Chapitre 16. Equations différentielles linéaires

Plan du chapitre

1 Le premier ordre .... **page 2**
1.1 Equations différentielles linéaires scalaires du premier ordre (rappels de sup) .... **page 2**
1.2 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants .... **page 9**
1.2.1 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants homogènes .... page 9
1.2.1.a) Différentes présentations du problème .... page 9
1.2.1.b) Résolution de $X'(t) = AX(t)$ par la méthode de Lagrange. Théorème de Cauchy .... page 10
1.2.1.c) Structure de l'ensemble des solutions .... page 12
1.2.1.d) Wronskien .... page 13
1.2.1.e) Expression des solutions dans le cas où A est diagonalisable .... page 15
1.2.1.f) Exemples de résolution .... page 16
1.2.2 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre .... page 17
1.2.2.a) Résolution de $X'(t) = AX(t) + B(t)$ par la méthode de Lagrange. Théorème de Cauchy .... page 17
1.2.2.b) Structure de l'ensemble des solutions .... page 19
1.2.2.c) Méthode de variation de la constante .... page 19
1.3 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre : cas général .... **page 21**
1.3.1 Théorème de Cauchy .... page 21
1.3.2 Structure de l'ensemble des solutions .... page 24
1.3.3 Wronskien .... page 25
1.3.4 La méthode de variation de la constante .... page 26
1.3.5 Principe de superposition des solutions .... page 27
2 Le second ordre .... **page 27**
2.1 Equations différentielles linéaires scalaires du second ordre à coefficients constants (rappels de sup) .... **page 27**
2.2 Equations différentielles linéaires scalaires du second ordre : cas général .... **page 28**
2.2.1 Système du premier ordre associé .... page 28
2.2.2 Théorème de Cauchy .... page 29
2.2.3 Structure de l'ensemble des solutions .... page 29
2.2.4 Wronskien .... page 30
2.2.5 Quelques techniques de résolution de $(\mathscr{E}_h)$ .... page 31
2.2.6 Méthode de variations des constantes .... page 36
2.2.7 Principe de superposition des solutions .... page 38
3 Equations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants .... **page 39**

1 Le premier ordre

1.1 Equations différentielles linéaires scalaires du premier ordre (rappels de sup)

On rappelle les principaux résultats de maths sup. On se donne deux fonctions a et b définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On veut résoudre sur I 'équation différentielle

$$y' + ay = b \quad (E).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction f dérivable sur I vérifiant

$$\forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

Résoudre l'équation différentielle (E) sur I, c'est trouver toutes les solutions de (E) sur I. Les graphes des solutions s'appellent les courbes intégrales de l'équation (E).

L'équation différentielle homogène associée à l'équation (E) est

$$y' + ay = 0 \quad (E_h).$$

On rappelle maintenant la résolution de (E) sur I dans le cas où de plus les fonctions a et b sont **continues** sur I. La méthode utilisée est la méthode de Lagrange. On fixe un réel x_0 de I.

La fonction a est continue sur I et par suite, la fonction a admet des primitives sur I. Soit A une primitive donnée de la fonction a sur I. On peut par exemple prendre $A\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\ dt$, ou encore on peut choisir pour A la primitive de la fonction a sur I qui s'annule en x_0.

Soit alors f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + a(x)f(x) = b(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{A(x)}f'(x) + a(x)e^{A(x)}f(x) = b(x)e^{A(x)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left(e^{A}f\right)'(x) = b(x)e^{A(x)}\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ \forall x \in I,\ e^{A(x)}f(x) = C + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{K}/\ \forall x \in I,\ f(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue sur I, les fonctions $x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt$, $C \in \mathbb{K}$, sont effectivement dérivables sur I et finalement solutions de (E) sur I. Donc, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt,\ C \in \mathbb{K}.$$

Le cas particulier $b = 0$ fournit les solutions sur I de l'équation homogène associée : ce sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$, $C \in \mathbb{K}$. Pour $x \in I$, posons $f_0(x) = e^{-A(x)}$ et $f_1(x) = e^{-A(x)}\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\ dt$ et . La fonction f_1 est l'une des solutions de l'équation (E) sur I ou encore la fonction f_1 est une solution particulière de (E) sur I. D'autre part, la fonction f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur I et les solutions de (E_h) sur I sont les Cf_0, $C \in \mathbb{K}$, ou encore la solution générale de (E_h) sur I est Cf_0, $C \in \mathbb{K}$. Avec ces notations, les solutions de (E) sur I s'écrivent $f = Cf_0 + f_1$, $C \in \mathbb{K}$. On obtient donc le théorème suivant, exposé en maths sup :

Théorème 1. Soient a et b deux fonctions **continues** sur un **intervalle** de longueur non nulle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient (E) l'équation différentielle $y' + ay = b$ puis (E_h) : $y' + ay = 0$ l'équation différentielle homogène associée.

• Les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\, dt$, $C \in \mathbb{K}$, où A est une primitive fixée de la fonction a sur I et x_0 est un réel fixé de I.
Les solutions de (E_h) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$, $C \in \mathbb{K}$, où A est une primitive quelconque fixée de la fonction a sur I.

• Les solutions de (E_h) sur I constituent un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
Les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension 1 et de direction l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation homogène associée.
Dit autrement, les solutions de (E_h) sur I sont de la forme Cf_0, $C \in \mathbb{K}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur I et les solutions de (E) sur I sont de la forme $Cf_0 + f_1$, $C \in \mathbb{K}$, où f_0 est une solution non nulle de (E_h) sur I et f_1 une solution de (E) sur I.
Dit autrement, la solution générale de (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) sur I et de la solution générale de (E_h) sur I.

En choisissant la constante C de sorte que $f(x_0) = y_0$, on obtient le

Théorème 2. (théorème de Cauchy).

Soient a et b deux fonctions **continues** sur un **intervalle** de longueur non nulle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient (E) l'équation différentielle $y' + ay = b$.

Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution f de (E) sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$.

La solution de (E) sur I prenant la valeur y_0 en x_0 est la fonction $x \mapsto y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\, dt$ où, pour tout x de I, $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$.

On rappelle que le problème $\left\{\begin{array}{l} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$ s'appelle le « problème de Cauchy en (x_0, y_0) ».

