DNS

Sujet

Champs E et B dans un condensateur

I. Généralités

1. Donner l'unité pour le champ $\vec{E}$ (champ électrostatique ou électrique).

2. Donner l'unité pour le champ $\vec{B}$ (champ magnétique).

II. Symétries

3. En électromagnétisme, qu'appelle-t-on:

   - plan de symétrie pour une distribution de charges et de courants
   - plan d'antisymétrie pour une distribution de charges et de courants.

Le champ électrique $\vec{E}$ est un « vrai » vecteur ou vecteur polaire. Le champ magnétique $\vec{B}$ est un « faux » vecteur ou « pseudo » vecteur ou vecteur axial. On rappelle:

- Si M' est le point symétrique de $M(x,y,z)$ par rapport à un plan (P) de symétrie de la distribution des sources, on a:

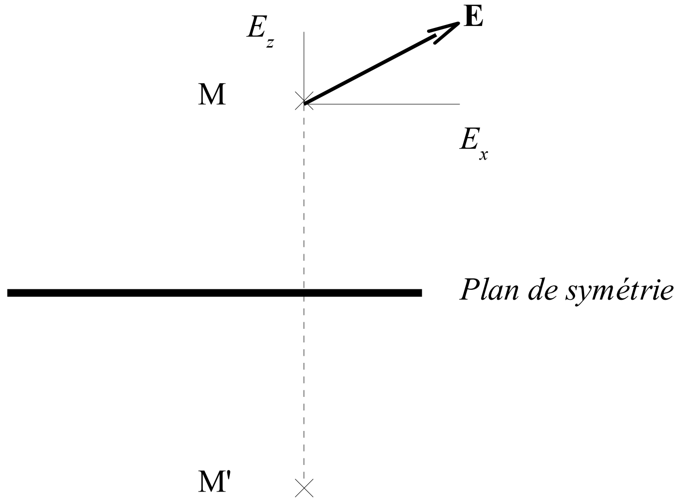
$$\vec{E}(M' \, symétrique\, de\, M / plan) = \quad symétrique\, de\, \vec{E}(M) / plan$$

$$\vec{B}(M' \, symétrique\, de\, M / plan) = - symétrique\, de\, \vec{B}(M) / plan$$

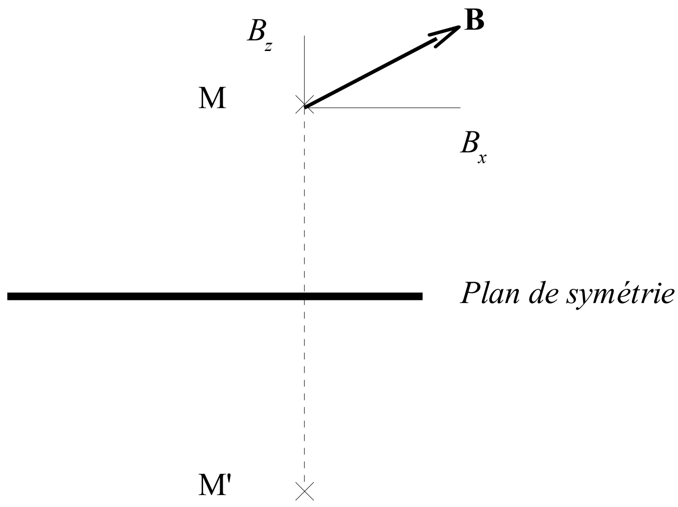
- Si M' est le point symétrique de $M(x,y,z)$ par rapport à un plan (P) d'antisymétrie de la distribution des sources, il faut faire le « contraire ».

4. Compléter les quatre schémas suivants (le plan (P) est un plan xy , le champ est supposé dans le plan xz pour simplifier) en traçant $\vec{E}(M')$ (ou $\vec{B}(M')$).

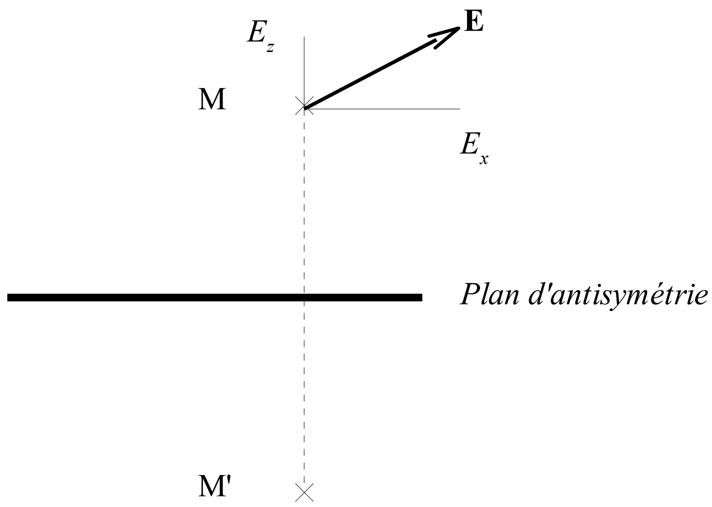
Étude de **E**
(Plan de symétrie)



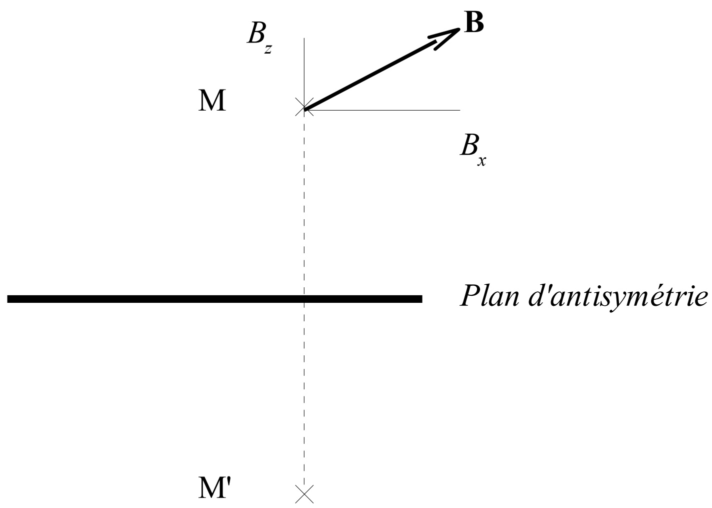
Étude de **B**
(Plan de symétrie)



Étude de **E**
(Plan d'antisymétrie)



Étude de **B**
(Plan d'antisymétrie)



On note par exemple pour $\vec{E}(M)$ (idem pour $\vec{B}(M)$):

$$\vec{E}(x,y,z)=E_x(x,y,z)\vec{u}_x+E_z(x,y,z)\vec{u}_z$$

où $\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z$ désignent les vecteurs unitaires. On suppose que le plan de symétrie (P) (ou d'antisymétrie) a pour équation $z=0$.

5. Pour chacun des quatre cas (cf: les quatre schémas précédents), donner l'expression du champ en M' et en déduire la parité ou l'imparité des composantes E_x et E_z (ou B_x et B_z) par rapport à z .
6. On envisage alors le cas particulier où M se trouve sur le plan (P) de sorte que ce plan Mxy est un plan de symétrie (ou d'antisymétrie). Que peut-on en déduire dans les quatre cas concernant $\vec{E}(M)$ (ou $\vec{B}(M)$). Justifier avec précision en partant de l'étude précédente et illustrer à chaque fois par un schéma.
7. On vient donc dans la question précédente de retrouver les règles de base connues, à utiliser en premier, lors de l'étude des symétries. Énoncer ces règles.

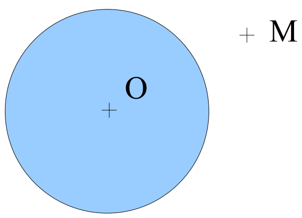
III. Champ E dans un condensateur plan (sans effets de bords) en électrostatique

A. Discontinuité de E à la traversée d'une surface chargée (rappel)

1) Exemple de la sphère

On considère une sphère de centre O , de rayon R chargée uniformément en surface par une charge totale Q .

