# PUISSANCES D'UNE MATRICE

Dans ce problème, on note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même et $O$ l'application nulle.
Pour tout couple de nombres réels $(a,b)$, on note $J(a,b)$ la matrice

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\Phi$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que, pour tout $n$ entier naturel non nul, on a

$$[J(a,b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) Montrer que $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id} = O$.
   (b) On note $\Pi(X)$ le polynôme $\Pi(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$. Montrer que $\Pi(X)$ possède une racine double que l'on explicitera.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tels que $\Phi(u) = \lambda u$. Montrer que $\Pi(\lambda) = 0$.
3. (a) Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
   (b) Donner une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
4. (a) Déterminer $x \in \mathbb{R}^3$, de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1, vérifiant

$$\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^{3} e_i.$$

   (b) Donner une base du sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Ker}\,(\Phi - \mathrm{Id})^2$ formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
   (c) Montrer que $\Phi(E) \subset E$ et que $\mathbb{R}^3 = E \oplus \mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$.
5. (a) Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1, dans laquelle la matrice de $\Phi$ vaut $M' = J(1,-3)$.
   (b) Exprimer, pour tout $n$ entier naturel, la matrice $M^n$ à l'aide de $n$, $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$, $P^{-1}$ et $M'$ puis calculer la première colonne de $M^n$.
6. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 0, \qquad u_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}.$$

   (a) Dans les trois questions, on note $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(u_{n+2}, u_{n+1}, u_n)$ dans la base $\mathcal{E}$. Montrer que, pour tout $n$ entier naturel, $U_{n+1} = \Phi(U_n)$.
   (b) En déduire que, pour tout $n$ entier naturel, $U_n = \Phi^n(U_0)$ puis, à l'aide de la question 5b, une expression de $u_n$.

## Puissances d'une matrice

1. Procédons par récurrence.

— **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $\begin{pmatrix} a^1 & 1a^0 & 0 \\ 0 & a^1 & 0 \\ 0 & 0 & b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = [J(a,b)]^1$, ce qui démontre que la propriété est vraie au rang 1.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la relation est vraie au rang $n$ et démontrons la au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}[J(a,b)]^{n+1} &= [J(a,b)]^n \cdot J(a,b) \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ce qui démontre la relation au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad [J(a,b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} -14 & 33 & -18 \\ 6 & -8 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$

ce qui donne, après calculs,

$$M^3 + M^2 - 5M + 3I_3 = 0.$$

Or, comme $M$ est la matrice de $\Phi$ dans la base canonique $\mathcal{E}$, on sait, d'après le cours, que $M^3+M^2-5M+3I_3$ et la matrice de $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id}$ dans cette même base. Ainsi, la relation matricielle ci-dessus se traduit par

$$\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id} = O$$

(b) On constate que 1 est une racine évidente de $\Pi$. De plus, $\Pi'(X) = 3X^2 + 2X - 5$ d'où $\Pi'(1) = 0$. Ainsi, d'après le cours, on peut affirmer que 1 est une racine (au moins) double de $\Pi$. Par suite, on peut factoriser $\Pi(X)$ sous la forme $\Pi(X) = 1(X-1)^2(X-a)$ où $a$ désigne la dernière racine de $\Pi$. En identifiant les coefficients constants dans les deux expressions de $\Pi(X)$, on obtient $-a = 3$, d'où $a = -3$. Par suite,

$$\Pi(X) \text{ admet } 1 \text{ comme racine double et } -3 \text{ comme racine simple.}$$

(c) Comme $\Phi(u) = \lambda u$, on a $\Phi^2(u) = \Phi\big(\Phi(u)\big) = \Phi(\lambda u) = \lambda\Phi(u) = \lambda^2 u$ et $\Phi^3(u) = \Phi\big(\Phi^2(u)\big) = \Phi(\lambda^2 u) = \lambda^2\Phi(u) = \lambda^3 u$. Par suite, comme $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id} = O$, on a

$$\begin{aligned}0 &= (\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id})(u) \\ &= \Phi^3(u) + \Phi^2(u) - 5\Phi(u) + 3\,\mathrm{Id}(u) \\ &= \lambda^3 u + \lambda^2 u - 5\lambda u + 3u \\ &= (\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3)u,\end{aligned}$$

d'où $\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$ puisque $u \neq 0$. Donc $\Pi(\lambda) = 0$.

**Puissances d'une matrice**

3. (a) La matrice de $\Phi + 3\,\mathrm{Id}$ dans la base $\mathcal{E}$ est $M + 3I_3$. Pour trouver le noyau de $\Phi + 3\,\mathrm{Id}$, il suffit de chercher les vecteurs $u = (a, b, c)$ tel que $(\Phi + 3\,\mathrm{Id})(u) = 0$, c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
(M+3I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} 2a & +5b & -3c & =0 & (L_1)\\ a & +3b & & =0 & (L_2)\\ & b & +3c & =0 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} & -\ b & -3c & =0 & (L_1)\longleftarrow(L_1-2L_2)\\ a & +3b & & =0 & (L_2)\\ & b & +3c & =0 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} & & 0 & =0 & (L_1)\longleftarrow(L_1+L_3)\\ a & +3b & & =0 & (L_2)\\ & b & +\ 3c & =0 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rr} a= & 9c\\ b= & -3c\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id}) = \{(9c, -3c, c)\ /\ c \in \mathbb{R}\} = \mathbf{Vect}((9, -3, 1))$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $(9, -3, 1)$.

