# Planche n° 43. Variables aléatoires. Corrigé

**Exercice n° 1**

**Tirages simultanés.** On peut prendre $\Omega = \mathscr{P}_n(\llbracket 1, N\rrbracket)$ (l'ensemble des parties à $n$ éléments de $\llbracket 1, N\rrbracket$). Alors $\text{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$. Les événements élémentaires sont équiprobables.

Le plus grand des éléments de $n$ nombres deux à deux distincts de $\llbracket 1, N\rrbracket$ est au moins égal $n$. Donc $X(\Omega) \subset \llbracket n, N\rrbracket$. Réciproquement, les tirages $\omega_k = \{1, 2, \dots, n-1, k\}$ où $k \in \llbracket n, N\rrbracket$ sont tels que $X(\omega_k) = k$ et donc $X(\Omega) = \llbracket n, N\rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket n, N\rrbracket$. Une partie à $n$ éléments de $\llbracket 1, N\rrbracket$ dont le plus grand élément est $k$ est constituée de $\{k\}$ et d'une partie à $n-1$ éléments de $\llbracket 1, k-1\rrbracket$. Il y a $\binom{k-1}{n-1}$ telles parties. La loi de probabilité de $X$ est donc

$$\forall k \in \llbracket n, N\rrbracket,\ p(X = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

Remarque. $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k-1}{n-1} = \sum_{k=n}^{N} \left(\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}\right) = \binom{N}{n} - \binom{n-1}{n} = \binom{N}{n}$ (somme télescopique) et donc

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = 1.$$

**Tirages successifs avec remise.** On peut prendre $\Omega = \llbracket 1, N\rrbracket^n$. Alors $\text{card}(\Omega) = N^n$. Les événements élémentaires sont équiprobables.

Soit $k \in \llbracket 1, N\rrbracket$. Un $n$-uplet d'éléments de $\llbracket 1, N\rrbracket$ dont le plus grand élément est inférieur ou égal à $k$ est un $n$-uplet constitué d'éléments de $\llbracket 1, k\rrbracket$. Il y a $k^n$ tels $n$-uplets. Donc, $p(X \leqslant k) = \dfrac{k^n}{N^n}$. Mais alors

$$p(X = k) = p(X \leqslant k) - p(X \leqslant k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n},$$

(y compris si $k = 1$). La loi de probabilité de $X$ est donc

$$\forall k \in \llbracket 1, N\rrbracket,\ p(X = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}.$$

Remarque. $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} = \frac{N^n - 0^N}{N^n} = 1.$

**Exercice n° 2**

On peut prendre $\Omega = \llbracket 1, 6\rrbracket^2$. $\text{card}(\Omega) = 36$. Les événements élémentaires sont équiprobables.

• Pour $(i, j) \in \llbracket 1, 6\rrbracket^2$, $-5 = 1-6 \leqslant i-j \leqslant 6-1 = 5$ et donc $X(\Omega) \subset \llbracket -5, 5\rrbracket$. Réciproquement, les couples $(1, k)$, $1 \leqslant k \leqslant 6$ et $(k, 1)$, $2 \leqslant k \leqslant 5$, fournissent toutes les valeurs de $-5$ à $5$ et donc $X(\Omega) = \llbracket -5, 5\rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket -5, 5\rrbracket$.

- Si $-5 \leqslant k \leqslant 0$, les couples fournissant une différence égale à $k$ sont les couples $(i, -k+i)$, $1 \leqslant i \leqslant 6+k$. Il y a $6+k$ tels couples et donc $p(X = k) = \dfrac{6+k}{36}$.
- Si $1 \leqslant k \leqslant 5$, les couples fournissant une différence égale à $k$ sont les couples $(i, k+i)$, $1 \leqslant i \leqslant 6-k$. Il y a $6-k$ tels couples et donc $p(X = k) = \dfrac{6-k}{36}$.

