DNS

Sujet

Réfraction....1
I.Préliminaires....1
II.Première partie....1
III.Deuxième partie....3

Réfraction

I. Préliminaires

1. Rappeler la valeur et l'unité de la perméabilité magnétique du vide μ_0 . Donner la valeur approchée utilisée couramment pour la vitesse de la lumière c dans le vide. Déduire des deux valeurs précédentes une valeur approchée de la permittivité diélectrique du vide ε_0 . Rappeler l'unité.

2. Rappeler la formule permettant de calculer le déphasage retard φ pour un rayon lumineux correspondant à une onde de fréquence f parcourant une distance l dans le vide en fonction de l et de λ_0 la longueur d'onde dans le vide.

On considère un milieu diélectrique transparent pour la lumière de longueur d'onde λ_0 . L'indice de ce milieu est n . On donne $n=1{,}460$ et $\lambda_0=1{,}30.10^{-6}\,m$.

3. A quel domaine électromagnétique, cette onde appartient-elle?

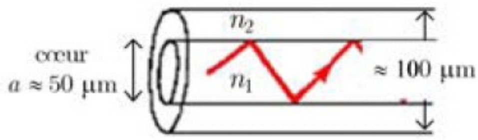
4. On rappelle que l'indice est donné par $n=\dfrac{c}{v}$ où v désigne la vitesse de phase de la lumière dans le milieu étudié. Exprimer la longueur d'onde λ dans ce milieu pour une onde de longueur d'onde (dans le vide) égale à λ_0 en fonction de n et de λ_0 .

5. Montrer que le déphasage φ pour un rayon lumineux correspondant parcourant une distance l dans le milieu s'obtient cette fois en utilisant la formule établie plus haut en fonction de l et de λ_0 à condition de remplacer l par $L=nl$ où L désigne en quelque sorte le chemin équivalent dans le vide du point de vue du déphasage et s'appelle: chemin optique.

II. Première partie

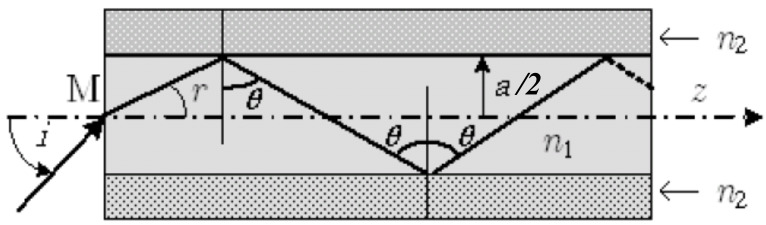
On considère une fibre optique à saut d'indice constituée de deux cylindres concentriques en matériau isolant de section circulaire. L'indice de réfraction de la partie centrale, appelée cœur, est n_1 ; l'indice de la partie périphérique, appelée gaine, est n_2 , avec $n_2<n_1$. Le milieu

extérieur est l'air, assimilé au vide et donc d'indice égal à 1 . On note f la fréquence des ondes, ω leur pulsation et λ_0 avec $\lambda_0 = 1{,}30.10^{-6} m$ leur longueur d'onde. On note z la direction générale de propagation. Le diamètre du cœur est $a = 50\,\mu m$.



On étudie ici une géométrie bidimensionnelle (on travaille dans un plan (r, z)) qui rend bien compte des propriétés fondamentales de ces fibres.

6. Montrer que le rayon lumineux est guidé dans le cœur (c'est-à-dire qu'il n'en sort pas) si θ vérifie une inégalité par rapport à une valeur limite θ_{lim} , que l'on exprimera en fonction de n_1 et de n_2 . Calculer θ_{lim} pour $n_1 = 1{,}460$ et n_2 tel que la différence relative d'indice $\Delta = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1} = 1{,}00\,\%$ $(\Delta \ll 1)$.



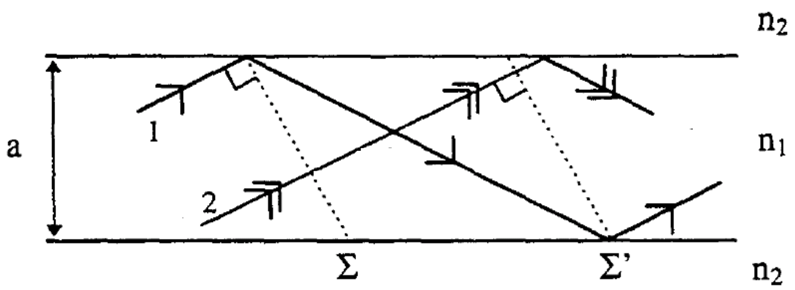
7. On note i l'angle d'entrée du rayon à l'extérieur de la fibre. Exprimer $\sin(i_{lim})$ en fonction Δ et n_1 , i_{lim} désigne la valeur limite de i pour que le guidage soit assuré dans la fibre. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ? Calculer $\sin(i_{lim})$ (appelée ouverture numérique) et i_{lim} en degrés.

