DNS

Sujet

Isolation thermique d'un tube vaporisateur

On étudie les transferts thermiques dans un tube vaporiseur, produisant de la vapeur d’eau, laquelle peut servir à alimenter un processus industriel.

Dans l'ensemble du problème, la pression est constante, égale à la pression atmosphérique.

I. Transfert thermique dans un milieu homogène

La loi de Fourier est une relation linéaire reliant en tout point d’un milieu matériel homogène, de conductivité thermique λ , le vecteur densité surfacique de flux thermique $\vec{j}$ et le gradient de température $\overrightarrow{grad}\, T$ par : $\vec{j}=-\lambda\,\overrightarrow{grad}\, T$.

1. Justifier la présence du signe $(-)$ en facteur du gradient de température dans la loi de Fourier.
2. Donner l’expression du flux thermique élémentaire $d\Phi$ traversant l’élément de surface dS , de normale $\vec{n}$.
3. Les lignes de flux sont les courbes tangentes, à chaque instant, au vecteur densité surfacique de flux thermique $\vec{j}$. Montrer que les lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes.

Soit un solide indéformable de volume V , limité par une surface S . Ce solide a une conductivité thermique λ , une capacité thermique massique c et une masse volumique μ . On appelle p_{th} (en $W\,m^{-3}$) la densité volumique de puissance thermique dégagée à l’intérieur du solide. L’application du premier principe de la thermodynamique permet d'écrire la relation suivante :

$$\iiint_V \mu\, c\frac{\partial T}{\partial t}dV+\oint\!\!\oint_S \vec{j}.\vec{n}\, dS=\iiint_V p_{th}\, dV$$

4. Préciser très clairement, en termes de production, stockage et échange, la signification physique des 3 termes de cette équation.

5. Rappeler la loi de Fourier (établie pour un milieu isotrope). On rappelle que, a priori, pour un milieu isotrope, la conductivité λ dépend du point et de la température: $\lambda=\lambda(\vec{r},T)$. En partant de l'équation intégrale commentée à la question précédente et de la loi de Fourier, établir l'équation de la diffusion thermique. Que devient cette équation dans le cas d'un milieu solide homogène dont la conductivité thermique est indépendante de la température ?

6. L'équation de la diffusion thermique: $\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=\Delta T+\frac{p_{th}}{\lambda}$ fait apparaître un paramètre habituellement noté a . Quel est le nom et la dimension du paramètre a ? Exprimer a en fonction de λ , μ et c .

II. Transferts thermiques pour un tube

A. Conduction ou diffusion

Soit un tube de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 , infiniment long, de conductivité thermique λ . Les conditions thermiques sont telles que $T=T_1$ en $r=r_1$ et $T=T_2$ en $r=r_2$ (*Figure* 1).

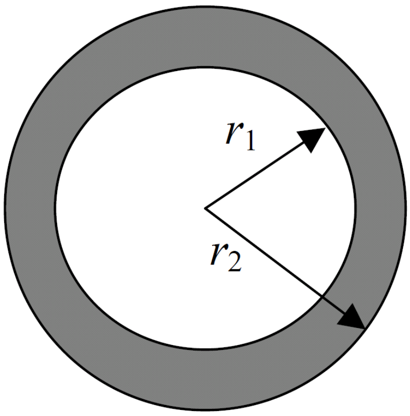


Figure 1

L'équation de la diffusion thermique à laquelle obéit le champ de température à l'intérieur du tube, est la suivante :

$$\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{d^2T}{dr^2}=0$$

7. Préciser les hypothèses qui président à l'établissement de cette équation.

8. Déterminer $T(r)$. En déduire l'expression du flux thermique Φ à travers une surface cylindrique coaxiale de rayon r ($r_1\leq r\leq r_2$) et de longueur L . Pourquoi ce flux est-il indépendant de r ?

9. En déduire l'expression de la résistance R_{th} du tube et préciser son unité.

10.Que devient l'équation de la diffusion thermique précédente $\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}+\frac{d^2 T}{dr^2}=0$ si une densité de puissance p_{th} est produite dans le matériau formant le tube ?

11.Résoudre en utilisant les mêmes conditions aux limites que précédemment. Que devient la notion de résistance thermique ?

B. Conducto-convection

A l'interface entre un solide et un fluide, les échanges thermiques convectifs obéissent à la loi de Newton. On désigne le coefficient d'échange convectif par unité de surface par h_c . Ce coefficient dépend de la nature du fluide, de sa température et du type d'écoulement.

12.Déterminer la résistance R_c équivalente à l'échange convectif entre une paroi cylindrique de rayon r_2 , de longueur L , à la température T_p et un fluide de température constante et uniforme T_f

13.Montrer que si le coefficient d'échange convectif tend vers l'infini, la température de la paroi tend vers T_f .

C. Rayonnement

Aux échanges convectifs paroi-fluide on doit ajouter les échanges par rayonnement thermique.

