Exercice 1: Loi E/S – Fermeture de chaîne

Etude géométrique

Question 1: Etablir les 3 équations géométriques du problème dans la base 0

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$
$$\lambda_{21}\overrightarrow{x_1} - L_{31}\overrightarrow{x_3} - L_0\overrightarrow{x_0} + H_0\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$
$$\lambda_{21}\overrightarrow{x_1} - L_{31}\overrightarrow{x_3} - L_0\overrightarrow{x_0} + H_0\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$
$$\begin{cases} \lambda_{21}\cos\theta_{10} - L_{31}\cos\theta_{30} - L_0 = 0 \\ \lambda_{21}\sin\theta_{10} - L_{31}\sin\theta_{30} + H_0 = 0 \end{cases}$$

Ajoutons les deux équations de fermeture angulaire :

$$(\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}}) + (\widehat{\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{x_0}}) = 0$$
$$\theta_{10} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0$$

Soient 3 équations :

$$\begin{cases} \theta_{10} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0 \\ \lambda_{21}\cos\theta_{10} - L_{31}\cos\theta_{30} - L_0 = 0 \\ \lambda_{21}\sin\theta_{10} - L_{31}\sin\theta_{30} + H_0 = 0 \end{cases}$$

Question 2: Etablir la relation entrée/sortie en position $\lambda_{21} = f(\theta_{30})$

Méthode de somme des carrés :

$$\cos\theta_{10} = \frac{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}{\lambda_{21}} \quad ; \quad \sin\theta_{10} = \frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{\lambda_{21}}$$
$$\cos^2\theta_{10} + \sin^2\theta_{10} = 1$$
$${\lambda_{21}}^2 = (L_{31}\cos\theta_{30} + L_0)^2 + (L_{31}\sin\theta_{30} - H_0)^2$$
$$\lambda_{21} = \pm\sqrt{(L_{31}\sin\theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31}\cos\theta_{30} + L_0)^2}$$

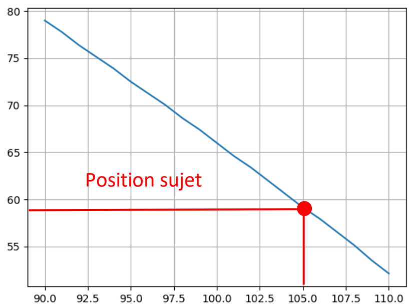
Dans le cas étudié, il est nécessaire de regarder « avec les mains » la bonne solution en regardant le signe de $\pm\sqrt{(L_{31}\sin\theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31}\cos\theta_{30} + L_0)^2}$. On a $\lambda_{21} > 0$

D'où :

$$\boxed{\lambda_{21} = \sqrt{(L_{31}\sin\theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31}\cos\theta_{30} + L_0)^2}}$$

Question 3: Proposer une méthode de résolution numérique permettant de déterminer θ_{30} en degrés pour une valeur donnée de λ_{21} en mm variant dans l'intervalle de 90 à 110 (les dimensions seront mesurées sur le schéma cinématique) - Vous définirez une fonction f(teta,lamb), une fonction récursive dichotomie(f,a,b,Crit) et une fonction Resolution() renvoyant les listes Lambda21 et teta30

```
H0 = 53
L0 = 81
L31 = 45

def Dichotomie(f,a,b,Crit):
    m = (a+b)/2
    if abs(b-a) < 2*Crit:
        return m
    else:
        if f(a)*f(m) == 0:
            return m
        elif f(a)*f(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
        return Dichotomie(f,a,b,Crit)

from math import sqrt,cos,sin,pi

def f(teta,lamb):
    P1 = L0 + L31*cos(teta)
    P2 = L31*sin(teta) - H0
    return lamb - sqrt(P1**2+P2**2)

def resolution():
    L_Lambda21 = [i for i in range(90,111)]
    L_Teta30_dg = []
    for Lambda21 in L_Lambda21:
        def F(teta):
            return f(teta,Lambda21)
        Crit = 0.1 * pi/180 # °
        a = 0 # °
        b = 90 * pi/180 # °
        Teta30_rd = Dichotomie(F,a,b,Crit)
        Teta30_dg = Teta30_rd*180/pi
        L_Teta30_dg.append(Teta30_dg)
    return L_Lambda21,L_Teta30_dg

L_Lambda21,L_Teta30 = resolution()

from matplotlib import pyplot as plt
plt.close('all')

def Affiche(fig,X,Y):
    plt.figure(fig)
    plt.plot(X,Y)
    plt.grid(True)
    plt.show()

Affiche(1,L_Lambda21,L_Teta30)
```



Question 4: Exprimer θ_{32} en fonction du seul paramètre géométrique θ_{30} et des constantes (utile dans la suite) – On justifiera le choix de la fonction trigonométrique choisie

$$\theta_{32} = \theta_{30} - \theta_{10}$$

Il faut donc exprimer θ_{30} en fonction de θ_{10}.

$$\begin{cases} \lambda_{21} \cos\theta_{10} - L_{31} \cos\theta_{30} - L_0 = 0 \\ \lambda_{21} \sin\theta_{10} - L_{31} \sin\theta_{30} + H_0 = 0 \end{cases}$$