8. Donner l'expression de la densité surfacique de charge σ en fonction des données. Quelle est l'unité de σ ?



9. Soit un point M quelconque.
   - Existe-t-il des plans de symétrie ou d'antisymétrie contenant le point M ? Préciser et en déduire la direction de $\vec{E}(M)$.
   - Le point M est repéré en coordonnées sphériques dans une base sphérique. Rappeler sur un dessin les coordonnées sphériques ainsi que la base sphérique utilisée. Justifier finalement que $\vec{E}(M)=E(r)\vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r$: vecteur unitaire radial.
10. On rappelle le théorème de Gauss: le flux de $\vec{E}$ sortant d'une surface fermée Σ est caractéristique de la source Q_{int} contenue à l'intérieur de cette surface fermée. Il vaut $\frac{1}{\varepsilon_0}Q_{int}$:

$\oiint_{\Sigma} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{int}$. On utilise ici le théorème de Gauss pour déterminer $\vec{E}$.

- Quelle surface de Gauss Σ passant par M doit on utiliser pour que la simplification $\oiint_{\Sigma} \vec{E}\,\vec{dS} = E(M)S$ soit possible ? Justifier avec précision.
- En déduire $\vec{E}(r>R)$ et $\vec{E}(r<R)$ en fonction notamment de σ .
- Déterminer la limite à droite de $E(r)$ pour $r=R$. Idem pour la limite à gauche. Que vient-on de vérifier ici concernant $\vec{E}(r=R)$?

11.La relation de discontinuité pour $\vec{E}(M)$ à la traversée d'une surface chargée entre deux milieux 1 et 2 est la suivante:

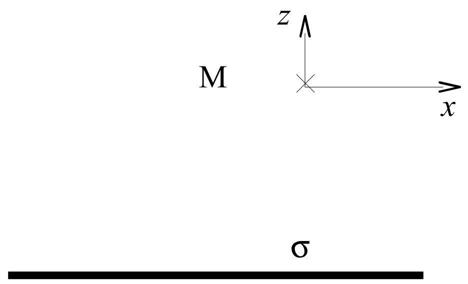
$$\vec{E}_2(M) \quad - \quad \vec{E}_1(M) \quad = \quad \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\rightarrow 2}$$

(au voisinage de M dans le milieu 2)	(au voisinage de M dans le milieu 1)	($\vec{n}_{1\rightarrow 2}$ est la normale en M du milieu 1 vers le milieu 2)

Montrer que cette relation est bien vérifiée dans le cas de la sphère chargée en surface.

2) Exemple du plan infini

On considère un plan d'équation $z=0$ uniformément chargé par σ . On considère un point M n'appartenant pas à ce plan.



12.Préciser le(s) plan(s) de symétrie ou d'antisymétrie passant par M .

13.Montrer que $\vec{E}(M)=E(z)\vec{u}_z$ avec $E(z)$ fonction impaire de z .

14.En utilisant le théorème de Gauss sur une surface intelligemment choisie, montrer que $\vec{E}$ est uniforme pour $z>0$. Idem pour $z<0$.

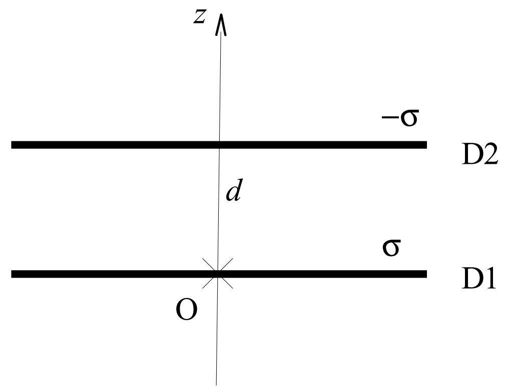
15.Par utilisation de la relation de discontinuité de $\vec{E}$ à la traversée d'une surface chargée (relation rappelée plus haut), déterminer alors $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

B. Champ électrostatique dans un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures:

- un disque *D1* en $z=0$, de rayon R , de centre O , d'axe *Oz* supposé chargé uniformément par σ (supposé positif)

– un disque identique $D2$ en $z=d$, de même axe, chargé uniformément par $-\sigma$.



Dans la suite, on suppose toujours que la distance à l'axe r est telle que: $r<R$ et l'on suppose aussi que le champ est le même que si les deux plans étaient d'extension infinie.

16.Par superposition des champs créés par chaque armature, déterminer $\vec{E}=E(z)\vec{u}_z$ en fonction de σ

- pour $z<0$
- pour $0<z<d$
- pour $z>d$

Tracer $E(z)$ en fonction de z .

17.Déterminer le potentiel électrostatique V en fonction d'une constante arbitraire et tracer $V(z)$ en fonction de z .

18.On note $V(z=0)=V_1$, $V(z=d)=V_2$, $U=V_1-V_2$ (différence de potentiel), Q charge du disque $D1$.

- Montrer que $Q=CU$ où C désigne la capacité du condensateur plan, à exprimer en fonction de R , ε_0 et d .
- Exprimer $\vec{E}=E_0\vec{u}_z$ entre les armatures avec E_0 à déterminer en fonction de U et d .

IV. Champs dans un condensateur plan en régime lentement variable.

Le condensateur est soumis désormais à une tension alternative basse fréquence, à $50\,Hz$, notée $u(t)=U_{max}\cos(\omega t)$. Il existe alors un champ électrique $\vec{E}$ mais aussi un champ magnétique $\vec{B}$ dans l'espace interarmatures.

19.Calculer la valeur numérique de ω et préciser son unité.

20.On travaille en coordonnées cylindriques d'axe Oz . Rappeler l'expression générale d'un déplacement $\vec{dl}$ en coordonnées cylindriques r,θ,z dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.

21.Montrer que $\vec{B}(M,t)$ est de la forme $\vec{B}(M,t)=B(M,t)\vec{u}_\theta=B(r,z,t)\vec{u}_\theta$.

A. Champ E entre les armatures

On admet que l'on peut, à cette fréquence, travailler dans le cadre de l'approximation des régimes quasistationnaires électriques. Dans ce cas, le champ $\vec{E}$ dans le condensateur se calcule comme en électrostatique mais, cette fois, la tension, donc le champ, dépendent du temps.

22.Écrire $\vec{E}(M,t)$ sous la forme $\vec{E}(M,t)=E_0\cos(\omega t)\vec{u}_z$ et donner l'expression de E_0 en fonction de U_{max} et des autres données de l'énoncé.

B. Champ B entre les armatures

1) Le théorème d'Ampère

En magnétostatique ($\vec{B}$ indépendant du temps), le théorème d'Ampère s'écrit sous la forme: $\oint_C \vec{B}\,\vec{dl}=\mu_0 I_{enlacé}$. Mais dans le cas général ($\vec{B}$ dépendant du temps), on doit utiliser le théorème d'Ampère généralisé: $\oint_C \vec{B}\,\vec{dl}=\mu_0 I_{enlacé}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\,\vec{dS}$ (S désigne la surface ouverte orientée s'appuyant sur le contour fermé orienté C) où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide avec $\varepsilon_0\mu_0 c^2=1$.

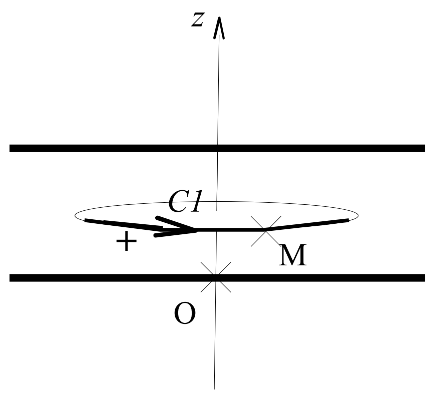
23.Justifier que, si l'on reste dans l'espace interarmatures, le théorème d'Ampère s'écrit:

$$\oint_C \vec{B}\,\vec{dl}=\frac{1}{c^2}\frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (relation\,1)$$

Que signifie Φ_E ?

