Ondes électromagnétiques dans un conducteur et dans un plasma

Table des matières

1 Ondes électromagnétiques dans un conducteur

1.1 Limite de validité de la loi d'Ohm

Considérons un conducteur soumis à une onde électromagnétique plane progressive monochromatique se propageant suivant Oz

- le champ électrique : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - kz)}$
- le champ magnétique se déduit par : $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$
- le métal est considéré comme un fluide d'électrons de densité n. Les atomes ionisées sont supposés fixes dans un référentiel lié au conducteur supposé galiléen.
- approximation linéaire

  •Approximation linéaire : L'amplitude du champ électrique est supposé faible pour que l'amplitude ξ du mouvement des électrons soit négligeable devant la longueur d'onde λ de l'OEM.

  $$\xi << \lambda$$

- appliquons le PFD à un électron du métal de masse m :

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_e + \vec{F}_m + \vec{f}}$$

- $\vec{f} = -\dfrac{m}{\tau}\vec{v}$: la force des frottement visqueux appliqué par le milieu sur l'électron,avec τ : taux de relaxation du milieu
- $\vec{F}_e = -e\vec{E}$: force électrique
- $\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$: force magnétique
- $\dfrac{F_m}{F_e} = \dfrac{\left|\vec{v} \wedge \vec{B}\right|}{\left|\vec{E}\right|} = \left|\dfrac{v\dfrac{kE}{\omega}}{E}\right| = \left|\dfrac{kv}{\omega}\right| = \dfrac{\xi}{\lambda} << 1$

  On néglige la force magnétique devant la force électrique
- PFD : $m\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} - \dfrac{m}{\tau}\vec{v}$
- en notation complexe : $m\dfrac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} = -e\underline{\vec{E}} - \dfrac{m}{\tau}\underline{\vec{v}}$

$$\boxed{\underline{\vec{v}} = \frac{e\tau}{m(1+i\omega\tau)}\underline{\vec{E}}}$$

- $\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}}$

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = \frac{ne^2\tau}{m(1+i\omega\tau)}\underline{\vec{E}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}}$$

  cette relation traduit la loi d'Ohm généralisé qui est valable pour un champ harmonique
- la conductivité complexe

$$\boxed{\underline{\gamma} = \frac{ne^2\tau}{m(1+i\omega\tau)} = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}}$$

avec $\gamma_0 = \dfrac{ne^2\tau}{m}$: conductivité statique

- dans l'approximation $\omega\tau << 1$ on a

$$\boxed{\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}}$$

traduit la loi d'Ohm qui est valable pour un champ quelconque

•Conclusion : la loi d'Ohm reste valable si $\omega\tau << 1$

• Ordre de grandeur : pour le cuivre $n = 10^{29} m^{-3}$; $\gamma_0 = 6.10^7 \mathrm{S}.m^{-1}$ et $m = 9,1.10^{-31} kg$
$e = 1,6.10^{-19}\mathrm{C}$ donc le temps de relaxation du cuivre est $\tau = \dfrac{m\gamma_0}{ne^2} \approx 10^{-14}\mathrm{S}$
la loi d'Ohm est valable si $\omega << 10^{14} rad.\mathrm{S}^{-1}$

1.2 relaxation d'un conducteur

Supposons qu'on crée ,à l'instant $t = 0$,une densité de charge ρ_0 à l'intérieur du conducteur de conductivité γ. On se propose de déterminer l'évolution de $\rho(t)$.

