SESSION 2022

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP

I - Préliminaires

Q 1. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pour tous $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^T AY = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i a_{i,j} y_j.$$

En particulier, si $(E_1, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_i^T A E_j = a_{i,j}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall (X,Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ X^T AY = X^T BY &\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ E_i^T A E_j = E_i^T B E_j \\ &\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = b_{i,j} \Rightarrow A = B. \end{aligned}$$

Q 2. Soient $M \in GL_n(\mathbb{R})$ puis $A = M^T M$. $A^T = M^T \left(M^T\right)^T = M^T M = A$ et donc A est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A puis $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

$$\lambda \|X\|^2 = \lambda X^T X = X^T (\lambda X) = X^T AX = X^T M^T MX = (MX)^T (MX) = \|MX\|^2$$

et donc $\lambda = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$ (car $\|X\|^2 > 0$). De plus, A est inversible en tant que produit de deux matrices inversibles et donc A n'admet pas 0 pour valeur propre. Ainsi, les valeurs propres de $M^T M$ sont toutes des réels strictement positifs.

D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n\left(\mathbb{R}_+^*\right)$ telles que $M^T M = PDP^T$. Soient $\Delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ puis $S = P\Delta P^T$. S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale (réelle) et donc S est symétrique réelle. De plus, les valeurs propres de S sont les $\sqrt{\lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et sont donc toutes des réels strictement positifs. Enfin,

$$S^2 = P\Delta P^T P \Delta P^T = P\Delta^2 P^T = PDP^T = M^T M.$$

II - Objets symplectiques

II.A - Structure d'espace vectoriel symplectique réel

Q 3. Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$. En particulier, pour tout $x \in E$, $\omega(x,x) = -\omega(x,x)$ puis $2\omega(x,x) = 0$ et donc $\omega(x,x) = 0$.

Q 4. Soit ω une forme symplectique sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Pour tout $y \in F$, l'application $x \mapsto \omega(x,y)$ est linéaire et donc pour tout $y \in F$, $\omega(0,y) = 0$. Ceci montre que $0 \in F^\omega$.
Soient $(x_1, x_2) \in \left(F^\omega\right)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $y \in F$,

$$\omega\left(\lambda x_1 + \mu x_2, y\right) = \lambda \omega\left(x_1, y\right) + \mu \omega\left(x_2, y\right) = 0.$$

Donc, $\lambda x_1 + \mu x_2 \in F^\omega$. On a montré que F^ω est un sous-espace vectoriel de E.

Q 5. Soit $\omega = \det$ sur $E = \mathbb{R}^2$. ω est bilinéaire et anti-symétrique. Soit $x \in E$ tel que pour tout $y \in E$, $\det(x,y) = 0$. Alors, x est colinéaire aux deux vecteurs e_1 et e_2 de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et donc $x = 0$. ω est donc aussi non dégénérée et finalement ω est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $D = \operatorname{Vect}(e_1)$. D^ω est l'ensemble des vecteurs colinéaires à tous les vecteurs de D c'est-à-dire $D^\omega = D$. En particulier, $D \cap D^\omega = D \neq \{0\}$ et la somme $D + D^\omega$ n'est pas directe.

Q 6. d_ω est une application de E dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$. Soient $(x_1,x_2)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout $y\in E$,

$$(d_\omega(\lambda x_1+\mu x_2))(y)=\omega(\lambda x_1+\mu x_2,y)=\lambda\omega(x_1,y)+\mu\omega(x_2,y)=(\lambda d_\omega(x_1)+\mu d_\omega(x_2))(y)$$

et donc $d_\omega(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda d_\omega(x_1)+\mu d_\omega(x_2)$. Par suite, $d_\omega\in\mathscr{L}(E,\mathscr{L}(E,\mathbb{R}))$.

Soit $x\in E$ tel que $d_\omega(x)=0$. Alors, pour tout $y\in E$, $\omega(x,y)=0$ puis $x=0$ par non dégénérescence de ω. Donc, $\mathrm{Ker}(d_\omega)=\{0\}$ puis d_ω est injective. Enfin, $\dim(\mathscr{L}(E,\mathbb{R}))=\dim(E)\times\dim(\mathbb{R})=\dim(E)<+\infty$ et donc d_ω est un isomorphisme de E sur $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.

Q 7. Soit G un supplémentaire de F dans E. Soit $\mu\in\mathscr{L}(F,\mathbb{R})$. Il existe $\ell\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ telle que $\ell_{/F}=\mu$ et $\ell_{/G}=0$. Par construction, $r_F(\ell)=\mu$. Ainsi, $\forall\mu\in\mathscr{L}(F,\mathbb{R})$, $\exists\ell\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})/\ r_F(\ell)=\mu$ et donc r_F est surjective.

Q 8. r_F est linéaire et donc $r_F\circ d_\omega\in\mathscr{L}(E,\mathscr{L}(F,\mathbb{R}))$. Soit $x\in E$.

$$x\in\mathrm{Ker}(r_F\circ d_\omega)\Leftrightarrow(d_\omega(x))_{/F}=0\Leftrightarrow\forall y\in F,\ \omega(x,y)=0\Leftrightarrow x\in F^\omega.$$

Donc, $\mathrm{Ker}(r_F\circ d_\omega)=F^\omega$. D'autre part, puisque d_ω est un isomorphisme et que r_F est surjective, $\mathrm{Im}(r_F\circ d_\omega)=\mathscr{L}(F,\mathbb{R})$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(F^\omega)=\dim(\mathrm{Ker}(r_F\circ d_\omega))=\dim(E)-\dim(\mathrm{Im}(r_F\circ d_\omega))=\dim(E)-\dim(\mathscr{L}(F,\mathbb{R}))=\dim(E)-\dim(F).$$

Q 9. ω_F est une forme bilinéaire anti-symétrique sur F. Donc,

$$\begin{aligned}\omega_F\text{ est symplectique}&\Leftrightarrow\omega_F\text{ est non dégénérée}\Leftrightarrow\{x\in F/\ \forall y\in F,\ \omega(x,y)=0\}=\{0_E\}\\&\Leftrightarrow F\cap F^\omega=\{0_E\}.\end{aligned}$$

Puisque d'autre part, on a toujours $\dim(F)+\dim(F^\omega)=\dim(E)$, cette dernière condition est équivalente à $E=F\oplus F^\omega$.

