DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Plasma

On considère un plasma, électriquement neutre, qui comporte N ions positifs pratiquement immobiles et N électrons par unité de volume. Les électrons ont une charge $-e$ et une masse m. La permittivité ε_0 et la perméabilité μ_0 sont celles du vide. On admettra que les interactions entre particules ainsi que leur agitation thermique peuvent être négligées.

I. Oscillations de plasma

On considère le volume de plasma compris entre deux plans perpendiculaires à Ox distants de h entre $x=0$ et $x=h$. On considérera que h est beaucoup plus petit que les dimensions du plasma perpendiculaires à Ox. Ce volume de plasma contient des électrons et des ions. Les ions sont supposés fixes alors que les électrons peuvent se déplacer suivant Ox.

On perturbe la distribution d'équilibre en déplaçant tous les électrons du cylindre d'une distance égale à $|\xi|$ avec $|\xi| << h$.

1. Montrer qu'il apparaît alors au sein du plasma deux couches chargées dont on donnera la position et l'épaisseur. Faire un dessin dans le cas $\xi>0$ et préciser l'expression de la densité volumique de charge pour chaque couche. Idem dans le cas $\xi<0$.

2. Expliquer pourquoi on peut assimiler ces deux couches à deux plans infinis chargés en surface par σ et $-\sigma$. Déterminer l'expression de σ en $x=0$. Déterminer le champ $\vec{E}$ entre ces deux plans et en déduire l'expression de $\vec{F}$ force agissant sur un électron situé entre les deux couches par suite de cette perturbation.

3. Ecrire l'équation différentielle du mouvement d'un électron de ce cylindre, électron repéré par ξ, abscisse par rapport à la position d'équilibre. Déterminer la pulsation ω_P de ces oscillations. Exprimer ω_P en fonction de N, e, m, ε_0 .

II. Propagation d'ondes longitudinales

On se propose d'étudier dans le plasma la possibilité d'ondes de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{E}(x,t)\ \vec{u_x} = E_0 \exp i\,(\omega t - k x)\ \vec{u_x}$$

k est un réel supposé connu. On cherche l'expression de la pulsation $\omega = \omega(k)$.

4. Que vaut le champ magnétique ?

5. Par application du principe fondamental à un électron, déterminer l'expression de la densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}$ en fonction de $\underline{\vec{E}}, \omega$ et des constantes définissant le plasma.

6. A l'aide des équations de Maxwell, montrer que ω est ici indépendant de k. Déterminer la valeur de ω.

7. Que vaut le vecteur de Poynting $\vec{\pi}$. Que peut-on en conclure ?

8. Donner l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique $u(x,t)$ et de la densité volumique d'énergie cinétique $e_C(x,t)$. Commenter l'expression obtenue pour $u(x,t) + e_C(x,t)$.

III. Ondes transversales à l'interface vide-plasma

Un plasma occupe le demi espace $x>0$. Le demi espace $x<0$ est vide. Une onde plane progressive monochromatique, de pulsation ω différente de ω_P, polarisée rectilignement, arrive en incidence normale sur ce plasma.

Sur l'interface, son champ électrique:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}(x,t)\ \vec{u}_y = E_0 \exp i\,(\omega t - k_0 x)\ \vec{u}_y$$

donne naissance à un champ électrique transmis:

$$\underline{\vec{E}_t} = \underline{E_t}(x,t)\ \vec{u}_y = \underline{E_{0,t}}\ \exp i\,(\omega t - k x)\ \vec{u}_y \text{ avec } x>0$$

et à un champ électrique réfléchi:

$$\underline{\vec{E}_r} = \underline{E_r}(x,t)\ \vec{u}_y = \underline{E_{0,r}}\ \exp i\,(\omega t + k_0 x)\ \vec{u}_y \text{ avec } x<0$$

9. Exprimer $\underline{\vec{B}}, \underline{\vec{B}_r}, \underline{\vec{B}_t}$ en fonction de $\underline{E}(x,t)$, $\underline{E_r}(x,t)$, $\underline{E_t}(x,t)$, k_0, k, ω.

10. Retrouver la relation de dispersion dans le plasma. On introduira ω_P.

11. En déduire l'expression de k (préciser, selon la valeur de ω, l'expression de k à adopter).

12. On définit l'indice par $\underline{n} = k/k_0$. Donner l'expression de $\underline{n}$ (deux cas).

13. La description étant ici volumique, il n'y a ni densité de charge surfacique, ni densité de courant surfacique en $x=0$. Ecrire les relations vérifiées en $x=0$ par les champs électriques et les magnétiques des trois ondes incidente, transmise et réfléchie.

14. On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique soit $\underline{r} = \underline{E}_r(x=0,t)/\underline{E}(x=0,t)$ et $\underline{t} = \underline{E}_t(x=0,t)/\underline{E}(x=0,t)$. Ecrire deux relations entre $\underline{r}$ et $\underline{t}$ faisant intervenir $\underline{n}$ puis exprimer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n}$.

15. Donner l'expression des vecteurs de Poynting moyens incident, réfléchi, transmis en fonction de $|\underline{r}|$, $|\underline{t}|$, $\mathcal{Re}(\underline{n})$, ε_0, c, E_0.

16. En déduire les coefficients de réflexion R (de transmission T) en énergie, définis comme le rapport des normes des vecteurs de Poynting moyens réfléchis (transmis) et incident à l'interface.

17. Déterminer R et T pour $\omega < \omega_P$. Commenter.

18. Pour $\omega > \omega_P$, déterminer R et T en fonction de l'indice dont on reprécisera l'expression. Quelle relation obtient-on entre R et T. Commenter.

19. Commenter le cas $\omega_P = 0$.

Cycle thermodynamique à trois transformations

I. Questions préliminaires

On considère n moles de gaz parfait.

A. Capacités thermiques molaires:

La capacité thermique molaire à pression constante est notée $C_{P,m}$

La capacité thermique molaire à volume constant est notée $C_{V,m}$

On pose $\gamma=\frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$ (supposé constant) et on désigne par R la constante des gaz parfaits.

1. Quelle est l'unité de R ?
2. Retrouver les expressions de $C_{P,m}$ et $C_{V,m}$ en fonction de R et de γ .

B. Variation d'entropie:

Les n moles de gaz subissent une transformation. Les variables d'état sont T et P .

3. Retrouver l'expression de la variation d'entropie élémentaire dS , pour une transformation réversible pour le système, en fonction de dP et dT (on fera intervenir aussi : P, T, R, n, γ)
4. En déduire l'expression de l'entropie S à une constante arbitraire S_0 près. On montrera que l'expression de S fait intervenir $\ln\left(\frac{T^\gamma}{P^\alpha}\right)$. Préciser α en fonction de γ .
5. Que peut-on en déduire pour une transformation isentropique?

C. Pente de l'isotherme et de l'isentropique:

On considère les n moles de gaz parfait subissant une transformation polytropique définie ici comme une transformation d'équation $PV^a=Constante$ soit $PV^a=P_0V_0^a$ où a désigne une constante.

6. Donner la valeur de a pour les transformations suivantes : isotherme, isentropique, isobare, isochore.
7. On représente une transformation polytropique dans le diagramme PV (P en fonction de V). Donner l'expression de la pente de cette courbe en un point donné en fonction de a, P, V .
8. En déduire (on justifiera avec précision) que, des deux schémas suivants proposés, c'est le premier schéma qui est correct.

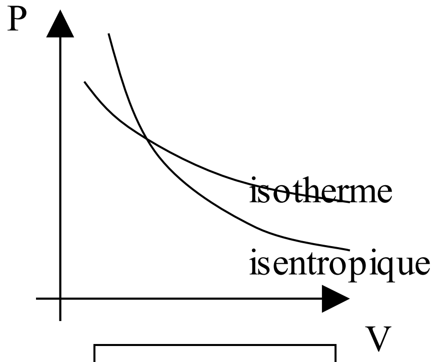


Figure 1

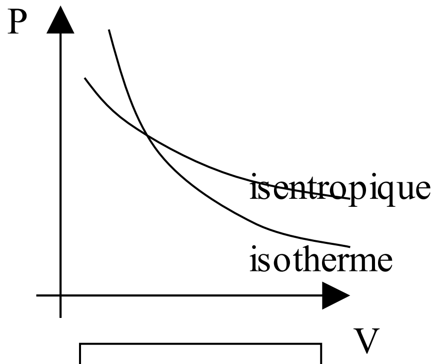


Figure 2

D. Cycle moteur:

Le gaz parfait décrit un cycle quasistatique.

9. Indiquer (cf. lien entre aire et intégrale en mathématiques) dans chaque cas (figures 3 et 4) le signe de $\oint_{cycle} PdV$. Expliquer avec soin.

