Effet d'un filtre sur un signal périodique

Table des matières

1 Effet d'un filtre passe-bas sur un signal périodique

1.1 Rappel

- Système linéaire

•Définition : Un circuit électronique est linéaire si la relation entre l'entrée et la sortie est une équation différentielle à coéfficients constants.

- Filtrage

•Définition : le filtrage est une forme de traitement de signal qui consiste à :

  - sélectioner une partie de l'information utile dans le signal et le transmettre
  - éliminer les fréquences parasites dans un signal

- Définition d'un filtre

•Définition : Un filtre est un circuit électronique linéaire réalisant l'opération filtrage

- Principe de superposition

•Enoncé : Soit respectivement $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les réponses du système aux excitations $e_1(t)$ et $e_2(t)$. Un système linéaire satisfait au principe de superposition,c'est-à-dire qu'à l'excitation $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$,où λ_1 et λ_2 sont des constantes,correspond la réponse : $\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$.
Les causes ajoutent leurs effets et les effets sont proportionnels aux causes.

- Fonction de transfert
  - Si le signal d'entré est sinusoïdal $e(t) = E_m \cos \omega t$,le signal de sortie est aussi sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ (régime harmonique).
  - On définit la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)}$$

  - $\arg \underline{H} = \arg \underline{s} - \arg \underline{e} = \varphi$

- Gain en décibel

$$G(dB) = 20 \log \left|\underline{H}\right|$$

- Signal de sortie d'un signal périodique

Pour déterminer le signal de sortie d'un signal périodique :

  - on décompose le signal d'entrée sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales du temps (série de Fourier)

$$e(t) = \sum_k e_k = \sum_k E_k \cos(\omega_k t + \varphi_k); \omega_k = k\omega_0$$

  - On détermine la réponse associée à chaque terme e_k

$$\underline{s}_k(j\omega_k) = \underline{H}(j\omega_k).\underline{e}_k(j\omega_k)$$

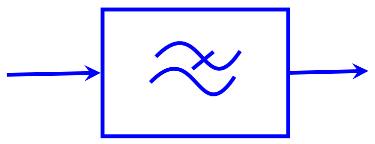
  - On superpose les termes obtenus

$$s(t) = \sum_k s_k(t)$$

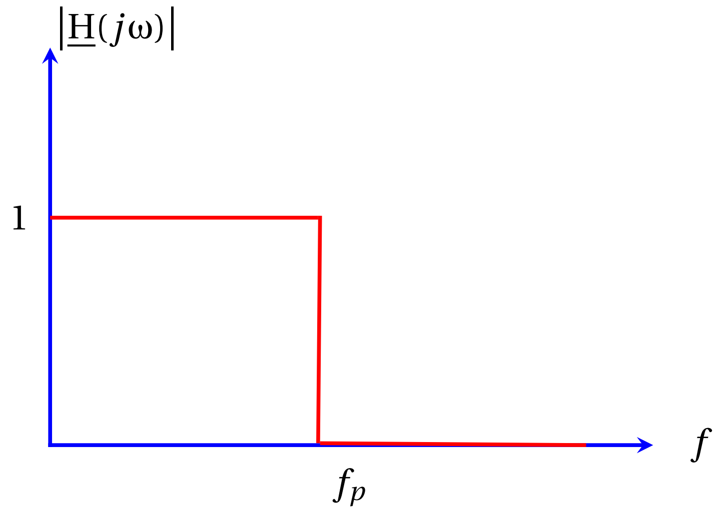
1.2 Filtre passe-bas idéal

Le gain du filtre passe-bas idéal de bande passante $[0, f_p]$ est

$$\begin{cases} \left|\underline{H}(j\omega)\right| = 1 & \text{pour } f = \dfrac{\omega}{2\pi} \leqslant f_p \\ \left|\underline{H}(j\omega)\right| = 0 & \text{le cas contraire} \end{cases}$$

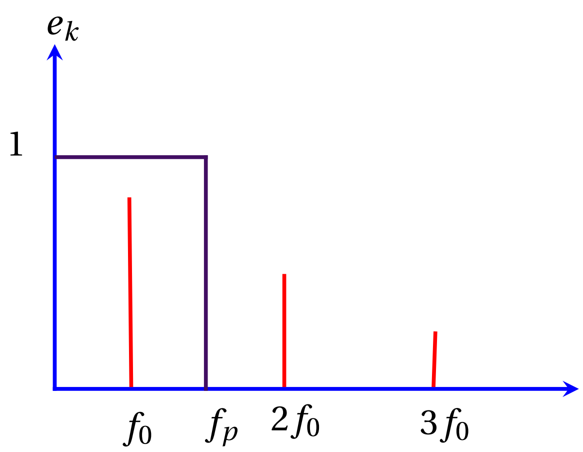


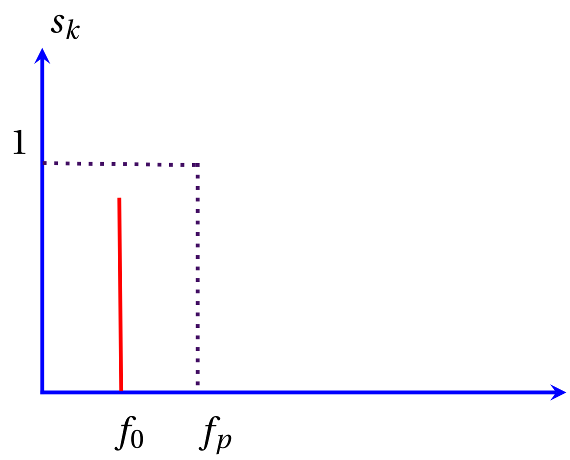
representation fonctionnelle



Soit f_0 la fréquence du signal appliqué en entrée du filtre on distingue entre deux cas intéressants :

- Cas n°1 : $f_0 < f_p < 2f_0$

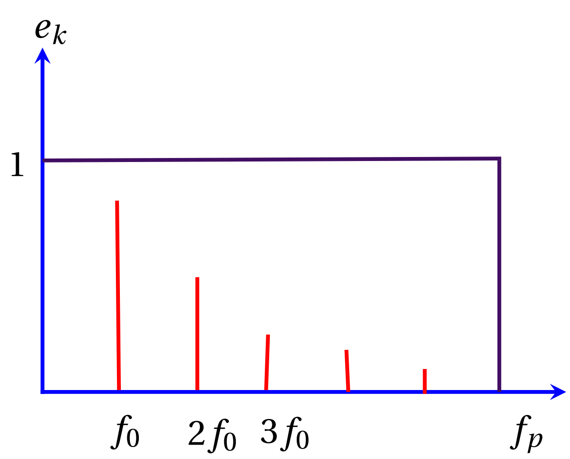


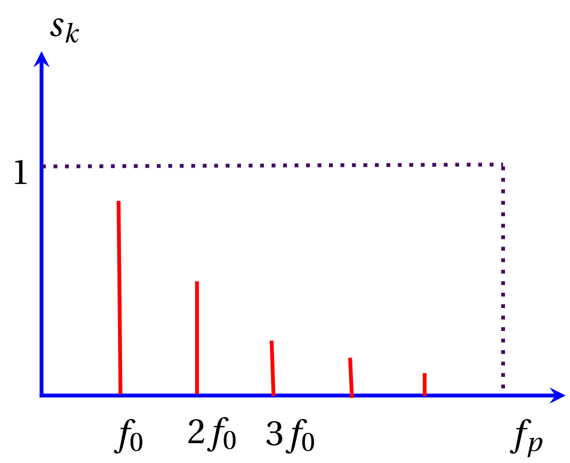


  - La composante fondamentale $E_1 \cos\omega_0 t$ n'est pas modifiée par le filtre,puisque sa fréquence est incluse dans la bande passante.
  - Les termes harmoniques $E_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ sont affectés d'un coefficient d'amplification $\left|\underline{H}(jk\omega_0)\right| = 0$,car leur fréquence est dans la bande supprimée par le filtre
  - le signal de sortie est donc composé d'un seul terme

$$s(t) = E_1 \cos(\omega_0 t + \psi_1)\ ;\ \psi_1 = \arg(\left|\underline{H}(j\omega_0)\right|)$$

- Cas n°2 : toutes les coposantes spectrales du signal d'entrée sont contenues dans la bande passante





le signal de sortie et d'entrée sont identiques $s(t) = e(t)$

• Remarque : En réalité le signal d'entrée présente des composantes harmoniques qui sont atténuées par le filtre,la forme du signal observé en sortie n'est que voisine de celle du signal d'entrée.