La loi de probabilité de $X$ est donc

$$\forall k \in \llbracket -5, 5\rrbracket,\ p(X = k) = \frac{6 - |k|}{36}.$$

L'espérance de $X$ est $E(X) = \displaystyle\sum_{k=-5}^{5} k\frac{6-|k|}{36} = 0.$

 

• $|X|(\Omega) = [\![0,5]\!]$. $p(|X|=0) = p(X=0) = \dfrac{1}{6}$ et pour $k \in [\![1,5]\!]$, $p(|X|=k) = p(X=k)+p(X=-k) = 2\dfrac{6-k}{36} = \dfrac{6-k}{18}$.
Ensuite, d'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}E(|X|) &= \sum_{k=-5}^{5} |k|\frac{6-|k|}{36} = 2\sum_{k=1}^{5} k\frac{6-k}{36} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{5} k - \frac{1}{18}\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{1}{3}\times\frac{5\times 6}{2} - \frac{1}{18}\times\frac{5\times 6\times 11}{6}\\ &= 5 - \frac{55}{18} = \frac{45}{18} = \frac{5}{2} = 2,5.\end{aligned}$$

• $X^2(\Omega) = \{0,1,4,9,16,25\}$.
$p(X^2=0) = p(X=0) = \dfrac{1}{6}$ et pour $x \in \{1,4,9,16,25\}$, $p(X^2=x) = p(X=\sqrt{x}) + p(X=-\sqrt{x}) = 2\dfrac{6-\sqrt{x}}{36} = \dfrac{6-\sqrt{x}}{18}$.

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{k=-5}^{5} k^2\frac{6-|k|}{36} = 2\sum_{k=1}^{5} k^2\frac{6-k}{36} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{5} k^2 - \frac{1}{18}\sum_{k=1}^{5} k^3 = \frac{1}{3}\times\frac{5\times 6\times 11}{6} - \frac{1}{18}\times\frac{5^2\times 6^2}{4}\\ &= \frac{55}{3} - \frac{25}{2} = \frac{35}{6}.\end{aligned}$$

**Exercice n° 3**

**1) a)** La variable aléatoire $X$ est régie par une loi binomiale. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes (car les tirages se font avec remise) sont effectuées.
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est blanche » avec une probabilité $p = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ et « la boule tirée n'est pas blanche » avec une probabilité $1-p = \dfrac{4}{5}$.

La variable aléatoire $X$ est régie par une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\dfrac{1}{5}$. On sait alors que

$$X(\Omega) = [\![0,5]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0,5]\!],\ p(X=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}.$$

Plus explicitement,

- $p(X=0) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^5 = \dfrac{1024}{3125} = 0,32768$.
- $p(X=1) = 5\times\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^4 = \dfrac{256}{625} = 0,4096$.
- $p(X=2) = 10\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{128}{625} = 0,2048$.
- $p(X=3) = 10\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{32}{625} = 0,0512$.
- $p(X=4) = 5\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^4\times\dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{625} = 0,0064$.
- $p(X=5) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^5 = \dfrac{1}{3125} = 0,00032$.

L'espérance de $X$ est $E(X) = np = 5\times\dfrac{1}{5} = 1$ et la variance de $X$ est $V(X) = np(1-p) = 5\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

**b)** $Y = 2X - 3(5-X) = 5X - 15$. Par suite, $Y(\Omega) = \{5k-15,\ k\in[\![0,5]\!]\} = \{-15,-10,-5,0,5,10\}$. Ensuite,

$$\forall k \in [\![0,5]\!],\ p(Y=5k-15) = p(X=k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}.$$

ou aussi

$$\forall x \in \{-15,-10,-5,0,5,10\},\ P(Y=x) = \binom{5}{\frac{x+15}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+15}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{5-\frac{x+15}{5}}.$$

Ensuite, $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5\times 1 - 15 = -10$ et $V(Y) = V(5X-15) = 5^2V(X) = 25\times\dfrac{4}{5} = 20$.

