CORRIGÉ DM N°10 (d'après ENSAIT 1998, ESIM PSI 1998, ENSI MP 1992 etc...)

Première partie :

1. Pour tout $(x,\theta)\in\mathbb{R}\times[0\,;\pi]$ et tout $n\in\mathbb{N}$, notons $f_n(x,\theta)=\cos(x\sin\theta-n\theta)$. Alors :

– Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^k f_n}{\partial x^k}$ existe et

$$\forall\,(x,\theta)\in\mathbb{R}\times[0\,;\pi],\ \frac{\partial^k f_n}{\partial x^k}(x,\theta)=(\sin\theta)^k\cos\big(x\sin\theta-n\theta+k\tfrac{\pi}{2}\big).$$

– Pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'application $\theta\mapsto\dfrac{\partial^k f_n}{\partial x^k}(x,\theta)$ est continue (donc aussi par morceaux) sur $[0\,;\pi]$ d'après les théorèmes usuels.

– Pour tout $\theta\in[0\,;\pi]$, l'application $x\mapsto\dfrac{\partial^k f_n}{\partial x^k}(x,\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes usuels.

– Pour tout $(x,\theta)\in\mathbb{R}\times[0\,;\pi]$ et tout $k\in\mathbb{N}$, on a la domination

$$\left|\frac{\partial^k f_n}{\partial x^k}(x,\theta)\right|\leqslant 1\,,$$

et la fonction constante égale à 1 est continue et intégrable sur $[0\,;\pi]$.

Un corollaire du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre permet alors d'affirmer que J_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\,k\in\mathbb{N},\ \forall\,x\in\mathbb{R},\ J_n^{(k)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\sin\theta)^k\cos\big(x\sin\theta-n\theta+k\tfrac{\pi}{2}\big)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Nous aurons besoin par la suite, en particulier, des relations :

$$J_n'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\sin\theta)\sin(x\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta\quad\text{ et }\quad J_n''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\sin\theta)^2\cos(x\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $J_{-n}(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\cos(x\sin\theta+n\theta)\,\mathrm{d}\theta$. En posant $\theta=\pi-t$ dans cette intégrale, on obtient :

$$J_{-n}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin t-nt+n\pi)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(-1)^n\cos(x\sin t-nt)\,\mathrm{d}t$$

soit ; $J_{-n}(x)=(-1)^n\,J_n(x)$.

3. a) En utilisant la formule « bien connue » : $\cos(p)-\cos(q)\;=\;-2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}J_{n+1}(x)-J_{n-1}(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big(\cos\big(x\sin\theta-(n+1)\theta\big)-\cos\big(x\sin\theta-(n-1)\theta\big)\Big)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin(x\sin\theta-n\theta)\ \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

donc : $J_{n+1}(x)-J_{n-1}(x)=-2J_n'(x)$.

b) De même, en utilisant la formule $\cos(p)+\cos(q)\;=\;2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x\big[J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)\big]&=\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\Big(\cos\big(x\sin\theta-(n+1)\theta\big)+\cos\big(x\sin\theta-(n-1)\theta\big)\Big)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\theta-n\theta)\underbrace{x\cos\theta}_{\substack{=(x\cos\theta-n)+n\\(\text{astuce !})}}\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\theta-n\theta)(x\cos\theta-n)\,\mathrm{d}\theta+\frac{2n}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{\pi}\Big[\sin(x\sin\theta-n\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi}+2n\,J_n(x)\end{aligned}$$

soit : $x\big[J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)\big]=2n\,J_n(x)$.

c) Des deux relations précédentes, on déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}J_{n-1}(x) - \frac{1}{2}J_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)\right) - \frac{1}{2}J_{n+1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)\,.$$