1.3 Filtre passe-bas du premier ordre

1.3.1 Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

ω_c : pulsation de coupure et $H_0 = cte$

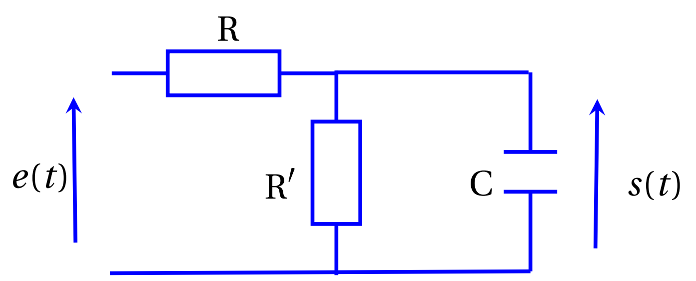


fig 1

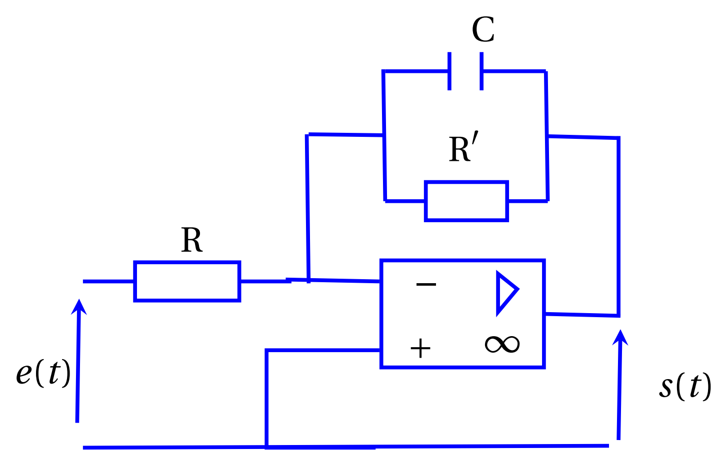
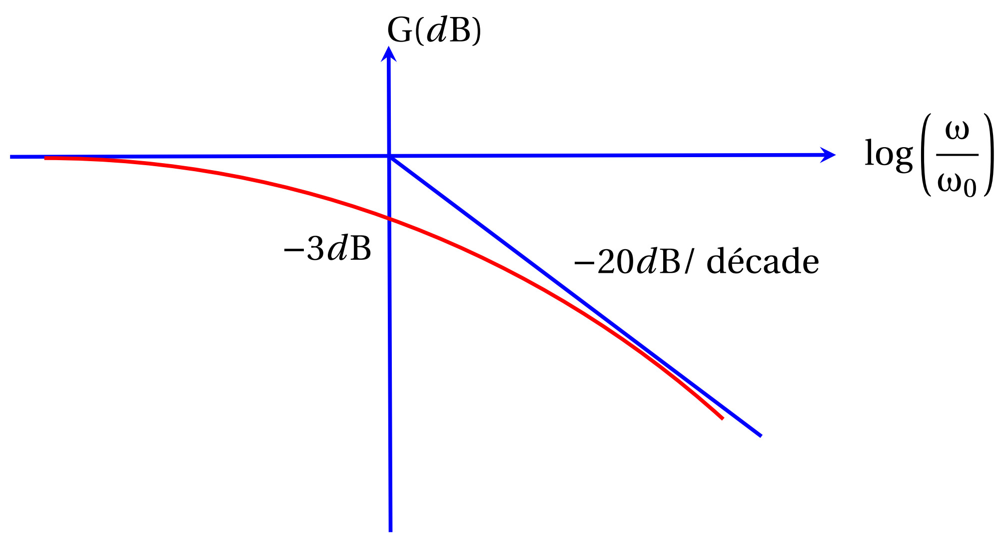


fig 2

- filtre passif(fig 1) : $H_0 = \frac{R'}{R + R'}$ et $\frac{1}{\omega_c} = \frac{RR'}{(R + R')C}$
- filtre actif (fig 2) : $H_0 = -\frac{R'}{R}$ et $\omega_c = \frac{1}{R'C}$

lediagramme de Bode ($H_0 = 1$)



- la bande passante du filtre : $[0, \omega_c]$

1.3.2 Action sur un signal périodique

Chaque composante sinusoïdale du signal d'entrée : $e_k = E_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$ voit :

- son amplitude E_k modifiée par le filtre selon

$$S_k = \left|\underline{H}(jk\omega_0)\right| E_k = \frac{E_k}{\sqrt{1 + k^2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

- sa phase à l'origine des temps φ_k,affectuée

$$\psi_k = \varphi_k + \arg \underline{H}(jk\omega_0) = \varphi_k - \arctan\left(k\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

- l'expression du signal de sortie

$$s(t) = \sum_k s_k(t)\ ;\ s_k(t) = \left|\underline{H}(jk\omega)\right| E_k \cos(\omega_k t + \psi_k)$$

1.3.3 Comportement intégrateur

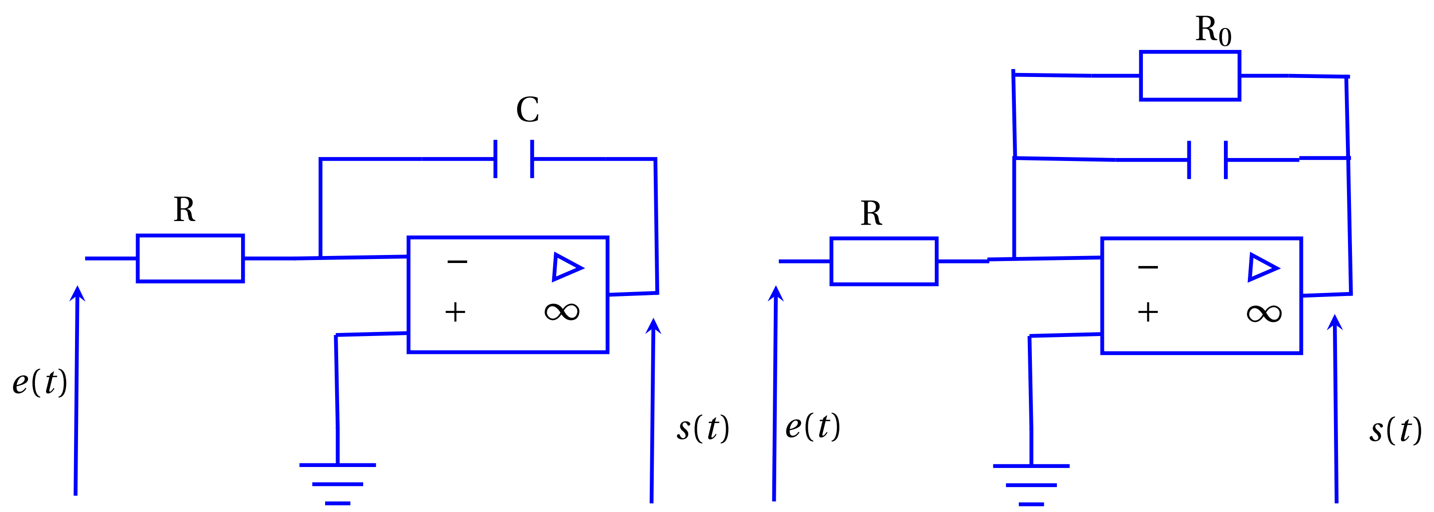
On pose $\tau = \dfrac{1}{\omega_c}$ donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\tau\omega}$$

