PROBLÈME : CONJECTURE D'ILIEFF-SENDOV

Préambule

Le but du problème est de prouver dans certains cas particuliers, la conjecture explicitée ci-après, souvent nommée conjecture d'Ilieff-Sendov.

On rappelle le théorème de d'Alembert-Gauss qui dit que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a une racine dans $\mathbb{C}$.

Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes, de degré au moins égal à 2, z une racine de S :

– On dit que S et z *vérifient* (IS) s'il existe une racine ζ du polynôme dérivé S' de S vérifiant $|z-\zeta| \leqslant 1$.

– On dit que S vérifie (IS) si, pour toute racine z de S, S et z vérifient (IS).

La conjecture d'Ilieff-Sendov est que tout polynôme de degré au moins égal à 2 *et dont les racines sont de module au plus 1*, vérifie (IS).

Dans toute la suite, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et un polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$, de degré n. On note z_0, z_1,..., z_m les racines distinctes de P (ainsi m est un entier tel que $0 \leqslant m \leqslant n$) : pour $i = 0, \ldots, m$, on note n_i la multiplicité de z_i. On a donc

$$P = a_n \prod_{i=0}^{m} (X - z_i)^{n_i} \quad \text{et} \quad \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{n_i} = \mathrm{n}.$$

On suppose que les z_i vérifient $|z_i| \leqslant 1$.

Partie I : quelques cas simples de la conjecture

A.

1°) **a)** Prouver que si $n = 2$, alors P vérifie (IS).

b) Prouver que si $n_0 \geqslant 2$, alors P et z_0 vérifient (IS).

2°) **a)** Montrer qu'il existe des nombres complexes w_1,..., w_m non racines de P tels que

$$P' = n a_n \prod_{i=0}^{m} (X - z_i)^{n_i - 1} \prod_{j=1}^{m} (X - w_j).$$

b) On suppose que $n_0 = 1$, montrer que

$$\prod_{j=1}^{m} (z_0 - w_j) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{m} (z_0 - z_i).$$

c) Prouver que, si on a $n \geqslant 2^m$, alors P vérifie (IS) (on distinguera les cas $n_0 = 1$ et $n_0 \geqslant 2$).

d) Donner un exemple de polynôme P pour lequel on a $n \geqslant 2^m$ et vérifier le résultat précédent en calculant les racines de P et de P'.

3°) **a)** Écrire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$.

b) En déduire que, pour tout $j \in [\![1,m]\!]$, le point d'affixe w_j est un barycentre à coefficients strictement positifs des points d'affixes z_i, et que l'on a $|w_j| \leqslant 1$.

c) En déduire que si $z_0 = 0$ alors P et z_0 vérifient (IS).

B.

Dans cette partie, on écrit $P' = n a_n \prod_{i=1}^{n-1} (X - t_i)$ *où les* t_i *sont des nombres complexes. On suppose en outre que* $n_0 = 1$.

1°) Prouver que si l'on a $\left| \dfrac{P''(z_0)}{P'(z_0)} \right| \geqslant n - 1$ alors P et z_0 vérifient (IS).

2°) Calculer $\dfrac{P''(z_0)}{P'(z_0)}$ à l'aide des z_i (on pourra utiliser le polynôme $\dfrac{P}{X-z_0}$).

3°) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$ alors

$$\Re\left(\frac{1}{1-z}\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

4°) Montrer que, si $z_0 = 1$, P et z_0 vérifient (IS) (on pensera à utiliser B.1).

5°) On suppose que $z_0 = 1$ et on range les t_i de sorte que

$$\Re\left(\frac{1}{1-t_1}\right) \geqslant \Re\left(\frac{1}{1-t_i}\right) \text{pouri} = 1, \ldots, \text{n} - 1.$$

Prouver que l'on a

$$\Re\left(\frac{1}{1-t_1}\right) \geqslant 1\text{puis}\left|\text{t}_1 - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\text{et}|\text{t}_1 - 1| \leqslant 1.$$

6°) On suppose z_0 de module 1. Prouver que P et z_0 vérifient (IS) (utiliser une transformation géométrique simple de $\mathbb{C}$).

