LOIS EXPONENTIELLE ET GÉOMÉTRIQUE-CONVERGENCE

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $\text{cov}(X, Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.

la fonction de répartition et une densité d'une variable aléatoire X à densité sont notées respectivement F_X et f_X.

Partie I: Loi géométrique

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$). On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.
   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(X_1 - X_2)$, $V(X_1 - X_2)$.
   (c) Etablir la relation : $P([X_1 = X_2]) = \dfrac{p}{1+q}$
2. (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.
   (b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$.Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.
   En déduire la relation suivante : $P(T = k) = 2P(X_1 = k) - P(Z = k)$.
   (c) Etablir la formule : $V(T) = \dfrac{q\left(2q^2 + q + 2\right)}{\left(1 - q^2\right)^2}$.
3. (a) Montrer que pour tout couple (j, ℓ) de $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$, on a : $P([Z = j] \cap [T - Z = \ell]) = 2p^2q^{2j+\ell-2}$
   (b) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$ (on distinguera trois cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$).
   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.
   (d) Etablir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.
4. (a) A l'aide du résultat de la question 3d, calculer $\text{cov}(Z, T)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.
   (c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T).
   (d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
   (e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$. Calculer $E(D_j)$.

Partie II: Loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ (d'espérance $1/\lambda$). On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

5. (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leqslant x])$, pour tout réel x.
   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$, $V(X_1 + X_2)$, $E(Y)$, $V(Y)$.
6. Déterminer pour tout réel z, $F_Z(z)$ et $f_Z(z)$. Reconnaître la loi de Z et en déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
7. (a) Montrer que pour tout réel t, on a : $F_T(t) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$. Exprimer pour tout réel t, $f_T(t)$.
   (b) Justifier l'existence de $E(T)$ et $V(T)$. Montrer que $E(T) = \dfrac{3}{2\lambda}$ et $V(T) = \dfrac{5}{4\lambda^2}$.
8. On note r le coefficient de corrélation linéaire de Z et T. Montrer que $r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
9. (a) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X_2$.
   (b) Etablir que la fonction $y \mapsto \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$ est la densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ de la variable aléatoire Y.
   (c) Déterminer pour tout y réel, $f_{|Y|}(y)$. Reconnaître la loi de $|Y| = T - Z$.

Partie III: Convergences

Lois exponentielle et géométrique-Convergence

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

10. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(J_n)$ et $V(J_n)$.

11. (a) Montrer, par récurrence que, la densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

 (b) A l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existence de $E\left(\dfrac{1}{J_n}\right)$ et de $E\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.

12. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

 (a) Enoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

 (b) En déduire que $P([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]) \sim 1 - \alpha$.

 Dans les questions suivantes, on suppose que $\lambda = 1$.

13. On pose pour tou n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.
 Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose : $g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$ et $h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$

 (a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$ et $g_n(x)$.

 (b) Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
 Etablir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \dfrac{1}{n}F_{T_n}(x)$

 (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de $x, F_{T_1}(X), F_{T_2}(x), ..., F_{T_n}(x)$.

 (d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

 (e) Déduire des questions c) et d) l'existence de $E(T_n)$ et montrer que $E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

14. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - E(T_n)$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

 (a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a : $F_{G_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$.

 (b) En déduire que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$

 (c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_G(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.

15. Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable alétoire Y définie par $Y = F_X(X)$.

LOIS EXPONENTIELLE ET GÉOMÉTRIQUE-CONVERGENCE

Partie I: Loi géométrique

1. (a) On a $V(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$. Pour $k \in X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X_1 \leqslant k) = \sum_{n=1}^{k} P(X_1 = n) = \sum_{n=1}^{k} q^{n-1}p = 1 - q^k$$

Remarque : $[X_1 > k] =$ *«échec jusqu'au* $k^{ième}$*» donc* $\mathrm{P}\ [X_1 > k] = q^k$ *et* $P([X_1 \leqslant k]) = 1 - q^k$.