14.Donner l'expression de la densité surfacique de flux radiatif $\varphi_{rad\,CN}$ (perdu) par une paroi à la température T_p vers un milieu ambiant à la température T_{amb} . On admet que la paroi reçoit de milieu ambiant le rayonnement d'équilibre à la température T_{amb} et que la paroi se comporte comme un corps noir. On désigne par σ la constante de Stefan. On donne $\sigma=5{,}67\,10^{-8}\,W\,m^{-2}\,K^{-4}$

En fait la paroi est un corps gris d'émissivité ε (ε est un coefficient sans dimension compris entre 0 et 1) . Dans ce cas, on admettra que $\varphi_{rad}=\varepsilon\,\varphi_{rad\,CN}$.

Les écarts de température entre T_p et T_{amb} étant supposés « faibles », on décide de linéariser le flux radiatif sous la forme : $\varphi_{rad}=h_{rad}(T_p-T_{amb})$.

15.Démontrer l'expression de h_{rad} en fonction de ε , σ et de T_m avec $T_m=\frac{T_p+T_{amb}}{2}$.

16.Application numérique: $\varepsilon=0{,}6$, $T_p=333\,K$, $T_{amb}=293\,K$ et $T_f=T_{amb}$.

- Calculer h_{rad} .
- Calculer la densité de flux radiatif.
- La comparer à la densité de flux convectif calculée avec $h_c=5\,W\,m^{-2}\,K^{-1}$.

17.En prenant en compte les échanges convectif et radiatif, établir le schéma électrique équivalent aux échanges thermiques entre la paroi solide et le milieu ambiant. Montrer que les échanges thermiques convectif et radiatif peuvent se mettre sous la forme d'une seule résistance thermique, faisant apparaître un coefficient d'échange global h , que l'on exprimera en fonction de h_c et h_{rad} .

III. Isolation du tube

Pour limiter les échanges d'énergie thermique, la paroi externe du tube est recouverte d'une couche d'épaisseur e d'un matériau isolant de conductivité thermique λ_e (*Figure* 2).

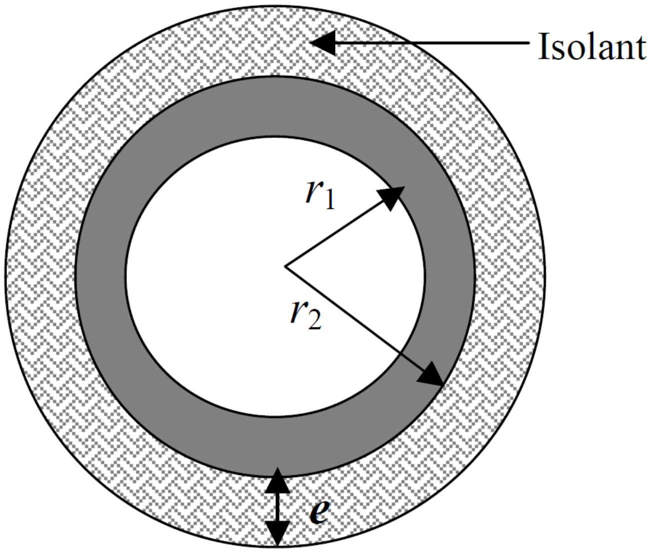


Figure 2

18.Soit T_e la température de la surface extérieure de la couche d'isolant. Montrer, dans le cas où $p_{th}=0$, que le transfert thermique entre la paroi interne à la température T_1 et le milieu extérieur à la température T_f est représenté par la mise en série de 3 résistances thermiques que l'on précisera.

19.Calculer, en fonction de T_1 , T_f , r_1 , r_2 , e , λ , λ_e , L et h (supposé connu), le flux échangé entre la paroi interne et le fluide ambiant, sur une longueur L de tube.

20.Montrer que sous réserve d'une inégalité à vérifier entre λ_e , h , r_2 , il existe une épaisseur d'isolant, à exprimer, pour laquelle l'isolation présente un extremum. Quelle épaisseur minimale doit-on donner à l'isolant pour qu'il augmente effectivement l'isolation. On pourra tracer une courbe en fonction de e pour faciliter la réflexion. Commenter l'allure de cette courbe.

IV. Ébullition de l'eau en convection forcée

Dans cette partie, on admettra que le tube est parfaitement isolé sur sa paroi extérieure, c'est à dire en $r=r_2$.

21.Le tube de résistivité électrique ρ_{elec} est parcouru par un courant d'intensité I constante. Calculer p_j la puissance dissipée par effet joule, par unité de longueur de tube.

