DS Sciences Physiques MathSpé

calculatrice: non autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Afin de faciliter le travail du correcteur:

- On indiquera la numérotation des questions
- On passera une ligne entre chaque question
- On $\boxed{\textit{encadrera}}$ les réponses au rouge

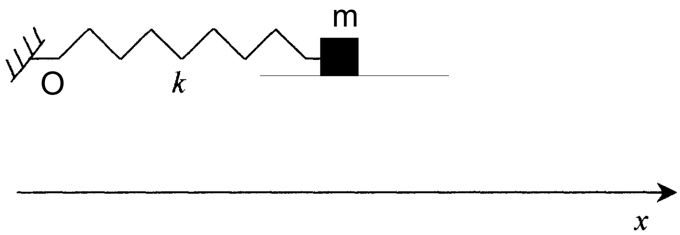
Les copies mal écrites, mal présentées, mal rédigées, sont corrigées aux risques et périls de l'étudiant.

On justifiera toutes les réponses, même celles jugées « évidentes », avec précision.

Rails de Laplace

I. Questions préliminaires

Un point matériel de masse m peut glisser sans frottements sur un plan horizontal selon Ox. Le point est lié à un ressort de raideur k. De plus, le point est soumis à tout instant à une force constante $\vec{F}=F\vec{u}_x$. On repère la position du point par son abscisse $x>0$, l'origine des abscisses est choisie au point d'attache O du ressort. On ne tiendra compte, ni du poids, ni de la réaction du support car ils se compensent en l'absence de mouvement vertical. Au départ, on écarte le ressort horizontalement et celui-ci se met à osciller horizontalement.



On définit les notations habituelles suivantes: longueur à vide du ressort l_0, longueur du ressort à l'équilibre l_{eq}, longueur du ressort à un instant quelconque l. Ici $l=x$.

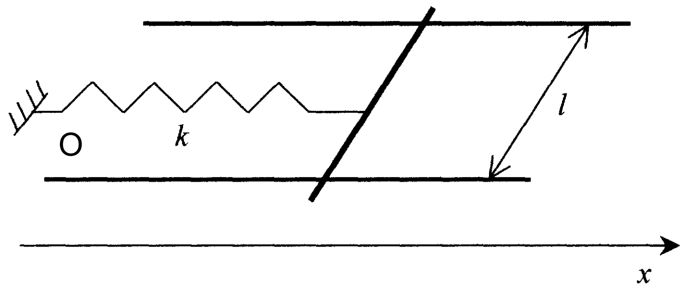
1. Définir en fonction de l et l_0 l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide.
2. Définir en fonction de l et l_{eq} l'allongement X du ressort par rapport à sa longueur à l'équilibre.
3. Exprimer le vecteur force $\vec{T}$ exercé par le ressort sur la masse à un instant quelconque en fonction de k et des longueurs.
4. Écrire le principe fondamental sous forme vectorielle en tenant compte des deux forces.
5. En déduire l'équation différentielle pour $x(t)$.
6. Résoudre et déterminer $x(t)$. On ne cherche pas à exprimer les deux constantes arbitraires.
7. Déduire de $x(t)$ les expressions de l_{eq} et $X(t)$.

II. Oscillations d'une barre sur des rails

A. En l'absence de frottements

Une barre de masse m peut glisser sans frottements sur deux rails parallèles. Les deux rails et la barre forment un plan horizontal. Les seuls mouvements possibles de la barre sont des translations rectilignes parallèlement à la direction des rails notée Ox. La barre est liée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de la barre par l'abscisse x de son milieu et l'origine des abscisses est choisie au point d'attache O du ressort.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. À l'instant initial, on lâche la barre sans vitesse initiale à l'abscisse $x = l_0 + a$ avec $a > 0$ et $a < l_0$.



8. Déterminer l'équation différentielle du mouvement par l'application du principe fondamental de la dynamique.
9. Déterminer l'expression de l'abscisse de la barre en fonction du temps.
10. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique en fonction du temps.
11. Montrer, qu'en moyenne sur une période, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle.

B. En présence de frottements fluides

On reprend le problème précédent mais, cette fois, on suppose que la barre subit une force de frottements visqueux $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la barre et α un coefficient

positif. On définit Q tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$.

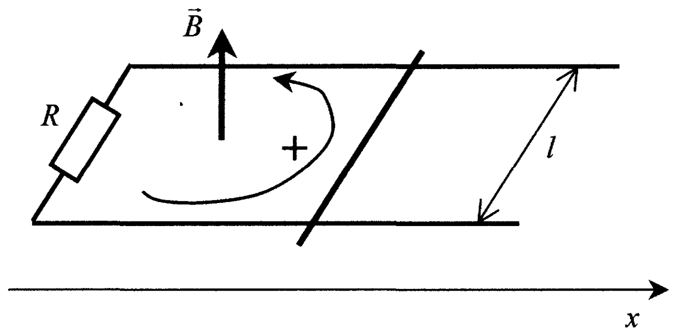
12. Établir l'équation différentielle du mouvement.
13. On suppose Q tel que la barre oscille. Quelle est l'inégalité vérifiée par Q ?
14. Déterminer l'expression de l'abscisse x de la barre en fonction du temps t .
15. Représenter l'allure du graphe de x en fonction de t .
16. La condition précédente sur Q est ici supposée très largement vérifiée car les frottements sont très faibles, montrer que l'énergie mécanique moyenne sur une pseudo-période peut se mettre sous la forme approchée: $E_M = \frac{1}{2} k a^2 \exp(-\frac{t}{\tau})$. On donnera l'expression de τ .

III. Rails de Laplace

A. Sans générateur de tension

La barre de masse m peut glisser sans frottements sur des rails parallèles, distants de l , disposés comme précédemment. Il n'y a plus de ressort. Les rails sont reliés par un conducteur. L'ensemble des rails, de la barre et du conducteur forme donc un circuit fermé. La résistance électrique de ce circuit est représentée par une résistance constante R localisée sur le conducteur reliant les deux rails (cf. figure) L'ensemble est plongé dans un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B}$. On définit un sens de circulation positive sur le circuit comme indiqué sur la figure. On néglige entièrement les phénomènes d'auto-induction.

La barre est lancée avec la vitesse initiale v_0 dans le sens des x croissants. On désigne par v la vitesse de la barre et par i l'intensité du courant à un instant t .



17.Déterminer l'expression de la f.é.m. induite dans le circuit à un instant t .

18.Déterminer la composante selon Ox de la force de Laplace subie par la barre.

19.Écrire l'équation électrique du circuit.

20.Écrire l'équation mécanique par application du principe fondamental de la dynamique.

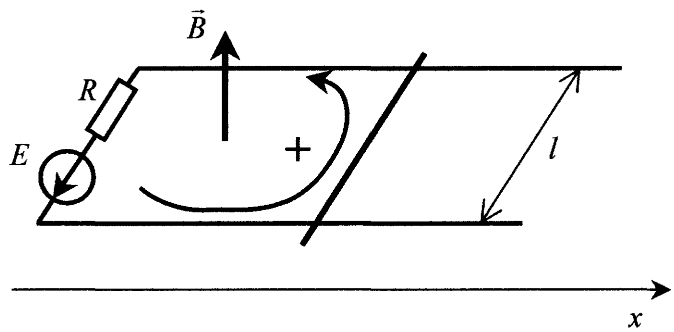
21.En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la barre. On introduira un temps de relaxation τ .

22.Résoudre complètement cette équation et tracer le graphe de v en fonction de t .

23.Écrire le bilan de puissance électromagnétique et le bilan de puissance mécanique. En déduire un bilan de puissance électromécanique. Que devient l'énergie cinétique initiale de la barre?

B. Avec générateur de tension continue

On reprend le problème précédent mais on rajoute sur le conducteur reliant les deux rails, un générateur idéal de tension de f.é.m. constante E (cf. figure). La barre est cette fois initialement immobile.



