LES FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

Partie I: La fonction Zéta de Riemann

Soit $n \geqslant 1$, on définit

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n^x} \end{cases}$$

On note ζ la fonction Zéta de Riemann, définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de ζ.
2. (a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$.
   (b) Y-a-t-il convergence uniforme sur $]1, +\infty[$.
   (c) Étudier la continuité de ζ sur $]1, +\infty[$
3. (a) Vérifier que les fonctions f_n sont décroissantes
   (b) Déduire la monotonie de ζ
4. (a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 1$.
   (b) Étudier la limite de ζ en $+\infty$
   (c) En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer que $\zeta(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$
5. (a) Vérifier que les fonctions f_n sont convexes
   (b) Déduire la convexité de ζ (Utiliser la définition de la convexité)
6. (a) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées k-ième
   (b) Retrouver la monotonie et la convexité de ζ
   (c) Tracer la courbe représentative de ζ

Partie II: Équivalents

7. En utilisant la comparaison série-intégrale, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall x > 1, \quad \frac{n^{1-x}}{x-1} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{(n-1)^{1-x}}{x-1}$$

8. En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ en 1
9. En utilisant la question 7, montrer que $\zeta(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} 2^{-x}$.
10. *Application :*
    (a) Donner la nature de la série $\sum_{p\geqslant 2} (\zeta(p) - 1)$
    (b) Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}_2^2}$ est sommable où $\mathbb{N}_2 = \{k \in \mathbb{N}, \mid k \geqslant 2\}$
    (c) Déduire la valeur de $\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1)$

Partie III: Développement asymptotique en 1

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} v_n$, où v_n est définie sur $]0, +\infty[$ par $v_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$.

11. Justifier que, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $0 \leqslant v_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
12. Justifier que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$
13. Exprimer, pour $x > 1$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1 - x$.
14. Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ (on pourra utiliser le reste de la série).
15. En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ : $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$.

Partie IV: Zéta alternée de Riemann

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$, on pose $h_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

On note μ la fonction zeta alternée de Riemann, définie par $\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

16. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction μ
17. (a) Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} h_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$
    (b) La série $\sum_{n \geqslant 1} h_n$ converge-t-elle normalement sur $]1, a]$ pour tout $a > 1$?
    (c) Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} h_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$
    (d) La série $\sum_{n \geqslant 1} h_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, a]$ pour tout $a > 0$?
18. Justifier la continuité de μ sur $\mathbb{R}_+^*$
19. Déterminer la limite μ en $+\infty$
20. Soit a est un réel strictement positif
    (a) Justifier que h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geqslant 1} h_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
    (b) En déduire que μ est une fonction de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
21. Soit $x > 1$. Montrer que : $\mu(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.
22. (a) Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $\mu'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction μ, puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.
    (b) En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $\mu'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ : $\zeta(x) = \dfrac{a}{x-1} + b + o(1)$.
23. Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}$.

Les fonctions Zéta et Zéta alternée de Riemann

Partie I: La fonction Zéta de Riemann

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge si, et seulement si, $x > 1$, donc $\mathcal{D}_\zeta =]1, +\infty[$

2. (a) Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$ et $x \in [a, b]$, on a :
$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}$$
Puisque $a > 1$, alors la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ converge et, par suite, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur le segment $[a, b]$, ainsi la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[a, b]$

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_n(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$

(c) Pour tout $n \geqslant 1$, la suite f_n est continue sur $]1, +\infty[$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$

3. (a) Soit $n \geqslant 1$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \frac{-\ln n}{n^x} \leqslant 0$

(b) Soit $x, y \in]1, +\infty[$ tels que $x < y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(y) \leqslant f_n(x)$. Les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ et $\sum_{n\geqslant 1} f_n(y)$ sont convergentes, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, soit $\zeta(y) \leqslant \zeta(x)$

4. (a) Soit $a > 1$ et $x \in [a, +\infty[$, on a :
$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}$$
Puisque $a > 1$, alors la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ converge et, par suite, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, ainsi la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[a, +\infty[$

(b) La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et pour tout $n \geqslant 1$,
$$f_n(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Par le théorème d'interversion limite somme, ζ admet une limite finie en $+\infty$ et
$$\lim_{x\to +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$$

(c) La fonction $s \mapsto \zeta(s)$ est une fonction décroissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons que cette limite L soit finie. Pour tout entier N et tout réel $x > 1$, on a
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant L.$$
Pour N fixé, on fait tendre x vers 1, ce qui nous fourni l'inégalité $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant L$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est à termes positifs donc la suite de ces sommes partielles est croissante. L'inégalité précédente montre que cette suite

est bornée donc elle converge, ce qui implique que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est convergente, ce qui est faux. Ainsi $\lim_{x\to 1^+}\zeta(x)=+\infty$.

