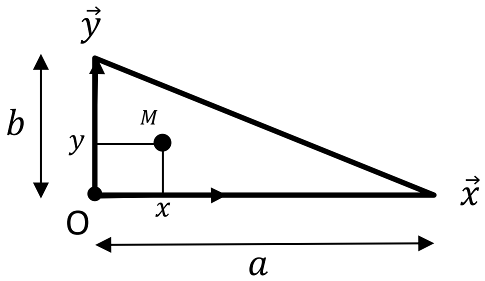
Exercice 1: Surfaces et volumes

Question 1: Calculer l'aire du triangle et du demi-disque ci-dessous



$$S = \int_{x=0}^{a} \left(\int_{y=0}^{b\frac{a-x}{a}} dy \right) dx = \int_{x=0}^{a} \left([y]_0^{b\frac{a-x}{a}} \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{a} b\frac{a-x}{a} dx$$

$$= \frac{b}{a} \int_{x=0}^{a} (a-x)\, dx$$

$$S = \frac{b}{a}\left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{b}{a}\left[aa - \frac{a^2}{2}\right]_0^a = \frac{b}{a}\frac{a^2}{2} = \frac{ab}{2}$$

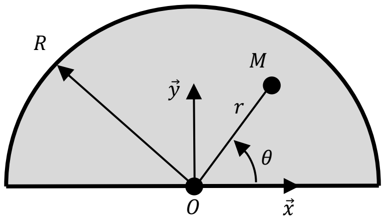
$$S = \int_S dS = \int_{x=0}^{a\frac{b-y}{b}} \int_{y=0}^{b} dxdy$$

$$S = \int_{y=0}^{b} \left(\int_{x=0}^{a\frac{b-y}{b}} dx \right) dy = \int_{y=0}^{b} \left([x]_0^{a\frac{b-y}{b}} \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{b} a\frac{b-y}{b} dy$$

$$= \frac{a}{b} \int_{y=0}^{b} (b-y)\, dy$$

$$S = \frac{a}{b}\left[by - \frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{a}{b}\left[b^2 - \frac{b^2}{2}\right]_0^b = \frac{a}{b}\frac{b^2}{2} = \frac{ab}{2}$$

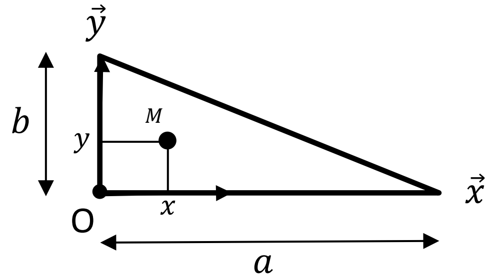


$$dS = rdrd\theta$$

$$S = \int_S dS = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} rdrd\theta$$

$$S = \int_{\theta=0}^{R} rdr \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^\pi = \frac{\pi R^2}{2}$$

Question 2: Calculer la position du centre géométrique du triangle



$$X_G = \frac{1}{S}\int_S x dS$$

$$= \frac{2}{ab}\int_{x=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{b\frac{a-x}{a}} dy\right) x\, dx$$

$$= \frac{2}{ab}\int_{x=0}^{a}\left([y]_0^{b\frac{a-x}{a}}\right) x\, dx = \frac{2}{ab}\int_{x=0}^{a} b\frac{a-x}{a} x\, dx$$

$$= \frac{2}{ab}\frac{b}{a}\int_{x=0}^{a}(ax - x^2)\, dx = \frac{2}{ab}\frac{b}{a}\left[a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{2}{a^2}\left[\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right]_0^a = 2a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2a}{6}$$

