# CORRIGÉ DU DS°4

## Problème 1 (extrait de CCP MP 2012)

## Partie I

**1. a)** La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $I$ si et seulement si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_\infty$ converge dans $\mathbb{R}_+$, où $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\ ,\ x\in I\}$ (norme de la convergence uniforme).
(*pour que cette définition ait un sens, il faut que les fonctions soient bornées sur $I$, ce que suppose l'énoncé, de manière à pouvoir parler de la norme infinie*)

**b)** $\forall x\in I,\ 0\leqslant |f_n(x)|\leqslant \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement, alors pour tout $x$ de $I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n(x)|$ converge, c'est-à-dire la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge absolument.

**2.** Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement sur $I$, alors elle converge absolument d'après la question précédente, donc elle converge simplement sur $I$. On peut donc définir, pour $x$ dans $I$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors, pour tout $x$, $|R_n(x)|\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\|f_k\|_\infty$, donc $\|R_n\|_\infty\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\|f_k\|_\infty$.
La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\|f_k\|_\infty\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $0$, ce qui prouve que la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $I$, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur $I$.

**3.**
- Pour $x$ fixé dans $I=[0,1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n}+\dfrac{1}{n}$ et donc la suite $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît et converge vers 0. Le CSSA est applicable, ce qui prouve que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $I=[0,1]$.
- Le CSSA nous dit aussi que, pour tout $x$ de $I$, $|R_n(x)|\leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{x^2}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}\leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}$, d'où $\|R_n\|_\infty\leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}=0$ donc la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $0$, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur $I=[0,1]$.
- Enfin, pour $x$ fixé, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2}+\dfrac{1}{n}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|f_n(x)|$ diverge, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ ne converge pas absolument sur $I$.

**4.** Considérons la fonction $f_n$ définie sur $I=[0,1[$ par $f_n(x)=x^n$. Pour $x$ dans $I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}|f_n(x)| = \sum x^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-x}$. Cette série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge donc absolument sur $I=[0,1[$.

On a alors $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ d'où $R_n\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = n\mathrm{e}^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n})}\sim\dfrac{n}{\mathrm{e}}$ qui tend vers $+\infty$ avec $n$, donc il en est de même de $\|R_n\|_\infty^{[0,1[}$ puisque $\|R_n\|_\infty^{[0,1[}\geqslant R_n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$. Donc la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers 0, et ainsi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est une série qui converge absolument sur $I=[0,1[$ mais qui ne converge pas uniformément sur $I$.

# Partie II

**5.** • La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît et est positive, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_1$. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bornée.

• Soit $x \in I$. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n(1-x)x^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $x$ avec $0 \leqslant x < 1$.
$\forall n \geqslant 1, \forall x \in I,\ 0 \leqslant \alpha_n x^n(1-x) \leqslant \alpha_1(1-x)x^n$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $I$.

**6. a)** $\forall x \in I,\ f_n'(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$. En construisant le tableau de variations de $f_n$ on établit que la fonction $f_n$ positive admet sur $I$ un maximum (absolu) au point $\dfrac{n}{n+1}$ qui vaut $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Donc $\|f_n\|_\infty = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

**b)** $\|f_n\|_\infty = \dfrac{\alpha_n}{n}.\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.
Or $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$, et $(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim (n+1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1$.
Donc $\lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^{-1}$.

Ainsi, $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{\alpha_n}{n\mathrm{e}}$ ; donc, par comparaison de séries positives :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_\infty \text{ converge} \iff \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}$$

**7. a)** C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $x \in [0,1[$ : $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

**b)** On sait que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît. Donc pour $k \geqslant n+1,\ \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.
Alors $\forall k \geqslant n+1,\ \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k$, et donc puisque les séries convergent :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}.$$

La suite des restes $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x)$ est donc positive et majorée par une suite qui ne dépend pas de $x$ et qui converge vers $0$, ce qui prouve que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément.

**c)** La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît et est minorée par $0$, donc elle converge vers une limite positive ou nulle. On raisonne par l'absurde : si cette limite $\ell$ est non nulle, alors pour tout $n$, $\alpha_n \geqslant \ell > 0$.
Dans ces conditions pour tout $x$ dans $I$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \geqslant \ell(1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell\frac{x^{n+1}}{1-x}(1-x) = \ell x^{n+1}.$$

Mais alors, $\|R_n\|_\infty \geqslant R_n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \ell\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ qui converge vers $\dfrac{\ell}{e}$ (même calcul qu'à la question 6.b. ), donc ne converge pas vers $0$, c'est-à-dire que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.
Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge uniformément sur $I$ si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $0$.

