

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

Systemes Linéaires Continus

Invariants

SLCI1 - Bode

Cours



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

A. Réponses harmoniques des systèmes 4

A.I. Fonction de transfert complexe d'un système 4

A.I.1 Utilité.....	4
A.I.2 Représentations	5
A.I.2.a Diagrammes de Bode	5
A.I.2.a.i Diagrammes.....	5
A.I.2.a.ii Echelle logarithmique	6
A.I.2.b Diagramme de Nyquist	8
A.I.2.c Représentation de Black (ou Black-Nichols)	8

A.II. Systèmes du premier ordre 9

A.II.1 Réponse harmonique générale	9
A.II.2 Caractéristiques de la sortie en régime permanent.....	12
A.II.2.a Calcul des caractéristiques.....	12
A.II.2.b Bilan	12
A.II.3 Représentation graphique	13
A.II.3.a Diagrammes de Bode	13
A.II.3.a.i Etude du gain.....	13
• Expression – Tracé – Observations.....	13
• Caractéristiques du gain	14
• Tracé du diagramme de Bode en gain	15
A.II.3.a.ii Etude de la phase	16
• Expression – Tracé – Observations.....	16
• Caractéristiques de la phase.....	16
• Tracé du diagramme de Bode en phase	17
A.II.3.b Diagramme de Nyquist	18
A.II.3.c Diagramme de Black	18
A.II.4 Utilisation du diagramme de Bode.....	19
A.II.4.a Cas général.....	19
A.II.4.b Application	20

A.III. Systèmes du second ordre 21

A.III.1 Caractéristiques de la sortie en régime permanent.....	22
A.III.1.a Calcul des caractéristiques.....	22
A.III.1.b Bilan	23
A.III.2 Représentation graphique	24
A.III.2.a Diagrammes de Bode	24
A.III.2.a.i Etude du gain.....	24
• Expression – Tracé – Observations.....	24
• Caractéristiques du gain	25
• Tracé du diagramme de Bode en gain	29
A.III.2.a.ii Etude de la phase	32
• Expression – Tracé – Observations.....	32
• Caractéristiques de la phase.....	33
• Tracé du diagramme de Bode en phase	34
A.III.2.a.iii Bilan	36
A.III.2.b Diagramme de Nyquist	37
A.III.2.c Diagramme de Black	37
A.III.3 Utilisation du diagramme de Bode.....	38

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

A.III.3.a Cas général	38
A.III.3.b Application	38
A.IV. Intégrateur et dérivateur	39
A.IV.1 Intégrateur	39
A.IV.1.a Etude.....	39
A.IV.1.b Diagramme de Bode	39
A.IV.1.c Remarque	39
A.IV.2 Dérivateur	40
A.IV.2.a Etude.....	40
A.IV.2.b Diagramme de Bode	40
A.IV.2.c Remarque	40
A.V. Abaque de Black (Pour info).....	41
A.VI. Identification.....	42
A.VI.1 Principe	42
A.VI.1.a Mesures et traitement des données	42
A.VI.1.b Identification du système	43
A.VI.1.b.i Ordre	43
A.VI.1.b.ii Coefficients.....	43
A.VI.2 Exemple de mesure d'une réponse	44

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

Réponses harmoniques des systèmes

1.I. Fonction de transfert complexe d'un système

1.I.1 Utilité

La fonction de transfert complexe d'un système est utile lors de l'étude des réponses du système à une entrée harmonique (sinusoïdale).

Soit le système représenté par la fonction de transfert $H(p)$.

La fonction de transfert complexe est la fonction de transfert dans laquelle on remplace p par $j\omega$, j étant le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$ et ω la pulsation du signal d'entrée ($rd. s^{-1}$) :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

f fréquence du signal d'entrée (s^{-1})

T période du signal d'entrée (s)

La fonction de transfert complexe du système s'écrit donc $H(j\omega)$

Soit le signal d'entrée temporel $e(t)$ sinusoïdal d'amplitude e_0 et de pulsation ω :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t)$$

En supposant que l'on a atteint un régime établi (réponse transitoire passée), on démontre que le signal de sortie du système est de la forme :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



Le signal de sortie

- a la même pulsation que le signal d'entrée
- présente une amplitude s_0 différente de celle du signal d'entrée e_0
- présente un déphasage $\varphi < 0$ tel que le décalage temporel t_φ entre entrée et sortie soit égal à :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) = s_0 \sin\left(\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right) = s_0 \sin(\omega(t + t_\varphi)) = \frac{s_0}{e_0} e(t + t_\varphi)$$

$$t_\varphi = \frac{\varphi}{\omega} < 0 \Rightarrow \text{Décalage temporel "vers la droite" entre entrée et sortie} = \text{Retard}$$

Remarque : pour tous les systèmes réels (hors correcteurs), la phase ne peut être que négative. En effet, le signal de sortie ne peut sortir avant que le signal d'entrée ne soit entré.

Les valeurs de s_0 et φ dépendent de la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

En effet :

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)|e_0 \\ \varphi = \arg(H(j\omega)) \end{cases}$$

La connaissance de la fonction de transfert complexe d'un système permet de connaître très simplement sa réponse à une entrée harmonique.

Détails de la démarche (à approfondir en physique et/ou maths):

- On suppose une entrée imaginaire : $\underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t} = e_0 \cos \omega t + j e_0 \sin \omega t$
- $e(t) = \text{Im}(\underline{e}(t))$
- On montre que $\underline{s}(t) = H(j\omega)\underline{e}(t) = |H(j\omega)|e^{j\varphi}e_0 e^{j\omega t} = e_0 |H(j\omega)|e^{j(\omega t + \varphi)} = s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$
- Finalement : $s(t) = \text{Im}(\underline{s}(t)) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Remarque : même démarche pour une entrée en $\cos(\omega t)$ avec une partie réelle

1.1.2 Représentations

Modules et arguments d'une fonction de transfert complexe sont représentés graphiquement selon trois types de représentation :

- diagrammes de Bode
- diagramme de Nyquist
- diagramme de Black

On parle de lieu de transfert.

Dans tous les cas, ils permettent de déterminer graphiquement et simplement le comportement du système en fonction de la pulsation du signal d'entrée, et de déterminer des valeurs de gain et phase pour des pulsations particulières.

1.1.2.a Diagrammes de Bode

1.1.2.a.i Diagrammes

On représente graphiquement deux courbes :

$$G = 20 \log |H(j\omega)| \quad ; \quad \varphi = \arg H(j\omega)$$

L'abscisse est la pulsation ω , représentée en échelle logarithmique.

Généralement, on réalise les tracés asymptotiques des courbes des systèmes et on place quelques points particuliers. Nous développerons ce point plus tard pour les systèmes du 1° et du 2° ordre.

G est un gain exprimé en décibels. On le note généralement G_{db} .

- Lorsque le gain vaut 0, $H(j\omega) = 1$, la sortie n'est ni amplifiée, ni atténuée car $s_0 = e_0$
- Si $G_{db} > 0$, le système amplifie l'entrée
- Si $G_{db} < 0$, le système atténue l'entrée

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

Le diagramme de Bode est un tracé dont l'abscisse est une pulsation. Il faut bien identifier ce que cela veut dire. Ce tracé va permettre de savoir comment seront l'amplitude et la phase (le déphasage) d'une réponse d'un système à une entrée harmonique en fonction de la pulsation du signal d'entrée.

Exemple : un haut-parleur laisse-t-il passer les hautes ou les basses fréquences ? Connaissant le gain en fonction de la pulsation en entrée, il suffit d'identifier la plage de pulsations où le gain est négatif pour conclure que sur cette plage, il atténue les signaux d'entrée et ne les laisse donc pas passer : il les filtre.

Remarque : Le tracé du lieu de transfert d'un produit de deux fonctions de transfert est obtenu simplement sur un diagramme de Bode par addition :

$$H(p) = H_1(p)H_2(p)$$

$$G_{db} = 20 \log|H(j\omega)| = 20 \log|H_1(j\omega)H_2(j\omega)| = 20 \log|H_1(j\omega)| + 20 \log|H_2(j\omega)|$$

$$G_{db} = G_{1db} + G_{2db}$$

$$\arg H(j\omega) = \arg(H_1(j\omega)H_2(j\omega)) = \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$$

Le diagramme de Bode est la représentation la plus utilisée industriellement, car elle permet une analyse rapide des propriétés et des effets des corrections éventuelles.

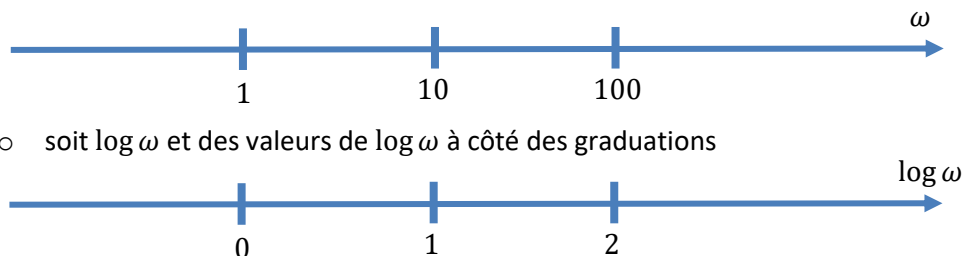
Remarque : comme on peut factoriser tout polynôme en produit de polynômes de degrés 1 et 2, il suffit de savoir faire les diagrammes de Bode de 1° et 2° ordre pour savoir tout faire !

1.1.2.a.ii Echelle logarithmique

On représente la pulsation ω sur l'axe des abscisses en échelle logarithmique. Il faut savoir quelques détails concernant cette représentation :

- La fonction \log « compte les zéros » des puissances de 10 :
 $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$
- Pour la représentation logarithmique en abscisse, on écrit au bout de l'axe
 - soit ω et des valeurs de ω à côté des graduations

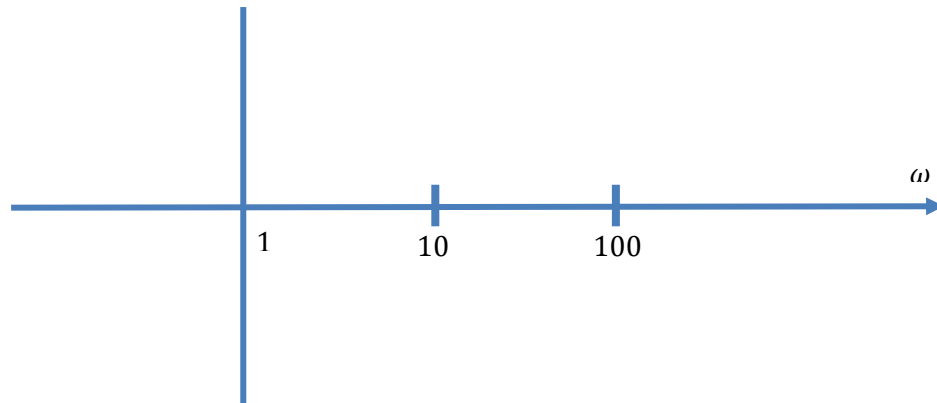
$\log 10^n = n$



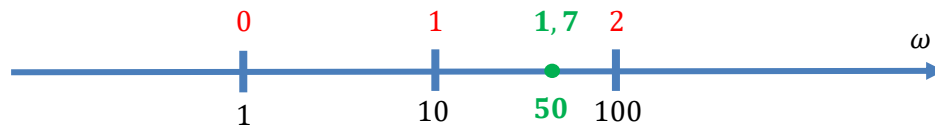
- Cependant, il arrive qu'un mix soit fait mais c'est à éviter

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

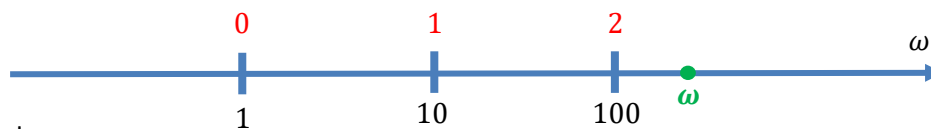
- On peut placer l'axe des ordonnées où l'on veut ($\omega = 0$ se trouve en l'abscisse $-\infty$...):



- L'échelle étant logarithmique, il faut savoir placer n'importe quelle valeur ω :
Pour placer $\omega = 50$, il suffit de calculer $\log 50 = 1,7$ ($10^{1,7} = 50$)



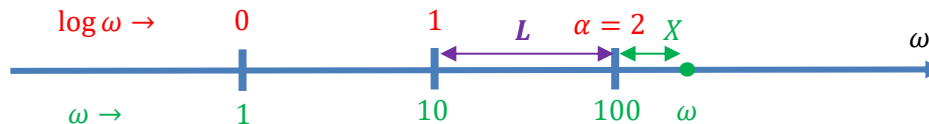
- Il faut savoir déterminer la pulsation en un point donné :



Méthode

- On mesure la longueur d'une décade L
- On mesure de la distance X entre un point connu tel que $\alpha = \log \omega_i$ et le point recherché tel que $\beta = \log \omega$
- On calcule le rapport $k = \frac{X}{L}$
- On pose la variable signe $S = \begin{cases} S = 1 & \text{si } \omega > 10^\alpha \\ S = -1 & \text{si } \omega < 10^\alpha \end{cases}$
- Alors : $\beta = \alpha + Sk$
- Donc : $\omega = 10^\beta$

Application



On a alors :

$$\alpha = 2 \quad ; \quad S = 1 \quad ; \quad k = \frac{X}{L} = 0,35 \quad ; \quad \beta = 2,35 \quad ; \quad \omega = 10^{2,35} = 224 \text{ rd.s}^{-1}$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.1.2.b Diagramme de Nyquist

Ce diagramme représente le nombre complexe $H(j\omega) = \text{Re}(H(j\omega)) + j\text{Im}(H(j\omega))$ dans le plan complexe. Le lieu de Nyquist, gradué en ω , est la représentation la plus utilisée par les universitaires.

1.1.2.c Représentation de Black (ou Black-Nichols)

C'est une représentation paramétrique en fonction de ω :

- Abscisse : phase φ en degrés
- Ordonnée : gain G_{dB}

Tout comme pour les diagrammes de Bode, le lieu de Black s'obtient facilement lorsque la fonction de transfert est égale au produit de deux ou plusieurs fonctions.