- si $\omega >> \omega_c$: $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{j\tau\omega} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} \Rightarrow j\omega\tau\underline{s} = \tau\dfrac{d\underline{s}}{dt} = H_0\underline{e}$

$$s(t) = \frac{H_0}{\tau}\int e(t)\,dt$$

•Conclusion : Pour des fréquences élevées ($f >> f_c$) le filtre passe-bas du premier ordre se comporte comme un intégrateur

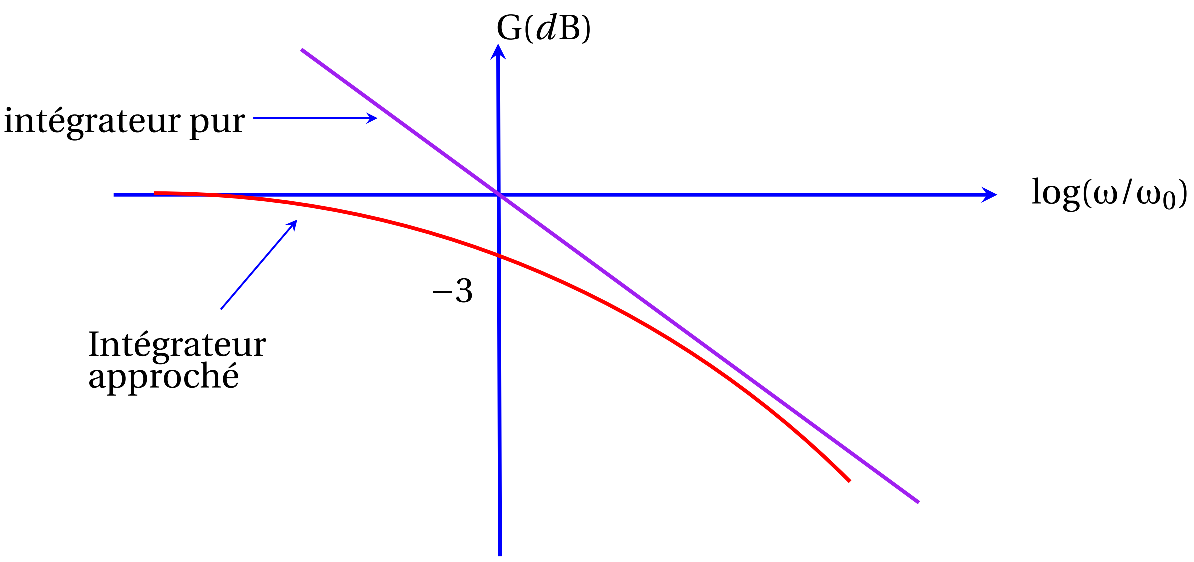


montage theorique Montage pratique

- pour le montage théorique on montre que : $\underline{H}(j\omega) = -\dfrac{1}{jRC\omega}$ donc $s(t) = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int e(t)\,dt$ c'est un intégrateur pur

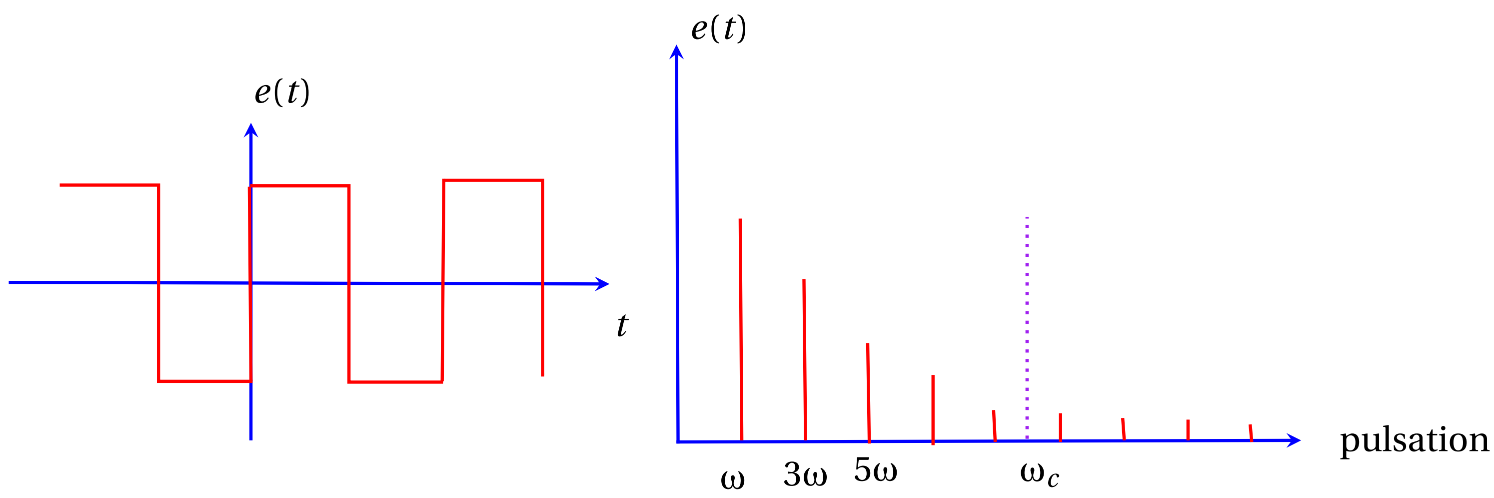
- pour le montage pratique on montre que : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{-\dfrac{R_0}{R}}{1 + jR_0C\omega}$

pour $\omega >> \omega_c = \dfrac{1}{R_0C}$: $\underline{H}(j\omega) = -\dfrac{1}{jRC\omega}$: intégrateur approché

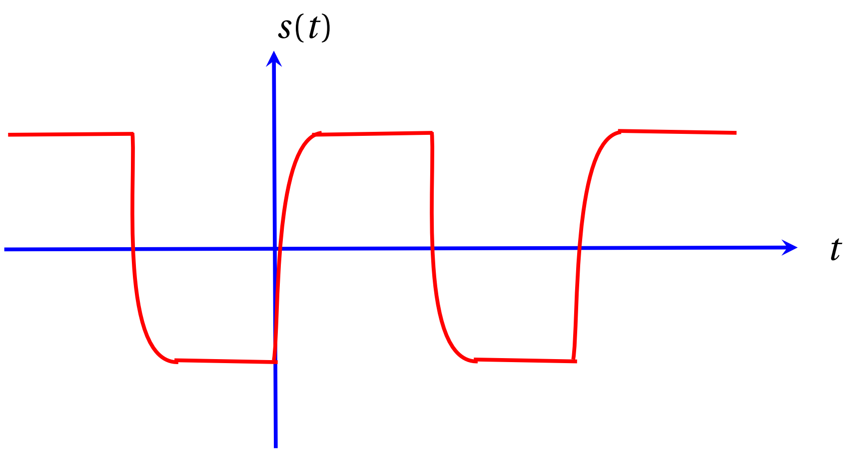


•Exemple : signal d'entré carré

► Cas $\omega << \omega_c$: la plupart des raies spéctrales du signal se trouvent dans la bande passante du filtre