La condition précédente est insuffisante. On admettra qu'il faut ajouter une condition de phase. Seuls certains angles d'inclinaison satisfont cette condition, ils correspondent aux modes guidés. On considère deux rayons parallèles notés 1 et 2 se propageant à l'intérieur du cœur de la fibre faisant un angle θ avec la direction perpendiculaire à l'axe z . Les ondes associées à ces deux rayons sont supposées en phase sur la surface Σ .

8. En omettant pour simplifier les déphasages introduits par les réflexions aux interfaces, déterminer la différence δ des chemins optiques parcourus par les rayons 1 et 2 pour relier Σ à Σ' .

9. Montrer que le déphasage correspondant vaut $\varphi = 4\pi n_1 \dfrac{a}{\lambda_0} \cos(\theta)$.

10. A quelle condition les ondes associées aux rayons 1 et 2 sont-elles en phase sur Σ' .



11.En déduire l'existence de modes de propagation, valeurs discrètes de θ notées θ_m où m est un entier, pour lesquelles la propagation est possible. Exprimer puis calculer le nombre N_M de modes possibles, en fonction de n_1 , n_2 , a et λ_0 . L'entier m est appelé l'ordre du mode.

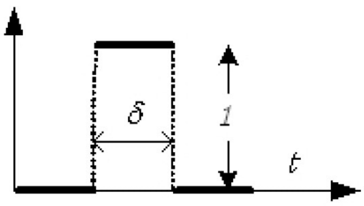
12.Démontrer l'existence d'une fréquence de coupure pour le mode d'ordre m . Préciser le comportement fréquentiel du dispositif (Passe-haut? Passe-bas?).

13.Le mode fondamental correspond, par définition, à $m=0$. Exprimer, puis calculer pour $\lambda_0=1{,}30.10^{-6}m$ la valeur maximale que peut prendre a pour que seul ce mode se propage. On dit alors que la fibre est monomode.

14.Soit $L=1\text{km}$ la longueur de la fibre. Exprimer puis calculer la différence τ de temps de parcours de l'entrée à la sortie, entre le trajet de durée minimale et le trajet maximal. On donnera l'expression approchée de τ en fonction seulement de L , Δ , c et n_1 .

15.On convient que le débit maximal de la fibre débit maximal de la fibre, R_{max}^{saut} , est l'inverse de τ . Calculer R_{max}^{saut} (bits par seconde).

Dans les fibres optiques utilisées en télécommunications, un message est constitué d'une succession de signaux (on dit quelquefois impulsions) binaires (présence, [0] ou absence [1]) de durée égale, δ .



Le débit numérique maximal, exprimé en signaux par seconde, est alors $R_{max}^{saut.ind}=\frac{1}{\delta}$. Divers phénomènes distordent les impulsions qui se propagent, ce qui entrave la reconstitution de l'information. On améliore la situation en utilisant une fibre dite à gradient d'indice.

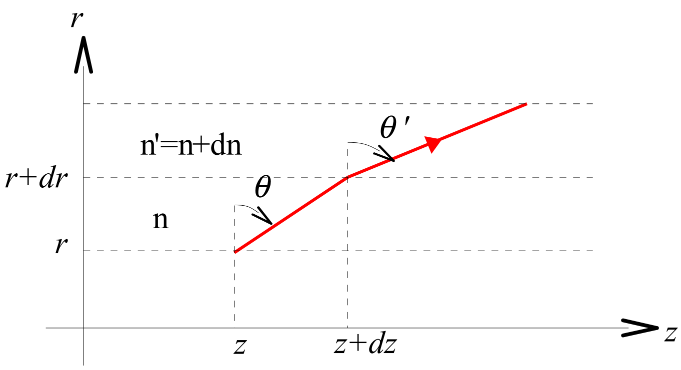
III. Deuxième partie

Une fibre à gradient d'indice a un cœur dont l'indice a un profil parabolique. L'indice de réfraction varie dans le cœur avec la distance r à l'axe Oz et il est constant dans la gaine $(r \geq a/2)$, avec la valeur n_2. L'indice dans le cœur est modélisé, pour $0 \leq r \leq a/2$, par $n(r) = n_1\sqrt{1-8.\Delta\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^2}$ avec $\Delta = \frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1-n_2}{n_1}$ tel que $\Delta = 1{,}00\,\%$. On donne $n_1 = 1{,}460$ $a = 50\,\mu m$ et $\lambda_0 = 1{,}30.10^{-6}\,m$.

