Mécanique

MECA1 - Intégrales

Résumé

Eléments d'intégration et notations

Intégrales sur une ligne Γ	Intégrales sur une surface S	Intégrale sur un volume V
$\int_{\Gamma} \vec{f}\,dl$	$\int_{S} \vec{f}\,dS$	$\int_{V} \vec{f}\,dV$
En cartésien, cela donne :		
$\int_{\Gamma} \vec{f}\,dl = \int_{x_1}^{x_2} \vec{f}\,dx$	$\int_{S} \vec{f}\,dS = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} \vec{f}\,dx\,dy$	$\int_{V} \vec{f}\,dV = \int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} \vec{f}\,dx\,dy\,dz$

	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
Ligne	$dl = dx$ $dl = dy$ $dl = dz$	$dl = Rd\theta$ $dl = dr$ $dl = dz$	$dl = Rd\psi$ $dl = R\sin\psi\, d\theta$ $dl = dr$
Surface	$dS = dxdy$ $dS = dxdz$ $dS = dydz$	$dS = Rd\theta dz$ $dS = rdrd\theta$ $dS = drdz$	$dS = R^2\sin\psi\, d\theta d\psi$
Volume	$dV = dxdydz$	$dV = rdrd\theta dz$	$dV = r^2\sin\psi\, drd\theta d\psi$

Points de méthode

Toute intégration demande un choix de repère pour définir les bornes

Les bornes de l'intégrale doivent être définies de manière à décrire entièrement ce sur quoi on intègre

On utilise le principe de séparation des variables :

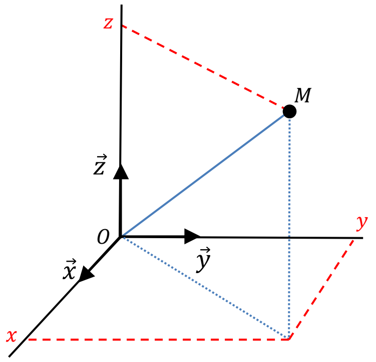
$$\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x)g(y)h(z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \int_{y_1}^{y_2} g(y)dy \int_{z_1}^{z_2} h(z)dz$$

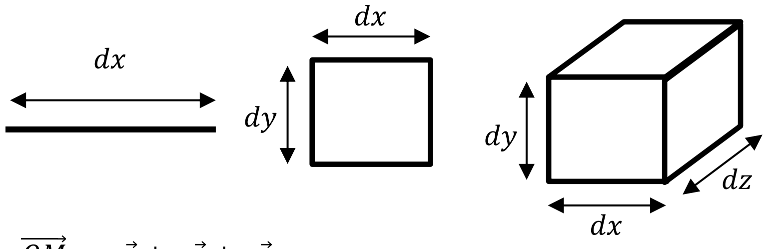
Pour trouver une longueur, surface ou volume :

Longueur	Surface	Volume
$L = \int_{\Gamma} dl$	$S = \int_{S} dS$	$V = \int_{V} dV$

Il faut toujours intégrer de la plus petite borne à la plus grande, sinon des erreurs de signe apparaissent

Coordonnées cartésiennes

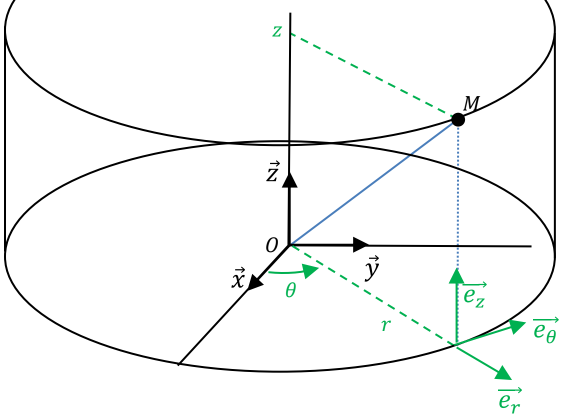


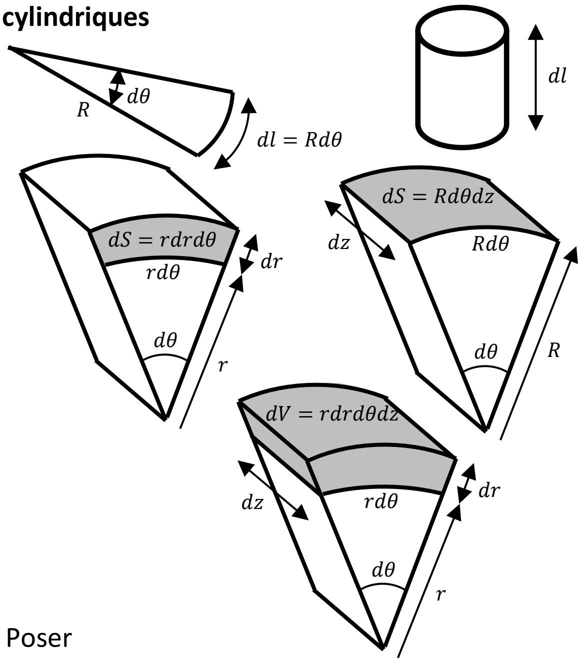


$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Coordonnées cylindriques

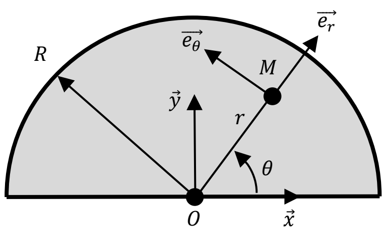
$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$
$$r \in [0, R]$$





