Matrices magiques d'ordre 3

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante : une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}$ si

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note alors $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et donner les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$
2. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par : $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
   Déterminer les réels a et b pour que K soit une matrice de $\mathcal{E}$
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$. Déterminer x, y, z, t en fonction de a, b, c, d, e pour que M soit une matrice de $\mathcal{E}$
4. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 3
   (a) Calculer AJ et JA
   (b) Montrer que A appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement, si $AJ = JA$
   (c) Montrer que si A appartient à $\mathcal{E}$, alors $AJ = s(A)\,J$
5. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$
   (a) Montrer que le produit $AB \in \mathcal{E}$.
   (b) Établir l'égalité $s(AB) = s(A).s(B)$
6. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$
   (a) Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{E}$.
   (b) Montrer que $s(A) \neq 0$ et exprimer $s\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $s(A)$
7. Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose : $B = \dfrac{1}{3} s(A)\,J$ et $C = A - B$.
   On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{E}$ vérifiant $s(M) = 0$
   (a) Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que $BC = CB = 0$.
   (c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la formule : $(A - B)^n = A^n - B^n$
   (d) La matrice C appartient-elle à $\mathcal{F}$?
   (e) En déduire que $\mathcal{E} = \mathbf{Vect}J \oplus \mathcal{F}$

Matrices magiques d'ordre 3

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante : une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{E}$ si

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note alors $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. $s(I) = 1$ et $s(J) = 3$
2. Soit a et b deux réels

$$\begin{aligned} K \in \mathcal{E} \quad &\iff \quad \begin{cases} a + b + 1 = a - 1 = 6 \\ a - 1 = b + 8 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} a = 7 \\ b = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} \quad &\iff \quad MJ = JM \\ &\iff \quad \begin{cases} x + a + d = a + b + c \\ y + e + b = a + b + c \\ z + e + d = a + b + c \\ c + z + t = a + b + c \\ x + y + t = a + b + c \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = b + c - d \\ y = a + c - e \\ z = a + b + c - e - d \\ t = e + d - c \end{cases} \end{aligned}$$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 3

   (a) On trouve

$$AJ = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}$$

   et

$$JA = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \\ x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 & x_3 + y_3 + z_3 \end{pmatrix}$$

   Par définition A appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement, si

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = z_1 + z_2 + z_3 = x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2 = x_3 + y_3 + z_3$$

   si, et seulement, si $AJ = JA$

   (b) Soit A appartient à $\mathcal{E}$, alors

$$AJ = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 & y_1 + y_2 + y_3 \\ z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 & z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix} = s(A)\, J$$

Matrices magiques d'ordre 3

5. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{E}$
   (a) On a $(AB)J = A(BJ) = A(JB) = (AJ)B = (JA)B = J(AB)$, donc, d'après la question 4)b), $AB \in \mathcal{E}$.
   (b) On a $(AB)J = s(AB)J$ et d'autre part $(AB)J = A(BJ) = A(s(A)J) = s(B)AJ = s(B)s(A)J$, donc $s(AB) = s(A).s(B)$ car J est non nulle
6. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$
   (a) De $JA = AJ$, on multiplie à gauche et à droite par A^{-1}, on obtient $A^{-1}J = JA^{-1}$, donc $A^{-1} \in \mathcal{E}$.
   (b) Si $s(A) \neq 0$, alors $AJ = s(A)J = 0$, donc $AJ = 0$, en multipliant par A^{-1}, on obtient $J = 0$, ce qui est absurde.
   D'une part $s(AA^{-1}) = s(I_3) = 1$ et d'autre part $s(AA^{-1}) = s(A).s(A^{-1})$, donc $s(A^{-1}) = \dfrac{1}{s(A)}$
7. Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose : $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.
   On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{E}$ vérifiant $s(M) = 0$
   (a) On a $BJ = \dfrac{1}{3}s(A)J^2 = s(A)J$ et $JB = \dfrac{1}{3}s(A)J^2 = s(A)J$, donc B appartient à $\mathcal{E}$ et on a de plus $s(B) = s(A)$
   (b) On a
   $$\begin{aligned} BC &= B(A-B) \\ &= BA - B^2 \\ &= \frac{1}{3}s(A)JA - \frac{1}{9}s(A)^2J^2 \\ &= \frac{1}{3}s(A)^2J - \frac{1}{3}s(A)^2J = 0 \end{aligned}$$
   De même on montre que $CB = 0$
   (c) Soit n supérieur ou égal à 1, on a $A = B + C$. Puisque $BC = CB$, on peut appliquer la formule du binôme de Newton, on obtient
   $$A^n = (B+C)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k C^{n-k} = B^n + C^n$$
   Vu que le produit $BC = CB = 0$, donc la formule : $(A-B)^n = C^n = A^n - B^n$
   (d) On a $CJ = AJ - BJ = s(A)J - s(B)J = 0$ et $JC = JA - JB = AJ - BJ = 0$, donc C appartient à $\mathcal{E}$ et $s(C) = 0$, on peut donc conclure que $C \in \mathcal{F}$
   (e) Soit A de $\mathcal{E}$, on pose $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$, alors $A = C + B$, avec $C \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathbf{Vect}(J)$