10. En déduire (justifier avec précision) lequel de ces deux cycles est un cycle moteur .

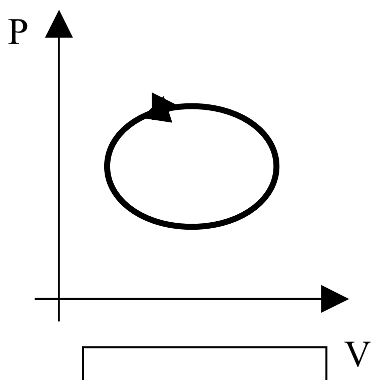


Figure 3

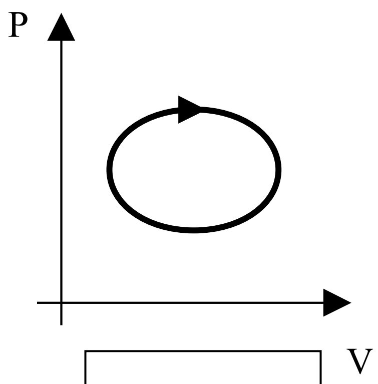


Figure 4

II. Le cycle étudié

A. Description du cycle:

Les n moles de gaz parfait décrivent en fait un cycle comprenant trois transformations : une transformation isobare, une transformation isotherme, une transformation isentropique (l'ordre des transformations n'est pas donné: ces transformations ne se suivent donc pas nécessairement selon l'ordre de description précédent). Le cycle est représenté à la figure 5.

11. Attribuer à chaque transformation (AB, BC, CA) le qualificatif correct (isobare, isotherme, isentropique) et préciser à chaque fois s'il s'agit de: compression, détente, chauffage, refroidissement .

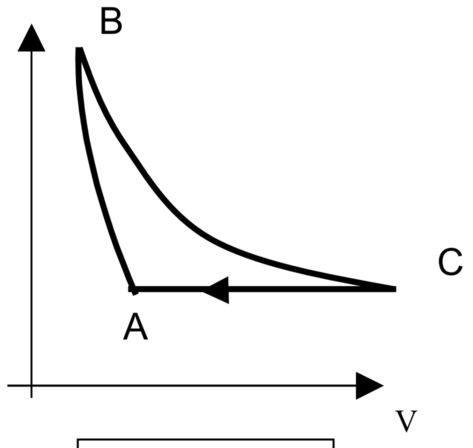


Figure 5

12.Pour réaliser ce cycle, on dispose d'une source de chaleur à la température T_C .

- Justifier en considérant la transformation isobare la nécessité d'une deuxième source.
- Justifier en partant de l'énoncé de Lord Kelvin la nécessité d'une deuxième source.

13.Pour réaliser ce cycle, on dispose donc de deux sources : une source de température T_C (température au point C) et une source de température T_A (température au point A). Préciser la (ou les) transformation(s) nécessitant un contact avec une source, préciser laquelle et indiquer (en justifiant qualitativement) le signe de l'échange de chaleur.

B. Entropie créée:

On considère n moles de gaz parfait à la température T_1. On les porte à la température T_2 en utilisant une source à la température T_2. La transformation est isobare. On donne : T_1, T_2, n, R, γ.

14.Exprimer ΔU (variation d'énergie interne du gaz), ΔH (variation d'enthalpie du gaz) ΔS (variation d'entropie du gaz) en fonction des données.

15.Cette transformation est-elle réversible ? Justifier. Quelle est l'entropie créée ? Application numérique avec $T_2/T_1 = 2$, $ln(T_2/T_1) = 0.7$, $\gamma=5/3$ et $nR = 0,4\ J\,K^{-1}$

C. Calculs sur le cycle:

On revient au cycle (figure 5) décrit en présence des deux sources de température T_A et T_C (les températures aux points A et C). On donne : T_A, T_C, n, R, γ.

16.Exprimer P_B/P_A en fonction de T_C/T_A .

17.Pour chaque transformation, exprimer $\Delta U, \Delta H, \Delta S, W, Q$ (en fonction des données). Présenter les résultats en tableau.

18.Pour le cycle complet, exprimer ΔU_{cycle}, ΔH_{cycle}, ΔS_{cycle} , W_{cycle}, Q_{cycle} puis Q_{chaud} (quantité de chaleur reçue de la source chaude), Q_{froid}. (quantité de chaleur reçue de la source froide)

19.Exprimer l'efficacité (« rendement » thermodynamique) de ce moteur thermique en fonction des données.

20.Déterminer $S_{créé}$ (entropie créée au cours du cycle) par deux méthodes possibles.

D. Comparaison avec un cycle idéal:

On suppose ici un moteur thermique idéal fonctionnant de manière réversible entre les deux sources de température T_C et T_A.

21.Retrouver rapidement l'expression de l'efficacité de ce moteur (« rendement » de Carnot).

22.Quel travail ce moteur W_{rev} pourrait-il fournir à partir de la quantité de chaleur Q_{chaud} dont la valeur a été obtenue à la question 18.

23.Rappeler l'expression du travail W_{irrev} que fournissait le moteur fonctionnant selon le cycle à trois transformations étudié. Vérifier que la différence entre W_{rev} et W_{irrev} est proportionnelle à l'entropie créée au cours du cycle à trois transformations. Commenter.

Guides d'onde

(Parties 1 et 2 de Centrale Supélec 2004)

Ce problème étudie quelques aspects de la physique des guides d'onde et cavités résonantes. On ne s'intéresse qu'à la partie non statique du champ électromagnétique. Les grandeurs a priori complexes sont notées soulignées.On désigne par i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Données numériques :

Permittivité du vide :	$\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}$ SI
Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI
Vitesse de la lumière :	$c = 3,0 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Formule d'analyse vectorielle : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$.

I. Etude d'un guide d'onde et d'une cavité

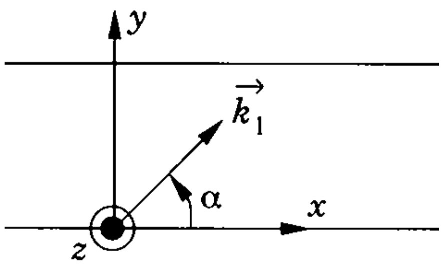
A. Propagation d'une onde guidée:

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct *(Oxyz)* associé à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le métal considéré dans cette partie est parfait.

1. On considère deux plans métalliques parfaits d'équations $y = 0$ et $y = b$. De façon à éviter des pertes par rayonnement on cherche à faire se propager selon la direction *(Ox)* une onde plane progressive, harmonique (monochromatique) de pulsation ω , polarisée rectilignement selon *(Oz)*. Montrer que ceci est impossible.

2. On choisit alors d'envoyer cette onde en oblique entre les deux plans selon le vecteur d'onde $\vec{k}_1$ faisant l'angle α ($\alpha \in]0,\pi/2[$) avec l'axe *(Ox)* . Le champ électrique associé est noté: $\underline{\vec{E}_1} = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 . \overrightarrow{OM})} \vec{e}_z$. En utilisant les lois de Descartes, préciser l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}_2}$ de l'onde plane réfléchie.

3. Déterminer les valeurs possibles de $sin\ \alpha$ en fonction d'un entier p , λ_0 (longueur d'onde dans le vide) et b .



4.

- Donner l'expression de la somme $\vec{E}$ des champs incident et réfléchi.
- Justifier sans calcul pourquoi ce champ est bien solution des équations de Maxwell.

- Dans quelle direction et quel sens y a-t-il propagation ?
- Déterminer en fonction de $k_0 = \omega / c$ et α le module du vecteur d'onde k_g dans le guide.

5. Exprimer en fonction de c et b la fréquence minimale f_c en deçà de laquelle il ne peut y avoir de propagation. Quelle condition doit vérifier b pour qu'une onde de 2, 5 GHz puisse se propager ?

6. Trouver la relation entre k_0 et k_g . Comment appelle-t-on cette relation ?

7. Trouver une relation entre la vitesse de phase v_φ , et la vitesse de groupe v_g sans les calculer explicitement, puis donner leurs expressions en fonction de c , p et du rapport de la fréquence de l'onde sur f_c . Déterminer littéralement et numériquement la valeur de l'angle α pour lequel la vitesse de groupe est la plus grande (prendre b = 6, 6 cm et f = 2, 5 GHz). Quelle est la valeur de p associée ?

8. On ferme le guide par deux autres plans parallèles en $z = 0$ et $z = a$. Montrer sans calculs que cela est possible sans changer les solutions précédentes. Sur quels plans apparaissent des charges surfaciques ?

B. Du guide d'onde à la cavité:

On ferme le guide d'onde par deux plans infiniment conducteurs en $x = 0$ et $x = l$. On obtient une cavité électromagnétique.