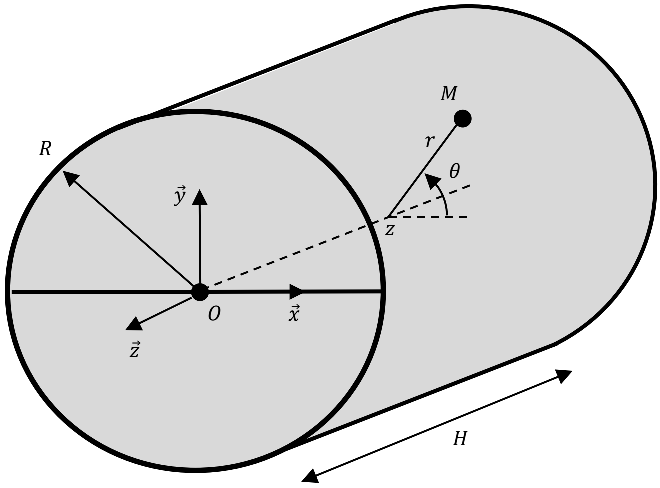
$$X_G = \frac{a}{3}$$

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_S y dS$$

…

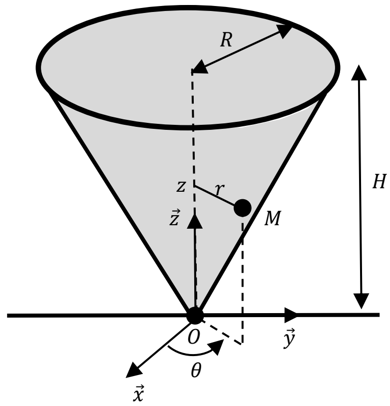
$$Y_G = \frac{b}{3}$$

Question 3: Calculer le volume du cylindre, du cône et de la sphère ci-dessous



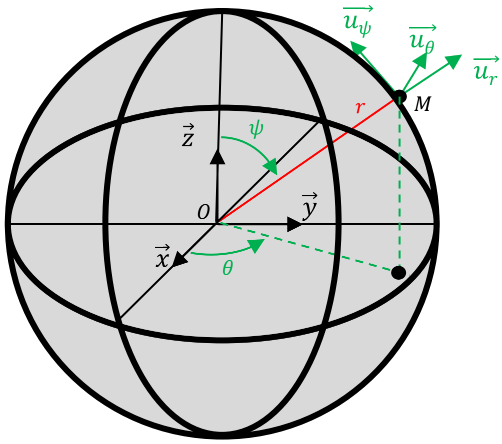
$$V = \int_V dV = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-H}^{0} r dr d\theta dz$$

$$V = \int_{r=0}^{R} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-H}^{0} dz = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_{-H}^0 = \frac{2\pi R^2 H}{2} = \pi R^2 H$$



$$V = \int_V dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left(\int_{z=0}^{H} \left(\int_{r=0}^{f(z)} r dr \right) dz \right) \quad ; \quad f(z) = \frac{R}{H} z$$

$$V = 2\pi \int_{z=0}^{H} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{R}{H}z} dz = 2\pi \frac{R^2}{2H^2} \int_{z=0}^{H} z^2 dz = 2\pi \frac{R^2}{2H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}$$



$$V = \int_V dV = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} r^2 \sin\psi \, dr d\theta d\psi$$

$$V = \int_{r=0}^{R} r^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\psi=0}^{\pi} \sin\psi \, d\psi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [-\cos\psi]_0^{\pi} = \frac{R^3}{3} 4\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Question 4: En avance ? Calculer la surface du cône (sans la partie supérieure)

$$dS = r d\theta dl$$

$$L = \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{R}{H} = \frac{r}{z} \quad ; \quad r = z\frac{R}{H} \quad ; \quad dr = dz\frac{R}{H}$$

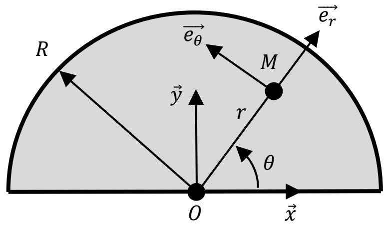
(r,θ)	(z,θ)
$\sin\alpha = \frac{dr}{dl}$ $\sin\alpha = \frac{R}{L} = \frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}}$ $dl = \frac{1}{\sin\alpha} dr = \frac{\sqrt{R^2+H^2}}{R} dr$	$\cos\alpha = \frac{dz}{dl}$ $\cos\alpha = \frac{H}{L} = \frac{H}{\sqrt{R^2+H^2}}$ $dl = \frac{1}{\cos\alpha} dz = \frac{\sqrt{R^2+H^2}}{H} dz$