16.Tracer la courbe donnant n en fonction de r.

On considère un rayon lumineux se propageant dans un plan (r, z). On imagine de découper le milieu en tranches élémentaires horizontales dont on fera tendre l'épaisseur vers 0. Dans la tranche élémentaire comprise entre r et $r+dr$, on considère l'indice constant et égal à $n(r)$; il y a réfraction sur le dioptre séparant deux tranches élémentaires, l'indice passant de n à $n+dn$.

On se propose d'établir l'équation donnant la trajectoire d'un rayon lumineux.



17.Montrer que la quantité $n(r)\sin\theta(r)$ se conserve lors de la propagation. On pose $n(r)\sin\theta(r) = C$

18.Le rayon lumineux entre dans la fibre au centre de la face d'entrée, avec un angle externe d'incidence i ; il se dirige à l'intérieur de la fibre vers les r croissants avec un angle interne θ_0 au point $(z=0+, r=0)$. Donner l'expression de la constante en faisant intervenir notamment θ_0 puis i.

19.Connaissant $\sin^2\theta$ d'où $\cos^2\theta$, en déduire $\tan^2$ et établir la trajectoire du rayon lumineux sous la forme $\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n^2(r)-C^2}{C^2}$

20.Montrer qu'un rayon est guidé par la fibre si $n_2 < C < n_1$.

21.En dérivant l'équation différentielle précédente par rapport à z afin de revenir à une équation différentielle du deuxième ordre plus facile, montrer que l'on obtient $\left(\frac{d^2r}{dz^2}\right) + k^2 r = 0$ où l'on précisera l'expression de k.

22.Montrer qu'en choisissant bien l'origine des z, l'équation du rayon lumineux est $r = r_0\cos kz$. Exprimer r_0 en fonction des données de l'énoncé.

23.Discuter l'allure des rayons guidés suivant la valeur de C . On s'intéressera particulièrement aux cas limites $C=n_1$ et $C=n_2$. Déterminer l'expression de l'ouverture numérique pour cette fibre.

24.Dans une fibre à gradient d'indice de longueur L , la différence de temps de parcours entre le trajet minimal et le trajet maximal est $\tau'=\frac{1}{2}n_1\Delta^2\frac{L}{c}$. Déduire de cette relation le débit numérique maximal. Exprimer et calculer $\frac{R_{max}^{grad.ind}}{R_{max}^{saut}}$. Commenter.

25.On se propose d'établir la formule donnant τ' . Déterminer le temps mis par la lumière pour parcourir un quart de période de la trajectoire d'un rayon guidé de paramètre C et en déduire la formule précédente.

Réponses

1) $\boxed{\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} \quad H\,m^{-1}}$

remarque

On retrouve l'unité en pensant à écrire la formule donnant l'inductance L d'un solénoïde

$$\phi_{propre} = L\ I$$

$$N\ B_{propre}\ S = L\ I$$

$$N\ \mu_0\ \underbrace{j_s}_{\frac{N}{\ell} I}\ S = L\ I$$

donc :

$$\underbrace{L}_{\text{Henry}} = \mu_0 \frac{N^2}{\underbrace{\ell}_{m}} \underbrace{S}_{m^2}$$

μ_0 en $H\,m^{-1}$

$\boxed{c \simeq 3{,}0\ 10^{8}\ m\,s^{-1}}$

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

$$\varepsilon_0 \simeq \frac{1}{\mu_0\ c^2}$$

$$\simeq \frac{1}{4\pi\ 10^{-7}\ (3.10^{8})^2}$$

$$\boxed{\underbrace{\varepsilon_0}_{F\,m^{-1}} \simeq \frac{1}{36\pi\ 10^{9}}}$$

