# DNS

## Sujet



# La foudre

*«Nous étions à un certain moment (1'orage était menaçant) dans un champ électrique prodigieux. Il suffisait d'écarter les doigts de nos gants pour qu'à l'extrémité de chaque doigt surgisse un effluve violet permanent de plusieurs centimètres. Les cagoules de mes amis étaient frangées de petits arcs grésillants. Entre mes semelles isolantes au potentiel zéro et ma tête, il y avait certainement plusieurs centaines de milliers de volts» (récit de Paul Beylier -Mergier. escalade du Cervin: le Cervin est une montagne très pointue, isolée dans le massif des Alpes)*

## I. Physique du nuage orageux

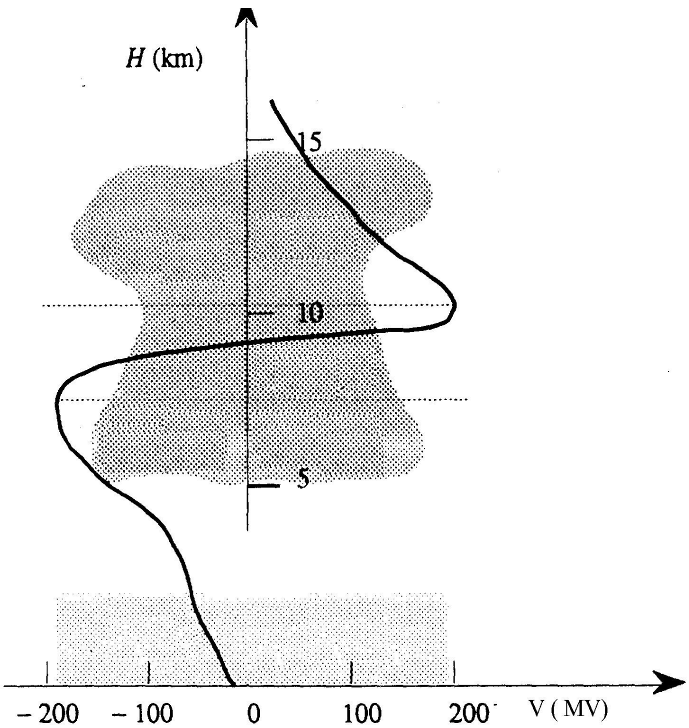



**Figure 1 : graphe de la relation entre la valeur du potentiel et l'altitude**

Des mesures *in situ* montrent que les nuages d'orage, du point de vue électrostatique, peuvent être représentés par deux ou trois régions de polarités différentes situées à différentes altitudes. Cette figure *Figure* 1 présente le profil vertical du potentiel sur l'axe de révolution du nuage orageux avant le déclenchement de l'éclair. Le champ est essentiellement vertical et on supposera dans tout le problème qu'il est strictement vertical.

1. Indiquer, en le justifiant, le signe des charges électriques dans chaque zone du nuage entre les altitudes $3\,km$ et $15\,km$ . Préciser l'équation utilisée.
2. A partir de la figure, estimer la valeur maximale du champ dans le nuage. Préciser son sens en ce point.
3. On modélise le nuage par un dipôle vertical situé en son centre. En admettant que le champ crée au sol de grandeur $5\,kV/m$ est créé par ce dipôle, donner un ordre de grandeur de ce moment dipolaire. Préciser l'orientation de ce dipôle.

## II. Effet de pointe

Au voisinage du sol, se développe sur une hauteur de $500\,m$ , une zone chargée positivement par ionisation de l'air et par l'effet de pointe que l'on va illustrer sur un exemple particulier. On a tracé les équipotentielles au voisinage de deux aspérités ( *Figure* 2 et *Figure* 3 ). Ces aspérités sont supposées conductrices, donc leurs surfaces sont des équipotentielles.