2) Détermination de B

Pour déterminer $\vec{B}(M,t)$, on choisit un cercle (courbe $C1$) de cote z , de rayon r , centré sur l'axe Oz et passant par le point M .



Ce cercle est orienté par l'axe Oz (voir sens positif sur la figure).

24.Montrer que $\oint_{C1} \vec{B}\,\vec{dl}=B(M,t)\times L1$ et préciser $L1$.

25.La surface $S1$ est la surface plane s'appuyant sur le cercle $C1$. Exprimer l'élément de surface $\overrightarrow{dS1}$ en cylindriques en utilisant le produit de deux déplacements élémentaires et un vecteur unitaire.

26.Exprimer Φ_E puis $\frac{d\Phi_E}{dt}$.

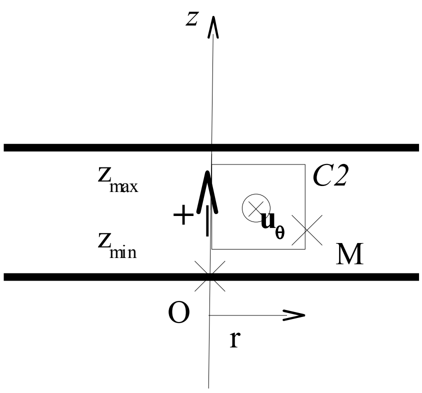
27.En déduire $\vec{B}(M,t)$ en fonction de E_0 et des autres données du problème.

3) L'approximation

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ doivent vérifier:

- le théorème d'Ampère (ici: $(relation\,1)$)
- la loi de Faraday: $\oint_C \vec{E}\,\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\,\vec{dS}$ ou $(relation\,2)$ (S désigne la surface ouverte orientée s'appuyant sur le contour fermé orienté C)

Pour vérifier la $(relation\,2)$, on choisit un rectangle (courbe $C2$) d'angle θ , de largeur r , de hauteur $\Delta z = z_{max} - z_{min} > 0$ orientée par le vecteur $\vec{u}_\theta$ et passant par le point M (voir figure). La surface $S2$ est la surface plane s'appuyant sur le contour.



28.Exprimer l'élément de surface $\overrightarrow{dS2}$ en cylindriques en utilisant le produit de deux déplacements élémentaires et un vecteur unitaire.

29.En utilisant l'expression de $\vec{B}$ obtenue précédemment, donner l'expression de Φ_B puis de $-\frac{d\Phi_B}{dt}$.

30.En utilisant l'expression de $\vec{E}$ obtenue précédemment, déterminer la circulation $\oint_{C2} \vec{E}\,\vec{dl}$. Montrer avec précision que cette circulation se ramène à deux termes qui s'annulent

31.En déduire que dans le cadre de l'approximation des régimes quasistationnaires électriques, la $(relation\,1)$ est vérifiée mais la $(relation\,2)$ n'est pas vérifiée rigoureusement.

V. Étude générale des champs dans un condensateur plan en régime variable.

On utilise désormais les notations complexes et l'on pose:

$\vec{\underline{E}}(r,t)=\underline{E}(r)\exp(j\omega t)\vec{u}_z$

$\vec{\underline{B}}(r,t)=\underline{B}(r)\exp(j\omega t)\vec{u}_\theta$

On choisit aussi de désigner le champ électrique en $r=0$ par:

$\vec{\underline{E}}(r=0,t)=E_0\exp(j\omega t)\vec{u}_z$

A. Méthode par approximations successives

1) Étape 1

32.Le champ $\vec{E}$ est supposé uniforme comme en électrostatique. On note $\vec{\underline{E}}(r,t)=\vec{\underline{E}}_0(t)$. Écrire $\vec{\underline{E}}_0(t)$.

33.Le champ $\vec{B}$ est choisi pour vérifier la $(relation\,1)$ (théorème d'Ampère). On note $\vec{\underline{B}}(r,t)=\vec{\underline{B}}_0(r,t)$. Déterminer $\vec{\underline{B}}_0(r,t)$.

2) Étape 2

34.Le champ $\vec{E}$ doit vérifier la $(relation\,2)$ (loi de Faraday). On note $\vec{\underline{E}}(r,t)=\vec{\underline{E}}_0(t)+\vec{\underline{E}}_1(r,t)$ où $\vec{\underline{E}}_1$ est un terme correctif par rapport à l'étape 1. Ce terme est choisi nul sur l'axe. Déterminer $\vec{\underline{E}}_1(r,t)$ dont l'expression est en lien avec $\vec{\underline{B}}_0(r,t)$.

35.Il faut alors corriger $\vec{B}$. On pose $\vec{\underline{B}}(r,t)=\vec{\underline{B}}_0(r,t)+\vec{\underline{B}}_1(r,t)$ où $\vec{\underline{B}}_1$ est un terme correctif. Déterminer $\vec{\underline{B}}_1(r,t)$ dont l'expression est en lien avec $\vec{\underline{E}}_1(r,t)$.

3) Étape 3

36.On en arrive alors à poser: $\vec{\underline{E}}(r,t)=\vec{\underline{E}}_0(t)+\vec{\underline{E}}_1(r,t)+\vec{\underline{E}}_2(r,t)$. Déterminer $\vec{\underline{E}}_2$ (en lien avec $\vec{\underline{B}}_1$).

37.De même: $\vec{\underline{B}}(r,t)=\vec{\underline{B}}_0(r,t)+\vec{\underline{B}}_1(r,t)+\vec{\underline{B}}_2(r,t)$. Déterminer $\vec{\underline{B}}_2$ (en lien avec $\vec{\underline{E}}_2$).

4) Conclusion

38.On peut poursuivre la démarche indéfiniment et donc $\vec{\underline{E}}$ et $\vec{\underline{B}}$ apparaissent sous forme de développements. Écrire le résultat pour ces deux champs en limitant le développement à trois termes.

B. Méthode résolution de l'équation différentielle vérifiée par E

1) Équation différentielle pour le champ électrique

On se propose de déterminer directement $\underline{E}(r)$ en partant toujours de la $(relation\,1)$ et de la $(relation\,2)$. On ne peut plus travailler sur une surface finie puisque ne connaissant pas, a priori, la dépendance des champs avec r , on ne pourrait calculer les intégrales de surface. On choisit alors un contour élémentaire, entourant une surface élémentaire ne faisant intervenir qu'une seule valeur de r . Plus exactement, r variera formellement de manière élémentaire entre r et $r+dr$.

(On pourrait envisager de travailler entre r et $r+\Delta r$ et considérer ensuite des limites lorsque $\Delta r\rightarrow 0$, ce qui reviendrait à ne garder que les termes du premier ordre en Δr . D'une certaine façon, c'est ce que l'on fait en travaillant directement

avec la notation différentielle dr et les éventuels termes qui apparaitraient en dr^2 sont donc à éliminer . La méthode avec Δr serait bien plus lourde à manipuler).