(b) La matrice de $\Phi - \mathrm{Id}$ dans la base canonique est $M - I_3$. Pour déterminer le noyau de $\Phi - \mathrm{Id}$, il suffit de rechercher les vecteurs $u = (a, b, c)$ tel que $(\Phi - \mathrm{Id})(u) = 0$, c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
(M-I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} -2a & +5b & -3c & =0 & (L_1)\\ a & -\ b & & =0 & (L_2)\\ & b & -\ c & =0 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} & 3b & -3c & =0 & (L_1)\longleftarrow(L_1+2L_2)\\ a & -\ b & 0 & =0 & (L_2)\\ & b & -c & =0 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} & & 0 & =0 & (L_1)\longleftarrow(L_1+3L_3)\\ a & -\ b & 0 & =0 & (L_2)\\ & b & -c & =0 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rr} a= & c\\ b= & c\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) = \{(c, c, c)\ /\ c \in \mathbb{R}\} = \mathbf{Vect}((1, 1, 1))$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$.

4. (a) Posons $x = (a, b, c)$. On a

$$
\begin{aligned}
\left(\Phi(x)=x+\sum_{i=1}^{3}e_i\right) \quad &\Longleftrightarrow \quad M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} -2a & +5b & -3c & =1 & (L_1)\\ a & -\ b & & =1 & (L_2)\\ & b & -\ c & =1 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} & 3b & -3c & =3 & (L_1)\longleftarrow(L_1+2L_2)\\ a & -\ b & & =1 & (L_2)\\ & b & -\ c & =1 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} & & 0 & =0 & (L_1)\longleftarrow(L_1-3L_3)\\ a & -\ b & & =1 & (L_2)\\ & b & -\ c & =1 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rr} a= & 2+\lambda\\ b= & 1+\lambda\\ c= & \lambda\end{array}\right. \quad (\lambda\in\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Donc, pour choisir une solution de ce système dont la dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ est égale à 1, il faut et suffit de prendre $\lambda = 1$, ce qui donne $(a, b, c) = (3, 2, 1)$. Donc $x = (3, 2, 1)$.

(b) Comme $\mathrm{Ker}(\Phi-\mathrm{Id})\subset\mathrm{Ker}([\Phi-\mathrm{Id}]^2)$, le vecteur directeur $(1,1,1)=e_1+e_2+e_3$ de la droite $\mathrm{Ker}(\Phi-\mathrm{Id})$ appartient aussi à $E$. D'autre part, le vecteur $x$ de la question précédente vérifie $\Phi(x)=x+e_1+e_2+e_3$, donc $\Phi(x)-x\in\mathrm{Ker}(\Phi-\mathrm{Id})$. Cela signifie que $x\in E$. Nous disposons ainsi de deux vecteurs : $e_1+e_2+e_3=(1,1,1)$ et $x=(3,2,1)$, qui appartiennent à $E$. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de $E$.

Par ailleurs, la matrice de $(\Phi-\mathrm{Id})^2$ dans la base canonique est

$$(M-I_3)^2=\begin{pmatrix}-2&5&-3\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}9&-18&9\\-3&6&-3\\1&-2&1\end{pmatrix},$$

donc

$$\mathrm{rang}\big((M-I_3)^2\big)=\mathrm{rang}\begin{pmatrix}9&-18&9\\-3&6&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}=\mathrm{rang}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&-2&1\end{pmatrix}=1,$$

ce qui implique, d'après le théorème du rang, que $\dim E=2$.

Les deux vecteurs $e_1+e_2+e_3$ et $x$ forment donc une famille libre de deux vecteurs du sous-espace $E$ qui est de dimension 2, ce qui implique que $(e_1+e_2+e_3,x)=\big((1,1,1),(3,2,1)\big)$ est une base de $E$.

