Mécanique

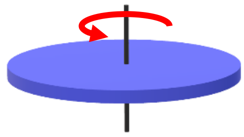
MECA2 - Dynamique

TD1

Matrices d'inerties

Programme PSI/MP 2022 (LIEN)		
Id	Compétence développée	Connaissances associées
B2-10	Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.
C1-05	Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.
C2-08	Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.	Torseurs cinétique et dynamique d'un solide ou d'un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen. Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen. Énergie cinétique. Inertie et masse équivalentes. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen. Puissance intérieure à un ensemble de solides. Théorème de l'énergie cinétique. Rendement en régime permanent.
C2-09	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.	

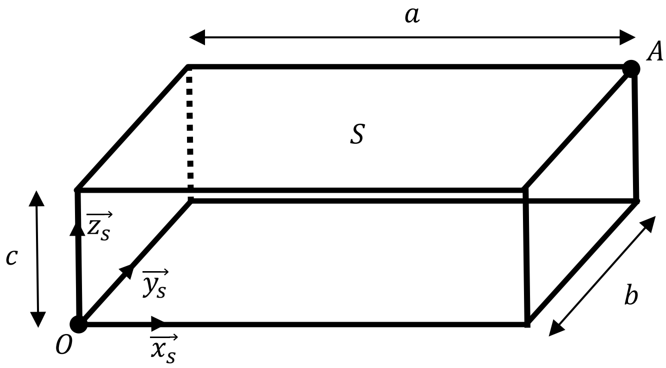
Contexte



Imaginons que nous disposons d'un plateau tournant d'axe vertical (pas d'effets de la gravité) entraîné en rotation selon $\vec{z}$ par un moteur fournissant un couple constant C, à partir d'une vitesse angulaire nulle. L'équation du mouvement s'écrirait : $C = J\ddot{\theta}$ ou $\ddot{\theta} = \frac{C}{J}$. Voyons dans ce TD ce que seraient ces inerties J à prendre en compte selon la position sur le plateau d'un objet parallélépipédique, cylindrique et sphérique. On négligera l'inertie du plateau, et on supposera que les pièces adhèrent parfaitement au plateau.

Exercice 1: Matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle

Soit le parallélépipède rectangle de masse volumique constante suivant :



Question 1: Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du solide S dans le repère $(O, \overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S})$

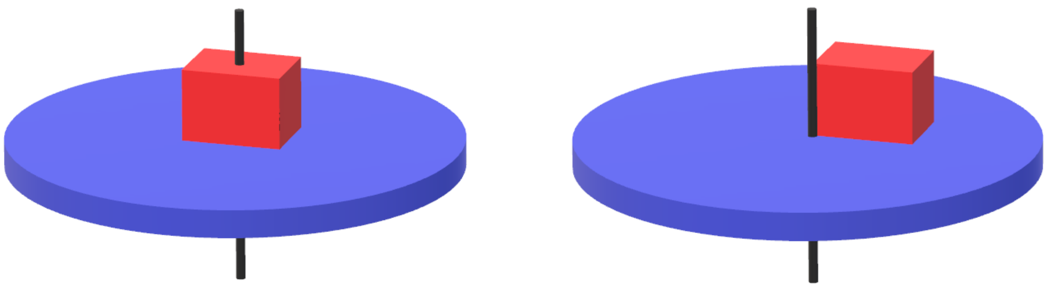
Question 2: Déterminer la matrice d'inertie $I(G, S)$ de S en G

Question 3: Déterminer la matrice d'inertie $I(O, S)$ de S en$O$ en utilisant le théorème de Huygens généralisé

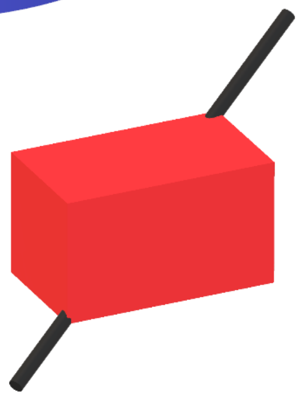
Question 4: Déterminer la matrice d'inertie $I(O, S)$ de S en O par la méthode intégrale

Remarquez qu'il est possible de calculer $I(O, S)$ directement en O dans cet exercice.