**8. a)** Avec $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, la question 6.b. montre que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge normalement (car $\dfrac{\alpha_n}{n} = \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ converge).

**b)** Il suffit de prendre une suite $(\alpha_n)$ décroissante et qui ne tend pas vers $0$ (d'après 7.c.).

**c)** Il nous faut trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ positive décroissante, convergeant vers $0$, mais telle que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\alpha_n}{n}$ diverge .

La suite définie par $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ convient (elle est bien définie pour $n \geqslant 1$). Cette suite est décroissante et converge vers $0$. Il reste à montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\alpha_n}{n}$ diverge.

La fonction $g : x \to \dfrac{2}{x\ln(x)}$ décroît sur $[2,+\infty[$ et est positive. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} g(n)$ est donc de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{\infty} g(x)dx$.

Or $\displaystyle\int_1^M g(x)dx = \int_1^M \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln x)]_2^M = \ln(\ln M) - \ln(\ln 2)$ qui a pour limite $+\infty$ quand $M$ tend vers $+\infty$. L'intégrale diverge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\alpha_n}{n}$ diverge, et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $I$ mais ne converge pas normalement sur $I$.

**9.** CV Normale $\Rightarrow$ CV Absolue $\Rightarrow$ CV simple (th. du cours sur les séries numériques).

CV Normale $\Rightarrow$ CV Uniforme $\Rightarrow$ CV simple.

Aucune des réciproques n'est vraie.

Et de plus : CV absolue $\not\Rightarrow$ CV uniforme, et de même : CV uniforme $\not\Rightarrow$ CV absolue .

---

# PROBLÈME 2 (Épreuve pratique MINES-PONTS 1994)

### Première partie

**1. a)** $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ est le terme général d'une série de Riemann, qui d'après le cours converge si et seulement si $x > 1$.

**b)** Pour tout $x \in I$ on a $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\ln n}$ donc $f_n'(x) = -\dfrac{\ln n}{n^x}$ et $f_n''(x) = \dfrac{(\ln n)^2}{n^x}$.

Sur $[a,+\infty[$ avec $a > 1$ on aura donc $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^a}$, $\|f_n'\|_\infty = \dfrac{\ln n}{n^a}$ et $\|f_n''\|_\infty = \dfrac{(\ln n)^2}{n^a}$.

- La série de terme général $\dfrac{1}{n^a}$ converge donc la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
- Soit $\alpha$ un réel tel que $1 < \alpha < a$ ; d'après les « croissances comparées », $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \|f_n'\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-a}\ln n = 0$ donc $\|f_n'\|_\infty = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ étant convergente, les théorèmes de comparaison des séries à termes réels positifs donnent la convergence de la série $\sum \|f_n'\|_\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum f_n'$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
- on démontre exactement de la même manière que la série $\sum f_n''$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

**c)** Par l'absurde : si la série $\sum f_n$ était uniformément convergente sur $I$, on pourrait lui appliquer le théorème d'interversion des limites : puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{n}$ existe, cela impliquerait la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$, ce qui est faux.

Puisque les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(\ln n)^2}{n}$ sont divergentes (car pour $n \geqslant 3$ $\dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$), le même argument montre que les séries $\sum f_n'$ et $\sum f_n''$ ne sont pas uniformément convergentes sur $I$.

**2. a)** On applique le théorème de dérivation d'une série de fonctions ; on vérifie les hypothèses :

- les $f_n$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I$ ;

- la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I$ ;
- la série $\sum f'_n$ converge simplement sur $I$ ;
- la série $\sum f''_n$ converge simplement sur $I$, la convergence étant uniforme (car normale) sur tout intervalle $[a,+\infty[$ inclus dans $I$ (donc a fortiori sur tout segment inclus dans $I$).

Le théorème permet alors d'affirmer que la fonction $\zeta$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I$ et que

$$\forall x \in I\ ,\ \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \quad \text{et} \quad \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x}\,.$$

**b)** Pour $x \in I$ la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout entier $n \geqslant 2$ on aura

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

puis en sommant pour $n$ variant de $N$ à $+\infty$ (les intégrales écrites convergent d'après le théorème de comparaison série-intégrale) :

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant R_N(x) \leqslant \int_{N}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

ce qui donne l'inégalité demandée (car une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^x} = t^{-x}$ est $\dfrac{t^{-x+1}}{-x+1}$).

