Régime transitoire

Table des matières

Dans ce chapitre on va s'intéresser à l'effet d'une brusque variation de tension sur un système lineaire . Cette variation sera modélisée par une fonction appelée échelon de tension .

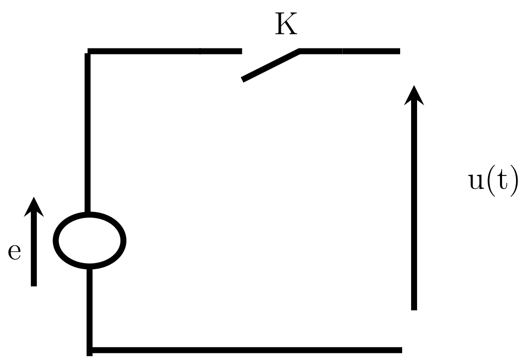
1 Circuit RC série soumis à un échelon de tension

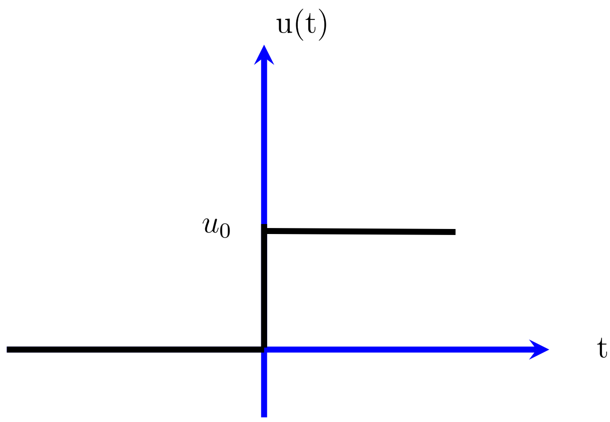
1.1 Echelon de tension

Il s'agit d'un signal électrique produit par une source libre de tension de la forme :

$$u(t) = \begin{cases} u_0, t \geqslant 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

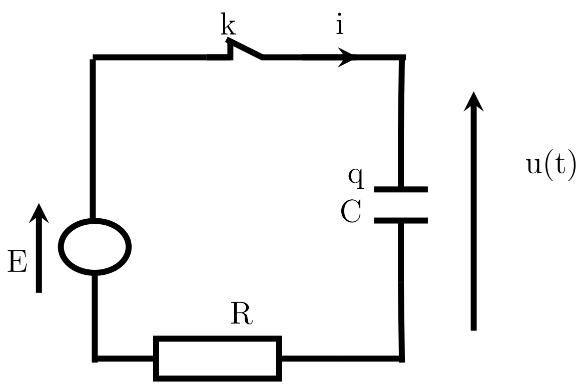
On peut réaliser cet échelon de tension par un basculement de l'interrupteur K à $t = 0$





1.2 Charge d'un condensateur

1.2.1 Conditions initiales



Pour $t < 0$ l'interrupteur k est ouvert et le condensateur est non chargé .
$q(0^-) = 0, u(0^-) = 0, i(0^-) = 0$
on ferme l'interrupteur k à $t = 0$,la continuité de la tension aux bornes du condensateur se traduit par

$$\boxed{u(0^-) = u(0^+) = 0}$$

de même la continuité de la charge

$$\boxed{q(0^-) = q(0^+) = 0}$$

1.2.2 Expression de u(t) et i(t)

Pour $t > 0$ la loi des mailles : $E = u + Ri$ avec $i = C\dfrac{du}{dt}$ donc

$$\boxed{RC\frac{du}{dt} + u = E}$$

On pose $\tau = RC$: constante du temps du circuit RC

$$\boxed{\tau\frac{du}{dt} + u = E}$$

La solution de cette équation s'écrit sous la forme

$$\boxed{u(t) = u_1(t) + u_2(t)}$$

u_1 : solution générale de l'équation : équation sans séconde membre
u_2 : solution particulier de l'équation complète

