SESSION 2021

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 2. FILIERE MP

I - Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

I.A - Polynômes de Tchebychev

Q 1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

- $\deg(T_0) = 0$ et $\deg(T_1) = 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n+1$. Alors, $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$ puis, puisque $\deg(2XT_{n+1}) \neq \deg(T_n)$,

$$\deg(T_{n+2}) = \mathrm{Max}\{\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)\} = \deg(2XT_{n+1}) = n+2.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $T_k \in \mathbb{C}_n[X]$. Ensuite, puisque pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(T_k) = k$, on sait que $(T_k)_{0\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$. Puisque $\mathrm{card}\,(T_k)_{0\leqslant n} = n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X]) < +\infty$, on a montré que $(T_k)_{0\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q 2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta).$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Q 3. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Puisque $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, il existe $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k T_k$. Mais alors, pour tout réel θ,

$$P(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta).$$

Ceci montre que la fonction $\theta \mapsto P(\cos(\theta))$ est dans $\mathscr{S}_n$.

Q 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [-1,1]$. Soit $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$ de sorte que $\theta \in [0,\pi]$ et $x = \cos(\theta)$.

$$|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leqslant 1.$$

Ainsi, $\forall x \in [-1,1]$, $|T_n(x)| \leqslant 1$. De plus, $|T_n(1)| = |T_n(\cos(0))| = |\cos(n \times 0)| = 1$. Ceci montre que $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$.

Q 5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|$.

- Le résultat est vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|$. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\sin((n+1)\theta)| &= |\sin(n\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta)| \\
&\leqslant |\sin(n\theta)||\cos(\theta)| + |\sin(\theta)||\cos(n\theta)| \leqslant |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \\
&\leqslant n|\sin(\theta)| + |\sin(\theta)| \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)|\sin(\theta)|.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel θ, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ puis en dérivant, pour tout réel θ, $-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$. Soient $x \in]-1,1[$ puis $\theta = \text{Arccos}\, x$. Alors, $\theta \in]0,\pi[$ et en particulier $\sin(\theta) \neq 0$ puis

$$|T_n'(x)| = |T_n'(\cos(\theta))| = \frac{n|\sin(n\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant n^2.$$

Pour tout x de $]-1,1[$, $|T_n'(x)| \leqslant n^2$. Cette inégalité large reste vraie pour $x = 1$ ou $x = -1$ par passage à la limite et par continuité de T_n' en -1 et en 1. Ceci montre que $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} \leqslant n^2$. D'autre part,

$$T_n'(\cos(\theta)) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \underset{\theta\to 0}{\sim} \frac{n^2\theta}{\theta} = n^2.$$

Quand θ tend vers 0, on obtient $T_n'(1) = n^2$. Ceci montre que $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$.

I.B - Inégalité de Bernstein

Q 6. On peut supposer sans perte de généralité que le polynôme A est unitaire : $A = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n}(X - \alpha_k)$. Le polynôme A est à racines simples et donc aucun des α_k, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, n'est racine de A'.

Soient $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X] \setminus \{0\}$ puis $F = \dfrac{B}{A}$. La fraction rationnelle F a une partie entière nulle et n'est pas nécessairement sous forme irréductible suivant que certains des α_k soient ou non racines de B. Mais dans tous les cas, sa décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme

$$F = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\lambda_k}{X - \alpha_k}.$$

Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. Si α_k est racine de B, alors α_k n'est pas un pôle de B puis $\lambda_k = 0 = \dfrac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)}$. Si α_k n'est pas racine de B, α_k est un pôle simple de F et on sait que $\lambda_k = \dfrac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)}$. Finalement,

$$\frac{B}{A} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)(X - \alpha_k)}$$

ce qui reste vrai quand $B = 0$. On a montré que

$$\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X],\ B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{A'(\alpha_k)(X - \alpha_k)}.$$

Q 7. Soient $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ puis $\lambda \in \mathbb{C}$. $P_\lambda(1) = P(\lambda) - P(\lambda) = 0$. Donc, P_λ est divisible par $X - 1$.

