DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Benne de téléphérique

L'objet de ce problème est d'étudier divers aspects dynamiques du mouvement de la benne d'un téléphérique. Celui-ci est constitué d'un câble porteur sur lequel peut se déplacer un chariot (Ch) qui comporte deux roues identiques de centres C_1 et C_2 et qui roulent sur le câble. Dans tout le problème le câble sera supposé être parfaitement horizontal (cf. *figure* 1).

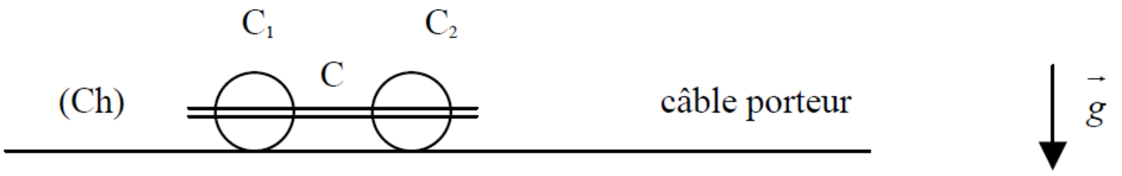


figure 1

Un bras (T) est articulé sur le chariot en C . La benne (B) est liée au point A situé à l'extrémité inférieure du bras (cf. *figure* 2).

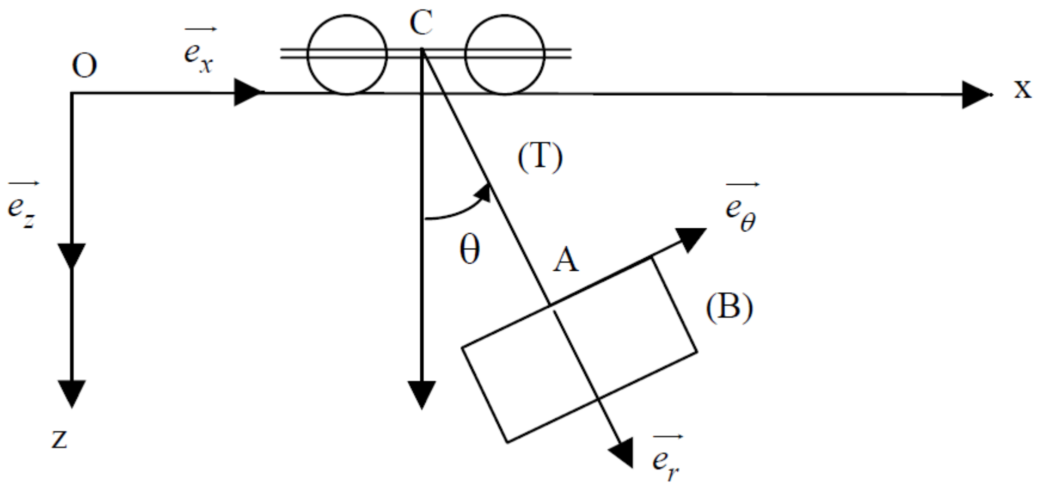


figure 2

Notations et valeurs numériques

- Le chariot (Ch) (roues comprises) est de masse totale $m_C = 200\text{kg}$. Son centre de masse est en C .
- Chaque roue a une masse $m_r = 40\,kg$, un rayon $r = 20\,cm$ et un moment d'inertie par rapport à son axe de rotation $J = \dfrac{m_r r^2}{2}$.
- Les centres des roues C_1 et C_2 sont séparés par la distance $d = 1\,m$. C est au milieu

des centres C_1 et C_2 des roues.

- Le coefficient de frottement entre les roues et le câble est $f=0,1$.

- Δ désigne l'axe de rotation de l'ensemble $(T)+(B)$ passant par C et $J_{TB,\Delta}$ son moment d'inertie par rapport à Δ .
- Le bras (T) est de masse $m_T=300\,kg$ et de longueur $L=3\text{m}$. Son moment d'inertie par rapport à Δ est $J_{T,\Delta}=\dfrac{m_T L^2}{3}$.
- La benne (B) est homogène de masse $m_B=2000\text{kg}$.
- On désigne par $a=4,5\,m$ la distance entre C et G , G étant le centre de masse de l'ensemble $(T)+(B)$.

- La masse de l'ensemble est donc $M=m_C+m_T+m_B$.
- Dans tout le problème le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme, de norme $g=9,8\ m.s^{-2}$.

Paramétrages

- Le référentiel terrestre $\mathscr{R}$ auquel est associé un repère orthonormé $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ dirigé vers le bas, $\vec{e}_x$ colinéaire au câble, O situé à l'extrémité gauche du câble, est supposé galiléen .
- La réaction du câble sur la ième roue est désignée par $\vec{R}_i=T_i\vec{e}_x+N_i\vec{e}_z \quad (i=1\text{ ou }2)$.
- Le vecteur $\vec{\omega}_i=\omega_i\vec{u}_y$ désigne le vecteur vitesse angulaire de la roue $n°i$.
- On désigne par $x(t)$ l'abscisse de C et par $\theta(t)$ l'angle entre $\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{CA}$. On pourra introduire une base locale $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_y)$ avec $\vec{e}_r=\dfrac{\overrightarrow{CA}}{L}$ et $\vec{e}_\theta$ perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le sens croissant de θ (voir *figure* 2).
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

I. Oscillations de la benne, chariot fixe

1. Préliminaires: rappeler l'énoncé (rédigé) du théorème du moment cinétique appliqué à un solide S en un point O fixe dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$.
2. On effectue un essai d'oscillation de la benne, le chariot étant maintenu immobile dans $\mathscr{R}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ .
3. Dans le cas des petites oscillations, déduire l'expression de θ en fonction du temps t sachant

que la benne est écartée d'un angle θ_0 sans vitesse initiale à l'instant initial.

4. Dans ce cas, on mesure une période $T_{TB,0}=4{,}6\,s$. Déterminer la valeur de $J_{TB,\Delta}$.
5. En déduire la valeur de $J_{B,\Delta}$, moment d'inertie de (B) par rapport à Δ .

II. Oscillations de la benne, chariot en mouvement

Le chariot est mis en mouvement par un câble tracteur qui exerce une force de traction appliquée en C , $\vec{F}=F\vec{e}_x$ avec F indépendant du temps. Les roues roulent sans glisser sur le câble.

A. Mise en équations

1) Théorème de la résultante cinétique

On se propose d'appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'ensemble.

6. Exprimer la quantité de mouvement de l'ensemble $(Ch)+(T)+(B)$ dans $\mathscr{R}$ en fonction de la vitesse $\vec{v}(C)$ de C , de la vitesse $\vec{v}(G)$ de G et des données du problème. Montrer que l'accélération du centre de masse G' de l'ensemble $(Ch)+(T)+(B)$ dans le référentiel $\mathscr{R}$, s'écrit en fonction des paramètres $x(t)$ et $\theta(t)$ et des données du problème sous la forme: $\vec{a}(G')=A_1\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{e}_r+A_2\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta+\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x$ où A_1 et A_2 sont des expressions que l'on explicitera en fonction des données.
7. Appliquer le théorème de la résultante cinétique à l'ensemble $(Ch)+(T)+(B)$ dans $\mathscr{R}$ et projeter dans la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. La projection sur $\vec{e}_x$ est appelée *équation* 1 . La projection sur $\vec{e}_z$ est appelée *équation* 2 .

2) Théorème du moment cinétique

Préliminaires:

Soit $\mathscr{R}$ un référentiel galiléen et O un point fixe dans ce référentiel galiléen. Soit $\mathscr{R}'$ un référentiel d'origine O' en translation par rapport à $\mathscr{R}$. L'accélération de O' par rapport à $\mathscr{R}$ est $\vec{a}(O')_{/\mathscr{R}}$. On se place dans $\mathscr{R}'$.

8. Donner l'expression de la ou des force(s) d'inertie(s) subie(s) par un point matériel P de masse m .
9. Donner l'expression du théorème du moment cinétique, au point O' , pour un solide S de masse m . Donner l'expression intégrale du moment des forces d'inertie qui intervient ici et montrer que ce terme correspondant au moment en O' de la résultante des forces d'inertie s'appliquant au centre de masse G du solide.
10. Si $\mathscr{R}'$ est le référentiel barycentrique $\mathscr{R}^*$ d'origine G , quel résultat connu retrouve-t-on ?

On se place dans le référentiel $\mathscr{R}'$, d'origine C en translation par rapport à $\mathscr{R}$.

11. Appliquer le théorème du moment cinétique en C dans $\mathscr{R}'$ à l'ensemble $(T)+(B)$. On obtient l' *équation* 3 .

12.Écrire les relations de non glissement pour les roues. Appliquer le théorème du moment cinétique à la roue 1 dans son référentiel barycentrique et en déduire une relation entre $\frac{d^2x}{dt^2}$ et T_1 ($équation\,4$). Quelle relation similaire ($équation\,5$) obtient-on avec la roue 2 ? En déduire la relation entre T_1 et T_2 .

B. Résolution pour les petites oscillations

Dans le cas des petites oscillations, dans les $équations\,1\,à\,5$, on travaille au premier ordre en $\theta(t)$, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

13.Déduire des études précédentes ($équations\,1\,à\,5$), l'expression donnant la force de traction F en fonction des paramètres $x(t)$ et $\theta(t)$ et des données du problème.

14.Que devient cette équation dans le cas des petites oscillations. On montrera que F se met sous la forme $F=A_3\frac{d^2\theta}{dt^2}+A_4\frac{d^2x}{dt^2}$ où A_3 et A_4 sont des expressions que l'on explicitera en fonction des données.

15.Déduire finalement des équations une équation différentielle linéaire en $\theta(t)$.

16.Quelle est la solution de cette équation en fonction de deux constantes arbitraires qu'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant.

17.Quelle est la pulsation des petites oscillations (formule littérale et application numérique)?

18.Calculer la valeur numérique de la période. Conclure dans le cas où la benne est destinée au transport des passagers.

On souhaite donner à la benne une accélération $a_0=0{,}8\,m.s^{-2}$. Pour cela, à l'instant $t=0$, on fait passer la tension d'une valeur nulle à la valeur $F=A_4a_0$. Initialement la benne est au repos.

19. Déterminer complètement $\theta(t)$ pour t positif.

20.Calculer en degré l'angle maximal du bras avec la verticale au cours du mouvement.

C. Condition de non glissement.

Dans cette paragraphe on considère que un dispositif supplémentaire bloque le bras (T) qui ne peut donc plus osciller, de sorte que $\theta=0$ à tout instant. La force de traction F est maintenue à sa valeur précédente $F=A_4a_0$ (A_4 : défini plus haut). On étudie les composantes normales et tangentielles des deux réactions.

21.En utilisant les études déjà réalisées, déterminer T_1 et T_2 en fonction de a_0 .

22.En utilisant les études déjà réalisées, écrire une équation faisant intervenir N_1 et N_2 .

On se propose de trouver une autre relation entre N_1 et N_2 en utilisant le théorème du moment cinétique.

23.Justifier avec précision l'expression du moment cinétique du chariot (Ch) dans son référentiel barycentrique en projection sur $\vec{e}_y$.