On peut au choix utiliser un arccos, arcsin, ou arctan pour exprimer θ_{30}. Compte tenu du mécanismes étudié, θ_{30} étant l'angle $(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3}})$, cet angle évolue dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On choisit dont l'arcsin ou arctan, mais cette dernière est plus simple :

$$\tan\theta_{10} = \frac{L_{31} \sin\theta_{30} - H_0}{L_{31} \cos\theta_{30} + L_0}$$

$$\theta_{10} = \tan^{-1}\left(\frac{L_{31} \sin\theta_{30} - H_0}{L_{31} \cos\theta_{30} + L_0}\right)$$

$$\boxed{\theta_{32} = \theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31} \sin\theta_{30} - H_0}{L_{31} \cos\theta_{30} + L_0}\right)}$$

Voici la formule avec sin :

$$\sin\theta_{10} = \frac{L_{31} \sin\theta_{30} - H_0}{\lambda_{21}} = \frac{L_{31} \sin\theta_{30} - H_0}{\sqrt{(L_{31} \sin\theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31} \cos\theta_{30} + L_0)^2}}$$

$$\theta_{32} = \theta_{30} - \sin^{-1}\left(\frac{L_{31} \sin\theta_{30} - H_0}{\sqrt{(L_{31} \sin\theta_{30} - H_0)^2 + (L_{31} \cos\theta_{30} + L_0)^2}}\right)$$

Question 5: Etablir la relation entrée/sortie en position $\lambda_{21} = f(\theta_{10})$

Dans la base 0 (pas idéal) :

$$\begin{cases} \theta_{10} + \theta_{32} + \theta_{03} = 0 \\ \lambda_{21}\cos\theta_{10} - L_{31}\cos\theta_{30} - L_0 = 0 \\ \lambda_{21}\sin\theta_{10} - L_{31}\sin\theta_{30} + H_0 = 0 \end{cases}$$

$$\cos\theta_{30} = \frac{\lambda_{21}\cos\theta_{10} + L_0}{L_{31}} \quad ; \quad \sin\theta_{30} = \frac{\lambda_{21}\sin\theta_{10} - H_0}{L_{31}}$$

$$\cos^2\theta_{30} + \sin^2\theta_{30} = 1$$

$$L_{31}{}^2 = (\lambda_{21}\cos\theta_{10} + L_0)^2 + (\lambda_{21}\sin\theta_{10} - H_0)^2$$

La suite est un peu galère… Développer, regrouper, puis polynôme de degré 2. Allez, je me lance

$$L_{31}{}^2 = \lambda_{21}{}^2\cos^2\theta_{10} + L_0{}^2 + 2L_0\cos\theta_{10}\lambda_{21} + \lambda_{21}{}^2\sin^2\theta_{10} + H_0{}^2 - 2H_0\sin\theta_{10}\lambda_{21}$$

$$\boldsymbol{\lambda_{21}}^{\mathbf{2}} + 2(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})\boldsymbol{\lambda_{21}} + H_0{}^2 + L_0{}^2 - L_{31}{}^2 = 0$$

$$\Delta = 4(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})^2 - 4\left(H_0{}^2 + L_0{}^2 - L_{31}{}^2\right)$$

Il faudrait discuter des conditions géométriques qui font que $\Delta > 0$ (exemple de situation impossible : θ_{10} avec $L_{31} < H_0$).

$$\lambda_{21} = \frac{-2(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10}) \pm \sqrt{4(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})^2 - 4\left(H_0{}^2 + L_0{}^2 - L_{31}{}^2\right)}}{2}$$

$$\lambda_{21} = H_0\sin\theta_{10} - L_0\cos\theta_{10} \pm \sqrt{(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})^2 - \left(H_0{}^2 + L_0{}^2 - L_{31}{}^2\right)}$$

On pourrait s'arrêter là et choisir la solution, mais comme je l'ai fait dans la base 1 ci-dessous, je sais que la solution est + :

$$\begin{aligned} &(L_0\cos\theta_{10} - H_0\sin\theta_{10})^2 - \left(H_0{}^2 + L_0{}^2 - L_{31}{}^2\right) \\ &= L_0{}^2\cos^2\theta_{10} + H_0{}^2\sin^2\theta_{10} - 2L_0\cos\theta_{10}H_0\sin\theta_{10} - H_0{}^2 - L_0{}^2 + L_{31}{}^2 \\ &= L_0{}^2(\cos^2\theta_{10} - 1) + H_0{}^2(\sin^2\theta_{10} - 1) - 2L_0\cos\theta_{10}H_0\sin\theta_{10} + L_{31}{}^2 \\ &= -L_0{}^2\sin^2\theta_{10} - H_0{}^2\cos^2\theta_{10} - 2L_0\cos\theta_{10}H_0\sin\theta_{10} + L_{31}{}^2 \\ &= L_{31}{}^2 - \left(L_0{}^2\sin^2\theta_{10} + H_0{}^2\cos^2\theta_{10} + 2L_0\cos\theta_{10}H_0\sin\theta_{10}\right) \\ &= L_{31}{}^2 - (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2 \end{aligned}$$

