Dipole magnétique - TD avec corrigé électromagnétisme UNIV LILLE 1

Electromagnétisme (Université de Lille)

Dipôle magnétique

Nota : depuis 2003, le dipôle magnétique fait partie du programme de MP et non de MPSI.

I₃₉.

Rayon de la Terre $R = 6{,}4.10^6$ m ; perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI ; $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ SI.

1) Donner l'expression en coordonnées sphériques du potentiel d'un dipôle électrique de moment $\vec{p}$.

2) En déduire le champ électrique de ce dipôle.

3) En déduire le champ magnétique d'un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$.

4) Le champ magnétique terrestre pointe vers le nord ; sur l'équateur, il vaut $B_0 = 2{,}8.10^{-5}$ T. On suppose que c'est celui d'un dipôle de moment $\vec{M}$ placé au centre de la Terre ; déterminer $\vec{M}$ (direction, sens, valeur numérique de son module).

5) Définir par un croquis la direction et le sens et exprimer la grandeur du moment magnétique d'une spire circulaire de rayon r parcourue par un courant I.

6) On suppose que le moment de la Terre est dû à ce que sa surface porte une densité superficielle de charge σ uniforme. Exprimer le moment magnétique de la Terre dû à au mouvement diurne de rotation de la Terre autour de l'axe des Pôles. On pourra considérer que ce moment est la somme des moments d'un empilement de spires et calculer le courant dû à la rotation de la charge située dans une direction faisant avec l'axe des Pôles un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$.

7) En déduire σ.

8) Calculer le champ électrique créé par σ un peu au-dessus de la surface de la Terre .

9) Conclure.

II₄₀. Solénoïde et dipôle.

Soit une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe Oz et parcourue par le courant I.

1) Déterminer par un argument précis de symétrie la direction du champ magnétique en un point de Oz.

2) Calculer ce champ magnétique en fonction de l'angle α sous lequel on voit le rayon de la spire.

3) Donner l'expression du moment dipolaire magnétique $\vec{M}$ de ce circuit.

Un solénoïde est constitué par un fil électrique enroulé suivant N tours répartis régulièrement sur un cylindre de rayon R et d'axe Ox entre les abscisses x_1 et x_2 ($0 < x_1 < x_2$). Il est parcouru par un courant I qui vu de l'origine tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. On pose $n = N/(x_2 - x_1)$ et $B_0 = \mu_0 nI$. On néglige dans tout le problème le caractère hélicoïdal du fil et considère que ce solénoïde est assimilable à une série de spires situées dans des plans perpendiculaires à l'axe.

4) Combien de spires comporte une tranche de solénoïde située entre les abscisses x et $x + dx$?

5) Quel est le moment dipolaire $\overrightarrow{dM}$ de cette tranche ?

6) Dans quel cas peut-on représenter approximativement le champ magnétique d'une spire par celui d'un dipôle ?

7) Dans cette approximation, quel est le champ magnétique en O d'une tranche de solénoïde située entre les abscisses x et $x + dx$?

8) Dans cette approximation, quel est le champ magnétique $\vec{B}_d$ que crée le solénoïde à l'origine ?

9) Calculer le champ magnétique en O exact du solénoïde, sans faire l'approximation dipolaire.

10) Donner un développement de cette expression quand x_1 et x_2 sont grands, jusqu'à la puissance –4 par rapport à x_1 et x_2, considérés comme du même ordre.

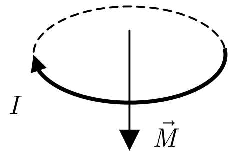
11) Déterminer R en fonction de x_1 pour que, si $x_2 = 2x_1$, l'expression obtenue par l'approximation dipolaire soit valable à 1 % près.

12) Par analogie avec les charges électriques, on appelle masse magnétique m l'objet qui placé à l'origine crée le champ magnétique $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m}{r^2}\vec{u}_r$. A quelles masses magnétiques est équivalent à grande distance le solénoïde ?

