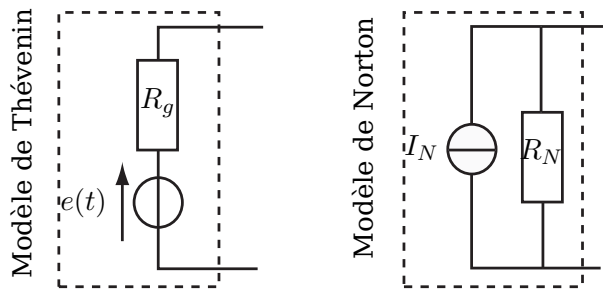


## Première partie

### Étude de filtres passifs

#### 1.1. Modélisation linéaire d'un circuit

##### 1.1.1. Modélisation de Norton



▷ Courant électromoteur :

$$I_N(t) = \frac{e(t)}{R_g}$$

▷ Résistance interne :

$$R_N = R_g$$

##### 1.1.2. Condition initiales

$$i(0^-) = 0$$

$$u_R(0^-) = 0$$

et

$$u_C(0^-) = E$$

##### 1.1.3. Équation différentielle

Loi des mailles :  $u_C(t) + (R + R_g)i(t) = 0$  et  $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$  donnent :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0$$

avec

$$\tau = (R + R_g)C$$

(1)

##### 1.1.4. Condition initiale

De la loi des mailles à  $t = 0^+$ , on a :  $u_C(0^+) + (R + R_g)i(0^+) = 0$

De la continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a :  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = E$  (). On en déduit :

$$i(0^+) = -\frac{E}{R + R_g}$$

(2)

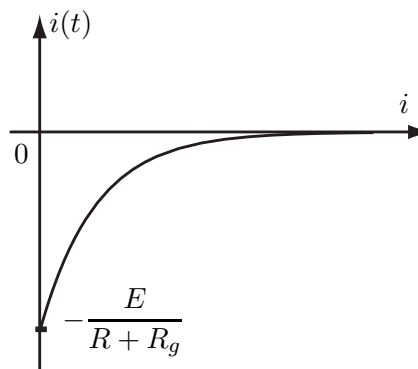
##### 1.1.5. Expression de $i(t)$

▷ La solution de l'équation (1) :

$$i(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

▷ La condition initiale  $i(0^+)$  est donnée par la relation (2) :

$$i(t) = -\frac{E}{R + R_g} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



### 1.1.6.

1.1.6.1. L'impédance de charge du générateur est :  $\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}$ . Son module est

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}}. \text{ Donc :}$$

$$Z_{\min} = R$$

Le **générateur** peut être supposé comme **idéale** ( $\forall \omega$ ) si  $R_g \ll R$ , soit pour :

$$R > 500 \Omega$$

1.1.6.2. La fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Le filtre est un Passe-bas.

La pulsation de coupure  $\omega_c$  à  $-3 \text{ dB}$  est telle que  $H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$ , soit :

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

1.1.6.3. Ce filtre se comporte comme un intégrateur dans le domaine des hautes fréquences ( $\omega \gg \frac{1}{RC}$ ).

## 1.2. Étude d'un filtre du second ordre : filtre de Wien

1.2.1. Fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1} = \frac{R // \underline{Z}_c}{R // \underline{Z}_c + R + \underline{Z}_c} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_c = \frac{1}{jC\omega}$$

$$=_{ee}$$

soit :

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec  $x = RC\omega$ .

L'amplification maximale :  $H_{\max} = \frac{1}{3}$ .

Facteur de qualité :  $Q = \frac{1}{3}$ .

Pulsations de coupures :  $H(x_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$  soit  $x_c^2 \pm 3x_c + 1 = 0$  :

$$\omega_{c1} = 0,3 RC \quad \text{et} \quad \omega_{c2} = 3,3 RC$$

### 1.2.2. Diagramme de Bode

Le gain en dB :  $G_{dB}(\omega) = 20\log H(\omega)$  et La phase en rad :  $\phi = \arg[\underline{H}(j\omega)]$

- Domaine des basses fréquences :  $\omega \ll \omega_o$  ou  $x \ll 1$

$$\underline{H}(j\omega) \rightarrow j \frac{H_o}{Q} \left( \frac{\omega}{\omega_o} \right) = jx$$

$$G_{dB}(\omega)_{BF} \rightarrow 20\log \frac{|H_o|}{Q} + 20\log \left( \frac{\omega}{\omega_o} \right) = +20\log(x)$$

$$\phi = \arg(jx) \rightarrow +\frac{\pi}{2}.$$

$G_{dB}(\omega)$  est, donc, une droite de pente  $+20\text{ dB}$  par décade et  $\phi = +\frac{\pi}{2}$  est l'asymptote à la phase en basses fréquences.

