LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

On pose pour tout réel $x \in]1, +\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}$

PROBLÈME 1: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$

Dans cette partie, z un nombre complexe tel que $|z| < 2$ et $(u_{n,p})$ est une famille de nombres complexes définie pour n et p entiers naturels, $n \geqslant 2$, $p \geqslant 2$ par $u_{n,p} = \frac{z^n}{p^n}$.

L'objectif de cette partie est de calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$

1. (a) Justifier que, pour tout $p \geqslant 2$, la série $\sum_{n \geqslant 2} u_{n,p}$ est absolument convergente et calculer $S_p = \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{z^n}{p^n} \right|$

   (b) En déduire que la famille $(u_{n,p})_{n \geqslant 2, p \geqslant 2}$ de nombres complexes est sommable.

2. (a) Démontrer que $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) z^n$

   (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$

PROBLÈME 2: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n)$

On rappelle que $\forall x \in]-1, 1]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$.

Dans ce problème on calcule la valeur de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n)$.

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$.

1. (a) Montrer que $x_{n-1} - x_n \sim \frac{1}{2n^2}$

   (b) En déduire que $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers un réel γ

2. Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma$.

3. On considère la suite double $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k} \right)_{\substack{n \geqslant 2 \\ k \geqslant 2}}$.

   (a) Justifier que, pour tout $n \geqslant 2$, la série $\sum_{k \geqslant 2} \frac{(-1)^k}{kn^k}$ est absolument convergente ;

   (b) Vérifier que $S_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kn^k} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

   (c) En déduire que la famille $\left(\frac{(-1)^k}{kn^k} \right)_{\substack{n \geqslant 2 \\ k \geqslant 2}}$ est sommable. .

4. Montrer que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) = \gamma$.

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

PROBLÈME 3: Calcul de trois sommes $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}} \frac{1}{p^2\,q^2}$, $\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p|q}} \frac{1}{p^2\,q^2}$ et $\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^{\star})^2\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2\,q^2}$.

Dans cette partie on se propose de calculer les trois sommes

$$A=\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}} \frac{1}{p^2\,q^2},\ B=\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p|q}} \frac{1}{p^2\,q^2} \text{ et } C=\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^{\star})^2\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2\,q^2}.$$

On considère la suite double $\left(\frac{1}{p^2\,q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ et les ensembles

$$I=\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2} \mid p \text{ divise } q\right\}$$

et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad J_n=\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2} \mid p\wedge q=n\right\} \text{ et } I_n=\{(p,np)\mid p\in\mathbb{N}^*\}$$

1. Montrer que $\left(\frac{1}{p^2\,q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable et calculer $A=\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}} \frac{1}{p^2\,q^2}$
2. (a) Justifier que la famille $\left(\frac{1}{p^2\,q^2}\right)_{(p,q)\in I}$ est sommable ;
   (b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de I ;
   (c) Par le théorème de la sommation par paquets calculer $\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p|q}} \frac{1}{p^2\,q^2}$.
3. (a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{(p,q)\in J_n}\frac{1}{p^2q^2}=\frac{1}{n^4}\sum_{(p,q)\in J_1}\frac{1}{p^2q^2}$;
   (b) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$;
   (c) Déduire la valeur de la somme $C=\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2\,q^2}$

PROBLÈME 4: Sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$

Soit a et b deux réels strictement positifs.
On propose d'étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

1. On suppose, dans cette question, que la famille $\left(\frac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable
   (a) Donner un équivalent de $\frac{1}{a^n+b^m}$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis de $\frac{1}{a^n+b^m}$ lorque $m\to+\infty$ (discuter selon les valeurs de a et b).
   (b) En déduire que $a>1$ et $b>1$.
2. On suppose que $a>1$ et $b>1$. On pose $\alpha=\frac{1}{\sqrt{a}}$ et $\beta=\frac{1}{\sqrt{b}}$
   (a) Montrer majoration de $\frac{1}{a^n+b^m}\leqslant\frac{1}{2}\alpha^n.\beta^m$
   (b) Etudier la sommabilité de $(\alpha^n\beta^m)$ puis conclure .

Les classiques de la sommabilité

Problème 5: Étude d'une sommabilité

On considère la suite double $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$, définie par : $u_{p,q}=\dfrac{1}{p^\alpha+q^\beta}$

1. Montrer que si $\alpha\leqslant 1$ ou $\beta\leqslant 1$, alors $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ n'est pas sommable.

