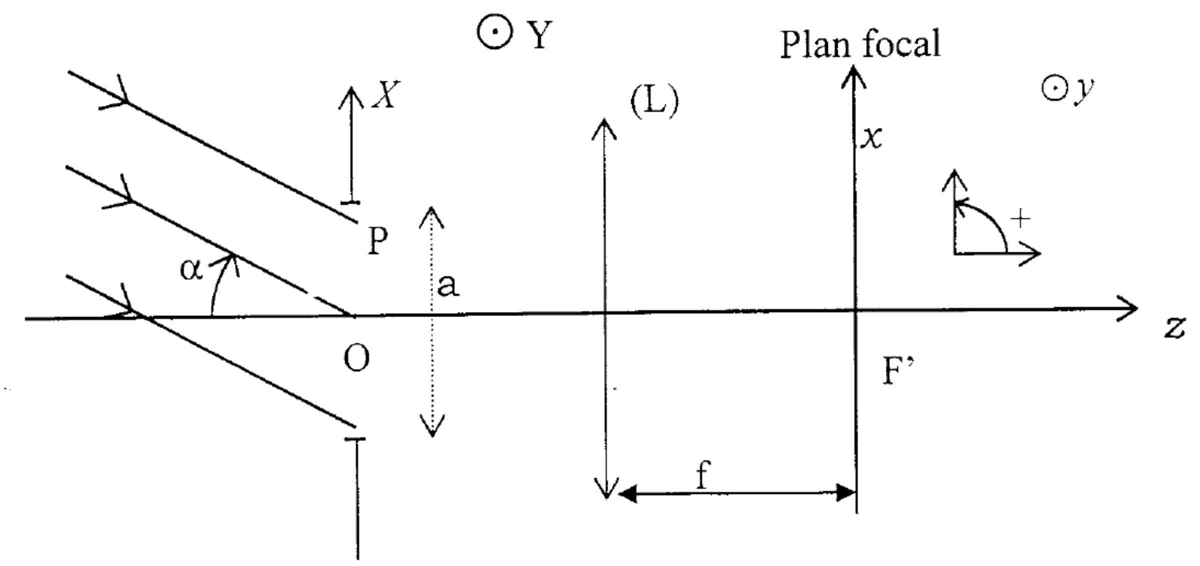
DNS

Sujet

Diffraction (modèle simplifié de télescope)

I. Modélisation de la diffraction sur un télescope

Un télescope utilisé pour les observations astronomiques est modélisé par un objet diffractant et une lentille convergente de distance focale $f=100\,m$. L'objet diffractant est une fente transparente rectangulaire de centre O , de largeur $a=8\,m$ (pour modéliser le diamètre fini du miroir primaire) suivant OX , de grande dimension suivant l'axe perpendiculaire OY ($Figure\,1$).



$Figure\,1$

On observe, à l'aide du télescope, une étoile B située dans la direction représentée par l'angle orienté α (α est supposé « petit » en valeur absolue de telle sorte que l'on puisse travailler au premier ordre en α). Cette étoile (supposée ponctuelle) émet une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 .

1. Présenter un montage expérimental permettant d'observer sur un écran la diffraction « à l'infini » donnée par une fente rectangulaire de côtés a et b ($b>a$) sous incidence normale.
2. Rappeler le principe de Huygens-Fresnel permettant de calculer l'amplitude de l'onde diffractée par une fente.
3. Expliquer en quelques lignes en quoi consiste la diffraction à l'infini (aussi appelée diffraction de Fraunhofer).
4. Que signifie "grande dimension" suivant OY ? Quelles sont les conséquences de cette hypothèse?

Dans le cadre de la diffraction à l'infini, l'amplitude complexe en un point M de la vibration diffractée en un point $P(X)$ de la fente est donnée par: $\underline{A}(M)=\underline{K}\int_X \exp\left[-j2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right]dX$, $\underline{K}$ étant une constante et $\delta(M)$ la différence de marche, au point $M(x)$ du plan focal de la lentille (L) , entre les deux vibrations diffractées respectivement aux points P et O de la fente. On notera n l'indice du milieu traversé par la lumière.