$$\boxed{u_1(t) = k\exp(-\frac{t}{\tau})}$$

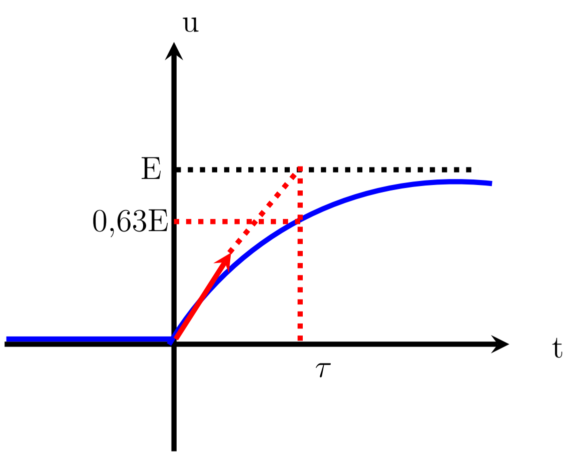
$u_2 = cte \Rightarrow u_2 = E$
donc

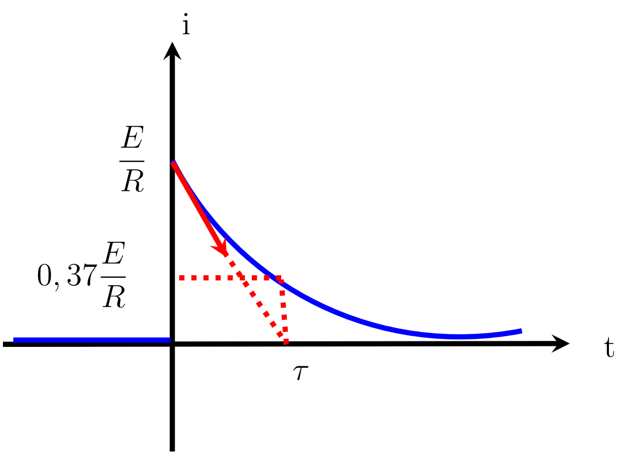
$$\boxed{u(t) = k\exp(-\frac{t}{\tau}) + E}$$

on détermine la constante k par les conditions initales
à $t = 0$ $u(0) = 0 \Rightarrow k + E = 0 \Rightarrow k = -E$ finalement

$$\boxed{u(t) = E(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))}$$

$$\boxed{i(t) = C\frac{du}{dt} = \frac{E}{R}\exp(-\frac{t}{\tau})}$$





• Remarque :on observe :

- une continuité de la tension u(t) en $t = 0$
- Une discontinuité du courant i(t) en $t = 0$

1.2.3 Régime transitoire-temps de relaxation

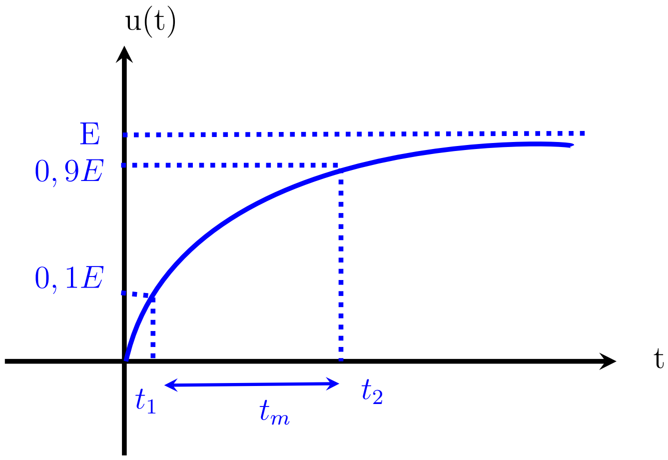
• Pour $t >> \tau$ $u \approx E$ le système se trouve alors en un régime établi indépendant du temps .
• Soit t_n la durée nécessaire au système pour approcher le régime établi
$u_t = E$ à 10^{-n} prés $(n = 2.3...)$
$\frac{u_t - u(t_n)}{u_t - u(0)} = 10^{-n} = \frac{E - u(t_n)}{E} = \exp(-\frac{t_n}{\tau})$

$$\boxed{t_n = 2,3n\tau}$$

τ : de l'ordre de grandeur du régime transitoire est appelée temps de relaxation
• ordre de grandeur
$R = 10^3\Omega, C = 0,1\mu F \Rightarrow \tau = 10^{-4}s$

1.2.4 Temps de monté

On appelle le temps de montée du signal la durée t_m nécessaire à la tension pour passer de $10^0/_0$ à $90^0/_0$ de sa valeur finale.



