

# Concours National Commun - Session 2013

## Corrigé de l'épreuve de mathématiques I Filière MP

La transformée de Laplace et théorèmes de Tauber

Corrigé par M.TARQI

### PARIE I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1 Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe fixé.

1.1.1 On a, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $|e^{-zt}| = e^{-xt}$ . Si  $x \neq 0$ , alors  $\forall a > 0$ ,  $\int_0^a e^{-xt} dt = \frac{1}{x}(1 - e^{-xa})$ , si  $x = 0$ ,  $|e^{-zt}| = 1$ . Donc la fonction  $t \mapsto e^{-zt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  si et seulement si,  $x = \operatorname{Re}(z) > 0$ .

1.1.2 Soit  $\gamma$  un réel non nul. Posons  $f(t) = \cos(\gamma t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  existe et vaut  $L$ , alors pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$ , la suite de terme général  $f(u_n)$  converge vers  $L$ . Mais la suite de terme général  $u_n = \frac{1}{\gamma}n\pi$  tend vers  $+\infty$ , cependant la suite image de terme général  $f(u_n) = (-1)^n$  est divergente, ce qui prouve que  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ . De même on montre que la fonction  $t \mapsto \sin(\gamma t)$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ , en conséquence la fonction  $t \mapsto e^{-iyt} = \cos(yt) - i \sin(yt)$  possède une limite que si  $y = 0$ .

1.1.3 Pour tout  $a > 0$ , on a

$$\int_0^a e^{-zt} dt = \frac{1}{z}(1 - e^{-az})$$

- Si  $x$  est non nul,  $\lim_{a \rightarrow +\infty} |e^{-az}| = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-ax}$  existe et vaut 0 si et seulement si,  $x > 0$ .
- Si  $x = 0$  ( donc  $y \neq 0$  car  $z$  est non nul ),  $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-az} = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-iay}$  n'existe pas.

En conclusion, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$  converge si et seulement si,  $\operatorname{Re}(z) > 0$  et dans ce cas

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}.$$

1.2 Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$  et  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

1.2.1 La fonction  $t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$  étant continue sur  $\mathbb{R}^+$ , donc sa primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}^+$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et pour tout  $x \geq 0$ ,  $F'(x) = e^{-z_0 x} f(x)$ , et comme  $x \mapsto e^{-z_0 x} f(x)$  est continue  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ . D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  existe car la fonction  $t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$  a une intégrale convergente, donc  $F$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

1.2.2  $F$  étant bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , donc il existe  $M > 0$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ ,  $|F(t)| \leq M$ . Donc

$$\forall t \geq 0, |e^{-(z-z_0)t} F(t)| \leq M e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t},$$

et comme la fonction  $t \mapsto e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , il est de même de la fonction  $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ .

1.2.3 Soit  $A > 0$ , on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^A e^{-zt} f(t) dt &= \int_0^A e^{-(z-z_0)t} e^{-z_0 t} f(t) dt \\
&= [e^{-(z-z_0)t} F(t)]_0^A + (z - z_0) \int_0^A e^{-(z-z_0)t} F(t) dt \\
&= e^{-(z-z_0)A} F(A) + (z - z_0) \int_0^A e^{-(z-z_0)t} F(t) dt, \quad \text{car } F(0) = 0.
\end{aligned}$$

On obtient donc par passage à la limite, quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , l'égalité demandée ( car  $F$  est bornée ) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt,$$

donc  $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$  est bien convergente.

### 1.3 Un lemme de Littlewood

1.3.1 On obtient à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_x^{\alpha x} (\alpha x - t) \psi''(t) dt &= [(\alpha x - t) \psi'(t)]_x^{\alpha x} + \int_x^{\alpha x} \psi'(t) dt \\
&= -(\alpha - 1)x \psi'(x) + \int_x^{\alpha x} \psi'(t) dt \\
&= -(\alpha - 1)x \psi'(x) + \psi(\alpha x) - \psi(x).
\end{aligned}$$

D'où la formule :

$$\psi(\alpha x) - \psi(x) = (\alpha - 1)x \psi'(x) + \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t) \psi''(t) dt.$$