5. (a) Soit $n\geqslant 1$, la fonctions f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n''(x)=\frac{\ln^2(n)}{x^x}\leqslant 0$$

Ainsi f_n est convexe

(b) Soit $x,y\in\left]1,+\infty\right[$ et $\lambda\in[0,1]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est convexe sur $\left]1,+\infty\right[$: elle érifie alors l'inégalité de convexité, soit

$$f_n(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f_n(x)+(1-\lambda)f_n(y)$$

Les deux membres de cette inégalité sont les termes de deux séries convergentes, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)+(1-\lambda)\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(y)$$

Soit

$$\zeta(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\zeta(x)+(1-\lambda)\zeta(y)$$

D'où la convexité de ζ

6. (a) — Pour tout $n\geqslant 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]1,+\infty\right[$

— La série $\sum_{n\geqslant 1}f_n$ converge simplement sur $\left]1,+\infty\right[$ de somme ζ

— Soit $p\geqslant 1$ et $[a,b]\subset\left]1,+\infty\right[$. Pour tout $x\in[a,b]$, on a $f_n^{(p)}(x)=\frac{(-1)^p\ln^p(n)}{n^x}$. En conséquence

$$\left|f_n^{(p)}(x)\right|=\frac{\ln^p(n)}{n^x}\leqslant\frac{\ln^p(n)}{n^a}$$

Pour $\alpha\in\left]1,a\right[$, on a $n^\alpha.\frac{\ln^p(n)}{n^a}=\frac{\ln^p(n)}{n^{a-\alpha}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc, par le critère de Riemann, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln^p(n)}{n^a}$ converge. On en déduit la convergence normale de la série $\sum_{n\geqslant 1}f_n^{(p)}$ sur $[a,b]$, puis sa convergence uniforme sur $[a,b]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]1,+\infty\right[$ et pour tout $x\in\left]1,+\infty\right[$ et $p\in\mathbb{N}$, on a :

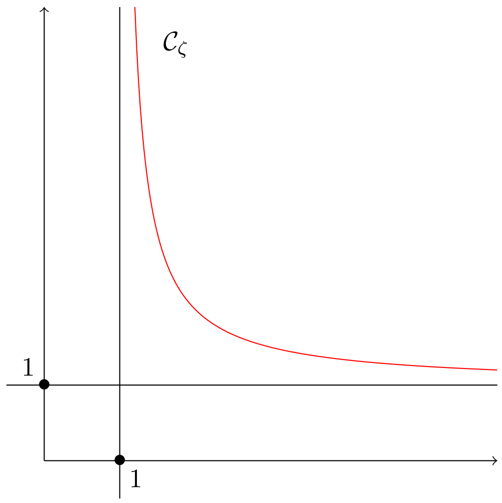
$$\zeta^{(p)}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p\ln^p(n)}{n^x}$$

(b) ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]1,+\infty\right[$ et pour tout $x\in\left]1,+\infty\right[$, on a :

$$\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\ln(n)}{n^x}<0\quad\text{ et }\quad\zeta''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^2(n)}{n^x}>0$$

On en déduit la décroissance et la convexité de ζ

(c)



Partie II: équivalents

7. Soit $n \geqslant 2$ et $x > 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissance sur $[1, +\infty[$, alors pour $t \in [k, k+1]$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{k^x} \quad & \Longrightarrow \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^x}\,\mathrm{d}t \\ & \Longrightarrow \quad \frac{1}{(k+1)^x} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^x} \end{aligned}$$

Ou encore

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^x} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$$

ceci implique

$$\frac{(k+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{k^{1-x}}{1-x} \leqslant \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{k^{1-x}}{1-x} - \frac{(k-1)^{1-x}}{1-x}$$

On somme ces inégalité de n à N et on tient compte des sommes téléscopiques, on obtient

$$\frac{(N+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{n^{1-x}}{1-x} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{N^{1-x}}{1-x} - \frac{(n-1)^{1-x}}{1-x}$$

Puis on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient l'inégalité

$$\frac{n^{1-x}}{x-1} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{(n-1)^{1-x}}{x-1}$$