 

**2)** Les lois de probabilité de $X$ et $Y$ ne changent pas si on suppose les tirages simultanés. On peut prendre pour $\Omega$ l'ensemble des tirages simultanés de 5 boules parmi 10 ou encore l'ensemble des parties à 5 éléments d'un ensemble à 10 éléments. Le nombre de tirages simultanés de 5 boules parmi 10 est $\binom{10}{5}$. Les événements élémentaires sont équiprobables.

**a)** $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
Soit $k \in [\![0, 2]\!]$. Au cours d'un tirage de 5 boules, on obtient $k$ boules blanches si et seulement si on tire $k$ boules parmi les 2 blanches et $5 - k$ boules parmi les 8 noires. Il y a donc $\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}$ tirages où on obtient $k$ boules blanches. Donc,

$$\forall k \in [\![0, 2]\!],\ p(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

Plus explicitement,

- $p(X = 0) = \dfrac{\dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2}}{\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \dfrac{5 \times 4}{10 \times 9} = \dfrac{2}{9}$.
- $p(X = 1) = \dfrac{2 \times \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2}}{\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \dfrac{2 \times 5 \times 5}{10 \times 9} = \dfrac{5}{9}$.
- $p(X = 2) = \dfrac{\dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2}}{\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2}} = \dfrac{5 \times 4}{10 \times 9} = \dfrac{2}{9}$.

L'espérance de $X$ est $E(X) = 0 \times \dfrac{2}{9} + 1 \times \dfrac{5}{9} + 2 \times \dfrac{2}{9} = 1$ et la variance de $X$ est

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{5}{9} + 4 \times \frac{2}{9} - 1^2 = \frac{4}{9}.$$

**b)** Comme à la question 1), $Y = 5X - 15$, $Y(\Omega) = \{5k - 15,\ k \in [\![0, 2]\!]\} = \{-15, -10, -5\}$ et

$$\forall k \in [\![0, 2]\!],\ p(Y = 5k - 15) = p(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \times \binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}.$$

Ensuite, $E(Y) = 5E(X) - 15 = -10$ et $V(Y) = 5^2 E(X) = \dfrac{100}{9}$.

**Exercice n° 4**

On peut prendre pour $\Omega$ l'ensemble des $n$-uplets de l'ensemble des boîtes $\{1, 2, 3\}$. $\text{card}(\Omega) = 3^n$. Les événements élémentaires sont équiprobables.

**1)** $X$ prend les valeurs 0, 1 ou 2.

**2) a)** $X = 2$ est l'événement « toutes les boules vont dans le même compartiment ». Parmi les répartitions des $n$ boules dans les trois compartiments, il y en a une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 1, une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 2 et une et une seule pour laquelle toutes les boules sont dans le compartiment n° 3. Donc

$$p(X = 2) = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

**b)** Soit $E$ l'événement : « le troisième compartiment est vide et les deux premiers ne le sont pas ». On a alors

$$p(X = 1) = 3 \times p(E).$$

Soit $k \in [\![1, n - 1]\!]$. Soit $E_k$ l'événement « $k$ boules sont dans le compartiment n° 1 et $n - k$ sont dans le compartiment n° 2 ». $E = \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} E_k$ et les $E_k$, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, sont deux à deux disjoints. Donc,

 

$$p(X=1)=3p(E)=3\sum_{k=1}^{n-1}p\left(E_k\right).$$

Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Le nombre de répartitions des $n$ boules telles que $k$ d'entre elles soient dans le compartiment n° 1 et $n-k$ soient dans le compartiment n° 2 est encore le nombre de tirages simultanés de $k$ boules parmi les $n$ à savoir $\binom{n}{k}$.

Donc $p\left(E_k\right)=\dfrac{\binom{n}{k}}{3^n}$. Par suite,

$$p\left(E\right)=3\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}}{3^n}=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}.$$

Enfin,

$$p(X=0)=1-p(X=1)-p(X=2)=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}-\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}.$$

$$\boxed{p(X=0)=\frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}},\ p(X=1)=\frac{2^n-2}{3^{n-1}}\text{ et }p(X=2)=\frac{1}{3^{n-1}}.}$$

**3) a)** $E(X)=0\times\dfrac{3^{n-1}-2^n-3}{3^{n-1}}+1\times\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}+2\times\dfrac{1}{3^{n-1}}=\dfrac{2^n}{3^{n-1}}=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

**b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}E(X)=\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$. Ainsi, s'il y a un grand nombre $n$ de boules et si on lance un grand nombre de fois ces $n$ boules, en moyenne, aucun compartiment n'est vide.