Deuxième partie : Développement de J_0 en série entière

1. Il s'agit ici de calculer les célèbres *intégrales de Wallis.* Pour cela, on fait une intégration par parties, pour $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} I_p = \int_0^\pi \sin^{2p}\theta &= \int_0^\pi (\underbrace{-\sin^{2p-1}\theta}_{=u})(\underbrace{-\sin\theta}_{=v'})\,\mathrm{d}\theta \\ &= \underbrace{\big[-\sin^{2p-1}\theta\cos\theta\big]_0^\pi}_{=0} + (2p-1)\int_0^\pi \underbrace{\cos^2\theta}_{=1-\sin^2\theta}\,\sin^{2p-2}\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= (2p-1)(I_{p-1} - I_p), \end{aligned}$$

d'où l'on tire : $I_p = \dfrac{2p-1}{2p}I_{p-1}$.

Puisque $I_0 = \pi$, il est ensuite facile d'en déduire par récurrence :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ I_p = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}\pi\,.$$

(*je n'ai pas plus détaillé, cela a déjà été fait maintes fois en classe...*)

2. *Attention :* l'énoncé précise bien qu'il s'agit d'une série de fonctions de la variable réelle θ (et non pas de x !).

On a, *à x fixé* :

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R},\ \left|(-1)^p\frac{x^{2p}\sin^{2p}\theta}{(2p)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2p}}{(2p)!}\,,$$

donc en notant $u_p\colon \theta \mapsto (-1)^p\dfrac{x^{2p}\sin^{2p}\theta}{(2p)!}$, on a $\|u_p\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{|x|^{2p}}{(2p)!}$, terme général d'une série numérique convergente (de somme $\operatorname{ch} x$).

Cela prouve la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_p$.

3. On en déduit la convergence uniforme de la série de fonctions (de θ) sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur le *segment* $[0\,;\pi]$, ce qui autorise à intégrer terme à terme dans la suite d'égalités suivante, où l'on remplace cos par son développement en série entière puis les I_p par les valeurs trouvées précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}\sin^{2p}\theta}{(2p)!}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}\int_0^\pi \sin^{2p}\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}\frac{I_p}{\pi} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}. \end{aligned}$$

4. Compte tenu des égalités :

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 t = 1 - \cos^2 t\,,$$

on tire directement de l'égalité de la question précédente (appliquée à $2x$), pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1+\cos(2x\sin\theta))\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p!)^2}x^{2p} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p!)^2}x^{2p}$$

et

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p!)^2}x^{2p}\,.$$

Troisième partie : Développement de J_n en série entière

1. L'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'affirmer que $|R_p(x)|$ est majoré par $\dfrac{1}{(p+1)!}\sup\limits_{t\in[0;x]}\left|J_n^{(p+1)}(t)\right|$.

Or pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\left|J_n^{(p+1)}(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 1 = 1$ (en majorant sin et cos par 1), donc $R_p(x) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cela signifie que J_n est somme de sa série de Taylor.

Comme cela est vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$, le rayon de convergence est infini.

2. On démontre la relation proposée par récurrence sur k (l'existence des dérivées successives ne pose pas de problème puisque l'on sait que J_n est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$).

- Pour $k=0$, la formule proposée s'écrit : « $J_n = J_n$ », elle est donc vraie (l'énoncé disait $k\geqslant 1$, mais on peut commencer à $k=0$).
- Supposons l'égalité vérifiée à un rang k. En dérivant la relation et en utilisant la relation obtenue à la question **I.3.a)**, on obtient :

$$\begin{aligned}
J_n^{(k+1)} &= \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}J'_{n-k+2i}\\
&= \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\left(J_{n-k+2i-1}-J_{n-k+2i+1}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{i=0}^{\overset{k+1}{\cancel{k}}}(-1)^i\binom{k}{i}J_{n-k+2i-1}-\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}J_{n-k+2i+1}\right) \qquad \left(\text{car } \binom{k}{k+1}=0\right)\\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k}{i}J_{n-k+2i-1}-\sum_{\substack{\cancel{i=1}\\ i=0}}^{k+1}(-1)^{i-1}\binom{k}{i-1}J_{n-k+2i-1}\right) \qquad \left(\text{chgt indice } i=i'-1 \text{ et } \binom{k}{-1}=0\right)\\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\left[\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right]J_{n-k+2i-1}\\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}J_{n+2i-(k+1)} \qquad (\text{triangle de Pascal})
\end{aligned}$$

  ce qui est bien le résultat voulu à l'ordre $k+1$, et achève la récurrence.

