-1.b**, plus la puissance de t est grande dans $O(t^k)$, plus ce terme est petit quand $t \to 0$.
On peut donc attendre à priori la meilleure approximation de a_0 par $A_{p,q}$ lorsque $A_{p,q} = a_0 + O(r^{-\alpha(p,q)})$ sera tel que $\alpha(p,q)$ soit le plus grand possible, donc il s'agit de la valeur $A_{m,m}$, avec $\boxed{A_{m,m} = a_0 + O(r^{-\sigma(m)}), \text{ et } \sigma(m) = m(m+1).}$

I.5 **a)** D'après la formule de Taylor-Young, et par unicité des coefficients d'un développement limité, on a :

$\boxed{\forall p \in \{0, \dots, 2k\},\ c_p = \dfrac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}.}$

b) • Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Alors $G(-h) = \dfrac{g(\alpha - h) - g(\alpha + h)}{-2h} = \dfrac{g(\alpha + h) - g(\alpha - h)}{2h} = G(h)$.

$\boxed{\text{G est donc paire.}}$

• D'après Taylor-Young, on a pour $h \to 0$: $g(\alpha + h) = g(\alpha) + hg'(\alpha) + o(h)$.

On en déduit, pour $h \to 0$: $G(h) = \dfrac{[g(\alpha) + hg'(\alpha) + o(h)] - [g(\alpha) - hg'(\alpha) + o(h)]}{2h} = g'(\alpha) + o(1)$

Par suite, $\lim\limits_{h \to 0} G(h) = g'(\alpha)$, donc $\boxed{\text{G est prolongeable par continuité en 0 par la valeur } g'(\alpha).}$

c) Soit h au voisinage de 0. Alors :

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}(h) &= \frac{g(\alpha + h) - g(\alpha - h)}{2h} \\
&= \frac{1}{2h} \Big\{ \left[c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_{2k-1} h^{2k-1} + c_{2k} h^{2k} + O(h^{2k+1})\right] - \\
&\qquad \left[c_0 - c_1 h + c_2 h^2 + \dots - c_{2k-1} h^{2k-1} + c_{2k} h^{2k} + O(h^{2k+1})\right] \Big\}
\end{aligned}$$

On obtient donc : $\boxed{\widetilde{G}(h) = c_1 + c_3 h^2 + c_5 h^4 + \dots + c_{2k-1} h^{2k-2} + O(h^{2k}).}$

I.6 **a)** Posons $r = 4$ et $t_0 = h^2$. Alors on a $r > 1$, et pour $p \in \{0, \dots, m\}$, $A(r^{-p} t_0) = A(4^{-p} h^2) = \widetilde{G}(\sqrt{4^{-p} h^2}) = G\left(\dfrac{h}{2^p}\right)$.

$\boxed{\text{Le choix } r = 4 \text{ et } t_0 = h^2 \text{ répond donc à la question.}}$

b) Pour t au voisinage de 0^+, on a $A(t) = \widetilde{G}(\sqrt{t}) = c_1 + c_3 t + c_5 t^2 + \dots + c_{2k-1} t^{k-1} + O(t^k)$ d'après **I-5.3**.
D'après **I-3.a**, on a $\lim\limits_{p \to \infty} A_{p,0} = c_1$.

D'après **I-5.b**, on a finalement $\boxed{\lim\limits_{p \to \infty} A_{p,0} = \ell = g'(\alpha).}$

I.7 **a)** Pour $t>0$, on a ici $\mathrm{A}(t)=\dfrac{\ln(3+\sqrt{t})-\ln(3-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$

On trouve alors : $\mathrm{A}_{0,0}\sim 0.3415898164800$, $\mathrm{A}_{1,0}\sim 0.3353299832433$, $\mathrm{A}_{2,0}\sim 0.3338284815613$, $\mathrm{A}_{3,0}\sim 0.3334568724934$.