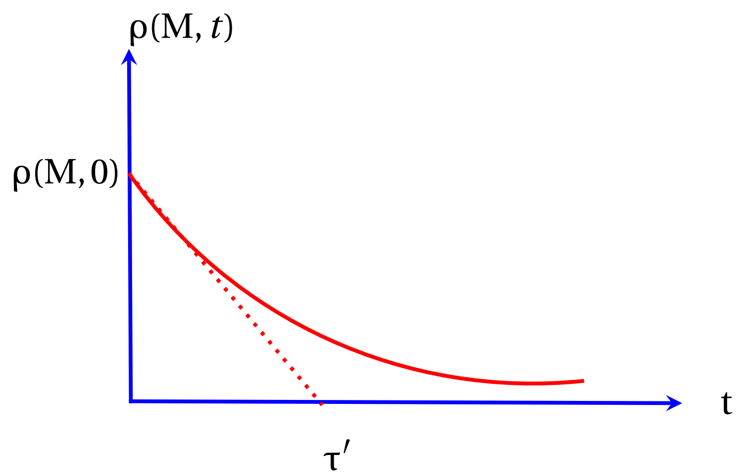
- la conservation de la charge : $div \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma div \vec{E} = 0$,avec : $div \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho = 0}$$

- la solution :

$$\boxed{\rho(\mathrm{M}, t) = \rho(\mathrm{M}, 0) e^{-\frac{t}{\tau'}}}$$

avec $\tau' = \dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}$



- on constate que la densité volumique de charge s'annule durant quelques τ'
- pour le cuivre $\tau' \approx 1,5.10^{-19} s$

• Conclusion : Dans le domaine de validité de la loi d'Ohm,la densité volumique de charge est nulle à l'intérieur du conducteur,et la charge totale se répartit sur la surface du conducteur

$$\rho(\mathrm{M}, t) = 0$$

1.3 Equations de Maxwell dans un conducteur

- $(M-A) : \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- $\vec{j} = \gamma\vec{E} \Rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- en régime harmonique : $\dfrac{\left|\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|}{\left|\gamma\vec{E}\right|} = \dfrac{\varepsilon_0\omega}{\gamma} = \omega\tau'$
- le domaine de validité de la loi d'Ohm : $\omega\tau' << 1 \Rightarrow \left|\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right| << \left|\gamma\vec{E}\right|$
- $(M-A)$:

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E}}$$

- $(M-G)$:

$$\boxed{div\,\vec{E} = 0}$$

- $(M-\phi)$:

$$\boxed{div\,\vec{B} = 0}$$

- $(M-F)$:

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

1.4 Equation de propagation - Effet de peau

- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = \overrightarrow{rot}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0\gamma\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}}$$

- on cherche la solution de cette équation sous forme OPPM se propageant suivant Oz :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - kz)}}$$

- $\Delta\underline{\vec{E}} = \dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial z^2} = -k^2\underline{\vec{E}}$
- $\dfrac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i\omega\underline{\vec{E}}$
- $-k^2\underline{\vec{E}} - i\mu_0\gamma\omega\underline{\vec{E}} = 0$
- la relation de dispersion

$$\boxed{k^2 = -i\mu_0\gamma\omega}$$

- $k^2 = \mu_0\gamma\omega e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\mu_0\gamma\omega}.e^{-\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}(1-i)$
- on pose $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$: épaisseur de peau

$$\boxed{k = \pm\frac{1-i}{\delta}}$$

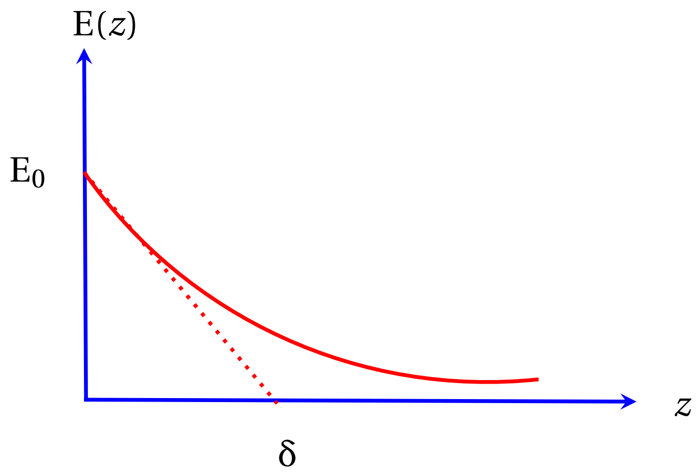
- pour $k = \frac{1-i}{\delta}$: $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{1-i}{\delta}z\right)} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}$