5. Exprimer la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de X , x , n , a et f .
6. Déterminer l'amplitude $\underline{A}(M)$ au point M .
7. On rappelle que l'intensité lumineuse est définie par $I(M)=k\,\underline{A}(M)\underline{A}^*(M)$, k étant une constante et $\underline{A}^*(M)$ le complexe conjugué de l'amplitude $\underline{A}(M)$. Montrer que $I(M)=I(x)=I_0[\operatorname{sinc} g(x)]^2$. Donner l'expression de I_0 et de $g(x)$.
8. Représenter la figure de diffraction observée sur l'écran (plan $F'xy$). Préciser ses caractéristiques.
9. Tracer l'allure de la courbe représentative de l'intensité $I(x)$. Préciser ses caractéristiques. En quel point cette intensité est-elle maximale? Conclure.

II. Phénomènes limitant le pouvoir de résolution

On modélise toujours le télescope utilisé pour les observations astronomiques par la lentille convergente. Cette lentille forme une pupille diffractante circulaire (et non rectangulaire), de centre O , de diamètre a (diamètre du miroir primaire).

La figure de diffraction dans le plan focal de la lentille peut être schématisée par une tache centrale brillante de rayon $R_0=l,22\frac{\lambda_0 f}{na}$ entourée d'anneaux alternativement sombres et brillants.

10. Justifier qualitativement l'aspect de la figure de diffraction.

On observe deux étoiles A et B . Les deux étoiles sont vues avec un écart angulaire α petit $\alpha=2\,secondes\,d'arc$.

11. A quelle condition sur α , a , λ_0 et n , les deux taches de diffraction seront-elles séparées sur l'écran? On adoptera le critère de Rayleigh.

12.En déduire la résolution angulaire du télescope définie par la valeur minimale α_{min} de α .

A.N. $\lambda=0{,}50\,\mu m$; $n=1{,}00029\approx 1$; $a=8\,m$; Calculer α_{min} en secondes d'arc.

Rappel

Critère de Rayleigh : deux taches de diffraction peuvent être séparées si le maximum principal de l'une est confondu avec le premier minimum nul de l'autre.

13.Citer quelques phénomènes limitatifs du pouvoir de résolution d'un télescope terrestre.

14.Citer des méthodes permettant de s'affranchir des phénomènes limitatifs du pouvoir de résolution d'un télescope.

15.Pour quelles raisons construit-on tout de même de grands télescopes?

III. Effet de la turbulence atmosphérique sur la structure d'un front d'onde

L'atmosphère terrestre est constituée de couches d'air de différentes températures qui se mélangent les unes aux autres causant de grands mouvements (appelés « turbulences ») dans les masses d'air. Pour les astronomes, ces turbulences sont néfastes car elles perturbent la trajectoire des rayons lumineux. Ce faisant, elles sont responsables du scintillement des étoiles dans le ciel et de la distorsion des images collectées par les télescopes.

Les turbulences de l'atmosphère créent des variations de la masse volumique de l'air et par conséquent entraînent des fluctuations de son indice de réfraction.

On admet que l'indice de réfraction de l'air est lié à sa masse volumique ρ par la relation empirique (dite de Gladstone) : $n=1+C\rho$, C étant une constante.

16.Quelle est la dimension de la constante C .

17.En supposant que l'air se comporte comme un gaz parfait, exprimer n en fonction de la température T et de la pression P .

18.Calculer numériquement la constante C , sachant qu'à $T=293\,K$ et $P=10^5\,Pa$, $n=1{,}00029$.

19.On note $T(z)$ et $P(z)$ respectivement la température et la pression de l'atmosphère à l'équilibre à l'altitude z . Les fluctuations de la température et de la pression par rapport à l'équilibre se manifestent par des écarts δT et δP . Exprimer la fluctuation δn de l'indice n qui en résultent en fonction de δT et δP .

On étudie maintenant l'effet des variations de l'indice de l'atmosphère sur la structure du front d'onde émise par une étoile.

20.Définir ce qu'est une surface d'onde.

21.Énoncer le théorème de Malus.