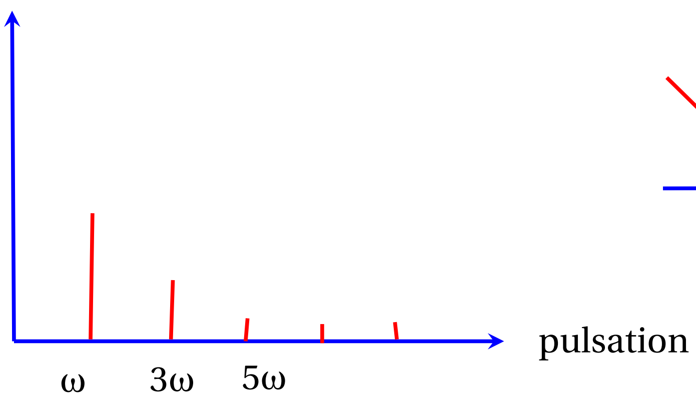


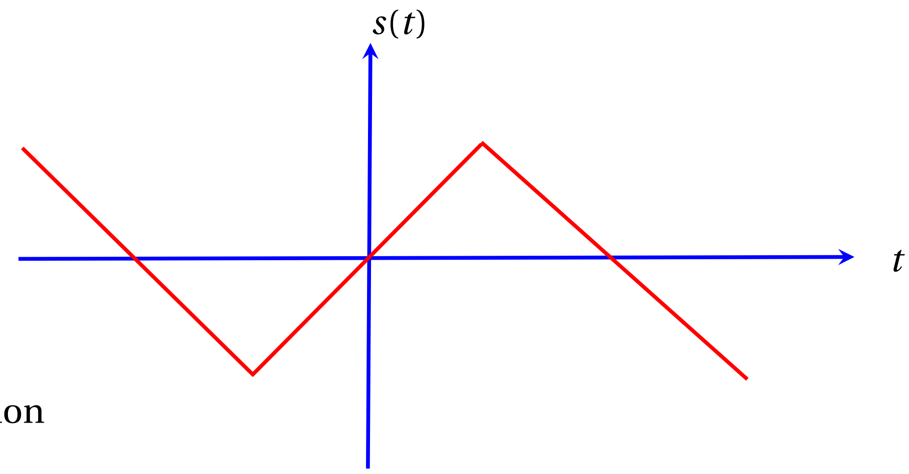
le signal de sortie est voisin du signal d'entrée



l'absence de discontinuité dans le signal de sortie s'explique par l'atténuation imposée par le filtre aux composantes de fréquence élevée.

- Cas $\omega >> \omega_c$: les raies spéctrales du signal d'entrée sont toutes situées dans la bande atténuée,leurs amplitudes est multipliée par $|\underline{H}(jk\omega)|$ et le déphasage q'elles subissent est voisn de $-\frac{\pi}{2}$





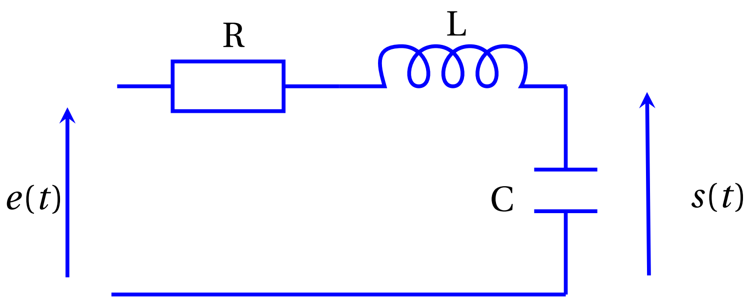
le filtre se comporte comme un intégrateur

1.4 Filtre passe-bas du second ordre

- la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre s'écrit

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

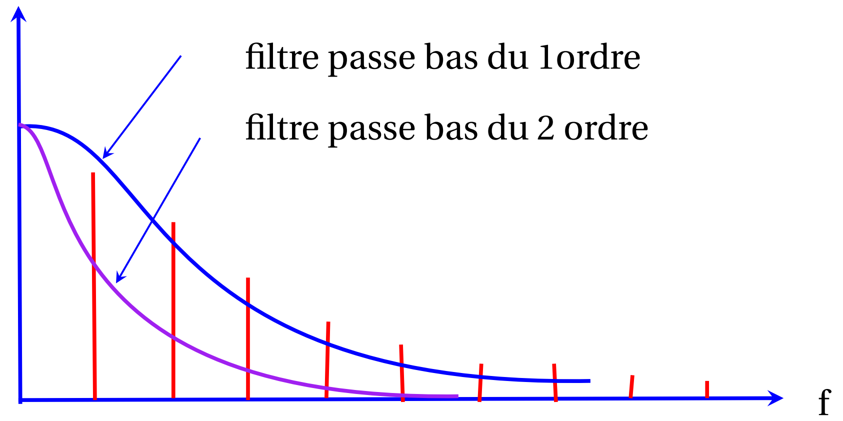
  - $H_0 = 1$ pour un filtre passif
  - $\sigma = \frac{1}{2Q}$: coefficient d'amortissement
  - ω_0 : pulsation propre du circuit



On peut déterminer le comportement du filtre :

- $\omega << \omega_0 : \underline{H} \approx H_0$
- $\omega >> \omega_0 : \underline{H} \approx -H_0\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$,diminuation de gain en $-40dB$/décade

Les composantes spéctrales du signal d'entrée situées hors de la bande passante du filtre sont d'autant mieux rejetées que l'ordre du filtre est élevé.

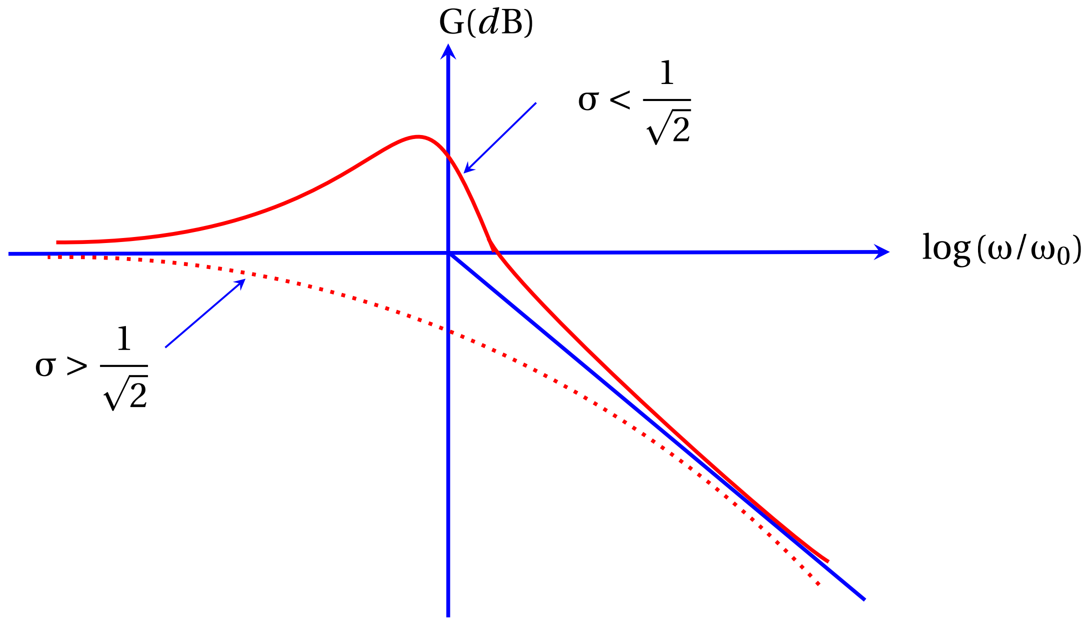


- Diagramme de Bode (pour une étude détaillé voir 1[er] année)
  - la pulsation de résonance ω_r,pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma < \frac{1}{\sqrt{2}}$

