CORRIGÉ PROBLÈME CENTRALE MP 1996

Partie I

L'égalité (2) se prouve immédiatement à partir de (1), par récurrence sur n, ou par un calcul direct ; en effet, en appliquant l'égalité (1) à $x+ka$ et en multipliant par λ^k on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \lambda^k F(x+ka) - \lambda^{k+1} F(x+(k+1)a) = \lambda^k f(x+ka)$$

puis en sommant ces égalités pour k variant de 0 à $n-1$ on obtient le résultat après télescopage.
L'égalité (3) se démontre de la même manière, ou bien directement en remplaçant x par $x-na$ dans (2) :

$$F(x-na) = \lambda^n F(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f\big(x-(n-k)a\big) = \lambda^n F(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda^{n-j} f(x-ja)\,.$$

En multipliant alors les deux membres par λ^{-n}, on obtient (3).

Partie II

II.1. $\mathcal{L}$ n'est évidemment pas vide. Pour $(f,g) \in \mathcal{L}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité triangulaire montre que $\alpha f + \beta g$ est $(|\alpha| K_f + |\beta| K_g)$-lipschitzienne, donc appartient à $\mathcal{L}$.

II.2. Si $|f'|$ est majorée par M, l'inégalité des accroissements finis montre que f est M-lipschitzienne.

Réciproquement, si f est M-lipschitzienne, on a $\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant M$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$.

Le passage à la limite lorsque y tend vers x donne $|f'(x)| \leqslant M$; f' est donc bornée.

II.3. Notons M_f et M_g des majorants de $|f|$ et $|g|$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= \big|\big(f(x)-f(y)\big)g(x) + f(y)\big(g(x)-g(y)\big)\big| \\ &\leqslant |f(x)-f(y)|\,|g(x)| + |f(y)|\,|g(x)-g(y)| \leqslant (K_f M_g + M_f K_g)\,|x-y|\,. \end{aligned}$$

On en déduit que fg appartient à $\mathcal{L}$.

Le résultat tombe en défaut si f ou g n'est pas bornée. Par exemple, avec $f(x)=x$ et $g(x)=x$, on a $(f,g) \in \mathcal{L}^2$ d'après **II.2**, mais $fg \notin \mathcal{L}$, car sa dérivée $x \mapsto 2x$ n'est pas bornée. On peut aussi considérer l'exemple $f(x)=x$ et $g(x)=\sin x$ où l'une seule des deux fonctions n'est pas bornée et où le résultat tombe également en défaut, pour les mêmes raisons.

II.4. $|f(x)| = |(f(x)-f(0)) + f(0)| \leqslant |f(x)-f(0)| + |f(0)| \leqslant K_f\,|x| + |f(0)|$.

II.5. Supposons dans un premier temps $x \geqslant y$. Si $x-y \leqslant 1$, l'inégalité $|f(x)-f(y)| \leqslant M\,|x-y|$ est vérifiée par hypothèse.

Sinon, soit $n = \lfloor x-y \rfloor$ la partie entière de $x-y$, de sorte que $x-n \geqslant y$ et $x-(n+1) < y$. On a alors

$$|f(x)-f(y)| = \left|\sum_{k=1}^{n} [f(x-(k-1)) - f(x-k)] + [f(x-n)-f(y)]\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(x-(k-1)) - f(x-k)| + |f(x-n)-f(y)|$$

L'hypothèse sur f donne $|f(x-(k-1)) - f(x-k)| \leqslant M$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ et $|f(x-n)-f(y)| \leqslant M(x-n-y)$ d'où

$$|f(x)-f(y)| \leqslant nM + M(x-n-y) = M(x-y)\,.$$

Dans le cas $y \geqslant x$ il suffit de changer les rôles de x et y et l'on aura toujours $|f(x)-f(y)| \leqslant M\,|x-y|$.
f appartient donc à $\mathcal{L}$.

Partie III

III.A.

III.A.1.

a) Avec les notations du **II.4**, $|\lambda^n f(x+na)| \leqslant |\lambda|^n \big(A|x+na| + B\big) \leqslant A|a|\,n|\lambda|^n + (A|x|+B)|\lambda|^n$.

