

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

Systemes Linéaires Continus

Invariants

SLCI1 - Performances

Cours



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

Performances des systèmes asservis..... 6

1.I. Introduction..... 6

- 1.I.1 Objectifs 6
- 1.I.2 Remarque importante 6

1.II. Stabilité d'un système bouclé 7

- 1.II.1 Introduction sur la notion d'équilibre 7
 - 1.II.1.a Pendule 7
 - 1.II.1.b Masse en contact ponctuel parfait 7
- 1.II.2 Définitions 8
 - 1.II.2.a Equilibre Stable - Instable 8
 - 1.II.2.b Système à la limite de la stabilité..... 8
 - 1.II.2.c Système stable 8
- 1.II.3 Condition fondamentale de stabilité d'un système 9
 - 1.II.3.a Pôles d'une fonction de transfert 9
 - 1.II.3.b Réponse impulsionnelle 10
 - 1.II.3.b.i Un exemple d'abord 10
 - 1.II.3.b.ii Forme de la réponse dans Laplace 11
 - 1.II.3.b.iii Forme de la réponse temporelle 12
 - 1.II.3.b.iv Analyse de stabilité 12
 - Termes de type 1 12
 - Termes de type 2 12
 - Termes de type 3 13
 - Termes de type 4 13
 - 1.II.3.b.v Bilan 14
 - 1.II.3.b.vi Conclusions 14
 - 1.II.3.c Entrées quelconques 15
 - 1.II.3.c.i Un exemple d'abord..... 15
 - 1.II.3.c.ii Forme de la réponse dans Laplace..... 16
 - 1.II.3.c.iii Forme de la réponse temporelle 17
 - Cas du pôle nul réel 17
 - Cas des pôles complexes conjugués d'ordre 1 à partie réelle nulle 18
 - 1.II.3.c.iv Bilan 19
 - 1.II.3.c.v Conclusions 19
 - 1.II.3.d Conclusion : condition fondamentale de stabilité 19
 - 1.II.3.e Stabilité et plan complexe : Plan des pôles 20
 - 1.II.3.f Remarque : Critère de Routh 20
- 1.II.4 Stabilité des systèmes du premier et du second ordre 21
 - 1.II.4.a Système du premier ordre 21
 - 1.II.4.b Système du second ordre 21
 - 1.II.4.c Conclusion 21
- 1.II.5 Mise en place du critère du Revers 22
 - 1.II.5.a Equation caractéristique des systèmes bouclés 22
 - 1.II.5.b Principe d'application du critère du Revers 22
 - 1.II.5.c Critère de Nyquist 23
 - 1.II.5.d Critère de Nyquist simplifié..... 23
 - 1.II.5.d.i Critère 23
 - 1.II.5.d.ii Exemples 24
 - Système stable..... 24

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• Système instable.....	25
1.II.5.e Critère du Revers.....	26
1.II.5.e.i Dans Nyquist.....	27
1.II.5.e.ii Dans black.....	28
1.II.5.e.iii Dans Bode.....	29
• Enoncé.....	29
• Remarques.....	30
• Exemple de cas particulier dans Bode.....	31
1.II.5.f Applications.....	32
1.II.5.f.i Préliminaires.....	32
1.II.5.f.ii Système du premier ordre bouclé à retour unitaire.....	32
• Calcul de la FTBF.....	32
• Critère du Revers (FTBO).....	32
1.II.5.f.iii Système du second ordre bouclé à retour unitaire.....	33
• Calcul de la FTBF.....	33
• Critère du Revers (FTBO).....	33
1.II.5.f.iv Conclusions.....	34
1.II.5.g Marges de stabilité.....	34
1.II.5.g.i Définitions.....	34
• Marge de gain.....	34
• Marge de phase.....	34
1.II.5.g.ii Calcul graphique des marges.....	35
1.II.5.g.iii Calcul analytique des marges.....	35
• Marge de gain.....	36
• Marge de phase.....	36
1.II.5.g.iv Valeurs générales.....	41
1.II.5.g.v Influence de KBO sur la stabilité.....	41
1.II.5.g.vi Remarque : 1° ordre intégré.....	42
1.II.6 Conclusions sur la stabilité.....	43
1.II.7 Remarque TVF.....	43
1.III. Précision.....	44
1.III.1 Introduction.....	44
1.III.1.a Systèmes stables.....	44
1.III.1.b Mise en place du problème.....	44
1.III.1.c Ecart - Erreur – Définition.....	45
1.III.1.d Etude de l'écart/erreur au cours du temps.....	45
1.III.1.e Calcul de l'écart statique.....	46
1.III.2 Calcul des écarts au comparateur A des systèmes.....	47
1.III.2.a Expression générale de l'écart au comparateur A	47
1.III.2.b Calcul de l'écart au comparateur A	48
1.III.2.c Conclusions.....	49
1.III.2.c.i Ecart statique.....	49
1.III.2.c.ii Ecart de vitesse.....	49
1.III.2.d Lien entre l'erreur Σ et écart A	50
1.III.2.d.i Cas général.....	50
1.III.2.d.ii Ecart nul \Leftrightarrow Erreur nulle.....	50
1.III.2.d.iii Proportionnalité écart / erreur.....	50
1.III.2.d.iv Remarques.....	50

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.3 KBF des systèmes bouclés et erreur	51
1.III.3.a Détermination de KBF selon la classe	51
1.III.3.a.i FTBO de classe nulle: $\alpha = 0$	51
1.III.3.a.ii FTBO de classe au moins égale à 1 : $\alpha \geq 1$	52
1.III.3.b Erreur statique des systèmes connaissant KBF	52
1.III.3.b.i Cas général	52
1.III.3.b.ii Cas particulier sans gains extérieurs et retour unitaire	53
1.III.4 Choix du gain avant comparateur	54
1.III.4.a Présentation du problème	54
1.III.4.b Idées reçues	54
1.III.4.c Choix de G' selon la classe de la BO à l'aide de KBF	55
1.III.4.d Cas d'une classe non nulle et modification de schéma bloc	56
1.III.4.e Erreur à ne pas faire	57
1.III.4.f Conclusions	58
1.III.5 Influence des perturbations	59
1.III.5.a Problème étudié	59
1.III.5.b Calcul de l'influence de la perturbation	59
1.III.5.b.i Expression de la sortie	59
1.III.5.b.ii Définition des erreurs	59
1.III.5.b.iii Influence de la perturbation	60
1.III.5.b.iv Calcul selon le type d'entrée	61
• Perturbation en impulsion	61
• Perturbation en échelon	61
• Perturbation en rampe	61
1.III.5.b.v Conclusions	62
1.III.5.c Cas souvent rencontré	63
1.III.5.c.i Problème traité	63
1.III.5.c.ii Erreur en suivi de consigne	64
1.III.5.c.iii Erreur en régulation (perturbation)	64
1.III.6 Conclusions sur la précision	65
1.IV. Rapidité	66
1.IV.1 Définition	66
1.IV.2 Critères de rapidité	66
1.IV.2.a Temps de réponse à X%	66
1.IV.2.b Temps de montée	66
1.IV.2.c Bande passante	67
1.IV.3 Application aux systèmes du premier et second ordre	68
1.IV.3.a Systèmes non bouclés	68
1.IV.3.a.i Premier ordre	68
• Temps de réponse à 5%	68
• Temps de montée	69
• Bande passante	69
1.IV.3.a.ii Deuxième ordre	70
• Temps de réponse à 5%	70
• Temps de montée	71
• Bande passante	72
1.IV.3.a.iii Conclusions	73
1.IV.3.b Systèmes bouclés	74

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.IV.3.b.i Premier ordre bouclé	74
• Temps de réponse à 5% et temps de monté	74
• Influence de KBO	74
• Rapidité et bande passante de la BO	74
• Rapidité et bande passante à 0 db de la BO	74
• Illustration du lien BP/BP0/Rapidité	75
1.IV.3.b.ii Second ordre bouclé	76
• Temps de réponse à 5%	76
• Temps de montée	76
• Influence de KBO	76
• Rapidité et bandes passantes de la BO	76
1.IV.3.b.iii Conclusions	77
1.IV.4 Conclusions sur la rapidité	77
1.V. Dépassement	78

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

Performances des systèmes asservis

1.I. Introduction

1.I.1 Objectifs

L'objectif de ce cours est d'étudier les performances des systèmes asservis (stabilité, précision, rapidité) dans le but de répondre à un besoin de l'utilisateur.

L'asservissement est-il stable ? La valeur finale est-elle obtenue après un grand nombre d'oscillations ? Un équilibre peut-il être atteint ? Ne risque-t-on pas des oscillations permanentes ?

L'asservissement est-il précis ? L'écart ε entre la consigne affichée et la sortie obtenue est-il élevé ou faible, voire nul, pour une loi de consigne déterminée ?

L'asservissement est-il rapide ? La valeur de sortie est-elle atteinte au bout d'un temps suffisamment court pour être compatible avec le besoin de l'application ?

Nous étudierons ces différents aspects et verrons que la solution est toujours un compromis illustrant ce que l'on appelle le « dilemme stabilité-précision ».

Les performances en régime transitoire sont essentielles pour obtenir une commande de qualité conforme aux besoins de l'utilisateur. Les qualités demandées à un régime transitoire sont la rapidité et l'amortissement. Un système asservi de qualité doit être rapide et bien amorti.

Après avoir étudié ces différents aspects, nous verrons si nous pouvons les améliorer.

1.I.2 Remarque importante

Nous allons établir des résultats généraux d'influence de réglage de la FTBO d'un système asservi (bouclé) qui s'appliquent à nos systèmes réels, causaux, du premier et du deuxième ordre. Les fonctions de BODE (gain, phase) sont donc « globalement monotones décroissantes » (il se peut qu'il y ait une résonance par exemple).

Ces résultats ne seront pas forcément vrais en présence de fonctions non monotones ! Il faudra alors appliquer les démarches du cours au cas par cas.

Rappelons qu'un second ordre du type : $H(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$ n'est pas un « second ordre classique » et ne devra pas être confondu avec un « vrai » second ordre de fonction de transfert canonique usuelle.

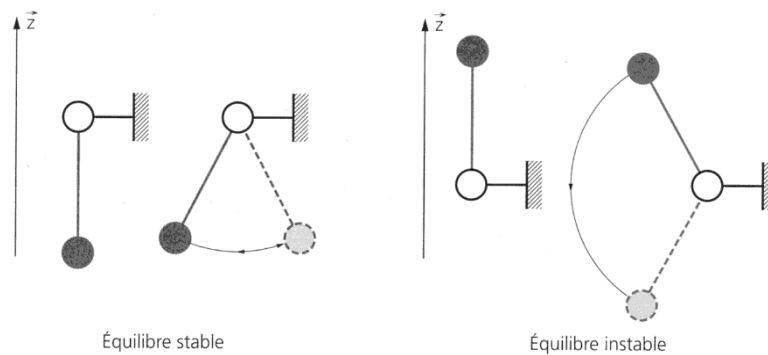
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II. Stabilité d'un système bouclé

1.II.1 Introduction sur la notion d'équilibre

1.II.1.a Pendule

Prenons l'exemple d'un pendule en liaison pivot par rapport à un bâti immobile, \vec{z} représentant la direction verticale.

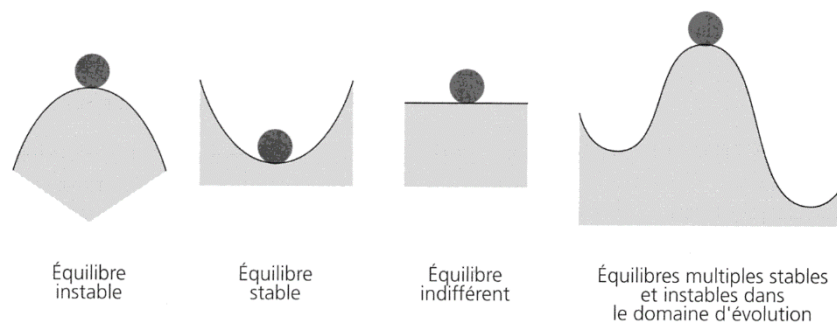


Ce pendule présente une position d'équilibre stable (en bas) et une position d'équilibre instable (en haut).

1.II.1.b Masse en contact ponctuel parfait

Ce deuxième exemple permet d'introduire de nouvelles notions d'équilibre.

Soit une masse soumise à la gravité en contact parfait sur un support.



On nomme équilibre indifférent le cas où, écarté de sa position par une cause extérieure passagère, le système reste écarté lorsque la cause disparaît. Il ne tend pas à revenir vers la position de départ mais ne diverge pas.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.2 Définitions

1.II.2.a Equilibre Stable - Instable

La stabilité d'un système est communément associée à la notion d'équilibre stable et instable.

Dans une position d'équilibre stable, si on écarte le système de sa position et qu'on le laisse libre, il revient dans cette position.

Dans une position d'équilibre instable, si on écarte le système de sa position et qu'on le laisse libre, il s'écarte d'avantage et ne revient pas dans cette position.

1.II.2.b Système à la limite de la stabilité

Un système est dit à la limite de la stabilité si, écarté de sa position par une cause extérieure, il ne revient pas vers cette position lorsque la cause disparaît, sans toutefois diverger (réponse constante ou sinusoïdale non amortie : réponse impulsionnelle d'un oscillateur non amorti).

Ce type de systèmes est stable au sens entrée bornée / sortie bornée, mais on peut faire la distinction avec un système asymptotiquement stable en précisant qu'il est à la limite de la stabilité.

1.II.2.c Système stable

On retiendra la définition suivante :

Un système est stable si, **à toute** entrée bornée, il répond par une sortie bornée.

Lorsque pour toute entrée qui se stabilise vers une valeur constante, le système converge vers une valeur finie, on dit que le système est asymptotiquement stable

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3 Condition fondamentale de stabilité d'un système

1.II.3.a Pôles d'une fonction de transfert

Soit un système défini par une fonction de transfert $H(p)$ causale (degré de $D(p) >$ degré de $N(p)$) telle que :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 D(p) &= p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod \left[[p - (a_j + ib_j)][p - (a_j - ib_j)] \right]^n \\
 [p - (a_j + ib_j)][p - (a_j - ib_j)] &= [(p - a_j) - (ib_j)][(p - a_j) + (ib_j)] \\
 &= (p - a_j)^2 - (ib_j)^2 = (p - a_j)^2 + b_j^2 \\
 D(p) &= p^\alpha \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $H(p)$ possède des pôles nuls, des pôles réels p_i simples ou multiples et des pôles complexes conjugués de la forme $a_j + ib_j$ simples ou multiples.

a_j est la partie réelle des pôles complexes conjugués

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3.b Réponse impulsionnelle

1.II.3.b.i *Un exemple d'abord*

Soit un système de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{p^2(1 + Tp)}$$

Soit une entrée impulsion : $E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = H(p)$

On peut alors proposer la forme de $S(p)$ par décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1 + Tp}$$

La réponse temporelle sera donc de la forme :

$$s(t) = A' + B't + C'e^{-\frac{t}{T}}$$

Il est aisé de constater que :

- La présence d'un pôle nul p de multiplicité 2 induit une réponse divergente
- Si le pôle réel $-a$ de $(p + a)$ est positif, la réponse diverge

Voyons cela de manière plus formelle avec une fonction de transfert quelconque.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3.b.ii *Forme de la réponse dans Laplace*

On impose à ce système une impulsion à partir de la position initiale $s(0) = 0$.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$$e(t) = \delta(t) \rightarrow E(p) = 1$$

On a donc :

$$S(p) = H(p)$$

La décomposition en éléments simples de $H(p)$ représentant un système causal nous permet de proposer une forme générale suivante :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{p^i} + \sum \frac{B_i}{(p - p_i)^j} + \underbrace{\sum \frac{C_i p + C_i'}{(p - a_j)^2 + b_j^2} + \sum \frac{D_i p + D_i'}{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^{j \geq 2}}}_{\text{Volontairement décomposés}}$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3.b.iii Forme de la réponse temporelle

L'application des tables de transformation de Laplace permet de prévoir la forme des fonctions composant la réponse $s(t)$:

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
$D(p)$	p^α	$\prod (p - p_i)^n$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$ $n \geq 2$
$s(t)$	$K_1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$	$\sum K_i \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t}$	$\sum K_j e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases}$	$\sum K_j t^{n-1} e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases}$

Remarques :

- Pour les termes en $[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$, $n \geq 2$, on pourra consulter l'exemple décrit dans le cours de 1^{re} année pour $n = 2$ et admettre qu'il se généralise.
- On pourra utilement aller consulter le paragraphe « Stabilité et plan complexe – Plan des pôles » quelques pages plus loin pour voir l'illustration graphique de ces différentes réponses

1.II.3.b.iv Analyse de stabilité

Etudions les conditions dans lesquelles la réponse est bornée pour chacun des types de termes rencontrés.

• Termes de type 1

Pôles réels nuls : $\frac{\dots}{p^\alpha}$		
$K_1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$	Pôle 0 simple $\alpha = 1$	Pôle 0 multiple $\alpha > 1$
Comportement de $s(t)$	Constant	Terme en puissance
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente	Instable

Remarque : la stabilité liée au pôle nul unique n'est vérifiée que pour l'entrée impulsionnelle, nous le verrons au prochain paragraphe.

• Termes de type 2

Pôles réels non nuls $p_i : \frac{\dots}{(p-p_i)^n}$			
$K_i \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t}$	$p_i < 0$	$p_i = 0 \Rightarrow \frac{1}{p^n}$	$p_i > 0$
Comportement de $s(t)$	Exponentielles décroissantes	Cas non présent puisque intégré dans la classe	Exponentielles croissantes
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente		Instable

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• **Termes de type 3**

Pôles complexes conjugués simples \dots $\overline{(ap^2 + bp + c)}$ avec $\Delta < 0$ ou $\overline{[(p - a_j)^2 + b_j^2]}$			
$K_j e^{a_j t} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases}(b_j t)$	$a_j < 0$	$a_j = 0$ ★	$a_j > 0$
Comportement de $s(t)$	Sinusoïdales encadrées par exponentielles décroissantes	Sinusoïdales	Sinusoïdales encadrées par exponentielles croissantes
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente	Stable Oscillante	Instable

• **Termes de type 4**

Pôles complexes conjugués multiples \dots $\overline{(ap^2 + bp + c)^n}$ avec $\Delta < 0$ ou $\overline{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n}$; $n \geq 2$			
$K_j t^{n-1} e^{a_j t} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases}(b_j t)$	$a_j < 0$	$a_j = 0$	$a_j > 0$
Comportement de $s(t)$	Forme particulière convergente	Oscillations autour d'une pente moyenne non nulle	Forme particulière divergente
Stabilité de $s(t)$	Stable Convergente	Instable	Instable

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3.b.v Bilan

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{p^i} + \sum \frac{B_i}{(p - p_i)^j} + \sum \frac{C_i p + C_i'}{(p - a_j)^2 + b_j^2} + \sum \frac{D_i p + D_i'}{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^{j \geq 2}}$$

$$s(t) = K_1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \sum K_i \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t} + \sum K_j e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases} + \sum K_j t^{n-1} e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases}$$

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
$D(p)$	p^α	$\prod (p - p_i)^n$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$ $n \geq 2$
Condition de stabilité à une entrée impulsionnelle	$\alpha \leq 1$	$p_i < 0$	$a_j \leq 0$	$a_j < 0$

1.II.3.b.vi Conclusions

On remarque que pour une réponse impulsionnelle :

- Les pôles à partie réelle strictement négative permettent d'obtenir une réponse stable convergente
- Un pôle nul simple induit une réponse stable et convergente
- Un pôle nul multiple induit une réponse divergente
- Les pôles imaginaires pur conjugués simples (partie réelle nulle) induisent une réponse stable et oscillante
- Les pôles imaginaires pur conjugués multiples (partie réelle nulle) induisent une divergence

A ce stade, il semble qu'un système converge pour une réponse impulsionnelle si :

- La partie réelle de ses pôles est strictement négative – Convergence asymptotique
- Les pôles à partie réelle nulle sont simples – Réponse constante ou oscillante

Toutefois, cela ne répond pas à la question : le système est-il stable, c'est-à-dire à toute entrée bornée, il répond par une sortie bornée.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3.c Entrées quelconques

Nous avons imposé une entrée impulsionnelle qui nous a mené à étudier directement $H(p)$ et de voir l'influence de ses pôles sur la stabilité du système causal associé.

Traisons maintenant le cas d'une entrée quelconque.

1.II.3.c.i Un exemple d'abord

Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)(p^2 + 1)}$$

Supposons que l'on ajoute une entrée échelon :

$$S(p) = \frac{K}{p^2(1 + Tp)(p^2 + 1^2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1 + Tp} + \frac{Dp + E}{p^2 + 1^2}$$

Comme dans l'exemple du paragraphe précédent, la présence d'un pôle nul dans $H(p)$ ne permet pas convergence quelque soit l'entrée bornée, puisque à un échelon répond une rampe.

De même, imaginons qu'en entrée, on mette $e(t) = \sin t$, $e(p) = \frac{1}{p^2 + 1^2}$. Cette entrée est bornée.

