Exercice 1: Moteur à courant continu

Question 1: Traduire ces équations dans le domaine de Laplace

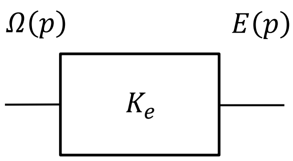
***Ne pas oublier** : Dans les conditions de Heaviside/CIN pour « Conditions Initiales Nulles » :*

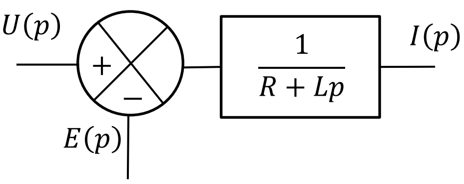
(1)	$U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$
(2)	$E(p) = K_e\Omega(p)$
(3)	$C_m(p) = K_c I(p)$
(4)	$Cf(p) = f\Omega(p)$
(5)	$C_m(p) - C_f(p) - C_r(p) = Jp\Omega(p)$

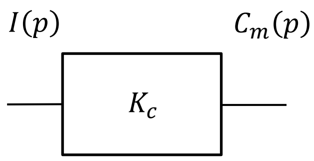
***Remarque** : Si par exemple,* $i(0) = 2$, $\mathcal{L}\left(\frac{di}{dt}\right) = pI(p) - 2$

Question 2: Représenter les équations (1) (2) (3) $(4+5)$ par 4 schémas bloc et mettre en place le schéma bloc du moteur

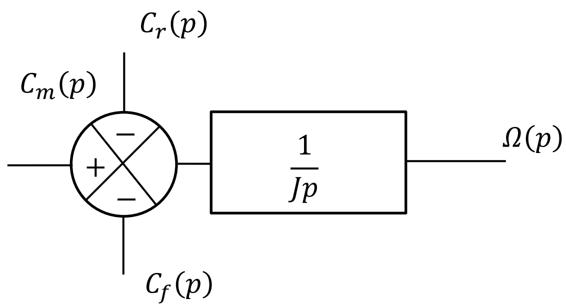
***Méthode** : Au départ, mettre l'entrée U à gauche et la sortie Ω à droite, puis essayer d'écrire les blocs dans leur sens « logique », par exemple de l'intensité vers le couple, du couple vers la vitesse… Essayer ensuite de tout mettre bout à bout*

