DNS

Sujet

Formation d'une couche de glace sur un lac

La *figure* 1 illustre le problème de la formation d'une couche de glace tel qu'il fut formulé dans le travail pionnier de Stefan (1891). L'eau du lac, en phase liquide, est à la température de l'équilibre eau-glace à la pression atmosphérique moyenne $P=1,01325\times 10^5\,Pa$ soit $T_F=0{,}00\,°C$, température supposée constante. L'air au dessus de l'eau est à la température $T_A=-30\,°C$, également supposée constante.

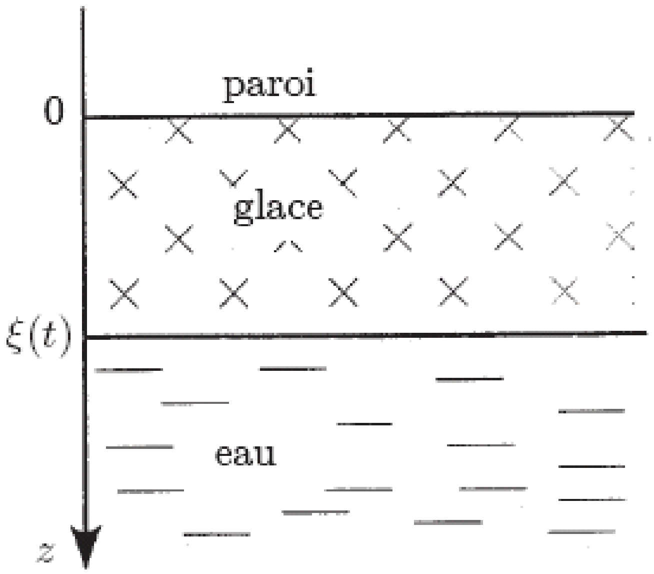


Figure 1

Données numériques :

- Capacité thermique massique de la glace $c_G = 2,09 \times 10^3 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'eau $c_E = 4,18 \times 10^3 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
- Conductibilité thermique de l'eau $\lambda_0 = 0,335 \ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
- Conductibilité thermique de la glace $\lambda_G = 2,215 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
- Conductibilité thermique de la neige $\lambda_n = 0,3 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
- Masse volumique de l'eau $\rho_0 = 1,00 \times 10^3 kg \cdot m^{-3}$
- Masse volumique de la glace $\rho_G = 0,915 \times 10^3 kg \cdot m^{-3}$
- Masse volumique de la neige $\rho_n = 0,33 \times 10^3 kg \cdot m^{-3}$
- Enthalpie de fusion de la glace $L = 0,333 \times 10^6 \, unités \, SI$

les données précédentes sont supposées indépendantes de la température.

Le lac, non gelé à l'instant initial $t=0$, se recouvre progressivement d'une couche de glace. Le changement d'état a lieu à pression constante.

Le problème est à une variable d'espace. On oriente l'axe Oz de la surface vers le fond du lac. L'interface entre l'air et la surface du lac est supposé maintenu à une position fixe en $z=0$. On note $\xi(t)$ la position de l'interface entre l'eau et la glace ; la glace occupe donc l'espace $0 < z < \xi(t)$.

Soit $T_G(z,t)$ le champ de température dans la glace, supposé unidimensionnel.

I. Contact parfait air-glace

En $z=0$, il y a contact parfait c'est-à-dire on suppose $T_G(z=0,t) = T_A$.

A. La diffusion thermique

L'équation de bilan local d'enthalpie au sein de la glace déjà formée (à pression constante, en l'absence de sources d'enthalpie) est :

$$div \vec{J}_Q + \mu_G c_G \frac{\partial T_G}{\partial t} = 0$$

avec $\vec{J}_Q$:densité de courant d'énergie.

