

Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
21/03/2023	Cinématique	Résumé

# Mécanique

## MECA1 - Cinématique

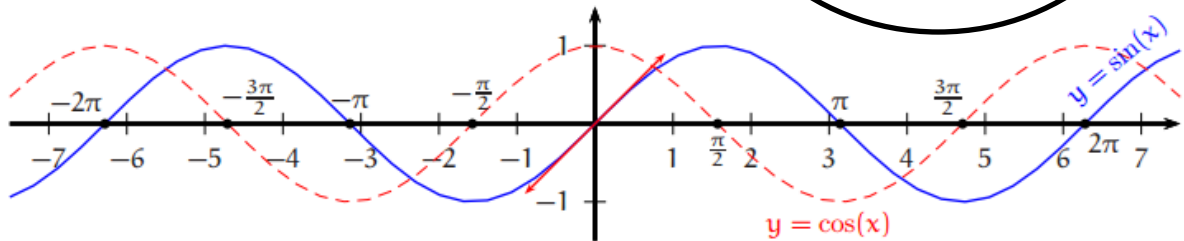
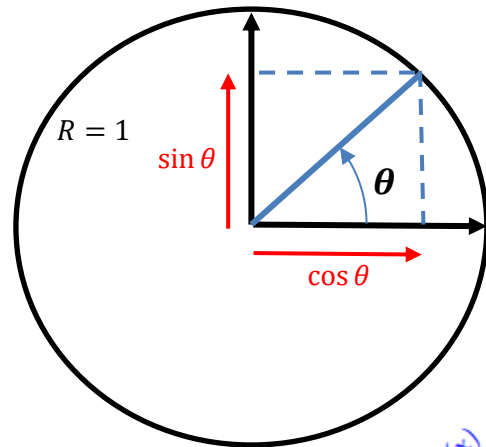
### Résumé



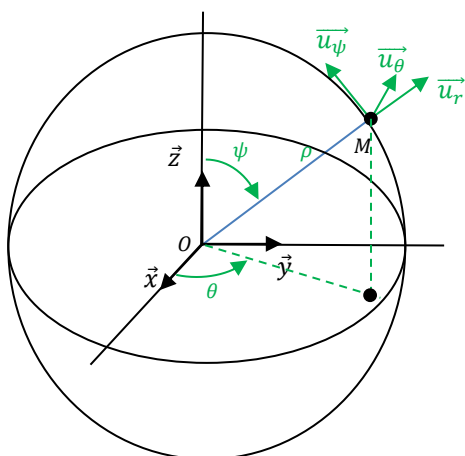
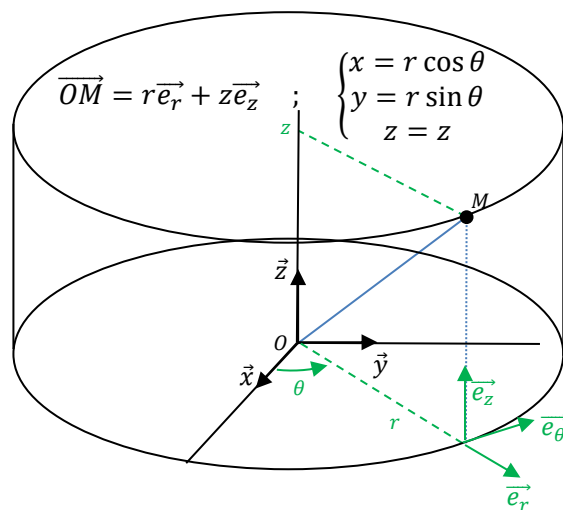
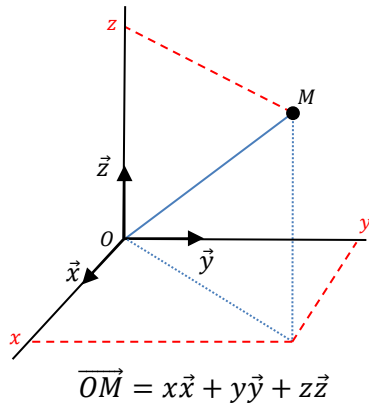
### Trigonométrie

$\theta$ en degrés	0	30	45	60	90
$\theta$ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\theta$ degrés $\rightarrow$ radians	$\theta$ radians $\rightarrow$ degrés
$180^\circ \rightarrow \pi \text{ rd}$	$\pi \text{ rd} \rightarrow 180^\circ$
$\theta^\circ \rightarrow \frac{\pi}{180} \theta$	$\theta \text{ rd} \rightarrow \frac{180}{\pi} \theta$



### Repérage d'un point



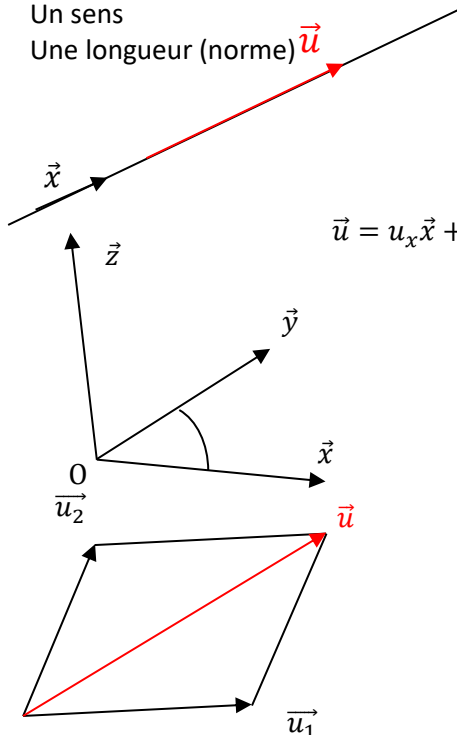
$$\begin{cases} x = \rho \sin \psi \cos \theta \\ y = \rho \sin \psi \sin \theta \\ z = \rho \cos \psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \rho \sin \psi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \cos \psi \end{cases}$$

Un vecteur  $\vec{u}$  est défini par :

- Une direction
- Un sens
- Une longueur (norme)  $\vec{u}$

### Vecteurs



$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\vec{u} = u_x \vec{x} + u_y \vec{y} + u_z \vec{z} = u_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + u_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + u_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\vec{u} = \pm \|\vec{u}\| \vec{x} = u \vec{x}$$

$$\|\vec{u}\| = |u|$$

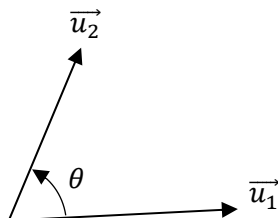
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

$$\vec{u}_1 = u_1 \vec{x}_1 \quad ; \quad u_1 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u}_2 = u_2 \vec{x}_2 \quad ; \quad u_2 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = u_1 \vec{x}_1 + u_2 \vec{x}_2$$

### Produit scalaire



$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos(\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)})$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = |u_1 u_2| \cos(\theta)$$

$$\text{si } \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \text{ car } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = 1 \quad ; \quad \vec{y} \cdot \vec{y} = 1 \quad ; \quad \vec{z} \cdot \vec{z} = 1$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{z} = \vec{y} \cdot \vec{z} = 0$$

$$\vec{u}_1 = x_1 \vec{x} + y_1 \vec{y} + z_1 \vec{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \quad ; \quad \vec{u}_2 = x_2 \vec{x} + y_2 \vec{y} + z_2 \vec{z} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (x_1 \vec{x} + y_1 \vec{y} + z_1 \vec{z}) \cdot (x_2 \vec{x} + y_2 \vec{y} + z_2 \vec{z}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

### Projections

$\vec{u}$

$\vec{x}$

$\theta$

$L$

$$\|\vec{u} \cdot \vec{x}\| = L = \|\vec{u}\| \|\vec{x}\| \cos \theta = |u \cos \theta|$$

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} u \cos \theta \\ u \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} = u \cos \theta$$