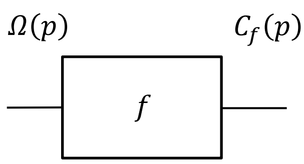


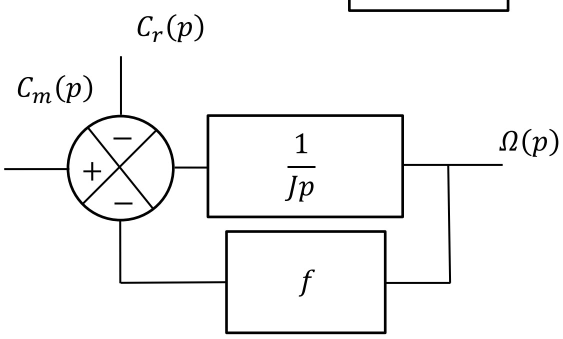


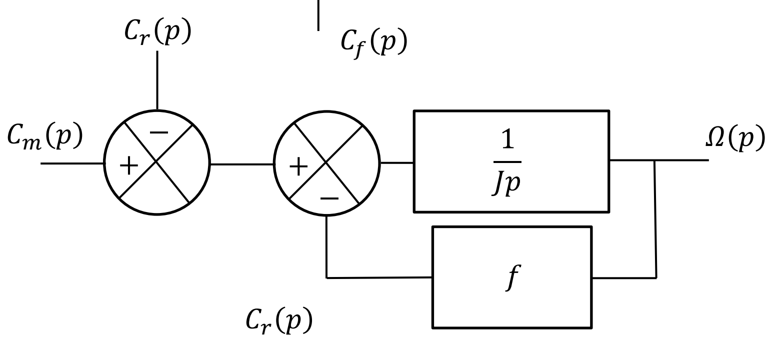


Equations (4+5) - Méthode 1 : Association de blocs et FTBF

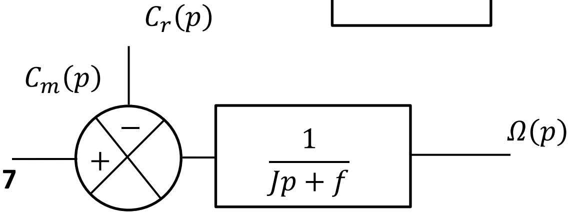








$$FTBF = \frac{\frac{1}{Jp}}{1+\frac{f}{Jp}} = \frac{1}{Jp+f}$$



Equations (4+5) - Méthode 2 : Travail sur les équations

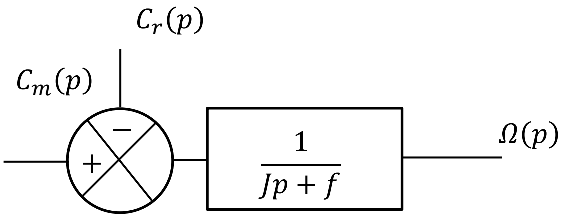
$$Cf(p) = f\Omega(p)$$

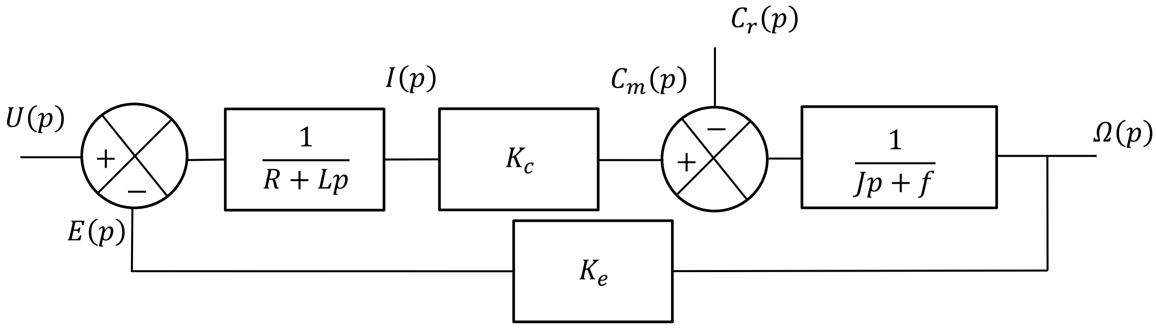
$$C_m(p) - C_f(p) - C_r(p) = Jp\Omega(p)$$

$$C_m(p) - f\Omega(p) - C_r(p) = Jp\Omega(p)$$

$$C_m(p) - C_r(p) = (Jp + f)\Omega(p)$$

$$\Omega(p) = \frac{1}{Jp+f}[C_m(p) - C_r(p)]$$



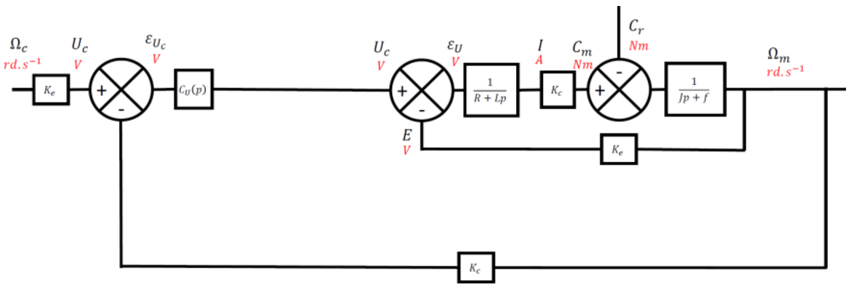


Question 3: Le moteur à courant continu est-il un système asservi ?

Ce n'est pas parce qu'il y a un retour que c'est un système asservi !!! Le retour répond juste à des lois physiques. Il n'y a pas de capteurs !

Il est impossible d'ajouter dans le moteur, derrière ses deux fils d'alimentation, de quoi jouer sur l'écart…

Par contre, oui on peut asservir le moteur en ajoutant un capteur de vitesse de rotation, un comparateur, et un correcteur avant d'envoyer la tension U au moteur :



La réponse est donc NON.

Il suffit de montrer le retour avec f sur un schéma vu plus haut pour se convaincre qu'avoir un retour n'est pas avoir un asservissement.