**Remarque.** La phrase « si on lance un grand nombre de boules, il y a très peu de chances qu'un compartiment reste vide » serait plutôt l'interprétation de $\lim\limits_{n\to+\infty}P(X=0)=1$.

**Exercice n° 5**

$\Omega$ est l'ensemble des tirages successifs sans remise des $n+2$ boules ou encore l'ensemble des permutations des $n+2$ boules. Le nombre de tirages successifs et sans remise des $n+2$ boules est $(n+2)!$ ou encore $\text{card}\,(\Omega)=(n+2)!$. Les événements élémentaires sont équiprobables.

**1)** L'urne contient $n+2$ boules. La première boule blanche peut apparaître au premier, deuxième ou troisième tirage ou encore $X\left(\Omega\right)=[\![1,3]\!]$.

• $X=1$ est l'événement : « la première boule tirée est blanche ». On a $n$ possibilités de tirer la première boule parmi les $n$ blanches puis pour chacune de ces $n$ possibilités, on a $(n+1)!$ possibilités de tirer les $n+1$ boules restantes. Donc

$$p(X=1)=\frac{n\times(n+1)!}{(n+2)!}=\frac{n}{n+2}.$$

• $X=3$ est l'événement : « les deux premières boules tirées sont noires ». On a $2!=2$ possibilités de tirer les deux premières boules puis pour chacune de ces deux possibilités, on a $n!$ possibilités de tirer les $n$ boules restantes. Donc,

$$p(X=3)=\frac{2\times n!}{(n+2)!}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

• Enfin

$$\begin{aligned}p(X=2)&=1-p(X=1)-p(X=3)=1-\frac{n}{n+2}-\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)(n+2)-n(n+1)-2}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{2n}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{X(\Omega)=[\![1,3]\!]\text{ et }p(X=1)=\frac{n}{n+2},\ p(X=2)=\frac{2n}{(n+1)(n+2)}\text{ et }p(X=3)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}.}$$

 

**2)** La première boule numérotée $1$ peut sortir au premier, deuxième, ..., $(n+1)$-ème tirage ou encore $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. L'événement $Y = k$ est l'événement « les $k-1$ premières boules ne portent pas le numéro 1 et la $k$-ème porte le numéro 1 ». Pour les $k-1$ premières boules, on a $n(n-1) \times \ldots \times (n-k+2) = \dfrac{n!}{(n-k+1)!}$ tirages possibles puis pour chacun de ces tirages, on a $2$ possibilités pour la $k$-ème boule et donc $2 \times \dfrac{n!}{(n-k+1)!}$ tirages possibles pour les $k$ premières boules. Pour chacun de ces tirages, on a $(n+2-k)!$ tirages possibles des $n+2-k$ boules restantes. Finalement,

$$p(Y = k) = \frac{\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.$$

L'événement $Y = 1$ est l'événement « la première boule porte le numéro $1$ ». Il y a $2$ tirages possibles pour la première boule puis pour chacun de ces deux tirages, il y a $(n+1)!$ tirages possibles des $n+1$ boules restantes. Donc

$$p(Y = 1) = \frac{2 \times (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+2-1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Finalement

$$\boxed{Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!] \text{ et } \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ p(Y = k) = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}.}$$

**Exercice n° 6**

• Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $E_k$ l'événement : « la $k$-ème boite est vide ». Si on note $1_A$ la fonction indicatrice d'un événement $A$, on a $X = \sum_{k=1}^{n} 1_{E_k}$ puis, par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E\left(1_{E_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(E_k\right) = nP\left(E_1\right).$$