⇛ **Commentaire** .

◇ *Le théorème de Cauchy ci-dessus ne dit absolument pas que toute équation différentielle admet une solution et une seule vérifiant une condition initiale donnée. Le théorème ci-dessus ne parle que des équations différentielles du type $y' + ay = b$ où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I (l'équation $y' = -ay + b$ est dite « résolue en y' »).*

Considérons par exemple l'équation différentielle (E_1) : $xy' - y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$. C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre mais, sur $I = \mathbb{R}$, elle n'est pas du type précédent (par contre sur $I =]0, +\infty[$ ou $I =]-\infty, 0[$, elle peut s'écrire $y' - \dfrac{1}{x}y = 0$ et dans ce cas, elle rentre dans le champ d'application des deux théorèmes précédents). Les fonctions $f : x \mapsto 0$ et la fonction $g : x \mapsto x$ sont deux solutions distinctes de (E) sur $I = \mathbb{R}$, vérifiant de plus $f(0) = g(0) = 0$. Le problème de Cauchy en $(0, 0)$ a donc ici plusieurs solutions.

Considérons maintenant l'équation différentielle (E_2) : $xy' - xy = 1$ sur $I = \mathbb{R}$. C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre mais, sur $I = \mathbb{R}$ mais cette équation n'a pas de solution car si f est une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$, on doit avoir $0 \times f'(0) + 0 \times f(0) = 1$ ce qui est impossible.

Considérons encore l'équation différentielle (E_3) : $y = y'^2$ sur $I = [0, +\infty[$. C'est une équation différentielle non linéaire du premier ordre. Cette équation admet sur $[0, +\infty[$ les deux solutions distinctes $f : x \mapsto 0$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$ et ces deux solutions vérifient $f(0) = g(0) = 0$. Il n'y a donc pas unicité au problème de Cauchy en $(0, 0)$.

◇ *Un cas particulier important est le cas de l'équation homogène $y' + ay = 0$ où a est une fonction continue sur un intervalle I. Le théorème de Cauchy permet d'affirmer qu'une solution de cette équation qui s'annule au moins une fois est nécessairement la fonction nulle ou encore qu'une solution non nulle de cette équation sur I, ne s'annule pas sur I.*

◇ *Si on connaît une solution non nulle de (E_h) sur I et une solution de (E) sur I, l'équation (E) est immédiatement résolue. C'est le cas dans l'exercice suivant.*

Exercice 1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $xy' - y = 1 \quad (E)$.

Solution 1. Sur $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle (E) est équivalente à l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x}$. Puisque les deux fonctions $a : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ et $b : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont continues sur l'intervalle I, les solutions de (E) sur I constituent un

$\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1 et de direction l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation homogène associée (E_h) : $xy' - y = 0$.

La fonction $f_0 : x \mapsto x$ est une solution non nulle de (E_h) sur I et la fonction $f_1 : x \mapsto -1$ est une solution de (E) sur I. Donc, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto Cx - 1$, $C \in \mathbb{R}$.

Dans les théorèmes 1 et 2, il y a deux mots clés, les mots « continu » et « intervalle ». Si l'un de ces deux mots n'est plus vrai, les théorème 1 et 2 ne sont plus valables. C'est le cas d'une équation différentielle du type $ay' + by = c$ où a, b et c sont trois fonctions continues sur un certain intervalle I. Si la fonction a **ne s'annule pas sur** I, on est effectivement dans la situation des deux théorèmes en écrivant l'équation sous la forme $y' + \dfrac{b}{a}y = \dfrac{c}{a}$ (équation résolue en y'). Si par contre la fonction a s'annule une ou plusieurs fois sur l'intervalle I, les théorèmes 1 et 2 ne s'appliquent plus et il est possible par exemple que l'équation n'ait pas de solution. Les points en lesquels a s'annule créent des intervalles d'étude sur lesquels on résout classiquement l'équation différentielle puis il s'agit ensuite de « recoller » les solutions. C'est ce qui se passe dans l'exercice suivant :

Exercice 2. Soit (E) l'équation différentielle $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$. Résoudre l'équation différentielle (E) sur chacun des intervalles suivants : $]0,1[$, $]-\infty,0[$, $]-\infty,1[$, $\mathbb{R}$.

Solution 2.

• Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,1[$. Sur I, l'équation différentielle (E) s'écrit :

$$y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1-x)}.$$

Les deux fonctions $a : x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ et $b : x \mapsto \dfrac{1}{2x(1-x)}$ sont continues sur I. Donc, les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1 et de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.

• **Résolution de** (E) **sur** $]0,1[$. Soit f une fonction dérivable sur $]0,1[$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,1[\Leftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ f'(x) + \frac{1}{2x}f(x) = \frac{1}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ e^{\frac{1}{2}\ln(x)}f'(x) + \frac{1}{2x}e^{\frac{1}{2}\ln(x)}f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(x)}}{2x(1-x)}$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ \left(\sqrt{x}f\right)'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ \left(\sqrt{x}f\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)} \quad (*).$$

Déterminons une primitive sur $]0,1[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$. En posant $t = \sqrt{x}$ (de sorte que t décrit $]0,1[$) et donc $x = t^2$ puis $dx = 2t\,dt$, on obtient

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}\,dx = \int \frac{1}{2t\left(1-t^2\right)}\,2t\,dt = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + C$$

Revenons à $(*)$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,1[\Leftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ \left(\sqrt{x}f\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)}$$
$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,1[,\ \sqrt{x}f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + C$$
$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Les solutions de l'équation (E) sur $]0,1[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + \dfrac{C}{\sqrt{x}}$, $C \in \mathbb{R}$.