La puissance dissipée par effet joule sert à réchauffer l'eau liquide qui s'écoule dans le tube avec un débit volumique D_v . Soit $T_{eau}(x)$ la température de l'eau que l'on supposera fonction uniquement de la position x le long de l'axe de la canalisation. L'origine est prise dans la section d'entrée de l'eau dans le tube. On ne tient pas compte des variations d'énergie potentielle de pesanteur et des variations d'énergie cinétique de l'eau. On néglige les pertes de charges dans la canalisation ce qui revient à supposer que la pression de l'eau est uniforme. Elle est égale à la pression atmosphérique $P=P_{atm}$.

μ_{eau} est la masse volumique de l'eau liquide et c_{eau} sa capacité thermique massique. . Ces grandeurs sont supposées constantes.

22.Donner l'expression du débit massique D_m de l'eau, connaissant le débit volumique D_v .

23.Montrer que la température de l'eau obéit à l'équation suivante : $\mu_{eau} c_{eau} D_v \frac{dT_{eau}}{dx} = I^2 \frac{\rho_{elec}}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}$. On pourra écrire le premier principe de la thermodynamique pour un système en écoulement permanent entre x et $x+dx$.

24.Quel mécanisme de transfert thermique a été négligé pour établir cette équation ? Pourquoi peut-on le négliger ?

25.Application numérique:

$T_0 = T_{eau}(x=0) = 293\,K$; $D_v = 3{,}92\,10^{-6}\,m^3\,s^{-1}$; $\rho_{elec} = 1350\,\mu\Omega.cm$; $I = 40\,A$; $\mu_{eau} = 10^3\,kg\,m^{-3}$; $c_{eau\,liquide} = 4{,}18\,10^3\,J\,kg^{-1}\,K^{-1}$; $c_{P,eau\,vapeur} = 1{,}87\,10^3\,J\,kg^{-1}\,K^{-1}$; $r_1 = 5\,mm$; $r_2 = 5.5\,mm$. Calculer la position x_c dans le tube, telle que $T_{eau} = 373\,K$.

Soit $l_v = 2250\,kJ\,kg^{-1}$ l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à $P=P_{atm}$.

26.Que se passe-t-il pour $x > x_c$? Calculer la longueur de tube d nécessaire pour obtenir uniquement de la vapeur. Tracer l'allure du profil de température $T_{eau}(x)$ de l'eau dans un tube de longueur totale égale à $20\,m$.

27.Donner l'expression du taux de vapeur τ en fonction de x .

28.En fait, la longueur réelle de tube nécessaire pour obtenir de la vapeur est supérieure à celle calculée ci-dessus. Pourquoi ?

Réponses

1) $\boxed{\text{Le flux thermique va spontanément du "chaud" vers le "froid", donc en sens contraire de } \overrightarrow{\text{grad}}\,T \text{, conformément au second principe de la thermodynamique.}}$

---

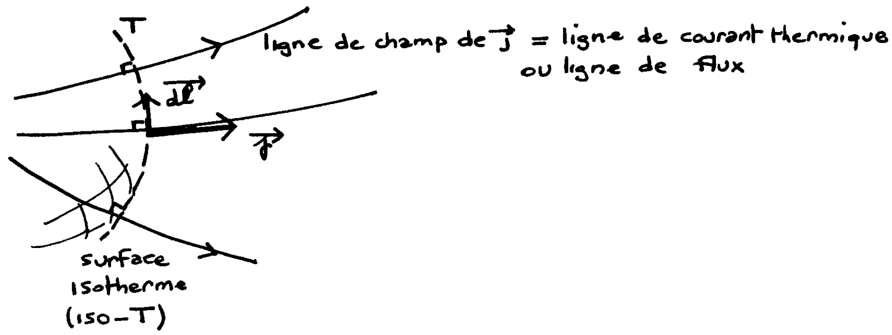
2)

$$\underset{\substack{\text{compté}\\\text{positivement}\\\text{dans le sens de}\\\vec{n}}}{d\phi} = \vec{j}\ \overrightarrow{dS}$$

$$\boxed{d\phi = \vec{j}\ dS\ \vec{n}}$$

---

3)



Par définition du gradient :

$$dT = \overrightarrow{\text{grad}}\,T\ \vec{d\ell}$$
$$= -\frac{\vec{j}}{\lambda}\ \vec{d\ell}$$

Si on choisit un $\vec{d\ell} \perp \vec{j}$ alors $dT = 0$ et donc ce $\vec{d\ell}$ a été choisi sur la surface isotherme.

$$\boxed{\underset{\substack{\text{(ligne}\\\text{de flux)}}}{\vec{j}} \perp \underset{\text{selon l'isotherme}}{\vec{d\ell}}}$$

---

4)

$$\iiint_V \mu c \frac{\partial T}{\partial t}\, dV + \oiint_S \vec{j}\,\vec{n}\, dS = \iiint_V P_H\, dV$$

$\iiint_V \mu c \frac{\partial T}{\partial t}\, dV$	$\oiint_S \vec{j}\,\vec{n}\, dS$	$\iiint_V P_H\, dV$
terme de stockage : variation d'enthalpie à P cst par unité de temps ou variation d'énergie interne à V cst par unité de temps	terme d'échange à la frontière : (puissance) ou flux sortant	puissance produite par les sources internes