$u(t_1) = E(1 - \exp(-\frac{t_1}{\tau})) = 10^0/_0 E = 0,1E \Rightarrow \exp(-\frac{t_1}{\tau}) = 0,9 \Rightarrow t_1 = 0,1\tau$

$u(t_2) = E(1 - \exp(-\frac{t_2}{\tau})) = 90^0/_0 E = 0,9E \Rightarrow t_2 = 2,3\tau$

$$\boxed{t_m = t_2 - t_1 = 2,2\tau}$$

1.2.5 Aspect énergétique

$u + Ri = E$ en multipliant par $i = C\frac{du}{dt}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Cu^2) + Ri^2 = Ei}$$

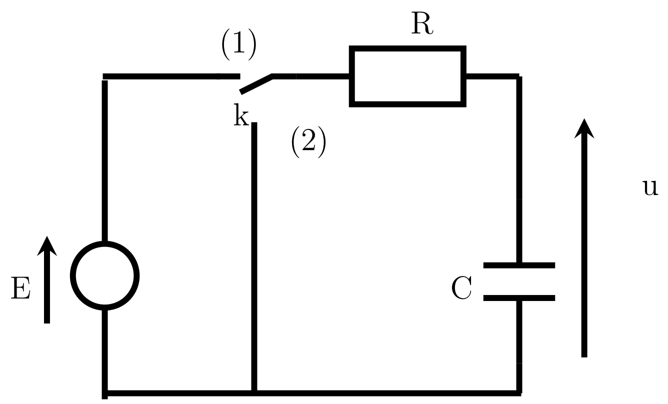
Ei : puissance fournie par le générateur
Ri^2 : puissance liée à l'effet joule dans la résistance
$\frac{1}{2}Cu^2 = E_e$: énérgie électrique emmagasinée dans le condensateur
$\int_0^E d(\frac{1}{2}Cu^2) + \int_0^\infty Ri^2dt = \int_0^\infty Eidt = \int_0^E ECdu = CE^2$

$$\boxed{w_J = \int_0^\infty Ri^2dt = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2}$$

1.3 Décharge d'un condensateur - Régime libre

1.3.1 Régime libre d'un circuit R,C

Le régime libre (ou propre) caractérise l'évolution du circuit RC en l'absence de la source .



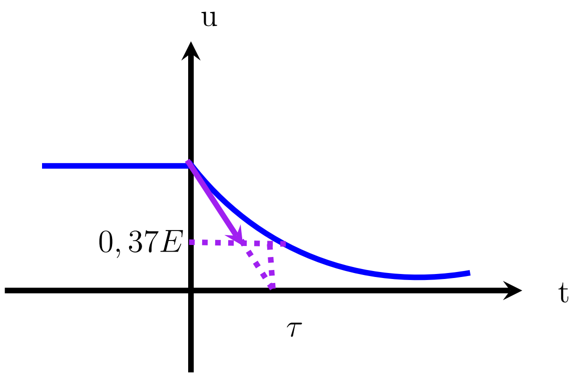
à $t < 0$ k se trouve dans la position (1) qui permet la charge du condensateur .Aprés quelques τ u atteint la valeur de E
à $t = 0$ k bscule vers la position (2) , le circuit RC se trouve dans le régime libre
la continuité de u aux bornes de C : $u(0^+) = u(0^-) = u_0 = E$
$i = C\frac{du}{dt}$ et $u + Ri = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{u + \tau\frac{du}{dt} = 0}$$

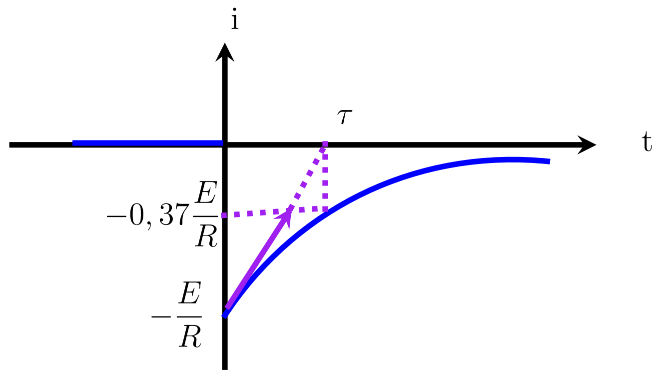
avec $\tau = RC$
la solution de cette équation s'écrit sous la forme $u(t) = k\exp(-\frac{t}{\tau})$, avec $u(0) = E = k$ donc