Q 8. Le résultat est clair si $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$,

$$Q_\lambda(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} Q_\lambda(x) = \lambda \lim_{x\to 1} \frac{P(\lambda x) - P(\lambda)}{\lambda x - \lambda} = \lambda \lim_{u\to\lambda} \frac{P(y) - P(\lambda)}{y - \lambda} = \lambda P'(\lambda).$$

Q 9. R est unitaire de degré $2n$. Pour $k \in [\![1, 2n]\!]$,

$$R(\omega_k) = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}\right)^{2n} + 1 = e^{i(\pi + 2k\pi)} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

De plus, $\dfrac{\pi}{2n} < \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{\pi}{n} = \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{2n} = \dfrac{\pi}{2n} + 2\pi$ et donc les nombres ω_k, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, sont deux à deux distincts.

Ainsi, les nombres ω_k, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, sont $2n$ racines du polynôme R qui est unitaire de degré $2n$. Ce sont donc toutes les racines de R, toutes simples. Finalement,

$$R = \prod_{k=1}^{2n}(X - \omega_k).$$

Q 10. Soient $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ puis $\lambda \in \mathbb{C}$. Le polynôme Q_λ est dans $\mathbb{C}_{2n-1}[X]$. Puisque le polynôme R est de degré $2n$ à racines simples, la formule (I.1) fournit

$$Q_\lambda(X) = \sum_{k=1}^{2n} Q_\lambda(\omega_k) \frac{R(X)}{R'(\omega_k)(X - \omega_k)}$$

avec $R'(\omega_k) = 2n(\omega_k)^{2n-1} = \dfrac{2n}{\omega_k}(\omega_k)^{2n} = -\dfrac{2n}{\omega_k}$. Donc,

$$\forall P \in \mathbb{C}_{2n}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{X^{2n}+1}{X-\omega_k}\omega_k.$$

D'après la question Q8,

$$\begin{aligned}\lambda P'(\lambda) = Q_\lambda(1) &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{1^{2n}+1}{1-\omega_k}\omega_k\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}.\end{aligned}$$

Q 11. En appliquant l'égalité (I.2) au polynôme $P = X^{2n}$ qui est dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, on obtient pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}2n\lambda^{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\lambda^{2n}\omega_k^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \lambda^{2n}\left(-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}\right)\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}\\ &= -\frac{2\lambda^{2n}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}\end{aligned}$$

Après simplification par 2 et en prenant $\lambda = 1$, on obtient

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = n.$$

Autre solution. On sait que $\dfrac{R'(X)}{R(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{X-\omega_k}$ et donc, puisque 1 n'est pas racine de R, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1-\omega_k} = \frac{R'(1)}{R(1)} = \frac{2n}{2} = n$.

En dérivant, on a aussi $\dfrac{R''(X)R(X) - (R'(X))^2}{(R(X))^2} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(X-\omega_k)^2}$ et donc

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(1-\omega_k)^2} = -\frac{R''(1)R(1) - (R'(1))^2}{(R(1))^2} = -\frac{2n(2n-1)(2) - (2n)^2}{(2)^2} = -\frac{4n^2-4n}{4} = -n^2+n.$$

Par suite,

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\omega_k - 1 + 1}{(1-\omega_k)^2} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1-\omega_k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(1-\omega_k)^2}\right) = \frac{1}{n}(n + n^2 - n) = n.$$

Finalement,

$$\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

Q 12. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_n, , b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ puis, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt))$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikt} \\
&= e^{-int}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k+ib_k}{2} e^{i(n-k)t} + a_0 e^{int} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i(n+k)t}\right) \\
&= e^{-int}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k+ib_k}{2}\left(e^{it}\right)^{n-k} + a_0\left(e^{it}\right)^{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - ib_k}{2}\left(e^{it}\right)^{n+k}\right).
\end{aligned}$$

Le polynôme $U = \frac{a_n + ib_n}{2} + \frac{a_{n-1}+ib_{n-1}}{2} X + \ldots + \frac{a_1 + ib_1}{2} X^{n-1} + a_0 X^n + \frac{a_1 - ib_1}{2} X^{n+1} + \ldots + \frac{a_n - ib_n}{2} X^{2n}$ convient.