On obtient ensuite le tableau :

$\mathrm{A}_{0,0}\sim 0.3415898164800$			
$\mathrm{A}_{1,0}\sim 0.3353299832433$	$\mathrm{A}_{1,1}\sim 0.3332433721645$		
$\mathrm{A}_{2,0}\sim 0.3338284815613$	$\mathrm{A}_{2,1}\sim 0.3333279810006$	$\mathrm{A}_{2,2}\sim 0.3333336215897$	
$\mathrm{A}_{3,0}\sim 0.3334568724934$	$\mathrm{A}_{3,1}\sim 0.3333330028040$	$\mathrm{A}_{3,2}\sim 0.3333333375909$	$\mathrm{A}_{3,3}\sim 0.3333333330830$

Remarque : le programme MAPLE utilisé pour obtenir ce résultat est le suivant :

```
# Initialisations
G:=t->(ln(3+t)-ln(3-t))/2/t; h:=0.8;
for p from 0 to 3 do A[p,0]:=G(h/2^p); od;
# Calcul des termes
for p from 1 to 3 do
  for q from 1 to p do
    A[p,q]:=(r^q*A[p,q-1]-A[p-1,q-1])/(r^q-1);
  od;
od;
# Affichage
for p from 0 to 3 do
  for q from 0 to p do
    printf(`0.15%f  `,A[p,q]);
  od;
  printf(`\n`);
od;
```

b) On a $\ell=g'(\alpha)$, donc dans l'exemple étudié on trouve $\boxed{\ell=\dfrac{1}{3}\cdot}$

On voit clairement dans le tableau que la meilleure approximation est obtenue pour $\mathrm{A}_{3,3}$, ce qui correspond bien à la valeur trouvée au **I-4**.

DEUXIÈME PARTIE
Formule d'Euler-Mac Laurin

II.1 **a)** • B_1 est tel que $\mathrm{B}_1'=\mathrm{B}_0$, d'où $\mathrm{B}_1=\mathrm{X}+c\ (c\in\mathbb{R})$, et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_1(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(t+c)\,\mathrm{d}t=\Big[\frac{t^2}{2}+ct\Big]_0^1=\frac{1}{2}+c$, d'où $c=-\dfrac{1}{2}\cdot$

On a donc $\boxed{\mathrm{B}_1=\mathrm{X}-\dfrac{1}{2}\cdot}$

• De même, $\mathrm{B}_2'=2\mathrm{B}_1=2\mathrm{X}-1$, d'où $\mathrm{B}_2=\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+c\ (c\in\mathbb{R})$, et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_2(t)\,\mathrm{d}t=\Big[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+ct\Big]_0^1=-\frac{1}{6}+c$, d'où $c=\dfrac{1}{6}\cdot$

On a donc $\boxed{\mathrm{B}_2=\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+\dfrac{1}{6}\cdot}$

• Enfin, $\mathrm{B}_3'=3\mathrm{B}_2=3\mathrm{X}^2-3\mathrm{X}+\dfrac{1}{2}$, d'où $\mathrm{B}_3=\mathrm{X}^3-\dfrac{3}{2}\mathrm{X}^2+\dfrac{1}{2}\mathrm{X}+c\ (c\in\mathbb{R})$, et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_3(t)\,\mathrm{d}t=\Big[\frac{t^4}{4}-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{4}t^2+ct\Big]_0^1=c$,

d'où $c=0$. On a donc $\boxed{\mathrm{B}_3=\mathrm{X}^3-\dfrac{3}{2}\mathrm{X}^2+\dfrac{1}{2}\mathrm{X}.}$

b) On trouve à partir des expressions précédentes : $\boxed{b_0=1,\ b_1=-\dfrac{1}{2},\ b_2=\dfrac{1}{6}\ \text{et}\ b_3=0.}$

De même, $\boxed{\mathrm{B}_0(1)=1,\ \mathrm{B}_1(1)=\dfrac{1}{2},\ \mathrm{B}_2(1)=\dfrac{1}{6}\ \text{et}\ \mathrm{B}_3(1)=0.}$

On observe donc que $b_p=\mathrm{B}_p(1)$ pour $p\in\{0,2,3\}$.

c) Soit $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$. Alors $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_{p-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{B}'_p(t)}{p}\,\mathrm{d}t = 0$, d'où $\displaystyle\left[\frac{\mathrm{B}_p(t)}{p}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{B}_p(1)-\mathrm{B}_p(0)}{p} = 0$, et donc $\boxed{b_p = \mathrm{B}_p(1).}$

II.2 **a)** • Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $\widetilde{\mathrm{B}}_0(t) = (-1)^0\mathrm{B}_0(1) = 1$ donc $(\widetilde{\mathrm{B}}_p)$ vérifie (i).

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\widetilde{\mathrm{B}}'_p(t) = (-1)^p \cdot \big(-\mathrm{B}'_p(1-t)\big) = (-1)^{p-1} p\mathrm{B}_{p-1}(1-t) = p\widetilde{\mathrm{B}}_{p-1}(t)$.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{\mathrm{B}}_p(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^p \int_0^1 \mathrm{B}_p(1-t)\,\mathrm{d}t = (-1)^p \int_1^0 \mathrm{B}_p(u)(-\mathrm{d}u)$ en effectuant le changement de variable $u = 1-t$. On en déduit $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{\mathrm{B}}_p(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et donc $(\widetilde{\mathrm{B}}_p)$ vérifie (ii).

