SESSION 2019

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

EXERCICE I

Q1 *Informatique.*

```
def estPremier(n):
    if n==1
        return False
    else
        d = 2
        while d**2 <= n :
             if n%d == 0
                return False
            d+=1
        return True
```

Q2 *Informatique.*

```
def liste_premiers(n) :
    L = []
    for p in range(2,n+1) :
         if estPremier(p) :
             L.append(p)
    return L
```

Q3 *Informatique.*

```
def valuation_p_adique(n,p) :
    v = 0
    m = n
    while m%p == 0 :
         m = m//p
         v = v+1
    return v
```

Q4 *Informatique.*

```
def val(n,p) :
    if n%p != 0 :
         return 0
    else :
        return 1+val(n//p,p)
```

Q5 *Informatique.*

```
def decomposition_facteurs_premiers(n):
    D = []
    for p in liste_premiers(n) :
         if n%p == 0 :
              D.append([p,val(n,p)])
    return D
```


EXERCICE II

Q6 On se place dans $E = \mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire canonique et de son orientation canonique. On considère r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. r est un endomorphisme de E tel que, pour tout vecteur x de E, on a $\langle r(x), x\rangle = 0$, mais r n'est pas l'endomorphisme nul.

Donc, si u est un endomorphisme d'un espace euclidien vérifiant : pour tout x de E, $\langle u(x), x\rangle = 0$, u n'est pas nécessairement l'endomorphisme nul.

Q7 • Montrons que $i \Rightarrow ii$. Supposons $u \circ v = v \circ u$. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, v(u(y))\rangle = \langle x, u(v(y))\rangle = \langle u(v(y)), x\rangle = \langle v(y), v(x)\rangle = \langle v(x), v(y)\rangle.$$

On a montré que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle v(x), v(y)\rangle$.

• Montrons que $ii \Rightarrow iii$. Supposons que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle v(x), v(y)\rangle$. Pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \sqrt{\langle u(x), u(x)\rangle} = \sqrt{\langle v(x), v(x)\rangle} = \|v(x)\|.$$

On a montré que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|v(x)\|$.

• Montrons que $iii \Rightarrow ii$. Supposons que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|v(x)\|$. Soit $(x, y) \in E^2$. D'après une identité de polarisation,

$$\begin{aligned}\langle u(x), u(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|u(x + y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|v(x + y)\|^2 - \|v(x)\|^2 - \|v(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|v(x) + v(y)\|^2 - \|v(x)\|^2 - \|v(y)\|^2\right) \\ &= \langle v(x), v(y)\rangle.\end{aligned}$$

On a montré que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle v(x), v(y)\rangle$.

• Montrons que $ii \Rightarrow i$. Supposons que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle v(x), v(y)\rangle$. Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle x, v \circ u(y)\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle v(x), v(y)\rangle = \langle v(y), v(x)\rangle = \langle u \circ v(y), x\rangle = \langle x, u \circ v(y)\rangle.$$

Soit $y \in E$. Pour tout x de E, on a $\langle x, v \circ u(y)\rangle = \langle x, u \circ v(y)\rangle$ et donc, pour tout x de E, on a $\langle x, (u \circ v - v \circ u)(y)\rangle = 0$. Donc, $(u \circ v - v \circ u)(y) \in E^{\perp} = \{0\}$ puis $u \circ v(y) = v \circ u(y)$. On a montré que, pour tout $y \in E$, $u \circ v(y) = v \circ u(y)$ et donc $u \circ v = v \circ u$.

PROBLÈME

Partie I - Etude de quelques exemples

Q8 Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On suppose A et B semblables. Donc, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det\left(\lambda I_n - P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}(\lambda I_n - A)P\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det(\lambda I_n - A)\det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)}\det(\lambda I_n - A)\det(P) = \det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda).\end{aligned}$$

Donc, A et B ont même polynôme caractéristique.