Q 13. Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$.

$$\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{(1-e^{i\varphi_k})^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{\left(e^{\frac{i\varphi_k}{2}}\left(e^{-\frac{i\varphi_k}{2}} - e^{\frac{i\varphi_k}{2}}\right)\right)^2} = \frac{2}{\left(-2i\sin\left(\varphi_k/2\right)\right)^2} = -\frac{1}{2\sin^2\left(\varphi_k/2\right)}.$$

Pour tout réel θ, $f(\theta) = e^{-in\theta} U\left(e^{i\theta}\right)$ puis

$$f'(\theta) = -ine^{-in\theta} U\left(e^{i\theta}\right) + e^{-in\theta} \times ie^{i\theta} U'\left(e^{i\theta}\right) = -in\, f(\theta) + ie^{-in\theta} e^{i\theta} U'\left(e^{i\theta}\right).$$

D'après la formule (I.2),

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} U'\left(e^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U\left(e^{i(\theta+\varphi_k)}\right) \frac{-1}{2\sin^2\left(\varphi_k/2\right)} + nU\left(e^{i\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} e^{in(\theta+\varphi_k)} f\left(\theta+\varphi_k\right) \frac{-1}{2\sin^2\left(\varphi_k/2\right)} + ne^{in\theta} f(\theta) \\
&= e^{in\theta}\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} f\left(\theta+\varphi_k\right) \frac{-1}{2\sin^2\left(\varphi_k/2\right)} + nf(\theta)\right) \\
&= e^{in\theta}\left(-\frac{i}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\theta+\varphi_k\right) \frac{(-1)^k}{2\sin^2\left(\varphi_k/2\right)} + nf(\theta)\right).
\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}
f'(\theta) &= -in\, f(\theta) + ie^{-in\theta} e^{in\theta}\left(-\frac{i}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\theta+\varphi_k\right) \frac{(-1)^k}{2\sin^2\left(\varphi_k/2\right)} + nf(\theta)\right) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\theta+\varphi_k\right) \frac{(-1)^k}{2\sin^2\left(\varphi_k/2\right)}.
\end{aligned}$$

Q 14. Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|f'(\theta)| &\leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \left|f\left(\theta+\varphi_k\right)\right| \frac{1}{2\sin^2\left(\varphi_k/2\right)} \\
&\leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2\sin^2\left(\varphi_k/2\right)}.
\end{aligned}$$

On applique alors la formule (I.3) à la fonction $f : \theta \mapsto \sin(n\theta)$ qui est un élément de $\mathscr{S}_n$ et on évalue en 0.
Pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, $f\left(0+\varphi_k\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$ et donc

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2\sin^2(\varphi_k/2)} = f'(0) = n\cos(0) = n.$$

On a montré que

$$\forall f \in \mathscr{S}_n,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ |f'(\theta)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

I.C - Quelques conséquences de l'inégalité (I.4)

Q 15. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. D'après la question Q3, la fonction $f : \theta \mapsto P(\cos(\theta))$ est dans $\mathscr{S}_n$ et de plus, pour tout réel θ, $f'(\theta) = -\sin(\theta)P'(\cos(\theta))$.

Soit alors $x \in [-1,1]$. Soit $\theta = \text{Arccos}(x)$ de sorte que $\theta \in [0,\pi]$ et $x = \cos(\theta)$ puis $\sqrt{1-x^2} = |\sin(\theta)| = \sin(\theta)$.

$$\left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right| = |\sin(\theta)P'(\cos(\theta))| = |f'(\theta)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = n\|P\|_{L^\infty([-1,1])},$$

car la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.

Q 16. Posons $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k T_k$. Posons encore pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = Q(\cos(\theta))\sin(\theta)$. Pour tout réel θ,

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k T_k(\cos(\theta))\sin(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\cos(k\theta)\sin(\theta)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} a_k(\sin((k+1)\theta) - \sin((k-1)\theta)\\
&= -\frac{a_0}{2}\sin(\theta) + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k-1}}{2}\sin(k\theta) - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{a_{k+1}}{2}\sin(k\theta).
\end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction f est un élément de $\mathscr{S}_n$. Maintenant, pour tout réel θ,

$$f'(\theta) = -Q'(\cos(\theta))\sin^2(\theta) + Q(\cos(\theta))\cos(\theta)$$

puis $f'(0) = Q(1)$. D'après l'inégalité (I.4),

$$|Q(1)| = |f'(0)| \leqslant n\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|f(\theta)| = n\sup_{\theta\in\mathbb{R}}|Q(\cos(\theta))\sin(\theta)| = n\sup_{x\in[-1,1]}\left|\pm Q(x)\sqrt{1-x^2}\right| = n\sup_{x\in[-1,1]}\left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