On a alors :

$$S(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)(p^2 + 1^2)^2}$$

Vous avez vu ? La réponse va diverger, car nous avons montré dans la partie précédente que les termes d'ordre 2 donnent une réponse de la forme $K_j t^{n-1} e^{a_j t} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (b_j t)$. Dans le cas ci-dessus, on a $e^{a_j t} = 1$, on aura donc un terme de la forme $K_j t^{2-1} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (b_j t) = K_j t \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (b_j t) \dots$

Discutons un peu : On peut mettre en entrée du système ci-dessus des fonctions sinusoïdales, sans que celui-ci ne diverge... Mais si on a la malchance de mettre exactement l'entrée dont le dénominateur de la FT est le même que celui de H, le système tend vers l'infini...

Comme dans la partie précédente, voyons cela de manière plus formelle, pour toute fonction de transfert et une entrée quelconque.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3.c.ii Forme de la réponse dans Laplace

Quelle que soit l'entrée, la sortie $S(p)$ s'exprimera avec un même dénominateur dans le domaine de Laplace que la réponse impulsionnelle augmenté de quelques termes liés à cette entrée.

Ecrivons $H(P)$ et $E(p)$ sous la forme suivante :

$$H(P) = \frac{N(P)}{D(p)} \quad ; \quad E(p) = \frac{N_e(p)}{D_e(p)} \quad \Rightarrow \quad S(p) = H(P)E(P) = \frac{N(P)}{D(p)} \frac{N_e(p)}{D_e(p)}$$

Le nouveau dénominateur $D_n(p)$ de $S(p)$ sera donc composé du dénominateur $D(p)$ de $H(p)$ et du dénominateur caractéristique de l'entrée $D_e(p)$:

$$D_n(p) = \mathbf{D(p)D_e(p)}$$

Supposons que le dénominateur de l'entrée soit de la forme générale suivante :

$$D_e(p) = p^\beta \prod (p - p_k)^m \prod [(p - a_l)^2 + b_l^2]^m$$

On aura donc :

$$D_n(p) = \mathbf{p^\alpha} \prod \mathbf{(p - p_i)^n} \prod \mathbf{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^n} p^\beta \prod (p - p_k)^m \prod [(p - a_l)^2 + b_l^2]^m$$

On a alors :

- Le regroupement des termes p^α et p^β en $p^{\alpha+\beta}$
- Le regroupement des termes $\prod (p - p_i)^n$ et $\prod (p - p_k)^m$ en un produit $\prod (p - p_i)^n$
- Le regroupement des termes irréductibles $\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$ et $\prod [(p - a_l)^2 + b_l^2]^m$ en produit $\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$

On aura finalement un dénominateur de la sortie dans le domaine de Laplace de la forme :


$$D_n(p) = p^{\alpha+\beta} \prod (p - p_i)^n \prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$$

Et donc la forme de la réponse temporelle associée :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\alpha+\beta} \frac{A_i}{p^i} + \sum \frac{B_i}{(p - p_i)^j} + \sum \frac{C_i p + C_i'}{(p - a_j)^2 + b_j^2} + \sum \frac{D_i p + D_i'}{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^{j \geq 2}}$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3.c.iii *Forme de la réponse temporelle*

On peut voir de grandes similitudes de cette réponse par rapport à la réponse impulsionnelle. Il reste en réalité deux cas à regarder pour conclure sur la condition de stabilité associés à la présence de pôles à partie réelle nulle qui en présence d'une impulsion, ne causaient pas de divergence de la sortie temporelle (marqués d'une étoile rouge dans les tableaux précédents): 

• Cas du pôle nul réel

En supposant que la fonction de transfert possède un pôle nul au moins parce que notre but est de voir s'il cause divergence ou non ($H(p) = \dots \frac{1}{p^\alpha} \dots, \alpha \geq 1$) et que l'entrée est quelconque bornée avec un terme $E(p) = \dots \frac{1}{p^\beta} \dots, \beta \geq 1$ borné, $S(p)$ se retrouve avec un terme d'ordre de multiplicité >1 au dénominateur : $S(p) = \dots \frac{A_i}{p^{\alpha+\beta}} \dots$

La réponse temporelle associée est donc :

$$K \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha+\beta-1)!} ; \quad \alpha+\beta \geq 2$$

Ce terme diverge.

La présence d'un pôle nul dans $H(p)$ rend le système instable.

Exemple :

$$H(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

A une entrée impulsion, ce système converge : $s(t) = A + Be^{-\frac{t}{T}}$

Appliquons une entrée bornée en échelon :

$$e(t) = 1 ; \quad E(p) = \frac{1}{p}$$

$$S(p) = \frac{K}{p^2(1+Tp)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{T}} + \frac{C}{p^2}$$

$$s(t) = A + Be^{-\frac{t}{T}} + Ct$$

Le système diverge. Il n'est donc pas stable !

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• **Cas des pôles complexes conjugués d'ordre 1 à partie réelle nulle**

En supposant que la fonction de transfert possède deux pôles complexes conjugués à partie réelle nulle simples parce que notre but est de voir s'il cause divergence ou non $H(p) = \dots \frac{Ap+A'}{[(p-a_j)^2+b_j^2]} \dots$ et que l'entrée est quelconque bornée avec un terme $E(p) = \dots \frac{Bp+B'}{[(p-a_j)^2+b_j^2]^\beta} \dots, \beta \geq 1$ borné, $S(p)$ se retrouve avec un terme d'ordre de multiplicité >1 au dénominateur pour les racines concernées :

$$S(p) = \frac{Ap+A'}{[(p-a_j)^2+b_j^2]^{\beta+1}}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, la puissance étant supérieure ou égale à 2, la réponse temporelle associée diverge.

Exemple :

$$H(p) = \frac{K}{\dots (1 + ap + bp^2)^1 \dots}$$

A une entrée impulsion, nous avons montré que ce système ne diverge pas : $s(t)$ est de la forme $A \cos \omega t$

Si l'on impose l'entrée bornée correspondant à la sinusoïdale associée à $(1 + ap + bp^2)$:

$$e(t) = A \cos \omega t \quad ; \quad E(p) = \frac{A}{(1 + ap + bp^2)}$$

$$S(p) = \frac{K}{\dots (1 + ap + bp^2)^2 \dots}$$

Ce terme est de type 4 dans l'étude précédente et diverge...

Le système n'est donc pas stable...

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3.c.iv Bilan

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
$D(p)$	p^α	$\prod (p - p_i)^n$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]$	$\prod [(p - a_j)^2 + b_j^2]^n$ $n \geq 2$
Condition de stabilité à une entrée quelconque	$\alpha = 0$	$p_i < 0$	$a_j < 0$	$a_j < 0$

1.II.3.c.v Conclusions

Pour qu'un système réponde par une sortie bornée à une quelconque entrée bornée, il faut qu'aucun pôle ne soit à partie réelle positive ou nulle.

1.II.3.d Conclusion : condition fondamentale de stabilité

On retiendra la condition fondamentale de stabilité suivante :

Un système linéaire est **stable** si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative

Oui, un système peut avoir un pôle à partie réelle nulle (pole nul ou pole complexe conjugué de multiplicité 1) et ne pas diverger pour une impulsion... mais il existe des entrées bornées qui le font diverger...

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.3.e Stabilité et plan complexe : Plan des pôles

Le plan des pôles est la représentation des pôles d'une fonction de transfert dans le plan complexe. Selon les pôles, on sait ce que sera la réponse temporelle associée.

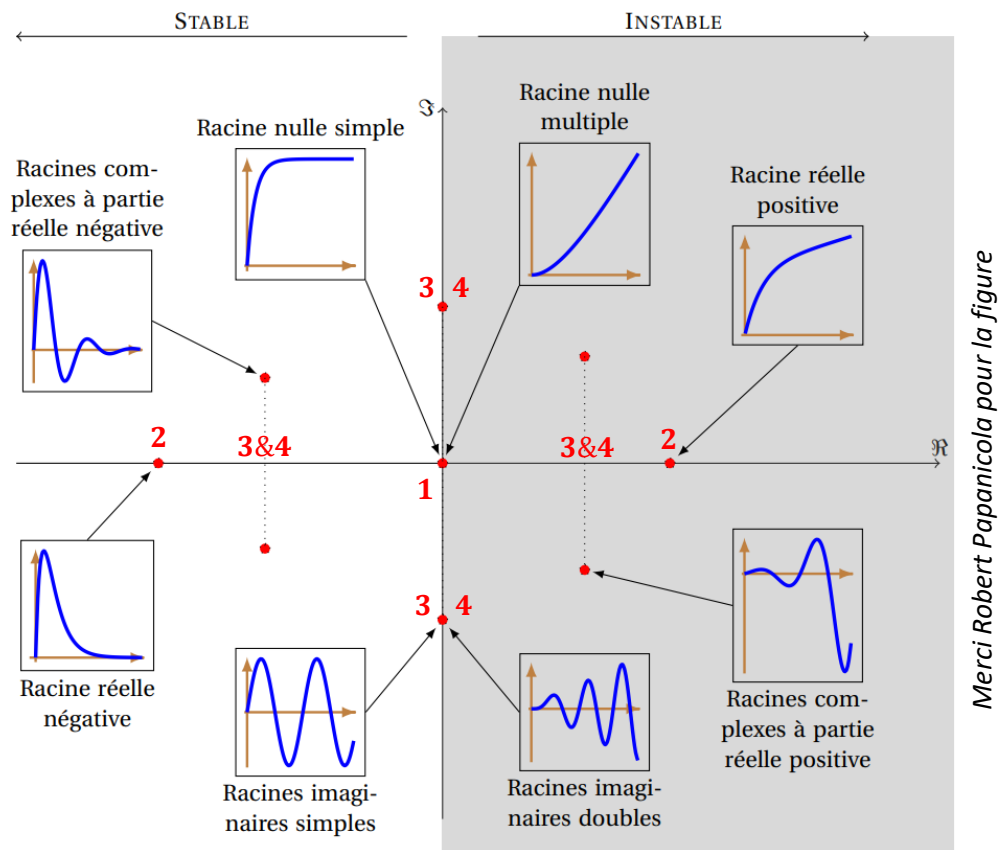
Comme nous l'avons vu, lorsqu'une FT s'écrit sous la forme générale :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{p^i} + \sum \frac{B_i}{(p - p_i)^j} + \sum \frac{C_i p + C_i'}{(p - a_j)^2 + b_j^2} + \sum \frac{D_i p + D_i'}{[(p - a_j)^2 + b_j^2]^{j \geq 2}}$$

La réponse temporelle associée est de la forme :

$$s(t) = K_1 \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \sum K_i \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_i t} + \sum K_j e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases} + \sum K_j t^{n-1} e^{a_j t} \begin{cases} \cos(b_j t) \\ \sin(b_j t) \end{cases}$$

Supposons une impulsion en entrée d'un système dont le plan des pôles est représenté ci-dessous. Selon le type de pôles, on peut prévoir la composante temporelle associée :



Remarque : si on met en entrée un échelon, celui-ci se retrouvera dans le terme de type 1

1.II.3.f Remarque : Critère de Routh

Un critère hors programme nommé « critère de Routh » permet de connaître le nombre de racines à partie réelle strictement négatives d'un polynôme quelconque. Nous ne l'étudierons donc pas puisqu'il est hors programme mais il était au programme avant la dernière réforme, il est donc possible que vous en entendiez parler.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.4 Stabilité des systèmes du premier et du second ordre

1.II.4.a Système du premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Le seul pôle de cette fonction de transfert est :

$$p = -\frac{1}{\tau}$$

Il est à partie réelle strictement négative, le système est donc stable.

⇒ Un système du premier ordre à constante de temps positive est stable

1.II.4.b Système du second ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Les pôles de cette fonction de transfert sont :

$z > 1$	$z = 1$	$z < 1$
$\Delta > 0$ Soient p_1 et p_2 les racines de $D(p)$ $p_i = \omega_0 \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right)$ Comme $z > 1$ $0 < z^2 - 1 < z^2$ $\sqrt{z^2 - 1} < z$ Soit : $\text{sign} \left(-z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right) = \text{sign}(-z)$	$\Delta = 0$ Soit p_0 la racine double de $D(p)$ $p_0 = -z\omega_0$	$\Delta < 0$ $H(p) = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2z\omega_0 p + p^2}$ $D(p) = p^2 + 2z\omega_0 p + \omega_0^2$ $\Delta = 4z^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2$ $\Delta = -4\omega_0^2(1 - z^2) < 0$ $p_i = -z\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - z^2}$

La partie réelle de tous ces pôles est :

$$\text{sign}(R_e(p_0)) = \text{sign}(-z\omega_0) = -1$$

Cette partie réelle est strictement négative, le système est donc stable.

⇒ Un système du deuxième ordre à coefficients positifs est stable

Remarque : On pourra utilement retenir qu'un système du deuxième ordre est stable si ses coefficients caractéristiques z et ω_0 sont de même signe

1.II.4.c Conclusion

Toute FTBF du 1° ou du 2° ordre correspond à un système stable. Soit non divergent, quelle que soit l'entrée. On ne se limite pas aux entrées connues !!! (Échelon, Dirak).

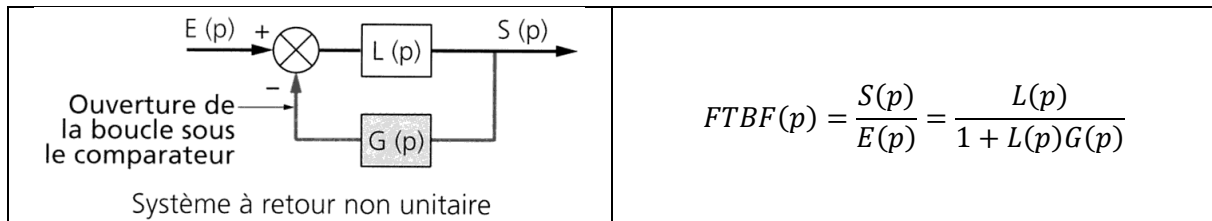
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5 Mise en place du critère du Revers

Le critère du Revers est un critère graphique qui va nous permettre d'étudier la stabilité d'un système bouclé en étudiant le lieu de transfert de sa FTBO.

1.II.5.a Equation caractéristique des systèmes bouclés

Qu'un système bouclé soit à retour unitaire ou non, on établit sa fonction de transfert en fonction de la FTBO.



Ainsi, l'équation caractéristique de la FTBF d'un système bouclé est

$$1 + L(p)G(p) = 1 + FTBO(p) = 0$$

On peut donc dire qu'un système de fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p)$ sera stable en boucle fermée si les racines du polynôme $1 + FTBO(p)$ sont toutes à partie réelle strictement négative.

On remarque que lorsque $FTBO(p)$ se rapproche de la valeur -1 , le dénominateur de la fonction de transfert tend vers 0. Sans le démontrer, nous allons voir que ce point de coordonnées $(|H_{j\omega}|, \varphi_{j\omega}) = (1, -180^\circ)$ ou $(G, \varphi_{j\omega}) = (0, -180^\circ)$ dans le plan de Nyquist est un point critique pour la stabilité des systèmes.

Nous l'appellerons donc « point critique ».

Le critère graphique du revers consiste donc à étudier la position de la courbe de réponse harmonique en boucle ouverte par rapport au point critique pour en déduire des conditions de stabilité.

1.II.5.b Principe d'application du critère du Revers

Le critère du revers s'applique à l'étude de la stabilité des systèmes bouclés dont la FTBO est stable. Il donne ainsi la stabilité d'un système bouclé à partir de la connaissance de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Etude de la FTBO \longrightarrow Stabilité de la FTBF

Nous avons vu que les systèmes du premier ordre et du second ordre sont intrinsèquement stables, sauf cas des seconds ordres à amortissement nul, inexistant dans la réalité. Le critère du Revers est donc parfaitement adapté à ces systèmes.

Le critère du Revers est un critère issu du critère de Nyquist, applicable à des systèmes dont la FTBO présente de pôles à partie réelle strictement positive, notion hors programme.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.c Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist ne sert qu'à l'introduction du critère du revers. Il s'applique quelle que soit la FTBO d'un système.

Un système continu à boucle fermée est stable (pas de pôles à partie réelle positive ou nulle) si le lieu de Nyquist complet de la boucle ouverte parcourue dans le sens des ω croissants fait autour du point critique un nombre de tours dans le sens horaire identique au nombre de pôles instables de sa FTBO.

Remarques :

- Pour en savoir plus, voici quelques mots clés à ce sujet : contour de Bromwich – Théorème de Cauchy
- Par lieu de transfert complet, on entend un tracé pour $\omega \in [-\infty, \infty]$
- « Parcourue dans le sens des ω croissants » veut dire qu'il faut s'imaginer être un bonhomme qui marche le long de la courbe dans le sens des ω croissants et « regarder » si le point est à gauche ou à droite lors de cette promenade

1.II.5.d Critère de Nyquist simplifié

1.II.5.d.i Critère

Le critère de Nyquist simplifié est une conséquence du critère de Nyquist, dans le cas où **la boucle ouverte ne présente pas de pôles à partie réelle strictement positive**.

Remarques :

- Une condition suffisante d'application de ce critère est donc que la BO soit stable
- La BO peut présenter des pôles nuls

La formulation du critère devient la suivante :

Un système continu à boucle fermée est stable si le lieu de Nyquist complet de la BO (sans pôle à partie réelle strictement positive) parcouru dans le sens des ω croissants ne fait pas le tour du point critique dans le sens horaire.

Attention : Le fait que le critère soit fréquentiel ne doit pas conduire à penser que l'instabilité ne peut se produire que si l'entrée du système est sinusoïdale. Tout signal d'entrée (un échelon par exemple) peut être décomposé en séries de Fourier et donc considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux couvrant un large spectre de pulsations.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.d.ii Exemples

Ne traitons que des exemples du critère de Nyquist simplifié ou la FTBO est stable.

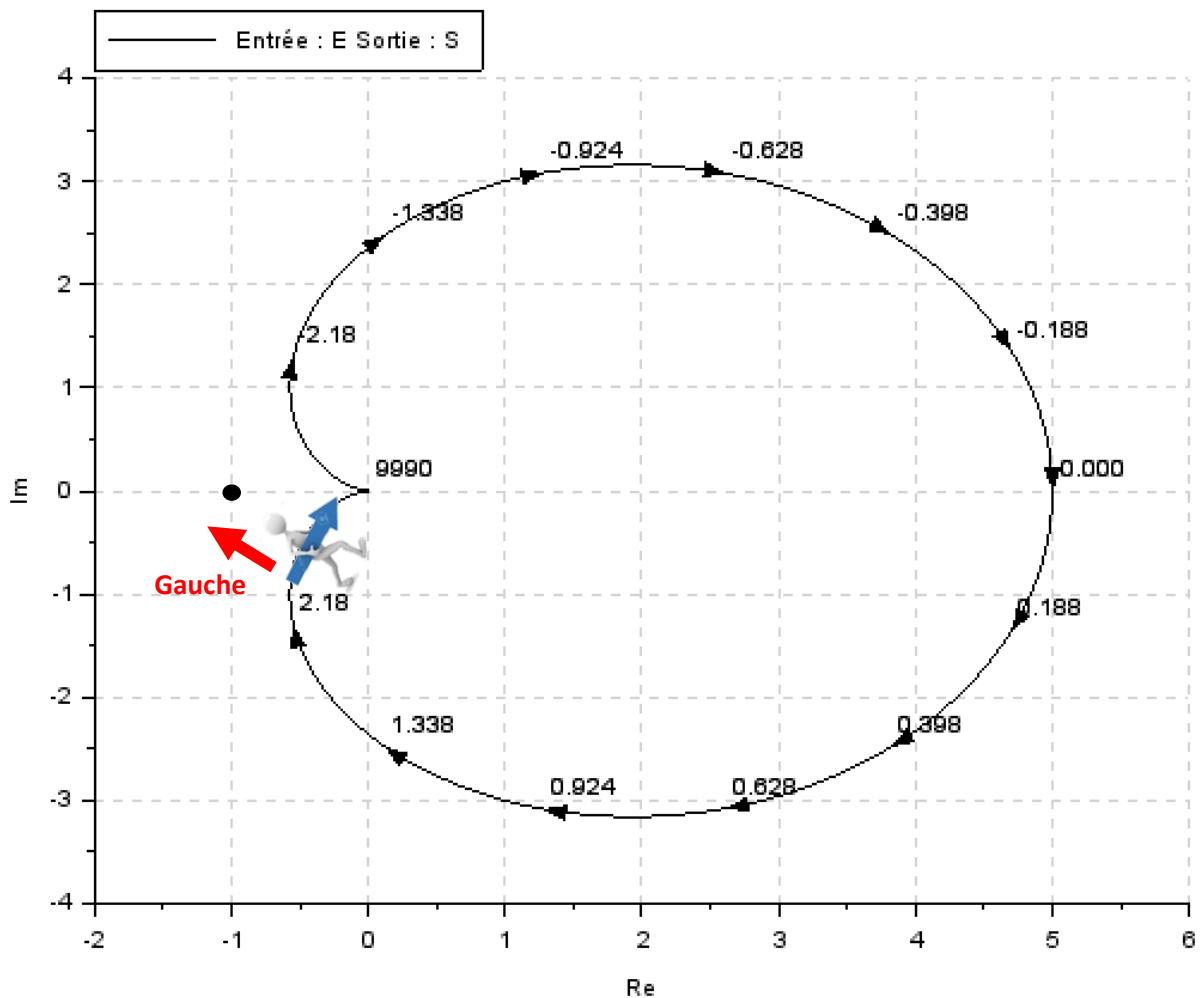
• Système stable

Soit $H(p) = \frac{10}{(p+1)(p+2)}$

Les deux pôles de $H(p)$ valent -1 et -2 , pas de pôles à partie réelle strictement positive.