13) Comment pourrait être réalisé un monopôle magnétique, qui créerait le champ magnétique $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m}{r^2}\vec{u}_r$?

Réponses

I. 1) $V = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; 2) $E_r = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $\quad E_\theta = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $\quad E_\varphi = 0$; 3) $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\dfrac{2M\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \dfrac{M\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta\right]$; 4) $\vec{M}$ est parallèle à l'axe des Pôles, est orienté du nord vers le sud et vaut



$M = \dfrac{4\pi R^3 B}{\mu_0} = 7{,}34.10^{22}\ \mathrm{A.m^2}$; 5) $M = \pi r^2 I$; 6) $M = \dfrac{8\pi^2\sigma R^4}{3T}$;

7) $\sigma = -\dfrac{3TM}{8\pi^2 R^4} = -0{,}143\,\mathrm{C.m^{-2}}$; 8) $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = -1{,}6.10^{10}\ \mathrm{V/m}$; 9) voir corrigé.

II. 1) Oz est un axe de révolution du courant, donc le champ magnétique en un point de cet axe est porté par Oz ; 2) $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{2R}\vec{u}_z$; 3) $\vec{M} = \pi R^2 I \vec{u}_z$; 4) $dN = n dx$; 5) $\overrightarrow{dM} = \pi R^2 I n dx \vec{u}_x$; 6) à grande distance ; 7) $d\vec{B}_d = \dfrac{\mu_0 n I R^2 dx}{2x^3}\vec{u}_x$; 8) $\vec{B}_d = \dfrac{B_0 R^2}{4}\left(\dfrac{1}{x_1^2} - \dfrac{1}{x_2^2}\right)\vec{u}_x$; 9) $\vec{B} = \dfrac{B_0}{2}\left[\dfrac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \dfrac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}}\right]\vec{u}_x$;

10) $B = \dfrac{B_0 R^2}{4}\left(-\left(\dfrac{1}{x_2^2} - \dfrac{1}{x_1^2}\right) + \dfrac{3R^2}{4}\left(\dfrac{1}{x_2^4} - \dfrac{1}{x_1^4}\right)\right)$; 11) $R < \sqrt{\dfrac{4}{375}}x_1$; 12) le solénoïde équivaut à une masse m_1 en x_1 et une masse m_2 en x_2 telles que $-m_1 = m_2 = \pi R^2 n I$; 13) $x_2 \to \infty$.

Corrigé

I.

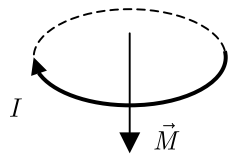
1) $\boxed{V = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

2) $E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \boxed{\dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$ $\quad E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = \boxed{\dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$ $\quad E_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$

3) $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\dfrac{2M\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \dfrac{M\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta\right]}$

4) A l'Équateur, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\vec{u}_\theta$, donc $\vec{M}$ est parallèle à l'axe des Pôles, est orienté du nord vers le sud et vaut $M = \dfrac{4\pi R^3 B}{\mu_0} = \dfrac{(6,4.10^6)^3 \times 2,8.10^{-5}}{10^{-7}} = \boxed{7,34.10^{22}\ \mathrm{A.m^2}}$

5) $\boxed{M = \pi r^2 I}$



6) Entre θ et $\theta + d\theta$ se trouve la charge $dq = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$ qui traverse un plan méridien en un jour sidéral $T = 86164\,\mathrm{s}$, d'où le moment

$$M = \int \frac{dq}{T}\pi(R\sin\theta)^2 = \int_0^\pi \frac{\sigma 2\pi R^2\sin\theta\, d\theta}{T}\pi(R\sin\theta)^2 = \frac{2\pi^2\sigma R^4}{T}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta = 2\int_{\cos\theta=1}^{\cos\theta=0} -(1-\cos^2\theta)\, d(\cos\theta) = 2\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\cos\theta=1}^{\cos\theta=0} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{M = \frac{8\pi^2\sigma R^4}{3T}}$$

7) Comme la Terre tourne d'ouest en est, la charge σ est négative.