9. On considère le champ $\underline{\vec{E}}$ de la question 4) que l'on note $\underline{\vec{E}_i} = \underline{E_0}(y) e^{i(\omega t - k_g x)} \vec{e}_z$ et que l'on peut considérer comme un champ incident sur le plan $x = l$. Expliquer sans calcul pourquoi il existe un champ réfléchi. Montrer que si on suppose un champ réfléchi de la forme $\underline{\vec{E}_r} = \underline{K}\, \underline{E_0}(y) e^{i(\omega t + k_g x)} \vec{e}_z$ seul champ à coexister avec $\underline{\vec{E}_i}$, alors les équations de Maxwell peuvent être vérifiées. Déterminer $\underline{K}$ et montrer qu'il existe une condition de quantification sur k_g.

10. En déduire que les pulsations possibles dans le cadre des hypothèses effectuées sont de la forme:
$\omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2}$ où m et p sont des entiers

11. Montrer que le champ électrique peut se mettre sous la forme: $\underline{\vec{E}} = E_C \sin(p\pi y/b) \sin(m\pi x/l)\, e^{i\omega t} \vec{e}_z$ avec E_C réel.

12. On se place dans la suite dans le cas où $m = p = 1$. Quelles sont les parois de la cavité susceptibles de porter une densité surfacique de charge non nulle ? Dessiner un schéma de la cavité en indiquant avec les signes + et – les charges relatives de ces faces en espaçant d'autant plus ces signes que la densité surfacique est faible en valeur absolue (préciser les axes Ox , Oy et Oz).

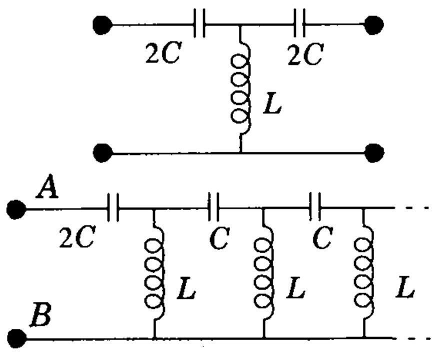
13. Donner l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ en fonction notamment de E_C, , x et y , puis préciser les faces de la cavité où apparaissent des courants surfaciques.

14. Calculer $W_e(t)$ et $W_m(t)$ les énergies électriques et magnétiques instantanées dans la cavité en fonction de $W_0 = \varepsilon_0 E^2_C V/8$ (V étant le volume de la cavité). Représenter sur un même graphe les évolutions temporelles de W_e et W_m . Que vaut l'énergie électromagnétique totale W ? Commenter. Trouver une analogie avec un circuit électrocinétique simple.

II. Dispositifs en liaison avec le guide d’onde

A. Analogie électrocinétique:

On considère le dipôle *AB* suivant constitué de cellules en *T (2C,L,2C)* placées en cascade (les deux condensateurs placés en série de deux cellules successives placées en cascade sont équivalents à un condensateur unique de capacité *C*.



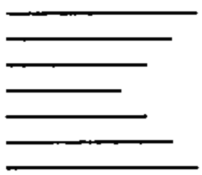
15.Calculer l'impédance du dipôle en mettant en évidence deux cas différents (prendre soin de lever les indéterminations sur les signes). Quelle est en fonction de *L* et *C* l'expression de la pulsation critique ω_C ainsi mise en évidence?

16.Interpréter énergétiquement la différence de comportement du dipôle dans les deux cas précédents. En quoi ce système est-il analogue à un guide d'onde ?

B. Etude qualitative de deux dispositifs à guide d'onde:

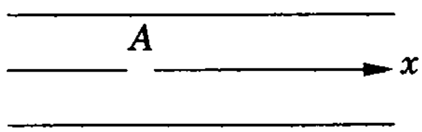
Lentille métallique « plans parallèles »

17.Montrer que si on définit l'indice *n* d'un guide en utilisant la vitesse de phase ($n = c/v_\varphi$) on obtient $n < 1$



18.On considère le dispositif ci-dessus constitué de plans parallèles.Une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique et polarisée orthogonalement au plan de la figure, arrive sur ce dispositif parallèlement aux plans métalliques. Montrer sans aucun calcul, mais en utilisant une analogie optique, que ce système se comporte comme une lentille dont on précisera la nature (on pourra considérer une lentille d'air au sein d'un bloc de verre). Justifier, en utilisant un principe d'optique physique l'utilisation de la vitesse de phase à la question précédente.

Coupleur unidirectionnel.



On considère deux guides parallèles identiques ayant une paroi commune : le guide inférieur est parcouru, de la gauche vers la droite, par une onde transverse électrique correspondant à un seul des modes mis en évidence dans la partie I A). Le guide supérieur ne contient aucune source de champ électromagnétique. On ne s'intéresse qu'aux dépendances en x . On réalise, en un point A, un trou de faibles dimensions devant la longueur d'onde (voir figure ci-dessus).

19.Expliquer sans calcul pourquoi une onde se propage dans le guide supérieur dans les deux sens possibles. On note $\underline{s_A^+}=s_0 e^{i(\omega t-kx)}$ l'onde émise par A se propageant dans le sens des x croissants. Déterminer l'amplitude complexe $\underline{s_A^-}$ de l'onde émise par A se propageant dans le sens des x décroissants.

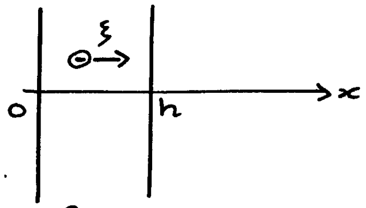
20.On effectue un trou B supplémentaire à droite du trou A, et distant d'un quart de longueur d'onde. Déterminer de même $\underline{s_B^+}$ et $\underline{s_B^-}$

21.En déduire l'amplitude de l'onde en tout point du guide supérieur, commenter et montrer qu'il existe une onde progressive s'y propageant, préciser son sens de propagation.

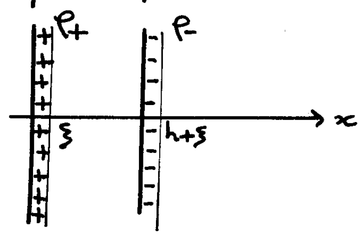
Réponses

Plasma

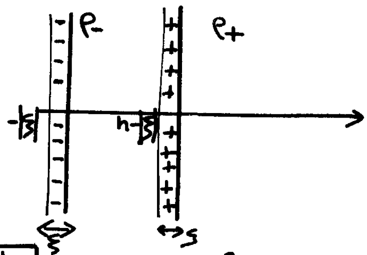
1) On isole un <u>cylindre de plasma</u> dans le plasma. (cylindre de génératrice parallèle à Ox)



$\xi > 0$



$\xi < 0$



avec $\boxed{\begin{array}{c}\rho_+ = Ne \\ \rho_- = -Ne\end{array}}$ en $C\,m^{-3}$

---

2) $\xi \ll h$ donc l'épaisseur d'une couche chargée est petite et on pourra supposer une <u>densité surfacique</u> en 0 et en h

$h \ll$ dimensions perpendiculaires à Ox du cylindre

donc les plans chargés pourront être supposés <u>infinis</u>

En $x=0$, $\sigma = \int_0^\xi \rho \, dx$ ($\sigma > 0$ si $\xi > 0$, $\sigma < 0$ si $\xi < 0$)

$$\boxed{\sigma = Ne\xi}$$

le système est donc un condensateur plan

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Ne\xi}{\varepsilon_0}\vec{u_x}}$$

(chaque plan infini est à l'origine d'un champ $\pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$)

La force subie par un électron situé entre les deux plans est

$$\overrightarrow{F} = q\,\overrightarrow{E}$$

$$= -e\,\frac{Ne\xi}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{Ne^2\xi}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_x}}$$

---

3) Pour chacun des électrons du cylindre, on peut donc écrire

$$\overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$$

$$-\frac{Ne^2\xi}{\varepsilon_0} = m\,\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_p^2\,\xi = 0}$$

L'électron oscille avec une pulsation ω_p telle que

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}}$$

---

4) $\overrightarrow{E} = E_0 \exp i(\omega t - kx)\,\overrightarrow{u_x}$

donc

$$\overrightarrow{k}\ \begin{vmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}}$$

M.F. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E} = -i\omega\overrightarrow{B}$$

$$-i\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{E} = -i\omega\overrightarrow{B}$$

donc

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{E}}{\omega}$$

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}}$$

puisque $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{E}$ sont tous deux selon $\overrightarrow{u_x}$ (onde longitudinale)

---

5) Pour un électron du plasma,

$$-e\vec{E} = m\frac{d\underline{v}}{dt}$$
$$= m\,i\,\omega\,\underline{v}$$

$$\boxed{\vec{\underline{v}} = i\frac{e}{m\omega}\vec{\underline{E}}}$$

et $\vec{j} = -Ne\vec{v}$ donc

$$\boxed{\vec{\underline{j}} = -i\frac{Ne^2}{m\omega}\vec{\underline{E}}}$$

---

6) M.A. $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$ or $\vec{B}$ est nul

$$\vec{0} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

finalement

$$\boxed{\vec{\underline{j}} = -i\omega\varepsilon_0\vec{\underline{E}}}$$

en égalant à l'expression obtenue en 5)

$$-i\frac{Ne^2}{m\omega}\vec{\underline{E}} = -i\omega\varepsilon_0\vec{\underline{E}}$$

on obtient :

$$\omega^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\omega = \omega_P} \quad \forall k.$$