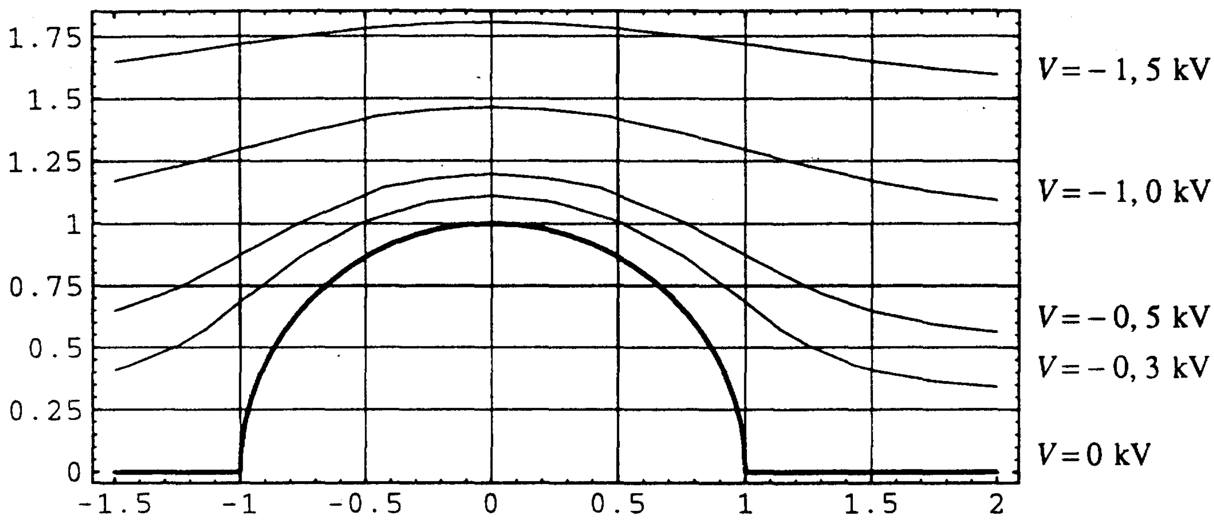



**Figure 2 : au voisinage d'une demi- sphère conductrice**

*Allure de quelques lignes équipotentielles au voisinage d'une demi- sphère conductrice maintenue au potentiel du sol. Très loin de ce conducteur, le champ électrique est uniforme. L'unité de longueur est le rayon de la sphère.*

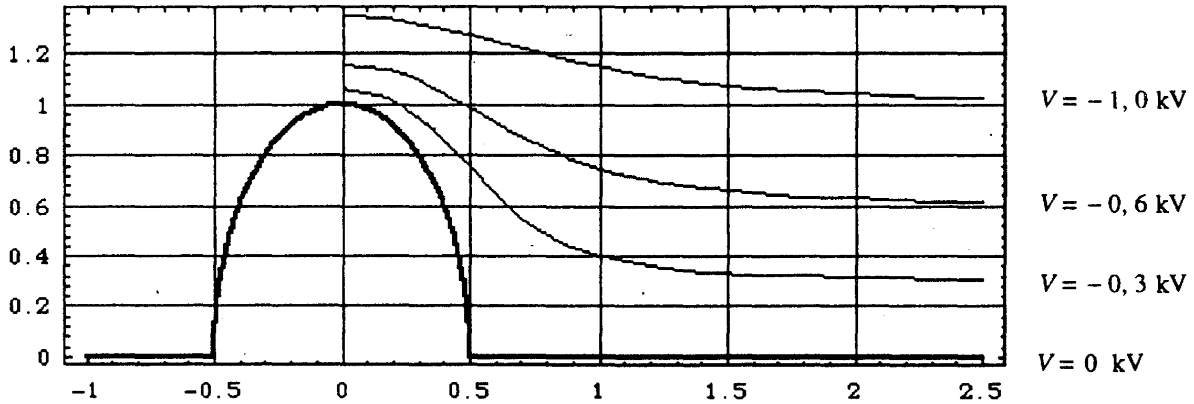



**Figure 3 : au voisinage d'un demi-ellipsoïde**

*Allure de quelques lignes équipotentielles (pour $x$ positif) au voisinage d'un demi-ellipsoïde de révolution conducteur maintenu au potentiel du sol. Très loin de ce conducteur, le champ électrique est uniforme et parallèle au grand axe de l'ellipsoïde. L'unité de longueur est le demi-grand axe, $OA$, de l'ellipse. À titre documentaire : pour l'ellipsoïde décrit par :*

$$\frac{x^2+y^2}{e^2}+z^2=a^2,\ (0<e\leq 1),\ \frac{E(\mathrm{A})}{E_0}=\frac{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}{e^2\left(\operatorname{arg\,tanh}\sqrt{1-e^2}-\sqrt{1-e^2}\right)}.$$

4. Représenter l'allure de quelques lignes de champ au voisinage des deux aspérités.

5. Dans quelles régions le champ est-il le plus intense?

6. Si on admet que loin de l'aspérité le champ est de $5\,kV/m$, évaluer graphiquement le champ au sommet de chaque aspérité.