1. Exprimer la loi de Fourier et retrouver l'équation de la diffusion thermique.
2. Que devient cette équation de la diffusion ici où la seule variable d'espace est z .
3. Quelles sont les conditions aux limites pour le champ de température de la glace ? Permettent-elles de déterminer $T_G(z,t)$?
4. Que peut-on dire de la densité de courant d'énergie au sein de l'eau liquide ?

On suppose que $\xi(t)$ est suffisamment faible pour admettre que la distribution de température dans la glace est à tout instant celle de l'état stationnaire pour l'épaisseur de glace formée à cet instant (approximation quasi stationnaire).

5. Pourquoi n'a-t-on jamais rigoureusement de régime permanent ?

6. Que devient l'équation de la chaleur dans l'approximation quasi stationnaire ? En déduire une expression de $T_G(z,t)$ faisant intervenir $\xi(t)$.

7. Exprimer le gradient de température $\overrightarrow{grad}(T)$ au sein de la glace toujours en faisant intervenir $\xi(t)$.

8. En faisant intervenir $\xi(t)$, exprimer pour un cylindre vertical de section S le flux thermique $\phi(z,t)$ dans la glace (préciser le sens positif choisi pour $\phi(z,t)$: positif dans le sens de l'axe z ou dans le sens contraire ?).

9. De même quel est le flux thermique dans l'eau liquide pour une section S ?

10. Pourquoi l'eau liquide est-elle mise en mouvement par l'avancée de l'interface ?

B. Le bilan enthalpique

Soient h_G l'enthalpie massique de la glace et h_E celle de l'eau liquide que l'on suppose indépendantes de la température. On désigne par L_F la chaleur latente de fusion (ou enthalpie massique de fusion) de la glace.

11. Rappeler l' unité de h_G, h_E, L_F . Quelle est la relation simple entre ces trois grandeurs ?

12. On considère une masse élémentaire dm d'eau liquide qui se transforme en glace :

- Exprimer l'enthalpie élémentaire initiale puis finale et retrouver l'expression de la variation d'enthalpie au cours de la solidification en fonction de L_F et dm .
- En raisonnant sur le cylindre vertical de section S , relier dm masse élémentaire d'eau qui s'est transformée en glace pendant dt à $\frac{d\,\xi(t)}{dt}=\mathring{\xi}(t)$ vitesse de l'interface.
- On désigne par v_E la vitesse verticale de l'eau qui gèle. Effectuer un bilan enthalpique pour la masse dm qui se solidifie pendant dt . On néglige désormais l'énergie cinétique de l'eau, que devient ce bilan enthalpique ?

13. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\xi(t)$.

C. Solution

14. Montrer que $\xi(t)=\sqrt{2Dt}$ où D est une constante que l'on explicitera en fonction des données. Quelle est la dimension de D ? Représenter l'allure de la courbe $\xi(t)$.

II. Convection à l'interface air-glace

On reprend l'étude précédente. On tient compte à l'interface air-glace d'échanges conducto-convectifs. Le coefficient de transfert conducto-convectif est noté α . On continue à se placer dans le cadre de l'approximation quasi stationnaire.

15. Écrire les équations reliant le flux $\phi(z,t)$, l'épaisseur de glace $\xi(t)$ formée à l'instant t

et la température de la couche de glace en $z=0$, $T_{AG}(t)$. Ces équations font bien entendu intervenir d'autres données du problème.

16.Écrire l'équation différentielle donnant $\xi(t)$ et résoudre.

17.Déterminer aussi $T_{AG}(t)$. On exprimera $\Theta(t)=(T_{AG}(t)-T_A)/(T_F-T_A)$ et on donnera l'allure de la courbe $\Theta(t)$.