L'intérêt de la représentation de Black est de pouvoir obtenir, à partir du tracé de la FTBO, les propriétés de la FTBF, et en permettre ainsi un réglage assez facile.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.II. Systèmes du premier ordre

1.II.1 Réponse harmonique générale

Supposons une entrée sinusoïdale de pulsation ω :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$$

La sortie en régime permanent sera de la forme :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)| e_0 \\ \varphi = \arg H(j\omega) \end{cases}$$

Il nous faut donc déterminer, en fonction de ω , les valeurs de $|H(j\omega)|$ et de $\arg H(j\omega)$.

Pour un système du premier ordre, on a :

$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp} = \frac{K}{1 + \frac{p}{\omega_0}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$E(p) = e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Déterminons $s(t)$:

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1 + Tp} e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{K e_0 \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)}$$

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)} = \frac{Ap + B}{p^2 + \omega^2} + \frac{C}{1 + Tp} = \frac{Ap + B + TpAp + TpB + Cp^2 + C\omega^2}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)}$$

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)} = \frac{(AT + C)p^2 + (A + TB)p + (B + C\omega^2)}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)}$$

$$\begin{cases} K e_0 \omega = B + C\omega^2 \\ A + TB = 0 \\ AT + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K e_0 \omega = -\frac{A}{T} - AT\omega^2 \\ B = -\frac{A}{T} \\ C = -AT \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K e_0 \omega = -A\left(\frac{1}{T} + T\omega^2\right) \\ B = -\frac{A}{T} \\ C = -AT \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{K e_0 \omega T}{1 + T^2 \omega^2} \\ B = -\frac{A}{T} \\ C = -AT \end{cases}$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{Ke_0\omega T}{1+T^2\omega^2} \\ B = \frac{Ke_0\omega}{1+T^2\omega^2} \\ C = \frac{Ke_0\omega T^2}{1+T^2\omega^2} \end{cases}$$

Soit :

$$S(p) = \frac{-\frac{Ke_0\omega T}{1+T^2\omega^2}p + \frac{Ke_0\omega}{1+T^2\omega^2}}{p^2 + \omega^2} + \frac{\frac{Ke_0\omega T^2}{1+T^2\omega^2}}{1+Tp}$$

$$S(p) = \frac{Ke_0\omega}{1+T^2\omega^2} \left[\frac{1-Tp}{p^2 + \omega^2} + \frac{T^2}{1+Tp} \right]$$

$$S(p) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2} \left[\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{\omega Tp}{p^2 + \omega^2} + \frac{\omega T^2}{1+Tp} \right]$$

$$S(p) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2} \left[\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} - \omega T \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \omega T \frac{1}{\frac{1}{T} + p} \right]$$

Par application de la transformée de Laplace inverse, on a :

$$s(t) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2} \left[\sin(\omega T) - \omega T \cos(\omega T) + \omega T e^{-\frac{t}{T}} \right] u(t)$$

$$s(t) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2} \omega T e^{-\frac{t}{T}} u(t) + \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2} (\sin(\omega T) - \omega T \cos(\omega T)) u(t)$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

Rappel :

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right)$$

On recherche une forme $f(t) = C \cos(\omega t \pm \varphi)$	On recherche une forme $f(t) = C \sin(\omega t \pm \varphi)$
<p>On pose :</p> $\begin{cases} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \varphi \\ \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \varphi \end{cases}$ <p>Pour avoir une expression simple de φ on passe par :</p> $\tan \varphi = \frac{B}{A}$ <p>On a :</p> $f(t) = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t)$ $f(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\varphi - \omega t)$ $f(t) = C \cos(\omega t - \varphi)$	<p>On pose :</p> $\begin{cases} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \varphi \\ \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \varphi \end{cases}$ <p>Pour avoir une expression simple de φ' on passe par :</p> $\tan \varphi' = \frac{A}{B}$ <p>On a :</p> $f(t) = \sqrt{A^2 + B^2} (\sin \varphi' \cos \omega t + \cos \varphi' \sin \omega t)$ $f(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\varphi' + \omega t)$ $f(t) = C \sin(\omega t + \varphi')$

Reprenons l'expression de $s(t)$

$$\sin \omega T - \omega T \cos \omega T = \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega T) + \frac{-\omega T}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \cos(\omega T) \right)$$

On pose φ tel que :

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \quad ; \quad \sin \varphi = \frac{-\omega T}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \quad ; \quad \tan \varphi = -\omega T$$

Alors :

$$\sin \omega T - \omega T \cos \omega T = \sqrt{1 + T^2 \omega^2} (\cos \varphi \sin(\omega T) + \sin \varphi \cos(\omega T)) = \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \sin(\omega T + \varphi)$$

Finalement, on a donc :

$$s(t) = \frac{K e_0}{1 + T^2 \omega^2} \omega T e^{-\frac{t}{T}} u(t) + \frac{K e_0}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega T + \varphi) u(t) \quad ; \quad \varphi = -\tan^{-1} \omega T$$

$$s(t) = \frac{K e_0}{1 + T^2 \omega^2} \omega T e^{-\frac{t}{T}} u(t) + s_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

Régime transitoire

Régime permanent

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.II.2 Caractéristiques de la sortie en régime permanent

Dans le cas de réponses harmoniques, nous allons uniquement nous intéresser aux réponses en régime permanent. En régime permanent, nous avons vu que :

$$s(t) = e_0 \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \varphi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

1.II.2.a Calcul des caractéristiques

Exprimons la fonction de transfert du système dans le domaine complexe :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

Module	Argument
$ H(j\omega) = \left \frac{K}{1 + j\omega T} \right $ $ H(j\omega) = \frac{K}{ 1 + j\omega T }$ $ H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$	$\varphi = \arg H(j\omega) = \arg \frac{K}{1 + j\omega T}$ $\varphi = \arg(K) - \arg(1 + j\omega T) = -\arg(1 + j\omega T)$ $\varphi = \arg(1 - j\omega T) = \arg(A + jB)$ $\begin{cases} A = 1 \\ B = -\omega T \end{cases}$ $\tan(\varphi) = \frac{B}{A} ; \cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} ; \sin(\varphi) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\tan(\varphi) = -\omega T ; \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} ; \sin(\varphi) = \frac{-\omega T}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$ $\cos(\varphi) > 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-\omega T)$ $\varphi = -\tan^{-1}(\omega T)$

1.II.2.b Bilan

$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) u(t)$$

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = |H(j\omega)| e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} e_0 \sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega T))$$

1° ordre

On voit que :

- Pour une entrée d'amplitude e_0 , l'amplitude de la sortie vaut $\frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} e_0$ et peut-être amplifiée ou atténuée
- La sortie est déphasée de $\tan^{-1} \omega T$ radians, cela correspond à un décalage entre l'entrée et la réponse du système, la réponse étant en retard par rapport à l'entrée

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.II.3 Représentation graphique

Il faut bien faire attention au fait que la réponse précédemment obtenue est une réponse temporelle pour une entrée sinusoïdale avec une pulsation (ou fréquence) donnée.

On introduit donc différents diagrammes permettant de représenter les deux valeurs caractéristiques $|H(j\omega)|$ et φ en fonction de ω .

1.II.3.a Diagrammes de Bode

Les deux diagrammes de Bode représentent le gain exprimé en décibels (db) et la phase en radians, le tout avec une échelle des abscisses logarithmique.

1.II.3.a.i Etude du gain

• Expression – Tracé – Observations

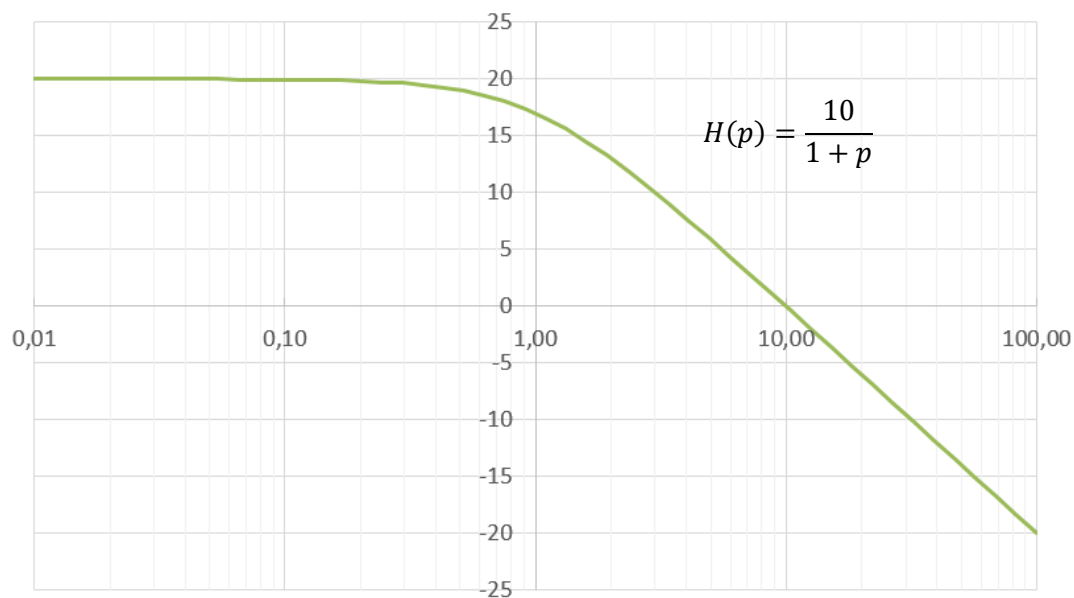
$$G_{db} = 20 \log |H(j\omega)|$$

$$G_{db} = 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

$$G_{db} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$$

$$G_{db} = 20 \log K - 10 \log(1 + T^2 \omega^2) \quad \text{1° ordre}$$

Traçons un exemple de G_{db} en fonction de ω pour $H(p) = \frac{10}{1+p}$:



On remarque :

- Une asymptote horizontale à la valeur de $20 \log K$ lorsque $\omega \rightarrow 0$
- Une asymptote de pente -20 décibels par décade lorsque $\omega \rightarrow +\infty$
- Une cassure vers la valeur $\omega = \frac{1}{T}$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

• **Caractéristiques du gain**

$$G_{db} = 20 \log K - 10 \log(1 + T^2 \omega^2)$$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \log \omega \rightarrow -\infty$	$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \log \omega \rightarrow +\infty$
$G_{db} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 20 \log K = G_0$ <p>Asymptote horizontale de valeur $G_0 = 20 \log K$</p>	$G_{db} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log K - 20 \log(T\omega)$ $G_{db} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log \frac{K}{T} - 20 \log(\omega)$ <p>Soit $X = \log(\omega)$</p> $G_{db} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log \frac{K}{T} - 20X$ <p>En échelle logarithmique, c'est une droite de pente - 20 db/décades Asymptote de pente -20db/dec</p>
Intersection des asymptotes	Pulsation à laquelle le gain réel est nul ω_{c_0}
<p>Soient les deux équations des asymptotes :</p> $y_{-\infty} = 20 \log K$ $y_{+\infty} = 20 \log K - 20 \log(T\omega)$ <p>Leur intersection a lieu à la pulsation ω telle que :</p> $20 \log K = 20 \log K - 20 \log(T\omega)$ $\Leftrightarrow 20 \log(T\omega) = 0$ $\Leftrightarrow T\omega_c = 1$ $\omega = \frac{1}{T} = \omega_0$ <p>Calculons le gain à cette pulsation :</p> $G_{db} = 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$ $= 20 \log \frac{K}{\sqrt{2}} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2}$ $G_{db} \approx G_0 - 3$	<p>Le gain (décroissant) ne peut être nul que si $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{db} > 0$, c'est-à-dire $20 \log K > 0$, soit $K > 1$</p> $G_{db} = 0$ $\Leftrightarrow 20 \log K = 10 \log(1 + T^2 \omega_{c_0}^2)$ $\Leftrightarrow \log K^2 = \log(1 + T^2 \omega_{c_0}^2)$ $\Leftrightarrow K^2 = 1 + T^2 \omega_{c_0}^2$ $\Leftrightarrow \omega_{c_0}^2 = \frac{K^2 - 1}{T^2} \text{ avec } \omega_{c_0} > 0$ $\Leftrightarrow \omega_{c_0} = \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{T}$ $\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$
Pulsation à laquelle le gain de l'asymptote est nul $\omega_{c_0}^{Asympt}$	
<p>Le gain (décroissant) ne peut être nul que si $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{db} > 0$, c'est-à-dire $20 \log K > 0$, soit $K > 1$</p> <p>On résout :</p> $20 \log K - 20(\log \omega_{c_0}^{Asympt} - \log \omega_0) = 0$ $\Leftrightarrow \log K = \log \frac{\omega_{c_0}^{Asympt}}{\omega_0}$ $\Leftrightarrow K = \frac{\omega_{c_0}^{Asympt}}{\omega_0}$ $\Leftrightarrow \omega_{c_0}^{Asympt} = K \omega_0 = \frac{K}{T}$ <p>On remarquera la proximité de cette valeur avec la valeur réelle $\omega_{c_0} = \frac{\sqrt{K^2 - 1}}{T}$</p>	

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

Conclusions :