$$\sigma = -\frac{3TM}{8\pi^2 R^4} = -\frac{3\times 86164 \times 7,34.10^{22}}{8\times\pi^2\times(6,4.10^6)^4} = \boxed{-0,143\,\mathrm{C.m^{-2}}}$$

8) Le théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon à peine supérieur à celui de la Terre donne le champ électrique dans l'atmosphère près du sol : $4\pi R^2 E = \dfrac{4\pi R^2\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = -36\pi.10^9 \times 0,143 = \boxed{-1,6.10^{10}\ \mathrm{V/m}}$

9) Cette valeur est énorme ; l'explication proposée par ce problème du magnétisme terrestre est fausse. En réalité, le moment magnétique terrestre est dû à des courants électriques dans le noyau de la Terre.

II. Solénoïde et dipôle.

1) Oz est un axe de révolution du courant, donc le champ magnétique en un point de cet axe est porté par Oz.

2) $\vec{B} = \oint \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\overrightarrow{d\ell}\wedge\vec{u}}{r^2} = B\vec{u}_z$; $B = \oint \dfrac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2}\sin\alpha = \dfrac{\mu_0 I\sin\alpha}{4\pi r^2}\oint d\ell = \dfrac{\mu_0 I\sin\alpha}{4\pi r^2}2\pi R = \dfrac{\mu_0 I\sin^3\alpha}{2R}$.

3) $\vec{M} = \pi R^2 I\vec{u}_z$ de ce circuit.

4) $dN = ndx$

5) $\overrightarrow{dM} = \pi R^2 Indx\vec{u}_x$

6) A grande distance.

7) En transposant l'expression du champ électrique d'un dipôle, on obtient $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3\left(\vec{M}\cdot\vec{u}\right)\vec{u} - \vec{M}}{r^3}$. Comme $\vec{u} \parallel \vec{M}$, $d\vec{B}_d = \dfrac{\mu_0 d\vec{M}}{2\pi x^3} = \dfrac{\mu_0 nIR^2dx}{2x^3}\vec{u}_x$

8) $\vec{B}_d = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mu_0\pi R^2 Indx}{2\pi x^3}\vec{u}_x = \frac{\mu_0 R^2 nI}{4}\left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right)\vec{u}_x = \frac{B_0 R^2}{4}\left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}\right)\vec{u}_x$

9)

$$B = \int \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha n dx = \frac{B_0}{2R} \int \sin^3 \alpha dx$$

$$x = R \operatorname{cotan} \alpha \Rightarrow dx = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$B = -\frac{B_0}{2} \int \sin \alpha d\alpha = \frac{B_0}{2} [\cos \alpha]_1^2$$

.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{B_0}{2} \left[\frac{x_2}{\sqrt{R^2 + x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{R^2 + x_1^2}} \right] \vec{u}_x}$$

10)

$$\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{R^2}{2x^2} + \frac{3R^4}{8x^4} + ...$$

$$B = \frac{B_0 R^2}{4} \left(-\left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2}\right) + \frac{3R^2}{4} \left(\frac{1}{x_2^4} - \frac{1}{x_1^4}\right) \right)$$

.

11) On veut que

$$\left| \frac{B_d - B}{B_d} \right| < 1\%$$

$$\frac{3R^2}{4} \frac{\frac{1}{x_1^4} - \frac{1}{x_2^4}}{\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2}} < 1\%$$

$$\frac{3R^2}{4} \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \right) < 1\%$$

$$R < \sqrt{\frac{1}{75} \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \right)}$$

$$R < \sqrt{\frac{4}{375}} x_1$$

12) Le solénoïde équivaut à une masse m_1 en x_1 et une masse m_2 en x_2 telles que

$$\vec{B}_d = \frac{\mu_0 R^2 n I}{4} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{m_1}{x_1^2} + \frac{m_2}{x_2^2} \right) \Rightarrow -m_1 = m_2 = \pi R^2 n I$$

13) Il faut que $x_2 \to \infty$.