Dans la base 1 : (avoir le réflexe de choisir la base si elle n'est pas imposée et si c'est compliqué dans la base choisie initialement)

$$\lambda_{21}\overrightarrow{x_1} - L_{31}\overrightarrow{x_3} - L_0\overrightarrow{x_0} + H_0\overrightarrow{y_0} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \lambda_{21} - L_{31}\cos\theta_{32} - L_0\cos\theta_{01} - H_0\sin\theta_{01} = 0 \\ -L_{31}\sin\theta_{32} - L_0\sin\theta_{01} + H_0\cos\theta_{01} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{21} - L_{31}\cos\theta_{32} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10} = 0 \\ -L_{31}\sin\theta_{32} + L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10} = 0 \end{cases}$$

$$\cos\theta_{32} = \frac{\lambda_{21} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10}}{L_{31}} \quad ; \quad \sin\theta_{32} = \frac{L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10}}{L_{31}}$$

$$\cos^2\theta_{32} + \sin^2\theta_{32} = 1$$

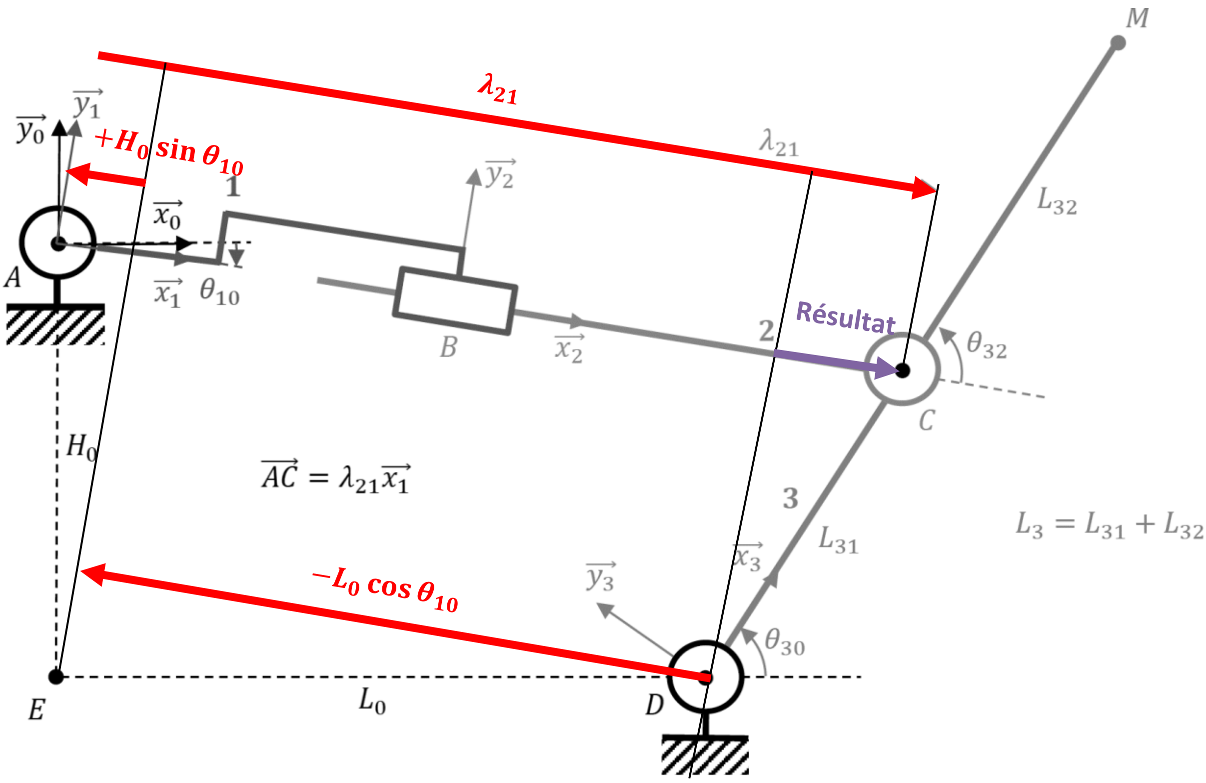
$$L_{31}{}^2 = (\lambda_{21} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10})^2 + (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2$$

$$(\lambda_{21} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10})^2 = L_{31}{}^2 - (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2$$

Avant de passer à la racine, il faudrait discuter du signe de $L_{31}{}^2 - (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2$…

$$\lambda_{21} - L_0\cos\theta_{10} + H_0\sin\theta_{10} = \pm\sqrt{L_{31}{}^2 - (L_0\sin\theta_{10} + H_0\cos\theta_{10})^2}$$