- Il existe une asymptote horizontale de valeur $G_0 = 20 \log K$ en $\omega \rightarrow 0$
- Il existe une asymptote de pente -20 db/dec en $\omega \rightarrow \infty$
- Les deux asymptotes se coupent à la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{T}$
- A cette pulsation, le gain réel est égal au gain maximal du système $G_0 = 20 \log K$ moins 3 db.
On appelle cette pulsation la pulsation de coupure à -3db et on la note ω_c

$$\omega_c \approx \omega_0 = \frac{1}{T}$$

- On appelle bande passante à -3 db notée BP la plage de pulsations pour lesquelles le gain est supérieur au gain maximal diminué de 3 db

$$BP = [0; \omega_c]$$

- On appelle pulsation de coupure à 0 db la pulsation à laquelle le gain est nul et on la note ω_{c_0}

$$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$$

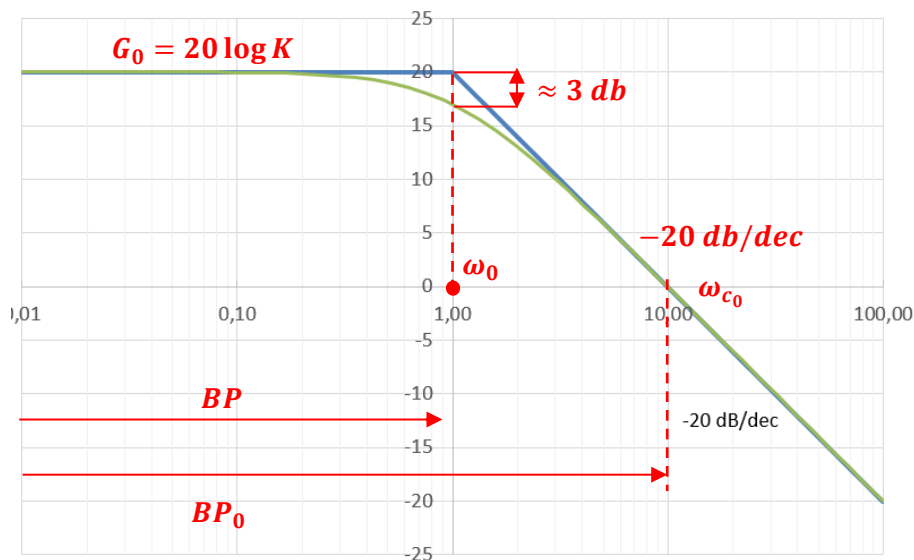
- La pulsation à laquelle le tracé asymptotique coupe l'axe des abscisses vaut $\omega_{c_0}^{Asympt} = K \omega_0 = \frac{K}{T}$
- On appelle bande passante à 0 db notée BP_0 la plage de pulsations pour laquelle le gain est positif

$$BP_0 = [0; \omega_{c_0}]$$

• Tracé du diagramme de Bode en gain

Le tracé des deux asymptotes s'appelle diagramme asymptotique de gain.

Le tracé de la courbe réelle s'appelle le diagramme de Bode en gain du système.



$$HH(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

$$\omega_c \approx \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$$

$$\omega_{c_0}^{asympt} = \omega_0 K$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

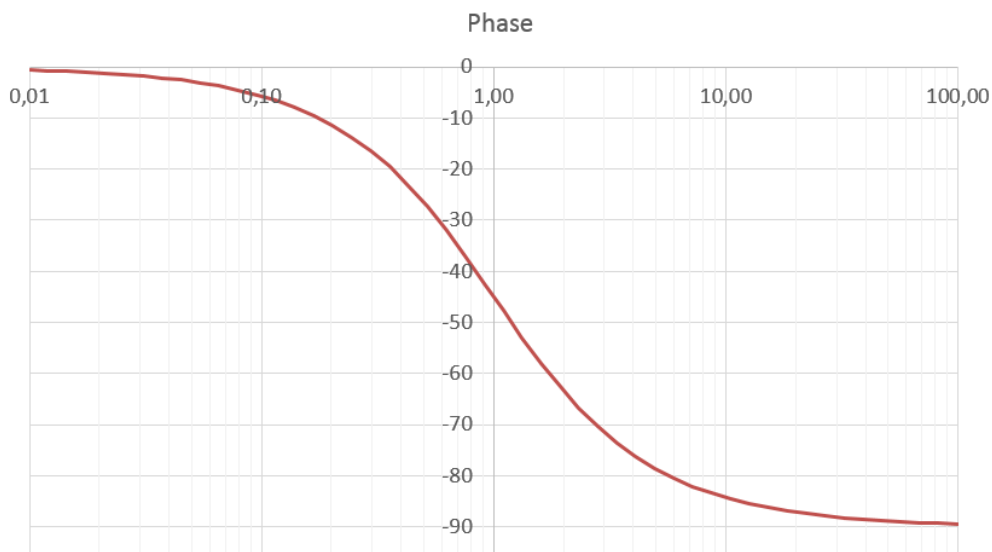
1.II.3.a.ii Etude de la phase

• Expression - Tracé - Observations

$$\varphi = -\tan^{-1}(\omega T) \quad \text{1° ordre}$$

Attention : φ est exprimée en radians dans la fonction $s(t)$

Traçons un exemple de φ en degrés en fonction de ω pour $H(p) = \frac{10}{1+p}$:



On remarque

- Une asymptote horizontale à la valeur de 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$
- Une asymptote horizontale à la valeur -90° lorsque $\omega \rightarrow +\infty$
- Le passage à la valeur -45° lorsque $\omega = \omega_c$

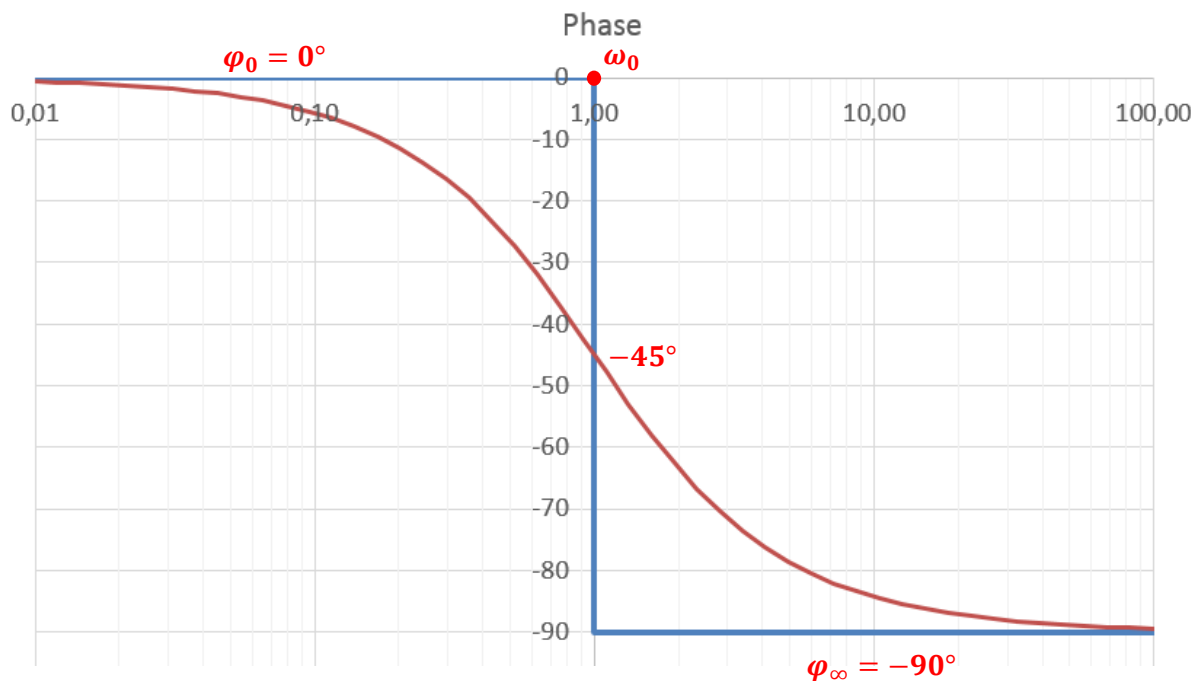
• Caractéristiques de la phase

$$\varphi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

$\omega \rightarrow 0 \rightarrow \log \omega \rightarrow -\infty$	$\omega \rightarrow +\infty \rightarrow \log \omega \rightarrow +\infty$
$\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 = \varphi_0$ Asymptote horizontale nulle	$\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} = \varphi_\infty$ Asymptote horizontale à $-\frac{\pi}{2}$
Valeur en ω_0	
$\varphi(\omega_0) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{T}T\right) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$	

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

• **Tracé du diagramme de Bode en phase**



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.II.3.b Diagramme de Nyquist

On trace $H(j\omega)$ dans le plan complexe :

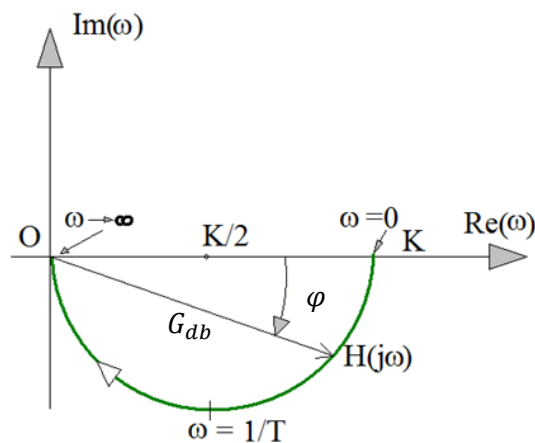
$$H(j\omega) = \text{Re}(H(j\omega)) + j\text{Im}(H(j\omega))$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} = \frac{K - jK\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{K\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

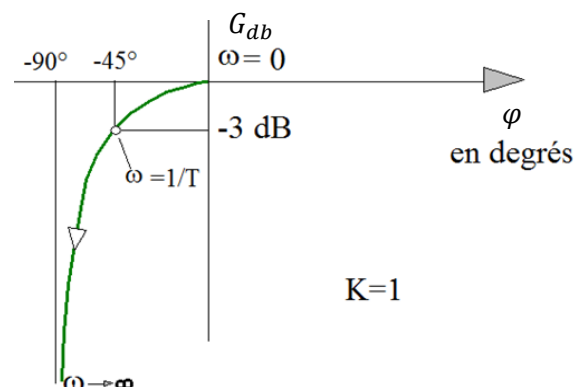
Cela correspond à un demi-cercle centré sur le point $(\frac{K}{2}; 0)$. Ce lieu est orienté de $\omega = 0$ à $\omega \rightarrow +\infty$

$\omega = 0$	$\omega \rightarrow +\infty$
$H(j\omega) \rightarrow K$	$H(j\omega) \rightarrow 0$



1.II.3.c Diagramme de Black

On trace une courbe paramétrée telle que φ soit en abscisse en degrés et G_{bd} soit en ordonnée

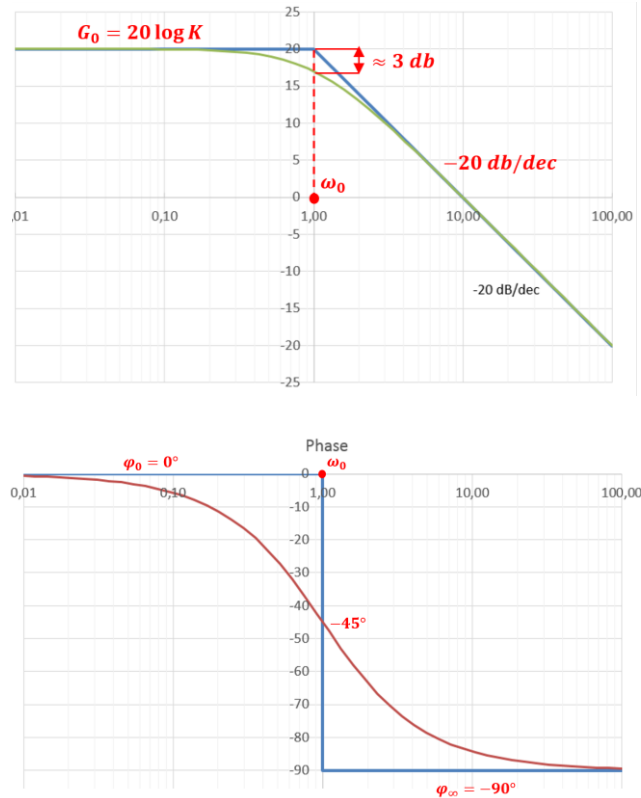


Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.II.4 Utilisation du diagramme de Bode

1.II.4.a Cas général

Regardons le diagramme de Bode :



Rappelons qu'à l'entrée $e(t) = e_0 \sin \omega t u(t)$ correspond la sortie $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$ avec

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)|e_0 \\ \varphi = \arg H(j\omega) \end{cases}$$



Les tracés de Bode permettent de voir simplement et rapidement des choses très intéressantes :

- Dans toute la zone où le gain est positif, c'est-à-dire dans la bande passante à 0 db BP_0 , on a $|H(j\omega)| > 1$, c'est-à-dire que la sortie est amplifiée
- Dans la zone où le gain est négatif, la sortie est atténuée

Pour un système du premier ordre, on parlera donc d'un système passe bas : à chaque entrée sinusoïdale dans le système

- si sa pulsation est inférieure à ω_{c0} , le signal est transmis et amplifié
- si sa pulsation est supérieure à ω_{c0} , le signal est filtré, atténué, « ne passe plus »

Il filtre les hautes pulsations, ou hautes fréquences.

