Les matrices de rang 1

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $p = n$, $M_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $M_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \dots, C_n(A)$ les colonnes de A, ce sont des éléments de $M_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \dots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\mathbf{rg}A$, on note aussi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

Partie I

1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Montrer que
$$\mathbf{rg}A = \dim(\mathrm{Im} f_A).$$
3. Soient U et V deux éléments non nuls de $M_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \dots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \dots, v_n$ celles de V. On pose $A = U{}^tV$.
   (a) Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, exprimer le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k.
   (b) Que vaut la trace de A?
   (c) Exprimer les colonnes $C_1(A), \dots, C_n(A)$, de A, à l'aide de $v_1, \dots, v_n$ et U.
   (d) On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.
4. On considère ici une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
   (b) Justifier que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.
   (c) En déduire que $A = X{}^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
   (d) On suppose que $A = X_0\,{}^tY_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1\,{}^tY_1$.
5. Expliciter les éléments U et V de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = U{}^tV$ où A désigne la matrice carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Partie II

Soit $A = U{}^tV$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV)U$.

1. Calculer A^2 en fonction du réel α et de A.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; calculer A^k en fonction du réel α et de A.
3. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente?
4. On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ, réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'une projection c'est à dire $(\lambda A)^2 = \lambda A$.
5. (a) Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVY = 0\}$. Quelle est sa dimension?
   (b) On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

(c) Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A.

6. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

   Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $M_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $0, \ldots, 0, \alpha$ pris dans cet ordre.

7. On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

   (a) A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$?

   (b) Montrer que $U \in \mathrm{Ker} f$ et justifier l'existence d'une base de $\mathrm{Ker} f$ de la forme $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W)$.

   (c) Montrer que $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.

   (d) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Les matrices de rang 1

Partie I

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Les deux colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc $\mathbf{rg}A = 2$.

2. Notons par $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, on sait que $(f_A(e_1) = C_1, \cdots, f_A(e_n) = C_n)$ est une famille géneratrice de $\mathrm{Im} f_A$, d'où $\dim \mathrm{Im} f_A = \dim \mathbf{Vect}(C_1, \cdots, C_n) = \mathbf{rg}A$.

3. (a) $A = U^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & \cdots & u_nv_n \end{pmatrix}$, donc $a_{i,j} = u_iv_j$

   (b) $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$.

   (c) Les colonnes de A sont $C_1 = v_1U, \cdots, C_n = v_nU$.

   (d) les colonnes de A ne sont pas toutes nulles donc, $rgA \geqslant 1$, d'autre part elles sont toutes proportionnelles à U donc $\mathbf{rg}A = 1$.

4. (a) $\mathbf{rg}A \neq 0$, donc au moins une colonnes $C_{i_0} \neq 0$.

   (b) $\dim \mathbf{Vect}(C_1, \cdots, C_n) = \mathbf{rg}A = 1$, donc toutes les colonnes sont proportionnelles.

   (c) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a: $a_{i,j}$ est le i éme coéfficient de $C_j = \lambda_j X$, donc $a_{i,j} = \lambda_j x_i$, d'où $A = X^tY$ avec $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ non nul.

   (d) $A = X_0^tY_0 = X_1^tY_1 \Longrightarrow X_0^tY_0Y_0 = X_1^tY_1Y_0 \Longrightarrow \alpha X_0 = \beta X_1$ où $\alpha =^t Y_0Y_0$ et $\beta =^t Y_1Y_1$ des réels non nuls, donc $X_1 = \lambda X_0$ et $Y_1 = \lambda Y_0$.

5. $\mathbf{rg}A = r \Longrightarrow A$ est semblable à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, donc $\exists P, Q$ inversible telles que $A = PJ_rQ$, or $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$, avec $\mathbf{rg}E_{i,i} = 1$, donc $A = \sum_{i=1}^{r} PE_{i,i}Q$ avec $\mathbf{rg}PE_{i,i}Q = 1$.

Partie II

1. $A^2 = U^tVU^tV = U\alpha^tV = \alpha U^tV = \alpha A$.