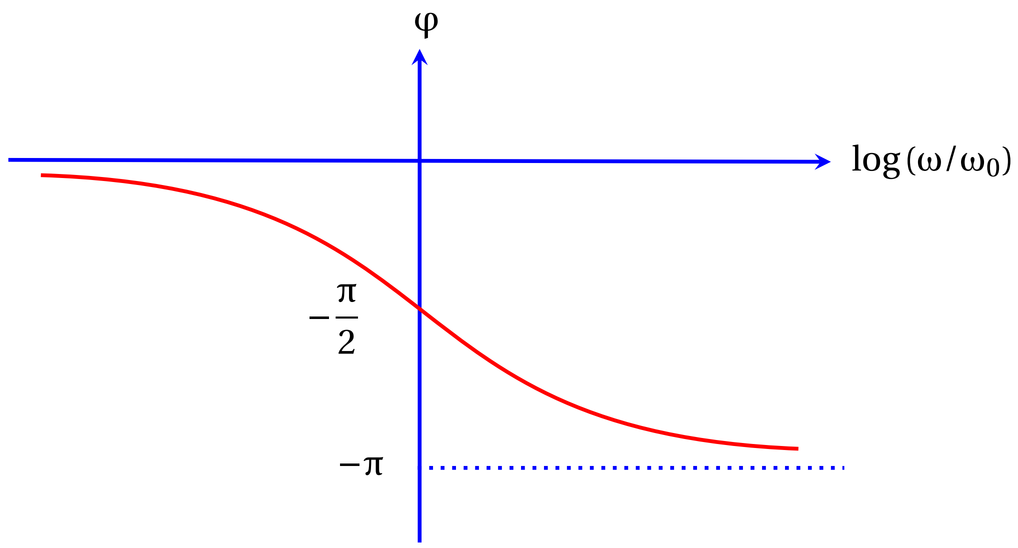
$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\sigma^2}}$$

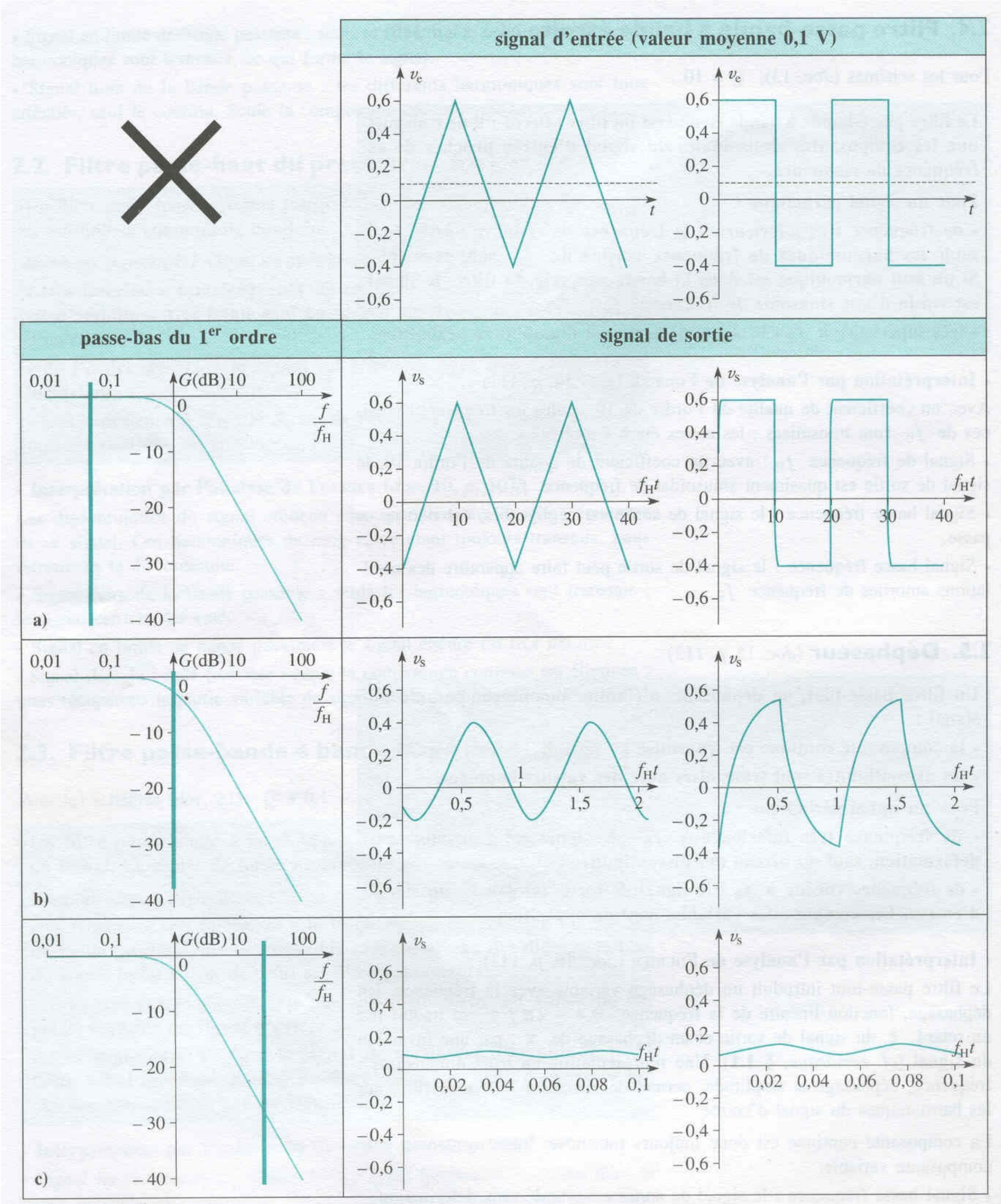
  - la valeur du module atteinte à la résonance est :

$$\boxed{\left|\underline{H}(j\omega_r)\right| = \frac{H_0}{2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}}}$$



le cas $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est trés utilisé en pratique car le gain ne présente pas de maximum ,c'est le filtre de Butterworth



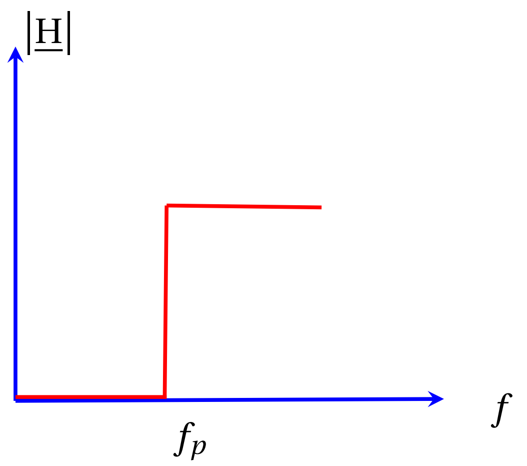


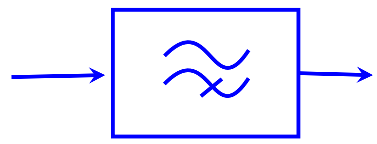
Doc. 7 a. $f = \frac{f_H}{20}$: *signal dans la bande passante. Le signal de sortie est transmis sans déformation importante sauf au niveau des discontinuités du créneau.* **b.** $f = f_H$: *signal en limite de bande passante. Le signal de sortie est fortement déformé. Sa valeur moyenne (0,1 V) est identique à celle du signal d'entrée.* **c.** $f = 20 f_H$: *signal hors de la bande passante. L'ondulation du signal de sortie est très faible. Seule la composante continue est transmise sans atténuation.*