II.B - Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$

Q 10. Posons $x=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\displaystyle\sum_{j=1}^n y_je_j$. Par bilinéarité (et avec l'identification usuelle entre un nombre et une matrice de format $(1,1)$),

$$\omega(x,y)=\omega\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_i\omega(e_i,e_j)y_j=X^T\Omega Y,$$

d'après la question Q1.

Q 11. Pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$.

$$\begin{aligned}X^T\Omega Y&=\omega(x,y)=-\omega(y,x)=-Y^T\Omega X=-\left(Y^T\Omega X\right)^T=-X^T\Omega^TY\\&=X^T\left(-\Omega^T\right)Y.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(X,Y)\in(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $X^T\Omega Y=X^T\left(-\Omega^T\right)Y$. D'après la question Q1, $\Omega=-\Omega^T$ et donc Ω est anti-symétrique.

Soit $Y\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ représentant le vecteur $y\in E$ dans la base canonique. Puisque ω est non dégénérée

$$\Omega Y=0\Rightarrow\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T\Omega Y=0\Rightarrow\forall x\in E,\ \omega(x,y)=0\Rightarrow y=0\Rightarrow Y=0.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Omega)=\{0\}$ et donc $\Omega\in GL_n(\mathbb{R})$.

Q 12. $\det(\Omega)=\det\left(\Omega^T\right)=\det(-\Omega)=(-1)^n\det(\Omega)$ puis $(1-(-1)^n)\det(\Omega)=0$ et donc $1-(-1)^n=0$ car $\det(\Omega)\neq0$. Mais alors, n est nécessairement pair.

Q 13. b_s est bilinéaire par linéarité de j et bilinéarité de $\langle\ ,\ \rangle$. Soit $(X,Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. On pose $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ avec $(X_1, X_2, Y_1, Y_2) \in (\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}))^4$. Un calcul par blocs fournit

$$X^T J Y = \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Y_2 \\ Y_1 \end{pmatrix} = -X_1^T Y_2 + X_2^T Y_1,$$

puis

$$b_s(y,x) = -Y_1^T X_2 + Y_2^T X_1 = \left(-Y_1^T X_2 + Y_2^T X_1\right)^T = -X_2^T Y_1 + X_1^T Y_2 = -b_s(x,y).$$

Donc, b_s est anti-symétrique.

Soit $x \in E$ tel que pour tout $y \in E$, $b_s(x,y) = 0$. Avec les notations précédentes, on a donc pour tout $(Y_1, Y_2) \in (\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}))^2$, $-X_1^T Y_2 + X_2^T Y_1 = 0$ ou encore $-\langle X_1, Y_2\rangle + \langle X_2, Y_1\rangle = 0$. En particulier, en prenant $Y_1 = 0$ (resp. $Y_2 = 0$), pour tout $Y_2 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (resp. $Y_1 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), $\langle X_1, Y_2\rangle = 0$ (resp. $\langle X_2, Y_1\rangle = 0$). Donc $X_1 \in (\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}))^\perp = \{0\}$ et $X_2 \in (\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}))^\perp = \{0\}$ puis $X = 0$ puis $x = 0$. Ceci montre que b_s est non dégénérée.

Finalement, b_s est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

II.C - Endomorphismes et matrices symplectiques réels

Q 14. Soient λ et μ deux valeurs propres éventuelles) réelles de u telles que $\lambda\mu \neq 1$. Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Par bilinéarité,

$$\lambda\mu\, \omega(x,y) = \omega(\lambda x, \mu y) = \omega(u(x), u(y)) = \omega(x,y)$$

puis $(1-\lambda\mu)\omega(x,y) = 0$. Puisque $1 - \lambda\mu \neq 0$, il reste $\omega(x,y) = 0$. On a ainsi montré que $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont ω-orthogonaux.

Q 15. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned} u \text{ est symplectique pour } b_s &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ b_s(u(x), u(y)) = b_s(x,y) \\ &\Leftrightarrow \forall (X,Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ (MX)^T J (MY) = X^T M Y \\ &\Leftrightarrow \forall (X,Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2,\ X^T (M^T J M) Y = X^T M Y \\ &\Leftrightarrow M^T J M = J \text{ (d'après la question Q1)}. \end{aligned}$$

Q 16. Si M est symplectique, $M^T J M = J$ puis $(\det(M))^2 \det(J) = \det(J)$ puis $(\det(M))^2 = 1$ car $\det(J) \neq 0$ d'après les questions Q11 et Q13. Mais alors $\det(M) \neq 0$. Ceci montre que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

$I_n^T J I_n = J$ et donc $I_n \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Soit alors $(M_1, M_2) \in (\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\left(M_1 M_2^{-1}\right)^T J \left(M_1 M_2^{-1}\right) = \left(M_2^{-1}\right)^T \left(M_1^T J M_1\right) M_2^{-1} = \left(M_2^{-1}\right)^T J M_2^{-1} = \left(M_2^{-1}\right)^T M_2^T J M_2 M_2^{-1} = J$$

et donc $M_1 M_2^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. On a montré que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. M^{-1} est aussi dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et donc $\left(M^{-1}\right)^T J M^{-1} = J$. En transposant, on obtient $\left(M^T\right)^{-1} J^T M^{-1} = J^T$ puis, la matrice J étant orthogonale car les colonnes de J forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique, $\left(M^T\right)^{-1} J^{-1} M^{-1} = J^{-1}$. En prenant l'inverse des deux membres, on obtient $M J M^T = T$ et donc $M^T \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est stable par transposition.

