Planche n° 6. Le binôme de Newton. Corrigé

Exercice n° 1.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.}$$

2) Soit n un entier naturel non nul. Posons $S_1 = \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}}\binom{n}{2k}$ et $S_2 = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}$. Alors

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0 \text{ (car } n \geqslant 1),$$

et donc $S_1 = S_2$. Puis $2S_1 = S_1 + S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, et donc $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots = 2^{n-1}.}$$

3) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = k\binom{n-1}{k-1}.$$

4) $\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^n vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ ou encore $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

5) a) 1ère solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour x réel, posons $P(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

Pour tout x réel,

$$P(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.}$$

2ème solution. D'après 4),

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

b) 1ère solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour x réel, posons $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$. On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n,$$

et donc, pour x réel,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t)\ dt = \int_0^x (1+t)^n\ dt = \frac{1}{n+1}\left((1+x)^{n+1}-1\right).$$

En particulier, pour $x=1$, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.}$$

2ème solution. D'après 4), $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}((1+1)^{n+1}-1) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

6) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-p$, $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (ce qui reste vrai pour $k=0$ en tenant compte de $\binom{p}{p+1} = 0$). Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-p}\binom{p+k}{p} &= \sum_{k=0}^{n-p}\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}\\ &= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1}\ \text{(somme télescopique)}\\ &= \binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Interprétation dans le triangle de Pascal. Quand on descend dans le triangle de Pascal, le long de la colonne p, du coefficient $\binom{p}{p}$ (ligne p) au coefficient $\binom{n}{p}$ (ligne n), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve $\binom{n+1}{p+1}$ qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

7) Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$. $\binom{n+m}{k}$ est le coefficient de x^k dans le développement de $(1+x)^{n+m}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{n+m} = (1+x)^n(1+x)^m = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^k vaut $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]\\ i+j=k}}\binom{n}{i}\binom{m}{j}$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]\\ i+j=k}}\binom{n}{i}\binom{m}{j}.$$

Exercice n° 2. La formule du binôme de NEWTON fournit

$$(a-b+2c)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^k(2c)^{9-k}=(a-b)^9+\ldots+\binom{9}{6}(a-b)^6(2c)^3+\ldots+(2c)^9.$$

Ensuite,

$$(a-b)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}a^k(-b)^{6-k}=a^6-\ldots+\binom{6}{4}a^4(-b)^2-..+(-b)^6.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6}\binom{6}{4}2^3=\frac{9\times8\times7}{3\times2}\times\frac{6\times5}{2}\times2^3=3\times4\times7\times3\times5\times8=10080.$$

Exercice n° 3. Le développement de $(a+b+c+d)(a+b+c+d)$ est constitué de $4\times4=16$ termes qui sont des mots de deux lettres prises dans l'alphabet a, b, c, d. Quatre de ces mots utilisent deux fois la même lettre : $a\times a=a^2$, ..., $d\times d=d^2$. Il reste 12 mots se regroupant deux par deux : ab et ba, ..., cd et dc. Donc

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Le développement de $(a+b+c)^3$ est constitué de 27 termes. Il y a les trois termes utilisant une lettre et une seule a^3, b^3 et c^3. Il y a ensuite les termes utilisant les trois lettres a, b et c : abc, acb, bac, bca, cab et cba. Ces termes se regroupent en le terme $6abc$.
Il reste encore les termes utilisant deux lettres distinctes, l'une de ces lettres apparaissant deux fois. Il y a $27-3-6=18$ tels termes. Chaque terme a^2b, ab^2, a^2c, ac^2, b^2c et bc^2 apparait un même nombre de fois, à savoir $\dfrac{18}{6}=3$ fois. Donc,

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc.$$

Exercice n° 4.

Soit n un entier naturel non nul. Le terme général du développement de $(a+b)^n$ est $u_k=\dbinom{n}{k}a^kb^{n-k}$, $0\leqslant k\leqslant n$. Pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{\dbinom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k-1}}{\dbinom{n}{k}a^kb^{n-k}}=\frac{n-k}{k+1}\times\frac{a}{b}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}>1\Leftrightarrow\frac{n-k}{k+1}\times\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow(n-k)a>(k+1)b\Leftrightarrow k<\frac{na-b}{a+b}.$$

1er cas. Si $\dfrac{na-b}{a+b}>n-1$ (ce qui équivaut à $n<\dfrac{a}{b}$), alors la suite $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est strictement croissante et le plus grand terme est le dernier : a^n.

2ème cas. Si $\dfrac{na-b}{a+b}\leqslant0$ (ce qui équivaut à $n\leqslant\dfrac{b}{a}$), alors la suite $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est strictement décroissante et le plus grand terme est le premier : b^n.

3ème cas. Si $0<\dfrac{na-b}{a+b}\leqslant n-1$. Dans ce cas, la suite est strictement croissante puis éventuellement momentanément constante, suivant que $\dfrac{na-b}{a+b}$ soit un entier ou non, puis strictement décroissante (on dit que la suite u est unimodale).

Si $\dfrac{na-b}{a+b}\notin\mathbb{N}$, on pose $k_0=E\left(\dfrac{na-b}{a+b}\right)+1$, la suite u croit strictement jusqu'à ce rang puis décroit strictement. Le plus grand des termes est celui d'indice k, atteint une et une seule fois.

Si $\dfrac{na-b}{a+b}\in\mathbb{N}$, le plus grand des termes est atteint deux fois à l'indice k_0-1 et à l'indice k_0.

Exercice n° 5.

Pour $n\geqslant3$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=5n &\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n\\ &\Leftrightarrow n(-24+3(n-1)+(n-1)(n-2))=0 \Leftrightarrow n^2-25=0\\ &\Leftrightarrow n=5.\end{aligned}$$

D'autre part, $1+0+0\neq 5$ et $2+1+0\neq 10$ et donc 1 et 2 ne sont pas solution de l'équation. L'équation proposée admet une solution et une seule dans $\mathbb{N}^*$ à savoir 5.