2 Autres filtres

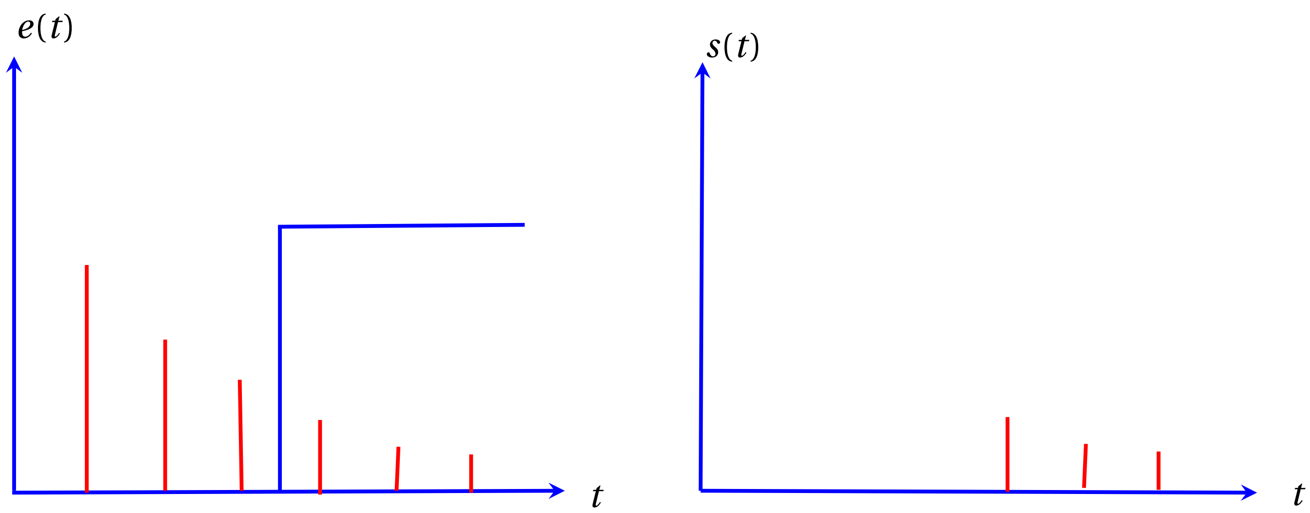
2.1 Filtre passe-haut

2.1.1 Filtre passe-haut idéal





représentation fonctionnelle



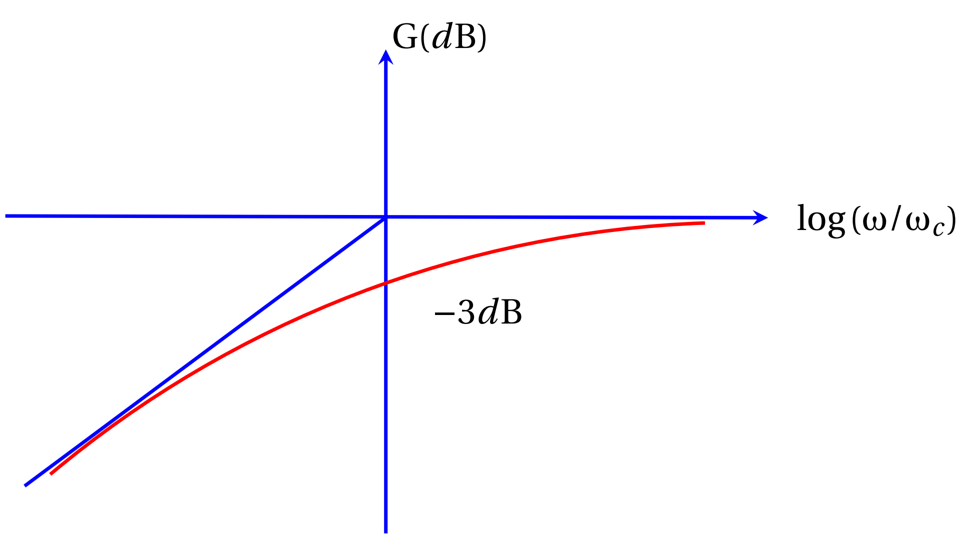
2.1.2 Filtre passe-haut du premier ordre

- Fonction de transfert

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}}$$

$\tau = \dfrac{1}{\omega_c}$

- diagramme de Bode

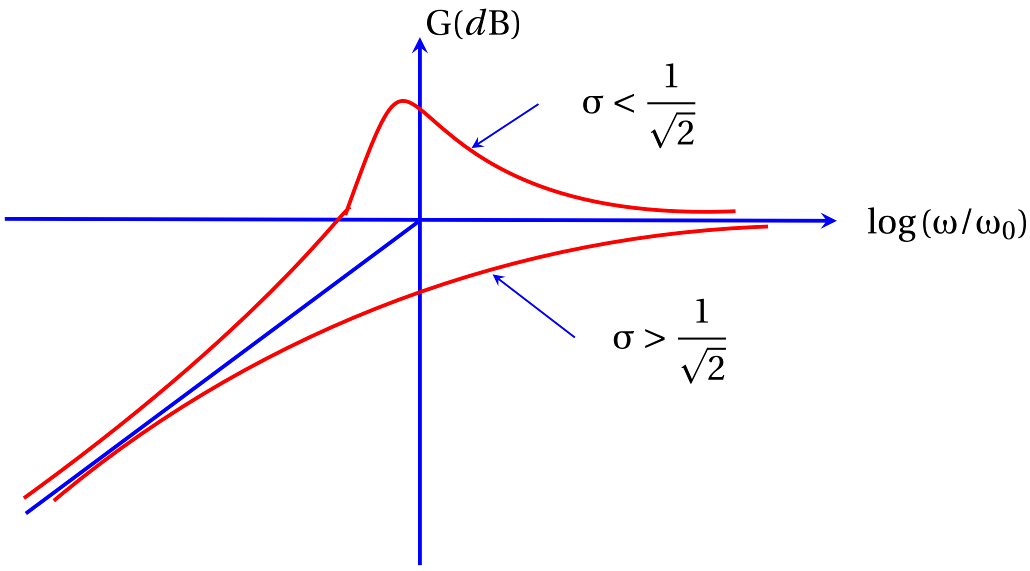


2.1.3 Filtre passe-haut du second ordre

► Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2j\sigma\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

