

Corrigé CNC 2015-MP- Physique II

Proposé par: Garmoum Smail
CPGE Agadir.

1. Onde De Broglie

1.1:

La mécanique quantique a pour objet d'étudier et décrire les phénomènes fondamentaux à l'œuvre dans les systèmes physiques, plus particulièrement à l'échelle atomique et subatomique, partant la mécanique classique s'intéresse à l'étude des objets macroscopique.

Les faits physiques qui ont conduit à développer la mécanique quantique:

- * de rayonnement du corps noir
- * d'effet photoélectrique
- * d'effet Compton...

1.2:

des interférences obtenues par les atomes

de néons à très basse température.



Nuage d'atome froids



plaque percée par deux fentes



Les impacts se concentrent sur des bandes //.

1.3: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$: On associe à une particule matérielle (e, \dots) une onde de matière de longueur d'onde λ .

1.4: T.E.C: $E_e = W / (E_{\text{électrique}})$

$$\Rightarrow E_{\text{cf}} - E_{\text{cl}}^{\text{no}} = eU_a \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}}$$

A.N: $v_e = 5,66 \cdot 10^5 \sqrt{U_a} \text{ m.s}^{-1}$

$$1.5: \lambda_e = \frac{h}{m_e v_e} = \frac{h}{m_e \frac{1}{\sqrt{2eU_a}}} = 1,22 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\sqrt{U_a}}$$

A.N: $U_a = 1 \text{ kV} \Rightarrow \lambda_1 = 38,7 \text{ pm} \approx \lambda_1$

$U_a = 100 \text{ kV} \Rightarrow \lambda_2 = 3,87 \text{ pm} \approx \lambda_2$

$U_a = 1 \text{ MV} \Rightarrow \lambda_3 = 0,387 \text{ pm} \approx \lambda_3$

Pour $U_0 = 1 \text{ MV}$ l'approximation classique n'est plus valable; en effet le calcul classique proposé conduit à $v_e = 1,87 \cdot 10^{10} \text{ m.s}^{-1}$!!

1.6 et 1.7:

Les outils de la mécanique classique (lois de Newton, théorèmes énergétiques...) ne sont plus valables pour décrire l'état d'une particule quantique, on introduit dans la fonction $\psi(x, t)$ appelée fonction d'onde (ou amplitude de probabilité). Seule $|\psi|^2$ a une signification physique, elle décrit la densité de probabilité de présence.

1.8: $\rho = |\psi(x, t)|^2 = \psi(x, t) \cdot \psi^*(x, t)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \psi \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Equation de Schrodinger \Rightarrow :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{V(x)}{i\hbar} \psi(x, t)$$

$$\text{et: } \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{i\hbar} V(x) \cdot \psi \cdot \psi^*$$

$$\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \frac{1}{i\hbar} V(x) \psi \cdot \psi^*$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{J} &= \text{div} \left(\frac{i\hbar}{2m} \left[\psi \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \vec{e}_x \right) - \psi^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_x \right) \right] \right) \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\text{Soit: } \text{div } \vec{J}(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0$$

Cette équation est analogue à celle trouvée en électromagnétisme pour la conservation de charge.

En mécanique quantique la probabilité totale de trouver la particule dans un volume donné doit être conservée.

Dans le cas stationnaire: $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \rho(x)$

$\Rightarrow \text{div } \vec{J} = 0$, \vec{J} donc est à flux conservatif.

1.9: $\psi(x, t) = A e^{i\phi(x, t)}$

$$\vec{p}(x,t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(|A|^2 \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} - |A|^2 i \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right) \vec{e}_x$$

$$\text{Soit } \vec{p}(x,t) = \frac{\hbar}{m} |A|^2 \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \vec{e}_x$$

1.10 :

$\psi(x,t) = A e^{-i(\omega t - kx)}$ on remplace dans l'équation de Schrodinger avec $V(x) = 0$ (particule libre) $\Rightarrow \omega = \frac{\hbar}{2m} k^2$ (relation de dispersion) et $E = \hbar \omega$.

la condition de normalisation :

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = +\infty \neq 1$: la condition de normalisation n'est pas vérifiée et par conséquent l'onde plane n'a pas de réalité physique.