24.Appliquer le théorème du moment cinétique à (Ch) . On obtient l' $\textit{équation}\,6$.

25.Dans le cas où $a_0=8\,m.s^{-2}$, déterminer si il y a glissement ou non.

III. Oscillations du câble porteur

Dans cette question on considère que le chariot est immobile dans un référentiel lié au câble. La prise en compte de l'élasticité du câble porteur revient à considérer que C peut se mouvoir verticalement selon $O'z$. Dans le cadre de ce modèle, on admet que le point C peut coulisser sans frottement sur l'axe fixe $O'z$.

Le point O' est fixe. Le câble se comporte alors comme un ressort de raideur k , d'extrémité fixe O' et de longueur à vide l_0 .

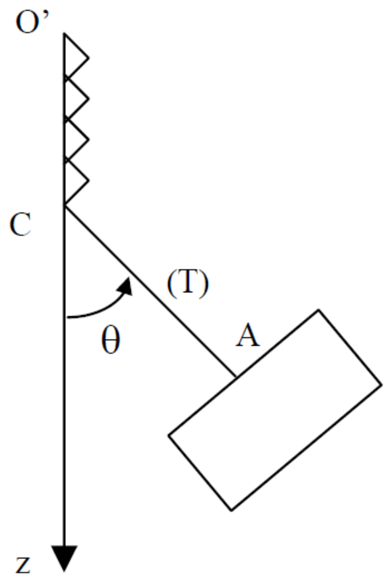


Figure 3

26.Lorsque l'on introduit une masse de $\textit{une tonne}$ dans la benne, celle-ci descend de $0{,}5\,m$. Quelle est la raideur du ressort équivalent ?

On se place dans une situation où la benne, toujours liée au bras (T) , peut osciller dans un mouvement pendulaire. Le chariot est ici modélisé par le point C , de masse m_C ; on pose $\overrightarrow{O'C}=z\,\vec{e}_z$.

27.Déterminer l'accélération de G' , centre de masse de l'ensemble $(Ch)+(T)+(B)$ dans $\mathscr{R}$, en utilisant provisoirement les vecteurs $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ et $\vec{e}_z$.

28.Déterminer une équation différentielle liant $z(t)$ et $\theta(t)$ par application du théorème de la résultante cinétique à l'ensemble $(Ch)+(T)+(B)$.

29.En déduire l'équation différentielle vérifiée par $Z=z-z_e$ et $\theta(t)$. On désigne la côte de la position d'équilibre de C lorsque la benne n'oscille pas par z_e .

30.Que devient cette équation dans le cas des petites oscillations ? Mettre cette équation sous la forme d'une équation différentielle en $Z(t)$ avec un second membre dépendant de $\theta(t)$ et de ses dérivées.

31.En déduire $Z(t)$ en régime forcé lorsque $\theta=\theta_0\cos(\omega t)$ avec $\omega=\frac{2\pi}{4,6}\,rad.s^{-1}$ et $\theta_0=0,1\,rad$.

Holographie

Données numériques :

Vitesse de la lumière dans le vide : $c=3{,}0.10^{8}\,m.s^{-1}$

Constante de Boltzmann : $k_B=1{,}38.10^{-23}\,J.K^{-1}$

Constante de Planck : $h=6{,}63.10^{-34}\,J.s$

Le physicien Dennis Gabor (Prix Nobel de Physique en 1971) conçut dès 1947 le procédé permettant de garder, en plus de l'amplitude, la phase d'un objet donnant ainsi la sensation de relief. Le premier hologramme (holos signifiant « tout » en grec) ne vît le jour qu'un quinzaine d'années plus tard, en 1964 après la mise au point des Lasers, grâce aux efforts de Leith et Upatnieks aux USA, et de Denisyuk en URSS.

On commence par étudier le fonctionnement d'un Laser, de façon très sommaire.

I. Le Laser comme oscillateur

L'objectif de cette partie est de montrer qu'un Laser peut être considéré comme un oscillateur optique.

A. Émission

On s'intéresse au cas d'un laser à gaz Hélium-Néon (He – Ne) typique d'une salle de Travaux Pratiques de lycée.

1. Rappeler une expérience historique permettant de conclure que l'énergie d'un atome est quantifiée.
2. Comment nomme-t-on l'état de plus basse énergie ? Et les autres états ?

On considère deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 avec $E_2>E_1$, et N_1 et N_2 respectivement le nombre d'atomes du gaz ayant ces énergies.

3. Calculer la fréquence ν_0 et la longueur d'onde λ_0 correspondant à la lumière émise lors de la désexcitation d'un atome du niveau E_2 au niveau E_1 . On rappelle la relation : $\Delta E=h\nu$.

Données : $E_2=20{,}66\ eV$; $E_1=18{,}70\ eV$. On rappelle que l'électron-volt, noté eV , vaut $1{,}6\ 10^{-19}J$.

4. Quelle est la couleur de la lumière émise par un Laser de ce type ?
5. On suppose que $N_i=A\ \exp(-\frac{E_i}{k_B T})$ pour les indices 1 et 2 , où A est une constante, k_B la constante de Boltzmann, et T la température. Comment s'appelle une telle répartition ? Interpréter physiquement. Calculer le rapport N_2/N_1 et conclure.

Données : $T=300\,K$.

B. Modes propres

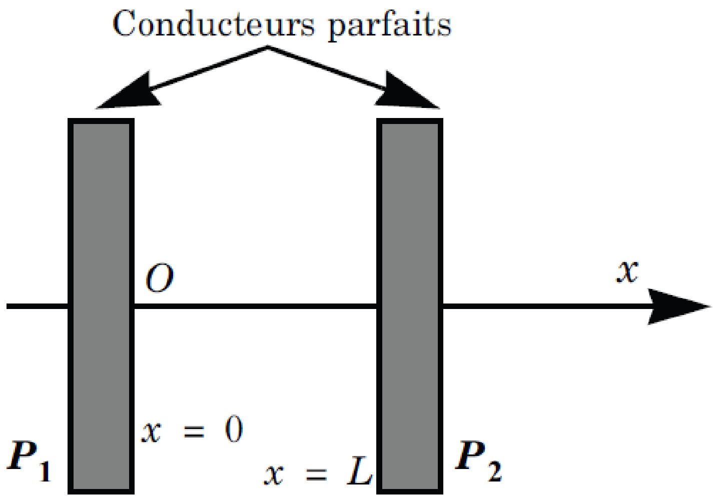
Un Laser est constitué en partie d'une cavité résonante composée de deux plans infinis conducteurs parfaits situés en $x=0$ et $x=L$ et séparés, pour l'instant, par du vide.

Parmi toutes les fréquences possibles des ondes électromagnétiques se propageant à l'intérieur de la cavité, seules certaines sont compatibles avec la géométrie du problème.

On admet que le champ électrique à l'intérieur de la cavité s'écrit:

$$\vec{E}(x,t)=2E_0 \ \sin(\omega t) \ \sin(kx) \ \vec{e_y} \quad \text{avec} \quad k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

On rappelle que le champ $\vec{E}$ est nul dans un conducteur parfait.



6. Rappeler la relation de passage (ou de continuité) pour le champ électrique.

7. En introduisant un entier n de quantification, déterminer les pulsations ω_n , longueurs d'onde λ_n et modules de vecteur d'onde k_n possibles. Interpréter simplement l'expression de λ_n .

8. En pratique, cette cavité a des pertes. En donner les causes possibles. Décrire qualitativement l'évolution du champ électrique dans la cavité résonante réelle.

C. Nécessité d'un milieu amplificateur

Un milieu amplificateur est nécessaire pour compenser les pertes de la cavité. Cela peut s'obtenir par « pompage », mais l'on ne rentrera pas dans les détails de ce procédé.

9. On considère tout d'abord une onde plane progressive amortie se propageant selon les x croissants à l'intérieur de la cavité de la forme : $\underline{\vec{E}}(x,t)=E_0 \ \exp j(\omega t-\underline{k}x) \ \vec{e_y}$. En posant $\underline{k}=k'+j \ k''$ avec k' et k'' deux nombres réels, écrire l'expression du champ électrique sous forme réelle. Quels sont dans le cas général les signes de k' et k'' ?

10. Pour que le système « Laser » puisse exister, quel doit être le signe de k'' ?

La mécanique quantique permet de modéliser le milieu situé entre les miroirs par un milieu diélectrique de permittivité relative complexe $\underline{\varepsilon}_r$. On indique que, si dans le vide on la relation de dispersion: $\omega^2=k_0^2c^2=k_0^2\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$, on a ici dans le milieu diélectrique $\omega^2=\underline{k}^2\dfrac{1}{\underline{\varepsilon}\mu_0}=\underline{k}^2\dfrac{1}{\underline{\varepsilon}_r\varepsilon_0\mu_0}$

avec: $\underline{\varepsilon}_r(\omega)=1+g\dfrac{(N_1-N_2)}{\omega_0}\dfrac{1}{\omega_0-\omega+j\Gamma}$ où g , ω_0 et Γ sont des constantes réelles positives.

11.En utilisant la relation de dispersion pour un milieu de permittivité relative $\underline{\varepsilon}_r$ et en supposant le deuxième terme de l'expression précédente donnant $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$ très petit devant 1 , en déduire k' et k'' .

12.Qu'implique la condition portant sur le signe de k'' pour un laser? En rappelant les résultats de la première partie, pourquoi parle-t-on alors d'inversion de population ?

D. Condition d'oscillations

On suppose ici que le miroir 1 (P_1) est parfait (coefficient de réflexion en énergie égal à 1) et que l'autre, le miroir $(P2)$, transmet une fraction T de la lumière et réfléchit la fraction complémentaire $R=1-T$ en énergie.

13.Justifier le choix précédent.

14.Soit G le gain en amplitude que subit une onde effectuant le trajet de $(P1)$ vers $(P2)$ entre les deux miroirs. Exprimer G en fonction de k'' et L .

15.On suppose que le retour de la lumière de $(P2)$ vers $(P1)$ se fait sans amplification ni atténuation. Écrire la relation entre G et R traduisant la condition du maintien des oscillations de la cavité optique.

16.L'égalité précédente est en réalité une inégalité. Commenter et écrire cette inégalité.