$$dS = r d\theta dl$$

(r,θ)	(z,θ)
$dS = r d\theta \frac{\sqrt{R^2+H^2}}{R} dr$ $dS = \frac{\sqrt{R^2+H^2}}{R} d\theta r dr$	$dS = z\frac{R}{H} d\theta \frac{\sqrt{R^2+H^2}}{H} dz$ $dS = \frac{R\sqrt{R^2+H^2}}{H^2} d\theta z dz$
$S = \frac{\sqrt{R^2+H^2}}{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left(\int_{z=0}^{R} r \, dr \right)$ $= 2\pi \frac{\sqrt{R^2+H^2}}{R} \frac{R^2}{2}$	$S = \frac{R\sqrt{R^2+H^2}}{H^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left(\int_{z=0}^{H} z \, dz \right)$ $= 2\pi \frac{R\sqrt{R^2+H^2}}{H^2} \frac{H^2}{2}$

$$= \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

Question 5: Intégrer $\overrightarrow{e_r}$ sur le demi-disque ci-dessous



$$\int_S \overrightarrow{e_r} dS = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} \overrightarrow{e_r} r dr d\theta = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} (\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}) r dr d\theta$$

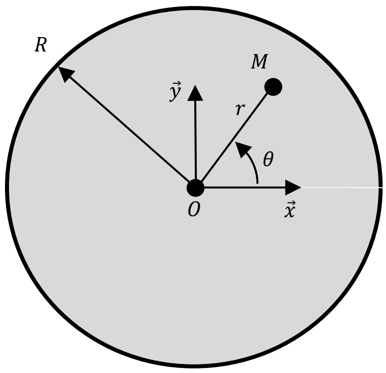
$$= \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} (\cos\theta) r dr d\theta\,\vec{x} + \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} (\sin\theta) r dr d\theta\,\vec{y}$$

$$= \int_{r=0}^{R} r dr \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta\, d\theta\,\vec{x} + \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta\,\vec{y} \right)$$

$$= \frac{R^2}{2}\left([\sin\theta]_0^{\pi}\vec{x} + [-\cos\theta]_0^{\pi}\vec{y}\right) = \frac{R^2}{2}\left(-[\cos\theta]_0^{\pi}\vec{y}\right)$$

$$= -\frac{R^2}{2}(-2\vec{y}) = R^2\vec{y}$$

On se doutait d'un résultat porté par $\vec{y}$ uniquement : à chaque point P de la surface, on trouve un point P' par symétrie d'axe $(0,\vec{y})$ tel que $\overrightarrow{e_r'}.\vec{x} = -\overrightarrow{e_r}.\vec{x}$. Toutes les composantes sur $\vec{x}$ s'annulent deux à deux.



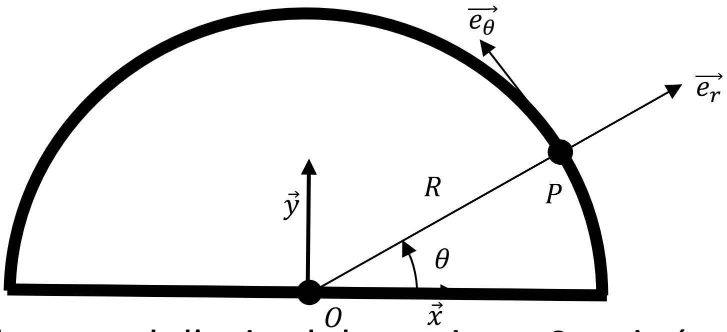
On change les bornes du calcul d'avant :

$$\int_S \overrightarrow{e_r} dS = \int_{r=0}^{R} r dr \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\,\vec{x} + \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\,\vec{y} \right)$$

$$= \vec{0}$$

On s'en doutait : à chaque point P de la surface, on trouve un point P' diamétralement opposé tel que $\overrightarrow{e_r'}$ en P' soit opposé au $\overrightarrow{e_r}$ en P : $\overrightarrow{e_r} + \overrightarrow{e_r'} = \vec{0}$, ce qui est vrai pour tous les points de la surface