- Domaine des hautes fréquences :  $\omega \gg \omega_o$  ou  $x \gg 1$

$$\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j \frac{H_o}{Q} \left( \frac{\omega_o}{\omega} \right) = -\frac{j}{x}$$

$$G_{dB}(\omega)_{HF} \rightarrow 20\log \frac{|H_o|}{Q} - 20\log \left( \frac{\omega}{\omega_o} \right) = -20\log(x)$$

$$\phi = \arg\left(\frac{j}{x}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

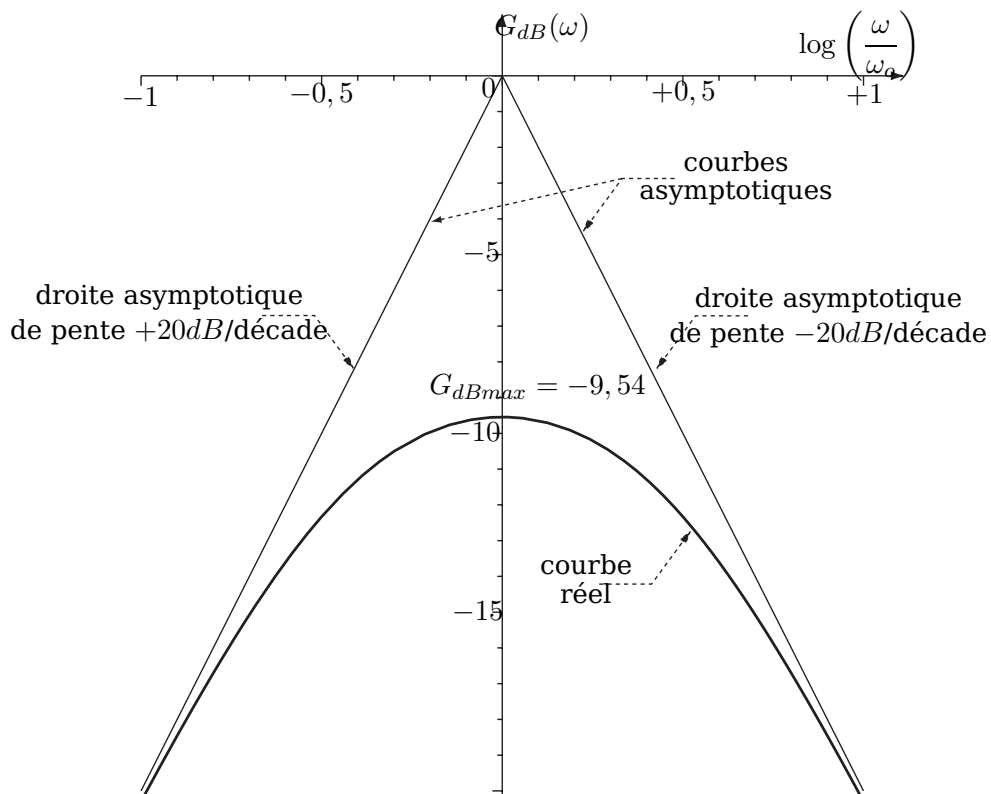
$G_{dB}(\omega)$  est, donc, une droite de pente  $-20\text{ dB}$  par décade et  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  est l'asymptote à la phase en hautes fréquences.

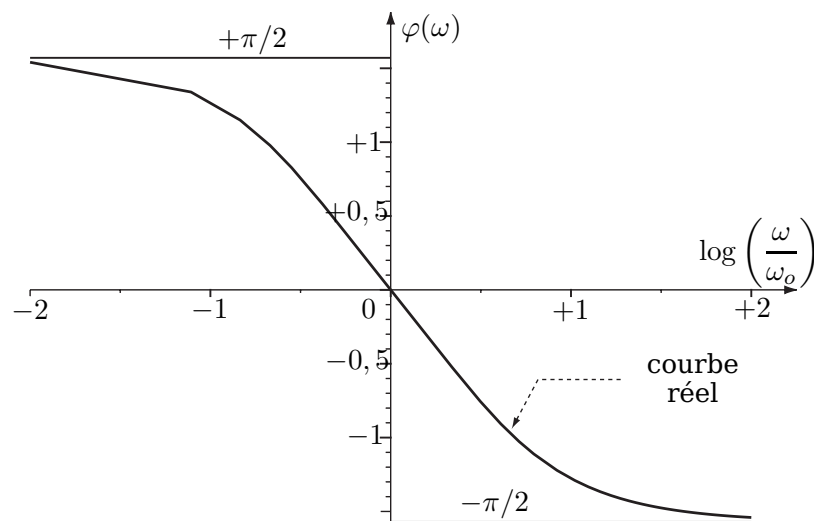
- Point d'intersection entre les deux droites asymptotiques :

$$G_{dB}(\omega)_{BF} = G_{dB}(\omega)_{HF} \Leftrightarrow \omega = \omega_o \text{ ou } : x = 1 \text{ soit : } G_{dB}(\omega) = 0 \text{ et : } \phi(\omega) = 0$$

- Le gain, en décibel, maximal :  $G_{dBmax} = 20\log|H_o| = -9,54$

#### ■ Diagramme de Bode : **gain**



■ Diagramme de Bode : **phase****1.2.3. Équation différentielle**

On a :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

soit :

$$\begin{aligned} 3\underline{v}_2 + jRC\omega\underline{v}_2 + \frac{1}{jRC\omega}\underline{v}_2 &= \underline{v}_1 \\ 3jRC\omega\underline{v}_2 - R^2C^2\omega^2\underline{v}_2 + \underline{v}_2 &= jRC\omega\underline{v}_1 \end{aligned}$$