---

7) $$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = \vec{0}}$$ car $\vec{B}$ est nul

L'énergie ne se propage pas dans le plasma

(en régime permanent, pour une onde longitudinale)

---

8) $$u_{e.m.}(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{nul}$$ avec $E = E_0\cos(\omega t - kx)$

$$\boxed{u_{e.m}(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - kx)}$$

$$e_c(x,t) = \frac{1}{2}mv^2 N$$

avec $\vec{\underline{v}} = i\frac{e}{m\omega}\vec{\underline{E}}$

$$v = \frac{e}{m\omega}E_0\cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{2})$$
$$= -\frac{e}{m\omega}E_0\sin(\omega t - kx)$$

$$e_c(x,t) = \frac{1}{2}\frac{m\, e^2 E_0^2}{m^2\omega_p^2}\sin^2(\omega t - kx)$$

$$\boxed{e_c(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t - kx)}$$

finalement :

$$\boxed{u_{e.m}(x,t) + e_c(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2}$$

L'énergie ne se propageant pas, elle est échangée avec les charges. Ainsi <u>$u + e_c$ = cste (indépendant de t)</u>
L'<u>échange se fait sans pertes</u>. Le champ accélère les charges et les charges rayonnent de l'énergie (cf dipôle oscillant)

---

9)

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k_0}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{k_0\, E(x,t)}{\omega}\vec{u_z}}$$

$$\boxed{\vec{B_t} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E_t}}{\omega} = \frac{k\, E_t(x,t)}{\omega}\vec{u_z}}$$

Pour l'onde réfléchie (en $\omega t + k_0 z$) on a $\vec{k'_0} = -\vec{k_0}$

$$\boxed{\vec{B_r} = \frac{-\vec{k_0}\wedge\vec{E_r}}{\omega} = \frac{-k_0\, E_r(x,t)}{\omega}\vec{u_z}}$$

---

10) relation de dispersion :

M.A. $\qquad \vec{rot}\,\vec{B}_t = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}_t}{\partial t}$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}_t = \mu_0\left(-i\frac{Ne^2}{m\omega}\vec{E}_t\right) + \frac{1}{c^2}i\omega\vec{E}_t$$

$$\underbrace{-i\vec{k}\wedge\left(\frac{\vec{k}\wedge\vec{E}_t}{\omega}\right)}_{-\frac{i}{\omega}\times -k^2\vec{E}_t} =$$

finalement

$$k^2 = -\frac{\mu_0 N e^2}{m} + \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$= \left(-\frac{\mu_0 c^2 N e^2}{m} + \omega^2\right)\frac{1}{c^2}$$

$$= \left(-\frac{\varepsilon_0 N e^2}{m} + \omega^2\right)\frac{1}{c^2}$$

on obtient $\boxed{k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)\frac{1}{c^2}}$

---

11) • si $\omega > \omega_p$ on aura

$$\boxed{k = +\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

(on choisit le signe plus, car l'onde doit se propager vers les x croissants)

• si $\omega < \omega_p$ on aura

$$\boxed{k = -i\,\frac{1}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

(on choisit le signe moins, car l'onde ne peut croître vers l'infini si $x \to \infty$

On aura alors ici pour l'onde évanescente :

$$\underline{\overrightarrow{E_t}} = \underline{E}_{0t} \;\exp i(\omega t - \underbrace{kx}_{-\frac{i}{c}\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}})\;\overrightarrow{u_y}$$

$$= \underline{E}_{0t}\;\exp\left(-\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}x\right)\;\exp(i\omega t)\;\overrightarrow{u_y}$$

---

12) On pose l'indice complexe

$$\underline{n} = \frac{k}{k_0} \qquad (\text{avec } k_0 = \frac{\omega}{c})$$

remarque

Si n est réel, on retrouve bien l'indice habituel :

$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{\omega/v_\varphi}{\omega/c} = \frac{c}{v_\varphi}$$

si $\omega > \omega_p$	$\underline{n} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$	réel
si $\omega < \omega_p$	$\underline{n} = -i\sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}$	imaginaire

---

13) La description étant volumique, il y a donc continuité des champs dans le plasma et le vide en $x=0$

le champ dans le vide est la somme du champ incident et du champ réfléchi

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{E}(0,t) + \underline{E_r}(0,t) = \underline{E_t}(0,t) \\ \underline{B}(0,t) + \underline{B_r}(0,t) = \underline{B_t}(0,t) \end{array}}$$

---

14)
$$\underline{E}(0,t) + \underline{E_r}(0,t) = \underline{E_t}(0,t)$$
$$\frac{k_0}{\omega}\underline{E}(0,t) + \frac{-k_0\underline{E_r}(0,t)}{\omega} = \frac{\underline{k}\,\underline{E_t}(0,t)}{\omega}$$

$$\underline{E}(0,t) + \underline{E_r}(0,t) = \underline{E_t}(0,t)$$
$$\underline{E}(0,t) - \underline{E_r}(0,t) = \underline{n}\,\underline{E_t}(0,t)$$

En divisant par $\underline{E}(0,t)$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \underline{n}\,\underline{t} \end{array}}$$

d'où

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{t} = \dfrac{2}{1+\underline{n}} \\[2ex] \underline{r} = \dfrac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}} \end{array}}$$

---

15)
$$\langle \vec{\Pi}_{incident} \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}_e\left(\frac{\underline{E}\,\underline{B}^*}{\mu_0}\right)\vec{u_x}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{R}_e\left(\frac{\underline{E}\,k_0\underline{E}^*}{\mu_0\omega}\right)\vec{u_x}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{k_0}{\mu_0\omega}E_0^2\,\vec{u_x} \qquad \text{avec } k_0 = \frac{\omega}{c}$$
$$\text{et } \varepsilon_0 c = \frac{1}{\mu_0 c}$$

$$\boxed{\langle \vec{\Pi}_{incident} \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\,\vec{u_x}}$$

$$\langle \vec{\Pi}_{réfléchi} \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{R}_e\left(\frac{\underline{E_r}\,\underline{B_r}^*}{\mu_0}\right)\vec{u_x}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{R}_e\left(\frac{\underline{E_r}}{\mu_0}\times\frac{-k_0}{\omega}\underline{E_r}^*\right)\vec{u_x}$$
$$= -\frac{1}{2}\mathcal{R}_e\left(\varepsilon_0 c\,\underline{r}\,\underline{r}^* E_0^2\right)\vec{u_x}$$

$$\boxed{\langle \vec{\Pi}_{réfléchi} \rangle = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\,|\underline{r}|^2\,\vec{u_x}}$$

$$\langle \overrightarrow{\Pi}_{transmis} \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}_e \left(\frac{\underline{E}_t \, \underline{B}_t^*}{\mu_0} \right) \overrightarrow{u_x}$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{R}_e \left(\frac{\underline{E}_t}{\mu_0} \frac{\underline{k}^*}{\omega} \underline{E}_t^* \right) \overrightarrow{u_x}$$

avec $\underline{k} = \underline{n} \, k_0$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{R}_e \left(\underline{n}^* \varepsilon_0 c \, \underline{t} \, \underline{t}^* E_0^2 \right) \overrightarrow{u_x}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \, |\underline{t}|^2 \, \mathcal{R}_e(\underline{n}^*) \overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\langle \overrightarrow{\Pi}_{transmis} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \, |\underline{t}|^2 \, \mathcal{R}_e(\underline{n}) \overrightarrow{u_x}}$$

---

16)

$$R = \frac{|\overrightarrow{\Pi}_{réfléchi}|_{x=0}}{|\overrightarrow{\Pi}_{incident}|_{x=0}}$$

$$\boxed{R = |\underline{r}|^2}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{\Pi}_{transmis}|_{x=0}}{|\overrightarrow{\Pi}_{incident}|_{x=0}}$$

$$\boxed{T = |\underline{t}|^2 \, \mathcal{R}_e(\underline{n})}$$

---

17) $\omega < \omega_p$ $\quad \underline{n}$ est imaginaire (cf onde évanescente dans le plasma)

- $\mathcal{R}_e(\underline{n}) = 0$
- $\underline{r} = \dfrac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}}$ a donc une norme égale à 1

d'où

$$\boxed{\begin{array}{l} R = 1 \\ T = 0 \end{array}}$$

Toute l'énergie est réfléchie (en régime permanent)