8. On applique les inégalités précédentes avec $n = 2$, on obtient

$$\frac{2^{1-x}}{x-1} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{1}{x-1}$$

Puis, on ajoute 1 à chaque terme figurant dans les inégalités, alors

$$1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1} \Longrightarrow x - 1 + 2^{1-x} \leqslant (x-1)\,\zeta(x) \leqslant x$$

Or $x - 1 + 2^{1-x} \xrightarrow[x \to 1^+]{} 1$, alors $(x-1)\,\zeta(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} 1$, soit $\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$

Les fonctions Zéta et Zéta alternée de Riemann

9. On applique les inégalités précédentes avec $n = 3$, on obtient

$$\frac{3^{1-x}}{x-1} \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{2^{1-x}}{x-1}$$

Puis, on multiplie chaque terme figurant dans les inégalités par 2^x, alors

$$3\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-x} \leqslant 2^x \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{2}{x-1}$$

Or $3\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{2}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors $2^x \displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, soit $\zeta(x) - 1 - 2^{-x} = \circ\left(2^{-x}\right)$. Ainsi

$$\zeta(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} 2^{-x}$$

10. (a) Le terme général de cette série $\zeta(p) - 1 \sim \dfrac{1}{2^p}$, par la comparaison avec la série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 2} (\zeta(p) - 1)$ converge.

(b) Il s'agit d'une suite double de réels positifs

— Soit $n \geqslant 2$, la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 2} \frac{1}{n^p}$ converge car il s'agit d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{n} \in \left]0, 1\right[$ de somme

$$S_n = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)}$$

— La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} S_n$ converge car $S_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} S_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Donc la famille $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}_2^2}$ est sommable.

(c) D'après la question précédente la famille $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}_2^2}$ est sommable, on fait appel au théorème de Fubini ou d'interversion $\sum\sum$

$$\begin{aligned}
\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1) &= \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1
\end{aligned}$$

Partie III: Développement asymptotique en 1

11. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ (qui est un intervalle de longueur 1), donc

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

On en déduit que : $0 \leqslant v_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

12. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ converge (vers 0) ; comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^x}-\frac{1}{(k+1)^x}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)^x}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right)$ converge. De l'encadrement de la question préc'edente, on déduit la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n(x)$.
13. Pour $x>1$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1}\frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(x)-\frac{1}{x-1}$$
Donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x)-\frac{1}{x-1}$$
14. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $[1,+\infty[$. On note $R_n(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)$ le reste d'ordre n de la série. On a :
$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^x}-\frac{1}{(k+1)^x}\right) = \frac{1}{(n+1)^x} - \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x}$$
Ainsi, on déduit que $\displaystyle\sup_{x\in[1,+\infty[}|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$.
15. Pour $x\in]1,+\infty[$, $v_n(x)=\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{n^{x-1}}-\dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$; $v_n(1)=\dfrac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln n$.
v_n est continue, sauf peut-être en 1.
En 1 : en posant $h=x-1$, $\dfrac{1}{n^x}=\dfrac{1}{n}+o(1)$ par continuité de l'exponentielle $x\mapsto n^{-x}$ en 1 et
$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}}-\frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) &= \frac{1}{h}\left(e^{-h\ln n}-e^{-h\ln(n+1)}\right)\\ &= \frac{1}{h}\Big((1-h\ln n+o(h))-(1-h\ln(n+1)+o(h)\Big)\\ &= \ln(n+1)-\ln n+o(1)\end{aligned}$$
Donc $v_n(x)=\dfrac{1}{n}+\ln(n+1)-\ln n+o(1)$ et, par suite, v_n est continue en 1.
On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1,+\infty[$. La convergence uniforme sur $[1,+\infty[$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1,+\infty[$.
On en déduit que $\zeta(x)-\dfrac{1}{x-1}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)\right)+o(1) = \gamma+o(1)$ au voisinage de 1^+. D'où $\zeta(x)=\dfrac{1}{x-1}+\gamma+o(1)$ au voisinage de 1^+.

Partie IV: Zéta alternée de Riemann

16. Soit $x\in\mathbb{R}$; si $x>0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge ; si $x\leqslant 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).
17. (a) Soit $a>1$ et $x\geqslant a$, alors pour tout $n\geqslant 1$, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^a}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est indépendante de x et convergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} h_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

(b) On a $\| h_n \|_\infty^{]1,a]} = \dfrac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ ne converge pas normalement sur $]1, a]$.