1.11 : $\phi(x,t) = \omega t - kx$

2/05 : $\vec{p}(x,t) = \frac{\hbar}{m} |A|^2 \vec{k}$

Soit encore : $\vec{p} = |\psi|^2 \frac{\hbar}{m} \vec{k}$

2. Réflexion de particules sur un mur de potentiel.

2.1 : si $E < V_0$: la particule classique est forcément réfléchie.

si $E > V_0$: la particule fournit son mvt, avec une énergie cinétique : $E_c = E - V_0$.

2.2 : étude quantique dans le cas $E < V_0$

2.2.1 :

On a : $\psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iE}{\hbar} t}$

$V(x) = 0 \quad (x < 0) \quad \text{I}$

2/05 l'éq de

Schrodinger $\Rightarrow \psi''_I(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_I(x) = 0$

On pose $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \psi''_I(x) + k^2 \psi_I(x) = 0$

2/05 $\psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

Soit $\psi_I(x,t) = A e^{-i(\omega t - kx)} + B e^{-i(\omega t + kx)}$

2.2.2 :

Pour $x > 0$: $V(x) = V_0$

L'éq de Schrodinger $\Rightarrow \psi''_{II}(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \psi_{II}(x) = 0$

On pose $\gamma^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) > 0$

alors: $\psi_{II}''(x) - \gamma^2 \psi_{II}(x) = 0$.

$$\psi_{II}(x) = C e^{-\gamma x} + D e^{+\gamma x}$$

$\psi_{II}(x)$ diverge qd $x \rightarrow \infty \Rightarrow D = 0$.

$$\Rightarrow \psi_{II}(x) = C e^{-\gamma x}$$

alors: $\psi_{II}(x) = C e^{-\gamma x} e^{-i\omega t}$

Alors l'onde peut exister "pénétrer" dans la région II (onde évanescente).

2.2.3: $\psi(x,t)$, complexe continue et de classe C^1 alors:

$$\begin{cases} \psi(x=0) = \psi_{II}(x=0) \Rightarrow A+B=C \\ \psi_I'(x=0) = \psi_{II}'(x=0) \Rightarrow ik(A-B) = -\gamma C \end{cases}$$

soit $\frac{B}{A} = \frac{k-i\gamma}{k+i\gamma}$ et $\frac{C}{A} = \frac{2k}{k+i\gamma}$

2.2.4: $\left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{k-i\gamma}{k+i\gamma} \right|^2 = 1$: la particule est forcément réfléchiée par la marche de potentiel (elle pénètre dans la région II sur une longueur de l'ordre de γ puis

réfléchiée).

En mécanique classique la probabilité d'existence dans la région II est nulle.

2.3: cas où $E > V_0$.

2.3.1:

Continuité de ψ en $x=0$: $1+r=t$.

" " " " ψ' " " : $k(1-r) = k_0 t$

2.3.2:

$$\begin{cases} 1+r=t \\ 1-r = \frac{k_0}{k} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{k_0 - k}{k_0 + k} \\ t = \frac{2k}{k_0 + k} \end{cases}$$

2.3.3:

D'après (1.11): $\vec{J} = |\psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$ (valable pour une onde plane)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{J}_1(x) &= |A|^2 \frac{\hbar}{m} k \vec{e}_x - |A|^2 \left(\frac{k_0 - k}{k_0 + k} \right)^2 \frac{\hbar}{m} k_0 \vec{e}_x \\ &= \vec{J}_i + \vec{J}_r \end{aligned}$$

$$\vec{J}_2(x) = |A|^2 \left(\frac{2k}{k_0 + k} \right)^2 \frac{\hbar}{m} k_0 \vec{e}_x = \vec{J}_t(x)$$

$$R = \left| \frac{\vec{J}_r}{\vec{J}_i} \right| = \left(\frac{k_0 - k}{k_0 + k} \right)^2 ; T = \left| \frac{\vec{J}_t}{\vec{J}_i} \right| = \frac{4 k k_0}{k_0 + k}$$

$T + R = 1$: la particule est soit transmise soit réfléchi : Conservation de probabilité de présence.