• En particulier, le coefficient de X^{n-1} dans χ_A et χ_B est le même ce qui fournit $-\mathrm{Tr}(A) = -\mathrm{Tr}(B)$ puis $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$. D'autre part, $\det(A) = (-1)^n\chi_A(0) = (-1)^n\chi_B(0) = \det(B)$. Donc, A et B ont même trace et même déterminant.

• Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Vérifions tout d'abord que $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$. On sait que $\mathrm{rg}(AP) \leqslant \mathrm{Min}\{\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(P)\} \leqslant \mathrm{rg}(A)$. D'autre part, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(APP^{-1}\right) \leqslant \mathrm{Min}\left\{\mathrm{rg}(AP), \mathrm{rg}\left(P^{-1}\right)\right\} \leqslant \mathrm{rg}(AP)$. On a montré que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$. De même, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}\left(P^{-1}A\right) = \mathrm{rg}(A)$ et finalement

$$\mathrm{rg}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A).$$

On a montré que deux matrices semblables ont le même rang.

Q9 • $\det(A) = \det(B) = 4$ et $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 5$. Ensuite, $\chi_A = \chi_B = (X-1)(X-2)^2$. A et B sont inversibles car de déterminant non nul et donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 3$. A et B ont donc même trace, même rang, même déterminant et même polynôme caractéristique.

• Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de M est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. D'autre part, on sait que le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours une droite vectorielle, que M soit diagonalisable ou pas.

Ici, A et B ont le même polynôme caractéristique à savoir $\chi_A = \chi_B = (X-1)(X-2)^2$. D'après ce qui précède, A (resp. B) est diagonalisable si et seulement si $\dim(\text{Ker}\,(A - 2I_2)) = 2$ ce qui équivaut à $\text{rg}\,(A - 2I_3) = 1$ d'après le théorème du rang (resp. $\text{rg}\,(B - 2I_3) = 1$).
Or, $\text{rg}\,(A - 2I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\text{rg}\,(B - 2I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Donc, A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et B n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Ainsi, A est semblable à une matrice diagonale et B ne l'est pas. Puisque la relation de similitude est transitive, A et B ne sont pas semblables.
• μ_A et μ_B sont chacun un diviseur unitaire du polynôme caractéristique $(X-1)(X-2)^2$ (d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON), admettant 1 et 2 pour racines. Donc, μ_A et μ_B sont chacun l'un des deux polynômes $(X-1)(X-2)$ ou $(X-1)(X-2)^2$. On sait qu'une matrice réelle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples. Donc, le polynôme minimal de A (resp. B) est $(X-1)(X-2)$ si et seulement si A (resp. B) est diagonalisable.

D'après ce qui précède, A est diagonalisable puis $\mu_A = (X-1)(X-2)$ et B n'est pas diagonalisable puis $\mu_B = (X-1)(X-2)^2$.

Finalement, les matrices A et B n'ont pas le même polynôme minimal.

Q10 **Première méthode.** Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $u(e_1) = e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = e_1 + e_3$ et $u(e_3) = e_1$.
Posons $e'_1 = e_2$, $e'_2 = e_1$ et $e'_3 = e_3$. $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.
$u(e'_1) = u(e_2) = e_1 + e_3 = e'_2 + e'_3$, $u(e'_2) = u(e_1) = e_2 + 2e_3 = e'_1 + 2e'_3$ et $u(e'_3) = u(e_3) = e_1 = e'_2$.
Donc, $\text{Mat}_{\mathscr{B}'} u = B$. Puisque A et B sont les matrices d'un même endomorphisme u relativement à des bases différentes, A et B sont semblables. Plus explicitement, si $P = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\mathscr{B}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $B = P^{-1}AP$.

