FONCTIONS GÉNÉRATRICES [CNC-2017]

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, lorsqu'il existe, la fonction G_X par : $G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P\left(X = k\right)$

Partie I: Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Montrer que la fonction génératrice G_X est au moins définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad G_X^{(k)}(0) = k!P\left(X = k\right)$
3. Donner l'expression de G_X , en précisant le domaine de définition, dans chaque cas suivant :
   (a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$.
   (b) X suit la loi binomiale de paramètre n, p, notée $\mathcal{B}(n, p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad p \in [0, 1]$.
   (c) X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $G'_X(1) = E(X)$.
5. Montrer que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$.
6. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p, où $p \in]0, 1[$.

Partie II: La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = [\![1, n]\!] = \{1, \cdots, n\}$. On suppose que pour tout k de $[\![1, n]\!]$ $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X, telle que $X(\Omega) = [\![1, m]\!]$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, (en particulier, sachant que l'événement $[N = h]$ est réalisé, $h \in [\![1, n]\!]$, alors $S = \sum_{i=1}^{h} X_i$).

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad G_{X_1 + \cdots + X_k} = G_X^k$.
2. (a) Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend un nombre fini de valeurs dans $Y(\Omega)$, montrer que $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k) E(Y|[N = k])$, où $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $E(Y|[N = k]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP((Y = y)|[N = k])$ désigne l'espérance de Y sachant l'événement $[N = k]$ et $P((Y = y)|[N = k])$ désigne la probabilité de $(Y = y)$ sachant l'événement $[N = k]$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout réel t, $E(t^S|[N = k]) = G_X^k(t)$.
   (c) En déduire que pour tout réel t, $G_S(t) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k) G_X^k(t)$.
   (d) Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
3. En déduire que $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III: Applications

On dispose d'un jeton non truqué à deux faces numérotées 1 et 2 et d'un dé tétraédrique (famille des pyramides composés de quatre faces triangulaires), équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On lance le jeton et on note N le numéro obtenu, puis on lance N fois le dé et pour chaque lancer, on note le numéro de la face d'appui du dé. Soit S la somme des numéros obtenus lors de ces N lancers, (si $N = 1$, le dé est lancé une seule fois et S est le numéro lu sur la face d'appui du dé).

1. (a) Déterminer la loi de N.

Fonctions génératrices [CNC-2017]

(b) Donner la loi conditionnelle de S sachant $[N=k]$, pour $k=1$, puis pour $k=2$.

(c) En déduire la loi de S, puis son espérance et sa variance.

2. (a) Identifier la variable aléatoire X telle que $S=\sum_{i=1}^{N} X_i$, où X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

(b) Déterminer les fonctions génératrices G_N et G_X et en déduire la fonction génératrice G_S.

(c) Retrouver, en utilisant la fonction génératrice G_S, la loi, l'espérance et la variance de S.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES [CNC-2017]

Partie I: Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Soit $t \in [-1,1]$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $\left|p(X=k)t^k\right| \leqslant p(X=k)$. La série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} p(X=k)$ converge de somme 1. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série $\sum_{n\geqslant 0} t^k p(X=k)$ converge normalement sur $[-1,1]$. Or la convergence normale entrai ?ne la convergence simple. Donc la fonction génératrice est au moins définie sur l ?intervalle $[-1,1]$.
2. G_X est une fonction définie par une série entiére, donc les coefficients du développement de la série sont définis d ?une maniére unique par les relations :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad G_X^{(k)}(0) = k!P(X=k)$$
3. (a) Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0,1]$. Alors
$$G_X(t) = (1-p)t^0 + pt = p(t-1)+1$$
G_X est un polynôme en t, donc elle est définie sur $\mathbb{R}$
   (b) Si X la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n,p)$, alors
$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p+pt)^n \end{aligned}$$
G_X est un polynôme en t, donc elle est définie sur $\mathbb{R}$
   (c) Si X la loi de poisson $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$, alors $\forall t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$:
$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} t^n q^{n-1} p \\ &= \frac{tp}{1-qt} \end{aligned}$$
4. Montrons que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $G'_X(1) = E(X)$.
   $\Rightarrow$) Si X admet une espérance, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} nP(X=n)$ converge. Les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} P(X=n)t^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} nP(X=n)t^{n-1}$ sont alors normalement convergentes sur $[-1,1]$, donc G_X est dérivable en 1 de dérivé $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$
   $\Leftarrow$) Supposons que G_X est dérivable en 1. Le taux d'accroissement
$$\frac{G_X(t)-G_X(1)}{t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n-1}{t-1} P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} t^k P(X=n)$$
admet une limite finie quad $t \to 1^-$.
Soit $N \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} nP(X=n) &= \lim_{t\to 1^-} \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} t^k P(X=n) \\ &\leqslant \lim_{t\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} t^k P(X=n) = G'_X(1) \end{aligned}$$
La série $\sum_{n\geqslant 1} nP(X=n)$ est donc convergente car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.

5. Montrons que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

$\Rightarrow$) Si X admet un moment d'ordre 2, il y a convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 P(X=n)$ mais aussi de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,(n-1)\,P(X=n)$.