$\boxed{\varepsilon_0 \simeq 8{,}8\ 10^{-12}\ F\,m^{-1}}$

remarque

on retrouve l'unité en pensant à écrire la formule donnant la capacité C d'un condensateur plan

$$\underbrace{C}_{\text{Farad}} = \varepsilon_0 \frac{\underbrace{S}_{m^2}}{\underbrace{e}_{m}}$$

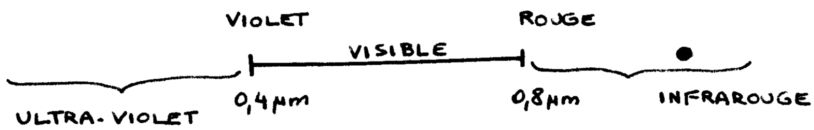
ε_0 en $F\,m^{-1}$

3) $\varphi = k_o \, \ell$

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_o} \, \ell}$$

---

3) Les longueurs d'onde dans le vide pour la lumière visible sont comprises entre 0,4 μm et 0,8 μm



$\boxed{\text{1,3 μm correspond à l'infra rouge}}$

---

4) Dans le vide : $\lambda_o = c \, \frac{1}{\nu}$ et $\underset{(\text{vide})}{k_o} = \frac{2\pi}{\lambda_o}$

Dans le milieu : $\lambda = v \, \frac{1}{\nu}$

$= \frac{c}{n} \, \frac{1}{\nu}$ et $\underset{(\text{milieu})}{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\boxed{\begin{gathered} \lambda = \frac{\lambda_o}{n} \\ k = n \, k_o \end{gathered}}$$

---

5) Par exemple, on cherche le nombre de λ dans ℓ.
chaque λ correspond à un déphasage retard de 2π

$$\varphi = 2\pi \, \frac{\ell}{\lambda} \quad \text{ou} \quad k \, \ell$$

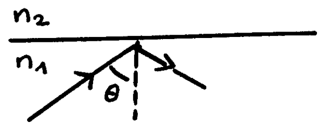
$$= 2\pi \, \frac{\ell}{\lambda_o/n}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi \, (n\ell)}{\lambda_o}}$$

le déphasage est le même que si, au lieu de parcourir ℓ dans le milieu, l'onde avait parcouru $L = n\ell$ (chemin optique) dans le vide.

---

6)



Si i_2 l'angle de réfraction dans le milieu n_2

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin i_2$$

Si l'on obtient un $\sin i_2 > 1$ ceci n'a pas de sens, la réfraction n'existe pas. Il y a <u>réflexion totale.</u>

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta > 1$$

$$\sin\theta > \underbrace{\frac{n_2}{n_1}}_{\sin\theta_{Lim}}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{réflexion totale si } \theta > \theta_{Lim} \\ \text{avec} \\ \sin\theta_{Lim} = \dfrac{n_2}{n_1}\end{array}}$$

A.N.

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = 0{,}01$$

$$1 - \frac{n_2}{n_1} = 0{,}01$$

$$\frac{n_2}{n_1} = 0{,}99$$

$$\boxed{\sin\theta_{Lim} = 0{,}99}$$

θ_{Lim} est proche de $\frac{\pi}{2}$.

On pose

$$\theta_{Lim} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \qquad (\varepsilon \ll 1)$$

$$\sin\theta_{Lim} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$

$$= \cos\varepsilon$$

$$0{,}99 \simeq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\varepsilon \simeq \sqrt{2 \times 0{,}01}$$

$$\simeq 1{,}41\ 10^{-1} \text{ rad}$$

$$\simeq \frac{0{,}141 \times 180}{\pi}$$

$$\simeq 8{,}1 \text{ degrés}$$

$$\boxed{\theta_{Lim} \simeq 81{,}9 \text{ degrés}}$$

---

7) A l'entrée, la loi de Snell-Descartes donne :

$$1 \sin i = n_1 \sin r$$

$$= n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\sin i = n_1 \cos \theta$$

or on a vu que θ est supérieur à θ_{Lim}

$$\sin i < n_1 \cos \theta_{Lim}$$

$$< n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{Lim}}$$

$$< n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

$$\sin i < \underbrace{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}_{\sin i_{Lim}}$$

Pour qu'il y ait guidage, il faut :

$$\boxed{i < i_{Lim}}$$

avec

$$\sin i_{Lim} = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

$$= n_1 \sqrt{1 - (1-\Delta)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin i_{Lim} &= n_1 \sqrt{2\Delta - \Delta^2} \\ &\simeq n_1 \sqrt{2\Delta} \end{aligned}}$$