$$\boxed{u(t) = E\exp(-\frac{t}{\tau})}$$

$$\boxed{i = C\frac{du}{dt} = -\frac{E}{R}\exp(-\frac{t}{\tau})}$$



continuité de u en $t = 0$



discontinuité de i en $t = 0$

1.3.2 Aspect énergétique

En multipliant l'équation $u + Ri = 0$ par $idt = Cdu$

$Cdu + Ri^2dt = d(\frac{1}{2}Cu^2) + Ri^2dt = 0$

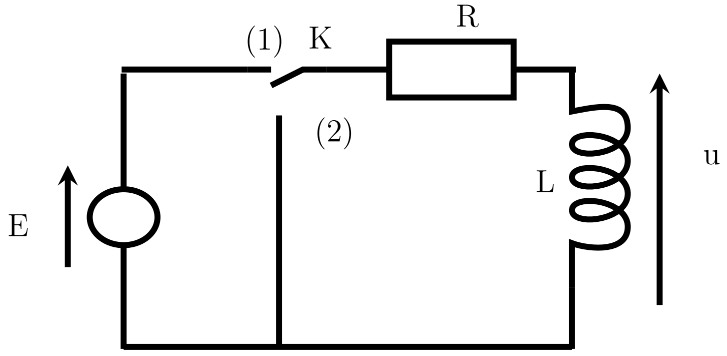
l'intégration entre $t = 0$ et $t = \infty$ (quelques τ) on obtient :

$$\boxed{w_J = \int_0^{\infty} Ri^2dt = \frac{1}{2}CE^2}$$

Le condensateur restitue ,au cours de la décharge ,sous forme d'effet Joule l'énergie qu'il avait emmagasinée pendant la charge .

2 Régime transitoire d'un circuit RL

2.1 Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension



Pour $t < 0$,le courant circulant dans le circuit RL est supposé nul .
k est placé en position (1) à $t = 0$

la continuité du courant dans la bobine se traduit par $i(0^-) = i(0^+) = 0$

pour $t \geqslant 0$: $E = Ri + u = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

$$\boxed{i + \tau\frac{di}{dt} = \frac{E}{R}}$$

avec $\tau = \dfrac{L}{R}$ temps de relaxation

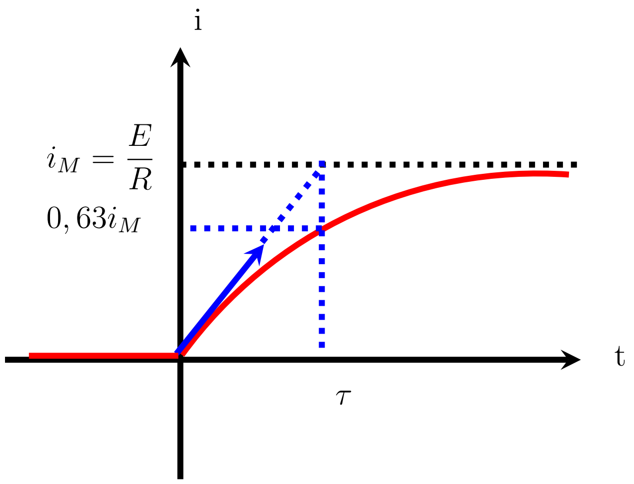
la solution de cette équation s'écrit sous la forme

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} + k\exp(-\frac{t}{\tau})}$$