---

18) $\omega > \omega_p$ $\quad n$ est réel

d'où

$$\boxed{\begin{array}{l} R = \left(\dfrac{1-n}{1+n} \right)^2 \\ T = \left(\dfrac{2}{1+n} \right)^2 n \end{array}}$$

$$R + T = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+n}\right)^2 n$$

$$\boxed{R + T = 1}$$

ce qui exprime la conservation de l'énergie.
(l'énergie incidente est soit réfléchie, soit transmise)

---

19) si $\omega_p = 0$

on a $\underline{n} = 1$

donc $\boxed{\begin{array}{l} R = 0 \\ T = 1 \end{array}}$

(pas de réflexion, l'interface est virtuelle et sépare le vide du vide)

Cycle à trois transformations

1) $R = \frac{PV}{nT}$

$\boxed{R \text{ en } J\ mol^{-1}\ K^{-1}}$

---

2) $\left.\begin{array}{l} C_{P,m} - C_{V,m} = R \\ C_{P,m} \,/\, C_{V,m} = \gamma \end{array}\right\}$

d'où

$$\boxed{\begin{array}{l} C_{V,m} = \frac{R}{\gamma-1} \\ C_{P,m} = \frac{R\gamma}{\gamma-1} \end{array}}$$

---

3) $\underbrace{dH}_{n C_{P,m}\, dT} = T\, dS + V\, dP$

(on peut aussi travailler avec dU, mais si on choisit la variable P au lieu de V, c'est plus rapide avec H)

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dH}{T} - \frac{V\,dP}{T} \\ &= n C_{P,m} \frac{dT}{T} - \frac{V\,dP}{T} \\ &= \frac{n\, R\, \gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} \end{aligned}$$

---

4) $dS = n\frac{R}{\gamma-1}\left(\gamma \frac{dT}{T} - (\gamma-1) \frac{dP}{P} \right)$

$dS = n\frac{R}{\gamma-1}\left(d \ln T^{\gamma} - d \ln P^{\gamma-1} \right)$

$$\boxed{S = n\frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} + S_0}$$

S fait intervenir $\ln \frac{T^{\gamma}}{P^{\alpha}}$ avec $\alpha = \gamma - 1$

---

5) Pour une transformation isentropique $S = \text{cste}$

donc $\boxed{\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \text{constante}}$

---

6) Transformation polytropique $PV^a =$ constante

- pour une transformation isotherme $PV = nRT$

$$\underline{PV = cste \quad P_0 V_0}$$

$$\boxed{a = 1}$$

- pour une transformation isentropique $\dfrac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = cste$

or $T = \dfrac{PV}{nR}$

$$\frac{P^\gamma V^\gamma}{P^{\gamma-1}} = cste$$

$$\underline{PV^\gamma = cste \quad P_0 V_0^\gamma}$$

$$\boxed{a = \gamma}$$

- pour une transformation isobare $P \underbrace{V^0}_{1} = cste$

$$\boxed{a = 0}$$

- pour une transformation isochore, en partant plutôt de

$$P^{1/a} V = cste \quad P_0^{1/a} V_0$$

$$\underbrace{P^0}_{1} V = cste$$

$$\boxed{a \to \infty}$$

---

7) La pente de la courbe dans le diagramme PV est $\dfrac{dP}{dV}$

or $PV^a = cste$

$$\ln P + a \ln V = cste$$

$$\frac{dP}{P} + a\frac{dV}{V} = 0 \qquad \boxed{\left(\frac{dP}{dV}\right) = -a\frac{P}{V}}$$

---

8) En un point (P, V)

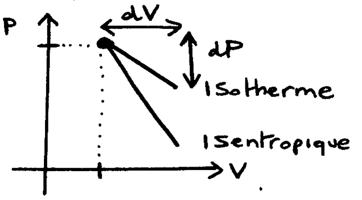
- la pente de l'isotherme $(a=1)$ est : $\left(\dfrac{dP}{dV}\right)_T = -\dfrac{P}{V}$ (<0)
- la pente de l'isentropique $(a=\gamma)$ est : $\left(\dfrac{dP}{dV}\right)_S = -\gamma\dfrac{P}{V}$ (<0)

donc $\left(\dfrac{dP}{dV}\right)_S = \gamma \left(\dfrac{dP}{dV}\right)_T$

Si on compare les valeurs absolues :

$$\boxed{\left|\left(\frac{dP}{dV}\right)_S\right| > \left|\left(\frac{dP}{dV}\right)_T\right|}$$

l'isentropique est plus inclinée que l'isotherme

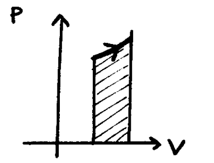


(elle décroit plus rapidement)

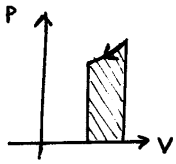
C'est donc le schéma 1 qui est correct.

---

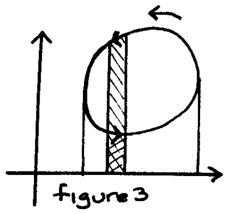
9) rappel



aire : $PdV > 0$



aire : $PdV < 0$



L'aire négative est en valeur absolue supérieure à l'aire positive donc $\oint PdV < 0$

Figure 3 :	$\oint PdV < 0$
Figure 4 :	$\oint PdV > 0$

---

10) Pour un cycle moteur, le travail fourni est positif donc le travail reçu par le système est négatif

$$\boxed{W < 0}$$

$$-\oint PdV < 0$$

$$\oint PdV > 0$$

C'est donc le cycle 4 qui est moteur (décrit dans le sens horaire)

---

11) en utilisant le résultat de 8)

AB	isentropique
BC	isotherme
CA	isobare

AB	compression
BC	détente
CA	refroidissement

(la pression augmente)
(la pression diminue)
(la pression n'est pas modifiée, le volume donc la température baisse)

---

12) Pendant la détente isotherme BC, le gaz reste au contact de la source T_C auquel il prend de la "chaleur".
Pour refroidir le gaz de C à A (refroidissement isobare) il faut donc $\boxed{\text{une source froide de température } T_F \leq T_A}$

Le résultat (nécessité d'au moins une deuxième source) était prévisible.
En effet le cycle envisagé est moteur (cf 10))
D'après l'énoncé de Lord Kelvin, on sait que :
$\boxed{\text{Un cycle monotherme ne peut pas fournir du travail.}}$
donc il faut ici une seconde source au minimum.

---

13) AB isentropique : pas d'échange de chaleur

BC détente isotherme

$\boxed{\begin{array}{l}\text{contact avec la source } T_C = T_B \\ \text{Le système reçoit de l'énergie thermique } Q_C > 0\end{array}}$

(cf détente :

donc $W < 0$
or $\Delta U = W + Q$
$= 0$ si T est constant
d'où $Q_C > 0$)

CA refroidissement isobare

$\boxed{\begin{array}{l}\text{contact avec la source } T_A \\ \text{Le système fournit de l'énergie thermique } Q_F < 0\end{array}}$

(cf $V_A < V_C$ et $P_A = P_C$
donc $T_A < T_C$
or $\Delta H = Q_P$
$= n C_{P,m} (T_A - T_C)$
< 0
d'où $Q_F < 0$

---

14)

$\Delta U = n\, C_{v,m}\ (T_2 - T_1) = \boxed{n \frac{R}{\gamma - 1}\ (T_2 - T_1) = \Delta U}$

$\Delta H = n\, C_{p,m}\ (T_2 - T_1) = \boxed{n \frac{R\gamma}{\gamma - 1}\ (T_2 - T_1) = \Delta H}$

Pour trouver ΔS, on imagine une transfo réversible à P constant pour simplifier

$dH = T\,dS + V\,\cancel{dP}$

$dS = n\, C_{p,m}\ \frac{dT}{T}$

$\Delta S = n\, C_{p,m} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \boxed{n \frac{R\gamma}{\gamma - 1}\ \ln \frac{T_2}{T_1} = \Delta S}$

---

15) La transformation n'est $\boxed{\text{pas réversible.}}$
Elle fait intervenir des <u>échanges thermiques irréversibles</u>, puisque $T_{ext} (= T_2)$ est <u>différent de la température</u> initiale $T_{système}$ $(= T_1)$

$S_{échange} = \int_{transfo} \frac{\delta Q}{T_{Frontière}}$ ← constante T_2

$= \frac{Q}{T_2}$

or, à P constant, $Q = \Delta H$

$S_{échange} = n \frac{R\gamma}{\gamma - 1}\ \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$

$S_{créé} = \Delta S - S_{échange}$

$$\boxed{S_{créé} = \frac{n R \gamma}{\gamma - 1}\ \left(\ln \frac{T_2}{T_1} - 1 - \frac{1}{(T_2/T_1)}\right)}$$

A.N. $S_{créé} = 0{,}2\ J\,K^{-1}$

---

16) En considérant l'isentropique cf. 5) et avec $T_B = T_C$

$T^{\gamma}\, P^{1-\gamma} = cste$

$T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\, P = cste$

$$\boxed{\frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{T_C}{T_A}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