(ouverture numérique)

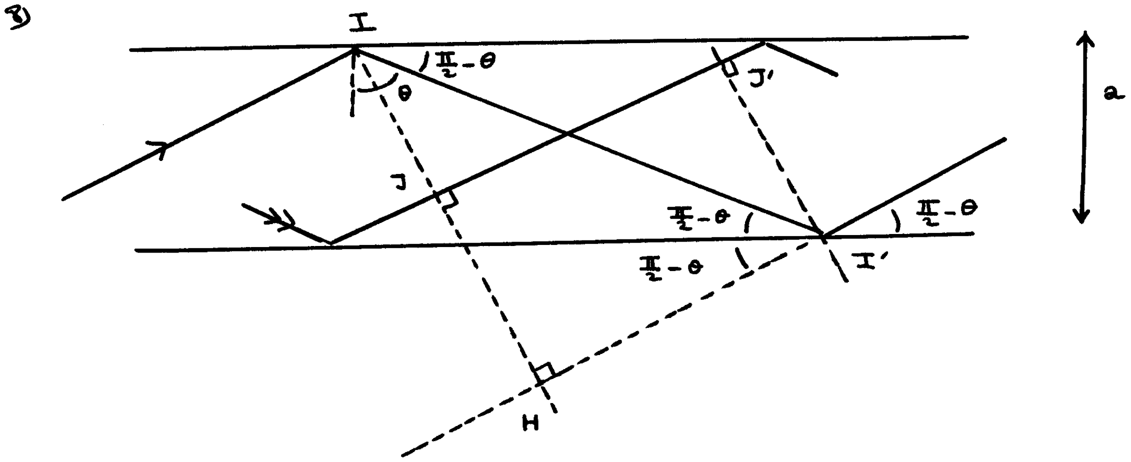
A.N. $\simeq 1{,}460 \sqrt{2 \times 0{,}01}$

$$\boxed{\sin i_{Lim} \simeq 0{,}206}$$

$$\boxed{i_{Lim} \simeq 11{,}9 \text{ degrés}}$$

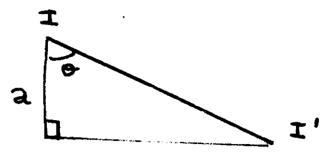
---

8)



$$\delta = n_1 \left(II' - JJ' \right)$$
$$= n_1 \left(II' - HI' \right)$$
$$= n_1 \left(II' - II' \cos\left(2\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right) \right)$$
$$= n_1\, II' \underbrace{\left(1 + \cos 2\theta \right)}_{2\cos^2\theta}$$

avec



$$II' \cos\theta = a$$

$$\boxed{\delta = n_1\, 2a \cos\theta}$$

9) ce qui correspond au déphasage

$$\varphi = \frac{2\pi\,\delta}{\lambda_0}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\, 2 n_1 a \cos\theta$$

$$\boxed{\varphi = \frac{4\pi n_1 a \cos\theta}{\lambda_0}}$$

10) Les rayons doivent être à nouveau en phase sur Σ'

$$\boxed{\varphi = 2m\pi} \qquad m \in \mathbb{N}$$

(m, entier, sera précisé dans la question suivante)

---

11) mode m

$$\frac{4\pi n_1 a \cos\theta_m}{\lambda_0} = 2m\pi$$

$$\boxed{\cos\theta_m = m\frac{\lambda_0}{2n_1 a}}$$

→ Il existera toujours le mode guidé $\theta_{m=0} = \frac{\pi}{2}$ $(m=0)$

→ Pour trouver le nombre de modes, il faut tenir compte de la condition (cf 5)

$$\theta_{Lim} < \theta_m < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta_{Lim} > \cos\theta_m > 0$$

$$\cos\theta_{Lim} > \frac{m\lambda_0}{2n_1 a} > 0$$

$$\frac{2n_1 a}{\lambda_0}\cos\theta_{Lim} > m > 0$$

$$m_{max} = E\left(\frac{2n_1 a}{\lambda_0}\cos\theta_{Lim}\right)$$

↑ partie entière

$$m_{max} = E\left(\frac{2n_1 a}{\lambda_0}\sqrt{1-\frac{n_2^2}{n_1^2}}\right)$$

$$\boxed{m_{max} = E\left(\frac{2a}{\lambda_0}\sqrt{n_1^2-n_2^2}\right)}$$

Et en tenant compte du mode $m=0$

$$\boxed{N_M = E\left(\frac{2a}{\lambda_0}\sqrt{n_1^2-n_2^2}\right) + 1}$$

A.N. $$N_M = E\left(\underbrace{\frac{2 \times 50\ 10^{-6}}{1{,}30\ 10^{-6}} 1{,}460 \sqrt{1-0{,}99^2}}_{15{,}84}\right) + 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N_M = 16 \\ m = 0, 1, 2 \ldots 15 \end{array}}$$