$\vec{y}_j$

$\vec{y}_i$

$\vec{x}_j$

$\vec{x}_i$

$\theta_{ji}$

$\vec{z}_i = \vec{z}_j$

$$\vec{x}_j = \cos \theta_{ji} \vec{x}_i + \sin \theta_{ji} \vec{y}_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_{ji} \\ \sin \theta_{ji} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}_i}$$

$$\vec{y}_j = -\sin \theta_{ji} \vec{x}_i + \cos \theta_{ji} \vec{y}_i = \begin{pmatrix} -\sin \theta_{ji} \\ \cos \theta_{ji} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathcal{B}_i}$$

### Données

$$\vec{u} = u_x \vec{x} + u_y \vec{y} + u_z \vec{z}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{x} + v_y \vec{y} + v_z \vec{z}$$

$$\theta_{v/u} = (\vec{u}, \vec{v})$$

### Produit vectoriel

### Définition

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{n}$$

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

Le sens de  $\vec{w}$ , c'est-à-dire le signe selon  $\vec{n}$  du produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est simplement obtenu à l'aide des 3 doigts

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{v}$

$\vec{u}$

$\vec{n}$

$\theta_{v/u}$

$\vec{v}$

$\vec{u}$

$\vec{n}$

$\theta_{v/u}$

Important :  $\vec{n}$  est tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$  forme un trièdre direct quand  $\theta_{v/u} \in [0, 90]$

### Propriétés

$$\vec{u} // \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

$$\forall k \in \mathbb{R}, k \vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge k \vec{u}$$

$$\mathcal{A} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

$x \quad y \quad z$

$+$

$y \quad z \quad x$

$-$

$z \quad x \quad y$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} \wedge \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} \wedge \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}^{\mathcal{B}}$$

Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
21/03/2023	Cinématique	Résumé

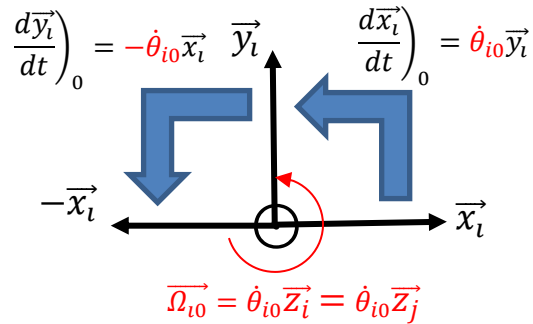
### Changement de base de dérivation

#### Formule de Bour

Soient deux bases  $\mathcal{B}_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$   
et  $\mathcal{B}_j(\vec{x}_j, \vec{y}_j, \vec{z}_j)$  et un vecteur  $\vec{v}$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_j + \vec{\Omega}_{j/i}$$

Remarque :  $\forall \mathcal{B}_i, \left(\frac{df(t)}{dt}\right)_i = \frac{df(t)}{dt} = f'(t)$

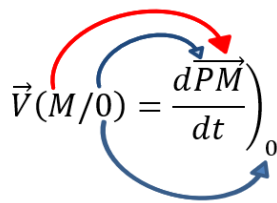


### Cinématique du point

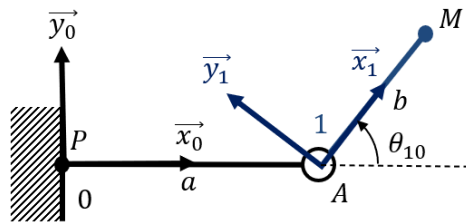
$$\vec{OM} = X_M \vec{x}_0 + Y_M \vec{y}_0 + Z_M \vec{z}_0$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/0) &= \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_0 \\ &= \frac{dX_M}{dt} \vec{x}_0 + \frac{dY_M}{dt} \vec{y}_0 + \frac{dZ_M}{dt} \vec{z}_0 \\ &= \dot{X}_M \vec{x}_0 + \dot{Y}_M \vec{y}_0 + \dot{Z}_M \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Si P fixe dans  $R_0$  :  $\vec{V}(M/0) = \left(\frac{d\vec{PM}}{dt}\right)_0$



$$\begin{aligned} \vec{F}(M/0) &= \left(\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0 \\ &= \ddot{X}_M \vec{x}_0 + \ddot{Y}_M \vec{y}_0 + \ddot{Z}_M \vec{z}_0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{V}(M/0) &= \left(\frac{d(a\vec{x}_0 + b\vec{x}_1)}{dt}\right)_0 = \left(\frac{da\vec{x}_0}{dt}\right)_0 + \left(\frac{db\vec{x}_1}{dt}\right)_0 = b \left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_0 = b \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{x}_1 = b \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 \\ \vec{F}(M/0) &= \left(\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0 = \left(\frac{db\dot{\theta}_{10}\vec{y}_1}{dt}\right)_0 = b \left[ \left(\frac{d\dot{\theta}_{10}}{dt}\right)_0 \vec{y}_1 + \dot{\theta}_{10} \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_0 \right] \\ \vec{F}(M/0) &= b \left[ \ddot{\theta}_{10} \vec{y}_1 + \dot{\theta}_{10} \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_0 \right] = b \left[ \ddot{\theta}_{10} \vec{y}_1 - \dot{\theta}_{10}^2 \vec{x}_1 \right] \\ \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_0 &= \left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_1 + \vec{\Omega}_{10} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta}_{10} \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\theta}_{10} \vec{x}_1 \end{aligned}$$

### Mécanique du solide

#### Solide indéformable

$$\forall (P_i, P_j) \in S, \forall t, \|\vec{P_i P_j}\| = cste$$

#### Propriétés

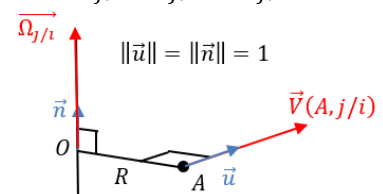
$$\begin{aligned} \vec{V}(A, i/j) &= -\vec{V}(A, j/i) \\ \vec{\Omega}_{ji} &= -\vec{\Omega}_{ij} \end{aligned}$$

#### Notations

$$\vec{V}(A \in S_j/S_i) \quad \vec{V}(A, S_j/S_i) \quad \vec{V}(A, j/i)$$

#### Vecteur rotation

$$\vec{\Omega}_{ji} = \Omega_{ji} \vec{n} = \dot{\theta}_{ji} \vec{n}$$



Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
21/03/2023	Cinématique	Résumé

## Mécanique du solide

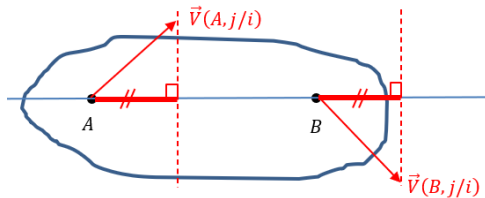
### Formule de Varignon – Changement de point

$$\vec{V}(B, j/i) = \vec{V}(A, j/i) + \vec{\Omega}_{ji} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B, j/i) = \vec{V}(A, j/i) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{ji}$$

### Equiprojectivité

$$\forall (A, B) \in S_j, \vec{V}(A, j/i) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{V}(B, j/i) \cdot \overrightarrow{AB}$$



### Champ des accélérations

$$\vec{I}(B, j/i) = \vec{I}(A, j/i) + \frac{d\vec{\Omega}_{ji}}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_{ji} \wedge (\vec{\Omega}_{ji} \wedge \overrightarrow{AB})$$

### Cas des chaînes fermées

$$\vec{V}(M, 1/0) = \vec{V}(M, 1/3) + \vec{V}(M, 3/0)$$

$$\vec{V}(M, 1/0) = \vec{V}(M, 1/2) + \vec{V}(M, 2/0)$$

Plusieurs chemins permettent d'écrire une vitesse qui aura donc une expression différente, mais évidemment les mêmes valeurs numériques