---

5) on utilise le théorème d'Ostrogradski pour transformer l'intégrale double en intégrale triple.

$$\iiint \mu c \frac{\partial T}{\partial t}\, dV + \underbrace{\oiint \vec{j}\, \vec{dS}}_{\iiint \operatorname{div}\vec{j}\, dV} = \iiint P_{th}\, dV$$

donc $\displaystyle\iiint \left(\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} - P_{th}\right) dV = 0$

ceci doit être vrai pour tout volume, donc $\forall\, dV$, donc :

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} - P_{th} = 0}$$

avec la loi de Fourier :

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\lambda_{(\vec{r},T)}\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, T\right) - P_{th} = 0}$$

si le milieu est homogène :

$\lambda = \lambda_{(T)}$ uniquement

mais puisque $T = T_{(\vec{r})}$ on ne peut simplifier.

si en plus, λ est indépendant de T

$\lambda = cste$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\, \underbrace{\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, T}_{\Delta T} - P_{th} = 0$$

$$\boxed{\frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{P_{th}}{\lambda}}$$

---

6) $$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{P_{th}}{\lambda}$$

avec

$$\boxed{a = \frac{\lambda}{\mu c} \text{ ou diffusivité thermique}}$$

dimension de λ

on écrit les dimensions (identiques) de $\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$ et ΔT

$$\frac{1}{[a]} \frac{[\theta]}{[T]} = \frac{[\theta]}{[L]^2}$$

donc

$$\boxed{[a] = [L]^2\,[T]^{-1}}$$

(a en $m^2 s^{-1}$)

---

7) A priori, en cylindriques,

$$T = T(r, \theta, z, t)$$

— on a fait T indépendant de t
(<u>régime stationnaire ou permanent</u>)

— on a fait T indépendant de θ et z
(<u>symétrie cylindrique</u>)

— on a fait $P_{th} = 0$
(<u>pas de sources</u>)

---

8) $\longrightarrow$ $$\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} = 0$$

<u>remarque</u> :

Le plus simple est de remarquer que :

$\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} = 0$ s'écrit aussi

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

donc $r\frac{dT}{dr} = A$ ... etc

On intègre cette équation différentielle du premier ordre
(cf changement de variable $T' = \frac{dT}{dr}$)

$$\frac{1}{r}\,T' + \frac{dT'}{dr} = 0$$

C'est une équa diff du <u>premier ordre</u>, à <u>coefficients non constants</u>.
On sépare les variables :

$$\frac{dT'}{T'} = -\frac{dr}{r}$$

$$\ln T' = -\ln r + \text{constante}$$

$$T' = \frac{1}{r} \times \underbrace{\exp(\text{constante})}_{\text{noté } A}$$

$$T' = \frac{A}{r}$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r}$$

$$dT = A\,\frac{dr}{r}$$

$$\boxed{T = A \ln r + B}$$

On porte les conditions aux limites

$$T_1 = A \ln r_1 + B$$

$$T_2 = A \ln r_2 + B$$

d'où

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln r_2 - \ln r_1}$$

$$B = T_1 - A \ln r_1$$

finalement :

$$T = A \ln r + T_1 - A \ln r_1$$

$$T - T_1 = A \ln \frac{r}{r_1}$$

$$\boxed{T - T_1 = (T_2 - T_1)\,\frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1}}$$

⟶ détermination de $\vec{j}$

$$\vec{j} = -\lambda\,\frac{dT}{dr}\,\vec{u_r}$$

$$= -\lambda\,\frac{A}{r}\,\vec{u_r}$$

$$\boxed{\vec{j} = \lambda\,\frac{T_1 - T_2}{\ln r_2/r_1}\,\frac{1}{r}\,\vec{u_r}}$$

⟶ détermination de ϕ

(compté positivement dans le sens des r croissants)

$$\phi = \iint_{\substack{\text{cylindre}\\ \text{rayon } r\\ \text{longueur } L}} \vec{j}\; \underbrace{dS}_{\hookrightarrow\, dz\, r\, d\theta}\; \vec{u_r}$$

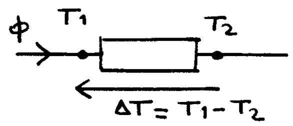
$$= \int_{z=0}^{z=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \lambda\,\frac{T_1 - T_2}{\ln r_2/r_1}\,\frac{1}{\cancel{r}}\, dz\, \cancel{r}\, d\theta$$

$$\boxed{\Phi = \frac{2\pi \lambda L}{\ln r_2/r_1}(T_1 - T_2)}$$

Entre le cylindre r et $r+dr$, il n'y a pas de sources modifiant Φ, il n'y a pas non plus variation de l'enthalpie puisque le régime est stationnaire. Φ doit être indépendant de r.

