Stone Weierstrass et applications
Énoncé

Soit n un entier naturel, on note $[\![0,n]\!] = \{0,\cdots,n\}$, on appelle polynôme de Bernstein de degré n les polynômes réels $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$, $k \in [\![0,n]\!]$. Dans ce problème, on voudrait démontrer le théorème de Weierstrass par deux méthodes et donner quelques applications de ce théorème. Dans toute la suite, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée

Partie I: Théorème de Weierstrass

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par,

$$P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$

1. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$

   (b) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant B_{n,k}(x) \leqslant 1$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$, exprimer $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$
   (On étudiera les trois cas : $(k \neq 0$ et $k \neq n)$, $(k = 0)$ puis $(k = n)$)

   (b) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $(P_n(f))'(x) = n\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n-1,k}(x)$

   (c) En déduire que si f est croissante sur $[0,1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $P_n(f)$ est croissante sur $[0,1]$.

4. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$

   (a) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)$

   (b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que,
   pour tout $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, $|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   (On vous demande de redémontrer le théorème de Heine pour l'application f continue sur le segment $[0,1]$)

   (c) Soit $x \in [0,1]$, on pose $A = \left\{k \in [\![0,n]\!]\,;\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \alpha\right\}$ et $B = \left\{k \in [\![0,n]\!]\,;\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha\right\}$

      i. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in A}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

      ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in B}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{2M}{n\alpha^2}x(1-x) \leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}$, avec $M = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$

   (d) En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $|P_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{M}{2n\alpha^2}$, avec $M = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$

   (e) En déduire que la suite $(P_n(f))_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5. Plus généralement, soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n(g))_{n\geqslant 0}$ qui converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

Partie II: Une démonstration probabiliste du théorème de Stone Weierstrass

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et x, $x \in [0,1]$, on pose pour out $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{S_n}{n}$

(a) Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n

(b) Justifier que, pour tout $\delta > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - x| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{1}{4n\delta^2}$

2. On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose pour tout $x \in [0,1]$, $C_n(f)(x) = \mathbb{E}(Y_n)$. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.

   (a) Vérifier que $x \longmapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0,1]$.

   (b) D'après le théorème de Heine, comme f est continue sur $[0,1]$, alors il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]$, $|x_1 - x_2| \leqslant \beta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. (On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat).

      i. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \beta}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

      ii. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| > \beta}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \dfrac{M}{2n\beta^2}$, avec $M = \displaystyle\sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$

   (c) En déduire que la suite $(C_n(f))_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Partie III: Application

Dans toute la suite de ce problème, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, on pose $I = [a,b]$.

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

   (a) Montrer que la fonction f est nulle sur I.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$

   (c) En déduire qu'il existe une fonction réelle ϕ, continue sur $[0, +\infty[$ et non nulle, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes telle que $\displaystyle\int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [a,b]} |g(t) - P_n(t)| = 0$

3. Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes telle que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [a,b]} |\varphi(t) - P_n(t)| = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [a,b]} |\varphi'(t) - P_n'(t)| = 0$

4. Soit $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, $P_n(t) \geqslant 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in [a,b]} |\psi(t) - P_n(t)| = 0$