7. Commenter le texte donné en préambule à l'aide des réponses aux questions précédentes et de la donnée du champ disruptif dans l'air sec, soit $30\,kV/cm$.

## III. Décharge électrique: la foudre.

La première phase d'un coup de foudre est la formation d'une prédécharge peu lumineuse appelée traceur qui progresse à travers l'air avec une vitesse relativement faible. Cette pré- décharge prend naissance d'une part au sol (coups de foudre ascendants) d'autre part dans le nuage (coups de foudre descendants). Lorsque les traceurs se rejoignent, il s'établit une liaison conductrice entre le nuage et le sol, qui va permettre le passage d'un courant de forte intensité. La figure *Figure* 4 donne un exemple de l'intensité $I(t)$ d'un coup de foudre.

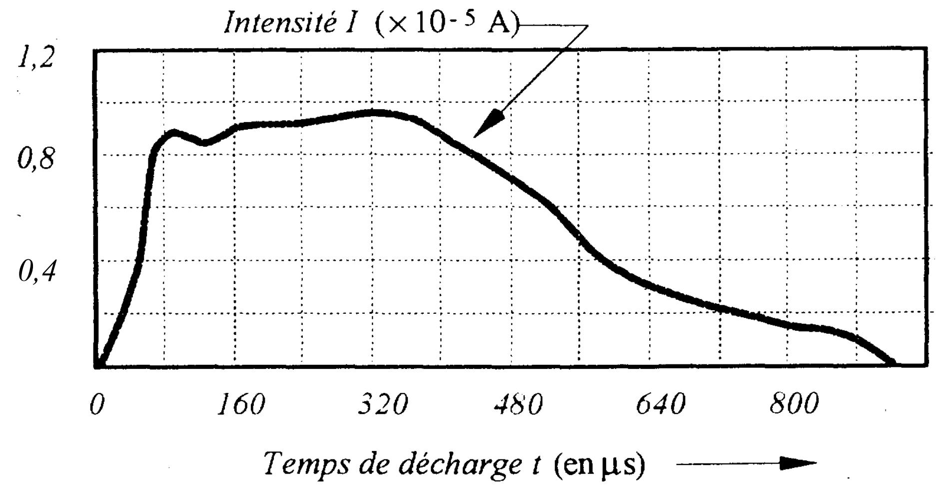



**Figure 4 : Forme d'un courant de foudre**

L'intensité $I$ est portée en fonction du temps de décharge $t$ . On constate que l'ordre de grandeur de l'intensité maximale est de $100\,kA$ .

8. Évaluer la charge totale $Q$ écoulée et l'intensité moyenne $I_m$ du courant de foudre.

9. A partir de la *Figure* 1 estimer la différence de potentiel $U$ entre le bas du nuage (situé à une altitude de l'ordre de $3\,km$ ) et le sol. L'ordre de grandeur trouvé est voisin de l'une de ces trois estimations: $100\text{kV}\,;1\text{MV}\,;100\text{MV}$ .

10. Lors de la décharge, on admet que l'énergie dissipée est celle d'un condensateur de charge $Q$ sous la d.d.p. $U$ . Évaluer l'énergie dissipée au cours de cette décharge et la capacité de ce condensateur.

11. Est-il envisageable pratiquement de récupérer cette énergie?

12. La foudre peut engendrer des tensions perturbatrices le long des circuits électriques. Expliquer ce phénomène en s'appuyant sur les lois fondamentales de l'électromagnétisme. À quel moment de la décharge ces effets sont-ils les plus importants? Pourquoi?