Le diagramme de phase permet de déterminer pour chaque pulsation le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

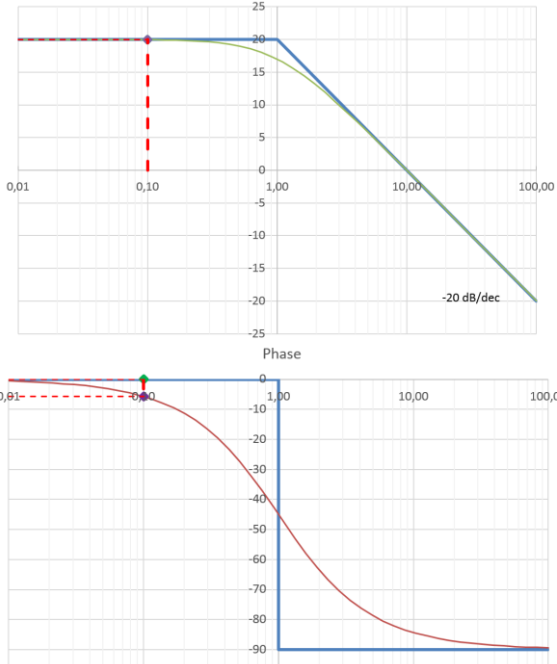
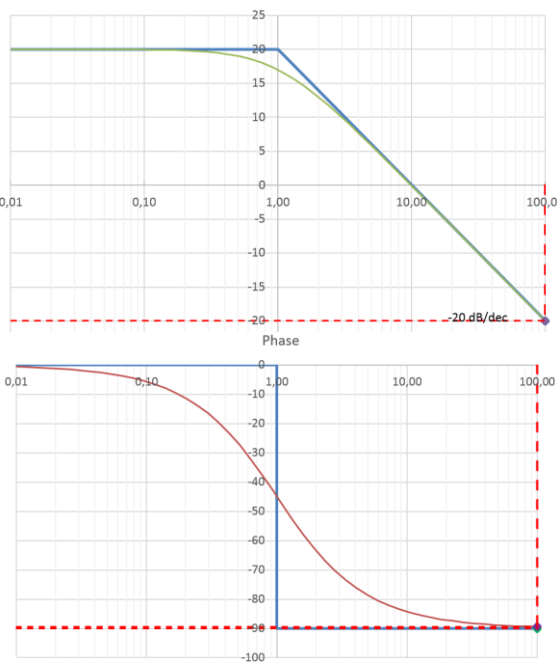
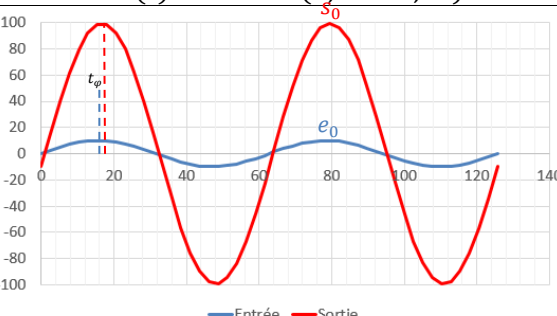
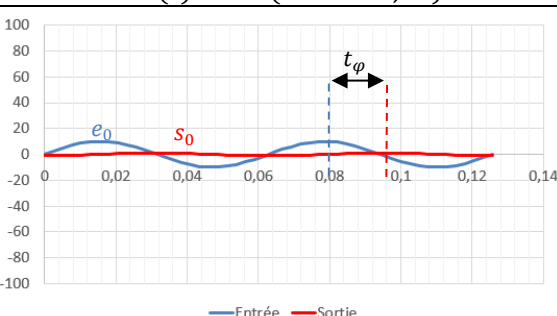
1.II.4.b Application

Préliminaires : Connaissant le gain G_{db} , on peut calculer $|H(j\omega)|$:

$$G_{db} = 20 \log |H(j\omega)| \Leftrightarrow |H(j\omega)| = 10^{\frac{G_{db}}{20}}$$

$$H(p) = \frac{10}{1+p}$$

Prenons deux entrées de pulsations différentes

<p>$e(t) = 10 \sin 0,1t$</p> 	<p>$e(t) = 10 \sin 100t$</p> 
$\begin{cases} H(j\omega) \approx 10^{\frac{20}{20}} \approx 10 \\ \varphi \approx -5^\circ \approx -0,08 \text{ rd} \\ t_\varphi = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{0,08}{0,1} = 0,8 \text{ s} \end{cases}$	$\begin{cases} H(j\omega) \approx 10^{\frac{-20}{20}} \approx 0,1 \\ \varphi \approx -90^\circ \approx -1,57 \text{ rd} \\ t_\varphi = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{1,57}{100} = 0,0157 \text{ s} \end{cases}$
<p>$s^{gr}(t) = 100 \sin(0,1t - 0,08)$</p> 	<p>$s^{gr}(t) = \sin(100t - 1,57)$</p> 
$\begin{cases} H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 9,95 \\ \varphi = -\tan^{-1} \omega T = -0,1 \text{ rd} \\ t_\varphi = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{0,1}{0,1} = 1 \text{ s} \end{cases}$	$\begin{cases} H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 0,1 \\ \varphi = -\tan^{-1} \omega T = -1,56 \text{ rd} \\ t_\varphi = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{1,56}{100} = 0,0156 \text{ s} \end{cases}$
<p>$s(t) = 99,5 \sin(0,1t - 0,1)$</p>	<p>$s(t) = \sin(100t - 1,56)$</p>

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.III. Systèmes du second ordre

Supposons une entrée sinusoïdale de pulsation ω :

$$e(t) = e_0 \sin \omega t u(t)$$

La sortie en régime permanent sera de la forme :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)| e_0 \\ \varphi = \arg H(j\omega) \end{cases}$$

Il nous faut donc déterminer, en fonction de ω , les valeurs de $|H(j\omega)|$ et de $\arg H(j\omega)$.

Pour un système du second ordre, on a :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$



Il est possible de connaître la réponse d'un système du 2° ordre à une entrée sinusoïdale en régime transitoire, mais ce n'est pas celle qui nous intéressera dans cette partie.

$$E(p) = e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{K e_0 \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + Tp)}$$

En faisant une décomposition en éléments simples et en appliquant la transformée de Laplace inverse à $S(p)$, on obtient :

$$s(t) = f(t) + s_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

 Régime permanent
 Régime transitoire

Nous ne détaillerons pas cette fois ci la réponse en régime transitoire, l'intérêt de son expression étant limité face à la difficulté de résolution dans les 3 cas (z) étudiés précédemment.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.III.1 Caractéristiques de la sortie en régime permanent

Dans le cas de réponses harmoniques, nous allons uniquement nous intéresser aux réponses en régime permanent.

1.III.1.a Calcul des caractéristiques

Dans le cas de réponses harmoniques, nous allons uniquement nous intéresser aux réponses en régime permanent.

Exprimons la fonction de transfert du système dans le domaine complexe :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{K}{ap^2 + bp + 1} ; \quad \begin{cases} a = \frac{1}{\omega_0^2} \\ b = \frac{2z}{\omega_0} \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{a(j\omega)^2 + bj\omega + 1} = \frac{K}{(1 - a\omega^2) + jb\omega}$$

Module	Argument
$ H(j\omega) = \left \frac{K}{(1 - a\omega^2) + jb\omega} \right $ $ H(j\omega) = \frac{K}{ (1 - a\omega^2) + jb\omega }$	$\varphi = \arg H(j\omega) = \arg \frac{K}{(1 - a\omega^2) + jb\omega}$ $\varphi = \arg(K) - \arg((1 - a\omega^2) + jb\omega)$ $\varphi = -\arg((1 - a\omega^2) + jb\omega)$ $\varphi = \arg((1 - a\omega^2) - jb\omega) = \arg(A + jB)$ $\begin{cases} A = 1 - a\omega^2 \\ B = -b\omega \end{cases}$ $\tan(\varphi) = \frac{B}{A} ; \cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} ; \sin(\varphi) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\tan(\varphi) = \frac{-b\omega}{1 - a\omega^2}$ $\cos(\varphi) = \frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$ $\sin(\varphi) = \frac{-b\omega}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$ $\Rightarrow \varphi = \text{sign}(B) \cos^{-1} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$ $\text{sign}(B) = \text{sign}(-b\omega) \leq 0 \quad \forall (\omega, z)$
$ H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$	$\varphi = -\cos^{-1} \left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \right)$
<p>Ou encore :</p> $ H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$	<p>Ou encore :</p> $\varphi = -\cos^{-1} \left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \right)$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

Remarque : éviter de passer par la fonction \tan^{-1} qui donne un résultat dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ qui nécessite une réflexion et l'ajout de $\pm\pi$ selon la valeur de φ calculée.

1.III.1.b Bilan

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2} = \frac{K}{ap^2 + bp + 1} \quad ; \quad \begin{cases} a = \frac{1}{\omega_0^2} \\ b = \frac{2z}{\omega_0} \end{cases}$$

$$e(t) = e_0 \sin \omega t$$

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = |H(j\omega)| e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$s(t) = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} e_0 \sin\left(\omega t - \cos^{-1}\left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right)\right)$$

$$s(t) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e_0 \sin\left(\omega t - \cos^{-1}\left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)\right)$$

2° ordre

On voit que :

- Pour une entrée d'amplitude e_0 , l'amplitude de la sortie vaut $\frac{K}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}} e_0$ et peut-être soit amplifiée, soit atténuée
- La sortie est déphasée négativement de $\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1-a\omega^2}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}}\right)$ radians, cela correspond à un décalage entre l'entrée et la réponse du système, la réponse étant en retard par rapport à l'entrée

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.III.2 Représentation graphique

1.III.2.a Diagrammes de Bode

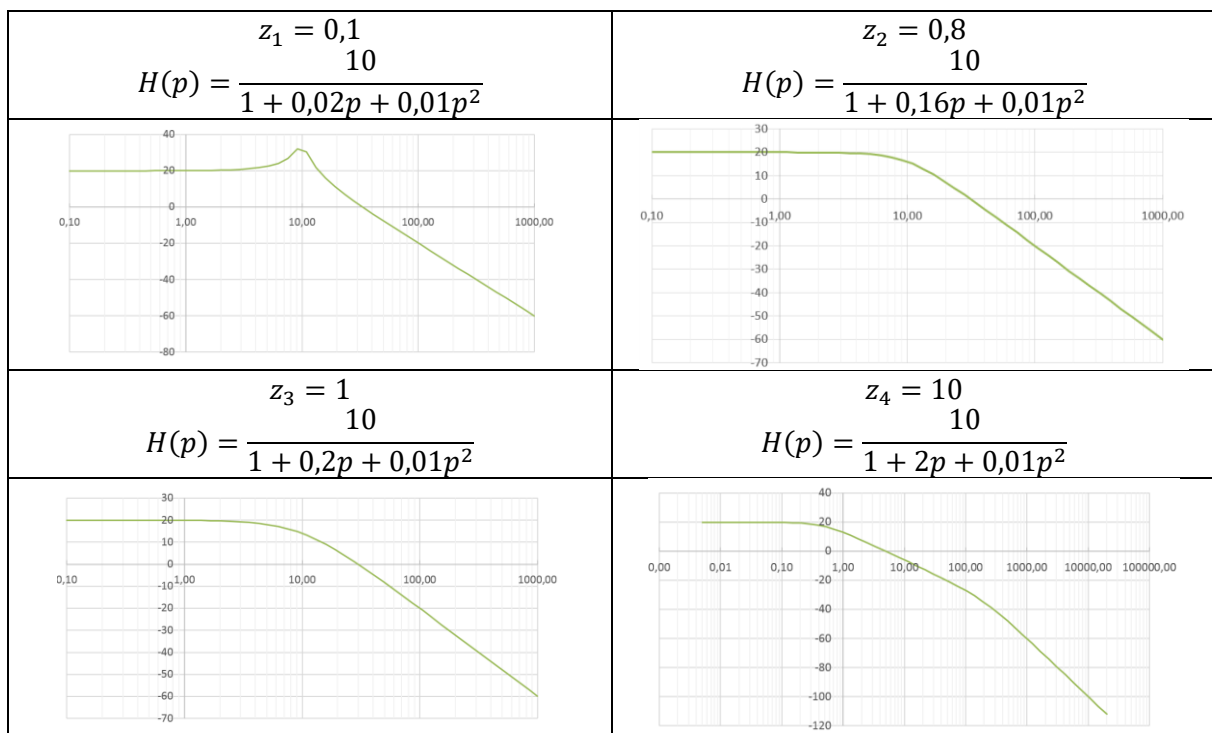
1.III.2.a.i Etude du gain

• Expression – Tracé – Observations

$$G_{db} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}$$

$$G_{db} = 20 \log K - 10 \log((1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2) \quad \text{2° ordre}$$

Traçons G_{db} en fonction de ω pour 4 valeurs de z : $\begin{cases} z_1 = 0,1 \\ z_2 = 0,8 \\ z_3 = 1 \\ z_4 = 10 \end{cases}$ et $\begin{cases} K = 10 \\ \omega_0 = 10 \end{cases}$



On remarque dans tous les cas :

- Une asymptote horizontale à la valeur de $20 \log K$ lorsque $\omega \rightarrow 0$
- Une asymptote de pente -40 décibels par décade lorsque $\omega \rightarrow +\infty$

Par ailleurs, selon les cas :

- Une forme asymptotique similaire lorsque $z \leq 1$
- La présence d'un « pic » dans le cas où $z_1 = 0,1$
- Pas de pic dans le cas où $z_1 = 0,8$
- La présence d'une nouvelle asymptote dans le cas où $z > 1$, de pente -20 décibels par décade