En ajoutant alors à tous les membres de l'inégalité la quantité $S_N(x)$, on trouve :

$$S_N(x) + \frac{1}{(x-1)(N+1)^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant S_N(x) + \frac{1}{(x-1)N^{x-1}}\,.$$

**c)** Pour $N=1$ l'inégalité ci-dessus devient :

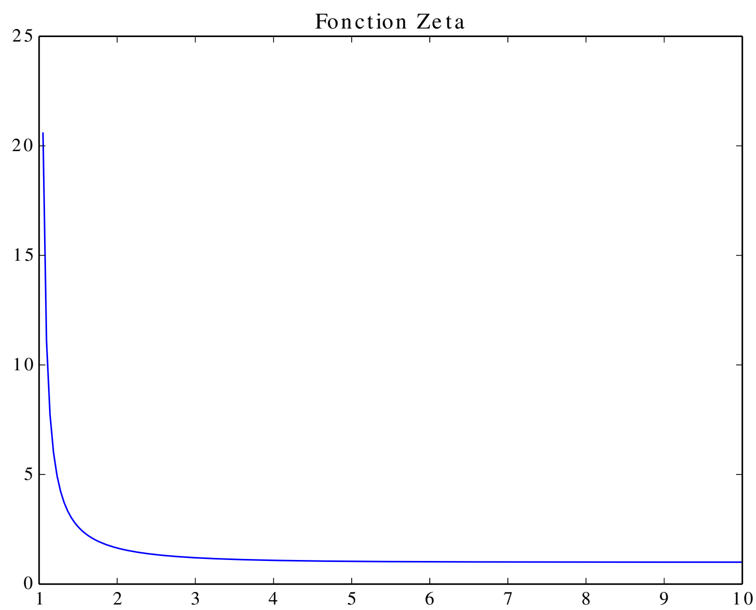
$$1 + \frac{1}{x-1}\frac{1}{2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}\,.$$

On en déduit $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1$ donc : $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$

et aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ (cette dernière limite pouvait aussi être obtenue par application du théorème d'interversion des limites).

**3.** Le programme ci-dessous utilise l'encadrement du **2.b** : on calcule les termes successifs de la somme $S_N$ jusqu'à ce que l'on ait obtenu $N$ tel que $\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{(x-1)N^{x-1}} - \dfrac{1}{(x-1)(N+1)^{x-1}}\right) \leqslant$ `eps` ; on prend alors comme valeur approchée de $\zeta(x)$ la demi-somme des deux termes de l'encadrement.

**?? PythonTeX ??**



### Deuxième partie

**1. a)** Si l'on note $F$ une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{t^x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et puisque l'intervalle $[n-u, n+u]$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ (car $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$), on aura $\varphi_n(u) = F(n+u) - F(n-u)$, ce qui prouve que $\varphi_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que

$$\forall u \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]\ ,\ \varphi_n'(u) = F'(n+u) + F'(n-u) = \frac{2}{n^x} - \frac{1}{(n+u)^x} - \frac{1}{(n-u)^x}$$

d'où l'on tire

$$\varphi_n''(u) = \frac{x}{(n+u)^{x+1}} - \frac{x}{(n-u)^{x+1}} \quad \text{puis} \quad \varphi_n'''(u) = \frac{-x(x+1)}{(n+u)^{x+2}} + \frac{-x(x+1)}{(n-u)^{x+2}}\,.$$

En particulier, on a $\varphi_n(0) = \varphi_n'(0) = \varphi_n''(0) = 0$.

**b)** $\varphi_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{n^x} - \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$

**c)** La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à la fonction $\varphi_n$ entre 0 et $\frac{1}{2}$ à l'ordre 3 donne, puisque $\varphi_n(0) = \varphi_n'(0) = \varphi_n''(0) = 0$ :

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \varphi_n'''(t)\,\mathrm{d}t$$

donc compte tenu du calcul précédent

$$-\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{x(x+1)}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \left(\frac{1}{(n-t)^{x+2}} + \frac{1}{(n+t)^{x+2}}\right) \mathrm{d}t\,.$$

Or pour $t \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ on a $\dfrac{2}{(n+1)^{x+2}} \leqslant \dfrac{1}{(n-t)^{x+2}} + \dfrac{1}{(n+t)^{x+2}} \leqslant \dfrac{2}{(n-1)^{x+2}}$ et puisque $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{24}$, on obtient bien l'inégalité demandée.