---

17) et 18) Pour un cycle ΔU, ΔH, ΔS sont nuls

	ΔU	ΔH	ΔS	W	Q
AB	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_C-T_A)$	$\frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_C-T_A)$	0 (isentropique)	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_C-T_A)$ (cf ΔU)	0 (isentropique)
BC	0 (isotherme)	0 (isotherme)	$\frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_C}{T_A}$	$-\frac{nR\gamma}{\gamma-1}T_C\ln\frac{T_C}{T_A}$ (cf $-Q$)	$\frac{nR\gamma}{\gamma-1}T_C\ln\frac{T_C}{T_A}$ (cf $T_C\,\Delta S$)
CA	$-\frac{nR}{\gamma-1}(T_C-T_A)$	$-\frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_C-T_A)$	$-\frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_C}{T_A}$	$nR\,(T_C-T_A)$ (cf $\Delta U-\Delta H$)	$-\frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_C-T_A)$ (cf ΔH)
cycle total	0	0	0	W_{cycle}	Q_{cycle}

(la transformation isobare a été étudiée de 14) à 16))

18)
$$\boxed{W_{cycle} = -\frac{nR\gamma}{\gamma-1}\left(T_C\ln\frac{T_C}{T_A} - (T_C-T_A)\right)}$$

$$\boxed{Q_{cycle} = + \quad \text{idem}} \quad (\text{cf } \Delta U_{cycle}=0)$$

$$\boxed{Q_{chaud} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\,T_C\ln\frac{T_C}{T_A}}$$

$$\boxed{Q_{froid} = -\frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_C-T_A)}$$

19)
$$\boxed{\eta = \frac{(-W_{cycle})}{Q_{chaud}}}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\left(1-\frac{T_A}{T_C}\right)}{\ln\frac{T_C}{T_A}}}$$

20)
$$\Delta S_{cycle} = S_{échange} + S_{créé}$$

$$0 = \frac{Q_{chaud}}{T_C} + \frac{Q_{froid}}{T_A} + S_{créé}$$

$$S_{créé} = -\frac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\frac{T_C}{T_A} + \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\frac{(T_C-T_A)}{T_A}$$

$$\boxed{S_{créé} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\left(-\ln\frac{T_C}{T_A} - 1 + \frac{T_C}{T_A}\right)}$$

On trouve (c'est prévisible) le résultat établi en 15)

avec $T_2 = T_A$
$T_1 = T_C$

Cette création d'entropie a eu lieu au cours du refroidissement isobare de T_C à T_A au contact de la source T_A

---

21) Pour un moteur réversible :

$$\left.\begin{aligned} W + Q_C + Q_F &= 0 \\ \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_A} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \eta = \frac{-W}{Q_C} \quad (W \text{ travail reçu} < 0)$$

$$= 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$$

$$\boxed{\eta_{MAX} = 1 - \frac{T_A}{T_C}}$$

---

22) A partir de la quantité Q_C vu en 18), ce moteur idéal fournirait : $(W_{reçu} = -W_{fourni})$.

$$(W_{rev}) = \eta_{MAX}\, Q_C$$

$$= \left(1 - \frac{T_A}{T_C}\right) \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\, T_C \ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right)$$

$$\boxed{(W_{rev}) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\,(T_C - T_A)\ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right)}$$

Pour le même Q_C, le moteur étudié fournissait

$$\boxed{(W_{irrev}) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\left(T_C \ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right) - (T_C - T_A)\right)}$$

---

23) on peut s'attendre à ce que le fonctionnement irréversible soit moins intéressant, soit :

$$(W_{rev}) - (W_{irrev}) > 0$$

On vérifie

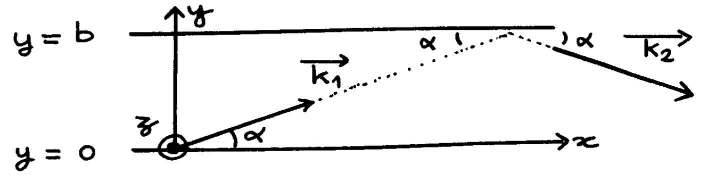
$$(W_{rev}) - (W_{irrev}) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\left(-T_A \ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right) + T_C - T_A\right)$$

$$= T_A \frac{nR\gamma}{\gamma-1}\left(-\ln\left(\frac{T_C}{T_A}\right) + \frac{T_C}{T_A} - 1\right)$$

$$\boxed{(W_{rev}) - (W_{irrev}) = T_A\, S_{créé}}$$

Plus le fonctionnement est irréversible, moins le travail fourni est important.

Guides d'ondes



(l'angle d'incidence est $\frac{\pi}{2}-\alpha$)

1) Si on envisage une OPPM : $\vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kx)\,\vec{u_z}$, ce champ sera <u>tangentiel</u> aux deux plans métalliques parfaits $y=0$ et $y=b$. Pour respecter les conditions de continuité, il <u>doit s'annuler en $y=0$ et $y=b$</u>, ce qui n'est pas le cas avec E_0 indépendant de y.

---

2) On a : $\boxed{\vec{k_1} = k_0 \cos\alpha\ \vec{u_x} + k_0 \sin\alpha\ \vec{u_y}}$ en posant $\boxed{k_0 = \frac{\omega}{c}}$ et <u>le champ incident</u> est :

$$\underline{\vec{E_1}} = E_0 \exp i(\omega t - \vec{k_1}\,\vec{OM})\,\vec{u_z}$$

$$\boxed{\underline{\vec{E_1}} = E_0 \exp i(\omega t - k_0\cos\alpha\ x - k_0 \sin\alpha\ y)\,\vec{u_z}}$$

Pour l'onde réfléchie, en utilisant les lois de Descartes, on a : $\boxed{\vec{k_2} = k_0 \cos\alpha\ \vec{u_x} - k_0 \sin\alpha\ \vec{u_y}}$

on désigne par $\underline{E'_0}$ une amplitude complexe, à déterminer,

$$\boxed{\underline{\vec{E_2}} = \underline{E'_0} \exp i(\omega t - k_0\cos\alpha\ x + k_0 \sin\alpha\ y)\,\vec{u_z}}$$

---

3) En considérant uniquement <u>ces deux ondes</u> (cf cours) on peut trouver la solution au problème. Il faut que les conditions aux limites soient vérifiées

$$\underline{\vec{E}} = \exp i(\omega t - k_0 \cos\alpha\ x)\left[E_0 \exp(-i k_0 \sin\alpha\ y) + \underline{E'_0} \exp(+i k_0 \sin\alpha\ y)\right]\vec{u_z}$$

$\longrightarrow$ <u>doit être nul en $y=0$</u>

$$\vec{0} = \exp i(\omega t - k_0 \cos\alpha\ x)\left[E_0 + \underline{E'_0}\right]\vec{u_z}$$

on trouve $\boxed{\underline{E'_0} = -E_0}$

(déphasage de π à la réflexion)

$$\boxed{\vec{E} = -2i\,E_0 \sin(k_0 \sin\alpha\, y)\ \exp i(\omega t - k_0 \cos\alpha\, x)\ \vec{u_z}}$$

→ doit être nul en $y = b$

$$\sin(k_0 \sin\alpha\, b) = 0$$

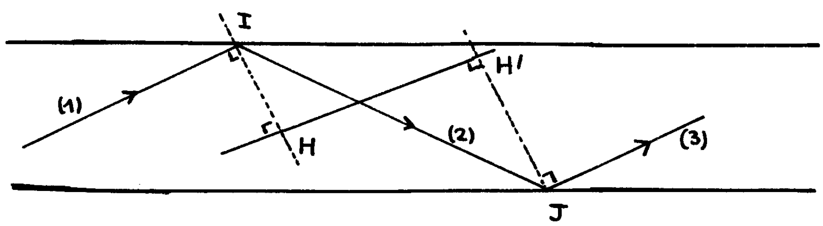
$$k_0 \sin\alpha\, b = p\pi \qquad (p \in \mathbb{N}^*)$$

$$\boxed{\sin\alpha = p\frac{\lambda_0}{2b}}$$

(p tel que $0 < \sin\alpha < 1$ $\boxed{0 < p < \frac{2b}{\lambda_0}}$)

remarques

- L'onde 2 se réfléchit à son tour pour donner 3... 4...
- On peut donc se convaincre que si 1+2 est solution, il en est de même pour 3+4 ou même pour 2+3
- Une autre approche était possible en disant que 1 et 3 doivent être en phase



on écrirait que le déphasage IJ (avec les deux réflexions) est identique au déphasage HH'.
on trouverait la même relation.

4) $$\boxed{\vec{E} = 2E_0 \sin\left(\frac{\omega}{c}\sin\alpha\, y\right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\cos\alpha\, x\right) \vec{u_z}}$$

Ce champ est solution des équations de Maxwell dans le vide puisqu'il est la somme de 2 OPPM solutions.