• **Résolution de** (E) **sur** $]-\infty,0[$**.** Soit f une fonction dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=\frac{1}{2x(1-x)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ e^{\frac{1}{2}\ln(|x|)}f'(x)+\frac{1}{2x}e^{\frac{1}{2}\ln(|x|)}f(x)=\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(|x|)}}{2x(1-x)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ \left(\sqrt{-x}f\right)'(x)=-\frac{\sqrt{-x}}{2(-x)(1-x)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ \left(\sqrt{-x}f\right)'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{-x}(1-x)} \quad (*).
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive sur $]-\infty,0[$ de la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}(1-x)}$. En posant $t=\sqrt{-x}$ et donc $x=-t^2$ puis $dx=-2t\,dt$, on obtient

$$\int -\frac{1}{2\sqrt{-x}(1-x)}\,dx=\int -\frac{1}{2t\left(1+t^2\right)}\,(-2t)\,dt=\int \frac{1}{1+t^2}\,dt=\text{Arctan}\,t+C=\text{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)+C$$

On termine alors la résolution :

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[,\ \left(\sqrt{-x}f\right)'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{-x}(1-x)}\\
&\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ \sqrt{-x}f(x)=\text{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)+C\\
&\Leftrightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x)=\frac{\text{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}}+\frac{C}{\sqrt{-x}}.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (E) sur $]-\infty,0[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto \dfrac{\text{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}}+\dfrac{C}{\sqrt{-x}}$, $C\in\mathbb{R}$.

• **Résolution de** (E) **sur** $]-\infty,1[$**.** Soit f une **éventuelle** solution de (E) sur $]-\infty,1[$.
La restriction de f à $]0,1[$ est solution de (E) sur $]0,1[$ et donc il existe un réel C_1 tel que, pour tout x de $]0,1[$, $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+\dfrac{C_1}{\sqrt{x}}$.
De même, la restriction de f à $]-\infty,0[$ est solution de (E) sur $]-\infty,0[$ et donc il existe un réel C_2 tel que, pour tout x de $]-\infty,0[$, $f(x)=\dfrac{\text{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}}+\dfrac{C_2}{\sqrt{-x}}$.
Enfin, $0\times f'(0)+1\times f(0)=1$ et donc $f(0)=1$.

Ainsi, si f est solution de (E) sur $]-\infty,1[$, il existe nécessairement $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout x de $]-\infty,1[$,

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\text{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}}+\dfrac{C_2}{\sqrt{-x}} \text{ si } x<0\\
1 \text{ si } x=0\\
\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+\dfrac{C_1}{\sqrt{x}} \text{ si } 0<x<1
\end{array}\right..$$

Réciproquement, soit f une telle fonction. f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$ et solution de (E) sur chacun de ces deux intervalles et si de plus, f est dérivable en 0, f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et solution de (E) sur $]-\infty,1[$. En résumé, f est solution de (E) sur $]-\infty,1[$ si et seulement si f est dérivable en 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0,\ x<0}{=} \frac{C_2}{\sqrt{-x}}+\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(\sqrt{-x}-\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{3}+o\left(\left(\sqrt{-x}\right)^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0,\ x<0}{=} \frac{C_2}{\sqrt{-x}}+1+\frac{x}{3}+o(x) \text{ (car } -\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{\sqrt{-x}}=-\left(\sqrt{-x}\right)^2=-(-x)=x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0,\ x>0}{=} \frac{C_1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0,\ x>0}{=} \frac{C_1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\left(\sqrt{x} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}\right) - \left(-\sqrt{x} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}\right) + o\left(\left(\sqrt{x}\right)^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0,\ x>0}{=} \frac{C_1}{\sqrt{x}} + 1 + \frac{x}{3} + o(x).
\end{aligned}$$

Si $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$, f n'a pas de limite réelle en 0 et en particulier, f n'est pas dérivable en 0. Dans ce cas, f n'est pas solution de (E) sur $]-\infty, 1[$. Si $C_1 = C_2 = 0$, en tenant compte de $f(0) = 1$, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{3} + o(x).$$

Dans ce cas, f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 et donc f est dérivable en 0 (et en particulier continue en 0). D'après la remarque initiale, f est solution de (E) sur $]-\infty, 1[$. Finalement, l'équation (E) admet sur $]-\infty, 1[$ une et une seule solution à savoir la fonction f définie par

$$\forall x \in]-\infty, 1[,\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\text{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}} \text{ si } x < 0\\ 1 \text{ si } x = 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \text{ si } 0 < x < 1 \end{array}\right. .$$

• **Résolution de** (E) **sur** $\mathbb{R}$**.** Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors en évaluant en 1, on obtient $0 \times f'(1) + 0 \times f(1) = 1$ ce qui est impossible. L'équation (E) n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

On revient à l'équation différentielle $ay' + by = c$ où a, b et c sont trois fonctions continues (ou même juste définies) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Certains résultats du théorème 1 restent tout de même vrais :

• l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions de $(E_h)\ :\ ay' + by = 0$ sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet, $0 \in \mathscr{S}_h$ et si f et g sont des solutions de (E_h) sur I, alors, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$a \times (\lambda f + \mu g)' + b \times (\lambda f + \mu g) = \lambda\left(af' + bf\right) + \mu(ag' + bg) = 0,$$

et donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_h$. Ceci montre que $\mathscr{S}_h$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}^1(I, \mathbb{K})$. Par contre, on ne peut rien dire de la dimension de $\mathscr{S}_h$. C'est ce qu'on analysera dans l'exercice suivant.

• l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $(E)\ :\ ay' + by = c$ sur I, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine de $D^1(I, \mathbb{K})$, de direction $\mathscr{S}_h$. En effet, si f_1 est une solution de (E) sur I,

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow af' + bf = c \Leftrightarrow af' + bf = af_1' + bf_1 \Leftrightarrow a\left(f - f_1\right)' + b\left(f - f_1\right) = 0\\
&\Leftrightarrow f - f_1 \in \mathscr{S}_h \Leftrightarrow f \in f_1 + \mathscr{S}_h
\end{aligned}$$

et donc $\mathscr{S} = f_1 + \mathscr{S}_h$. Par contre, $\mathscr{S}$ peut être vide comme l'a montré l'exercice précédent.

Exercice 3. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) dans chacun des cas suivants :

1) $(E)\ :\ xy' + y = 0$,
2) $(E)\ :\ xy' - y = 0$,
2) $(E)\ :\ xy' - 2y = 0$.

Solution 3. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

1) Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$ (car par exemple, $xy' + y = 0 \Leftrightarrow (xy)' = 0$). Donc, si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, nécessairement il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{C_1}{x} \text{ si } x < 0\\ 0 \text{ si } x = 0\\ \dfrac{C_2}{x} \text{ si } x > 0 \end{array}\right.$. Réciproquement, une telle fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est dérivable en 0.