On suppose dans ce qui suit que $\alpha>1$ et $\beta>1$

2. Soit $p\geqslant 1$ fixé. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{q\geqslant 1}u_{p,q}$ est convergente. On note $X_p=\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}u_{p,q}$
3. On considère la fonction $\varphi_p:\left\{\begin{array}{ccc}[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{p^\alpha+t^\beta}\end{array}\right.$.
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi_p(t)\,\mathrm{d}t$, puis montrer que
   $$\int_1^{+\infty}\varphi_p(t)\,\mathrm{d}t\leqslant X_p\leqslant\int_0^{+\infty}\varphi_p(t)\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que :
   $$\frac{1}{p^\gamma}\int_{p^{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{+\infty}\varphi_1(t)\,\mathrm{d}t\leqslant X_p\leqslant\frac{1}{p^\gamma}\int_0^{+\infty}\varphi_1(t)\,\mathrm{d}t$$
   Où γ est une constante que l'on déterminera.
4. Conclure que $X_p\sim\dfrac{C}{p^\gamma}$, où C est une constante à préciser
5. Étudier la sommabilité de la famille

LES CLASSIQUES DE LA SOMMABILITÉ

PROBLÈME 1: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)$

1. (a) Soit $p \geqslant 2$, la série $\sum_{n\geqslant 2}^{+\infty}\left|\frac{z^n}{p^n}\right|$ est géométrique de raison $\left|\frac{z}{p}\right| < 1$, donc elle converge. Notons S_p sa somme, alors $S_p = \sum_{n=2}^{+\infty}\left|\frac{z^n}{p^n}\right| = \frac{\left|\frac{z}{p}\right|^2}{1-\left|\frac{z}{p}\right|} = \frac{|z|^2}{p\,(p-|z|)}$

   (b) Comme $S_p \sim \frac{|z|^2}{p^2}$, alors la série $\sum_{p\geqslant 2} S_p$ est convergente. D'après le critère suffisant de sommabilité, la famille $(u_{n,p})_{n\geqslant 2,p\geqslant 2}$ est sommable

2. (a) La famille $(u_{n,p})_{n\geqslant 2,p\geqslant 2}$ est sommable, donc d'après le théorème de la sommation par paquets, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)\,z^n = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{z^n}{p^n} \quad = \quad \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^n}{p^n} = \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{\frac{z^2}{p^2}}{1-\frac{z}{p}} = \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{z^2}{p(p-z)}$$

   (b) Pour $z=1$, on a $|z|<2$ et la formule précédente devient

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1) \quad = \quad \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p(p-1)} = \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right) = 1$$

PROBLÈME 2: Calcul de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)$

1. (a) On a

$$\begin{aligned} x_{n-1}-x_n &= -\frac{1}{n}-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n^2}+\circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

   Donc $x_{n-1}-x_n \sim \frac{1}{2n^2}$

   (b) Par le critère de Riemann, la série télescopique $\sum_{n\geqslant 1}(x_n-x_{n-1})$ converge, donc la suite (x_n). Soit γ sa limite

2. Soit $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1) \\ &= x_n+\ln(n)-\ln(n+1) \\ &= x_n-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma \end{aligned}$$

Les classiques de la sommabilité

donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\gamma$.

3. (a) Soit $n\geqslant 2$, pour tout $k\geqslant 2$ on a $0\leqslant \dfrac{1}{kn^k}\leqslant \dfrac{1}{n^k}$. La série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^k}$ de raison $\dfrac{1}{n}\in\,]0,1[$ est convergente, donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{kn^k}$ convergente. Notons $S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{kn^k}$.

   (b) On a $0\leqslant S_n\leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}=\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{n\,(n-1)}$, donc $S_n=O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et par suite $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}S_n$ converge

   (c) D'après le critère suffisant de la sommabilité la suite double $\left(\dfrac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{\substack{n\geqslant 2\\ k\geqslant 2}}$ est sommable.

4. D'après la question 2.) on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\gamma$.
   D'autre part, on a
$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}$$
   La suite double $\left(\dfrac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{\substack{n\geqslant 2\\ k\geqslant 2}}$ est sommable, alors par le théorème de la sommation par paquets
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}=\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}$$
   Avec
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}=\frac{(-1)^k}{k}\left(\zeta(k)-1\right)$$
   et
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\gamma-1+\ln 2$$
   Alors
$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\zeta(k)-1\right)=\gamma-1+\ln 2$$
   La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{k}$ est convergente de somme $1-\ln 2$. Ainsi
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\zeta(n)-1\right)+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\gamma$$

Problème 3: Calcul de trois sommes $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}}\frac{1}{p^2\,q^2}$, $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p\mid q}}\frac{1}{p^2\,q^2}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^\star)^2\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{p^2\,q^2}$.