► Diagramme de Bode

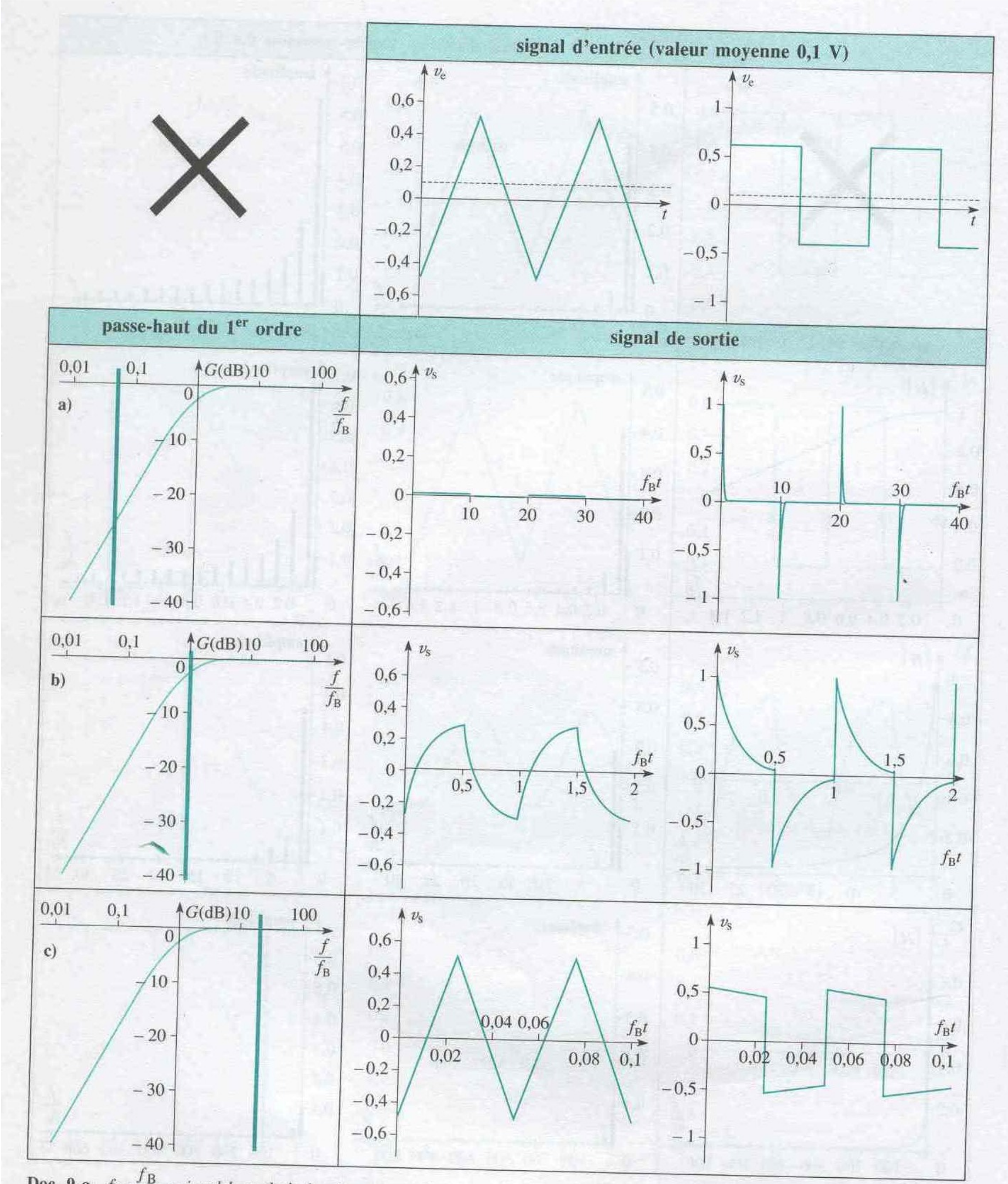


2.1.4 Action sur un signal périodique

- Si les composantes spectrales sont situées dans la bande passante du filtre le signal de sortie est voisin au signal d'entrée.
- Chaque entrée d'un oscilloscope est munie d'un filtre passe haut permettant d'éliminer la valeur moyenne d'un signal en sélectionnant le mode AC.

2.1.5 Comportement dérivateur

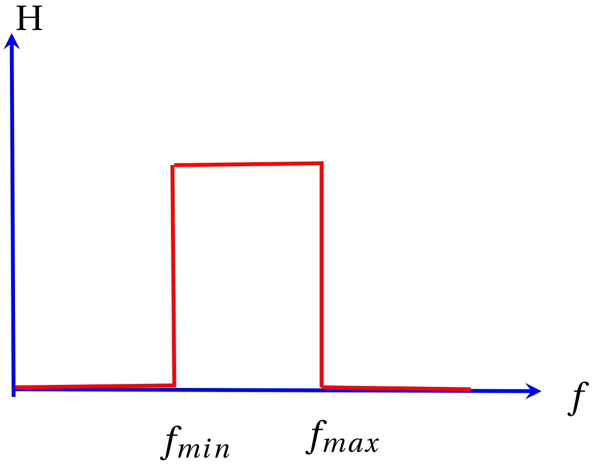
Pour des fréquences $f >> f_0$: le filtre passe haut se comporte comme un dérivateur

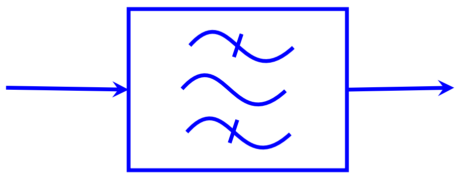


Doc. 9 a. $f = \frac{f_B}{20}$: *signal hors de la bande passante. Le signal de sortie n'est pas transmis. Il ne reste que des pics d'amplitude 1 V au niveau des discontinuités du signal créneau.* **b.** $f = f_B$: *signal en limite de bande passante. Le signal est fortement déformé. Sa valeur moyenne est nulle. Le signal correspondant au créneau conserve les discontinuités de 1 V du signal d'entrée.* **c.** $f = 20 f_B$: *signal dans la bande passante. Le signal est voisin de la composante variable du signal d'entrée.*

2.2 Filtre passe-bande

2.2.1 Filtre passe-bande idéal



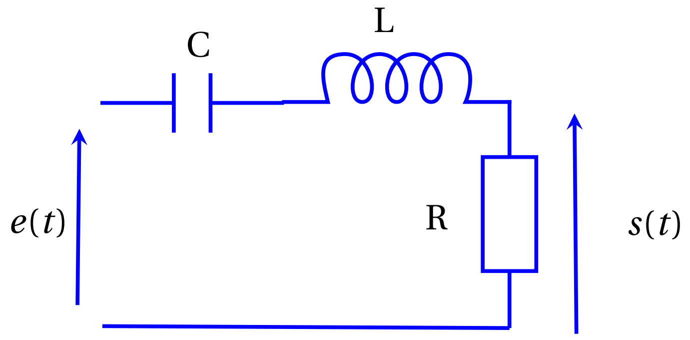


Si le spectre du signal d'entré est situé dans la bande passante du filtre,le signal de sortie est voisine au signal d'entrée

2.2.2 Fonction de transfert

$$\underline{H} = H_0 \frac{2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

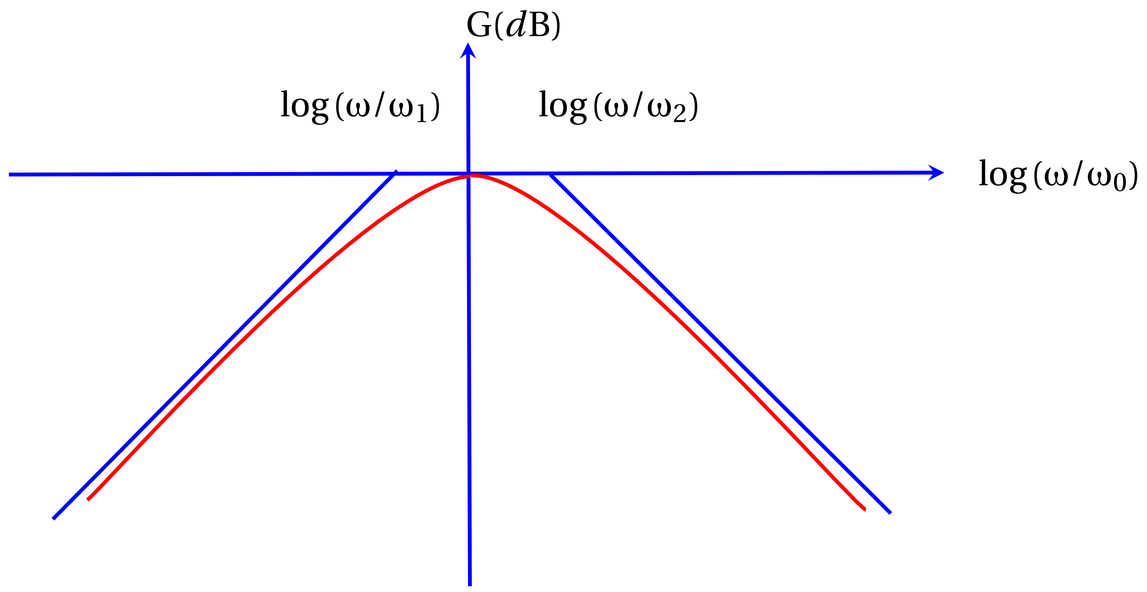
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- $\sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$
- $H_0 = 1$



2.2.3 Fonction de transfert factorisable : $\sigma \geqslant 1$

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

c'est l'association de deux filtres du premier ordre associé en cascade : un filtre passe-bas et un filtre passe-haut