# IV. Prise de terre.

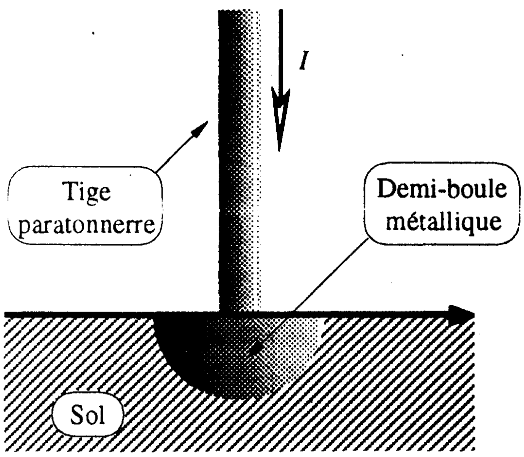


**Figure 5 : prise de terre , constituée d'un paratonnerre et d'une masse métallique**

Lorsque le courant de foudre d'un impact direct sur un paratonnerre s'écoule par la prise de terre d'une installation, de fortes surtensions peuvent apparaître.. La résistance de la prise de terre ne doit pas excéder $30\,ohms$ . Considérons alors ( $Figure\,5$ ) une prise de terre constituée par une demi-sphère métallique pleine, de rayon $a$ et placée dans un sol de résistivité $\rho=100\,\Omega.m$ . Un courant de foudre, d'intensité $I$ , arrive sur la tige paratonnerre fixée au centre $C$ de l'hémisphère.

On traite le problème à l'aide des lois de l'électromagnétisme des régimes permanents (ou stationnaires). On fera donc ici $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}\,V$ .

13. Rappeler l'expression locale de la loi d'Ohm pour le sol en faisant intervenir $\vec{j}$ , $\vec{E}$ et la résistivité $\rho$ .

14. Quelle est la forme des lignes de courant dans la terre ?

15. En déduire, à la distance $r>a$ , la densité de courant $j(r)$ en fonction de $I$ et de $r$ .

16. Déterminer le potentiel $V(r)$ , ce dernier étant nul à l'infini.

17. Déterminer la valeur du potentiel ( différence de potentiel entre la demi-sphère et l'infini ) noté $U$ pris par la demi-sphère.

18. La résistance de terre étant définie par $R=\frac{U}{I}$ , calculer le rayon $a$ de l'hémisphère de telle manière que la valeur de la résistance soit inférieure à $30\,ohms$ .

19. La tension de pas $V_P$ est définie comme la différence de potentiel entre deux points de la surface du sol distants de un mètre et situés sur la même droite issue du centre $C$ de l'hémisphère, calculer cette tension de pas pour un courant $I=50\,kA$ à $10\,mètres$ puis à $100\,mètres$ de la prise de terre.

20. Sachant que la résistance entre les deux pieds d'une personne est de $2{,}5\,k\Omega$ , quel serait l'ordre de grandeur de l'intensité qui s'écoulerait à travers le corps de la personne ?

21. Sachant que l'intensité dans la personne ne doit pas dépasser $25\,mA$ , à quelle distance doit-elle se trouver du point d'impact ?

## Réponses

1) On sait que le champ est vertical $\vec{E} = E\,\vec{u_z}$

donc puisque $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}$$

on en déduit :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

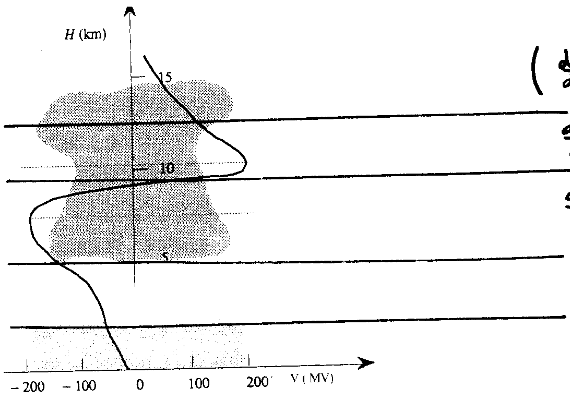
$$\boxed{\text{Le potentiel ne dépend donc que de } z : V = V(z)}$$

Pour déterminer le signe des charges, on utilise l'équation de Poisson

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -\frac{\rho(z)}{\varepsilon_0}}$$

