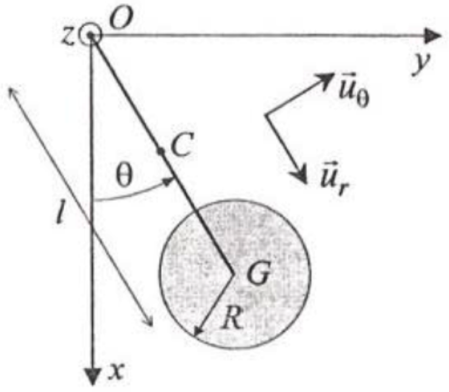
Dynamique et Énergétique des solides indéformables

Exercice 1. ***OSCILLATIONS DES SOLIDES***

On étudie les mouvements de l'association d'un disque homogène, de centre d'inertie G, de masse m et de rayon R. et d'une tige mince également homogène, de centre d'inertie C, de masse m' = 2m et de longueur l, reliée au centre du disque par une de ses extrémités. Son autre extrémité O est reliée à l'axe horizontal Oz, fixe dans un référentiel galiléen, par une liaison parfaite permettant la rotation dans le plan Oxy. Sa position est repérée par l'angle θ formé avec la verticale descendante Ox. Le seul champ de force présent est celui de pesanteur.

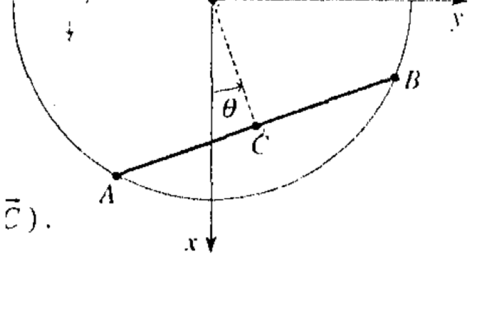


1. *La liaison en G est d'abord supposée rigide.*
   (a) *Quelle est la grandeur qui se conserve pour le système disque + tige ?*
   (b) *Quelle est sa configuration d'équilibre ?*
   (c) *En déduire, en explicitant la grandeur conservative, la période T des petites oscillations du système autour de cette configuration. On rappelle que le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de révolution est $J = \frac{mR^2}{2}$ et celui de la tige par rapport a une de ses médiatrices $J' = \frac{m'l^2}{12}$*
2. *La liaison en G est désormais supposée parfaite, permettant la libre rotation du disque autour de son axe de révolution, parallèle à Oz.*
   (a) *Pour quelle raison la vitesse angulaire de rotation Ω_{disque} du disque reste-t-elle constante ?*
   (b) *A-t-on la même grandeur conservative pour le système disque + tige ?*
   (c) *Quelle est sa configuration d'équilibre ?*
   (d) *En déduire la période T' des petites oscillations du système autour de cette configuration.*
3. *Comparer T et T'. Pouvait-on prévoir quelle serait la plus grande période ? Faire les applications numériques pour T et T'avec les valeurs m = 200 g, 1=30 cm, R=5 cm et $g = 9,81 m.s^{-2}$.*

Exercice 2. ***Oscillation d'une tige sur un demi-cercle***

Une tige homogène AB, de centre C, de longueur 2l, de moment d'inertie $J = \frac{1}{3}ml^2$ par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par C, glisse sans frottement à l'intérieur d'un demi-cercle O et de rayon $R = \frac{2l}{\sqrt{3}}$. Ce demi-cercle est situé dans le plan vertical (Oxy) d'un référentiel galiléen.