(b) — Les variables aléatoires X_1 et X_2 admettent des espérances, alors $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ admettent des espérances et par linéarité de l'espérance, on a $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \dfrac{2}{p}$ et $E(X_1 - X_2) = 0$

— Les variables aléatoires X_1 et X_2 admettent des variances , alors $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ admettent des variances et par indépendance, on a $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \dfrac{2q}{p^2}$ et $V(X_1 - X_2) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = \dfrac{2q}{p^2}$

(c) La famille $([X_2 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, alors

$$[X_1 = X_2] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} ([X_1 = X_2] \cap [X_2 = i]) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} ([X_1 = i] \cap [X_2 = i])$$

et par incompatibilité et indépendance.

$$\mathrm{P}(X_1 = X_2) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1 = i) P(X_2 = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^{i-1}p\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[X_1 = X_2] &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^{i-1}p\right)^2 \\
&= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} \\
&= \frac{p^2}{1 - q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{P}(X_1 = X_2) = \dfrac{p}{1+q}$

2. (a) Pour $i \in \mathbb{N}$: $[\min(X_1, X_2) > i] = [X_1 > i] \cap [X_2 > i]$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z > i) &= \mathrm{P}(X_1 > i)\,\mathrm{P}(X_2 > i) \text{ par indépendance} \\
&= q^{2i}
\end{aligned}$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$, on a $[Z > i - 1] = [Z \geqslant i] = [Z = i] \cup [Z > i]$,par incompatibilité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z = i) &= \mathrm{P}(Z > i - 1) - \mathrm{P}(Z > i) \\
&= q^{2i-2} - q^{2i} \text{ pour } i - 1 \geqslant 0 \\
&= q^{2(i-1)}\left(1 - q^2\right) \text{ pour } i \geqslant 1
\end{aligned}$$

Et comme $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ on a bien $Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right)$ d'où $E(Z) = \dfrac{1}{1-q^2} = \dfrac{1}{p(1+q)}$ et $V(Z) = \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}$ d'où $E(T) = E(X_1 + X_2 - Z) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p(1+q)} = \dfrac{1+2q}{p(1+q)}$

(b) $[Z=k]\cup[T=k]$ signifie que le plus petit ou le plus grand de X_1 et de X_2 est égal à k.
Comme l'un est le plus petit et l'autre le plus grand, cela signifie que l'un ou l'autre est égal à k.
Conclusion : $[Z=k]\cup[T=k]=[X_1=k]\cup[X_2=k]$ et on a aussi $[Z=k]\cap[T=k]=[X_1=k]\cap[X_2=k]$ et comme

$$\begin{aligned}\mathrm{P}([Z=k]\cup[T=k]) &= \mathrm{P}(Z=k)+\mathrm{P}(T=k)-\mathrm{P}(T=k,Z=k)\\ &= \mathrm{P}(Z=k)+\mathrm{P}(T=k)-\mathrm{P}(X_1=k\cap X_2=k)\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}([X_1=k]\cup[X_2=k]) &= \mathrm{P}(X_1=k)+\mathrm{P}(X_2=k)-\mathrm{P}(X_1=k,X_2=k)\\ &= 2\mathrm{P}(X_1=k)-\mathrm{P}(X_1=k,X_2=k)\end{aligned}$$

car X_1 et X_2 ont la même loi, ainsi $P(T=k)=2P(X_1=k)-P(Z=k)$

(c) Les deux séries $\sum\limits_{k\geqslant1}k^2P(X_1=k)$ et $\sum\limits_{k\geqslant1}k^2P(Z=k)$ sont absolument convergentes car X_1 et Z ont une variance, donc $\sum\limits_{k\geqslant1}k^2(2P(X_1=k)-P(Z=k))$ est absolument convergente et par le théorème du transfert T^2 admet une espérance et