Dans l'atmosphère d'indice n , on considère une zone cylindrique de diamètre r_0 et de hauteur e suivant Oz ($Figure\,2$). Cette zone est d'indice $n+\delta n$ (on prendra $\delta n>0$). On considère une onde électromagnétique plane incidente progressive dans la direction des z croissants et de longueur d'onde dans le vide λ_0 .

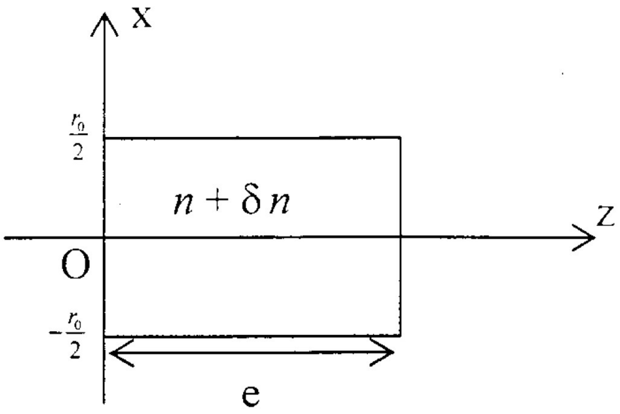


Figure 2

22.Calculer la phase $\varphi(x,z)$ de l'onde pour $z>0$. On prendra comme origine des phases le point O et on distinguera les deux cas $|x|<r_0/2$ et $|x|>r_0/2$.

23.En déduire l'équation de la surface d'onde dans le plan (xOz).

24.Reprendre le schéma de 1a figure 2 et tracer une surface d'onde dans la zone $z<0$, puis dans la zone $z>e$

25.Conclure. Quelle méthode utilise-t-on en pratique pour corriger l'effet de la turbulence atmosphérique?

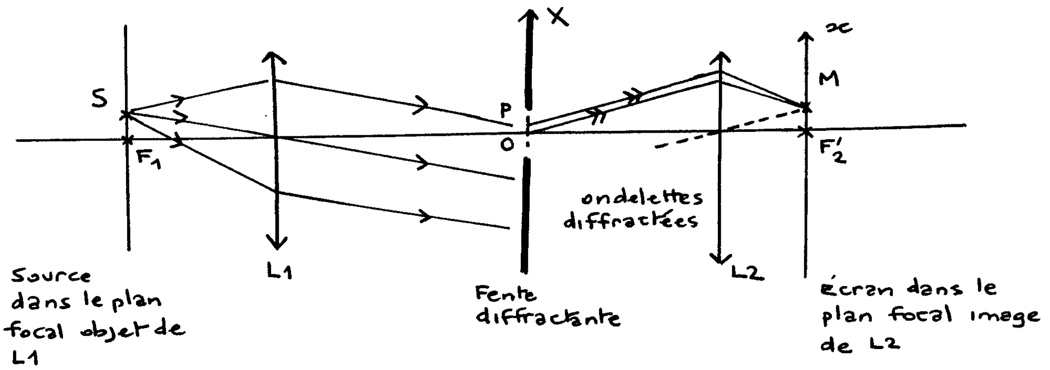
Données :

Constante des gaz parfaits: $R=8{,}314\,J.mol^{-1.}K^{-1}$

Masse molaire équivalente de l'air: $M=29\,g$

<u>Réponses</u>

1) Montage pour la diffraction à l'infini (Fraunhofer)



---

2) Principe de Huygens – Fresnel

Les surfaces $d\Sigma$ atteintes par l'onde issue d'une source primaire se comportent comme des sources <u>secondaires</u> d'<u>amplitude proportionnelle à $d\Sigma$ et $\underline{s}$ incident</u>.
Les sources secondaires sont <u>cohérentes</u>. Les ondes réémises <u>interfèrent</u> en M pour donner l'onde en M.