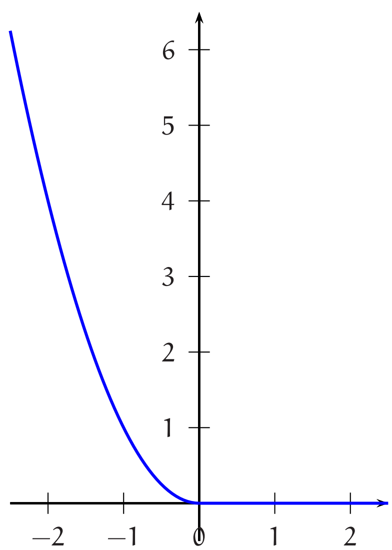
Si $C_1 \neq 0$ ou $C_2 \neq 0$, la fonction f n'a pas de limite réelle en 0 et en particulier, n'est pas dérivable en 0. Dans ce cas, f n'est pas solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Si $C_1 = C_2 = 0$, on obtient la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ qui est effectivement solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathscr{S} = \{0\}$ et en particulier, $\mathscr{S}$ est un espace de dimension 0.

2) Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx$, $C \in \mathbb{R}$. Donc, si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, nécessairement il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left\{\begin{array}{l} C_1 x \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ C_2 x \text{ si } x > 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} C_1 x \text{ si } x < 0 \\ C_2 x \text{ si } x \geqslant 0 \end{array}\right.$.
Réciproquement, une telle fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est dérivable en 0 ce qui équivaut à $C_1 = C_2$.
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx$, $C \in \mathbb{R}$, ou encore $\mathscr{S} = \{x \mapsto Cx,\ C \in \mathbb{R}\}$. En particulier, $\mathscr{S}$ est un espace de dimension 1.

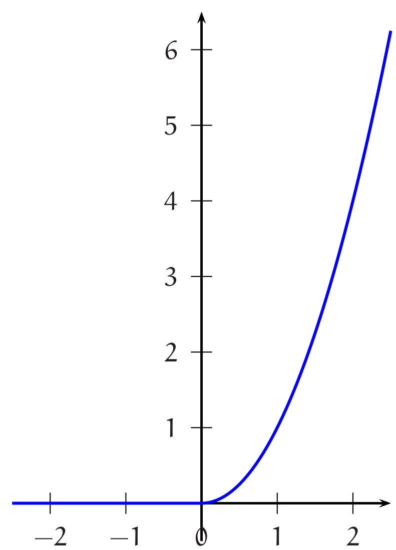
3) Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$ (la fonction $x \mapsto x^2$ étant bien sûr une solution non nulle de (E) sur l'un ou l'autre de ces intervalles). Donc, si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, nécessairement il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left\{\begin{array}{l} C_1 x^2 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ C_2 x^2 \text{ si } x > 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} C_1 x^2 \text{ si } x < 0 \\ C_2 x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \end{array}\right.$.
Réciproquement, une telle fonction f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est dérivable en 0.
Or, pour tous réels C_1 et C_2, la fonction f ci-dessus est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (car $f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x)$). Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \left\{\begin{array}{l} C_1 x^2 \text{ si } x < 0 \\ C_2 x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \end{array}\right.$, $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $f_1(x) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^2 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$ et $f_2(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$. La solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ s'écrit alors $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$ ou encore

$$\mathscr{S} = \left\{C_1 f_1 + C_2 f_2,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)\,.$$

Vérifions que la famille de fonctions (f_1, f_2) est libre. Si C_1 et C_2 sont deux réels tels que $C_1 f_1 + C_2 f_2 = 0$, alors $C_1 f_1(-1) + C_2 f_2(-1) = 0$ et donc $C_1 = 0$ et $C_1 f_1(1) + C_2 f_2(1) = 0$ et donc $C_2 = 0$. Ainsi, la famille (f_1, f_2) est libre. En particulier, $\mathscr{S}$ est un espace de dimension 2.

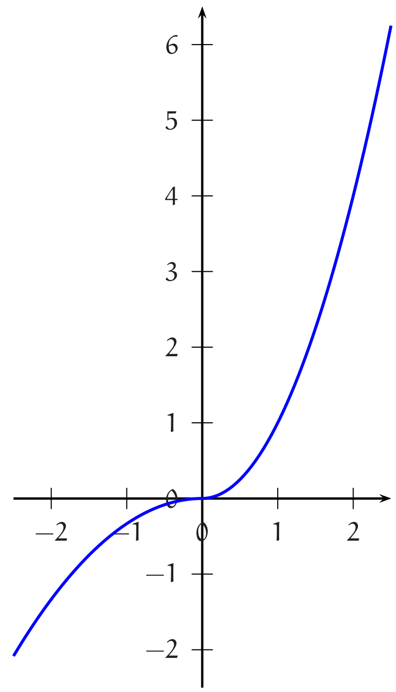


Graphe de f_1



Graphe de f_2

Ci-après une courbe intégrale un peu générale ($C_1 = -\dfrac{1}{3}$ et $C_2 = 1$) :



Enfin, on rappelle la méthode variation de la constante :

Théorème 3. (méthode de variation de la constante).

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit f_0 une solution non nulle de $(E_h)\ :\ y' + ay = 0$ sur I.

Il existe une solution particulière de $(E)\ :\ y' + ay = b$ sur I de la forme $f_1\ :\ x \mapsto C(x)f_0(x)$ où C est une fonction dérivable sur I.

Exercice 4. Soit (E) l'équation différentielle $y' + \text{th}(x)y = x\,\text{th}(x)$. On note (E_h) l'équation différentielle homogène associée.

1) Résoudre l'équation (E_h) sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ par la méthode de variation de la constante.

3) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Solution 4. Les fonctions $a\ :\ x \mapsto \text{th}(x)$ et $b\ :\ x \mapsto x\,\text{th}(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1 et de direction l'espace vectoriel des solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$.

1) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E_h) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x)f'(x) + \text{sh}(x)f(x) = 0 \text{ (car } \forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x) \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\text{ch} \times f)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x)f(x) = C \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{C}{\text{ch}(x)}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{C}{\text{ch}(x)}$, $C \in \mathbb{R}$.

2) On pose pour tout réel x, $f_0(x) = \dfrac{1}{\text{ch}(x)}$ de sorte que les solutions de (E_h) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme Cf_0, $C \in \mathbb{R}$.