Les trois séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(X=n)t^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} nP(X=n)t^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,(n-1)\,P(X=n)t^n$ sont alors normalement convergentes sur $[-1,1]$, donc G_X est deux fois dérivable en 1 de dérivé premier $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$ et de dérivé second

$$G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)$$

Soit $E\left(X^2\right) = G''_X(1) + G'_X(1)$. Par la formule de Huygens, on obtient

$$\mathbb{V}\left(X\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = G''_X\left(1\right) + G'_X\left(1\right) - \left(G'_X\left(1\right)\right)^2$$

$\Leftarrow$) Supposons que G_X deux fois dérivable en 1. La fonction G_X est dérivable en 1, donc X admet une espérance. On sait de plus l'expression de $G'_X(t)$ sur $[-1,1]$.

$$G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)t^{n-1}$$

$$\frac{G'_X(t) - G'_X(1)}{t-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{t^{n-1}-1}{t-1}P(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\sum_{k=0}^{n-2} t^k P(X=n)$$

admet une limite finie quad $t \to 1^-$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} n(n-1)P(X=n) &= \lim_{t\to 1^-} \sum_{n=2}^{N} n\sum_{k=0}^{n-2} t^k P(X=n)\\ &\leqslant \lim_{t\to 1^-} \sum_{n=2}^{+\infty} n\sum_{k=0}^{n-2} t^k P(X=n) = G''_X(1)\end{aligned}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)P\left(X=n\right)$ est donc convergente car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées. Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)P\left(X=n\right)$ converge, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 P\left(X=n\right)$ converge, c'est-à-dire, la variable X admet un moment d'ordre 2

6. On a : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{q}\right[$, $\quad G_X(t) = \dfrac{tp}{1-qt}$ qui est la restriction d'une fraction rationnelle, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{q}\right[$, avec

$$\begin{aligned}G'_X(t) &= \frac{p}{(1-tq)^2}\\ G''_X(t) &= \frac{2pq}{(1-tq)^3}\end{aligned}$$

avec $1 \in \left]-\dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{q}\right[$, on obtient $G'_X(1) = \dfrac{1}{p} = E(X)$ et $G''_X(1) = \dfrac{2pq}{(1-q)^3} = \dfrac{2q}{p^2}$. Ainsi

$$V(X) = G''_X\left(1\right) + G'_X\left(1\right) - \left(G'_X\left(1\right)\right)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Partie II: La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Fonctions génératrices [CNC-2017]

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = [\![1, n]\!] = \{1, \cdots, n\}$. On suppose que pour tout k de $[\![1, n]\!]$ $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X, telle que $X(\Omega) = [\![1, m]\!]$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, (en particulier, sachant que l'événement $[N = h]$ est réalisé, $h \in [\![1, n]\!]$, alors $S = \sum_{i=1}^{h} X_i$).

1. Par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$.
   - Pour $k = 1$, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $G_{X_1}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} t^p p(X_1 = p) = \sum_{p=0}^{+\infty} t^p p(X = p) = G_X(t)$. Donc $G_{X_1} = G_X$
   - Pour $k = 2$. Par définition $G_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2})$. Puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes, alors t^{X_1} et t^{X_2} le sont aussi et par suite $E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1}).E(t^{X_2}) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = G_X^2(t)$. Soit $G_{X_1+X_2} = G_X^2$
   - Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. Supposons l'égalité varie pour k et montrons la pour $k+1$. Notons $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$, alors, par l'indépendance héritée Y et X_{k+1} sont indépendantes, donc $G_{Y+X_{k+1}} = G_Y G_{X_{k+1}} = G_Y G_X$. Par hypothèse de récurrence $G_Y = G_{X_1+\cdots+X_k} = G_X^k$, donc $G_{X_1+\cdots+X_k+X_{k+1}} = G_{Y+X_{k+1}} = G_X^{k+1}$
2. (a) La famille $([N = k])_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad p(Y = y) = \sum_{k=1}^{n} p(Y = y | N = k) p(N = k)$$

Donc

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y p(Y = y) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{k=1}^{n} y p(Y = y | N = k) p(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{y \in Y(\Omega)} y p(Y = y | N = k) p(N = k) \quad \text{Les sommes finies} \\ &= \sum_{k=1}^{n} p(N = k) \sum_{y \in Y(\Omega)} y p(Y = y | N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} p(N = k) E(Y | N = k) \end{aligned}$$

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$ on pose $Y = t^S$. Par le théorème du transfert :

$$E(t^s | N = k) = \sum_{s \in S(\Omega)} t^s p(S = s | N = k)$$

Mais l'événement $[S = s | N = k] = [\sum_{i=1}^{k} X_i = s]$, donc

$$\begin{aligned} E(t^s | N = k) &= \sum_{s \in S(\Omega)} t^s p\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = s\right) \\ &= G_{X_1+\cdots+X_k}(t) = G_X^k(t) \end{aligned}$$

Soit $E(t^S | [N = k]) = G_X^k(t)$.

Fonctions génératrices [CNC-2017]

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $Y = t^S$. On a

$$G_S(t) = E\left(t^S\right) = \sum_{k=1}^{n} p(N=k)E(t^s|N=k) = \sum_{k=1}^{n} p(N=k)G_X^k(t)$$

$G_S(t) = \sum_{k=1}^{n} P(N=k)G_X^k(t).$

(d) Soit $t \in \mathbb{R}$. Par le théorème du transfert

$$G_N \circ G_X(t) \quad = \quad G_N\left(G_X(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} G_X^k(t)p(N=k) = G_S(t)$$

Donc $G_S = G_N \circ G_X$.

3. On a $G'_S(t) = G'_X(t).G'_N\left(G_X(t)\right)$, en particulier

$$E(S) = G'_S(1) = G'_X(1).G'_N\left(G_X(1)\right) = G'_S(t) = G'_X(1).G'_N\left(1\right) = E(N)E(X)$$

Partie III: Applications

En cours