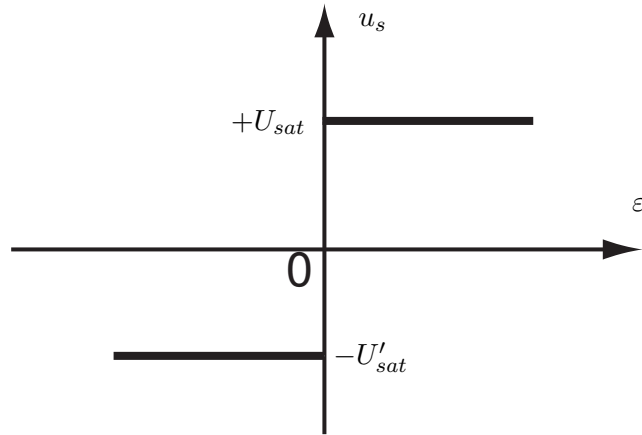
On passe à l'espace temporel :

$$\begin{aligned} R^2C^2\frac{d^2v_2}{dt^2} + 3RC\frac{dv_2}{dt} + v_2 &= RC\frac{dv_1}{dt} \\ \frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}v_2 &= \frac{1}{RC}\frac{dv_1}{dt} \\ \frac{d^2v_2}{dt^2} + a\omega_o\frac{dv_2}{dt} + \omega_o^2v_2 &= \omega_o\frac{dv_1}{dt} \end{aligned}$$

avec :

$$\boxed{a = 3} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_o = \frac{1}{RC}}$$

**Deuxième partie****Étude d'un montage à base de l'amplificateur opérationnel****2.1. Modèle d'amplificateur opérationnel idéal****2.1.1. Caractéristique**



### 2.1.2.

- ▷ Régime linéaire :  $\varepsilon = 0$  et  $u_s = 0$ .
- ▷ Régime Saturé :  $\varepsilon \neq 0$  et  $u_s = -U'_{sat}$  ou  $u_s = +U_{sat}$ .

### 2.1.3. Résistance d'entrée

$$R_e = \frac{v_e}{i_e} = \frac{v_e}{i^+} = \infty \quad (\text{car } i^+ = 0, \text{ AO idéal})$$

### 2.1.4.

L'amplificateur opérationnel en régime linéaire :  $\varepsilon = 0 \Rightarrow v^- = v^+ = v_e$ .  
Théorème de Millman appliqué à l'entrée inverseuse - :

$$v^- \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{0}{R_1} + \frac{u_s}{R_2} = v_e \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

d'où :

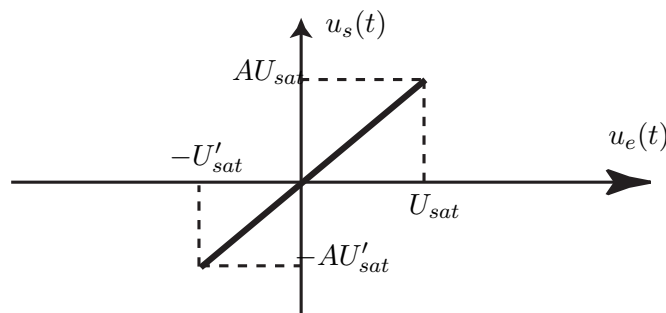
$$u_s(t) = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) u_e(t) = A u_e(t) \quad \text{soit :} \quad A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

### 2.1.5.

L'amplificateur opérationnel reste en *régime linéaire* tant que  $-U'_{sat} < u_s = A u_e < U_{sat}$ , soit :

$$-\frac{U'_{sat}}{A} < u_e < \frac{U_{sat}}{A}$$

2.1.6. La courbe représentant  $u_s$  en fonction de  $u_e$  pour  $u_e$  variant de  $-U'_{sat}$  et  $U_{sat}$



## 2.2. Limites au fonctionnement de l'AO idéal

**2.2.1.**

- Mesure de  $U_{sat}$  :

On augmente  $u_e$  jusqu'à avoir la saturation ( $u_e > \frac{U_{sat}}{A}$ ) puis on mesure  $u_s = U_{sat}$  avec un voltmètre.

- Mesure de  $U'_{sat}$  :

On diminue  $u_e$  jusqu'à avoir la saturation ( $u_e < -\frac{U'_{sat}}{A}$ ) puis on mesure  $u_s = -U'_{sat}$  avec un voltmètre.

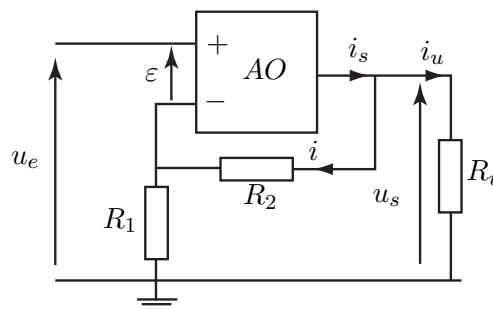
**2.2.2.**

L'AO reste en régime linéaire tant que  $i_s < i_{s,max}$ .