---

12) On a obtenu ci-dessus :

$$\cos\theta_{Lim} > \cos\theta_m$$

$$\sqrt{1-\frac{n_2^2}{n_1^2}} > \frac{m\lambda_0}{2n_1 a}$$

En remplaçant λ_0 par $\frac{c}{f}$, on obtient à m et a fixés, la condition pour la fréquence :

$$\boxed{f > \underbrace{\frac{mc}{2a}\frac{1}{\sqrt{n_2^2-n_1^2}}}_{f_{coupure\ mode\ m}}}$$

On a donc un comportement de filtre passe haut.

A.N. $$f_{c,m} = m \frac{3.10^8}{2 \times 50.10^{-6}} \frac{1}{1{,}460\sqrt{1-0{,}99^2}}$$

$$f_{c,m} = m\ 14{,}6\ 10^{12}$$

$$\boxed{f_{c,m} = m\ 14{,}6\ \text{THz}}$$

---

13) La fibre est monomode si le mode 0 peut se propager et pas le mode 1.

$$m_{max} = 0$$

$$\frac{2a}{\lambda_0}\sqrt{n_1^2-n_2^2} < 1$$

$$\boxed{a < \frac{\lambda_0}{2\sqrt{n_1^2-n_2^2}}}$$

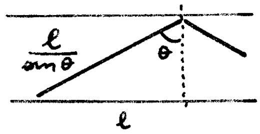
A.N. $$< \frac{1{,}30\ 10^{-6}}{2\ 1{,}460\ \sqrt{1-0{,}99^2}}$$

$$\boxed{a < 3{,}16\ \mu m}$$

14) $\longrightarrow$

$$t_{min} = \frac{L}{c/n_1} = \frac{n_1 L}{c}$$

$\longrightarrow$



$$t_{max} = \frac{n_1 \, L/\sin\theta_{lim}}{c}$$

$\longrightarrow$

$$\tau = t_{max} - t_{min}$$

$$= \frac{n_1 L}{c}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)$$

$$= \frac{n_1 L}{c}\left(\frac{1}{1-\Delta} - 1\right)$$

$$\boxed{\tau \simeq \frac{n_1 L \Delta}{c}}$$

A.N. $= \dfrac{1{,}46 \;\; 10^3 \;\; 0{,}01}{3 \;\; 10^8}$

$$\boxed{\tau = 49 \text{ ns}}$$

---

15)

$$R_{max}^{saut} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{49 \;\; 10^{-9}}$$

$$\boxed{R_{max}^{saut} = 21 \text{ Mbits} \cdot s^{-1}}$$

---

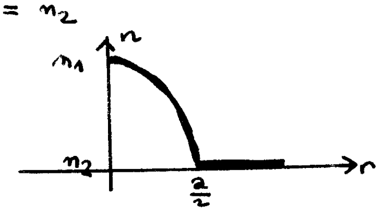
16)

$$n = n_1 \sqrt{1 - 8\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1^2}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

en $r = 0$ $\quad n = n_1$

en $r = \frac{a}{2}$ $\quad n = n_1 \sqrt{1 - 8\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1^2}\right) \frac{1}{4}}$

$= n_2$



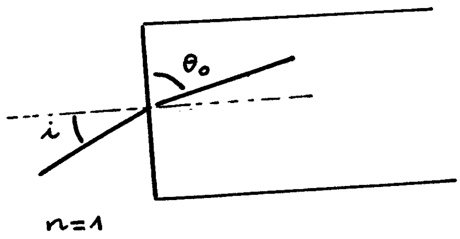
17) Loi de Snell-Descartes

$$n \sin\theta = n' \sin\theta' = n'' \sin\theta'' \ldots$$

$$\boxed{n_{(r)} \sin\theta_{(r)} = C}$$

---

18)



A l'entrée :

$$1 \sin i = n_{(r=0)} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)$$
$$= n_1 \cos\theta_0$$