Les relations (i) et (ii) définissant clairement de manière unique la suite (B_p), on a donc : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \widetilde{\mathrm{B}}_p = \mathrm{B}_p.}$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $b_{2p+1} = \mathrm{B}_{2p+1}(0) = -\widetilde{\mathrm{B}}_{2p+1}(1)$.
D'après **I-1.3**, on a de plus $b_{2p+1} = \mathrm{B}_{2p+1}(1)$ d'où d'après **I-2.1** : $b_{2p+1} = \widetilde{\mathrm{B}}_{2p+1}(1)$.
On obtient donc clairement : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ b_{2p+1} = 0.}$

II.3 **a)** On a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{B}_0(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{B}'_1(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ par définition de B_0 et B_1.

En intégrant par parties, on obtient donc : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{B}_1(t)f(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{B}_1(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Vu que $\mathrm{B}_1 = \mathrm{X} - \dfrac{1}{2}$, on obtient : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{B}_0(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) - \int_0^1 \mathrm{B}_1(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.}$

b) • La démonstration précédente prouve que la formule est vraie pour $n = 1$.

• Supposons la formule établie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=2}^{n}(-1)^p \frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\big) + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=2}^{n}(-1)^p \frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\big) + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{\mathrm{B}'_{n+1}(t)}{(n+1)\cdot n!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On intègre par partie l'intégrale située à droite de la formule :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{B}'_{n+1}(t)}{(n+1)\cdot n!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\mathrm{B}_{n+1}(t)}{(n+1)!} f^{(n)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{B}_{n+1}(t)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{b_{n+1}}{(n+1)!}\big(f^{(n)}(1) - f^{(n)}(0)\big) - \int_0^1 \frac{\mathrm{B}_{n+1}(t)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

car $b_{n+1} = \mathrm{B}_{n+1}(1) = \mathrm{B}_{n+1}(0)$ d'après **I-1.a**.
En reportant cette expression dans la formule précédente, on obtient la formule demandée au rang $n+1$, d'où :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=2}^{n}(-1)^p \frac{b_p}{p!}\big(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\big) + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

c) Soit $n \geqslant 2$, de la forme $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*$.
D'après **II-2.2**, tous les termes de la somme correspondant à un indice p impair sont nuls, il reste donc en réindexant la somme :

$$\boxed{\frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^{k} \frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)\big) - \int_0^1 \frac{\mathrm{B}_{2k}(t)}{(2k)!} f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

II.4 **a)** • Soit $t \in \mathbb{R}$, notons $n = \mathrm{E}(t)$. Alors $n \leqslant t < n+1$, d'où $n+1 \leqslant t < n+2$ et donc $\mathrm{E}(t+1) = n+1$. Par suite, $\mathrm{D}_p(t+1) = \mathrm{B}_p(t+1-n-1) = \mathrm{B}_p(t-n) = \mathrm{D}_p(t)$ et donc $\boxed{\mathrm{D}_p \text{ est périodique de période } 1.}$

• Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Considérons la subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que $[a,b]\cap\mathbb{N} = \{x_1,\dots,x_{n-1}\}$.

Alors pour $i\in\{0,\dots,n-1\}$, $\forall t \in]x_i,x_{i+1}[$, $f|_{]x_i,x_i+1[}(t) = \mathrm{B}_p(t-x_i)$ par définition.
L'application $f|_{]x_i,x_i+1[}$ est donc clairement prolongeable à $[x_i,x_{i+1}]$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[x_i,x_{i+1}]$, qui n'est autre que $t\longmapsto \mathrm{B}_p(t-x_i)$, et par suite $\boxed{\mathrm{D}_p \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ par morceaux sur R}.}$

b) • Soit $q\in\{1,\dots,\mathrm{N}\}$. Alors $\boxed{f_q \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } [0,1] \text{ comme composée de telles applications.}}$

• Soit $m\in\mathbb{N}$. On a clairement $\forall t\in[0,1]$, $f_1(t) = f(t)$, d'où $\boxed{f_1^{(m)}(0) = f^{(m)}(0).}$