III. Effet d'une couche de neige

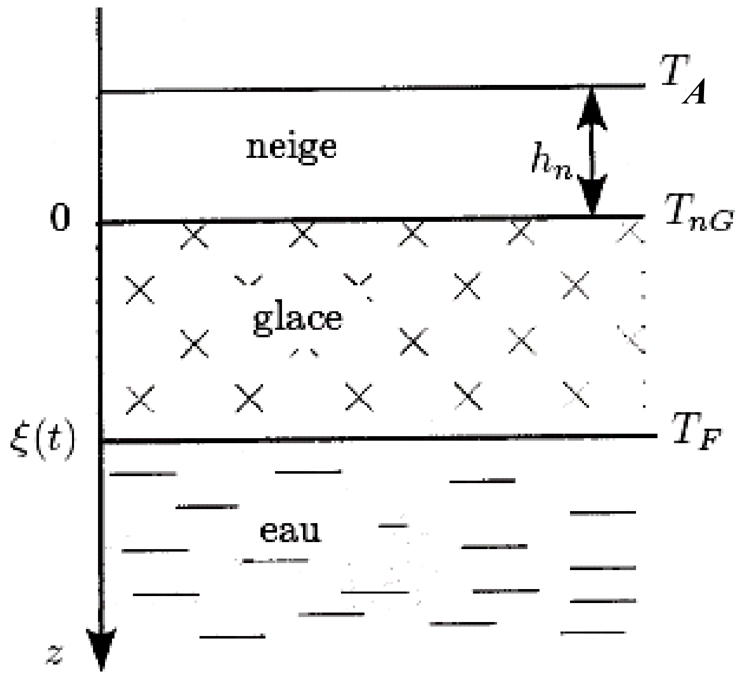


Figure 2

On souhaite étudier l'effet d'un couvert de neige sur la croissance de la glace. On suppose qu'il existe une couche de neige d'épaisseur $h_n=0{,}20\,m$ constante, présente dès l'instant initial sur une très mince couche de glace (*figure* 2). On note T_{nG} la température à l'interface neige/glace. On suppose que la température de la neige à l'interface air-neige vaut T_A .

18.Quelle est la forme des profils de température au sein de la neige et de la glace en régime quasi stationnaire ? Quelle condition doit être vérifiée à l'interface neige/glace ?

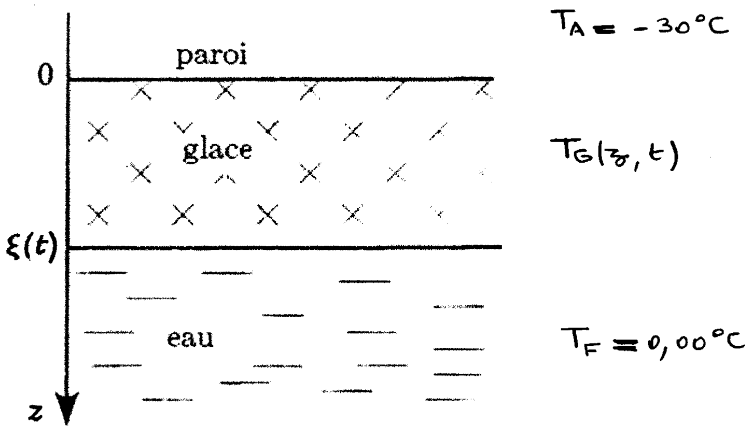
19.Exprimer J_Q en fonction de $T_{nG}-T_A$, puis de T_F-T_{nG} . Exprimer alors J_Q en fonction de T_F-T_A et de $\xi(t)$.

20.En déduire la nouvelle équation différentielle portant sur ξ . Montrer que la solution satisfaisant aux conditions initiales est : $\xi(t)=\sqrt{2Dt+\xi_n^2}-\xi_n$ où ξ_n est une longueur caractéristique que l'on explicitera.

21.On obtient les résultats numériques suivants pour l'épaisseur de glace obtenue : ($D=2{,}18\ 10^{-7}\,SI$ et $\xi_n=1{,}48\,m$). La neige joue-t-elle un rôle dans la croissance des couverts de glace ? Commenter.