Il existe une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_1 = Cf_0$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f_1'(x)+\operatorname{th}(x)f_1(x)=x\operatorname{th}(x) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x)f_0(x)+C(x)f_0'(x)+\operatorname{th}(x)C(x)f_0(x)=x\operatorname{th}(x)\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x)f_0(x)+C(x)\left(f_0'(x)+\operatorname{th}(x)f_0(x)\right)=x\operatorname{th}(x)\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x)f_0(x)=x\operatorname{th}(x)\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{C'(x)}{\operatorname{ch}(x)}=x\operatorname{th}(x)\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ C'(x)=x\operatorname{sh}(x).\end{aligned}$$

De plus,

$$\int x\operatorname{sh}(x)\ dx = x\operatorname{ch}(x)-\int \operatorname{ch}(x)\ dx = x\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)+\lambda.$$

On peut prendre pour C la fonction $x\mapsto x\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)$ et on obtient la solution particulière f_1 : pour tout réel x,

$$f_1(x)=C(x)f_0(x)=\frac{x\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}=x-\operatorname{th}(x).$$

3) Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme Cf_0+f_1, $C\in\mathbb{R}$, on encore, en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$,

$$\mathscr{S}=\left\{x\mapsto \frac{C}{\operatorname{ch}(x)}+x-\operatorname{th}(x),\ C\in\mathbb{R}\right\}.$$

1.2 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants

Dans cette section, nous préférons aller « du particulier vers le général ». Nous allons étudier le cas général des systèmes différentiels linéaires du type $X'(t)=A(t)X(t)+B(t)$ en commençant par le cas où la fonction matricielle A est constante et la fonction vectorielle B est nulle (cas des systèmes différentiels linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants). L'intérêt de cette chronologie est d'aller du « simple » vers le « compliqué ». Cette chronologie aura le défaut d'obliger à réénoncer certains théorèmes plusieurs fois (comme par exemple le théorème de CAUCHY) en se plaçant dans une situation de plus en plus générale.

1.2.1 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants homogènes

1.2.1.a) Différentes présentations du problème

On se donne n^2 éléments de $\mathbb{K}$ notés $a_{i,j}$, $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. On cherche tous les n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x_1'(t)=a_{1,1}x_1(t)+a_{1,2}x_2(t)+\ldots+a_{1,n}x_n(t)\\ x_2'(t)=a_{2,1}x_1(t)+a_{2,2}x_2(t)+\ldots+a_{2,n}(t)x_n(t)\\ \qquad\vdots\\ x_n'(t)=a_{n,1}x_1(t)+a_{n,2}x_2(t)+\ldots+a_{n,n}x_n(t)\end{array}\right.\qquad (S).$$

Le système ci-dessus est un **système d'équations différentielles linéaires, du premier ordre, à coefficients constants et homogène**. Résoudre le système (S), c'est trouver tous les n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ solutions de (S). Les solutions d'un tel système sont des n-uplets de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ du type $t\mapsto(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$.

On a une écriture matricielle du système (S). On pose $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$. A est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et X est un élément de $\mathscr{D}^1\left(\mathbb{R},\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$. Le système (S) s'écrit alors

$$\forall t\in\mathbb{R},\ X'(t)=AX(t)\text{ ou encore, plus simplement, }X'=AX\quad(\mathscr{E}).$$

L'équation $(\mathscr{E})$ est une **équation différentielle du premier ordre, linéaire et homogène** (à n dimensions) mais peut continuer aussi à s'appeler système d'équations différentielles linéaires du premier ordre homogène. Les solutions de l'équation $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions vectorielles $X:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ t&\mapsto&X(t)\end{array}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t).$$

Une équation différentielle linéaire a encore une autre présentation. On se donne $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie puis a une endomorphisme de E. On cherche toutes les fonctions x de $\mathbb{R}$ dans E, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = a(x(t)) \text{ ou encore, plus simplement, } x' = a \circ x \quad (\mathscr{E}').$$

Notation. Le programme officiel prévoit de noter $x' = a.x$ ou $x' = a(x)$ l'égalité $x' = a \circ x$.

Si on fixe une base $\mathscr{B}$ de E et si on note A la matrice de l'endomorphisme a dans $\mathscr{B}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ la matrice de $x(t)$ dans $\mathscr{B}$, l'équation $(\mathscr{E}')$ « devient » l'équation $(\mathscr{E})$.

Exemple 1. $\left\{\begin{array}{l} x' = -x - y \\ y' = 6x + 4y \end{array}\right.$ est un système différentiel linéaire du premier ordre homogène à deux équations et deux inconnues. On cherche deux fonctions x et y, dérivables sur $\mathbb{R}$, ou plutôt on cherche un couple de fonctions (x, y), vérifiant pour tout réel t, $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -x(t) - y(t) \\ y'(t) = 6x(t) + 4y(t) \end{array}\right.$. Les fonctions $t \mapsto (x(t), y(t)) = (e^t, -2e^t)$ ou aussi $t \mapsto \left(e^t + e^{2t}, -2e^t - 3e^{2t}\right)$ sont des solutions de ce système sur $\mathbb{R}$.

On note que le système s'écrit matriciellement $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. ❏

Exemple 2. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ puis h l'homothétie de rapport λ de $E = \mathbb{K}^n$. On considère l'équation différentielle

$$x' = h(x)$$

où cette fois-ci x désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans E, dérivable sur $\mathbb{R}$. Si on pose $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a $x' = (x_1', \ldots, x_n')$ et l'équation différentielle $x' = h(x)$ s'écrit encore

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = \lambda x_2 \\ \quad\quad \vdots \\ x_n' = \lambda x_n \end{array}\right. .$$

Les solutions de ce système sont les fonctions de la forme $t \mapsto \left(c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t}, \ldots, c_n e^{\lambda t}\right)$, $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$. ❏

Dorénavant, nous n'étudierons plus que la présentation matricielle : $X' = AX$.

1.2.1.b) Résolution de $X'(t) = AX(t)$ par la méthode de Lagrange. *Théorème de* Cauchy

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$X' = AX \quad (\mathscr{E})$$

d'inconnue X où X est un élément de $\mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$. Dans les calculs qui suivent, on utilise des formules de dérivation exposées dans le chapitre « Fonctions vectorielles ». La définition et les propriétés usuelles de l'exponentielle d'une matrice ont quant à elles été exposées dans le chapitre « Suites et séries de matrices ou d'endomorphismes ».