Deuxième méthode. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ -2 & -1 & X \end{vmatrix} &= X\left(X^2\right) + (-X-1) - 2\,(X) \\ &= X^3 - 3X - 1, \end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned} \chi_B = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -2 & X \end{vmatrix} &= X\left(X^2 - 2\right) + (-X) - (1) \\ &= X^3 - 3X - 1. \end{aligned}$$

Pour tout réel x, posons $P(x) = x^3 - 3x - 1$. Pour tout réel x, $P'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$. La fonction P est continue sur $]-\infty, -1]$ et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty < 0$ et $P(-1) = 1 > 0$. Donc, la fonction P s'annule au moins une fois dans $]-\infty, -1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ensuite, $P(1) = -3 < 0$ et donc P s'annule au moins une fois dans $]-1, 1[$ puis une fois dans $]1, +\infty[$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty > 0$. Ainsi, P a au moins trois racines réelles deux à deux distinctes. Puisque P est de degré 3, P a exactement trois racines réelles deux à deux distinctes α, β et γ, toutes simples.

Ainsi, χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{R}$, à racines simples. Donc, A et B sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, A et B sont toutes deux semblables à la matrice $D = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$. Mais alors, par transitivité, A et B sont semblables.

Q11 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est A. u est de rang 1. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension $n-1$. Soit $\left(e'_1, \dots, e'_{n-1}\right)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$. $\left(e'_1, \dots, e'_{n-1}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$. On peut compléter cette famille en une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Dans cette base, la matrice de U est de la forme $U = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Les formules de changement de base fournissent $U = P^{-1}AP$. A est donc semblable à U.

Q12 D'après la question précédente, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = U$. On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^2\right) = U^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1a_n \\ \vdots & & \vdots & a_2a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

Si $a_n = 0$, alors $U^2 = 0$ puis $u^2 = 0$ ce qui n'est pas. Donc, $a_n \neq 0$.

Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = \chi_U = X^{n-1}(X - a_n)$. Déjà, χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$. Puisque $a_n \neq 0$, u admet 0 pour valeur propre d'ordre $n-1$ et a_n pour valeur propre simple. La dimension de $E_{a_n}(u)$ est 1. D'autre part, d'après le théorème du rang, la dimension de $E_0(u)$ est $n-1$ qui est aussi l'ordre de multiplicité de 0. Finalement, χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. On en déduit que u est diagonalisable.

Q13 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$. A est une matrice symétrique complexe. Ensuite,

$$\chi_A = X^2 - (\mathrm{Tr}(A))\,X + \det(A) = X^2 - 2iX - 1 = (X - i)^2.$$

Donc, $\mathrm{Sp}(A) = (i, i)$. Si A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, A est semblable à $\mathrm{diag}(i, i) = iI_2$ et donc égale à iI_2. Ceci est faux et donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ bien que symétrique.

Une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Q14 En notant C_1, C_2, C_3 et C_4 les quatre colonnes de A, on a $C_3 = C_1$ et $C_4 = C_2$. Donc, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(C_1, C_2, C_3, C_4\right) = \mathrm{rg}\left(C_1, C_2\right)$ puis $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$.

D'autre part, la matrice extraite de format 2 obtenue en supprimant les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes de A a un déterminant égal à $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2$. Ce déterminant n'est pas nul car $\beta \neq \pm\alpha$ et donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Finalement $\mathrm{rg}(A) = 2$.

En particulier, $\mathrm{rg}(A) < 4$ et donc A n'est pas inversible puis 0 est valeur propre de A. Plus précisément, d'après le théorème du rang, $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $4 - 2 = 2$ et donc 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité au moins 2.

$A - 2(\alpha+\beta)I_4 = \begin{pmatrix} -\alpha-2\beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha-2\beta & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & -\alpha-2\beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & -\alpha-2\beta \end{pmatrix}$. La somme des colonnes de la matrice $A - 2(\alpha+\beta)I_4$ est nulle et donc $\mathrm{rg}\left(A - 2(\alpha+\beta)I_4\right) < 4$ puis $A - 2(\alpha+\beta)I_4 \notin GL_4(\mathbb{C})$. On en déduit que $2(\alpha+\beta)$ est valeur propre de A. On note que $2(\alpha+\beta) \neq 0$ et donc $2(\alpha+\beta)$ est une nouvelle valeur propre de A en plus de 0 et 0.