Enfin, puisque $J \in O_n(\mathbb{R})$, $J^T J J = I_n J = J$ et donc $J \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Q 17. Un calcul par blocs fournit

$$\begin{aligned} M^T J M &= \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -A^T C + C^T A & -A^T D + C^T B \\ D^T A - B^T C & D^T B - B^T D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis, $M^T MJ = J \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -A^T C + C^T A = 0 \\ D^T B - B^T D = 0 \\ -A^T D + C^T B = -I_m \\ D^T A - B^T C = I_m \end{array}\right.$. La première condition équivaut à $\left(A^T C\right)^T = A^T C$, la deuxième à $\left(B^T D\right)^T = B^T D$, la troisième à $A^T B - C^T B = I_n$ de même que la quatrième en transposant les deux membres.

On a montré que $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A^T C \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ B^T D \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A^T D - C^T B = I_m$.

III - Déterminant d'une matrice symplectique réelle

III.A - Le cas de la dimension 2

Q 18. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. D'après la question Q17, M est symplectique si et seulement si les matrices (ac) et (bd) de format $(1,1)$ sont symétriques, ce qui est vrai, et $(ad - bc) = (1)$. Donc,

$$M \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow ad - bc = 1 \Leftrightarrow M \in SL_2(\mathbb{R}).$$

On a montré que $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})$.

III.B - Commutant de J

Q 19. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2m}(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs fournit

$$MJ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix}$$

et

$$JM = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}.$$

Par suite $M \in \mathscr{C}_J \Leftrightarrow A = D$ et $B = -C \Leftrightarrow \exists (U, V) \in (\mathscr{M}_m(\mathbb{R}))^2 \ /\ M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$.

Q 20. Soit $M \in \mathscr{C}_J$. Posons $M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$ où $(U, V) \in (\mathscr{M}_m(\mathbb{R}))^2$. Un calcul par blocs fournit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ -iU + V & U \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ 0 & U - iV \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ensuite, $\det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} = (\det(I_m))^2 = 1$ (déterminant triangulaire par blocs) et de même $\det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix} = 1$. Le membre de gauche a donc un déterminant égal à $\det(M)$ puis

$$\begin{aligned} \det(M) = \det \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ 0 & U - iV \end{pmatrix} &= \det(U + iV) \times \det(U - iV) \\ &= \det(U + iV) \times \overline{\det(U + iV)} \text{ (car } U \text{ et } V \text{ sont réelles)} \\ &= |\det(U + iV)|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le déterminant de tout élément de $\mathscr{C}_J$ est un réel positif ou nul.

III.C - Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle

Q 21. $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ en tant qu'intersection de deux sous-groupes et $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Donc, $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}), \times)$.

On munit alors $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_\infty$ (toutes les normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ étant équivalentes).

• Pour tout $M \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$, puisque $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_\infty \leqslant 1$. Donc, $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient $f : \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^T J M\end{array}$ puis $g : \begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & (M^T, M)\end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto & AJB\end{array}$ de sorte que $f = h \circ g$. g est continue sur l'espace de dimension finie $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +, .)$ car linéaire et h est continue sur l'espace de dimension finie $\left((\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2, +, .\right)$ car bilinéaire. Donc, $f = h \circ g$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Puisque $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{J\})$, $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé ($\{J\}$ est la boule fermée de centre J et de rayon 0) par une application continue.
De même, l'application $k : M \mapsto M^T M$ est continue et $O_n(\mathbb{R}) = k^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Finalement, $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés.

• Ainsi, $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un fermé, borné de l'espace de dimension finie $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +, .)$ et donc un compact de cet espace d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

Q 22. Soit $M \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$. Alors, $J = M^T J M = M^{-1} J M$ et donc $MJ = JM$. Ceci montre que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}_J$.

Q 23. Soit $M \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$. Alors, $\det(M) \in \{-1, 1\}$ et d'autre part, $\det(M) \geqslant 0$ d'après la question Q20. Donc, $\det(M) = 1$.

Q 24. Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S. Puisque S est symétrique et que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$, s est un endomorphisme symétrique de l'espace $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de s puis $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associée.

M est symplectique et donc M^T est symplectique puis $S^2 = M^T M$ est symplectique d'après la question Q16. Mais alors s^2 est un endomorphisme symplectique de l'espace $(\mathbb{R}^n, b_s)$ d'après la question Q15. Donc, pour $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$b_s(e_k, e_l) = b_s\left(s^2(e_k), s^2(e_l)\right) = \lambda_k^2 \lambda_l^2 b_s(e_k, e_l).$$

Pour $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$, ou bien $b_s(e_k, e_l) \neq 0$ et dans ce cas, $\lambda_k^2 \lambda_l^2 = 1$ puis $\lambda_k \lambda_l = 1$ car $\lambda_k \lambda_l > 0$, ou bien $b_s(e_k, e_l) = 0$.
Pour $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$.

$$b_s(s(e_k), s(e_l)) = \langle s(e_k), j(s(e_l))\rangle = \lambda_k \lambda_l \langle e_k, j(e_l)\rangle = \lambda_k \lambda_l b_s(e_k, e_l).$$