Soit X une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Sous l'hypothèse de dérivabilité,

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) - AX(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-tA}X'(t) - Ae^{-tA}X(t) = 0 \\ &(\text{car } \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-tA} \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et car } \forall t \in \mathbb{R},\ A \text{ et } e^{-tA} \text{ commutent}) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dt}\left(e^{-tA}X\right)(t) = 0 \Leftrightarrow \exists C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \ \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-tA}X(t) = C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{tA}C. \end{aligned}$$

Les fonctions X obtenues étant toutes dérivables sur $\mathbb{R}$, elles sont toutes solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ et on peut donc énoncer :

Théorème 4.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $X' = AX$, où X est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{tA}C,\ C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

2) Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie puis $a \in \mathscr{L}(E)$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' = a.x$, où x est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{ta}(c),\ c \in E.$$

⇛ **Commentaire** . *On rappelle que si a est un endomorphisme de E, alors e^{ta} est un endomorphisme de E puis si $c \in E$, $e^{ta}(c)$ est un élément de E.*

On a aussi le :

Théorème 5. (théorème de Cauchy).

1) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Il existe une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $X' = AX$ vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$ à savoir la fonction

$$t \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0.$$

2) Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie puis $a \in \mathscr{L}(E)$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. Il existe une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' = a.x$ vérifiant de plus $x(t_0) = x_0$ à savoir la fonction

$$t \mapsto e^{(t-t_0)a}(x_0).$$

Démonstration . Soient $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puis $X\ :\ t \mapsto e^{tA}C$.

$$X(t_0) = X_0 \Leftrightarrow e^{t_0A}C = X_0 \Leftrightarrow C = e^{-t_0A}X_0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0.$$

❏

Le théorème 4 fournit déjà une première technique de résolution de l'équation $X' = AX$: on calcule e^{tA}. C'est ce que l'on met en œuvre dans l'exercice suivant. On reprend l'exemple 1 de la page 10.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel $\left\{\begin{array}{l} x' = -x - y \\ y' = 6x + 4y \end{array}\right.$.

Solution 5. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de sorte que le système proposé s'écrit $X' = AX\quad(\mathscr{E})$. On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathscr{E})$ sont les fonctions de la forme $X\ :\ t \mapsto e^{tA}C$, $C \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Calculons e^{tA} pour t réel donné. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ (X désignant ici un polynôme et non pas un vecteur colonne). D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q \times \chi_A + a_nX + b_n$ $(*)$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant en A, on obtient $A^n = a_nA + b_nI_2$.

Déterminons a_n et b_n. En évaluant en 1 et en 2 les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient $\left\{\begin{array}{l} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{array}\right.$ puis $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = -2^n + 2$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (2^n - 1)A + (-2^n + 2)I_2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\left(2^n - 1\right) A + \left(-2^n + 2\right) I_2 \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2t)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right) A + \left(- \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2t)^n}{n!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right) I_2 = \left(e^{2t} - e^t\right) A + \left(-e^{2t} + 2e^t\right) I_2 \\
&= \left(e^{2t} - e^t\right) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \left(-e^{2t} + 2e^t\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3e^t & -e^{2t} + e^t \\ 6e^{2t} - 6e^t & 3e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit les solutions de l'équation (E) : ce sont les fonctions de la forme $X : t \mapsto e^{tA} C$ où C est un élément donné de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Plus explicitement, en posant $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels, on obtient le forme générale des solutions :

$$\begin{aligned}
X(t) &= \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3e^t & -e^{2t} + e^t \\ 6e^{2t} - 6e^t & 3e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\left(-2e^{2t} + 3e^t\right) + b\left(-e^{2t} + e^t\right) \\ a\left(6e^{2t} - 6e^t\right) + b\left(3e^{2t} - 2e^t\right) \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3e^t \\ 6e^{2t} - 6e^t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -e^{2t} + e^t \\ 3e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les solutions du système sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} a\left(-2e^{2t} + 3e^t\right) + b\left(-e^{2t} + e^t\right) \\ a\left(6e^{2t} - 6e^t\right) + b\left(3e^{2t} - 2e^t\right) \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On note que $a = 1$ et $b = -2$ fournit la solution $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}$ qui avait déjà été signalée dans l'exemple 1, page 10.

1.2.1.c) Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 6.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $X' = AX$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Si t_0 est un réel donné, l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2) Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ puis $a \in \mathscr{L}(E)$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' = a.x$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Si t_0 est un réel donné, l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \to & E \\ x & \mapsto & x(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration . Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $X' = AX$. $\mathscr{S}$ est une partie de $\mathscr{D}^1\left(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$.

- La fonction nulle est un élément de $\mathscr{S}$.
- Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(X_1, X_2) \in \mathscr{S}^2$, alors

$$(\lambda X_1 + \mu X_2)' = \lambda X_1' + \mu X_2' = \lambda A X_1 + \mu A X_2 = A\left(\lambda X_1 + \mu X_2\right),$$

  et donc $\lambda X_1 + \mu X_2$ est un élément de $\mathscr{S}$.

Ceci montre que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\left(\mathscr{D}^1\left(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right), +, .\right)$.

Déterminons alors la dimension de $\mathscr{S}$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ puis $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{array}$. L'application φ est linéaire car si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(X_1, X_2) \in \mathscr{S}^2$, alors

$$\varphi\left(\lambda X_1 + \mu X_2\right) = \left(\lambda X_1 + \mu X_2\right)(0) = \lambda X_1(0) + \mu X_2(0) = \lambda \varphi\left(X_1\right) + \mu \varphi\left(X_2\right).$$

Le théorème de Cauchy (théorème 5, page 11) montre que φ est une bijection et finalement, φ est un isomorphisme de $\mathscr{S}$ sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On en déduit encore que $\dim(\mathscr{S}) = \dim\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right) = n$.

❏

Définition 1.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $X' = AX$, s'appelle un **système fondamental de solutions de** $(\mathscr{E})$.

2) Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel puis $a \in \mathscr{L}(E)$. Une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $x' = a.x$, s'appelle un **système fondamental de solutions de** $(\mathscr{E})$.

Par exemple, dans l'exercice 5, page 11, on a trouvé qu'un système fondamental de solutions du système $\left\{\begin{array}{l} x' = -x - y \\ y' = 6x + 4y \end{array}\right.$ est (X_1, X_2) où, pour tout réel t $X_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3e^t \\ 6e^{2t} - 6e^t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} + e^t \\ 3e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix}$.

1.2.1.d) Wronskien

Définition 2.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de n solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $X' = AX$. Le **wronskien** de cette famille est la fonction W définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = \det\left(X_1(t), \ldots, X_n(t)\right).$$

Exemple. Pour le système $\left\{\begin{array}{l} x' = -x - y \\ y' = 6x + 4y \end{array}\right.$ de l'exercice 5, page 11, un système fondamental de solutions est (X_1, X_2) où, pour tout réel t $X_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3e^t \\ 6e^{2t} - 6e^t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} + e^t \\ 3e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix}$. Calculons le Wronskien de ce système fondamental de solutions. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$W(t) = \begin{vmatrix} -2e^{2t} + 3e^t & -e^{2t} + e^t \\ 6e^{2t} - 6e^t & 3e^{2t} - 2e^t \end{vmatrix} = \left(-2e^{2t} + 3e^t\right)\left(3e^{2t} - 2e^t\right) - \left(6e^{2t} - 6e^t\right)\left(-e^{2t} + e^t\right) = e^{3t}.$$

❑

Calculons maintenant le wronskien dans le cas général. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de n solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $X' = AX$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $W(t) = \det\left(X_1(t), \ldots, X_n(t)\right)$. La fonction W est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det\left(X_1(t), \ldots, X_k'(t), \ldots, X_n(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} \det\left(X_1(t), \ldots, AX_k(t), \ldots, X_n(t)\right).$$

Calculons maintenant cette dernière somme. Considérons pour cela $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)^n & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (X_1, \ldots, X_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \det\left(X_1, \ldots, AX_k, \ldots, X_n\right) \end{array}$.

L'application φ est linéaire par rapport à chacun des vecteurs colonnes X_1, ..., X_n, par linéarité de l'application $X \mapsto AX$ et n-linéarité du déterminant. Soit alors $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de vecteurs colonnes tel qu'il existe deux indices i et j tels que $i < j$ et $X_i = X_j$.

$$\begin{aligned}
\varphi\left(X_1, \ldots, X_n\right) &= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i,\ k \neq j}} \det\left(X_1, \ldots, AX_k, \ldots, X_n\right) + \det\left(X_1, \ldots, AX_i, \ldots, X_j, \ldots, X_n\right) + \det\left(X_1, \ldots, X_i, \ldots, AX_j, \ldots, X_n\right) \\
&= 0 + \det\left(X_1, \ldots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{AX_i}, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{X_i}, \ldots, X_n\right) + \det\left(X_1, \ldots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{X_i}, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{AX_i}, \ldots, X_n\right) \\
&= \det\left(X_1, \ldots, AX_i, \ldots, X_i, \ldots, X_n\right) - \det\left(X_1, \ldots, AX_i, \ldots, X_i, \ldots, X_n\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus, quand $k \notin \{i, j\}$, le déterminant $\det\left(X_1, \ldots, AX_k, \ldots, X_n\right)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales. D'autre part, le déterminant est anti-symétrique et donc
$\det\left(X_1, \ldots, X_i, \ldots, AX_i, \ldots, X_n\right) = -\det\left(X_1, \ldots, AX_i, \ldots, X_i, \ldots, X_n\right)$.

On a montré ci-dessus que l'application φ est une forme n-linéaire alternée sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On sait, d'après le cours de maths sup, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det$ ou encore

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} /\ \forall \left(X_1, \ldots, X_n\right) \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)^n,\ \varphi\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \lambda \det\left(X_1, \ldots, X_n\right).$$

En prenant pour $(X_1, \ldots, X_n)$ la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on obtient (puisque $\det\left(e_1, \ldots, e_n\right) = 1$)

$$\lambda = \varphi\left(e_1, \dots, e_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \det\left(e_1, \dots, Ae_k, \dots, e_n\right).$$

Soit alors $k \in [\![1, n]\!]$. Ae_k est la k-ème colonne de A puis (produit de deux blocs triangulaires)

$$\det\left(e_1, \dots, Ae_k, \dots, e_n\right) = \left|\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,k} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \\
 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & a_{k-1,k} & & & & \\
 & & & 0 & a_{k,k} & 0 & & & \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \\
 & & & & & 0 & \ddots & \ddots & \\
 & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & & & 0 & a_{n,k} & 0 & \dots & 0 & 1
\end{array}\right| = a_{k,k}.$$

Finalement, $\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} = \mathrm{Tr}(A)$ puis, pour tout $\left(X_1, \dots, X_n\right) \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \det\left(X_1, \dots, AX_k, \dots, X_n\right) = \mathrm{Tr}(A)\det\left(X_1, \dots, X_n\right).$$

On en déduit que, pour tout réel t,

$$W'(t) = \mathrm{Tr}(A) \times \det\left(X_1(t), \dots, X_n(t)\right) = \mathrm{Tr}(A)W(t).$$

et finalement que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = W(0)e^{t\mathrm{Tr}(A)},$$

ou plus généralement, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ donné, $\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = W\left(t_0\right)e^{(t-t_0)\mathrm{Tr}(A)}$.

On peut énoncer :

Théorème 7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\left(X_1, \dots, X_n\right)$ une famille de n solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $X' = AX$. Soit $W = \det\left(X_1, \dots, X_n\right)$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = W(0)e^{t\mathrm{Tr}(A)},$$

ou plus généralement, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ donné,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = W\left(t_0\right)e^{(t-t_0)\mathrm{Tr}(A)}.$$

Une utilisation du wronskien est fourni par le théorème suivant :

Théorème 8. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\left(X_1, \dots, X_n\right)$ une famille de n solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $X' = AX$.

$\left(X_1, \dots, X_n\right)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) \neq 0$.
$\left(X_1, \dots, X_n\right)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ W\left(t_0\right) \neq 0$.