L'onde se propage dans le sens des x croissants avec $\boxed{\underset{(k\,guide)}{k_g} = k_o \cos\alpha}$

---

5) On a

$$\sin\alpha = \frac{p}{2b}\frac{c}{f}$$

$$f = p\,\frac{c}{2b\sin\alpha}$$

$$f > p\,\frac{c}{2b}$$

Il n'y a pas de propagation possible si $f < \frac{c}{2b}$

$$\boxed{f_c = \frac{c}{2b}}$$

A.N. propagation si $b > p\,\frac{c}{2f}$

mode 1 $\underline{b > 6\text{ cm}}$

---

6) <u>Relation de dispersion</u> (relation entre k_g et ω)

$$k_o^2 = (k_o \sin\alpha)^2 + (k_o\cos\alpha)^2$$

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2 + k_g^2}$$

---

7) On différencie la relation de dispersion

$$\frac{2\omega\, d\omega}{c^2} = \text{—} + 2\,k_g\, dk_g$$

$$\left(\frac{\omega}{k_g}\right)\left(\frac{d\omega}{dk_g}\right) = c^2$$

$$\boxed{v_\varphi\; v_G = c^2}$$

avec

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_o\cos\alpha}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-\left(p\frac{\lambda_o}{2b}\right)^2}}$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1-\left(p\frac{f_c}{f}\right)^2}}}$$

et en utilisant $v_\varphi v_G = c^2$

$$\boxed{v_G = c\sqrt{1-\left(p\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

La valeur la plus grande est pour p_{MIN} $(p=1)$

On a alors $\sin\alpha = p\frac{f_c}{f} = \frac{f_c}{f}$

A.N. $f_c = 2{,}27\ 10^9\ Hz$

$f = 2{,}5\ 10^9\ Hz$

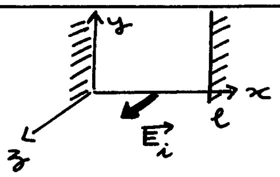
$\sin\alpha = 0{,}909$

$$\boxed{\alpha = 65{,}4°}$$

---

8) Le champ est <u>normal</u> aux plans $z=0$ et $z=a$. Il peut donc y avoir <u>discontinuité</u> qui sera cause d'<u>apparition de σ</u> sur chacun de ces plans.

---

9) 

Le champ $\vec{E_i}$ en $x=0$ et en $x=l$ est <u>tangent</u> aux deux nouveaux plans conducteurs. Or <u>il ne s'annule pas</u>.
Il faut donc imaginer un champ réfléchi.

$$\vec{E_i} = \underbrace{\underline{E}_o(y)}_{-2i E_o \sin(k_o \sin\alpha\, y)} \quad \exp i(\omega t - \underbrace{k_g}_{k_o\cos\alpha} x)\ \vec{u_z}$$

$$\vec{E_r} = \underline{K}\ \underline{E}_o(y) \quad \exp i(\omega t + k_g x)\ \vec{u_z}$$

(se propage dans le sens des x décroissants)

$$\vec{E}_{total} = \underline{E}_o(y)\ \exp i\omega t \quad (\exp -ik_g x + \underline{K}\ \exp +ik_g x)\ \vec{u_z}$$

<u>qui doit s'annuler en $x=0$</u>

donc $1 + \underline{K} = 0$

$\boxed{\underline{K} = -1}$ (cf opposition de phase pour l'onde réfléchie)

$$\boxed{\vec{E}_{total} = -2i\ \underline{E}_o(y)\ \exp(i\omega t)\quad \sin(k_g x)\ \vec{u_z}}$$

qui doit s'annuler en $x = \ell$

$$\sin(k_g \ell) = 0$$

$$\boxed{k_g \ell = m\pi} \qquad m \in \mathbb{N}^*$$

---

10) La relation de dispersion 5) devient alors :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2$$

$$\boxed{\omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{p}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{\ell}\right)^2}}$$

---

11) Le champ total devient :

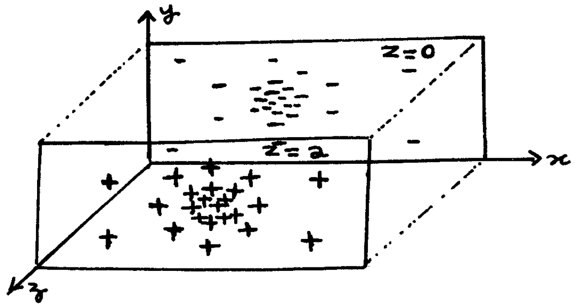
$$\vec{E} = -2i\left(-2i\, E_0 \sin \frac{p\pi}{b} y\right) \exp(i\omega t) \sin \frac{m\pi}{\ell} x \ \vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{E} = \underbrace{-4E_0}_{\text{noté } E_c} \sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) \exp(i\omega t)\ \vec{u_z}}$$

---

12) $\vec{E} = \underbrace{-4E_0}_{E_c} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \exp(i\omega t)\ \vec{u_z}$

Le champ est normal aux deux faces $z=0$ et $z=a$ (et s'annule au niveau des autres faces). Il apparait donc de la charge sur ces deux faces selon la loi $\vec{E}_{\substack{\text{vide}\\ \text{voisinage}}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{\substack{\text{ext}\\ \text{métal}}}$



dessin en supposant $E_0 > 0$ en $t=0$

en $z=0$ $\quad \vec{n}_{ext} = \vec{u_z}$

$$\sigma_{z=0} = -4E_0\varepsilon_0 \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{\pi x}{\ell} \underbrace{\cos\omega t}_{+1}$$

en $z=a$ $\quad \vec{n}_{ext} = -\vec{u_z}$

$$\sigma_{z=a} = 4E_0\varepsilon_0 \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{\pi x}{\ell} \underbrace{\cos\omega t}_{+1}$$

---

13) Pour trouver $\vec{B}$ on part de $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \times \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{vmatrix} = -i\omega \vec{B}$$

$$\boxed{\begin{aligned} B_x &= i\frac{E_c}{\omega}\frac{\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\exp(i\omega t) \\ B_y &= -\frac{iE_c}{\omega}\frac{\pi}{\ell}\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\exp(i\omega t) \end{aligned}}$$

- Pour les faces $x=0$ et $x=\ell$, existence d'un B_y non nul tangentiel donc existence de courants.
- Pour les faces $y=0$ et $y=b$, existence d'un B_x non nul tangentiel donc existence de courants
- Pour les faces $z=0$ et $z=a$, existence de B_x et B_y tangentiels donc courants

$\boxed{\text{Des courants existent sur chaque face.}}$

---

14) L'énergie électrique volumique est :

$$w_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_c^2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\cos^2(\omega t)$$

L'énergie électrique dans la cavité est :

$$W_E = \left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_c^2 \int_{x=0}^{\ell}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{a} \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx\,dy\,dz\right]\cos^2\omega t$$

On peut éviter le calcul de l'intégrale en considérant la valeur moyenne de w_E dans l'espace soit $\overline{w_E}$

$$\overline{w_E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_c^2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \cos^2\omega t$$
$$= \frac{1}{8}\varepsilon_0 E_c^2 \cos^2\omega t$$

$$W_E = \overline{w_E}\,V \qquad (\text{avec } V : \text{volume de la cavité} = ab\ell)$$

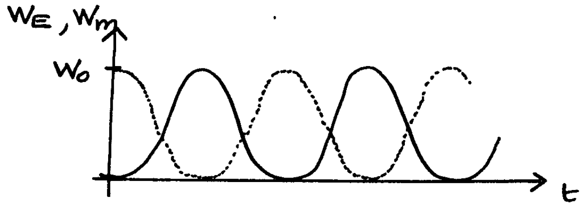
$$\boxed{W_E = \frac{1}{8}\varepsilon_0 E_c^2 V \cos^2\omega t}$$

De même, en déterminant $\overline{w_m}$

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$
$$= \frac{1}{2\mu_0}\left(B_x^2 + B_y^2\right)$$

$$\overline{W_m} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\overline{B_x^2} + \overline{B_y^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E_c^2}{\omega^2}\frac{\pi^2}{b^2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin^2\omega t + \frac{E_c^2}{\omega^2}\frac{\pi^2}{\ell^2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin^2\omega t\right)$$
$$= \frac{1}{8\mu_0}\frac{E_c^2}{\omega^2}\underbrace{\left(\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{\ell^2}\right)}_{\frac{\omega^2}{c^2}\ \text{(cf. dispersion)}}\sin^2\omega t$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{8}\varepsilon_0 E_c^2 V \sin^2\omega t}$$



$$W_{totale} = W_0\cos^2\omega t + W_0\sin^2\omega t$$

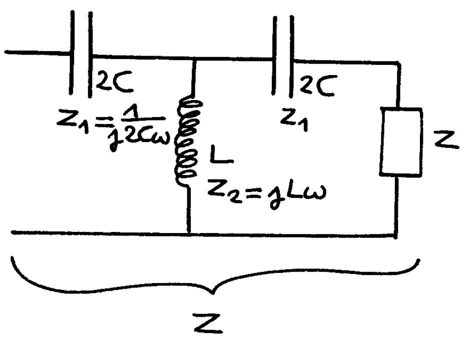
$$\boxed{W = W_0 = cte}$$

L'énergie est constante (pas de dissipation car les parois sont parfaites). Elle oscille entre énergie électrique et énergie magnétique.
Dans un circuit LC (sans résistance) on a le même type de phénomène.