$$\begin{aligned}E\left(T^2\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty}k^2 2P(X_1=k)-\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P(Z=k)\\ &= 2E\left(X_1^2\right)-E\left(Z^2\right)\\ &= 2\left[V(X_1)+E(X_1)^2\right]-\left[V(Z)+E(Z)^2\right]\\ &= 2\left[\frac{q}{p^2}+\frac{1}{p^2}\right]-\left[\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{1}{(1-q^2)^2}\right]\\ &= 2\frac{q+1}{p^2}-\frac{q^2+1}{p^2(1+q)^2}\\ &= \frac{2(1+q)^2(q+1)-q^2-1}{p^2(1+q)^2}\\ &= \frac{2q^3+5q^2+6q+1}{p^2(1+q)^2}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}V(T) &= E\left(T^2\right)-E(T)^2\\ &= \frac{2q^3+5q^2+6q+1}{p^2(1+q)^2}-\left(\frac{1+2q}{p(1+q)}\right)^2\\ &= \frac{2q^3+5q^2+6q+1-1-4q-4q^2}{p^2(1+q)^2}\\ &= \frac{2q^3+q^2+2q}{p^2(1+q)^2}\\ &= \frac{q\left(2q^2+q+2\right)}{(1-q^2)^2}\end{aligned}$$

3. (a) Si (j,ℓ) de $(\mathbb{N}^*)^2$ alors $\ell>0$ et $[Z=j]\cap[T-Z=\ell]=[Z=j]\cap[T=\ell+j]$ avec $\ell+j\neq j$ donc

$$[Z=j]\cap[T=\ell+j]=([X_1=j]\cap[X_2=\ell+j])\cup([X_2=j]\cap[X_1=\ell+j])$$

et par union d'incompatible et intersection d'indépendants,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z=j,T-Z=\ell) &= \mathrm{P}(X_1=j)\,\mathrm{P}(X_2=\ell+j)+\mathrm{P}(X_2=j)\,\mathrm{P}(X_1=\ell+j)\\ &= 2q^{j-1}pq^{\ell+j-1}=2p^2q^{2j+\ell-2}\end{aligned}$$

Lois exponentielle et géométrique-Convergence

(b) — Si $k=0$, on a $[X_1-X_2=0]=[X_1=X_2]$, d'après la question 1c, on a $P\left(X_1-X_2=0\right)=\dfrac{pq^{|0|}}{1+q}$

— Si $k>0$, la famille $\left([X_2=i]\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, alors par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X_1-X_2=k\right) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X_1-X_2=k, X_2=i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P\left(X_1=k+i, X_2=i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}\left(X_1=i+k\right)\mathrm{P}\left(X_2=i\right) \text{ Par indépendance}\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+k-1}pq^{i-1}p \text{ avec } i+k\geqslant 1\\
&= q^kp^2\sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)} \text{ avec } j=i-1\\
&= q^kp^2\frac{1}{1-q^2}=\frac{q^kp}{1+q}=\frac{pq^{|k|}}{1+q}
\end{aligned}$$

— Si $k<0$. On a $[X_1-X_2=k]=[X_2-X_1=-k]$, alors par symétrie

$$P\left(X_1-X_2=k\right)=p\left(X_2-X_1=-k\right)=\frac{pq^{-k}}{1+q}$$

On conclut que pour tout $k\in\mathbb{Z}: P\left([X_1-X_2=k]\right)=\dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$

(c) On a $|X_1-X_2|(\Omega)=\mathbb{N}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$

— Si $k=0$, $\mathrm{P}\left(|X_1-X_2|=0\right)=\dfrac{p}{1+q}$

— Si $k>0$, on a $[|X_1-X_2|=k]=[X_1-X_2=k]\cup[X_1-X_2=-k]$ incompatibles et

$$\mathrm{P}\left(|X_1-X_2|=k\right)=2\frac{pq^k}{1+q}$$

(d) Soit $j\in Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\ell\in(T-Z)(\Omega)=|X_1-X_2|(\Omega)=\mathbb{N}$

— Si $\ell=0$, on a

$$\begin{aligned}
P\left(Z=i, T-Z=0\right) &= P\left(Z=i, T=i\right)\\
&= P\left(X_1=i, X_2=i\right)\\
&= (1-q)^{2i-2}p^2
\end{aligned}$$

D'autre part $P(Z=i)P(T-Z=0)=\left(1-q^2\right)q^{2(i-1)}\dfrac{pq}{1+q}=(1-q)^{2i-2}p^2$