On rappelle donc les écritures mathématiques utilisées ici:

$df(r)=f(r+dr)-f(r)=\frac{df(r)}{dr}dr$ (fait apparaître une dérivée)

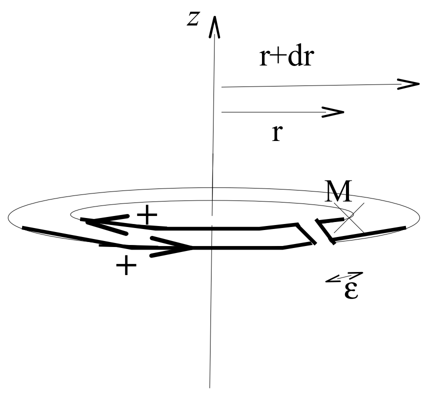
et $g(r+dr,t)-g(r,t)=\frac{\partial g(r,t)}{\partial r}dr$ (fait apparaître une dérivée partielle)

(la différentielle de la fonction $g(r,t)$ correspondrait avec cette notation à $dg(r,t)=g(r+dr,t+dt)-g(r,t)$)

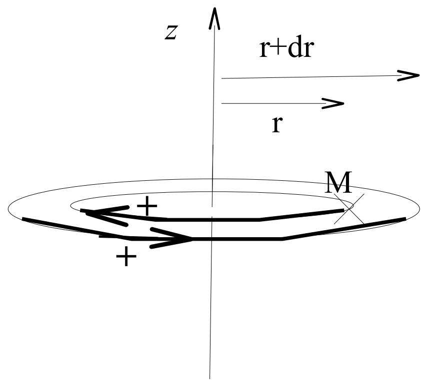
On verra donc apparaître des dérivées et l'on pourra obtenir finalement l'équation différentielle recherchée.

<u>a) Théorème d 'Ampère sur un contour élémentaire</u>

Pour le théorème d'Ampère $(relation\ 1)$, le contour fermé utilisé est le suivant:



Il s'agit d'un contour à z constant formé deux cercles de rayons r et $r+dr$. La coupure ε tendant vers zéro lors du passage à la limite, on considérera dès le départ « le » contour suivant:

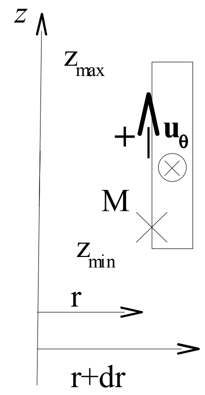


On remarque bien que le dessin ne doit pas induire en erreur puisque dr est en fait un élément différentiel.

39.Appliquer le théorème d'Ampère et en déduire une première équation différentielle reliant $\underline{E}(r)$ et $\underline{B}(r)$.

b) Loi de Faraday sur un contour élémentaire

Pour la loi de Faraday $(relation\,2)$, le contour fermé utilisé est le suivant:



40.Appliquer la loi de Faraday et en déduire une deuxième équation différentielle reliant $\underline{E}(r)$ et $\underline{B}(r)$.

c) Équation différentielle

41.Déduire des deux équations différentielles couplées, l'équation différentielle vérifiée par $\underline{E}(r)$.

2) Résolution de l'équation différentielle pour le champ électrique

On rappelle que: $\underline{E}(r=0)=E_0$.

On donne: $\frac{d\underline{E}}{dr}(r=0)=0$ car sur l'axe se trouve un extremum pour le champ.

42.Rechercher pour le champ une solution de la forme $\underline{E}(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\underline{a}_n r^n$.

43.Comparer le résultat final au début de solution obtenu par la méthode précédente.

Réponses

1) $\vec{E}$ a pour unité :

$$\boxed{V.\,m^{-1}}$$

(cf : $-\overrightarrow{grad}\,V$)

---

2) $\vec{B}$ est en Tesla

$$\boxed{T}$$

---

3) Soit M' le symétrique de M par rapport au plan (P)

Ce plan est dit plan de symétrie si :

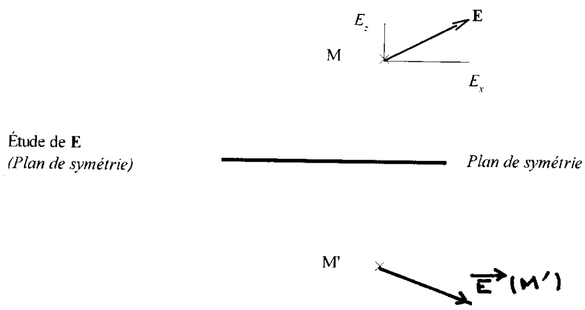
$$\boxed{\begin{array}{lll} \forall M & \rho(M') & = \rho(M) \\ & \vec{j}(M') & = \text{sym } \vec{j}(M) \;/\, \text{plan } (P) \end{array}}$$

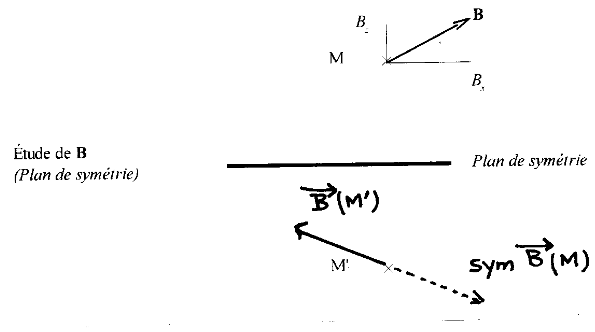
Ce plan est dit plan d'antisymétrie si on passe de M à M' pour les sources par une symétrie et une inversion des charges soit :

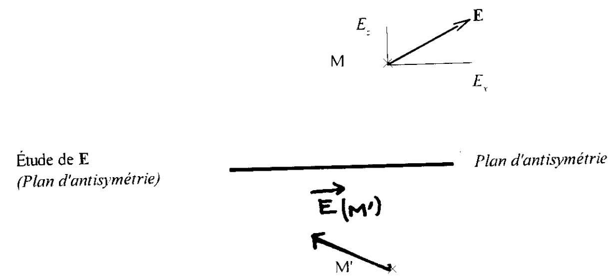
$$\boxed{\begin{array}{lll} \forall M & \rho(M') & = -\rho(M) \\ & \vec{j}(M') & = -\text{ sym } \vec{j}(M) \;/\, \text{plan } (P) \end{array}}$$

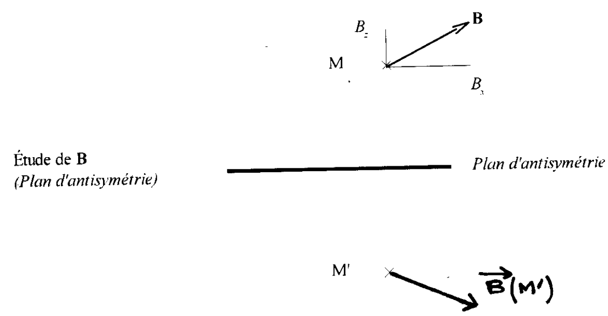
---

4)









---

5) a) $\vec{E}$, plan de symétrie

M : $\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\,\vec{u_x} + E_z(x,y,z)\,\vec{u_z}$

M' : avec $x_{M'} = x_M$

$y_{M'} = y_M$

$z_{M'} = -z_M$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(x,y,-z) &= E_x(x,y,-z)\,\vec{u_x} + E_z(x,y,-z)\,\vec{u_z}\\ &= E_x(x,y,z)\,\vec{u_x} - E_z(x,y,z)\,\vec{u_z}\end{aligned}}$$

E_x fn paire de z
E_z fn impaire de z

b) $\vec{B}$, plan de symétrie

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}(x,y,-z) &= B_x(x,y,-z)\,\vec{u_x} + B_z(x,y,-z)\,\vec{u_z}\\ &= -B_x(x,y,z)\,\vec{u_x} + B_z(x,y,z)\,\vec{u_z}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} B_x \text{ fn impaire de } z \\ B_z \text{ fn paire de } z \end{array}}$$

c) $\vec{E}$, plan d'antisymétrie

idem que 5 b) avec $B \rightarrow E$

d) $\vec{B}$, plan d'antisymétrie

idem que 5 a) avec $E \rightarrow B$

---

6) on fait donc $\underline{z = 0}$

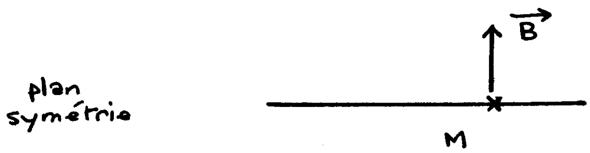
a) $M \in$ plan de symétrie $z=0$

d'après 5a) puisque E_z est impaire en z, on a donc

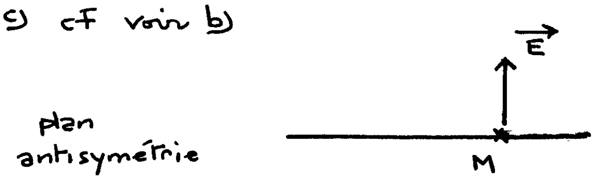
$E_z = 0$

b) $M \in$ plan de symétrie $z=0$

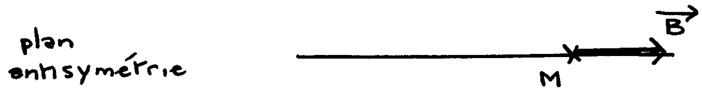
$B_x = 0$ (idem $B_y = 0$)



c) cf voir b)



d) cf voir a)



