

# ***DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ***

**calculatrice: autorisée**

**durée: 4 heures**

## **Sujet**

<u>Réseau par réflexion</u> .....	2
I. <u>Diffraction par un miroir</u> .....	2
II. <u>Diffraction par deux miroirs</u> .....	4
III. <u>Réseau plan par réflexion</u> .....	4
IV. <u>Pouvoir séparateur du réseau plan par réflexion</u> .....	6
V. <u>Réseau à échelle</u> .....	7
<u>Le chlore et ses dérivés</u> .....	8
I. <u>Oxydoréduction</u> .....	8
A. <u>Solubilité</u> .....	8
B. <u>Lecture du diagramme <math>E = f(\text{pH})</math></u> .....	8
II. <u>L'eau de Javel</u> .....	8
<u>Défibrillateur</u> .....	11
I. <u>Charge d'un condensateur</u> .....	11
II. <u>Décharge de la batterie de condensateurs du défibrillateur</u> .....	11
III. <u>Défibrillateur automatique avec détection du rythme cardiaque</u> .....	12

# Réseau par réflexion

## Remarques:

On travaillera en  $\exp(+j\omega t)$  pour écrire les ondes.

L'indice de l'air est confondu avec celui du vide

## I. Diffraction par un miroir

Les figures 1 et 2 précisent les caractéristiques géométriques d'un miroir rectangulaire plan de centre A. Sa longueur  $L$  est suffisamment élevée et il n'est pas nécessaire de tenir compte de la diffraction dans la direction correspondante. Le miroir est éclairé sous l'incidence  $i$  positive dans le plan XY par un faisceau de lumière parallèle, et on s'intéresse à la figure de diffraction à l'infini dans la direction de l'angle  $i'$ .

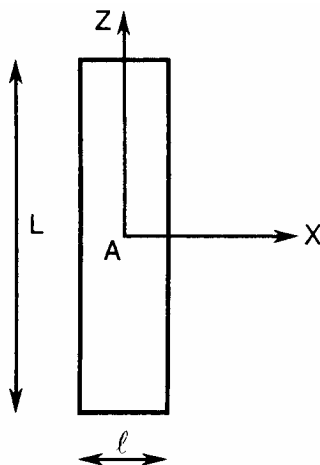


figure 1

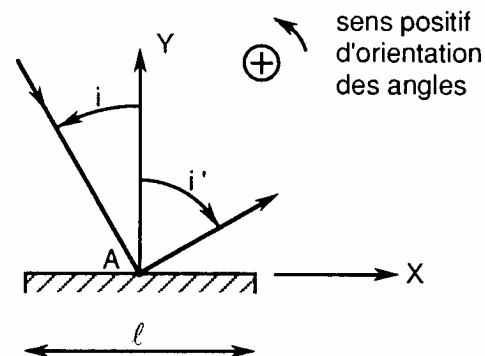


figure 2

1. En lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide, établir l'expression de la différence de marche optique entre les deux ondes qui interfèrent à l'infini dans la direction quelconque  $i'$ , l'une étant diffractée au point A et servant de référence, l'autre étant diffractée au point M de coordonnée  $X$  (on remarquera que, sur la figure proposée, l'angle  $i'$  est négatif).
2. En déduire l'intensité  $I$  diffractée par le miroir à l'infini dans la direction  $i'$ , en fonction de  $\ell$ ,  $i$ ,  $i'$  et  $\lambda$  en notant  $I_0$  l'intensité maximale. On posera  $I = I_0 \times D(i')$  avec  $D(i')$  fonction de  $i'$ . Vérifier que cette fonction s'écrit sous la forme  $\left(\frac{\sin \Phi}{\Phi}\right)^2$  et préciser l'expression de  $\Phi$ .

3. On rappelle figure 3 les caractéristiques de la fonction  $\left(\frac{\sin \Phi}{\Phi}\right)^2$ . Que peut-on dire de la direction  $i'$  correspondant au maximum d'intensité diffractée? Commenter.
4. En se contentant d'une valeur approchée simple, calculer l'intensité relative des deux premiers maxima secondaires par rapport à l'intensité du maximum principal.

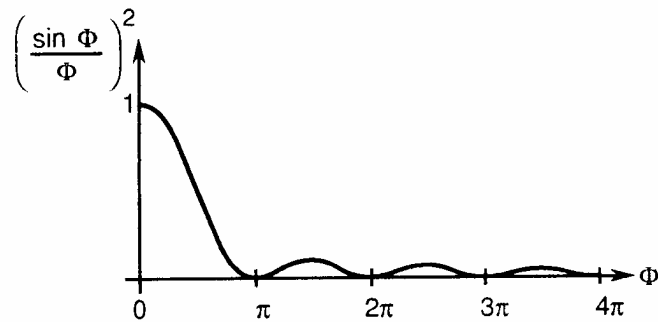


figure 3

On réalise le montage de la figure 4. L est la source lumineuse placée contre un obstacle opaque percé d'un petit trou circulaire S. L1 et L2 sont deux lentilles convergentes, perpendiculaires entre elles. S est au foyer objet de L1, et un écran plan xOz est situé dans le plan focal image de L2. Une lame  $\Sigma$  semi-transparente, semi-réfléchissante, est placée à  $45^\circ$  de L1 et L2. Éclairée par un faisceau de lumière, elle donne naissance à la fois à un faisceau réfléchi et à un faisceau transmis. Le miroir diffractant étudié précédemment est parallèle à la lentille convergente L2 de focale  $f'$ .

Pour les trois questions qui suivent les angles sont « petits ».

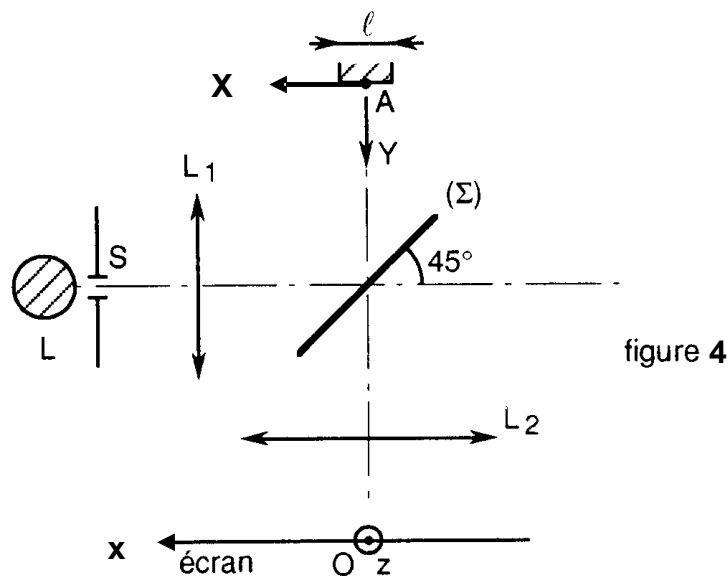


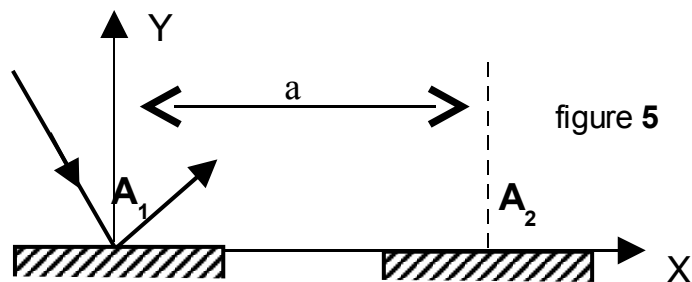
figure 4

5. Décrire en trois lignes au maximum ce qu'on voit sur l'écran. Faire un schéma représentant l'image sur l'écran en indiquant l'axe Ox. Indiquer les valeurs particulières en  $x$ .

6. On translate le miroir d'une distance  $d$  selon l'axe AX (la distance  $d$  reste évidemment assez faible pour que le miroir soit toujours éclairé compte tenu des dimensions de  $L1$  et  $\Sigma$ ). Mêmes questions que précédemment.
7. Mêmes questions pour une rotation d'angle  $\theta$  (choisie positive) du miroir autour de l'axe AZ.

## II. Diffraction par deux miroirs

On considère deux miroirs identiques à celui étudié précédemment ; ces deux miroirs sont parallèles, coplanaires et espacés de la distance  $a$  comme l'indique la figure 5. Ils sont éclairés sous l'incidence  $i$  positive dans le plan XY par un faisceau de lumière parallèle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide.



8. Établir l'expression de la différence de marche optique entre les deux rayons milieux qui interfèrent à l'infini dans la direction quelconque  $i'$ , l'un étant diffracté au point  $A_1$  milieu du miroir (1) d'abscisse  $X=0$  et l'autre étant diffracté au point  $A_2$  milieu du miroir (2) d'abscisse  $a$ . En déduire l'expression de  $\varphi$  retard de phase du rayon diffracté par  $A_2$  par rapport à celui diffracté par  $A_1$ .
9. Déterminer par calcul l'amplitude de l'onde lumineuse diffractée à l'infini dans la direction  $i'$ . Mettre en évidence dans le résultat obtenu  $\varphi$  et  $\Phi$ .
10. En déduire l'intensité et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme  $I = I_{\max} \times D(i') \times F(i')$  en notant  $I_{\max}$  l'intensité maximale, où la nouvelle fonction  $F(i')$  qui traduit le phénomène d'interférences s'écrit en fonction de  $\varphi$ .
11. On pose  $\varphi = 2\pi p$ . Déterminer à partir de l'expression obtenue pour l'ordre  $p$  la direction des maximums de la fonction d'interférences.

## III. Réseau plan par réflexion

Un réseau est constitué par  $N$  miroirs identiques à ceux étudiés précédemment. Ces miroirs sont parallèles, coplanaires et régulièrement espacés de la distance  $a$  comme l'indique la figure 6.

Le réseau est éclairé sous l'incidence  $i$  positive dans le plan XY par un faisceau de lumière parallèle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide. L'angle de diffraction  $i'$  peut varier entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ .

L'intensité peut à nouveau se mettre sous la forme  $I = I_{\max} \times D(i') \times F_R(i')$  en notant  $I_{\max}$  l'intensité maximale. La fonction  $F_R(i')$  traduit le phénomène d'interférences pour le réseau. On appelle ici ordre l'entier relatif  $p$  tel que  $\varphi = 2\pi p$ .

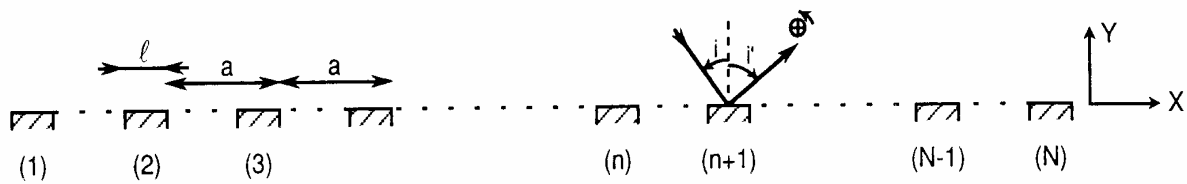


figure 6

12. On donne  $a = 2 \mu\text{m}$  ;  $i = 10^\circ$  et  $\lambda = 643,8 \text{ nm}$ . Calculer numériquement le nombre d'ordres théoriquement possibles?