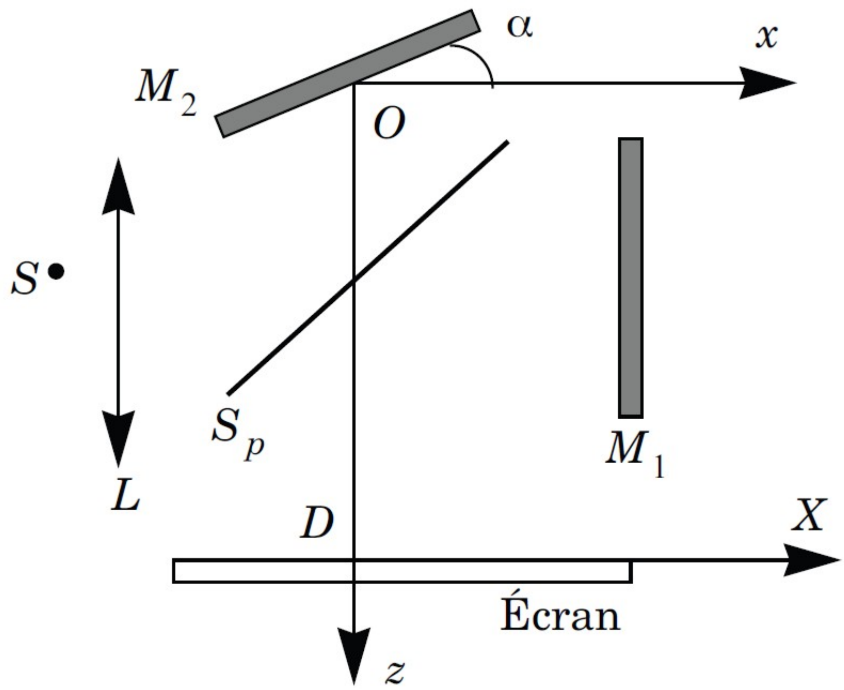
II. Interférences

L'air a le même indice que le vide : $n_{air}=1$. Les ondes envisagées ont une pulsation notée ω et une longueur d'onde λ_0 dans le vide.

A. Interférences entre deux ondes de même amplitude

On considère une source ponctuelle monochromatique (Laser) que l'on place au foyer objet d'une lentille convergente de focale f' . Le faisceau émergent arrive sur un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air. Par rapport à la position des miroirs correspondant au contact optique, le miroir M_2 est incliné d'un angle α . S_p correspond à la séparatrice qui divise le faisceau en deux sans apporter de modification dans le chemin optique : on suppose donc que la séparatrice n'introduit aucun déphasage supplémentaire.

On ne tient pas compte non plus de déphasage supplémentaire lors de la réflexion sur un miroir.



17.Quel est le vecteur d'onde de l'onde à la sortie de la lentille convergente L , lentille parallèle à M_1 ? Quels qualificatifs peut-on attribuer à cette onde.

La séparatrice donne naissance à deux ondes. Les deux ondes qui interfèrent dans le champ d'interférences ont chacune une amplitude notée A_0 . Une onde est donc notée sous la forme $\underline{s}(M,t)=A_0\exp[j(\omega t-\varphi(M))]=\underline{a}(M)\exp(j\omega t)$

18.Dans le repère orthogonal $Oxyz$ l'axe Oy est confondu avec l'arête du coin d'air, déterminer les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}_2$ de l'onde qui s'est réfléchie sur la séparatrice puis qui s'est réfléchie sur le miroir 2 et qui a ensuite traversé la séparatrice ($trajet\,2$). Donner l'expression en fonction de x,y,z de $\underline{a}_2(M)$. On choisira une origine des phases telle que $\varphi_2(O)=0$.

19.L'autre onde a traversé la séparatrice, s'est réfléchie sur le miroir 1 puis s'est réfléchie sur la séparatrice ($trajet\,1$). Déterminer les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}_1$ de cette onde. Donner l'expression en fonction de x,y,z de $\underline{a}_1(M)$.

20.Déterminer le déphasage retard, en un point M quelconque du champ d'interférences, de l'onde 2 par rapport à l'onde 1, noté $\Delta\varphi(M)$. Quelle valeur doit-on obtenir si on calcule $\Delta\varphi(O)$?

21.Établir l'expression donnant l'intensité lumineuse, ou éclairement, en un point M situé sur l'écran dans le champ d'interférences dans le plan en $z=D$. Justifier alors la nature des franges observées.

22.En déduire l'expression de l'interfrange i puis la valeur numérique.

Données : $\lambda_0=632{,}8\,nm$; $\alpha=1°$; $D=50\,cm$

23.On appelle improprement « frange centrale » la frange d'ordre zéro. Déterminer la position de cette frange en faisant intervenir une ligne trigonométrique de l'angle α . Commenter le résultat. Faire l'application numérique.

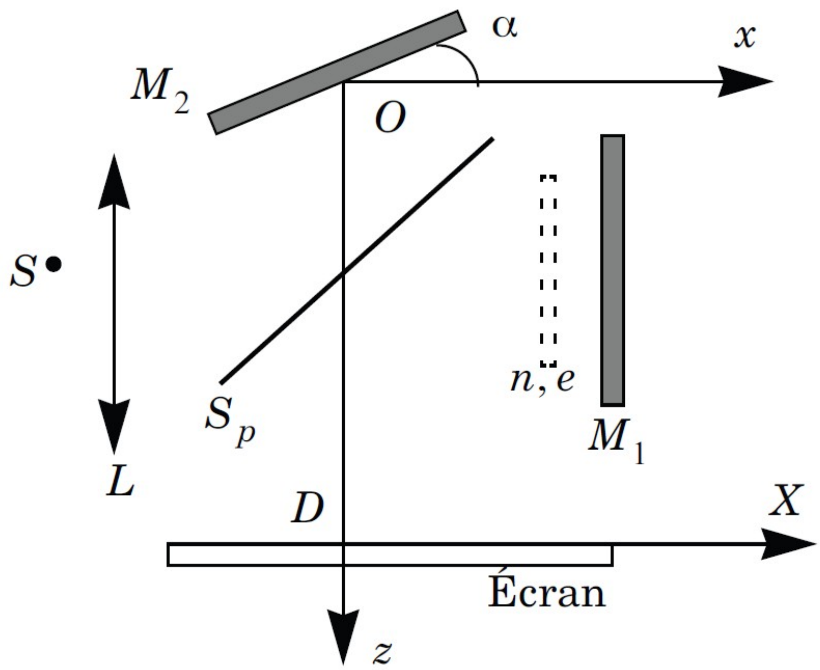
24.Les interférences sont-elles localisées ou non localisées ? Justifier .

B. Interférences entre deux ondes d' amplitude très différente

On intercale maintenant entre la lame séparatrice S_p et le miroir M_1 , une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n (représentée en pointillés sur la figure ci-dessous). Cette lame est disposée parallèlement à M_1 . On néglige les phénomènes de réflexion sur cette lame.

25.Quelle différence de chemin supplémentaire par rapport au trajet en l'absence de lame cela implique-t-il pour un rayon traversant deux fois cette lame de verre ? Quel est le retard de phase supplémentaire φ_{sup} apporté par la lame au cours du *trajet* 1 .

26.Déterminer la nouvelle expression du déphasage retard $\Delta\phi(M)$, en un point M quelconque du champ d'interférences, de l'onde 2 par rapport à l'onde 1, en fonction de $\Delta\varphi(M)$ déterminé précédemment et de φ_{sup} déterminé à la question précédente.



La lame atténue l'amplitude de l'onde incidente et celle-ci, qui valait A_0 avant le passage dans la lame, vaut εA_0 après deux passages.

27.Établir l'amplitude résultante au même point M que précédemment sous la forme d'une somme de deux termes.

28.Exprimer l'éclairement en fonction de I_0 , ε et $\Delta\phi$. Simplifier en tenant compte de la très faible valeur de $\varepsilon \ll 1$ (développement à l'ordre 1).

29.Donner l'expression du nouvel interfrange et déterminer l'éventuel déplacement de la frange centrale sur l'écran. Applications numériques. Quelle est l'influence de la lame sur la figure d'interférence ?

30.Combien voit-on, à une frange près, de franges brillantes sur une plaque de hauteur L selon X disposée sur l'écran précédent ?

Données : $L=2{,}0\,cm$; $n=1{,}5$; $e=10\,\mu m$

III. Holographie

La réalisation d'un hologramme est constituée de deux étapes. La première, l'enregistrement, consiste à garder une trace de la phase d'un objet par interférométrie en utilisant une onde de référence. La seconde, la restitution, permet de récupérer la phase en éclairant le film de l'enregistrement par la même onde de référence.

A. Enregistrement (et interférences)

On reprend le montage précédent. La lame de verre est remplacée par un objet non diffractant, modifiant l'amplitude et la phase de l'onde qui le traverse. En faisant un changement d'origine pour les phases et un changement d'origine pour l'axe, on obtient les résultats suivants que l'on admettra:

1) l'onde arrivant sur l'écran correspondant au $trajet\,1$ s'écrit alors $\underline{a}_{obj}=A_{obj}(X)\exp(-j\varphi_{obj}(X))$ ($A_{obj}(X)$ lié au fait que l'objet est plus ou moins transparent et $\varphi_{obj}(X)$ déphasage lié à l'indice et à l'épaisseur de l'objet)

2) l'onde arrivant sur l'écran correspondant au $trajet\,2$ s'écrit $\underline{a}_{ref}=A_0\exp(-j\varphi_{ref}(X))$ avec $\varphi_{ref}(X)=2\dfrac{\pi}{\lambda_0}X\sin(2\alpha)$.

31.Si l'onde objet est la seule arrivant sur l'écran, quelle sera l'intensité en M sur l'écran. Quelle est l'information concernant l'objet qui est alors perdue?

32.Établir l'expression de l'éclairement $I(X)$ sur l'écran résultant de l'interférence des deux ondes. (On gardera les notations $\varphi_{obj}(X)$ et $\varphi_{ref}(X)$).

33.L'amplitude A_0 de l'onde de référence est très supérieure à celle de l'onde issue de l'objet : $\varepsilon(X)=\dfrac{A_{obj}(X)}{A_0}$ avec $|\varepsilon(X)|\ll 1$. Simplifier l'expression de l'éclairement I en tenant compte de la très faible valeur de $\varepsilon(X)$. On travaillera au premier ordre.

Le phénomène d'interférences est enregistré sur une plaque photographique de hauteur L selon X .

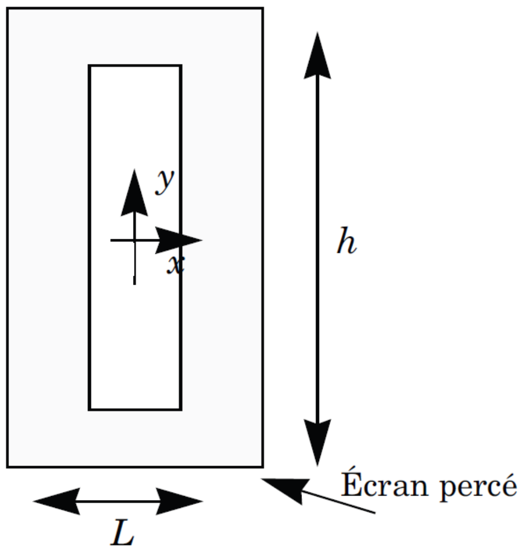
B. Restitution (et diffraction)

(On pourra remarquer que la notation x adoptée ici correspond en quelque sorte au X précédent)

La plaque photographique a un facteur de transparence (ou transmittance) $t(x,y)=t_0\left(\dfrac{I}{I_0}\right)^{-\gamma/2}$ où γ est un coefficient positif et $I_0=I_{ref}=A_0^2$ et I l'intensité lumineuse au niveau de la plaque, que l'on a précédemment déterminée.