1. Il s'agit d'une suite double de réels positifs
   — Soit $p\in\mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{q\geqslant 1}\frac{1}{p^2\,q^2}$ est convergente de somme $S_p=\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2\,q^2}=\frac{1}{p^2}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}=\frac{\zeta(2)}{p^2}$
   — La série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{\zeta(2)}{p^2}$ est convergente de somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2)}{p^2}=\zeta^2(2)$

Donc la famille est sommable et par le théorème de sommation par paquets, on a

$$A=\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}}\frac{1}{p^2\,q^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2\,q^2}=\zeta^2(2)$$

2. (a) La famille $\left(\dfrac{1}{p^2\,q^2}\right)_{(p,q)\in I}$ est une sous-famille d'une famille sommable, donc elle est sommable ;

   (b) — Soit $n\in\mathbb{N}^*$ l'élément $(1,n)\in I_n$, donc $I_n\neq\emptyset$
   — Soit $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $m\neq n$. Si $(p,q)\in I_n\cap I_m$, alors $q=np=mp$, donc $m=n$. Absurde
   — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $I_n\subset I$, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}I_n\subset I$. Inversement si $(p,q)\in I$, alors $p\mid q$, donc il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $q=pn$, soit $(p,q)\in I_n$, ainsi $I\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}I_n$. D'où $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}I_n=I$

   On conclut que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de I

   (c) Par le théorème de la sommation par paquets on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}\\ p\mid q}}\frac{1}{p^2\,q^2}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in I_n}\frac{1}{p^2q^2}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2p^4}\\&=\zeta(2)\zeta(4)\end{aligned}$$

3. (a) L'application $\sigma:\left\{\begin{array}{ccc}J_1&\longrightarrow&J_n\\(p,q)&\longmapsto&(pn,qn)\end{array}\right.$ est une bijection. La famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in J_1}$ est sommable car elle est sous-famille d'une famille sommbale. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{(p,q)\in J_n}\frac{1}{p^2q^2}=\sum_{(p,q)\in J_1}\frac{1}{(np)^2(nq)^2}=\frac{1}{n^4}\sum_{(p,q)\in J_1}\frac{1}{p^2q^2}$$

   (b) — Soit $n\in\mathbb{N}^*$ l'élément $(n,n)\in J_n$, donc $J_n\neq\emptyset$
   — Soit $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $m\neq n$. Si $(p,q)\in J_n\cap J_m$, alors $p\wedge q=m=n$, donc $m=n$. Absurde
   — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $J_n\subset\mathbb{N}^{*2}$, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}J_n\subset\mathbb{N}^{*2}$. Inversement si $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$, on pose $n=p\wedge q$, donc $(p,q)\in J_n$, ainsi $\mathbb{N}^{*2}\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}J_n$. D'où $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}J_n=\mathbb{N}^{*2}$

   On conclut que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$;

   (c) Par le théorème de la sommation par paquets on a :

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}}\frac{1}{p^2\,q^2}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in J_n}\frac{1}{p^2q^2}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in J_1}\frac{1}{n^4p^2q^2}\\&=C\zeta(4)\end{aligned}$$

   D'autre part $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{\star 2}}\frac{1}{p^2\,q^2}=\zeta^2(2)$, donc $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^\star)^2\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{p^2\,q^2}=C=\frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}$

Problème 4: Sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$

Les classiques de la sommabilité

1. (a) On a

$$\frac{1}{a^n+b^m} \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{b^m} & \text{si } 0<a<1 \\ \dfrac{1}{1+b^m} & \text{si } a=1 \\ \dfrac{1}{a^n} & \text{si } a>1 \end{cases}$$

De même

$$\frac{1}{a^n+b^m} \underset{m\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \dfrac{1}{a^n} & \text{si } 0<b<1 \\ \dfrac{1}{a^n+1} & \text{si } b=1 \\ \dfrac{1}{b^m} & \text{si } b>1 \end{cases}$$

(b) Soit $m\in\mathbb{N}$, la sous-famille $\left(\dfrac{1}{a^n+b^m}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de la famille sommable $\left(\dfrac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{a^n+b^m}$ est convergente. Donc il est nécessaire que son terme général tend vers 0, soit

$$\frac{1}{a^n+b^m}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Ceci n'est possible que si $a>1$.
De la même façon on montre que $b>1$

2. On suppose que $a>1$ et $b>1$. On pose $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ et $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{b}}$

(a) Un cadeau de tronc commun : $\forall(u,v)\in(\mathbb{R}_+)^2$, $2\sqrt{uv}\leq u+v$.