24.Écrire l'équation électrique du circuit et l'équation mécanique.

25.En déduire l'expression de la vitesse de la barre en fonction du temps. On utilisera dans les expressions la constante τ définie précédemment. De plus, on définira une vitesse limite v_L .

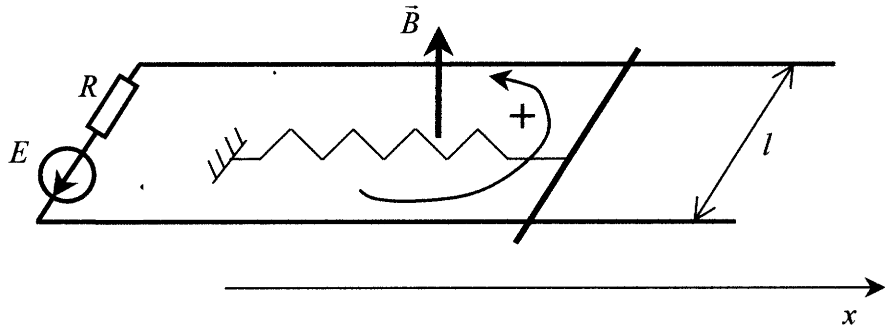
26.Tracer l'allure du graphe de v en fonction de t .

27.Déterminer l'intensité i dans le circuit en fonction de t (éventuellement simplifier complètement l'expression) et tracer le graphe correspondant.

28.Faire un bilan de puissance. A quoi est utilisée la puissance fournie par le générateur?

IV. Oscillations d'une barre plongée dans un champ magnétique

A. Avec générateur de tension continue



On reprend le dispositif précédent mais maintenant la barre est reliée au ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . On repère la position de la barre par l'abscisse x de son milieu et l'origine des abscisses est choisie au point d'attache O du ressort. A l'instant initial, l'abscisse x de la barre est égale à l_0 et la barre est lâchée sans vitesse initiale. La barre peut glisser sans frottement sur les rails.

29.Écrire l'équation électrique et l'équation mécanique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x de la barre. On utilisera les notations ω_0 et τ .

30.Déterminer la nouvelle position d'équilibre de la barre notée x_{eq} et écrire l'équation différentielle vérifiée par $X=x-x_{eq}$ en fonction de ω_0 et τ .

31.Résoudre complètement cette équation si $\omega_0\tau \gg 1$.

32.Tracer le graphe de x en fonction du temps t .

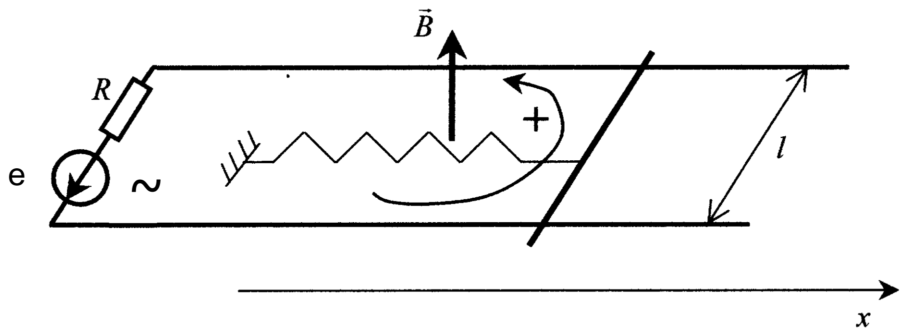
33.Faire un bilan énergétique entre $t=0$ et $t=\infty$.

B. Avec générateur de tension alternative

On reprend le dispositif précédent mais le générateur est maintenant un générateur de tension alternative sinusoïdale $e=E\cos(\omega t)$.

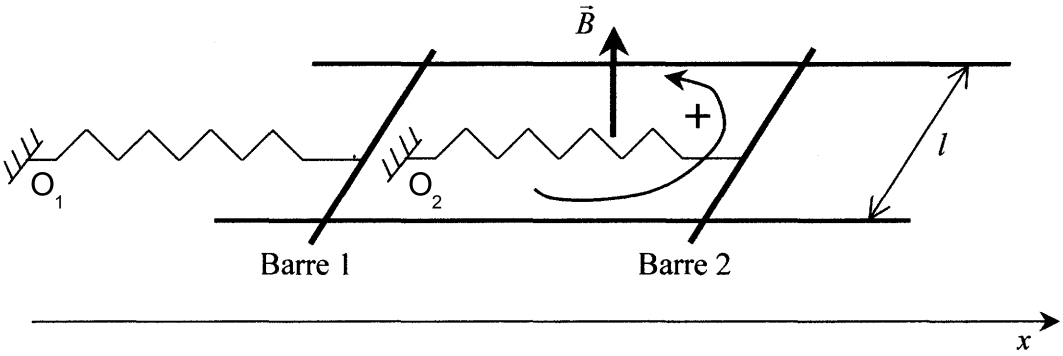
34.Écrire l'équation différentielle traduisant le mouvement du barreau.

35.Donner l'expression de $X=x-l_0$ en mouvement sinusoïdal forcé



V. Oscillations de deux barres plongées dans un champ magnétique

On supprime le générateur et on ajoute sur les rails une deuxième barre identique à la précédente. L' ensemble est plongé dans le champ magnétique $\vec{B}$. Les deux barres et les tronçons de rails situés entre les barres forment un circuit fermé. Ce circuit fermé possède une résistance électrique R (non représentée sur le schéma ci-dessous) qui sera supposée constante quelle que soit la position des barres. On définit un sens de circulation positive sur ce circuit comme indiqué sur le schéma.



Les deux barres sont reliées à des ressorts identiques de raideur k fixés en O_1 et O_2 . Les abscisses x_1 et x_2 sont mesurées à partir de O_1 et O_2 . À l'instant initial, on lâche les barres sans vitesse initiale aux positions $x_1=l_0+a$ avec $a>0$ et $x_2=l_0$.

36.Écrire l'équation électrique du circuit lorsque les barreaux sont animés des vitesses v_1 et v_2 .

37.Appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacune des barres et en déduire deux équations mécaniques.

38.Déduire de ce qui précède le système d'équations différentielles vérifié par x_1 et x_2 .On utilisera les notations ω_0 et τ

39.On pose $X=x_1+x_2$ et $Y=x_2-x_1$ .Déterminer l'équation différentielle vérifiée par X et l'équation différentielle vérifiée par Y .

40.Quelle est la limite de Y quand $t \to \infty$? En déduire au bout d'un temps très long:

- les expressions de x_1 et x_2 en fonction de t et la nature du mouvement des deux barres;
- l'intensité i .

41.Faire un bilan énergétique entre $t=0$ et $t=\infty$. Commenter.

Le rendement de Curzon et Alhborn

I. Questions préliminaires

Soit un système fermé homogène de masse m, contenant n moles, de chaleur massique à pression constante c, de capacité thermique molaire à pression constante C_m.

1. Capacité thermique

- Donner les unités de c et de C_m.
- Exprimer la capacité thermique à pression constante $\mathscr{C}$ du système en partant de c. Idem en partant de C_m.

2. Enthalpie et entropie

On donne l'expression générale de la différentielle de l'enthalpie: $dH=\mathscr{C}\,dT+(k+V)dP$ où k et $\mathscr{C}$ sont a priori des fonctions de T et P.

- En déduire l'expression de la différentielle de l'entropie dS.
- Pour un gaz parfait, H ne dépend que de la température. En déduire l'expression de k. Que peut-on aussi en déduire quant à la dépendance de $\mathscr{C}$ avec T et P pour un gaz parfait.
- En déduire dS pour un gaz parfait.
- Quelles sont les expressions de dH et dS pour des évolutions isobares dans le cas d'un fluide quelconque.