13. Préciser pour chacun des ordres possibles la valeur de  $i'$  en degrés. Commenter la valeur obtenue pour l'ordre zéro.

14. On suppose que  $N$  est très grand. De plus, on a:  $a = 2 \ell$ .

- Dessiner le graphe  $I$  en fonction de  $\Phi$  en tenant compte des résultats des questions précédentes.
- Combien y-a-t-il d'ordres en réalité?

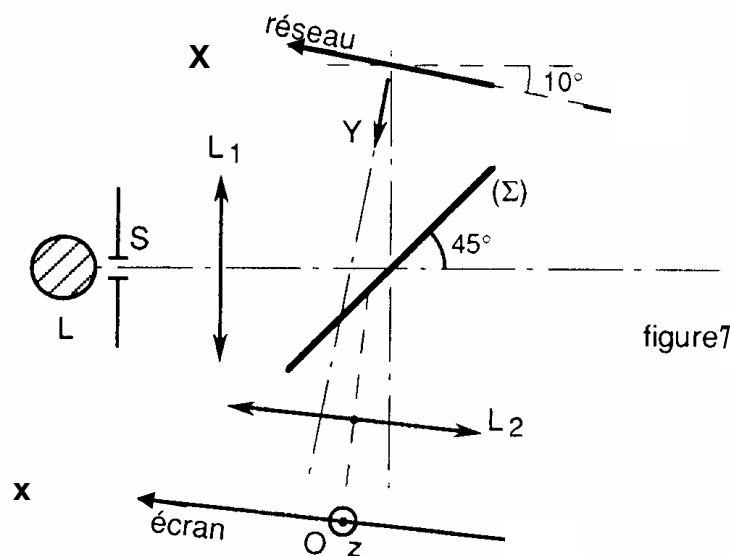


figure7

On réalise le montage de la figure 7, qui reprend en partie celui de la figure 4. S est désormais une fente très fine percée dans un écran opaque, placée de telle sorte qu'elle soit parallèle aux miroirs du réseau. L'ensemble { lentille L2, écran Oxz confondu avec le plan focal image de L2 } est placé de telle sorte que l'ordre + 1 se situe sur l'axe Oz.

15. Déterminer sur l'écran la position de l'ordre 0 en supposant que la distance focale de L2 vaut 50 cm.

#### IV. Pouvoir séparateur du réseau plan par réflexion

La figure 8 indique les caractéristiques de la fonction  $F_R(i')$ .

La hauteur des maxima secondaires est très faible (moins de 5 %) et ceux-ci ne sont pas visibles. On utilise une lampe à vapeur de cadmium qui émet une radiation rouge  $\lambda=643,8\text{nm}$ . Soumise à un champ magnétique de 1 Tesla, la lampe émet trois radiations de  $\lambda$ ,  $\lambda+\Delta\lambda$  et  $\lambda-\Delta\lambda$  avec  $\Delta\lambda$  très petit devant  $\lambda$ :  $\Delta\lambda=1,93 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$  (c'est l'effet Zeeman).

16. Calculer, pour l'ordre  $p$ , la variation  $\Delta i'$  de l'angle  $i'$  qui résulte de la variation  $\Delta\lambda$  de la longueur d'onde ( $\Delta i'$  et  $\Delta\lambda$  sont « petits », on en tiendra donc compte dans la façon de mener le calcul demandé). On exprimera  $\Delta i'$  en fonction de  $p$ ,  $a$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\cos(i')$ .

17. Le nombre  $N$  de miroirs du réseau étant fini, chaque ordre est caractérisé par une largeur  $\frac{2\pi}{N}$  pour la variable  $\frac{\varphi}{2}$  (voir figure 8). En déduire la largeur  $\Delta_2 i'$  correspondante pour la variable  $i'$ .

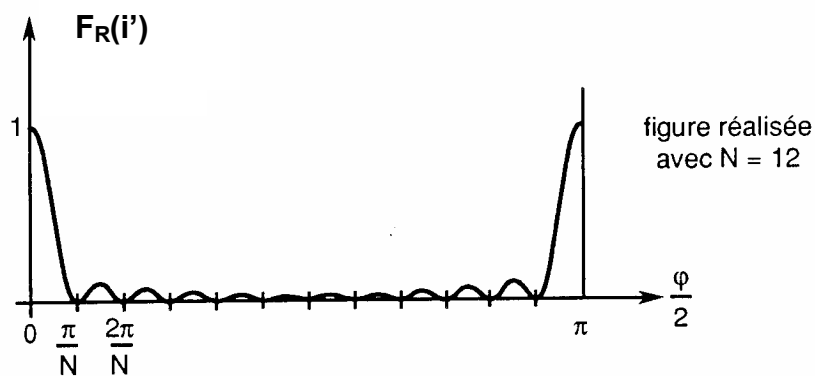


figure 8

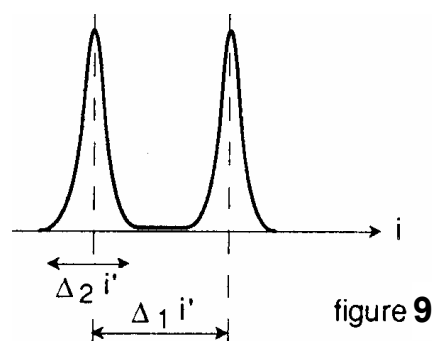


figure 9

On admet que deux longueurs d'onde sont séparées si leurs maximums sont distants (en variable  $i'$ ) de plus de leur demi largeur (figure 9).

18. En déduire la valeur maximale  $R$  que doit prendre le rapport  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  pour que deux radiations soient séparées.  $R$  s'appelle le pouvoir de résolution du réseau.

19. Avec  $N = 20\,000$ , les trois radiations de la lampe sont-elles séparées dans l'ordre 1 ? Quelle est

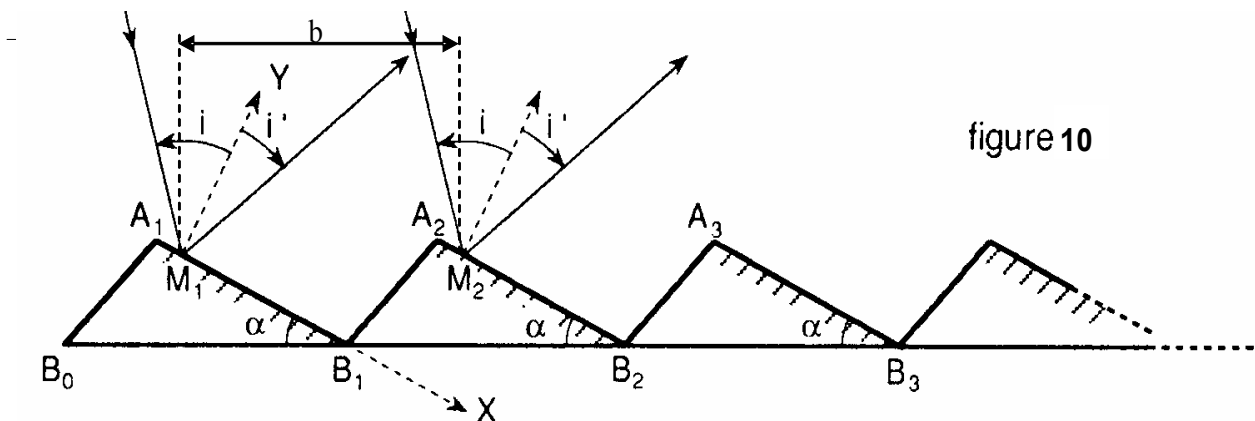
l'intensité relative par rapport à l'intensité maximale correspondant à cet ordre 1 ?

20. Pour un réseau déterminé ( $a$ ,  $\ell$ ,  $N$  fixés), que peut-on faire pour augmenter  $R$  ? Quel est l'inconvénient qui en résulte ? Quelle est l'intensité relative par rapport à l'intensité maximale correspondant à l'ordre 3 ?

## V. Réseau à échellette

Le réseau représenté figure 10, dit réseau à échellette, permet de remédier à l'inconvénient mentionné ci-dessus.

Il est constitué de  $N$  miroirs identiques de largeur  $\ell = A_n B_n$  ( $1 \leq n \leq N$ ), parallèles entre eux mais non coplanaires. On l'éclaire sous l'incidence  $i$  positive dans le plan  $XY$  par un faisceau de lumière parallèle monochromatique. On notera  $b$  la distance  $B_0 B_1 = B_1 B_2 = \dots = B_{n-1} B_n$ .



21. Pour quelle valeur de  $i'$ , à  $i$  fixé, obtient-on le centre de la figure de diffraction ?
22. Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux points situés sur les miroirs 1 et 2 à des distances identiques de  $A_1$  et  $A_2$  :  $A_1 M_1 = A_2 M_2$  et par conséquent  $M_1 M_2 = b$ . Exprimer la différence de phase entre les ondes correspondant aux rayons 1 et 2 se réfléchissant en  $M_1$  et  $M_2$ , et interférant à l'infini.
23. Peut-on faire en sorte que, pour le centre de la figure de diffraction, on obtienne un ordre entier  $p_0$  non nul ? Quelle relation doit être alors vérifiée ? Quel est l'intérêt du réseau à échellette par rapport au réseau plan par réflexion.
24. On choisit un réseau à échellette de même longueur que le réseau plan étudié précédemment avec  $N = 20\,000$ ,  $b = 2\,\mu\text{m}$  et  $\alpha = 30^\circ$ . Calculer, pour  $\lambda = 643,8\,\text{nm}$ , l'ordre entier  $|p_{0m}|$  maximum possible et l'angle  $i$  positif correspondant.
25. On désire en plus éliminer l'ordre entier voisin de  $p_{0m}$  en faisant coïncider l'angle  $i'$  correspondant avec un zéro de la fonction diffraction par un miroir. Chercher l'angle  $i'$  ainsi que la valeur qu'il faut donner à  $\ell$  ( $\ell < b$ ). En déduire que les triangles  $B_{n-1} A_n B_n$  sont presque des triangles rectangles.

# Le chlore et ses dérivés

La désinfection des eaux de piscine fait encore largement appel au chlore et à ses dérivés. L'objet du problème suivant est d'aborder quelques aspects de ce traitement.

## I. Oxydoréduction

### A. Solubilité

Dans les conditions standard, à 298 K, le potentiel chimique du dichlore en solution aqueuse vaut :

$$\mu^\circ (298K) Cl_2 (aq) = 5,70 \text{ kJ.mol}^{-1} \text{ et on rappelle:}$$

$$\mu^\circ (298K) Cl_2 (g) = 0 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

1. Écrire l'équilibre et déterminer la concentration en  $Cl_2(aq)$  d'une eau en présence de dichlore gazeux  $Cl_2(g)$  sous une pression de 1 bar, à 298 K.

### B. Lecture du diagramme $E = f(pH)$

Le diagramme ci-dessous est tracé pour une concentration totale en élément chlore dans la solution aqueuse de  $c = 0,100 \text{ mol.L}^{-1}$ . La frontière entre espèces correspond à l'égalité des concentrations molaires en élément chlore de part et d'autre de cette frontière.