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

• **Caractéristiques du gain**

$$G_{db} = 20 \log K - 10 \log((1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2)$$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \log \omega \rightarrow -\infty$	$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \log \omega \rightarrow +\infty$
$ H(j\omega) \xrightarrow{0} K$ $G_{db} \xrightarrow{0} 20 \log K = G_0$ Asymptote horizontale	$ H(j\omega) \xrightarrow{+\infty} \frac{K}{\sqrt{a^2 \omega^4}} = \frac{K}{a\omega^2} = \frac{K}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{K\omega_0^2}{\omega^2}$ $G_{db} \xrightarrow{+\infty} 20 \log \frac{K\omega_0^2}{\omega^2} = 20 \log K\omega_0^2 - 20 \log \omega^2$ $G_{db} \sim_{+\infty} 20 \log K\omega_0^2 - 40 \log \omega$ Asymptote décroissante de pente -40 db/dec
Intersection des asymptotes	Pulsation à laquelle le gain est nul ω_{c_0}
<p>L'intersection de ces deux droites asymptotes a lieu en :</p> $20 \log K = 20 \log K\omega_0^2 - 40 \log \omega$ $= 20 \log K + 20 \log \omega_0^2 - 40 \log \omega$ $20 \log \omega_0^2 = 20 \log \omega^2$ $\log \omega_0^2 = \log \omega^2$ $\omega = \omega_0$ <p>Calculons le gain à cette pulsation :</p> $G_{db} = 20 \log \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2z}{\omega_0}\omega_0\right)^2}}$ $= 20 \log \frac{K}{2z}$ $= 20 \log K - 20 \log(2z)$ $G_{db}(\omega_0) = G_0 - 20 \log(2z)$ <p>Cas particulier $z = 0,5$:</p> $G_{\omega_0} = G_0 - 20 \log(2z) = G_0$	<p>Le gain (décroissant) ne peut être nul que si $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{db} > 0$, c'est-à-dire $20 \log K > 0$, soit $K > 1$</p> $G_{db} = 0$ $\Leftrightarrow 20 \log K = 10 \log \left((1 - a\omega_{c_0}^2)^2 + (b\omega_{c_0})^2 \right)$ $\Leftrightarrow \log K^2 = \log \left((1 - a\omega_{c_0}^2)^2 + (b\omega_{c_0})^2 \right)$ $\Leftrightarrow K^2 = (1 - a\omega_{c_0}^2)^2 + (b\omega_{c_0})^2$ $\Leftrightarrow a^2\omega_{c_0}^4 + (b^2 - 2a)\omega_{c_0}^2 + (1 - K^2) = 0$ $\Omega_{c_0} = \omega_{c_0}^2$ $\Omega_{c_0}^2 + \frac{b^2 - 2a}{a^2}\Omega_{c_0} + \frac{1 - K^2}{a^2} = 0$ $\Omega_{c_0}^2 + \frac{4z^2}{\omega_0^2} - 2\frac{1}{\omega_0^2}\Omega_{c_0} + \frac{1 - K^2}{\omega_0^4} = 0$ $\Omega_{c_0}^2 + 2\omega_0^2(2z^2 - 1)\Omega_{c_0} + \omega_0^4(1 - K^2) = 0$ $\Delta = 4\omega_0^4(2z^2 - 1)^2 - 4\omega_0^4(1 - K^2)$ $\Delta = 4\omega_0^4[(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)]$ $K > 1 \Rightarrow \Delta > 0$ $\Omega_{c_0} = \frac{-2\omega_0^2(2z^2 - 1) \pm \sqrt{4\omega_0^4[(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)]}}{2}$ $\Omega_{c_0} = \omega_0^2 \left((1 - 2z^2) \pm \sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} \right)$ $\Omega_{c_0} > 0 \Rightarrow \Omega_{c_0} = \omega_0^2 \left((1 - 2z^2) + \sqrt{(1 - 2z^2)^2 + (K^2 - 1)} \right)$ $\omega_0 > 0$ $\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{(1 - 2z^2) + \sqrt{(1 - 2z^2)^2 + (K^2 - 1)}}$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

Selon la valeur de z , le tracé de Bode en gain en dehors des deux asymptotes obtenues n'est pas le même. Etudions les 3 cas possibles.

$z > 1$	$z = 1$
$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ $H(p) = K \frac{1}{1 + T_1 p} \frac{1}{1 + T_2 p}$ $H(p) = K H_1(p) H_2(p)$ $\left\{ \omega_1 = \frac{1}{T_1} \right\} \neq \left\{ \omega_2 = \frac{1}{T_2} \right\}$ <p>Remarque :</p> $ap^2 + bp + c \quad ; \quad \Delta > 0$ $= a(p - p_1)(p - p_2)$ $= ap_1 p_2 \left(1 - \frac{1}{p_1} p\right) \left(1 - \frac{1}{p_2} p\right)$ $= k(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)$ $T_1 = \frac{1}{\omega_1} = -\frac{1}{p_1}; T_2 = \frac{1}{\omega_2} = -\frac{1}{p_2}$ <p>Pour trouver T_1 et T_2, il faut calculer les racines (négatives) du polynôme au dénominateur</p> $\min(\omega_1, \omega_2) < \omega_0 < \max(\omega_1, \omega_2)$	$H(p) = \frac{K}{(1 + T p)^2}$ $H(p) = K \frac{1}{1 + T p} \frac{1}{1 + T p}$ $H(p) = K G(p) G(p)$ $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{T}$ <p>Remarque :</p> $ap^2 + bp + c \quad ; \quad \Delta = 0$ $= a(p - p_0)^2$ $= ap_0 \left(1 - \frac{1}{p_0} p\right)^2$ $= k(1 + T_0 p)^2$ <p>Pour trouver T_0, on peut calculer la racine double (négative) du polynôme au dénominateur. Sinon :</p> $T_0 = T = \frac{1}{\omega_0}$
<p>Dans ces deux cas, on reconnaît le produit de deux fonctions de transfert du 1° ordre dont on connaît le diagramme de Bode ainsi que d'une constante K</p> <p>Il suffit donc de sommer 3 courbes en gain :</p> <p>2 systèmes du premier ordre + 1 constante</p>	
$z > 1$	$z = 1$
Les deux tracés du 1° ordre ne sont pas superposés, il existe une zone de pente à -20 db/dec entre ω_1 et ω_2	Les deux tracés du 1° ordre sont superposés, il n'existe pas de zone de pente à -20 db/dec

$z < 1$
$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j2z \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{(1 - u) + j(2zu)} \quad ; \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$ $ H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2}}$ <p>Montrons qu'il peut exister un maximum de $H(j\omega)$, résolvons :</p> $\frac{d H(j\omega) }{du} = 0$ $\frac{d H(j\omega) }{du} = \frac{-K \left(\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2} \right)'}{(1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2} = 0$ $\frac{-K((1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2)'}{2\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2}[(1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2]} = 0$ $\frac{-K((1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2)'}{2\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2}[(1 - u^2)^2 + 4z^2 u^2]} = 0$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

$$\frac{-K[-4u(1-u^2) + 8z^2u]}{2\sqrt{(1-u^2)^2 + 4z^2u^2}((1-u^2)^2 + 4z^2u^2)} = 0$$

$$K[-4u(1-u^2) + 8z^2u] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4u(1-u^2) - 8z^2u = 0$$

$$u \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - u^2 - 2z^2 = 0 \Leftrightarrow u^2 = 1 - 2z^2$$

$$\text{Si } z < \frac{\sqrt{2}}{2} ; u > 0$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt{1 - 2z^2}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$$

Dans ce cas, il ne va pas y avoir de somme de tracés connus.

Si $z < \frac{\sqrt{2}}{2}$, on montre la présence d'un maximum de $|H(j\omega)|$ à la pulsation notée ω_r , pulsation à la résonance

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2}$$

Ce maximum vaut :

$$\frac{|H(j\omega_r)|}{K}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{(1 - (1 - 2z^2))^2 + 4z^2(1 - 2z^2)}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{4z^4 + 4z^2 - 8z^4}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{4z^2 - 4z^4}}$$

$$= \frac{K}{2z\sqrt{1 - z^2}}$$

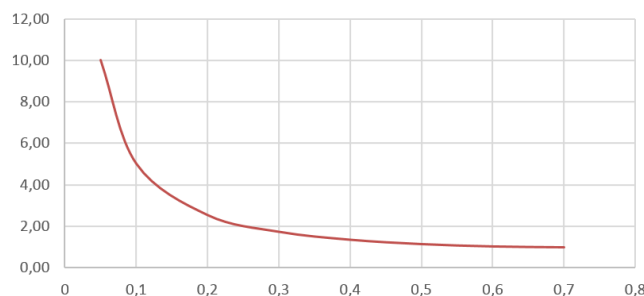
$$G_r = 20 \log \left(\frac{K}{2z\sqrt{1 - z^2}} \right)$$

On définit le facteur de résonance, ou facteur de surtension Q :

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{\frac{K}{2z\sqrt{1 - z^2}}}{K} = \frac{1}{2z\sqrt{1 - z^2}}$$

Plus z est petit, plus ce facteur est grand, plus grande est la résonance

Surtension Q



$$\text{Pour } z = \frac{\sqrt{2}}{2}; Q = 1$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

Conclusions :

- Il existe une asymptote horizontale de valeur $G_0 = 20 \log K$ en $\omega \rightarrow 0$
- Il existe une asymptote de pente -40 db/dec en $\omega \rightarrow \infty$
- Ces deux asymptotes se coupent à la pulsation $\omega = \omega_0$
- A cette pulsation, le gain réel est égal au gain maximal du système $G_0 = 20 \log K$ moins $20 \log(2z)$ db.
- Si $z \geq 1$, un 2° ordre se décompose en produit de deux 1° ordre dont les pulsations de coupure encadrent ω_0 : $\min(\omega_1, \omega_2) < \omega_0 < \max(\omega_1, \omega_2)$ et $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ si $z = 1$
- Si $z > 1$, il existe une troisième asymptote de pente -20 db/dec entre les pulsations de coupure de chaque premier ordre le constituant
- Si $z \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$, il existe une résonnance du gain à la pulsation de résonnance ω_r telle que

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2} \quad ; \quad \begin{cases} \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \omega_r = 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \omega_r = \omega_0 \end{cases}$$

$$G_r = 20 \log \left(\frac{K}{2z\sqrt{1 - z^2}} \right)$$

On montre en faisant plusieurs tracés que dans le cas $z < \frac{\sqrt{2}}{2}$, la courbe réelle du gain tend vers ses 2 asymptotes par le dessus. Toutefois, elle peut passer en dessous des asymptotes entre $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$

- On appelle pulsation de coupure à 0 db la pulsation à laquelle le gain est nul et on la note ω_{c_0}

$$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{(1 - 2z^2) + \sqrt{(1 - 2z^2)^2 + (K^2 - 1)}}$$

- On appelle bande passante à 0 db notée BP_0 la plage de pulsations pour laquelle le gain est positif

$$BP_0 = [0; \omega_{c_0}]$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

• Tracé du diagramme de Bode en gain

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, on va distinguer différents cas en fonction de z

$z > 1$

$$z = 10 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 2p + 0,01p^2}$$

$$z > 1 \Rightarrow H(p) = \frac{10}{(1 + T_1p)(1 + T_2p)} = 10 \frac{1}{1 + T_1p} \frac{1}{1 + T_2p}$$

$$G = 20 + H_1(p) + H_2(p)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} \quad ; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}$$

$$\min(\omega_1, \omega_2) < \omega_0 < \max(\omega_1, \omega_2)$$

On peut tracer les diagrammes de Bode de deux 1° ordre et les sommer.
Sinon, on sait qu'il y a 3 asymptotes ainsi que leurs pentes et on sait où placer les cassures :

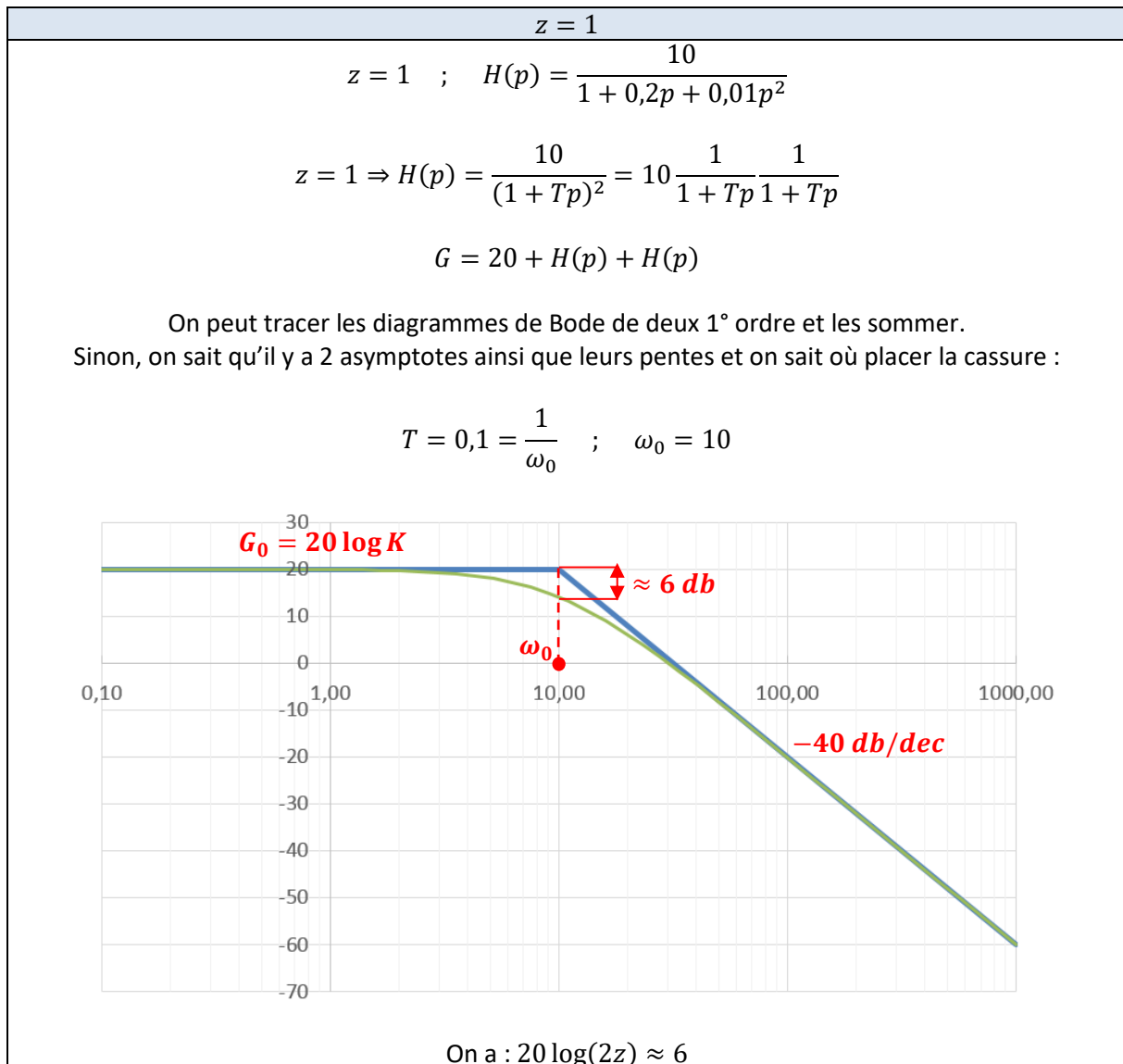
$$\begin{cases} T_1 \approx 0,01 \\ T_2 \approx 1,99 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \omega_{min} = \frac{1}{T_{max}} \approx 0,5 \\ \omega_{max} = \frac{1}{T_{min}} \approx 199,5 \end{cases}$$

