Autour des séries entières

Dans tout le problème :

- $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
- On désigne alors par $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ la série numérique de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite :

$(\mathcal{P}_1)$: La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

$(\mathcal{P}_2)$: La fonction f admet une limite finie, notée $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie I: Généralités

1. En utilisant des développements en série entière " usuels ", donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :
   (a) $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
   (b) $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
   (c) $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
   (d) La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$ (justifier).

2. On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$

   <u>*Indication*</u> **:** *On pourra utiliser une décomposition en éléments simples*

Partie II: Théorème d'Abel

4. On suppose dans cette question que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
   On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).
   On pose $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.
   (a) Simplifier, pour tout $x \in [0,1]$, $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p}$.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum\limits_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$
   (c) Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis que :
   pour tout entier $n \geqslant n_0$ et pour tout réel $x \in [0,1[$, $|R_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

(d) Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$

5. Que peut-on dire de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$?

6. **Application :** Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction arctan puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7. **Produit de Cauchy :** On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

   (a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

   <u>Indication</u> **:** *On pourra examiner le cas* $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ *pour* $n \geqslant 1$

   (b) Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ convergent.

   Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Partie III: Réciproque du théorème d'Abel

8. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

9. Dans cette question on suppose que pour tout entier n, $a_n \geqslant 0$.
   Montrer que si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $(\mathcal{P}_2)$, alors elle vérifie la propriété $(\mathcal{P}_1)$

   <u>Indication</u> **:** *On pourra montrer que* $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leqslant \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Partie IV: Théorème tauberien faible

On suppose dans cette partie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

10. Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leqslant \frac{K}{n}.$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = L - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

    Prouver que l'on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ u_n = L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k\left(x^k - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

12. (a) Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n}(|k a_k|)$.

    (b) Prouver que la suite (M_n) converge. Quelle est sa limite ?

13. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ |u_n| \leqslant |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(1 - x^k\right) + \frac{1}{n(1-x)} M_n$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ |u_n| \leqslant |L - f(x)| + (1-x) \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + \frac{1}{n(1-x)} M_n.$$

14. On prend $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
    En utilisant tout ce qui précède, prouver alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

15. Conclure que $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$ converge

Partie V: Une équation différentielle

Soit (E) l'équation différentielle :

$$4x^2 y''(x) + 4xy'(x) - y = \frac{x}{1-x}.$$

16. Développer en série entière autour de l'origine les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
    Donner les domaines de convergence des séries obtenues.

17. Trouver une solution développable en série entière autour de l'origine de (E).
    Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue.

18. Soit $\varphi : x \in I \mapsto \varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{4n^2 - 1}$.

    (a) Déterminer les constantes α et β telles que

    $$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{4n^2-1} = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1}.$$

    (b) Soient pour $x \in I$ et $u \in I$, $H(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2n+1}$ et $h(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^{2n+1}}{2n+1}$.
    Montrer que $h(u) = \ln \sqrt{\dfrac{1+u}{1-u}}$.

    (c) En déduire une expression simple de $H(x)$.
    On pourra poser $u = \sqrt{x}$.

    (d) En déduire une expression de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

    (e) Calculer la valeur de $L = \lim\limits_{x \to 1^-} \varphi(x)$.

19. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{4n^2 - 1}$.
    Calculer, à l'aide des résultats précédents, la valeur de $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$.

20. On se propose dans cette question de retrouver la valeur de S directement.
    Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$. Prouver que $S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right)$. Conclure.

Partie VI: Séries harmonique transformées

Désormais, on admet et on pourra utiliser le théorème de Littlewood suivant :

Autour des séries entières

Théorème : de Littlewood

Si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1,1\}$.

21. Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n x^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$.

    On pose, pour $x \in]-1,1[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$.

22. Établir que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f : x \longmapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.
23. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.
24. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge et que la série alternée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.
25. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$ pour que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

    Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?
26. Dans le cas où la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est périodique de période 6 avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ et $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -1$, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$

    (il est demandé de détailler les calculs).

Partie VII: Divergence sur le bord

On suppose dans cette question que $\forall n \geqslant 0 : a_n > 0$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge.

Soit $(b_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $\lambda_n = \frac{b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

27. En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$
28. Montrer que g est définie sur $]-1,1[$
29. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \geqslant 0$ tels que

$$|g(x) - \lambda f(x)| \leqslant \varepsilon f(x) + M \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

30. Montrer que $\frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \lambda$
31. **Application :**

    (a) Calculer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n+\sin n}$

Autour des séries entières

(b) Donner un équivalent en 1 de la fonction g définie sur $]-1,1[$ par $g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+\sin n}$

Partie VIII: Théorème de Liouville

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme h et soit $r<R$.