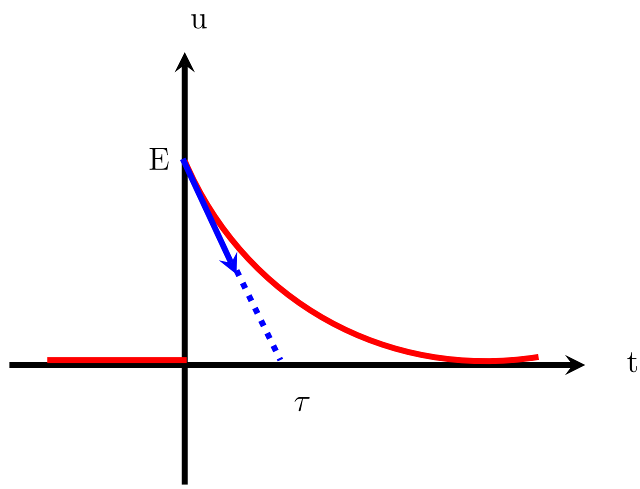
$i(0) = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{E}{R}$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))}$$

$$\boxed{u(t) = L\frac{di}{dt} = E\exp(-\frac{t}{\tau})}$$



continuité de i(t) en t=0



discontinuité de u(t) en t=0

- Aspect énergétique

En multipliant $E = Ri + L\dfrac{di}{dt}$ par idt

$Eidt = Ri^2dt + d(\dfrac{1}{2}Li^2)$

$\displaystyle\int_0^{\infty} Eidt = \int_0^{\infty} Ri^2dt + \int d(\frac{1}{2}Li^2)$

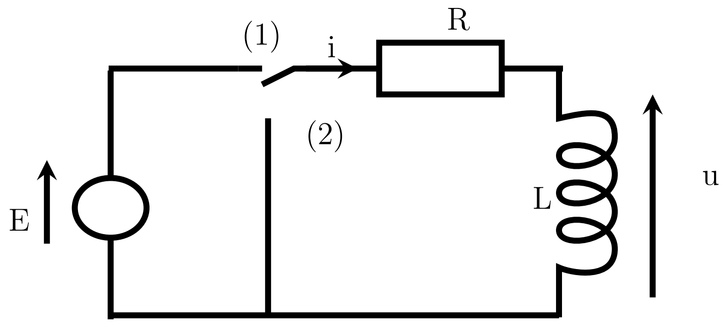
$$\boxed{w_g = w_J + \frac{1}{2}Li_M^2}$$

avec : $i_M = \dfrac{E}{R}$

w_g : l'énergie fournie par le générateur

w_J : l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance

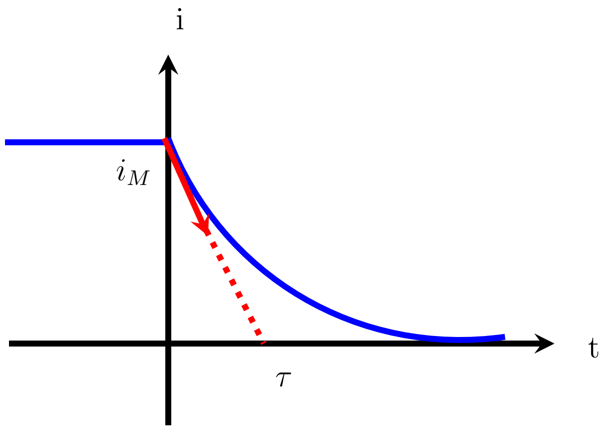
2.2 Régime libre du circuit RL

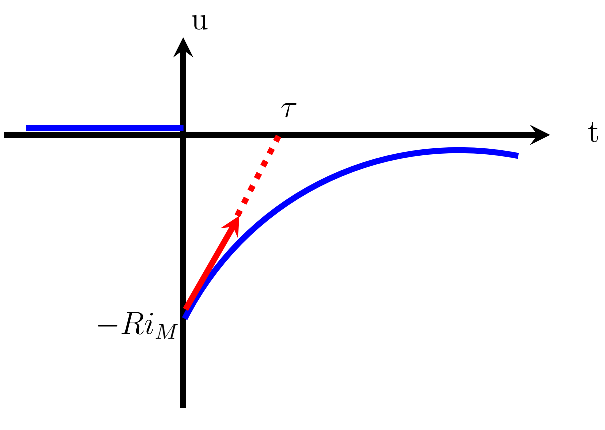


à $t < 0$ k est dans la position (1),on attend l'établissement du courant $i_M = \dfrac{E}{R}$ dans le circuit .
à $t = 0$ on bascule l'interrupteur k vers la position (2) , le circuit se trouve à $t \geqslant 0$ dans le régime libre .
La continuité du courant en 0 : $i(0^-) = i(0^+) = i_M$.
$u + Ri = L\dfrac{di}{dt} + Ri = 0 \Rightarrow \tau\dfrac{di}{dt} + i = 0, \tau = \dfrac{L}{R}$
$i(t) = k\exp(-\dfrac{t}{\tau})$ avec $i(0) = i_M = k$

$$\boxed{i(t) = i_M \exp(-\frac{t}{\tau})}$$

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt} = -Ri_M \exp(-\frac{t}{\tau})}$$