---

3) Diffraction à l'infini lorsque :

- la source est à l'infini (ou dans le plan focal objet de L1)
- l'observation se fait à l'infini (ou dans le plan focal image de L2)

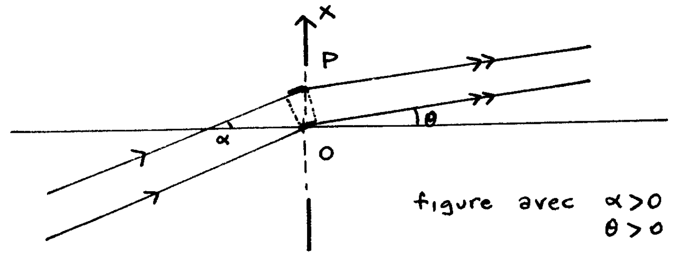
---

4) On observe la diffraction selon x si la dimension selon x de la fente <u>a "est de l'ordre de λ" (de l'ordre de 10 à 1000λ)</u>

Si $\boxed{b >> a}$ <u>on n'observera pas de diffraction selon y</u>.

---

5) $$\delta = (SPM) - (SOM)$$



$$\delta = n\,(X \sin\alpha - X \sin\theta)$$

$$\boxed{\delta = n\,X\,(\alpha - \frac{x}{f})}$$

---

6) On travaille ici en $\exp(+j\omega t)$

$$\underline{A}(M) = \underline{K} \int_{X=-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \exp -j2\pi \frac{nX(\alpha - \frac{x}{f})}{\lambda_0}\, dX$$

$$\boxed{\underline{A}(M) = \underline{K}\, a \;\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n a (\frac{x}{f} - \alpha)}{\lambda_0}\right)}$$

---

7)

$$I(M) = k\, \underline{A}(M)\, \underline{A}^*(M)$$

$$= \underbrace{k|\underline{K}|^2 a^2}_{I_0} \operatorname{sinc}^2 \underbrace{\left(\frac{\pi\, a}{\lambda_0} n (\frac{x}{f} - \alpha)\right)}_{g(x)}$$

$$\boxed{I(M) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} n (\frac{x}{f} - \alpha)\right)}$$

---

8) Figure de diffraction observée

- <u>max</u> pour $\frac{\pi a}{\lambda_0} n (\frac{x}{f} - \alpha) = 0$

$$\boxed{x = f\alpha}$$

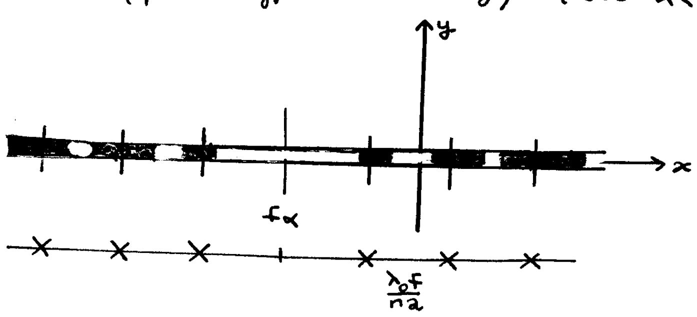
(image géométrique de la source)

- minima (avec $I = 0$) pour

$$\frac{\pi a}{\lambda_0} n (\frac{x}{f} - \alpha) = m\pi \qquad m \in \mathbb{Z}^*$$

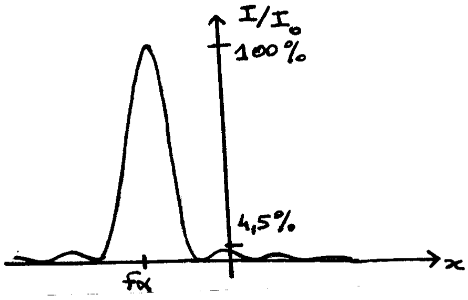
$$\boxed{x = f\alpha + m \frac{\lambda_0 f}{n a}}$$

On voit donc (pas de diffraction selon y) (avec $\alpha < 0$)



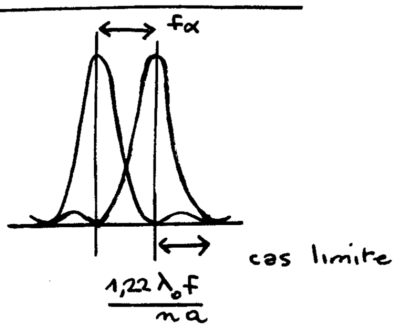
---

9)



10) La pupille étant circulaire, la tache de diffraction doit avoir la même symétrie : tache circulaire entourée d'anneaux.