Q 17. Soit $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Soit $t \in [-1,1]$ puis $S_t(X) = R(tX)$. S_t est un élément de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et d'après Q16,

$$\begin{aligned}
|R(t)| = |S_t(1)| &\leqslant n\sup_{y\in[-1,1]}\left|S_t(y)\sqrt{1-y^2}\right| = n\sup_{y\in[-1,1]}|R(ty)|\sqrt{1-y^2}\\
&\leqslant n\sup_{y\in[-1,1]}|R(ty)|\sqrt{1-t^2y^2}\ (\text{car } |t| \leqslant 1 \Rightarrow t^2y^2 \leqslant y^2)\\
&\leqslant n\sup_{x\in[-1,1]}|R(x)|\sqrt{1-x^2}\ (\text{car } \{|R(ty)|\sqrt{1-t^2y^2},\ y\in[-1,1]\} \subset \{|R(x)|\sqrt{1-x^2},\ y\in[-1,1]\}).
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et tout $t \in [-1,1]$, $|R(t)| \leqslant n\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}|R(x)|\sqrt{1-x^2}$.

Q 18. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors le polynôme $R = P'$ est dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ puis d'après Q17 et Q15, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|P'(x)| \leqslant n\sup_{x\in[-1,1]}|P'(x)|\sqrt{1-x^2} \leqslant n^2\|P\|_{L^\infty([-1,1])}.$$

Ainsi, $n^2\|P\|_{L^\infty([-1,1])}$ est un majorant de $\{|P'(x)|,\ x \in [-1,1]\}$ et puisque $\|P'\|_{L^\infty([-1,1])}$ est le plus petit de ces majorants, on a montré que

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \|P'\|_{L^\infty([-1,1])} \leqslant n^2\|P\|_{L^\infty([-1,1])}.$$

Q 19. Si $P = T_n$, d'après la partie I.A -, $T_n \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$ et $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2 = n^2\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])}$. Quand $P = T_n$, on a l'égalité.

II - Inégalités de Bernstein et transformée de Fourier

II.A - Transformée de Fourier *d'une fonction*

Q 20. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. La fonction $g\ :\ x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus $|g| = |f|$. Donc, la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\widehat{f}(\xi)$ existe dans $\mathbb{C}$. Ceci montre que $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$, posons $\Phi(\xi,x) = f(x)e^{-ix\xi}$ de sorte que pour tout réel ξ, $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi,x)\ dx$.

- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \Phi(\xi,x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \Phi(\xi,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour tout $(\xi,x) \in \mathbb{R}^2$, $|\Phi(\xi,x)| = |f(x)| \leqslant |f(x)| = \varphi(x)$ où la fonction $\varphi = |f|$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 21. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\left|e^{-ix\xi}\right|\ dx = \int_{-\infty}^{|} f(x)|\ dx = \|f\|_1$. Donc, la fonction $\widehat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente et donc $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi, $L\ :\ \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \to & L^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$ est effectivement une application.

Soient $(f,g) \in \left(L^1(\mathbb{R})\right)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$L(\lambda f + \mu g)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))e^{-ix\xi}\ dx = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\ dx + \mu\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ix\xi}\ dx = (\lambda L(f) + \mu L(g))(\xi)$$

et donc, $L(\lambda f + \mu g) = \lambda L(f) + \mu L(g)$. Donc, $L \in \mathscr{L}\left(L^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})\right)$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a vu que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \|f\|_1$ et donc, $\|L(f)\|_\infty \leqslant 1 \times \|f\|_1$. On sait que ceci entraine

$$L \in \mathscr{L}_c\left(L^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R})\right).$$

L'application $f \mapsto \widehat{f}$ est une application linéaire continue de l'espace vectoriel normé $\left(L^1(\mathbb{R}), \|\ \|_1\right)$ dans l'espace vectoriel normé $(L^\infty(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$.

