Planche n° 36. Fonctions uniformément continues

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (IT)**

Pour tout réel x de $[0, +\infty[$ on pose $f(x) = \sqrt{x}$.

1) a) Montrer directement sans utiliser le théorème de Heine que la fonction f est uniformément continue sur $[0, 1]$.

b) Montrer que f n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.

2) Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

3) Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice n° 2 (IT)**

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice n° 3 (*IT)**

Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice n° 4 (***)

Soit f périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Planche n° 37. Intégration sur un segment

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Toutes les fonctions considérées dans cette planche sont à valeurs réelles .

Exercice n° 1 : (****)

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a,b]$. Pour n entier naturel non nul donné, on pose $u_n = \left(\displaystyle\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n}$.

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite (commencer par le cas $g=1$).

Exercice n° 2 : (I)**

1) Soit f une application de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(1)\neq 0$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ puis déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ (étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$).

2) Mêmes questions en supposant que f est de classe C^2 sur $[0,1]$ et que $f(1)=0$ et $f'(1)\neq 0$.

Exercice n° 3 : (*IT)**

Limites quand n tend vers $+\infty$ de

1) $\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\sin\frac{k\pi}{n}$ **2)** $\displaystyle\left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)\right)^{1/n}$ ($a>0$ donné) **3)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$

5) $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$ **6)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$ **7)** $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$ **8)** $\displaystyle n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n/k}}{k^2}$.

Exercice n° 4 : (*I)**

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice n° 5 : (I)** (Le lemme de LEBESGUE).

1) On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t)f(t)\,dt = 0$.

2) (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

Exercice n° 6 : (*T)**

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a,b]$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left(\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right)\end{array}$.

1) Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.

2) Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m=\text{Inf}\{\varphi(f),\ f\in E\}$. Montrer que cette borne inférieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f)=m$.

Exercice n° 7 : (****)

Etude complète de la fonction $f(x)=\displaystyle\frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt$.

Exercice n° 8 : (***)

Pour x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt$.

1) Montrer que f est impaire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} 2xf(x) = 1$.

4) Soit $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et que g admet sur $]0, +\infty[$ un unique zéro noté x_0 vérifiant de plus $0 < x_0 < 1$.

5) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice n° 9 : (***)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $2\int_0^1 f^2(t)\, dt \leqslant \int_0^1 f'^2(t)\, dt$.

Exercice n° 10 : (***)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour x réel, on pose $F(x) = \int_a^b |t - x| f(t)\, dt$. Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 11 : (***)

Soit a un réel strictement positif et f une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0, a],\ \forall y \in [0, f(a)],\ xy \leqslant \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^y f^{-1}(t)\, dt$.

Exercice n° 12 : (T)**

Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\, dt = \dfrac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice n° 13 : (T)**

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1],\ f(x)g(x) \geqslant 1$.
Montrer que $\left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right) \geqslant 1$.

Exercice n° 14 : (***)

Equivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{1}{(n+k)^2}$.

Exercice n° 15 : (**)

Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{k}{n^2} \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice n° 16 : (**)

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$\textbf{1)}\ u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{Arcsin}^n\, x\, dx \quad \textbf{2)}\ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx \quad \textbf{3)}\ \int_0^\pi \frac{n \sin x}{x+n}\, dx.$$

Exercice n° 17 : (***)

Etude complète de $F(x) = \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

Exercice n° 18 : (***)

Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt$.

Exercice n° 19 : (***)

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et soit $M=\sup\{|f'(x)|,\ x\in[a,b]\}$.

Montrer que $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant M\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice n° 20 : (T)**

Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\ dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\ dt$.

Exercice n° 21 : (*I)**

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\dfrac{dt}{\ln t}$.

2) Etude complète de $F(x)=\int_x^{x^2}\dfrac{dt}{\ln t}$.

Exercice n° 22 : (****)

Soit $f(t)=\dfrac{t^2}{e^t-1}$ si $t\neq 0$ et 0 si $t=0$.

1) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $F(x)=\int_0^x f(t)\ dt$. Montrer que F a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$ puis que $\ell = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^3}$.