1.3.2 D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
|x \psi'(x)| &\leq \frac{1}{1 - \alpha} (|\psi(\alpha x)| + |\psi(x)|) + \frac{1}{1 - \alpha} \left| \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t) \psi''(t) dt \right| \\
&\leq \frac{2}{1 - \alpha} \sup_{t \in [0, x]} |\psi(t)| + \int_{\alpha x}^x (t - \alpha x) |\psi''(t)| dt
\end{aligned}$$

Mais  $\psi''(t) \leq \frac{M}{t^2}$  pour tout  $t > 0$  et si  $t \in [\alpha x, x]$ ,  $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{(\alpha x)^2}$ . On obtient donc :

$$\int_{\alpha x}^x (t - \alpha x) |\psi''(t)| dt \leq \frac{M}{(\alpha x)^2} \int_{\alpha x}^x \left( \alpha x t - \frac{t^2}{2} \right) dt = M \frac{(1 - \alpha)^2}{2\alpha^2}$$

D'où :

$$|x \psi'(x)| \leq \frac{2}{1 - \alpha} \sup_{t \in [0, x]} |\psi(t)| + \frac{1 - \alpha}{2\alpha^2} M$$

1.3.3 Soit  $\varepsilon > 0$  donné. Il existe  $\alpha_0 \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{1 - \alpha_0}{2\alpha_0^2} M \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . D'autre part,  $\psi$  est prolongeable par

continuité en 0 ( par 0 ), donc il existe  $\eta > 0$  tel que  $0 < x < \eta$  entraîne  $|\psi(x)| \leq \frac{1 - \alpha_0}{2} \frac{\varepsilon}{2}$ . L'inégalité (\*) qui est vraie pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , entraîne  $|x \psi'(x)| \leq \varepsilon$  dès que  $x \in ]0, \eta[$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \psi'(x) = 0$ .

## PARIE II. EXEMPLES ET PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

2.1 D'après ce qui précède, la fonction  $t \mapsto e^{-(z-\lambda)t}$  a une intégrale convergente si et seulement si,  $Re(z-\lambda) > 0$ , autrement dit la fonction  $L(f_\lambda)(z)$  existe si et seulement si,  $Re(z) > Re(\lambda)$ . Donc  $L(f_\lambda)$  est définie sur  $\{z \in \mathbb{C} / Re(z) > Re(\lambda)\}$ , de plus

$$L(f_\lambda)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\lambda)t} dt = \frac{1}{z-\lambda}.$$

### 2.2 Abscisse de convergence

Soit  $E = \{Re(z) / L(f)(z) \text{ existe}\}$ . La propriété est évidente si  $E$  est vide on prend donc  $\sigma = +\infty$ , si  $E$  est non vide deux cas sont possibles :

- Si  $E$  est non minoré, on prend  $\sigma = -\infty$ . Alors  $L(f)$  serait définie sur tout le plan complexe.
- Si  $E$  est minoré, on prend  $\sigma = \inf E$ . En effet, soit  $x_0 > \sigma$  et  $z = x + iy$  tel que  $x > x_0$ , alors la fonction  $t \mapsto f(t)e^{-zt}$  a une intégrale convergente sur  $]0, +\infty[$  (d'après la question 1.2.3), d'où  $x \in E$ .

On en déduit  $E = [\sigma, +\infty[$  si  $\sigma \in E$  et  $E = ]\sigma, +\infty[$  si  $\sigma \notin E$ .

### 2.3 Quelques propriétés

2.3.1 D'après 1.2.3, on a  $L(f)(z) = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ . La fonction  $z \mapsto z - z_0$  est continue sur  $\mathbb{C}$ . La fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et bornée sur  $\mathbb{R}^+$  par  $M$ . La fonction  $\phi : (z, t) \rightarrow e^{-(z-z_0)t} F(t)$  est continue sur  $\Pi(\sigma(f)) \times \mathbb{R}^+$ , et :

$$|\phi(z, t)| \leq M e^{-(x-x_0)t} \leq M e^{-(a-x_0)t}$$

pour tout  $z$  tel que  $Re(z) = x > a > Re(z_0) = x_0$ .