---

9)



$$\Delta T = R_{th}\,\Phi$$

$$\boxed{R_{th} = \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi\lambda L}}$$

(en $K\,W^{-1}$)

---

10) Précédemment, pas de sources et régime stationnaire, on avait

$$\Delta T = 0 \text{ (cf question 6)}$$

$$\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} = 0 \text{ (cf question 7)}$$

(on va supposer que $\Delta T(r) = \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2}$)

Ici on devra résoudre (cf sources et régime stationnaire)

$$\Delta T = -\frac{P_{th}}{\lambda}$$

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{d^2T}{dr^2} = -\frac{P_{th}}{\lambda}}$$

---

11) remarque :

Le plus simple est de remarquer

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{P_{th}}{\lambda}$$

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{P_{th}}{\lambda}\frac{r^2}{2} + A$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{P_{th}}{\lambda}\frac{r}{2} + \frac{A}{r}$$

$$T = -\frac{P_{th}}{\lambda}\frac{r^2}{4} + A\ln r + B$$

Pour résoudre, on pose, afin de se ramener au premier ordre :

$$T' = \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{1}{r}T' + \frac{dT'}{dr} = -\frac{P_{Th}}{\lambda}$$

$$T' + r\frac{dT'}{dr} = -\frac{P_{Th}}{\lambda}r$$

- résolution de l'équation homogène

$$T' = \frac{A}{r}$$

- solution particulière par variation de la constante

$$T' = \frac{A(r)}{r}$$

conduit à $A' = \frac{dA}{dr} = -\frac{P_{Th}r}{\lambda}$

$$A = -\frac{P_{Th}}{\lambda}\frac{r^2}{2}$$

solution générale :

$$T' = \frac{A}{r} - \frac{P_{Th}}{\lambda}\frac{r}{2}$$

$$\boxed{T = A\ln r - \frac{P_{Th}}{\lambda}\frac{r^2}{4} + B}$$

C.L.

$$T_1 = A\ln r_1 - \frac{P_{Th}\,r_1^2}{4\lambda} + B$$

$$T_2 = A\ln r_2 - \frac{P_{Th}\,r_2^2}{4\lambda} + B$$

d'où

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln r_2/r_1} + \frac{P_{Th}}{4\lambda}\frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2/r_1}$$

$$B = T_1 - A\ln r_1 + \frac{P_{Th}\,r_1^2}{4\lambda}$$

donc

$$T - T_1 = A\ln\frac{r}{r_1} - P_{Th}\frac{r^2 - r_1^2}{4\lambda}$$

$$\boxed{T - T_1 = \left[(T_2 - T_1) + \frac{P_{Th}(r_2^2 - r_1^2)}{4\lambda}\right]\frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1} - \frac{P_{Th}(r^2 - r_1^2)}{4\lambda}}$$

En présence de sources, ϕ n'est plus uniforme et $\underline{\phi = \phi(r)}$.
<u>On ne peut donc plus définir une résistance thermique.</u>

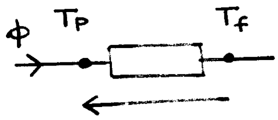
---

12)

$$\varphi_{\substack{\text{solide} \to \text{fluide} \\ \text{paroi} \\ \text{à } T_P \quad \text{à } T_F}} = h_c\,(T_P - T_F)$$

$$\Phi_{\text{solide} \to \text{fluide}} = h_c\,(T_P - T_F)\,2\pi r_2 L$$

$$= G_c\,(T_P - T_F)$$



donc :

$$G_c = h_c\,2\pi r_2 L$$

$$\boxed{R_c = \frac{1}{h_c\,2\pi r_2 L}}$$

---

13) si $h_c \to \infty$ avec $T_P - T_F = \dfrac{\varphi}{h_c}$ (fini) $\leftarrow$ infini

$$\boxed{\begin{array}{c} T_P - T_F \to 0 \\ \text{(on tend vers le contact parfait)} \end{array}}$$

---

14)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \varphi_{\text{rad CN}} & = \sigma\,(T_P^4 - T_{amb}^4) \\ \varphi_{\text{rad}} & = \varepsilon\,\sigma\,(T_P^4 - T_{amb}^4) \end{array}}$$

---

15) On pose

$$\left|\begin{array}{ll} T_m & = \dfrac{T_P + T_{amb}}{2} \\ \Delta T & = T_P - T_{amb} \end{array}\right.$$

donc

$$T_P = T_m + \frac{\Delta T}{2}$$

$$T_{amb} = T_m - \frac{\Delta T}{2}$$

et au premier ordre en ΔT :

$$\varphi_{\text{rad}} = \varepsilon\,\sigma\,\left(\left(T_m + \frac{\Delta T}{2}\right)^4 - \left(T_m - \frac{\Delta T}{2}\right)^4 \right)$$

$$= \varepsilon\,\sigma\,\left((T_m^4 + 2\,T_m^3\,\Delta T) - (T_m^4 - 2\,T_m^3\,\Delta T) \right)$$

$$= 4\,\varepsilon\,\sigma\,T_m^3\,\Delta T$$

$$= h_{rad}\,(T_P - T_{amb})$$

avec

$$\boxed{h_{rad} = 4\,\varepsilon\,\sigma\,T_m^3}$$

---

16) A.N.