Durée	*Un jour*	*Une semaine*	*Un mois*	*Six mois*
Sans neige (I)	$19\,cm$	$51\,cm$	$1{,}06\,m$	$2{,}62\,m$
Avec neige (III)	$1{,}3\,cm$	$8{,}7\,cm$	$34\,cm$	$1{,}53\,m$

Réponses



1) Dans la glace :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{J_Q} + \mu_G c_G \frac{\partial T_G}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div}(-\lambda_G \overrightarrow{\operatorname{grad}} T_G) + \mu_G c_G \frac{\partial T_G}{\partial t} = 0$$

$$-\lambda_G \Delta T_G + \mu_G c_G \frac{\partial T_G}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\Delta T_G - \frac{\mu_G c_G}{\lambda_G} \frac{\partial T_G}{\partial t} = 0}$$

---

2) Ici $T_G = T_G(z,t)$ donc l'équation devient

$$\boxed{\frac{\partial^2 T_G}{\partial z^2} - \frac{\mu_G c_G}{\lambda_G} \frac{\partial T_G}{\partial t} = 0}$$

---

3) Conditions aux limites

$$\boxed{\begin{aligned} T_G(z=0,t) &= T_A \\ T_G(z=\xi(t),t) &= T_F \end{aligned}}$$

Ces conditions ne permettent pas de déterminer $T_G(z,t)$

→ on peut dire que si l'on a des conditions aux limites, l'une de ces conditions fait intervenir $\xi(t)$ qui est inconnu.

→ on peut aussi dire que puisque $T_G(z,t)$ dépend de t,

il faut préciser des conditions initiales.
On précisera au moins que $\xi(t)$ est nul en $t=0$.

---

4) Dans l'eau liquide T est uniforme et vaut T_F.
La densité de courant d'énergie :

$$\overrightarrow{J_Q}_{\text{eau liquide}} = -\lambda_0 \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}\, T}_{\text{donc nul}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{J_Q}_{\text{eau liquide}} = \vec{0}}$$

---

5) $\boxed{z_{\text{frontière}} = \xi(t) \quad \text{dépend du temps}}$

La frontière change au cours du temps.
Le régime dans la glace n'est donc pas rigoureusement permanent.

---

6) Dans le cadre de l'approximation quasistationnaire, on a

$$\boxed{\frac{\partial^2 T_G(z,t)}{\partial z^2} = 0}$$

$$T_G(z,t) = A(t)\, z + B(t)$$

C.L.

$z=0 \qquad T_A = \cancel{B(t)}$

$z=\xi(t) \qquad T_F = A(t)\,\xi(t) + B$

finalement :

$$\boxed{T_{G(z,t)} = \frac{T_F - T_A}{\xi(t)}\, z + T_A}$$

---

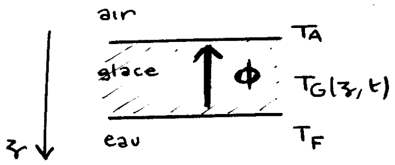
7) $$\overrightarrow{\text{grad}}\, T_G = \frac{\partial T_G}{\partial z}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, T_G = \frac{T_F - T_A}{\xi(t)}\,\overrightarrow{u_z}}$$

(le gradient est uniforme)

---

8)



$$\overrightarrow{J_Q}_{\text{glace}} = -\lambda_G \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T_G$$
$$= -\lambda_G \frac{T_F - T_A}{\xi(t)} \overrightarrow{u_z}$$

Donc $\overrightarrow{J_Q}$ est selon $(-\overrightarrow{u_z})$

Pour travailler avec $\phi > 0$, je choisis pour $\phi(z,t)$ le sens positif selon $(-\overrightarrow{u_z})$

$$d\phi = \overrightarrow{J_Q}\ \overrightarrow{dS}$$
$$= \lambda_G \frac{T_F - T_A}{\xi(t)} (-\overrightarrow{u_z}) \quad dS\ (-\overrightarrow{u_z})$$
$$\phi_{(z,t)} = \lambda_G \frac{T_F - T_A}{\xi(t)} S$$