Question 4: Donner l'expression des fonctions de transfert $H_U(p)$ et $H_{C_r}(p)$ telles que $\Omega(p) = H_U(p)U(p) + H_{C_r}(p)C_r(p)$

Méthode *: Théorème de superposition immédiat*

Danger *: Bien regarder le signe dans le comparateur et celui dans la formule proposée afin de tomber juste*

A éviter *: Utiliser uniquement les équations… Redémontrer le théorème graphiquement puis avec Black le théorème de superposition*

$$\Omega(p) = H_U(p)U(p) + H_{C_r}(p)C_r(p)$$

$$H_U(p) = \left.\frac{\Omega(p)}{U(p)}\right|_{C_r=0} \quad ; \quad H_{C_r}(p) = +\left.\frac{\Omega(p)}{C_r(p)}\right|_{U=0}$$

Remarque *: le $+$ dans H_{C_r} ci-dessus vient du $+$ imposé par l'énoncé*

$$H_U(p) = \frac{\frac{K_c}{(R+Lp)(Jp+f)}}{1+\frac{K_eK_c}{(R+Lp)(Jp+f)}} = \frac{K_c}{(R+Lp)(Jp+f)+K_eK_c}$$
$$= \boldsymbol{\frac{K_c}{(K_eK_c+Rf)+(RJ+Lf)p+LJp^2}}$$

$$H_{Cr}(p) = -\frac{\frac{1}{Jp+f}}{1+\frac{K_eK_c}{(R+Lp)(Jp+f)}} = -\frac{(R+Lp)}{(Jp+f)(R+Lp)+K_eK_c}$$

Remarque *: Le $-$ inclus dans H_{Cr} ci-dessus vient du moins au comparateur du schéma bloc*

$$H_{Cr}(p) = -\boldsymbol{\frac{R+Lp}{(K_eK_c+Rf)+(RJ+Lf)p+LJp^2}}$$

Remarque *: Quand la forme canonique n'est pas attendue, il faut aller jusqu'au quotient de deux polynômes en p !*

Question 5: Préciser l'ordre du moteur à courant continu en fonction des coefficients L et J

Si le produit LJ négligeable, c'est un ordre 1

Si le produit LJ non négligeable, c'est un ordre 2

Pour un CC, L et J ne peuvent jamais être nuls… Il existe une bobine et un arbre moteur !

Un MCC est un système du second ordre (tout le temps), et peut parfois être simplifié en un modèle du 1° ordre.

Question 6: Mettre les fonctions de transfert sous forme canonique en identifiant leurs coefficients caractéristiques

$$H_U(p) = \frac{\frac{K_c}{K_eK_c + Rf}}{1 + \frac{RJ + Lf}{K_eK_c + Rf}p + \frac{LJ}{K_eK_c + Rf}p^2}$$

$$H_{Cr}(p) = -\frac{R}{K_eK_c + Rf}\frac{1 + \frac{L}{R}p}{1 + \frac{RJ + Lf}{K_eK_c + Rf}p + \frac{LJ}{K_eK_c + Rf}p^2}$$

***Attention** : Ne pas oublier de factoriser le numérateur par R…*

Dans les 2 cas, on a le même dénominateur, z et ω_0 sont donc identiques :

$$H_U(p) = \frac{K_U}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

$$H_{Cr}(p) = -K_{C_r}\frac{1 + \frac{L}{R}p}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

$$\boldsymbol{K_U = \frac{Kc}{KeKc + Rf} \quad ; \quad K_{C_r} = \frac{R}{K_eK_c + Rf} = \frac{R}{Kc}K_U}$$

$$\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{KeKc + Rf}{LJ}}}$$

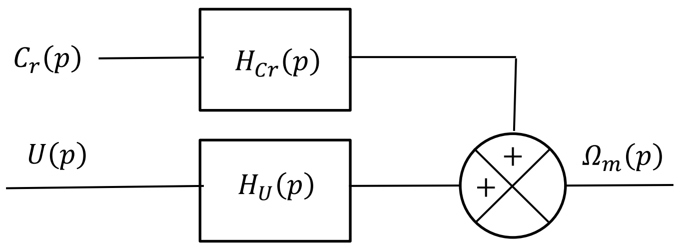
$$\boldsymbol{z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{KeKc + Rf}{LJ}}\frac{RJ + Lf}{KeKc + Rf} = \frac{1}{2}\frac{RJ + Lf}{\sqrt{LJ(KeKc + Rf)}}}$$