Question 5: Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie J recherchée



On souhaite maintenant faire tourner cet objet autour de l'axe (OA).

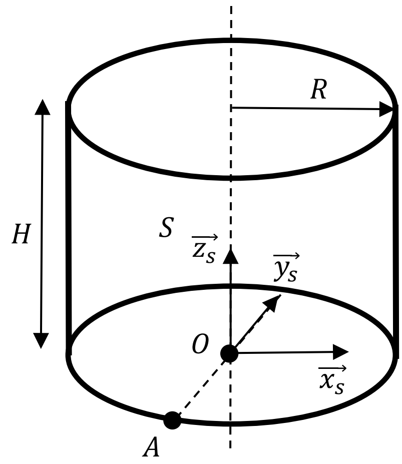


Question 6: Déterminer le moment d'inertie autour de cet axe

Remarque : on simplifiera au maximum le résultat trouvé

Exercice 2: Matrice d'inertie d'un cylindre

Soit le cylindre de masse volumique constante suivant :



Question 1: Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du solide S dans le repère $(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s}, \overrightarrow{z_s})$

Question 2: Déterminer la matrice d'inertie $I(G, S)$ de S en G

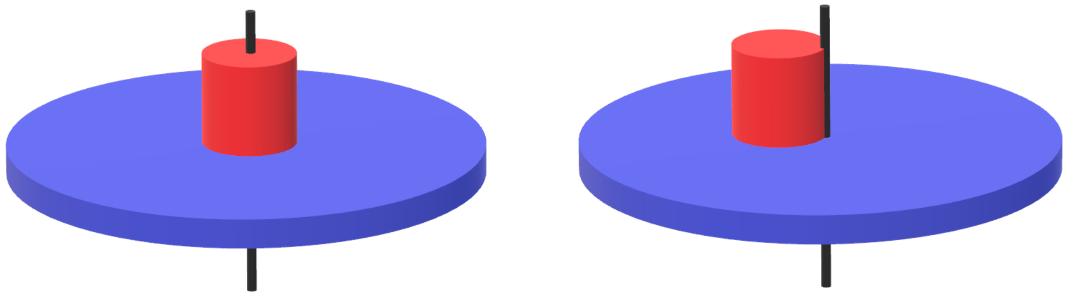
Question 3: Donner la forme de la matrice $I(A, S)$

Question 4: Déterminer la matrice d'inertie $I(A, S)$ de S en A en utilisant le théorème de Huygens généralisé

Question 5: Que pensez-vous de la méthode de calcul intégral pour déterminer $I(A, S)$

Remarque : il aurait été simple de déterminer par intégration la matrice en un autre point de l'axe (O par exemple), puisqu'étant sur l'élément de symétrie, on profite des mêmes simplifications de forme de matrice. Toutefois, les intégrales suivant z ayant des bornes différentes, les inerties $A = B$ changent de valeur. Seule celle autour de $(O, \vec{z})$ reste identique, ce qui est logique.

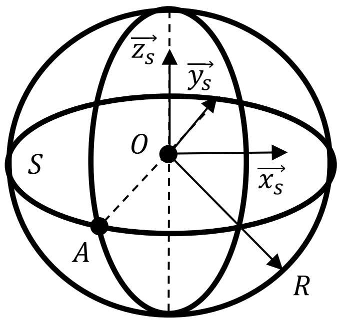
Question 6: Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie J recherchée



Question 7: Donner finalement la matrice d'inertie $I(G, S)$ d'un cylindre S de CDG G de révolution d'axe (G, x)

Exercice 3: Matrice d'inertie d'une sphère

Soit la sphère de masse volumique constante suivante :



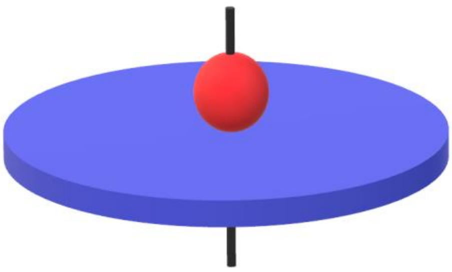
Question 1: Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du solide S dans le repère $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$