$$h_{rad} = 4 \times 0{,}6 \times 5{,}67\ 10^{-8} \left(\frac{333+293}{2}\right)^3$$

$$\boxed{h_{rad} = 4{,}17\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}}$$

$$\varphi_{rad} = h_{rad}\,(T_P - T_{amb})$$

$$= 4{,}17\ (333 - 293)$$

$$\boxed{\varphi_{rad} = 167\ \mathrm{W\,m^{-2}}}$$

$$\varphi_c = h_c\ (T_P - T_{amb})$$

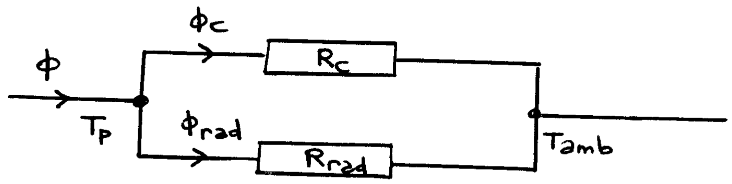
$$= 5\ (333 - 293)$$

$$\boxed{\varphi_c = 200\ \mathrm{W\,m^{-2}}}$$

φ_c et φ_{rad} sont du <u>même ordre de grandeur</u>.
Aucun des deux n'est négligeable par rapport à l'autre.

---

17) Le flux thermique entre la paroi et l'ambiant passe soit par conducto-convection, soit par rayonnement.
Les deux résistances sont donc en parallèle.



On retrouve ici la <u>formule d'association</u> :

$$\phi = \phi_c + \phi_{rad}$$

$$\phi = \frac{(T_P - T_{amb})}{R_c} + \frac{(T_P - T_{amb})}{R_{rad}}$$

$$= (T_P - T_{amb})\left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_{rad}}\right)$$

La résistance équivalente est :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_{rad}}$$

$$= h_c\, 2\pi r_2 L + h_{rad}\, 2\pi r_2 L$$

$$= \underbrace{(h_c + h_{rad})}_{h}\, 2\pi r_2 L$$

$$\boxed{h = h_c + h_{rad}}$$

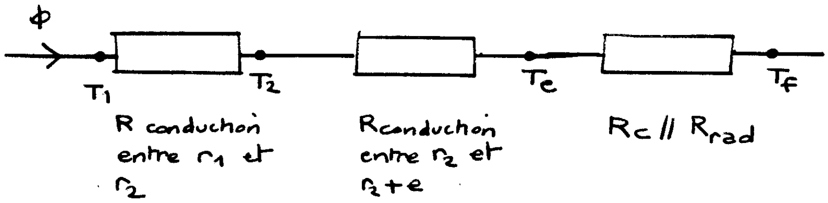
A.N. $= 5 + 4{,}17$

$$\boxed{h = 9{,}17 \ \text{W m}^{-2}\,\text{K}^{-1}}$$

---

18) C'est le même flux thermique ϕ qui traverse le tube puis l'isolant puis s'échappe (par conducto-convection ou échanges radiatif).

On a donc trois résistances en série .



$$\boxed{R = \frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi L\lambda_e}\ln\frac{r_2+e}{r_2} + \frac{1}{2\pi(r_2+e)hL}}$$

---

19)

$$\phi_{\substack{\text{paroi } r_1\\ \to \text{fluide}}} = \frac{T_1 - T_F}{R}$$

$$\boxed{\phi = \frac{(T_1 - T_F)\, 2\pi L}{\frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_e}\ln\frac{r_2+e}{r_2} + \frac{1}{(r_2+e)h}}}$$

---

20) On étudie $R(e)$ pour trouver un extremum

$$\frac{dR}{de} = \frac{1}{2\pi L\lambda_e}\,\frac{1}{r_2+e} - \frac{1}{2\pi hL}\,\frac{1}{(r_2+e)^2}$$

qui est nul pour

$$\boxed{e_{\text{extremum}} = \frac{\lambda_e}{h} - r_2}$$

l' extremum existe si $\frac{\lambda_e}{h} > r_2$

remarque

$$\frac{dR}{de} = \frac{1}{2\pi (r_2+e) L} \left(\frac{1}{\lambda_e} - \frac{1}{h\,(r_2+e)} \right)$$