Finalement :

$$\Omega(p) = \frac{K_U}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}U(p) - K_{C_r}\frac{1 + \frac{L}{R}p}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}C_r(p)$$

***Conseil** : Dans les sujets, à partir de là, ne plus jamais utiliser les constantes du moteur (R,J,f…) mais uniquement les grandeurs nouvellement introduites. Cela permet d'obtenir les fonctions du correcteur, d'éviter des erreurs (on manipule moins de variables), voir d'éviter d'avoir faut à toute la suite si vous avez commis des erreurs jusqu'ici. On vous donne la forme, utilisez là !*

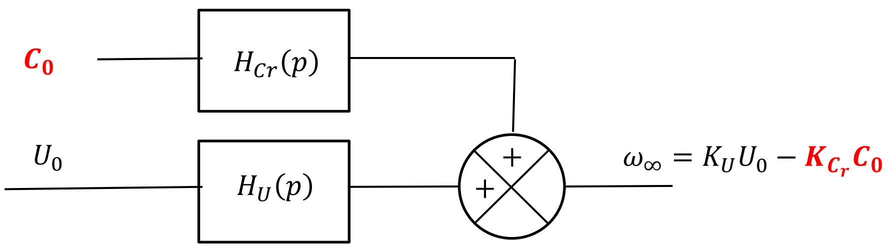
Question 7: Compléter le schéma bloc suivant, équivalent au schéma bloc du moteur



***Conseil** : Ce schéma n'est jamais demandé, je vous suggère d'avoir l'idée de le faire après chaque théorème de superposition. Quand on aura fait le cours sur les écarts aux comparateurs, vous comprendrez tout l'intérêt de cette forme qui permet d'évaluer l'influence de la perturbation sur l'erreur entrée/sortie… En pratiquant la méthode de la question 8…*

Question 8: Déterminer l'influence du couple résistant sur la vitesse de rotation finale $\boldsymbol{\omega_\infty}$ du moteur

$$\omega_\infty = \lim_{t\to+\infty} \omega(t) = \lim_{p\to0^+} p\Omega(p) = K_U U_0 - \boldsymbol{K_{C_r} C_0}$$



Quelle que soit la vitesse obtenue du fait d'une tension d'entrée constante U_0, le couple résistant constant C_0 aura un effet de $-K_{C_r}C_0$ rd/s sur ω_∞

Preuve :

$$\omega_\infty = \lim_{t\to+\infty} \omega(t) = \lim_{p\to0^+} p\Omega(p) = \lim_{p\to0^+} \left[p \frac{K_U}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{{\omega_0}^2} p^2} \frac{U_0}{p} - pK_{C_r} \frac{1 + \frac{L}{R} p}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{{\omega_0}^2} p^2} \frac{C_0}{p} \right]$$
$$= K_U U_0 - K_{C_r} C_0$$

Comme vu dans le cours, quelle que soit la FT stable ne tendant pas vers 0 quelle que soit l'entrée (ie classe nulle) $H(p) = K\frac{1+\cdots}{1+\cdots}$

$$s_\infty = \lim_{p\to0^+} \left[pK \frac{1+\cdots}{1+\cdots} \frac{U_0}{p} \right] = \lim_{p\to0^+} \left[KU_0 \frac{1+\cdots}{1+\cdots} \right] = KU_0$$

Question 9: Montrer que $G(p) = H_U(p)$

$$G(p) = \frac{K_U}{1 + (\tau_m + \alpha\tau_e)p + \tau_e\tau_m p^2}$$
$$1 + (\tau_m + \alpha\tau_e)p + \tau_e\tau_m p^2 = 1 + \left(\frac{RJ}{k_e k_c + Rf} + \frac{Rf}{k_e k_c + Rf}\frac{L}{R}\right)p + \frac{L}{R}\frac{RJ}{k_e k_c + Rf}p^2$$
$$1 + (\tau_m + \alpha\tau_e)p + \tau_e\tau_m p^2 = 1 + \left(\frac{RJ + Lf}{k_e k_c + Rf}\right)p + \frac{LJ}{k_e k_c + Rf}p^2$$
$$G(p) = \frac{K_U}{1 + \frac{RJ + Lf}{k_e k_c + Rf}p + \frac{LJ}{k_e k_c + Rf}p^2} = H_U(p)$$

