Électrostatique - TD n ° 2
Formulation locale des lois de l'électrostatique

Formulation locale des lois de l'électrostatique

Exercice I : Champ électrostatique uniforme

Montrer que dans une région vide de charges, où les lignes de champ électrostatique sont rectilignes et parallèles, le champ est uniforme.

Exercice II : Champ divergent de divergence nulle

On considère le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q située en $r = 0$.

1. Rappeler l'expression du champ électrostatique.
2. Calculer la divergence de ce champ en coordonnées sphériques de centre O. Conclure.
3. Quel est le flux de ce champ à travers une sphère de centre O et de rayon r ?
4. Pourquoi ces deux résultats ne sont-ils pas en désaccord ?

On donne l'expression de la divergence d'un vecteur $\overrightarrow{E} = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta + E_\varphi\vec{u}_\varphi$ en coordonnées sphériques

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, E_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\ .$$

Exercice III : Forme locale du théorème de Gauss

On considère un cylindre diélectrique (donc non conducteur) de longueur infinie, de rayon R, chargé avec la densité volumique de charge ρ_0 constante. On se propose de déterminer le champ électrostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution à l'aide de la forme locale du théorème de Gauss.

On rappelle l'expression de la divergence du vecteur $\overrightarrow{E} = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta + E_z\vec{u}_z$ dans le système de coordonnées cylindriques

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\ .$$

1. À partir de l'expression intégrale du théorème de Gauss, démontrer sa forme locale.
2. Déterminer, par des considérations de symétrie et d'invariance, les caractéristiques du champ électrostatique.
3. Montrer, à l'aide de la forme locale du théorème de Gauss, que la norme du champ électrostatique <u>à l'extérieur du cylindre</u> est de la forme

$$E(r > R) = \frac{K}{r}\ ,$$

où K est une constante que l'on déterminera par la suite.

4. Montrer de même que la norme du champ électrostatique à l'intérieur du cylindre s'écrit

$$E(r < R) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r \ .$$

5. Y-a-t-il discontinuité du champ électrique à la traversée de la surface du cylindre ? Justifier. En déduire l'expression de la constante K introduite dans la question 3.

Exercice IV : Écrantage de Debye dans un plasma*

Un plasma est une phase de la matière (on l'appelle parfois quatrième état de la matière). C'est un milieu constitué de particules neutres, d'ions et d'électrons. C'est de loin l'état de la matière le plus représenté dans l'univers (99% de la matière est sous forme de plasma). On en trouve dans le milieu interstellaire ou dans l'ionosphère (plasma naturel), mais on en utilise aussi industriellement dans les tubes à décharge, les téléviseurs ou encore dans les réacteurs Tokamak destinés à réaliser une fusion nucléaire contrôlée. Le but de cet exercice est d'étudier les propriétés d'écrantage électrostatique dans un plasma.

On considère un plasma électriquement neutre, constitué de particules libres de charges $+q$ (ions) et $-q$ (électrons). On choisit comme origine un ion situé au point O. En un point M à la distance r de O, le potentiel électrostatique est $V(r)$. Les densités volumiques de charges positive et négative sont respectivement

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho_+(r) & = & \rho_0 \exp\left(-\dfrac{qV(r)}{kT}\right) \\ \rho_-(r) & = & -\rho_0 \exp\left(\dfrac{qV(r)}{kT}\right) \end{array}\right. ,$$

où ρ_0 désigne une constante, k est la constante de Boltzman, T la température et $V(r)$ le potentiel électrostatique.

1. **Détermination du potentiel**
   (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $V(r)$.
   (b) Dans le cas d'une fusion nucléaire contrôlée, la température peut atteindre 10 millions de degrés Celsius. À ces températures on peut légitimement supposer que $qV \ll kT$. Résoudre l'équation différentielle précédente dans l'approximation des hautes températures. On introduira une distance caractéristique du phénomène, appelée longueur de Debye, dont on donnera le sens physique.
   (c) Comparer le potentiel obtenu au potentiel créé par une charge q placée en O dans le vide. Interpréter en justifiant le nom d'écrantage donné au phénomène.

2. **Détermination du champ électrostatique**
   Déterminer l'expression du champ électrostatique à une distance r de l'ion situé en O.

3. **Étude de la distribution de charge**
   (a) Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ au point M.
   (b) Calculer la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r dans l'approximation des hautes températures. Examiner les cas $r \to 0$ et $r \to \infty$. Commentaires.
   (c) Déterminer la densité volumique moyenne de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon r.

(d) Déterminer la densité radiale $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}$ de charge (c'est le taux de variation de la charge $Q(r)$ avec le rayon r de la sphère centrée en O). Montrer qu'il existe un maximum de charges négatives à la distance d de l'ion O. Comparer cette distance à la longueur de Debye.

(e) À l'aide des questions précédentes, proposer un modèle décrivant la structure de l'atome.