Si $b_s(e_k, e_l) \neq 0$, alors $\lambda_k \lambda_l = 1$ puis $b_s(s(e_k), s(e_l)) = b_s(e_k, e_l)$. Sinon, $b_s(e_k, e_l) = 0$ et dans ce cas, $b_s(s(e_k), s(e_l)) = 0 = b_s(e_k, e_l)$. En résumé,

$$\forall (k, l) \in [\![1, n]\!]^2,\ b_s(s(e_k), s(e_l)) = b_s(e_k, e_l).$$

Soient enfin $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} y_l e_l$ deux éléments de E.

$$b_s(s(x), s(y)) = \sum_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2} x_k y_l b_s(s(e_k), s(e_l)) = \sum_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2} x_k y_l b_s(e_k, e_l) = b_s(x, y).$$

Ainsi, s est un endomorphisme symplectique de l'espace $(\mathbb{R}^n, b_s)$ et donc S est une matrice symplectique.

Q 25. 0 n'est pas valeur propre de S et donc S est inversible.

$O^T O = S^{-1} M^T M S^{-1} = S^{-1} S^2 S = I_n$ et donc $O \in O_n(\mathbb{R})$. Ensuite, $O^T J O = S^{-1} M^T J M S^{-1} = S^{-1} J S^{-1} = \left(S^{-1}\right)^T J S^{-1} = J$ (car S est symplectique d'après la question précédente et donc S^{-1} est symplectique d'après la question Q16) et donc $O \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. Finalement, $O \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$.

Q 26. Mais alors $M = OS$ puis $\det(M) = \det(O)\det(S)$. $\det(O) > 0$ d'après la question Q23 et $\det(S) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k > 0$ (où $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} = \mathrm{Sp}(S)$). Donc $\det(M) > 0$. Comme d'autre part $\det(M) \in \{-1, 1\}$ d'après la question Q16, on a montré que $\det(M) = 1$.

III.D - Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques

III.D.1) Transvection symplectique

Q 27. L'application $\ell : x \mapsto \lambda\omega(a, x)$ est une forme linéaire sur E par linéarité de ω par rapport à sa deuxième variable. De plus, $\omega(a, a) = 0$ d'après la question Q3 et donc $\ell(a) = 0$ puis $a \in \mathrm{Ker}(\ell)$. Ceci montre que τ_a^λ est une transvection de E.

Soit $(x, y) \in E^2$. Par bilinéarité de ω,

$$\begin{aligned}\omega\left(\tau_a^\lambda(x),\tau_a^\lambda(y)\right)&=\omega\left(x+\lambda\omega(a,x)a,y+\lambda\omega(a,y)a\right)\\&=\omega(x,y)+\lambda\omega(a,x)\omega(a,y)+\lambda\omega(a,y)\omega(x,a)+\lambda^2\omega(a,x)\omega(a,y)\omega(a,a)\\&=\omega(x,y)+\lambda\omega(a,x)\omega(a,y)-\lambda\omega(a,y)\omega(a,x)\text{ (par anti-symétrie)}\\&=\omega(x,y).\end{aligned}$$

Donc, τ_a^λ est un endomorphisme symplectique de l'espace (E,ω)).

Q 28. $\omega(a,a)=0$ et donc $\tau_a^\mu(a)=a$. Pour $x\in E$,

$$\begin{aligned}\tau_a^\mu\circ\tau_a^\lambda(x)&=\tau_a^\mu\left(x+\lambda\omega(a,x)a\right)=\tau_a^\mu(x)+\lambda\omega(a,x)\tau_a^\mu(a)=x+\mu\omega(a,x)a+\lambda\omega(a,x)a\\&=x+(\lambda+\mu)\omega(a,x)a=\tau_a^{\lambda+\mu}(x).\end{aligned}$$

Donc, $\tau_a^\mu\circ\tau_a^\lambda=\tau_a^{\lambda+\mu}$.

Q 29. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $\det\left(\tau_a^\lambda\right)=\det\left(\tau_a^{\frac{\lambda}{2}}\circ\tau_a^{\frac{\lambda}{2}}\right)=\left(\det\left(\tau_a^{\frac{\lambda}{2}}\right)\right)^2\geqslant 0$.
De plus, $\tau_a^\lambda\circ\tau_a^{-\lambda}=\tau_a^0=\mathrm{Id}_E$ et donc $\tau_a^\lambda\in GL(E)$ puis $\det\left(\tau_a^\lambda\right)\neq 0$. Finalement, $\det\left(\tau_a^\lambda\right)>0$.

Q 30. D'après la question précédente, $\left(\tau_a^\lambda\right)^{-1}=\tau_a^{-\lambda}$ et en particulier, $\left(\tau_a^\lambda\right)^{-1}$ est une transvection symplectique.

III.D.2) Un lemme

Q 31. Soient $(x,y)\in E^2$ tel que $\omega(x,y)\neq 0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
En particulier, $y-x\neq 0$ puis $\omega(y-x,x)=\omega(y,x)-\omega(x,x)=-\omega(x,y)$ et donc

$$\begin{aligned}\tau_{y-x}^\lambda(x)=y&\Leftrightarrow x+\lambda\omega(y-x,x)(y-x)=y\Leftrightarrow-(1+\lambda\omega(x,y))(y-x)=0\Leftrightarrow 1+\lambda\omega(x,y)=0\\&\Leftrightarrow\lambda=-\frac{1}{\omega(x,y)}.\end{aligned}$$

Ceci montre l'existe (et l'unicité) de λ tel que $\tau_{y-x}^\lambda(x)=y$.