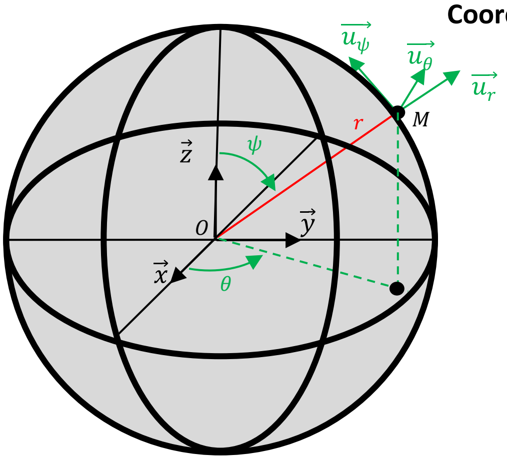
Intégration de vecteurs $\int_S \overrightarrow{e_r} dS$ et $\int_S \overrightarrow{e_\theta} dS$: Poser
$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = \cos\theta\, \vec{x} + \sin\theta\, \vec{y} \\ \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\, \vec{x} + \cos\theta\, \vec{y} \end{cases}$ et sortir $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des intégrales

Penser à utiliser des bipoints pour donner des résultats immédiats. Exemple : S'ils sont intégrés entre 0 et 2π, le résultat donne $\vec{0}$ car la somme de $\overrightarrow{e_r}$ ou $\overrightarrow{e_\theta}$ en 2 points diamétralement opposés est nulle, et ce pour tous les bipoints considérés.

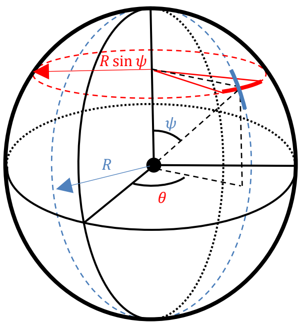


On notera que $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$, ce qui s'avèrera très utile pour certaines intégrations.

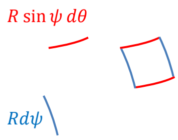
Coordonnées sphériques

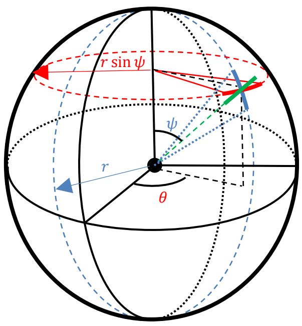


$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$$
$$r \in [0, R]$$
$$\psi \in [0, \pi]$$

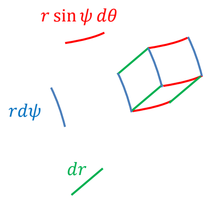


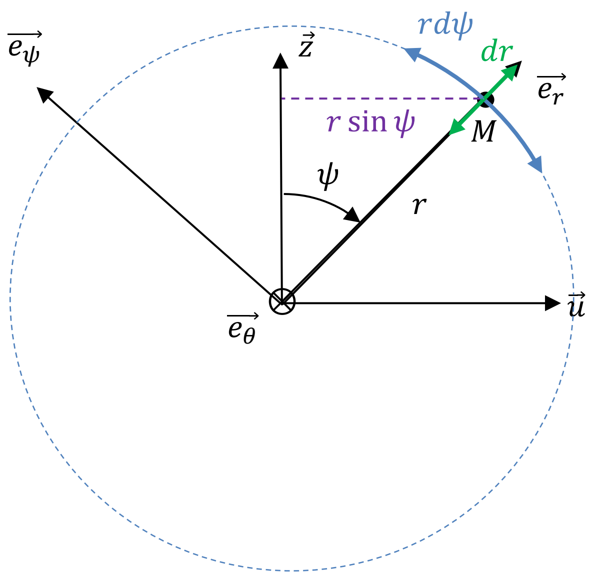
$$dS = R^2 \sin\psi \, d\theta d\psi$$

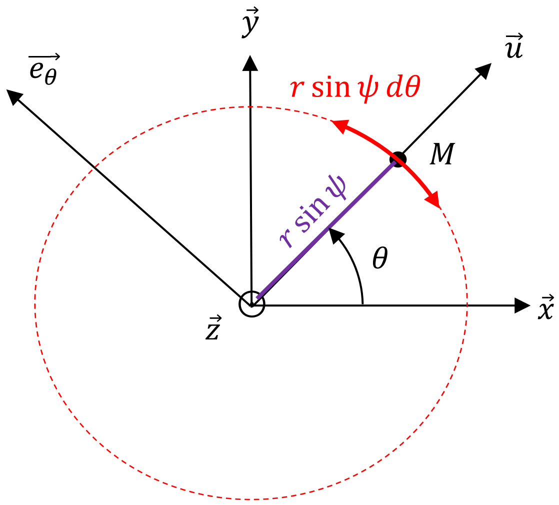




$$dV = r^2 \sin\psi \, dr d\theta d\psi$$







Intégration du vecteur $\int_S \overrightarrow{u_r} dS$: Poser

$$\overrightarrow{u_r} = \sin\psi \cos\theta \, \vec{x} + \sin\psi \sin\theta \, \vec{y} + \cos\psi \, \vec{z}$$

Vous ne devriez pas rencontrer ce calcul fréquemment

On notera que $\begin{cases} x = r \sin\psi \cos\theta \\ y = r \sin\psi \sin\theta \\ z = r \cos\psi \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$, ce qui s'avèrera très utile pour certaines intégrations.