(c) Soit $a > 0$ et $x \geqslant a$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n(x)$ est alternée vérifiant le CSSA, alors

$$|R_n(x)| \leqslant |h_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$$

Donc $\| R_n \|_\infty \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\| h_n \|_\infty^{]0,a]} = 1 \not\to 0$, d'après la condition nécessaire ,la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, a]$

18. — $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ est une série de fonctions continues sur $]0, +\infty[$

— Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$, alors pour tout $x \in [a, b]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est alternée vérifiant le CSSA, alors

$$|R_n(x)| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^x}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$$

Donc $\| R_n \|_\infty \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ou encore $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n$ CU sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Donc la fonction $\mu = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

19. Comme, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que, pour $n = 1$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$, le théorème de passage à la limite terme à terme permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty} \mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$$

20. (a) — Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

— Soit $p \geqslant 0$. Le résultat est déjà démontré pour $p = 0$, alors on suppose désormais que $p \geqslant 1$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $h_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^{p+n-1} \ln^p(n)}{n^x}$.

Pour x et p fixés, on considère la fonction φ définie sur $[1, +\infty[$ par $\varphi(t) = \dfrac{\ln^p(t)}{t^x}$.
φ est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$ et

$$\varphi'(t) = \frac{p - x\ln(t)}{t^{x+1}} \ln^{p-1}(t)$$

Donc φ' est négative sur l'intervalle $\left[e^{\frac{p}{x}}, +\infty\right[$ et positive sur $\left[1, e^{\frac{p}{x}}\right]$. Donc φ est décroissante sur $\left[e^{\frac{p}{x}}, +\infty\right[$ et croissante sur $\left[1, e^{\frac{p}{x}}\right]$.

On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln^p(n)}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir du rang $N_a = \mathrm{E}\left(e^{\frac{p}{a}}\right) + 1$; donc la série alternée $\sum\limits_{n\geqslant N_a} h_n^{(p)}(x)$ converge et, pour $n \geqslant N_a$, son reste d'ordre n, $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leqslant \left|(-1)^{n+p} \frac{\ln^p(n+1)}{(n+1)^x}\right| \leqslant \frac{\ln^p(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Donc $\sup\limits_{x\geqslant a} |\rho_n(x)| \leqslant \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n^{(p)}$ CU sur $[a, +\infty[$.

LES FONCTIONS ZÉTA ET ZÉTA ALTERNÉE DE RIEMANN

(b) • Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction h_n est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$;

• Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geqslant 1} h_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, μ est de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x>0,\ \mu^{(p)}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+p-1}\frac{\ln^p(n)}{n^x}$$

21. Pour $x>1$, on a :

$$\begin{aligned}\mu(x)-\zeta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^x}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-2}{(2k)^x}\\ &= -2^{1-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}=-2^{1-x}\zeta(x)\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité : $\mu(x)=(1-2^{1-x})\zeta(x)$.

22. (a) On pose $h=x-1$. Comme μ est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \mu(1)+h\mu'(1)+\circ(h)\\ &= \ln 2+(x-1)\mu'(1)+o(x-1)\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}1-2^{1-x} &= 1-e^{-h\ln 2}\\ &= h\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2}h^2+o(h^2)\\ &= (x-1)\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \frac{\mu(x)}{1-2^{1-x}}=\frac{\ln 2+h\mu'(1)+o(h)}{h\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2}h^2+o(h^2)}\\ &= \frac{1}{h\ln 2}\frac{\ln 2+h\mu'(1)+o(h)}{1-\frac{\ln 2}{2}h+o(h)}\\ &= \frac{1}{h\ln 2}(\ln 2+h\mu'(1)+o(h))\left(1+\frac{\ln 2}{2}h+o(h)\right)\\ &= \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2+h\left(\mu'(1)+\frac{\ln^2 2}{2}\right)+o(h)\right)\\ &= \frac{1}{h}+\left(\frac{\mu'(1)}{\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}\right)+o(1)\end{aligned}$$

23. Par unicité du développement limité en 1^+ (éventuellement en multipliant par $(x-1)$), on déduit de la question 15.) les égalités $a=1$ et $\frac{\mu'(1)}{\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}=b=\gamma$. D'où $\mu'(1)=\ln 2\left(\gamma-\frac{\ln 2}{2}\right)$.

D'après 20b.), $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}=-\mu'(1)=\ln 2\left(\frac{\ln 2}{2}-\gamma\right)$.

Assemblage