On rappelle la forme du laplacien d'une fonction $V(r)$ en coordonnées sphériques :

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2\left[rV(r)\right]}{\mathrm{d}r^2}$$

Conducteurs en équilibre électrostatique - Condensateurs

Exercice V : Pouvoir des pointes

On assimile le sol à un plan conducteur et on suppose qu'une pointe a été érigée verticalement. À haute altitude, on suppose que les charges électriques réparties dans l'atmosphère sont responsables de l'existence d'un champ électrique vertical.

1. En procédant sans calcul, indiquer quelle va être l'allure des lignes de champ au voisinage de la pointe.
   En déduire que le champ électrique est plus intense au niveau de la pointe que sur le reste du sol.
2. Quel raisonnement peut-on faire en examinant les surfaces équipotentielles ?

Exercice VI : Cylindre conducteur placé dans un champ uniforme

On considère un cylindre conducteur infini d'axe Oz et de rayon R maintenu au potentiel nul et plongé dans un champ électrique extérieur uniforme $\overrightarrow{E} = E_0\,\vec{u}_x$. Il se produit un phénomène d'influence qui amène un déplacement des charges dans le conducteur et la production d'une électrisation superficielle. Le champ créé par le cylindre s'ajoute au champ extérieur.
On recherche ici, à l'équilibre, l'expression du potentiel et du champ électrique total, ainsi que la distribution des charges sur le cylindre.

1. Examiner les symétries et invariances du problème.
2. Quelle est l'équation locale satisfaite par le potentiel V en tout point à l'extérieur du cylindre ?
   On se propose de chercher si une solution de la forme $V = f(r)\,g(\theta)$ (produit de deux fonctions d'une variables) convient. Montrer qu'il existe alors une constante K telle que $K = r\frac{f'}{f} + r^2\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g}$.
3. Chercher g sous la forme $g = \cos\theta$ et en déduire K. Chercher alors une solution pour f sous la forme $f = r^n$ puis en déduire une relation entre K et n, donc les valeurs de n.
   Montrer que l'expression $V(r,\theta) = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\cos\theta$ convient.
4. On s'intéresse à la solution dans l'espace extérieur au cylindre. À l'aide des conditions aux limites, déterminer A et B en fonction de E_0 et R.
5. Exprimer le champ électrique total à l'extérieur du cylindre pour en déduire la densité surfacique de charge en tout point du cylindre.
   Quelle est la charge électrique totale portée par unité de longueur du cylindre ?

Exercice VII : Condensateur sphérique

On considère un condensateur formé de deux armatures sphériques concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$.

1. Déterminer la capacité de ce condensateur.
2. Que devient la capacité de ce condensateur si la distance entre les armatures est petite.
3. Retrouver l'expression de la capacité du condensateur à partir du calcul de l'énergie emmagasinée.

Exercice VIII : Stockage de l'énergie sous forme électrique

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures de surface $S = 10$ cm^2 séparées de $e = 1$ mm.

1. Déterminer la capacité de ce condensateur.
2. Si le milieu entre les armatures est de l'air, de permittivité proche de celle du vide, le champ électrostatique ne peut excéder une valeur de l'ordre de 3.10^6 V.m^{-1}, au-delà de laquelle l'ionisation de l'air crée une étincelle de rupture entre les armatures du condensateur. Déterminer la tension et la charge correspondante. Commentaire.
3. Déterminer l'énergie volumique maximale associée au champ électrostatique et l'énergie totale stockée dans le condensateur.
4. On utilise l'énergie stockée par le condensateur pour faire fonctionner un plaque de cuisson électrique de 1 kW. Pendant combien de temps peut-on espérer utiliser cette plaque ? Commentaire.

Exercice IX : Influence d'une charge ponctuelle sur une sphère

1. On considère une charge Q à l'origine des coordonnées et une charge q de signe opposé, située sur l'axe (Ox) à l'abscisse d. On supposera $Q \neq -q$.
   a- Montrer (par exemple par le calcul) que l'équipotentielle $V = 0$ est, dans le plan (xOy), un cercle dont le centre est sur (Ox).
   b- Déterminer en fonction des données, les abscisses x_1 et x_2 des points d'intersection de ce cercle avec l'axe (Ox), son rayon R et l'abscisse x de son centre.

2. On considère une charge Q à l'origine des coordonnées et une boule métallique de rayon R, dont le centre C est sur (Ox), à l'abscisse $x > R$. Cette boule est maintenue au potentiel nul.
   a- Montrer qu'à l'extérieur de la boule, le champ est le même que celui créé par la charge Q et une charge $q = -QR/x$, placée sur l'axe (Ox) à l'abscisse $d = x - R^2/x$.
   b- En déduire la force s'exerçant entre la sphère et la charge Q.

3. On considère une charge Q à l'origine des coordonnées et une boule métallique B de rayon R dont le centre est sur Ox à l'abscisse $x > R$. Cette boule est isolée et sa charge totale est Q_0.
   a- Calculer son potentiel V.
   b- Quelle est la force qui s'exerce entre la charge Q et B ?
   Indication : superposer deux états d'équilibres
   c- Que se passe-t-il si $Q_0 = 0$?