Voici le lieu de Nyquist complet de $H(p)$ pour $\omega \in [-\infty, \infty]$, c'est-à-dire :

- En abscisses : $\text{Re}(H(j\omega))$
- En ordonnées : $\text{Im}(H(j\omega))$
- Les valeurs indiquées sur le diagramme sont les pulsations ω en différents points



La fonction de transfert $H(p)$ possédant 2 pôles réels négatifs, le système en boucle fermée n'est stable que si le point critique n'est pas entouré en sens horaire, ce qui est le cas ici.

Le système est stable en boucle fermée.

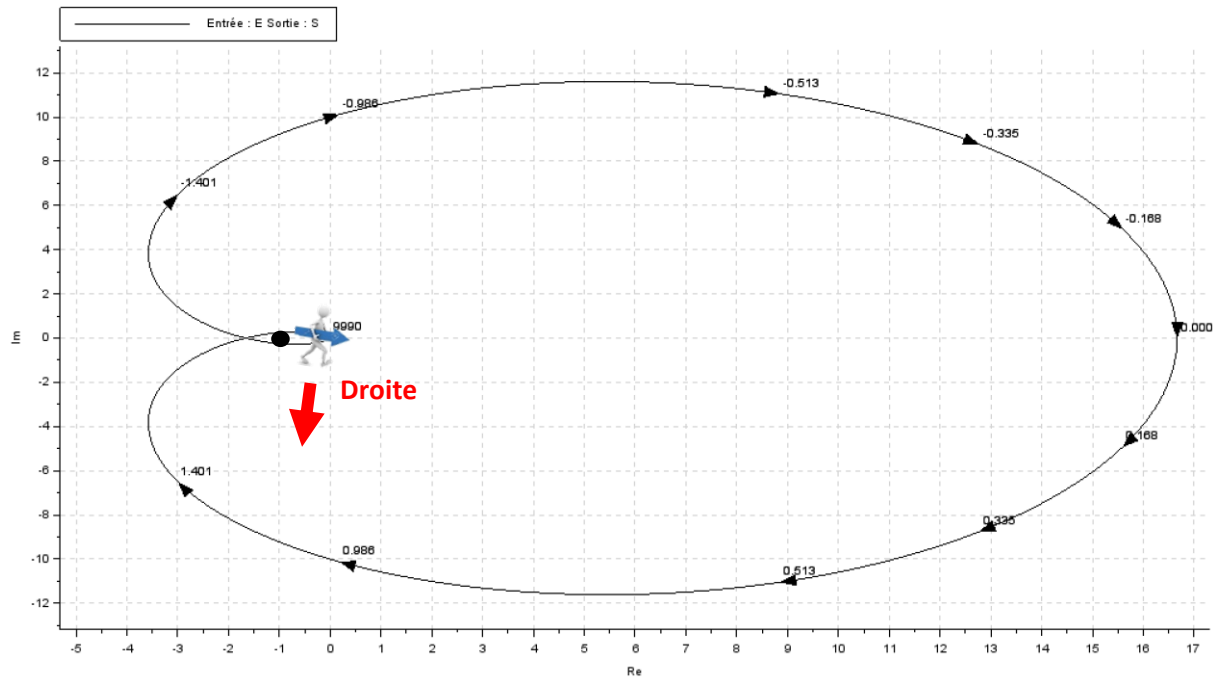
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• Système instable

Soit $H(p) = \frac{100}{(p+1)(p+2)(p+3)}$

Les trois pôles de $H(p)$ valent -1 , -2 et -3 , pas de pôles à partie réelle strictement positive.

Voici le lieu de Nyquist complet de $H(p)$ pour $\omega \in [-\infty, \infty]$:



La fonction de transfert $H(p)$ possédant 3 pôles réels négatifs, le système en boucle fermée n'est stable que si le point critique n'est pas entouré en sens horaire, ce qui n'est le cas ici.

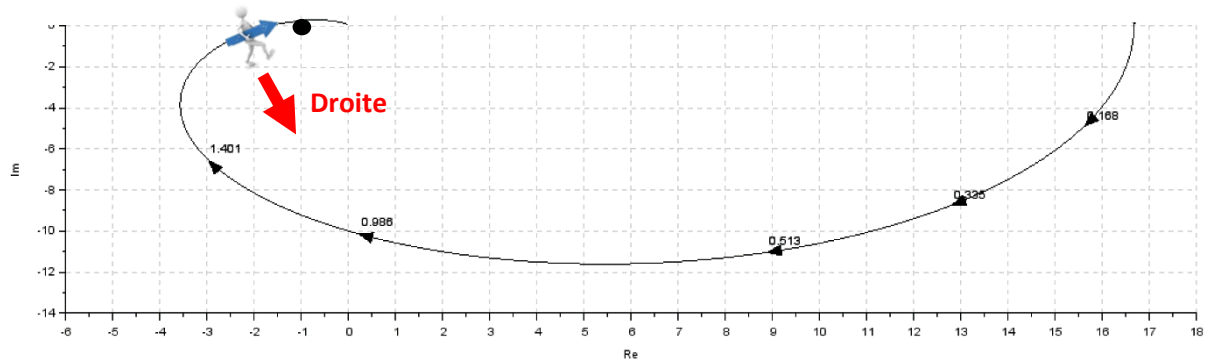
Le système est instable en boucle fermée.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.e Critère du Revers

Le critère du Revers découle directement du critère de Nyquist simplifié et permet d'étudier le passage du lieu de Nyquist sur l'intervalle $\omega \in [0, \infty]$.

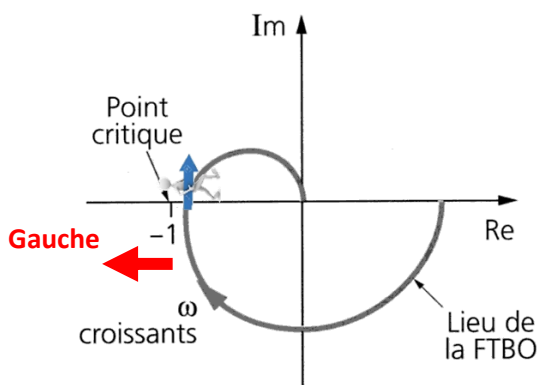
En effet, étudier le lieu de Nyquist complet sur l'intervalle $\omega \in [-\infty, \infty]$ et regarder si le point critique est entouré en sens horaire revient à n'étudier que la moitié de la courbe sur l'intervalle $\omega \in [0, \infty]$ et à regarder si le point critique est laissé à gauche de la courbe lorsqu'on la parcourt dans le sens des pulsations ω croissantes.



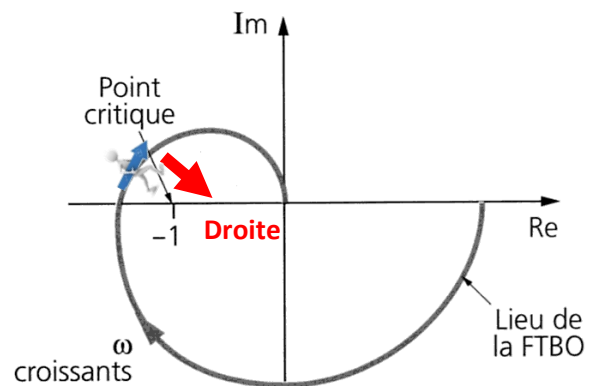
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.e.i Dans Nyquist

En supposant la FTBO sans pôle à partie réelle strictement positive, un système asservi linéaire est stable en BF si en décrivant le lieu de transfert en BO dans le sens des pulsations ω croissantes dans le plan de Nyquist, on laisse le point critique à gauche du lieu. Dans le cas contraire, il est instable.

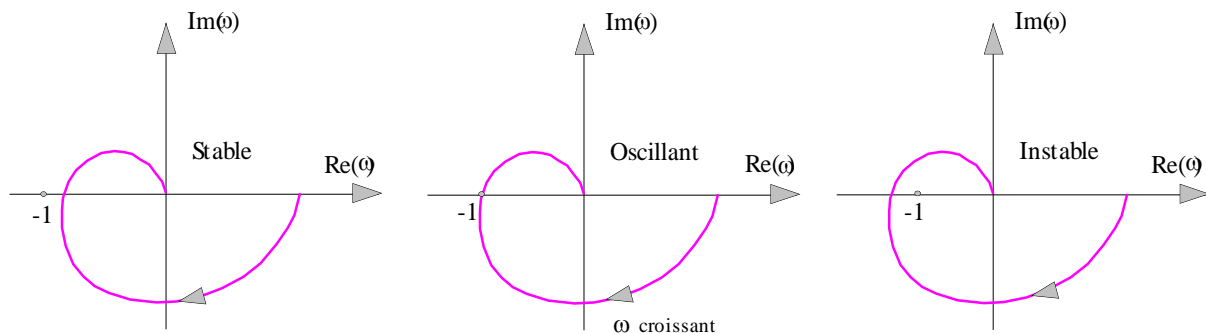


Le point critique est à gauche
Le système est **stable**
en boucle fermée



Le point critique est à droite
Le système est **instable**
en boucle fermée

Stabilité graphique dans le plan de Nyquist

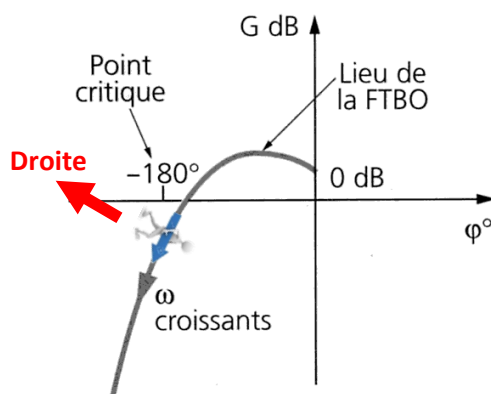


NYQUIST – PC à GAUCHE

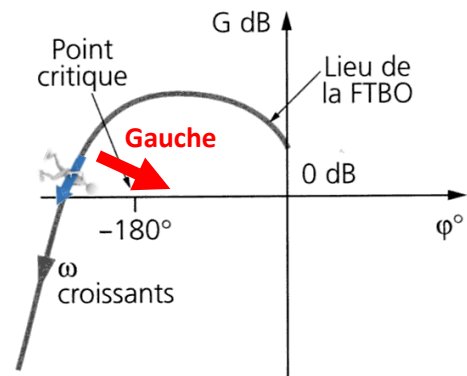
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.e.ii Dans black

En supposant la FTBO sans pôle à partie réelle strictement positive, un système est stable en BF si en décrivant le lieu de transfert en BO dans le sens des pulsations ω croissantes dans le plan de Black, on laisse le point critique à droite du lieu. Dans le cas contraire, il est instable.

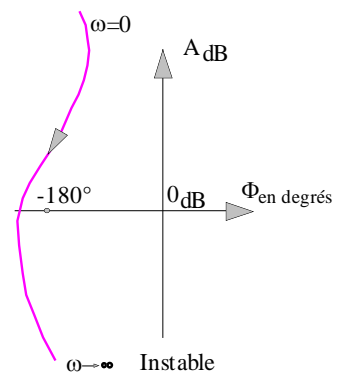
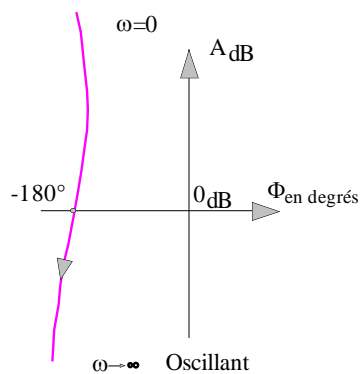
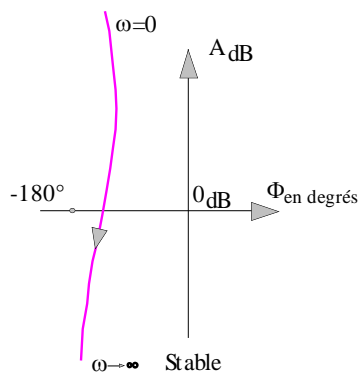


Le point critique est à **droite**
Le système est **stable**
en boucle fermée



Le point critique est à **gauche**
Le système est **instable**
en boucle fermée

Stabilité graphique dans le plan de Black



BLACK – PC à DROITE

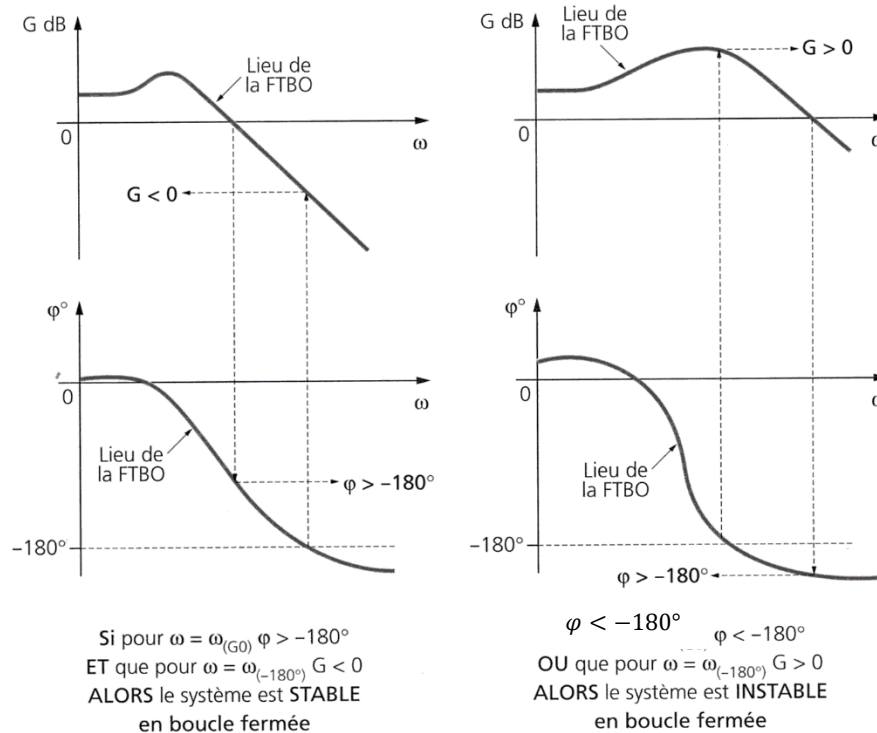
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.e.iii Dans Bode

• **Enoncé**

En supposant la FTBO sans pôle à partie réelle strictement positive, un système est stable en BF si en décrivant le lieu de transfert en BO dans le diagramme de Bode, on respecte les conditions :

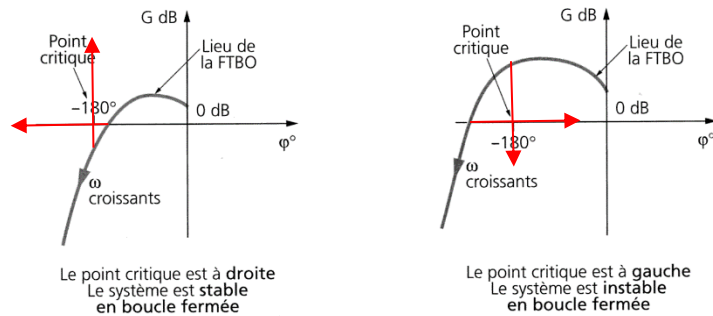
- à la pulsation de coupure ω_{c_0} pour laquelle $G = 0 \text{ dB}$, le déphasage est supérieur à -180°
- à la pulsation ω_{-180° pour laquelle le déphasage est égal à -180° , le gain est inférieur à 0 dB



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• Remarques

- Le point critique n'existe pas en tant que point dans ce diagramme malheureusement, d'où la nécessité de vérifier le critère dans les deux diagrammes. Reprenons le diagramme de Black précédent qui correspond à peu près à ces fonctions pour comprendre pourquoi on vérifie ces deux critères dans Bode. Les flèches rouges montrent où on doit « voir » le point critique dans Black quand le gain est nul et quand la phase vaut -180° :



Stabilité graphique dans le plan de Black

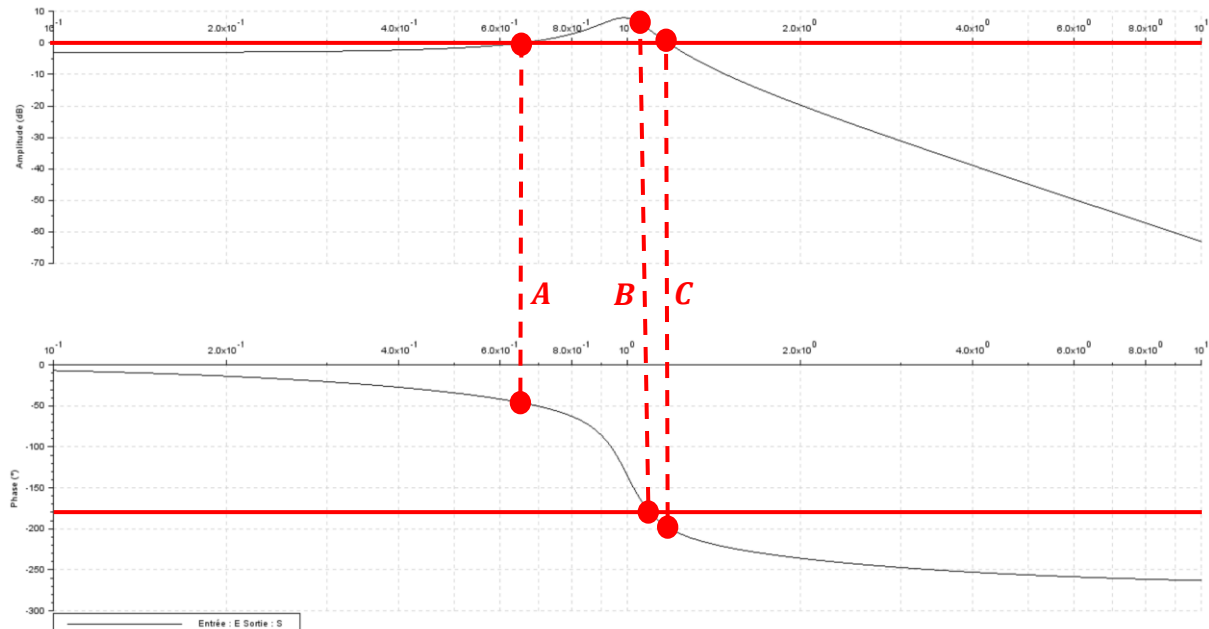
- Lorsque courbes de gain et phase sont monotone décroissante sans la zone entre ω_{c_0} et ω_{-180} , une seule des conditions peut être vérifiée, l'autre étant automatiquement aussi vérifiée
- Si $K_{BO} < 1$ et si le gain ne remonte pas, ω_{c_0} n'existe pas et on ne pourra pas vérifier le critère de phase. De même si la phase ne descend pas en dessous de -180° , ω_{-180} n'existe pas, on ne pourra pas vérifier le critère de gain. Exemples : Pour un premier ordre, la condition en phase ne peut être vérifiée, et si $K_{BO} < 1$, la condition en gain non plus...
 - Si les fonctions sont monotones décroissantes, on pourra simplement vérifier le second critère
 - Sinon, on se rapportera à Black par exemple (cf Black premier ordre)
- Lorsque vous avez le moindre doute, vous pourrez vous reporter au critère appliqué dans Nyquist, ou encore plus simplement, dans Black puisque vous avez directement le gain et la phase de Bode (cf exemple en page suivante).

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

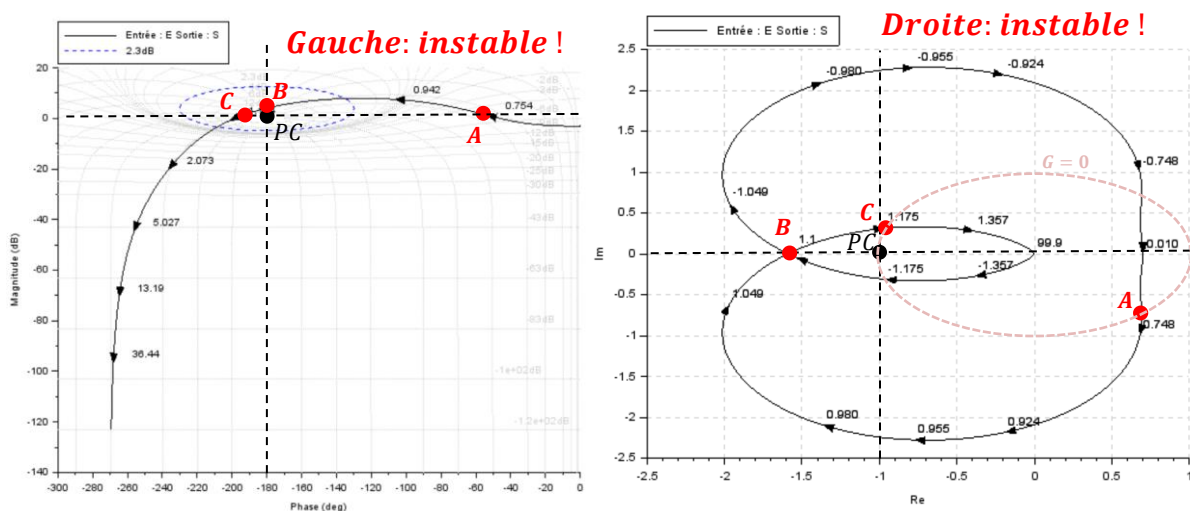
• Exemple de cas particulier dans Bode

Soit la fonction de transfert en BO suivante : $H(p) = \frac{K}{(1+Tp)\left(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$; $\begin{cases} K = 0,7 \\ T = 1 \\ z = 0,1 \\ \omega_0 = 1 \end{cases}$. Voici son

diagramme de Bode obtenu avec SCILAB-XCOS :



On remarque qu'il existe deux points (A et C) où $G = 0$, on ne sait lequel étudier pour appliquer le critère du revers ($\varphi > -180^\circ$). Au point où $\varphi > -180^\circ$, $G > 0$. Ce critère n'est donc pas respecté. Dans ce genre de cas particulier, reportons-nous au diagramme de Black & Nyquist (complet) :



On retiendra que dans un cas particulier simple comme celui présenté ci-dessus, Black permet de répondre. Dans des cas plus complexes (boucles dans black par exemple), c'est le critère de Nyquist sur le lieu complet de la qu'il faudra appliquer ([ex](#)). Dans le cas ci-dessus, il ne faudrait pas faire le tour du PC en sens horaire (où ne tracer qu'une moitié pour $\omega > 0$ et regarder si le PC est laissé à gauche...).