• Bilan énergétique
Multiplions $L\dfrac{di}{dt} + Ri = 0$ par idt on obtient $d(\dfrac{1}{2}Li^2) + Ri^2dt = 0$
par intégration entre $t = 0$ et $t_1 >> \tau$:

$$\boxed{w_J = \frac{1}{2}Li_M^2}$$

L'énergie électromagnétique initiale dans la bobine est totalement dissipée par effet Joule dans la résistance .

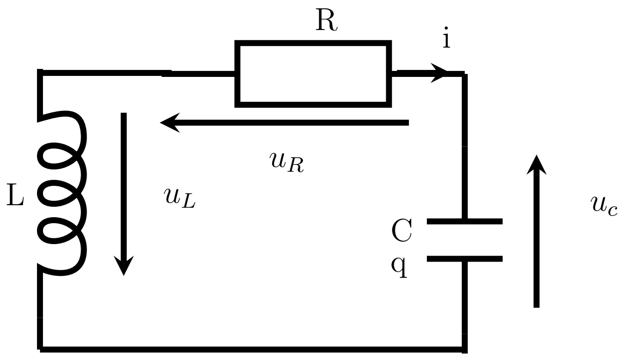
3 Régime libre d'un circuit RLC

3.1 Conditions initiales

Pour résoudre les équations d'un circuit RLC il es nécessaire d'utilser les conditions initiales et les deux conditions suivantes :

- La continuité du courant i (circulant dans la bobine)
- La continuité de la tension u aux bornes du condensateur

3.2 Equation différentielle - Facteur de qualité - Pulsation propre



$L\frac{di}{dt} + Ri + u = 0; i = c\frac{du}{dt}$

$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{Lc}u = 0$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0}$$

$\lambda = \frac{R}{2L}$: Coefficient d'amortissement

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$: pulsation propre

On définit le facteur de qualité du circuit RLC par

$$\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{Rc\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{c}}}$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0}$$

de même l'équation en charge q : $q = cu$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

3.3 Divers régimes de variation

l'équation caractéristique de l'équation différentielle $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ avec $\lambda = \dfrac{\omega_0}{2Q}$

$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\dfrac{1}{4Q^2} - 1)$

3.3.1 Régime apériodique

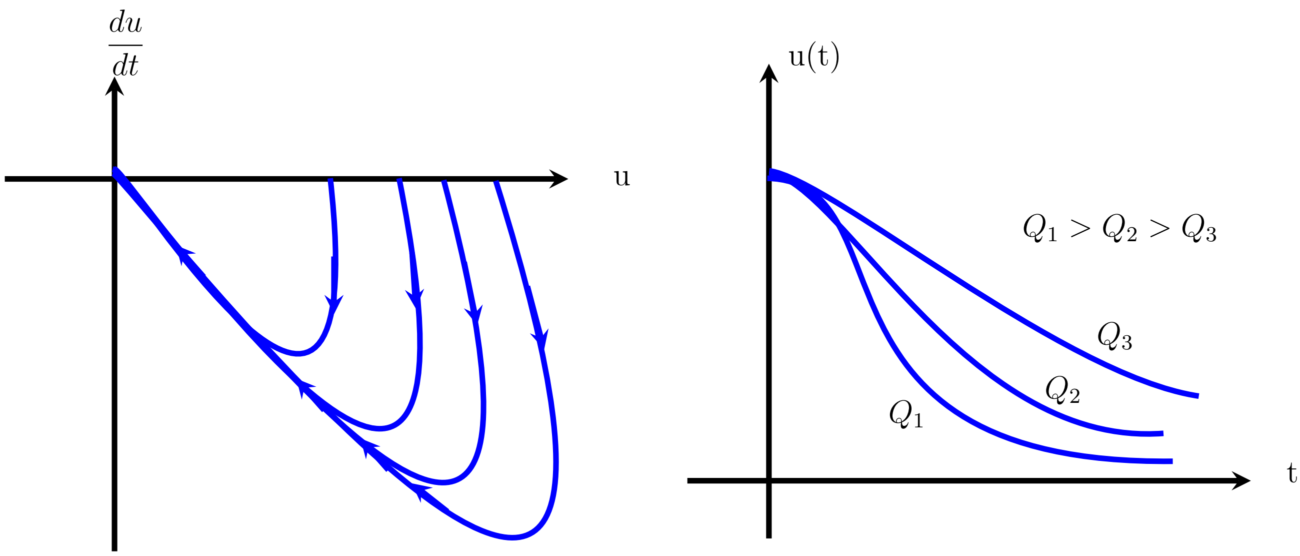
Pour un amortissement élevé $\Delta' > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0 \Rightarrow Q < \dfrac{1}{2} \Rightarrow R > 2\sqrt{\dfrac{L}{c}}$