La fonction majorante ne dépend pas de  $z$  et est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . Le théorème de continuité des intégrales à paramètres affirme que  $L(f)$  est continue pour tout  $z$  tel que  $Re(z) \geq a$ . Donc, puisque la notion de continuité est une notion locale,  $L(f)$  est continue sur  $\Pi(\sigma(f))$ .

2.3.2 Toujours d'après 1.2.3, on a :

$$L_f(x, y) = L(f)(x + iy) = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$$

Montrons que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega_f$ , pour cela il suffit de montrer que les dérivées partielles  $\frac{\partial L_f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial L_f}{\partial y}$  existent et sont continues sur  $\Omega_f$ .

La fonction  $(x, y) \mapsto z - z_0$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Soit maintenant, avec  $y$  fixé, la pplication :

$$g : (x, t) \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$$

$g$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Elle admet une dérivée partielle par rapport à  $x$  et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -tg(x, t)$$

qui est continue sur le même domaine. De plus :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq M t e^{-(x-a_0)t} \leq M t e^{-t(a-a_0)}$$

pour tout  $z$  tel que  $\operatorname{Re}(z) = x > a > \operatorname{Re}(z_0) = a_0$ . Cette dernière fonction est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ . Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres affirme que  $L_f$  est dérivable par rapport à  $x$  (cette dérivée partielle étant continue) pour tout  $z$  tel que  $\operatorname{Re}(z) \geq a$ . Donc, puisque la notion de dérivabilité est une notion locale,  $\frac{\partial L_f}{\partial x}$  existe et est continue sur  $\Pi(\sigma(f))$  et :

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt - (z - z_0) \int_0^{+\infty} t e^{-(z-z_0)t} F(t) dt \quad (*).$$

Soit  $A > 0$  donné,

$$\int_0^A e^{-(z-z_0)t} F(t) dt = \left[ -\frac{e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0} F(t) \right]_0^A + \frac{1}{z - z_0} \int_0^A e^{-zt} f(t) dt$$

En prenant la limite lorsque  $A$  tend vers l'infini, il vient, car  $F(0) = 0$ ,  $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$  et  $F$  majorée sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt = \frac{1}{z - z_0} \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad (1).$$

D'autre part, une primitive de  $t \mapsto (z - z_0)e^{-(z-z_0)t}$  sur  $\mathbb{R}^+$  est  $t \mapsto -\frac{(z - z_0)t + 1}{z - z_0} e^{-(z-z_0)t}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^A (z - z_0)t e^{-(z-z_0)t} F(t) dt &= \left[ F(t) \left( -\frac{(z - z_0)t + 1}{z - z_0} e^{-(z-z_0)t} \right) \right]_0^A \\ &+ \int_0^A \frac{(z - z_0)t + 1}{z - z_0} e^{-(z-z_0)t} e^{-z_0 t} f(t) dt \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons, en prenant la limite lorsque  $A$  tend vers l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty} (z - z_0)t e^{-(z-z_0)t} F(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{(z - z_0)t + 1}{z - z_0} e^{-zt} f(t) dt \quad (2).$$

D'où, en tenant compte des relations (1) et (2) et de l'égalité (\*) :

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x, y) = - \int_0^{+\infty} t e^{-zt} f(t) dt.$$

Et de la même façon, on démontre l'existence et la continuité sur  $] \sigma(f), +\infty[ \times \mathbb{R}$  de  $\frac{\partial L_f}{\partial x}$  avec cette fois, pour tout  $(x, y) \in ] \sigma(f), +\infty[ \times \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial L_f}{\partial y}(x, y) = -i \int_0^{+\infty} t e^{-zt} f(t) dt$ .