7) règles premières :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } M \in \text{ plan de symétrie de la distribution} \\ \qquad \vec{E}(M) \text{ est dans le plan} \\ \qquad \vec{B}(M) \text{ est perpendiculaire au plan}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } M \in \text{ plan d'antisymétrie de la distribution} \\ \qquad \vec{E}(M) \text{ est perpendiculaire au plan} \\ \qquad \vec{B}(M) \text{ est dans le plan}\end{array}}$$

8)

$$dq = \sigma \; dS$$

on intègre sur la sphère

$$\int_{\text{sphère}} dq = \int_{\text{sphère}} \sigma \, dS$$

$$= \sigma \int_{\text{sphère}} dS$$

$$Q = \sigma \quad 4\pi R^2$$

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}}$$

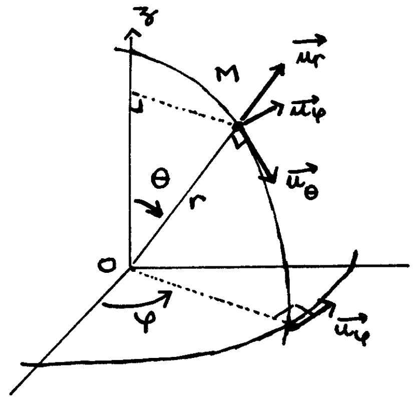
9) → Tout plan passant par M et contenant O (donc contenant un diamètre) est un plan de symétrie contenant M.

Il y a une infinité de plans contenant OM.
$\vec{E}(M)$ appartient à tous ces plans. Il est donc
<u>radial</u>

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(M) \; \vec{u_r}}$$

avec $\vec{u_r} = \dfrac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$

→



→ Le problème est à symétrie sphérique. Il y a invariance en rotation selon θ et selon φ

$$\vec{E}(M) = E(r,\cancel{\theta},\cancel{\varphi})\ \overrightarrow{u_r}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\ \overrightarrow{u_r}}$$

1°)

→ $$\oiint_\Sigma \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \oiint E\ \underbrace{\overrightarrow{u_r}\,\overrightarrow{dS}}_{=dS \text{ si } \overrightarrow{dS} \text{ est selon } \overrightarrow{u_r}}$$

On choisit une surface de gauss telle que $\overrightarrow{dS} = dS\ \overrightarrow{u_r}$

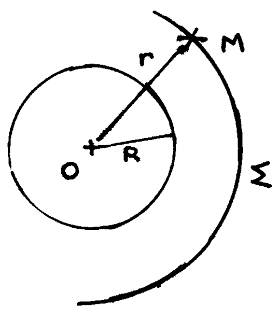
$$\oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \oiint E_{(r)}\,dS$$

$$= E(r) \oiint_\Sigma dS$$

On choisit une surface de gauss telle que $r = \text{constante}$

La surface de Gauss est la sphère centrée en O et passant par le point M étudié.

→ $r > R$



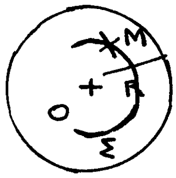
$$\oiint_\Sigma \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{int}$$

$$E(r)\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

$$\vec{E}_{(r>R)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u_r}$$

$$\boxed{\vec{E}_{(r>R)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}\,\vec{u_r}}$$

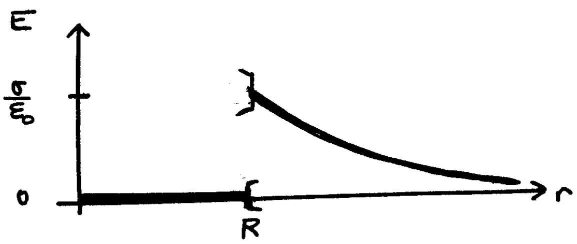
→ <u>$r < R$</u>



$$\oiint_\Sigma \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{Q_{int}}_{\text{nul}}$$

$$\boxed{\vec{E}_{(r<R)} = \vec{0}}$$

→ tracé de $E(r)$ – on suppose $\sigma > 0$ –



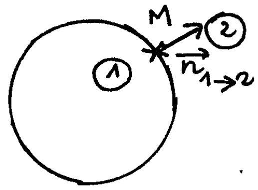
limite à droite en R soit $r = R+$ $\quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_r}$

limite à gauche en R soit $r = R-$ $\quad \vec{E} = \vec{0}$

Les deux limites sont différentes.

$\boxed{\text{$\vec{E}$ n'est pas défini sur la surface chargée en $r = R$}}$

11) Vérification de la formule générale traduisant la discontinuité à la traversée d'une surface chargée :



formule	$\vec{E}_2(M)$	$-$	$\vec{E}_1(M)$	$=$	$\dfrac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\ \vec{n}_{1\to 2}$
ici	$\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_r$	$-$	$\vec{0}$	$=$	$\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\ \vec{u}_r$

La relation est bien vérifiée.

---

12) Il y a une infinités de plans de symétrie contenant M. Ce sont tous les plans verticaux passant par M.

Exemples de plans de symétrie passant par le point M

Mxz
Myz

---

13) → $\vec{E}(M)$ appartient à tous les plans de symétrie donc à leur intersection (donc il est selon $\vec{u_z}$)

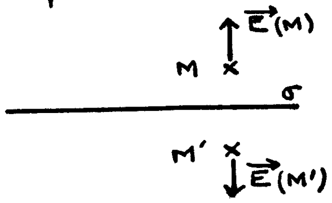
$$\boxed{\vec{E}(M) = E(x,y,z)\ \vec{u_z}}$$

→ Le problème est invariant en translation selon x et selon y puisque le plan est illimité

$$E = E(\cancel{x},\cancel{y},z)$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(z)\ \vec{u_z}}$$

→ On considère M' symétrique de M par rapport au plan chargé Oxy donc



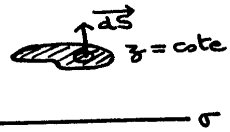
$$\vec{E}(M) = E(z)\ \vec{u_z}$$
$$\vec{E}(M') = E(-z)\ \vec{u_z} \qquad \text{car } z_{M'} = -z_M$$
$$= -E(z)\ \vec{u_z} \qquad \text{car } \vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$$

donc $E(-z) = -E(z)$

$$\boxed{E(z) \text{ est une fonction impaire de } z}$$

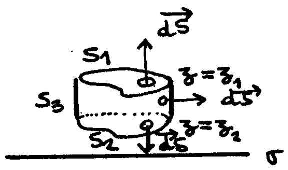
---

14) → Puisque $\vec{E} = E(z)\ \vec{u_z}$, on va choisir un $\vec{dS}$ selon $\vec{u_z}$ à z constant (alors $\iint \vec{E}\,\vec{dS} = E\,S$)



mais cette surface n'est pas fermée.