Q 32. Supposons par l'absurde que, pour tout $z\in E$, $\omega(x,z)=0$ ou $\omega(y,z)=0$. Si on pose $D=\mathrm{Vect}(x)$ et $D'=\mathrm{Vect}(y)$, on a donc $E=D^\omega\cup D'^\omega$. D^ω et D'^ω sont deux sous-espaces de E (d'après la question Q4) dont la réunion est un sous-espace de E et il est connu que dans ce cas, l'un des deux contient l'autre. Supposons par exemple que $D'^\omega\subset D^\omega$. On a alors $E=D^\omega$ et en particulier, x est un vecteur non nul de E tel que, pour tout $z\in E$, $\omega(x,z)=0$. Ceci contredit le caractère non dégénéré de ω. Donc, il existe $z\in E$, $\omega(x,z)\neq 0$ ou $\omega(y,z)\neq 0$.

Q 33. Si $\omega(x,y)\neq 0$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ et $a\in E$ (à savoir $a=y-x$ et $\lambda=-\dfrac{1}{\omega(x,y)}$) tel que $\tau_a^\lambda(x)=y$.
Sinon $\omega(x,y)=0$. Soit $z\in E$ tel que $\omega(x,z)\neq 0$ et $\omega(z,y)\neq 0$. Soit τ_1 (resp. τ_2) une transvection symplectique telle que $\tau_1(x)=z$ (resp. $\tau_2(z)=y$). Mais alors, si $\gamma=\tau_2\circ\tau_1$, γ est un produit de deux transvections symplectiques tel que $\gamma(x)=y$.

Dans tous les cas, il existe γ, produit d'au plus deux transvections symplectiques, telle que $\gamma(x)=y$.

III.D.3) Le théorème

Q 34. Puisque $e_1\neq 0$ et que ω est non dégénérée, il existe au moins un vecteur e_1' tel que $\omega\left(e_1,e_1'\right)\neq 0$. Soit $f_1=\dfrac{1}{\omega\left(e_1,e_1'\right)}e_1'$. Alors,

$$\omega\left(e_1,f_1\right)=\frac{1}{\omega\left(e_1,e_1'\right)}\omega\left(e_1,e_1'\right)=1.$$

En particulier, $\omega\left(e_1,f_1\right)\neq 0$ et donc f_1 n'est pas colinéaire à e_1 (car sinon, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f_1=\lambda e_1$ puis $\omega\left(e_1,f_1\right)=\lambda\omega\left(e_1,e_1\right)=0$).

Q 35. Puisque u est un automorphisme de E (d'après les questions Q15 et Q16) et que $e_1\neq 0$, $u\left(e_1\right)\neq 0$. Le lemme de III.D)2) fournit un endomorphisme symplectique δ_1, produit d'au plus deux transvections symplectiques, tel que $\delta_1\left(u\left(e_1\right)\right)=e_1$.

Q 36.

1er cas. Supposons $\omega\left(\widetilde{f_1}, f_1\right) \neq 0$. Donc, f_1 et $\widetilde{f_1}$ ne sont pas nuls de même que $f_1 - \widetilde{f_1}$ (car sinon $f_1 = \widetilde{f_1}$ puis $\omega\left(\widetilde{f_1}, f_1\right) = 0$).

D'après la question Q31, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ etl que $\tau^{\lambda}_{f_1-\widetilde{f_1}}\left(\widetilde{f_1}\right) = f_1$. Mais alors,

$$\tau_{f_1-\widetilde{f_1}}\left(\widetilde{f_1}\right)(e_1) = e_1 + \lambda\omega\left(f_1 - \widetilde{f_1}, e_1\right)\left(f_1 - \widetilde{f_1}\right).$$

Puisque u et δ_1 sont symplectiques, il en est de même de $\delta_1 \circ u$ puis

$$\omega\left(\widetilde{f_1}, e_1\right) = \omega\left(\delta_1 \circ u(f_1), \delta_1 \circ u(e_1)\right) = \omega(f_1, e_1)\,(= -1).$$

On en déduit que $\omega\left(f_1 - \widetilde{f_1}, e_1\right) = \omega(f_1, e_1) - \omega\left(\widetilde{f_1}, e_1\right) = 0$ puis que $\tau_{f_1-\widetilde{f_1}}\left(\widetilde{f_1}\right)(e_1) = e_1$.

Ainsi, $\delta_2 = \tau_{f_1-\widetilde{f_1}}$ est un endomorphisme symplectique tel que $\delta_2(e_1)$ et $\delta_2\left(\widetilde{f_1}\right) = f_1$.

2ème cas. Supposons $\omega\left(\widetilde{f_1}, f_1\right) = 0$. Posons $f_2 = e_1 + f_1$. Alors,$\omega(f_2, f_1) = \omega(e_1, f_1) = 1$ et $\omega\left(f_2, \widetilde{f_1}\right) = \omega\left(e_1, \widetilde{f_1}\right) = 1$.

D'après le premier cas, il existe alors une transvection symplectique τ_1, laissant e_1 invariant telle que $\tau_1\left(\widetilde{f_1}\right) = f_2$ et une transvection symplectique τ_2, laissant e_1 invariant telle que $\tau_2(f_2) = f_1$.
Mais alors, $\delta_2 = \tau_2 \circ \tau_1$ est un produit de deux transvections symplectiques laissant e_1 invariant tel que $\delta_2\left(\widetilde{f_1}\right) = f_1$.

Dans tous les cas, $\delta = \delta_2 \circ \delta_1$ est un produit d'au plus quatre transvections symplectiques tel que $\delta \circ u(e_1) = e_1$ et $\delta \circ u(f_1) = f_1$.

