Les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

Partie I: Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$. On pose $G^+=\{x\in G \mid x>0\}$ et $\alpha=\inf G^+$

1. Justifier l'existence de α
2. Dans cette question on suppose que $\alpha>0$.
   (a) Montrer que $\alpha\in G^+$
   (b) Montrer que $G=\alpha\mathbb{Z}$.
   On dit dans ce cas que G est dicret
3. On suppose que $\alpha=0$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x<y$:
   (a) Montrer qu'il existe $z\in G$ tel que $0<z<y-x$;

   Indication **:** *Utiliser la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure*

   (b) Montrer que $G\cap]x,y[\neq\emptyset$;

   Indication **:** *Vérifier que* $(n+1)z\in G\cap]x,y[$, *avec* $n=E\left(\dfrac{x}{z}\right)$

   (c) En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$
4. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ tel que

$$\exists\varepsilon>0,\quad]1,1+\varepsilon[\cap H=\emptyset$$

   Montrer que H est monogène, c'est-à-dire, il existe $\gamma\in H$ tel que $H=<\gamma>$

Partie II: Applications à la densité

5. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on pose $H:=a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\left\{an+bm \mid (m,n)\in\mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que

$$\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\Longleftrightarrow\exists\gamma\in\mathbb{R}\quad\text{tel que } H=\gamma\mathbb{Z}$$

   Indication **:** *Poser* $\dfrac{a}{b}=\dfrac{p}{q}$ *où* $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $p\wedge q=1$ *puis* $\gamma=\dfrac{b}{q}$

6. Soit r un irrationnel. On pose $\mathcal{G}:=\left\{m+nr \mid (m,n)\in\mathbb{Z}^2\right\}$
   (a) Montrer que $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathbb{R}$
   (b) Soit c et d deux réels tels que $0<c<d<1$. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que : $c<nr-E(nr)<d$
7. Soit a et b deux réels tels que $a<b$. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $a<\tan n<b$.

   Indication **:** *Considérer l'ensemble* $T:=\left\{n+m\pi \mid (n,m)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.

8. Soit a et b deux réels tels que $-1\leqslant a<b\leqslant 1$. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $a<\cos n<b$.

   Indication **:** *Considérer l'ensemble* $T:=\left\{n+2m\pi \mid (n,m)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.

Partie III: Équations de Pell-Fermat

Soit m un entier naturel qui n'est pas un carré parfait.
On appelle équation de Pell-Fermat toute équation de la forme $x^2-my^2=1$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$

9. Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $x+y\sqrt{m}>1$ et $x^2-my^2=1$.
   Montrer que $x+y\sqrt{m}\geqslant 1+\sqrt{m}$
10. On pose

$$G_m:=\left\{x+y\sqrt{m} \mid (x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ x+y\sqrt{m}>0\ \text{ et } x^2-my^2=1\right\}$$

   Montrer qu'il existe $\gamma_m\in G_m$ tel que $G_m=\{\gamma_m^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$
11. Déterminer, γ_m pour $m=2$, $m=3$ et $m=5$

LES SOUS-GROUPES DE $(\mathbb{R},+)$

Partie I

1. G^+ est une partie non vide et minorée par 0, ceci justifie l'existence de α.
2. Supposons que $\alpha > 0$
   (a) Par absurde, on suppose que $\alpha \notin G^+$.
   Pour $\varepsilon = \alpha$, il existe $y \in G^+$ tel que : $\alpha < x < 2\alpha$. Poue $\varepsilon = y - \alpha > 0$, il existe $x \in G^+$ tel que $\alpha < x < y$, il vient que $0 < y - x < \alpha$, donc $y - x \in G^+$, ce qui est absurde
   (b) Il est clair $\alpha\mathbb{Z} \subset G$ car $\alpha \in G$.
   Inversement. Soit $x \in G$, il existe un entier n tel que
   $$na \leqslant x < (n+1)a$$
   Alors $x - n\alpha$ est un nombre positif de G strictement inférieur à α. Il en résulte que ce nombre est nul, ce qui prouve que x appartient à $\alpha\mathbb{Z}$. On a donc bien l'égalité
   $$G = \alpha\mathbb{Z}$$
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Le réel $b - a > 0$, d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $z \in G^+$ tel que $z < b - a$. Soit $n = E\left(\dfrac{a}{z}\right) + 1$, on a :
   $$\frac{a}{z} < n = E\left(\frac{a}{z}\right) + 1 \leqslant \frac{a}{z} + 1 < \frac{b}{z}$$
   Ainsi $a < nz < b$, soit $]a, b[\cap G \neq \emptyset$
4. La fonction ln réalise un isomorphisme de groupes de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ vers $(\mathbb{R},+)$, donc $G = \ln(H)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Soit $v = \ln(1+\varepsilon) > 0$, l'hypothèse $]1, 1+\varepsilon[\cap H = \emptyset$ fournit $]0, v[\cap G = \emptyset$, donc G est de la forme $a\mathbb{Z}$. Posons finalement $\gamma = e^a$, alors
   $$H = \exp(G) = \{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Partie II