(c) Soit $v\in\Phi(E)$ de sorte qu'il existe $u\in E$ tel que $v=\Phi(u)$. Alors $(\Phi-\mathrm{id})^2(v)=\Phi\left((\Phi-\mathrm{id})^2(u)\right)=0$ car $u\in E$, donc $v\in\mathrm{Ker}([\Phi-\mathrm{Id}]^2)$, c'est-à-dire $v\in E$. Donc

$$\Phi(E)\subset E.$$

Pour montrer que $\mathbb{R}^3=E\oplus\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})$, il suffit de prouver que $E\cap\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})=\{0\}$ et $\dim E+\dim\big(\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})\big)=3$. Cette dernière relation est clairement vérifiée puisque l'on sait que $\dim E=2$ d'après la question précédente et $\dim\big(\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})\big)=1$ d'après la question 3.a). Par ailleurs, si $u\in E\cap\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})$, alors $\Phi^2(u)=u$ et $\Phi(u)=3u$, donc $u=\Phi^2(u)=\Phi\big(\Phi(u)\big)=\Phi(3u)=3\Phi(u)=9u$, ce qui implique que $u=0$, d'où $E\cap\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})=\{0\}$. Par conséquent,

$$\mathbb{R}^3=E\oplus\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id}).$$

5. (a) Comme $\mathbb{R}^3=E\oplus\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})$, on sait, d'après le cours, que la réunion d'une base de $E$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Par suite, la famille de vecteurs $\mathcal{B}=\big((1,1,1),(3,2,1),(9,-3,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Or $\Phi(1,1,1)=(1,1,1)$, $\Phi(3,2,1)=(1,1,1)+(3,2,1)$ et $\Phi(9,-3,1)=-3(9,-3,1)$, donc la matrice de $\Phi$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=J(1;-3).$$

Par conséquent, dans la base $\mathcal{B}=\big((1,1,1),(3,2,1),(9,-3,1)\big)$, la matrice de $\Phi$ est $M'=J(1,-3)$.

(b) On sait, d'après le cours et la question précédente, que si $P$ désigne la matrice de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique $\mathcal{E}$, on a $M=PM'P^{-1}$. Par suite

$$\begin{aligned}M^n&=\underbrace{(PM'P^{-1})(PM'P^{-1})\cdots(PM'P^{-1})}_{n\text{ facteurs }PM'P^{-1}}\\&=PM'\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}M'\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}M'P^{-1}\cdots PM'\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}M'P^{-1}\\&=PM'^nP^{-1}.\end{aligned}$$

Donc $M^n=PM'^nP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}1&3&9\\1&2&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Déterminons $P^{-1}$. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors

$$PX = Y \iff \left\{\begin{array}{llllr} x & +3y & +9z & = a & (L_1) \\ x & +2y & -3z & = b & (L_2) \\ x & +\ y & +\ z & = c & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llllr} x & +3y & +\ 9z & = a & (L_1) \\ & -\ y & -12z & = b-a & (L_2) \longleftarrow (L_2 - L_1) \\ & -2y & -\ 8z & = c-a & (L_3) \longleftarrow (L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llllr} x & +3y & +\ 9z & = a & (L_1) \\ & & 16z & = a-2b+c & (L_2) \longleftarrow (-2L_2 + L_3) \\ & -2y & -\ 8z & = c-a & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llll} x = & -\frac{5}{12}a & -\frac{6}{12}b & +\frac{27}{16}c \\ y = & \frac{4}{16}a & +\frac{8}{16}b & -\frac{12}{16}c \\ z = & \frac{1}{16}a & -\frac{2}{16}b & +\frac{1}{16}c \end{array}\right.$$

d'où

$$P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait, d'après la question 1, que

$$(M')^n = [J(1;-3)]^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} M^n = P(M')^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5+4n & \clubsuit & \heartsuit \\ 4 & \diamondsuit & \spadesuit \\ (-3)^n & \blacksquare & \square \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7+4n+9\,(-3)^n & \oplus & \ominus \\ 3+4n-3\,(-3)^n & \otimes & \odot \\ -1+4n+(-3)^n & \circledast & \oslash \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\text{la première colonne de } M^n \text{ est } \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7+4n+9\,(-3)^n \\ 3+4n-3\,(-3)^n \\ -1+4n+(-3)^n \end{pmatrix}.$$

6. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite à valeurs réels définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}$.*

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$MU_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = U_n,$$

   où l'avant-dernière égalité découle de la définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad U_n = \Phi(U_{n-1}).$$

**Puissances d'une matrice**

(b) Procédons par récurrence.

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $\Phi^0(U_0) = \mathrm{Id}(U_0) = U_0$ donc la relation est vérifiée pour $n = 0$.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = \Phi^n(U_0)$ et démontrons cette relation au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}\Phi^{n+1}(U_0) &= \Phi\big(\Phi^n(U_0)\big)\\ &= \Phi(U_n) \qquad \text{par hypothèse de récurrence}\\ &= U_{n+1} \qquad \text{d'après le résultat de la question 6. c),}\end{aligned}$$

donc la relation est justifiée au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = \Phi^n(U_0).$$

La relation précédente se traduit matriciellement par l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or le second membre de cette égalité correspond à la première colonne de $M^n$, donc, d'après le résultat de la question 5. b),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7 + 4n + 9\,(-3)^n \\ 3 + 4n - 3\,(-3)^n \\ -1 + 4n + (-3)^n \end{pmatrix},$$

ce qui donne, en identifiant les troisièmes coordonnées de ces deux vecteurs colonnes,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{-1 + 4n + (-3)^n}{16}.$$