La dernière valeur propre λ de A est fournie par la trace de A :

$$4\alpha = \mathrm{Tr}(A) = 0 + 0 + 2(\alpha+\beta) + \lambda$$

et donc $\lambda = 2(\alpha-\beta)$. Finalement, $\mathrm{Sp}(A) = (0, 0, 2(\alpha+\beta), 2(\alpha-\beta))$. On note que $2(\alpha-\beta) \neq 0$ car $\alpha \neq \beta$ et $2(\alpha+\beta) \neq 2(\alpha-\beta)$ car $\beta \neq 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta y + \alpha z + \beta t = 0 \\ \beta x + \alpha y + \beta z + \alpha t = 0 \end{array} \right. .$$

Les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $E_0(A)$. Puisque $E_0(A)$ est de dimension 2, (u_1, u_2) est une base de $E_0(A)$.

Puisque la somme des colonnes de $A - 2(\alpha+\beta)I_4$ est nulle, le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $E_{2(\alpha+\beta)}(A)$.

Puisque $E_{2(\alpha+\beta)}(A)$ est de dimension 1 (car $2(\alpha+\beta)$ est valeur propre simple de A), (u_3) est une base de $E_{2(\alpha+\beta)}(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

$$X \in \mathrm{Ker}\left(A - 2(\alpha-\beta)I_4\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-\alpha+2\beta)x + \beta y + \alpha z + \beta t = 0 \\ \beta x + (-\alpha+2\beta)y + \beta z + \alpha t = 0 \\ \alpha x + \beta y + (-\alpha+2\beta)z + \beta t = 0 \\ \beta x + \alpha y + \beta z + (-\alpha+2\beta)t = 0 \end{array} \right. .$$

Le vecteur $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $E_{2(\alpha-\beta)}(A)$. Puisque $E_{2(\alpha-\beta)}(A)$ est de dimension 1 (car $2(\alpha-\beta)$ est valeur propre simple de A), (u_4) est une base de $E_{2(\alpha-\beta)}(A)$.

Puisque la somme $E_0(A) + E_{2(\alpha+\beta)} + E_{2(\alpha-\beta)}$ est directe, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une famille libre de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. Etant de cardinal 4, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A. A est donc diagonalisable.

Q15 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Donc, $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_2) = ae_1 + \lambda e_2$.
Soient $e_1' = \dfrac{a}{b}e_1$ et $e_2' = e_2$. e_1' et e_2' sont bien définis car $b \neq 0$ et $\mathscr{B}' = (e_1', e_2')$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car $a \neq 0$.
Puisque e_1' est colinéaire au vecteur propre e_1, on a encore $u(e_1') = \lambda e_1'$. D'autre part,

$$u(e_2') = u(e_2) = ae_1 + \lambda e_2 = a\frac{b}{a}e_1' + \lambda e_2' = be_1' + \lambda e_2'.$$

Donc, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = B$. Ceci montre que les matrices A et B sont semblables car $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

Partie II - Démonstration d'un résultat

Q16 L'égalité $B = P^{-1}AP$ fournit l'égalité $PB = AP$ puis $RB + iSB = AR + iAS$. Puisque A et B sont réelles, par identification des parties réelles et des parties imaginaires, on obtient $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q17 En développant le déterminant, on voit que la fonction $f : x \mapsto \det(R + xS)$, définie sur $\mathbb{C}$, est polynomiale en x. De plus, $f(i) = \det(R + iS) = \det(P) \neq 0$ et donc f n'est pas le polynôme nul.

Donc, le polynôme f admet un nombre fini, éventuellement nul, de racines dans $\mathbb{C}$. Puisque $\mathbb{R}$ est infini, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$ ou encore tel que $\det(R + x_0 S) \neq 0$.