Comme $|\lambda| < 1$, on en déduit (croissances comparées...) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 |\lambda^n f(x+na)| = 0$ soit $|\lambda^n f(x+na)| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Par comparaison avec une série de Riemann, on en déduit que la série $\sum \lambda^n f(x+na)$ est absolument convergente.

b) • Soit F la fonction définie par $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n f(x+na)$ (cette série converge d'après le **a)**). Un calcul facile montre qu'elle vérifie (1) :

$$F(x)-\lambda F(x+a)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n f(x+na)-\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^{n+1}f(x+(n+1)a)=f(x)\quad\text{(télescopage)}.$$

• Prouvons maintenant que F appartient à $\mathcal{L}$; pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$|F(x)-F(y)|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\Big|\lambda^n\big(f(x+na)-f(y+na)\big)\Big|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|^n K_f|x-y|=\frac{K_f}{1-|\lambda|}\,|x-y|\,,$$

d'où le résultat.

• Il reste à prouver l'unicité de F. Si G est une autre fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant (1), alors $G-F\in\mathcal{L}$ d'après **II.1**, et $G-F$ vérifie

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ (G-F)(x)=\lambda(G-F)(x+a)\,.$$

Par récurrence, on a $(G-F)(x)=\lambda^n(G-F)(x+na)$ d'où $|(G-F)(x)|\leqslant|\lambda|^n\,(A\,|x+na|+B)$ où A et B sont les constantes adaptées à $G-F$ comme dans **II.4**. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}|\lambda|^n\,(A\,|x+na|+B)=0$, on en déduit $G-F=0$, d'où l'unicité cherchée.

III.A.2.

a) f_1 est 0-lipschitzienne et appartient donc à $\mathcal{L}$. On a directement $F_1(x)=\dfrac{1}{1-\lambda}$ (somme d'une série géométrique).

b) f_2 appartient à $\mathcal{L}$ car elle est dérivable à dérivée bornée.

$F_2(x)$ est la partie réelle de $G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^n e^{i(x+na)}$. Or :

$$G(x)=e^{ix}\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda e^{ia})^n=\frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}}=\frac{e^{ix}(1-\lambda e^{-ia})}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2},$$

donc $F_2(x)=\dfrac{\cos x-\lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\cdot$

c) f_3 appartient à $\mathcal{L}$ car elle est dérivable à dérivée bornée et $F_3(x)=\mathcal{I}m\big(G(x)\big)=\dfrac{\sin x-\lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}\cdot$

III.B.

III.B.1. Il suffit d'appliquer le **A.I.a** à $-a$ et à $1/\lambda$, qui vérifie bien $|1/\lambda|<1$.

III.B.2. En remplaçant x par $x-a$ et en divisant par $-\lambda$, (1) se réécrit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)-\frac{1}{\lambda}F(x-a)=-\frac{1}{\lambda}f(x-a)\,.$$

En posant $b=-a$, $\mu=\dfrac{1}{\lambda}$ et $g(x)=-\dfrac{1}{\lambda}f(x-a)$, cela devient : $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)-\mu F(x+b)=g(x)$.

La fonction g appartient évidemment à $\mathcal{L}$. Comme $|\mu|<1$, on peut appliquer **A.I.b** : (1) admet donc une unique solution F dans $\mathcal{L}$ et elle est donnée par :

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mu^n g(x+nb)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^{-n-1}f\big(x-(n+1)a\big)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{-n}f(x-na)\,.$$

III.B.3. Les calculs sont très semblables à ceux de **A.2**. On trouve pour F_1,F_2 et F_3 les mêmes expressions qu'en **A.II**.

Partie IV

IV.A.

IV.A.1. Si F vérifie (1) et appartient à $\mathcal{L}$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|f(x)|=|F(x)-F(x+a)|\leqslant K_F|a|$. f est donc bornée.

IV.A.2.

a) Toute fonction constante non nulle convient ! On peut aussi choisir des fonctions lipschitziennes a-périodiques, par exemple $x \mapsto \sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)$.

b) Il n'y a pas unicité, car si F est une solution de (1) dans $\mathcal{L}$, $F + c$ en est une autre, pour tout réel non nul c.