3. Montrer que pour une évolution monobare, on a $\Delta H=Q$ où Q désigne la chaleur reçue.

II. Moteur de Carnot

On étudie un moteur de Carnot : un fluide (F) décrit un cycle ditherme constitué de deux isothermes réversibles et de deux adiabatiques réversibles en échangeant une quantité de chaleur Q_C avec une source chaude à la température T_C, une quantité de chaleur Q_F avec une source froide à la température T_F, un travail mécanique W avec l'extérieur. Selon les conventions habituelles de la thermodynamique, les différentes grandeurs échangées par le fluide (F) sont algébriquement reçues par ce fluide.

4. Préciser les signes de Q_C, Q_F, W.

5. Démontrer l'expression de l'efficacité (ou rendement thermodynamique) η_C du moteur en fonction des températures.

6. Comment réalise-t-on une transformation isotherme réversible au contact d'une source de chaleur? Préciser les températures du fluide et de la source. Combien cela prend-il de temps théoriquement? Quelle est alors la puissance théorique d'un moteur de Carnot?

7. Peut-on envisager des cycles réversibles à deux sources dont les transformations soient d'une

autre nature que des isothermes et des adiabatiques? Justifier.

Dans la suite ,on se propose d'étudier un modèle de transfert , certes approximatif, mais plus réaliste, que celui du cycle de Carnot, en tenant compte notamment de la durée des échanges.

III. Modélisation du transfert thermique entre deux sources de chaleur

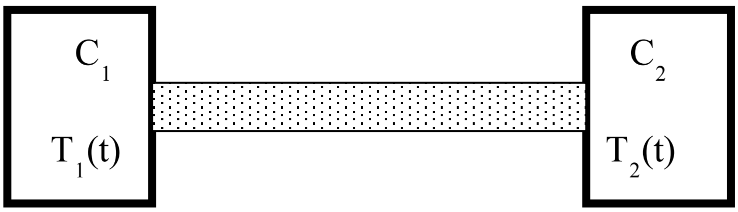
On étudie la conduction thermique, à pression constante, entre deux sources de chaleur $(S1)$ et $(S2)$ dont les températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sont uniformes mais dépendent du temps.

A l'instant $t=0$, on a $T_1(0)=T_{10}$ et $T_2(0)=T_{20}$.

On note C_1 et C_2 les capacités thermiques respectives à pression constante de ces sources (voir figure). On pourra supposer, pour faciliter la réflexion, que la source $(S1)$ est à une température supérieure à celle de $(S2)$, quoique cette supposition ne modifie en rien les résultats généraux obtenus.

Entre les deux sources, un barreau de conductivité thermique λ , de longueur L , de section droite carrée de surface S , entouré par une enveloppe adiabatique, assure le transfert thermique de $(S1)$ vers $(S2)$. En $x=0$ le barreau est à la température $T_1(t)$ et en $x=L$ le barreau est à la température $T_2(t)$. On considère que la température est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend donc que de son abscisse x et du temps t .

Les sources et le barreau évoluent de manière isobare.



Si l'on peut négliger la capacité thermique du barreau, la loi de température s'écrit:

$$T(x,t)=T_1(t)+(T_2(t)-T_1(t))\frac{x}{L}$$

8. Exprimer la densité volumique de courant thermique $\vec{j}=-\lambda\,\overrightarrow{grad}(T)$ où λ désigne la conductivité thermique du barreau.

9. Quelle est la puissance thermique $P(t)=\iint \vec{j}\,\vec{dS}$ traversant une section d'abscisse x du barreau de $(S1)$ vers $(S2)$? On écrira le résultat sous la forme $P(t)=\frac{1}{R}\ (T_1(t)-T_2(t))$ (relation (1)) où l'on exprimera R en fonction de λ, S, L .

10. On considère la source $(S2)$ recevant la puissance thermique $P(t)$ à pression constante. Écrire sa variation d'enthalpie $d\,H_2(t)$ pendant dt de deux façons différentes. En déduire une relation entre $P(t)$, C_2 et $\frac{d\,T_2(t)}{dt}$ (relation (2)).

11. On considère la source $(S1)$ fournissant la puissance thermique $P(t)$ à pression constante. Écrire sa variation d'enthalpie $d H_1(t)$ pendant dt . En déduire une relation entre $P(t)$, C_1 et $\frac{d T_1(t)}{dt}$ (relation (3))

12. En partant des trois relations , écrire l'équation différentielle vérifiée par $P(t)$. Quelle est la constante de temps notée τ caractéristique de l'évolution de ce système? On posera $C_{eq}=\frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}$ et l'on exprimera τ en fonction de R, C_{eq} .

13. Résoudre pour trouver $P(t)$

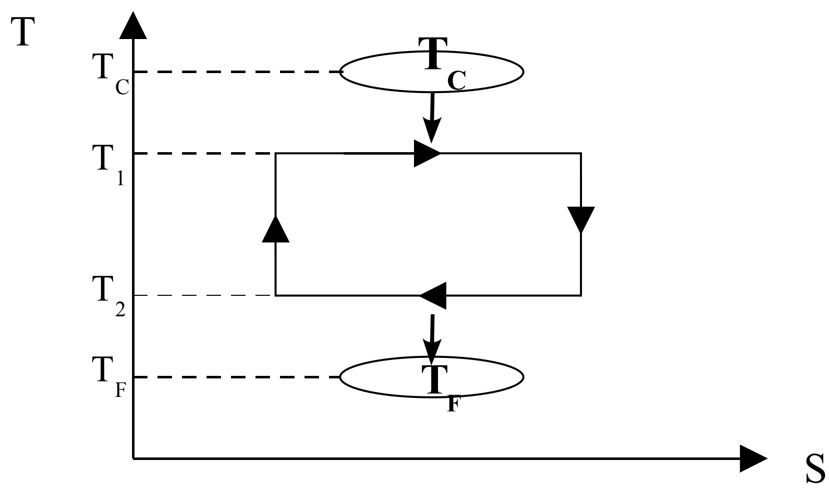
14. En faisant un bilan enthalpique simple, déterminer directement la valeur de $T_1(t\to\infty)$ et celle de $T_2(t\to\infty)$. On rappelle que la capacité thermique du barreau est supposée négligeable.

15. Étude de la production d'entropie:

- Justifier que l'entropie est ici créée uniquement dans le barreau assurant le transfert thermique.
- Exprimer la variation élémentaire d'entropie de $(S2)$ pendant dt . Idem pour $(S1)$. La variation d'entropie du barreau étant nulle puisque sa capacité thermique est négligée, déterminer l'entropie créé dans ce barreau pendant dt .
- Calculer l'entropie créée au total au cours de l'évolution.

IV. Moteur de Curzon et Alhborn

On se propose d'étudier le fonctionnement d'un moteur thermique ditherme du point de vue dynamique, c'est-à-dire que la variable temps interviendra. On envisage donc un autre moteur thermique (Curzon-Ahlborn) autre que celui de Carnot..

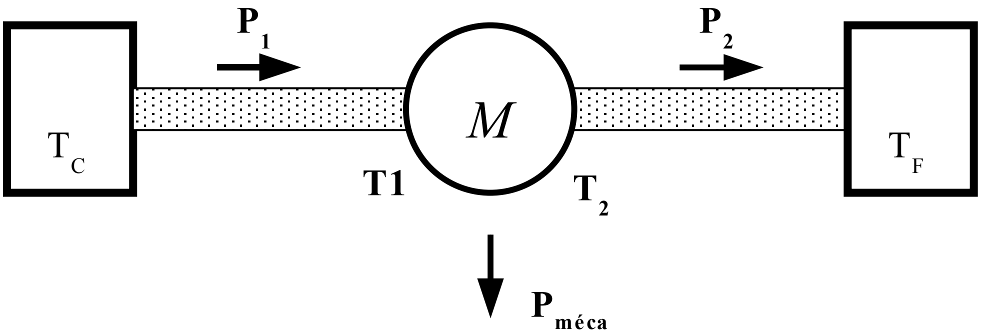


Il est constitué d'un moteur (M) relié à une source chaude dont la température est T_C et à une source froide dont la température est T_F mais on suppose que lorsque le fluide échange de la chaleur avec la source chaude (resp. froide), il se trouve à une température constante et uniforme

T_1 (resp. T_2) avec $T_C > T_1$ (resp. $T_2 > T_F$).