32. Montrer que, pour tout entier k, la série de fonctions $\theta\mapsto\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0,2\pi]$.
33. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$2\pi r^k c_k=\int_0^{2\pi} h(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta.$$

34. **Application :** On suppose que $R=+\infty$ et que h est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que h est constante.

Autour des séries entières

Partie I: Généralités

1. (a) Il suffit de considérer $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}$

   (b) Il suffit de considérer $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$

   (c) Il suffit de considérer $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

   (d) Il suffit de considérer $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, car $\| x^n \|_\infty^{]-1,1[} = 1 \not\to 0$

2. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[0,1]$, donc sa somme est continue sur $[0,1]$ C'est du cours !
   (on dispose ici de la convergence normale de la série sur [0,1] ...)

3. Pour $x \in]-1,1[$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n} \\ &= x\ln(1+x) + [\ln(1+x) - x]\end{aligned}$$

   Comme la question précédente s'applique, on en déduit : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$.

Partie II: Théorème d'Abel

4. (a) Comme $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$, on a tout simplement :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = R_n(x)$$

   (b) On travaille sur les sommes partielles :

$$\sum_{p=1}^{k} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = \sum_{p=1}^{k} r_{n+p-1}\, x^{n+p} - \sum_{p=1}^{k} r_{n+p}\, x^{n+p}$$

   après mise à l'écart du premier terme de la première somme et réindexation des autres, on obtient :

$$\sum_{p=1}^{k} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = r_n\, x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{k-1} r_{n+p}\, x^{p-1} - r_{n+k}\, x^{n+k}$$

   le dernier terme tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini car r_{n+k} tend vers 0 puisque la série $\sum a_n$ converge, et x^{n+k} est borné ; il suffit donc de faire tendre k vers l'infini pour obtenir la relation voulue.

   (c) Comme on l'a déjà signalé, r_n tend vers 0 ; par conséquent, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, on dispose d'un entier n_0 pour tout $k \geqslant n_0$ on ait $|r_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; alors on a bien $|r_{n+p}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geqslant n_0$ et p entier naturel. Et pour $x \in [0,1[$ et $n \geqslant n_0$ on obtient :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = \varepsilon$$

   (d) Continuité de la somme à gauche en 1, assurée par convergence uniforme de la série sur $[0,1]$.

5. Par contraposition, la série est divergente.

6. Par primitivation du développement de $\dfrac{1}{1+x^2}$ on obtient $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in]-1,1[$; et l'on peut appliquer le théorème d'Abel pour obtenir : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
7. (a) La série proposée converge par critère spécial des séries alternées. Le terme général du produit de Cauchy est ici : $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}} = (-1)^n a_n$. (poser $u_0 = v_0 = 0$)
   Or $k(n-k) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ $\big($étude des variations, ou mieux : $(n-2k)^2 \geqslant 0\big)$ et par conséquent $a_n \geqslant \dfrac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$; ce qui montre que la série de terme général w_n diverge grossièrement.
   (b) Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n\, x^n$ et $\sum v_n\, x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. D'après le cours, c'est alors aussi le cas de $\sum w_n\, x^n$... Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a : $U(x)\,V(x) = W(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Mais d'après le théorème d'Abel appliqué à chacune des trois séries, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $U(x)$ tend vers $\sum u_n$, $V(x)$ tend vers $\sum v_n$, $W(x)$ tend vers $\sum w_n$. Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième.

Partie III: Réciproque du théorème d'Abel

8. C'est la question 1.b) !
9. Puisque les coefficients sont positifs, $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$;
   en outre, la fonction f est croissante sur $[0,1[$, d'où $f(x) \leqslant \lim_{x\to1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.
   On a donc : $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant \lim_{x\to1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. En faisant tendre x vers 1 dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.

Partie IV: Théorème de Tauber et Littlewood faible

10. Par hypothèse, la suite (na_n) converge, elle est donc bornée, d'où l'existence de K.
11. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, j'ai

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - 1\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = L - u_n + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

   d'où le résultat.
12. (a) Par définition de K, pour tout n, l'ensemble $\mathcal{E}_n = \{|ka_k|\,,\ k \geqslant n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par K. Elle admet donc une borne supérieure.
    (b) Par hypothèse, (ka_k) converge vers 0 ; pour $\varepsilon > 0$ fixé on dispose donc de N tel que : $\forall k \geqslant N,\ |ka_k| \leqslant \varepsilon$, d'où par définition de la borne supérieure, $\forall n \geqslant N,\ 0 \leqslant M_n \leqslant \varepsilon$. On vient de vérifier la définition de la limite $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
13. Par définition de M_n, On a : $\forall k \geqslant n,\ |a_k| \leqslant \dfrac{M_n}{k} \leqslant \dfrac{M_n}{n}$, d'où, connaissant la somme d'une série géométrique

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leqslant \frac{M_n}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leqslant \frac{M_n}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{M_n}{n} \cdot \frac{1}{1-x}$$

   d'où la première majoration. Ensuite, on utilise l'identité

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ 1 - x^k = (1-x) \sum_{j=0}^{k-1} x^j \leqslant (1-x) \cdot k$$

   d'où la seconde majoration.