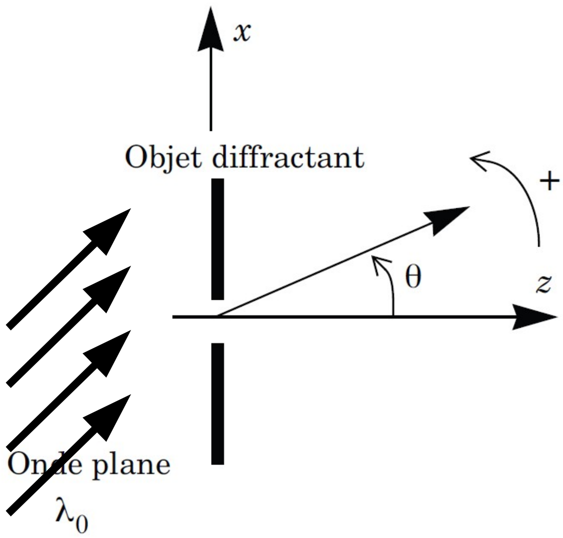
34.Déterminer la transmittance $t(x,y,0)$ de ce film développé que l'on appelle également hologramme en un point M de coordonnées $(x, y, 0)$ en se limitant au premier ordre en $\varepsilon(x)$.

Après développement, la plaque est replacée dans la position qu'elle avait lors de l'impression. Elle est éclairée (uniquement) par une onde de lecture parfaitement identique à l'onde de référence $\underline{a}_{ref} = A_0 \exp(-j\varphi_{ref}(x))$. On considère l'hologramme comme une ouverture rectangulaire de dimensions L et h avec $h \gg L \gg \lambda_0$ et de transparence $t(x)$.



35.Rappeler en quelques mots la signification physique du principe de Huygens-Fresnel.

36.Pourquoi peut-on se contenter d'étudier la diffraction selon une direction parallèle à Ox ?



37.Écrire l'expression de l'amplitude $\underline{ds}(M, t)$ de l'ondelette élémentaire transmise en M par une surface de largeur élémentaire dx . Ceci revient à donner l'expression de l'ondelette diffractée $\underline{ds}(M, t)$ en M , c'est à dire juste derrière l'hologramme. Montrer que $\underline{ds}(M, t)$ se compose de trois termes dont l'un est à un coefficient multiplicatif près, identique à l'onde issue de l'objet (et qui contient donc l'information phase) . On présentera chacun de ces termes sous la forme $A\exp[j(\omega t-\varphi)]$ en explicitant A et φ .

38.Établir sous la forme d'une somme de trois intégrales, l'amplitude diffractée à l'infini dans la direction faisant un angle θ par rapport à l'axe Oz .

Pour terminer le calcul, on revient au cas où l'objet est une lame de verre homogène. On fait donc $A_{obj}(X)=A_{obj}=constante$ et $\varphi_{obj}(X)=\varphi_{obj}=constante$

39.Déterminer complètement les trois termes pour l'amplitude de l'onde diffractée.

On étudie séparément les trois intensités associées aux trois termes d'amplitude précédents.

40.Donner la direction du maximum de chacun et par analogie avec un réseau de fentes fines, donner les ordres auxquels correspondent ces maxima d'intensité.

41.Déterminer, dans l'approximation des petits angles, les demi-largeurs angulaires des pics principaux de diffraction .

42.Exprimer les valeurs relatives des maxima principaux d'intensité diffractée.

43.À quelle condition les trois termes sont-ils séparés deux à deux ? A quelle condition, la distance angulaire entre les pics principaux est-elle grande devant leur largeur angulaire ? Déterminer dans ce cas l'expression approchée de l'intensité diffractée.

44.Quelle est la composante de l'amplitude diffractée qui permet de reconstituer l'image de l'objet?

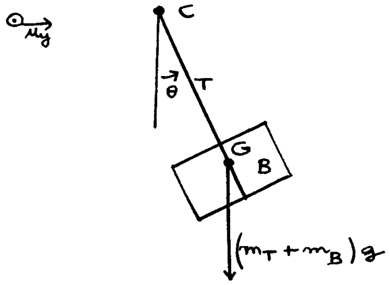
Réponses

Benne de téléphérique :

1) Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée du moment cinétique en un point fixe O pour un système quelconque (solide ou non) est égale à la somme des moments extérieurs en O

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(O) = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}(O)}{dt}\right|_{/\mathcal{R}\text{ galiléen}} \quad . \quad (O \text{ fixe})}$$

2) Théorème du moment cinétique pour l'ensemble : bras+benne en projection sur l'axe fixe Cy dans $\mathcal{R}$ galiléen.



$$\underbrace{\mathcal{M}_{Cy\ \text{poids bras+benne}}}_{-(m_T+m_B)\,g\,a\,\sin\theta} + \underbrace{\mathcal{M}_{Cy\ \text{liaison avec axe}}}_{\text{nul (liaison parfaite)}} = \underbrace{J_{Cy\ \text{bras+benne}}}_{J_{TB}}\ \ddot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{(m_T+m_B)\,g\,a}{J_{TB}}\sin\theta = 0}$$

3) Dans le cas des "petites oscillations" (au premier ordre en $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$)

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_T+m_B)\,g\,a}{J_{TB}}\,\theta = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = +\sqrt{\frac{(m_T+m_B)\,g\,a}{J_{TB}}}}$$

$$\theta = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

C.I.

$$\theta_0 = A$$

$$\dot{\theta}_0 = 0 = B\,\omega_0$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 \cos\omega_0 t}$$

4) A.N. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\frac{(m_T + m_B)\, g a}{J_{TB}} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$\boxed{J_{TB} = \frac{(m_T + m_B)\, g a T_0^2}{4\pi^2}}$$

$$= \frac{(300 + 2000)\; 9{,}8 \;\; 4{,}5 \;\; (4{,}6)^2}{4\pi^2}$$

$$\boxed{J_{TB} = 54{,}4 \;\; 10^3 \text{ kg.m}^2}$$

---

5) avec

$$J_{TB} = J_B + J_T$$

$$= J_B + \frac{m_T L^2}{3}$$

$$\boxed{J_B = J_{TB} - \frac{m_T L^2}{3}}$$

A.N.

$$= 54{,}4 \;\; 10^3 - \frac{300 \times 3^2}{3}$$

$$\boxed{J_B = 53{,}5 \;\; 10^3 \text{ kg.m}^2}$$

---

6) quantité de mouvement de l'ensemble :

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m_C \overrightarrow{v_C} + (m_T + m_B)\, \overrightarrow{v_G}}$$

avec $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{v_C} + \dot\theta\, \overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{CG}$

puisque G et C sont deux points du solide bras + benne

$$\overrightarrow{P} = M\, \overrightarrow{v_C} + (m_T + m_B)\, (\dot\theta\, \overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{CG})$$

avec $\overrightarrow{P} = M\, \overrightarrow{v_{G'}}$

$$\overrightarrow{v_{G'}} = \overrightarrow{v_C} + \frac{(m_T + m_B)}{M}\, (\dot\theta\, \overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{CG})$$

Accélération de G' :

On dérive

$$\overrightarrow{a_{G'}} = \overrightarrow{a_C} + \frac{(m_T + m_B)}{M} \Big[(\ddot\theta\, \overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{CG}) + (\dot\theta\, \overrightarrow{u_y}) \wedge \frac{d\overrightarrow{CG}}{dt} \Big]$$

avec $\overrightarrow{CG} = a\,\overrightarrow{e_r}$

$$\frac{d\overrightarrow{CG}}{dt} = a\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

(vecteur de norme constante, en rotation)

$$\boxed{\overrightarrow{a_{G'}} = \ddot{x}\,\overrightarrow{e_x} - \frac{m_T+m_B}{M}\,a\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} + \frac{m_T+m_B}{M}\,a\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}}$$

donc
$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= -\frac{m_T+m_B}{M}\,a \\ A_2 &= \frac{m_T+m_B}{M}\,a \end{aligned}}$$

remarque :

On pourrait faire aussi par exemple (cf barycentre)

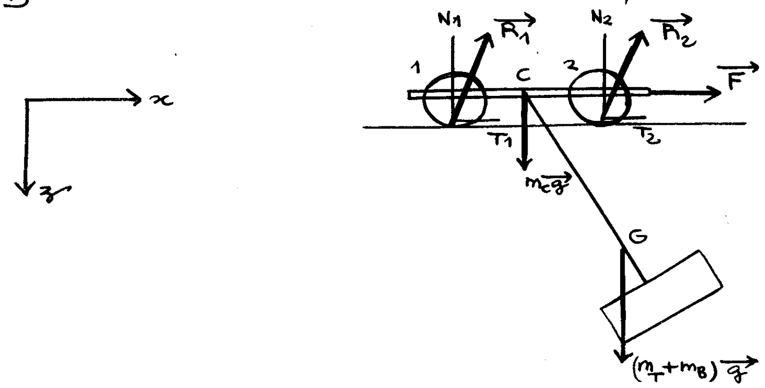
$$M\,\overrightarrow{OG'} = m_c\,\overrightarrow{OC} + (m_T+m_B)\,\overrightarrow{OG}$$

$$M\,\overrightarrow{v_{G'}} = m_c\,\underbrace{\overrightarrow{v_C}}_{\dot{x}\,\overrightarrow{e_x}} + (m_T+m_B)\,\underbrace{\overrightarrow{v_G}}_{\dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + a\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}}$$

et dériver à nouveau.

---

7) Théorème de la résultante cinétique à l'ensemble dans $\mathcal{R}$



$$\boxed{\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} + m_c\,\overrightarrow{g} + (m_T+m_B)\,\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F} = M\,\overrightarrow{a_{G'}}}$$

$/\overrightarrow{e_x}$ $\quad T_1 + T_2 + F = M\,a_{G'x}$

$/\overrightarrow{e_z}$ $\quad N_1 + N_2 + m_c\,g + (m_T+m_B)\,g = M\,a_{G'z}$

En faisant alors
$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_z} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_x}$$
$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_z} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_x}$$

L'équation 1 selon $\overrightarrow{e_x}$ est donc :

$$① \quad \boxed{T_1 + T_2 + F = M\ddot{x} - (m_T + m_B)\, a\, \dot{\theta}^2 \sin\theta + (m_T + m_B)\, a\, \ddot{\theta} \cos\theta}$$

L'équation 2 selon $\overrightarrow{e_z}$ est donc :

$$② \quad \boxed{N_1 + N_2 + Mg = -(m_T + m_B)\, a\, \dot{\theta}^2 \cos\theta - (m_T + m_B)\, a\, \ddot{\theta} \sin\theta}$$

---

8)

$\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen car il n'est pas en translation à vitesse constante par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen.

Pour étudier le mouvement de P par rapport à $\mathcal{R}'$, on introduit donc la force d'inertie de Coriolis et la force d'inertie d'entraînement :

$$\text{force d'inertie de Coriolis} = -m\, \overrightarrow{a_{coriolis}}(P) = -m\, 2\, \underbrace{\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{nul pas de rotation de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}$$

$$\text{force d'inertie d'entraînement} = -m\, \underbrace{\overrightarrow{a_{entrainement}}(P)}_{= \overrightarrow{a_{entrainement}} \text{ de } O' \text{ car référentiel en translation}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{f_{inertie}}(P) = -m\, \vec{a}_{(O')/\mathcal{R}}}$$

---

9) Dans $\mathcal{R}'$, O' est fixe, on peut appliquer le théorème du moment cinétique en O' à condition de tenir compte des forces d'inertie.