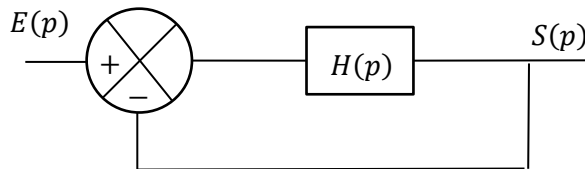
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.f Applications

1.II.5.f.i Préliminaires

Nous avons montré précédemment que tout système du premier et du second ordre est stable.

Etudions à titre d'exemples la stabilité de systèmes bouclés à retour unitaire dont la FTBO est du premier ou du second ordre.



Nous pouvons appliquer le critère du Revers à des systèmes bouclés dont la FTBO $H(p)$ est du 1° ou du 2° ordre puisque la FTBO est stable.

1.II.5.f.ii Système du premier ordre bouclé à retour unitaire

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

• Calcul de la FTBF

On peut étudier les pôles de la FTBF pour conclure sur la stabilité :

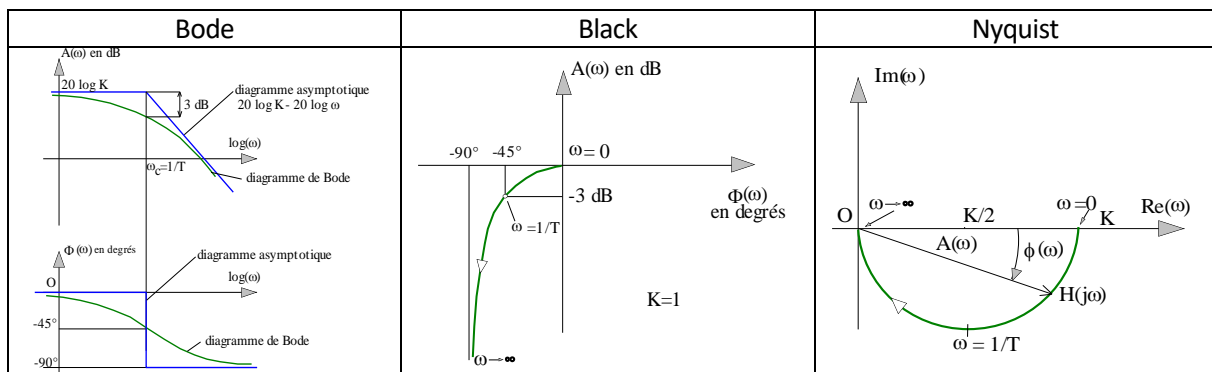
$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \tau p}}{1 + \frac{K}{1 + \tau p}} = \frac{K}{1 + K + \tau p} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{\tau}{1 + K} p}$$

La FTBF d'un système bouclé du premier ordre à retour unitaire est du premier ordre, nous avons vu précédemment que ses pôles sont à partie réelle strictement négative, le système est donc stable.

1° ordre en BF – Stable en BF grâce aux pôles

• Critère du Revers (FTBO)

Application du critère du Revers : on trace le lieu de la FTBO



L'application du critère du Revers dans les 3 diagrammes montre **qu'un système bouclé à retour unitaire du 1° ordre est stable.**

1° ordre en BO – Stable en BF grâce au Revers

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.f.iii Système du second ordre bouclé à retour unitaire

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

• Calcul de la FTBF

On peut étudier les pôles de la *FTBF* pour conclure sur la stabilité :

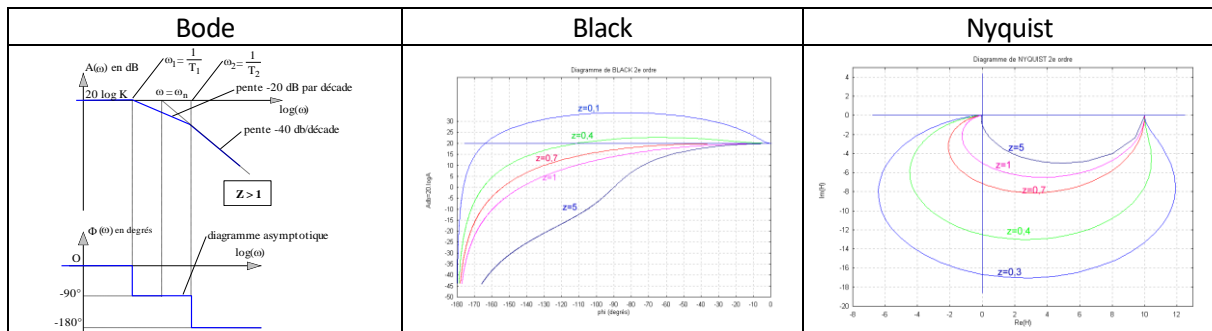
$$\begin{aligned} FTBF(p) &= \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1 + \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{1 + K + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \\ &= \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{2z}{(1 + K)\omega_0} p + \frac{p^2}{(1 + K)\omega_0^2}} \end{aligned}$$

La *FTBF* d'un système bouclé du second ordre à retour unitaire est du second ordre, nous avons vu précédemment que ses pôles sont à partie réelle strictement négative, le système est donc stable.

2° ordre en BF – Stable en BF grâce aux pôles

• Critère du Revers (FTBO)

Application du critère du Revers : on trace le lieu de la FTBO



L'application du critère du Revers dans les 3 diagrammes montre **qu'un système bouclé à retour unitaire du 2° ordre est stable.**

2° ordre en BO – Stable en BF grâce au Revers

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.f.iv *Conclusions*

Pour qu'un système bouclé à retour unitaire puisse être instable, il faut que sa fonction de transfert en boucle ouverte soit au moins du troisième ordre.

Cependant, l'étude précédente montre qu'un système dont la FTBO est du second ordre passe plus près du point critique qu'un système dont la FTBO est du premier ordre. On introduit alors la notion de « marge de stabilité », c'est-à-dire de distance de sécurité par rapport à un fonctionnement instable, souvent très néfaste aux systèmes. De plus, les systèmes du premier et du second ordre que nous étudions ne sont qu'une modélisation de systèmes réels dont l'ordre est souvent supérieur.

1.II.5.g Marges de stabilité

1.II.5.g.i *Définitions*

• Marge de gain

On appelle « marge de gain », exprimée en décibel, la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique mesurée parallèlement à l'axe du gain.

Elle correspond à l'opposé du gain lorsque la phase vaut -180° :

$$\Delta G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|}$$

Si la phase reste au-dessus de -180° , on dit que la marge de gain est infinie (exemples d'un premier ordre ou d'un second ordre).

• Marge de phase

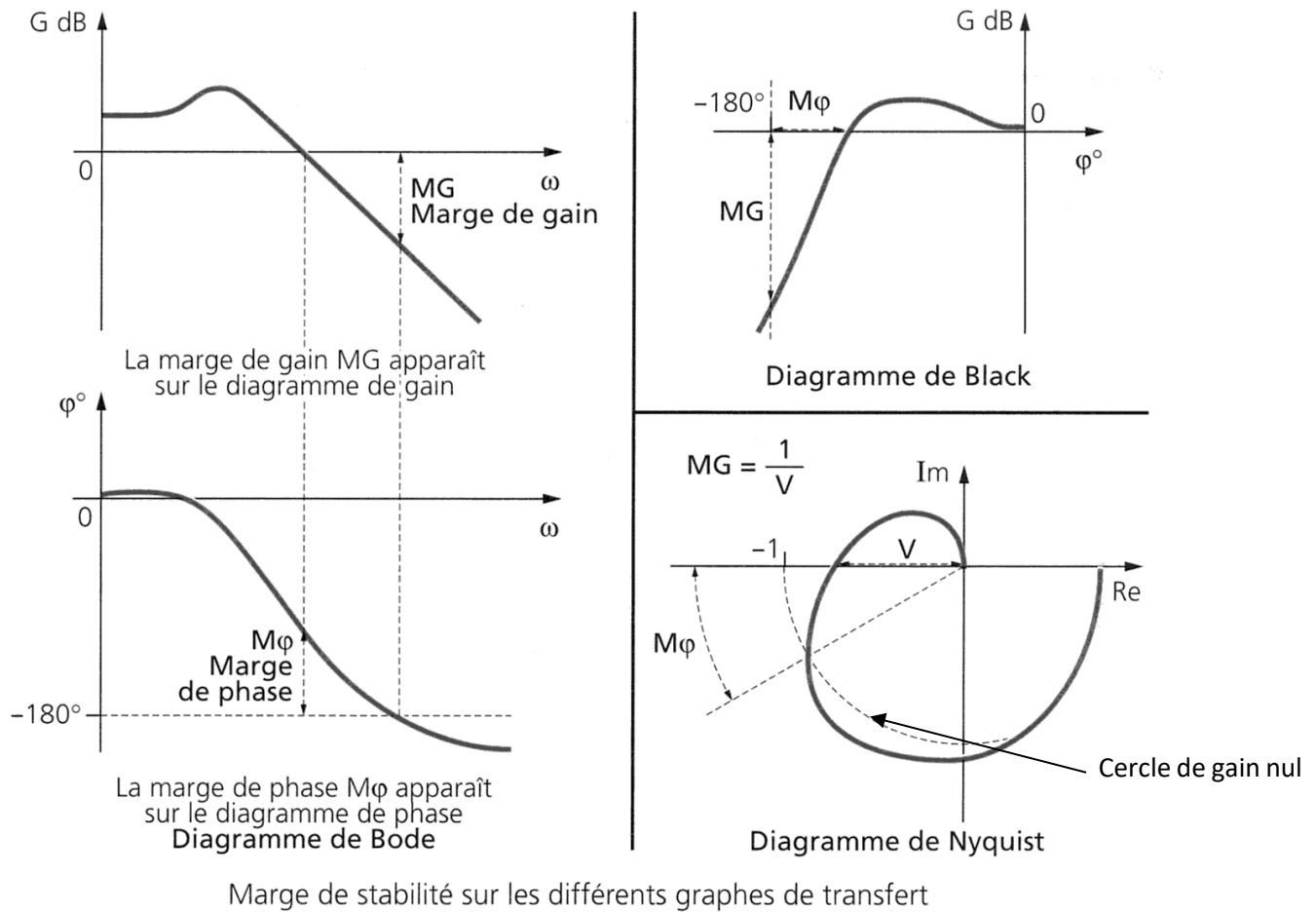
On appelle « marge de phase », exprimée en degré, la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique mesurée parallèlement à l'axe de la phase.

Elle correspond à la différence entre la phase lorsque le gain est nul et la valeur $-\pi$:

$$\Delta \varphi = \arg H(j\omega_{c_0}) - (-\pi) = \pi + \arg H(j\omega_{c_0})$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.g.ii Calcul graphique des marges



Explication de la marge de gain associée au module $\frac{1}{V}$:

$$\Delta G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|} = 20 \log \frac{1}{V}$$

Remarque : On remarque très clairement que si le gain augmente, les marges de stabilité diminuent.

1.II.5.g.iii Calcul analytique des marges

Que ce soit pour le calcul de la marge de gain ou la marge de phase, le principe est le même :

- Déterminer la pulsation ω_{-180° avec la phase puis calculer le gain $G_{\omega_{-180^\circ}}$
- Déterminer la pulsation ω_{c_0} avec le gain puis calculer la phase $\phi_{\omega_{c_0}}$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• Marge de gain

Lorsque la phase vaut -180° , la marge de gain est l'opposé du gain.

$$\Delta G = -20 \log |H(j\omega_{-180^\circ})| = 20 \log \frac{1}{|H(j\omega_{-180^\circ})|}$$

Il faut donc déterminer ω_{-180° :

$$\arg H(j\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$$

Il est souvent plus aisé de calculer la marge de phase que de résoudre cette équation, qui n'a pas forcément de solution (2° ordre par exemple).

• Marge de phase

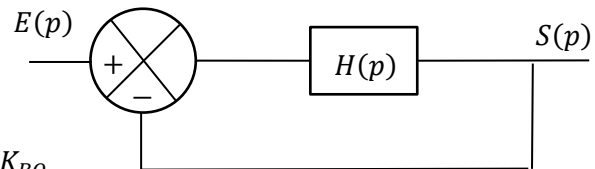
Lorsque le gain est nul, soit à la pulsation de coupure à 0 dB ω_{c0} , la marge de phase est la distance entre la phase et $-\pi$:

$$\Delta\varphi = \arg H(j\omega_{c0}) - (-\pi) = \pi + \arg H(j\omega_{c0})$$

Il faut donc déterminer ω_{c0} .

Que ce soit un 1° ordre ou un 2° ordres, pour qu'il existe une pulsation de coupure à 0 dB, il est nécessaire que K_{BO} soit supérieur à 1 car l'asymptote horizontale aux faibles pulsations vaut $20 \log K_{BO}$.

Exemple d'un premier ordre bouclé : $K_{BO} > 1$



$$H(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}$$

$$|H(j\omega_{c0})| = \frac{K_{BO}}{\sqrt{1 + \tau_{BO}^2 \omega_{c0}^2}} = 1 \quad ; \quad \omega_{0BO} = \frac{1}{\tau_{BO}} \quad ; \quad \omega_{c0} > 0 \quad ; \quad \omega_{0BO} > 0$$

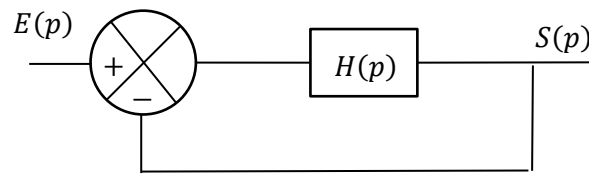
$$|H(j\omega_{c0})| = 1 \Leftrightarrow K_{BO}^2 = 1 + \left(\frac{\omega_{c0}}{\omega_{0BO}}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_{c0}}{\omega_{0BO}}\right)^2 = K_{BO}^2 - 1 \Leftrightarrow \omega_{c0} = \omega_{0BO} \sqrt{K_{BO}^2 - 1}$$

$$\boxed{\omega_{c0} = \omega_{0BO} \sqrt{K_{BO}^2 - 1}}$$

$$\Delta\varphi = \pi + \arg H(j\omega_{c0}) = \pi - \tan^{-1}(\tau_{BO} \omega_{c0}) = \pi - \tan^{-1}\left(\sqrt{K_{BO}^2 - 1}\right)$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

Exemple d'un second ordre bouclé de type 1° ordre intégré bouclé : $K_{BO} > 1$



$$H(p) = \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau_{BO}p)}$$

$$|H(j\omega_{c_0})| = \frac{K_{BO}}{\omega_{c_0} \sqrt{1 + \tau_{BO}^2 \omega_{c_0}^2}} = 1 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\tau_{BO}} \quad ; \quad \omega_{c_0} > 0 \quad ; \quad \omega_{0BO} > 0$$

$$|H(j\omega_{c_0})| = 1 \Leftrightarrow \frac{\omega_{c_0}^4}{\omega_{0BO}^2} + \omega_{c_0}^2 - K_{BO}^2 = 0$$

On pose : $X = \omega_{c_0}^2$

$$\frac{1}{\omega_{0BO}^2} X^2 + X - K_{BO}^2 = 0 \quad ; \quad \Delta = 1 + 4 \frac{K_{BO}^2}{\omega_{0BO}^2} > 0$$

On cherche la seule solution positive :

$$X^+ = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{K_{BO}^2}{\omega_{0BO}^2}}}{\frac{2}{\omega_{0BO}^2}} = \frac{\omega_{0BO}^2}{2} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{K_{BO}^2}{\omega_{0BO}^2}} - 1 \right)$$

Soit :

$$\omega_{c_0} = \sqrt{X^+} = \omega_{0BO} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4 \frac{K_{BO}^2}{\omega_{0BO}^2}} - 1}{2}}$$

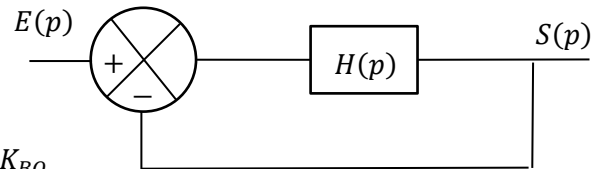
$$\omega_{c_0} = \omega_{0BO} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (2\tau_{BO}K_{BO})^2} - 1}{2}}$$

$$\Delta\varphi = \pi + \arg H(j\omega_{c_0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\tau_{BO}\omega_{c_0}) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 + (2\tau_{BO}K_{BO})^2 - 1}{2}} \right)$$

Remarque : il serait dommage de ne pas profiter de la factorisation du dénominateur pour le calcul de la phase !

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

Exemple d'un second ordre bouclé : $K_{BO} > 1$



$$H(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \frac{2z_{BO}}{\omega_{0BO}}p + \frac{p^2}{\omega_{0BO}^2}}$$

$$FTBF(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{2z}{(1 + K_{BO})\omega_{0BO}}p + \frac{p^2}{(1 + K_{BO})\omega_{0BO}^2}} \quad ; \quad z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$$

On n'indiquera pas les pulsation avec « BO ».

$$|H(j\omega_{c_0})| = \frac{K_{BO}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_{0BO}^2}\right)^2 + 4 \frac{z_{BO}^2 \omega_{c_0}^2}{\omega_{0BO}^2}}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_{0BO}^2}\right)^2 + 2(2z_{BO}^2 - 1) \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_{0BO}^2} + 1 - K_{BO}^2 = 0$$

$$X = \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_{0BO}^2} > 0$$

$$X^2 + 2(2z_{BO}^2 - 1)X + 1 - K_{BO}^2 = 0$$

Comme $K_{BO} > 1$

$$\Delta = 4(2z_{BO}^2 - 1)^2 + 4(K_{BO}^2 - 1) > 0$$

$$X = \frac{(1 - 2z_{BO}^2)2 + \sqrt{4(2z_{BO}^2 - 1)^2 + 4(K_{BO}^2 - 1)}}{2}$$

$$X = (1 - 2z_{BO}^2) + \sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + (K_{BO}^2 - 1)}$$

Comme $\omega_{c_0} > 0$ (pulsation réelle)

$$\omega_{c_0} = \omega_{0BO} \sqrt{(1 - 2z_{BO}^2) + \sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + (K_{BO}^2 - 1)}}$$

Remarques :

- Si $K_{BO} < 1$, il n'est pas exclu de trouver des solutions ω_{c_0} s'il y a résonance. Mais je ne développerai pas ici.
- Cette formule ne s'applique pas à un système du 2° ordre du type 1° ordre intégré !!! Cf paragraphe précédent

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

Reprenons les formules de 1^o année pour mettre un lien entre la marge de phase de la FTBO et le coefficient d'amortissement z_{BF} :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg H(j\omega_{c_0}) = \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1 - \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_{0BO}^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_{0BO}^2}\right)^2 + 4z_{BO}^2 \left(\frac{\omega_{c_0}}{\omega_{0BO}}\right)^2}} \right)$$

On pourrait s'arrêter là, mais il me semble intéressant de vous montrer le lien entre marge de phase d'une BO et comportement temporel d'une BF. En effet, tant que la marge de phase est positive, le système est stable... Alors pourquoi assurer une marge suffisante dans tous les systèmes ?