Q18 Soit $P_0 = R + x_0 S$. La matrice P_0 est réelle et inversible. De plus,

$$P_0 B = (R + x_0 S) B = RB + x_0 SB = AR + x_0 AS = A (R + x_0 S) = AP_0.$$

Puisque P_0 est inversible, on en déduit encore que $B = P_0^{-1} A P_0$. Les matrices A et B sont donc semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Q19 $\chi_B = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X\left(X^2+1\right) = X^3 + X = X(X-i)(X+i)$. B est à valeurs propres simples dans $\mathbb{C}$. Donc, B est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ puis B est semblable dans $\mathbb{C}$ à la matrice $D = \operatorname{diag}(0, i, -i)$.

Le même raisonnement s'applique à la matrice A dont le polynôme caractéristique est $X^3 + X$: A est semblable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à la matrice $D = \operatorname{diag}(0, i, -i)$. Mais alors, par transitivité, A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. Puisque A et B sont réelles, A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie III

Q20 Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \chi_B$ et $\mu_A = \mu_B$.

1er cas. Supposons que χ_A a deux racines réelles distinctes x_0 et x_1. Dans ce cas, $\chi_A = \chi_B = \mu_A = \mu_B = (X - x_0)(X - x_1)$. A et B sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, toutes deux semblables dans $\mathbb{R}$ à $D = \operatorname{diag}(x_0, x_1)$. Puis A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$ par transitivité.

2ème cas. Supposons que χ_A a deux racines non réelles conjuguées z_0 et $\overline{z_0}$ (χ_A étant à coefficients réels). Dans ce cas, $\chi_A = \chi_B = \mu_A = \mu_B = (X - z_0)(X - \overline{z_0})$. A et B sont diagonalisables dans $\mathbb{C}$, toutes deux semblables dans $\mathbb{C}$ à $D = \operatorname{diag}(z_0, \overline{z_0})$. Puis A et B sont semblables dans $\mathbb{C}$ par transitivité. A et B étant à coefficients réels, A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$.

3ème cas. Supposons que χ_A a une racine double réelle x_0. Dans ce cas, $\chi_A = \chi_B = (X - x_0)^2$. On a alors deux cas possibles pour le polynôme minimal : $\mu_A = \mu_B = X - x_0$ ou $\mu_A = \mu_B = (X - x_0)^2$.

Le premier sous-cas, $\mu_A = \mu_B = X - x_0$ est le cas où $A = x_0 I_2 = B$. Dans ce cas, A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$ car égales.

Le deuxième sous-cas est le cas où $\chi_A = \chi_B = (X - x_0)^2 = \mu_A = \mu_B$. Dans ce cas, A et B ne sont pas diagonalisables car leur polynôme minimal n'est pas à racines simples. Le sous-espace propre $E_{x_0}(A)$ est donc de dimension 1 puis A est semblable dans $\mathbb{R}$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} x_0 & \times \\ 0 & \times \end{pmatrix}$ puis, plus précisément, à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} x_0 & a \\ 0 & x_0 \end{pmatrix}$ où x_0 et a sont deux réels (car $\chi_A = (X - x_0)^2$), a étant non nul car sinon, on se retrouve dans le sous-cas précédent. De même, B est semblable dans $\mathbb{R}$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} x_0 & b \\ 0 & x_0 \end{pmatrix}$ où b est réel un réel non nul. D'après la question Q15 et par transitivité, A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, les matrices A et B sont semblables.

Q21 Soit $N = E_{1,2} \neq 0$. On a $N^2 = 0$ puis $\chi_N = X^4$ (car toute valeur propre de N dans $\mathbb{C}$ est racine du polynôme annulateur X^2 et est donc nulle) et $\mu_N = X^2$ (car X^2 est unitaire et annulateur de N et X ne l'est pas).
Soit $N' = E_{1,3} + E_{2,4}$. On a de même, $N'^2 = 0$ $\chi_{N'} = X^4$ et $\mu_{N'} = X^2$. N et N' sont deux éléments de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal.

Mais $\operatorname{rg}(N) = 1$ et $\operatorname{rg}(N') = 2$. Donc, N et N' n'ont pas le même rang et en particulier, N et N' ne sont pas semblables.

Les matrices $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