Q 37. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\nu(\lambda e_1 + \mu f_1) = \lambda\nu(e_1) + \mu\nu(f_1) = \lambda e_1 + \mu f_1$ et donc, pour tout x de P, $\nu(x) = x$. Ceci montre que P est stable par ν et que l'endomorphisme de P induit par ν est $\nu_P = Id_P$.

Q 38. Soit $x \in P^{\omega}$. Alors, pour tout $y \in P$, puisque ν est un endomorphisme symplectique de l'espace (E, ω) (en tant que composée d'endormophismes symplectiques de cet espace),

$$0 = \omega(x, y) = \omega(\nu(x), \nu(y)) = \omega(\nu(x), y).$$

Par suite, $\nu(x) \in P^{\omega}$. Ceci montre que P^{ω} est stable par ν.

Q 39. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. En tenant compte de $\omega(e_1, f_1) = 1$,

$$\begin{aligned}\lambda e_1 + \mu f_1 \in P^{\omega} &\Leftrightarrow \omega(\lambda e_1 + \mu f_1, e_1) = \omega(\lambda e_1 + \mu f_1, f_1) = 0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda\omega(e_1, e_1) + \mu\omega(f_1, e_1) = 0\\ \lambda\omega(e_1, f_1) + \mu\omega(f_1, f_1) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.\end{aligned}$$

Donc, $P \cap P^{\omega} = \{0\}$. Ensuite, $(P^{\omega})^{\omega} = \{x \in E /\ \forall y \in P^{\omega},\ \omega(x, y) = 0\}$. En particulier, $P \subset (P^{\omega})^{\omega}$. Puisque d'autre part, d'après la question Q8,

$$\dim(P^{\omega})^{\omega} = \dim(E) - \dim(P^{\omega}) = \dim(P),$$

On en déduit que $(P^{\omega})^{\omega} = P$. Mais alors, $P^{\omega} \cap (P^{\omega})^{\omega} = \{0\}$ puis $E = P^{\omega} \oplus (P^{\omega})^{\omega}$ (car de plus, $\dim(P^{\omega}) + \dim\left((P^{\omega})^{\omega}\right) = \dim(E)$). La question Q9 montre alors $\omega_{P^{\omega}}$ est une forme symplectique sur P^{ω}.

P^{ω} est stable par ν et donc ν induit un endomorphisme $\nu_{P^{\omega}}$ de P^{ω} vérifiant de plus pour tout $(x, y) \in (P^{\omega})^2$

$$\omega_{P^{\omega}}(\nu_{P^{\omega}}(x), \nu_{P^{\omega}}(y)) = \omega(\nu(x), \nu(y)) = \omega(x, y) = \omega_{P^{\omega}}(x, y).$$

Ainsi, $\nu_{P^{\omega}}$ est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique $(P^{\omega}, \omega_{P^{\omega}})$.

Q 40. Montrons alors le théorème par récurrence sur $n = 2m = \dim(E)$.

- Soit (E, ω) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel symplectique de dimension 2. Soit u un endomorphisme symplectique de E. Comme à la question Q34, il existe une base (e_1, f_1) de E telle que $\omega(e_1, f_1) = 1$. Ensuite, d'après la question Q36, il existe δ, produit d'au plus quatre transvections symplectiques tel que $\delta \circ u(e_1) = e_1$ et $\delta \circ u(f_1) = f_1$.
  L'endomorphisme $\delta \circ u$ coïncide avec Id_E sur une base de E et donc $\delta \circ u = Id_E$ puis $u = \delta^{-1}$. Puisque la réciproque d'une transvection symplectique est une transvection symplectique d'après la question Q30, u est un produit d'au plus

quatre transvections symplectiques. Le résultat est donc vrai quand $m = 1$.

- Soient $m \geqslant 1$ puis $n = 2m$. Supposons que tout endomorphisme symplectique d'un espace symplectique de dimension $n = 2m$ soit un produit d'au plus $2n = 4m$ transvections symplectiques.
Soient (E, ω) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel symplectique de dimension $2(m+1) = 2m+2$ puis u un endomorphisme symplectique de cet espace. Il existe (e_1, f_1) famille libre de E telle que $\omega(e_1, f_1) = 1$. Soit $P = \text{Vect}(e_1, f_1)$.
Il existe δ produit d'au plus quatre transvections symplectiques tel que $(\delta \circ u)_{/P} = \text{Id}_P$. On pose $\nu = \delta \circ u$.
D'après les questions Q38 et Q39, ν induit un endomorphisme ν_{P^ω} de P^ω qui est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique $(P^\omega, \omega_{P^\omega})$.
Puisque $\dim(P^\omega) = \dim(E) - 2 = 2n$, par hypothèse de récurrence, ν_P est produit de $p \leqslant 4m$ transvections symplectiques de P^ω. Chaque transvection τ_i' de ce produit peut s'écrire $\left(\tau_{a_i}^{\lambda_i}\right)'$ où $a_i \in P^\omega$.
Pour chaque i, on définit la transvection τ_i de E par : $\forall x \in E$, $\tau_i(x) = x + \lambda_i \omega(a_i, x) a_i$.
Puisque pour tout $x \in P$, $\omega(x, a_i) = 0$, chaque τ_i est l'identité de P et donc $\tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$ est l'identité de P.
Les endomorphismes ν et $\tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$ coïncident sur les sous-espaces supplémentaires P et P^ω. Donc, $\nu = \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$ puis $u = \delta^{-1} \circ \tau_p \circ \ldots \circ \tau_1$. Mais alors, u est un produit d'au plus $4m + 4$ transvections symplectiques.