Solution après avoir regardé le signe de $\lambda_{21} - L_0 \cos\theta_{10} + H_0 \sin\theta_{10}$ (λ_{21} moins la projection de AD sur AC – Attention, $H_0 \sin\theta_{10} < 0$ sur le schéma) :



$$\lambda_{21} - L_0 \cos\theta_{10} + H_0 \sin\theta_{10} = \sqrt{{L_{31}}^2 - (L_0 \sin\theta_{10} + H_0 \cos\theta_{10})^2}$$

$$\boxed{\lambda_{21} = L_0 \cos\theta_{10} - H_0 \sin\theta_{10} + \sqrt{{L_{31}}^2 - (L_0 \sin\theta_{10} + H_0 \cos\theta_{10})^2}}$$

Etude cinématique

Question 6: Proposer les 4 torseurs cinématiques des liaisons du mécanismes, et réalisez les choix de points et bases qui seront utiles pour la suite

$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{10} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{03} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{32} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$

Question 7: Etablir les 2 équations vectorielles de la fermeture cinématique du système en C

$$\{\mathcal{V}_{10}\} + \{\mathcal{V}_{04}\} + \{\mathcal{V}_{43}\} + \{\mathcal{V}_{32}\} + \{\mathcal{V}_{21}\} = \{0\}$$

$\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} R_{10}\vec{z_0} \\ \lambda_{21}R_{10}\vec{y_1} \end{Bmatrix}_C$	$\vec{V}(C,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}}$ $= -\lambda_{21}\vec{x_1} \wedge R_{10}\vec{z_1}$ $= \lambda_{21}R_{10}\vec{y_1}$
$\{\mathcal{V}_{03}\} = \begin{Bmatrix} R_{03}\vec{z_0} \\ L_{31}R_{03}\vec{y_3} \end{Bmatrix}_C$	$\vec{V}(C,0/3) = \vec{V}(D,0/3) + \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{\Omega_{03}}$ $= -L_{31}\vec{x_3} \wedge R_{03}\vec{z_3}$ $= L_{31}R_{03}\vec{y_3}$
$\{\mathcal{V}_{32}\} = \begin{Bmatrix} R_{32}\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$	
$\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ U_{21}\vec{x_1} \end{Bmatrix}_C$	

$$\begin{cases} (R_{10} + R_{03} + R_{32})\vec{z_0} = \vec{0} \\ \lambda_{21}R_{10}\vec{y_1} + L_{31}R_{03}\vec{y_3} + U_{21}\vec{x_1} = \vec{0} \end{cases}$$

Question 8: Etablir les 3 équations de la fermeture cinématique du système dans $\mathfrak{B}_1$

$$\boxed{\begin{cases} R_{10} + R_{03} + R_{32} = 0 \\ U_{21} - L_{31}R_{03}\sin\theta_{32} = 0 \\ \lambda_{21}R_{10} + L_{31}R_{03}\cos\theta_{32} = 0 \end{cases}}$$

Question 9: Déterminer R_{40} en fonction de l'unique inconnue cinématique R_{21} et des paramètres géométriques

$$U_{21} - L_{31} R_{03} \sin\theta_{32} = 0$$
$$R_{03} = \frac{1}{L_{31}} \frac{1}{\sin\theta_{32}} U_{21}$$
$$\boxed{R_{30} = -\frac{1}{L_{31}} \frac{1}{\sin\theta_{32}} U_{21}}$$

Question 10: Exprimer R_{30} en fonction de l'unique inconnue cinématique U_{21}, de l'unique paramètre géométrique variable θ_{30} et des constantes

$$\theta_{32} = \theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)$$

$$\boxed{R_{30} = -\frac{1}{L_{31}} \frac{1}{\sin\left(\theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)\right)} U_{21}}$$

Question 11: Exprimer finalement $\vec{V}(M,3/0)$ en fonction de l'unique inconnue cinématique U_{21} et du seul paramètre géométrique variable θ_{30} et des constantes, le tout projeté dans la base 0

On peut exprimer cette vitesse de deux manières différentes :

- Chemin 30
- Chemin 3210

Le premier semble évident, mais si vous n'aviez pas fait toute l'étude précédente, vous pourriez bien prendre le chemin 3210 pour faire apparaître U_{21}. Toutefois, vous feriez aussi apparaître R_{21} et R_{10}

Chemin 30 attendu :

$$\vec{V}(M,3/0) = \vec{V}(D,3/0) + \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{\Omega_{30}}$$
$$\vec{V}(M,3/0) = \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{\Omega_{30}} = -L_3\overrightarrow{x_3} \wedge R_{30}\overrightarrow{z_3} = L_3 R_{30}\overrightarrow{y_3}$$
$$\vec{V}(M,3/0) = -\frac{L_3}{L_{31}} \frac{1}{\sin\left(\theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)\right)} U_{21}\overrightarrow{y_3}$$

$$\vec{V}(M,3/0) = -\frac{L_3}{L_{31}} \frac{1}{\sin\left(\theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)\right)} U_{21} \begin{pmatrix} -\sin\theta_{30} \\ \cos\theta_{30} \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