Bien entendu, ici ϕ est indépendant de z. On aurait pu définir une résistance thermique de conduction pour le cylindre de glace étudié

$$\boxed{\phi(t)_{\text{glace}} = \frac{\lambda_G S}{\xi(t)} (T_F - T_A)}$$

$$R_{th}(t) = \frac{\xi(t)}{\lambda_G S}$$

---

9) Dans l'eau liquide, on a vu en 4) que $\overrightarrow{J_Q}$ était nul

$$\boxed{\phi_{\substack{\text{eau}\\ \text{liquide}}} = 0}$$

L'énergie thermique libérée par la solidification de l'eau se dirige vers l'atmosphère (à une température plus faible)

---

10) On donne

glace : $\rho_G = 0{,}915\ 10^3\ \text{kg m}^{-3}$

eau liq : $\rho_0 = 1{,}000\ 10^3\ \text{kg m}^{-3}$

Le volume de la glace formée est supérieur à celui de l'eau liquide initiale.

Le niveau supérieur de la glace étant supposé fixe, l'eau liquide est donc repoussée vers le fond avec une vitesse verticale $v_E(t)$

---

11) $\boxed{h_G\ ,\ h_E\ ,\ L_F \text{ sont en } J.kg^{-1}}$

avec $h_E > h_G$

$$\boxed{L_F = (h_E - h_G) > 0}$$

---

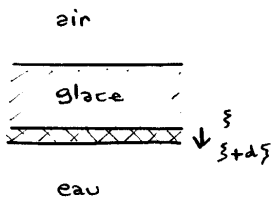
12) → enthalpie initiale : $dm\ h_E$

enthalpie finale : $dm\ h_G$

$$dH = dm\ h_G - dm\ h_E$$

$$\boxed{dH = -\, dm\ L_F}$$

→



La masse de glace correspondant à $d\xi$ est $d\xi \times \rho_G$

$$dm = \underbrace{d\xi}_{\dot{\xi}\ dt}\ S\ \rho_G$$

$$\boxed{dm = \dot{\xi}(t)\ S\ \rho_G\ dt}$$

→ Pour l'eau qui gèle pendant dt

$$dH = \delta Q_{\substack{\text{reçu}\\ \text{transfert}}} + \delta Q_{\substack{\text{produit}\\ \text{sources}}}$$

En fait dans l'énergie (ici à pression constante, on utilise d'ailleurs l'enthalpie) il faut comptabiliser aussi l'énergie cinétique macroscopique. L'eau qui gèle avait une vitesse v_E avant de geler. Ensuite, l'énergie cinétique a disparu.

On écrit donc, en l'absence de terme de sources :

$$\boxed{d(H + E_c) = \delta Q_{reçu}}$$

$$dH - dm \frac{v_E^2}{2} = -\phi(\xi(t), t)\, dt$$

$$-dm \left(L_F + \frac{v_E^2}{2}\right) = -\phi(\xi(t), t)\, dt$$

$$\boxed{\dot{\xi}(t)\, S\, \rho_G \left(L_F + \frac{v_E^2}{2}\right) = \phi}$$

En négligeant l'énergie cinétique

$$\boxed{\dot{\xi}(t)\, S\, \rho_G\, L_F = \phi}$$

---

13)