Remarque : $H(p) = \frac{10}{(1+T_1p)(1+T_2p)} = H(p) = \frac{10}{1+(T_1+T_2)p+T_1T_2p^2} = \frac{10}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad ; \quad \begin{cases} T_1 + T_2 = \frac{2z}{\omega_0} \\ T_1 T_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \end{cases}$

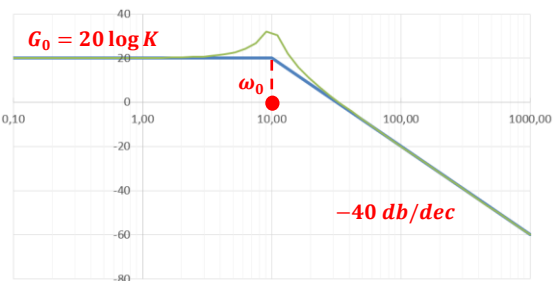
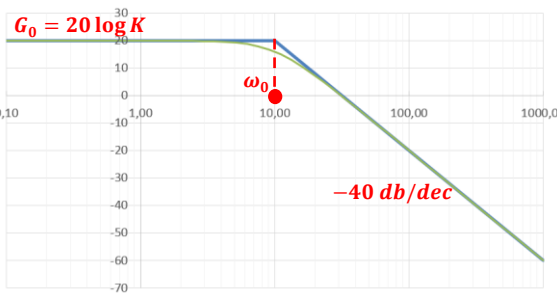
$$\text{Soit } \omega_m / \log(\omega_m) = \frac{\log(\omega_1) + \log(\omega_2)}{2} = \log(\sqrt{\omega_1 \omega_2})$$

$$\omega_m = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \omega_0$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

$z < 1$	
Dans ce cas, le dénominateur est non factorisable, on ne peut sommer deux 1° ordres	
$0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z < 1$
<p>$z = 0,1 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 0,02p + 0,01p^2}$</p> <p>Présence de résonance</p>  <p>$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2z^2} = 9,9$ $G_r = 20 \log \left(\frac{K}{2z\sqrt{1 - z^2}} \right) \approx 34$ On a : $20 \log(2z) \approx -14$</p>	<p>$z = 0,8 \quad ; \quad H(p) = \frac{10}{1 + 0,16p + 0,01p^2}$</p> <p>Pas de résonance</p>  <p>On a : $20 \log(2z) \approx 4$</p>

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

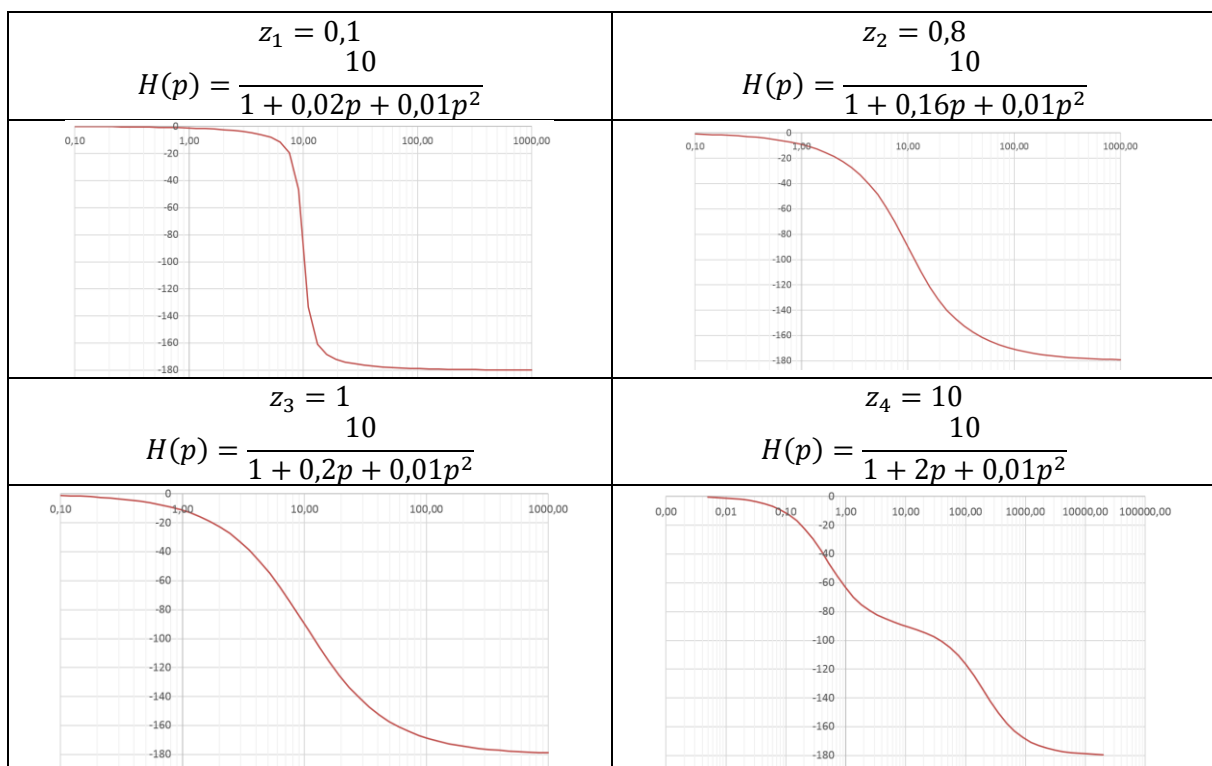
1.III.2.a.ii Etude de la phase

• Expression - Tracé - Observations

$$\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right) \quad \text{2° ordre}$$

Attention : φ est exprimée en radians dans la fonction $s(t)$

Traçons φ en fonction de ω pour 4 valeurs de z : $\begin{cases} z_1 = 0,1 \\ z_2 = 0,8 \\ z_3 = 1 \\ z_4 = 10 \end{cases}$ et $\begin{cases} K = 10 \\ \omega_0 = 10 \end{cases}$



On remarque

- Une asymptote horizontale à la valeur de 0° lorsque $\omega \rightarrow 0$
- Une asymptote horizontale à la valeur -180° lorsque $\omega \rightarrow +\infty$
- Un passage à la valeur de -90° pour $\omega = \omega_0$
- Un changement de plus en plus rapide de la phase autour de $\omega = \omega_0$ lorsque z diminue
- Un comportement en « vague » lorsque $z > 1$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

• **Caractéristiques de la phase**

$$\varphi = -\cos^{-1} \left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \right)$$

$\omega \rightarrow 0 \rightarrow \log \omega \rightarrow -\infty$	$\omega \rightarrow +\infty \rightarrow \log \omega \rightarrow +\infty$
$\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1$ $\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 = \varphi_0$ Asymptote horizontale nulle	$\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -1$ $\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\pi = \varphi_\infty$ Asymptote horizontale à $-\pi$
Valeur en ω_0	
$\varphi(\omega_0) = -\cos^{-1} \left(\frac{1 - \frac{1}{\omega_0^2} \omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_0^2} \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{2z}{\omega_0} \omega_0\right)^2}} \right) = -\cos^{-1}(0) = -\frac{\pi}{2}$	

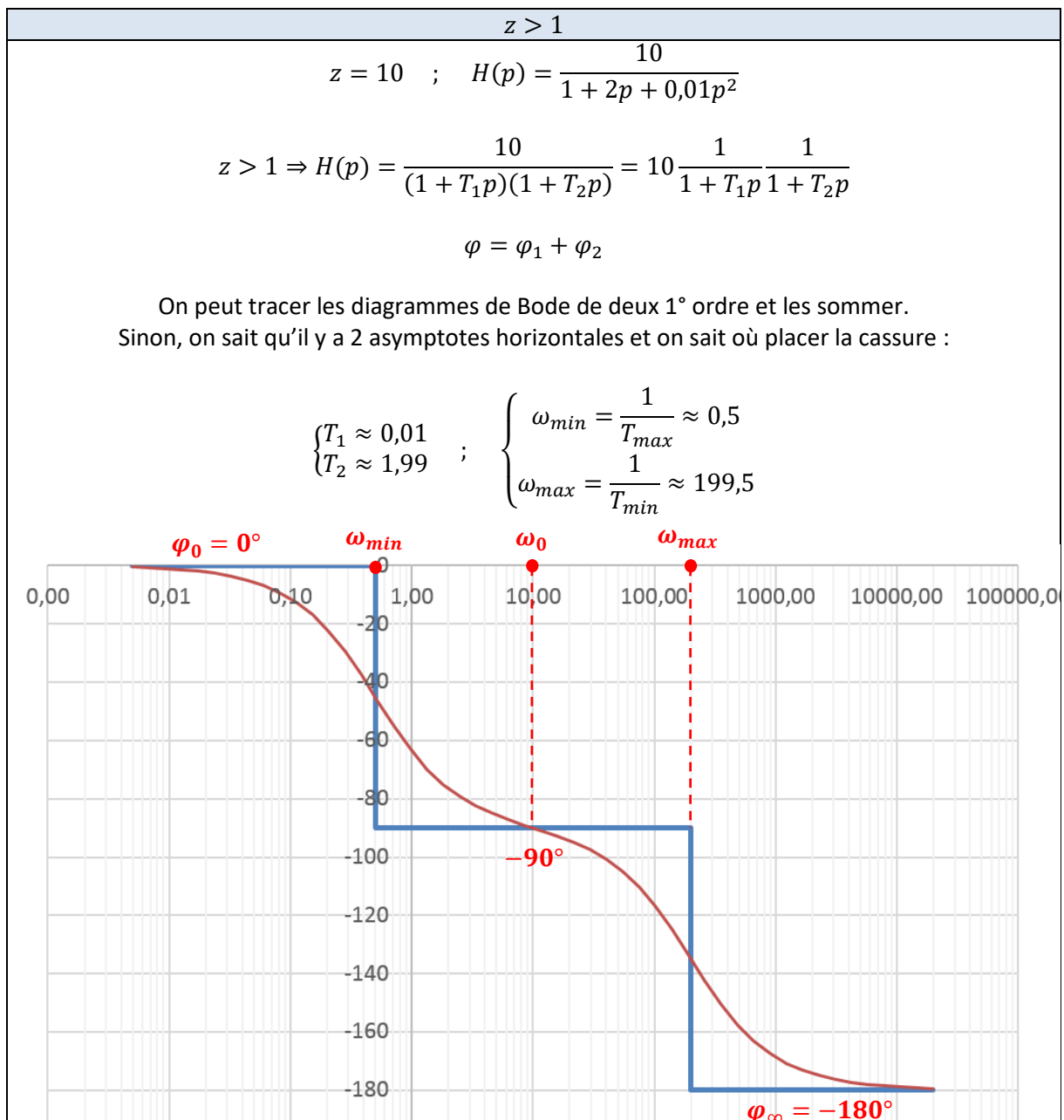
Lorsque $z \geq 1$, la phase présente une forme de « vague » ou d'escalier. Etudions ce comportement.

$z > 1$	$z = 1$
$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ $H(p) = K \frac{1}{1 + T_1 p} \frac{1}{1 + T_2 p}$ $H(p) = K H_1(p) H_2(p)$ $\omega_1 \neq \omega_2$	$H(p) = \frac{K}{(1 + T p)^2}$ $H(p) = K \frac{1}{1 + T p} \frac{1}{1 + T p}$ $H(p) = K G(p) G(p)$ $\omega_1 = \omega_2$
Dans ces deux cas, on reconnaît le produit de deux fonctions de transfert du 1° ordre dont on connaît le diagramme de Bode ainsi que d'une constante K Il suffit donc de sommer 2 courbes en phase : 2 systèmes du premier ordre	
$z > 1$	$z = 1$
Les deux tracés du 1° ordre ne sont pas superposés, il existe une nouvelle asymptote horizontale entre ω_1 et ω_2 de valeur -90°	Les deux tracés du 1° ordre sont superposés, il n'existe pas de zone transitoire particulière

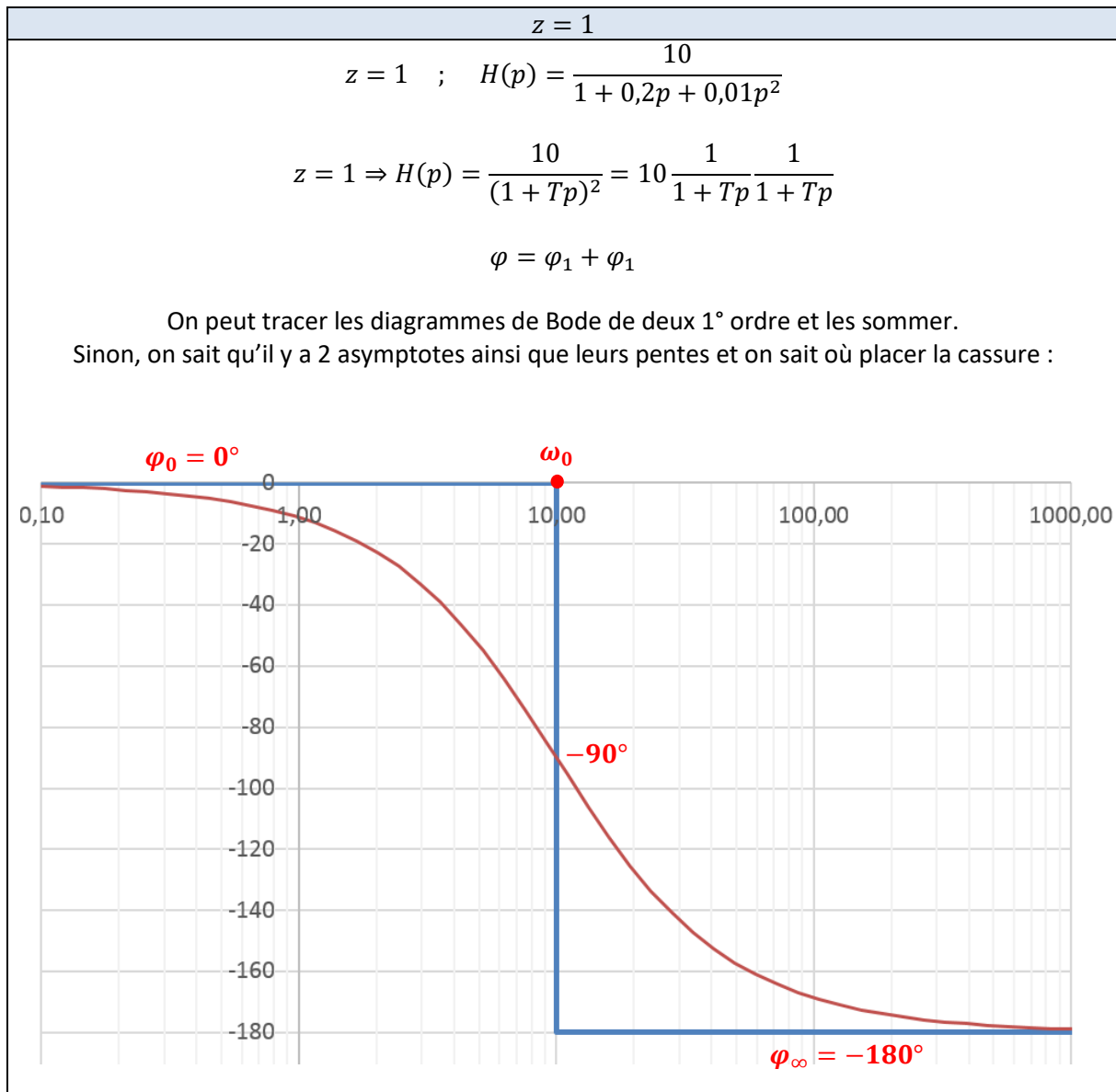
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