(b) On utilise ínégalité précédente, en posant $u=a^n$ et $v=b^m$:

$$a^n+b^m\geqslant 2\sqrt{a}^n\sqrt{b}^m \Longrightarrow \frac{1}{a^n+b^m}\leqslant\frac{1}{2}\alpha^n.\beta^m$$

(c) $(\alpha^n\beta^m)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est une suite double de réels positifs.

— Soit $m\geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha^n\beta^m$ converge, c'est une série géométrique de raison $\alpha\in]0,1[$, de somme $S_m=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha^n\beta^m=\dfrac{\beta^m}{1-\alpha}$

— $\sum\limits_{m\geqslant 0}S_m$ est convergente car il s'ait d'une série géométrique de raison $\beta\in]0,1[$

Ainsi la famille $(\alpha^n\beta^m)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Or

$$\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\quad \frac{1}{a^n+b^m}\leqslant\frac{1}{2}\alpha^n.\beta^m$$

Donc, par le critère de comparaison, $\left(\dfrac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable

On conclut l'équivalence

$$\left(\frac{1}{a^n+b^m}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable } \Longleftrightarrow a>1 \text{ et } b>1$$

Problème 5: Étude d'une sommabilité

Les classiques de la sommabilité

1. — Si $\alpha \leqslant 1$, alors pour q fixé, on a $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^\alpha + q^\beta} \sim \dfrac{1}{p^\alpha}$ et par le critère de Riemann la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} u_{p,q}$ diverge, donc la non sommabilité de la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$
   — Si $\beta \leqslant 1$, alors pour p fixé, on a $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^\alpha + q^\beta} \sim \dfrac{1}{q^\beta}$ et par le critère de Riemann la série $\sum\limits_{q\geqslant 1} u_{p,q}$ diverge, donc la non sommabilité de la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$
2. Par hypothèse $\beta > 1$, alors pour p fixé, on a $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^\alpha + q^\beta} \sim \dfrac{1}{q^\beta}$ et par le critère de Riemann la série $\sum\limits_{q\geqslant 1} u_{p,q}$ converge. Notons X_p sa somme
3. (a) L'application φ est continue, décroissante et positive sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que la série $\sum\limits_{q\geqslant 1} \varphi_p(q) = \sum\limits_{q\geqslant 1} u_{p,q}$ qui est convergente.
   Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on utilise l'encadrement $\displaystyle\int_q^{q+1} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi_p(q) \leqslant \int_{q-1}^{q} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t$. Après on somme de $q = 1$ à l'infini, on obtient :
   $$\int_1^{+\infty} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t \leqslant X_p \leqslant \int_0^{+\infty} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t$$
   (b) On effectue le changement de variable $s = \dfrac{t}{p^{\frac{\alpha}{\beta}}}$, on obtient
   $$\int_0^{+\infty} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha + t^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{p^{\frac{\alpha}{\beta}}}{p^\alpha + p^\alpha s^\beta}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{p^{(\alpha - \frac{\alpha}{\beta})}} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t$$
   et
   $$\int_1^{+\infty} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha + t^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_{p^{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{+\infty} \frac{p^{\frac{\alpha}{\beta}}}{p^\alpha + p^\alpha s^\beta}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{p^{(\alpha - \frac{\alpha}{\beta})}} \int_{p^{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{+\infty} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t$$
   On prend $\gamma = \alpha - \dfrac{\alpha}{\beta}$
4. On a $\displaystyle\int_{p^{-\frac{\alpha}{\beta}}}^{+\infty} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t$, donc d'après le théorème d'encadrement $p^\gamma X_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t$, d'où $X_p \sim \dfrac{C}{p^\gamma}$
5. D'après le théorème de sommation par paquets la suite double $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable, si et seulement, si la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} X_p$ est convergente, si et seulement, si la série de Riemann $\sum\limits_{p\geqslant 1} \dfrac{1}{p^\gamma}$ converge, si et seulement, si $\gamma > 1$.
   $$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}} \Leftrightarrow \alpha > 1,\ \beta > 1 \ \text{ et } \ \alpha - \frac{\alpha}{\beta} > 1$$