$$\dot{\xi}(t)\, S\, \rho_G\, L_F = \frac{\lambda_G S}{\xi(t)} (T_F - T_A)$$

$$\boxed{\xi(t)\, \dot{\xi}(t) = D}$$

avec

$$\boxed{D = \frac{\lambda_G}{\rho_G L_F} (T_F - T_A)}$$

---

14) On intègre

$$\frac{\xi^2(t)}{2} = D t + \text{constante}$$

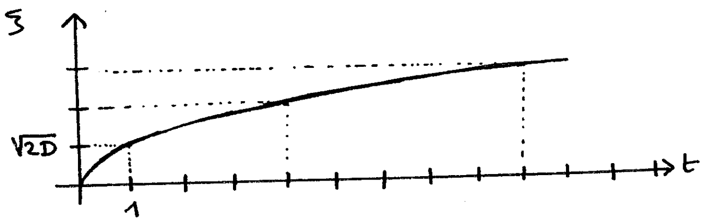
CI $\quad 0 = 0 + \text{constante}$

$$\boxed{\xi(t) = \sqrt{2Dt}}$$

$$[D] = \frac{[\xi]^2}{[t]}$$

$$\boxed{[D] = L^2\,T^{-1}}$$

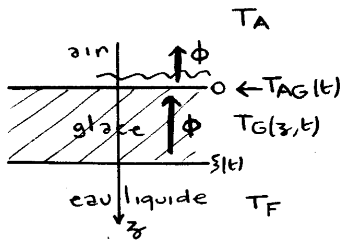
(comme pour le coefficient de diffusivité $\frac{\lambda}{\mu c}$)

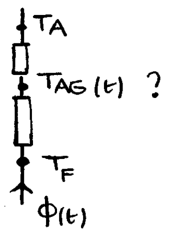


(La courbe est une parabole)

---

15)





Dans le cadre de l'approximation quasistationnaire pour la glace, le problème se modélise par deux résistances série

On a toujours comme précédemment :

$$\boxed{\phi_{(t)} = S\,\rho_G\,\dot{\xi}(t)\,L_F}$$

$$\boxed{T_F - T_{AG(t)} = \frac{\xi(t)}{\lambda_G S}\,\phi(t)}$$

puis :

$$\boxed{T_{AG(t)} - T_A = \frac{1}{\alpha S}\,\phi(t)}$$

---

16) Les deux dernières équations permettent d'écrire (cf résistances en série)

$$T_F - T_A = \left(\frac{\xi(t)}{\lambda_G S} + \frac{1}{\alpha S}\right)\underbrace{\phi(t)}_{S\,\rho_G\,\dot{\xi}(t)\,L_F}$$

$$\frac{D\,\cancel{\rho_G}\,\cancel{\Delta_F}}{\lambda_G} = \left(\frac{\xi(t)}{\lambda_G} + \frac{1}{\alpha}\right)\cancel{\rho_G}\,\cancel{\Delta_F}\;\dot{\xi}(t)$$

$$\boxed{\dot{\xi}(t)\left(\xi(t) + \frac{\lambda_G}{\alpha}\right) = D}$$

On intègre

$$\frac{1}{2}\left(\xi(t) + \frac{\lambda_G}{\alpha}\right)^2 = D\,t + \text{constante}$$

$$\text{C.I.}\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_G}{\alpha}\right)^2 = \text{constante}$$

$$\boxed{\left(\xi(t) + \frac{\lambda_G}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_G}{\alpha}\right)^2 = 2\,D\,t}$$

$$\boxed{\xi(t) = \frac{\lambda_G}{\alpha}\left(\sqrt{1 + \frac{2D\alpha^2}{\lambda_G^2}t} - 1\right)}$$

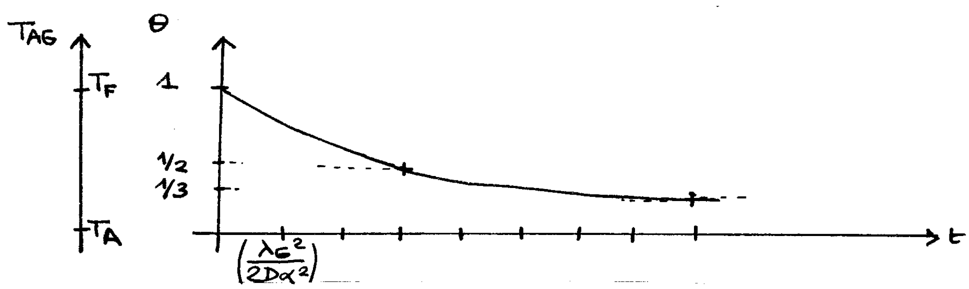
---

17) A partir des équations 15) et 16), ou en raisonnant directement par les "diviseurs de tension" (cf résistances thermiques)

$$\theta(t) = \frac{T_{AG}(t) - T_A}{T_F - T_A}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\alpha S}}{\dfrac{\xi(t)}{\lambda_G S} + \dfrac{1}{\alpha S}}$$

