MATRICE STOCKASTIQUE

NOTATIONS :

- *On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.*
- *Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (resp. des matrices colonnes à n lignes), à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de A. On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A.*
- *Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A, $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A ; on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A et si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifient $AX = \lambda X$.*
- *Soit I_n la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.*
- *On note $[|1, n|]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.*
- *Pour tout nombre complexe z, on note $|z|$ le module de z.*
- *On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement stochastique lorsque*

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2,\ a_{i,j} > 0 \tag{1}$$

$$\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \tag{2}$$

*** *** ***

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement stochastique

1. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AU et en déduire que 1 est valeur propre de A.

2. **Précision sur $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.**

   (a) Soient une matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$ et un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tel que $BX = 0$. Soit $k \in [|1,n|]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_i|,\ i \in [|1,n|]\}$. Justifier l'inégalité

   $$|b_{k,k}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |b_{k,j}|$$

   (b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En appliquant 2a à la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer que $|a_{k,k} - \lambda| \leqslant 1 - a_{k,k}$, où k est l'entier défini en 2a. En déduire $|\lambda| \leqslant 1$.

   (c) On suppose que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déduire de l'inégalité $|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leqslant 1 - a_{k,k}$ de 2b que $\cos(\theta) = 1$, puis en déduire λ.

3. **Dimension de $E_1(A)$.**

   (a) Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA)$. En comparant le rang de $A - I_n$ et celui de ${}^tA - I_n$, montrer que les sous-espaces $E_1(A)$ et $E_1({}^tA)$ ont même dimension.

   (b) Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $V \neq 0$, tel que ${}^tAV = V$. Montrer que pour tout $i \in [|1,n|]$, on a $|v_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$. En calculant $\sum_{i=1}^{n} |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

   On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$. Montrer que ${}^tA|V| = |V|$, puis que pour tout $i \in [|1,n|]$, on a $|v_i| > 0$.

Matrice stockastique

(c) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $E_1({}^tA)$. En considérant la matrice $X - \dfrac{x_1}{y_1}Y$, déterminer la dimension de $E_1({}^tA)$. Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $E_1({}^tA)$, tel que pour tout $i \in [|1,n|]$, on ait $\omega_i > 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Montrer que, pour tout $i \in [|1,n|]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$.

(d) **Bilan des propriétés spectrales de A et de ${}^tA$.**
Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de A et de ${}^tA$ qui ont été démontrées dans les questions précédentes

4. A l'aide la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ définie en 3c, on considère l'application N définie de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad N(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i |x_i|$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $N(AX) \leqslant N(X)$. Retrouver le résultat de 2b : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leqslant 1$.

5. **Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A.**
A l'aide la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, on considère la forme linéaire $\Phi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$$

On note $\mathrm{Ker}(\Phi)$ le noyau de Φ.

(a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

(b) Justifier que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$.

(c) Soit $X \in E_\lambda(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

(d) En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la la valeur propre 1 de la matrice A.

Matrice stockastique

1. La i-ième coordonnée de AU est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}u_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ d'après (2). On en déduit que

$$AU = U$$

c'est à dire que U est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 (U étant non nul).

2. (a) Comme $BX = 0$, sa k-ième coordonnée est nulle $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}x_j = 0$ ce qui donne

$$b_{k,k}x_k = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} b_{k,j}x_j$$

L'inégalité triangulaire donne (avec la définition de k)

$$|b_{k,k}||x_k| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |b_{k,j}||x_j| \leqslant |x_k| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |b_{k,j}|$$

Comme $|x_k| > 0$ (X n'est pas nul), on en déduit l'inégalité demandée.

(b) $B = A - \lambda I_n$ est bien non inversible (puisque λ est valeur propre) et la question précédente donne (les coefficients non diagonaux de B étant ceux de A)

$$|a_{k,k} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|$$

Avec la propriété ($ST > 0$) on a donc

$$|a_{k,k} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{k,j} - a_{k,k} = 1 - a_{k,k}$$

Avec la seconde forme de l'inégalité triangulaire, on en déduit que $|\lambda| - a_{k,k} \leqslant 1 - a_{k,k}$ et donc que

$$|\lambda| \leqslant 1$$

(c) Si $|\lambda| = 1$, on a égalité ci-dessus et on doit donc avoir égalité dans l'inégalité triangulaire c'est à dire avoir $1 - a_{k,k} = |\lambda| - a_{k,k} = |\lambda - a_{k,k}| = |e^{i\theta} - a_{k,k}|$. En élevant cette identité au caré, on obtient après simplification $-2a_{k,k} = -2\cos(\theta)a_{k,k}$. Comme $a_{k,k} \neq 0$, on a $\cos(\theta) = 1$ et donc

$$\lambda = 1$$

3. (a) Le déterminant est invariant par transposition et donc A et ${}^tA$ ont mêmes valeurs propres (puisque même polynôme caractéristique). En particulier, $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA)$.
Le rang est aussi invariant par transposition (le rang d'une matrice est égal au rang de ses colonnes ou de ses lignes). Les images de $A - I_n$ et de ${}^tA - I_n$ ont donc même dimension. Par théorème du rang, on a alors

$$\dim(E_1(A)) = n - \mathrm{rg}(A - I_n) = n - \mathrm{rg}({}^tA - I_n) = \dim(E_1({}^tA))$$