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(O') = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{ext}}(O') + \overrightarrow{\mathcal{M}_{inertie}}(O')$$

$$= \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(O') + \underbrace{\int_{\text{système}} \overrightarrow{O'P} \wedge -dm\, \overrightarrow{a_e}(O')}_{\substack{-\left[\int_{\text{système}} dm\, \overrightarrow{O'P}\right] \wedge \overrightarrow{a_e}(O') \\ -\; m\, \overrightarrow{O'G} \wedge \overrightarrow{a_e}(O')}}$$

Finalement, ds le référentiel en translation non galiléen :

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}(O')}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(O') + \overrightarrow{O'G} \wedge (-m\overrightarrow{a_e}(O'))}$$

comme si toute la force d'inertie d'entrainement s'appliquait au point G.

---

10) Si $\mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}^*$

et $O' \longrightarrow G$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma}(G)}{dt}\right)_{\mathcal{R}^*} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(G) + \underset{\text{nul}}{\underset{\uparrow}{\overrightarrow{GG}}} \wedge (-m\overrightarrow{a_e}(G))$$

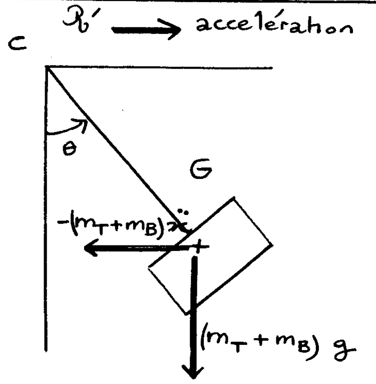
$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\sigma}^*}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{ext}(G)}$$

<u>Dans le référentiel barycentrique en G, il n'y a donc pas à tenir compte du moment des forces d'inertie</u>.

(si le référentiel barycentrique est "associé" à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen)

---

11) $\mathcal{R}' \longrightarrow$ accélération $\ddot{x}\,\overrightarrow{e_x}$



(figure avec $\ddot{x} > 0$)

Ce référentiel est <u>non galiléen</u>, on applique les résultats de 0.

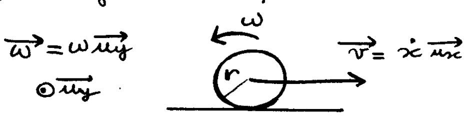
On travaille en projection selon l'axe Cy

L'équation 3 est donc :

③ $$\boxed{-(m_T+m_B)\,g\,a\sin\theta-(m_T+m_B)\,\ddot{x}\,a\cos\theta=J_{TB}\,\ddot{\theta}}$$

---

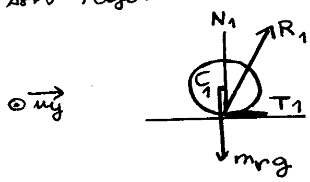
12) Relation de non glissement pour une roue



De manière évidente ici, la relation de non glissement est

$$\boxed{v=-\omega r}$$

Le théorème du moment cinétique en projection selon C_1y pour la roue 1 dans son référentiel barycentrique donne :



$$T_1\,r=J\,\frac{d\omega}{dt}\qquad\text{avec}\qquad J=\frac{m_r r^2}{2}$$

Equation 4

④ $$\boxed{T_1=-\frac{m_r}{2}\,\ddot{x}}$$

De même,

Equation 5

⑤ $$\boxed{T_2=-\frac{m_r}{2}\,\ddot{x}}$$

On a donc ici :

$$\boxed{T_1=T_2}$$

---

13) On peut remarquer que pour ces 5 équations, il y a 6 inconnues : T_1, T_2, N_1, N_2, θ, x

De ①, ④ et ⑤ on déduit :

$$\boxed{F=(M+m_r)\,\ddot{x}+(m_T+m_B)\,a\,(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)}$$

---

14) En travaillant au premier ordre en θ, $\dot\theta$, $\ddot\theta$

$$F = (M+m_r)\ddot{x} + (m_T+m_B)a\,(\ddot\theta - \cancel{\dot\theta^2\theta})$$

3^e ordre

$$\boxed{F = (M+m_r)\ddot{x} + (m_T+m_B)a\,\ddot\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_3 &= (m_T+m_B)\,a \\ A_4 &= M+m_r \end{aligned}}$$

---

15) L'équation 3 donne une relation entre x et θ

Toujours au premier ordre en θ, $\dot\theta$, $\ddot\theta$:

$$-(m_T+m_B)\,g\,a\,\theta - (m_T+m_B)\,\ddot{x}\,a = J_{TB}\,\ddot\theta$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{J_{TB}}{(m_T+m_B)a}\,\ddot\theta - g\,\theta}$$

On reporte dans 14) d'où l'équation différentielle demandée.

$$\boxed{-F = \ddot\theta\left[\frac{(M+m_r)\,J_{TB}}{(m_T+m_B)\,a} - (m_T+m_B)\,a\right] + (M+m_r)\,g\,\theta}$$

---

16) La solution de l'équation homogène est de la forme

$$\theta_1 = A\cos\omega_0' t + B\sin\omega_0' t$$

La solution particulière (θ = constante) est :

$$\theta_2 = -\frac{F}{(M+m_r)\,g}$$

Donc solution :

$$\boxed{\theta = A\cos\omega_0' t + B\sin\omega_0' t - \frac{F}{(M+m_r)\,g}}$$

---

17) On écrit l'équa diff sous la forme $\ddot\theta + \omega_0'^2\theta = \dots$

$$\omega_0' = \left(\frac{\dfrac{(m_T+m_B)\,g\,a}{J_{TB}}}{1 - \dfrac{(m_T+m_B)^2 a^2}{(M+m_r)\,J_{TB}}}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{(m_T+m_B)^2 a^2}{(M+m_r)\,J_{TB}}}}}$$

$$\boxed{\omega'_0 = 2,97 \text{ rad s}^{-1}}$$

---

18)
$$T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0}$$

$$\boxed{T'_0 = 2,12 \text{ s}}$$

Période qui ne semble pas poser de problème à des passagers.

---

19) Pour $t > 0$, $F = (M+m_r)\,a_0$

Donc cf 16)

$$\theta = A\cos\omega'_0 t + B\sin\omega'_0 t - \frac{a_0}{g}$$

C.I.
$$\left|\begin{array}{l} \theta_0 = 0 = A - \dfrac{a_0}{g} \\ \dot{\theta}_0 = 0 = B\omega'_0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\theta = -\frac{a_0}{g}\,(1 - \cos\omega'_0 t)}$$

---

20) Au cours du mouvement, θ varie donc entre :

$$-\frac{2a_0}{g} \leqslant \theta \leqslant 0$$

$$\boxed{|\theta_{max}| = \frac{2a_0}{g}}$$

A.N.
$$|\theta_{max}| = 0,163 \text{ rad}$$

soit
$$\frac{0,163 \times 180}{\pi}$$

$$\boxed{|\theta_{max}| = 9,4 \text{ degrés}}$$

---

21) Les équations ① à ⑤ deviennent avec $\theta = 0$

① $T_1 + T_2 + F = M\ddot{x}$ (avec $F = (M+m_r)\,a_0$)

② $N_1 + N_2 + Mg = 0$

③ <u>à revoir</u> : tenir compte d'un moment de blocage sur le bras.

④ $T_1 = -\frac{m_r}{2}\ddot{x}$

⑤ $T_2 = -\frac{m_r}{2}\ddot{x}$

avec (1), (4), (5)

$$F = (M + m_r)\,\ddot{x}$$

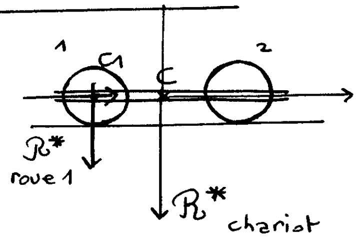
or
$$F = (M + m_r)\,a_o$$

donc
$$\ddot{x} = a_o$$

et
$$\boxed{T_1 = T_2 = -\frac{m_r}{2}a_o}$$

22) (2)
$$\boxed{N_1 + N_2 + Mg = 0}$$

23)



$$\vec{\sigma}^*_{chariot} = \vec{\sigma}_{plate\ forme/\mathcal{R}^*_{chariot}} + \vec{\sigma}_{roue\,1/\mathcal{R}^*_{chariot}} + \vec{\sigma}_{roue\,2/\mathcal{R}^*_{chariot}}$$

→ On peut remarquer que la plate-forme est immobile dans $\mathcal{R}^*_{chariot}$ donc $\vec{\sigma}_{plate-forme/\mathcal{R}^*_{chariot}}$ est nul

→ Pour la roue 1, on applique le théorème de König

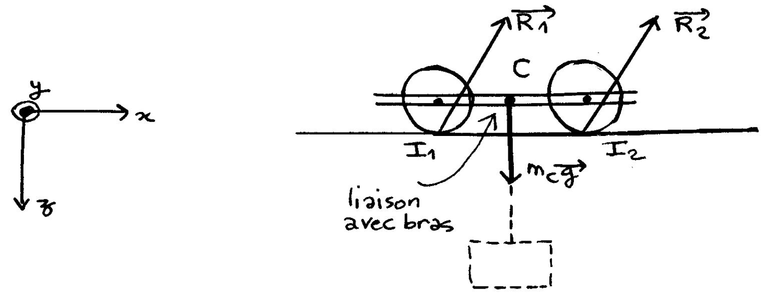
$$\vec{\sigma}_{roue1/\mathcal{R}^*_{chariot}} = \underbrace{\vec{\sigma}_{\text{tte masse de la roue en } C_1/\mathcal{R}^*_{chariot}}}_{C_1 \text{ fixe dans } \mathcal{R}^*_{chariot} \text{ donc nul}} + \underbrace{\vec{\sigma}_{\text{roue dans } \mathcal{R}^*_{roue\,1}}}_{J\omega\,\vec{u_y}}$$

$$= J\omega\,\vec{u_y}$$

→ Idem pour la roue 2

$$\vec{\sigma}^*_{chariot} = 2J\omega\,\vec{u_y}$$
$$= m_r r^2\omega\,\vec{u_y}$$
$$\boxed{\vec{\sigma}^*_{chariot} = -m_r r\,\dot{x}\,\vec{u_y}}$$

24)



Théorème du moment cinétique au chariot, en C, dans son référentiel barycentrique.

$$\overrightarrow{CI_2}\wedge\overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{CI_1}\wedge\overrightarrow{R_1} + \text{Moment du poids en C} + \text{Moment des liaisons en C avec le bras} = \frac{d\vec{\sigma}^*}{dt}$$

$$\begin{vmatrix} d/2 \\ 0 \\ r \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} T_2 \\ 0 \\ N_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -d/2 \\ 0 \\ r \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} T_1 \\ 0 \\ N_1 \end{vmatrix} \qquad \text{nul} \qquad \text{nul selon } \overrightarrow{e_y} \text{ (liaison parfaite)}$$

En projection selon Cy, on obtient l'équation 6

$$⑥ \quad \boxed{\left(rT_2 - \frac{d}{2}N_2\right) + \left(rT_1 + \frac{d}{2}N_1\right) = -m_r r \ddot{x}}$$