2.3.3 Soit  $x > \sigma(f)$ . On sait que  $L(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] \sigma(f), +\infty[$  et que :

$$L(f)'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t) dt = -L(t \mapsto t f(t))(x).$$

La fonction  $t \mapsto t f(t)$  est un élément de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ . La même démonstration que celle de la question précédente où  $f$  a été remplacé par  $t \mapsto t f(t)$  donnera que  $L(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] \sigma(f), +\infty[$  et que :

$$L(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} f(t) dt.$$

Une démonstration par récurrence montre que  $L(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]\sigma(f), +\infty[$  et que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$L(f)^{(p)}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} t^p e^{-xt} f(t) dt.$$

2.3.4 On sait que pour tout  $x$  et  $x_0$  dans  $]\sigma(f), +\infty[$  :

$$L(f)(x) = (x - x_0) \int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} F(t) dt,$$

où  $F$  continue, majorée sur  $\mathbb{R}^+$  par  $M$  et  $F(0) = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité de  $F$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $0 \leq x < \alpha \Rightarrow |F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

On a aussi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} F(t) dt = \int_0^\alpha e^{-(x-x_0)t} F(t) dt + \int_\alpha^{+\infty} e^{-t(x-x_0)} F(t) dt.$$

Or, si  $x > x_0$  :

$$\left| \int_0^\alpha e^{-(x-x_0)t} F(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1 - e^{-\alpha(x-x_0)}}{x - x_0} \right)$$

et

$$\left| \int_\alpha^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} F(t) dt \right| \leq M \frac{e^{-\alpha(x-x_0)}}{x - x_0}.$$

Ainsi :

$$|L(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M e^{-\alpha(x-x_0)}$$

Or pour cet  $\alpha$  fixé,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha(x-x_0)} = 0$ . Il existe donc  $A > 0$  tel que  $x > A \Rightarrow M e^{-\alpha(x-x_0)} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Finalement, pour  $0 > A$ , il vient  $|L(f)(x)| < \varepsilon$ .

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(f)(x) = 0.$$

## 2.4 Un exemple

2.4.1 On a  $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ , donc  $\frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1)$ , ainsi la fonction  $w$  se prolonge par  $\frac{1}{2}$  en 0.

Puisque  $w$  se prolonge par continuité en 0, les deux intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$  sont de même nature. Or pour tout  $t \geq 1$ ,  $\left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$  et par conséquent  $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$  existe, il est de même de  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ . Ceci montre que la transformée de Laplace de  $w$  existe en 0, et en tenant compte de la définition de  $\sigma(w)$ , on a donc nécessairement  $\sigma(w) \leq 0$ .

2.4.2 D'après l'étude précédente,  $L(w)$  admet une dérivée seconde sur  $]0, +\infty[$  avec  $\forall x > 0, L(w)''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt$ .

Les calculs montrent que

$$L(w)''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt = \frac{1}{x(x^2 + 1)}.$$

2.4.3 On trouve  $L(w)'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \alpha$  et  $L(w)(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - \arctan(x) + \alpha x + \beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels.

On sait que  $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} L(w)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \alpha \right) + \beta$ , donc nécessairement  $\alpha = \beta = 0$ .

D'où

$$L(w)(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - \arctan(x).$$

## 2.5 Un théorème de Césaro

2.5.1  $h$  étant continue par morceaux sur  $[0, 1]$  donc bornée par un certain  $M > 0$ , il est de même de la fonction  $t \mapsto h(e^{-xt})$  car si  $t \geq 0$ ,  $e^{-xt}$  décrit l'intervalle  $[0, 1]$ . Ainsi pour tout  $t \geq 0$ ,

$$|e^{-xt} g(t) h(e^{-xt})| \leq M e^{-xt} g(t).$$

Donc la fonction  $t \mapsto e^{-xt} g(t) h(e^{-xt})$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

2.5.2 Soit  $x > 0$ . Avec le changement de variable  $u = e^{-xt}$ , on a :

$$xL(g)(x) = \int_0^1 g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) du$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) h(e^{-xt}) dt = \int_0^1 h(u) g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) du.$$

D'après les hypothèses  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) du - 1 = 0$ . Maintenant pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \Delta_x(X^k) - \int_0^1 u^k du &= \int_0^1 u^k \left[ g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) - 1 \right] du \\ &= \frac{1}{k+1} \int_0^1 \left[ g\left(\frac{-\ln t}{(k+1)x}\right) - 1 \right] dt \quad \text{avec } t = u^{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \Delta_x(X^k) - \int_0^1 u^k du \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \left[ g\left(\frac{-\ln t}{(k+1)x}\right) - 1 \right] dt = 0$ . Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Delta_x(X^k) = \int_0^1 t^k dt,$$

puis on conclut par linéarité de l'opérateur  $\Delta_x$ .