Comme on a la relation $z_{BO} = z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}}$, injectons tout d'abord cette formule dans ω_{c_0} :

$$\omega_{c_0} = \omega_{0BO} \sqrt{\sqrt{\left(2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2 - 1\right)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + \left(1 - 2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2\right)}$$

On a donc : $\frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_{0BO}^2} = \sqrt{\left(2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2 - 1\right)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + \left(1 - 2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2\right)$

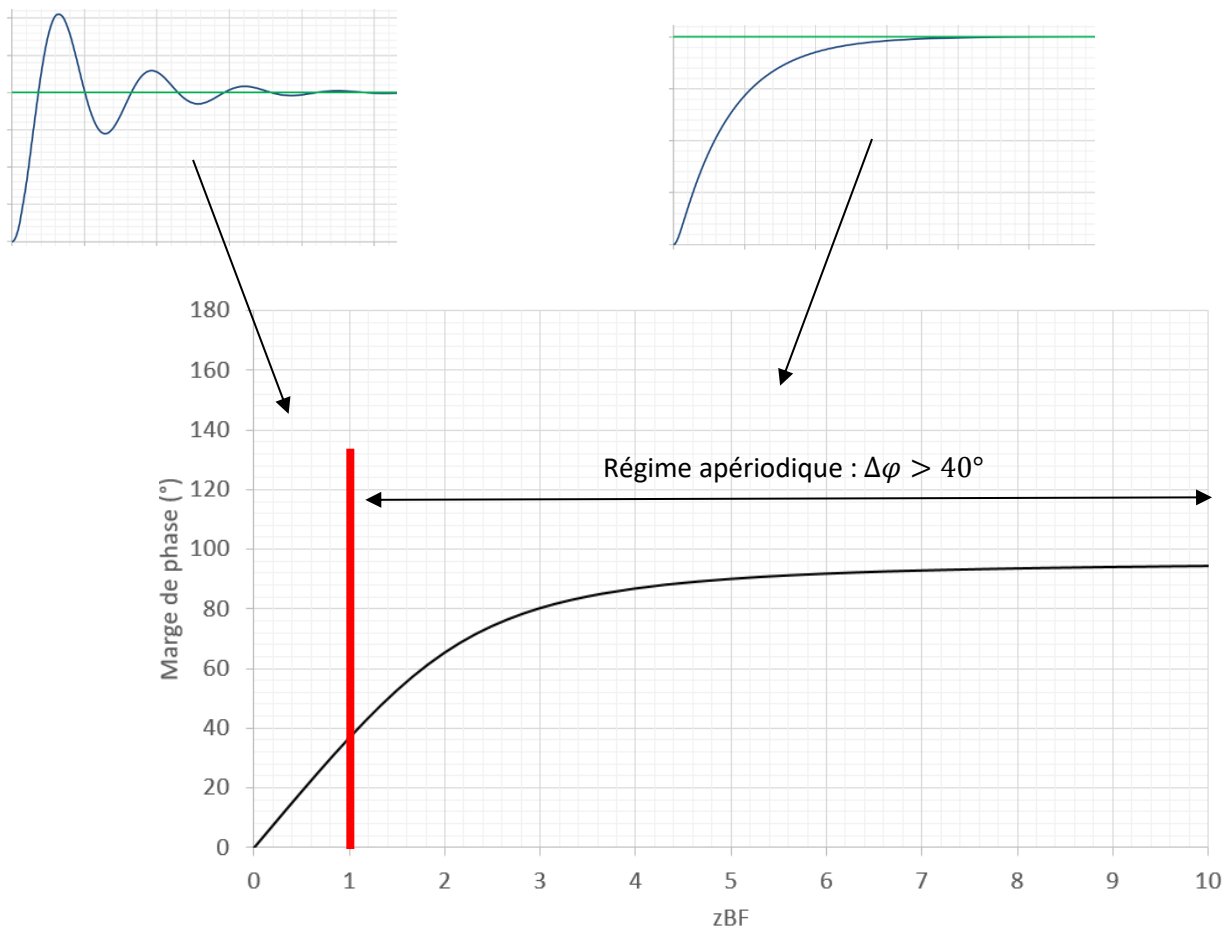
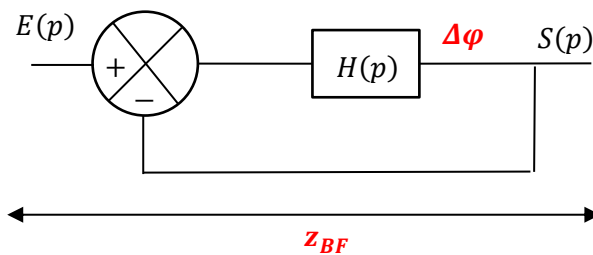
Puis injectons dans la formule de $\Delta\varphi$ la formule de $\frac{\omega_{c_0}^2}{\omega_{0BO}^2}$ et celle de z_{BO} :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg H(j\omega_{c_0}) = \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1 - \left(\sqrt{\left(2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2 - 1\right)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + \left(1 - 2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2\right) \right)}{\left(\left(\sqrt{\left(2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2 - 1\right)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + \left(1 - 2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2\right) \right)^2 + 4z_{BF}^2(1 + K_{BO}) \left(\sqrt{\left(2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2 - 1\right)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + \left(1 - 2(z_{BF}\sqrt{1 + K_{BO}})^2\right) \right) \right)} \right)$$

Certes, cette formule est complexe, mais on voit que si l'on fixe une valeur de K_{BO} , on peut tracer $\Delta\varphi$ de la BO en fonction de z_{BF} , qui pour un second ordre nous renseigne sur l'allure de la réponse temporelle à un échelon.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

Voici la courbe de la marge de phase en fonction de z_{BF} pour $K_{BO} = 10$ par exemple :



On remarque que plus la marge de phase diminue, plus le coefficient d'amortissement z diminue. Le comportement oscillatoire est donc directement lié à la marge de phase du système.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

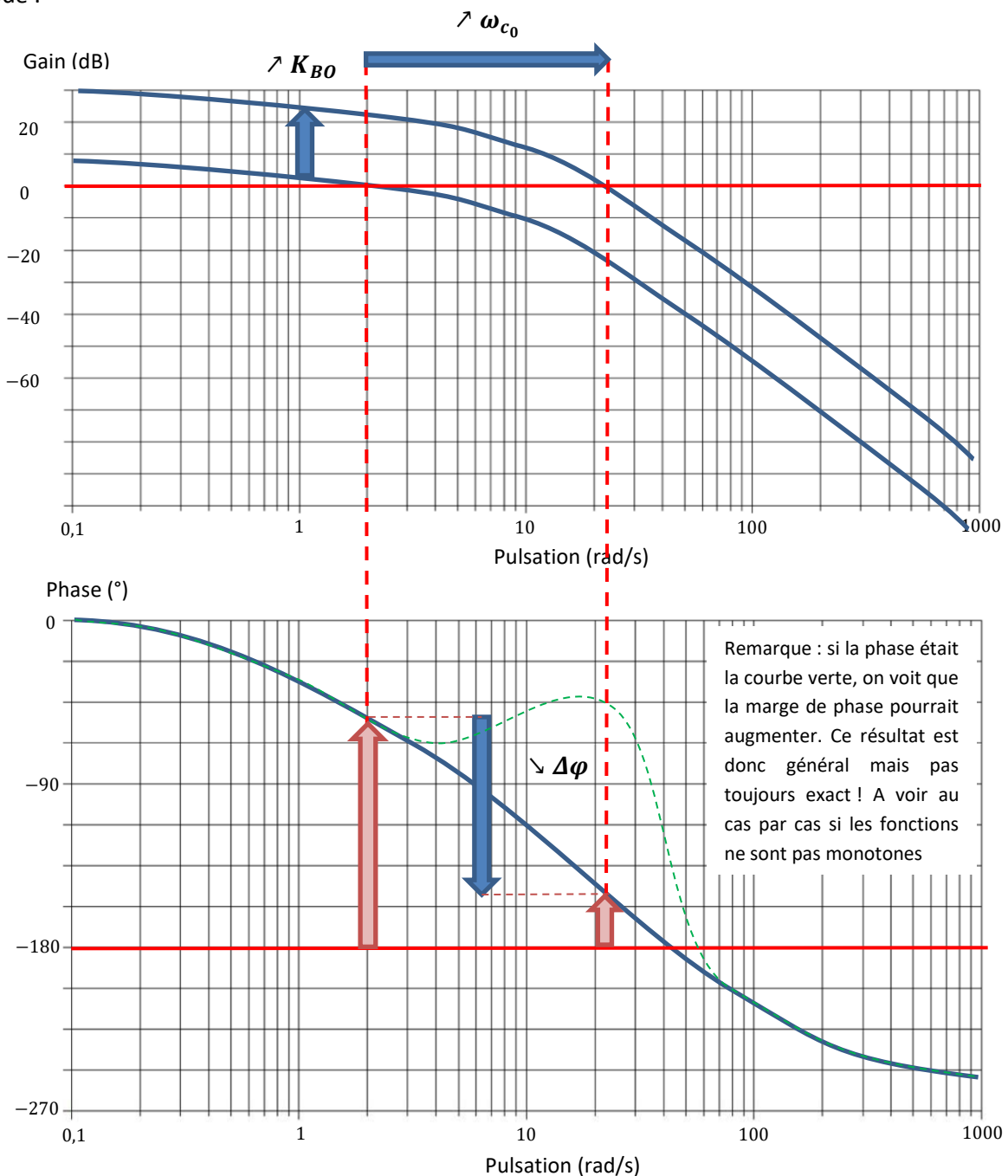
1.II.5.g.iv Valeurs générales

On retient, en général, pour des raisons expérimentales, les valeurs suivantes :

- Marge de gain minimale : 10 à 15 dB
- Marge de phase minimale : 45° à 60°

1.II.5.g.v Influence de K_{BO} sur la stabilité

Augmenter K_{BO} dans un système revient à remonter la courbe de gain sans influencer la phase. Dans les systèmes causaux (gain décroissant), augmenter K_{BO} augmente ω_{c0} , diminue donc $\varphi_{\omega_{c0}}$, diminue $\Delta\varphi$ et diminue donc la stabilité. Ce résultat est très simple à retrouver en traçant un diagramme de Bode :



Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.5.g.vi Remarque : 1° ordre intégré

Soit la FTBO suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

C'est un premier ordre intégré, c'est-à-dire un système du second ordre, mais non classique ! On peut calculer la BF et se rendre compte que c'est un second ordre classique en BF :

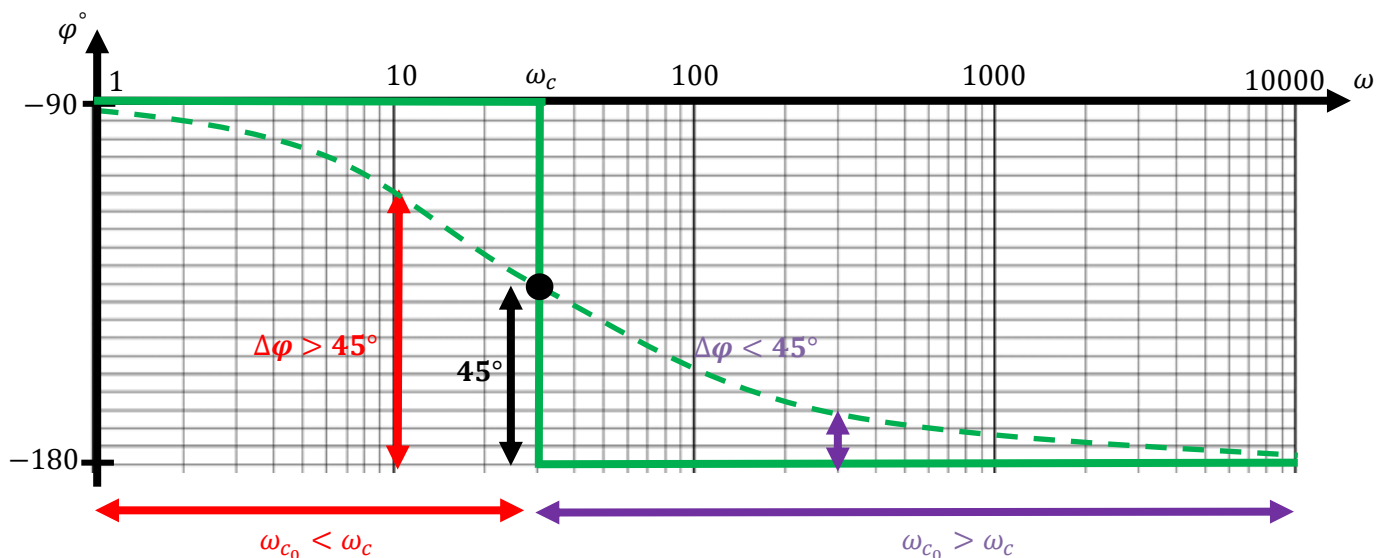
$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{K}{p(1 + \tau p)}}{1 + \frac{K}{p(1 + \tau p)}} = \frac{K}{p(1 + \tau p) + K} = \frac{K}{K + p + \tau p^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K}p + \frac{\tau}{K}p^2}$$

Mais si j'aborde ce cas particulier, c'est :

- Qu'il est souvent rencontré
- Qu'il faut remarquer que la marge de phase, souvent voulue à 45°, est facilement identifiable

Une marge de phase de 45°, cela correspond à une phase égale à -135° = -90° - 45°. L'intégrateur enlève 90° à la phase. Le premier ordre a une phase de -45° en sa pulsation de coupure à -3db $\omega_c = \frac{1}{T}$. Ainsi, on distingue 3 cas :

- $\omega_{c_0} < \omega_c$: La marge de phase est supérieure à 45°
- $\omega_{c_0} = \omega_c$: La marge de phase vaut 45°
- $\omega_{c_0} > \omega_c$: La marge de phase est inférieure à 45°



Attention : Si on vous demande de régler un correcteur proportionnel (vous comprendrez mieux après le chapitre sur la correction) pour obtenir une marge de phase de 45°, bien penser que :

$$G_{\omega_c}^{réel} = G_{\omega_c}^{asympt} - 3$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.II.6 Conclusions sur la stabilité

Pour étudier la stabilité d'un système asservi, il est possible

- Soit de déterminer sa $FTBF$ et de déterminer ses pôles qui doivent être à partie réelle strictement négative
- Soit d'étudier sa $FTBO$ (si le système est bouclé) avec le critère du revers tant qu'elle n'a pas de pôles à partie réelle strictement positive. On pourra alors déterminer, si elles existent, marge de phase et marge de gain, c'est-à-dire la distance du lieu de transfert de la $FTBO$ au point critique

Pour un système stable, plus le tracé est proche du point critique, plus les marges de stabilité diminuent.

Une diminution du gain de la FTBO diminue la pulsation de coupure à 0dB, augmente les marges et augmente donc la stabilité.

1.II.7 Remarque TVF

L'application du théorème de la valeur finale nécessite d'étudier la stabilité du système au préalable.

Si un système est instable, ne pas parler de valeur finale. Exemple :

$$H(p) = \frac{1}{p-a} \text{ avec } a > 0 ; \quad E(p) = \frac{1}{p} ; \quad S(p) = \frac{1}{p} \frac{1}{p-a} = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-a} \right)$$

Racine réelle positive $a \Rightarrow$ système instable

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} -\frac{1}{a} \left(1 - \frac{p}{p-a} \right) = \lim_{p \rightarrow 0^+} -\frac{1}{a} \left(\frac{p-a-p}{p-a} \right) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} \left(\frac{a}{p-a} \right) = -\frac{1}{a}$$

Or :

$$s(t) = -\frac{1}{a} (1 - e^{at}) u(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{a} (1 - e^{at}) \right] = +\infty$$

De même, en cas de réponse harmonique (limite de stabilité, système oscillant), le TVF donne un résultat faux

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III. Précision

1.III.1 Introduction

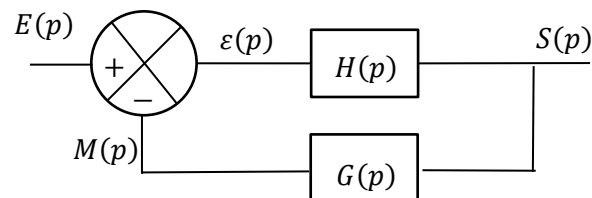
1.III.1.a Systèmes stables

Avant toute chose, rappelons que tout ce paragraphe est vrai dans le cas de systèmes stables. Si un système est instable, on ne peut parler d'écart statique et de trainage !

Qui dit système stable dit classe forcément nulle pour sa fonction de transfert complète (pas de pôle nul).

1.III.1.b Mise en place du problème

Soit le système décrit par le schéma bloc suivant :



Sa *FTBO* s'écrit :

$$FTBO(p) = H(p)G(p)$$

Considérons une forme générale de la *FTBO* définie par :

$$FTBO(p) = K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}$$

Avec $\alpha \geq 0$ et $\alpha + m > n$

Définitions :

- α représente la classe de la FTBO, c'est-à-dire le nombre d'intégrations $\frac{1}{p}$ présentes dans la boucle ouverte.
- K_{BO} est le gain statique de la FTBO
- n représente le degré du numérateur
- $\alpha + m$ est l'ordre de la FTBO (degré du dénominateur)

Remarque : pour les fonctions de transfert des systèmes réels, on a toujours $\alpha + m > n$.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.1.c Ecart - Erreur – Définition

On appelle « erreur » la différence entre l'entrée (grandeur de commande) et la sortie (grandeur commandée) :

$$\Sigma(t) = e(t) - s(t)$$

La précision s'améliore lorsque l'erreur diminue.

La notion d'erreur est délicate à évoquer car elle n'existe que lorsque entrée et en sortie ont des mêmes grandeurs. En réalité, on compare en général des tensions images des variables à comparer.

On définit l' « écart », valeur en sortie du comparateur définie par :

$$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$$

Pour un système à retour unitaire, $\Sigma(t) = \varepsilon(t)$.

Améliorer la précision revient à minimiser l'écart, qui évolue dans deux circonstances :

- Evolution de l'entrée : problème de poursuite
- Présence de perturbations : problème de régulation

Définitions :

- Lorsque l'entrée est un échelon, l'écart à l'infini est appelé écart statique, ou écart de position, noté ε_s .
- Lorsque l'entrée est une rampe, on parle d'écart de vitesse, de poursuite ou de traînage, noté ε_v (c'est la valeur à l'infini de l'écart dynamique ε_d).

Remarque : parler d'écart n'a de sens que si les grandeurs soustraites sont de même unité...

1.III.1.d Etude de l'écart/erreur au cours du temps

Si on souhaite avoir à tout instant la sortie égale à l'entrée dans un système de fonction de transfert $H(p)$, il faudrait :

$$\begin{array}{c} E(p) \quad \boxed{H(p)} \quad S(p) \\ \hline \end{array}$$

$$\forall t, s(t) = e(t) \Leftrightarrow H(p) = 1$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.1.e Calcul de l'écart statique

Lorsque l'on cherche l'écart statique d'un système de fonction de transfert $H(p)$, si l'on connaît son gain statique complet K , on peut directement appliquer la formule :

$$\lim_{p \rightarrow 0} (H(p)) = K \quad ; \quad \varepsilon_s = E_0(1 - K) \quad ; \quad \varepsilon_s \% = 1 - K$$

Démonstration : toute fonction de transfert s'écrit sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}$$

Si le système est stable en boucle fermée, il ne peut pas rester de pôles à partie réelle positive ou nulle, donc la classe vaut 0.

Si la classe est négative, c'est qu'il reste au moins un p au numérateur, le système tend vers 0 à une entrée échelon. Ce n'est évidemment pas ce que l'on rencontre dans nos systèmes asservis...

Dans ce cas :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (pS(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(pH(p) \frac{E_0}{p} \right) = E_0 \lim_{p \rightarrow 0} (H(p))$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (H(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(K \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m} \right) = K$$

Soit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t)) = KE_0$$

La valeur finale à une entrée échelon E_0 vaut donc toujours KE_0

L'écart statique prend donc toujours la forme suivante :

$$\varepsilon_s = E_0 - KE_0 = E_0(1 - K)$$

Ou encore :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} (E(p) - S(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} E_0(1 - H(p)) = E_0 \left[1 - \lim_{p \rightarrow 0} (H(p)) \right] = E_0(1 - K)$$

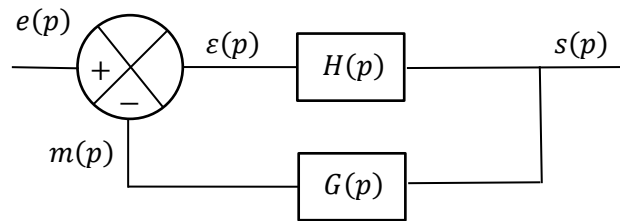
On parle aussi d'écart en %. Si on demande 10, que l'on obtient 11, l'écart en pourcent vaut 10%, ce qui est parlant. Si on demande 100000000, et qu'on obtient 100000001, il est légèrement moins représentatif de dire « écart de 1 ».

$$\varepsilon_s \% = \frac{\varepsilon_s}{E_0} = \frac{E_0(1 - K)}{E_0} = 1 - K$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.2 Calcul des écarts au comparateur A des systèmes

Etudions une boucle d'asservissement quelconque :



On appelle :

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$$

1.III.2.a Expression générale de l'écart au comparateur A

$$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$$

On exprime l'écart à l'aide de la FTBO :

$$\varepsilon(p) = e(p) - m(p) = e(p) - FTBO(p)\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} e(p)$$

En reprenant la forme générale de FTBO proposée précédemment :

$$FTBO(p) = K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}$$

On a :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}} e(p)$$

L'écart dépend de la nature de l'entrée. Les entrées classiques sont l'impulsion, l'échelon, la rampe et la parabole. Leurs transformée de Laplace sont obtenues à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(a\delta(t)) = a \\ \mathcal{L}\left(a \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{a}{p^n} \end{cases}$$

On écrit donc ces entrées sous la forme générale : $E(p) = \frac{a}{p^\beta}$; $\beta \geq 0$

La forme générale de l'écart s'écrit donc :

$$\varepsilon(p) = \frac{a}{p^\beta} \frac{1}{1 + K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}}$$

Avec K_{BO} le gain statique de la boucle ouverte.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.2.b Calcul de l'écart au comparateur A

Si le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a}{p^{\beta-1}} \frac{1}{1 + K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}} \right]$$

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a}{p^{\beta-1}} \frac{1}{1 + \frac{K_{BO}}{p^\alpha}} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a}{p^{\beta-1}} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K_{BO}} \right]$$

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[a \frac{p^{\alpha-\beta+1}}{p^\alpha + K_{BO}} \right]$$

On peut donc mettre en place le tableau suivant, permettant de connaître l'équivalent en 0 (tableau 1) et la valeur de l'écart (tableau 2) en fonction de la classe de la FTBO du système et de l'entrée.