Or :  $i_s = i_u + i$  où :  $i_u = \frac{u_s}{R_u}$  le courant qui traverse  $R_u$  et

$i = \frac{u_s}{R_1 + R_2}$  le courant qui traverse  $R_1$  et  $R_2$ ; ( $i^- = 0$ ).

$$i_s = \frac{u_s}{R_u} + \frac{u_s}{R_1 + R_2}$$



soit :

$$u_s \left( \frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) < i_{s,max}$$

$\Rightarrow$

$$AU_0 \cos(\omega t) \left( \frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) < i_{s,max}$$

Pour assurer cette condition  $\forall t$  il suffit d'avoir :

$$AU_0 \left( \frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) < i_{s,max}$$

d'où la condition sur  $R_u$  :

$$R_u > \frac{1}{\frac{i_{s,max}}{AU_0} - \frac{1}{R_1 + R_2}}$$

Application numérique :

$$R_u > 579 \, \Omega$$

**2.2.3.**

L'AO reste en régime linéaire tant que  $\left| \frac{du_s}{dt} \right| < \sigma$ . Pour que le signal de sortie ne soit pas déformé, sa pente maximale (à l'origine) doit être inférieure au Slew rate<sup>(1)</sup>  $\sigma$ .

$$\left| \frac{du_s}{dt} \right|_{\max} < \sigma$$

Puisque  $u_s = AU_0 \cos(\omega t)$ , alors :  $\left| \frac{du_s}{dt} \right|_{\max} = AU_0 \omega < \sigma$ . Soit :

$$\omega < \frac{\sigma}{AU_0} = \omega_1$$

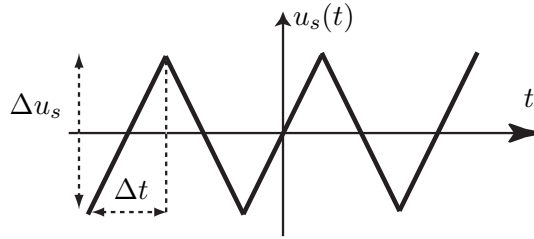
Application numérique :

$$\omega_1 \simeq 10^5 \, \text{rad.s}^{-1}$$

1. «ou temps de montée»; il caractérise la rapidité de la réponse à une variation brutale du signal d'entrée

Description de la déformation : si  $\omega > \omega_1$  ; le signal (sinusoïdal) de sortie devient triangulaire de pente égale au Slew rate.

Allure de  $u_s$  pour  $\omega > \omega_1$  :



Mesure de  $\sigma$  : On règle  $\omega \simeq \omega_1$ , le signal  $u_s$  devient triangulaire et on mesure la pente d'une portion rectiligne ;

$$\left| \frac{\Delta u_s}{\Delta t} \right| = \sigma$$

Remarque :

Le Slew rate se manifeste d'autant plus que :

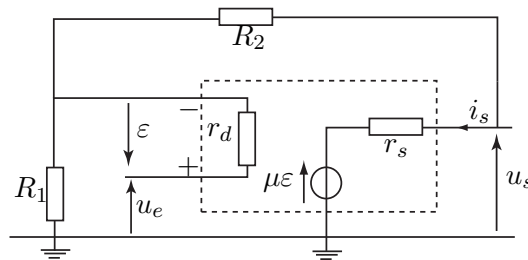
- l'amplitude du signal de sortie est grand ;
- la fréquence du signal de sortie es élevée.

## 2.3. Influence de quelques défauts de l'amplificateur opérationnel réel

### 2.3.1. Ordre de grandeur :

$$r_d \simeq 10 \text{ M}\Omega ; r_s \simeq 10 \Omega ; \mu \simeq 10^5$$

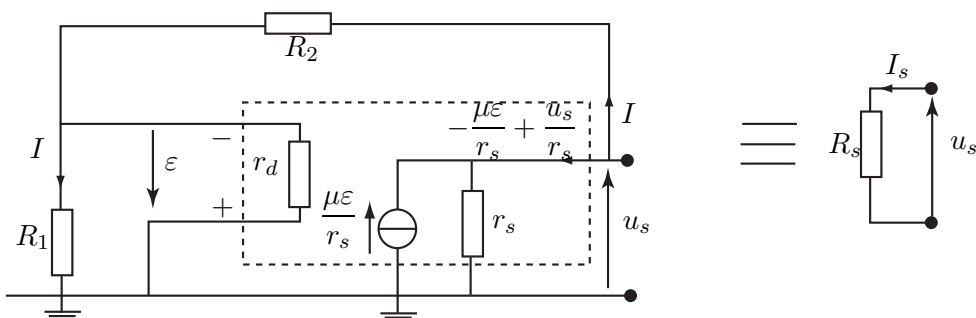
### 2.3.2. Schéma équivalent montage 3 :



Définition de la résistance de sortie du montage :

$$R_s = \left. \frac{u_s}{I_s} \right|_{v_e=0}$$

Montage équivalent dans la conditions  $v_e = 0$  :