Le théorème est démontré par récurrence.

III.D.4) Une conséquence topologique

Q 41. Soient f et g deux endomorphismes symplectiques d'un espace symplectique (E, ω) de dimension $n = 2m$. Il existe des transvections symplectiques τ_1, ..., τ_{2n}, (quite à continuer à composer des transformations du type $\tau \circ \tau^{-1}$) et $\tau 1'$, , ..., τ_{2n}' telles que $f = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_{2n}$ et $g = \tau_1' \circ \ldots \circ \tau_{2n}'$.
Pour $i \in [\![1, 2n]\!]$, posons $\tau_i = \tau_{a_i}^{\lambda_i}$ et $\tau_i' = \tau_{a_i'}^{\lambda_i'}$ où a_1, ..., a_{2n}, a_1', ... a_{2n}' sont des éléments de E et λ_1, ..., λ_{2n}, λ_1', ..., λ_{2n}' sont des réels.

Pour $t \in [0, 1]$, posons $\gamma(t) = \tau_{(1-t)a_1 + ta_1'}^{(1-t)\lambda_1 + t\lambda_1'} \circ \ldots \circ \tau_{(1-t)a_{2n} + ta_{2n}'}^{(1-t)\lambda_{2n} + t\lambda_{2n}'}$. Pour tout réel $t \in [0, 1]$, $\gamma(t)$ est un produit de transvections symplectiques et donc $\gamma(t)$ est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique (E, ω). Ensuite, $\gamma(0) = f$ et $\gamma(1) = g$. Enfin, γ est continue sur $[0, 1]$ en vertu de théorèmes généraux entre autre car ω est continue sur E en tant qu'application bilinéaire sur un espace de dimension finie.

On a montré que $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

III.D.5) Deuxième conséquence

Q 42. Déterminons le déterminant d'une transvection symplectique. Si $a = 0$ ou $\lambda = 0$, $\det\left(\tau_a^\lambda\right) = \det(\text{Id}_E) = 1$.

Soit $\tau = \tau_a^\lambda$ une transvection symplectique où $a \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On pose $e_1 = a$.
(e_1) est une famille libre de E. On la complète en $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E. Dans cette base, la matrice de τ_a^λ est de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \times & \ldots & \ldots & \times \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc, $\det\left(\tau_a^\lambda\right) = \det(T) = 1$. Mais alors, puisque qu'un endomorphisme symplectique f est produit de transvection symplectique, toutes de déterminant 1, on a encore $\det(f) = 1$ (car $(SL(E), \circ)$ est un groupe). On en déduit encore que le déterminant d'une matrice symplectique est égal à 1 d'après la question Q15.

On a redémontré que $\text{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \text{SL}_n(\mathbb{R})$.

IV - Exemples de problèmes de plongements symplectiques

IV.A - Injection par $u \in \text{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ d'une boule dans un cylindre

Q 43. Soit $r > 0$. On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque $n \geqslant 4$, on peut considérer l'endomorphisme u de matrice $\text{diag}\left(r, r, \dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}, 1, 1, \ldots, 1\right)$ dans $\mathscr{B}$. $\det(u) = r^2 \times \dfrac{1}{r^2} = 1$ et donc $u \in \text{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$. De plus, si $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in B^{2m}(1)$, en posant $(x_1', \ldots, x_n', y_1', \ldots, y_m') = u(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, on a

$$x_1'^2 + y_1'^2 = r^2\left(x_1^2 + y_1^2\right) \leqslant r^2$$

et donc $(x_1', \ldots, x_n', y_1', \ldots, y_m') \in Z^{2m}(r)$. u est un élément de $\text{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ tel que $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset Z^{2m}(r)$.

IV.B - Injection par $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ ***d'une boule dans une autre***

Q 44. Soit λ une (éventuelle) valeur propre réelle de U et $X \in \mathscr{M}_{2m}(\mathbb{R})$ un vecteur propre unitaire associé. En particulier, $X \in B^{2m}(1)$ puis UX est dans $B^{2m}(r)$. Mais alors

$$|\lambda| = |\lambda|\|X\| = \|\lambda X\| = \|UX\| \leqslant r.$$

Soit maintenant λ une (éventuelle) valeur propre non réelle de U. Soit $Z \in \mathscr{M}_{2m,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. On pose $Z = P + iQ$ où $(P, Q) \in (\mathscr{M}_{2m,1}(\mathbb{R})^2$. On pose aussi $\lambda = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'égalité $UZ = \lambda Z$ s'écrit encore

$$UP + iUQ = (a + ib)(P + iQ) = (aP - bQ) + i(bP + aQ).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient : $UP = aP - bQ$ et $UQ = bP + aQ$. Par suite,

$$\begin{aligned}\|UP\|^2 + \|UQ\|^2 &= \|aP - bQ\|^2 + \|bP + aQ\|^2 = a^2\|P\|^2 - 2ab\langle P, Q\rangle + b^2\|Q\|^2 + b^2\|P\|^2 + 2ab\langle P, Q\rangle + a^2\|Q\|^2 \\ &= \left(a^2 + b^2\right)\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right) = |\lambda|^2\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right).\end{aligned}$$

Maintenant, si $P \neq 0$, $\dfrac{1}{\|P\|}P \in B^{2m}(1)$ puis $\left\|U \times \dfrac{1}{\|P\|}P\right\| \leqslant r$ et donc $\|UP\|^2 \leqslant r^2\|P\|^2$, cette dernière égalité restant vraie quand $P = 0$. De même, $\|UQ\|^2 \leqslant r^2\|Q\|^2$. On en déduit que

$$|\lambda|^2\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right) = \|UP\|^2 + \|UQ\|^2 \leqslant r^2\left(\|P\|^2 + \|Q\|^2\right).$$

Enfin, puisque $Z \neq 0$, on a $\|P\|^2 + \|Q\|^2 > 0$ (car $\|P\|^2 + \|Q\|^2 = 0 \Rightarrow P = Q = 0 \Rightarrow Z = 0$). Après simplification par le réel strictement positif $\|P\|^2 + \|Q\|^2$, il reste $|\lambda|^2 \leqslant r^2$ et finalement, $|\lambda| \leqslant r$.