— Si $\ell\geqslant 1$, on a vu, d'après la question 3a, que $P\left(Z=j, T-Z=\ell\right)=2p^2q^{2j+\ell-2}$.
D'autre part

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(Z=j\right)\mathrm{P}\left(T-Z=\ell\right) &= \mathrm{P}\left(Z=j\right)\mathrm{P}\left(|X_1-X_2|=\ell\right)\\
&= q^{2(j-1)}\left(1-q^2\right)2\frac{pq^\ell}{1+q}\\
&= 2q^{2j}q^{-2}\left(1+q\right)\left(1-q\right)\frac{pq^\ell}{1+q}\\
&= \mathrm{P}\left(Z=j\cap T-Z=\ell\right)
\end{aligned}$$

On conclut Z et $T-Z$ sont indépendantes.

4. (a) Comme Z et $T-Z$ sont indépendantes, leur covariance est nulle.
Et comme $\text{cov}(Z, T-Z) = \text{cov}(Z,T) - \text{cov}(Z,Z) = \text{cov}(Z,T) + V(Z)$ alors $\text{cov}(Z,T) = -V(Z) \neq 0$ et T et Z ne sont pas indépendantes.

(b) On a

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\text{cov}(Z,T)}{\sqrt{V(T)V(Z)}} = -\sqrt{\frac{V(Z)}{V(T)}} \\ &= -\sqrt{\frac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}}} = -\sqrt{\frac{q}{2q^2+q+2}}\end{aligned}$$

(c) Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^*$

— Si $i > j$ alors $(Z = i \cap T = j) = \emptyset$ donc $\text{P}(Z = i \cap T = j) = 0$

— Si $i = j$ alors $(Z = i \cap T = i) = (X_1 = i \cap X_2 = i)$ et $\text{P}(Z = i \cap T = i) = q^{2i-2}p^2$

— Si $i < j$ alors $(Z = i \cap T = j) = (X_1 = i \cap X_2 = j) \cup (X_1 = j \cap X_2 = i)$ (incompatibilité, puis indépendance)
$\text{P}(Z = i \cap T = j) = 2q^{i+j-2}p^2$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a

— Si $k < j$, alors $\text{P}_{Z=j}(T = k) = 0$

— Si $j = k$ alors

$$\begin{aligned}\text{P}_{Z=j}(T = j) &= \frac{\text{P}(Z = j \cap T = j)}{\text{P}(Z = j)} \\ &= \frac{q^{2(j-1)}p^2}{q^{2(j-1)}(1-q^2)} \\ &= \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}\end{aligned}$$

— Si $j < k$

$$\begin{aligned}\text{P}_{Z=j}(T = k) &= \frac{\text{P}(Z = j \cap T = k)}{\text{P}(Z = j)} \\ &= \frac{2q^{2(j+k-2)}p^2}{q^{2(j-1)}(1-q^2)} \\ &= \frac{2q^{2k-2}p}{1+q}\end{aligned}$$

(e) On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

On a donc $\text{P}(D_j = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < j \\ \dfrac{p}{1+q} & \text{si } k = j \\ \dfrac{2q^{2k-2}p}{1+q} & \text{si } k > j \end{cases}$

On a $kP(D_j = k) \sim k\dfrac{2q^{2k-2}p}{1+q}$ et la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} kq^{2k-2}$ est entière en q^2 de rayon de convergence 1, donc la

LOIS EXPONENTIELLE ET GÉOMÉTRIQUE-CONVERGENCE

série à termes positifs $\sum_{k\geqslant 1} kP(D_j = k)$ est convergente, alors D_j admet une espérance

$$\begin{aligned}
E(D_j) &= \sum_{k=j}^{+\infty} k\mathrm{P}(D_j = k) \\
&= j\frac{p}{1+q} + \sum_{k=j+1}^{+\infty} k\frac{2q^{2k-2}p}{1+q} \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\sum_{k=j+1}^{+\infty} kq^{2(k-j-1)} \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\sum_{r=1}^{+\infty} (r+j)\, q^{2(r-1)} \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\left[\sum_{r=1}^{+\infty} rq^{2(r-1)} + \sum_{r=1}^{+\infty} jq^{2(r-1)}\right] \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\left[\frac{1}{(1-q^2)^2} + \frac{j}{1-q^2}\right] \\
&= j\frac{p}{1+q} + \frac{2pq^{2j}}{1+q}\frac{1+j\left(1-q^2\right)}{(1-q^2)^2}
\end{aligned}$$