1. *Déterminer l'équation différentielle que vérifie l'angle θ défini par $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC})$.*
2. *Calculer la période des petits oscillations de la tige autour de sa position d'équilibre.*



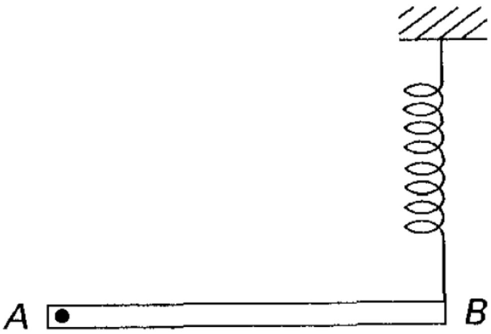
Exercice 3. ***Un cylindre sur un plan incliné***

Un cylindre, homogène, de centre d'inertie C, de rayon R et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mr^2$ *par rapport à son axe, est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle* α *sur l'horizontale, dans le référentiel terrestre* R_e *supposé galiléen (l'axe du cylindre étant horizontal).*
On désigne par $\int$ *le coefficient de frottement de glissement entre le cylindre et le plan incliné.*

1. *Déterminer l'accélération* $\ddot{x}$ *du cylindre. Montrer qu'il y a glissement ou non selon la position de* α *par rapport à une certaine valeur* α_0 *que l'on déterminera.*
2. *Faire un bilan énergique entre les instants 0 et t. Envisager les deux cas* $\alpha < \alpha_0$ *et* $\alpha > \alpha_0$.

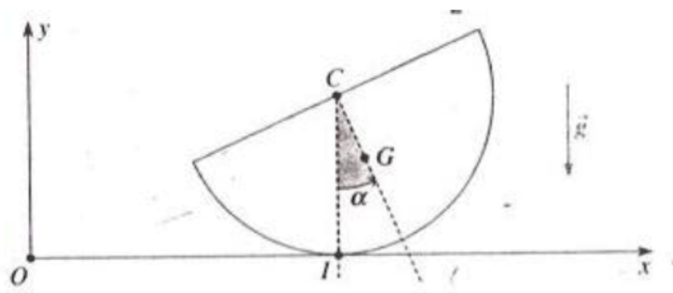
Exercice 4. ***Rotation d'une barre reliée à un ressort***

On considère le dispositif schématisé ci après. Une barre AB, de section négligeable, de longueur 2l, de masse M, est mobile autour d'un axe horizontal passant par son extrémité A. L'autre extrémité B est fixée à un ressort de raideur k. L'autre bout de ressort est fixe. Dans la position d'équilibre du système, AB est horizontale et le ressort est vertical. On écarte légèrement la barre de sa position d'équilibre et on l'abandonne à elle-même. On admettra que B se déplace sur la verticale. Déterminer la période des petites oscillations du système.



Exercice 5. ***Roulement sans glissement d'un demi-disque sur un plan***

On considère un demi-disque D homogène, de centre C, de centre de masse G , de rayon R et de masse m. Le référentiel terrestre (O ; x, y, z) est supposé galiléen. Tout en restant dans le plan vertical (Oxy) , D roule sans glisser sur le plan horizontal (Oxz) et on désigne par I le point de contact entre le sol et D.On repère la position de D par l'abscisse x de son centre C et par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CG}$*. On donne Le moment d'inertie de D par rapport à un axe passant par C et perpendiculaire à D :*$J = \frac{1}{2}mR^2$.



Nous nous proposons de déterminer l'équation du mouvement de D en utilisant différentes méthodes.

1. *Relations cinématiques*
   (a) *Établir une relation entre* $\dot{x}$ *et* $\dot{\alpha}$ *exprimant le roulement sans glissement.*
   (b) *Exprimer les composantes de la vitesse et de l'accélération du centre de masse G en fonction de b dérivées.*
2. *Première méthode : méthode énergétique*
   (a) *Calculer l'énergie cinétique* ξ_K *de D en fonction de J, m, b et* $\dot{\alpha}$.
   (b) *Calculer l'énergie potentielle de pesanteur de D.*
   (c) *En déduire une intégrale première du mouvement ; puis, établir une équation différentielle du second par* α *(on fera intervenir les paramètres J , R , b et m).*
3. *Deuxième méthode classique*
   (a) *Écrire le théorème de la résultante dynamique.*