Question 10: Après avoir exprimé le coefficient d'amortissement du système en fonction de τ_e et τ_m en tenant compte de l'hypothèses $\tau_e \ll \tau_m$, justifier la forme de H'_U proposée

$$G(p) = H_U(p) = \frac{K_U}{1 + (\tau_m + \alpha\tau_e)p + \tau_e\tau_m p^2}$$

Avec z	Avec Δ
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_e\tau_m}}$; $z = \frac{\tau_m + \alpha\tau_e}{2\sqrt{\tau_e\tau_m}}$ $\alpha\tau_e \ll \tau_m$ $z \approx \frac{1}{2}\frac{\tau_m}{\sqrt{\tau_e\tau_m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_m}{\tau_e}} \gg 1$	$\Delta = (\tau_m + \alpha\tau_e)^2 - 4\tau_e\tau_m$ $\tau_m + \alpha\tau_e \approx \tau_m$ $\Delta = {\tau_m}^2 - 4\tau_e\tau_m = \tau_m(\tau_m - 4\tau_e)$ $\tau_e \ll \tau_m \Rightarrow \tau_m - 4\tau_e > 0$ $\Delta > 0$

Le système ne présentera pas de dépassement ($z \gg 1$) à un échelon et le dénominateur est factorisable ($\Delta > 0$).

Question 11: Montrer que la fonction de transfert du moteur peut s'écrire $H_U(p) \approx H'_U(p)$

Il faut montrer que $H'_U \approx G_U$ puisque $G_U = H_U$

Deux étapes :

$$1 + (\tau_m + \alpha\tau_e)p + \tau_e\tau_m p^2 \approx 1 + \tau_m p + \tau_e\tau_m p^2$$
$$(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p) = 1 + (\tau_m + \tau_e)p + \tau_e\tau_m p^2 \approx 1 + \tau_m p + \tau_e\tau_m p^2$$

Donc :

$$1 + (\tau_m + \alpha\tau_e)p + \tau_e\tau_m p^2 \approx (1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)$$
$$H_U(p) \approx \frac{K_U}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)}$$

Question 12: Justifier d'un point de vue fonctionnel le fait que le moteur se comporte comme s'il recevait la valeur moyenne du signal provenant du hacheur

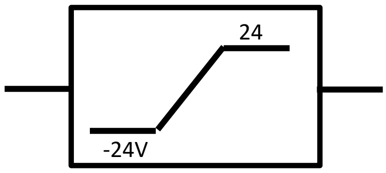
La MCC est un système passe bas :

$$H_U(p) = \frac{K_U}{1 + \frac{RJ + Lf}{k_e k_c + Rf}p + \frac{LJ}{k_e k_c + Rf}p^2}$$

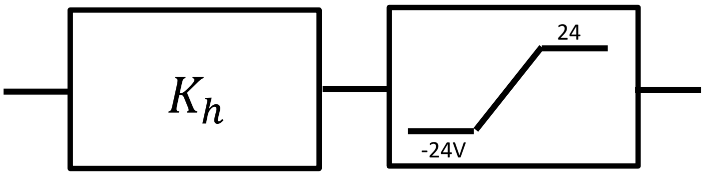
Il filtre les hautes fréquences, et n'a donc pas le temps de réagir à un signal de fréquence grande devant la fréquence de coupure du moteur. Il reçoit finalement la valeur moyenne du signal d'entrée.

Question 13: Proposer un modèle par schéma bloc du hacheur du robot Maxpid (on suppose évidemment que ce hacheur est suivi d'un MCC « voyant » la valeur moyenne du signal émis)

Qu'il y ait CNA ou non, il y a limitation de la tension de sortie lorsque le rapport cyclique vaut 1… il faut donc une saturation, dans notre cas à 24V



Mais en plus, il y a conversion d'un nombre de 0 à 255 numérique pour y associer une tension de 0 à 24V (de même en négatif), il faut donc ajouter un gain :



$$K_h = \frac{24}{255}$$

En réalité, le constructeur à limité la valeur de la tension de sortie à 90% de 24 V !

On pourrait mettre la saturation sur le nombre reçu par le hacheur, mais là ce n'est pas possible car il y a un bit de signe, on ne va pas de -255 à 255…