Partie II: Loi exponentielle

5. (a) Comme $X_1 \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)$ on a $V(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}$ et $P([X_1 \leqslant x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

   (b) On a donc $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_1) = \frac{2}{\lambda}$

   et $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{2}{\lambda^2}$ par indépendance.

   et de même, $E(Y) = E(X_1 - X_2) = 0$ et $V(Y) = V(X_1) + (-1)^2 V(X_2) = \frac{2}{\lambda^2}$.

6. F_Z est la fonction de répartition de Z.
   Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $(Z \leqslant z) = (\min(X_1, X_2) \leqslant z)$ n'est pas simple à traduire.
   $(Z > z) = (\min(X_1, X_2) > z) = ([X_1 > z] \cap [X_2 > z])$ indépendants donc

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \mathrm{P}(Z \leqslant z) = 1 - \mathrm{P}(\min(X_1, X_2) > z) \\
&= 1 - \mathrm{P}(X_1 > z)\,\mathrm{P}(X_2 > z) \ \text{ par indépendance} \\
&= \begin{cases} 1 - \left(e^{-\lambda z}\right)^2 & \text{si } z \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   et comme $1 - \left(e^{-\lambda z}\right)^2 = 1 - e^{-2\lambda z}$, on reconnaît la fonction de répartition de $\varepsilon(2\lambda)$
   On conclut que $Z \hookrightarrow \varepsilon(2\lambda)$, $E(Z) = \frac{1}{2\lambda}$ et $V(Z) = \frac{1}{4\lambda^2}$

7. (a) $[T \leqslant t] = [\max(X_1, X_2) \leqslant t] = ([X_1 \leqslant t] \cap [X_2 \leqslant t])$ indépendants donc

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \mathrm{P}(X_1 \leqslant t)\,\mathrm{P}(X_2 \leqslant t) \ \text{ par indépendance} \\
&= \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

   La fonction F_T est continue sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $[0, +\infty[$
   En 0^- : $F_T(t) = 0 \to 0 = F_T(0)$ donc F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc T est à densité et une densité de T est $f_T(t) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$

(b) L'application $t \longmapsto t^2 f_T(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

— En $-\infty$, la fonction est nulle, donc elle est intégrable

— En $+\infty$, on a $t^2 f_T(t) \sim 2\lambda t^2 e^{-\lambda t} = \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction est donc intégrable en $+\infty$

T admet un moment d'ordre 2, puis elle admet une espérance et une variance

— Le calcul de l'espérance

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} t 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) dt \\ &= \left(2\int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^{+\infty} t 2\lambda e^{-2\lambda t} dt\right) \\ &= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda} \end{aligned}$$

— La formule de Huygens donne $V(T) = E\left(T^2\right) - E(T)^2$, on calcule avant $E(T^2)$. On a

$$\begin{aligned} E\left(T^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^2 f_T(t)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^2 2\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) dt \\ &= \left(2\int_0^{+\infty} t^2\lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^{+\infty} t^2 2\lambda e^{-2\lambda t} dt\right) \\ &\to \frac{4}{\lambda^2} - \frac{2}{4\lambda^2} = \frac{7}{2\lambda^2} \text{ quand } M \to +\infty \end{aligned}$$

Donc T^2 a une espérance et $E\left(T^2\right) = \frac{7}{2\lambda^2}$ donc T a une variance et

Conclusion : $\boxed{V(T) = \frac{7}{2\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}}$

N.B. cela permet de valider la loi de T

Ou bien, en suivant le conseil donné, avec le changement de variable $x = \lambda t$ ou plus simplement $t = x/\lambda$ $dt = dt/\lambda$ et $t = 0$ pour $x = 0$ et $t = M$ pour $x = \lambda M$

$$\begin{aligned} \int_0^M t\lambda e^{-\lambda t} dt &= \int_0^{\lambda M} \frac{x}{\lambda} e^{-x} dx \\ &\to \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda} I_1 = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