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}}$$

il s'agit d'une OPP qui se propage suivant z croissant avec atténuation
- pour $k = -\frac{1-i}{\delta}$: $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i\left(\omega t + \frac{1-i}{\delta}z\right)} = \underline{\vec{E}}_0 e^{\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)}$

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)}}$$

il s'agit d'une OPP qui se propage suivant z décroissant avec atténuation $(z < 0)$



- le champ électromagnétique s'annule sur une longueur de quelques δ
- δ représente le profondeur de pénétration de l'onde dans le conducteur
- l'épaisseur de peau diminue avec la fréquence
- pour le cuivre $\gamma = 6.10^7 S.m^{-1}$,l'épaisseur de peau vaut : pour une fréquence $\nu = 50Hz$: $\delta = 9,3mm$

1.5 Modèle d'un conducteur parfait

•Définition : Un conducteur parfait est défini comme un conducteur pour lequel la conductivité est trés grande.

pour un conducteur parfait on a :

- $\delta = 0$
- $\vec{E}(M,t) = \vec{0}$
- $\vec{j}(M,t) = \vec{0}$
- $\vec{B}(M,t) = \vec{0}$

2 Ondes électromagnétiques dans un plasma

2.1 Modélisation du plasma

•Définition : Un plasma est un milieu ionisé (totalement ou partiellement),constitué d'ions de massa M,de charge $+e$ et d'électrons de masse $m << M$,de charge $-e$. Il est neutre électriquemet.

- On note n^+ et n^- les densités volumiques respectivement des ions et des électrons
- en absence du perturbation (absence de l'onde)

$$n^+ = n^- = n$$

•Définition : Un plasma est dit dilué si toutes les interactions entres les charges sont négligées.

• Exemples

- plasma dense : intérieur des étoiles ($n = 10^{33}$ à $10^{43} m^{-3}$)
- plasma dilué : vent solaire et gaz interstellaire ($n = 10^6 m^{-3}$)
- plasma peu dense : ionosphère ($n_{max} = 10^{12} m^{-3}$ le jour et $n_{min} = 2.10^{10} m^{-3}$ la nuit)

2.2 Relation constitutive du plasma

On s'interesse à la propagation dans le plasma d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique,se propageant dans la direction $\vec{e}_x$

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t - kx)$$

- le champ magnétique vérifie : $\underline{\vec{B}} = \dfrac{k\vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$
- PFD pour un électron : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$
- $\dfrac{F_m}{F_e} = \dfrac{\left|-e\vec{v} \wedge \vec{B}\right|}{\left|-e\vec{E}\right|} \leqslant \dfrac{|\vec{v}|.\left|\vec{B}\right|}{\left|\vec{E}\right|} = \dfrac{v.k}{\omega}$
  Pour un plasma dilué,on suppose que ω reste de l'ordre de ck donc

$$\frac{F_m}{F_e} \approx \frac{v}{c} << 1$$

- en régime sinusoïdal forcé : $mi\omega\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$

$$\underline{\vec{v}} = \frac{ie\underline{\vec{E}}}{m\omega}$$

- PFD sur un ion de masse M et de vitesse $\vec{V}$: $M\dfrac{d\vec{V}}{dt} = +e\vec{E}$

$$\underline{\vec{V}} = -\frac{ie\underline{\vec{E}}}{M\omega}$$

- $\dfrac{\left|\overrightarrow{V}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \dfrac{m}{M} << 1$

  Dans toute la suite les ions sont considérés comme immobiles,donc le courant est constitué du mouvement des électrons.