Nature de l'entrée			Classe du système			
$e(t)$	$E(p)$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = n > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a	$\beta = 0$	$\frac{ap}{1 + K_{BO}}$	$\frac{ap^2}{p + K_{BO}} \sim \frac{ap^2}{K_{BO}}$	$\frac{ap^3}{p^2 + K_{BO}} \sim \frac{ap^3}{K_{BO}}$	$\frac{ap^{n+1}}{p^n + K_{BO}} \sim \frac{ap^{n+1}}{K_{BO}}$
Echelon $e(t) = au(t)$	$\frac{a}{p}$	$\beta = 1$	$\frac{a}{1 + K_{BO}}$	$\frac{ap}{p + K_{BO}} \sim \frac{ap}{K_{BO}}$	$\frac{ap^2}{p^2 + K_{BO}} \sim \frac{ap^2}{K_{BO}}$	$\frac{ap^n}{p^n + K_{BO}} \sim \frac{ap^n}{K_{BO}}$
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\beta = 2$	$\frac{a}{p(1 + K_{BO})}$	$\frac{a}{p + K_{BO}} \sim \frac{a}{K_{BO}}$	$\frac{ap}{p^2 + K_{BO}} \sim \frac{ap}{K_{BO}}$	$\frac{ap^{n-1}}{p^{n-1} + K_{BO}} \sim \frac{ap^{n-1}}{K_{BO}}$

Valeur de A						
Nature de l'entrée au comparateur			Classe du système			
$e(t)$	$E(p) = \frac{\dots}{p^\beta}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = n > 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a	$\beta = 0$	0	0	0	0
Echelon $e(t) = Eu(t)$	$\frac{E}{p}$	$\beta = 1$	$\frac{E}{1 + K_{BO}}$	0	0	0
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	$\beta = 2$	∞	$\frac{a}{K_{BO}}$	0	0

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours



Remarque : Un système de classe $\alpha \geq 2$ semble instable (la phase part de -180°). On pourrait donc croire que la colonne du tableau précédent est inutile... Mais non, si un correcteur permet une remontée de phase au bon endroit !

Imaginez un satellite qui souhaite se positionner dans l'espace à l'aide d'une force exercée par un propulseur :

$$F = ma \quad ; \quad F = mp^2X \quad ; \quad \frac{X}{F} = \frac{1}{mp^2}$$

La BO sera de classe 2 et le système sera instable. Il sera donc nécessaire d'ajouter un correcteur...

Si maintenant on est sur terre, il y aura forcément des frottements :

$$F - kv = ma \quad ; \quad F = mp^2X + kpX = (mp^2 + kp)X \quad ; \quad \frac{X}{F} = \frac{1}{mp^2 + kp} = \frac{1}{p(mp + k)}$$

Classe 1, le système peut être stable (cf Revers).

1.III.2.c Conclusions

La présence d'intégrations $\frac{1}{p}$ dans la *FTBO* a une grande influence sur la précision d'un système.

1.III.2.c.i Ecart statique

- Plus la classe de la *FTBO* est élevée, plus la précision est grande quelle que soit la nature de l'entrée.
- Dès que la *FTBO* possède une intégration, l'écart statique est nul.
- Si l'erreur statique est ni infinie, ni nulle, alors plus le gain de la *FTBO* est grand, plus la précision est bonne.

1.III.2.c.ii Ecart de vitesse

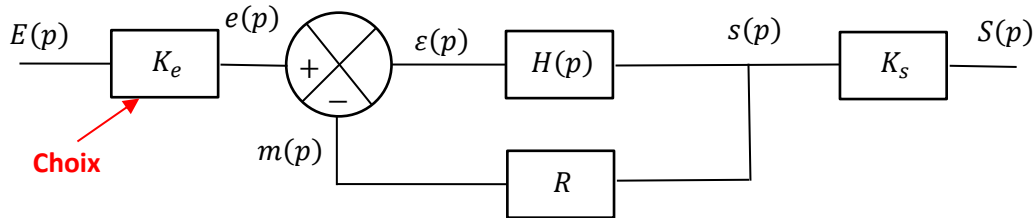
- Dès qu'un système possède au moins deux intégrations, l'écart de poursuite est nul
- Un système ne possédant pas d'intégration a un écart de poursuite infini

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.2.d Lien entre l'erreur Σ et écart A

1.III.2.d.i Cas général

Soit le système quelconque avec un simple gain en retour suivant :



Comme nous l'avons vu précédemment, la présence d'un intégrateur dans la BO permet d'annuler l'écart statique. Supposons donc que la BO soit de classe au moins égale à 1.

On sait donc que l'écart statique au comparateur A tend vers 0. Or, on souhaite évidemment que l'erreur entrée/sortie tende aussi vers 0 pour que le système soit précis.

Autrement dit, on veut au choix :

- Proportionnalité entre écart et erreur : $\Sigma \propto A$
- Si l'écart est nul, l'erreur est nulle : $A = 0 \Leftrightarrow \Sigma = 0$

Voyons donc comment obtenir ces conditions, qui sont équivalentes.

Supposons dans la suite que l'on parle des valeurs à l'infini, on notera donc E, S, A

1.III.2.d.ii Ecart nul \Leftrightarrow Erreur nulle

On exprime l'écart : $A = E - M = K_e E - \frac{R}{K_s} S$. On suppose que $E = S$: $A = K_e E - \frac{R}{K_s} E = \left(K_e - \frac{R}{K_s}\right) E$. On propose enfin d'annuler l'erreur quelle que soit l'entrée : $\Sigma = 0 \Leftrightarrow K_e - \frac{R}{K_s} = 0$

On obtient la condition : $K_e = \frac{R}{K_s}$

1.III.2.d.iii Proportionnalité écart / erreur

On exprime l'écart : $A = E - M = K_e E - \frac{R}{K_s} S$. Voulant factoriser par $(E - S)$, on propose : $K_e = \alpha \frac{R}{K_s}$, soit $\varepsilon = \alpha \frac{R}{K_s} E - \frac{R}{K_s} S = \frac{R}{K_s} (\alpha E - S)$

On a proportionnalité entre ε et $(E - S)$ si $\alpha = 1$, soit $K_e = \frac{R}{K_s}$

1.III.2.d.iv Remarques

Dans les concours, on demande souvent de réaliser le choix de K_e alors qu'il n'y a pas d'intégrateur dans la BO, donc l'erreur ne tend pas vers 0... En réalité, dans la suite, on vous proposera d'ajouter un correcteur qui a une action intégrale...

On remarquera que si l'entrée est une rampe, en prenant $K_e = \frac{R}{K_s}$, il y a $\Sigma \propto A$, donc si $A = 0$, $\Sigma = 0$

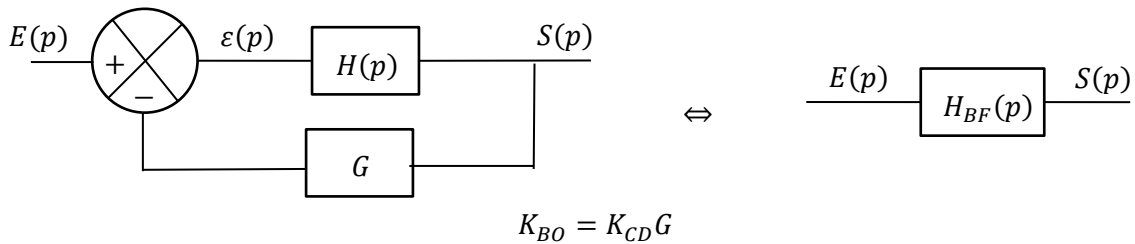
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.3 K_{BF} des systèmes bouclés et erreur

1.III.3.a Détermination de K_{BF} selon la classe

Soit $H(p)$ une fonction de transfert quelconque :

$$H(p) = K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)} \quad ; \quad m \geq n$$



$$H_{BF}(p) = FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)G} = \frac{K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}}{1 + K_{BO} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}}$$

$$H_{BF}(p) = K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m) + K_{BO} (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n)}$$

1.III.3.a.i FTBO de classe nulle: $\alpha = 0$

$$\alpha = 0 \Rightarrow H_{BF}(p) = K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{(1 + K_{BO}) + \dots p \dots p^2 + \dots}$$

$$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$$

Pour un système à retour unitaire ($K_{BO} = K_{CD}$), on a :

$$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$$

A retenir :

K_{BF} d'un système de FTBO de classe nulle ne pourra jamais être égal à 1

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.3.a.ii FTBO de classe au moins égale à 1 : $\alpha \geq 1$

$$\alpha \geq 1 \Rightarrow H_{BF}(p) = K_{CD} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{K_{BO} + \dots p + \dots p^2 + \dots} = \frac{K_{CD}}{K_{CD} G} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots}$$

$$= K_{BF} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots}$$

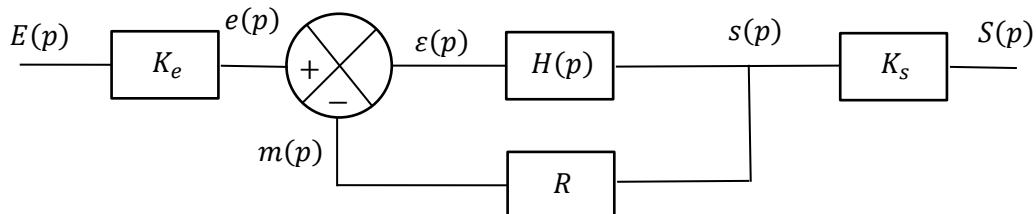
$$K_{BF} = \frac{1}{G}$$

On remarque que dès qu'un système à retour unitaire ($G = 1$) est de classe 1 ou supérieure, on sait que l'écart statique est nul : $\varepsilon_s = E(1 - K_{BF}) = 0$

1.III.3.b Erreur statique des systèmes connaissant K_{BF}

1.III.3.b.i Cas général

Soit le système général suivant :



On appelle K_{CD} le gain statique de $H(p)$

$$K_{BO} = K_{CD} R$$

On a :

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = \frac{1}{R}$

On en déduit la valeur du gain statique K_{comp} du système complet :

$$K_{comp} = K_{BF} K_e K_s$$

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{comp} = \frac{K_{CD} K_e K_s}{1 + K_{BO}}$	$K_{comp} = \frac{K_e K_s}{R}$

Finalement, on a l'écart statique entrée sortie :

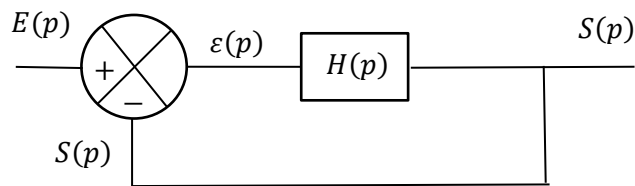
$$\Sigma_s = E(1 - K_{comp})$$

Remarque : Attention, cette formule ne s'applique qu'à l'écart statique même si certains cas particuliers peuvent exister pour l'erreur de traînage

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.3.b.ii Cas particulier sans gains extérieurs et retour unitaire

On se retrouvera souvent avec un système de schéma bloc équivalent sans gains extérieurs et à retour unitaire :



Comme vu dans une partie précédente, inutile d'utiliser K_{BF} pour déterminer l'écart, on peut utiliser l'écart au comparateur puisque dans ce cas, « écart = erreur ». Mais évidemment, utiliser $E_0(1 - K_{BF})$ fonctionne aussi.

Prenons l'exemple d'un premier ordre en BO : $H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$

D'après le tableau des écarts :

$$\varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + K_{BO}} = \frac{E_0}{1 + K}$$

Avec l'utilisation de K_{BF} :

$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{\frac{K}{1+\tau p}}{1 + \frac{K}{1+\tau p}} = \frac{K}{1 + K + \tau p} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{\tau}{1+K}p}$$

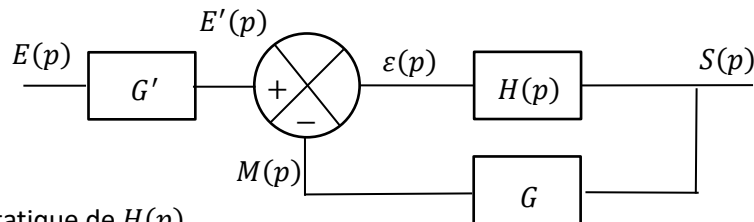
$$\varepsilon_s = E_0(1 - K_{BF}) = E_0 \left(1 - \frac{K}{1+K} \right) = E_0 \left(\frac{1+K-K}{1+K} \right) = \frac{E_0}{1+K}$$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.4 Choix du gain avant comparateur

1.III.4.a Présentation du problème

Soit un système **stable** ayant un retour de type gain pur G :



Soit K_{CD} le gain statique de $H(p)$.

Si les grandeurs $e(t)$ et $s(t)$ sont bien les mêmes, $e(t)$ étant la vraie consigne de $s(t)$, il y a une mesure de la valeur de sortie $s(t)$ par le gain G et il faut donc aussi transformer la grandeur d'entrée $e(t)$ avec un gain G' en $e'(t)$.

G est imposé par le capteur, **G' peut être choisi.**

Notre objectif est d'obtenir un écart statique nul en choisissant bien G' .

1.III.4.b Idées reçues

On dit souvent :

- Il faut prendre $G = G'$ pour comparer des grandeurs comparables – Mais changer de capteur qui transforme toujours la grandeur d'entrée en grandeur de sortie avec un gain différent (5V par tours au lieu de 2V par tout) permet toujours de « comparer des grandeurs comparables » au sens des unités
- Il faut prendre $G = G'$ de manière à avoir une erreur proportionnelle à l'écart, ou avoir entrée = sortie quand l'écart est nul... On a déjà parlé de ce point précédemment. Mais, l'écart au comparateur ne tend pas toujours vers 0... La preuve, si la FTBO est de classe 0, l'écart ne tend jamais vers 0. Un autre choix de G' pourrait être plus judicieux !

Nous allons donc voir ce qu'il faut faire dans les paragraphes suivants.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.4.c Choix de G' selon la classe de la BO à l'aide de K_{BF}

Nous connaissons maintenant le gain statique de la partie bouclée :

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{BF} = \frac{1}{G}$

Obtenir un écart statique nul consiste à obtenir un gain statique complet du système égal à 1.

On a :

$$K_{comp} = G' K_{BF}$$

Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$K_{comp} = G' \frac{K_{CD}}{1 + K_{BO}}$	$K_{comp} = G' \frac{1}{G}$

Il faut donc choisir $G' = \frac{1}{K_{BF}}$:

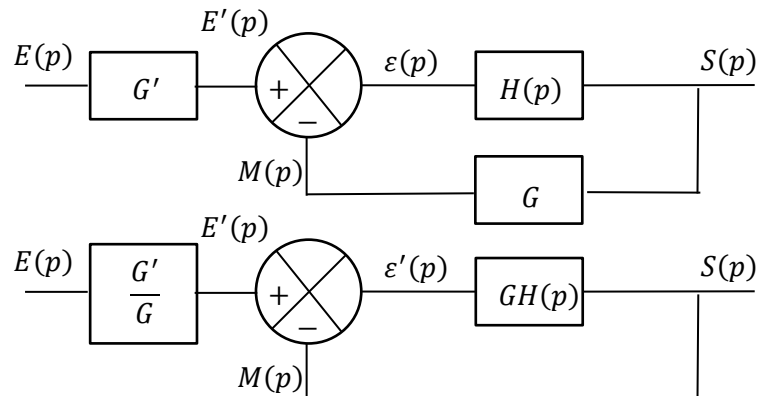
Classe 0	Classe $\alpha \geq 1$
$G' = \frac{1 + K_{BO}}{K_{CD}}$	$G' = G$

Dans la majorité des problèmes traités, soit la fonction de transfert $H(p)$ est de classe 1, soit on va ajouter un correcteur intégrateur à la chaîne directe. On sera donc quasiment tout le temps dans le cas $G' = G$! Mais attention, si la classe est nulle, ce n'est pas le bon choix...

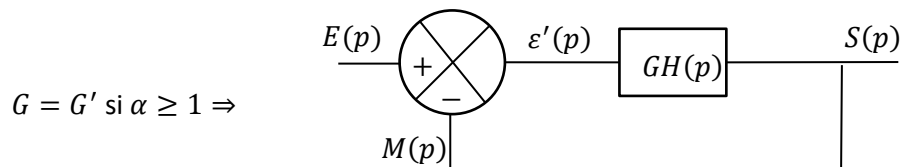
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.4.d Cas d'une classe non nulle et modification de schéma bloc

On peut proposer la modification de schéma bloc suivante :



Comme on se retrouve quasiment tout le temps dans la situation $G' = G$ car la classe de la BO est quasiment tout le temps au moins égale à 1, il vient :



Ainsi, le système est à retour unitaire, l'écart au comparateur du système modifié vaut l'erreur entrée sortie :

$$\Sigma_s = A$$

Remarque : cet écart au comparateur n'est pas le même que l'écart au comparateur du système sans retour unitaire.

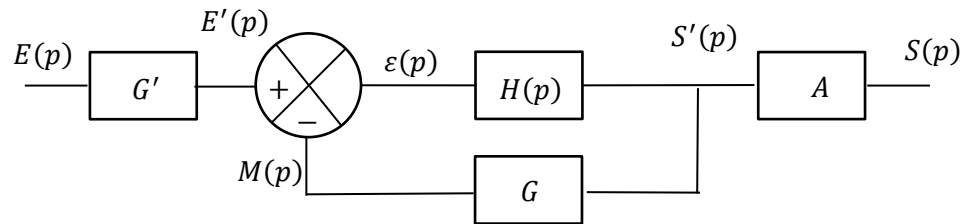
On peut alors directement connaître les performances de notre système à l'aide du tableau :

Ecart au comparateur du système modifié, donc $\Sigma_s = \varepsilon_s \odot$		
$e(t)$	$\alpha = 1$	$\alpha = n > 2$
Dirac	0	0
Echelon E	0	0
Rampe at	$\frac{a}{K_{BO}}$	0

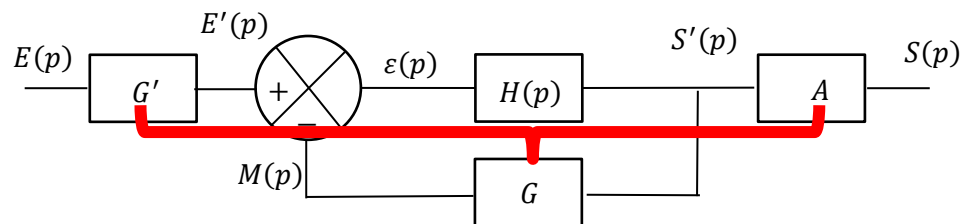
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.4.e Erreur à ne pas faire

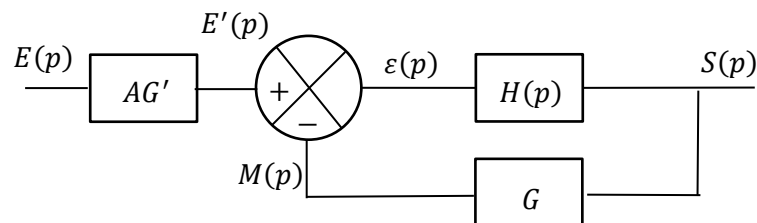
Dans le cas suivant :



Il ne faut pas $G' = G$ mais $\mathbf{AG' = G}$



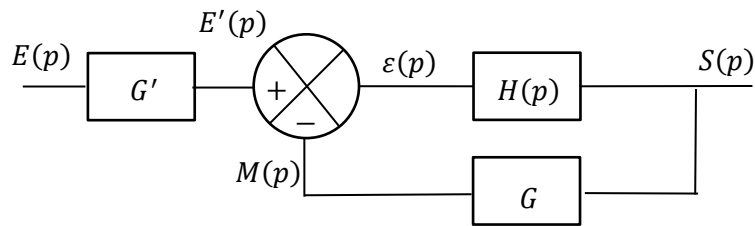
On se ramène en effet au cas suivant :



Et on applique la démarche à ce schéma bloc !

1.III.4.f Conclusions

Dans la situation suivante :

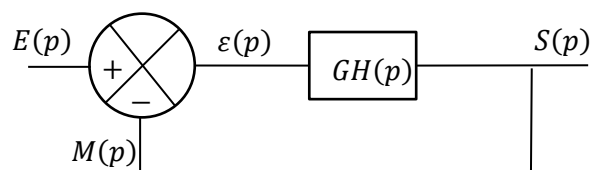


Classe de la *FTBO* nulle (très peu rencontré en pratique):

- Le gain statique de la boucle vaut $K_{BF} = \frac{K_{CD}}{1+K_{BO}}$
- On annule l'erreur statique entrée/sortie $\Sigma_s = E - S$ en choisissant : $G' = \frac{1}{K_{BF}} = \frac{1+K_{BO}}{K_{CD}}$
- L'erreur statique est dépendante de l'éventuelle non invariance du système
- On sait que l'écart en vitesse au comparateur tend vers l'infini...