(b) *Écrire le théorème du moment dynamique en G, dans le référentiel barycentrique de D .*

(c) *En déduire l'équation différentielle du second ordre en α.*

4. *Troisième méthode (à utiliser avec précaution)*

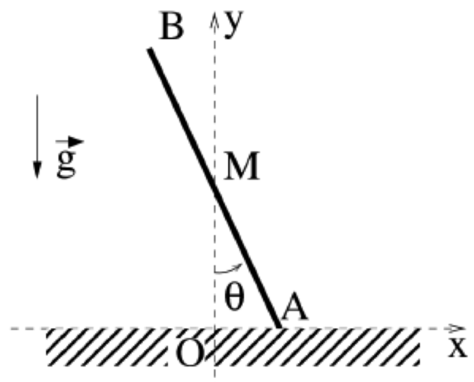
   (a) *Calculer le moment dynamique du disque D en I.*

   (b) *Appliquer le théorème du moment dynamique en I pour retrouver l'équation différentielle du second ordre.*

5. *On suppose α très petit. Linéariser l'équation obtenue et en déduire la période T_0 des petites oscillations de sa position d'équilibre. Exprimer d'abord T_0 en fonction de J, R, b, m et de l'intensité g de la pesanteur fonction de R et g uniquement.*

Exercice 6. ***chute d'une barre sur une patinoire***

Une barre rigide AB, homogène de masse m, de longueur 2l et de section négligeable, est posée verticalement sur une patinoire horizontale. Le contact entre la barre et la patinoire en A est supposé sans frottement (glissement parfait). Soitθ l'angle que fait la barre par rapport à la verticale (voir figure).
A l'instant initial, la barre est très légèrement déplacée (sans vitesse initiale) de son équilibre instable et tombe.



1. *En utilisant le théorème de la résultante dynamique (lois de Newton) et le théorème du moment cinétique :*

   (a) *Montrer que le mouvement du milieu M de AB est vertical.*

   (b) *Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.*

2. *En utilisant l'énergie, retrouver l'équation différentielle précédente.*

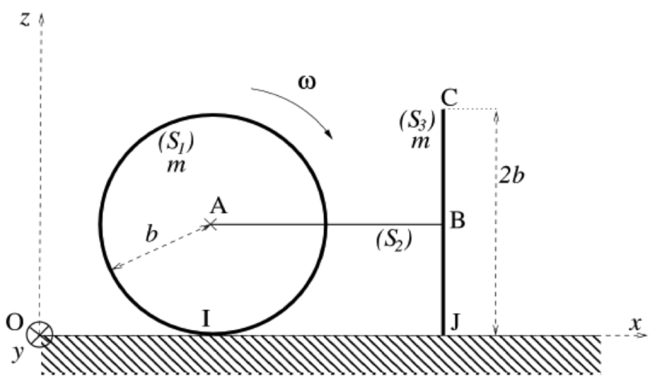
3. *Déterminer la vitesse de M lorsque M touche le sol.*

Donnée : *Le moment d'inertie d'une barre de longueur L, homogène de masse m, par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre de gravité est $mL^2/12$.*

Exercice 7. ***Chasse-neige***

Un chasse-neige est schématisé par l'ensemble (S) des trois solides, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (Cf.schéma) :

- *(S_1) est une roue de masse m, d'épaisseur négligeable, de rayon b, centrée en A.*
- *(S_2) est une tige rigide horizontale AB, de masse négligeable et de longueur 2b.*
- *(S_3) est une tige rigide verticale CJ, homogène de masse m et de longueur 2b.*