Les deux autres transformations du cycle sont des isentropiques. Le diagramme (T,S) du cycle est représenté sur la figure.

Entre le moteur et chaque source se trouve un échangeur de comportement analogue au barreau étudié précédemment de sorte que la puissance reçue par le fluide pendant l'isotherme T_1 en provenance de la source chaude vaut $P_1 = \frac{1}{R}(T_C - T_1)$. De même la puissance fournie par le fluide pendant l'isotherme T_2 en provenance de la source froide vaut $P_2 = \frac{1}{R}(T_2 - T_F)$. On note t_1 et t_2 les durées respectives des deux transformations isothermes. Les transformations adiabatiques réversibles sont supposées suffisamment rapides pour que l'on puisse négliger leur durée.



On note $P_{méca}$ la puissance mécanique moyenne sur un cycle du moteur c'est à dire la puissance fournie par le fluide.

16.Exprimer Q_1 transfert thermique reçu de la source chaude sur un cycle et Q_2 transfert thermique fourni à la source froide sur un cycle en fonction de R , des températures et de t_1 et t_2 .Exprimer W travail fourni par le moteur sur un cycle en fonction de $P_{méca}$ et de t_1 et t_2 .

17.Montrer que $\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$

18.Donner les expressions de Q_1 et de Q_2 en fonction de W et du rendement thermodynamique η du cycle décrit par le fluide. Donner aussi l'expression de η en fonction des températures T_1 et T_2 .

19.La transformation de l'ensemble moteur+sources n'est pas réversible. Justifier l'affirmation et exprimer l'entropie créée par cycle en fonction de Q_1 , Q_2 et des températures.

20. T_C et T_F étant fixés, quelle est la valeur prévisible de $P_{méca}$ si $T_1 = T_C$ ou si $T_2 = T_F$? Justifier.

V. Optimisation du moteur de Curzon et Alhborn

On suppose données les températures des sources T_C et T_F et on cherche à optimiser la puissance mécanique de ce moteur par un choix convenable des températures T_1 et T_2 .

21.Exprimer les durées t_1 et t_2 des transferts thermiques Q_1 et Q_2 . En déduire la durée totale d'un cycle t_0 en fonction de $R, W, \eta, (T_C - T_1), (T_2 - T_F)$

22.Montrer que la puissance $P_{méca}$ du moteur se met sous la forme:
$$\frac{1}{P_{méca}} = \frac{R}{(T_1 - T_2)} \left(\frac{T_1}{(T_C - T_1)} + \frac{T_2}{(T_2 - T_F)} \right)$$

23.On peut montrer que le maximum de $P_{méca}$ est obtenu pour $\frac{T_1}{\sqrt{T_C}} = \frac{T_2}{\sqrt{T_F}} = \frac{\sqrt{T_C} + \sqrt{T_F}}{2}$.

- Déterminer la puissance maximale en fonction de R, T_C, T_F .
- Déterminer l'efficacité lorsque la puissance est maximale en fonction de T_C et T_F et comparer à l'efficacité du cycle de Carnot. Commenter.

Réponses

Rails de Laplace

1) allongement / longueur à vide :

$$\boxed{\ell - \ell_0}$$

---

2) allongement / longueur à l'équilibre :

$$\boxed{\ell - \ell_{eq} = X}$$

---

3) Tension exercée par le ressort :

$$\boxed{\vec{T} = -k(\ell-\ell_0)\vec{u_x}}$$

---

4) Principe fondamental :

$$\vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$/\vec{u_x}$

$$\boxed{-k(\ell-\ell_0) + F = m\frac{dv}{dt}}$$

---

5) soit $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} + \frac{k}{m}\ell_0}$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

---

6) solution :

$$\boxed{x = \underbrace{A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}_{\text{ou } C\cos(\omega_0 t + \varphi)} + \frac{F}{k} + \ell_0}$$

---

7) La masse oscille autour de sa position d'équilibre

donc $x_{eq} = \boxed{\ell_{eq} = \frac{F}{k} + \ell_0}$

En prenant une origine à la position d'équilibre :

$$X = (x - x_{eq}) \text{ ou } (\ell - \ell_{eq})$$

$$\boxed{X = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

remarque : traditionnellement pour avoir une équation différentielle sans second membre, on fait :

- en mvt $\qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} + \frac{k}{m}\ell_0$

- à l'équilibre (et au repos) $\qquad \omega_0 x_{eq} = \frac{F}{m} + \frac{k}{m}\ell_0$

différence $\qquad X + \omega_0^2 X = 0$

---

8) Ici $\qquad -k(x-\ell_0) = m\ddot{x}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0}$$

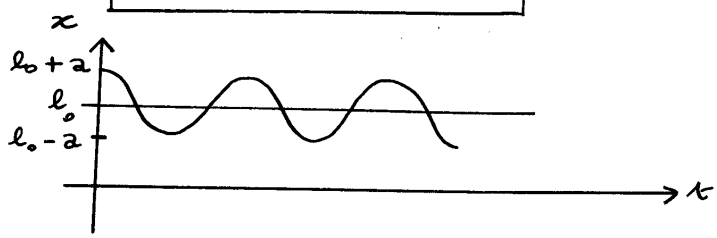
---

9) $$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \ell_0$$

on porte les conditions initiales avec $x_{t=0} = \ell_0 + a$ et $\dot{x}_{t=0} = 0$

C.I $\left|\begin{array}{l} \ell_0 + a = A + \ell_0 \\ 0 = B\omega_0 \end{array}\right.$

$$\boxed{x = a\cos(\omega_0 t) + \ell_0}$$



---

10) $E_{cinétique} = \frac{1}{2} m v^2$

$= \frac{1}{2} m\, a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$

$= \frac{1}{2} k\, a^2 \sin^2(\omega_0 t)$

$E_{\text{élastique du ressort}} = \frac{1}{2} k\, (\ell - \ell_0)^2$

$= \frac{1}{2} k\, a^2 \cos^2(\omega_0 t)$

$$E_{mécanique} = E_{cinétique} + E_{élastique}$$

$$\boxed{E_{mécanique} = \frac{1}{2} k a^2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2}$$

C'est une constante (indépendante du temps)

---

11)
$$\langle E_{cinétique} \rangle = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \ \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{4} m a^2 \omega_0^2$$
$$= \frac{1}{4} k a^2$$

$$\langle E_{\substack{potentielle \\ élastique}} \rangle = \frac{1}{4} k a^2$$

$$\boxed{\langle E_{cinétique} \rangle = \langle E_{élastique} \rangle = \frac{E_{mécanique}}{2}}$$

---

12) Avec du frottement fluide : $-\alpha \vec{v}$, on aura

$$\boxed{-k(x - \ell_0) - \alpha \dot{x} = m \ddot{x}}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k \ell_0}{m}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0}$$

---

13) On essaye des solutions en e^{rt} pour l'équation sans second membre d'où :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 r = 0$$

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}$$

$$= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

on aura des oscillations si la quantité sous radical est négative : $\frac{1}{4Q^2} - 1 < 0$

$$\boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

et $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\Omega$

avec $\boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

(pseudopulsation)

---

14) $\boxed{x = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t\right) + \ell_0}$

$$\dot{x} = -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t\right) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-A\,\Omega \sin \Omega t + B\,\Omega \cos \Omega t\right)$$