Enfin, chacun des $p$ jetons une probabilité égale à $1 - \dfrac{1}{n}$ de ne pas être placé dans la boîte n° 1 et les jetons se répartissent dans les boîtes de manière indépendante. Donc, $P\left(E_1\right) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^p$. Finalement

$$E(X) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

• $Y$ suit une loi binomiale. En effet,

⋆ $p$ expériences identiques et indépendantes sont effectuées (placer un jeton dans une des $n$ boites, $p$ fois).
⋆ chaque expérience a une probabilité $\dfrac{1}{n}$ de succés (le jeton est placé dans la boîte n° 1) et $1 - \dfrac{1}{n}$ d'échec (le jeton est placé dans une autre boîte).

$Y$ étant le nombre de succès, $Y$ suit la loi binomiale de paramètres $p$ et $\dfrac{1}{n}$. Mais alors, $E(Y) = \dfrac{p}{n}$.

**Exercice n° 7**

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \lambda k$. Ensuite,

$$\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} k = \frac{\lambda n(n+1)}{2}.$$

Puisque $\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1$, on a donc $\lambda = \dfrac{2}{n(n+1)}$ puis

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\ P(X = k) = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

Réciproquement, les égalités ci-dessus définissent effectivement une loi de probabilité. Ensuite,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{2k}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

 

Ensuite,

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{2},$$

et donc, d'après la formule de Köenig-Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 = \frac{9n(n+1) - 2(2n+1)^2}{18} = \frac{5n^2+n-2}{18}.$$

**Exercice n° 8**

Notons $x$ le gain de $A$ (quand il gagne) puis $X$ le gain algébrique de $A$ (il faut comprendre que quand $A$ gagne, $B$ donne $x$ euros à $A$ et quand $B$ gagne, $A$ donne $3$ euros à $B$). La loi de $X$ est :

$$P(X=x) = \frac{3}{4} \text{ et } P(X=-3) = \frac{1}{4}.$$

L'espérance de $X$ est

$$E(X) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}(-3) = \frac{3x-3}{4}.$$

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$ ou encore $x = 1$.

**Exercice n° 9**

**1)** $Y = 2X - 3$.

**2)** $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $= \frac{1}{2}$. Donc, $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ puis,

$$\forall k \in [\![0,3]\!],\ P(X=k) = \binom{3}{k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{3-k}} = \frac{1}{8}\binom{3}{k}.$$

Plus explicitement, $P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(X=1) = \frac{3}{8}$, $P(X=2) = \frac{3}{8}$ et $P(X=3) = \frac{1}{8}$.

Ensuite, $E(X) = np = \frac{3}{2}$ et $V(X) = np(1-p) = \frac{3}{4}$.

**3)** $E(Y) = 2E(X) - 3 = 0$ et $V(Y) = V(2X-3 = 4V(X) = 3$. Puisque $E(X) = 0$, le jeu est équitable et le joueur n'est en moyenne ni gagnant, ni perdant.

**4)** $Y(\Omega) = \{-3,-1,1,3\}$ puis $P(Y=3) = P(X=0) = \frac{1}{8}$, $P(Y=-1) = \frac{3}{8}$, $P(Y=1) = \frac{3}{8}$ et $P(Y=3) = \frac{1}{8}$.

**Exercice n° 10**

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de $6$ obtenus en $n$ lancers. $X$ est régie par une loi binomiale de paramètres $n$ et $p = \frac{1}{6}$. L'espérance de $X$ est $E(X) = \frac{n}{6}$ et sa variance est $V(X) = np(1-p) = \frac{5n}{36}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev,

$$P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) = P\left(|X - E(X)| \leqslant \frac{n}{6}\right) = 1 - P\left(|X-E(X)| > \frac{n}{6}\right) \geqslant 1 - P\left(|X-E(X)| \geqslant \frac{n}{6}\right) \geqslant 1 - \frac{\frac{5n}{36}}{\frac{n^2}{36}} = 1 - \frac{5}{n}$$

puis

$$P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{n}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2} \Leftarrow 1 - \frac{5}{n} \geqslant \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{5}{n} \leqslant \frac{1}{2} \Leftarrow n \geqslant 10.$$

**Exercice n° 11**

**1)** La loi proposée est une loi de couple si et seulement si $p \geqslant 0$ et la somme des neuf probabilités est égale à $1$. Or,

$$4p + 2p + p + 2p + p + \frac{p}{2} + p + \frac{p}{2} + \frac{p}{4} = 12p + \frac{p}{4} = \frac{49p}{4}.$$

Donc, le tableau représente effectivement la loi d'un couple si et seulement si $p = \frac{4}{49}$.