### Pour retenir

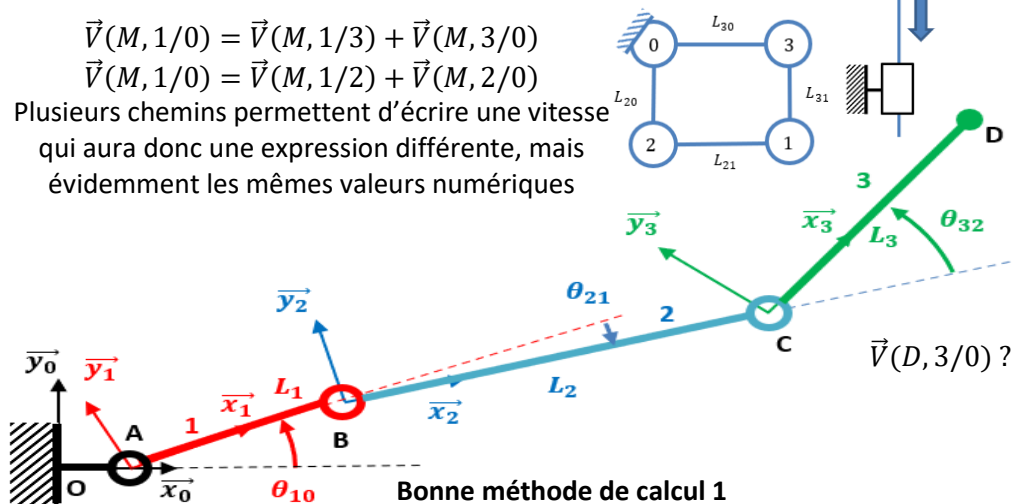
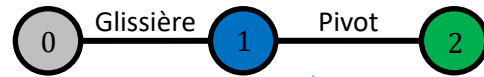
Symétrie :  $AB\Omega BA$

Babar :  $BABA\Omega$  (BABAR en statique)

### Composition du mouvement

$$\vec{V}(M, 2/0) = \vec{V}(M, 2/1) + \vec{V}(M, 1/0)$$

$$\vec{\Omega}_{20} = \vec{\Omega}_{21} + \vec{\Omega}_{10}$$



### Bonne méthode de calcul 1

#### Chasles PUIS dérivation des vecteurs position

$$\vec{V}(D, 3/0) = \frac{d\overrightarrow{AD}}{dt} \Big|_0 = \frac{d(L_1\vec{x}_1 + L_2\vec{x}_2 + L_3\vec{x}_3)}{dt} \Big|_0 = L_1 \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_0 + L_2 \frac{d\vec{x}_2}{dt} \Big|_0 + L_3 \frac{d\vec{x}_3}{dt} \Big|_0$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_0 = \dot{\theta}_{10}\vec{y}_1 \quad ; \quad \frac{d\vec{x}_2}{dt} \Big|_0 = (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\vec{y}_2 \quad ; \quad \frac{d\vec{x}_3}{dt} \Big|_0 = (\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\vec{y}_3$$

$$\vec{V}(D, 3/0) = L_3(\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\vec{y}_3 + L_2(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\vec{y}_2 + L_1\dot{\theta}_{10}\vec{y}_1$$

### Bonne méthode de calcul 2

#### Composition du mouvement PUIS formule de Varignon

$$\vec{V}(D, 3/0) = \vec{V}(D, 3/2) + \vec{V}(D, 2/1) + \vec{V}(D, 1/0)$$

$$\vec{V}(D, 3/2) = \vec{V}(C, 3/2) + \vec{\Omega}_{32} \wedge \overrightarrow{CD} = L_3\dot{\theta}_{32}\vec{y}_3 \quad ; \quad \vec{V}(D, 2/1) = L_3\dot{\theta}_{21}\vec{y}_3 + L_2\dot{\theta}_{21}\vec{y}_2$$

$$\vec{V}(D, 1/0) = L_3\dot{\theta}_{10}\vec{y}_3 + L_2\dot{\theta}_{10}\vec{y}_2 + L_1\dot{\theta}_{10}\vec{y}_1$$

$$\vec{V}(D, 3/0) = L_3(\dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\vec{y}_3 + L_2(\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{10})\vec{y}_2 + L_1\dot{\theta}_{10}\vec{y}_1$$

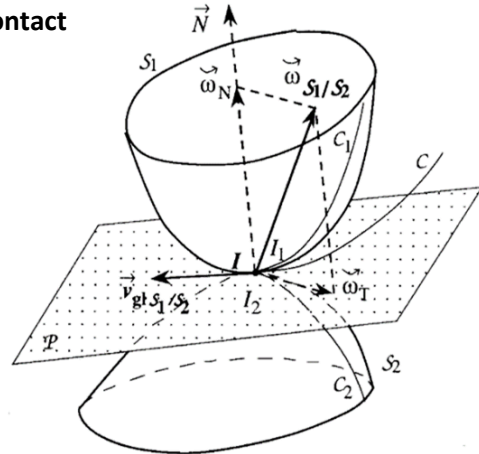
### Cas du contact

Privilégier la méthode 2

### Cinématique du contact

#### Définitions

$I$  le point de contact géométrique entre les deux solides à l'instant  $t$   
 $I_1$  le point de contact lié au solide  $S_1$  confondu avec  $I$  à l'instant  $t$   
 $I_2$  le point de contact lié au solide  $S_2$  confondu avec  $I$  à l'instant  $t$   
 $\vec{\omega}_T$  le roulement contenu dans le plan tangent  
 $\vec{\omega}_N$  le pivotement normal au plan tangent en  $I$   
 $\vec{\omega}_{S_1/S_2} = \vec{\omega}_T + \vec{\omega}_N$



#### Vitesse de glissement

$$\begin{aligned}\vec{v}_{gl}(S_1/S_2) &= \vec{V}(I, S_1/S_2) \\ \vec{v}_{gl}(S_1/S_2) &= -\vec{v}_{gl}(S_2/S_1) \\ \vec{v}_{gl}(S_1/S_2) &= \vec{V}(I, S_1/\mathcal{R}) - \vec{V}(I, S_2/\mathcal{R})\end{aligned}$$

#### Roulement sans glissement

$$\begin{aligned}\vec{V}(I, S_1/S_2) &= \vec{V}(I, S_2/S_1) = \vec{0} \\ \vec{V}(I, S_1/\mathcal{R}) &= \vec{V}(I, S_2/\mathcal{R})\end{aligned}$$

### Torseur cinématique

#### Notations

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}_{ji}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{ji} \\ \vec{V}(M, j/i) \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} P_{ji}\vec{x}_0 + Q_{ji}\vec{y}_0 + R_{ji}\vec{z}_0 \\ U_{ji}\vec{x}_0 + V_{ji}\vec{y}_0 + W_{ji}\vec{z}_0 \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} P_{ji} & U_{ji} \\ Q_{ji} & V_{ji} \\ R_{ji} & W_{ji} \end{array} \right\}_{\mathcal{B}_0} \\ \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{ji} \\ \vec{V}(M, j/i) \end{array} \right\}_M &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{ji} \\ \vec{V}(N, j/i) \end{array} \right\}_N = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{ji} \\ \vec{V}(M, j/i) + \vec{NM} \wedge \vec{\Omega}_{ji} \end{array} \right\}_N\end{aligned}$$

#### Torseur glisseur (rotation)

$$\begin{aligned}\exists M/\{\mathcal{V}_{ji}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{ji} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \\ \forall P, \vec{\Omega}_{ji} &\perp \vec{V}(P, j/i)\end{aligned}$$

#### Composition du mouvement

$$\{\mathcal{V}_{kj}\} + \{\mathcal{V}_{ji}\} = \{\mathcal{V}_{ki}\}$$

#### Torseur couple (translation)

$$\forall M, \{\mathcal{V}_{ji}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(M, ji) \end{array} \right\}_M$$

#### Addition

Doit être réalisée au même point

#### Egalité

$$\{\mathcal{V}_{21}\} = \{\mathcal{V}_{10}\}$$

Au même point, donne deux équations vectorielles

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{21} = \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}(P, 2/1) = \vec{V}(P, 1/0) \end{cases}$$