D'après le dessin fourni




$\left(\dfrac{d^2V}{dz^2}\right.$ légèrement positif$\left.\right)$

$\dfrac{d^2V}{dz^2} < 0$

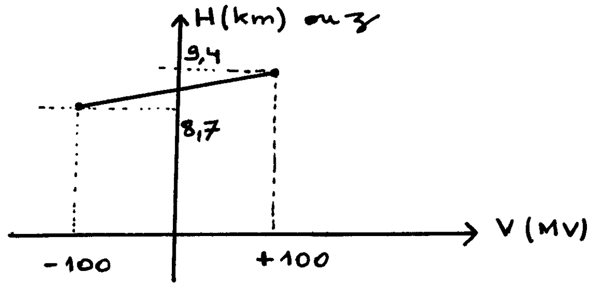
$\dfrac{d^2V}{dz^2} > 0$

$\dfrac{d^2V}{dz^2} < 0$

Essentiellement :

| | | |
|---|---|---|
| $3 < z < 5$ km | $\rho > 0$ | |
| $5 < z < 9$ km | $\rho < 0$ | les deux zones chargées principales. |
| $9 < z < 12$ km | $\rho > 0$ | |

3) C'est aux environs de l'altitude 9 km (aux environs de $z$ pour lequel $V=0$) que $\left|\frac{dV}{dz}\right|$ est le plus important, donc $\|\vec{E}\|$ est maximum.




(Points utilisés pour l'estimation)

$$|E|_{MAX} \simeq \frac{\Delta V}{\Delta z}$$

$$\frac{200\ MV}{0{,}7\ km}$$

$$\boxed{|E|_{MAX} \simeq 0{,}3\ 10^6\ V/m}$$

$V$ en ce point est une fonction croissante de $z$ (axe vers le haut)

$$\frac{dV}{dz} > 0$$

$$E = -\frac{dV}{dz} < 0$$

Le champ est donc en sens contraire de $\overrightarrow{u_z}$

$\boxed{\overrightarrow{E}_{MAX} \text{ dirigé vers le bas.}}$

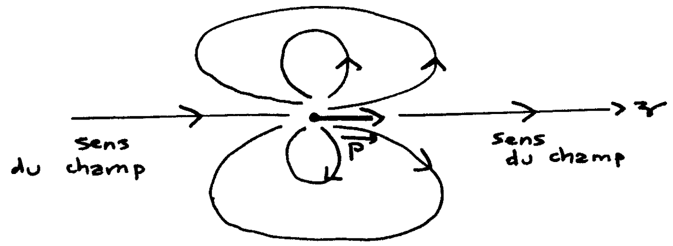
---

3) Pour un dipôle $\vec{p}$

$$V = \frac{\vec{p}\ \vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

– on peut situer le dipôle à l'altitude 9 km environ.

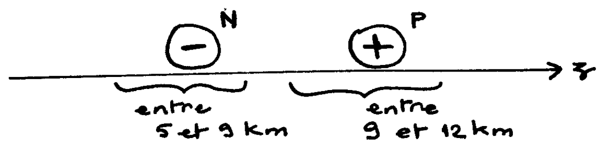
– on voit qu'au niveau du sol si $z$ augmente, $V$ diminue donc $\frac{dV}{dz} < 0$. Donc $E_z > 0$. Et puisque le champ créé par un dipôle, selon son axe, a le sens de $\vec{p}$




on peut en déduire que le dipôle est :

$$\boxed{\vec{p} = p\ \vec{u_z} \quad \text{avec} \quad p > 0}$$

— autre approche : en considérant les deux zones chargées principales




on comprend que si l'on peut définir un moment dipolaire il sera selon $\vec{NP}$ donc dans le sens positif de l'axe des $z$.

— valeur de $p$

rappel : $V = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\qquad \vec{E} \left| \begin{array}{l} E_r = -\dfrac{dV}{dr} = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{dV}{r\,d\theta} = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{array} \right.$

donc : $\vec{E}_{\substack{\text{au niveau}\\ \text{sol}}} = \dfrac{2p}{4\pi\varepsilon_0\, z^3_{\text{dipôle}}}\ \vec{u_z}$

$$\boxed{p = \frac{(4\pi\varepsilon_0)}{2}\, z^3_{\text{dipôle}}\ E_{\text{sol}}}$$