C.I. en $t = 0$ $\quad x = \ell_0 + a$

$\dot{x} = 0$

donc

$\longrightarrow \ell_0 + a = 1 \; (A + 0) + \ell_0$ soit $A = a$

$\longrightarrow 0 = -\frac{\omega_0}{2Q}\, 1 \; (A + 0) + 1 \; (0 + B\,\Omega)$

soit $B = \frac{1}{2Q} \frac{\omega_0}{\Omega} A$

$= \frac{1}{2Q} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}\, a$

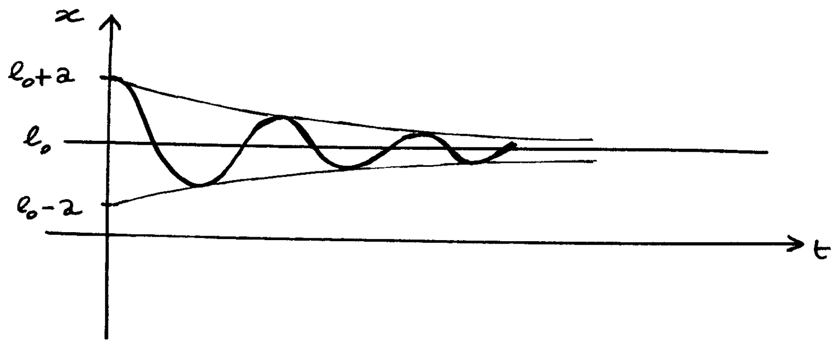
$B = \frac{a}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

finalement :

$$\boxed{x = a\, e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos \Omega t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \sin \Omega t\right) + \ell_0}$$

---

15)



---

16) $Q \gg \frac{1}{2}$

Les frottements sont minimes.

On a alors :

$\rightarrow$ $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$

$\rightarrow$ le $\sin \Omega t$ a une amplitude bien plus petite que celle du cosinus et on le néglige.

$$\boxed{x \approx a\, e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cos(\omega_0 t) + \ell_0}$$

$$\dot{x} = a\, e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \Big(\underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q} \cos(\omega_0 t)}_{\text{on néglige aussi}} - \omega_0 \sin(\omega_0 t) \Big)$$

$$\boxed{\dot{x} \approx -a\, e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \omega_0 \sin(\omega_0 t)}$$

On retrouve les expressions en l'absence de frottement en remplaçant a par $\boxed{a\, e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}$

d'où

$$E_{meca} = \frac{1}{2} k a^2$$

devient

$$E_{meca} = \frac{1}{2} k a^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}$$

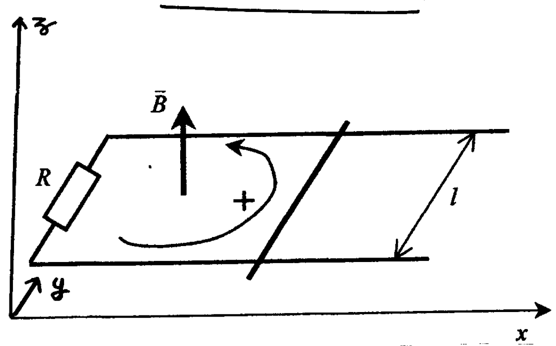
$$= \frac{1}{2} k a^2 e^{-t/\tau}$$

avec τ tel que

$$\boxed{Q = \omega_0 \tau}$$

---

17) à 20) les axes choisis :



$$e = \int_{tige} (\vec{v} \wedge \vec{B})\, \vec{dl}$$

$$= \int_{y=0}^{\ell} (\dot{x}\,\vec{u_x} \wedge B\,\vec{u_z})\, dy\,\vec{u_y}$$

$$\boxed{e = -\ B \ell \dot{x}}$$

$$\vec{F_L} = \int_{tige} i\ \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

$$= i \int_{y=0}^{\ell} dy\ \vec{u_y} \wedge B\,\vec{u_z}$$

$$\boxed{\vec{F_L} = i\ B \ell\ \vec{u_x}}$$

équation électrique :

$$e = R i$$

$$\boxed{-B\ell\dot{x} = Ri}$$

équation mécanique :

$$\vec{F_L} = m\vec{a}$$

$$\boxed{iB\ell = m\ddot{x}}$$

---

21) Equation différentielle pour v

$$-B\ell\dot{x} = Ri = R\ \frac{m\ddot{x}}{B\ell}$$

soit

$$\ddot{x} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\ \dot{x}$$

on pose $\boxed{\tau = \dfrac{mR}{B^2\ell^2}}$

$$\boxed{\dot{v} + \frac{v}{\tau} = 0}$$

remarque :

on a donc

$$\vec{F_L} = m\dot{v}\ \vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{F_L} = -\frac{m}{\tau}\ \vec{v}}$$

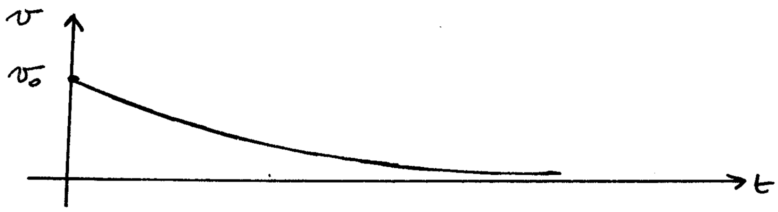
de la forme $\vec{F_L} = -\alpha\vec{v}$ (frottement fluide)

---

22) $v = A\, e^{-t/\tau}$

C.I. $v_0 = A$

$$\boxed{v = v_0\, e^{-t/\tau}}$$



---

23) bilan de puissance électromagnétique

$$e = Ri$$

$$\longrightarrow \quad ei = Ri^2$$

bilan de puissance mécanique

$$F_L = m\dot{v}$$

$$F_L v = m\dot{v}\, v$$

$$\longrightarrow \quad F_L v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

or $\underbrace{ei}_{-Blvi} + \underbrace{F_L v}_{iBlv} = 0$

donc bilan électromécanique

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -Ri^2}$$

L'énergie cinétique se tranforme en chaleur par effet Joule.

---

24) Il faut simplement remplacer e par $e+E$

Equations :

$$\boxed{\begin{array}{l} E - Bl\,v = Ri \\ i\,Bl = m\dot{v} \end{array}}$$

---

25) Equation différentielle pour v :

$$E - B\ell v = R\,\frac{m\dot{v}}{B\ell}$$

$$\frac{E}{B\ell} - v = \tau\dot{v}$$

$$v + \tau\dot{v} = \frac{E}{B\ell}$$

on pose : $\boxed{v_L = \frac{E}{B\ell}}$

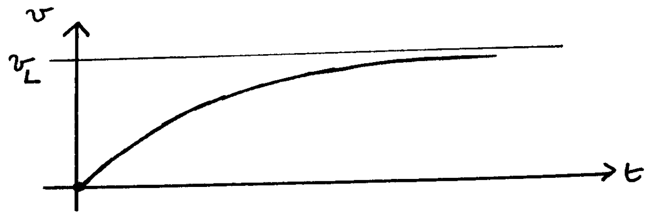
solution : $v = A e^{-t/\tau} + v_L$

C.I. $0 = A + v_L$

$$\boxed{v = v_L\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

---

26)



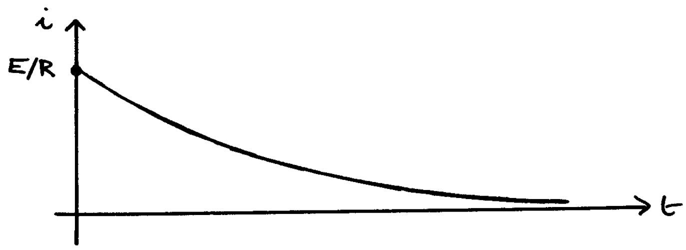
---

27)

$$i = \frac{m}{B\ell}\,\dot{v}$$

$$= \frac{m}{B\ell}\,v_L\,\frac{1}{\tau}\,e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{i = \frac{E}{R}\,e^{-t/\tau}}$$



---

28) puissance électromagnétique $\quad E i + e i = R i^2$

puissance mécanique $\quad F_L v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

puissance électromécanique $\quad \boxed{E i = R i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}$

La puissance apportée par le générateur se transforme en chaleur (effet Joule) ou en énergie cinétique pour la tige.