Dans la même base, donne 6 équations scalaires

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{cc} P_{21} & U_{21} \\ Q_{21} & V_{21} \\ R_{21} & W_{21} \end{array} \right\}_M^{\mathcal{B}_0} &= \left\{ \begin{array}{cc} P_{10} & U_{10} \\ Q_{10} & V_{10} \\ R_{10} & W_{10} \end{array} \right\}_M^{\mathcal{B}_0} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{21} = P_{10} \\ Q_{21} = Q_{10} \\ R_{21} = R_{10} \\ U_{21} = U_{10} \\ V_{21} = V_{10} \\ W_{21} = W_{10} \end{cases}\end{aligned}$$

#### Automoment

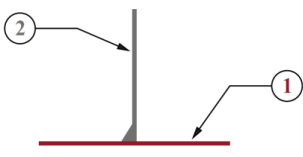
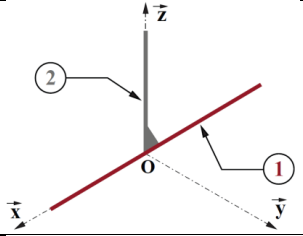
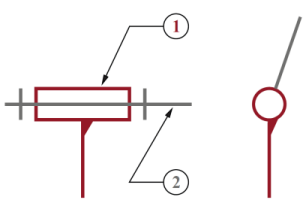
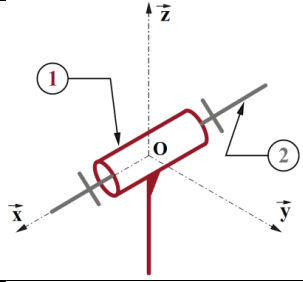
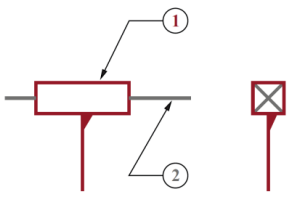
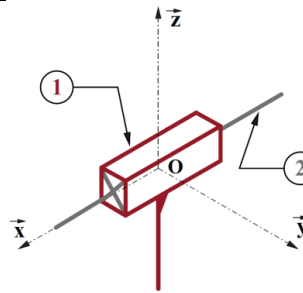
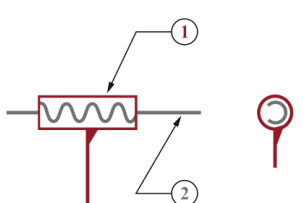
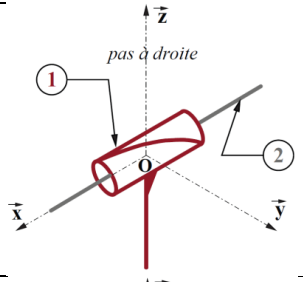
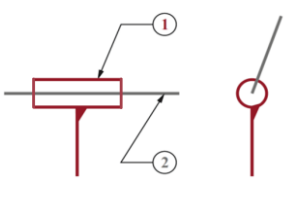
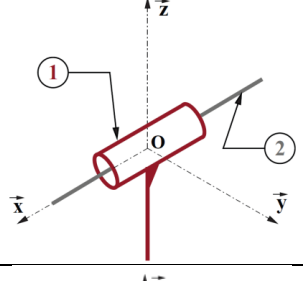
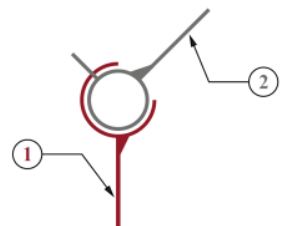
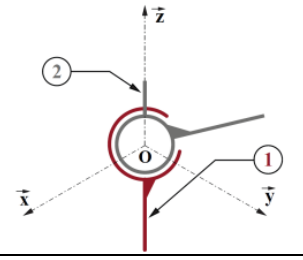
C'est un invariant

$$A_{\{\mathcal{V}_{ji}\}} = \frac{1}{2} \{\mathcal{V}_{ji}\} \odot \{\mathcal{V}_{ji}\} = cste$$

#### Comoment

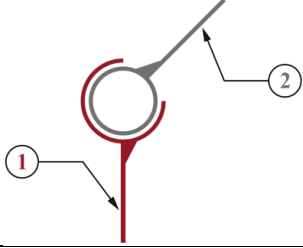
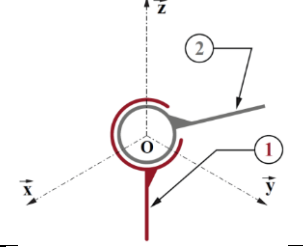
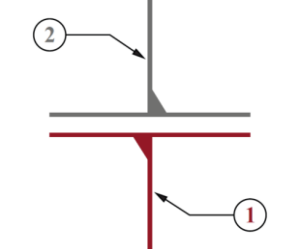
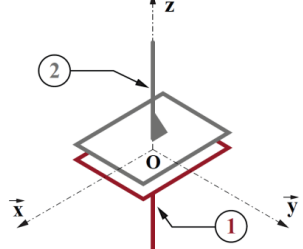
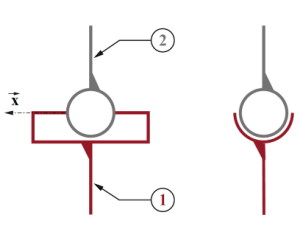
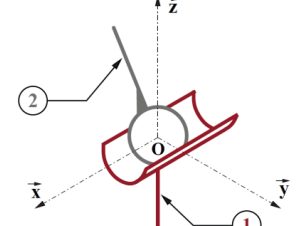
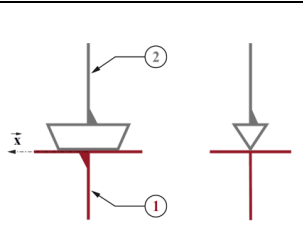
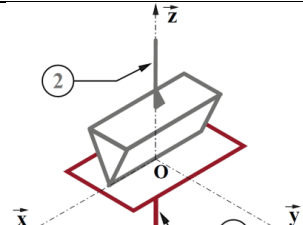
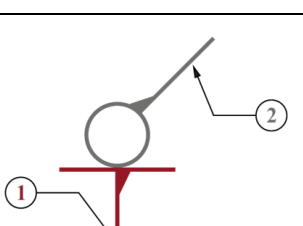
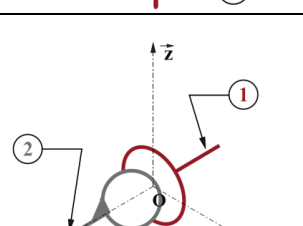
$$\begin{aligned}&\{\mathcal{V}_{21}\} \odot \{\mathcal{V}_{10}\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{21} \\ \vec{V}(M, 21) \end{array} \right\}_M \odot \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{10} \\ \vec{V}(N, 1/0) \end{array} \right\}_N \\ &= \vec{\Omega}_{21} \cdot \vec{V}(P, 1/0) + \vec{\Omega}_{10} \cdot \vec{V}(P, 2/1) \quad \forall P\end{aligned}$$

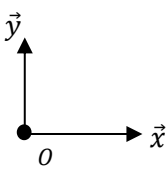
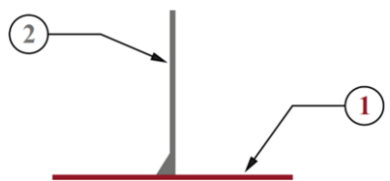
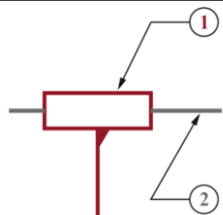

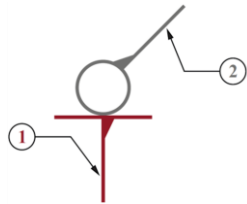
### Liaisons normalisées en cinématique

Liaison	Elem Géom	2D	3D	$\{\mathcal{V}_{21}\}$ Forme canonique	Validité	$\mathfrak{B}$	$I_c$
Encastrement $E$	$RAS$			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\begin{matrix} - \\ - \\ - \end{matrix}$	0
Pivot $P$	$(O, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O, \vec{x})$	$\begin{matrix} \vec{x} \\ - \\ - \end{matrix}$	1
Glissière $Gl$	$\vec{x}$			$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\begin{matrix} \vec{x} \\ - \\ - \end{matrix}$	1
Hélicoïdale $He$	$(O, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $U_{21} = \frac{pas}{2\pi} P_{21}$	$(O, \vec{x})$	$\begin{matrix} \vec{x} \\ - \\ - \end{matrix}$	1
Pivot Glissant $PG$	$(O, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O, \vec{x})$	$\begin{matrix} \vec{x} \\ - \\ - \end{matrix}$	2
Rotule à doigt Sphérique à doigt	$O$ Rainure $(O, \vec{x}, \vec{z})$ Doigt $\vec{z}$			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref \mathfrak{B}_1 \text{ \& } \mathfrak{B}_2$	$O$	$\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$	2