Exercice 2: Clapet limiteur de pression



Question 1: Calculer le torseur de l'action de la pression en O par intégrale

$$\overrightarrow{dR} = -p\vec{z}dS = -p\vec{z}rdrd\theta$$

$$\vec{R} = \int_S \overrightarrow{dR} = -\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} p\vec{z}rdrd\theta = -p\int_{r=0}^{r=R} rdr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta\,\vec{z} = -p\frac{\pi R^2}{2}\vec{z}$$

$$\overrightarrow{dM_0} = \overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{dR} = -r\overrightarrow{e_r}\wedge p\vec{z}dS = rpdS\overrightarrow{e_\theta} = r^2p\overrightarrow{e_\theta}drd\theta$$

$$\overrightarrow{M_O} = \int_S \overrightarrow{dM_0} = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2p\overrightarrow{e_\theta}drd\theta = p\int_{r=0}^{r=R} r^2dr\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\overrightarrow{e_\theta}d\theta$$

$$\overrightarrow{M_O} = p\frac{R^3}{3}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}(-\sin\theta\,\vec{x}+\cos\theta\,\vec{y})d\theta = p\frac{R^3}{3}[\cos\theta\,\vec{x}+\sin\theta\,\vec{y}]_0^\pi = -p\frac{2}{3}R^3\vec{x}$$

Question 2: Déterminer les coordonnées du centre géométrique G de la surface

Symétries : $X_G = 0$

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_S ydS = \frac{2}{\pi R^2}\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r\sin\theta\,rdrd\theta = \frac{2}{\pi R^2}\int_{r=0}^{r=R} r^2dr\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$Y_G = \frac{2}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}[-\cos\theta]_0^\pi = \frac{2}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}[-\cos\pi+\cos 0]$$

$$Y_G = \frac{2}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}2$$

$$Y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

Remarque : Calcul cartésien pas trop dur ici grâce au carré qui apparaît…

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_S ydS = \frac{1}{S}\int_{x=-R}^{R}\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} ydxdy = \frac{1}{S}\int_{x=-R}^{R}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{1}{2S}\int_{x=-R}^{R}(R^2-x^2)dx$$

$$Y_G = \frac{1}{2S}\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{1}{2S}\left[R^3-\frac{R^3}{3}-\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)\right] = \frac{1}{S}\left[R^3-\frac{R^3}{3}\right] = \frac{1}{S}\frac{2R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

Question 3: En déduire, via une méthode simplifiée, le torseur de l'action de la pression en G

Pression uniformément répartie sur surface plane :

$$\{T_p\} = \begin{Bmatrix} -p\dfrac{\pi R^2}{2}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -p\dfrac{\pi R^2}{2} & 0 \end{Bmatrix}_G^{\mathfrak{B}}$$

Question 4: En déduire le torseur de l'action de pression en O

$$\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_G} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{R_p} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{4R}{3\pi} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p\dfrac{\pi R^2}{2} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{4R}{3\pi}p\dfrac{\pi R^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3}R^3 p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\{T_p\} = \begin{Bmatrix} -p\dfrac{\pi R^2}{2}\vec{z} \\ -\dfrac{2R^3}{3}p\vec{x} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & -\dfrac{2}{3}R^3 p \\ 0 & 0 \\ -p\dfrac{\pi R^2}{2} & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

Question 5: En précisant le théorème utilisé, donner l'expression de la pression maximale atteinte par le fluide en fonction de C

TMS à plaque sur $(O, \vec{x})$

BAME :

- Action de la pivot parfaite, de moment sur $(O, \vec{x})$: 0
- Action de la pression de moment sur $(O, \vec{x})$: $-\frac{2}{3}R^3 p$
- Action du ressort sur $(O, \vec{x})$: C
- Action du contact de la plaquette sur le bâti qui est nulle au moment du décollement (ce que l'on cherche) : 0

Soit :

$$C - -\frac{2}{3}R^3 p = 0$$

$$C = \frac{2}{3}R^3 p$$

$$p = \frac{3C}{2R^3}$$

Exercice 3: Frein à disque

Question 1: Déterminer la composante suivant $\vec{z}$ de la résultante issue de la pression sur le disque – Justifier le fait que cette résultante est égale à F

$$\overrightarrow{dR} = \overrightarrow{dN} + \overrightarrow{dT} = pdS\vec{z} - fpdS\overrightarrow{e_\theta} = p(\vec{z} - f\overrightarrow{e_\theta})dS$$

$$\vec{R}.\vec{z} = \int_S \overrightarrow{dR}.\vec{z} = \int_S pdS = pS = p\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi$$