✓ Calcul de  $R_s$  :  $u_s = R_s I_s$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{u_s}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \varepsilon = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \\
 I_s &= I - \frac{\mu \varepsilon}{r_s} + \frac{u_s}{r_s} \\
 &= \frac{u_s}{R_1 + R_2} + \frac{u_s}{r_s} + \frac{\mu}{r_s} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\
 &= \frac{u_s}{r_s (R_1 + R_2)} [r_s + (1 + \mu) R_1 + R_2] \\
 &= \frac{u_s}{R_s}
 \end{aligned}$$

soit :

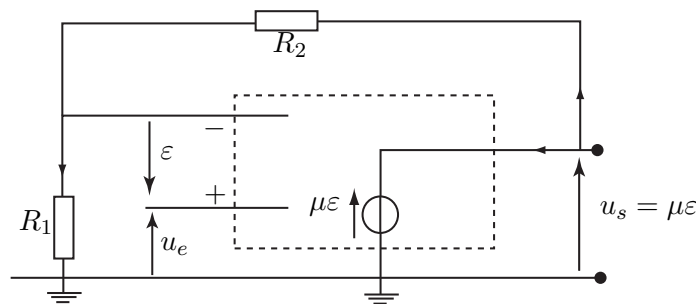
$$R_s = \frac{r_s (R_1 + R_2)}{r_s + R_2 + (1 + \mu) R_1}$$

### 2.3.3.

2.3.3.1. Le nom du modèle : Modèle dynamique (d'ordre 1) !.

2.3.3.2. Calcul de  $\underline{H}$

Montage équivalent :



Théorème de Millman appliqué à l'entrée inverseuse  $\ominus$  de l'amplificateur opérationnel, donne :

$$\underline{v}^- \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{0}{R_1} + \frac{u_s}{R_2} \quad \text{avec} \quad \underline{v}^- = \underline{v}_e - \underline{\varepsilon}$$

soit

$$\underline{H}(jf) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\frac{\mu_o}{A}}{1 + \frac{\mu_o}{A} + j \frac{f}{f_c}} \quad (A = 1 + \frac{R_2}{R_1})$$

d'où :

$$\underline{H}(jf) = \frac{H_o}{1 + j \frac{f}{f_o}}$$

avec

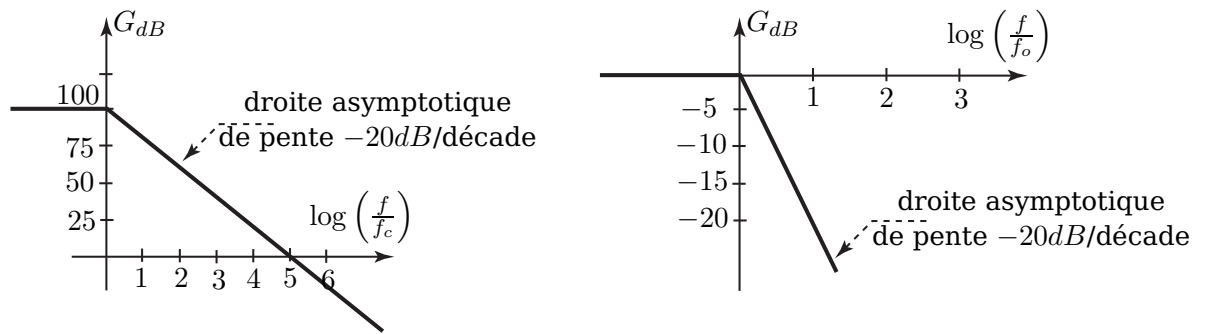
$$H_o = \frac{\mu_o}{1 + \frac{\mu_o}{A}} \quad \text{et} \quad f_o = f_c \left( 1 + \frac{\mu_o}{A} \right)$$

### 2.3.3.3.

Expressions approchées ( $\mu_o \gg 1$ ) :  $H_o \simeq 1$  et  $f_o \simeq \frac{f_c \mu_o}{A} = 1,0 \times 10^6$  Hz.

Diagramme de Bode pour  $\underline{\mu}$  (à gauche) et pour  $\underline{H}$  (à droite) :





### Interprétation des limitations en fréquence de l'AO :

Lorsque  $f$  augmente, le modèle statique (d'ordre 0) de l'AO devient insuffisant. L'AO devient alors un système d'ordre 1 (modèle dynamique) dont le comportement dépend de la fréquence (chute du gain lorsque  $f$  augmente).

## Troisième partie

### Étude d'un montage oscillateur

**3.1.** Puisque  $i_2 = i^+ = 0$  (charge infinie, comme dans la partie § 1.2.), l'équation (3) reste valable, d'où :

$$\frac{d^2 u_e}{dt^2} + 3\omega_o \frac{du_e}{dt} + \omega_o^2 u_e = \omega_o \frac{du_s}{dt}$$

**3.2.** Equation différentielle vérifiée par  $u_s$

On a :

$$\frac{d^2 u_e}{dt^2} + 3\omega_o \frac{du_e}{dt} + \omega_o^2 u_e = \omega_o \frac{du_s}{dt}$$

et :

$$u_s = A u_e \quad ; \text{ car l'AO est supposé idéal } (i^- = 0)$$

d'où :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + 2m\omega_o \frac{du_s}{dt} + \omega_o^2 u_s = 0$$

avec :  $2m = 3 - A$ .