• Soit $m\in\mathbb{N}$, soit $q\in\{2,\dots,\mathrm{N}\}$.
Alors clairement $\forall t\in[0,1]$, $f_q^{(m)}(t) = f^{(m)}(t+q-1)$, d'où $f_q^{(m)}(0) = f^{(m)}(q-1) = f^{(m)}(1+q-1+1)$ et donc $\boxed{f_q^{(m)}(0) = f_{q-1}^{(m)}(1).}$

• De même, pour $m\in\mathbb{N}$, $f_\mathrm{N}^{(m)}(1) = f^{(m)}(1+\mathrm{N}-1)$ et donc $\boxed{f_\mathrm{N}^{(m)}(1) = f^{(m)}(\mathrm{N}).}$

c) Soit $q\in\{1,\dots,\mathrm{N}\}$. Alors la formule (1) appliquée à f_q fournit :
$$\frac12\big(f_q(0)+f_q(1)\big) = \int_0^1 f_q(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^k \frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f_q^{(2p-1)}(1) - f_q^{(2p-1)}(0)\big) - \int_0^1 \frac{\mathrm{B}_{2k}(t)}{(2k)!} f_q^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Compte tenu de la définition de f_q et de **II-4.2**, on obtient donc :
$$\frac12\big(f(q-1)+f(q)\big) = \int_{q-1}^q f(u)\,\mathrm{d}u + \sum_{p=1}^k \frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(q) - f^{(2p-1)}(q-1)\big) - \int_{q-1}^q \frac{\mathrm{B}_{2k}(u-q+1)}{(2k)!} f^{(2k)}(u)\,\mathrm{d}u.$$
(on a effectué le changement de variable $u = t+q-1$ dans chacune des deux intégrales)
Pour tout $t\in[q-1,q[$, on a de plus $\mathrm{E}(t) = q-1$, d'où $\forall t\in[q-1,q[$, $\mathrm{B}_{2k}(t-q+1) = \mathrm{D}_{2k}(t)$.
Écrivons alors chacune de ces formules pour $1\leq q\leq \mathrm{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac12\big(f(0)+f(1)\big) &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^k \frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)\big) - \int_0^1 \frac{\mathrm{D}_{2k}(t)}{(2k)!} f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t\\
\frac12\big(f(1)+f(2)\big) &= \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^k \frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(2) - f^{(2p-1)}(1)\big) - \int_1^2 \frac{\mathrm{D}_{2k}(t)}{(2k)!} f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
\frac12\big(f(\mathrm{N}-1)+f(\mathrm{N})\big) &= \int_{\mathrm{N}-1}^\mathrm{N} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^k \frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(\mathrm{N}) - f^{(2p-1)}(\mathrm{N}-1)\big) - \int_{\mathrm{N}-1}^\mathrm{N} \frac{\mathrm{D}_{2k}(t)}{(2k)!} f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En additionnant toutes ces relations, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient bien :
$$\boxed{\frac12 f(0) + \sum_{q=1}^{\mathrm{N}-1} f(q) + \frac12 f(\mathrm{N}) = \int_0^\mathrm{N} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^k \frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(f^{(2p-1)}(\mathrm{N}) - f^{(2p-1)}(0)\big) - \int_0^\mathrm{N} \frac{\mathrm{D}_{2k}(t)}{(2k)!} f^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

TROISIÈME PARTIE
Méthode de Romberg

III.1 g est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,\mathrm{N}]$ comme composée de telles fonctions. De plus, par récurrence immédiate, on a : $\boxed{\forall m\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,\mathrm{N}],\ g^{(m)}(t) = h^m f^{(m)}(a+th).}$

Appliquons alors la formule (2) à g :
$$\frac12 g(0) + \sum_{q=1}^{\mathrm{N}-1} g(q) + \frac12 g(\mathrm{N}) = \int_0^\mathrm{N} g(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^k \frac{b_{2p}}{(2p)!}\big(g^{(2p-1)}(\mathrm{N}) - g^{(2p-1)}(0)\big) - \int_0^\mathrm{N} \frac{\mathrm{D}_{2k}(t)}{(2k)!} g^{(2k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$
On exploite alors la formule donnant les dérivées successives de g, et on multiplie le tout par h :

$$h\left[\frac{1}{2}f(a)+\sum_{q=1}^{N-1}f(a+qh)+\frac{1}{2}f(b)\right]=h\int_0^N f(a+th)\,\mathrm{d}t+h\sum_{p=1}^{k}h^{2p-1}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\right)-$$
$$h\int_0^N \frac{\mathrm{D}_{2k}(t)}{(2k)!}h^{2k}f^{(2k)}(a+ht)\,\mathrm{d}t$$