Chemin 3210 (juste pour en discuter ensemble):

$$\vec{V}(M,3/0)=\vec{V}(M,3/2)+\vec{V}(M,2/1)+\vec{V}(M,1/0)$$
$$\vec{V}(M,3/2)=\vec{V}(C,3/0)+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{\Omega_{32}}=-L_{32}\overrightarrow{x_3}\wedge R_{32}\overrightarrow{z_3}=L_{32}R_{32}\overrightarrow{y_3}$$
$$\vec{V}(M,2/1)=U_{21}\overrightarrow{x_1}$$
$$\vec{V}(M,1/0)=\vec{V}(A,1/0)+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{\Omega_{10}}=-L_{32}\overrightarrow{x_3}\wedge R_{10}\overrightarrow{z_0}-\lambda_{21}\overrightarrow{x_1}\wedge R_{10}\overrightarrow{z_0}=L_{32}\overrightarrow{y_3}R_{10}+\lambda_{21}R_{10}\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{V}(M,3/0)=L_{32}R_{32}\overrightarrow{y_3}+U_{21}\overrightarrow{x_1}+L_{32}\overrightarrow{y_3}R_{10}+\lambda_{21}R_{10}\overrightarrow{y_1}$$
$$\vec{V}(M,3/0)=L_{32}(R_{32}+R_{10})\overrightarrow{y_3}+U_{21}\overrightarrow{x_1}+\lambda_{21}R_{10}\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{V}(M,3/0)=L_{32}(R_{32}+R_{10})\begin{pmatrix}-\sin\theta_{30}\\ \cos\theta_{30}\\ 0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}+U_{21}\begin{pmatrix}\cos\theta_{10}\\ \sin\theta_{10}\\ 0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}+\lambda_{21}R_{10}\begin{pmatrix}-\sin\theta_{10}\\ \cos\theta_{10}\\ 0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$
$$\vec{V}(M,3/0)=\begin{pmatrix}-L_{32}(R_{32}+R_{10})\sin\theta_{30}+U_{21}\cos\theta_{10}-\lambda_{21}R_{10}\sin\theta_{10}\\ L_{32}(R_{32}+R_{10})\cos\theta_{30}+U_{21}\sin\theta_{10}+\lambda_{21}R_{10}\cos\theta_{10}\\ 0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$
$$\vec{V}(M,3/0)=\begin{pmatrix}-L_{32}(R_{32}+R_{10})\sin\theta_{30}+U_{21}\cos\theta_{10}-\lambda_{21}R_{10}\sin\theta_{10}\\ L_{32}(R_{32}+R_{10})\cos\theta_{30}+U_{21}\sin\theta_{10}+\lambda_{21}R_{10}\cos\theta_{10}\\ 0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

Il reste encore à exprimer R_{32} et R_{10} en fonction de U_{21} à l'aide des équations cinématiques et l'angle θ_{10} qui apparait dans la projection en fonction de θ_{30} (déjà fait)

$$R_{10}=\frac{L_{31}}{\lambda_{21}}\cos\theta_{32}\,R_{30}=-\frac{L_{31}}{\lambda_{21}}\cos\theta_{32}\frac{1}{L_{31}}\frac{1}{\sin\theta_{32}}U_{21}=-\frac{1}{\lambda_{21}}\frac{\cos\theta_{32}}{\sin\theta_{32}}U_{21}$$
$$R_{32}+R_{10}=R_{30}=-\frac{1}{L_{31}}\frac{1}{\sin\theta_{32}}U_{21}$$
$$\theta_{10}=\tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30}-H_0}{L_{31}\cos\theta_{30}+L_0}\right)$$

Soit :

$$\vec{V}(M,3/0)$$
$$=U_{21}\begin{pmatrix}L_{32}\frac{L_{32}}{L_{31}}\frac{\sin\theta_{30}}{\sin\theta_{32}}+\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30}-H_0}{L_{31}\cos\theta_{30}+L_0}\right)\right)+\lambda_{21}\frac{1}{\lambda_{21}}\frac{\cos\theta_{32}}{\sin\theta_{32}}\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30}-H_0}{L_{31}\cos\theta_{30}+L_0}\right)\right)\\ -\frac{L_{32}}{L_{31}}\frac{\cos\theta_{30}}{\sin\theta_{32}}+\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30}-H_0}{L_{31}\cos\theta_{30}+L_0}\right)\right)-\lambda_{21}\frac{1}{\lambda_{21}}\frac{\cos\theta_{32}}{\sin\theta_{32}}\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30}-H_0}{L_{31}\cos\theta_{30}+L_0}\right)\right)\\ 0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

Oui, ce n'est clairement pas ce qui était attendu, ce vecteur est égal à celui que l'on a eu avant :

$$-\frac{L_3}{L_{31}}\frac{1}{\sin\left(\theta_{30}-\tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30}-H_0}{L_{31}\cos\theta_{30}+L_0}\right)\right)}U_{21}\begin{pmatrix}-\sin\theta_{30}\\ \cos\theta_{30}\\ 0\end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$$

Difficile à croite, seule une application numérique peut vous le prouver !