 

**2)** $P(X=0)=p+2p+4p=7p=\dfrac{4}{7}$ puis $P(X=1)=\dfrac{1}{2}P(X=0)=\dfrac{2}{7}$ puis $P(X=2)=\dfrac{1}{7}$. De même, $P(Y=2)=P(X=0)=\dfrac{4}{7}$, $P(Y=1)=\dfrac{2}{7}$ et $P(Y=0)=\dfrac{1}{7}$.

**3)** $E(X)=0\times\dfrac{4}{7}+1\times\dfrac{2}{7}+2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{4}{7}$ et $E(Y)=0\times\dfrac{1}{7}+1\times\dfrac{2}{7}+2\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{10}{7}$ puis $E(X)E(Y)=\dfrac{40}{49}$.

Ensuite, d'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}E(XY)&=\sum_{((k,l)\in[\![0,2]\!]^2}klP((X=k)\cap(Y=l))\\&=0\times p+0\times\frac{p}{2}+0\times\frac{p}{4}+0\times 2p+1\times p+2\times\frac{p}{2}+0\times 4p+2\times 2p+4\times p=10p\\&=\frac{40}{49}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$$

**Remarque.** $P((X=0)\cap(Y=0))=p=\dfrac{4}{7}$ et $P(X=0)\times P(Y=0)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{4}{49}\neq P((X=0)\cap(Y=0))$. Les variables $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes bien que leur covariance soit nulle.

**Exercice n° 12**

**1)** La somme des quatre probabilités toujours est égale à 1. Donc, on a une loi de couple si et seulement si les quatre nombres sont dans $[0,1]$ ce qui équivaut à $0\leqslant p\leqslant\dfrac{1}{3}$.

**2)** $P(X=0)=\dfrac{1}{6}+p+\dfrac{1}{2}-p=\dfrac{2}{3}$ et $P(X=1)=\dfrac{1}{3}$ et $P(Y=0)=\dfrac{1}{6}+p+\dfrac{1}{3}-p=\dfrac{1}{2}$ et $P(Y=1)=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $X$ et $Y$ suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

Mais alors, $E(X)=\dfrac{1}{3}$, $V(X)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$ puis $E(Y)=\dfrac{1}{2}$ et $V(Y)=\dfrac{1}{4}$.

**3)** $E(XY)=\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant 1}klP((X=k)\cap(Y=l))=0+1\times p=p$ et donc

$$\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=p-\frac{1}{18}.$$

**4)** Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, on a nécessairement $p=\dfrac{1}{18}\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$. Réciproquement, pour ce choix de $p$, on a :

$$P((X=0)\cap(Y=0))=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}\text{ et }P(X=0)\times P(Y=0)\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\neq P((X=0)\cap(Y=0)).$$

Il n'existe pas de valeur de $p$ pour laquelle les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes.

**Exercice n° 13**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $E(Z_n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}m=m$. D'autre part, puisque les variables $X_1$, ..., $X_n$ sont deux à deux indépendantes, $V(Z_n)=\dfrac{1}{n^2}(V(X_1)+\ldots+V(X_n))=\dfrac{V(X_1)}{n}$.

Soit $\varepsilon>0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$1\geqslant P(|Z_n-m|<\varepsilon)=1-P(|Z_n-m|\geqslant\varepsilon)\geqslant 1-\frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}=1-\frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}.$$

Les deux membres de cet encadrement tendent vers 1 quand $n$ tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(|Z_n-m|<\varepsilon)=1$.

 