Polynômes de Legendre

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la fonction polynôme de la variable réelle x définie par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[\left(x^2 - 1\right)^n \right]$$

1. Donner une expression explicite des fonctions polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3

2. Exprimer $P_n(-x)$ en fonction de $P_n(x)$.

3. Calculer $P_n(0)$ et $P_n'(0)$.

4. En effectuant de deux façons différentes le calcul de $\dfrac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}} \left[(x^2-1)^{n+1}\right]$, montrer que l'on a :

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

5. Soit k un nombre entier compris au sens large entre 0 et $k-1$. Préciser l'ordre de multiplicité de 1 et -1 en tant que racines de la dérivée d'ordre k de $\left(x^2-1\right)^n$.

   En appliquant le théorème de Rolle aux dérivées successives de $\left(x^2-1\right)^n$, montrer que P, admet n racines réelles distinctes, toutes comprises strictement entre -1 et 1.

Polynômes de Legendre

On notera pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction polynomiale $f_n \,:\, x \mapsto (x^2-1)^n$.

On notera également pour $k \in \mathbb{N}$, indifféremment, $D^k((x^2-1)^n) = (f_n)^{(k)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(x^2-1)^n\right]$

1. $P_0(x) = 1$

   $P_1(x) = x$

   $P_2(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$

   $P_3(x) = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est paire. Par conséquent sa dérivée $n$ième est une fonction paire si n est pair, impaire si n est impair.

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

3. On déduit de ce qui précède que $P_n(0) = 0$ si n est impair et que si n est pair, P_n' est impaire d'où $P_n'(0) = 0$. Reste à déterminer pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P_{2p}(0)$ et $P'_{2p+1}(0)$.

   $(x^2-1)^{2p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k (-1)^{2p-k} x^{2k}$. Comme $D^{2p}(x^{2k}) = 0$ si $k < p$, on obtient en dérivant $2p$ fois :
   $$P_{2p}(x) = \frac{1}{2^{2p}(2p)!}\sum_{k=p}^{2p} C_{2p}^k (-1)^{2p-k} D^{2p}(x^{2k}).$$
   $D^{2p}(x^{2k})$ est nul en $x=0$ sauf si $k=p$ auquel cas il vaut $(2p)!$. On en déduit après simplifications :
   $$P_{2p}(0) = (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$$
   De la même manière,
   $$\begin{aligned} P'_{2p+1}(x) &= \frac{1}{2^{2p+1}(2p+1)!}\sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^{2p+1-k} D^{2p+2}(x^{2k}) \\ &= \frac{1}{2^{2p+1}(2p+1)!}\sum_{k=p+1}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^{2p+1-k} \frac{(2k)!}{(2k-2p-2)!} x^{2k-2p-2}. \end{aligned}$$
   D'où l'on déduit :
   $$P'_{2p+1}(0) = (-1)^p \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}$$
   Soit finalement pour tout $p \in \mathbb{N}$,
   $$P_{2p}(0) = (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \qquad P'_{2p}(0) = 0.$$
   $$P_{2p+1}(0) = 0 \qquad P'_{2p+1}(0) = (-1)^p \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant la formule de Leibnitz à $\dfrac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}\left[(x^2-1)(x^2-1)^n\right]$, on obtient
   $$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}\left[(x^2-1)^{n+1}\right] &= \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k D^k(x^2-1)\, D^{n+2-k}((x^2-1)^n) \\ &= \sum_{k=0}^{2} C_{n+2}^k D^k(x^2-1)\, D^{n+2-k}((x^2-1)^n) \\ &= (x^2-1)D^{n+2}((x^2-1)^n) + 2(n+2)xD^{n+1}((x^2-1)^n) + (n+2)(n+1)D^n((x^2-1)^n) \\ &= 2^n\, n!\left[(x^2-1)P_n''(x) + 2(n+2)xP_n'(x) + (n+2)(n+1)P_n(x)\right] \end{aligned}$$

   D'autre part, $f'_{n+1}(x) = 2(n+1)x\,(x^2-1)^n$. En appliquant de nouveau la formule de Leibnitz à la dérivée $(n+1)$ième de ce produit , on obtient :

Polynômes de Legendre

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{n+2}}\left[(x^2-1)^{n+1}\right] &= 2(n+1)\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k D^k(x)\, D^{n+1-k}((x^2-1)^n) \\
&= 2(n+1)\left[x\, D^{n+1}((x^2-1)^n) + (n+1)D^n((x^2-1)^n)\right] \\
&= 2(n+1)\, 2^n\, n!\, \big(xP_n'(x) + (n+1)P_n(x)\big)
\end{aligned}$$

En identifiant, on obtient l'égalité voulue

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. 1 et -1 sont racines d'ordre n de f_n donc racines d'ordre $n-k$ de $f_n^{(k)} = D^k(f_n)$.

Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ la propriété $\mathcal{P}_k$: " $f_n^{(k)}$ s'annule au moins k fois sur $]-1, 1[$."

• $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• f_n s'annule en -1 et en 1, est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$, donc f_n' s'annule au moins une fois sur $]-1, 1[$ d'après le théorème de Rolle : $\mathcal{P}_1$ est établie.

• Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain $k \in [\![1, n-1]\!]$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les zéros de $f_n^{(k)}$ dans $]-1, 1[$ avec $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 1$. Comme $n-k \geqslant 1$, $f_n^{(k)}(-1) = f_n^{(k)}(1) = 0$. Notons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$.
Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f_n^{(k)}(\alpha_i) = f_n^{(k+1)}(\alpha_{i+1}) = 0$, $f_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$: d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ tel que $f_n^{k+1}(\beta_i) = 0$.
On a $-1 = \alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1} < \cdots < \beta_k < \alpha_k = 1$, on obtient donc ainsi $k+1$ racines distinctes de $f_n^{(k+1)}$ dans $]-1, 1[$ ce qui prouve $\mathcal{P}_{k+1}$.
La récurrence est établie : $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
En particulier, $\mathcal{P}_n$ assure que $P_n = \dfrac{1}{2^n\, n!} f_n^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]-1, 1[$. Comme de plus P_n est une fonction polynôme de degré n en tant que dérivée $n$ième d'une fonction polynôme de degré $2n$, P_n admet au plus n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.
Ce sont donc les seules racines de P_n et elles sont simples.