Q 22. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ car f l'est et de plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda x)|\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ \frac{dt}{\lambda} = \frac{\|f\|_1}{\lambda} < +\infty.$$

Donc, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Soit alors $\xi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ix\xi}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda x)e^{-ix\xi}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\frac{t}{\lambda}\xi}\ \frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\frac{\xi}{\lambda}}\ dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

II.B - Produit de convolution

Q 23. Soit $(f,g) \in Ł^1(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h\ :\ t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel t, $|h(t)| \leqslant |f(t)|\|g\|_\infty$. Puisque la fonction $\|g\|_\infty|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction h. On en déduit l'existence de $(f*g)(x)$. Finalement, la fonction $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = x - t$, on obtient

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)\ (-du) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u)\ du = (g*f)(x).$$

Donc, $f * g = g * f$.

Q 24. Soit $x \in \mathbb{R}$. $|(f*g)(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||g(x-t)|\ dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\|g\|_\infty\ dt = \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ dt = \|f\|_1\|g\|_\infty$. Donc, la fonction $f*g$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|f\|_1\|g\|_\infty$ est un majorant de la fonction $|f*g|$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit encore que $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty$.

Q 25. Posons $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(t)g(x-t) \end{array}$ de sorte que pour tout réel x, $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,t)\ dt$.

- Pour chaque x, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Φ admet sur $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles par rapport à sa première variable x jusqu'à l'ordre k et

$$\forall j \in [\![1,k]\!],\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^j \Phi}{\partial x^j}(x,t) = f(t)g^{(j)}(x-t).$$

De plus,

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall j \in [\![1,k]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^j \Phi}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall j \in [\![1,k]\!]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^j \Phi}{\partial x^j}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}$, $\forall j \in [\![1,k]\!]$, $\left|\dfrac{\partial^j \Phi}{\partial x^j}(x,t)\right| \leqslant \left\|g^{(j)}\right\|_\infty |f(t)| = \varphi_j(t)$ où la fonction φ_j est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction $f*g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$ et tout réel x,

$$(f*g)^{(j)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^j \Phi}{\partial x^j}(x,t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^{(j)}(x-t)\ dt = \left(f*g^{(j)}\right)(x).$$

Donc, $f*g \in C^k(\mathbb{R})$ et $\forall j \in [\![1,k]\!]$, $(f*g)^{(j)} = f*g^{(j)}$.

Q 26. Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f*g(x)e^{-ix\xi}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}f(t)g(x-t)\ dt\right)\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}f(t)g(x-t)\ dx\right)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)e^{-ix\xi}\ dx\right)f(t)\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{+\infty}^{-\infty} g(y)e^{-i(y+t)\xi}\ (-dy)\right)f(t)\ dt \text{ (en posant } y = x-t\text{)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-iy\xi}\ dy\right)f(t)e^{-it\xi}\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\xi)f(t)e^{-it\xi}\ dt = \widehat{g}(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\ dt \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

et donc $\widehat{f*g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$.

II.C - Introduction d'une fonction plateau

Q 27. φ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists P_k \in \mathbb{R}[X] /\ \forall t > 0$, $\varphi^{(k)}(t) = P_k\left(\dfrac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}$.

- Le résultat est vrai quand $k = 0$ avec $P_0 = 1$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons qu'il existe $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, $\forall t > 0$, $\varphi^{(k)}(t) = P_k\left(\dfrac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}$. Alors, pour tout réel $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k+1)}(t) &= -\frac{1}{t^2}P'\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}} + P_k\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}\right) \\
&= \frac{1}{t^2}\left(-P'\left(\frac{1}{t}\right) + P\left(\frac{1}{t}\right)\right)e^{-\frac{1}{t}}.
\end{aligned}$$

Donc, si on pose $P_{k+1} = X^2\left(P_k - P_k'\right)$, P_{k+1} est un polynôme tel que, pour tout $t > 0$, $\varphi^{(k+1)}(t) = P_{k+1}\left(\dfrac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

φ est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0]$ (et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(k)}_{/]-\infty,0]} = 0$) et sur $]0, +\infty[$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

- φ est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \varphi(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} e^{-\frac{1}{t}} = 0 = \varphi(0)$. Donc, φ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons φ de classe C^k sur $\mathbb{R}$. $\varphi^{(k)}$ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et de plus, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \left(\varphi^{(k)}\right)'(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} P_{k+1}\left(\dfrac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\varphi^{(k)}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et en particulier, dérivable en 0 avec $\varphi_d^{(k+1)}(0) = 0 = \varphi_g^{(k)}(0)$. Finalement, $\varphi^{(k)}$ est dérivable en 0, de classe C^1 sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. $\varphi^{(k)}$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ou encore φ est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$.