✓ La condition de validité de cette équation : L'AO est supposé idéal.

✓ Expression de  $m$  :

$$m = \frac{3 - A}{2}$$

**3.3.** En l'absence du GBF, le montage peut fonctionner comme un oscillateur (système instable,  $u_s$  augmente) si les coefficients de son équation différentielle n'ont pas tous le même signe. Il faut donc avoir  $m < 0$ .

La valeur limite de  $A$  :

$$m < 0 \Rightarrow A > A_0 = 3$$

## 3.4.

- Si  $A = A_0$ , alors :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \omega_0^2 u_s = 0$$

c'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ( $u_s$  est sinusoïdale).

- Expression générale de  $u_s$  :

$$u_s(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- La fréquence de l'oscillateur :

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

3.5. Pour avoir le démarrage des oscillations on choisit légèrement supérieure à  $A_0$  (pour compenser les pertes et avoir l'énergie pour les oscillations)

3.6. On ne peut pas contrôler le gain avec ce montage car il est difficile de garder  $A = A_0$ . En effet, la présence des bruits (thermique par exemple) rend  $A \neq A_0$ .

Si  $A > A_0$ ,  $u_s$  augmente rapidement jusqu'à la saturation de l'AO et si  $A < A_0$ , la tension  $u_s$  s'annule ! Il faut alors ajouter système pour le contrôle automatique du gain (CAG).

## Quatrième partie

### État de polarisation d'une onde électromagnétique

#### 4.1. Généralités sur la polarisation des ondes lumineuses

4.1.1. La lumière naturelle n'est pas polarisée.

##### 4.1.2.

Exemple 1 : Laser polarisé rectilignement.

Exemple 2 : La lumière diffusée par l'atmosphère terrestre est polarisée rectilignement dans la direction perpendiculaire aux rayons incidents du Soleil.

4.1.3. Situations expérimentales où on doit considérer le caractère vectoriel de la lumière :

- Étude de phénomène d'*interférence en lumière polarisée*.
- Étude de la *biréfringence*<sup>2</sup> (cas des lames à retard).
- Étude de la réflexion ou de la réfraction d'ondes électromagnétiques incidente.

#### 4.2. État de polarisation des ondes électromagnétiques

4.2.1. Pour une valeur quelconque de  $\varphi$ , la polarisation est *elliptique*.

ý

2. La biréfringence (ou double réfraction) est une propriété qu'ont certains matériaux transparents vis-à-vis de la lumière. Leur effet principal est de diviser en deux un rayon lumineux qui les pénètre

#### 4.2.2.

✓ Conditions pour avoir la polarisation circulaire :  $E_{0x} = E_{0y}$  et  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .

✓ La polarisation est circulaire gauche si :  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

✓ La polarisation est circulaire droite si :  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

4.2.3. L'onde a une polarisation rectiligne si :  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pm\pi$ .

#### 4.2.4.

4.2.4.1. La direction du champ  $\vec{E}_P$  après le polariseur (P) est  $\vec{u}_x$  :  $\vec{E}_P // \vec{u}_x$

##### 4.2.4.2.

■ La direction du champ  $\vec{E}_A$  après l'analyseur (P) est celle de  $\vec{u}_A$  ;  $\vec{E}_A // \vec{u}_A$ .

■ Expression de  $\vec{E}_A$  :

$$\vec{E}_A = (\vec{E}_P \cdot \vec{u}_A) \vec{u}_A = |\vec{E}_P| \cos(\theta) \vec{u}_A$$

soit :

$$\vec{E}_A = |\vec{E}_P| \cos(\theta) [\cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y]$$

##### 4.2.4.3. Loi de Malus

L'éclairement de l'onde est donné par :  $\Phi = K |\vec{E}|^2$ , d'où :

$$\Phi_A = \Phi_P \cos^2(\theta)$$

## Cinquième partie Interférences en lumière polarisée

### 5.3. Action d'une lame à retard sur la lumière polarisée.

5.3.1. Oui, le champ électrique est continu en  $z = 0$  et en  $z = e$ . En effet, d'après les relations de passage, la composante tangentielle du champ électrique est continue.

5.3.2. Polarisation selon Ox:  $\vec{E} = E_o \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$ .

##### 5.3.2.1.

• À l'entrée (O) de la lame ( $z = 0$ ) :  $\vec{E}_{z=0} = E_o \cos(\omega t) \vec{u}_x$ .