11)



Les deux taches sont séparées si

$$\alpha f \geq 1{,}22 \frac{\lambda_0}{n} \frac{1}{a} f$$

$$\boxed{\alpha \geq 1{,}22 \frac{\lambda_0}{n a}}$$

12)

$$\boxed{\alpha_{min} = 1{,}22 \frac{\lambda_0}{n a}}$$

A.N.

$$= \frac{1{,}22 \quad 0{,}5 \quad 10^{-6}}{8}$$

$$= 76 \quad 10^{-9} \text{ rad}$$

$$\boxed{\alpha_{min} = 0{,}03'' \text{ d'arc}}$$

13)

Phénomènes limitant le pouvoir de résolution d'un télescope :

– turbulences atmosphériques
– diffraction

---

14) → Pour limiter la diffraction, fabriquer des telescopes avec miroir de grand diamètre.

(Les techniques d'apodisation sont aussi utiles)

→ Pour lutter contre les turbulences atmosphériques:

- envoyer les télescopes dans l'espace
- pour les télescopes au sol, compenser les turbulences par les techniques d'optique adaptative.

---

15) Le grand diamètre permet de collecter davantage de lumière et donc d'augmenter la luminosité.

---

16)
$$n = 1 + \rho C \quad \text{(loi de Gladstone)}$$

donc, en ce qui concerne les dimensions,

$$[C] = \frac{1}{[\rho]}$$

$$\boxed{[C] = L^3\ M^{-1}}$$

$$C \text{ en } m^3.kg^{-1}$$

---

17)
$$PV = n_{mole}\ RT$$

Pour un kg $\quad Pv = rT \quad$ avec $r = \dfrac{R}{M_{\text{masse molaire}}}$

$$\underset{m^3/kg}{v} = \frac{1}{\rho}$$

$$P\frac{1}{\rho} = \frac{R}{M}T$$

$$\boxed{\rho = \frac{PM}{RT}}$$

$$\boxed{n = 1 + C\frac{PM}{RT}}$$

---

18)

$$\boxed{C = (n-1)\,\frac{RT}{PM}}$$

A.N. $= (1{,}00029 - 1)\ \dfrac{8{,}314\ \ 293}{10^5\ \ \ 29\ 10^{-3}}$

$$\boxed{C = 0{,}244\ 10^{-3}\ m^3\,kg^{-1}}$$

---

19)

$$(n-1) = \frac{P}{T}\ \frac{MC}{R}$$

$$\ln(n-1) = \ln P - \ln T + \ln\frac{MC}{R}$$

On différencie (cf les fluctuations sont "petites")

$$\frac{dn}{n-1} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T}$$

donc

$$\boxed{\frac{\delta n}{n-1} = \frac{\delta P}{P} - \frac{\delta T}{T}}$$

(on peut remplacer $(n-1)$ par $\frac{P}{T}\frac{MC}{R}$ et retrouver le résultat du calcul différentiel – sans passer par les différentielles logarithmiques –)

---

20)

. surface d'onde : il s'agit en fait d'une surface <u>équiphase</u>.

---

21)

Théorème de Malus : Les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'ondes.

(en lien avec $\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$

en lien avec $\vec{\Pi}_{\text{poynting}} \perp \text{plan}(\vec{E},\vec{B})$ dans une onde plane)

---

22) On compte $\varphi > 0$ pour un retard.
On choisit $\varphi = 0$ en $z = 0$.