---

25) On déduit de ⑥ une équation avec N_1 et N_2

$$\left(rx - \frac{m_r a_0}{2} - \frac{d}{2}N_2\right) + \left(rx - \frac{m_r a_0}{2} + \frac{d}{2}N_1\right) = -m_r r a_0$$

donne $\boxed{N_1 = N_2}$

finalement cf 23)

$$\boxed{N_1 = N_2 = -\frac{Mg}{2}}$$

On vérifie le non glissement

$$\left|\frac{T_1}{N_1}\right| = \left|\frac{T_2}{N_2}\right| = \frac{m_r a_0/2}{M\ g/2}$$

il faut :

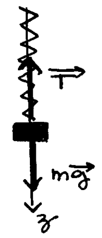
$$\boxed{\frac{m_r a_0}{Mg} \leqslant f}$$

A.N.

$$\underbrace{\frac{40}{2500}\,\frac{0{,}8}{9{,}8}}_{0{,}0013} \overset{?}{\leqslant} 0{,}1$$

---

26)



Equilibre du ressort :

$$m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$m\vec{g} - k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u_z} = \vec{0}$$

$$/z \qquad mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$$

Si on ajoute une masse Δm

$$/z \quad (m+\Delta m)g - k(\ell_{eq} + \Delta\ell_{eq} - \ell_0) = 0$$

D'où, par différence, la relation connue

$$\Delta m\, g - k\, \Delta\ell_{eq} = 0$$

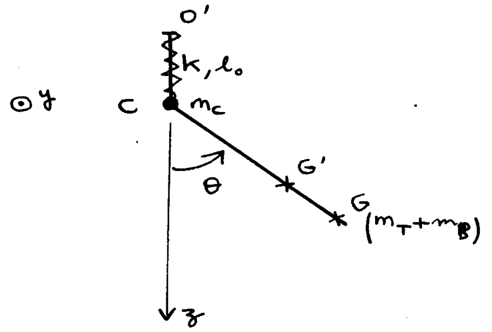
$$\boxed{k = \frac{\Delta m}{\Delta \ell_{eq}}\, g}$$

A.N. $\quad k = \frac{10^3}{0{,}5}\ 9{,}8$

$$\boxed{k = 19{,}6\ 10^3\ \text{N/m}}$$

---

27)



Accélération de G'.

On a : $\quad M\,\vec{v}_{G'} = m_C\,\vec{v}_C + (m_T+m_B)\,\vec{v}_G$

$$\vec{v}_G \to \vec{v}_C + \dot\theta\,\vec{u}_y \wedge \vec{CG}$$

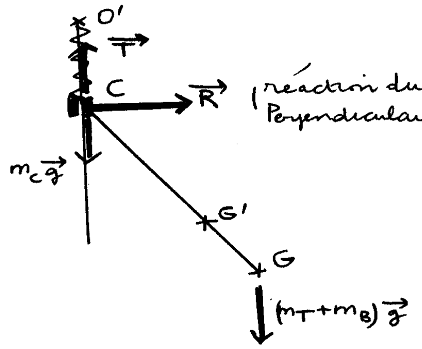
$$\vec{v}_{G'} = \vec{v}_C + \frac{(m_T+m_B)}{M}\,\dot\theta\,\vec{u}_y \wedge \vec{CG}$$

En dérivant (cf 5))

$$\boxed{\vec{a}_{G'} = \ddot{z}\,\vec{u_z} - \frac{m_T+m_B}{M}\,a\,\dot\theta^2\,\vec{e_r} + \frac{m_T+m_B}{M}\,a\,\ddot\theta\,\vec{e_\theta}}$$

---

28) Théorème de la résultante cinétique à l'ensemble $(m_T+m_B+m_C)$ dans $\mathcal{R}$ galiléen.



$$\vec{R} + m_C\vec{g} + (m_T+m_B)\vec{g} + \vec{T} = M\,\vec{a}_{G'}$$

$/\vec{u_x}$ $\quad R \quad = (m_T+m_B)a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)$

$/\vec{u_z}$ $\quad Mg \quad - k(\ell-\ell_0) = -(m_T+m_B)a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + M\ddot{z}$

En faisant $\ell = z$, l'équation cherchée est :

$$\boxed{Mg - k(z-\ell_0) = -(m_T+m_B)\,a\,(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + M\ddot{z}}$$

---

29) A l'équilibre, on avait

$$Mg - k(z_e - \ell_0) = 0$$

En faisant la différence avec l'équation précédente :

$$-k(z-z_e) = -(m_T+m_B)\,a\,(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) + M\ddot{z}$$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{k}{M}(z-z_e) = \frac{m_T+m_B}{M}\,a\,(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)}$$

---

30) Pour les petites oscillations (il faut ici travailler au 2e ordre)

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{k}{M}Z = \frac{m_T+m_B}{M}\,a\,(\ddot{\theta}\,\theta + \dot{\theta}^2)}$$

---

31) Avec $\theta = \theta_0\cos\omega t$, l'équation devient :

$$\ddot{Z} + \frac{k}{M}Z = \frac{m_T+m_B}{M}\,a\,\theta_0^2\,\omega^2\,(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t)$$

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{k}{M}Z = -\frac{m_T+m_B}{M}\,a\,\theta_0^2\,\omega^2\cos 2\omega t}$$

On cherche la solution en régime forcé

$$\underline{\ddot{Z}} + \frac{k}{M}\underline{Z} = -\frac{m_T+m_B}{M}\,a\,\theta_0^2\,\omega^2\exp j2\omega t$$

avec $\underline{Z}$ en $\exp(j2\omega t)$

$$-4\omega^2 \underline{Z} + \frac{k}{M}\underline{Z} = \dots$$

$$\underline{Z} = -\frac{m_T+m_B}{M}\frac{a\,\theta_0^2\,\omega^2}{-4\omega^2+\frac{k}{M}}\exp j2\omega t$$

$$\boxed{Z(t) = \frac{(m_T+m_B)\,a\,\theta_0^2\,\omega^2}{4\omega^2 M - k}\cos 2\omega t}$$

A.N. $$= \frac{2300\quad 4{,}5\quad 0{,}1^2\quad 4\pi^2/4{,}6^2}{4\quad 4\pi^2/4{,}6^2\quad 2500 - 19{,}6\;10^3}\cos 2\omega t$$

$$\boxed{Z(t)_{/m} = -0{,}205\cos 2\omega t}$$

Holographie

1) L'émission de lumière par des lampes spectrales donne un spectre de raies. L'existence de ces raies prouve la discrétisation des niveaux d'énergie dans l'atome.

---

2)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{état de plus basse énergie} & : \text{état fondamental} \\ \text{autres états} & : \text{états excités} \end{array}}$$

---

3) On a $E_2 - E_1 = h\nu_0$

$$\boxed{\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}}$$

A.N. $\nu_0 = \dfrac{(20{,}66 - 18{,}7) \cdot 1{,}6\ 10^{-19}}{6{,}63\ 10^{-34}}$

$$\boxed{\nu_0 = 4{,}73\ 10^{14}\ \text{Hz}}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3{,}0\ 10^{8}}{4{,}73\ 10^{14}}$$

$$\boxed{\lambda_0 = 634\ \text{nm}}$$

---

4) Raie rouge traditionnelle du laser hélium-néon habituel (souvent donnée à 633 nm)

---

5) Il s'agit de la

$$\boxed{\text{loi de répartition de Boltzmann pour un système en équilibre thermique à la température } T}$$

(grand nombre d'entités discernables et indépendantes)

Signification :

$$\boxed{\text{Un état de niveau d'énergie élevé est moins peuplé.}}$$

Rapport :

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = \exp -\frac{(E_2 - E_1)}{k_B T}}$$

A.N. $\frac{N_2}{N_1} = \exp \frac{-(20,66-18,7)\ 1,6\ 10^{-19}}{1,38\ 10^{-23} \times 300}$

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = 1,26\ 10^{-33}}$$

La quasitotalité des atomes est au niveau de plus basse énergie.
Pour un laser, il faudra un milieu amplificateur. La majeure partie des atomes devra être dans un état excité. Ce ne sera pas possible dans un état d'équilibre thermodynamique.

---

6) A la traversée d'une surface chargée σ, le champ tangentiel est continu et le champ normal subit une discontinuité $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\overrightarrow{E_2}(M) - \overrightarrow{E_1}(M) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{1\to 2}}$$

---

7) Le champ proposé est tangentiel. Puisque le champ est nul dans les conducteurs, le champ dans la cavité doit donc s'annuler en $x=0$ et en $x=L$.

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx)\ \overrightarrow{e_y}$$

$\rightarrow$ doit être nul en $x=0$.
Effectivement $\sin(kx)$ nul en $x=0$

$\rightarrow$ doit être nul en $x=L$
Il faut $\sin(kL)=0$

$kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Donc :

$$\boxed{\begin{gathered} k_n = n\frac{\pi}{L} \\ \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{1}{n}2L \end{gathered}}$$

rappel : $\omega = kc$

$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda}c$

$(\lambda = cT)$

$$\boxed{\omega_n = n\frac{\pi c}{L}}$$

On a donc trouvé

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

Il s'agit du problème classique de l'onde stationnaire qui doit ici s'annuler aux deux extrémités. La longueur est un nombre entier de fuseaux (longueur d'un fuseau $\frac{\lambda_n}{2}$)

---

8) • En pratique les conducteurs ne sont pas parfaits.
Il existe donc au voisinage de la surface des conducteurs, dans les conducteurs, un champ $\vec{E}$, un courant.
Il y aura de l'effet Joule et l'énergie électromagnétique dans la cavité va diminuer

(• Il ne faut pas oublier que l'on laisse une partie de l'onde laser sortir de la cavité.)

Le champ diminue dans la cavité laser et tend vers zéro même si on ne laisse pas sortir de lumière.

---

9)

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp j(\omega t - \underline{k} x) \vec{e_y}$$

$$= E_0 \exp j(\omega t - (k' + j k'') x) \vec{e_y}$$

$$= E_0 \exp(k'' x) \exp j(\omega t - k' x) \vec{e_y}$$

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \exp(k'' x) \cos(\omega t - k' x) \vec{e_y}}$$

Si l'onde est amortie, il faut $k'' < 0$
Si l'onde progresse vers les x croissants, il faut $k' > 0$

---

10) Pour un système laser, le milieu doit être amplificateur :

$$\boxed{k'' > 0}$$

---

11)

$$\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_r \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

$$= \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} (\underline{\varepsilon}_r)^{1/2}$$

On choisit la solution avec $k'>0$ (se propageant vers les x croissants)

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c}\left(\varepsilon_r\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\omega}{c}\left(1 + g\,\frac{N_1-N_2}{\omega_0}\,\frac{1}{\omega_0-\omega+j\Gamma}\right)^{1/2}$$

$$\simeq \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,g\,\frac{N_1-N_2}{\omega_0}\,\frac{1}{\omega_0-\omega+j\Gamma}\right)$$

donc (partie réelle)

$$\boxed{k' = \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\,g\,\frac{N_1-N_2}{\omega_0}\,\frac{\omega_0-\omega}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}\right) \simeq \frac{\omega}{c}}$$

et (partie imaginaire)

$$\boxed{k'' = \frac{\omega}{c}\,\frac{1}{2}\,g\,\frac{N_1-N_2}{\omega_0}\,\frac{(-\Gamma)}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2}}}$$

---

12) k'' doit être positif, ce qui implique $N_2 > N_1$

Il faut donc que l'occupation des niveaux d'énergie soit inversée par rapport à celle de l'équilibre thermodynamique.