Autre démonstration possible, sans récurrence : reprendre l'expression de $J_n^{(k)}$ *sous forme intégrale et, dans celle-ci, écrire* $\sin^k\theta = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^k$*, puis développer par la formule du binôme etc...*

3. On a $J_n(0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases}0 & \text{si } n\neq 0\\ 1 & \text{sinon}.\end{cases}$

Dans la somme

$$J_n^{(k)}(0) = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}J_{n-k+2i}(0),$$

tous les termes sont nuls sauf s'il existe $i\in[\![0\,;k]\!]$ tel que $n-k+2i=0$, ce qui impose à k d'être de la forme $n+2p$ avec $p\in\mathbb{N}$.

On aura donc :

$$\forall\, p\in\mathbb{N},\ J_n^{(n+2p)}(0) = \frac{1}{2^{n+2p}}(-1)^p\binom{n+2p}{p},$$

toutes les autres dérivées en 0 étant nulles.

4. Puisque J_n est somme de sa série de Taylor on en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall\, x\in\mathbb{R},\ J_n(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{J_n^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{J_n^{(n+2p)}(0)}{(n+2p)!}x^{n+2p} = \left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{\binom{n+2p}{p}}{(n+2p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.
\end{aligned}$$

Cette formule n'est vraie que pour $n \in \mathbb{N}$ (puisqu'elle a été obtenue à l'aide des dérivées k-ièmes, où il faut $k \in \mathbb{N}$...). Mais en utilisant **I.1**, on a pour $x \in \mathbb{N}$:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p} ,$$

et par le changement d'indice $q = n + p$ on obtient :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{q=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{q-n}}{(q-n)!q!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+q}$$

et enfin, en posant $m = -n$, on a donc pour m entier négatif :

$$J_m(x) = \sum_{q=-m}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!(m+q)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+q} .$$

En conclusion, on peut écrire, pour tout entier $\underline{n \in \mathbb{Z}}$:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=\max(-n,0)}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} .$$

Cela n'était pas demandé, mais c'est indispensable pour la question suivante !

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a, en utilisant le DSE de exp :

$$\mathrm{e}^{\frac{xz}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n z^n}{2^n n!}}_{=a_n} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{x^n}{2^n z^n n!}}_{=b_n} .$$

Puisque ces deux séries sont absolument convergentes. on peut utiliser le théorème de Fubini et écrire :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_q b_p = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^q z^q}{2^q q!}(-1)^p \frac{x^p}{2^p z^p p!} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+q}}{2^{p+q} q! p!} z^{q-p}.$$

On utilise alors une sommation par paquets pour regrouper tous les termes tels que $q - p = n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Puisque $q = n + p$ et qu'il faut $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$ on a donc :

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=\max(-n,0)}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{n+2p}}{2^{n+2p}(n+p)!p!} z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n ,$$

compte tenu du résultat de la question **I.4.**.

Quatrième partie : Application à une équation différentielle

1. a) Compte tenu de l'expression obtenue en **I.1** pour J_n'' on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2(J_n''(x) + J_n(x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos^2\theta \cos(x \sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

D'autre part, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} xJ_n'(x) &= -\frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin\theta}_{=u'} \underbrace{\sin(x\sin\theta - n\theta)}_{=v}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi}\Big[x\cos\theta \sin(x\sin\theta - n\theta)\Big]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x\cos\theta - n)x\cos\theta\cos(x\sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

En développant et en utilisant la relation précédente, on trouve bien l'expression voulue.

b) D'après la question précédente on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + x^2 J_n(x) = \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos\theta\cos(x\sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\theta\,,$$

et pour répondre à la question, il ne reste plus qu'à montrer que cette dernière intégrale est bien égale à $n^2 J_n(x)$.