2. Déterminer le nombre d'oxydation de l'élément chlore pour les espèces intervenant dans le diagramme :  $Cl_2(aq)$ ,  $Cl^-$ ,  $HClO$ ,  $ClO^-$ . Quelles sont les espèces qui peuvent se comporter comme des oxydants, des réducteurs ?
3. Identifier les espèces  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .
4. Déterminer, à partir du diagramme et en justifiant avec précision la méthode utilisée :
  - le potentiel standard du couple  $HClO/Cl^-$
  - le pKa du couple  $HClO/ClO^-$
  - Comparer les valeurs déterminées à celles indiquées dans l'énoncé.
5. Calculer les pentes théoriques des différentes frontières du diagramme.
6. Écrire la réaction de dismutation du dichlore en solution aqueuse ( en milieu acide), calculer sa constante d'équilibre.

## II. L'eau de Javel

L'eau de Javel est une solution aqueuse équimolaire d'ions  $Na^+$  et  $ClO^-$ . Le degré chlorométrique désigne le nombre de litres de dichlore qui peuvent être libérés par l'addition d'acide chlorhydrique en quantité non limitante à un litre d'eau de Javel dans les conditions normales de température et de pression ( 273 K , 1,013bar ).

7. À combien de moles de dichlore correspond un litre d'eau de Javel commerciale à 48 « degrés chlorométriques » ?



Dans une piscine de  $60 \text{ m}^3$ , on introduit de l'eau de Javel commerciale à 48 degrés chlorométriques.

8. Quelle est la concentration des ions  $\text{ClO}^-$ , en  $\text{mol.L}^{-1}$  d'une solution à  $1 \text{ mg.L}^{-1}$  en élément chlore ? En déduire le volume d'eau de Javel commerciale à verser dans la piscine pour obtenir la même concentration en l'absence de réaction avec l'eau.
9. Écrire la réaction prépondérante de  $\text{ClO}^-$  avec  $\text{H}_2\text{O}$  et en déduire le pH de l'eau de la piscine et les concentrations en  $\text{ClO}^-$  et  $\text{HClO}$ .
10. On verse de l'acide chlorhydrique dans la piscine. Écrire la réaction prépondérante de  $\text{ClO}^-$  avec  $\text{H}_3\text{O}^+$ . Quel volume d'acide chlorhydrique à  $9 \text{ mol.L}^{-1}$  doit-on verser pour amener le pH de cette eau à la valeur 7,5.
11. Quelle est la propriété de cette eau ?
12. Quel risque y a-t-il à verser de l'acide chlorhydrique dans de l'eau de Javel concentrée ? Commenter.

Données:

Masse molaire atomique du chlore:  $35,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$

Couple  $\text{HClO}/\text{ClO}^-$   $pK_a = 7,5$

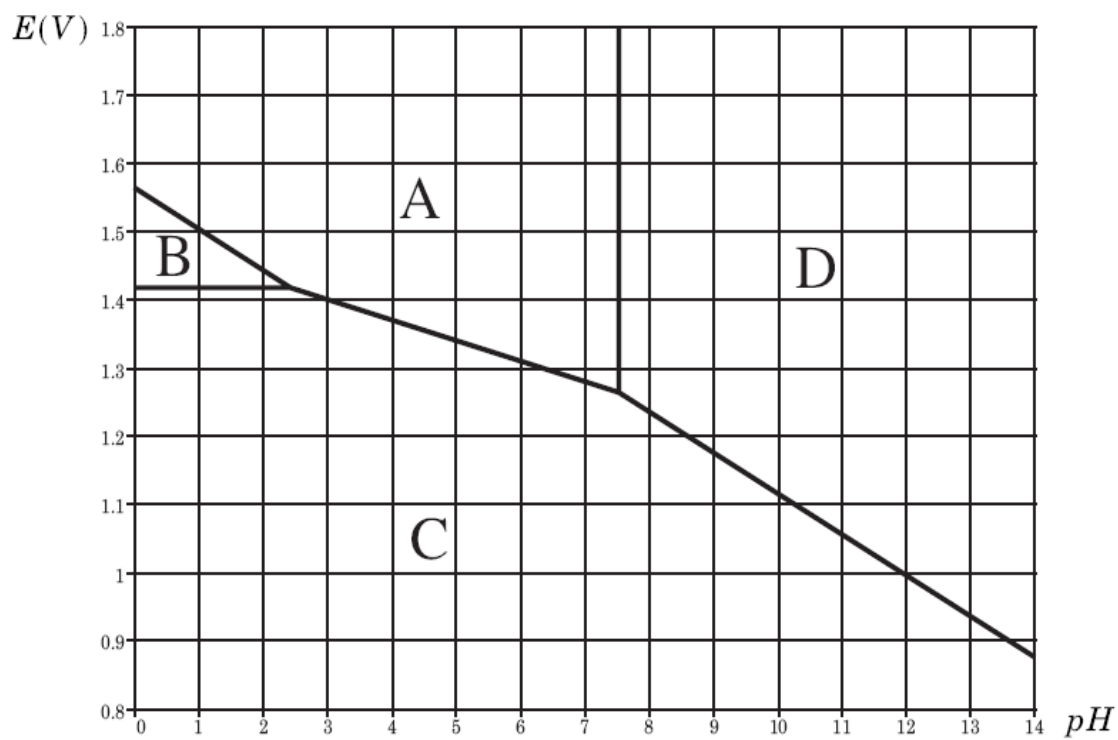
$$K_{\text{eau}} = 10^{-14}$$

$$R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Dans la relation de Nernst, on prendra  $\frac{RT}{F} \ln(10) = 0,059 \text{ V}$  à 298 K

Potentiels rédox standards:

Couple	$\text{Cl}_2(\text{aq})/\text{Cl}^-$	$\text{HClO}/\text{Cl}_2(\text{aq})$
$E^\circ$ (à pH = 0) en V	1,39	1,59



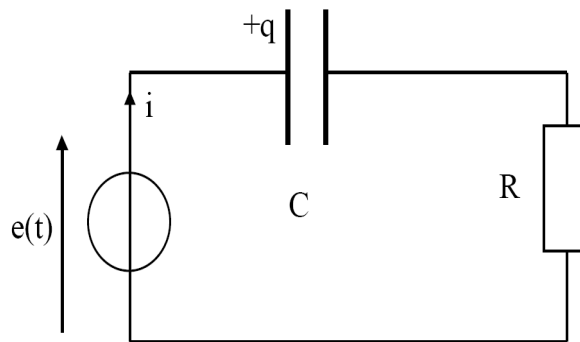
*Diagramme potentiel-pH du chlore*

# Défibrillateur

En 1947, le Docteur Claude Beck invente dans l'Hôpital Universitaire de Cleveland le défibrillateur fonctionnant avec le courant alternatif du secteur, avec une tension utile de 1500 V. Le défibrillateur permet de lutter contre la fibrillation cardiaque, qui est un trouble grave du rythme cardiaque pouvant aboutir à un infarctus. Dans les années 1960, une amélioration notable est de permettre l'utilisation ambulatoire d'un défibrillateur à alimentation autonome à courant continu. On stocke de l'énergie dans des condensateurs, puis cette énergie est libérée pendant un intervalle de temps très court.

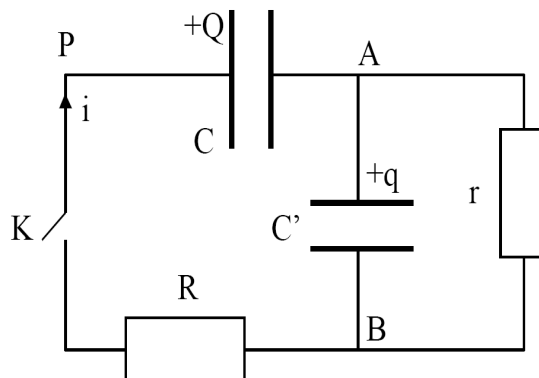
## I. Charge d'un condensateur

On considère un condensateur de capacité  $C$  placé dans le circuit ci-contre contenant un générateur de charge de f.e.m  $e(t)$  et une résistance globale  $R$ . La fem vaut  $E$  constante pendant la charge et 0 sinon.



1. Retrouver l'expression donnant  $q(t)$  au cours de la charge du condensateur. On éteint le générateur en  $t=t_0$ , la charge du condensateur valant  $q_0$ . Exprimer  $q(t)$  pendant la décharge qui suit. Tracer  $q(t)$  pour l'ensemble charge-décharge.
2. Comment doit-on choisir l'ordre de grandeur de  $R$  et de  $C$  afin d'obtenir une charge et une décharge rapide ?

## II. Décharge de la batterie de condensateurs du défibrillateur



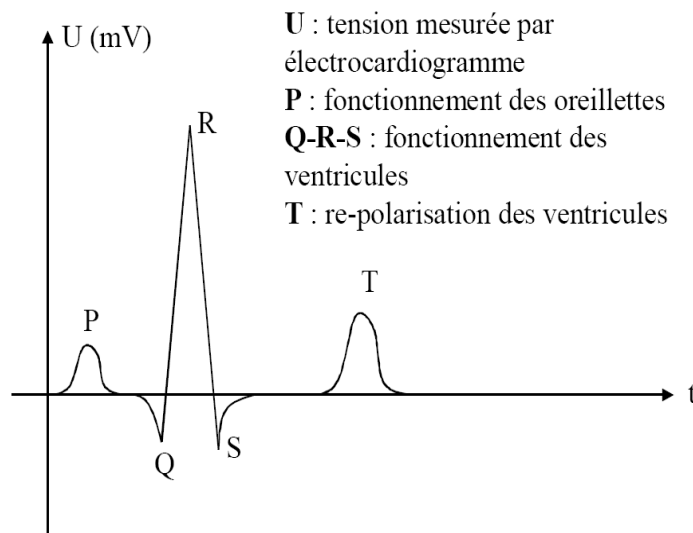
Le circuit électronique peut être modélisé ainsi : on réduit l'étude à celle de la décharge d'un condensateur de capacité  $C'$  chargé à la date  $t = 0$  et se déchargeant dans un circuit comportant un autre condensateur de capacité  $C$  non chargé initialement.

On tient compte dans le schéma de la figure précédente de résistances  $R$  et  $r$  dans le circuit dues aux composants non représentés ici. On ferme l'interrupteur  $K$  à la date  $t = 0$ .

3. Écrire les équations régissant ce circuit et en déduire l'équation différentielle vérifiée par la tension  $U(t) = U_{AB}$  en fonction de  $C$ ,  $C'$ ,  $R$  et  $r$ .
4. On veut réaliser une décharge sans oscillations parasites. Quelle condition portant sur les valeurs des composants et quel régime sont les mieux adaptés ?

### III. Défibrillateur automatique avec détection du rythme cardiaque

On détecte l'impulsion électrique créée par le muscle cardiaque et on a la nécessité d'amplifier ce signal très faible. Le signal électrique mesuré par l'électrocardiogramme correspond au cumul d'enregistrements simultanés à l'aide de 8 électrodes posées sur la peau (6 sur le thorax et 1 sur chaque bras).