2.5.3 D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément vers  $h$  sur  $[0, 1]$ . On a alors pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left| \Delta_x(h) - \int_0^1 h(u) du \right| \leq |\Delta_x(h) - \Delta_x(P_n)| + \left| \Delta_x(P_n) - \int_0^1 P_n(u) du \right| + \left| \int_0^1 (P_n(u) - h(u)) du \right|$$

Or

$$|\Delta_x(h) - \Delta_x(P_n)| \leq \sup_{u \in [0,1]} |h(u) - P_n(u)| x \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt = \sup_{u \in [0,1]} |h(u) - P_n(u)| x L(g)(x),$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta_x(h) - \Delta_x(P_n) = 0$ . Les autres termes convergent vers 0 d'après le résultat de la question

2.5.2 et la convergence uniforme. D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Delta_x(h) = \int_0^1 h(t) dt.$$

2.5.4 Calculons  $\Delta_x(h_1)$  : on a pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned}\Delta_x(h_1) &= \int_0^1 g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) h_1(u) \, du \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{u} g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) \, du \\ &= -x \int_{\frac{1}{x}}^0 g(t) \, dt, \quad \text{avec } t = \frac{-\ln u}{x}.\end{aligned}$$

D'où  $\int_0^{\frac{1}{x}} g(t) \, dt = \frac{1}{x} \Delta_x(h_1)$ .

Ainsi, pour tout  $a > 0$ , on a  $\frac{1}{a} \int_0^a g(t) \, dt = \Delta_{\frac{1}{a}}(h_1)$  et donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \int_0^a g(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Delta_x(h_1) = \int_0^1 h_1(t) \, dt = [\ln t]_{\frac{1}{e}}^1 = 1.$$

### PARIE III. COMPORTEMENT AU VOISINAGE DE L'ORIGINIE

3.1 Soit  $f \in (\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ .

3.1.1 Soit  $H(x) = \int_0^x f(t) \, dt$  avec  $x > 0$ .  $H$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$  et admet une limite finie en  $+\infty$ , donc bornée sur  $[0, +\infty[$ . Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto F(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)e^{-xt} = 0$ , donc par une intégration par parties,  $\forall x > 0$ ,

$$\begin{aligned}x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt &= [(F(t) - L(f)(0))e^{-xt}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} \, dt - L(f)(0)\end{aligned}$$

d'où

$$L(f)(x) - L(f)(0) = x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt.$$

3.1.2 On sait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = L(f)(0)$ , donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A > 0$  tel que  $|F(t) - L(f)(0)| \leq \varepsilon$  dès que  $t \geq A$ . D'autre part, pour  $x > 0$ , on a :

$$\begin{aligned}\left| x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt \right| &\leq \left| x \int_0^A (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt \right| + \left| x \int_A^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt \right| \\ &\leq \left| x \int_0^A (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt \right| + \varepsilon x \left| \int_A^{+\infty} e^{-xt} \, dt \right| \\ &\leq \left| x \int_0^A (F(t) - L(f)(0)) \, dt \right| + \varepsilon,\end{aligned}$$

inégalité qui montre que  $x \mapsto x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt$  tend vers 0 en  $0^+$ , il est de même de la fonction  $x \mapsto L(f)(x) - L(f)(0)$ , c'est à dire

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) \, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \, dt.$$

3.2 La fonction  $t \mapsto e^{it}$  répond à la question.

### 3.3 Théorème de Tauber

3.3.1 Il existe  $A > 0$  tel que  $|tf(t)| < 1$  dès que  $x \geq A$ , et soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $x = \operatorname{Re}(z) > 0$ . Alors pour tout  $t \geq A$ , on a  $|e^{-tz}f(t)| \leq \frac{e^{-tx}}{t}$  et comme la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{t}$  est intégrable sur  $[A, +\infty[$ , car  $x > 0$ , donc l'intégrale  $\int_A^{+\infty} e^{-tz}f(t) dt$  existe, il est de même de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-tz}f(t) dt$  ( la fonction  $t \mapsto e^{-zt}f(t)$  est continue sur  $[0, A]$  ). Donc  $\sigma(f) \leq 0$ .