• Tracé du diagramme de Bode en phase

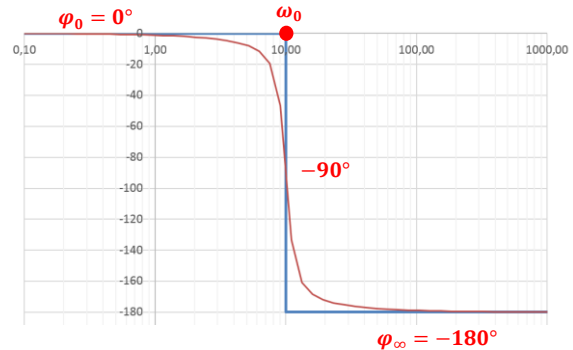
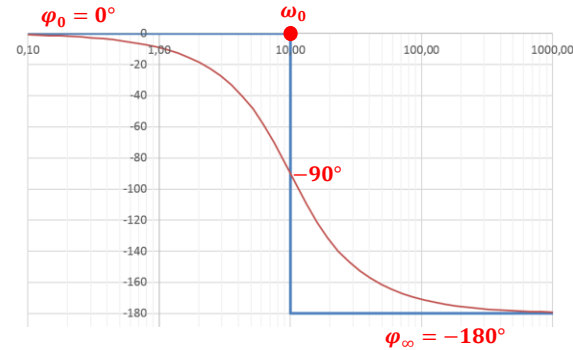
Comme on l'a vu au paragraphe précédent, on va distinguer différents cas en fonction de z



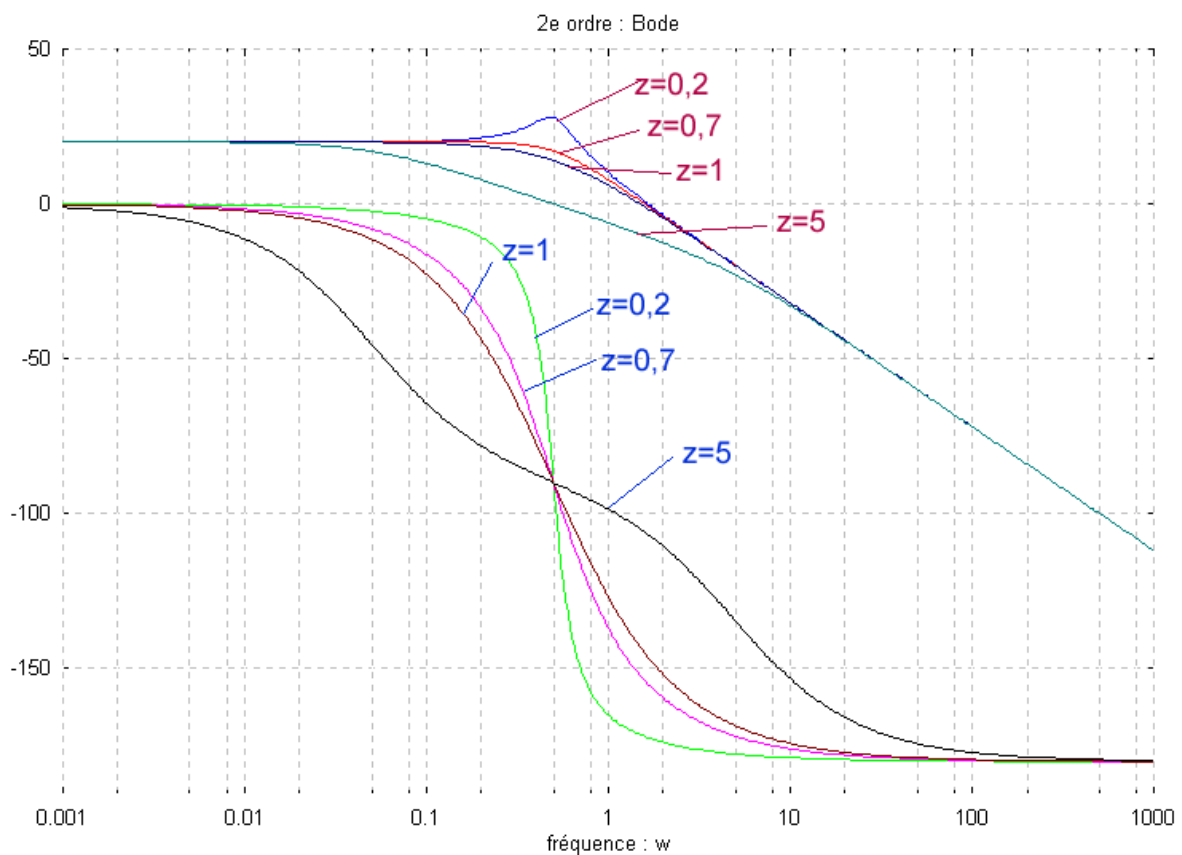
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

$z < 1$	
Dans ce cas, le dénominateur est non factorisable, on ne peut sommer deux 1° ordres	
$0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z < 1$
$z = 0,1$; $H(p) = \frac{10}{1 + 0,02p + 0,01p^2}$ 	$z = 0,8$; $H(p) = \frac{10}{1 + 0,16p + 0,01p^2}$ 

1.III.2.a.iii Bilan



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

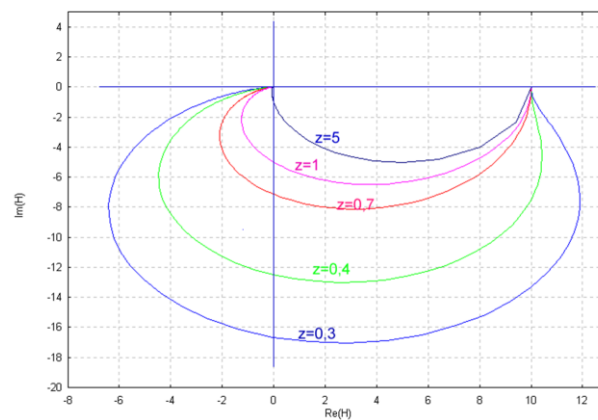
1.III.2.b Diagramme de Nyquist

On trace $H(j\omega)$ dans le plan complexe :

$$H(j\omega) = \text{Re}(H(j\omega)) + j\text{Im}(H(j\omega))$$

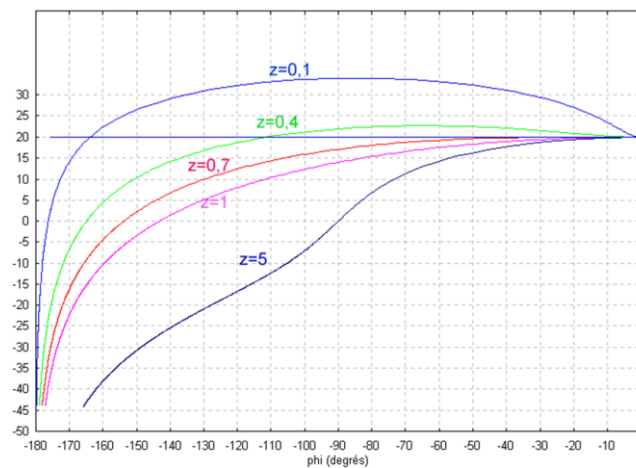
$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 - a\omega^2) + jb\omega} = \frac{K(1 - a\omega^2)}{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2} - j \frac{Kb\omega}{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2} ; \quad \begin{cases} a = \frac{1}{\omega_0^2} \\ b = \frac{2z}{\omega_0} \end{cases}$$

$\omega = 0$	$\omega \rightarrow +\infty$
$H(j\omega) \rightarrow K$	$H(j\omega) \rightarrow 0$



1.III.2.c Diagramme de Black

On trace une courbe paramétrée telle que φ soit en abscisse en degrés et G_{ba} soit en ordonnée



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.III.3 Utilisation du diagramme de Bode

1.III.3.a Cas général

Rappelons qu'à l'entrée $e(t) = e_0 \sin \omega t u(t)$ correspond la sortie $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$ avec

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)|e_0 \\ \varphi = \arg H(j\omega) \end{cases}$$



1.III.3.b Application

$$H(p) = \frac{10}{1 + 0,4p + 0,01p^2}$$

<p>$e(t) = 10 \sin 0,1t$</p>	<p>$e(t) = 10 \sin 100t$</p>
$\begin{cases} H(j\omega) \approx 10^{\frac{20}{20}} \approx 10 \\ \varphi \approx 0^\circ \approx 0 \text{ rd} \\ t_\varphi = \frac{ \varphi }{\omega} = 0 \text{ s} \end{cases}$	$\begin{cases} H(j\omega) \approx 10^{\frac{-20}{20}} \approx 0,1 \\ \varphi \approx -180^\circ \approx -3,14 \text{ rd} \\ t_\varphi = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{3,14}{100} = 0,0314 \text{ s} \end{cases}$
<p>$s^{gr}(t) = 100 \sin(0,1t)$</p>	<p>$s^{gr}(t) = \sin(100t - 3,14)$</p>
$\begin{cases} H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = 9,99 \\ \varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right) = -0,04 \text{ rd} \\ t_\varphi = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{0,04}{0,1} = 0,4 \text{ s} \end{cases}$ <p>$s^{gr}(t) = 99,9 \sin(0,1 - 0,04)$</p>	$\begin{cases} H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} = 0,09 \\ \varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{1 - a\omega^2}{\sqrt{(1 - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}\right) = -2,76 \text{ rd} \\ t_\varphi = \frac{ \varphi }{\omega} = \frac{2,76}{100} = 0,0276 \text{ s} \end{cases}$ <p>$s^{gr}(t) = 0,9 \sin(100t - 2,76)$</p>

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.IV. Intégrateur et dérivateur

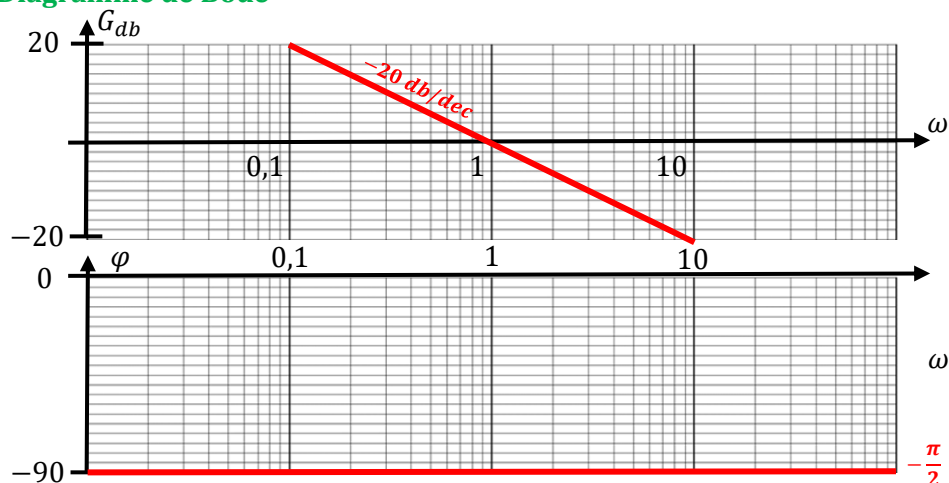
Intéressons-nous maintenant à la réalisation des diagrammes de Bode d'un intégrateur et d'un dérivateur.