Etude statique par stratégie d'isolements

Question 12: Justifier le fait que $\overrightarrow{R_{23}} = R_{23}\overrightarrow{x_2}$

L'ensemble 1+2 est soumis à 2 glisseurs…

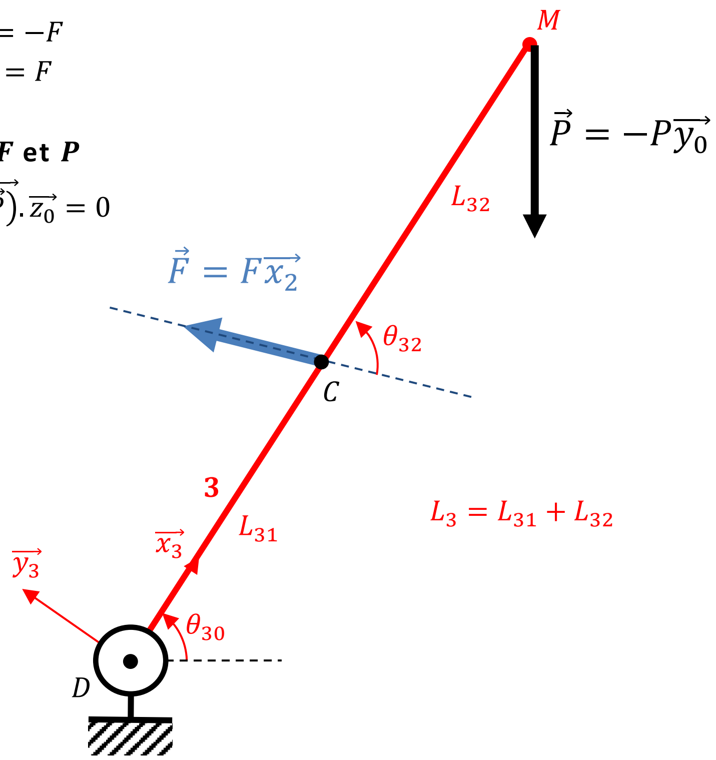
Question 13: Justifier le fait que $R_{23} = F$

On isole 2 : TRS sur $\overrightarrow{x_1}$: $F + R_{32} = 0$

$$R_{32} = -F$$
$$R_{23} = F$$

Question 14: En déduire la relation entre F et P

On isole 3 : TMS en D sur $\overrightarrow{z_0}$: $\overrightarrow{M_D(\overrightarrow{R_{23}})}.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{M_D(\vec{P})}.\overrightarrow{z_0} = 0$



$$\overrightarrow{M_D(\overrightarrow{R_{23}})}.\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{M_D(\vec{P})}.\overrightarrow{z_0} = 0$$

$$\overrightarrow{DC}\wedge(F\overrightarrow{x_2}).\overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{DM}\wedge(-P\overrightarrow{y_0}).\overrightarrow{z_0} = 0$$

$$[L_{31}\overrightarrow{x_3}\wedge(F\overrightarrow{x_2})].\overrightarrow{z_0} + [L_3\overrightarrow{x_3}\wedge(-P\overrightarrow{y_0})].\overrightarrow{z_0} = 0$$

$$FL_{31}\sin(\widehat{\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{x_2}}) - PL_3\sin(\widehat{\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{y_0}}) = 0$$

$$FL_{31}\sin\theta_{23} - PL_3\sin\left(\theta_{03} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$FL_{31}\sin\theta_{23} - PL_3\cos\theta_{03} = 0$$

$$-FL_{31}\sin\theta_{32} - PL_3\cos\theta_{30} = 0$$

$$\boxed{F = -\frac{L_3}{L_{31}}\frac{\cos\theta_{30}}{\sin\theta_{32}}P}$$

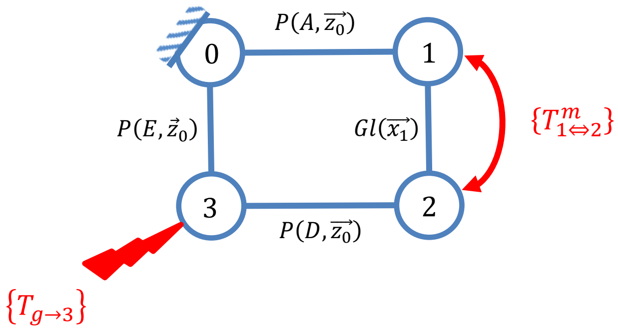
Question 15: Exprimer F en fonction de P, de l'unique paramètre géométrique variable θ_{30} et des constantes

$$\theta_{32} = \theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)$$

$$\boxed{F = -\frac{L_3}{L_{31}}\frac{\cos\theta_{30}}{\sin\left(\theta_{30} - \tan^{-1}\left(\frac{L_{31}\sin\theta_{30} - H_0}{L_{31}\cos\theta_{30} + L_0}\right)\right)}P}$$

Etude statique complète

Question 16: Etablir le graphe des liaisons du système



Question 17: Donner les torseurs $\{T_{ji}\}$ des actions dans toutes les liaisons

01	12	23	30
$\{T_{01}\}$ $\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{12}\}$ $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{23}\}$ $\begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_1}$	$\{T_{30}\}$ $\begin{Bmatrix} X_{30} & 0 \\ Y_{30} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_E^{\mathfrak{B}_1}$