(b) La i-ième coordonnée de ${}^tAV$ est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}v_j$. Elle vaut aussi v_i (car ${}^tAV = V$). Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|v_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}v_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{j,i}v_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$$

En sommant ces inégalités, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|v_j| \sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\right)$$

Avec la propriété (2), cette ingéalité est une égalité. Toutes les inégalités intermédiaires sont donc aussi (par exemple par l'absurde) des égalité. On a donc

$$\forall i,\ |v_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$$

Ceci signifie exactement que ${}^tA|V| = |V|$ (pour tout i, les deux vecteurs ont même i-ième coordonnée). Si, par l'absurde, il existait un i tel que $|v_i| = 0$ alors on aurait $0 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|v_j|$ ce qui donnerait la nullité pour tout j de $a_{i,j}|v_j|$ (une somme de suantité positives n'est nulle que si toutes les quantités sont nulles) et donc de tous les v_j (propriété (1)). Ceci contredit $V \neq 0$. Ainsi

$$\forall i,\ |v_i| > 0$$

(c) Y étant un élément non nul de $E_1({}^tA)$, on a $\forall i,\ y_i \neq 0$. On peut en particulier poser $Z = X - \frac{x_1}{y_1}Y$. C'est un élément de $E_1({}^tA)$ dont la première coordonnée est nulle. Avec la question précédente (en contraposant), c'est donc le vecteur nul. X est donc multiple de Y et

$$\dim(E_1({}^tA)) = 1$$

Soit V un vecteur non nul de $E_1({}^tA)$ et $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}|V|$. Ω est un élément de $E_1({}^tA)$ (question 3c) dont les coordonnées sont > 0 à somme égale à 1.
Ω est le seul élément ayant ces propriétés car tout autre élément de $E_1({}^tA)$ est multiple de Ω (et la somme des coordonnées est multiple dans le même rapport).
Enfin, ${}^tA\Omega = \Omega$ s'écrit

$$\forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$$

(d) Les valeurs propres de A sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus, $E_1(A)$ est de dimension 1 et une base en est $(1, \dots, 1)$.
Les valeurs propres de ${}^tA$ sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus, $E_1({}^tA)$ est de dimension 1 et les coordonnées d'un vecteur propres sont toutes > 0 ou toutes < 0.

4. N est positive, vérifie l'axiome de séparation ($N(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ car les ω_i sont > 0), est homogène ($N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$) et vérifie l'inégalité triangulaire ($N(X+Y) \leqslant N(X)+N(Y)$ est conséquence de l'ingéalité triangulaire dans $\mathbb{C}$). N est donc une norme.

Posons $Y = AX$; on a $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$ et donc (avec la dernière égalité de 3c)

$$N(AX) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i a_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\omega_i\right)|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\omega_j|x_j| = N(X)$$

Si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, on a donc $|\lambda|N(X) = N(\lambda X) = N(AX) \leqslant N(X)$ et donc (puisque $N(X) > 0$, X étant non nul) $|\lambda| \leqslant 1$. On retrouve

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{z/\ |z| \leqslant 1\}$$

5. (a) Le même calcul que ci-dessus (mais sans les modules et donc avec des égalités) donne immédiatement $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

(b) Si $X \in \mathrm{Ker}(\Phi) \cap E_1(A)$ alors $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et $\Phi(X) = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X = \lambda U$ et $0 = \Phi(X) = \Phi(\lambda U) = \lambda\sum\omega_i = \lambda$. Donc $X = 0$. $E_1(A)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi)$ sont ainsi en somme directe.
Par ailleurs, $\dim(E_1(A)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) = n - 1$ (le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan). La somme de ces dimensions est égale à la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Des deux arguments précédents, on tire

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$$

(c) On suppose $AX = \lambda X$ et $\lambda \neq 1$. On a alors $\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda\Phi(X)$. $\lambda \neq 1$ indique que $\Phi(X) = 0$ c'est à dire que $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

Matrice stockastique

(d) Soit f l'endomrophisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. montre que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est stable par f (si $\Phi(X) = 0$ alors $\Phi(AX) = 0$). $E_1(A)$ est aussi stable par f. Dans une base adaptée à la décomposition de 5b, la matrice de f est bloc-diagonale du type $\mathrm{diag}(1, B)$. Si 1 était valeur propre de B alors $E_1(A)$ serait de dimension ≥ 2 (on aurait deux vecteurs propres de f indépendants, l'un étant dans $E_1(A)$ et l'autre dans $\mathrm{Ker}(\Phi)$) ce qui est exclus. 1 n'est donc pas racine de χ_B. Or $\chi_f = (1 - X)\chi_B$ (déterminant diagonal par blocs) et 1 est donc racine simple de χ_f. Finalement, la valeur propre 1 est de multiplicité 1.