1.IV.1 Intégrateur

1.IV.1.a Etude

$H(p) = \frac{1}{p} \quad ; \quad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$	
$ H(j\omega) = \frac{1}{\omega}$ $G_{db} = 20 \log \left(\frac{1}{\omega} \right) = -20 \log \omega$ On pose $X = \log \omega$ On a alors : $G_{db} = -20X$ Droite de pente -20 db/dec	$\varphi = \arg \left(\frac{1}{j\omega} \right) = -\frac{\pi}{2}$

1.IV.1.b Diagramme de Bode

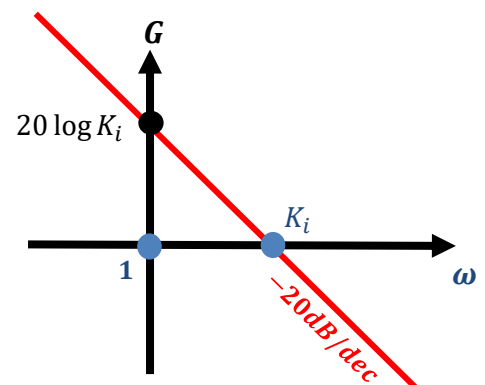


1.IV.1.c Remarque

Dans le cas où $H(p) = \frac{K_i}{p}$:

- La phase est inchangée
- $G_{db} = 20 \log \left(\frac{K_i}{\omega} \right) = 20 \log K_i - 20 \log \omega$. La droite de gain passe par les points :

$$\begin{cases} \omega = 1; G = 20 \log K_i \\ \omega = K_i; G = 0 \end{cases}$$



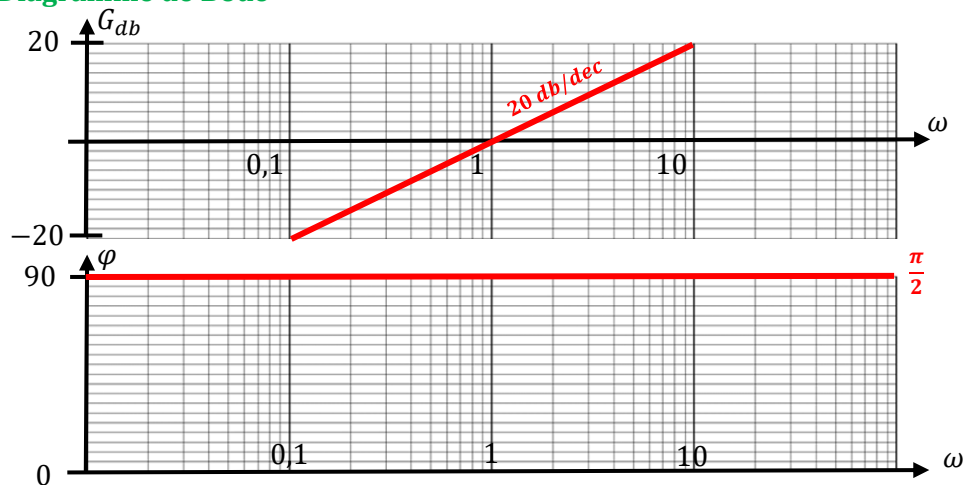
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.IV.2 Dérivateur

1.IV.2.a Etude

$H(p) = p$; $H(j\omega) = j\omega$	
$ H(j\omega) = \omega$ $G_{db} = 20 \log(\omega)$ On pose $X = \log \omega$ On a alors : $G_{db} = 20X$ Droite de pente 20 db/dec	$\varphi = \arg(j\omega) = \frac{\pi}{2}$

1.IV.2.b Diagramme de Bode

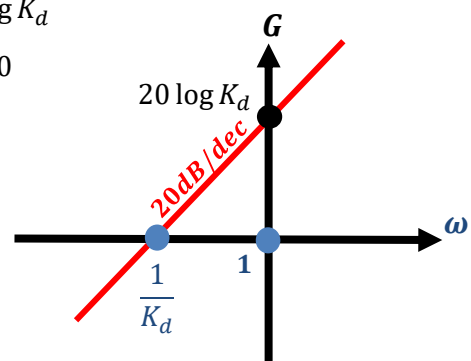


1.IV.2.c Remarque

Dans le cas où $H(p) = K_d p$:

- La phase est inchangée
- $G_{db} = 20 \log(K_d \omega) = 20 \log K_d + 20 \log \omega$. La droite de gain passe par les points :

$$\begin{cases} \omega = 1; G = 20 \log K_d \\ \omega = \frac{1}{K_d}; G = 0 \end{cases}$$



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

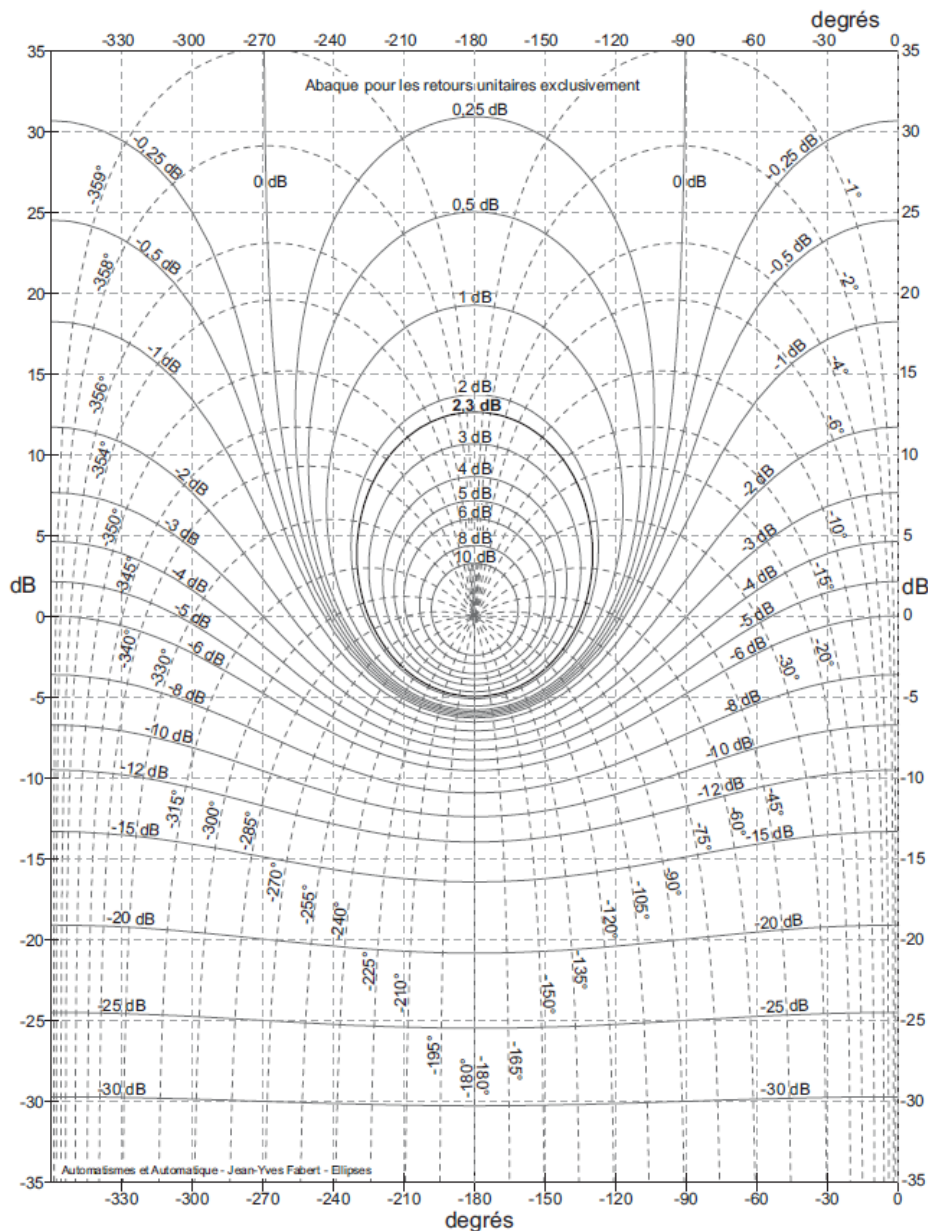
1.V. Abaque de Black (Pour info)

Dans le cas d'un système à retour unitaire (si tel n'est pas le cas, le transformer), on a :

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Soit la fonction complexe $z \rightarrow \frac{z}{1+z}$

L'abaque de Black-Nichols ou l'abaque de Hall est la représentation dans le plan de Black des courbes iso module et isophase de cette fonction :



En traçant le lieu de la FTBO d'un système à retour unitaire dans le repère de Black (abscisse et ordonnée cartésiennes), et on lit sur les courbes d'iso valeurs le gain et la phase du système bouclé à retour unitaire correspondant.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.VI. Identification

Il est possible d'identifier un système en fonction de sa réponse à une entrée sinusoïdale.

1.VI.1 Principe

1.VI.1.a Mesures et traitement des données

On impose en entrée du système un signal de pulsation et d'amplitude données :

$$e(t) = e_i \sin(\omega_i t) \quad ; \quad \left\{ \begin{matrix} e_i \\ \omega_i \end{matrix} \right. \text{choisis}$$

On mesure alors sur la courbe de sortie $s(t) = s_i \sin(\omega_i(t + t_{\varphi_i}))$

- L'amplitude du signal s_i
- Le déphasage du signal $t_{\varphi_i} < 0$ – Déphasage du signal temporel « vers la droite »

On calcule ensuite :

$$\left\{ \begin{matrix} G_i = 20 \log \left(\frac{s_i}{e_i} \right) \\ \varphi_i = \omega_i t_{\varphi_i} < 0 \end{matrix} \right.$$

On obtient un tableau du type :

Imposé	Pulsation	ω_1	ω_2	...	ω_n
	Amplitude entrée	e_1	e_2	...	e_n
Mesuré	Amplitude sortie	s_1	s_2	...	s_n
	Déphasage temporel	t_{φ_1}	t_{φ_2}	...	t_{φ_n}
Calculé	Gain	G_1	G_2		G_n
	Phase	φ_1	φ_2		φ_n

Il suffit alors de tracer les deux courbes suivantes en échelle logarithmique pour ω_i :

$$\begin{cases} G_i = f(\omega_i) \\ \varphi_i = f(\omega_i) \end{cases}$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.VI.1.b Identification du système

1.VI.1.b.i Ordre

On trace les asymptotes qui apparaissent sur les deux tracés (Gain, Phase) et on identifie le système.

Identification de l'ordre du système		
Pente du gain aux hautes pulsations	Phase aux hautes pulsations	Ordre du système
-20 db/dec	$\varphi_{\infty} = -90^\circ$	1° ordre
-40 db/dec	$\varphi_{\infty} = -180^\circ$	2° ordre

1.VI.1.b.ii Coefficients

A l'aide des tracés asymptotiques du système, on remonte à ses différents coefficients caractéristiques.

Identification des coefficients du système	
1° ordre $H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$	2° ordre $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$
G_0 est le gain de l'asymptote horizontale aux faibles pulsations $K = 10^{\frac{G_0}{20}}$	
ω_c est à l'intersection des 2 asymptotes du gain On peut aussi utiliser l'inflexion de la phase lorsqu'elle vaut -45° On a alors : $T = \frac{1}{\omega_c}$	ω_0 est à l'intersection des 2 asymptotes ($\omega \rightarrow 0$ & $\omega \rightarrow \infty$) du gain On peut aussi utiliser l'inflexion de la phase lorsqu'elle vaut -90° On détermine alors $G(\omega_0)$ et on sait que : $G(\omega_0) = G_0 - 20 \log(2z)$ $z = \frac{10^{\frac{G_0 - G(\omega_0)}{20}}}{2}$

Remarque : dans le cas des 2° ordres, on peut utiliser la résonance si elle existe afin de déterminer z et ω_0

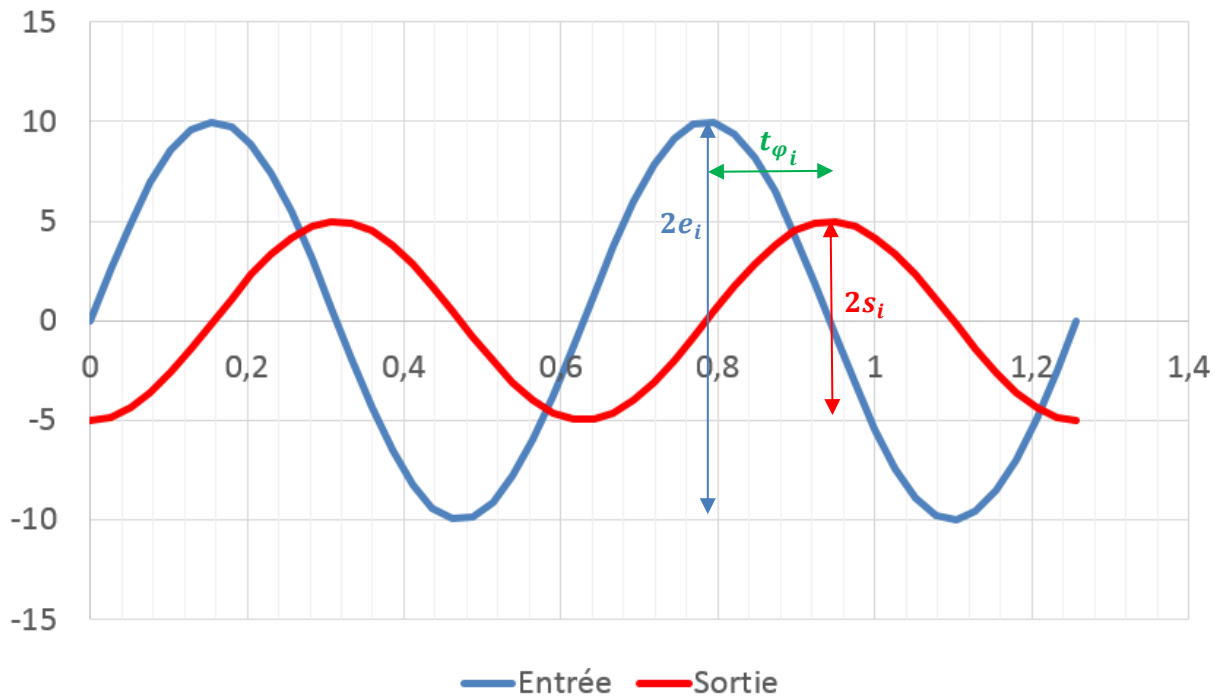
$$\begin{cases} G_r = 20 \log\left(\frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}\right) \\ \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{K^2}{10^{G_r}}}}}{2} \\ \omega_0 = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-2z^2}} \end{cases}$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Bode	Cours

1.VI.2 Exemple de mesure d'une réponse

Soit les courbes d'entrée et sortie d'un système :

$$\begin{cases} e_i = 10 \\ \omega_i = 10 \end{cases}$$



Il est préférable de mesurer la double amplitude afin d'être deux fois plus précis.

$$\begin{cases} s_i = 5 \\ t_{\phi_i} = -0,157 \text{ s} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} G_i = 20 \log\left(\frac{5}{10}\right) = -6,02 \\ \varphi_i = -10 * 0,16 = -1,57 \text{ rd} \end{cases}$$