La constante est :

$$C = n_1 \sin\theta_0$$
$$= n_1 \sqrt{1 - \cos^2\theta_0}$$
$$= n_1 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_1^2}}$$

$$\boxed{C = \sqrt{n_1^2 - \sin^2 i}}$$

---

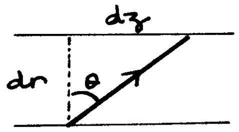
19)

$$\sin^2\theta = \frac{C^2}{n^2_{(r)}}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{C^2}{n^2(r)}$$

$$\tan^2\theta = \frac{C^2/n^2(r)}{1 - C^2/n^2(r)}$$

$$= \frac{C^2}{n^2(r) - C^2}$$



or $\tan^2\theta = \left(\frac{dz}{dr}\right)^2$

finalement :

$$\boxed{\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \frac{n^2(r) - C^2}{C^2}}$$

---

20)

$$C = \underbrace{n_1 \sin\theta_0}_{\text{en } r=0} = \underbrace{n_2 \sin\theta_{r=\frac{a}{2}}}_{\text{en } r=\frac{a}{2}}$$

il faut que $\sin\theta_0 < 1$ sinon le rayon n'entre pas
il faut que $\sin\theta_{r=\frac{a}{2}} > 1$ ce qui signifie que en $r=\frac{a}{2}$ le rayon ne passera pas dans la gaine. Il y a eu reflexion totale avant.

donc $\boxed{n_2 < C < n_1}$

---

21)

$$C^2 \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = n_1^2 \left(1 - 8\,\Delta \frac{r^2}{a^2}\right) - C^2$$

On dérive par rapport à z pour obtenir une equa diff du deuxième ordre qui donnera l'équation $r = r(z)$ du rayon.

$$C^2\ 2\left(\frac{dr}{dz}\right)\left(\frac{d^2r}{dz^2}\right) = -\, n_1^2\ \frac{8\,\Delta}{a^2}\ 2\,r\ \left(\frac{dr}{dz}\right)$$

on simplifie par $\frac{dr}{dz} \neq 0$

$$\boxed{\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{8\,n_1^2\,\Delta}{a^2 C^2}\, r = 0}$$

$$\boxed{k^2 = \frac{8\, n_1^2\, \Delta}{a^2\, C^2}}$$

---

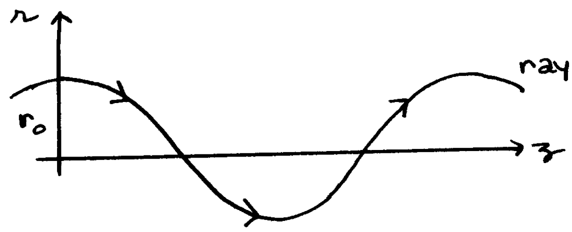
23)
$$\frac{d^2 r}{dz^2} + k^2\, r = 0$$

dont la solution générale s'écrit

$$r = A \cos kz + B \sin kz$$

et si on prend l'origine à un maximum de $r(z)$, on aura

$$\boxed{r = r_0 \cos kz}$$



(on a changé l'origine de l'axe des z par rapport à la question 18)

On dispose de deux approches possibles pour obtenir r_0.

→ pour r_0 il y a réflexion totale donc $\sin\theta_{r=r_0} = 1$

et $C = n_{(r=r_0)} \sin\theta_{(r=r_0)} = n_{(r=r_0)}$

ce qui donne

$$\boxed{C^2 = n_1^2 \left(1 - 8\,\Delta\, \frac{r_0^2}{a^2}\right)}$$

→ soit on utilise l'équation différentielle au début de 21) avec en r_0, $\left(\frac{dr}{dz}\right) = 0$, ce qui donne bien entendu le même résultat.