5. $\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H = \gamma\mathbb{Z}$. Il existe p et q entiers tels que : $a = \gamma.p$ et $b = \gamma.q$.
   Alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
   $\Rightarrow$) Réciproquement, si $\dfrac{a}{b}$ est rationnel, il existe p et q entiers premiers entre eux tels que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q}$.
   Posons $\gamma = \dfrac{b}{q}$. On a $a = \gamma p$ et $b = \gamma q$, ce qui prouve que a et b appartiennent à $\gamma\mathbb{Z}$, donc $H \subset \gamma\mathbb{Z}$.
   D'autre part, il existe m et n premiers entre eux tels que $mp + nq = 1$. Donc, en multipliant par γ
   $$\gamma = mp\gamma + nq\gamma = ma + nb$$
   ce qui montre que γ appartient à H, et donc que $\gamma\mathbb{Z}$ est inclus dans H. On a bien l'égalité $H = \gamma\mathbb{Z}$.
6. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   (a) G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, donc G est soit dense, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. Puisque $r \notin \mathbb{Q}$, d'après la question précédente, G n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, donc G est dense dans $\mathbb{R}$
   (b) L'ensemble G est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tel que $c < m + nr < d$. Le réel $m + nr$ appartient à $]0, 1[$, donc de partie entière nulle, donc $m = -E(nr)$, par suite $c < nr - E(nr) < d$
7. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a $\arctan a < \arctan b$. Le sous-groupe T est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $\arctan a < n + m\pi < \arctan b$, puis par la périodicité de la tangente on obtient $a < \tan n < b$

Les sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

8. Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $0<a<b<1$, la fonction arccos est strictement décroissante sur $]0,1[$, $0<\arccos b<\arccos a<\dfrac{\pi}{2}$. Le sous-groupe T est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $m,n\in\mathbb{Z}$ tels que $\arccos b<n+2m\pi<\arccos a$, puis par la périodicité et la décroissance stricte de la fonction cosinus on obtient $a<\cos n<b$

Partie III

9. Soit $x,y\in\mathbb{Z}$ tels que $x+y\sqrt{m}>1$ (1) et $x^2-my^2=1$. Les égalités $x^2-my^2=(x-y\sqrt{m})(x+y\sqrt{m})=1$ montrent que $0<x-y\sqrt{m}<1$ (2). On somme (1) et (2) on obtient $2x>1$, donc $x\geqslant 1$ puis (2) donne $0\leqslant x-1<y\sqrt{m}$, soit $y\geqslant 1$. Finalement $x+y\sqrt{m}\geqslant 1+\sqrt{m}$
10. Montrons que G_m est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}_+^*,\times\right)$
    — $1\in G_m$
    — Soit $a,b\in G_m$, il existe $x,y,\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ tels que $a=x+y\sqrt{m}$, $b=\alpha+\beta\sqrt{m}$, $x^2-my^2=1$ et $\alpha^2-m\beta^2=1$. On a :
    $$\frac{1}{a}=\frac{1}{x+y\sqrt{m}}=x-y\sqrt{m}\in G_m$$
    et
    $$ab=\left(x+y\sqrt{m}\right)\left(\alpha+\beta\sqrt{m}\right)=(\underbrace{\alpha x+m\beta y}_{\in\mathbb{Z}})+(\underbrace{\beta x+\alpha y}_{\in\mathbb{Z}})\sqrt{m}$$
    Or
    $$\begin{aligned}(\alpha x+m\beta y)^2-m\left(\beta x+\alpha y\right)^2 &= \left(x+y\sqrt{m}\right)\left(\alpha+\beta\sqrt{m}\right)\left(x-y\sqrt{m}\right)\left(\alpha-\beta\sqrt{m}\right)\\ &= \left(x^2-my^2\right)\left(\alpha^2-m\beta^2\right)=1\end{aligned}$$

    On a $]1,1+\sqrt{m}[\cap G_m=\emptyset$, donc il existe $\gamma_m\in G_m$ tel que $G_m=\{\gamma_m^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$
11. - **Cas** $m=2$: Soit $x=a+b\sqrt{2}\in G_2\cap]1,+\infty[$. Par hypothèse $a^2-2b^2=1$, donc $a-b\sqrt{2}>0$. Additionnons x et $\overline{x}=a-b\sqrt{2}$: $x+\overline{x}=2a>0$ et finalement $a>0$ soit $a\geqslant 1$. Puis le cas $a=1$ est exclu, car sinon $b=0$, donc $a\geqslant 2$. Le cas $a=2$, donne l'égalité $2b^3=3$, ce qui est impossible, donc $a\geqslant 3$.
      D'autre part x vérifie l'équation $x^2=1+2bx\sqrt{2}$, donc $b=\dfrac{x^2-1}{2x\sqrt{2}}$. Conclusion $b>0$, soit $b\geqslant 1$. Mais $b=1$ donne $a^2=3$, donc $b\geqslant 2$. Ainsi $a+b\sqrt{2}\geqslant 3+2\sqrt{2}$. Ce qui montre que tout élément de $G_2\cap]1,+\infty[$ est supérieur ou égal à $3+2\sqrt{2}$. Or il se trouve que $3+2\sqrt{2}\in G_2\cap]1,+\infty[$ comme on le vérifie aisément. Donc $\gamma_2=3+2\sqrt{2}$
    - **Cas** $m=3$: On trouve $\gamma_3=2+\sqrt{3}$
    - **Cas** $m=5$: On trouve $\gamma_5=9+4\sqrt{5}$