3.3.2 Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Il existe  $A > 0$  tel que  $x \geq A \Rightarrow |tf(t)| \leq \varepsilon$ . On a donc :

$$\frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt = \frac{1}{a} \int_0^A |tf(t)| dt + \frac{1}{a} \int_A^a |tf(t)| dt \leq \frac{1}{a} \int_0^A |tf(t)| dt + \frac{(a-A)\varepsilon}{a}$$

Mais  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \int_0^A |tf(t)| dt = 0$ , donc l'inégalité précédente montre que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt = 0$ .

3.3.3 Une étude simple de la fonction  $u \mapsto \varphi(u) = u - e^{-u} + 1$ , montre que  $\varphi(u) \geq 0$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .

3.3.4 Soit  $a$  et  $x$  des réels strictement positifs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt - \int_0^a f(t) dt \right| &\leq \int_0^a (1 - e^{-xt})|f(t)| dt + \int_a^{+\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^a t|f(t)| dt + \int_a^{+\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^a t|f(t)| dt + \sup_{t \geq a} |tf(t)| \frac{e^{-ax}}{ax} \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt \right| &\leq \int_a^{+\infty} |tf(t)| \frac{e^{-xt}}{t} dt \\ &\leq \sup_{t \geq a} |tf(t)| \int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \\ &= \sup_{t \geq a} |tf(t)| \frac{e^{-ax}}{ax} \leq \sup_{t \geq a} |tf(t)| \frac{1}{ax} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité demandée :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt - \int_0^a f(t) dt \right| \leq x \int_0^a |tf(t)| dt + \sup_{t \geq a} |tf(t)| \frac{1}{ax}.$$

3.3.5 L'inégalité précédente reste vraie pour  $a = \frac{1}{x}$ ; on obtient donc :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\frac{t}{x}} dt - \int_0^a f(t) dt \right| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt + \sup_{t \geq a} |tf(t)|.$$

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$  donné. D'après les données et le résultat de la question 3.3.2, il existe  $a_0 > 0$  tel que pour tout  $a \geq a_0$ , on a :

$$\frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$



et

$$\sup_{t \geq a} |tf(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout  $a \geq a_0$ , on obtient :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{\frac{-t}{a}} dt - \int_0^a f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(f)(x) = \mu$ , alors  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(t) dt = \mu$ .

#### PARIE IV. UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE TAUBER DANS LE CAS RÉEL

4.1 La fonction  $f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  ( c'est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  ), donc par opérations les fonctions  $f_2$  et  $f_3$  sont continues sur  $]0, +\infty[$ .

Il existe  $\alpha_x \in ]a, x[$  tel que  $f_1(x) = \int_0^x tf(t) dt = x\alpha_x f(\alpha_x)$ , ceci montre que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$  existe. De même  $f_3(x) = \frac{\alpha_x}{x} f_1(\alpha_x)$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x)$  existe car  $0 < \frac{\alpha_x}{x} < 1$ .

4.2 pour tout  $x > 0$  et  $t > 0$ , on a  $|f_1(x)| \leq Mx$  et donc  $|f_2(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(t)e^{-xt} = 0$ .

4.3 L'inégalité précédente  $|f_2(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$  montre que la fonction  $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et ceci pour tout  $x > 0$ , donc  $\sigma(f_2) \leq 0$ .

D'autre part,  $|f_3(x)e^{-xt}| \leq M \frac{e^{-xt}}{t^2}$  et la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t^2}$  est intégrable ( par exemple ) sur tout  $[1, +\infty[$ , donc  $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et même sur  $[0, +\infty[$ , car elle est continue sur  $[0, 1]$  ( par prolongement ). Donc  $\sigma(f_3) \leq 0$ .

4.4 On remarque que  $f_2$  est dérivable est que  $f_2'(x) = \frac{xf_1'(x) - f_1(x)}{x^2} = f(x) - f_3(x)$  et donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} x \int_u^v f_2(x)e^{-xt} dt &= - \int_u^v f_2(t)(e^{-xt})' dt \\ &= -[f_2(t)e^{-xt}]_u^v + \int_u^v (f(t) - f_3(t)) dt \\ &= f_2(u)e^{-xu} - f_2(v)e^{-vx} + \int_u^v f(x)e^{-xt} dt - \int_u^v f_3(x)e^{-xt} dt \end{aligned}$$

ce qui entraîne évidemment l'égalité en question.