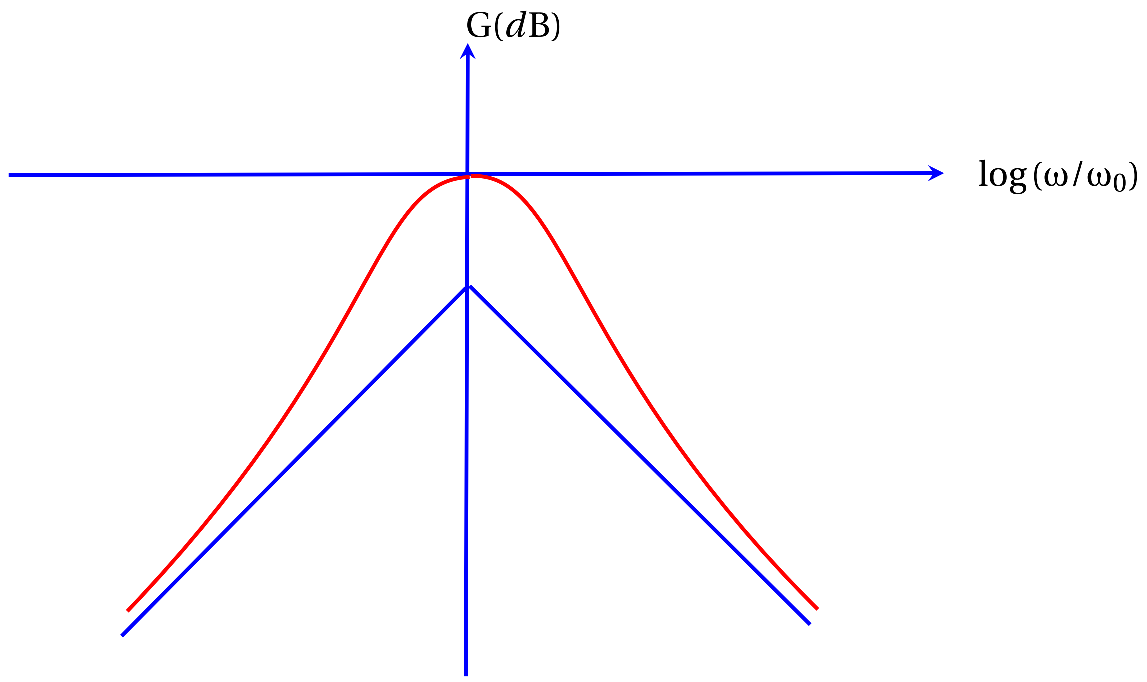


cette fonction de transfert est utile pour sélectionner une bande de fréquence large .

•Conclusion : lorsque la fonction de transfert d'un filtre passe-bande est factorisable,on peut décomposer ce filtre en un filtre passe-bas et un filtre passe-bande

2.2.4 Fonction de transfert non factorisable : $\sigma < 1$

- $\omega << \omega_0$: $\underline{H} \approx H_0 2\sigma \dfrac{j\omega}{\omega_0}$,pente de $20dB/$décade
- $\omega >> \omega_0$: $\underline{H} = H_0 2\sigma \dfrac{\omega_0}{j\omega}$,pente de $-20dB/$décade
- les deux asymptotes se rejoignent pour $\omega = \omega_0$,et le module correspondant est $20\log(2H_0\sigma)$
- si $\omega = \omega_0, \underline{H} = H_0$



2.2.5 Bande passante-Facteur de Qualité

•Définition : la bande passante à $-3dB$ d'un filtre est l'intervalle des fréquences $[f_m, f_M]$ dans lequel le gain ne diffère pas de plus de 3 décibels de sa valeur maximale.

$$\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leqslant G(\omega) \leqslant G_{max}$$

le facteur de qualité du filtre passe-bande

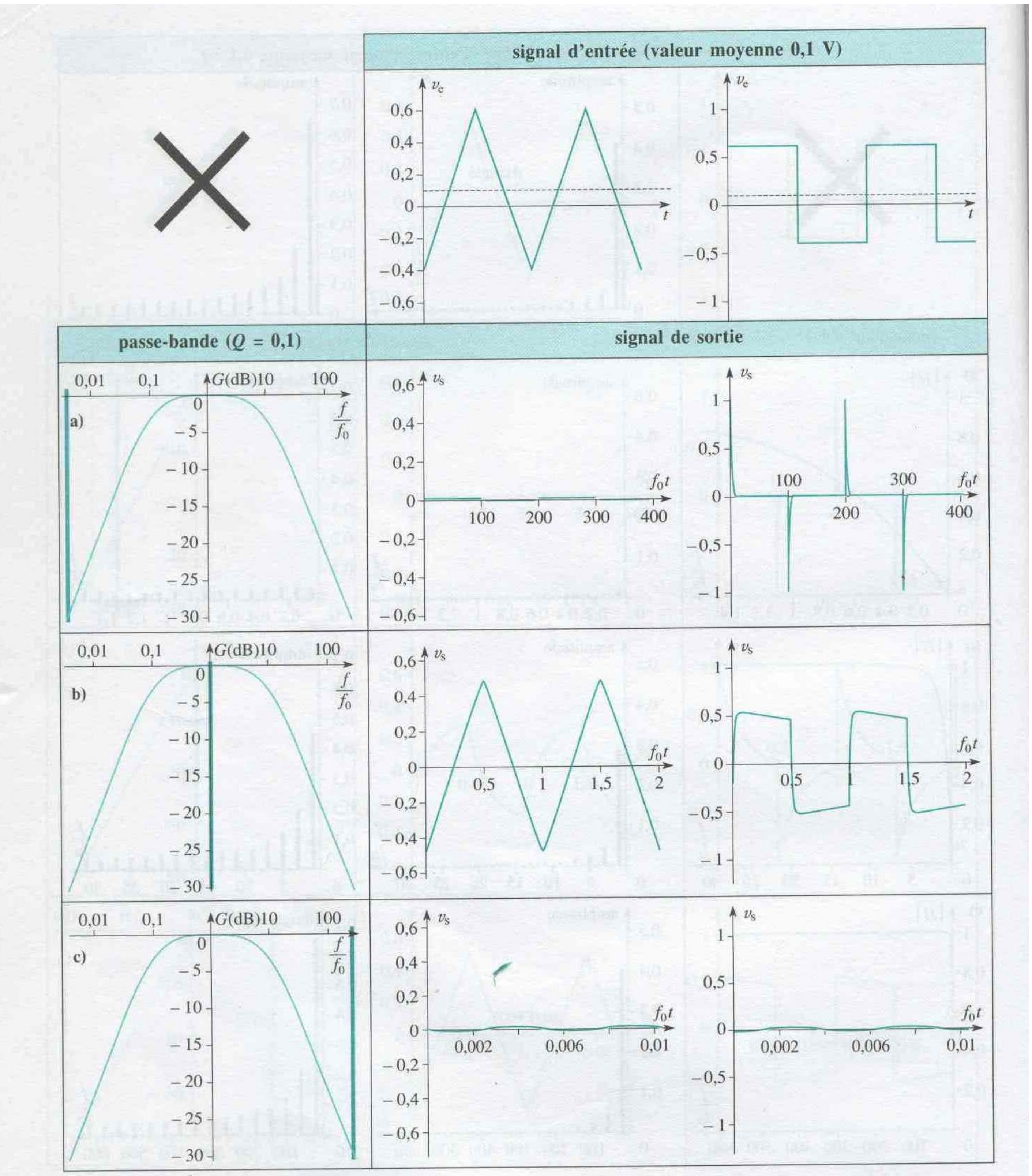
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

Plus le facteur de qualité d'un filtre est élevé,plus la largeur relative de la bande passante est faible. Q mesure l'acuité de la résonance

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{1}{2\sigma}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

- $\dfrac{1}{2\sigma}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1$
- $\omega^2 \mp 2\sigma\omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0$
- $\omega_m = \omega_0(-\sigma + \sqrt{1+\sigma^2})$ et $\omega_M = \omega_0(\sigma + \sqrt{1+\sigma^2})$
- $\Delta\omega = \Omega_M - \omega_m = 2\sigma\omega_0$
- $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} = \dfrac{1}{2\sigma}$
- $\omega_m\omega_M = \omega_0^2$

2.2.6 Action d'un filtre passe-bande sur un signal périodique



Doc. 11 a. $f = \frac{f_B}{20}$: *signal hors de la bande passante. Le signal n'est pas transmis. Il ne reste que des pics d'amplitude voisine de 1 V au niveau des discontinuités du signal créneau.* **b.** $f = f_0$: *signal dans la bande passante. Le signal de sortie est peu déformé sauf au niveau des discontinuités du créneau, où il ne présente pas de discontinuités. Sa valeur moyenne est nulle.* **c.** $f = 20f_H$: *signal hors de la bande passante. Le signal de sortie est d'amplitude négligeable.*