Autour des séries entières

14. D'après les résultats précédents, avec $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, on'obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leqslant \left|L - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |ka_k| + M_n$$

Lorsque n tend vers l'infini, le premier terme du majorant ci-dessus tend vers 0 d'après (ii), le second l'est également puisque $na_n = \circ(1)$ donc $\sum_{k=0}^{n} ka_k = \circ(n)$ et le troisième aussi d'après la question précédente. En conclusion $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

15. Par définition de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, nous venons de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et a pour somme L, autrement-dit que f peut se prolonger au segment $[0,1]$ avec $f(1) = L$, ce qui fait que f est alors continue à gauche en 1. Ainsi f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$.

Partie V

16. Il s'agit de séries géométriques :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

En outre si $x \notin]-1,1[$ ces deux séries divergent grossièrement, le "domaine" de convergence est donc $]-1,1[$.

17. Soit $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction somme d'une série entière, de rayon de convergence $R > 0$. Soit $r = \min(1, R)$. J'ai pour tout x de $]-r,r[$

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n\ ,\ x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n \quad \text{et} \quad \frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

d'où, par unicité du développement en série entière, y est solution de (E) sur $]-r,r[$ si et seulement si

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4n(n-1)a_n + 4na_n - a_n = 1$$

soit si et seulement si

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Ainsi $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$ est la seule solution développable en série entière possible de (E). Or cette série entière a un rayon de convergence égal à 1 (pour x non nul fixé, la règle de d'Alembert montre que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{4n^2-1}$ converge absolument pour $|x| < 1$ et diverge grossièrement pour $|x| > 1$).

18. (a) Il vient

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1} = \frac{2n(\alpha+\beta) + \alpha - \beta}{4n^2-1},$$

donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$ conviennent.

(b) Il est immédiat que le rayon de convergence de la série entière définissant h vaut 1. Donc h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et il vient

$$\forall u \in]-1,1[,\ h'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^{2n} = \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right),$$

d'où, en intégrant, vu que $h(0) = 0$, alors $\forall u \in]-1,1[,\ h(u) = \ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$.

(c) Soit $x \in I$ et $u = \sqrt{x}$. On peut écrire $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{u} h(u)$ d'où

$$\forall x \in I,\ H(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

(d) Toutes les séries entières utilisées ayant un rayon de convergence égal à 1, on a grâce à une réindexation

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}\right)$$

soit

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \frac{1}{2}(1 + (x-1)H(x))$$

d'où grâce au résultat précédent

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

(e) Pour l'étude au voisinage de 1, on réécrit

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4\sqrt{x}} \ln\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} \left(1-\sqrt{x}\right) \ln\left(1-\sqrt{x}\right)$$

où la seule forme indéterminée (lorsque x tend vers 1) est du type $t \ln t$, qui tend vers 0 lorsque $t = 1 - \sqrt{x}$ tend vers 0. D'où $L = \dfrac{1}{2}$.

19. On a $na_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (a_n) vérifie $na_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On peux donc appliquer le résultat de la partie 1 à la fonction $f : x \mapsto -1 + \varphi(x)$ (ne pas oublier a_0 !). Nous avons vu alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et a pour somme $-1 + L$. Ainsi $S = -\dfrac{1}{2}$.

20. Par réindexation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right),$$

d'où après simplifications

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

Par conséquent $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, et je retrouve (en ajoutant le terme $a_0 = -1$!) $S = -\dfrac{1}{2}$.

Partie VI: Séries harmoniques transformées

21. Les deux séries ont même rayon de convergence car l'une est la dérivée de l'autre en outre (ε_n) est bornée et ne tend pas vers 0, donc le réyon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n x^{n-1}$ vaut 1

22. Effectivement, on peut écrire $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in]-1, 1[$ ... et appliquer le théorème de Littlewood précédemment admis pour la réciproque du théorème d'Abel.

23. Soit $x \in]-1, 1[$, on a :

$$x^p g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n+p-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_{k-p} x^{k-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_k x^{k-1} = g(x) - \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k x^{k-1}$$

Par conséquent, $g(x) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{p} \varepsilon_k x^{k-1}}{1 - x^p}$.