Classe de la *FTBO* supérieure ou égale à 1 :

- Par 4 méthodes, on montre qu'il faut choisir $G = G'$
 - o Via le gain statique de la boucle $K_{BF} = \frac{1}{G}$, $G = G'$ permet $K_{comp} = 1$
 - o Via une modification de schéma bloc, sachant que le gain de la boucle vaut 1, il reste $K_{comp} = \frac{G}{G'} = 1$ si $G = G'$
 - o En montrant qu'il y a $\Sigma_s = \alpha A$ si $G = G'$, $A = 0$ donne $\Sigma_s = 0$
 - o En montrant qu'on a « erreur nulle équivalent à écart nul » si $G = G'$, $A = 0$ donne $\Sigma_s = 0$
- L'écart statique il reste nul en cas de non invariance du système
- Avec $G = G'$, on obtient toujours le schéma équivalent à retour unitaire suivant :



- On connaît les erreurs directement avec le tableau des écarts car $\Sigma_s = A$

$e(t)$	$\alpha = 1$	$\alpha = n > 2$
Dirac	0	0
Echelon E	0	0
Rampe at	$\frac{a}{K_{BO}}$	0

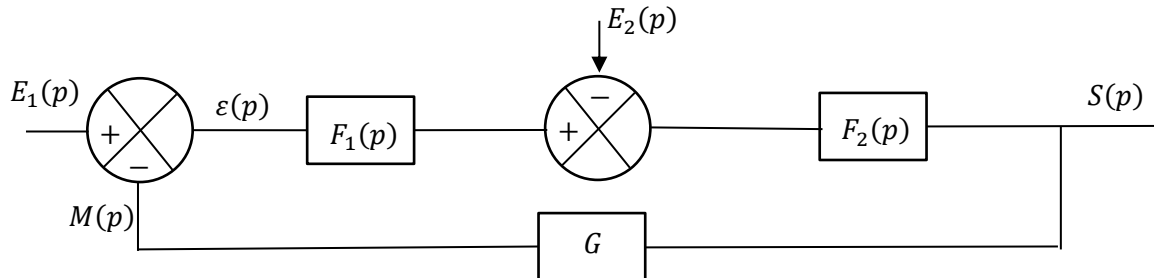
- Attention : L'écart au comparateur A n'est pas le même sur les deux schémas blocs avec et sans retour unitaire

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.5 Influence des perturbations

1.III.5.a Problème étudié

Intéressons-nous à un système asservi présentant une perturbation, à retour constant :



On se place dans le cas généralement rencontré où le retour est un gain pur. Notre objectif est de déterminer l'influence d'une perturbation sur la précision du système. Rappelons que le tableau des écarts aux comparateurs n'est valable que pour l'entrée au comparateur concerné. Ce tableau ne peut donc pas être utilisé ici.

1.III.5.b Calcul de l'influence de la perturbation

1.III.5.b.i Expression de la sortie

D'après le théorème de superposition, on a : $S(p) = \frac{F_2(p)F_1(p)}{1+GF_1(p)F_2(p)}E_1(p) - \frac{F_2(p)}{1+GF_1(p)F_2(p)}E_2(p)$

Remarque : Même dénominateur aux deux fonctions, donc si le système est stable sans perturbation, il l'est aussi avec.

1.III.5.b.ii Définition des erreurs

Erreur de suivi de consigne : $\varepsilon_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (E_1(t) - S(t)) \Big|_{E_2=0} = \lim_{p \rightarrow 0} (p(E_1(p) - S(p))) \Big|_{E_2=0}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \left(pE_1(p) \left(1 - \frac{F_2(p)F_1(p)}{1 + GF_1(p)F_2(p)} \right) \right)$$

Erreur de régulation due à la perturbation : $\varepsilon_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} (E_1(t) - S(t)) \Big|_{E_1=0} = \lim_{t \rightarrow \infty} (-S(t)) \Big|_{E_1=0}$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} (-pS(p)) \Big|_{E_2=0} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{F_2(p)}{1 + GF_1(p)F_2(p)} E_2(p) \right)$$

Remarque : On remarquera qu' ε_2 est l'opposé de l'effet de la perturbation sur la sortie, puisque c'est la différence « entrée – sortie ». Autrement dit, quand on applique la perturbation E_2 , la sortie évolue de $\Delta S = -\varepsilon_2$.

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'à ce second écart ε_2 , ε_1 ayant été étudié dans la partie précédente du cours, dans la situation presque toujours rencontrée d'un retour unitaire, ce qui permet d'utiliser le tableau des écarts puisque c'est alors l'écart au premier comparateur.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.5.b.iii Influence de la perturbation

On a donc :

$$\varepsilon_2 = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p F_2(p) E_2(p)}{1 + G F_1(p) F_2(p)} \right)$$

$F_1(p)$, $F_2(p)$ et $G(p)$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$F_1(p) = \frac{K_1 N_1(p)}{p^\alpha D_1(p)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_1(0) = D_1(0) = 1 \\ \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$F_2(p) = \frac{K_2 N_2(p)}{p^\beta D_2(p)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_2(0) = D_2(0) = 1 \\ \beta \geq 0 \end{cases}$$

Alors :

$$F_1(p) \underset{0}{\sim} \frac{K_1}{p^\alpha} \quad ; \quad F_2(p) \underset{0}{\sim} \frac{K_2}{p^\beta}$$

Soit une perturbation de type :

$$E_2(p) = \frac{E_2^0}{p^\delta} \quad \text{avec} \quad \delta \geq 0$$

On a alors :

$$\varepsilon_2 = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{p \frac{K_2 E_2^0}{p^\beta p^\delta}}{1 + G \frac{K_1 K_2}{p^\alpha p^\beta}} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{1-\delta} K_2 E_2^0}{p^\beta + \frac{G K_1 K_2}{p^\alpha}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{1-\delta+\alpha} K_2 E_2^0}{p^{\alpha+\beta} + G K_1 K_2}$$

Nous pouvons alors donner la valeur de cet écart en fonction la classe de chaque fonction de transfert $F_1(p)$, $F_2(p)$ et du type d'entrée en perturbation.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.5.b.iv Calcul selon le type d'entrée

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{1-\delta+\alpha} K_2 E_2^0}{p^{\alpha+\beta} + G K_1 K_2}$$

• Perturbation en impulsion

$\delta = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
Soit $\beta = 0$	$\frac{p K_2 E_2^0}{1 + G K_1 K_2}$	$\frac{p^{1-\delta+\alpha} K_2 E_2^0}{p^{\alpha+\beta} + G K_1 K_2} \underset{0}{\sim} \frac{p^{1+\alpha} E_2^0}{G K_1}$
Soit $\beta \geq 1$	$\frac{p K_2 E_2^0}{p^\beta + G K_1 K_2} \underset{0}{\sim} \frac{p E_2^0}{G K_1}$	

$\delta = 0$	$\alpha \geq 0$
$\forall \beta$	0

• Perturbation en échelon

$\delta = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$\beta = 0$	$\frac{K_2 E_2^0}{1 + G K_1 K_2}$	$\frac{p^\alpha K_2 E_2^0}{p^{\alpha+\beta} + G K_1 K_2} \underset{0}{\sim} \frac{p^\alpha E_2^0}{G K_1}$
$\beta \geq 1$	$\frac{K_2 E_2^0}{p^\beta + G K_1 K_2} \underset{0}{\sim} \frac{E_2^0}{G K_1}$	

$\delta = 1$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 1$
$\beta = 0$	$\frac{K_2 E_2^0}{1 + G K_1 K_2}$	0
$\beta \geq 1$	$\frac{E_2^0}{G K_1}$	

• Perturbation en rampe

$\delta = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha \geq 2$
$\beta = 0$	$\frac{p^{-1} K_2 E_2^0}{p^\beta + G K_1 K_2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{p} \frac{K_2 E_2^0}{1 + G K_1 K_2}$	$\frac{K_2 E_2^0}{p^{1+\beta} + G K_1 K_2} \underset{0}{\sim} \frac{E_2^0}{G K_1}$	$\frac{p^{\alpha-1} K_2 E_2^0}{p^{\alpha+\beta} + G K_1 K_2} \underset{0}{\sim} \frac{p^{\alpha-1} E_2^0}{G K_1}$
$\beta \geq 1$	$\frac{p^{-1} K_2 E_2^0}{p^\beta + G K_1 K_2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{p} \frac{K_2 E_2^0}{G K_1 K_2}$		

$\delta = 2$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha \geq 2$
$\forall \beta$	$+\infty$	$\frac{E_2^0}{G K_1}$	0

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.5.b.v Conclusions

L'erreur entrée/sortie provoquée par une perturbation en impulsion est toujours nulle.

L'erreur entrée/sortie provoquée par une perturbation de type échelon est nulle s'il existe au moins une intégration en amont de la perturbation : $\alpha \geq 1$

L'erreur entrée/sortie provoquée par une perturbation de type rampe est nulle s'il existe au moins deux intégrations en amont de la perturbation : $\alpha \geq 2$, etc...

On voit que si l'effet d'une perturbation n'est ni infini, ni nul, l'augmentation du gain K_1 de la partie de la FTBO en amont de la perturbation diminue l'erreur qu'elle provoque.

On peut remarquer qu'une intégration en amont de la perturbation « diminue d'un degré » l'écart obtenu, par exemple : une intégration devant une rampe conduit à un écart « en échelon », constant

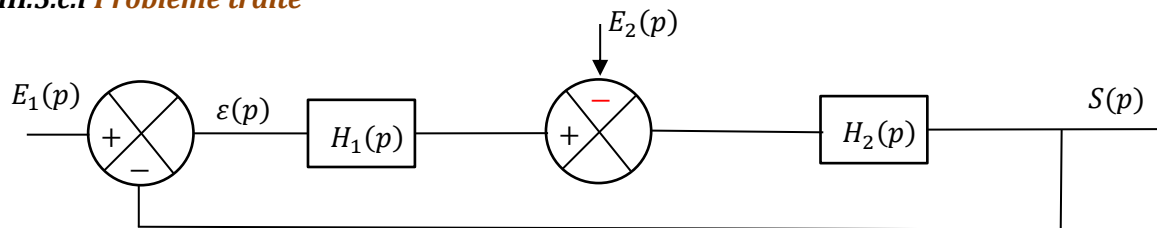
Voici une synthèse de l'erreur entrée/sortie provoquée par un Dirac, un échelon et une rampe en fonction de la classe de la partie de la FTBO en amont de la perturbation :

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha \geq 2$
Dirac	0	0	0
Echelon	$\frac{K_2 E_2^0}{1 + GK_1 K_2}$ ou $\frac{E_2^0}{GK_1}$	0	0
Rampe	$+\infty$	$\frac{E_2^0}{GK_1}$	0

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.5.c Cas souvent rencontré

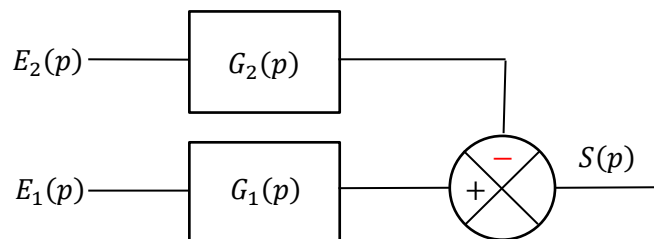
1.III.5.c.i Problème traité



Nous serons généralement confrontés à des systèmes, qui après choix du gain avant comparateur, se ramèneront à un retour unitaire comme ci-dessus. L'écart au premier comparateur sera donc aussi l'erreur entrée/sortie.

Rappelons qu'en appliquant un théorème de superposition, on montre que :

$$S(p) = G_1(p)E_1(p) - G_2(p)E_2(p) = \frac{F_2(p)F_1(p)}{1 + F_1(p)F_2(p)} E_1(p) - \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p)F_2(p)} E_2(p)$$



On vous demandera alors d'estimer :

- L'erreur de suivi de consigne : $\varepsilon_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (E_1(t) - S(t)) \Big|_{E_2=0}$
- L'erreur de régulation vis-à-vis d'une perturbation :

$$\varepsilon_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} (E_1(t) - S(t)) \Big|_{E_1=0} = \lim_{t \rightarrow \infty} (-S(t)) \Big|_{E_1=0}$$
- La somme de ces erreurs : $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.5.c.ii Erreur en suivi de consigne

La première erreur ε_1 s'estimera immédiatement à l'aide du tableau des écarts au comparateur connaissant l'entrée **qui y est imposée** :

Nature de l'entrée		Classe du système		
$e(t)$	$E(p) = \frac{\dots}{p^\beta}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Dirac $e(t) = a\delta(t)$	a $\beta = 0$	0	0	0
Echelon $e(t) = Eu(t)$	$\frac{E}{p}$ $\beta = 1$	$\frac{E}{1 + K_{BO}}$	0	0
Rampe $e(t) = atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$ $\beta = 2$	∞	$\frac{a}{K_{BO}}$	0

$$\text{Sinon : } \varepsilon_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (E_1(t) - S(t)) \Big|_{E_2=0} = \lim_{p \rightarrow 0} (p(E_1(p) - S(p))) \Big|_{E_2=0} = \lim_{p \rightarrow 0} (pE_1(p)(1 - G_2(p)))$$

1.III.5.c.iii Erreur en régulation (perturbation)

Pour ε_2 , on n'attend pas de vous que vous connaissiez tous les résultats du tableau suivant, mais au moins ceux en fond coloré :

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha \geq 2$
Dirak	0	0	0
Echelon	$\frac{K_2 E_2^0}{1 + K_1 K_2}$ ou $\frac{E_2^0}{K_1}$	0	0
Rampe	$+\infty$	$\frac{E_2^0}{K_1}$	0

On pourra donc procéder de la manière suivante :

- Identifier si la classe α de la fonction H_1 permet d'annuler l'effet de la perturbation
- Si tel n'est pas le cas, calculer à l'aide d'un TVF :

$$\varepsilon_2 = \lim_{p \rightarrow 0} (-pS(p)) \Big|_{E_2=0} = \lim_{p \rightarrow 0} (-p[-G_2(p)E_2(p)]) \Big|_{E_2=0} = \lim_{p \rightarrow 0} (+pG_2(p)E_2(p))$$

Attention :

- L'écart étant la différence « entrée – sortie », la variation de la sortie due à la perturbation ΔS est l'opposé de ε_2 : $\Delta S = -\varepsilon_2$
- Les signes en rouge dans cette partie son liés au signe du comparateur de la perturbation

Erreurs à ne pas faire :

- Donner l'écart au comparateur de l'entrée 2, ou encore pire, l'écart entre $E_2(t)$ et $S(t)$. Il suffit de regarder les unités pour s'en convaincre !
- Utiliser le tableau des écarts aux comparateurs. On veut effectivement l'écart au premier comparateur, mais pour une entrée qui ne s'applique pas dessus... il n'est donc pas valable

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.III.6 Conclusions sur la précision

L'ajout d'intégrations est positif pour la précision des systèmes.

L'ajout d'une intégration en amont d'une perturbation en échelon annule son effet.

L'ajout d'une double intégration en amont d'une perturbation en rampe annule son effet.

Plus le gain de la FTBO est grand, meilleure est la précision si l'écart n'est pas nul.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.IV. Rapidité

1.IV.1 Définition

Soit un système supposé stable dont l'entrée est un échelon. Le système tend vers une valeur finale que nous noterons S_∞ :

$$S_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$$

La rapidité de ce système est liée au temps mis par sa réponse $s(t)$ pour atteindre une valeur proche de S_∞ , voire dépasser S_∞ , ou pour ne plus quitter un intervalle donné correspondant par exemple à $\pm X\%$ de S_∞ .

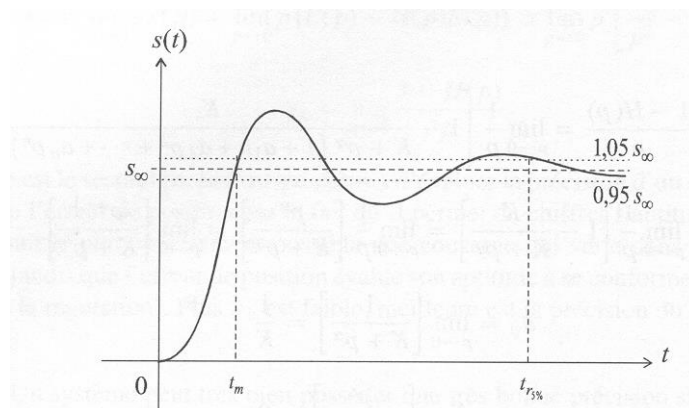
1.IV.2 Critères de rapidité

1.IV.2.a Temps de réponse à $X\%$

Le temps de réponse à $X\%$, noté $tr_{X\%}$, est le temps à partir duquel la réponse $s(t)$ ne quitte plus la plage à $\pm X\%$ de S_∞

$$t \text{ à partir duquel } \left(1 - \frac{X}{100}\right) S_\infty < s(t) < \left(1 + \frac{X}{100}\right) S_\infty$$

Le critère standard est le temps de réponse à 5%.



1.IV.2.b Temps de montée

On définit le temps de montée t_m comme le temps auquel la sortie franchit pour la première fois son asymptote quand c'est le cas (souvent en pratique).

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.IV.2.c Bande passante

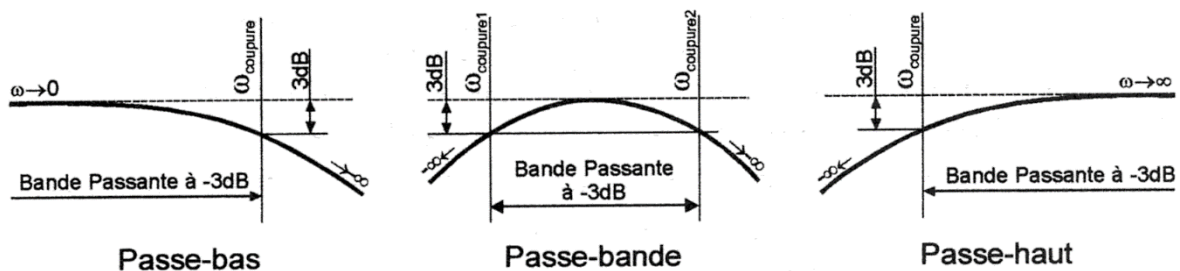
On définit la bande passante à $-X$ dB comme la plage de pulsations pour lesquelles le gain est supérieur à une valeur optimale de gain diminuée de X dB.

$$\omega/G_{dB} > G_{opt} - X$$

On s'intéresse en particulier à la bande passante à -3 dB. On définit ω_c , pulsation de coupure à -3 dB. Une perte de 3 dB correspond à une perte de module de 30% :

$$20 \log K - 3dB = 20 \log \frac{K}{\sqrt{2}} = 20 \log(0,7K)$$

Exemples :



Pour un système de type second ordre résonnant, la bande passante à -3dB est définie comme pour un passe-bas, sans tenir compte de la résonance. On pourra soit rechercher, soit éviter cette résonance suivant les applications.

Pratiquement tous les systèmes physiquement réalisables sont de type passe-bas : le module de leur fonction de transfert tend vers zéro à haute fréquence.

Cas particulier : on définit la bande passante à 0 dB comme la plage de pulsations pour lesquelles le gain est positif ($|H| > 1$).

Les deux critères que l'on rencontre souvent pour les systèmes passe-bas sont :

- Bande passante (ou BP à -3dB) : $BP = [0, \omega_c]$
- Bande passante à 0 dB : $BP_0 = [0, \omega_{c_0}]$

Ce type de bandes passantes attendues suggère que $K > 1$ pour que ω_{c_0} existe, et qu'il n'y ait généralement pas de résonance.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.IV.3 Application aux systèmes du premier et second ordre

1.IV.3.a Systèmes non bouclés

1.IV.3.a.i Premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Soit une entrée échelon unitaire : $E(p) = \frac{1}{p}$

$$\text{On a donc : } S(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K}{p} - \frac{K}{p + \frac{1}{\tau}}$$

Par application de la transformée de Laplace inverse, la réponse indicielle du système est donc :

$$s(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

• Temps de réponse à 5%

Le temps de réponse à 5% est tel que :

$$KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{95}{100} \lim_{t \rightarrow +\infty} KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 0,95KE_0$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,95$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,05$$

$$\Leftrightarrow t = -\tau \ln 0,05$$

$$\Leftrightarrow t \sim 3\tau$$

Pour un système du premier ordre :

$$tr_{5\%} = 3\tau = \frac{3}{\omega_0}$$

Ainsi, plus ω_0 est élevée, plus le système est rapide.

D'une manière générale, on peut trouver le lien entre $tr_{X\%}$ et α tel que $tr_{X\%} = \alpha\tau$:

$$\frac{100 - X}{100} = 1 - e^{-\frac{\alpha\tau}{\tau}} \Leftrightarrow 1 - \frac{X}{100} = 1 - e^{-\alpha} \Leftrightarrow \frac{X}{100} = e^{-\alpha} \Leftrightarrow \ln \frac{X}{100} = -\alpha$$

$$\alpha = \ln \frac{100}{X} = \ln 100 - \ln X$$

On pourra donc exploiter n'importe quelle valeur pour identifier τ ...

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• **Temps de montée**

La réponse d'un premier ordre ne franchit jamais son asymptote. On ne parle donc pas de temps de montée.