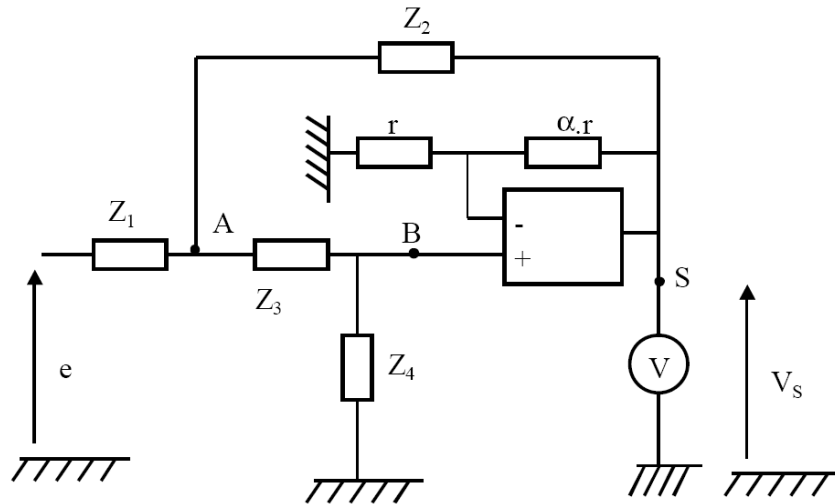


Malgré cela, la tension reste faible. L'instrument de mesure comporte donc un étage amplificateur dont la modélisation est celle de la figure. L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.

On considère une tension  $e(t)$  sinusoïdale.

5. Exprimer le potentiel  $V_B$  en B en fonction de  $v_s$  et  $\alpha$ .
6. Exprimer le potentiel  $V_A$  en A.
7. En déduire la fonction de transfert  $H = \frac{v_s}{e}$  en fonction de  $\alpha$  et des  $Y_i = 1/Z_i$ .
8. On pose  $Y_1 = Y_3 = 1/R$  et  $Y_2 = Y_4 = jC\omega$ . Montrer que  $H$  peut s'écrire sous la forme :

$$H = \frac{A}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} . \text{ Donner les expressions de } A, m \text{ et } \omega_0.$$



9. Tracer l'allure du diagramme de Bode (pour le gain) des deux courbes correspondant aux cas suivants :  $m=1$  ou  $m=0,1$

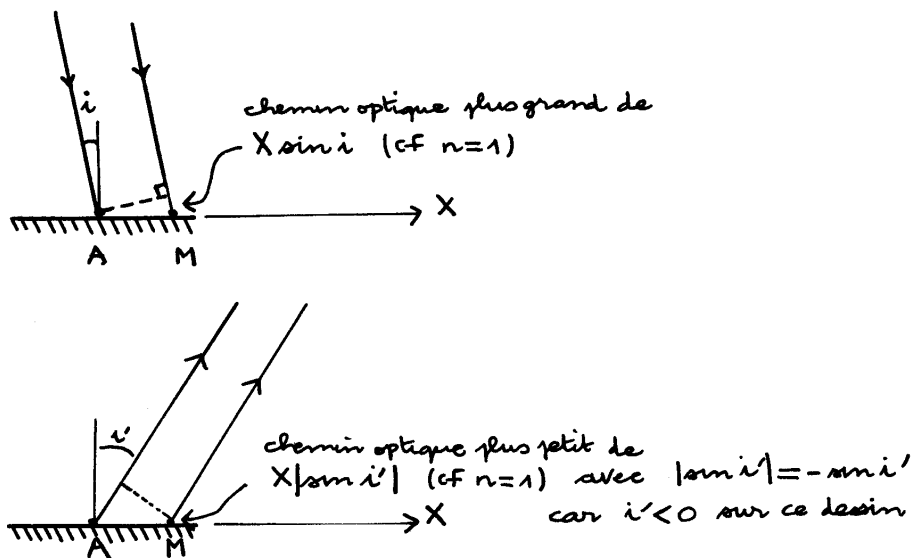
10. A quelles conditions sur  $\alpha$  et  $\omega_0$  a-t-on une bonne amplification du signal ? Discuter.

## Réponses

### réseau par réflexion

notation :  $\exp j(\omega t - \varphi)$  ou  $\exp -j\varphi \exp j\omega t$   
avec  $\varphi$  positif traduisant un retard par rapport à la référence de phase.

1) figure avec  $X$  positif :



$$S = (\text{trajet passant par } M) - (\text{trajet passant par } A)$$

$$= n X \sin i - n X |\sin i'|$$

$$\delta = X (\sin i + \sin i')$$

(l'indice étant pris égal à 1)

2) Pour trouver l'intensité diffractée dans la direction  $i'$ , on doit intégrer.

A une constante près, l'onde dans la direction  $i'$  est

$$\Psi = \int_{X=-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \exp -j \frac{2\pi \delta}{\lambda} L dX$$

$$(cf \varphi_{\text{référence}} = \frac{2\pi\delta}{\lambda_{\text{VIDE}}})$$

$$\Psi = \overbrace{L \ell}^{\varphi_0} \operatorname{sinc} \left[ \frac{\pi \ell}{\lambda} (\sin i + \sin i') \right]$$

$$I = \Psi \Psi^*$$

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left[ \frac{\pi \ell}{\lambda} (\sin i + \sin i') \right]$$

$$I = I_0 \underbrace{\operatorname{sinc}^2 \phi}_{\text{noté } D(i')}$$

$$\text{avec } \phi = \frac{\pi \ell}{\lambda} (\sin i + \sin i')$$

( $\phi$  est la différence de phase entre l'onde milieu et l'onde diffractée par une extrémité du miroir de largeur  $\ell$ )

- 3) L'intensité diffractée par le miroir est maximale pour  $\operatorname{sinc}^2 \phi = 1$  donc pour  $\phi = 0$
- $$\sin i + \sin i' = 0$$

$$i' = -i$$

on retrouve la direction prévue par l'optique géométrique (réflexion selon les lois de Snell-Descartes)

- 4) Le premier maximum secondaire est aux environs de

$$\phi \simeq \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{I}{I_0} \simeq \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} = \frac{4}{9\pi^2}$$

$$\frac{I}{I_0} \simeq 4,5\%$$

Pour le second maximum secondaire

$$\phi \simeq \frac{5\pi}{2}$$

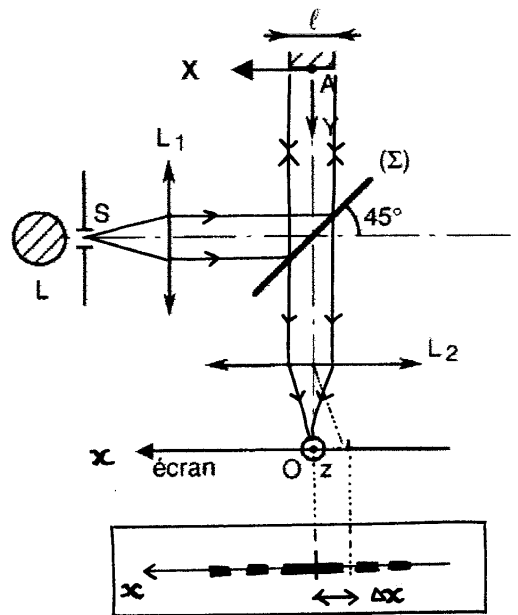
$$\frac{I}{I_0} \simeq \frac{1}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2} = \frac{4}{25\pi^2}$$

$$\frac{I}{I_0} \simeq 1,5 \%$$

5) La source est ponctuelle et l'angle  $i$  est nul.

— Pour le miroir  $L \gg \ell$  et la diffraction s'effectue uniquement selon  $x$

— La tâche centrale (pour  $i' = 0$  correspondant à l'image géométrique) se trouve en  $x = 0$



— Le premier minimum est pour  $\phi = \pi$  soit

$$\pi = \frac{\pi \ell}{\lambda} (\sin i')$$

$$\sin i' = \frac{\lambda}{\ell}$$

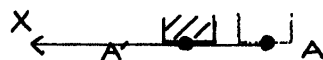
$i'$  étant "petit"

$$i' = \frac{\lambda}{\ell}$$

La tâche centrale a une dimension  $2\Delta x$  avec

$$\Delta x = \frac{F_2' \lambda}{\ell}$$

6) Si on translate le miroir selon  $X$  de  $d$ ,  $A$  vient en  $A'$





et si l'on garde la référence de phase pour le rayon passant par A (avant translation) on trouvera un  $\underline{\Psi'}$  ayant une phase différente :

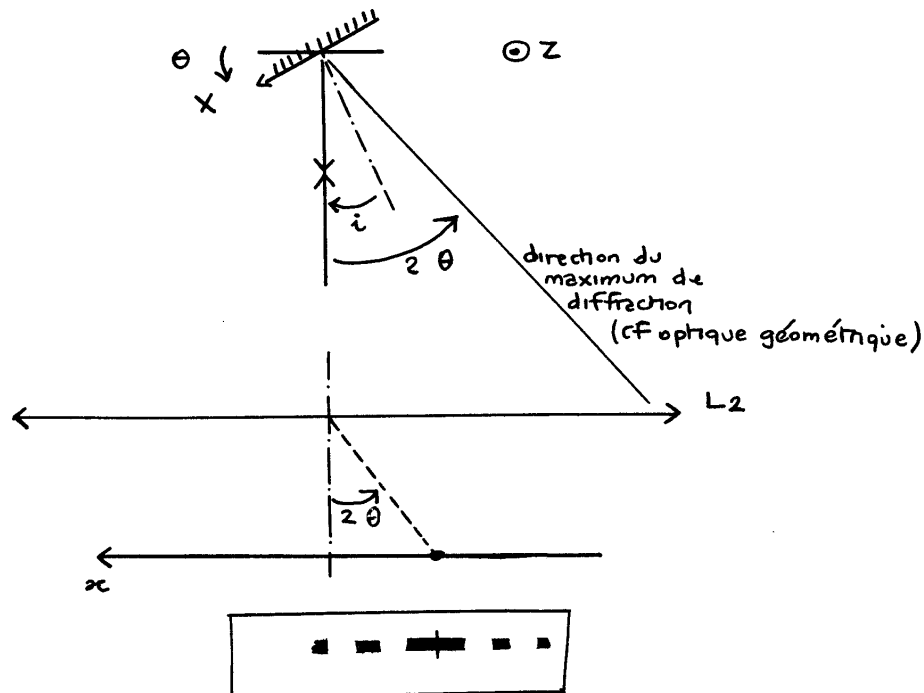
$$\underline{\Psi'} = \underline{\Psi} \exp - i \frac{2\pi d}{\lambda} (\underbrace{\sin i + \sin i'}_{\substack{\text{nul} \\ \text{ici}}})$$

mais

$$\underline{\Psi'} \underline{\Psi'^*} = \underline{\Psi} \underline{\Psi^*}$$

il n'y aura donc aucune modification pour l'intensité sur l'écran

7)



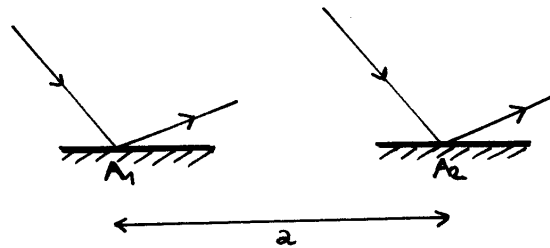
Le miroir tourne de  $\theta$ .