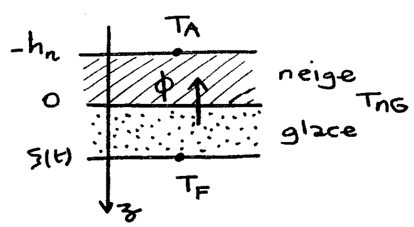
$$\boxed{\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2D\alpha^2}{\lambda_G^2}t}}}$$

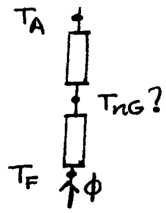


La température à l'interface part de 0°C et tend vers −30°C

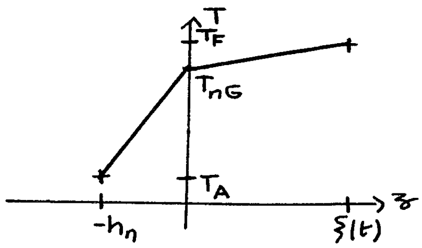
---

18)





En régime quasistationnaire, T est une <u>fonction affine</u> dans la glace et dans la neige.



– dans la neige $T = T_n$

$$\frac{T_n - T_{nG}}{T_A - T_{nG}} = \frac{z - 0}{-h_n - 0} \qquad \boxed{T_n = T_{nG} + \frac{T_{nG} - T_A}{h_n}\, z}$$

– dans la glace $T = T_G$

$$\frac{T_G - T_{nG}}{T_F - T_{nG}} = \frac{z - 0}{\xi(t) - 0} \qquad \boxed{T_G = T_{nG} + \frac{T_F - T_{nG}}{\xi(t)}\, z}$$

A l'interface, ϕ donc $\overrightarrow{j_Q}$ est continu

dans la glace $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda_G \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T_G$

dans la neige $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda_n \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T_n$

($\lambda_n < \lambda_G$ donc le gradient est plus important dans la neige)

---

19)

$$\boxed{\begin{array}{l} j_Q = -\lambda_G \dfrac{T_F - T_{nG}}{\xi(t)} \\ \hline j_Q = -\lambda_n \dfrac{T_{nG} - T_A}{h_n} \end{array}}$$

(cf résistance thermique : $\dfrac{\xi}{\lambda_G S}$)

(cf résistance thermique : $\dfrac{h_n}{\lambda_n S}$)

d'où (cf $j_Q = -\phi/S$ et <u>association de résistances en série</u> ou par calcul)

$$\boxed{j_Q = - \frac{T_F - T_A}{\dfrac{\xi(t)}{\lambda_G} + \dfrac{h_n}{\lambda_n}}}$$

20) La démarche est la même qu'en 16) avec $\frac{1}{\alpha} \rightarrow \frac{h_n}{\lambda_n}$

soit $\frac{\lambda_G}{\alpha} \rightarrow \frac{\lambda_G}{\lambda_n} h_n$

finalement :

$$\boxed{\left(\xi + \underbrace{\frac{\lambda_G}{\lambda_n} h_n}_{\text{ce } \xi_n}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_G}{\lambda_n} h_n\right)^2 = 2Dt}$$

---

21) Tant que ξ n'est pas beaucoup plus grand que $\xi_n = 1,48\,m$ la neige freine donc la croissance de la glace assez nettement.

Ceci s'explique par l'effet isolant thermique de la neige

$$\frac{\lambda_G}{\lambda_n} = 7,4$$

(une épaisseur de neige isole comme 7,4 épaisseurs de glace)