finalement

$$n_1^2 - \sin^2 i = n_1^2 - 8\, n_1^2\, \Delta\, \frac{r_0^2}{a^2}$$

$$\boxed{r_0 = \frac{a \sin i}{2\sqrt{2}\, n_1 \sqrt{\Delta}}}$$

On considère les valeurs limites obtenues pour C en 20)

si $\underline{C = n_1}$ $\quad \boxed{r_0 = 0}$

si $\underline{C = n_2}$

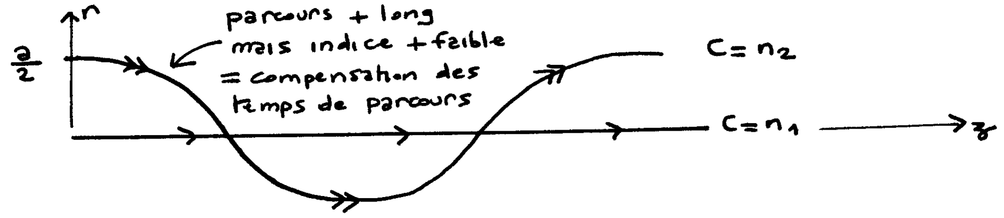
$$r_0^2 = \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)\frac{a^2}{8\Delta}$$

$$= \frac{a^2}{4}$$

$$\boxed{r_0 = \frac{a}{2}}$$

---

23)



Pour obtenir l'ouverture numérique, on doit trouver $\sin i_{Lim}$

or $\quad r_0 = \dfrac{a \sin i}{2\sqrt{2}\, n_1 \sqrt{\Delta}}$

vaut $\frac{a}{2}$ au maximum ($C = n_2$)

$$\boxed{\sin i_{Lim} = n_1 \sqrt{2\Delta}}$$

(résultat identique à 7))

---

24)

$$R_{max}^{grad\ ind} = \frac{1}{\tau'}$$

$$= \frac{2\,c}{n_1\, \Delta^2\, L}$$

$$\frac{R_{max}^{grad\ ind}}{R_{max}^{saut}} = \frac{\dfrac{2c}{n_1 \Delta^2 L}}{\dfrac{c}{n_1 \Delta L}}$$

$$\boxed{\frac{R_{max}^{grad\ ind}}{R_{max}^{saut}} = \frac{2}{\Delta}}$$

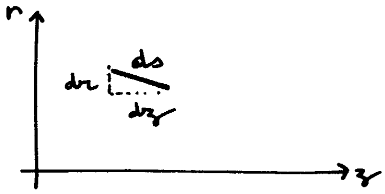
A.N. $\qquad = 200$

Le débit maximal est bien plus élevé dans le cas de la fibre à gradient d'indice.
(cf compensation des temps de parcours pour les différents rayons dans le cas de la fibre optique à gradient ...
"Analogie" avec le "stigmatisme approché"

)

---

25)



dt pour parcourir ds

$$dt = \frac{n(r)\,ds}{c}$$

$$dt^2 = \frac{n^2(r)}{c^2}dz^2\left(1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right)$$

$$= \frac{n^2(r)}{c^2}dz^2\left(1+\frac{n^2(r)-C^2}{C^2}\right)$$

$$= \frac{n^4(r)}{c^2\,C^2}\,dz^2$$

$$dt = \frac{n_1^2}{c\,C}\left(1-8\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)dz$$

avec $r = r_0 \cos kz$

On intègre sur $\frac{1}{4}$ période

$$\frac{T}{4} = \frac{n_1^2}{c\,C}\int_{z=0}^{\pi/2k}\left(1-\frac{8\Delta\, r_0^2}{a^2}\cos^2 kz\right)dz$$

$$= \frac{n_1^2}{c\,C}\left(\frac{\pi}{2k} - \overset{1-C^2/n_1^2}{\frac{8\Delta r_0^2}{a^2}}\ \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2k}\right)$$

$$= \frac{n_1^2}{c\,C}\,\frac{\pi}{2\left(\frac{2\sqrt{2}\,n_1\sqrt{\Delta}}{a\,C}\right)}\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{C^2}{n_1^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{T}{4} = \frac{\pi a}{8\,c\,n_1\sqrt{2\Delta}}\left(n_1^2+C^2\right)}$$

Pour parcourir la distance L

$$t = T \times \frac{L}{(2\pi/k)}$$

$$= \frac{\pi a (n_1^2 + C^2)}{2 c n_1 \sqrt{2\Delta}} \frac{L}{2\pi} \frac{2\sqrt{2}\, n_1 \sqrt{\Delta}}{a\, C}$$

$$= \frac{L}{2c} \left(C + \frac{n_1^2}{C} \right)$$

et finalement :

$$\tau' = t_{(C = n_2)} - t_{(C = n_1)}$$

$$= \frac{L}{2c} \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_2}$$

$$= \frac{L}{2c} \frac{n_1^2}{n_2} \Delta^2$$

$$\boxed{\tau' \simeq \frac{L}{2c}\, n_1\, \Delta^2}$$