→ Finalement, on décide de considérer la surface fermée cylindrique suivante entre $z = z_1$ et $z = z_2$ tous deux positifs. La surface Σ fermée contient $S_1 + S_2 + S_3$ (surface latérale)



$$\oiint_\Sigma \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \vec{E}\,\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}\,\vec{dS} + \iint_{S_3} \vec{E}\,\vec{dS} = 0$$

Le flux sur S3 est nul car $\vec{E} \perp \vec{dS}$

on obtient donc

$$E_1\,S - E_2\,S + 0 = 0$$

$$E(z_1) = E(z_2) \qquad \forall\ z_1 \text{ et } z_2 > 0$$

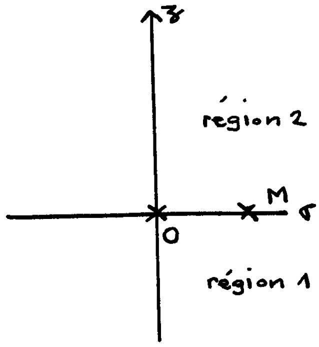
$$\boxed{\vec{E} \text{ est uniforme pour } z > 0}$$

→ On refait la même démonstration avec z_1 et $z_2 < 0$

$$\boxed{\vec{E} \text{ est uniforme pour } z < 0}$$

---

15)



(donc $\overrightarrow{n}_{1\to 2} = +\overrightarrow{u_z}$)

→ On écrit la relation de discontinuité à la traversée d'une surface chargée (cf 11))

$$\overrightarrow{E}_2(M) - \overrightarrow{E}_1(M) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{1\to 2}$$

$$\overrightarrow{E}(z=0^+) - \overrightarrow{E}(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$$

→ On utilise l'uniformité du champ dans chaque région (cf 14))

$$\overrightarrow{E}(z>0) - \overrightarrow{E}(z<0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$$

$$E(z>0)\overrightarrow{u_z} - E(z<0)\overrightarrow{u_z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$$

$$E(z>0) - E(z<0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

→ on utilise l'imparité de $E(z)$ (cf 13))

$$E(z>0) - (-E(z>0)) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

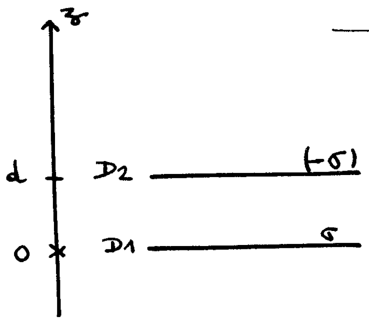
Finalement $E(z>0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{E}(z>0) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{E}(z<0) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{E}(z=0) \text{ non défini} \end{array}}$$

---

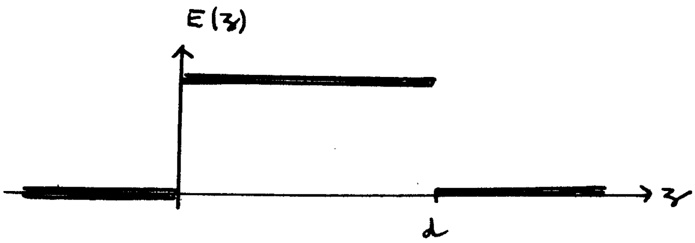
16)

$$\overrightarrow{E} = \underbrace{\overrightarrow{E_1}}_{\text{créé par D1}} + \underbrace{\overrightarrow{E_2}}_{\text{créé par D2}}$$



$\vec{E_1}$	$\vec{E_2}$	$\vec{E}$
$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$	$\frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$	$\vec{0}$
$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$	$-\frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$	$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}$
$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$	$-\frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$	$\vec{0}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} z<0 & \vec{E}=\vec{0} \\ 0<z<d & \vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z} \\ z>d & \vec{E}=\vec{0} \end{array}}$$



---

17)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

$$dV = -\vec{E}\,\vec{dl}$$

$$= -E(z)\,\vec{u_z}\,(dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z})$$

$$\boxed{dV = -E(z)\,dz}$$

<u>$z<0$</u>

$$dV = 0$$

$$V = A \quad \text{(constante)}$$

<u>$0<z<d$</u>

$$dV = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dz$$

$$V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,z + B$$

il y a continuité du potentiel à la traversée d'une surface chargée :

En $z=0$

$\longrightarrow \quad A = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\times 0 + B$

donc $B = A$

$z > d$

$dV = 0$

$V = C$ (constante)

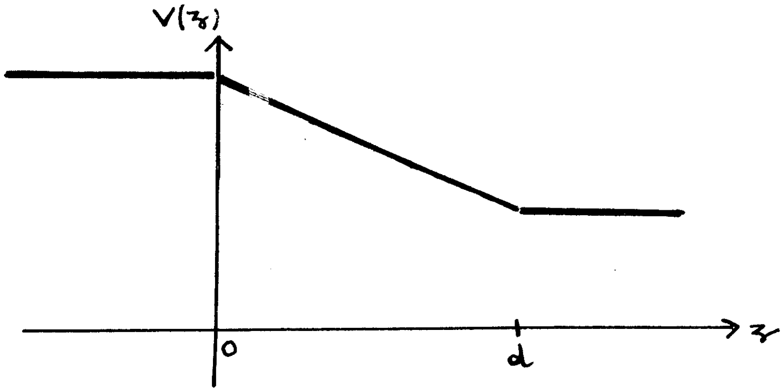
On ecrit la continuité du potentiel

En $z = d$

$\longrightarrow \quad C = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d + A$

finalement :

$z < 0$	$V = A$
$0 < z < d$	$V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + A$
$z > d$	$V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d + A$



18) $\longrightarrow$ donc

$V_1 = A$

$V_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d + A$

$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$

or

$dQ = \sigma \, dS$

$Q = \iint_{\text{armature } 1} \sigma \, dS$

$= \sigma S$

$= \sigma \pi R^2$

finalement : $\sigma = \varepsilon_0 \dfrac{U}{d}$

$$\boxed{Q = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{d} U}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{d}}$$

→ on a vu que, entre les armatures,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u_z}$$

donc $$\boxed{\vec{E} = \frac{U}{d} \vec{u_z}}$$

(le champ étant uniforme, on peut confondre dérivée $-\dfrac{dV}{dz}$ et taux d'accroissement $-\dfrac{\Delta V}{\Delta z} = \dfrac{U}{d}$)

---

19)
$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

A.N. $= 2\pi \times 50$

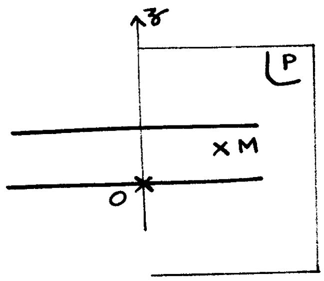
$$\boxed{\omega = 314 \text{ rad s}^{-1}}$$

---

20)
$$\boxed{\vec{dl} = dr\, \vec{u_r} + r\, d\theta\, \vec{u_\theta} + dz\, \vec{u_z}}$$

---

21)



→ le plan (P) contenant Oz et passant par M est un plan de symétrie. Le champ $\vec{B}$ en M est donc perpendiculaire à ce plan.

donc $\boxed{\vec{B} \text{ est selon } \vec{u_\theta}}$

→ le problème est invariant en rotation selon θ donc

$\boxed{\vec{B} \text{ indépendant de } \theta}$

→ Les sources , donc les champs dépendent ici du temps.

finalement : $\boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{B}(r,\cancel{\theta},z,t)\ \vec{u_\theta}}$

---

22) On avait, en électrostatique,

$$\vec{E}(M) = \frac{U}{d}\ \vec{u_z}$$

Ici

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = \underbrace{\frac{U_{max}}{d}}_{E_0} \cos\omega t\ \vec{u_z}}$$

---

23) Dans l'espace interarmatures, on se trouve dans le vide. Il n'y a pas de charges libres dans le vide, donc pas de courants. Donc $I_{enlacé} = 0$ et le <u>théorème d'Ampère</u> devient :

$$\oint_C \vec{B}\,\vec{dl} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\,\vec{dS}$$

on pose $\qquad \phi_E = \iint_S \vec{E}\,\vec{dS}$

(<u>flux de $\vec{E}$ à travers</u> S)

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\,\vec{dl} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\phi_E}$$ relation 1