Puisque les fonctions  $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$  et  $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$  sont intégrables sur  $[0, +\infty[$ , la limite de la quantité à droite ( l'égalité précédente ) existe lorsque le couple  $(u, v)$  tend vers  $(0, +\infty)$ , donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$  existe et ceci pour tout  $x > 0$ , par conséquent  $\sigma(f) \leq 0$ . De plus, le passage à la limite entraîne :

$$\forall x > 0, \quad L(f)(x) = xL(f_2)(x) + L(f_3)(x).$$

4.5

4.5.1 D'après le lemme de Littelwood, il suffit donc de montrer que la fonction  $x \mapsto x^2 L(f)''(x)$  est bornée sur  $]0, +\infty[$ . En effet, pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $L(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} f(t) dt$  et donc

$$|x^2 L(f)''(x)| \leq \sup_{t \geq 0} |tf(t)| \int_0^{+\infty} x^2 t e^{-xt} dt$$

Or  $\int_0^{+\infty} x^2 t e^{-xt} dt = [-(xt + 1)e^{(-xt)}]_0^{+\infty} = 1$ , donc  $x \mapsto x^2 L(f)''(x)$  est bornée, et par conséquent  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x L(f)'(x) = 0$ .

4.5.2 Pour tout  $x > 0$ , on a

$$\begin{aligned} xL(g)(x) &= x \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt \\ &= x \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(1 - \frac{tf(t)}{M}\right) dt \\ &= x \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \frac{x}{M} \int_0^{+\infty} tf(t) e^{-xt} dt \\ &= 1 + \frac{1}{M} xL(f)'(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(g)(x) = 1 + \frac{1}{M} \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)'(x) = 1.$$

4.5.3 D'après le théorème de Césaro, puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(g)(x) = 1$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = 1$ . Mais

$$\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x dt - \frac{1}{Mx} \int_0^x tf(t) dt = 1 - Mx f_1(x) = x f_3(x).$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f_3(x) = 0$ .

4.6 Soit donc  $\varepsilon > 0$  et  $A > 0$  tel que  $|f_2(t)| \leq \varepsilon$  dès que  $t \geq A$ . Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} |xL(f_2)(x)| &\leq \left| \int_0^A x e^{-xt} f_2(t) dt \right| + \left| \int_A^{+\infty} x e^{-xt} f_2(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0, A]} |f_2(t)| \int_0^A x e^{-xt} dt + \varepsilon \int_A^{+\infty} x e^{-xt} dt \\ &\leq \sup_{t \in [0, A]} |f_2(t)| Ax + \varepsilon. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f_2)(x) = 0$ .

4.7 On sait que, d'après la question 4.4, que  $\forall x > 0$ ,  $L(f_3)(x) = L(f)(x) - xL(f_2)(x)$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(f_3)(x)$  existe et vaut 0 (d'après les hypothèses  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(f)(x) = 0$ ). Le théorème de Tauber (question 3.3) assure

que  $\int_0^{+\infty} f_3(t) dt$  existe et égale à 0, car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f_3(x) = 0$ .

4.8 On a

$$L(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{f'(t)}{t}dt = [f_2(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{f_1(t)}{t}dt = L(f_3)(0),$$

car  $f_2(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$ . Donc  $L(f)(0) = 0$ .

4.9 Considérons la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $t \mapsto f(t) = \phi(t) - \mu e^{-t}$ . La fonction  $f$  vérifie les conditions suivantes :

- la fonction  $t \mapsto tf(t) = t\phi(t) - \mu te^{-t}$  est bornée sur  $]0, +\infty[$ ,
- la fonction  $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} \phi(t)e^{-xt}dt - \frac{\mu}{x+1}$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $0^+$ .

Donc, d'après ce qui précède,  $L(f)(0)$  existe et vaut 0, c'est à dire  $L(\phi)(0)$  existe et vaut  $\mu$ .

• • • • •