Partie II : Cas d'une racine réelle

Dans toute cette partie, on suppose que $n_0 = 1$ et que z_0 est un nombre réel a vérifiant $0 < a < 1$.
Pour $w \in \mathbb{C} \setminus \{1/a\}$, on pose $T(w) = \dfrac{w-a}{aw-1}$.
On note $\tilde{P}$ le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que

$$\tilde{P}(X) = (aX-1)^n P\left(\frac{X-a}{aX-1}\right),$$

et on écrit $\tilde{P}(X) = b_n X^n + \cdots + b_0$ où les b_i sont dans $\mathbb{C}$.

1°) Calculer $T \circ T(w)$ pour $w \in \mathbb{C} \setminus \{1/a\}$, et trouver l'image par T du cercle unité, de son intérieur, et de son extérieur privé du point $1/a$.

2°) Prouver que l'on a $b_0 = 0$, $|b_1| \leqslant |b_n|$ et $|b_{n-1}| \leqslant (n-1)|b_n|$.

On pose

$$R(X) = \sum_{i=1}^{n}\left[(n-i)b_i X^i + \frac{ib_i}{a}X^{i-1}\right]$$

et on écrit $R(X) = A\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X-\gamma_k)$ où $A \neq 0$ et où les γ_k sont rangés de telle sorte que

$$|\gamma_1| \leqslant |\gamma_2| \leqslant \cdots \leqslant |\gamma_{n-1}|.$$

3°) Prouver que l'on a

$$\prod_{k=1}^{n-1}|\gamma_k| \leqslant \frac{1}{n-a(n-1)}.$$

4°) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \{1/a\}$, calculer $P'(T(w))$ en fonction de a, w et $R(w)$.

5°) Soit μ un nombre réel tel que $|\gamma_1| \leqslant \mu < \dfrac{1}{a}$. Prouver que P' a une racine ζ vérifiant

$$|\zeta - a| \leqslant \frac{\mu(1-a^2)}{1-a\mu}.$$

Si $\mu \leqslant \dfrac{1}{1+a-a^2}$, prouver que P' a une racine ζ vérifiant $|\zeta - a| \leqslant 1$.

6°) **a)** Montrer que, pour $n \in \{3,4\}$, $\dfrac{1}{n-a(n-1)} \leqslant \dfrac{1}{(1+a-a^2)^{n-1}}$ (étudier la fonction $x \mapsto \ln(n - x(n-1)) - (n-1)\ln(1+x-x^2)$).

b) En déduire que si $n \leqslant 4$ alors P et a vérifient (IS).
Montrer que, si $n \leqslant 4$ alors, pour toute racine z de P de module compris strictement entre 0 et 1, P et z vérifient (IS).

7°) Montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré 3 ou 4, ayant toutes ses racines de module au plus 1 vérifie (IS).

8°) On suppose qu'on a $n = 5$, 6 ou 7 et que P a une racine double au moins et de module 1. Montrer que P et a vérifient (IS)(étudier la fonction $x \mapsto (n-2)\ln(1+x-x^2) - \ln[n-(n-1)x]$).

9°) Montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré 5, 6 ou 7, ayant une racine double au moins et de module 1, et toutes ses autres racines de module au plus 1, vérifie (IS).

Partie III : Continuité des racines d'un polynôme

On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré au plus n. On définit une norme sur $\mathbb{C}[X]$ par

$$\|S\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} s_i X^i \right\| = \sum_{i=0}^{n} |s_i|.$$

On ne demande pas de prouver que ceci est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

1°) Prouver que si $S \in \mathbb{C}[X]$ est de degré n, toute racine z de S dans $\mathbb{C}$ vérifie $|z| \leqslant \dfrac{\|S\|}{s_n}$ (on distinguera les cas $|z| \leqslant 1$ et $|z| > 1$).