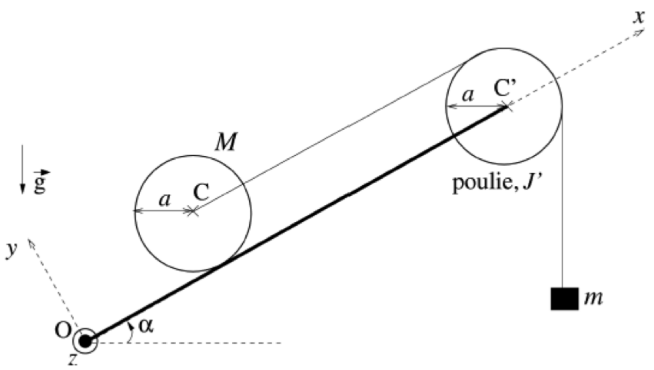
L'axe (Ay) de la roue (S_1) est fixé sur la tige (S_2) en A. La roue (S_1) tourne sans frottement autour de son axe sans glisser sur le sol en I. La tige (S_2) est soudée de façon rigide à la tige (S_3) en B milieu de (S_3). Le solide (S_3) glisse sur le sol en J. On suppose que les coefficients de frottement f statique et dynamique sont identiques et sont les mêmes en I et J, avec $0{,}7 < f < 1$.
Le chasse-neige se déplace horizontalement le long de la droite (Ox). Pour cela, le moteur du chasse-neige exerce sur la roue un couple de moment $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u_y}$ constant, avec $\Gamma > 0$.

1. *Montrer que le centre de masse G de (S) est au milieu de [AB].*
2. *Appliquer le théorème du moment cinétique en A pour* (S_1).
3. *Appliquer le théorème du moment cinétique en G pour (S).*
4. *En supposant que le chasse-neige avance sans glisser en I à partir d'une vitesse initiale nulle, déterminer la vitesse du chasse-neige à l'instant t.*
5. *À quelle condition sur*Γ*le chasse-neige avance-t-il ? À quelle condition sur* Γ *ne glisse-t-il pas ?*

Donnée : *On supposera que moment d'inertie J de la roue* (S_1) *par rapport à son axe de symétrie (Ay) est* mb^2 *(roue creuse : sa masse est répartie sur l'anneau de centre A et de rayon b).*

Exercice 8. *Mouvement d'un disque tiré le long d'un plan incliné*

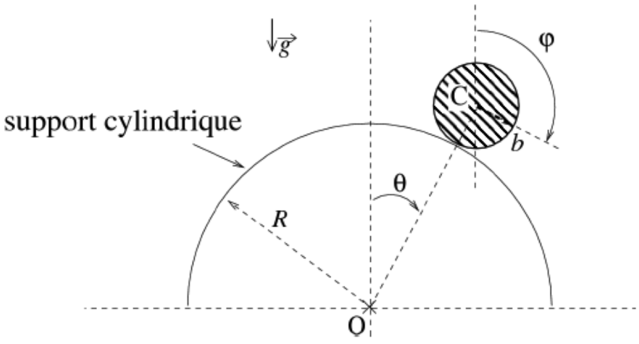
Un disque plein homogène de centre C, de rayon a et de masse M, roule sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle a par rapport à l'horizontale. On supposera que l'axe du disque reste horizontal (disque vertical). En son centre est attaché un fil inextensible, sans masse, parallèle à la ligne de plus grande pente du plan incliné. Le fil passe dans la gorge d'une poulie de rayon a' = a et de centre C'. Le fil ne glisse pas sur la poulie. L'autre extrémité du fil est attachée à un solide de masse m suspendu dans le vide. On note J' le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe. Le disque et la poulie peuvent tourner librement (sans frottement) autour de leurs axes respectifs. Initialement, le système est immobile.



1. *Montrer que le moment d'inertie J du disque par rapport à son axe (C,z) est* $J = Ma^2/2$.
2. *Soient* ω *la vitesse angulaire du disque et* ω' *celle de la poulie. Quelle relation existe-t-il entre ces vitesses angulaires et la vitesse du centre C du disque ?*
3. *Soient* $\overrightarrow{T_1}$ *la force du fil sur le disque et* $\overrightarrow{T_2}$ *la force du fil sur la masse m. En appliquant le théorème du moment cinétique à la poulie, déterminer une relation entre les normes de ces deux forces.*
4. *Calculer l'accélération du centre C du disque en fonction de M, m, J, J', a et*α*, par deux méthodes différentes :*
   (a) *En utilisant le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique appliqués au disque et/ou à la masse m.*
   (b) *En utilisant un théorème d'énergie.*
5. *A quelle condition le disque monte-t-il ?*
6. *On suppose maintenant que la poulie est idéale (J' = 0) et que M = m. On note* μ *le coefficient de frottement statique du disque sur le plan. A quelle condition le disque ne glisse-t-il pas sur le plan incliné ?*