2. $A^k = \alpha^{k-1}A$, par récurrence simple.

3. A nilpotente si, et seulement si, $\exists p \in \mathbb{N}^* \mid A^p = 0$, or $A^p = \alpha^{p-1}A$ (récurrence simple), la condition necessaire et suffisante pour A soit nilpotente est donc $\alpha = 0$.

4. A n'est pas nilpotente donc $\alpha \neq 0$, d'où $(\lambda A)^2 = \lambda^2 A^2 = \lambda^2 \alpha A$. Pour que λA soit un projecteur il faut et il suffit que $(\lambda A)^2 = \lambda A$, donc $\lambda = \frac{1}{\alpha}$.

5. (a) $\mathbf{rg}A = 1 \neq n$, donc $A = A - 0.I_n$ n'est pas inversible, d'où 0 est une valeur propre dont le sous-espace propore est $\mathrm{Ker}A$, avec $Y \in \mathrm{Ker}A si, et seulement si, AY = U \underbrace{{}^tVY}_{\text{scalaire}} = ({}^tVY)U = 0 si, et seulement si,^t VY = 0$.

   D'après la formule du rang on a $\dim \mathrm{Ker}A = n - 1$.

LES MATRICES DE RANG 1

(b) $AU = U \underbrace{{}^tVU}_{\text{scalaire}} = ({}^tVU)U = \alpha U$, donc α est une autre valeur propre de A, dont U est un vecteur propre associé. Le sous espace propre associé est $\text{Ker}(A - \alpha I_n)$ qui forme avec l'autre sous-espace propre à savoir $\text{Ker}A$ une somme directe dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, or $\dim \text{Ker}A = n-1, \dim M_{n,1}(\mathbb{R}) = n$, donc $\text{Ker}(A - \alpha I_n)$ est de dimension 1, engendré par U.

(c) Les seules valeurs propres de A sont $0,\alpha$. Il y'en a deux si $\alpha \neq 0$ et une seule quand $\alpha = 0$.

6. Si $\alpha \neq 0$ les sous-espaces propres de A sont supplementaires dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable et donc semblable à la matrice $diag(0, \cdots, 0, \alpha)$ car $\dim \text{Ker}A = n-1$ et $\dim \text{Ker}(A - \alpha I_n) = 1$.

7. (a) A n'est pas diagonalisable, car elle est non nulle et admet 0 comme unique valeur propre.

(b) on a d'aprés Partie II, 4,b) $AU = \alpha U = 0$, donc $U \in \text{Ker}f$, donc $W = \lambda U \in \text{Ker}f$, qu'on complète par $(E_1, \cdots, E_{n-2})$ pour avoir $(E_1, \cdots, E_{n-2}, W)$ base de $\text{Ker}f$.

(c) **Card**$\mathcal{B}$ où $\mathcal{B} = \{E_1, \cdots, E_{n-2}, U, V\} = n = \dim M_{n,1}(\mathbb{R})$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre, en effet supposons que $\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_{n-2}E_{n-2} + \lambda_{n-1}W + \lambda_n V = 0$, on multiplie par A à gauche vu $E_1, \cdots, E_{n-2}, W \in \text{Ker}f = \text{Ker}A$, donc $0 = \lambda_n AV = \lambda U \underbrace{{}^tVV}_{\text{scalaire non nul}}$, or $W \neq 0$, donc $\lambda_n = 0$, d'où $\lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_{n-2}E_{n-2} + \lambda_{n-1}W = 0$, or la famille $(E_1, \cdots, E_{n-2}, W)$ est libre car base de $\text{Ker}f$, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
on a $f(E_1) = \cdots = f(E_{n-1}) = f(W) = 0$ car $(E_1, \cdots, E_{n-2}, W)$ base de $\text{Ker}f$, d'autre part $f(V) = AV = {}^tVVU = W$, donc $\underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J$ qui est semblable à $A = \underset{\mathcal{B}_0}{\text{Mat}}(f)$, où $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

(d) D'aprés la question précédente toute matrice de rang 1 est de trace nulle est semblable à J, dont toutes ces matrices sont semblables entre elles.