$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ donc

$$\boxed{u(t) = \exp(-\lambda t)(a\exp(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}t) + b\exp(-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}t))}$$

• Portrait de phase

C'est la représentation de $\dfrac{du}{dt}$ en fonction de $u(t)$.
Pour un signal sinusoidal le portrait de phase est un éllipse



Les trajectoires de phase montrent un retour sans oscillation vers le point attracteur à l'origine .

• Ordre de grandeur de la durée du régime libre

Pour t suffisament élevé : $u(t) \approx a\exp(-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t) = a\exp(-\frac{t}{\tau})$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}{\omega_0^2}}$$

La durée du régime libre est de quelques τ varie avec le facteur de qualité Q .

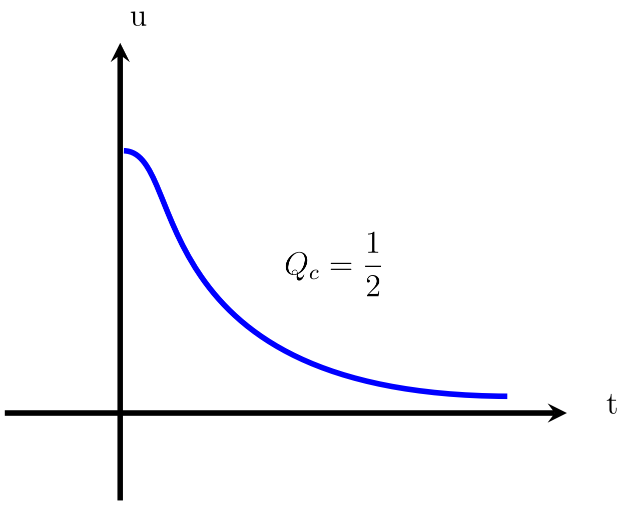
3.3.2 Régime critique

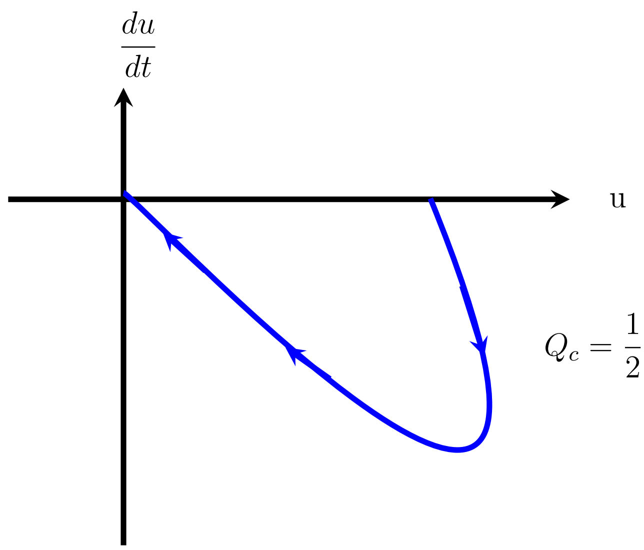
$\Delta' = 0, \lambda_c = \omega_0, Q_c = \frac{1}{2}, R_c = 2\sqrt{\frac{L}{c}}$

$$\boxed{u(t) = (a + bt)\exp(-\omega_0 t)}$$

• Ordre de grandeur du régime libre

$$\boxed{\tau_c = \frac{1}{\omega_0}}$$





Portrait de phase

Le système tente encore à contourner l'origine dans le sens horaire mais ne peut y parvenir : il échoue rapidement au point o .