---

29) On tient compte du ressort :

Equations :

$$\boxed{\begin{aligned} E - B\ell\dot{x} &= Ri \\ -k(x-\ell_0) + iB\ell &= m\ddot{x} \end{aligned}}$$

Donc : $$\boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2(x-\ell_0) = \frac{E\ell B}{mR}}$$

---

30) A l'équilibre ($\ddot{x}=0$) et au repos ($\dot{x}=0$)

$$\boxed{\omega_0^2(x_{eq}-\ell_0) = \frac{E\ell B}{mR}}$$

En faisant la différence entre les deux équations :

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2(x - x_{eq}) = 0$$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau} + \omega_0^2 X = 0}$$

---

31) équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{1}{\tau} r + \omega_0^2 = 0$$

$$\begin{aligned} r &= -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2} \\ &= -\frac{1}{2\tau} \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \\ &= -\frac{1}{2\tau} \pm j\omega_0 \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{4\omega_0^2\tau^2}}}_{\approx 1 \text{ car } \omega_0\tau = Q \gg 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{X = e^{-t/2\tau}\left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right)}$$

$$\dot{X} = e^{-t/2\tau}\,\omega_0\left(\left[-A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t\right] - \frac{1}{2\omega_0\tau}\left[A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right]\right)$$

$$\dot{X} = e^{-t/2\tau}\,\omega_0\,(-A \sin\omega_0 t + B \cos\omega_0 t)$$

car $\omega_0\tau \gg 1$

C.I. $\left|\begin{array}{l} -(x_{eq}-\ell_0) = A \\ 0 = \omega_0 B \end{array}\right.$

finalement :

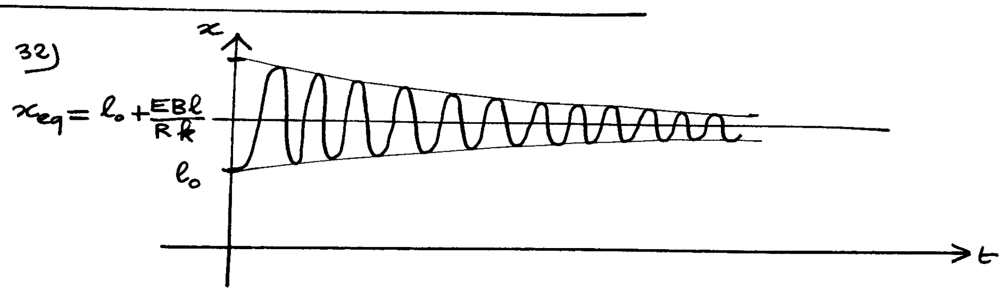
$$X = -(x_{eq}-\ell_0)\,e^{-t/2\tau}\cos(\omega_0 t)$$

$$X = -\frac{E\ell B}{Rk}\,e^{-t/2\tau}\cos(\omega_0 t)$$

$$\boxed{x = \frac{E\ell B}{Rk}\left(1 - e^{-t/2\tau}\cos(\omega_0 t)\right) + \ell_0}$$

---

32)



---

33) puissance électromagnétique $\quad Ei + ei = Ri^2$

puissance mécanique $\quad \underbrace{-k(x-\ell_0)\dot{x}}_{-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2\right)} + F_L v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

---

puissance électromécanique $\quad \boxed{Ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2\right) + Ri^2}$

bilan d'énergie entre $t=0$ et $t=\infty$

$$\int_0^\infty Ei\,dt = \underset{(\text{nul})}{\frac{1}{2}mv^2_{\text{final}}} - \underset{(\text{nul})}{\frac{1}{2}mv^2_{\text{initial}}}$$

$$+\frac{1}{2}k(\ell_{eq}-\ell_0)^2 - \frac{1}{2}k(\ell_0-\ell_0)^2$$

$$+\int_0^\infty Ri^2\,dt$$

$$\boxed{\int_0^\infty E\,i\,dt = \int_0^\infty R\,i^2\,dt + \frac{1}{2}k(\ell_{eq}-\ell_0)^2}$$

énergie fournie par le générateur — énergie chaleur due à l'effet Joule — énergie potentielle emmagasinée par le ressort

---

34) Si le générateur est alternatif, on retrouve l'équa diff de 29)

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2(x-\ell_0) = \frac{E\ell B}{mR}\cos\omega t}$$

---

35) Pour trouver la solution en régime forcé avec $\underline{X} = \underline{x}-\ell_0$, en $\exp j\omega t$, on passe aux complexes :

$$\boxed{\ddot{\underline{X}} + \frac{\dot{\underline{X}}}{\tau} + \omega_0^2\underline{X} = \frac{E\ell B}{mR}\exp j\omega t}$$

$$-\omega^2\underline{X} + \frac{j\omega\underline{X}}{\tau} + \omega_0^2\underline{X} = \frac{E\ell B}{mR}\exp j\omega t$$

$$\underline{X} = \frac{\frac{E\ell B}{mR}\exp j\omega t}{(\omega_0^2-\omega^2)+\frac{j\omega}{\tau}}$$

$$= \frac{-j\frac{E\ell B}{mR}\exp j\omega t}{\frac{\omega}{\tau}+j(\omega^2-\omega_0^2)}$$

$$\boxed{X = \frac{\frac{E\ell B}{mR}}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}}\sin\left(\omega t - \arctan\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega/\tau}\right)}$$

---

36) Comme précédemment la f.e.m. induite dans la barre 2 vaut

$$\boxed{e_2 = -\ell B v_2}$$

mais dans la barre 1 (cf bornes d'intégration)

$$\boxed{e_1 = +\ell B v_1}$$

D'où l'équation électrique

$$e_1 + e_2 = R i$$

$$\boxed{\ell B (v_1 - v_2) = R i}$$

---

37) principe fondamental à la barre 2 : comme précédemment

$$\boxed{-k (x_2 - \ell_0) + i \ell B = m \frac{dv_2}{dt}}$$

pour la barre 1, la force de Laplace change de signe (cf bornes d'intégration ou $i\,\vec{d\ell}$ dans l'autre sens)

$$\boxed{-k (x_1 - \ell_0) - i \ell B = m \frac{dv_1}{dt}}$$

---

38)
$$\boxed{\begin{aligned} -\omega_0^2 (x_2 - \ell_0) + \frac{1}{\tau}(v_1 - v_2) &= \frac{dv_2}{dt} \\ -\omega_0^2 (x_1 - \ell_0) - \frac{1}{\tau}(v_1 - v_2) &= \frac{dv_1}{dt} \end{aligned}}$$

---

39) somme des équations avec $X = x_1 + x_2$

$$\boxed{-\omega_0^2 (X - 2\ell_0) = \frac{d^2X}{dt^2}}$$

différence des équations avec $Y = x_2 - x_1$

$$\boxed{-\omega_0^2 Y - \frac{2}{\tau}\frac{dY}{dt} = \frac{d^2Y}{dt^2}}$$

---

40) → La deuxième équation :

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{dY}{dt} + \omega_0^2 Y = 0$$

indique que $\boxed{Y \to 0 \text{ si } t \to \infty}$

soit $\boxed{x_2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} x_1 \text{ conformément à la loi de Lenz}}$. Le flux ne variera plus et la f.e.m. induite, ainsi que le courant, tendent vers zéro

