Planche n° 34. Le groupe symétrique

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 : (IT)**

Soit σ l'élément de S_{12} : $\sigma = (3\ 10\ 7\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 12\ 8\ 9\ 11)$.

1) Combien σ possède-t-elle d'inversions ? Que vaut sa signature ?

2) Décomposer σ en produit de transpositions. Retrouvez sa signature.

3) Déterminer les orbites de σ.

4) Déterminer σ^{2023}.

Exercice n° 2 : (T)**

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$,...,$\tau_{1,n}$ (c'est-à-dire montrer que toute permutation est la composée de transpositions du type $\tau_{1,i}$, $2 \leqslant i \leqslant n$).

Exercice n° 3 : (*T)**

Démontrer que A_n est engendré par les cycles de longueur 3 (pour $n \geqslant 3$).

Exercice n° 4 : (*T)**

Démontrer que S_n est engendré par $\tau_{1,2}$ et le cycle $(2\ 3\ \ldots\ n\ 1)$.

Exercice n° 5 : (***)

Définition : Soient $(G, *)$ et $(G', *')$ deux groupes. On dit que ces groupes sont isomorphes si et seulement si il existe une application bijective f de G sur G' telle que : $\forall (x, y) \in G^2,\ f(x * y) = f(x) *' f(y)$ (f est alors un isomorphisme du groupe $(G, *)$ sur le groupe $(G', *')$.

Soit $(G, \times)$ un groupe. Montrer que $(G, \times)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(S(G), \circ)$ et que, en particulier, tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n (théorème de Cayley). (Indication : montrer que pour chaque x de G, l'application $y \mapsto xy$ est une permutation de G.)

Exercice n° 6 : (***)

Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$ et k le nombre d'orbites de σ. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$.

Exercice n° 7 : (*I)**

σ étant une permutation de $[\![1, n]\!]$ donnée, on définit la matrice notée P_σ, carrée d'ordre n dont le terme ligne i colonne j est $\delta_{i,\sigma(j)}$ (où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker). On note G l'ensemble des P_σ où σ décrit S_n.

1) a) σ et σ' étant deux éléments de S_n, calculer $P_\sigma \times P_{\sigma'}$.
b) En déduire que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, isomorphe à $(S_n, \circ)$ (la définition de deux groupes isomorphes a été donnée dans l'exercice n° 5). Les matrices P_σ sont appelées « matrices de permutation ».

2) (Une utilisation des P_σ) A étant une matrice carrée donnée, calculer AP_σ et $P_\sigma A$. Que constate-t-on ?

Exercice n° 8 : (*I)**

A_1, A_2,...,A_p sont p matrices carrées d'ordre n, deux à deux distinctes et inversibles. On suppose que $\{A_1, \ldots, A_p\}$ est stable pour $\times$. Montrer que $\{A_1, \ldots, A_p\}$ est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ (on utilisera le résultat suivant démontré dans le chapitre dénombrement : si f est une application injective d'un ensemble E dans un ensemble F et si E et F sont deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments, alors f est bijective).

Exercice n° 9 : (***)

Dans $E = \mathbb{R}^n$, on considère l'hyperplan H d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$ dans la base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E. Pour $\sigma \in S_n$ donnée, on considère l'endomorphisme f_σ de E défini par : $\forall i \in E,\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

On pose alors $p = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$. Montrer que p est une projection dont on déterminera l'image et la direction.