On reconnaît dans le membre de gauche le terme $\mathrm{T}_f(h)$, et on effectue dans chaque intégrale du membre de droite le changement de variable $u=a+th$, $\mathrm{d}u=h\,\mathrm{d}t$, on obtient bien ainsi :

$$\boxed{\mathrm{T}_f(h)=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u+\sum_{p=1}^{k}h^{2p}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\right)-h^{2k}\int_a^b\frac{\mathrm{D}_{2k}\left(\frac{u-a}{h}\right)}{(2k)!}f^{(2k)}(u)\,\mathrm{d}u}$$

III.2 L'application B_{2k} est continue sur $[0,1]$ qui est compact, donc est bornée sur $[0,1]$.
Par suite, $\exists \mathrm{M}\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall t\in[0,1]$, $\left|\mathrm{B}_{2k}(t)\right|\leq \mathrm{M}$.
Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $t-\mathrm{E}(t)\in[0,1]$, donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $\left|\mathrm{D}_{2k}(t)\right|\leq\mathrm{M}$.
On en déduit $\left|\int_a^b\frac{\mathrm{D}_{2k}\left(\frac{u-a}{h}\right)}{(2k)!}f^{(2k)}(u)\,\mathrm{d}u\right|\leq\int_a^b\frac{\left|\mathrm{D}_{2k}\left(\frac{u-a}{h}\right)\right|}{(2k)!}\cdot\left|f^{(2k)}(u)\right|\mathrm{d}u\leq\underbrace{\frac{\mathrm{M}}{(2k)!}\int_a^b\left|f^{(2k)}(u)\right|\mathrm{d}u}_{\text{constante indépendante de } h}$.

On a donc $h^{2k}\int_a^b\frac{\mathrm{D}_{2k}\left(\frac{u-a}{h}\right)}{(2k)!}f^{(2k)}(u)\,\mathrm{d}u=\mathrm{O}(h^{2k})$.

En posant, pour $p\in\{1,\dots,k\}$, $d_p=\frac{b_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\right)$, on obtient donc bien :

$$\boxed{\mathrm{T}_f(h)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{p=1}^{k-1}d_p h^{2p}+\mathrm{O}(h^{2k}).}$$

III.3 **a)** D'après **III-2** et **I-2.a**, on a clairement $\boxed{\lim_{t\to0}\mathrm{A}(t)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.}$

b) On est dans un cas similaire à celui étudié au **I-6.1**, la fonction T_f jouant le rôle de $\widetilde{\mathrm{G}}$. On obtient donc de la même façon $\boxed{r=4 \text{ et } t_0=h^2.}$

III.4 **a)** Pour $p\in\mathbb{N}$, on a d'après ce qui précède : $\mathrm{A}_{p,0}=\mathrm{A}(r^{-p}t_0)=\mathrm{T}_f\left(\frac{h}{2^p}\right)$ et donc $\boxed{\mathrm{A}_{p,0}=\mathrm{T}_f(h_p).}$

On obtient donc, pour $p\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathrm{A}_{p-1,0}=\mathrm{T}_f(h_{p-1})=\mathrm{T}_f(2h_p).}$

b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Alors $\mathrm{A}_{p,0}=\mathrm{T}_f(h_p)=h_p\left[\frac{1}{2}f(a)+\sum_{q=1}^{2^p-1}f(a+qh_p)+\frac{1}{2}f(b)\right]$.

On décompose la somme en deux : d'un côté les indices q pairs ($q=2r$ avec $1\leq r\leq 2^{p-1}-1$), de l'autre les indices q impairs ($q=2r+1$ avec $0\leq r\leq 2^{p-1}-1$) :
$\mathrm{A}_{p,0}=h_p\left[\frac{1}{2}f(a)+\sum_{r=1}^{2^{p-1}-1}f(a+2rh_p)+\sum_{r=0}^{2^{p-1}-1}f(a+(2r+1)h_p)+\frac{1}{2}f(b)\right]$.
On remarque que, dans la première somme, chaque terme $f(a+2rh_p)$ est égal à $f(a+rh_{p-1})$, et de plus la deuxième somme est égale à $\frac{\mathrm{A}'_{p,0}}{h^p}$.