<u>$0 < z < e$</u>

$\varphi(\lvert x\rvert > \frac{r_0}{2}, z<e) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\, n z$
$\varphi(\lvert x\rvert < \frac{r_0}{2}, z<e) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n+\delta n)\, z$

$e < z$

$$\boxed{\varphi\left(|x| > \frac{r_0}{2}, z > e\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n z}$$

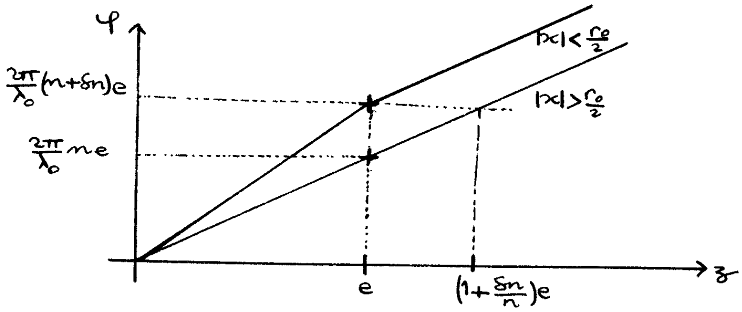
$$\varphi\left(|x| < \frac{r_0}{2}, z > e\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left((n+\delta n)e + n(z-e)\right)$$

$$\boxed{\varphi\left(|x| < \frac{r_0}{2}, z > e\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n z + \delta n\, e)}$$

En résumé

$$\boxed{\varphi\left(|x| > \frac{r_0}{2}, z\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n z}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varphi\left(|x| < \frac{r_0}{2}, z < e\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n z + \delta n\, z) \\ \varphi\left(|x| < \frac{r_0}{2}, z > e\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n z + \delta n\, e) \end{array}}$$



---

23) Equation d'une surface d'onde φ.

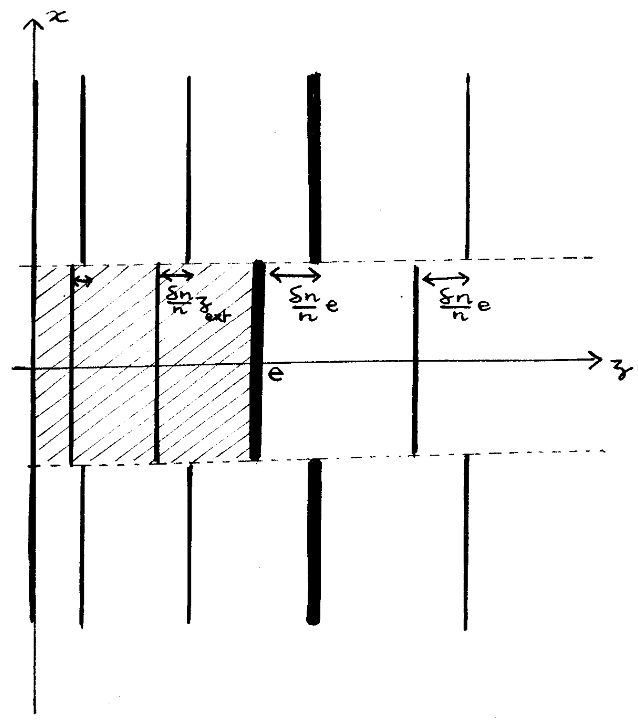
cas :

$\varphi < \frac{2\pi}{\lambda_0}(n+\delta n)e$	$\lvert x\rvert < \frac{r_0}{2}$	$z_{int} = \frac{\varphi}{2\pi n(1+\frac{\delta n}{n})}\lambda_0 \simeq \underbrace{\frac{\varphi\lambda_0}{2\pi n}}_{z_{ext}}\left(1 - \frac{\delta n}{n}\right)$
	$\lvert x\rvert > \frac{r_0}{2}$	$z_{ext} = \frac{\varphi\lambda_0}{2\pi n}$
$\varphi > \frac{2\pi}{\lambda_0}(n+\delta n)e$	$\lvert x\rvert < \frac{r_0}{2}$	$z_{int} = \frac{\varphi\lambda_0}{2\pi n} - \frac{\delta n}{n}e$
	$\lvert x\rvert > \frac{r_0}{2}$	$z_{ext} = \frac{\varphi\lambda_0}{2\pi n}$

---

24) Tracé de surfaces d'ondes.

<u>Evolution d'une surface d'onde</u> au cours de la traversée de la zone d'indice plus élevé.



26) Les surfaces d'onde sont modifiées par les variations locales de T et P qui modifient l'indice.
Pour corriger, on fait de <u>l'optique adaptative</u>.
On rectifie le front d'onde <u>en temps réel</u> grace à des <u>miroirs mobiles</u>