On a : $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$; $k_0 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

$$\Rightarrow R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \right)^2$$

$$T = \frac{4 \sqrt{1 - V_0/E}}{(1 + \sqrt{1 - V_0/E})^2}$$

alors : qd : $k \rightarrow 0$: $E \rightarrow 0$ $\begin{cases} R \rightarrow 1 \\ T \rightarrow 0 \end{cases}$

$$k \rightarrow \infty : E \rightarrow \infty \begin{cases} R \rightarrow 0 \\ T \rightarrow 1 \end{cases}$$

qd : $E \rightarrow \infty (E \gg V_0)$: d'influence de la marche de potentiel et gommé.

qd $E \rightarrow 0 (E \ll V_0)$: La marche de potentiel se comporte comme une barrière infinie de potentiel, la particule ne peut pénétrer dans la région $x > 0$.

3. Barrière de potentiel.

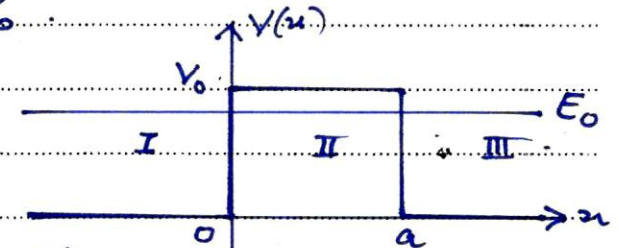
3.1 : Ce modèle peut modéliser par exemple les électrons de conduction dans un métal constituent un gaz de particules quantiques libres.

3.2 :

La région $0 < x < a$ est inaccessible au sens de la mécanique classique.

3.3 : $0 < E < V_0$.

3.3.1 :



l'équation de Schrödinger s'écrit :

* Dans la région I : $\psi_I''(x) + k^2 \psi_I(x) = 0$; $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$
 * " " " II : $\psi_{II}''(x) - \gamma^2 \psi_{II}(x) = 0$; $\gamma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$
 * " " " III : $\psi_{III}''(x) + k^2 \psi_{III}(x) = 0$; $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

D'où :
$$\begin{cases} \psi_I(x) = A_1 e^{ikx} + A_1' e^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) = A_2 e^{\gamma x} + A_2' e^{-\gamma x} \\ \psi_{III}(x) = A_3 e^{ikx} + A_3' e^{-ikx} \end{cases}$$

3.3.2:

Pour $x > a$: la particule se déplace librement vers $+\infty$ alors: $A'_3 = 0$.

3.3.3:

Conditions de raccordement:

$$\begin{cases} \text{en } x=0 & \begin{cases} A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2 & (1) \\ ik(A_1 - A'_1) = \gamma(A_2 - A'_2) & (2) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{en } x=a & \begin{cases} A_2 e^{\gamma a} + A'_2 e^{-\gamma a} = A_3 e^{ika} & (3) \\ \gamma[A_2 e^{\gamma a} - A'_2 e^{-\gamma a}] = ik A_3 e^{ika} & (4) \end{cases} \end{cases}$$

3.3.4: des équations (1), (2), (3) et (4) \Rightarrow

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2e^{-ika}(ik\gamma)}{2ik\gamma(\cosh\gamma a) - k^2 \sinh(ka) + \gamma^2 \sinh(\gamma a)}$$

$$\frac{A'_1}{A_1} = \frac{iA_3 e^{ika} \left(\frac{1}{\gamma k} (k^2 + \gamma^2) \sinh(\gamma a) \right)}{2A_2}$$

$$\Rightarrow T' = \frac{4\gamma^2 k^2}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2(\gamma a)}$$

$$R' = \frac{(\gamma^2 + k^2) \sinh^2(\gamma a)}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 \sinh^2(\gamma a)}$$

$T' = \mathcal{T}(E)$, on remplace k et γ par leurs expressions

$$\Rightarrow T' = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(\gamma a)}$$

Soit:

$$T'(x) = \frac{1-x}{(1-x) + \frac{\sinh^2(\gamma a)}{4x}} \quad \text{avec } x = \frac{E}{V_0}$$

a. $V_0 = \text{cte}$ et $E = \text{cte}$;

* Si $a \uparrow$ T' diminue.

a. $a = \text{cte}$ et $E = \text{cte}$.