Pour cela, on utilise une astuce déjà vue :

$$\begin{aligned}\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos\theta\cos(x\sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}(x\cos\theta - n + n)\cos(x\sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}(x\cos\theta - n)\cos(x\sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\theta + \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} n\cos(x\sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{n}{\pi}\underbrace{\big[\sin(x\sin\theta - n\theta)\big]_{\theta=0}^{\theta=\pi}}_{=0} + \frac{n^2}{\pi}\int_0^{\pi} n\cos(x\sin\theta - n\theta)\,\mathrm{d}\theta = n^2 J_n(x),\end{aligned}$$

ce qui achève de démontrer que J_n vérifie l'équation différentielle proposée.

2. a) Si y est une solution de l'équation précédente qui s'écrit, pour un certain $R > 0$:

$$\forall\, x \in \left]-R\,;R\right[,\ y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\,,$$

alors on a, par dérivation terme à terme d'une série entière :

$$\forall\, x \in \left]-R\,;R\right[,\ y'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}\,,$$

donc y est solution de (E_n) si et seulement si pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$,

$$\begin{aligned}0 = x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k k(k-1)x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k k x^k - n^2\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2}x^k \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty}\big(k(k-1)a_k + ka_k - n^2 a_k + a_{k-2}\big)\,x^k + a_1(1-n^2)x - n^2 a_0.\end{aligned}$$

Par unicité du DSE cela équivaut à :

$$\begin{cases} \forall\, k \geqslant 2,\ a_k(k(k-1) + k - n^2) = a_k(k^2 - n^2) = -a_{k-2} \\ n^2 a_0 = (1-n^2)a_1 = 0\,. \end{cases}$$

b) En itérant :

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{4n+4},\ a_{n+4} = -\frac{a_{n+2}}{(n+4)^2 - n^2} = \frac{a_n}{(8n+16)(4n+4)} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)4^2 2!}\ \cdots$$

$$a_{n+2k} = -\frac{a_{n+2k-2}}{(n+2k)^2 - n^2} = -\frac{a_{n+2k-2}}{4(n+k)k} = \cdots = (-1)^k a_n \frac{n!}{4^k k!(n+k)!}\,.$$

Mais ensuite la relation donne $a_{n-2} = 0$ puis $a_{n-2k} = 0$, donc les termes dont l'indice a la parité que n et est plus petit que n sont tous nuls.

D'autre part, si n est pair, J_n est une fonction paire (cd. **I.1**) donc tous les termes de la série d'indices impairs sont nuls, et de même si n est impair tous les termes d'indice pair sont nuls.

Finalement , *tous* les termes d'indices $< n$ sont nuls, et ceux à partir de a_n sont définis par la relation trouvée ci-dessus, de sorte que l'on a :

$$\forall\, x \in \left]-R\,;R\right[,\ y(x) = a_n\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{n!}{4^k k!(n+k)!}x^{n+2k}.$$

On remarque que l'on retrouve l'expression de **III.4** à une constante près (quelle surprise !).

c) D'après ce qui précède, les seules solutions de (E_n) qui sont DSE sont proportionnelles à J_n ; elles forment donc un espace vectoriel de dimension 1, de base $\{J_n\}$.