### Liaisons normalisées en cinématique

Rotule $R$ Sphérique $S$	$O$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}}$	$O$	$\begin{matrix} - \\ - \\ - \end{matrix}$	3
Appui plan $AP$	$\vec{z}$			$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}}$	$\forall P$	$\begin{matrix} - \\ - \\ \vec{z} \end{matrix}$	3
Linéaire annulaire $LA$ Sphère cylindre $SC$	$(O, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & U_{21} \\ Q_{21} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}}$ $Ref \mathcal{B}_1$	$O$	$\begin{matrix} \vec{x} \\ - \\ - \end{matrix}$	4
Linéaire rectiligne $LR$ Cylindre Plan $CP$	$\{(O, \vec{x}), \vec{z}\}$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}}$ $Ref \mathcal{B}_1 \text{ \& } \mathcal{B}_2$	$(O, \vec{x}, \vec{z})$	$\begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$	4
Ponctuelle $Pct$ Sphère-plan $SP$	$(O, \vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{21} & 0 \\ Q_{21} & V_{21} \\ R_{21} & W_{21} \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}}$ $Ref \mathcal{B}_1$	$(O, \vec{x})$	$\begin{matrix} \vec{x} \\ - \\ - \end{matrix}$	5

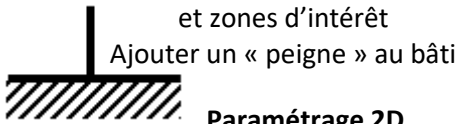
Cas des mécanismes plans dans $(O, \vec{x}, \vec{y})$				
		$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & V_{21} \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_M^{\mathcal{B}_0}$		
Encastrement		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}_0}$	$\forall P$	$I_c^{2D} = 0$
Glissière $\vec{x}$		$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}_0}$	$\forall P$	$I_c^{2D} = 1$
Pivot $(O, \vec{z})$		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}_0}$	$(O, \vec{z})$	$I_c^{2D} = 1$
Ponctuelle $(O, \vec{y})$		$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}_0}$	$(O, \vec{y})$	$I_c^{2D} = 2$

Aide-mémoire				
Élément géométrique	1 point $O$	1 direction $\vec{x}$	1 axe $(O, \vec{x})$	Une normale (droite ou plan)
Liaisons concernées	Rotule Rotule à doigt	Glissière Appui Plan	Pivot Pivot Glissant Hélicoïdale <i>Sphère cylindre</i>	Linéaire rectiligne (Droite+Direction) Ponctuelle (Droite)
Lieux de validité	$O$	$\forall P$	$\forall P \in (O, \vec{x})$	Une normale (droite ou plan)
Liaisons concernées	Rotule Rotule à doigt <i>Sphère Cylindre</i>	Glissière Appui Plan	Pivot Pivot Glissant Hélicoïdale	Linéaire rectiligne (Plan) Ponctuelle (Droite)

## Modélisation – Paramétrage – Graphe des liaisons

### Classes d'équivalence

Ensemble de pièces sans mouvements relatifs  
Représentées par des traits entre les liaisons  
et zones d'intérêt



### Paramétrage 2D

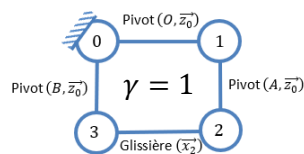
Numéros de pièces (0,1,2,3 ...) et bases associées  
( $\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i$ )

Vecteurs fixes ( $\vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i$ )

Points (A, B, C, D ...)

Longueurs ( $L_1, L_{21}, L_{21} \dots$ ) et angles fixes ( $\alpha_i$ )

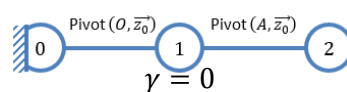
Longueurs ( $\lambda_{ji}$ ) avec conventions ( $\overrightarrow{AB} = \lambda_{ji} \vec{x}_i$ ) et  
angles variables ( $\theta_{ji}$ )



### Graphe des liaisons

Nombre de cycles indépendants

$$\gamma = L - P + 1$$



### Schémas cinématiques

Ensemble de classes d'équivalences et de  
liaisons entre ces classes

Schéma cinématique minimal : simplification  
maximale des mouvements

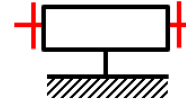
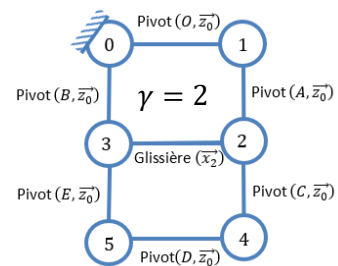
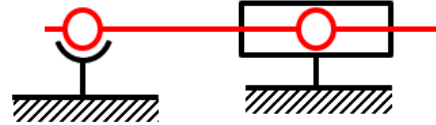


Schéma d'architecture : représentation de  
chaque liaison fidèle à la réalité

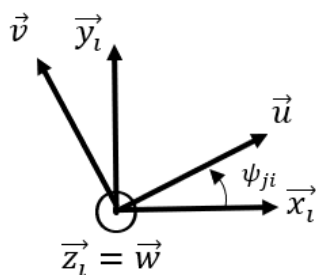
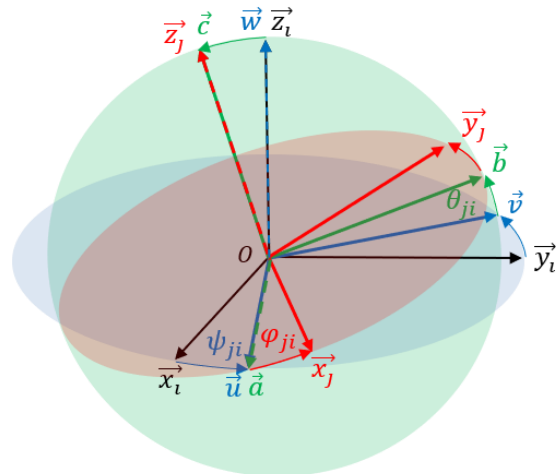


## Paramétrage 3D – Les angles d'Euler

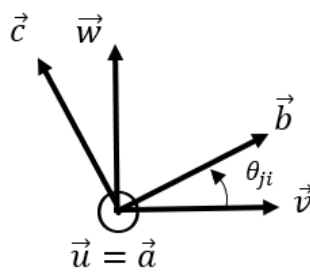
Précession  $\psi_{ji}$

Nutation  $\theta_{ji}$

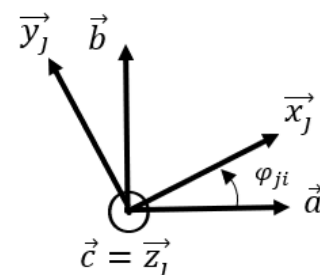
Rotation propre  $\varphi_{ji}$



$$\begin{cases} \vec{u} = \cos \psi_{ji} \vec{x}_i + \sin \psi_{ji} \vec{y}_i \\ \vec{v} = -\sin \psi_{ji} \vec{x}_i + \cos \psi_{ji} \vec{y}_i \\ \vec{w} = \vec{z}_i \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{b} = \cos \theta_{ji} \vec{v} + \sin \theta_{ji} \vec{w} \\ \vec{c} = -\sin \theta_{ji} \vec{v} + \cos \theta_{ji} \vec{w} \\ \vec{a} = \vec{u} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{x}_j = \cos \varphi_{ji} \vec{a} + \sin \varphi_{ji} \vec{b} \\ \vec{y}_j = -\sin \varphi_{ji} \vec{a} + \cos \varphi_{ji} \vec{b} \\ \vec{z}_j = \vec{c} \end{cases}$$

Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
21/03/2023	Cinématique	Résumé

### Méthode d'application de fermeture géométrique plane

Réaliser le graphe des liaisons présentant  $\gamma = L - P + 1$  chaînes fermées indépendantes. Il faut réaliser  $\gamma$  fermetures géométriques indépendantes. En 2D, on obtient donc  $E_c = 3\gamma$  équations non linéaires à résoudre dans lesquelles les inconnues sont les paramètres géométriques ( $\lambda_{ii}, \theta_{ii}$ ).