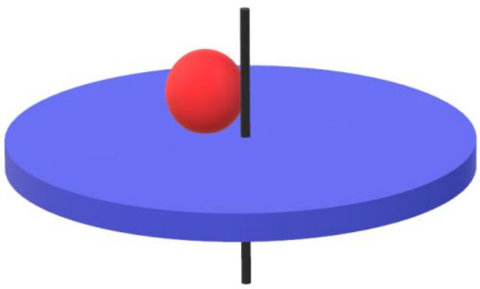
Question 2: Déterminer la matrice d'inertie $I(G,S)$ de S en G

Question 3: Déterminer la matrice d'inertie $I(A,S)$ de S en A en utilisant le théorème de Huygens généralisé

Question 4: Que pensez-vous de la méthode de calcul intégral pour déterminer $I(A,S)$

Question 5: Pour chacune des situations proposées, donner l'expression de l'inertie J recherchée





Exercice 4: Questions de concours

Question 1: X-ENS PSI 2018 – Questions 23-24

Le vilebrequin a une géométrie relativement simple. Il sera pour cette partie assimilé à l'association de 2 cylindres non-coaxiaux en acier pour son corps, sur laquelle est fixé un cylindre creux en cuivre correspondant au bobinage du rotor moteur. La Figure 16 reprend les quelques éléments de géométrie définissant justement le vilebrequin tel que décrit précédemment.
Le centre de gravité G_V du vilebrequin seul, au vu de la géométrie, est considéré comme appartenant à l'axe $(O, \overrightarrow{z_1})$ tel que : $\overrightarrow{OG_V} = L_G \cdot \overrightarrow{z_1}$ avec $L_G = 200\ mm$.

Question 23. Donner la forme de la matrice d'inertie du vilebrequin associé au bobinage exprimée en G_V. Seule la forme de la matrice est à donner et justifier, l'expression détaillée de chaque terme de la matrice n'est pas demandée.

Dans la suite de cette partie, il est admis que la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble exprimée au point G_V est telle que : $I(G_V) = \begin{bmatrix} A_V & 0 & 0 \\ 0 & B_V & 0 \\ 0 & 0 & J_V \end{bmatrix}_{(G_V, \overrightarrow{x1}, \overrightarrow{y1}, \overrightarrow{z1})}$

Question 24. Discuter des simplifications qui ont été faites pour aboutir à cette forme de matrice.