AN $\quad p = \dfrac{(9\ 10^9)^{-1}}{2}\,(9.\ 10^3)^3\ 5\ 10^3$

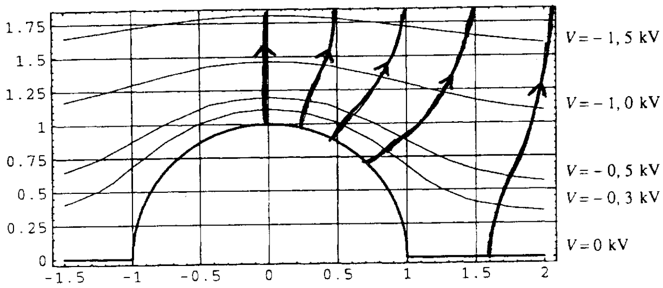
$$\boxed{p = 0{,}2\ 10^6\ \text{C.m}}$$

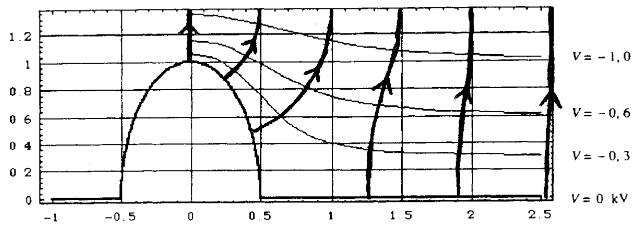
---

4) Représentation des lignes de champ.

Les lignes de champ sont <u>perpendiculaires aux surfaces équipotentielles</u>.

Elles sont dans <u>le sens des potentiels décroissants</u>.



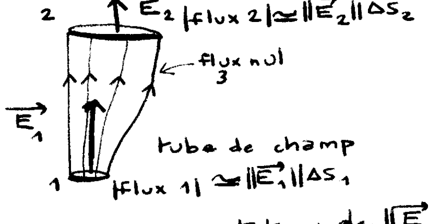




---

5) Les équipotentielles se rapprochent au sommet de l'aspérité (même ddp sur un trajet plus court donc gradient plus élevé)

<u>Le champ est plus intense au sommet</u> (effet de pointe)

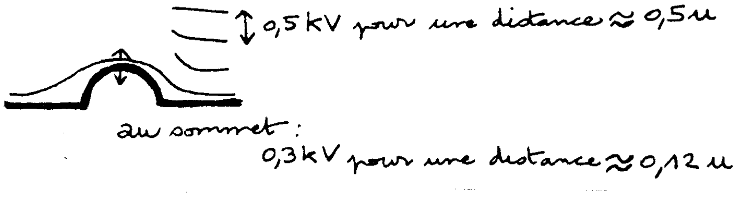
(on remarque aussi que les lignes de champ se resserrent au sommet. Le flux de $\vec{E}$ étant conservatif dans le vide,




ceci correspond à une augmentation de $\|\vec{E}\|$ )

---

6) <u>demi-sphère :</u> (u : unité arbitraire de longueur des schémas)



on assimile $\|-\overrightarrow{\text{grad}}\, V\| \approx \frac{\Delta V}{\Delta \ell}$

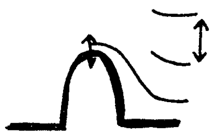
Le champ au loin est de 5kV/m

Donc :

$$\frac{\|\overrightarrow{E}_{sommet}\| \;/kV.m^{-1}}{5} = \frac{0,3\;/\;0,12}{0,5\;/\;0,5}$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{E}\|_{sommet} \simeq 12,5 \text{ kV.m}^{-1}}$$

demi-ellipsoïde :



0,4kV pour une distance ≈ 0,4 µ

au sommet :
0,3kV pour une distance ≈ 0,6 u

$$\frac{\|\overrightarrow{E}_{sommet}\| \;/kV.m^{-1}}{5} = \frac{0,3\;/\;0,06}{0,4\;/\;0,4}$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{E}\|_{sommet} \simeq 25 \text{ kV.m}^{-1}}$$

La courbure est plus importante pour l'ellipsoïde donc l'effet de pointe est plus marqué.