Pour chaque chaîne fermée, on obtient :

- Une équation vectorielle par relation de Chasles donnant deux équations scalaires projetées dans une base :

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}) \cdot \vec{x}_i = 0 \\ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}) \cdot \vec{y}_i = 0 \end{cases}$$

- Une équation scalaire par fermeture angulaire sur  $\vec{z}_i$  (relation de Chasles angulaire) :

$$(\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{x}_2, \vec{x}_3) + (\vec{x}_3, \vec{x}_0) = 0$$

Exemple :

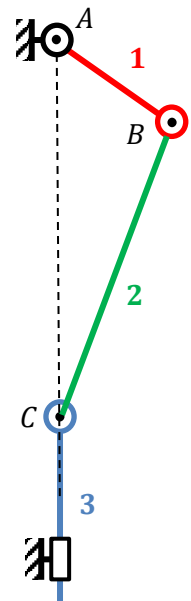
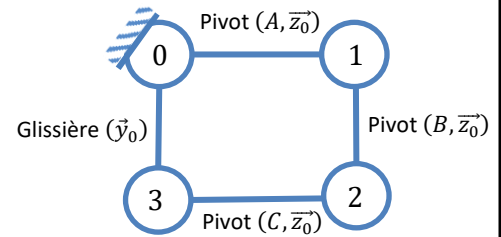
$$L_1 \vec{x}_1 + L_2 \vec{x}_2 - L_3 \vec{x}_3 - L_0 \vec{x}_0 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \cos \theta_{10} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \cos \theta_{30} - L_0 = 0 \\ L_1 \sin \theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \sin \theta_{30} = 0 \end{cases}$$

$$(\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{x}_2, \vec{x}_3) + (\vec{x}_3, \vec{x}_0) = \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{10} + \theta_{21} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0 \\ L_1 \cos \theta_{10} + L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \cos \theta_{30} - L_0 = 0 \\ L_1 \sin \theta_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) - L_3 \sin \theta_{30} = 0 \end{cases}$$

Dans cet exemple, il est possible d'exprimer 3 paramètres géométriques en fonction d'un 4<sup>e</sup> à choisir. Ce n'est pas toujours très évident et les formules peuvent au choix faire apparaître les fonctions  $\cos^{-1}$ ,  $\sin^{-1}$  et  $\tan^{-1}$  avec des conditions de validité



De manière générale, à partir du/des système(s) non linéaire obtenu(s), il existe plusieurs stratégies de résolution :

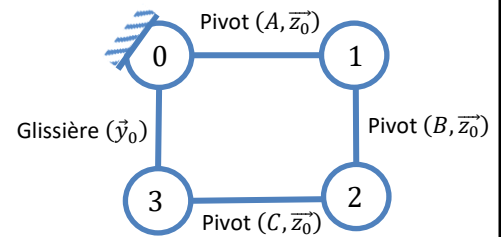
- Mise en place d'une démarche permettant d'établir une relation explicite du type  $s = f(e)$  ou  $e = f(s)$  (exemple souvent rencontré pour faire disparaître un paramètre angulaire :  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ )
- Obtenir une relation implicite du type  $f(e, s) = 0$  à résoudre numériquement avec une méthode type Newton ou Dichotomie.

### Méthode d'application de fermeture cinématique

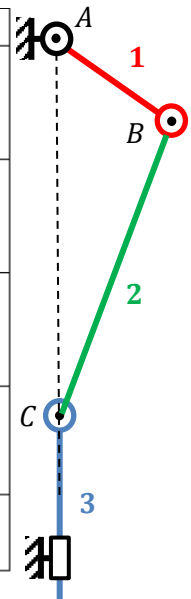
Rappel des notations :  $\{\mathcal{V}_{ji}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{ji} \\ 0 & V_{ji} \\ R_{ji} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}_k}$  ou  $\begin{Bmatrix} 0 & v_{ji}^x \\ 0 & v_{ji}^y \\ \omega_{ji}^z & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathcal{B}_k}$

Réaliser le graphe des liaisons présentant  $\gamma = L - P + 1$  chaînes fermées indépendantes. Il faut réaliser  $\gamma$  fermetures cinématiques indépendantes. En 2D, on obtient donc  $E_c = 3\gamma$  équations linéaires à résoudre dans lesquelles les inconnues sont les paramètres cinématiques ( $R_{ji}, U_{ji}, V_{ji}$ ).

Pour chaque chaîne fermée, écrire la fermeture cinématique associée :  $\{\mathcal{V}_{21}\} + \{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{03}\} + \{\mathcal{V}_{32}\} = \{0\}$



Exprimer les torseurs en un même point		
$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathcal{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} R_{32}\vec{z}_0 \\ -L_2 R_{32}\vec{y}_2 \end{Bmatrix}_B$	$\vec{V}(B, 3/2) = \vec{V}(C, 3/2) + \vec{BC} \wedge \vec{\Omega}_{32}$ $= L_2 \vec{x}_2 \wedge R_{32} \vec{z}_2 = -L_2 R_{32} \vec{y}_2$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{21} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} R_{21}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$	RAS
$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathcal{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} R_{10}\vec{z}_0 \\ L_1 R_{10}\vec{y}_1 \end{Bmatrix}_B$	$\vec{V}(B, 3/2) = \vec{V}(A, 3/2) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{32}$ $= -L_1 \vec{x}_1 \wedge R_{10} \vec{z}_1 = L_1 R_{10} \vec{y}_1$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathcal{B}_0}$	$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{03}\vec{y}_0 \end{Bmatrix}_B$	RAS
Important : ne pas garder la notation verticale afin d'éviter des projections qui pourraient gêner la suite et ne pas faire apparaître de $\dot{\lambda}$ ou $\dot{\theta}$		



Obtenir les deux équations vectorielles de la fermeture :  $\begin{Bmatrix} (R_{32} + R_{21} + R_{10})\vec{z}_0 \\ V_{03}\vec{y}_0 + L_1 R_{10}\vec{y}_1 - L_2 R_{32}\vec{y}_2 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Choisir une base de projection pour obtenir les 3 équations scalaires de la fermeture :

$$\begin{cases} R_{32} + R_{21} + R_{10} = 0 \quad (1) \\ -L_1 \sin \theta_{10} R_{10} + L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \quad (2) \\ V_{03} + L_1 \cos \theta_{10} R_{10} - L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) R_{32} = 0 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -L_1 \sin \theta_{10} & 0 & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 \\ L_1 \cos \theta_{10} & 0 & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{21} \\ R_{32} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : tout paramètre géométrique est supposé connu, une résolution géométrique ayant au préalable permis de les déterminer en fonction de l'entrée.