L'angle d'incidence est alors  $i = -\theta$

La tâche de diffraction est alors centrée en :

$$x_{\text{centre}} = -2\theta f'_2$$

8)



Le raisonnement est identique à 1).

$$S' = a (\sin i + \sin i') \quad (\text{retard de } 2/\lambda)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin i + \sin i')}$$

9)

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{x=-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} L \exp -j \frac{2\pi}{\lambda} x (\sin i + \sin i') dx \\ &+ \int_{x=a-\frac{\ell}{2}}^{a+\frac{\ell}{2}} L \exp -j \frac{2\pi}{\lambda} x (\sin i + \sin i') dx \end{aligned}$$

$$\Psi = L \ell \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi \ell}{\lambda} (\sin i + \sin i') \right) (1 + \exp -j \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin i + \sin i'))$$

$$\boxed{\Psi = \Psi_0 \operatorname{sinc} \phi (1 + \exp -j \varphi)}$$

$$\begin{aligned} 10) \quad I &= \Psi \Psi^* \\ &= \Psi_0^2 \operatorname{sinc}^2 \phi (1 + \exp -j \varphi) (1 + \exp j \varphi) \\ &= \Psi_0^2 \operatorname{sinc}^2 \phi (2 + 2 \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= 4 I_0 \operatorname{sinc}^2 \phi \frac{1 + \cos \varphi}{2} \quad \text{ou} \\ &= 4 I_0 \operatorname{sinc}^2 \phi \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned}}$$

$\underbrace{4 I_0}_{I_{\text{MAX}} = 4 I_0} \quad \underbrace{\operatorname{sinc}^2 \phi}_{D(i)} \quad \underbrace{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}_{F(i)}$

$$11) \quad F(i') = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$$

$$= \frac{1 + \cos(2\pi p)}{2}$$

avec  $p$  : ordre d'interférences.

On aura un maximum d'interférences si  $F(i') = 1$   
soit pour

$$p = m \text{ (entier)}$$

alors

$$p = \frac{a}{\lambda} (\sin i' + \sin i)$$

$$= m$$

$$\sin i' = m \frac{\lambda}{a} - \sin i$$

12) Les maximums d'interférence ont lieu pour  $\varphi = 2m\pi$   
et l'expression de  $\varphi$  est la même que précédemment.

$$\sin i' = p \frac{\lambda}{a} - \sin i$$

(avec  $p$  entier)

et  $i'$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  radians.

$$-1 < p \frac{\lambda}{a} - \sin i < +1$$

$$\frac{a}{\lambda} (\sin i - 1) < p < \frac{a}{\lambda} (1 + \sin i)$$

$$\text{A.N.} \quad \frac{2 \cdot 10^{-6}}{643,8 \cdot 10^{-9}} (\sin 10^\circ - 1) < p < \frac{2 \cdot 10^{-6}}{643,8 \cdot 10^{-9}} (1 + \sin 10^\circ)$$

$$-2,57 < p < 3,65$$

$$\text{solutions: } p = -2, -1, 0, +1, +2, +3$$

donc 6 ordres possibles

13) valeur de  $i'$  (en degrés centésimaux)

$$\sin i' = p \frac{\lambda}{2} - \sin i$$

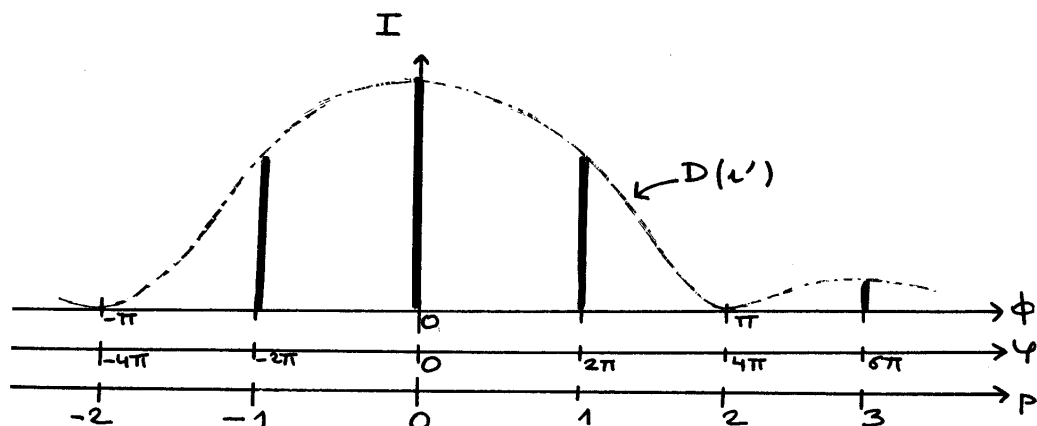
A.N.  $\sin i' = 0,3219 p - 0,17365$

P	$i'$
-2	$-54,83^\circ$
-1	$-29,71^\circ$
0	$-10^\circ$
1	$8,53^\circ$
2	$28,04^\circ$
3	$52,38^\circ$

14) - Si N est très grand, la condition d'interférence constructive est très restrictive. Dès que  $\varphi$  s'écarte de la bonne valeur, l'intensité est nulle : les pics d'interférence sont très étroits.

- De plus  $a = 2l$

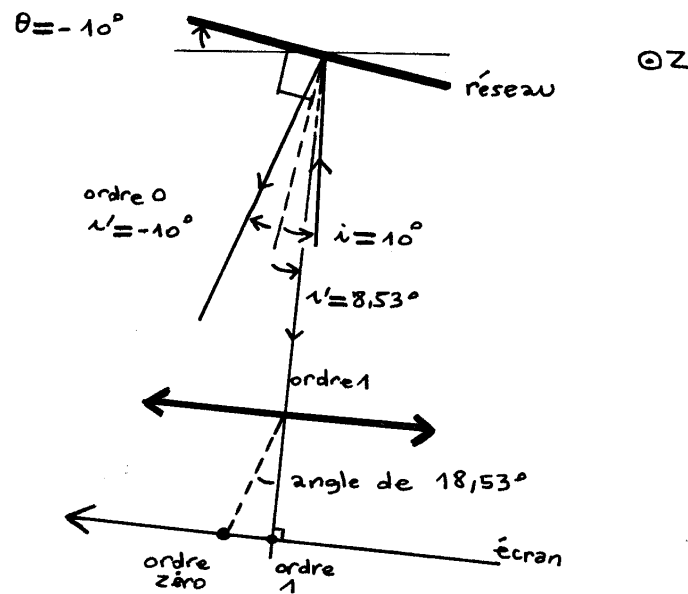
$$\varphi = 4\phi$$



finallement, on aura 4 spectres.

P	$i'$	intensité
-1	$-29,71^\circ$	moyenne
0	$-10^\circ$	grande
+1	$8,53^\circ$	moyenne
+3	$53,38^\circ$	très faible

- 15) La source est désormais une fente : on obtient donc des raies dans le spectre.



L'ordre zéro se trouve (voir figure) en :

$$x = f'_2 \tan(18,53^\circ)$$

$x = 16,76 \text{ cm}$

- 16) Pour l'ordre P, et la longueur d'onde  $\lambda$ ,  $i'$  est donné par :

$$\sin i' = P \frac{\lambda}{a} - \sin i$$

Si  $\lambda$  varie de  $\Delta\lambda$   
 $i'$  varie de  $\Delta i'$

on fait un calcul approché :

$$\cos i' \, di' = p \, \frac{d\lambda}{a}$$

d'où  $\cos i' \, \Delta i' = \frac{p}{a} \Delta\lambda$

$$\Delta i'_1 = \frac{p}{a \cos i'} \Delta\lambda$$

17) Pour l'ordre  $p$ , la largeur est :

$$\Delta\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2\pi}{N}$$

or  $\varphi = 2\pi p$   $\Delta\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{N}$

$$\Delta p = \frac{2}{N}$$

on cherche la largeur  $\Delta i'$  correspondante

Si  $p$  varie de  $\Delta p$

$i'$  varie de  $\Delta i'$

$$\sin i' = p \frac{\lambda}{a} - \sin i$$

$$\cos i' \, di' = dp \frac{\lambda}{a}$$

d'où  $\cos i' \, \Delta i' = \Delta p \frac{\lambda}{a}$   
 $= \frac{2}{N} \frac{\lambda}{a}$

$$\Delta i'_2 = \frac{2 \lambda}{N a \cos i'}$$

18) La condition proposée pour la séparation des raies est :

$$\Delta i'_1 > \frac{\Delta i'_2}{2}$$

$$\frac{\Delta\lambda \, p/a}{\cos i'} > \frac{2\lambda/Na}{2 \cos i'}$$

$$p N > \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Le pouvoir de résolution vaut

$$R = p N$$

19) A.N.

$$R = p N$$

$$= 1 \times 20000$$

$$R = 20000$$

Pour séparer les radiations, il faut

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{643,8}{1,93 \cdot 10^{-2}}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 33357$$

Donc les raies ne sont pas séparées

Intensité pour l'ordre 1 :

$$\frac{I}{I_{\text{MAX}}} = \text{sinc}^2(\phi) \quad \text{avec } \varphi = 2\pi$$

$$\phi = \pi/2$$

$$= \frac{4}{\pi^2}$$

$$\frac{I}{I_{\text{MAX}}} = 40,5\%$$

20) Pour augmenter  $R = pN$ , il faudrait choisir  $|p|$  le plus grand possible.

Ici

$$p = 3$$

mais on perd en intensité car  $\varphi = 6\pi$ ,  $\phi = \frac{3\pi}{2}$

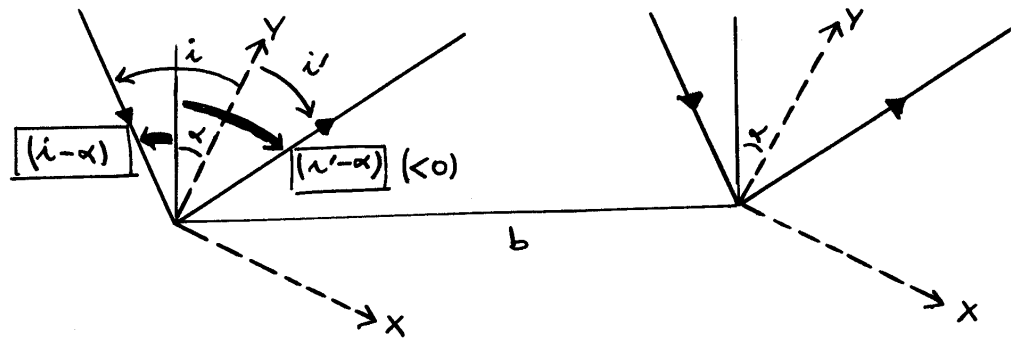
$$\frac{I}{I_{\text{MAX}}} = \frac{4}{9\pi^2}$$

$$\frac{I}{I_{\text{MAX}}} = 4,5\%$$

21) Le centre de la figure de diffraction correspond à la direction de l'image géométrique soit :

$$x' = -i$$

22)



On retrouve le raisonnement de 1) et 8)

avec

$$\begin{aligned} i &\rightarrow i - \alpha \\ i' &\rightarrow i' - \alpha \\ a &\rightarrow b \end{aligned}$$

donc

$$\varphi = \frac{2\pi b}{\lambda} (\sin(i - \alpha) + \sin(i' - \alpha))$$

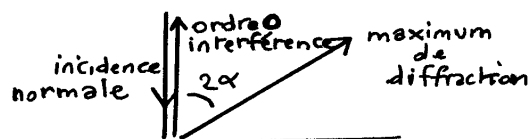
remarque :