On a donc finalement : $\boxed{\mathrm{A}_{p,0}=\frac{1}{2}\mathrm{A}_{p-1,0}+\mathrm{A}'_{p,0}.}$

L'intérêt de cette formule est de permettre le calcul de $\mathrm{A}_{p,0}$ en réutilisant la valeur de $\mathrm{A}_{p-1,0}$, donc en économisant une partie des calculs. Plus précisément, l'application directe de la formule initiale donnant $\mathrm{A}_{p,0}$ oblige à calculer 2^p-1 termes de la forme $f(a+qh_p)$, alors que $\mathrm{A}'_{p,0}$ ne fournit que 2^{p-1} tels termes. Le nombre de termes à calculer est donc divisé par deux.

III.5 **a)** • *1ère solution :*

Soit $t\in\mathbb{R}^*$. La formule de Taylor, reste intégral fournit pour la fonction $x\longmapsto \sin x$ sur l'intervalle $[0,t]$:

$$\sin t = t\int_0^1 \cos(tx)\,\mathrm{d}x$$

Par suite, on a $\forall t\in\mathbb{R}^*$, $f(t)=\displaystyle\int_0^1 \cos(tx)\,\mathrm{d}x$, et on remarque que cette formule reste valable pour $t=0$.

L'application $g:\left\{\begin{array}{ccc}[0,1]\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,t) & \longmapsto & \cos(xt)\end{array}\right.$ étant clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]\times\mathbb{R}$, d'après le théorème relatif à la dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, on en déduit que $\boxed{f\in\mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}).}$

• *2ème solution :*

On sait que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin x=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (série entière de rayon de convergence infini).

On en déduit : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$ (l'égalité est encore vraie pour $x=0$). Comme f est somme d'une série entière de rayon de convergence infini, on en déduit que $\boxed{f\in\mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}).}$

b) On calcule les sept valeurs dans l'ordre suivant : $\mathrm{A}_{0,0}$, $\mathrm{A}'_{1,0}$, $\mathrm{A}_{1,0}$, $\mathrm{A}'_{2,0}$, $\mathrm{A}_{2,0}$, $\mathrm{A}'_{3,0}$ et $\mathrm{A}_{3,0}$.

En effet, la formule du **III-4.2** ($\mathrm{A}_{p,0}=\frac{1}{2}\mathrm{A}_{p-1,0}+\mathrm{A}'_{p,0}$) permet d'accélérer les calculs.

On obtient ainsi :

$\boxed{\mathrm{A}_{0,0}\sim 1.570\ ;\ \mathrm{A}_{1,0}\sim 1,785\ ;\ \mathrm{A}_{2,1}\sim 1,835\ ;\ \mathrm{A}_{3,0}\sim 1,847 \text{ et } \mathrm{A}'_{1,0}=1\ ;\ \mathrm{A}'_{2,0}\sim 0,942\ ;\ \mathrm{A}'_{3,0}\sim 0.930}$

c) On obtient les valeurs suivantes :

$\mathrm{A}_{0,0}\sim 1,570796327$			
$\mathrm{A}_{1,0}\sim 1,785398163$	$\mathrm{A}_{1,1}\sim 1,856932109$		
$\mathrm{A}_{2,0}\sim 1,835508123$	$\mathrm{A}_{2,1}\sim 1,852211443$	$\mathrm{A}_{2,2}\sim 1,851896732$	
$\mathrm{A}_{3,0}\sim 1,847842307$	$\mathrm{A}_{3,1}\sim 1,851953701$	$\mathrm{A}_{3,2}\sim 1,851936518$	$\mathrm{A}_{3,3}\sim 1,85193715$

De même qu'au **I-7.2**, $\boxed{\text{la meilleure approximation est } \textit{à priori } \mathrm{A}_{3,3}.}$

(*Rem :* Maple trouve l'approximation : 1,851937052. Nous avons donc 6 décimales justes, ce qui n'est pas mal.)

III.6 Si la fonction f est périodique de période $b-a$, alors il en est de même de chacune de ses dérivées successives, et donc la formule (4) s'écrit : $\mathrm{T}_f(h)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{O}(h^{2k})$. Le procédé d'extrapolation de Richardson ayant pour but de « supprimer » les termes de la forme $a_p h^p$ apparaissant dans le développement limité, il est donc inutile de l'appliquer ici. Plus précisément, on obtiendra, pour $1\leqslant q\leqslant p$: $\mathrm{A}_{p,q}=\mathrm{A}_{p,0}$. En bref, la méthode est dans ce cas un moyen assez sophistiqué de consommer de la mémoire et du temps de calcul informatique !

⋆ ⋆ ⋆ ⋆

⋆ ⋆ ⋆

⋆ ⋆

⋆