* $V_0 \uparrow$ T' diminue

3.3.5:

* Cas d'une barrière mince: $\gamma a \ll 1$

$$\sinh(\gamma a) \simeq \gamma a : T' = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4(E-V_0)} (\gamma a)} \simeq 1.$$

Dans le cas la probabilité de transmission est plus importante.

* Dans le cas d'une barrière épaisse: $\gamma a \gg 1$

$$\sinh(\gamma a) \approx \frac{1}{2} e^{\gamma a}$$

P

$$\text{alors: } T' \approx \frac{16E}{V_0^2} (V_0 - E) e^{-2\gamma a}$$

$$\approx \frac{16E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-\gamma a}$$

On note une décroissance de T' :

* si $a \uparrow$ à $V_0 = \text{cte}$

* si $V_0 \uparrow$ à $a = \text{cte}$

• quand E tend vers V_0 : $T' \approx 1$ les particules traversent la barrière vers la région III ce qui est interdit par la mécanique classique.

Rq: Ce cas se justifie par les fluctuations de l'énergie autour d'une valeur moyenne E (cà d même si $E < V_0$; on peut avoir à un certain instant $E \geq V_0$).

3.3.6: On se place dans le cas $\gamma a \gg 1$

$$\text{on a } T' = \frac{16}{1 - \frac{E}{V_0}} \frac{E}{V_0^2} e^{-2\gamma a}$$

$$T' = f\left(\frac{E}{V_0}\right) \exp\left(-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$

$$\text{avec } f\left(\frac{E}{V_0}\right) = \frac{16E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right)$$

$$f\left(\frac{E}{V_0}\right) \text{ s'annule par } \frac{E}{V_0} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\cdot f_{\max} \text{ par } \frac{E}{V_0} = 0,5 \text{ et } f_{\max} = 4$$

A.N:

$$V_0 = 2\text{eV et } a = 1\text{nm}; E = 1\text{eV}$$

Calcul de T' pour:

$$\cdot \text{l'électron: } T' \approx 10^{-3}$$

$$\cdot \text{Proton: } T' \approx 10^{-9}$$

T' est plus importante si la masse est plus faible.

d'hypothèse $\alpha \gg 1$ doit être accompagnée par la condition sur la masse (m); les effets quantiques sont plus marqués pour les particules les moins massives.

3.3.7. Courants de probabilités:

* Régime I ($x < 0$):

→ onde incidente: $\vec{j}_i = |A_1|^2 \frac{\hbar}{m} k \vec{e}_x$

→ " réfléchi: $\vec{j}_r = -|A_1|^2 \frac{\hbar}{m} k \vec{e}_x$

* Régime II ($0 < x < a$): d'onde n'est pas plane progressive mais une onde évanescente, on peut donc utiliser la formule de 1.11, on utilise donc la définition:

$$\text{de } \vec{j}: \vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} [\psi_2 \cdot \text{grad} \psi_2^* - \psi_2^* \cdot \text{grad} \psi_2]$$

$$\text{avec } \psi_2 = A_2 e^{\gamma x} + A_2' e^{-\gamma x}$$

(calcul qui n'a pas d'intérêt ici)

* Régime III: $\vec{j}_t = \frac{\hbar}{m} |A_3|^2 \cdot k \vec{e}_x$

$$R' = \frac{|A_1'|^2}{|A_2|^2} \quad T' = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

On remplace R' et T' par leurs expressions on trouve le résultat demandé: $R' + T' = 1$; ce résultat exprime la conservation de probabilité de présence: une particule quantique est soit réfléchi par la barrière, soit transmise.

3.4

Pour $E > V_0$: on retrouve le cas d'une marche de potentiel avec $E > V_0$, type de calcul déjà fait.