Le résultat est démontré par récurrence. φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q 28. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \in]-1, 1[$, alors $1 - t^2 > 0$ puis $\varphi\left(1 - t^2\right) = e^{-\frac{1}{1-t^2}} = e^{\frac{1}{t^2-1}} = \psi(t)$. Si $t \notin]-1, 1[$, $1 - t^2 \leqslant 0$ puis $\varphi\left(1 - t^2\right) = 0 = \psi(t)$. Finalement, pour tout réel t, $\psi(t) = \varphi\left(1 - t^2\right)$.

Ainsi, $\psi = \varphi \circ h$ où pour tout réel t, $h(t) = 1 - t^2$. h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, $\psi = \varphi \circ h$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q 29. θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On note que puisque $\theta(0) = 0$ et $\theta' = \psi$ est une fonction paire, la fonction θ est impaire.

$\theta'_{/]-\infty,-1]} = 0$ et donc θ est constante sur $]-\infty, -1]$ (on note A cette constante) et de même, θ est constante sur $[1, +\infty[$ (on note B cette constante). D'autre part, puisque $\theta' = \psi \geqslant 0$, θ est croissante sur $\mathbb{R}$. Mais alors, pour tout $t \in [-1, 1]$, $A \leqslant \theta(t) \leqslant B$. Si par l'absurde $A = B$, alors pour tout réel $t \in [-1, 1]$, $\theta(t) = A$ puis θ est constante sur $\mathbb{R}$ puis $\theta' = 0$ ce qui est faux. Donc, θ étant impaire, $A < 0 < B$ et $A = -B$.

Q 30. La fonction $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\theta(x) + B}{2B}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -1]$ (car si $x \leqslant -1$, $f(x) = \dfrac{A + B}{2B} = 0$) et constante égale à 1 sur $[1, +\infty[$ (car si $x \geqslant 1$, $g(x) = \dfrac{B + B}{2B} = 1$).
La fonction $x \mapsto g(2x + 3)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, -2]$ (si $x \leqslant -2$, alors $2x + 3 \leqslant -1$ puis $g(2x + 3) = 0$) et constante égale à 1 sur $[-1, +\infty[$ (si $x \geqslant -1$, alors $2x + 3 \geqslant 1$ puis $g(2x + 3) = 1$).
De même, la fonction $x \mapsto g(-2x + 3)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, constante égale à 1 sur $]-\infty, 1]$ et nulle sur $[2, +\infty[$.

Mais alors, la fonction $\rho\ :\ x \mapsto g(2x + 3)g(-2x + 3)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, constante égale à 1 sur $[-1, 1]$ et nulle sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

II.D - Inégalités de BERNSTEIN

Q 31. Posons $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x, \xi) & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi}e^{ix\xi}\rho(\xi) \end{array}$ de sorte que pour tout réel x, $r(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, \xi)\,d\xi$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto \Phi(x, \xi)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) et intégrable sur $\mathbb{R}$ car nulle en dehors du segment $[-2, 2]$.
- Φ admet sur $\mathbb{R}^2$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \xi) = \frac{i}{2\pi}\xi e^{ix\xi}\rho(\xi).$$

De plus

- pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \xi)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$,
- pour chaque $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \xi)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- pour chaque $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \xi)\right| = \dfrac{1}{2\pi}|\xi|\rho(\xi) = \varphi_1(\xi)$ où φ_1 est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car nulle en dehors de $[-2, 2]$.