donc $\frac{dR}{de} < 0$ si $e < \frac{\lambda_e}{h} - r_2$

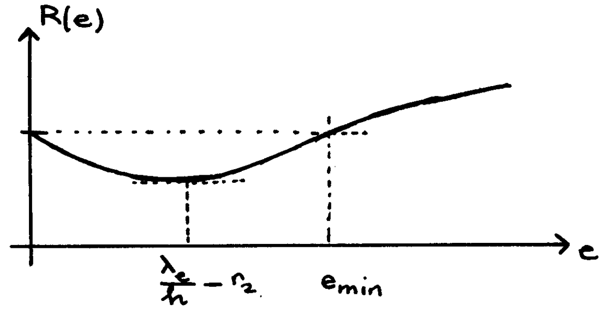
$e < e_{extremum}$

$\frac{dR}{de} > 0$ si $e > e_{extremum}$

L' extremum est donc un minimum de R

⟶ cas $\frac{\lambda_e}{h} > r_2$

$\frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h r_2}\right)$



Pour que l' isolation soit efficace, il faut $e > e_{min}$ (voir schéma) avec e_{min} tel que :

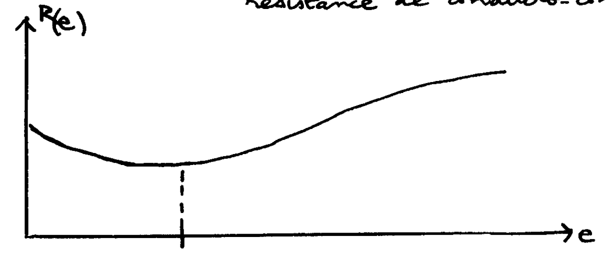
$$\frac{1}{h\,r_2} = \frac{1}{\lambda_e} \ln \frac{r_2+e_{min}}{r_2} + \frac{1}{h(r_2+e_{min})}$$

⟶ cas $\frac{\lambda_e}{h} < r_2$

$\frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h r_2}\right)$

Dans ce cas, pas d'extremum et R(e) augmente avec e.

→ commentaire : il faut tenir compte de la compétition
résistance de conduction (augmente avec e)
résistance de conducto-convection (diminue avec r_2+e donc avec e)



Si $e<\frac{\lambda_e}{h}-r_2$	Si $e>\frac{\lambda_e}{h}-r_2$
c'est l'effet de conducto-convection qui l'emporte.	C'est l'effet de conduction qui l'emporte
Si $e\nearrow$ $R\searrow$	Si $e\nearrow$ $R\nearrow$
<u>On favorise les échanges thermiques</u>	<u>On réduit les échanges thermiques</u>

---

21) La puissance par effet Joule est :

$$dP_J = dR\ I^2$$
$$= \frac{\rho\, dx}{\pi(r_2^2-r_1^2)}\ I^2$$

<u>remarque :</u>
on pourrait obtenir ce résultat en intégrant $\frac{dP_J}{d\tau} = \frac{j_{elec}^2}{\gamma_{elec}} = \rho_{elec}\, j^2_{elec}$ sur tout le volume.

Par unité de longueur du tube

$$p_J = \frac{dP_J}{dx}$$

$$\boxed{p_J = \frac{\rho\, I^2}{\pi(r_2^2-r_1^2)}}$$

---

22)
$$D_m = D_v\ \mu_{eau}$$
$kg\,s^{-1}$ $m^3 s^{-1}$ $kg\,m^{-3}$

$$\boxed{D_m = D_v\ \mu_{eau}}$$

23) Pour un système, en écoulement permanent

$$\boxed{D_m \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{enthalpie massique}}}{h_{\text{final}}} - h_{\text{initial}} \right) = \underset{(\text{thermique, technique} \ldots)}{\text{Puissance reçue}}}$$

on fait le bilan entre x et $x+dx$ donc

$$h(x+dx) - h(x) = \frac{dh}{dx}\,dx$$

(avec $h = cT + \text{cste}$)

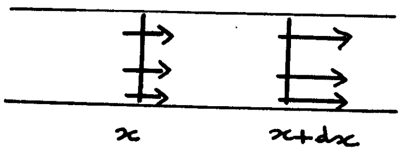
$$= c\,\frac{dT}{dx}\,dx$$

$$D_m\, c\, \frac{dT}{dx}\,\cancel{dx} = p_J\,\cancel{dx}$$

$$\boxed{\mu_{eau}\, D_V\, c\, \frac{dT_{eau}}{dx} = \frac{\rho_{élec}\, I^2}{\pi\,(r_2^2 - r_1^2)}}$$

---

24) On a négligé les transferts conductifs au sein de l'eau.
La puissance reçue à cause de ces transferts vaut pour dx :



$$dP_{conductif} = j(x)\,\pi r_1^2 - j(x+dx)\,\pi r_1^2$$

$$= -\frac{dj}{dx}\,\pi r_1^2\,dx$$

$$\boxed{dP_{conductif} = \lambda_{eau}\,\frac{d^2T}{dx^2}\,\pi r_1^2\,dx}$$

Le phénomène essentiel ici est la transmission de chaleur imposée par la <u>convection forcée</u> de l'eau au débit imposé.
La <u>conduction</u> est bien plus lente que la convection. On la néglige donc ici.