3.3.3 Régime pseudo-périodique

Pour un amortissement faible : $\Delta' < 0; \lambda < \omega_0; Q > \frac{1}{2}; R < 2\sqrt{\frac{L}{c}}$

$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i\Omega$

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

Ω : pseudo-pulsation
la solution est :

$$\boxed{u(t) = a\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi)}$$

$a;\varphi$ sont des constantes d'intégration
$\lambda = \dfrac{\omega_0}{2Q}$

$$\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < \omega_0}$$

• Pseudo-période T
la période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$
la pseudo-période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} > T_0}$$

• Décrément logarithmique
$u(t+T) = \exp(-\lambda T)u(t)$

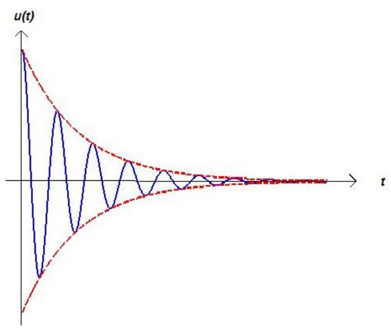
$$\boxed{\delta = \lambda T = \frac{\omega_0}{2Q}\frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$$

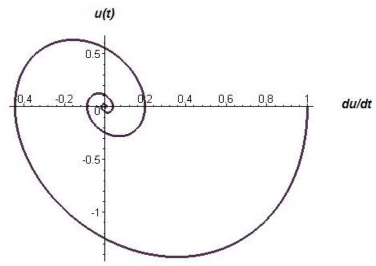
$$\boxed{\delta = \ln[\frac{u(t)}{u(t+T)}]}$$

la durée du régime pseudo-périodique

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}}$$

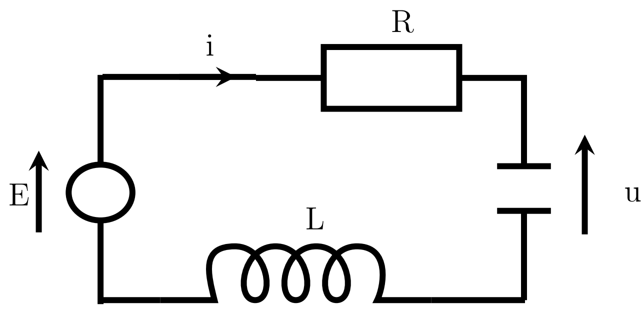
•Portrait de phase





4 Réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension

4.1 Régime transitoire-Régime libre



l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E}$$

la solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u(t) = u_1(t) + E}$$

avec :

- E : solution particulière
- $u_1(t)$: solution générale

$u_1(t)$ correspond au régime libre (apériodique-critique-pseudo-périodique) . Pendant la durée de l'existence du régime libre le circuit RLC se trouve en régime transitoire ,cependant au bout de quelques τ on parvient à un régime établi indépendant du temps $u_1 = 0; u = E$.
Le régime établi ne dépend pas des conditions initiales (i_0, u_0) car $u_1(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

4.2 Aspect énergétique

En multipliant l'équation $E = L\frac{di}{dt} + Ri + u$ par $idt = cdu$
$Eidt = d(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}cu^2) + Ri^2dt = dE + \delta w_J$
l'intégration entre $t = 0$ et $t = \infty$

$E\displaystyle\int_{q(0)}^{q(\infty)} dq = \frac{1}{2}L(i^2_\infty - i^2_{(0)}) + \frac{1}{2}c(u^2_{(\infty)} - u^2_{(0)}) + \int_0^\infty Ri^2 dt$
avec : $q(0) = u(0) = i(0) = 0$ et $q(\infty) = cE$;$u(\infty) = E$; $i(\infty) = 0$

$$\boxed{cE^2 = \frac{1}{2}cE^2 + w_J \Rightarrow w_J = \frac{1}{2}cE^2}$$

- La bobine n'intervient pas dans le bilan énergétique globale de la charge du condensateur .
- L'énergie fournie par le générateur se répartit à égalité entre la résistance (effet Joule) et le condensateur .