Pour une onde incidente normale à  $B_0 B_1 B_2 B_3$

- le maximum de diffraction correspond à  $i' = -i = -\alpha$  soit un angle  $-2\alpha$  par rapport à l'onde incidente

- l'ordre zéro pour les interférences correspond à  $\varphi = 0$  soit  $i' = i = \alpha$

et ne correspond plus au maximum de diffraction



on pourra récupérer le maximum de lumière dans un ordre plus élevé

23) Pour  $i' = -i$ ,  $P = P_0$  (entier non nul)

donc

$$P_0 = \frac{b}{\lambda} (\sin(i - \alpha) + \sin(-i - \alpha))$$



$$P_0 = -2 \frac{b}{\lambda} \sin \alpha \cos i$$

Le maximum d'intensité ne se trouve plus au niveau de l'ordre nul (pas de dispersion au niveau du spectre d'ordre nul)

24) A.N. 
$$P_0 = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{643,8 \cdot 10^{-9}} \sin(30^\circ) \cos i$$
  

$$= -3,106 \cos i$$

donc on prendra :

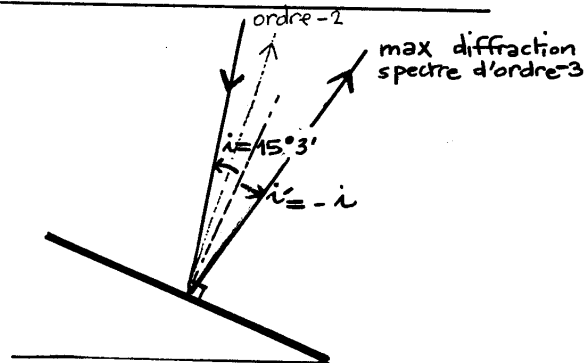
$$P_{0m} = -3$$

et  $\cos i = 0,9657$

$$i = 15,05^\circ$$

$$(15^\circ 3')$$

25)



On cherche  $i'$  pour l'ordre voisin c'est à dire -2  
 (l'ordre -4 ne sera pas possible)

$$P_0 = \frac{b}{\lambda} ( \sin(i-\alpha) + \sin(i'-\alpha) )$$

$$\downarrow$$

$$-2 = \frac{2000}{643,8} ( \sin(15,05-30) + \sin(i'-30) )$$

d'où

$$i' = 7,31^\circ$$

On veut que cette valeur soit un minimum de diffraction donc

$$\phi = \frac{\pi l}{\lambda} (\sin i + \sin i') = n\pi$$

soit

$$l = n \lambda (\sin i + \sin i')$$

$$\frac{l}{\mu\text{m}} = n 643,8 \cdot 10^{-3} (\sin 15,05 + \sin 7,31)$$

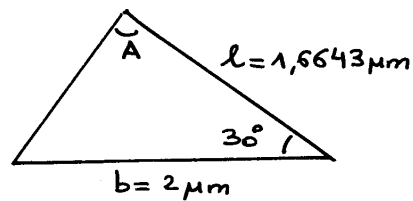
$$\frac{l}{\mu\text{m}} = n 1,6643$$

qui doit être inférieur à  $b = 2 \mu\text{m}$

donc il faut choisir  $n = 1$

$$l = 1,6643 \mu\text{m}$$

on calcule alors l'angle A



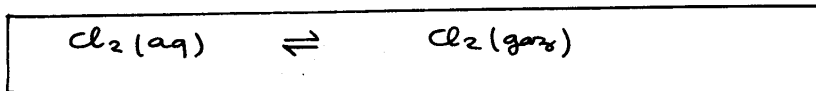
$$\frac{\sin A}{b} = \frac{\sin 30^\circ}{\sqrt{l^2 + b^2 - 2bl \cos 30^\circ}}$$

$$A = 86,1^\circ$$

Effectivement, les triangles sont "presque" rectangles.

## le chlore et ses dérivés

1) On étudie l'équilibre



A l'équilibre

$$\mu_{\text{Cl}_2(\text{aq})} = \mu_{\text{Cl}_2(\text{g})}$$

$$\mu_{\text{Cl}_2, \text{aq}}^{\circ}(T) + RT \ln \frac{c}{c^{\circ}} = \mu_{\text{Cl}_2, \text{gaz}}^{\circ}(T) + RT \ln \frac{P}{P^{\circ}}$$

$$\frac{c}{c^{\circ}} = \frac{P}{P^{\circ}} \exp \left( \frac{\mu_{\text{Cl}_2, \text{g}}^{\circ} - \mu_{\text{Cl}_2, \text{aq}}^{\circ}}{RT} \right)$$

A.N.  $\frac{[\text{Cl}_2]}{1} = \frac{1}{1} \exp \left( \frac{0 - 5,7 \cdot 10^3}{8,314 \times 298} \right)$

$$[\text{Cl}_2] = 0,100 \text{ mol L}^{-1}$$

remarque : autre approche

A l'équilibre, l'affinité est nulle avec

$$\begin{aligned} A &= -\Delta_r G \\ &= -(\Delta_r G_{(T)}^{\circ} + RT \ln Q) \\ &= -(\Delta_r G_{(T)}^{\circ} + RT \ln \frac{P/P^{\circ}}{c/c^{\circ}}) \\ &= -(\mu_{\text{gaz}}^{\circ} - \mu_{\text{aq}}^{\circ} + RT \ln \frac{P/P^{\circ}}{c/c^{\circ}}) \end{aligned}$$

donc  $\left( \frac{P/P^{\circ}}{c/c^{\circ}} \right)_{\text{équilibre}} = \exp \left( \frac{-(\mu_{\text{gaz}}^{\circ} - \mu_{\text{aq}}^{\circ})}{RT} \right)$

2) • nombres d'oxydation du chlore

$\text{Cl}_2(\text{aq})$	0
$\text{Cl}^-$	-I
$\text{HClO}$ et $\text{ClO}^-$	+I

exemple pour  $\text{ClO}^-$

$$\text{n.o. Cl} + \underbrace{\text{n.o. O}}_{-2} = -1$$

$$\text{n.o. Cl} = +1$$

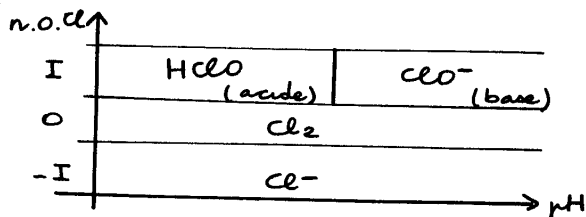
- Dans  $\text{HClO}$  et  $\text{ClO}^-$  } n.o. peut encore baisser.  
 Dans  $\text{Cl}_2$

Ces espèces qui peuvent être réduites sont des oxydants.

- Dans  $\text{Cl}^-$  } n.o. peut encore augmenter  
 Dans  $\text{Cl}_2$

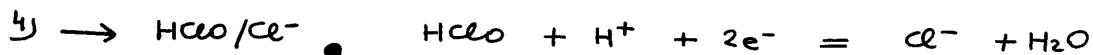
Ces espèces qui peuvent être oxydées sont des réducteurs

3) Classement :



donc :

A	:	HClO
D	:	ClO <sup>-</sup>
B	:	Cl <sub>2</sub>
C	:	Cl <sup>-</sup>



$$E = E^\circ_{\text{HClO}/\text{Cl}^-} + \frac{0.059}{2} \log \frac{[\text{HClO}][\text{H}^+]}{[\text{Cl}^-]}$$

$$= E^\circ_{\text{HClO}/\text{Cl}^-} - \frac{0.059}{2} \text{pH} + \frac{0.059}{2} \log \frac{[\text{HClO}]}{[\text{Cl}^-]}$$

A la frontière :

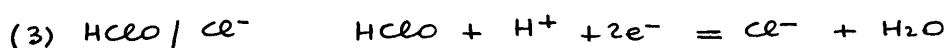
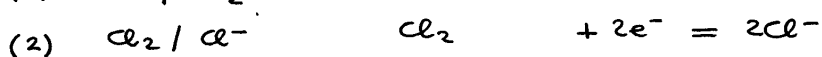
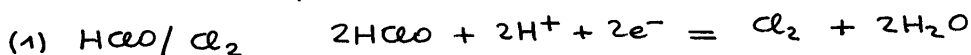
$$[\text{HClO}] = [\text{Cl}^-] = \frac{c}{2}$$

$E_{\text{frontière HClO/Cl}^-} = E^\circ_{\text{HClO/Cl}^-} - \frac{0.059}{2} \text{pH}$
---

Sur le diagramme E-pH, on poursuit la frontière A/C jusqu'à l'intersection avec l'axe pour trouver l'ordonnée à l'origine d'où

$$E^{\circ}_{\text{HClO}/\text{Cl}^-} \simeq 1,49 \text{ V}$$

• valeur théorique :



$$\text{avec} \quad (3) = \frac{(1) + (2)}{2}$$

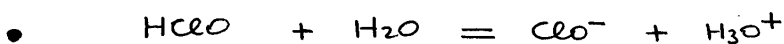
$$-2F E^{\circ}_{\text{HClO}/\text{Cl}^-} = \frac{-2F E^{\circ}_{\text{HClO}/\text{Cl}_2} - 2F E^{\circ}_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}}{2}$$

$$E^{\circ}_{\text{HClO}/\text{Cl}^-} = \frac{E^{\circ}_{\text{HClO}/\text{Cl}_2} + E^{\circ}_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}}{2}$$

$$\text{A.N.} \quad = \frac{1,59}{2} + \frac{1,39}{2}$$

$$E^{\circ}_{\text{HClO}/\text{Cl}^-} = 1,49 \text{ V}$$

→ HClO/ClO<sup>-</sup>



$$K_A = \frac{[\text{ClO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HClO}]}$$

$$\text{pH} = \text{p}K_A + \log \frac{[\text{ClO}^-]}{[\text{HClO}]}$$

A la frontière

$$[\text{HClO}] = [\text{ClO}^-] = \frac{C}{2}$$

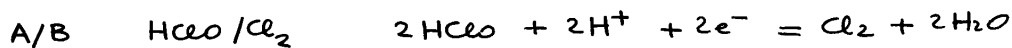
$$\text{pH}_{\text{frontière HClO/ClO}^-} = \text{p}K_A$$

Sur le diagramme E-pH, on considère la frontière A/D d'où

$$\text{p}K_A \simeq 7,5$$

- c'est la valeur proposé par le texte.