---

25) A.N. $\longrightarrow$ $$\frac{dT_{eau}}{dx} = \frac{\rho_{elec}\, I^2}{\mu_{eau} D_V\, c\, \pi\,(r_2^2 - r_1^2)}$$

avec : $\rho_{elec} = 1350 \ \mu\Omega \times cm$
$= 1350 \ 10^{-6}\Omega \times 10^{-2} m$
$= 1350 \ 10^{-8} \ \Omega.m$

$$= \frac{1350\ 10^{-8} \quad 40^2}{10^3 \ 3{,}92\ 10^{-6} \quad 4{,}18\ 10^3 \ \pi\left[(5{,}5\ 10^{-3})^2 - (5\ 10^{-3})^2\right]}$$

$$\boxed{A = \frac{dT_{eau}}{dx} = 79{,}9 \ K\,m^{-1} \simeq 80 \ K\,m^{-1}}$$

$\longrightarrow$ $T_{eau} = A\,x + B$

C.L. en $x=0$: $T_o = B$

$$\boxed{T_{eau} = A\,x + T_o}$$

On veut $T_{eau}(x_c) = 373\,K$

$$x_c = \frac{373 - 293}{80}$$

$$\boxed{x_c = 1{,}00 \ m}$$

---

26) $\boxed{\text{Au delà de } x_c \text{, il y a vaporisation de l'eau.}}$

En x_C l'eau est liquide à 100°C (avec $x_c = 1$ m)
En x_V l'eau est vapeur à 100°C
Le débit massique est toujours D_m
On connait : $\ell_V = h(\text{vapeur } 100°C) - h(\text{liquide } 100°C)$

On écrit le premier principe entre x_V et x_C
pour un système en écoulement :

$$D_m \underbrace{\left(h(x_v) - h(x_c)\right)}_{\ell_v} = \frac{\rho_{elec}\, I^2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} (x_v - x_c)$$

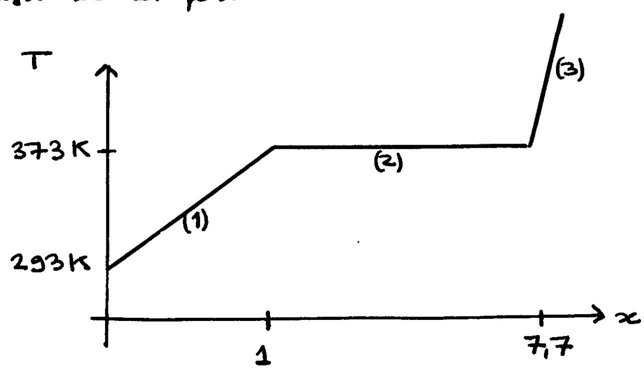
$$\boxed{x_v - x_c = \frac{D_m\, \ell_v\, \pi(r_2^2 - r_1^2)}{\rho_{elec}\, I^2}}$$

A.N. $$= \frac{(10^3\; 3{,}92\; 10^{-6})\; 2250\; 10^3\; \pi\left((5{,}5\; 10^{-3})^2 - (5\; 10^{-3})^2\right)}{1350\; 10^{-8}\quad 40^2}$$

$$\boxed{x_v - x_c = 6{,}7 \quad m}$$

$$\boxed{d = x_v = 7{,}7 \quad m}$$

profil de température.



(pente de (1) inversement proportionnelle à c_{liq}
——— (3) ——————————— c_{vap}
et $c_{vap} < c_{liq}$)

---

27) Si on veut obtenir le taux de vapeur z toujours en écrivant le premier principe (pour $x_c < x < x_v$)

$$D_m \left(h(x) - h(x_c) \right) = \frac{\rho_{elec}\, I^2}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} (x - x_c)$$

avec $h(x_c) = h(\text{liquide } 100°C)$

$h(x) = (1 - z)\, h(\text{liquide } 100°C) + z\, h(\text{vapeur } 100°C)$

donc $h(x) - h(x_c) = \tau \left(h(\text{vapeur } 100°C) - h(\text{liquide } 100°C) \right)$
$= \tau \, \ell_v$

On obtient

$$D_m \, \tau \, \ell_v = \frac{\rho_{elec} \, I^2 \, (x - x_c)}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\rho_{elec} \, I^2 \, (x - x_c)}{D_m \, \ell_v \, \pi \, (r_2^2 - r_1^2)}}$$

A.N.

$$\boxed{\tau = 0,148 \, (x - 1) \quad (x \text{ en m})}$$

On obtient la relation attendue (cf linéarité et
$\tau = 0$ pour $x = 1$ m
$\tau = 1$ pour $x = 7,7$ m

---

28) Le tube n'est pas bien calorifugé. Il faudra donc une longueur plus grande pour vaporiser l'eau.