Résoudre le système linéaire en fonction de l'entrée donnée ( $R_{10}$  ici) :  $\begin{cases} R_{32} = f_1(R_{10}) \\ R_{21} = f_2(R_{10}) \\ V_{30} = f_3(R_{10}) \end{cases}$

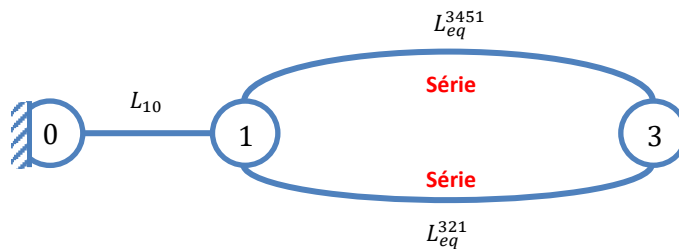
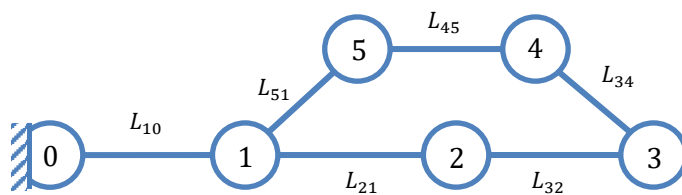
Pour un mécanisme plan à une mobilité, il y a 4 inconnues, 3 équations par chaîne et 1 inconnue fixée (entrée).

Il est possible de résoudre ce système numériquement ainsi :

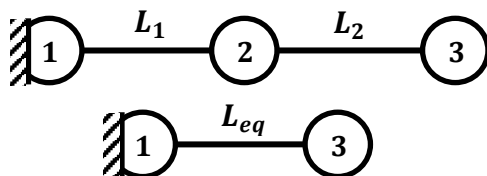
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10}) & 0 \\ 0 & -L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{21} \\ R_{32} \\ V_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{10} \\ L_1 \sin \theta_{10} R_{10} \\ -L_1 \cos \theta_{10} R_{10} \end{bmatrix}$$

### Liaisons équivalentes

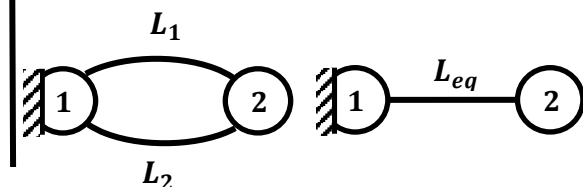
Si besoin, décomposer le problème en sous problèmes



#### Liaisons en série



#### Liaisons en parallèle



Choisir un point  $P$

(Liaison reconnue ? Point commun ? Quel déplacement ?)

Choisir une base  $B$

(Liaison reconnue ? Base commune ? Vecteur de déplacement ?)

$$\text{Poser } \{\mathcal{T}_{n/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{n/1} & L_{n/1} \\ Y_{n/1} & M_{n/1} \\ Z_{n/1} & N_{n/1} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\text{Utiliser } \{\mathcal{V}_{n/1}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$

Indicer les différentes liaisons :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}^1\}, \{\mathcal{V}_{2/1}^2\} \dots \{\mathcal{V}_{2/1}^n\}$$

$$\text{Utiliser } \{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^1\} = \dots = \{\mathcal{V}_{2/1}^n\}$$

Exprimer les torseurs au même point  $P$  et dans la même base  $\mathcal{B}$

Déterminer le torseur équivalent

Etudier si l'ensemble des 6 composantes forme une famille libre ou non

Si normalisée, proposer nom et EG de la liaison

Dépendance entre colonnes ? Mauvais choix de point ?

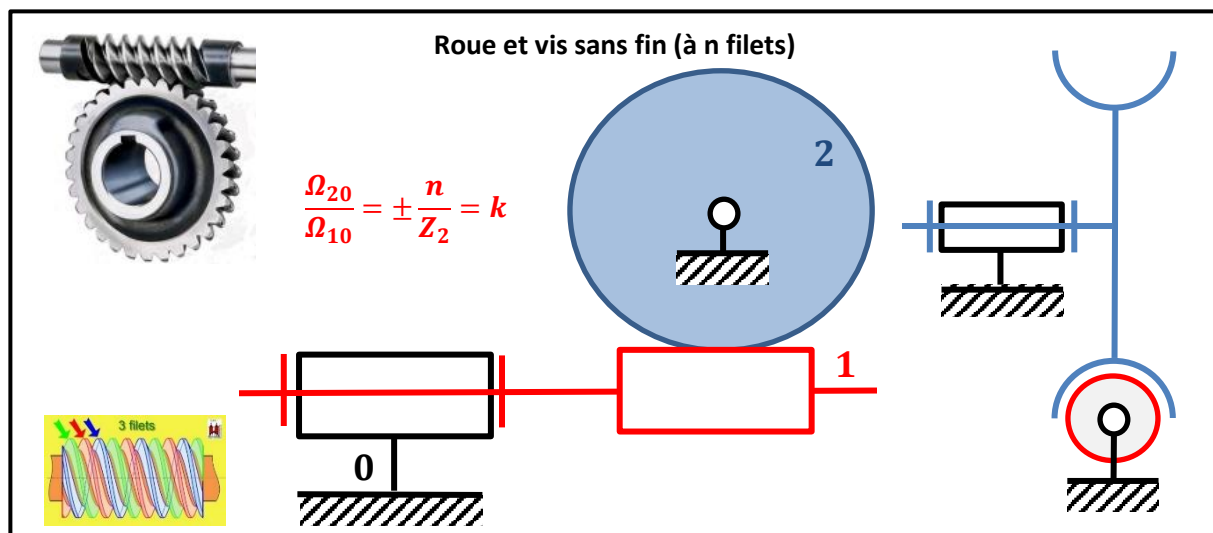
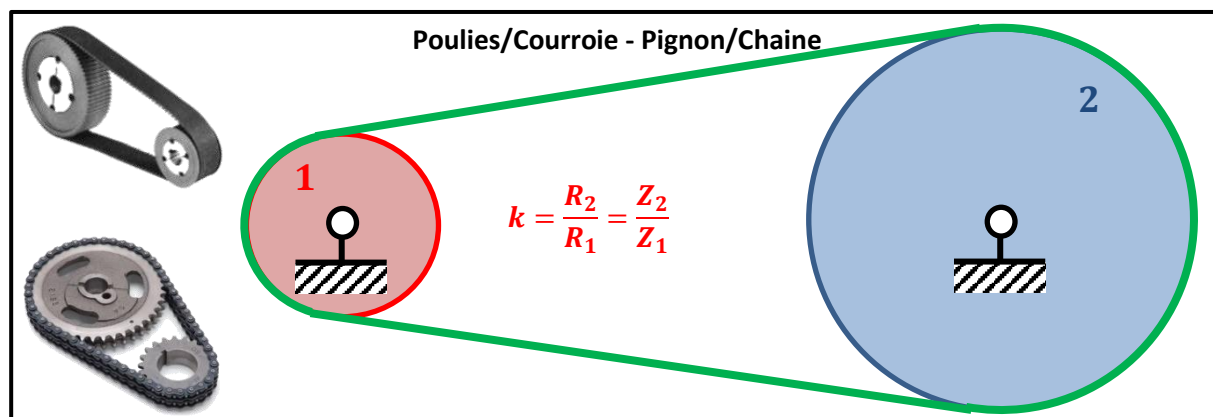
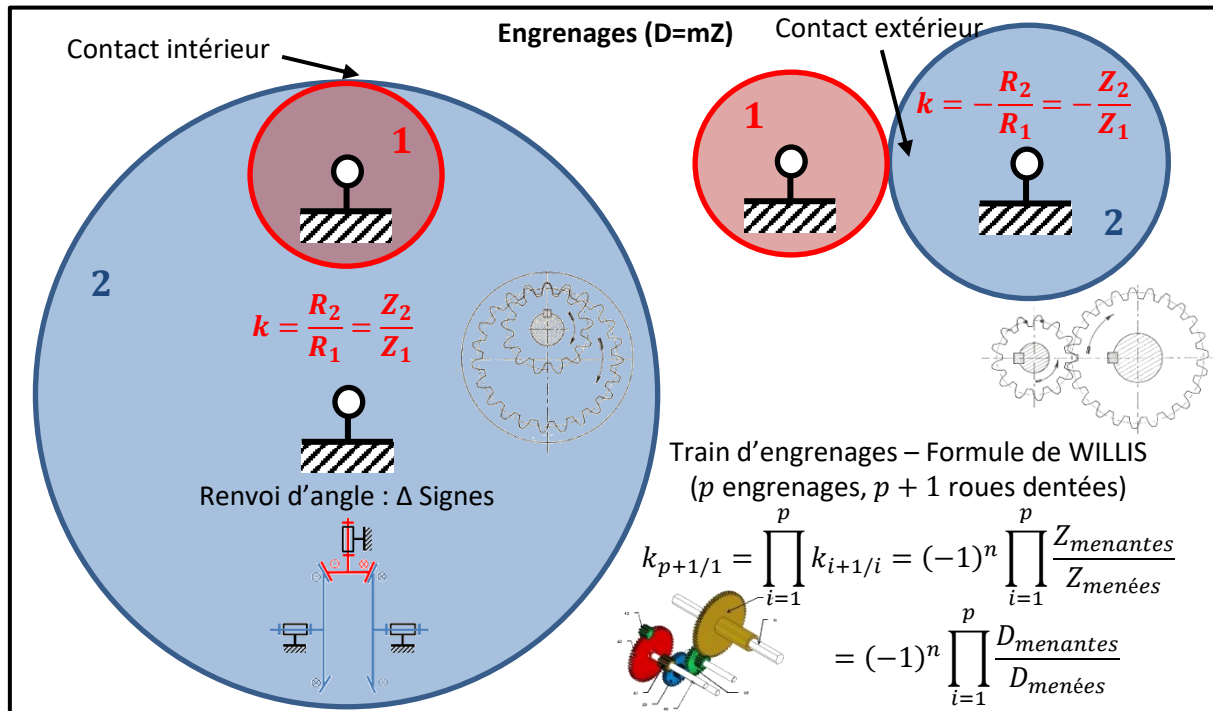
Dépendances similaire entre composantes des deux colonnes ? Mauvais choix de base ?

Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
21/03/2023	Cinématique	Résumé


### Transformation du mouvement

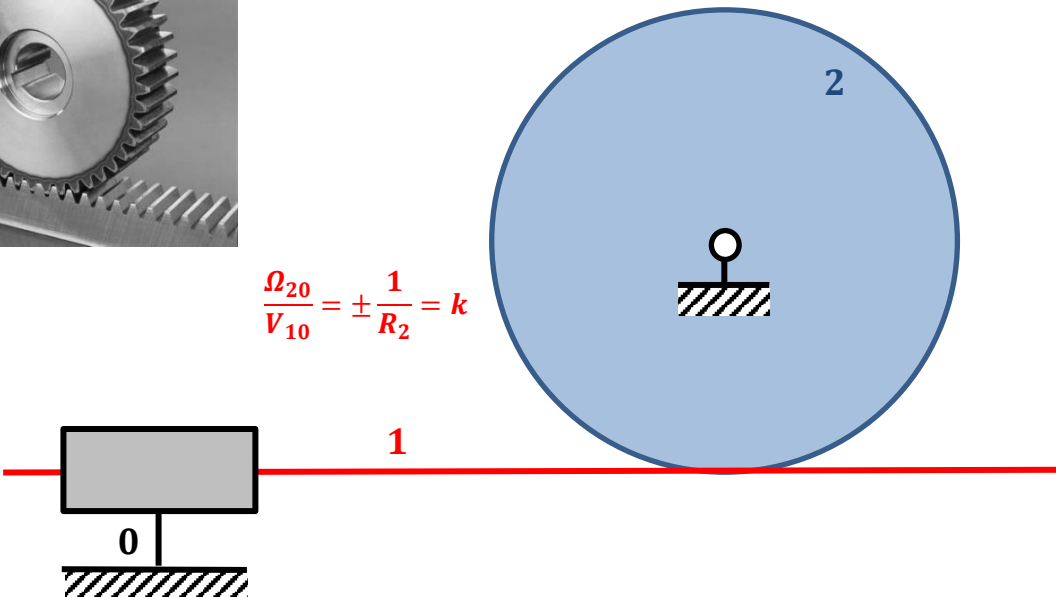
Tout rapport de réduction est donné sous la forme  $k = \frac{Mvt_{20}}{Mvt_{10}}$

L'action 1 est  $Ext \rightarrow 1$  et l'action 2 est  $Ext \rightarrow 2$  (sinon, les signes changent)



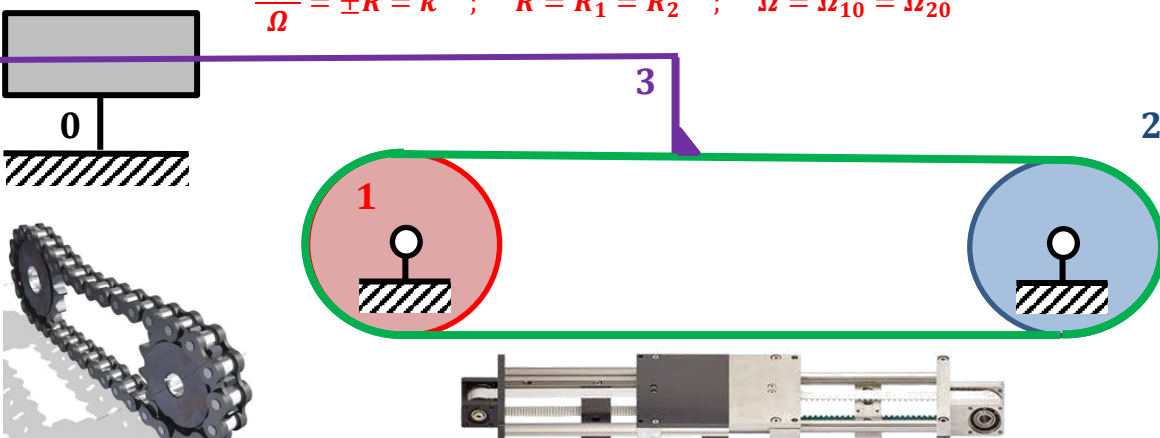
### Pignon/Crémaillère





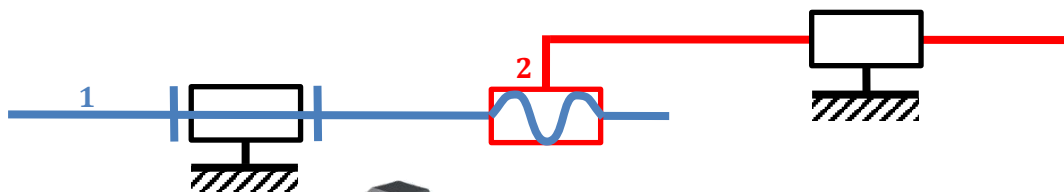
$$\frac{\Omega_{20}}{V_{10}} = \pm \frac{1}{R_2} = k$$

### Poulie/Courroie – Pignon/Chaîne



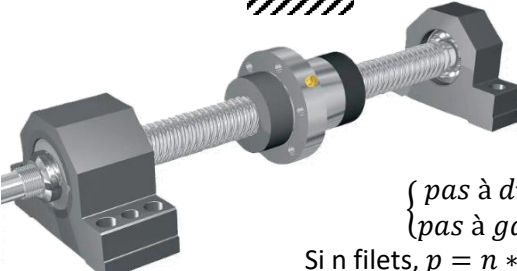
$$\frac{V_{30}}{\Omega} = \pm R = k \quad ; \quad R = R_1 = R_2 \quad ; \quad \Omega = \Omega_{10} = \Omega_{20}$$

### Hélicoïdale/Vis écrou

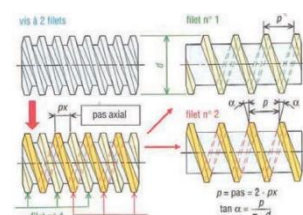


$$\frac{V_{21}}{\Omega_{21}} = \frac{p}{2\pi}$$

$$\frac{V_{20}}{\Omega_{10}} = -\frac{p}{2\pi} = k$$



$\begin{cases} \text{pas à droite } p > 0 \\ \text{pas à gauche } p < 0 \end{cases}$   
 Si n filets,  $p = n * p_x$  avec  $p_x$  pas axial





Dernière mise à jour	MECA1	Denis DEFAUCHY
21/03/2023	Cinématique	Résumé