---

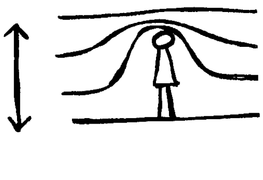
7) quelques idées en vrac :

→ le champ est intense si la courbure est importante et si ce champ atteint 30kV/cm c'est le champ disruptif (ionisation de l'air, effluves)

- effets observés au sommet de la tête
- effets au bout des doigts quand on les écarte

→ estimation des champs et des potentiels

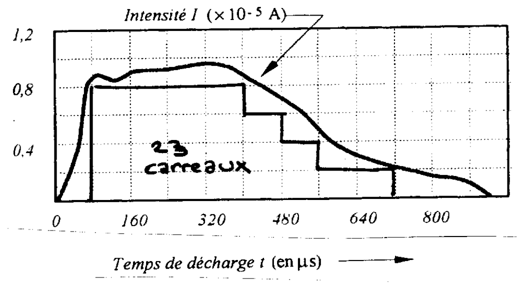
$10^5$V



quand on écarte les doigts, il apparaît des effluves de quelques centimètres ($n$ cm). Ceci correspond à une ddp de l'ordre de $\underline{30 \text{ kV/cm} \times n \text{ cm}}$, soit globalement de l'ordre de $\underline{100.000 \text{ V}}$.
(valeur indiquée dans le texte entre tête et pied ... on retrouve cette ddp au sommet des obstacles sur quelques cm)

---

8)




$$Q = \int I \, dt$$

Pour estimer $Q$, il faut estimer l'aire sous la courbe
En estimant l'aire à $\underline{32 \text{ carreaux}}$ :

$$Q = 32 \times \overbrace{(80\ 10^{-6} \times 0{,}2\ 10^{-5})}^{1{,}6\ C}$$

$$\boxed{Q \simeq 51 \text{ C}}$$

L'intensité moyenne est

$$I_m = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{51}{920\ 10^{-6}}$$

$$\boxed{I_m = 55 \text{ kA}}$$

---

9) On évalue, parmi les réponses proposées à :

$$\boxed{U \simeq 100 \text{ MV}}$$

---

10)

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} Q U}$$

$$= \frac{1}{2}\ 51 \quad 100\ 10^6$$

$$\boxed{\mathcal{E} \simeq \underbrace{2{,}5\ 10^9}_{GJ} \text{ J}}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

$$= \frac{51}{100\ 10^6}$$

$$\boxed{C \simeq 0{,}5\ \mu F}$$

---

11) – Pour récupérer cette énergie, puisque l'on ne sait pas où la foudre va tomber, il faudrait par exemple "l'attirer" en parsemant l'espace de paratonnerres.

– Un autre problème est que cette énergie est délivrée en très peu temps (donc avec une puissance élevée); il faudrait la stocker pour une utilisation moins ponctuelle.

Ces difficultés ne sont pas résolues à l'heure actuelle.

---

12) – Le courant I de décharge crée un champ magnétique.

cf Maxwell Ampère : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

– Les forces électromotrices parasites sont données par $e = -\frac{d\phi_B}{dt}$

cf Maxwell Faraday : $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$

Les tensions perturbatrices sont donc plus grandes quand $\frac{dB}{dt}$ donc $\frac{dI}{dt}$ sont importants. C'est à dire au début de la décharge (cf courbe $I(t)$, les 80 µs de départ)

---

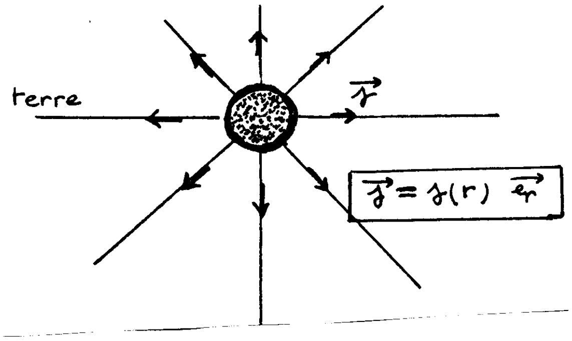
13)

$$\overrightarrow{j} = \gamma\ \overrightarrow{E}$$

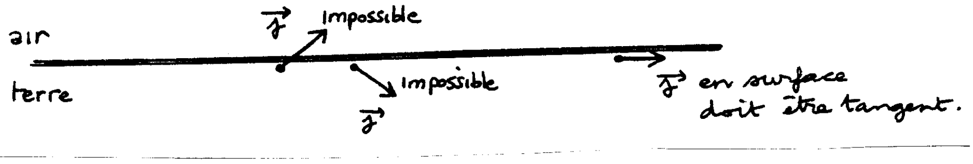
$$\boxed{\overrightarrow{j} = \frac{1}{\rho}\ \overrightarrow{E}}$$