IV.A.3.

a) $F_2(x) \underset{\lambda \to 1}{\longrightarrow} \dfrac{\cos x - \cos(x-a)}{2\,(1-\cos a)}$; notons $F(x)$ cette limite. F est lipschitzienne car les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \cos(x-a)$ le sont et que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.
En passant à la limite quand λ tend vers 1 dans l'égalité (1) vérifiée par F_2, on obtient $F(x) - F(x+a) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, F vérifie bien (1) avec $\lambda = 1$.

b) Ici $a = 2\pi$. Par l'absurde, supposons qu'une fonction F de $\mathcal{L}$ vérifie $F(x) - F(x+2\pi) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'égalité (2) s'écrit ici $F(x) - F(x+2n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+2\pi) = n\cos x$. En prenant $x = 0$ et $x = \pi$, on obtient $F(0) - F(2n\pi) = n$ et $F(\pi) - F\big((2n+1)\pi\big) = -n$, puis, par différence, $F\big((2n+1)\pi\big) - F(2n\pi) = 2n + F(\pi) - F(0)$, ce qui est absurde car, puisque $F \in \mathcal{L}$, $\big|F\big((2n+1)\pi\big) - F(2n\pi)\big| \leqslant K_F\,\pi$.

IV.B.

IV.B.1.

a) On peut par exemple prendre la fonction $x \mapsto \sin \dfrac{\pi x}{a}$, qui est bien lipschitzienne, puisque sa dérivée est bornée.

b) Comme au **A.2.b**, si F est une solution de (1) dans $\mathcal{L}$, $x \mapsto F(x) + \sin \dfrac{\pi x}{a}$ en est une autre.

IV.B.2.

a) On fait maintenant tendre λ vers -1 dans (5).
$F_2(x) \underset{\lambda \to -1}{\longrightarrow} \dfrac{\cos x + \cos(x-a)}{2\,(1+\cos a)}$; notons $F(x)$ cette limite. Les mêmes arguments qu'au **A.3.a** montrent que $F \in \mathcal{L}$ et que F vérifie (1) avec $\lambda = -1$.

b) Ici $a = \pi$. Par l'absurde, supposons qu'une fonction F de $\mathcal{L}$ vérifie $F(x) + F(x+\pi) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On aurait aussi $F(x+\pi) + F(x+2\pi) = -\cos x$ et, par différence, $F(x) - F(x+2\pi) = 2\cos x$. $F/2$ serait donc un élément de $\mathcal{L}$ vérifiant (1) avec $\lambda = 1$ et $a = 2\pi$ et on a vu en **A.3.b** que c'est impossible.

IV.B.3.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\big(f(x+n)\big)$ est décroissante et tend vers 0 ; elle est donc aussi positive et la série $\sum (-1)^n f(x+n)$ converge d'après le théorème des séries alternées.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x+n)$.

• On a $F(x+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x+n+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f(x+n)$, d'où $F(x) + F(x+1) = f(x)$; F est donc une solution de (1).

• Par le théorème des séries alternées (majoration et signe des restes), $0 \leqslant F(x) \leqslant f(x)$, donc F tend vers 0 en $+\infty$.

• Soient x et y deux réels tels que $0 \leqslant x - y \leqslant 1$. $F(x) - F(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \big(f(x+n) - f(y+n)\big)$.
L'inégalité des accroissements finis, la décroissance de f et la croissance de f' donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x+n) - f(y+n) \leqslant (x-y)\,f'(x+n) \leqslant (x-y)\,f'(y+n+1) \leqslant f(x+n+1) - f(y+n+1) \leqslant 0\,.$$

$F(x) - F(y)$ apparaît donc comme la somme d'une série qui satisfait aux hypothèses du théorème des séries alternées. On en déduit que $|F(x) - F(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant K_f\,(x-y)$. D'après II.5), on peut en déduire que F appartient à $\mathcal{L}$.

• Soit enfin G une fonction de $\mathcal{L}$, tendant vers 0 en $+\infty$ et vérifiant (1). La fonction $H = G - F$ vérifie $H(x+1) = -H(x)$ donc $H(x+n) = (-1)^n H(x)$ pour tout réel x et tout entier n. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} H(x+n) = 0$ on en déduit que H est nulle. F est bien la seule solution de (1) dans $\mathcal{L}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