• **Bande passante**

$$G_{\omega_c} = G_0 - 3 = 20 \log |H(0)| - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2 = 2$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = 1$$

On a donc la relation suivante :

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_c}$$

Par ailleurs, nous avons montré précédemment :

$$\omega_{c_0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$$

Les bandes passantes d'un premier ordre s'expriment ainsi :

- Bande passante (ou BP à -3dB) : $BP = [0, \omega_c] = [0, \omega_0]$
- Bande passante à 0 dB : Si $K > 1$, $BP_0 = [0, \omega_{c_0}]$

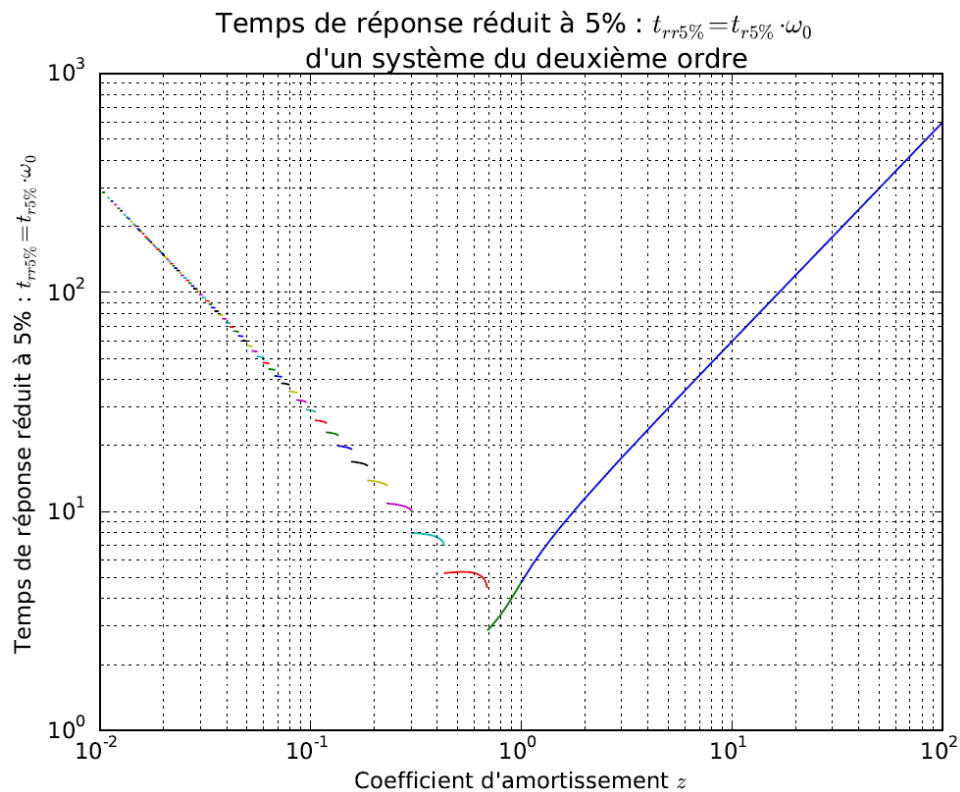
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.IV.3.a.ii Deuxième ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

• Temps de réponse à 5%

Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5% d'une réponse indicielle dépend du facteur d'amortissement. La courbe suivante permet de le déterminer :



Cette courbe illustre le fait que pour un second ordre, si z est fixé, on a :

$$tr_{5\%} \omega_0 = k(z)$$

Il est recommandé de savoir qu'au temps de réponse le plus faible ($z \approx 0,69$), avec présence d'un dépassement, on a :

$$tr_{5\%} \omega_0 \approx 3$$

Ainsi, une augmentation de ω_0 , correspondant à une augmentation de la bande passante à -3 dB (ω_c) et à 0 dB (ω_{c0}), induit une augmentation de la rapidité du système.

De même, il faut savoir qu'au temps de réponse le plus faible sans dépassement ($z = 1$), on a :

$$tr_{5\%} \omega_0 \approx 5$$

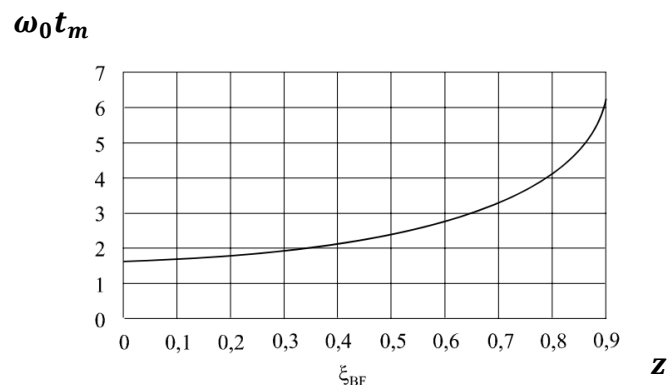
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• Temps de montée

Dans le cas d'un système du second ordre, le temps de montée peut être défini dans le cas de la présence d'un dépassement.

C'est donc dans le cas où $z < 1$.

Dans ce cas, on obtient la courbe suivante :



OUI !

Plus z est faible, plus le système est rapide

(Mais pas au sens tr5%)

En effet, on peut démontrer que :

$$\omega_0 t_m = \frac{\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)}{\sqrt{1-z^2}} = k'(z) \quad ; \quad t_m = \frac{k'(z)}{\omega_0}$$

L'analyse de cette fonction montre que, plus z diminue, plus le produit $\omega_0 t_m$ se rapproche d'une valeur constante entre 1,5 et 2. Pour les valeurs courantes du facteur d'amortissement (entre 0 et 0,9), on a :

$$1,5 < \omega_0 t_m < 6$$

Ou encore :

$$0 < z < 0,9 \Leftrightarrow 1,5 < k'(z) < 6$$

Remarque : le temps de montée tend vers l'infini quand z se rapproche de 1.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• **Bande passante**

Dans un système du second ordre, en résolvant l'équation :

$$G_{\omega_c} = G_0 - 3 = 20 \log |H(0)| - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4 \frac{z^2 \omega_c^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1 + \frac{\omega_c^4}{\omega_0^4} - 2 \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} + 4z^2 \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}$$

$$X = \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + (2z^2 - 1)2X - 1 = 0$$

$$\Delta = 4(2z^2 - 1)^2 + 4 > 0$$

$$X = \frac{(1 - 2z^2)2 + \sqrt{4(2z^2 - 1)^2 + 4}}{2} = (1 - 2z^2) + \sqrt{(2z^2 - 1)^2 + 1}$$

Comme $\omega_c > 0$

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + 1} - (2z^2 - 1)}$$

Par ailleurs, nous avons montré précédemment :

$$\omega_{c0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$$

Les bandes passantes d'un second ordre non résonnant s'expriment ainsi :

- Bande passante (ou BP à -3dB) : $BP = [0, \omega_c]$
- Bande passante à 0 dB : Si $K > 1$ & $z > \sqrt{2}/2$, $BP_0 = [0, \omega_{c0}]$.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.IV.3.a.iii Conclusions

1° ordre	2° ordre
$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$	$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$
$tr_{5\%} = 3\tau$ $\omega_c = \omega_0$ $\omega_{c0} = \omega_0 \sqrt{K^2 - 1}$	$t_m = \frac{k'(z)}{\omega_0}$ $0 < z < 0,9 \Leftrightarrow 1,5 < k'(z) < 6$ Rapidité associée à t_m $tr_{5\%} = \frac{k(z)}{\omega_0}$ $\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + 1} - (2z^2 - 1)}$ $\omega_{c0} = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(2z^2 - 1)^2 + (K^2 - 1)} + (1 - 2z^2)}$

Ces résultats s'appliquent à une fonction de transfert représentant un système complet. Dans la suite, nous allons étudier l'influence des réglages de la BO sur les performances en BF.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.IV.3.b Systèmes bouclés

Soit un premier ordre ou un second ordre en BO. Pour cet exemple, supposons des retours unitaires, ce qui ne changera pas les résultats obtenus...

1.IV.3.b.i Premier ordre bouclé

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}$$

$$H(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}}{1 + \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO} + \tau_{BO}p} = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}p} = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF}p}$$

On a donc les coefficients caractéristiques du système bouclé :

$$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} \quad ; \quad \tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}$$

• Temps de réponse à 5% et temps de montée

$$\text{On sait que } tr_{5\%} = 3\tau_{BF} = 3 \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}$$

On ne parle pas de temps de montée pour un 1° ordre.

• Influence de K_{BO}

Augmenter K_{BO} diminue τ_{BF} et améliore la rapidité

• Rapidité et bande passante de la BO

$$\omega_{c_{BO}} = \omega_{0_{BO}}$$

Augmenter la bande passante en BO revient à diminuer τ_{BO} , donc diminuer τ_{BF} et donc, améliorer la rapidité.

• Rapidité et bande passante à 0 db de la BO

$$\omega_{c_{0_{BO}}} = \omega_{0_{BO}} \sqrt{K_{BO}^2 - 1} = \frac{\sqrt{K_{BO}^2 - 1}}{\tau_{BO}}$$

Augmenter la bande passante à 0 db de la BO revient à :

- Augmenter K_{BO}
- Diminuer τ_{BO}

Dans tous les cas, cela revient à améliorer la rapidité du système.

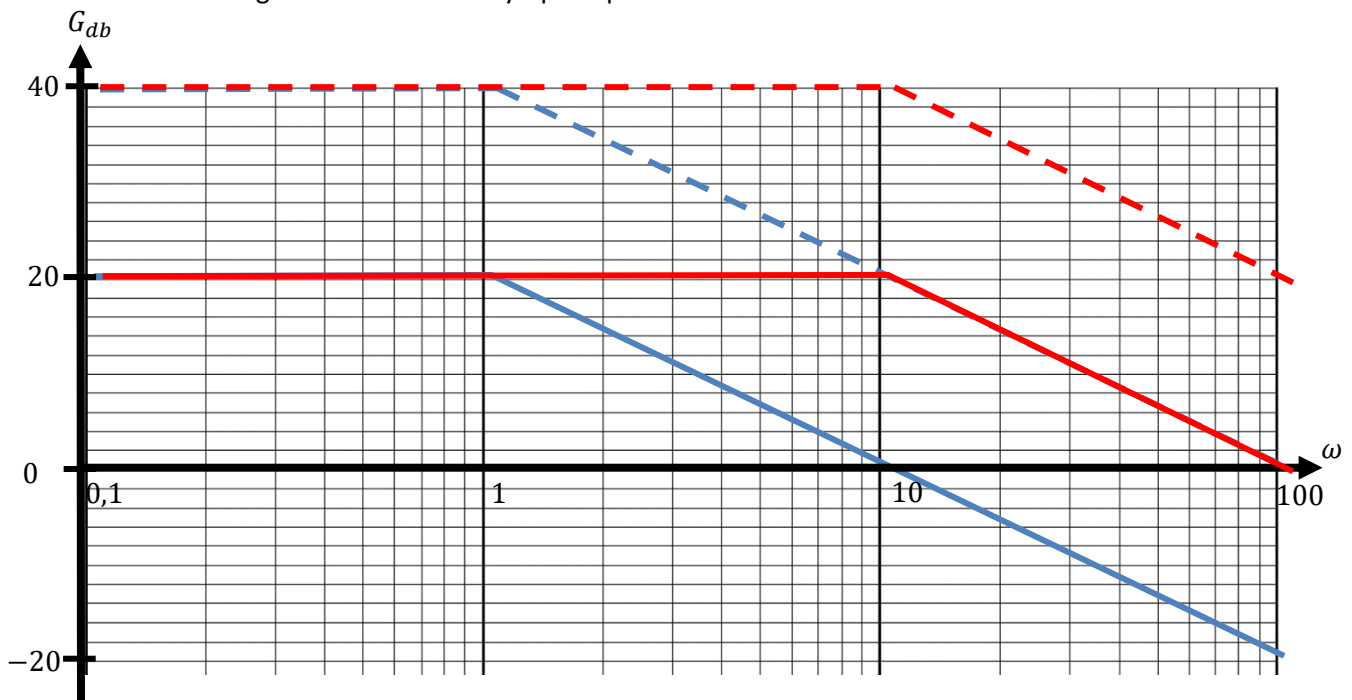
Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

• Illustration du lien BP/BP₀/Rapidité

Soient les 4 systèmes du premier ordre suivant de BO et de $\tau_{r_{5\%}}^1$ en BF suivants :

1	2	3	4
$FTBO(p) = \frac{K}{1 + Tp}$ — — — — —	$FTBO(p) = \frac{k}{1 + Tp}$ —————	$FTBO(p) = \frac{K}{1 + tp}$ - - - - -	$FTBO(p) = \frac{k}{1 + tp}$ —————
$\tau_{r_{5\%}}^1 = \frac{3T}{1 + K}$	$\tau_{r_{5\%}}^2 = \frac{3T}{1 + k}$	$\tau_{r_{5\%}}^3 = \frac{3t}{1 + K}$	$\tau_{r_{5\%}}^4 = \frac{3t}{1 + k}$
$t < T$ $k < K$	On prendra pour l'exemple : $\begin{cases} k = 10 \\ K = 100 \\ t = 1 \\ T = 10 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \tau_{r_{5\%}}^1 = 0,3 \text{ — — — — —} \\ \tau_{r_{5\%}}^2 = 2,72 \text{ —————} \\ \tau_{r_{5\%}}^3 = 0,03 \text{ - - - - -} \\ \tau_{r_{5\%}}^4 = 0,27 \text{ —————} \end{cases}$		

On trace les diagrammes de Bode asymptotiques des 4 FTBO :



On remarque que :

- A même BP (comparer 2 bleues ou 2 rouges), la rapidité est meilleure si K_{BO} est grand (pointillés)
- A même K_{BO} (comparer 2 traits pleins ou 2 pointillés), la rapidité est meilleure si la BP et/ou la BP₀ est grande (rouges)
- A même BP₀ (comparer bleu pointillés et rouge continu), on ne peut rien dire, car deux effets se contrent : plus grand K_{BO} mais plus petite BP

Soit :

- L'augmentation de la BP ou BP₀ (translation horizontale) de la BO améliore la rapidité
- L'augmentation de K_{BO} (translation verticale) améliore la rapidité

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.IV.3.b.ii *Second ordre bouclé*

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$H(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{2z_{BO}}{(1 + K_{BO})\omega_{BO}}p + \frac{p^2}{(1 + K_{BO})\omega_{BO}^2}} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2z_{BF}}{\omega_{BF}}p + \frac{p^2}{\omega_{BF}^2}}$$

$$\omega_{BF} = \omega_{BO}\sqrt{1 + K_{BO}} \quad ; \quad K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} \quad ; \quad z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}} < z_{BO}$$

• Temps de réponse à 5%

$$tr_{5\%} = \frac{k(z_{BF})}{\omega_{BF}} = \frac{k(z_{BF})}{\omega_{BO}\sqrt{1 + K_{BO}}}$$

• Temps de montée

$$t_m = \frac{k'(z_{BF})}{\omega_{BF}} = \frac{k'(z_{BF})}{\omega_{BO}\sqrt{1 + K_{BO}}} \quad ; \quad 0 < z < 0,9 \Leftrightarrow 1,5 < k'(z) < 6$$

• Influence de K_{BO}

Concernant t_m , augmenter K_{BO} fait diminuer z_{BF} , donc diminuer $k'(z_{BF})$ et augmenter ω_{BF} , soit finalement diminuer t_m et donc, améliorer la rapidité. Mais attention, pas au sens $tr_{5\%}$.

Tant que $z_{BF} > 0,7$, on peut dire la même chose de $tr_{5\%}$. Toutefois, $tr_{5\%}$ va finir par augmenter.

• Rapidité et bandes passantes de la BO

$$\omega_{BF} = \omega_{BO}\sqrt{1 + K_{BO}} \quad ; \quad \omega_{c_{BO}} = \omega_{BO}\sqrt{\sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + 1} - (2z_{BO}^2 - 1)}$$

$$\omega_{c_{0BO}} = \omega_{BO}\sqrt{\sqrt{(2z_{BO}^2 - 1)^2 + (K_{BO}^2 - 1)} + (1 - 2z_{BO}^2)}$$

Augmenter seulement ω_{BO} augmente toutes les bandes passantes, augmente ω_{BF} sans changer $k(z_{BF})$ et $k'(z_{BF})$, diminue le temps de réponse, et améliore donc la rapidité.

Si on ne joue que sur K_{BO} , on a vu que cela améliore la rapidité (t_m), on voit aussi que cela augmente la bande passante à 0 db de la BO.

Enfin, si l'on diminue z_{BO} , cela diminue z_{BF} et a le même effet que l'augmentation de K_{BO} . Et sur les bandes passantes, diminuer z_{BO} va augmenter $\omega_{c_{BO}}$ et $\omega_{c_{0BO}}$ (la fonction $\sqrt{x^2 + k} - x$ est décroissante et augmenter z_{BO} , c'est augmenter x), donc les bandes passantes.

On trouve bien que l'augmentation des bandes passantes améliore la rapidité, quelle qu'en soit l'origine.

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.IV.3.b.iii Conclusions

Pour un système du premier ordre :

- $tr_{5\%} = 3\tau_{BF} = 3 \frac{\tau_{BO}}{1+K_{BO}}$
- Augmenter K_{BO} améliore la rapidité
- Augmenter la bande passante en BO revient à augmenter ω_{0BO} /diminuer τ_{BO}
- Augmenter la bande passante à 0 db en BO revient à augmenter K_{BO} et/ou diminuer τ_{BO}
- Augmenter les bandes passantes diminue τ_{BF} et augmente donc la rapidité

Pour un système du second ordre :

- $tr_{5\%} = \frac{k(z_{BF})}{\omega_{0BF}}$ et $t_m = \frac{k'(z_{BF})}{\omega_{0BF}}$ avec $\omega_{0BF} = \omega_{0BO}\sqrt{1+K_{BO}}$
- Améliorer la rapidité veut dire diminuer t_m
- Augmenter K_{BO} augmente ω_{0BF} , diminue $k'(z_{BF})$ et améliore donc la rapidité. Cela augmente la BP_0 . Mais attention, augmenter K_{BO} peut faire augmenter $k(z_{BF})$ et augmenter $tr_{5\%}$!
- Augmenter ω_{0BO} augmente les bandes passantes BP et BP_0 et augmente ω_{0BF} sans changer $k(z_{BF})$ et $k'(z_{BF})$, soit améliore la rapidité
- Diminuer z_{BO} a le même effet qu'augmenter K_{BO} en améliorant la rapidité, et fait augmenter BP et BP_0

On pourra étendre ces résultats à tous les systèmes.

1.IV.4 Conclusions sur la rapidité

Les critères de rapidité étudiés sur les systèmes sont :

- Temps de réponse à 5% du système
- Temps de montée du système
- Bande passante de la BO
- Bande passante à 0 db de la BO

La rapidité des systèmes en boucle fermés est améliorée par :

- L'augmentation du gain K_{BO}
- L'augmentation de la bande passante BP de la BO
- L'augmentation de la bande passante à 0 db BP de la BO

Dernière mise à jour	SLCI 1	Denis DEFAUCHY
28/08/2022	Performances	Cours

1.V. Dépassement

Le dépassement des systèmes fait partie de leurs performances. Donnons l'exemple d'un système du second ordre de facteur d'amortissement z tel que $z < 1$. La valeur du premier dépassement est :

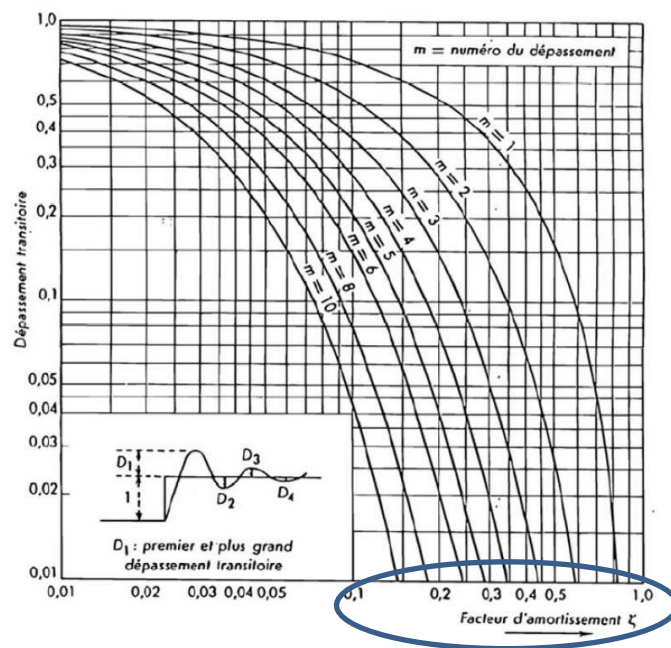
$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Si $z \approx 0,69$, $D_{1\%} \approx e^{\frac{-\pi \cdot 0,69}{\sqrt{1-0,69^2}}} \approx 5\%$ (la réponse quitte la banque des 5% au moment où z diminue un peu, ce qui fait remonter le temps de réponse – marches d'escalier de l'abaque)

Ce dépassement est obtenu au temps :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$$

L'abaque suivant permet de connaître la valeur des dépassements successifs des systèmes en fonction du facteur d'amortissement :



Attention à l'échelle en abscisses

Ainsi, plus z est faible, plus le dépassement est important.

Dans le cas d'un système du second ordre bouclé à retour unitaire, nous avons montré que :

$$z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}} < z_{BO}$$

Ainsi, dans ce cas, une **augmentation du gain de la boucle ouverte K_{BO} induit une diminution de l'amortissement en boucle fermée, soit une augmentation du dépassement.**

D'une manière générale, l'augmentation du gain de la boucle ouverte induit l'apparition ou l'augmentation du dépassement.