→ La première équation donne :

$$(X - 2\ell_0) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

C.I. $t=0$ $X = a$ et $\dot{X} = 0$

donc $\boxed{X = 2\ell_0 + a\cos(\omega_0 t)}$

→ Au bout d'un temps très long, on a vu

$x_1 = x_2 = \frac{X}{2}$ soit :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \ell_0 + \frac{a}{2}\cos(\omega_0 t) \\ x_2 = \ell_0 + \frac{a}{2}\cos(\omega_0 t) \end{array}}$$

$$\boxed{i = 0}$$

---

41) Bilan énergétique :

→ $t=0$ on a donné à 1 une énergie potentielle.

$$\boxed{E_i = \frac{1}{2} k a^2}$$

→ $t=\infty$ chaque tige possède la même énergie potentielle $E_P = \frac{1}{2} k \frac{a^2}{4}\cos^2(\omega_0 t)$ et la même énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \frac{a^2}{4}\sin^2(\omega_0 t)$. Soit pour chaque tige une énergie $E = \frac{1}{8} k a^2$

$$\boxed{E_f = \frac{1}{4} k a^2}$$

donc $\Delta E = -\frac{1}{4} k a^2$

$$\boxed{\Delta E = -\frac{E_i}{2}}$$

<u>La moitié de l'énergie initiale s'est transformée en chaleur</u> (effet Joule)

Le rendement de Curzon et Alhborn

1) $\boxed{\begin{array}{l} c \text{ en } J\,kg^{-1}\,K^{-1} \\ C_m \text{ en } J\,mol^{-1}\,K^{-1} \end{array}}$

$\mathcal{C}$ en $J\,K^{-1}$ avec

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{C} = m\,c \\ \mathcal{C} = n\,C_m \end{array}}$$

---

2) $dH = \mathcal{C}\,dT + (k+V)\,dP$

- $dH = T\,dS + V\,dP$

donc

$T\,dS = \mathcal{C}\,dT + k\,dP$

$$\boxed{dS = \mathcal{C}\,\frac{dT}{T} + k\,\frac{dP}{T}}$$

- gaz parfait

$H = H(T)$ donc

$dH = \underbrace{\ldots}_{\text{fonction de } T}\,dT + 0\,dP$

d'où $\boxed{\begin{array}{l} k = -V \\ \mathcal{C} = \mathcal{C}(T) \end{array}}$

- $dS = \mathcal{C}(T)\,\frac{dT}{T} - \frac{V\,dP}{T}$ (car $k = -V$)

$$\boxed{dS = \mathcal{C}(T)\,\frac{dT}{T} - nR\,\frac{dP}{P}}$$

- fluide quelconque si $dP = 0$

(ex : calcul de la variation ΔH ou ΔS dans une transformation monobare)

$$\boxed{dH = \mathcal{C}\,dT \quad \text{et} \quad dS = \mathcal{C}\,\frac{dT}{T}}$$

---

3) Transformation monobare :

$$\Delta H = \Delta(U + PV)$$
$$= \Delta U + P_F V_F - P_i V_i$$
$$= \Delta U + P_{ext}(V_F - V_i)$$

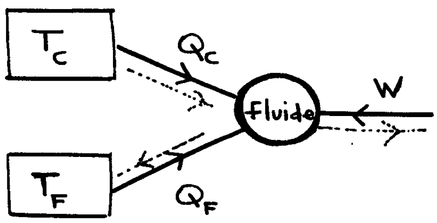
or
$$\Delta U = W + Q$$
$$= \int -P_{ext}\, dV + Q$$
$$= -P_{ext}(V_F - V_i) + Q$$

finalement

$$\boxed{\Delta H = Q}$$

---

4) Moteur de Carnot (donc réversible)



$\dashrightarrow$ sens réel des échanges

donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} Q_C > 0 \\ Q_F < 0 \\ W < 0 \end{array}}$$

---

5)
$$\eta_C = \frac{(-W)}{Q_C}$$

avec
$$\Delta U = W + Q_C + Q_F = 0$$
$$\Delta S = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$$

$$= \frac{Q_C + Q_F}{Q_C}$$
$$= 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$$

$$\boxed{\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

---

6) Transformation isotherme à T_0

- le fluide est à T_0
- la source (une seule) est à T_0

ceci assure la réversibilité thermique

Mais il faut comprimer (ou détendre) infiniment lentement sinon la température du fluide va s'élever (ou baisser) et les échanges thermiques deviendront irréversibles.

La durée de la transformation est infinie.

La puissance du moteur de Carnot est donc nulle.

---

7) Un cycle réversible doit être réversible thermiquement.

→ il pourra comporter des adiabatiques (pas d'échange thermique donc pas de problème). Il faudra ici assurer la réversibilité mécanique (= isentropiques)

→ les transformations avec échange thermique seront telles que T_{source} (constante) $= T_{système}$.

Donc $T_{système} = cte$. Ce seront des isothermes

Pas d'autre solution ... ce cycle réversible fournit donc une puissance nulle.

---

8)

$$\vec{j} = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\, T$$

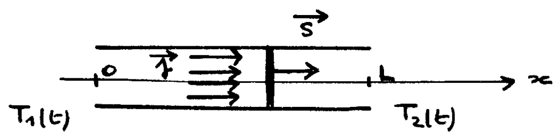
$$= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \overrightarrow{u_x}$$

$$= -\lambda \frac{T_2(t) - T_1(t)}{L} \overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\vec{j} = \lambda \frac{T_1(t) - T_2(t)}{L} \overrightarrow{u_x}}$$

---

9)

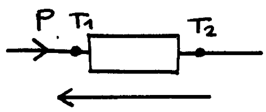


$$P(t) = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

$$= j\,S$$

$$P(t) = \frac{\lambda S}{L}\left(T_1(t) - T_2(t)\right)$$

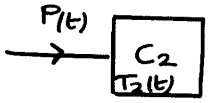
donc $\boxed{R = \dfrac{L}{\lambda S}}$ (résistance thermique)



$$(T_1 - T_2) = R\,P$$

---

10)



dH_2 — bilan: $\underset{(P\,cste)}{dH_2} = \delta Q_2 = P(t)\,dt$

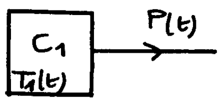
— expression: $\underset{(P\,cste)}{dH_2} = C_2\, dT_2(t)$

$$P(t)\,dt = C_2\, dT_2(t)$$

$$\boxed{P(t) = C_2 \frac{dT_2(t)}{dt}}$$

---

11)



dH_1 — $\underset{(P\,cste)}{dH_1} = \delta Q_{1\,\text{reçue}} = -\delta Q'_{1\,\text{fournie}} = -P(t)\,dt$

— $\underset{(P\,cste)}{dH_1} = C_1\, dT_1(t)$

$$-P(t)\,dt = C_1\, dT_1(t)$$

$$\boxed{P(t) = -C_1 \frac{dT_1(t)}{dt}}$$

---

12)

$$P_{(t)} = \frac{1}{R}\left(T_{1\,(t)} - T_{2\,(t)}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{R}\left(\frac{dT_1}{dt} - \frac{dT_2}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{R}\left(-\frac{P}{C_1} - \frac{P}{C_2}\right)$$

$$= -\frac{1}{RC_{eq}}\,P$$

$$\boxed{\frac{dP}{dt} + \frac{P}{\tau} = 0}$$

avec $\boxed{\tau = RC_{eq}}$

---

13)

$$P = A\,e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{P_{(t)} = P_o\,e^{-t/\tau}}$$

avec $\boxed{P_o = \frac{1}{R}\left(T_{1(0)} - T_{2(0)}\right)}$

---

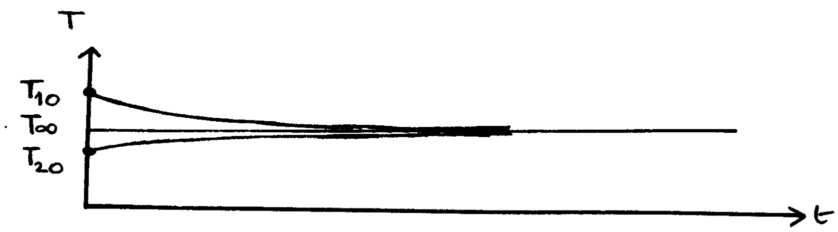
14) On considère l'ensemble (1 + barreau + 2) à P constante