Exercice 9. ***Sphère sur un profil cylindrique***

Une sphère homogène, de masse m, de centre C et de rayon b, se déplace sur un support cylindrique fixe de rayon R de centre O. Le moment d'inertie de sphère par rapport à un axe passant par son centre est $J = 2mb^2/5$. On supposera que la sphère reste en permanence en contact avec le support cylindrique. La position de C est repérée par un angle θ avec la verticale et la rotation de la sphère est décrite par un angle φ entre un point fixe de la sphère et la verticale (voir figure). Le contact entre la sphère et le support est caractérisé par un coefficient de frottement $\mu(\mu = \mu_d = \mu_s)$.



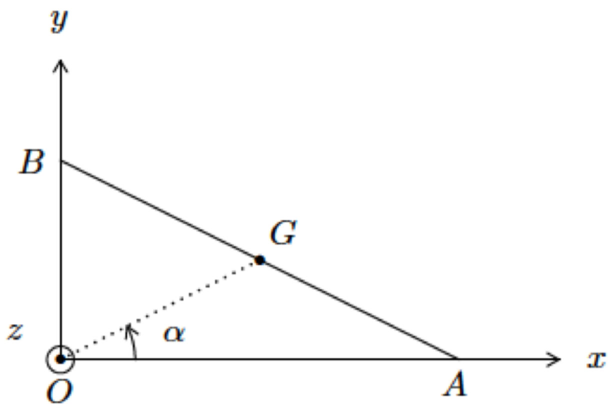
La sphère est lâchée du sommet du cylindre ($\theta = 0$), sans vitesse initiale ; puis elle roule sans glisser du côté $\theta > 0$.

1. *Justifier le fait que le mouvement de C est dans un plan (plan de la figure).*
2. *Quel est le vecteur instantané de rotation de la sphère.Montrer que $(R + b)\dot{\theta} = b\dot{\varphi}$.*
3. *Écrire le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique pour la sphère.*
4. *En déduire, l'expression de la force de frottement (force de résistance au glissement)$\| \overrightarrow{T} \|$ sur la sphère et de la composante normale $\| \overrightarrow{N} \|$ de la réaction du cylindre sur la sphère, en fonction θ,m, b et R.*
5. *En supposant que la sphère reste toujours en contact avec le support, déterminer l'angle pour lequel la sphère se met à glisser.*

Exercice 10. ***Mouvement d'une barre appuyée contre un mur***

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une barre AB homogène, de longueur 2b et de centre G, milieu de AB, est posée sur le sol horizontal et repose contre un mur vertical. Sa position est déterminée par l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OX}.\overrightarrow{OG})$. Les contacts en A et en B Sont supposés sans frottement.

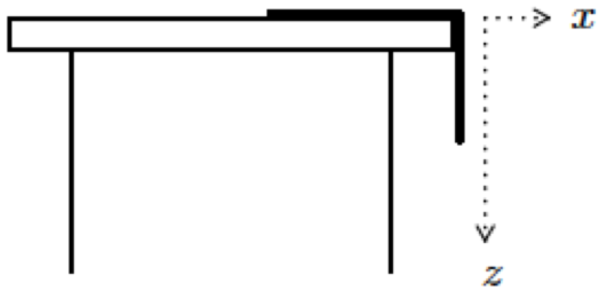
1. *Écrire l'intégrale première de l'énergie en supposant qu'à l'instant initial, la barre est immobile avec une inclinaison α_0.*
2. *Calculer la réaction $\overrightarrow{R_B}$ du mur sur la barre,et en déduire pour quelle inclinaison α_1 la barre quitte le mur.*
   On donne le moment d'inertie de la barre par rapport à sa médiatrice $J = \frac{1}{3}mb^2$.