On applique un TRS à la plaquette en projection sur $\vec{z}$: $F - \vec{R}.\vec{z} = 0$

$$F = p\frac{{R_e}^2 - {R_i}^2}{2}\varphi$$

Question 2: Déterminer le couple de freinage (valeur absolue) sur l'axe de rotation du disque issu d'un contact plaquette/disque, et l'exprimer en fonction de F

$$\overrightarrow{d\mathrm{M}} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR} = r\overrightarrow{e_r} \wedge p(\vec{z} - f\overrightarrow{e_\theta})dS = pr(\overrightarrow{e_r} \wedge \vec{z} - f\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta})dS = -pr(\overrightarrow{e_\theta} + f\vec{z})dS$$

$$dC = \left|\overrightarrow{dM}.\vec{z}\right| = rpfdS = r^2pfdrd\theta$$

$$\mathrm{C} = \int_S dC = fp\int_{r=R_i}^{r=R_e} r^2dr \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} d\theta = pf\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi$$

$$p = \frac{2F}{\varphi\left({R_e}^2 - {R_i}^2\right)}$$

$$C = \frac{2F}{\varphi\left({R_e}^2 - {R_i}^2\right)}f\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{3}\varphi = \frac{2}{3}Ff\frac{{R_e}^3 - {R_i}^3}{{R_e}^2 - {R_i}^2} = FfR_{moy}$$

Exercice 4: Frein à tambour

Question 1: Déterminer le couple de freinage (valeur absolue) sur l'axe de rotation de 3 issu du contact de la garniture de droite sur le tambour

$$\overrightarrow{dR_{32}} = -pdS\overrightarrow{e_r} + fpdS\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR_{32}} = (R\overrightarrow{e_r} + z\vec{z}) \wedge (-pdS\overrightarrow{e_r} + fpdS\overrightarrow{e_\theta})$$

$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = R\overrightarrow{e_r} \wedge (-pdS\overrightarrow{e_r} + fpdS\overrightarrow{e_\theta}) + z\vec{z} \wedge (-pdS\overrightarrow{e_r} + fpdS\overrightarrow{e_\theta})$$

$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = R\overrightarrow{e_r} \wedge fpdS\overrightarrow{e_\theta} + z\vec{z} \wedge -pdS\overrightarrow{e_r} + z\vec{z} \wedge fpdS\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = RfpdS\vec{z} - zpdS\overrightarrow{e_\theta} - zfpdS\overrightarrow{e_r}$$

$$dC = \left|\overrightarrow{dM}.\vec{z}\right| = RfpdS$$

$$C = \int_S dC = R^2fp\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} d\theta dz = R^2fp\varphi e$$

Exercice 5: Frottement exponentiel

Question 1: Isoler le brin de corde déterminer les deux équations du TRS en projection sur $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$

$$\overrightarrow{dN} + \overrightarrow{dT} - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\overrightarrow{e_\theta} + F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\overrightarrow{e_\theta} = \vec{0}$$

Sens de $\overrightarrow{dT}$ issu de $F_2 > F_1$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{dN} = dN\overrightarrow{e_r}, dN > 0 \\ \overrightarrow{dT} = dT\overrightarrow{e_\theta}, dT > 0 \end{cases}$$

$$dN\overrightarrow{e_r} + dT\overrightarrow{e_\theta} - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\overrightarrow{e_{\theta - \frac{d\theta}{2}}} + F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\overrightarrow{e_{\theta + \frac{d\theta}{2}}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{e_{\theta - \frac{d\theta}{2}}} = \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{e_{\theta + \frac{d\theta}{2}}} = \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)\overrightarrow{e_\theta} - \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)\overrightarrow{e_r}$$

$$\begin{cases} dN - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \\ dT - F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Question 2: Linéariser les équations obtenues, faire apparaître $F'(\theta)$ par développement limité à l'ordre 1 et donner les expressions de dN et dT

$$\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx 1 \quad ; \quad \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$$

$$F\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) \approx F(\theta) - \frac{d\theta}{2}F'(\theta) \quad ; \quad F\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \approx F(\theta) + \frac{d\theta}{2}F'(\theta)$$

$$\begin{cases} dN - \left(F(\theta) - \frac{d\theta}{2}F'(\theta)\right)\frac{d\theta}{2} - \left(F(\theta) + \frac{d\theta}{2}F'(\theta)\right)\frac{d\theta}{2} = 0 \\ dT - \left(F(\theta) - \frac{d\theta}{2}F'(\theta)\right) + \left(F(\theta) + \frac{d\theta}{2}F'(\theta)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dN - F(\theta)d\theta = 0 \\ dT + F'(\theta)d\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dN = F(\theta)d\theta \\ dT = -F'(\theta)d\theta \end{cases}$$