Question 18: Faire le bilan du nombre d'équations et d'inconnues du problème plan afin de vérifier qu'il est solvable

$$m^{2D} = 1\,;E_S^{2D} = 3(P-1) = 9\,;\,I_S^{2D} = 2+2+2+2 = 8$$
$$h^{2D} = m^{2D} + I_S^{2D} - E_S^{2D} = 1+8-9 = 0$$

$\Rightarrow$ Le mécanisme est statiquement solvable en plan

Question 19: Appliquer le PFS au solide 1 en A dans la base $\mathfrak{B}_1$ et en déduire un système de 3 équations

On isole la pièce 1 et on applique le PFS dans le référentiel terrestre supposé Galiléen

$$\{\mathcal{T}_{01}\} + \{\mathcal{T}_{21}\} + \{\mathcal{T}_{2\to 1}^{m}\} = \{0\}$$
$$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & N_{21} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} = \{0\}$$

Au point A		
$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_1} + Y_{01}\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & N_{21} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} Y_{21}\overrightarrow{y_1} \\ N_{21}\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_A$
$\begin{Bmatrix} -F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} -F\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$

$$\begin{Bmatrix} X_{01}\overrightarrow{x_1} + Y_{01}\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} Y_{21}\overrightarrow{y_1} \\ N_{21}\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -F\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$
$$\begin{cases} (X_{01} - F)\overrightarrow{x_1} + (Y_{01} + Y_{21})\overrightarrow{y_1} = \vec{0} \\ N_{21}\overrightarrow{z_1} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection dans $\mathfrak{B}_1$

$$\boxed{\begin{cases} X_{01} - F = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} = 0 \\ N_{21} = 0 \end{cases}}$$

Question 20: Appliquer le PFS au solide 2 en A dans la base $\mathfrak{B}_1$ et en déduire un système de 3 équations

On isole la pièce 2 et on applique le PFS dans le référentiel terrestre supposé Galiléen

$$\{\mathcal{T}_{12}\} + \{\mathcal{T}_{32}\} + \{\mathcal{T}_{1\to2}^{m}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} = \{0\}$$

Au point A		
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} Y_{12}\overrightarrow{y_1} \\ N_{12}\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_A$
$\begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_1}$	$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_D}(\vec{F}) + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{R_{43}}$ $= \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{bmatrix} X_{32} \\ Y_{32} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_{21}Y_{32} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$	$\begin{Bmatrix} X_{32}\overrightarrow{x_1} + Y_{32}\overrightarrow{y_1} \\ \lambda_{21}Y_{32}\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_A$
$\begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} F\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$

$$\begin{Bmatrix} Y_{12}\overrightarrow{y_1} \\ N_{12}\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_{32}\overrightarrow{x_1} + Y_{32}\overrightarrow{y_1} \\ \lambda_{21}Y_{32}\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} F\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} (X_{32} + F_m)\overrightarrow{x_1} + (Y_{12} + Y_{32})\overrightarrow{y_1} = \vec{0} \\ (N_{12} + \lambda_{21}Y_{32})\overrightarrow{z_1} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection dans $\mathfrak{B}_1$

$$\boxed{\begin{cases} X_{32} + F = 0 \\ Y_{12} + Y_{32} = 0 \\ N_{12} + \lambda_{21}Y_{32} = 0 \end{cases}}$$

Question 21: Appliquer le PFS au solide 3 en E dans la base $\mathfrak{B}_1$ et en déduire un système de 3 équations

On isole la pièce 3 et on applique le PFS dans le référentiel terrestre supposé Galiléen

$$\{\mathcal{T}_{23}\} + \{\mathcal{T}_{03}\} + \{T_{g\to 3}\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ Y_{03} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_E^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} = \{0\}$$

Au point E		
$\begin{Bmatrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_1}$	$\overrightarrow{M_E}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_D}(\vec{F}) + \overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{R_{23}}$ $= \begin{bmatrix} L_{31} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_4} \wedge \begin{bmatrix} X_{23} \\ Y_{23} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{31}\cos\theta_{32} Y_{23} - L_{31}\sin\theta_{32} X_{23} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $\theta_{32} = \theta_{30} + \theta_{01}$	$\begin{Bmatrix} X_{23}\overrightarrow{x_1} + Y_{23}\overrightarrow{y_1} \\ (L_{31}\cos\theta_{32} Y_{23} - L_{31}\sin\theta_{32} X_{23})\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_E$
$\begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ Y_{03} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_E^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} X_{03}\overrightarrow{x_1} + Y_{03}\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$	$\overrightarrow{M_E}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_M}(\vec{F}) + \overrightarrow{EM} \wedge \vec{P}$ $= \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_3} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} L_3\cos\theta_{30} \\ L_3\sin\theta_{30} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -PL_3\cos\theta_{30} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$	$\begin{Bmatrix} -P\overrightarrow{y_0} \\ -PL_3\cos\theta_{30}\,\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_E$