- la densité volumique du courant : $\underline{\overrightarrow{j}} = -en_{-}\underline{\overrightarrow{E}}$
- on suppose que le plasma reste neutre donc $n_{-} = n_{+} = n$

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{j}} = \underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}} = \frac{ne^2}{im\omega}\underline{\overrightarrow{E}}}$$

- la conductivité du plasma est imaginaire pur

$$\boxed{\underline{\gamma} = \frac{ne^2}{im\omega}}$$

  le courant et le champ électrique sont toujours en quadrature

- la puissance moyenne volumique cédée par le champ aux charges est nulle
  $< \dfrac{d\mathscr{P}}{d\tau} >= \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\overrightarrow{j}}.\underline{\overrightarrow{E}}^*) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dfrac{ne^2}{im\omega}\underline{\overrightarrow{E}}.\underline{\overrightarrow{E}}^*\right) = 0$

2.3 Equation de propagation du champ électromagnétique dans le plasma

- $(M-G) : div\overrightarrow{E} = 0$
- $(M-\phi) : div\overrightarrow{B} = 0$
- $(M-F) : \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$
- $(M-A) : \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\underline{\overrightarrow{E}}) = \overrightarrow{grad}(div\underline{\overrightarrow{E}}) - \Delta\underline{\overrightarrow{E}} = -\Delta\underline{\overrightarrow{E}}$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\underline{\overrightarrow{E}}) = \overrightarrow{rot}\left(-\dfrac{\partial\underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\underline{\overrightarrow{j}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}\right)$
- $\underline{\overrightarrow{j}} = \underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}} \Rightarrow \Delta\underline{\overrightarrow{E}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial^2 t} = \mu_0\underline{\gamma}\dfrac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} = \dfrac{\mu_0 ne^2}{m}\underline{\overrightarrow{E}} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}\underline{\overrightarrow{E}}$
- on définit la pulsation du plasma par

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}}$$

- l'équation de propagation s'écrit sous la forme

$$\boxed{\Delta\underline{\overrightarrow{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\underline{\overrightarrow{E}}}$$

  il s'agit de l'équation d'Alembert avec un terme supplémentaire lié à la présence du courant

2.4 Relation de dispersion

- $-k^2\underline{\vec{E}} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \dfrac{\omega_p^2}{c^2}\underline{\vec{E}}$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

- la relation de dispersion n'est pas linéaire donc le plasma est un milieu dispersif

2.5 Nature des solutions

- si $\omega > \omega_p$: $|k| = k = \sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$
  - $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$: OPPM se propage dans le sens de $x > 0$
  - $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + kx)$: OPPM se propage dans le sens de $x < 0$
- si $\omega < \omega_p$: $k = \pm i\sqrt{\dfrac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm ik'$
  - $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t \mp ik'x) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(\pm k'x) \exp i(\omega t)$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(\pm k'x) \cos\omega t}$$

•Définition : Une onde plane $S(x,t)$ est dite stationnaire s'elle peut se mettre sous la forme (en notation réelle)

$$S(M,t) = f(x)g(t)$$

- pour $\omega < \omega_p$ l'OEM est stationnnaire (ne se propage pas), en plus l'amplitude de cette onde est décroissante on dit qu'elle s'agit d'une **onde évanescente**,car celle-ci ne prend des valeurs remarquables que sur des distances de l'ordre de $\dfrac{1}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ et s'évanouit rapidement au-delà.

•Définition : Une onde évanescente,oscille dans le temps indépendamment d'une décroissance exponentielle de son amplitude pour sa partie spatiale,elle ne se propage pas.

•Conclusion : Le plasma se comporte pour les OEMPPM comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_p

2.6 Vitesse de phase-Vitesse de groupe

- la relation de dispersion : $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$
- la vitesse de phase v_φ : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$

$$\boxed{v_\varphi = c\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}}$$

$v_\varphi > c$

- la vitesse de groupe v_g : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

$2kdk = \dfrac{2\omega d\omega}{c^2}$

$$\boxed{v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega}}$$