---

15) (On s'intéresse à l'exercice classique de calcul de l'impédance itérative ou impédance caractéristique)

Si Z est l'impédance de la ligne infinie, on remarque qu'après la première cellule, on retrouve une ligne infinie d'impédance Z donc :



$$Z = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1 + Z}}$$
$$= Z_1 + \frac{Z_2(Z_1+Z)}{Z+Z_1+Z_2}$$

ce qui donne

$$\boxed{Z^2 = Z_1^2 + 2Z_1Z_2}$$

$$Z^2 = -\frac{1}{4C^2\omega^2} + \frac{L}{C}$$

on définit une pulsation critique $\boxed{\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}}}$

d'où $\boxed{Z^2 = \frac{L}{C}\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)}$

• si $\omega > \omega_c$ Z est réel avec $Z = \pm\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$

Le signe négatif indiquerait que cette ligne infinie se comporte comme une résistance négative et fournit de l'énergie. Ce qui, ici, n'a pas de sens physique. On choisit le signe +

$$\boxed{Z = +\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

• si $\omega < \omega_c$ Z est imaginaire avec $Z = \pm j\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2}-1}$

On peut faire $\omega \to 0$ pour choisir le signe, les bobines tendent vers des court-circuits et l'impédance tend vers celle du premier condensateur soit $\frac{1}{j2C\omega} = -j\frac{1}{2C\omega}$. Il faut donc choisir le signe moins.

$$\boxed{Z = -j\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2}-1}}$$

---

16) • $\omega > \omega_c$ L'énergie est absorbée par la ligne de façon continue. Ceci peut sembler étonnant alors que tous les éléments sont réactifs (L et C). En fait la source fournit l'énergie à la première cellule, puis à la seconde ... etc et le nombre de cellules est infini.

• $\omega < \omega_c$ La ligne est capacitive et n'absorbe pas d'énergie. La ligne ne passe pas les basses fréquences. (La tension aux bornes de chaque cellule est de plus en plus petite. Elle s'évanouit avec la distance)

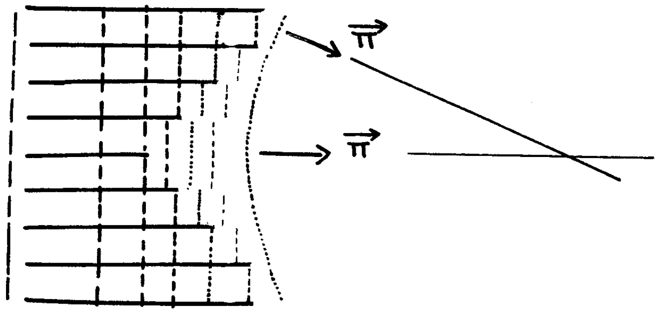
On retrouve un système analogue au guide d'ondes
- grande fréquence : l'énergie entre
- petite fréquence : l'énergie n'entre pas.

---

17) $n = \dfrac{c}{v_\varphi}$

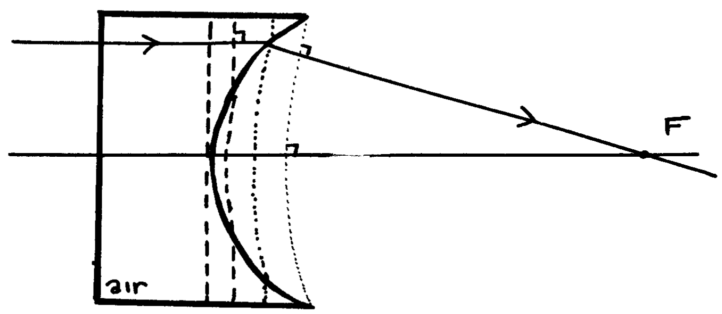
$$\boxed{n = \sqrt{1-\left(p\frac{f_c}{f}\right)^2} < 1}$$

18) Dans un guide d'ondes la vitesse de phase est plus grande que dans le vide donc plus le trajet dans un guide est important, plus l'onde prend de l'avance par rapport au trajet dans le vide.



surfaces d'onde (équiphases)

on aurait le même phénomène pour une lentille d'air au sein d'un bloc de verre



verre

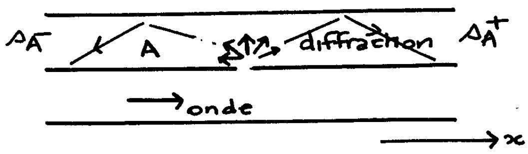
Les surfaces équiphases se déforment au cours de la traversée. Or les "rayons" (trajectoires de l'énergie) sont perpendiculaires aux surfaces équiphases (cf théorème de MALUS en optique géométrique qui traduit que le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est perpendiculaire aux surfaces d'ondes pour des ondes quasiplanes)

Les dispositifs envisagés sont alors <u>convergents</u>.
(au lieu d'une lentille plan convexe d'indice $n>1$, on a considéré une <u>lentille plan concave d'indice 1 dans un milieu d'indice $n>1$</u> par analogie au <u>dispositif à guides d'ondes d'indice $n<1$ dans un milieu d'indice 1 plus grand</u>)

Toute cette analyse basée sur des <u>déphasages</u> et des <u>indices</u> est bien cohérente avec <u>la définition de l'indice basée sur la vitesse de phase</u>

---

19)



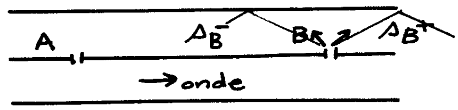
Par le trou A de faible dimension, il y aura phénomène de <u>diffraction</u>.
Si le guide est <u>monomode</u>, par suite de réflexions seul le mode concerné sera sélectionné.
On aura alors dans le sens positif ($\underline{k = k_g}$) et dans le sens négatif

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\Delta}^+_{A\,(M)} &= \Delta_0\, e^{i(\omega t - kx)}\\ \underline{\Delta}^-_{A\,(M)} &= \Delta_0\, e^{i(\omega t + kx)}\end{aligned}}$$

(remarque : <u>Δ_0 dépend aussi de y</u> mais on néglige cette dépendance ici cf $k_g = k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

---

20)



→ En A, l'onde dans le guide inférieur est en $\exp i(\omega t - \varphi_A)$
En B, l'onde dans le guide inférieur est en $\exp i(\omega t - \varphi_B)$
donc déphasée de $\vec{k}\cdot\vec{AB}$ soit en $\exp i(\omega t - \varphi_A - \underbrace{k\frac{\lambda}{4}}_{\pi/2})$

On a fait en 19) $\varphi_A = 0$ et $\vec{AM} = x\,\vec{u_x}$

→ dans le guide supérieur, les ondes diffractées par B sont

donc $s_{B(M)}^{+} = s_0 \, e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2} - \vec{k}_+ \cdot \vec{BM})}$

$= s_0 \, e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2} - k(x - \frac{\lambda}{4}))}$

$$\boxed{s_B^{+} = s_0 \, e^{i(\omega t - kx)}}$$

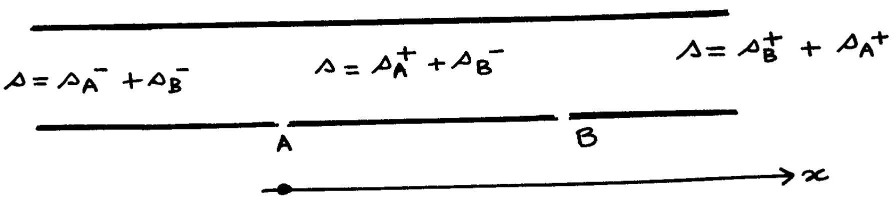
et $s_{B(M)}^{-} = s_0 \, e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2} - \vec{k}_- \cdot \vec{BM})}$

$= s_0 \, e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2} + k(x - \frac{\lambda}{4}))}$

$$\boxed{s_B^{-} = - s_0 \, e^{i(\omega t + kx)}}$$

---

21) dans le guide supérieur



donc pour $x < 0$: $s = 0$

pour $0 < x < x_B$: $s = -2 \, s_0 \sin(kx) \, e^{i(\omega t)}$

pour $\boxed{x > x_B \; : \; s = 2 \, s_0 \, e^{i(\omega t - kx)}}$

c'est à dire, une onde progressant dans le sens des x croissants.