8. On a $X_1 + X_2 = Z + T$ et comme $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ par indépendance, et que $V(Z+T) = V(Z) + V(T) + 2\operatorname{cov}(Z,T)$ (admis) alors

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(Z,T) &= \frac{1}{2}\left[V(Z+T) - V(Z) - V(T)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[V(X_1) + V(X_2) - V(Z) - V(T)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{5}{4\lambda^2}\right] \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} \end{aligned}$$

et donc, le coefficient de corrélation linéaire est :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\operatorname{cov}(Z,T)}{\sqrt{V(Z)\,V(T)}} \\ &= \frac{\frac{1}{4\lambda^2}}{\sqrt{\frac{1}{4\lambda^2}\frac{5}{4\lambda^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

9. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{-X_2}(x) = \mathrm{P}(-X_2 \leqslant x) = \mathrm{P}(X_2 \geqslant -x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]-\infty, 0]$et $]0, +\infty[$ et en 0^+ : $F_{-X_2}(x) = 1 \to 1 = F(0)$ et elle est C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Donc $-X_2$ est bien à densité et une densité est $f_{-X_2}(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(b) <u>Si $y \geqslant 0$</u> on a $f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geqslant y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$ donc, pour $t \geqslant y$:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t) &= \lambda e^{\lambda(y-t)} \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_y^M f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_y^M e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{-2\lambda}\left[e^{-2\lambda M} - e^{-2\lambda y}\right] \\ &\to \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} \text{ quand } \to +\infty \end{aligned}$$

Donc, pour $y \geqslant 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt$ converge et vaut $\dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$

<u>Pour $y < 0$</u> : $f_{-X_2}(y-t) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda(y-t)} & \text{si } t \geqslant y \\ 0 & \text{si } t < y \end{cases}$

donc $f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t) \begin{cases} \lambda^2 e^{\lambda y} e^{-2\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt &= \lambda^2 e^{\lambda y} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt \\ &= \lambda^2 e^{\lambda y} \frac{1}{2\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda y} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} \end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt$ converge et vaut $\dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$

Conclusion : pour tout réel y, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t)\, f_{-X_2}(y-t)\, dt$ est convergente et vaut $\dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$

(c) On détermine la fonction de répartition $F_{|Y|}$:
Pour tout $y < 0$: $\mathrm{P}(|Y| \leqslant y) = 0$ (événement impossible)
et pour $y \geqslant 0$: $\mathrm{P}(|Y| \leqslant y) = \mathrm{P}(-y \leqslant Y \leqslant y) = F_Y(y) - F_Y(-y)$ car $-y \leqslant y$.

Comme Y est à densité, F_Y est continue et C^1sur $\mathbb{R}$ (car f_Y est continue sur $\mathbb{R}$), alors $F_{|Y|}$ est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$

De plus $F_{|Y|}(0) = F_Y(0) - F_Y(0) = 0$ et pour $y < 0$: $F_{|Y|}(y) = 0 \to 0 = F_{|Y|}(0)$ donc $F_{|Y|}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Donc $|Y|$ est bien à densité et une densité est

$$f_{|Y|}(y) = F'_{|Y|}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ f_Y(y) + f_Y(-y) = \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|} + \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda|-y|} = \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{|Y| \hookrightarrow \varepsilon(\lambda)}$

Partie III: Convergences

10. On a $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n/\lambda$, et $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n/\lambda^2$ par indépendance.
$E(J_n) = \lambda E(S_n) = n$ et $V(J_n) = \lambda^2 V(S_n) = n$

11. Par récurrence sur $n \in \ltimes^*$, on montre que la densité f_{J_n} de J_n est donnée par $f_{J_n}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

(a) Soit $n \geqslant 3$. Sous réserve d'absolue convergence (ssi convergence simple car tout est positif),