---

13) On étudie une onde se propageant dans le sens des x croissants.

C'est donc le miroir en $x=L$ qui doit laisser passer l'onde.

---

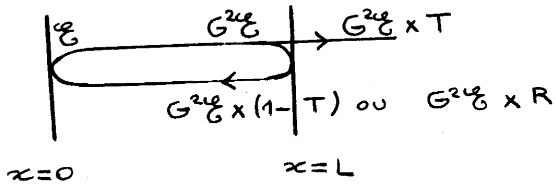
14) L'onde est en $\exp(k''x)$

Donc

$$\boxed{G = \exp(k''L)}$$

---

15) Le gain en énergie sur le même parcours vaut donc G^2.



Le schéma indique la valeur des énergies $\mathcal{E}$ en partant de $x=0$

Si on suppose qu'au niveau du retour par réflexion, il ne se passe rien, alors

$$\mathcal{E} = G^2 \mathcal{E} R$$

$$\boxed{R\,G^2 = 1}$$

---

16) Pour compenser les pertes, le gain doit être un peu plus grand (ici, on a seulement tenu compte de l'énergie qu'on laissait sortir)

$$\boxed{R\,G^2 > 1}$$

---

17) A la sortie de la lentille :

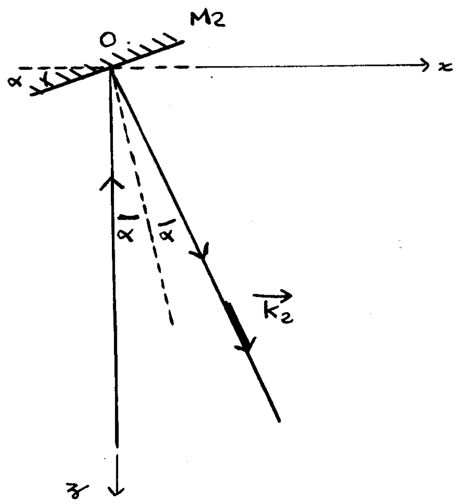
$$\vec{k} = k_0\,\vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,\vec{u_x}}$$

L'onde est plane, progressive, monochromatique.

---

18)



$$\boxed{\vec{k_2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\sin 2\alpha\,\vec{u_x} + \cos 2\alpha\,\vec{u_z}\right)}$$

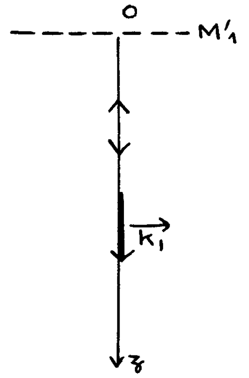
$$\underline{a}_2(M) = A_0 \exp -j\varphi_2(M)$$

$$= A_0 \exp -j\left(\vec{k_2}\,\vec{OM} + \underbrace{\varphi_2(0)}_{\text{choisi nul}}\right)$$

$$\boxed{\underline{a}_2(M) = A_0 \exp -j\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(x \sin 2\alpha + z\cos 2\alpha\right)}$$

---

19)



Pour l'autre onde, en utilisant le montage équivalent, elle semble provenir d'une reflexion sur M'₁, symétrique de M₁ par rapport à la séparatrice.

$$\boxed{\overrightarrow{k_1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,\overrightarrow{u_z}}$$

$$\underline{a}_1(M) = A_0 \exp - j\varphi_1(M)$$
$$= A_0 \exp - j(\overrightarrow{k_1}\,\overrightarrow{OM} + \varphi_1(0))$$

avec $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ puisque les deux bras sont égaux.

Donc $\varphi_1(0) = 0$

$$\boxed{\underline{a}_1(M) = A_0 \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda_0}z)}$$

---

20)

$$\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$$
$$= (\overrightarrow{k_2} - \overrightarrow{k_1})\,\overrightarrow{OM} + \underbrace{\varphi_2(0) - \varphi_1(0)}_{\text{nul}}$$

$$\boxed{\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(x \sin 2\alpha + z(\cos 2\alpha - 1)\right)}$$

$$\Delta\varphi(0) = 0$$

---

21)

$$\underline{a}(M) = \underline{a}_1(M) + \underline{a}_2(M)$$
$$= A_0 \exp - j\varphi_1(M) + A_0 \exp - j\varphi_2(M)$$

$$I = \underline{a}(M)\,\underline{a}^*(M) = A_0^2\,(\exp - j\varphi_1 + \exp - j\varphi_2)(\exp - j\varphi_1 + \exp - j\varphi_2)^*$$
$$= A_0^2\,(\exp - j\varphi_1 + \exp - j\varphi_2)(\exp j\varphi_1 + \exp j\varphi_2)$$
$$= \underset{\uparrow I_0}{A_0^2}\,(1 + 1 + \exp j(\varphi_2 - \varphi_1) + \exp - j(\varphi_2 - \varphi_1))$$

$$I = I_0 \left(2 + 2\cos \Delta\varphi \right)$$

$$\boxed{I = 2I_0 \left(1 + \cos \Delta\varphi\right)}$$

ou x

$$\boxed{I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(x \sin 2\alpha + D(\cos 2\alpha - 1)\right)\right)}$$

(on se place en $z = D$)

I ne dépend que de x.
On obtient donc des franges rectilignes.

---

22) L'interfrange est la période de $I(x)$

$$\frac{2\pi i}{\lambda_0} \sin 2\alpha = 2\pi$$

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0}{\sin 2\alpha} \qquad \text{(indépendant de } D\text{)}}$$

A.N. $$= \frac{632{,}8}{\sin 2°} 10^{-9}$$

$$\boxed{i = 18{,}1 \ \mu m}$$

remarques:

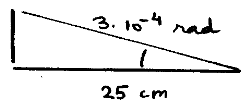
- on pouvait faire l'approximation des petits angles

$$i = \frac{\lambda_0}{2\alpha} = \frac{632{,}8 \ 10^{-9}}{2 \times 1 \times \frac{\pi}{180}} = 1{,}8128 \ 10^{-5} \text{ au lieu de } 1{,}8132 \ 10^{-5}$$

- Ces franges sont elles visibles à l'oeil nu

Pouvoir séparateur de l'oeil : $1'$ d'angle $= 3.10^{-4}$ rad
En se plaçant au plus près (punctum proximum)
à 25 cm, on peut séparer deux points distants de :

dmin



$$d_{min} = 25 \ 10^{-2} \times 3 \ 10^{-4}$$
$$= 75 \ \mu m$$

Ces interférences ne sont pas visibles à l'oeil nu.

---

23) On avait : $$\Delta\varphi = 2\pi p$$

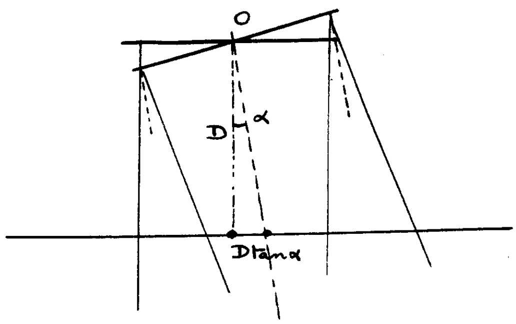
avec $$p = \frac{1}{\lambda_0}\left(x \sin 2\alpha + D(\cos 2\alpha - 1)\right)$$

La frange d'ordre 0 se trouve sur l'écran situé en $z = D$ en

$$x_{\substack{\text{fge}\\\text{centrale}}} = D\,\frac{(1-\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

$$= D\,\frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{x_{\substack{\text{fge}\\\text{centrale}}} = D\,\tan\alpha}$$



La frange centrale se trouve sur la <u>bissectrice</u> de l'angle 2α entre les 2 faisceaux passant par O.

A.N. $x_{\substack{\text{fge}\\\text{centrale}}} = 0{,}5\ \tan 1°$

$$\boxed{x_{\substack{\text{fge}\\\text{centrale}}} = 8{,}73\ \text{mm}}$$

(ce qui correspond à 481 interfranges)

---

24) A condition de se trouver dans la zone commune aux deux faisceaux, il y aura des franges d'interférences.

$\boxed{\text{Les interférences sont non localisées}}$

---

25) La présence de la lame supprime le chemin optique e dans l'air et ajoute le chemin ne dans la lame.

Pour l'aller, le chemin optique 1 augmente de $ne - e$

Et pour l'aller-retour :

$\delta_{\substack{\text{supplementaire}\\\text{trajet 1}}}$	$= 2(n-1)\,e$
φ_{sup}	$= \frac{2\pi}{\lambda_0}\,2(n-1)\,e$

---

26) $$\boxed{\underset{2-1}{\Delta\phi(M)} = \underset{2-1}{\Delta\varphi(M)} - \varphi_{sup}}$$

---

27) $$\boxed{\underline{a} = A_o \exp -j\varphi_2 + \varepsilon A_o \exp -j(\varphi_1 + \varphi_{sup})}$$

---

28) $$\underline{a}\,\underline{a}^* = A_o^2 \left(\exp -j\varphi_2 + \varepsilon \exp -j(\varphi_1+\varphi_{sup})\right) \left(\exp j\varphi_2 + \varepsilon \exp j(\varphi_1+\varphi_{sup})\right)$$

$$= A_o^2 \left(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \Delta\phi\right)$$

$$I = I_o \left(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos \Delta\phi\right)$$

A l'ordre 1 en ε

$$\boxed{I = I_o \left(1 + 2\varepsilon \cos \Delta\phi\right)}$$

---

29) ou X

$$\boxed{I = I_o \left(1 + 2\varepsilon \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(x \sin 2\alpha - D(1-\cos 2\alpha) - 2(n-1)e\right)\right)}$$

L'interfrange n'a pas changé

La frange centrale se trouve en :

$$\underset{\text{centrale}}{x'_{\text{fge}}} = D \tan\alpha + \frac{2(n-1)e}{\sin 2\alpha}$$

Elle s'est deplacée de

$$\boxed{\underset{\text{centrale}}{\Delta x_{\text{fge}}} = \frac{2(n-1)e}{\sin 2\alpha} \simeq \frac{(n-1)e}{\alpha}}$$

A.N. $$\boxed{\underset{\text{centrale}}{\Delta x_{\text{fge}}} = 0{,}287 \text{ mm}}$$

> La lame crée donc un décalage Δx de la figure d'interférences.