---

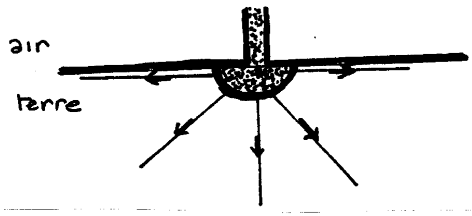
14) Les lignes de courant sont des demi droites passant par le centre de la demi boule métallique




boule dans le sol (loin de la surface)



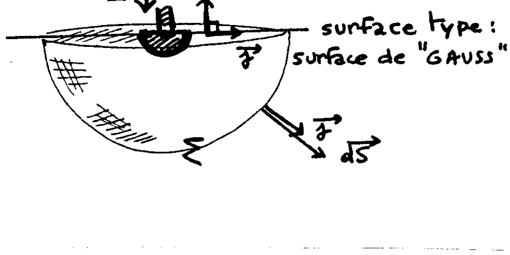

ici, on doit tenir compte des conditions aux limites




finalement, la solution est obtenue en considérant "la moitié" de la figure de départ

---

15)



En considérant, en quelque sorte, la demi-boule comme une source de courant $I$

$$\iint_{\Sigma} \vec{j}\,\vec{dS} = I$$

$$j\,2\pi r^2 = I$$

$$\boxed{\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2}\vec{u_r} \qquad (r>a)}$$

---

16) On utilise la loi d'Ohm

$$\vec{E} = \rho\,\vec{j}$$

$$= \rho\frac{I}{2\pi r^2}\vec{u_r}$$

$$\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{\rho I}{2\pi r^2}$$

$$V = \frac{\rho I}{2\pi r} + \cancel{cste}$$ (V nul à l'infini)

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho I}{2\pi r} \qquad (r>a)}$$

---

17) La demi sphère est équipotentielle, au potentiel

$$V_{1/2\,\text{sphère}} = V(r=a)$$

$$= \frac{\rho I}{2\pi a}$$

$$U = V_{1/2\,\text{sphère}} - \underbrace{V_\infty}_{\text{nul}}$$

$$\boxed{U = \frac{\rho I}{2\pi a}}$$

---

18) Résistance de terre :

$$R = \frac{U}{I}$$

$$\boxed{R = \frac{\rho}{2\pi a}}$$

On souhaite

$$R < R_{MAX}$$

$$a > \frac{\rho}{2\pi R_{MAX}}$$

A.N. $$> \frac{100}{2\pi \times 30}$$

$$\boxed{a > 0{,}53\ m}$$

---

19) Tension de pas

On a : $$V = \frac{\rho I}{2\pi r}$$

Pour dr : $$dV = -\frac{\rho I}{2\pi}\frac{dr}{r^2}$$

Si, pour trouver un ordre de grandeur, on suppose

$$1m \ll 10m$$

et donc $1m \ll 100m$

on utilise la formule précédente (le signe n'importe pas ici)

$$\boxed{V_P \simeq \frac{\rho I}{2\pi}\frac{\Delta r}{d^2} \text{ avec } \Delta r = 1m}$$

A.N. $d = 10m$

$$V_P \simeq \frac{100 \cdot 50\,10^3 \cdot 1}{2\pi\ 10^2}$$

$$\boxed{V_P \simeq 8\ kV}$$

$d = 100m$

$$\boxed{V_P \simeq 80\ V}$$

---

20) $$i = \frac{V_P}{R_i}$$

$d = 10m$

$$\boxed{i = 3\ A}$$

$d = 100m$

$$\boxed{i = 0{,}03\ A}$$

---

21) on résout :

$$\frac{V_P}{\mathcal{R}} < i_{MAX}$$

$$\frac{\frac{\rho I \Delta r}{2\pi d^2}}{\mathcal{R}} < i_{MAX}$$

$$\boxed{d > \sqrt{\frac{\rho I \Delta r}{2\pi \mathcal{R}\, i_{MAX}}}}$$

A.N. $$> \sqrt{\frac{100 \times 50\ 10^3 \times 1}{2\pi\ 2500\ \ 25\ 10^{-3}}}$$

$$\boxed{d > 0{,}11\ \text{km}}$$