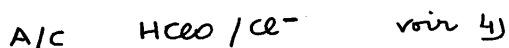
5) Pente des frontières :



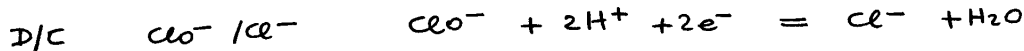
$$E = A + \frac{0,059}{2} \log [\text{H}^+]^2$$

$$= A - 0,059 \text{ pH}$$

$$\text{pente : } -0,059 \text{ V}$$



$$\text{pente : } -\frac{0,059}{2} \text{ V}$$



$$E = A + \frac{0,059}{2} \log [\text{H}^+]^2$$

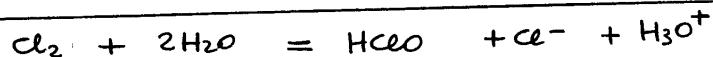
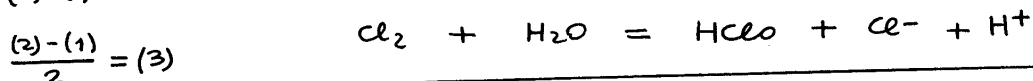
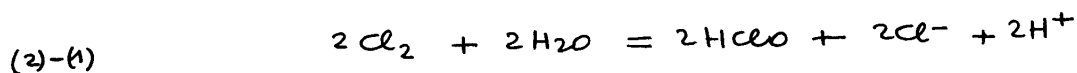
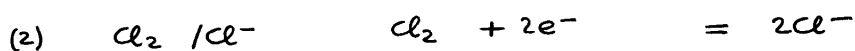
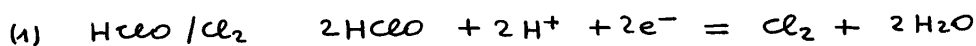
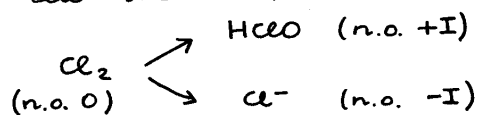
$$= A - 0,059 \text{ pH}$$

$$\text{pente : } -0,059 \text{ V}$$



$$\text{pente : } 0$$

6) dismutation du dichlore :



donc

$$(3) = \frac{(2) - (1)}{2}$$

$$-RT \ln K^0 = \frac{-2F E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}^0 + 2F E_{\text{HClO}/\text{Cl}_2}^0}{2}$$

$$\log K^{\circ} = \frac{1}{0,059} (E^{\circ}_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-} - E^{\circ}_{\text{HClO}/\text{Cl}_2})$$

A.N.  $\log K^{\circ} = \frac{1}{0,059} (1,39 - 1,59)$

$$= -3,39$$

$$K^{\circ} = 10^{-3,39}$$

$$K^{\circ} = 4,08 \cdot 10^{-4}$$

7) 48 L de dichlore correspondent à un nombre de moles :

$$n = \frac{P V}{R T}$$

A.N.  $= \frac{1,013 \cdot 10^5 / \text{Pa} \quad 48 \cdot 10^{-3} / \text{m}^3}{8,314 \quad 273}$

$$n = 2,14 \text{ moles} \cdot \text{L}^{-1} \quad (\text{noté } c_0)$$

remarque : on trouve le résultat en sachant que le volume d'une mole de gaz dans les conditions normales (273 K, 1 atm) est

22,414 L donc

$$n = \frac{48}{22,414}$$

8)

$$c = \frac{m}{M}$$

$$= \frac{1 \cdot 10^{-3} / \text{g L}^{-1}}{35,5 / \text{g mol}^{-1}}$$

$$c = 28,2 \cdot 10^{-6} \text{ mol L}^{-1}$$

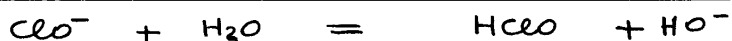
$$c = c_0 \frac{v}{V + v} \quad \text{négligeable}$$

$$v = \frac{c}{c_0} V$$

$$v = \frac{28,2 \cdot 10^{-6}}{2,14} \cdot 60 \cdot 10^3 / L$$

$$v = 0,789 L$$

9)  $\rightarrow$   $\text{ClO}^-$  est une base. On écrit la R.P. :



La constante de cette réaction est :

$$K = \frac{[\text{HClO}][\text{HO}^-]}{[\text{ClO}^-]}$$

$$= \frac{[\text{HClO}]}{[\text{ClO}^-]} \frac{K_e}{h}$$

$$K = \frac{K_e}{K_A}$$

(c'est en fait le  $K_B$ )

$$K = \frac{10^{-14}}{10^{-7,5}}$$

$$K_B = 10^{-6,5}$$

$\rightarrow$  résolution :

(on travaille pour un volume  $V$ )

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ClO}^- & + & \text{H}_2\text{O} & = & \text{HClO} & + & \text{HO}^- \\ \text{moles: } cV - \xi & & & & \xi & & \xi \\ \text{equilibre} & & & & & & \\ \text{(volume } V) & & & & & & \end{array}$$

$$K_B = \frac{\xi^2 / V^2}{(cV - \xi) / V}$$

$$= \frac{[\text{HO}^-]^2}{c - [\text{HO}^-]}$$

On résout d'où :

$$[\text{HO}^-] = 2,83 \cdot 10^{-6} \text{ mol L}^{-1}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_e}{[\text{HO}^-]}$$

$$= 3,53 \cdot 10^{-9} \text{ mol L}^{-1}$$



$$\text{pH} = 8,45$$

$$[\text{HClO}] = [\text{HO}^-]$$

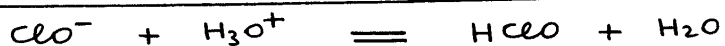
$$[\text{HClO}] = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ mol L}^{-1}$$

$$[\text{ClO}^-] = c - [\text{HClO}]$$

$$[\text{ClO}^-] = 25,4 \cdot 10^{-6} \text{ mol L}^{-1}$$

10) On verse de l'acide pour baisser le pH.

→ On écrit la R.P.

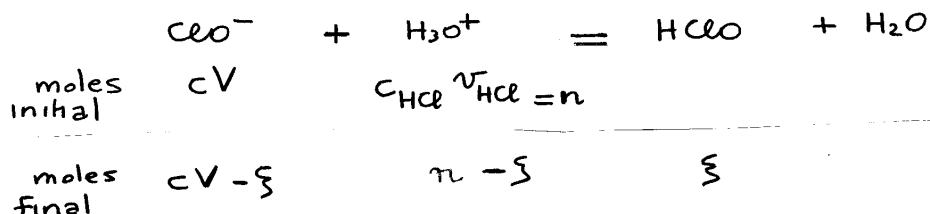


La constante de cette réaction est  $K = \frac{1}{K_A} = 10^{7,5}$

→ Résolution

On peut partir de l'état obtenu en 9)

mais il sera plus simple de partir de l'état avant réaction sur  $\text{H}_2\text{O}$



Le volume total est  $V+v$  assimilé à  $V$  en supposant  $v \ll V$

$$\frac{1}{K_A} = \frac{\xi/V}{(cV - \xi)/V} h$$

A.N.  $K_A = h = 10^{-7,5}$

donc  $\xi/V = c - \xi/V$

$$[\text{HClO}] = [\text{ClO}^-] = \frac{c}{2}$$

Enfin

$$h = \frac{n}{V} - \frac{\xi}{V}$$

$$h = \frac{C_{HCl} v_{HCl}}{V} - \frac{c}{2}$$

$\uparrow$   
 $0,032 \cdot 10^{-6}$

$\uparrow$   
 $14,1 \cdot 10^{-6}$

On obtient donc

$$\frac{C_{HCl} v_{HCl}}{V} - \frac{c}{2} \approx 0$$

(ce qui revient à supposer la réaction étudiée comme totale - prévisible car  $K \gg 1$  - )

$$v_{HCl} = \frac{c}{2} \frac{V}{C_{HCl}}$$

A.N.

$$= \frac{28,2 \cdot 10^{-6}}{2} \frac{50 \cdot 10^3 / L}{9}$$

$$v_{HCl} = 0,094 L$$

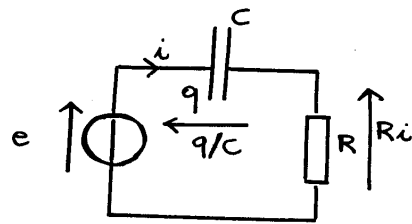
11) Cette eau est une solution tampon car  $pH = pK_A$

12) quand on verse de l'acide chlorhydrique dans de l'eau de Javel, on met en présence  $Cl^-$  et  $ClO^-$ .

L'acide étant concentré, localement le pH sera faible et il peut donc y avoir médismutation avec  $Cl^- + HClO$  donne un dégagement dangereux de dichlore  $Cl_2(g)$

défibrillateur

1)



on a :  $e = \frac{q}{C} + Ri$

et  $i = + \frac{dq}{dt}$

$$e = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}$$

→ charge

$$E = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}$$

$$q + RC \frac{dq}{dt} = CE$$

on pose  $\tau = RC$

$$q = CE + A e^{-t/\tau}$$

C.I.  $0 = CE + A$

$$q = CE (1 - e^{-t/\tau})$$

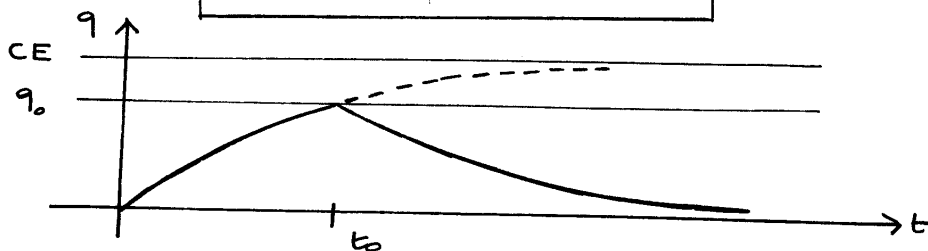
→ décharge

$$q + RC \frac{dq}{dt} = 0$$

$$q = A e^{-t/\tau}$$

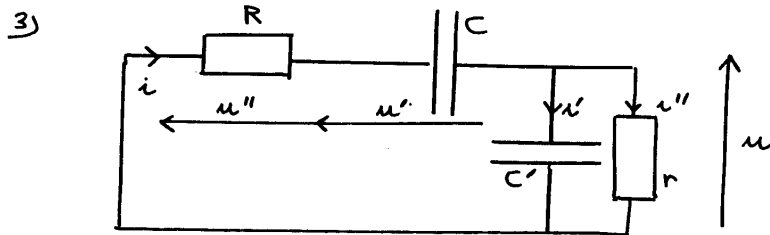
C.I.  $q_0 = A e^{-t_0/\tau}$

$$q = q_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$$



- 3) Pour une charge et décharge "rapide", il faut choisir  $\tau$  "petit" donc

$R$ "petit"
$C$ "petit"



équations :

- maille  $u + u' + u'' = 0$  (1)
- nœud  $i = i' + i''$  (2)
- ohm  $u'' = Ri$  (3)
- $i = C \frac{du'}{dt}$  (4)
- $i' = C' \frac{du}{dt}$  (5)
- $u = ri''$  (6)

d'où en fonction de  $u$  :

- (6)  $i'' = \frac{u}{r}$
- (5)  $i' = C' \frac{du}{dt}$
- (2) (2')  $i = \frac{u}{r} + C' \frac{du}{dt}$
- (3)  $u'' = \frac{R}{r} u + RC' \frac{du}{dt}$
- (1)  $u' = -u - \frac{R}{r} u - RC' \frac{du}{dt}$
- (4) (4')  $i = -C \frac{du}{dt} - \frac{RC}{r} \frac{du}{dt} - RC'C \frac{d^2u}{dt^2}$

on élimine  $i$  entre (2') et (4') :

$$\frac{u}{r} + C' \frac{du}{dt} = -C \frac{du}{dt} - \frac{RC}{r} \frac{du}{dt} - RC'C \frac{d^2u}{dt^2}$$

$\frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{1}{RC} + \frac{1}{RC'} \left( 1 + \frac{R}{r} \right) \right) \frac{du}{dt} + \frac{1}{rRCC'} u = 0$
--

remarque : une démarche par les complexes permet de retrouver le résultat

$$\underline{i} = \left( \frac{1}{r} + jC'\omega \right) \underline{u}$$

$$-\underline{u} = \left( R + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i}$$

En éliminant  $\underline{i}$  et en faisant  $j\omega = P$

$$\begin{aligned} -\underline{u} &= \left( R + \frac{1}{PC} \right) \left( \frac{1}{r} + PC' \right) \underline{u} \\ &= \left( \frac{R}{r} + RC'P + \frac{1}{rCP} + \frac{C'}{C} \right) \underline{u} \end{aligned}$$

on multiplie par  $P$

$$-P\underline{u} = \frac{R}{r} P\underline{u} + RC'P^2\underline{u} + \frac{1}{rC}\underline{u} + \frac{C'}{C}P\underline{u}$$

$$\left( 1 + \frac{R}{r} + \frac{C'}{C} \right) P\underline{u} + RC'P^2\underline{u} + \frac{1}{rC}\underline{u} = 0$$

$$\left( \frac{1}{RC} \left( 1 + \frac{R}{r} \right) + \frac{1}{RC} \right) P\underline{u} + P^2\underline{u} + \frac{1}{rRCC'}\underline{u} = 0$$

et en faisant  $P\underline{u} \rightarrow \frac{du}{dt}$

$$P^2\underline{u} \rightarrow \frac{d^2u}{dt^2}$$

on retrouve le même résultat.