$\Delta H = 0$ (pas d'échange thermique avec l'extérieur

$= C_1\left(T_F - T_{1(0)}\right) + 0 + C_2\left(T_F - T_{2(0)}\right)$

puisque à la fin de l'évolution, tout est à la même température.

$$\boxed{T_{1\infty} = T_{2\infty} = \frac{C_1 T_{1(0)} + C_2 T_{2(0)}}{C_1 + C_2}}$$



---

15) – La conductivité thermique de 1 et 2 a été supposée très grande. Il n'y a donc pas de $\overrightarrow{grad}\,T$ dans 1, ni dans 2. La température de chaque source reste uniforme et donc pas de création d'entropie ni dans 1, ni dans 2.
La transformation est globalement irréversible. Le $\overrightarrow{grad}\,T$ existe dans le barreau. Il y a de l'entropie créée dans le barreau.

– $$dS_{1+barreau+2} = dS_1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathscr{C} \text{ nul pour} \\ \text{le barreau}}}{0} + dS_2$$

$$= \frac{(-\delta Q_1)}{T_1} + 0 + \frac{\delta Q_2}{T_2}$$

Cette variation d'entropie est égale au terme d'échange avec l'extérieur (nul) et au terme de création (localisé dans le barreau)

$$\boxed{\delta S_{\substack{\text{créé} \\ \text{dans le} \\ \text{barreau}}} = C_1 \frac{dT_1}{T_{1(t)}} + C_2 \frac{dT_2}{T_{2(t)}}}$$

ou aussi :

$$\boxed{\delta S_{\substack{\text{créé} \\ \text{dans le} \\ \text{barreau}}} = P_{(t)}\, dt \left(\frac{1}{T_{2(t)}} - \frac{1}{T_{1(t)}} \right)}$$

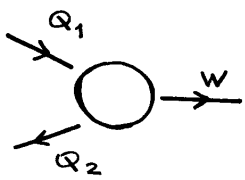
(fonction du $\overrightarrow{grad}$ de $\frac{1}{T}$ dans le barreau)

– En intégrant la première expression :

$$\boxed{S_{créé} = C_1 \ln \frac{T_\infty}{T_{10}} + C_2 \ln \frac{T_\infty}{T_{20}}}$$

---

16)



$Q_1 > 0$
$Q_2 > 0$
$W > 0$

(on remarque que les conventions de signes sont différentes)

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{R}(T_C - T_1)\, t_1 \\ Q_2 &= \frac{1}{R}(T_2 - T_F)\, t_2 \\ W &= P_{méca}(t_1 + t_2) \end{aligned}}$$

---

17) Le cycle est réversible.
L'irréversibilité est localisée au niveau des transferts dans les barreaux.

Donc :

$$\Delta S = \boxed{0 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{(-Q_2)}{T_2}}$$

$$\Delta U = 0 = Q_1 + (-Q_2) + (-W)$$

---

18) $\left.\begin{aligned} Q_1 - Q_2 - W &= 0 \\ \eta &= \frac{W}{Q_1} \end{aligned}\right\}$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= \frac{W}{\eta} \\ Q_2 &= W\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) \end{aligned}}$$

avec $\boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$

---

19) L'irréversible apparait au niveau des transferts de chaleur

$$\Delta S_{\substack{\text{sources}\\\text{barreaux}\\\text{fluide}\\(1\text{ cycle})}} = \Delta S_{\substack{\text{source}\\1}} + \Delta S_{\substack{\text{source}\\2}} + \Delta S_{\text{barreaux}} + \Delta S_{\text{fluide}}$$

$$= \frac{(-Q_1)}{T_C} + \frac{Q_2}{T_F} + \underset{(\mathcal{C}\text{ nul})}{0} + \underset{(\text{cycle})}{0}$$

Le terme d'échange est nul donc

$$\boxed{S_{créé} = \frac{Q_2}{T_F} - \frac{Q_1}{T_C}}$$

---

20) Si $T_1 = T_C$ les échanges thermiques avec la source chaude sont infiniments longs.
Si $T_2 = T_F$ les échanges thermiques avec la source froide sont infiniments longs.
(On retrouve un moteur monotherme en quelque sorte puisque l'échange n'a lieu qu'avec une seule source)
La puissance mécanique fournie est alors nulle.

---

21) $$t_1 = \frac{Q_1 R}{T_C - T_1} = \frac{W}{2} \frac{R}{T_C - T_1}$$

$$t_2 = \frac{Q_2 R}{T_2 - T_F} = W\left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{R}{T_2 - T_F}$$

$$\boxed{t_0 = \frac{W\ R}{2}\left[\frac{1}{T_C - T_1} + \frac{1-2}{T_2 - T_F}\right]}$$

---

22) $$\frac{t_0}{W} = \frac{1}{P_{m\acute{e}ca}}$$

$$\frac{1}{P_{m\acute{e}ca}} = \frac{R}{\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}\left(\frac{1}{T_C - T_1} + \frac{T_2/T_1}{T_2 - T_F}\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{P_{m\acute{e}ca}}\right)(T_1, T_2) = \frac{R}{T_1 - T_2}\left(\frac{T_1}{T_C - T_1} + \frac{T_2}{T_2 - T_F}\right)}$$

---

23) Pour trouver, l'extremum, il faut dériver par rapport à T_1 et T_2 et annuler les dérivées.
On trouve $$T_1 = \frac{T_C + \sqrt{T_F T_C}}{2}$$

$$T_2 = \frac{T_F + \sqrt{T_F T_C}}{2}$$

$$\frac{1}{P_{MAX}} = \frac{R}{(T_C - T_F)/2}\left(\frac{T_C + \sqrt{T_F T_C}}{T_C - \sqrt{T_F T_C}} + \frac{T_F + \sqrt{T_F T_C}}{-T_F + \sqrt{T_F T_C}}\right)$$

$$= \frac{2R}{T_C - T_F}\left(\frac{\sqrt{T_C} + \sqrt{T_F}}{\sqrt{T_C} - \sqrt{T_F}} + \frac{\sqrt{T_F} + \sqrt{T_C}}{-\sqrt{T_F} + \sqrt{T_C}}\right)$$

$$= \frac{2R}{\sqrt{T_C}-\sqrt{T_F}} \quad \frac{2}{\sqrt{T_C}-\sqrt{T_F}}$$

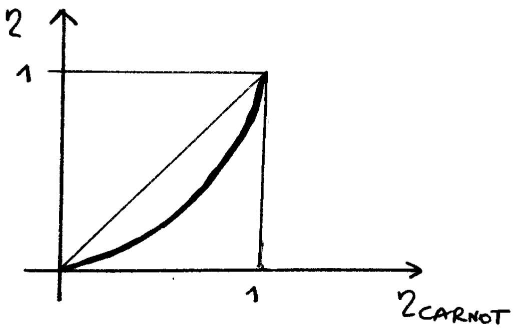
$$\boxed{P_{MAX} = \frac{\left(\sqrt{T_C}-\sqrt{T_F}\right)^2}{4R}}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_F}{T_C}}}$$

$$\eta_{CARNOT} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \sqrt{1-\eta_{CARNOT}}}$$



on a bien $\eta < \eta_{CARNOT}$ (cf irréversibilité dans les transferts)