24. $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$ diverge quand x tend vers 1 ; tandis que $\displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ tend vers $\ln 2$ ...
25. On est bien mis sur la voie par la question précédente : 1 étant racine simple du dénominateur de $g(x)$, il faut et il suffit que 1 soit racine du numérateur pour que l'intégrale soit convergente. (dans ce cas, g est prolongeable par continuité en 1) Une CNS est donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i = 0$.
Cela ne peut pas se produire lorsque p est impair !
26. On a ici : $g(x) = \dfrac{1+x+x^2-x^3-x^4-x^5}{1-x^6} = \dfrac{(1+x+x^2)(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)} = \dfrac{1+x}{1+x^3} + \dfrac{x^2}{1+x^3}$;
on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$. La première intégrale (abélienne) vaut : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{u^2+3/4}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{1/2} \frac{1}{u^2+3/4}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
Pour la seconde, on a une primitive évidente ... Le résultat final est donc : $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{3}{\ln 2}$.

Partie VII: Divergence sur le bord

27. Puisque les coefficients sont positifs, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$;
en outre, la fonction f est croissante sur $[0,1[$, d'où $f(x) \leqslant \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.
On a donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. En faisant tendre x vers 1 dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.
28. La suite $\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)$ est convergente, donc elle est bornée ou encore $b_n = \mathrm{O}(a_n)$. Or $R_c\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right) \geqslant 1$, donc $R_c\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n\right) \geqslant R_c\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right) \geqslant 1$, ce qui montre que g est définie sur $]-1,1[$
29. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in]0,1[$. La suite $\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)$ tend vers λ, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, on a $\left|\dfrac{b_n}{a_n} - \lambda\right| \leqslant \varepsilon$, soit $|b_n - \lambda a_n| \leqslant \varepsilon a_n$. D'autre part $\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)$ est bornée donc il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{b_n}{a_n}\right| \leqslant C$. Enfin on prend $M = C + |\lambda|$ et il vient

$$\begin{aligned}
|g(x) - \lambda f(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - \lambda a_n) x^n\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n - \lambda a_n|\, x^n \\
&\leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |b_n - \lambda a_n|\, x^n + \sum_{n=0}^{N} |b_n - \lambda a_n|\, x^n \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{N} \left(|b_n| + |\lambda|\, a_n\right) x^n \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n + M \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \\
&\leqslant \varepsilon f(x) + M \sum_{n=0}^{N} a_n x^n
\end{aligned}$$

30. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{N} a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{N} a_n$, alors $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{N} a_nx^n}{f(x)}=0$, donc il existe $\delta\in\,]0,1[$ tel que $\forall x\in\,]\delta,1[\,:\left|\dfrac{M\sum\limits_{n=0}^{N} a_nx^n}{f(x)}\right|\leqslant\varepsilon$. Donc pour un tel que $x\in\,]\delta,1[$, on a bien

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}-\lambda\right|\leqslant 2\varepsilon$$

Ceci montre que $\dfrac{g(x)}{f(x)}\xrightarrow[x\to 1^-]{}\lambda$

31. **Application :**
   (a) On a $\dfrac{1}{n+\sin n}\sim\dfrac{1}{n}$ et $R_c\left(\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}x^n\right)=1$, donc $R_c\left(\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^n}{n+\sin n}\right)=1$
   (b) D'après ce qui précède $g(x)\underset{1^-}{\sim}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$

Partie VIII: Théorème de Liouville

32. Puisque $r<R$, il résulte du lemme d'Abel que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}|c_n|r^n$ est convergente. Puisque $|c_nr^ne^{i(n-k)\theta}|=|c_n|r^n$ pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, on en déduit la convergence normale de la série demandée sur $[0,2\pi]$.
33. On a
$$h(re^{i\theta})e^{-ik\theta}=\sum_{n\geqslant 0}c_nr^ne^{i(n-k)\theta}.$$
Puisque la série converge normalement, donc uniformément sur $[0,2\pi]$, on peut inverser l'intégration et la sommation et on trouve
$$\int_0^{2\pi}h(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta=\sum_{n\geqslant 0}c_nr^n\int_0^{2\pi}e^{i(n-k)\theta}d\theta.$$
La dernière intégrale est égale à 0 si $k\neq n$, et à 2π sinon. On en conclut que
$$\int_0^{2\pi}h(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta=2\pi c_kr^k.$$
34. Pour $k\geqslant 1$, on a
$$c_k=\frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi}h(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta.$$
Soit $M>0$ tel que $|h(z)|\leqslant M$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Alors on a
$$|c_k|\leq\frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi}Md\theta=\frac{M}{r^k}.$$
Faisant tendre r vers $+\infty$, on trouve $a_k=0$ pour $k\geqslant 1$, ce qui entraîne que h est constante.