Remarque : pas de termes d'ordre 2 avec cette méthode

Question 3: En exploitant les lois de Coulomb à la limite du glissement, établir l'équation différentiel $F'(\theta) + kF(\theta) = 0$ – On explicitera le coefficient k

$$dT = f dN$$
$$-F'(\theta)d\theta = fF(\theta)d\theta$$
$$F'(\theta) + fF(\theta) = 0$$

Donc $k = f$

Question 4: En déduire la relation liant F_1 et F_2

$$F'(\theta) + fF(\theta) = 0$$
$$F'(\theta) = -fF(\theta)$$
$$\frac{F'(\theta)}{F(\theta)} = -f$$
$$\int_{-\theta_2}^{\theta_1} \frac{F'(\theta)}{F(\theta)} d\theta = \int_{-\theta_2}^{\theta_1} -f \, d\theta$$
$$\left[\ln\big(F(\theta)\big)\right]_{-\theta_2}^{\theta_1} = -f(\theta_1 + \theta_2)$$
$$\varphi = \theta_1 + \theta_2$$
$$\ln\big(F(\theta_1)\big) - \ln\big(F(-\theta_2)\big) = -f\varphi$$
$$\ln(F_1) - \ln(F_2) = -f\varphi$$
$$\ln\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = -f\varphi$$
$$\frac{F_1}{F_2} = e^{-f\varphi} \Leftrightarrow \frac{F_2}{F_1} = e^{f\varphi}$$

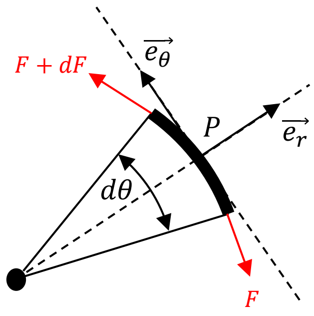
$$\boxed{F_2 = F_1 e^{f\varphi}}$$

Question 5: Compléter le tableau suivant

$$\frac{F_2}{F_1} = e^{f\varphi}$$

Nb tours	1	2	3	4	5
$\frac{F_2}{F_1}$	2,3	5,1	11,6	26,2	59,4

Question 6: Développer cette méthode pour retrouver la formule de frottement exponentiel précédente



$$\begin{cases} dN - F\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (F+dF)\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \\ dT - F\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (F+dF)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Linéarisation à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} dN - F\frac{d\theta}{2} - (F+dF)\frac{d\theta}{2} = 0 \\ dT - F + (F+dF) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dN - F\frac{d\theta}{2} - F\frac{d\theta}{2} - \boldsymbol{dF}\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{2}} = 0 \\ dT - F + F + dF = 0 \end{cases}$$

Remarque : on néglige les termes d'ordre 2

$$\begin{cases} dN - Fd\theta = 0 \\ dT + dF = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dN = Fd\theta \\ dT = -dF \end{cases}$$

$$dT = fdN \Leftrightarrow dF = -fFd\theta$$

$$\frac{dF}{F} = -fd\theta$$

Les élèves ne pensent pas à mettre des intégrales entre des variables différentes (forces à gauche, angles à droite), problème qui n'apparaît pas avec la formulation que j'ai choisie avant.

$$\int_{F_2}^{F_1} \frac{1}{F} dF = \int_{-\theta_2}^{\theta_1} -f\, d\theta$$

$$[\ln(F)]_{F_2}^{F_1} = -f(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\ln\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = -f\varphi$$

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{-f\varphi} \Leftrightarrow \frac{F_2}{F_1} = e^{f\varphi}$$

$$\boxed{F_2 = F_1 e^{f\varphi}}$$