Q 45. Supposons par l'absurde que toutes les valeurs propres de U soient de module strictement inférieur à 1. Alors, le déterminant de U qui est le produit de ces valeurs propres, chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité, est encore de module strictement inférieur à 1. Ceci contredit le fait que $\det(U) = 1$.

Donc, il existe une valeur propre λ_0 de U dans $\mathbb{C}$ telle que $|\lambda_0| \geqslant 1$. D'après la question précédente, $r \geqslant |\lambda_0| \geqslant 1$.

Q 46. Ainsi, s'il existe $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ tel que $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}(r)$, alors $r \geqslant 1$. Inversement, si $r \geqslant 1$, $u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2m}}$ est un élément de $\mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ tel que $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}(r)$.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est : $r \geqslant 1$.

IV.C - Injection symplectique d'une boule dans un cylindre

Q 47. ψ est symplectique. Donc, M est symplectique d'après la question Q15, puis M^T est symplectique d'après la question Q16 et finalement ψ^T est symplectique. Mais alors,

$$b_s\left(\psi^T(e_1), \psi^T(f_1)\right) = b_s(e_1, f_1) = \langle e_1, j(f_1)\rangle = \langle e_1, -e_1\rangle = -\|e_1\|^2 = -1.$$

Donc, $\left|b_s\left(\psi^T(e_1), \psi^T(f_1)\right)\right| = 1$. Ensuite, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$1 = \left|b_s\left(\psi^T(e_1), \psi^T(f_1)\right)\right| = \left|\left\langle\psi^T(e_1), j\left(\psi^T(f_1)\right)\right\rangle\right| \leqslant \left\|\psi^T(e_1)\right\| \times \left\|j\left(\psi^T(f_1)\right)\right\|.$$

D'autre part, j est un automorphisme orthogonal de l'espace $\left(\mathbb{R}^{2m}, \langle\ ,\ \rangle\right)$ (car $J \in O_{2m}(\mathbb{R})$ et car la base canonique est orthonormée pour $\times$). Par suite, $\left\|j\left(\psi^T(f_1)\right)\right\| = \left\|\psi^T(f_1)\right\|$ et donc

$$\left\|\psi^T(e_1)\right\| \times \left\|\psi^T(f_1)\right\| \geqslant 1.$$

On en déduit encore que $\left\|\psi^T(e_1)\right\| \geqslant 1$ ou $\left\|\psi^T(f_1)\right\| \geqslant 1$ (car si $\left\|\psi^T(e_1)\right\| < 1$ ou $\left\|\psi^T(f_1)\right\| < 1$, alors $\left\|\psi^T(e_1)\right\| \times \left\|\psi^T(f_1)\right\| < 1$ ce qui est faux.

Q 48. Pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^{2m}\right)^2$, en notant X et Y les vecteurs colonnes représentant respectivement les vecteurs colonnes X et Y dans la base canonique,

$$\left\langle\psi^T(x), y\right\rangle = \left(M^TX\right)^T Y = X^TMY = \langle x, \psi(y)\rangle.$$

Soit $x \in B^{2m}(1)$. Alors, $\psi(x) \in B^{2m}(r)$ puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\left\langle\psi^T(e_1), x\right\rangle\right| = |\langle e_1, \psi(x)\rangle| \leqslant \|e_1\|ł\psi(x)\| = \|\psi(x)\| \leqslant r.$$

On applique cette inégalité au vecteur $x = \dfrac{1}{\|\psi^{\mathsf{T}}(e_1)\|}\Psi^{\mathsf{T}}(e_1)$ ($\psi^{\mathsf{T}}(e_1) \neq 0$ car $e_1 \neq 0$ et $\psi^{\mathsf{T}} \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$) qui est dans $B^{2m}(1)$. On obtient $\left|\left\langle \psi^{\mathsf{T}}(e_1), \dfrac{1}{\|\psi^{\mathsf{T}}(e_1)\|}\Psi^{\mathsf{T}}(e_1)\right\rangle\right| \leqslant r$ ou encore $\left\|\psi^{\mathsf{T}}(e_1)\right\| \leqslant r$. De même, $\left\|\psi^{\mathsf{T}}(f_1)\right\| \leqslant r$.

Puisque l'un des deux réels $\left\|\psi^{\mathsf{T}}(e_1)\right\|$ ou $\left\|\psi^{\mathsf{T}}(f_1)\right\|$ est supérieur ou égal à 1, on a montré que $r \geqslant 1$.

Q 49. Supposons qu'il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ tel que $\psi\left(B^{2m}(R)\right) \subset B^{2m}(R')$. Alors, $\psi\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}\left(\dfrac{R'}{R}\right)$. D'après la question précédente, $\dfrac{R'}{R} \geqslant 1$ puis $R' \geqslant R$.

Inversement si $R' \geqslant R$, $\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2m}}$ est un endomorphisme symplectique tel que $\psi\left(B^{2m}(R)\right) \subset B^{2m}(R')$.

Le théorème de non tassement linéaire est démontré.