D'après le théorème de LEIBNIZ, r est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ r'(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{ix\xi}\rho(\xi)\ d\xi.$$

Q 32. Soit $x \in \mathbb{R}$. Une double intégration par parties (licite car les fonctions considérées sont de classe C^1 sur le segment $[-2, 2]$) fournit

$$\begin{aligned}2\pi x^2 r(x) &= \int_{-2}^{2} x^2 e^{ix\xi}\rho(\xi)\ d\xi = \left[-ixe^{ix\xi}\rho(\xi)\right]_{-2}^{2} + i\int_{-2}^{2} xe^{ix\xi}\rho'(\xi)\ d\xi = i\int_{-2}^{2} xe^{ix\xi}\rho'(\xi)\ d\xi \\ &= i\left(\left[-ie^{ix\xi}\rho'(\xi)\right]_{-2}^{2} + i\int_{-2}^{2} e^{ix\xi}\rho''(\xi)\ d\xi\right) = -\int_{-2}^{2} e^{ix\xi}\rho''(\xi)\ d\xi.\end{aligned}$$

Mais alors, pour tout réel x, (la fonction ρ'' étant bornée sur le segment $[-2, 2]$ car continue sur ce segment)

$$\left|x^2 r(x)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-2}^{2} e^{ix\xi}\rho''(\xi)\ d\xi\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} |\rho''(\xi)|\ d\xi \leqslant \frac{2}{\pi}\|\rho''\|_{L^\infty([-2,2])}.$$

La fonction $x \mapsto x^2 r(x)$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

La fonction r est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$ et est dominée par $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et $-\infty$. On en déduit que la fonction r est intégrable sur $\mathbb{R}$. Enfin, la fonction r est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$ (car $r(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Donc, la fonction r est bornée sur $\mathbb{R}$.

Q 33. Soit $\lambda > 0$. $f \in L^1(\mathbb{R})$, $r_\lambda \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ d'après la question précédente et $f * r\lambda \in L_1(\mathbb{R})$ d'après le résultat admis par l'énoncé. D'après la question Q26, $\widehat{f * r} = \widehat{f} \times \widehat{r_\lambda}$.

D'après la question Q22, pour tout réel ξ, $\widehat{r_\lambda}(\xi) = \dfrac{1}{\lambda}\widehat{r}\left(\dfrac{\xi}{\lambda}\right)$.

r et ρ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $r(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\rho(\xi)\ d\xi$. D'après l'un des deux résultats admis par l'énoncé au début de II.D -, $\widehat{r} = \rho$. Mais alors, pour tout réel ξ,

$$\widehat{f * r}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\widehat{f}(\xi)\rho\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Pour tout $\xi \in [-\lambda, \lambda]$, $\rho\left(\dfrac{\xi}{\lambda}\right) = 1$ et donc $\widehat{f}(\xi)\rho\left(\dfrac{\xi}{\lambda}\right) = \widehat{f}(\xi)$ et pour $\xi \notin [-\lambda, \lambda]$, $\widehat{f}(\xi) = 0$ et encore une fois $\widehat{f}(\xi)\rho\left(\dfrac{\xi}{\lambda}\right) = \widehat{f}(\xi)$. Finalement, $\widehat{f * r} = \dfrac{1}{\lambda}\widehat{f} = \widehat{\dfrac{1}{\lambda}f}$. Puisque $\dfrac{1}{\lambda}f$ et $f * r$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, $f * r = \dfrac{1}{\lambda}f$ d'après un résultat admis par l'énoncé ou encore $f = \lambda f * r_\lambda$.

Q 34. Ainsi, pour tout $\lambda > 0$, $f = \lambda f * r_\lambda$. D'après la question Q31 et un résultat admis plus bas, r est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et r et r' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour r_λ.

D'après la question Q25, $f = \lambda f * r_\lambda$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \lambda f * r'_\lambda$. D'après la question Q24,

$$\|f'\|_\infty = \|\lambda f * r_\lambda\|_\infty \leqslant \|\lambda f\|_\infty \|r'_\lambda\|_1 = \lambda\|r'_\lambda\|_1\|f\|_\infty.$$

Enfin, en posant $y = \lambda x$,

$$\lambda\|r'_\lambda\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |r'_\lambda(x)|\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda|r'(\lambda x)|\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |r'(y)|\ dy = \|r'\|_1.$$

Donc, $\|f'\|_\infty \leqslant \|r'\|_1\lambda\|f\|_\infty$ et $C = \|r'\|_1$ convient.