- 4) On veut que le régime soit aperiodique  
(les racines de l'équation caractéristique sont réelles)

Donc

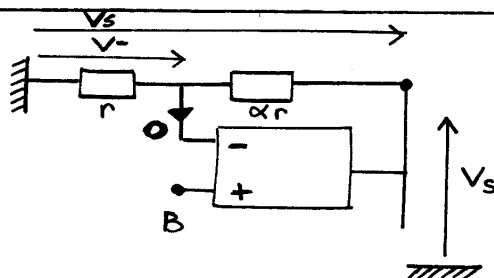
$$\Delta_{\text{(équation caractéristique)}} \geq 0$$

$$\left( \frac{1}{RC} + \frac{1}{RC} \left( 1 + \frac{R}{r} \right) \right)^2 \geq \frac{4}{rRCC'}$$

ou

$$\left[ C' + C \left( 1 + \frac{R}{r} \right) \right]^2 \geq 4 CC' \frac{R}{r}$$

5)



Le diviseur de tension fonctionne à vide ( $I^- \approx 0$ )

on peut donc utiliser la formule classique

$$\frac{V^-}{V_S} = \frac{r}{r + \alpha r}$$

or

$$V^- = V^+ \quad (V_B)$$

donc

$$V_B = V_S \frac{1}{1 + \alpha} \quad (1)$$

6) On peut appliquer le théorème de Millman en A. On le retrouve en appliquant la loi des nœuds.

$$Y_1 (e - V_A) + Y_2 (V_S - V_A) + Y_3 (V_B - V_A) = 0$$

$$V_A = \frac{Y_1 e + Y_2 V_S + Y_3 V_B}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (2)$$

7) On a étudié deux des trois nœuds importants. Il faut étudier le nœud B. on peut "faire Millman" mais on peut voir un diviseur à vide donc :

$$V_B = V_A \frac{Z_4}{Z_4 + Z_3}$$

$$V_B = V_A \frac{Y_3}{Y_4 + Y_3} \quad (3)$$

on reporte (1) et (3) dans (2)

$$V_S \frac{1}{1 + \alpha} \frac{Y_4 + Y_3}{Y_3} = \frac{Y_1 e + Y_2 V_S + Y_3 \frac{1}{1 + \alpha} V_S}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$\frac{V_S}{1 + \alpha} (Y_4 + Y_3) (Y_1 + Y_2 + Y_3) = Y_1 Y_3 e + Y_2 Y_3 V_S + Y_3^2 \frac{V_S}{1 + \alpha}$$

$$\frac{V_S}{e} = \frac{Y_1 Y_3 (1 + \alpha)}{Y_1 Y_3 - Y_2 Y_3 \alpha + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}$$

8) finalement :

$$H = \frac{\frac{1}{R^2}(1+\alpha)}{\frac{1}{R^2} - j\frac{C\omega}{R}\alpha + jC\omega\left(\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{R}\right)}$$

$$H = \frac{(1+\alpha)}{1 + jRC\omega(2-\alpha) - R^2C^2\omega^2}$$

on pose

$$\begin{aligned} A &= 1 + \alpha \\ \omega_0 &= \frac{1}{RC} \\ m &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$H = \frac{A}{1 + j2m\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

9)

$$G = \frac{A}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4m^2x^2}}$$

avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Pour A et m données :

→ asymptotes :

$$x \rightarrow 0 \quad G \sim A$$

$$G_{dB} \sim 20 \log A$$

$$x \rightarrow \infty \quad G \sim \frac{A}{x^2}$$

$$G_{dB} \sim 20 \log A - 40 \log x$$

(pente de -40 dB/décade)

valeur en  $x = 1$

$$G = A/2m$$

$$G_{dB} = 20 \log A - 20 \log(2m)$$

→ le maximum de G :

on cherche l'extremum du dénominateur au carré

$$D = (1-x^2)^2 + 4m^2x^2$$

$$D = (1-u)^2 + 4m^2u$$

$$\frac{dD}{du} = -2(1-u) + 4m^2$$

extremum pour  $u = x^2 = 1 - 2m^2$

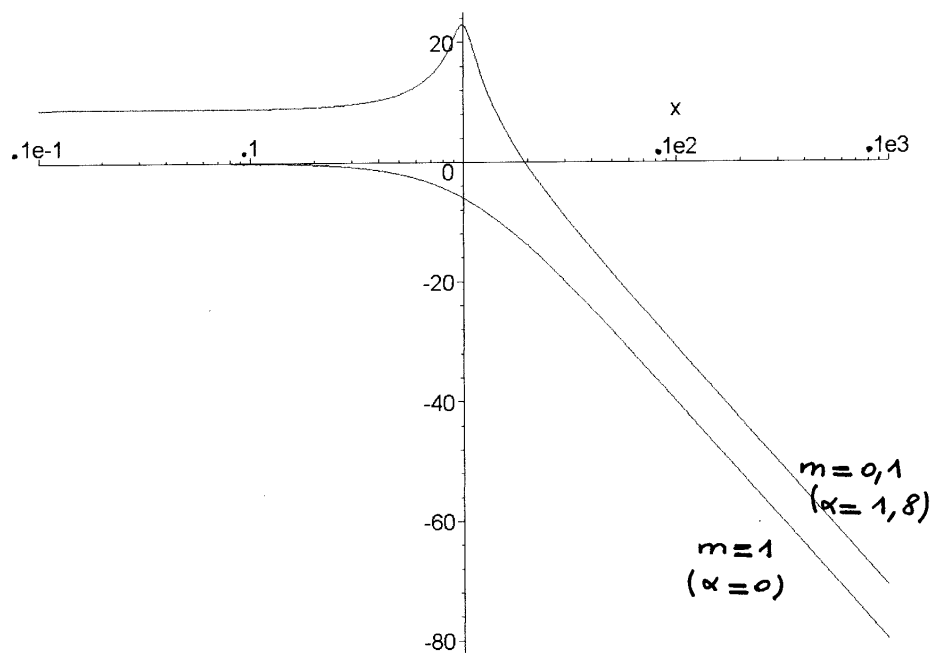
(il faut que  $m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ )

$$\begin{aligned} \text{alors } D_{\min} &= 4m^4 + 4m^2(1-2m^2) \\ &= 4m^2(1-m^2) \end{aligned}$$

$$G_{\max} = \frac{A}{2m} \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$$

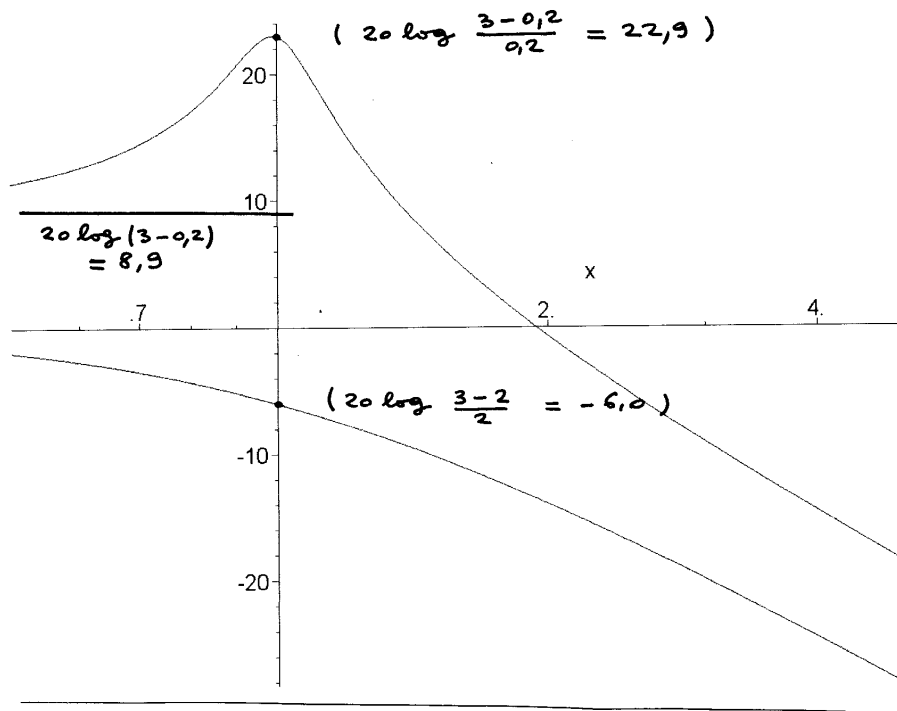
$$(G_{dB})_{\max} = 20 \log A - 20 \log(2m\sqrt{1-m^2}) \text{ si } m < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

tracés (avec  $A = 3 - 2m$ )



voir détail :





- 10) (Pour que le montage soit stable, il faut que  $m$  soit positif or  $m = 1 - \frac{\alpha}{2}$  ce qui nous limite à  $\alpha < 2$ )

Le montage est en fait un filtre passe bas du deuxième ordre (avec résonance si  $m < \frac{1}{\sqrt{2}}$  soit  $\alpha > 0,586$ )

$m$	1	0,707	0
$\alpha$	0	0,586	2
	pas de résonance		résonance
	<u>gain statique</u>		
	$A = 1 + \alpha$		
	$A = 1$	$A = 1,586$	$A = 3$
	<u>gain max (résonance)</u>		
	$G_{\max} = \frac{3-2m}{2m\sqrt{1-m^2}}$		
	$G_{\max} = 1,586$	$G_{\max} = \infty$	
	<u>Fréquence résonance</u>		
	$f_{\text{res}} = f_0 \sqrt{1-2m^2}$		
	$f_{\text{res}} = 0$	$f_{\text{res}} = f_0$	

Pour ne pas déformer le signal qui comporte de nombreuses fréquences, il faut que le gain soit le même quelle que soit la fréquence.

(donc éviter toute résonance)

on choisit

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

et on s'arrange pour que  $\omega_0 >$  toutes les pulsations du signal.

Le gain à fréquence nulle vaut 1,586