2°) Soit (S_k) une suite de polynômes de degré n qui converge vers S, de degré n, dans $\mathbb{C}_n[X]$, lorsque $k \to +\infty$. On pose $S_k = \alpha_k \prod_{i=1}^{n}(X - x_{i,k})$. Soit z une racine de S dans $\mathbb{C}$ et p sa multiplicité.
Si $\varepsilon > 0$ on veut montrer que, pour k assez grand, p au moins des nombres complexes $x_{i,k}$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont à distance au plus ε de z.

a) Montrer que l'ensemble des $\{x_{i,k},\ i \in [1,n],\ k \in \mathbb{N}\}$ est borné.

b) Soit z une racine de S d'ordre p, $\varepsilon > 0$ et D le disque de centre z, de rayon ε. On range les racines de S_k de sorte que

$$|x_{1,k} - z| \leqslant |x_{2,k} - z| \leqslant \ldots \leqslant |x_{n,k} - z|.$$

Montrer par l'absurde que $|x_{p,k} - z| < \varepsilon$ et conclure.

Partie IV : Polynômes extrémaux

Soit k un entier vérifiant $n \geqslant k+1 \geqslant 2$. On note $P_n(k)$ la partie de $\mathbb{C}_n[X]$ formée des polynômes *unitaires* de degré n ayant au plus $k+1$ racines distinctes, toutes de module au plus 1.

Pour $S \in P_n(k)$ et pour z racine de S, on note $I_S(z)$ la plus courte distance de z aux racines de S'. On note $I(S)$ le plus grand des $I_S(z)$ quand z parcourt l'ensemble des racines de S.

1°) **a)** Montrer qu'on a $I(S) \leqslant 2$ pour $S \in P_n(k)$ et qu'il existe un polynôme S de $P_n(n-1)$ tel que $I(S) = 1$.

b) On note $I(P_n(k))$ la borne supérieure des $I(S)$ quand S parcourt $P_n(k)$.
Montrer que, si on a $I(P_n(k)) \leqslant 1$ alors tout polynôme de $P_n(k)$ vérifie (IS).
Montrer que $I(P_n(n-1)) \geqslant 1$.

2°) **a)** Prouver que $P_n(k)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}_n[X]$.

b) Montrer que $I : S \mapsto I(S)$ est une application continue de $P_n(k)$ dans $\mathbb{R}$ et qu'il existe un polynôme S de $P_n(k)$ vérifiant $I(S) = I(P_n(k))$.

On appelle *polynôme extrémal* de $P_n(k)$ un polynôme S de $P_n(k)$ vérifiant $I(S) = I(p_n(k))$.

3°) Prouver qu'un polynôme extrémal de $P_n(k)$ a une racine de module 1 (utiliser une transformation géométrique simple de $\mathbb{C}$).

4°) Prouver que, pour tout nombre réel θ, un polynôme extrémal de $P_n(k)$ a au moins une racine de la forme $e^{i\alpha}$ où $\alpha \in [\theta,\theta+\pi[$.

5°) On suppose que $n = 5$, 6 ou 7 et $k = 3$. On note S un polynôme extrémal de $P_n(k)$ et on suppose que S a une racine a réelle vérifiant $0 < a < 1$.
Prouver que S et a vérifient (IS) (dans le cas où S a exactement 2 zéros distincts u et v de module 1, on pourra prouver que leur somme est nulle et établir la majoration

$$|a-\zeta|^k \leqslant \frac{2^{k-2}}{n}|a-u|.|a-v|$$

où ζ est la racine de S' la plus proche de a).

6°) On suppose que $n = 5$, 6 ou 7. Prouver que l'on a $I(P_n(3)) \leqslant 1$.

7°) Prouver que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ayant au plus 4 racines distinctes, ces racines étant de module au plus 1, vérifie (IS).

Remarque : On ne sait pas (encore?) démontrer la conjecture dans le cas général. Outre ceux envisagés dans le problème, d'autres cas particuliers ont étés établis, notamment celui des polynômes de degré 5 ou celui des polynômes ayant au plus 4 coefficients non nuls.

D'après : ENS Ulm 1989