---

30) Nombre de fges (à une près)

$$\boxed{n = \frac{L}{i}}$$

A.N.

$$n = \frac{L}{i} = \frac{2.10^{-2}}{18{,}1\ 10^{-6}}$$

$$\boxed{n = 1103}$$

31) Si il n'y a que l'objet :

$${}_{obj}I = \underline{a}_{obj}\,\underline{a}^*_{obj}$$

$$\boxed{{}_{obj}I(X) = A^2_{obj}(X)}$$

L'information phase $\varphi_{obj}(X)$ est perdue

32)

$$\underline{a} = A_{obj}(X)\ \exp -j\varphi_{obj}(X) + A_0\ \exp -j\varphi_{ref}(X)$$

$$I = \underline{a}\,\underline{a}^*$$

$$\boxed{I(X) = I_0 + I_{obj}(X) + 2\,A_{obj}(X)\,A_0 \cos(\varphi_{obj} - \varphi_{ref})}$$

33)

$$I(X) = I_0\left(1 + \underbrace{\cancel{\left(\frac{A_{obj}}{A_0}\right)^2}}_{\text{ordre 2}} + 2\left(\frac{A_{obj}}{A_0}\right)\cos(\varphi_{obj} - \varphi_{ref})\right)$$

$$\boxed{I(X) = I_0\left(1 + 2\,\frac{A_{obj}(X)}{A_0}\cos(\varphi_{obj}(X) - \varphi_{ref}(X)\right)}$$

34)

$$t_{(x,y)} = t_0\left(1 + 2\,\frac{A_{obj}(x)}{A_0}\cos(\varphi_{obj}(x) - \varphi_{ref}(x))\right)^{-\gamma/2}$$

$$\boxed{t_{(x,y)} \simeq t_0\left(1 - \gamma\,\frac{A_{obj}(x)}{A_0}\cos(\varphi_{obj}(x) - \varphi_{ref}(x))\right)}$$

35) Le principe de Huygens-Fresnel indique que chaque élément de surface de l'objet diffractant la lumière doit être considéré comme une source secondaire de l'onde qui réemet dans toutes les directions. Les ondelettes sont cohérentes et interfèrent pour donner l'onde en un point.

36) $h >> L$ donc la diffraction se fait essentiellement selon x.
De plus t ne dépend pas de y car $t = t(x)$.
On considère donc qu'il y a invariance selon y.

---

37) $\underline{ds}(M,t) = K\, t(x)\ \underline{a}_{ref}\ \exp jωt\ dx$

K : Cste de proportionnalité ; $dS = \text{cste} \times dx$

$$\underline{ds}(M,t) = K\, t_0 \left(1 - γ \frac{A_{obj}(x)}{A_0} \cos(φ_{obj}(x) - φ_{ref}(x))\right) A_0 \exp(-j\,φ_{ref}(x)) \exp(jωt)\ dx$$

on fait alors :

$$\cos\left(φ_{obj}(x) - φ_{ref}(x)\right) = \left[\exp j(φ_{obj}(x) - φ_{ref}(x)) + \exp -j(φ_{obj}(x) - φ_{ref}(x))\right] / 2$$

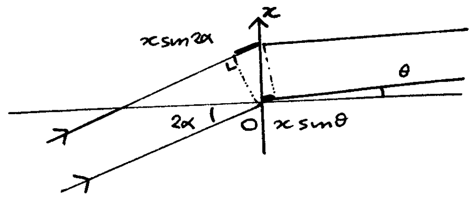
finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{ds}(M,t) = {} & K\, t_0 A_0\ \exp j(ωt - φ_{ref}(x))\ dx & ① \\ & - K\, t_0 \frac{γ}{2} A_{obj}(x)\ \exp j(ωt + φ_{obj}(x) - 2φ_{ref}(x))\ dx & ② \\ & - K\, t_0 \frac{γ}{2} A_{obj}(x)\ \exp j(ωt - φ_{obj}(x))\ dx & ③ \end{aligned}}$$

Le troisième terme est identique à l'onde issue de l'objet et contient l'information amplitude $A_{obj}(x)$ mais aussi l'information phase $φ_{obj}(x)$.

---

38) On a $\quad φ_{ref} = \frac{2π}{λ_0} x \sin 2α$



Dans la direction θ, il faut faire intervenir le déphasage retard par rapport à l'ondelette réémise par l'origine de l'axe :

$$φ = -\frac{2π}{λ_0} x \sin θ$$

Finalement, à l'infini

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{s} = & \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} K\, t_o\, A_o \exp j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_o} x(\sin 2\alpha - \sin\theta)\right) dx \\ & - \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} K\, t_o \frac{\gamma}{2} A_{obj}(x) \exp j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_o} x(2\sin 2\alpha - \sin\theta) + \varphi_{obj}(x)\right) dx \\ & - \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} K\, t_o \frac{\gamma}{2} A_{obj}(x) \exp j\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda_o} x \sin\theta - \varphi_{obj}(x)\right) dx\end{aligned}}$$

---

39) Calcul dans le cas particulier

$$A_{obj} = cste$$
$$\varphi_{obj} = cste$$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{s} = & K\, t_o\, A_o\, L \ \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi L}{\lambda_o}(\sin\theta - \sin 2\alpha)\right] & (1) \\ & - K\, t_o\, A_{obj}\, L \frac{\gamma}{2} \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi L}{\lambda_o}(\sin\theta - 2\sin 2\alpha)\right] \exp j\varphi_{obj} & (2) \\ & - K\, t_o\, A_{obj}\, L \frac{\gamma}{2} \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi L}{\lambda_o}\sin\theta\right] \exp - j\varphi_{obj} & (3)\end{aligned}}$$

---

40) (1) est maximal pour $\sin\theta = \sin 2\alpha$

$$\boxed{\theta = 2\alpha}$$ (ordre 0)

C'est la direction prévue par l'optique géométrique.

C'est la direction de l'onde de lecture (et de l'onde de référence)

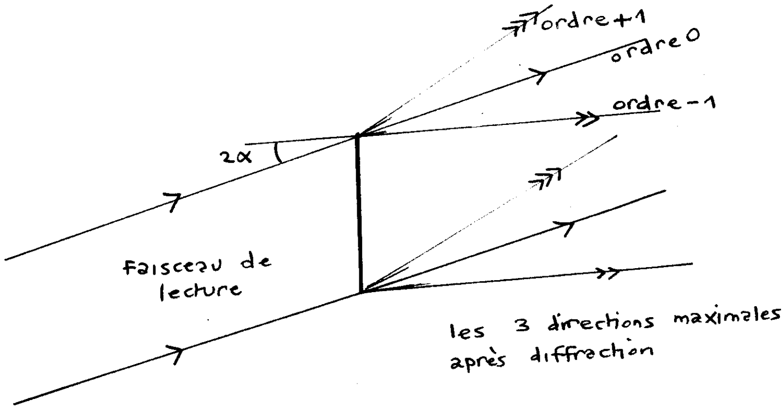
(2) est maximal pour $\sin\theta = 2\sin 2\alpha$

En supposant les angles petits :

$$\boxed{\theta = 2\alpha + 2\alpha}$$ (ordre +1)

(3) est maximal pour $\sin\theta = 0$

$$\boxed{\theta = 0}$$ (ordre −1)



---

41) demi largeurs angulaires (approximation des petits angles)

① $\frac{\pi L}{\lambda_0}\left(\theta_{max0}+\Delta\theta_0-2\alpha\right)=\pi$ $\qquad \Delta\theta_0=\frac{\lambda_0}{L}$

② $\frac{\pi L}{\lambda_0}\left(\theta_{max+1}+\Delta\theta_{+1}-4\alpha\right)=\pi$ $\qquad \Delta\theta_{+1}=\frac{\lambda_0}{L}$

③ $\frac{\pi L}{\lambda_0}\left(\theta_{max-1}+\Delta\theta_{-1}\right)=\pi$ $\qquad \Delta\theta_{-1}=\frac{\lambda_0}{L}$

$$\boxed{\Delta\theta_{1/2}=\frac{\lambda_0}{L}}$$

---

42) maxima d'intensité

① : ordre 0 : $I_{max\,0}=K^2\,t_0^2\,A_0^2\,L^2$

② : ordre 1 : $I_{max\,1}=K^2\,t_0^2\,A_{obj}^2\,L^2\,\frac{\gamma^2}{4}$

③ : ordre : $I_{max\,-1}=K^2\,t_0^2\,A_{obj}^2\,L^2\,\frac{\gamma^2}{4}$

La valeur relative des pics d'ordre -1 et +1 par rapport au pic d'ordre 0, en intensité, est :

$$\frac{I_{max\ secondaire}}{I_{max}}=\left(\frac{A_{obj}}{A_0}\right)^2\frac{\gamma^2}{4}$$

$$\boxed{\frac{I_{max\ secondaire}}{I_{max}}=\left(\frac{\varepsilon\,\gamma}{2}\right)^2}$$

---

43) Les trois termes sont séparés deux à deux si, en vertu du critère de Rayleigh,

$$\Delta\theta_{1/2}<2\alpha$$

$$\boxed{\frac{\lambda_0}{L} < 2\alpha}$$

La distance angulaire entre les pics principaux est grande devant leurs largeurs angulaires si

$$2\frac{\lambda_0}{L} \ll 2\alpha$$

$$\boxed{\frac{\lambda_0}{L} \ll \alpha}$$

Dans ce cas, les 3 pics sont bien séparés

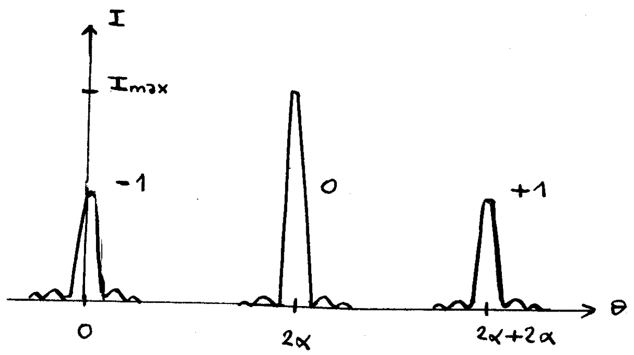
$$I = (\underline{a}_0 + \underline{a}_{+1} + \underline{a}_{-1})(\underline{a}_0^* + \underline{a}_{+1}^* + \underline{a}_{-1}^*)$$

$$= \underline{a}_0\underline{a}_0^* + \underline{a}_{+1}\underline{a}_{+1}^* + \underline{a}_{-1}\underline{a}_{-1}^* + \underbrace{(\underline{a}_0\underline{a}_{+1}^* + \underline{a}_0\underline{a}_{-1}^* + \dots)}_{\text{négligeable}}$$

(cf recouvrements entre
1 et 0
-1 et 0
négligeables)

$$I \simeq I_{\text{ordre }0} + I_{\text{ordre}-1} + I_{\text{ordre}+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I = I_{max} \Big[& \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L}{\lambda_0}(\theta - 2\alpha)\right) \\ & + \left(\frac{\varepsilon\gamma}{2}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L}{\lambda_0}(\theta - 2\times 2\alpha)\right) \\ & + \left(\frac{\varepsilon\gamma}{2}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi L}{\lambda_0}\theta\right)\Big] \end{aligned}}$$



44) Dans la direction $\theta = 0$, direction initiale de l'onde objet, on va retrouver l'image de l'objet. On remarquera à la question 39) que ce terme est bien en $A_{obj} \exp j(\omega t - \varphi_{obj})$ et contient l'information amplitude et l'information phase.