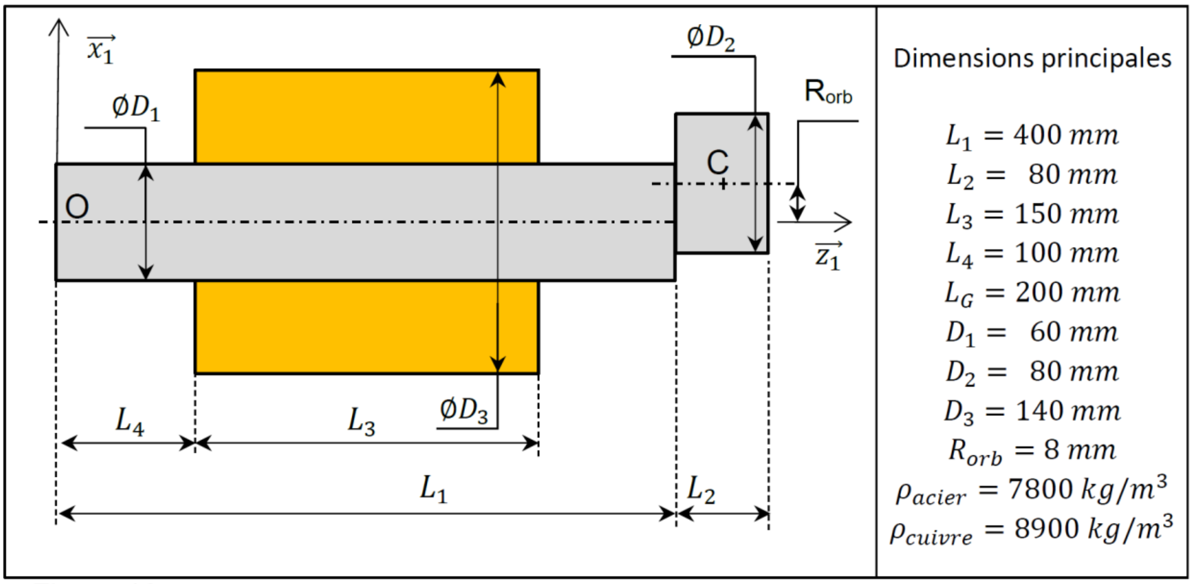


Figure 16 : *Géométrie simplifiée du vilebrequin (contrepoids non-représenté)*

Question non posée au concours mais que j'ajoute :

Question 2: Justifier mathématiquement l'hypothèse de considérer le centre de gravité sur l'axe

Question 3: E3A PSI 2017- Question I4

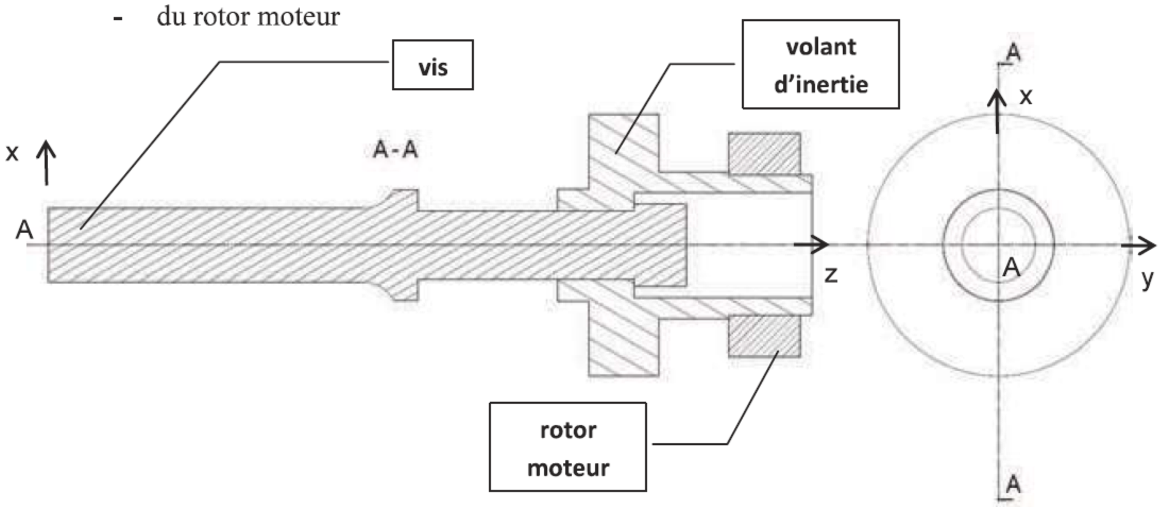
Les caractéristiques des parties tournantes sont fournis en annexe A.

Question I.4

- **Justifier pourquoi les produits d'inertie de la vis et du volant d'inertie sont nuls.**
- **Justifier pourquoi les moments d'inertie de la vis et du volant d'inertie sont égaux sur les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$.**
- **Dans quelles bases les matrices d'inertie de la vis et du volant d'inertie restent-elles identiques ?**

Les parties tournantes de la Presse SPR400 peuvent être modélisées par l'association :

- de la vis
- du volant d'inertie
- du rotor moteur



Données :

- vis :
  - Acier de masse volumique ρ_a=7860kg/m^3
  - masse m_v=515kg
  - matrice d'inertie $J(A,v)=\begin{bmatrix} 142,7 & 0 & 0 \\ 0 & 142,7 & 0 \\ 0 & 0 & 3,2 \end{bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ (unités kg.m^2)

- volant d'inertie :
  - Acier de masse volumique ρ_a=7860kg/m^3
  - masse m_v=870kg
  - matrice d'inertie $J(A,v\text{-}i)=\begin{bmatrix} 50,2 & 0 & 0 \\ 0 & 50,2 & 0 \\ 0 & 0 & 51,8 \end{bmatrix}_{A,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ (unités kg.m^2)