Cinquième partie : Étude des zéros de J_0

1. Si $y(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$, $(x > 0)$,

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = \frac{1}{x^{3/2}}\left[x^2u''(x) + \left(\frac{1}{4} + x^2\right)u(x)\right]$$

D'où l'équation différentielle vérifiée par u :

$$(E) : x^2u'' + \left(\frac{1}{4} + x^2\right)u = 0$$

2. – Si $v'' + v = 0$ et u solution de (E), alors pour tout $x > 0$:

$$(uv'' - u''v)(x) = -u(x)v(x) + \left(\frac{1}{4x^2} + 1\right)u(x)v(x) = \frac{u(x)v(x)}{4x^2}\,.$$

– On remarque que $(uv' - v'u)' = uv'' - u''v$ d'où :

$$\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv'' - uv'')(x)\,\mathrm{d}x = \big[(uv' - u'v)\big]_a^b\,.$$

3. $v : x \mapsto \sin(x-a)$ vérifie $v'' + v = 0$ donc d'après la question précédente, si u vérifie (E), on a :

$$\int_a^{a+\pi} \frac{u(x)\sin(x-a)}{4x^2}\,\mathrm{d}x = -u(a+\pi) - u(a) \quad (*)$$

Supposons que J_0 ne s'annule pas sur $[a\,;a+\pi[$. Alors, par continuité, J_0 serait de signe constant sur cet intervalle ; notons $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } J_0 > 0 \text{ sur } [a\,;a+\pi[\,, \\ -1 & \text{si } J_0 < 0 \text{ sur } [a\,;a+\pi[\,. \end{cases}$.

Dans ces conditions, $u : x \mapsto \varepsilon\sqrt{x}J_0(x)$ serait strictement positive sur $[a\,;a+\pi[$ et solution de (E).

On aurait alors $-u(a) - u(a+\pi) \leqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^{a+\pi} \frac{u(x)\sin(x-a)}{4x^2}\,dx > 0$ (intégrale d'une fonction continue, strictement positive sur $]a\,;a+\pi[$ avec $a < a+\pi$), ce qui fournit une contradiction d'après $({}_*)$.

Il existe donc $x_a \in [a\,;a+\pi[$ tel que $J_0(x_a) = 0$.

Enfin, en appliquant ce résultat à tous les intervalles $[a+k\pi\,;a+(k+1)\pi[$, on obtient une infinité de zéros de J_0 sur $\mathbb{R}$.

Sixième partie : Une propriété d'orthogonalité des fonctions J_n

1. Le fait que φ soit une forme bilinéaire symétrique positive ne doit pas poser de problèmes...

Elle est de plus définie car : si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ est telle que $\varphi(f,f) = 0$ alors comme $h : x \mapsto xf(x)^2$ est positive et *continue* sur $[0,1]$, on en déduit que h est identiquement nulle sur $[0,1]$ par un résultat classique du cours d'intégration. On en déduit la nullité de f sur $]0,1]$ puis en 0 par continuité. Ceci montre que la forme est définie, c'est bien un produit scalaire.

2. a) Il suffit de calculer $y' = \alpha J_n'(\alpha x)$ et $y'' = \alpha^2 J_n''(\alpha x)$ et d'injecter dans (E_n) au point αx....

b) Posons $y(x) = J_n(\alpha x)$ et $z(x) = J_n(\beta x)$, puis $w = y'z - yz'$. Alors :

$$(xw)' = (xy'z - xyz')' = x(y''z - z''y) + y'z - yz' = (\beta^2 - \alpha^2)xyz$$

car :

$$x^2(y''z - z''y) = (-xy' + (n^2 - \alpha^2x^2)y)z + (xz' - (n^2 - \alpha^2x^2)z)y = x(z'y - y'z) + (\beta^2 - \alpha^2)x^2yz.$$

Une primitive demandée est donc $xyz' - xy'z$.

c) D' après la question précédente, on a pour $y = f_k$ et $z = f_\ell$ (avec des indices k et ℓ distincts)

$$\varphi(f_k, f_\ell) = \varphi(y,z) = \int_0^1 xyz = \frac{1}{s_k^2 - s_\ell^2}\Big[xyz' - xy'z\Big]_0^1 = \frac{1}{s_k^2 - s_\ell^2}(J_n(s_k)z'(1) - y'(1)J_n(s_\ell)) = 0$$

par définition de s_k et s_ℓ.

Cela démontre que les (f_k) forment une famille orthogonale pour le produit scalaire considéré.