Exercice 11. ***Mouvement d'une chaîne sur une table***

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une chaîne AB homogène sans raideur, de longueur d et de masse m, est posée sur le bord d'une table horizontale, sans vitesse initiale, son extrémité B se trouvant à une distance b du bord de la table.

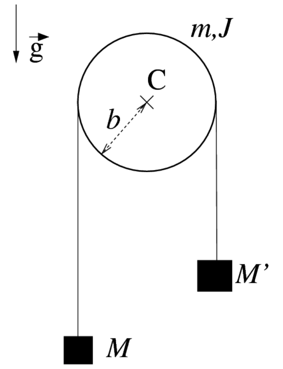
On néglige tout frottement interne à la chaîne d'une part, et entre la table et la chaîne d'autre part.
On étudie la chute de la chaîne avant que son extrémité B n'atteigne le sol.



1. *En utilisant une méthode énergétique, déterminer l'équation différentielle que vérifie l'abscisse x de l'extrémité B de la chaîne sur l'axe vertical (Ox) à un instant t (on supposera $x < d$). En déduire la loi x(t).*
2. *Déterminer à un instant t, la force $\overrightarrow{R}$ qu'exerce la table sur la chaîne.*

Exercice 12. ***Machine d'Atwood***

Une poulie circulaire, de rayon b, de centre C, de masse m, de moment d'inertie J par rapport à son axe, peut tourner librement (sans frottement) autour de son axe horizontal fixe. Cette poulie supporte grâce à un fil inextensible de masse négligeable, d'un côté un masse M et de l'autre une masse M' supérieure à M. On suppose que le fil ne glisse pas sur la poulie.
Calculer, par deux méthodes différente, l'accélération de la masse M' en fonction des données de l'énoncé :

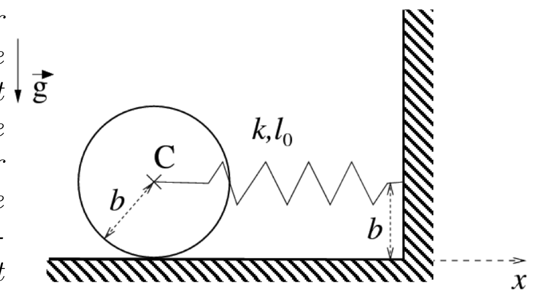


1. *En utilisant le principe fondamental de la dynamique et le théorème du moment cinétique.*
2. *En utilisant l'énergie ou la puissance mécanique.*

Donnée : Le moment d'inertie d'une barre de longueur L, homogène de masse m, par rapport à axe perpendiculaire passant par son centre de gravité est $mL^2/12$.

Exercice 13. ***Oscillation d'un cylindre***

Un cylindre plein homogène, de masse m, de centre C et de rayon b, est attaché en C à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k (voir figure). La liaison entre le cylindre et le ressort est parfaite (sans frottement) et le cylindre peut tourner librement autour de son axe de symétrie. Le cylindre peut se déplacer, sans glisser, sur le sol horizontal dans la direction x. Le contact entre le cylindre et le sol est caractérisé par un coefficient de frottement μ (coefficient de frottement statique = coefficient de frottement dynamique).



En utilisant le théorème de moment cinétique, déterminer la période d'oscillation du cylindre autour de sa position d'équilibre. Donnée : Le moment d'inertie J d'un cylindre homogène, de masse m, de rayon b, par rapport à son axe de symétrie (axe du cylindre passant par son centre) est $J = mb^2/2$.
La force de rappel d'un ressort est :$\overrightarrow{F} = -k(l - l_0)\overrightarrow{u}$, où l est la longueur du ressort et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire dans le sens de l croissant.