**d)** On additionne les relations $-\varphi_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - \frac{1}{n^x}$ pour $n$ variant de $N+1$ à $+\infty$ ce qui donne :

$$\int_{N+\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} -\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right)$$

et en utilisant l'inégalité précédente on obtient :

$$\frac{x(x+1)}{24} R_{N+1}(x+2) \leqslant \int_{N+\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - R_N(x) \leqslant \frac{x(x+1)}{24} R_{n-1}(x+2).$$

Enfin, d'après **I.2.b** on a $R_{N+1}(x+2) \geqslant \dfrac{1}{(x+1)(N+2)^{x+1}}$ et $R_{N-1}(x+2) \leqslant \dfrac{1}{[x+1)(N-1)^{x+1}}$ d'où

$$\frac{x}{24(N+2)^{x+1}} \leqslant \int_{N+\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - R_N(x) \leqslant \frac{x}{24(N-1)^{x+1}}$$

et enfin après calcul de l'intégrale :

$$\frac{x}{24(N+2)^{x+1}} \leqslant \frac{1}{(x-1)\left(N+\frac{1}{2}\right)^{x-1}} - R_N(x) \leqslant \frac{x}{24(N-1)^{x+1}}\,.$$

**2.** L'inégalité précédente donne

$$\frac{1}{(x-1)\left(N+\frac{1}{2}\right)^{x-1}} - \frac{x}{24(N-1)^{x+1}} \leqslant R_N(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)\left(N+\frac{1}{2}\right)^{x-1}} - \frac{x}{24(N+2)^{x+1}}$$

d'où en additionnant $S_N(x)$ à tous les membres :

$$\underset{N}{S}(x) + \frac{1}{(x-1)\left(N+\frac{1}{2}\right)^{x-1}} - \frac{x}{24(N-1)^{x+1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant S_N(x) + \frac{1}{(x-1)\left(N+\frac{1}{2}\right)^{x-1}} - \frac{x}{24(N+2)^{x+1}}\,.$$

Cet encadrement a été utilisé dans le programme ci-dessous pour obtenir une valeur approchée de $\zeta(x)$. On a fait aussi afficher le nombre d'itérations à réaliser pour obtenir la précision souhaitée. Cela permet de constater que cette méthode est bien plus rapide que la précédente, surtout pour des valeurs de $x$ proches de 1.

**?? PythonTeX ???? PythonTeX ??**

### Troisième partie

**1. a)** Pour tout $x > 0$, $g_n(x) - g_{n+1}(x) = S_n(x) - S_{n+1}(x) - \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x} + \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = -\frac{1}{(n+1)^x} + \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ donc

$$0 \leqslant g_n(x) - g_{n+1}(x) \leqslant \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\cdot$$

La série télescopique de terme général $\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$ étant convergente pour tout $x > 0$ (car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0$) il résulte des critères de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général $g_n(x) - g_{n+1}(x)$ converge, donc que la *suite* $((g_n(x))$ converge.

On a alors, pour $x > 1$, par passage à la limite dans la relation $g_n(x) = S_n(x) - \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ :

$$g(x) = \zeta(x) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}\cdot$$

**b)** En additionnant les inégalités $0 \leqslant g_k(x) - g_{k+1}(x) \leqslant \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}$ pour $k$ variant de $n$ à $+\infty$, on trouve, puisque $\lim_{k\to+\infty} g_{k+1}(x) = g(x)$ et $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(k+1)^x} = 0$, après télescopage :

$$0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \frac{1}{n^x}\cdot$$

**c)** L'inégalité précédente montre que pour tout $a > 0$ : $\|g - g_n\|_\infty^{[a;+\infty[} \leqslant \frac{1}{n^a}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \|g - g_n\|_\infty^{[a;+\infty[} = 0$, c'est-à-dire que la suite $(g_n)$ converge uniformément vers $g$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$. Les $g_n$ étant continues sur $\mathbb{R}_+^*$, il résulte alors d'un théorème du cours qu'il en est de même de $g$.

**2.** Immédiat : $\lim_{x\to1^+} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to1} g(x) = g(1)$ puisque $g$ est continue en $1$.

*Rem :* $g(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$ : c'est la constante d'Euler.

---

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