• En M de côte  $z$  ( $0 < z < e$ ) , le champ présente un retard de phase par rapport à  $\vec{E}_{z=0}$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{0 < z < e} &= \vec{E}_{z=0} \left( t - \frac{z}{v_x} \right) \\ &= E_o \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v_x} \right) \right] \vec{u}_x \\ &= E_o \cos(\omega t - n_x k z) \vec{u}_x \end{aligned}$$

$$\vec{E} = E_o \cos(\omega t - k n_x z) \vec{u}_x$$

(3)

### 5.3.2.2.

- À la sortie de la lame ( $z = e$ ) :  $\vec{E}_{z=e} = E_o \cos(\omega t - n_x k e) \vec{u}_x$ .
- En  $M$  de côté  $z$  ( $z > e$ ), le champ présente un retard de phase par rapport à  $\vec{E}_{z=e}$  :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{0 < z < e} &= \vec{E}_{z=e} \left( t - \frac{z}{v_x} \right) \\ &= E_o \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z - e}{c} \right) - n k e \right] \vec{u}_x \\ &= E_o \cos (\omega t - n_x k e - k z + k e) \vec{u}_x\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{E} = E_o \cos(\omega t - k z + k(1 - n_x)e) \vec{u}_x} \quad (4)$$

**5.3.3. Polarisation selon  $Oy$ :**  $\vec{E} = E_o \cos(\omega t - k z) \vec{u}_y$ . En utilisant les expressions (3) et (4) :

- Le champ électrique en  $M$  ( $0 < z < e$ ) :

$$\boxed{\vec{E} = E_o \cos(\omega t - k n_y z) \vec{u}_y}$$

- Le champ électrique en  $M$  ( $z > e$ ) :

$$\boxed{\vec{E} = E_o \cos(\omega t - k z + k(1 - n_y)e) \vec{u}_y}$$

### 5.3.4. Polarisation dans le plan $xOy$

#### 5.3.4.1.

Avant la lame ( $z < 0$ ) on a :

$$\vec{E} = E_0 \cos[\omega t - k z] \vec{u} = \begin{cases} E_x = E_0 \cos(\alpha) \cos[\omega t - k z] \\ E_y = E_0 \sin(\alpha) \cos[\omega t - k z] \end{cases}$$

donc après passage à travers la lame on obtient :

$$\begin{aligned}E_x &= E_0 \cos(\alpha) \cos[\omega t - k z + k(1 - n_x)e] \\ E_y &= E_0 \sin(\alpha) \cos[\omega t - k z + k(1 - n_y)e]\end{aligned}$$

**5.3.4.2.** Le déphasage avance  $\varphi$  de la composante suivant  $\vec{u}_x$  du champ électrique sur sa composante selon  $\vec{u}_y$  est donné par :

$$\varphi = \varphi_x - \varphi_y = k e (n_y - n_x)$$

soit :

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda} (n_y - n_x)}$$

## 5.4. Lame à retard entre deux polariseurs

#### 5.4.1. Expression du champ électrique à la sortie de l'analyseur (A) :

$$\vec{E}_A = (\vec{E} \cdot \vec{u}_A) \vec{u}_A$$

avec :

$$\vec{u}_A \begin{vmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E} \begin{vmatrix} E_0 \cos(\alpha) \cos[\omega t] \\ E_0 \sin(\alpha) \cos[\omega t - \varphi] \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{E}_A = E_0 (\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos[\omega t] + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos[\omega t - \varphi]) \begin{vmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{vmatrix}}$$

#### 5.4.2. L'intensité de la lumière transmise par l'analyseur :

$$I = \langle |\vec{E}_A|^2 \rangle$$

soit :

$$\begin{aligned} I &= \langle |\vec{E} \cdot \vec{u}_A|^2 \rangle \\ &= E_0^2 \langle (\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos[\omega t] + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos[\omega t - \varphi])^2 \rangle \\ &= E_0^2 \left( \frac{1}{2} \cos^2(\alpha) \cos^2(\beta) + \frac{1}{2} \sin^2(\alpha) \sin^2(\beta) + 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(\beta) \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \rangle \right) \end{aligned}$$

or :

$$\langle \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\varphi)$$

d'où :

$$I = \frac{E_0^2}{2} (\cos^2(\alpha) \cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha) \sin^2(\beta) + 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\varphi))$$

et puisque :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \cos^2(\alpha + \beta) = \cos^2(\alpha) \cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha) \sin^2(\beta) - 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

il vient :

$$\begin{aligned} I &= E_0^2 (\cos^2(\alpha + \beta) + \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\alpha) \sin(\beta) [\cos(\varphi) + 1]) \\ &= E_0^2 \left( \cos^2(\alpha + \beta) + \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \left( \frac{\cos(\varphi) + 1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

soit :

$$I = I_0 \left[ \cos^2(\alpha + \beta) + \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

$I_0$  étant l'intensité transmise par le polariseur.

#### 5.4.3. Cas particulier où $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$ :

- Si  $\alpha = 0$  : La lumière arrive, sur l'analyseur (A), suivant  $Ox$ . Puisque  $(\vec{u}_A, \vec{u}_x) = \beta$ , son amplitude est :  $E_A = E \cos(\beta)$ , d'où l'intensité transmise :  $I = I_0 \cos^2(\beta)$ .
- Si  $\alpha = \pi/2$  : La lumière arrive, sur l'analyseur (A), suivant  $Oy$ . Puisque  $(\vec{u}_A, \vec{u}_y) = \pi/2 - \beta$ , son amplitude est :  $E_A = E \sin(\beta)$ , d'où l'intensité transmise :  $I = I_0 \sin^2(\beta)$ .