---

24)

$$\oint_{C_1} \vec{B}\,\vec{dl} = \oint_{C_1} B\,\vec{u_\theta}\,(\underbrace{\cancel{dr}}_{nul}\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + \underbrace{\cancel{dz}}_{nul}\,\vec{u_z})$$

$$= \oint_{C_1} B_{(r,z,t)}\ r\,d\theta$$

$$= B_{(r,z,t)}\ r\ \underbrace{\oint_{C_1} d\theta}_{2\pi}$$

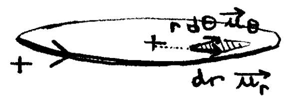
$$= B_{(r,z,t)} \underbrace{2\pi r}_{L_1}$$

On retrouve, évidemment, la longueur du cercle C1

$$\boxed{L_1 = 2\pi r}$$

---

25)



$$\boxed{\vec{dS_1} = dr\ r d\theta\ \vec{u_z}}$$

---

26)

$$\phi_E = \iint_{S_1} \vec{E}\ \vec{dS_1}$$

$$= \iint_{S_1} E_0 \cos\omega t\ \vec{u_z}\ dr\ r\ d\theta\ \vec{u_z}$$

$$= E_0 \cos\omega t \int_0^r r'dr' \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\boxed{\phi_E = E_0 \cos\omega t\ \ \pi r^2}$$

On retrouve, evidemment, puisque le champ est uniforme, la valeur du champ multipliée par la surface totale.

$$\boxed{\frac{d\phi_E}{dt} = -E_0\,\omega \sin\omega t\ \ \pi r^2}$$

---

27)

$$\oint_{C_1} \vec{B}\ \vec{dl} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\phi_E$$

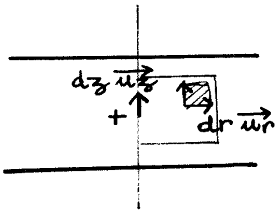
$$B(r,z,t)\ 2\pi r = \frac{1}{c^2} \times -E_0\,\omega \sin\omega t\ \pi r^2$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{E_0\,\omega}{2c^2} r \sin\omega t\ \vec{u_\theta}}$$

(valable seulement pour $0<z<d$, c'est en ce sens que $\vec{B}$ dépend de z)

---

28)



$$\boxed{\overrightarrow{dS_2} = dr\;dz\;\overrightarrow{u_\theta}}$$

---

29)

$$\phi_B = \iint_{S_2} \overrightarrow{B}\,\overrightarrow{dS_2}$$

$$= \iint_{S_2} -\frac{E_0\,\omega}{2c^2}\,r\sin\omega t\;\overrightarrow{u_\theta}\;dr\,dz\;\overrightarrow{u_\theta}$$

$$= -\frac{E_0\,\omega}{2c^2}\sin\omega t\iint_{S_2} r\,dr\,dz$$

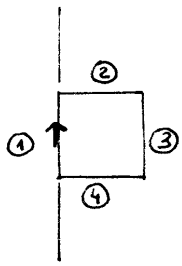
$$= -\frac{E_0\,\omega}{2c^2}\sin\omega t\int_0^r r'dr'\int_{z_{min}}^{z_{max}} dz$$

$$\boxed{\phi_B = -\frac{E_0\,\omega}{4c^2}\sin\omega t\quad r^2\quad\Delta z}$$

$$\boxed{-\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{E_0\,\omega^2}{4c^2}\cos\omega t\quad r^2\quad\Delta z}$$

---

30)



$$\oint_{C_2}\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dl} = \int_{①}\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{②}\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dl}}_{\text{nul car } \overrightarrow{E}\perp\overrightarrow{dl}=dr\,\overrightarrow{u_r}} + \int_{③}\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dl} + \underbrace{\int_{④}\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{dl}}_{\text{nul (même raison)}}$$

$$= \int_{①}\underbrace{\overrightarrow{E}}_{E(r'=0)\overrightarrow{u_z}}\,\underbrace{\overrightarrow{dl}}_{dz\,\overrightarrow{u_z}} + \int_{③}\underbrace{\overrightarrow{E}}_{E(r'=r)}\,\underbrace{\overrightarrow{dl}}_{dz\,\overrightarrow{u_z}}$$

$$= \int_{z_{min}}^{z_{max}} E_{(r'=0)}\,dz + \int_{z_{max}}^{z_{min}} E_{(r'=r)}\,dz$$

or $E_{(r'=0)} = E(r'=r)$

donc

$$\boxed{\oint_{C_2} \vec{E}\,\vec{dl} = \vec{0}}$$

---

31) La loi de Faraday n'est pas vérifiée rigoureusement ici dans le cadre de l'approximation des régimes stationnaires.

$$\oint_{C_2} \vec{E}\,\vec{dl} \neq -\frac{d\phi_B}{dt}$$

---

32)
$$\underline{\vec{E}}(r,t) = \underline{\vec{E}_0}(t)$$

Le champ est supposé uniforme. On connait son expression pour $r=0$

$$\boxed{\underline{\vec{E}_0}(t) = E_0 \exp(j\omega t)\ \vec{u_z}}$$

---

33) Cette question a déjà été traitée entre 24) et 27)
On applique le théorème d'Ampère au contour C1

$$\oint_{C_1} \underline{\vec{B}_0}\,\vec{dl} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\iint_{S_1} \underline{\vec{E}_0}(t)\,\vec{dS_1}$$

$$\underline{B_0}(r,t)\, 2\pi r = \frac{1}{c^2}\, j\omega\, E_0 \exp(j\omega t)\, \pi r^2$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}_0}(r,t) = \frac{j\omega E_0}{2c^2}\, r \exp(j\omega t)\ \vec{u_\theta}}$$

---

34) On corrige:

$$\underline{\vec{E}}(r,t) = \underline{\vec{E}_0}(t) + \underline{\vec{E}_1}(r,t)$$

On applique la loi de Faraday au contour C2

$$\oint_{C_2} \left(\underline{\vec{E}_0}(t) + \underline{\vec{E}_1}(r,t)\right)\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_{S_2} \underline{\vec{B}_0}(r,t)\,\vec{dS_2}$$

on a déjà vu à la question 30)

$$\oint_{C_2} \underline{\vec{E}_0}(t)\,\vec{dl} = 0$$

Donc, on doit résoudre:

$$\oint_{C_2} \underline{\vec{E}_1}(r,t)\,\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_{S_2} \underline{\vec{B}_0}(r,t)\,\vec{dS_2}$$

avec $\oint_{C_2} \vec{E}_1(r,t)\,\vec{dl} = \int_{③} \vec{E}_1\,\vec{dl}$ car les 3 autres intégrales sont nulles (cf 30))

$$= E_1(r,t)\,(z_{min} - z_{max})$$
$$= -E_1(r,t)\ \Delta z$$

et
$$-\frac{d}{dt}\iint_{S_2} \vec{B}_0(r,t)\,\vec{dS}_2 = -j\omega \iint_{S_2} \frac{j\,\omega E_0}{2c^2}\, r' \exp(j\omega t)\, dr'\, dz$$
$$= \frac{\omega^2 E_0}{2c^2} \exp(j\omega t)\ \frac{r^2}{2}\ \Delta z$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E}_1(r,t) = -\frac{\omega^2 E_0}{4c^2} r^2 \exp(j\omega t)\ \vec{u_z}}$$

---

35) On applique le théorème d'Ampère au contour C_1

$$\oint_{C_1} (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)\,\vec{dl} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_{S_1} (\vec{E}_0 + \vec{E}_1)\,\vec{dS_1}$$

En tenant compte de 33), le terme correctif vérifie

$$\oint_{C_1} \vec{B}_1\,\vec{dl} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_{S_1} \vec{E}_1\,\vec{dS_1}$$
$$B_1\ 2\pi r = \frac{1}{c^2}\, j\omega \times -\frac{\omega^2 E_0}{4c^2} \exp(j\omega t) \underbrace{\iint_{S_1} r'^2\, dr'\, r' d\theta}_{2\pi \frac{r^4}{4}}$$

$$\boxed{\vec{B}_1(r,t) = -\frac{j\,\omega^3 E_0\, r^3}{16\, c^4} \exp(j\omega t)\ \vec{u_\theta}}$$