$$\begin{Bmatrix} X_{23}\overrightarrow{x_1} + Y_{23}\overrightarrow{y_1} \\ (L_{31}\cos\theta_{32} Y_{23} - L_{31}\sin\theta_{32} X_{23})\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_E + \begin{Bmatrix} X_{03}\overrightarrow{x_1} + Y_{03}\overrightarrow{y_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E + \begin{Bmatrix} -P\overrightarrow{y_0} \\ -PL_3\cos\theta_{30}\,\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_E = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} (X_{23} + X_{03})\overrightarrow{x_1} + (Y_{23} + Y_{03})\overrightarrow{y_1} - P\overrightarrow{y_0} = \vec{0} \\ (L_{31}\cos\theta_{32} Y_{23} - L_{31}\sin\theta_{32} X_{23})\overrightarrow{z_1} - PL_3\cos\theta_{30}\,\overrightarrow{z_0} = \vec{0} \end{cases}$$

Projection dans $\mathfrak{B}_1$

$$\begin{cases} (X_{23} + X_{03} + P\sin\theta_{01})\overrightarrow{x_1} + (Y_{23} + Y_{03} - P\cos\theta_{01})\overrightarrow{y_1} = \vec{0} \\ (L_{31}\cos\theta_{32} Y_{23} - L_{31}\sin\theta_{32} X_{23} - PL_3\cos\theta_{30})\overrightarrow{z_1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} X_{23} + X_{03} + P\sin\theta_{01} = 0 \\ Y_{23} + Y_{03} - P\cos\theta_{01} = 0 \\ L_{31}\cos\theta_{32} Y_{23} - L_{31}\sin\theta_{32} X_{23} - PL_3\cos\theta_{30} = 0 \end{cases}}$$

Question 22: Récapituler les 9 équations statiques du mécanisme en faisant apparaître en rouge les données et en bleu les actions inconnues de liaison

$$\begin{cases} X_{01} - F = 0 \\ Y_{01} + Y_{21} = 0 \\ N_{21} = 0 \\ X_{32} + F = 0 \\ Y_{12} + Y_{32} = 0 \\ N_{12} + \lambda_{21} Y_{32} = 0 \\ X_{23} + X_{03} + P \sin\theta_{01} = 0 \\ Y_{23} + Y_{03} - P \cos\theta_{01} = 0 \\ L_{31}\cos\theta_{32}\, Y_{23} - L_{31}\sin\theta_{32}\, X_{23} - P L_3 \cos\theta_{30} = 0 \end{cases}$$

Question 23: Résoudre le système afin d'exprimer toutes les inconnues de liaison en fonction de l'effort F ainsi que la relation liant F et P

$$\begin{cases} X_{01} = F \\ Y_{01} = 0 \\ N_{21} = 0 \\ X_{32} = -F \\ Y_{12} = 0 \\ Y_{32} = 0 \\ X_{03} = -P \sin\theta_{01} - F \\ Y_{03} = P \cos\theta_{01} \\ -L_{31}\sin\theta_{32}\, F - P L_3 \cos\theta_{30} = 0 \end{cases}$$

Il reste l'équation suivante, dans laquelle tout est connu :

$$-L_{31}\sin\theta_{32}\, F - P L_3 \cos\theta_{30} = 0$$

Question 24: En déduire $F = f(P)$

$$F = -P \frac{L_3}{L_{31}} \frac{\cos\theta_{30}}{\sin\theta_{32}}$$

$$\boxed{F = -P \frac{L_3}{L_{31}} \frac{\cos\theta_{30}}{\sin\theta_{32}}}$$

Etude dynamique (5/2)

Question 25: Retrouver la relation statique entrée/sortie à l'aide du TEC et de la relation cinématique entrée/sortie

$$\{\mathcal{V}_{21}\}\{\mathcal{T}_{1\to 2}^{m}\} + \{\mathcal{T}_{ext\to 3}\}\{\mathcal{V}_{30}\} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1} \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{30} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_1} = 0$$

$$\overrightarrow{M_E(\vec{P})} = \overrightarrow{EM} \wedge (-P\overrightarrow{y_0}) = L_3\overrightarrow{x_3} \wedge (-P\overrightarrow{y_0}) = -PL_3 \sin(\widehat{\overrightarrow{x_3}\wedge\overrightarrow{y_0}}) = -PL_3 \sin\left(\theta_{03} + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{z_0}$$
$$= -PL_3 \cos\theta_{03}\,\overrightarrow{z_0} = -PL_3 \cos\theta_{30}\,\overrightarrow{z_0}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & U_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1} \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & -PL_3\cos\theta_{30} \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{30} & 0 \end{Bmatrix}_D^{\mathfrak{B}_0} = 0$$

Soit :

$$U_{21}F - PL_3\cos\theta_{30}\,R_{30} = 0$$

$$F = PL_3\cos\theta_{30}\frac{R_{30}}{U_{21}}$$

Or :

$$R_{30} = -\frac{1}{L_{31}}\frac{1}{\sin\theta_{32}}U_{21}$$

Soit :

$$\boxed{F = -\frac{L_3}{L_{31}}\frac{\cos\theta_{30}}{\sin\theta_{32}}P}$$