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{J_n}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}x^{n-2}}{(n-1)!}dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!}I_{n-2} \text{ converge car } n-2 \in \mathbb{N} \\ &= \frac{(n-2)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\frac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}x^{n-3}}{(n-1)!}dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!}I_{n-3} \text{ converge car } n-3 \in \mathbb{N} \\ &= \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} E\left(\frac{1}{J_n}\right) \text{ et } E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) \text{ existent et} \\ E\left(\frac{1}{J_n}\right) = \frac{1}{n-1} \text{ et } E\left(\frac{1}{J_n^2}\right) = \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \end{array}}$

12. (a) Etant donné une suite de variables aléatoires (X_n) indépendantes, de même loi et de variance non nulle, alors la somme centrée réduite des n premiers converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.
C'est à dire que la fonction de répartition de la somme centrée réduite tends vers Φ.
$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ a pour espérance n/λ et pour variance n/λ^2.

Les $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et ont une variance non nulle. Donc la centrée réduite $\dfrac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = N_n$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(b) Donc, pour n assez grand, $\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha) \simeq \Phi(u_\alpha) - \Phi(-u_\alpha)$ car $-u_\alpha \leqslant u_\alpha$ et comme $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.et que $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$ et que

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha) \simeq 1-\alpha}$

13. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose : $g_n(x) = \int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$ et $h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$

(a) $h_n(x) = \int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$

On l'intègre par parties pour faire apparaître $\int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$:

Soit $u'(t) = f_{T_n}(t) : u(t) = F_{T_n}(t)$ et $v(t) = t : v'(t) = 1$

v est C^1 et u est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ car la densité f_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt &= [tF_{T_n}(t)]_0^x - \int_0^x F_{T_n}(t)\,dt \\ &= xF_{T_n}(x) - g_n(x)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{h_n(x) = xF_{T_n}(x) - g_n(x)}$

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $(T_n \leqslant t) = \max(X_1, X_2, ..., X_n) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant t)$ indépendants donc

$F_{T_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \leqslant t) = [F_X(t)]^n$

$\mathrm{P}(T_n \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f_{T_n}(x)\,dx = 0$ si $t \leqslant 0$

et si $t \geqslant 0$: $\int_{-\infty}^{t} f_{T_n}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^t e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^t = 1 - e^{-t}$

Conclusion : $\boxed{F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1-e^{-t})^n & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$

Soit $n \geqslant 2$ (pour avoir $n-1 \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{aligned} g_{n-1}(x) - g_n(x) &= \int_0^x \left(F_{T_{n-1}}(t) - F_{T_n}(t)\right) dt \\ &= \int_0^x \left(\left(1-e^{-t}\right)^{n-1} - \left(1-e^{-t}\right)^n\right) dt \\ &= \int_0^x \left(1-e^{-t}\right)^{n-1} e^{-t}dt \text{ à la volée :} \\ &= \left[\frac{1}{n}\left(1-e^{-t}\right)^n\right]_0^x \\ &= \frac{1}{n}\left(1-e^{-x}\right)^n - 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2 : g_{n-1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n}F_{T_n}(x)}$

(c) On a donc pour $n \geqslant 2$: $g_n(x) = g_{n-1}(x) - \frac{1}{n}F_{T_n}(x)$ et par récurrence :

$$g_n(x) = -\frac{1}{n}F_{T_n}(x) - \frac{1}{n-1}F_{T_{n-1}}(x) \cdots - \frac{1}{2}F_{T_2}(x) + g_1(x)$$

et comme

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \int_0^x F_{T_1}(t)\,dt = \int_0^x 1 - e^{-t}dt = \left[t + e^{-t}\right]_0^x \\ &= x + e^{-x} - 1 \\ &= x - \frac{1}{1}F_{T_1}(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{g_n(x) = x - \frac{1}{n}F_{T_n}(x) - \frac{1}{n-1}F_{T_{n-1}}(x)\cdots - \frac{1}{2}F_{T_2}(x) - \frac{1}{1}F_{T_1}(x)}$

(d) Pour $x \geqslant 0$: $F_{T_n}(x) - 1 = (1 - e^{-x})^n - 1$
Comme $-e^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et que $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ quand $x \to 0$ alors $(\alpha = n)$
Conclusion : $\boxed{F_{T_n}(x) - 1 \sim -ne^{-x} \text{ quand } x \to +\infty}$