---

36) On applique la loi de Faraday au contour C_2

En tenant compte de 34), le terme correctif vérifie

$$\oint_{C_2} \vec{E}_2\,\vec{dl} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_2} \vec{B}_1\,\vec{dS_2}$$
$$-E_2\ \Delta z = -j\omega \times -\frac{j\,\omega^3 E_0}{16\,c^4} \exp(j\omega t) \underbrace{\iint_{S_2} r'^3\, dr'\, dz}_{\frac{r^4}{4}\ \Delta z}$$

$$\boxed{\vec{E}_2(r,t) = \frac{\omega^4 E_0\, r^4}{64\, c^4} \exp(j\omega t)\ \vec{u_z}}$$

---

37) On applique le théorème d'Ampère au contour C_1

En tenant compte de 35), le terme correctif vérifie

$$\oint_{C_1} \vec{B}_2\,\vec{dl} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \iint_{S_1} \vec{E}_2\,\vec{dS_1}$$
$$B_2\ 2\pi r = \frac{1}{c^2}\, j\omega \times \frac{\omega^4 E_0}{64\, c^4} \exp(j\omega t) \underbrace{\iint_{S_1} r'^4\, dr'\, r' d\theta}_{2\pi \frac{r^6}{6}}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B_2}}(r,t) = j\,\frac{\omega^5 E_0 r^5}{384\, c^6}\, \exp(j\omega t)\ \vec{u_\theta}}$$

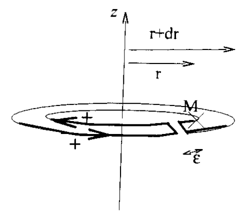
38) on obtient donc

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = E_0 \exp(j\omega t)\ \vec{u_z}\ \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} + \frac{\omega^4 r^4}{64\, c^4} + \dots\right)}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c} \exp(j\omega t)\ \vec{u_\theta}\ \left(\frac{j\omega r}{2c} - \frac{j\omega^3 r^3}{16\, c^3} + \frac{j\,\omega^5 r^5}{384\, c^5} + \dots\right)$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{j\omega r E_0}{2c^2} \exp(j\omega t)\ \vec{u_\theta}\ \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{8c^2} + \frac{\omega^4 r^4}{192\, c^4} + \dots\right)}$$

39)



$$\oint_C \vec{B}\, \vec{dl} = \frac{1}{c^2}\, \frac{d}{dt} \phi_E$$

En complexes :

$$\oint_C \underline{\vec{B}}\, \vec{dl} = \frac{1}{c^2}\, j\omega \int_S \underline{\vec{E}}\, \vec{dS}$$

$$\vec{dS} \to dr\ r\ d\theta\ \vec{u_z}$$

$$\underline{B}(r+dr,t)\, 2\pi\, (r+dr) - \underline{B}(r\,,t)\, 2\pi\, r = \frac{1}{c^2}\, j\omega\ \underline{E}\ r\, dr\ 2\pi$$

On pose $g(r,t) = \underline{B}(r,t)\, 2\pi r$ et l'on constate que le terme de gauche correspond à $g(r+dr,t) - g(r,t) = \frac{\partial g(r,t)}{\partial r}\, dr$

L'équation obtenue est donc :

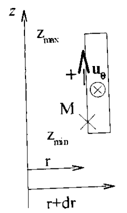
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\underline{B}(r,t)\, 2\pi r\right) = \frac{1}{c^2}\, j\omega\ \underline{E}\ r\ 2\pi$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\ \underline{B}(r,t)\right) = \frac{j\omega r}{c^2}\ \underline{E}(r,t)}$$

Et en simplifiant par $\exp(j\omega t)$

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(r\ \underline{B}(r)\right) = \frac{j\omega r}{c^2}\ \underline{E}(r)}$$

40)



$$\oint_C \vec{E}\,\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\phi_B$$

En complexes :

$$\oint_C \underline{\vec{E}}\,\vec{dl} = -j\omega \int_S \underline{\vec{B}}\,\underbrace{\vec{dS}}_{\hookrightarrow\, dr\, dz\, \vec{u_\theta}}$$

$$\underline{E}(r,t)\,\Delta z - \underline{E}(r+dr,t)\,\Delta z = -j\omega\ \underline{B}\ dr\,\Delta z$$

On pose $\underline{E}(r,t) - \underline{E}(r+dr,t) = -\frac{\partial \underline{E}(r,t)}{\partial r}\,dr$ et l'équation obtenue devient :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r}\left(\underline{E}(r,t)\right) = j\omega\ \underline{B}(r,t)}$$

Et en simplifiant par $\exp(j\omega t)$

$$\boxed{\frac{d}{dr}\underline{E}(r) = j\omega\ \underline{B}(r)}$$

---

41) Equation différentielle vérifiée par $\underline{E}(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left(r\ \underline{B}(r)\right) = \frac{j\omega r}{c^2}\ \underline{E}(r)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{1}{j\omega}\frac{d\underline{E}(r)}{dr}\right) = \frac{j\omega r}{c^2}\ \underline{E}(r)$$

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\ \frac{d\underline{E}(r)}{dr}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{E}(r) = 0}$$

---

42) $$\frac{d^2\underline{E}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\underline{E}(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{E}(r) = 0$$

On cherche une solution sous la forme :

$$\underline{E}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{a}_n\, r^n$$

$$\frac{d\underline{E}(r)}{dr} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, \underline{a}_n\, r^{n-1}$$

$$\frac{d^2\underline{E}(r)}{dr^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, \underline{a}_n\, r^{n-2}$$

On reporte :

$$\frac{d^2\underline{E}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\underline{E}(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{E}(r) = 0$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\underline{a}_n r^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n\, \underline{a}_n r^{n-2}}_{\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \underline{a}_n r^{n-2}} + \frac{\omega^2}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\underline{a}_n r^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \underline{a}_n r^{n-2} + \frac{\omega^2}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\underline{a}_n r^n = 0$$

$$\frac{\underline{a}_1}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \underline{a}_n r^{n-2} + \frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\underline{a}_n r^n}_{\text{ou } \sum_{n=2}^{\infty}\underline{a}_{n-2} r^{n-2}} = 0$$

$$\boxed{\frac{\underline{a}_1}{r} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2\underline{a}_n + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{a}_{n-2}\right) r^{n-2} = 0}$$

$\longrightarrow$ pour $n \geq 2$ $\quad \underline{a}_n = -\dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{\underline{a}_{n-2}}{n^2}$

$\longrightarrow$ en $r=0$ $\quad \underline{E}(r) = \underline{a}_0 = E_0$

Donc

$$\underline{a}_0 = E_0$$

$$\underline{a}_2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{4}E_0$$

$$\underline{a}_4 = \frac{\omega^4}{c^4}\frac{1}{4\times 16}E_0$$

... etc

$\longrightarrow$ en $r=0$ $\quad \dfrac{d\underline{E}(r)}{dr} = \underline{a}_1 = 0$

Donc

$$\underline{a}_1 = 0$$
$$\underline{a}_3 = 0$$
$$\underline{a}_5 = 0$$
$$\ldots \text{ etc}$$

---

43) finalement, on obtient :

$$\underline{E}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{a}_n r^n$$
$$= E_0 - \frac{\omega^2}{4c^2} E_0 r^2 + \frac{\omega^4}{64c^4} E_0 r^4 + \ldots$$

$$\underline{E}(r,t) = \underline{E}(r) \exp j\omega t$$
$$= E_0 \exp j\omega t \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} + \frac{\omega^4 r^4}{64 c^4} + \ldots \right)$$

ce qui correspond à la réponse obtenue précédemment.