**5.4.4.** L'intensité transmise s'écrit :

$$I = I_0 [\cos^2(\pi/4 + \beta) + \sin(\pi/2) \sin(2\beta) \cos^2(\varphi/2)]$$

or :

$$\cos^2(\pi/4 + \beta) = \frac{1 - \sin(2\beta)}{2}$$

d'où :

$$I = I_0 \left[ \frac{1}{2} + \sin(2\beta) \left( \cos^2(\varphi/2) - \frac{1}{2} \right) \right]$$

soit :

$$I = \frac{I_0}{2} [1 + \sin(2\beta) \cos(\varphi)]$$

**5.4.5.** On place un écran après l'analyseur. Si on fait tourner l'analyseur ( $\beta$  varie), On voit l'écran éclairé uniformément avec un blanc d'ordre supérieur dont l'intensité varie avec  $\beta$ .

### 5.4.6. Spectre cannelé

#### 5.4.6.1.

Puisque  $\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda} |\Delta n|$  dépende de  $\lambda$ , l'intensité  $I = \frac{I_0}{2} [1 + \cos(\varphi)]$  est alors nulle pour les longueurs d'onde telles que  $\varphi = (2p + 1)\pi$ . Le spectre est alors cannelé (manque de certaines raies).

Les longueurs d'onde manquantes sont données par :

$$\lambda_p = \frac{2e|\Delta n|}{2p + 1} \quad (p \in \mathbb{N})$$

#### 5.4.6.2. Application numérique :

Le spectre visible est  $[\lambda_v = 400 \text{ nm}, \lambda_r = 800 \text{ nm}]$ . Les longueurs d'ondes  $\lambda_p$  qui appartiennent à ce domaine sont telles que :

$$\lambda_v < \lambda_p < \lambda_r$$

soit :

$$\frac{e|\Delta n|}{\lambda_r} - \frac{1}{2} < p < \frac{e|\Delta n|}{\lambda_v} - \frac{1}{2}$$

AN :

$$2,62 < p < 5,75 \Rightarrow p = 3, 4, 5$$

Donc les  $\lambda_p$  qui manquent dans le visible sont :

$$\lambda_3 = 714,4 \text{ nm} ; \quad \lambda_4 = 555,5 \text{ nm} ; \quad \lambda_5 = 454,5 \text{ nm}$$

## 5.5. Dispositif à deux lames

### 5.5.1.

Les polariseurs sont tous à  $45^\circ$  ( $\alpha = \beta = \pi/4$ ). D'après la question 2.2.1, on déduit le champ après  $P_1$  :

$$\vec{E}_{P1} = \frac{E_0}{2} (\cos[\omega t] + \cos[\omega t - \varphi]) \vec{u}$$

avec :  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_x + \vec{u}_y)$

soit :

$$\vec{E}_{P1} = E_0 \cos\left[\frac{\varphi}{2}\right] \cos\left[\omega t - \frac{\varphi}{2}\right] \vec{u}$$

### 5.5.2.

Champ à la sortie de la 2ème lame :

$$\vec{E}_2 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left[\frac{\varphi}{2}\right] \cos\left[\omega t - \frac{\varphi}{2}\right] \vec{u}_x + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left[\frac{\varphi}{2}\right] \cos\left[\omega t - \frac{5\varphi}{2}\right] \vec{u}_y$$

Champ après le polariseur  $P_2$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{P_2} &= (\vec{E}_2 \cdot \vec{u}) \vec{u} \\ &= \frac{E_0}{2} \cos\left[\frac{\varphi}{2}\right] (\cos\left[\omega t - \frac{\varphi}{2}\right] + \cos\left[\omega t - \frac{5\varphi}{2}\right]) \vec{u} \\ &= E_0 \cos\left[\frac{\varphi}{2}\right] \cos[\varphi] \cos\left[\omega t - \frac{3\varphi}{2}\right] \vec{u} \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{E}_{P_2} = E_0 \cos\left[\frac{\varphi}{2}\right] \cos[\varphi] \cos\left[\omega t - \frac{3\varphi}{2}\right] \vec{u}$$

**5.5.3.** L'intensité lumineuse  $I$  transmise par le système (à la sortie du polariseur ( $P_2$ )) :

$$I = \langle |\vec{E}_{P_2}|^2 \rangle = I_0 \cos^2\left[\frac{\varphi}{2}\right] \cos^2[\varphi]$$

$I_0 = \langle |E_0 \cos(\omega t)|^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2}$  étant l'intensité transmise par  $P_0$ .

d'où :

$$I = \frac{I_0 \sin^2(2\varphi)}{16 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

## 5.6. Étude d'un système à N lames

L'intensité  $I$  transmise par le système, à la sortie du polariseur  $P_N$ , s'écrit sous la forme :

$$I = I_0 \frac{1}{2^{2N}} \frac{\sin^2(2^N \varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} \quad (5)$$

**5.6.1.** dans le cas  $N = 2$  :

$$I = \frac{I_0 \sin^2(2^2 \varphi/2)}{2^4 \sin^2(\varphi/2)} = \frac{I_0 \sin^2(2\varphi)}{16 \sin^2(\varphi/2)} \quad (6)$$

La relation (5) est compatible avec celle établie à la question § 5.5.3..

**5.6.2.** Allure de  $I(\varphi)$  pour  $N = 2$  :