(e) T_n a une espérance si $\displaystyle\int_0^x tf_{T_n}(t)\,dt = xF_{T_n}(x) - g_n(x)$ a une limite finie quand $x \to +\infty$
Astuce : On réécrit $xF_{T_n}(x) - g_n(x) = x(F_{T_n}(x) - 1) + x - g_n(x)$ pour faire apparaître la quantité dont on a un équivalent.
Or $x(F_{T_n}(x) - 1) \sim -nxe^{-x} \to 0$ car $x = o(e^x)$ quand $x \to +\infty$ donc $x(F_{T_n}(x) - 1) \to 0$.
D'autre part, toute fonction de répartition tend vers 1 en $+\infty$ donc

$$\begin{aligned} x - g_n(x) &= \frac{1}{n}F_{T_n}(x) + \frac{1}{n-1}F_{T_{n-1}}(x)\cdots + \frac{1}{2}F_{T_2}(x) + \frac{1}{1}F_{T_1}(x) \\ &\to \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ quand } x \to +\infty \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{T_n \text{ a une espérance et } E(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$

14. (a) Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} F_{G_n}(x) &= \mathrm{P}(G_n \leqslant x) = \mathrm{P}(T_n \leqslant x + E(T_n)) \\ &= F_{T_n}(x + E(T_n)) \end{aligned}$$

avec $x + E(T_n) = x + \gamma_n + \ln(n)$
Et comme $E(T_n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, pour n suffisamment grand on aura $E(T_n) - x \geqslant 0$ et donc $F_{T_n}(\cdots) = (1 - e^{-\cdots})^n$

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x + E(T_n)) &= \left(1 - e^{-(x+\gamma_n+\ln(n))}\right)^n \\ &= \left(1 - e^{-\ln(n)}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout } x \text{ réel et } n \text{ assez grand, on a :} \\ F_{G_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n.\end{array}}$

(b) On a une forme indéterminée 1^∞ qu'il faut résoudre :

$$\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)\right]$$

Comme $e^{-(x+\gamma_n)} \to e^{-(x+\gamma)}$ et que $-\frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)} \to 0$ alors

$$\begin{aligned} &\ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right) \sim -\frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)} \text{ et} \\ &\left[n\ln\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)\right] \sim -e^{-(x+\gamma_n)} \to -e^{-(x+\gamma)} \text{ donc} \\ &\left(1 - \frac{1}{n}e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n \to \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right] \end{aligned}$$

Et comme $n \to +\infty$, il sera "suffisamment grand" et

Conclusion : $\boxed{F_{G_n}(x) \to \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right] \text{ quand } n \to +\infty}$

(c) Pour tout x réel, $F_G(x) = \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right]$

F_G est continue et C^1 sur $\mathbb{R}$

En $-\infty$: $-e^{-(x+\gamma)} \to -\infty$ donc $F_G(x) \to 0$

En $-\infty$: $-e^{-(x+\gamma)} \to 0$ et $F_G(x) \to 1$

Enfin , F_G est croissante sur $\mathbb{R}$. (composée de deux fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}$ ou par $F_G'(x) = \exp\left[-e^{-(x+\gamma)}\right] \times -e^{-(x+\gamma)} \times -1 > 0$)

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} F_G \text{ est la fonction de répartition d'une variable à densité } G \text{ et} \\ (G_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers la loi de } G \end{array}}$

15. Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante.

Pour tout x réel, $(Y \leqslant x) = (F_X(X) \leqslant x)$

Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$ (variable à densité) et qu'elle est strictement croissante, elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et admet une réciproque.

— Si $x \leqslant 0$: $(Y \leqslant x) = \emptyset$ et $F_Y(x) = 0$

— Si $x \geqslant 1$: $(Y \leqslant x) = \Omega$ et $F_Y(x) = 1$

— Si $x \in]0,1[$: $(Y \leqslant x) = \left(X \leqslant F_X^{-1}(x)\right)$ donc $F_Y(x) = F_X\left(F_X^{-1}(x)\right) = x$

et on reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$

Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}}$