Démonstration. Soit $\left(X_1, \dots, X_n\right)$ une famille de n solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $X' = AX$.

• Supposons que pour tout réel t, tel que $W(t) \neq 0$. Alors il existe un réel t_0 tel que $W\left(t_0\right) \neq 0$.
Réciproquement, supposons qu'il existe un réel t_0 tel que $W\left(t_0\right) \neq 0$. Alors, $W(0) = W\left(t_0\right)e^{-t_0\mathrm{Tr}(A)} \neq 0$ puis pour tout réel t, $W(t) = W(0)e^{t\mathrm{Tr}(A)} \neq 0$.

• Montrons maintenant que $\left(X_1, \dots, X_n\right)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ W\left(t_0\right) \neq 0$.
Puisque $\mathrm{card}\left(X_1, \dots, X_n\right) = n = \dim(\mathscr{S})$, $\left(X_1, \dots, X_n\right)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la famille $\left(X_1, \dots, X_n\right)$ est une famille libre de l'espace $\mathscr{D}^1\left(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$.

Soit $\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right) \in \mathbb{K}^n$. Puisque l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$ est encore une solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Cauchy,

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k = 0 \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k(t)=0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k\left(t_0\right)=0.$$

(D'après le théorème de CAUCHY, une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ s'annulant en t_0 est la fonction nulle et réciproquement).

Maintenant, $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k\left(t_0\right)=0$ est un système de n équations linéaires à n inconnues $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, homogène. Ce système admet l'unique solution $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=(0,\ldots,0)$ si et seulement si son déterminant est non nul ou encore la famille de fonctions $(X_1,\ldots,X_n)$ est libre si et seulement si $W\left(t_0\right)\neq 0$.

❏

Par exemple, à la page 13, on a obtenu un wronskien égal à e^{3t}. Ce wronskien est effectivement non nul pour tout t (ce qui redémontre que la famille (X_1,X_2) de solutions correspondantes est libre et donc est un système fondamental de solutions de l'équation proposée). On note qu'il n'était pas possible d'obtenir un wronskien égal à $e^{3t}-e^{2t}$ par exemple car cette dernière expression s'annule en 0 mais n'est pas nulle.

1.2.1.e) Expression des solutions dans le cas où A est diagonalisable

Dans ce paragraphe, on suppose qu'il existe $P\in GL_n(\mathbb{K})$ et $D=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\in\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ telles que $A=PDP^{-1}$ (ou encore, on suppose que A est diagonalisable). Soient X une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puis $Y=P^{-1}X$ de sorte que $X=PY$.

$$\begin{aligned}X'=AX &\Leftrightarrow X'=PDP^{-1}X\Leftrightarrow P^{-1}X'=DP^{-1}X\\ &\Leftrightarrow \left(P^{-1}X\right)'=D\left(P^{-1}X\right)\ \text{(car la matrice } P^{-1} \text{ est constante quand } t \text{ varie)}\\ &\Leftrightarrow Y'=DY.\end{aligned}$$

Ainsi, X est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $X'=AX$ si et seulement si Y est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $Y'=DY$. Posons alors $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$. Le système $Y'=DY$ est facile à résoudre car est constitué de n équations différentielles linéaires homogènes à une une seule inconnue et à coefficients constants :

$$Y'=DY\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y_1'=\lambda_1y_1\\ \vdots\\ y_n'=\lambda_ny_n\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists\left(c_1,\ldots,c_n\right)/\ \forall t\in\mathbb{R},\ Y(t)=\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1t}\\ \vdots\\ c_ne^{\lambda_nt}\end{pmatrix}.$$

Mais alors

$$X'=AX\Leftrightarrow\exists\left(c_1,\ldots,c_n\right)/\ \forall t\in\mathbb{R},\ P^{-1}X(t)=\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1t}\\ \vdots\\ c_ne^{\lambda_nt}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\exists\left(c_1,\ldots,c_n\right)/\ \forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=P\times\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1t}\\ \vdots\\ c_ne^{\lambda_nt}\end{pmatrix}.$$

Notons alors $(V_1,\ldots,V_n)$ les colonnes de la matrice P. $(V_1,\ldots,V_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de la matrice A et associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ de A. Pour tout réel t,

$$P\times\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1t}\\ \vdots\\ c_ne^{\lambda_nt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_1&\ldots&V_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_1e^{\lambda_1t}\\ \vdots\\ c_ne^{\lambda_nt}\end{pmatrix}=c_1e^{\lambda_1t}V_1+\ldots+c_ne^{\lambda_nt}V_n.$$

On a donc résolu l'équation $X'=AX$. On doit noter que dans la résolution précédente, il est inutile de calculer P^{-1}.

On peut donc énoncer :

Théorème 9. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable et donc que A est semblable à une matrice diagonale $D=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $X'=AX$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto c_1e^{\lambda_1t}V_1+\ldots+c_ne^{\lambda_nt}V_n$ où $(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{K}^n$ et $(V_1,\ldots,V_n)$ est une base de vecteurs propres de A associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

On reprend l'exercice n° 5, page 11. On veut résoudre le système $\left\{\begin{array}{l} x' = -x - y \\ y' = 6x + 4y \end{array}\right.$. La matrice A de ce système est $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. On a vu que $\chi_A = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, , que $E_1(A) = \text{Vect}(V_1)$ et $E_2(A) = \text{Vect}(V_2)$ où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ -2c_1 e^t - 3c_2 e^{2t} \end{pmatrix},\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1.2.1.f) Exemples de résolution

Les principales techniques pour résoudre une équation du type $X' = AX$ sont :

- Réduction de la matrice A
- Calcul de e^{tA} (principalement utilisé quand A n'a qu'une valeur propre)
- Utilisation de combinaison linéaire intéressante des équations.

On met en œuvre ces techniques dans les trois exemples qui suivent.

Exemple 1. Soit (S) : $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 2y + 2z \\ y' = 2x + y + 2z \\ z' = 2x + 2y + z \end{array}\right.$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est symétrique réelle et donc est diagonalisable dans $\mathscr{M}_(\mathbb{R})$ d'après le spectral. -1 est valeur propre d'ordre $3 - \text{rg}(A + I_3) = 2$. La dernière valeur propre λ est fournie par la trace de A : $-1 - 1 + \lambda = 3$ et donc $\lambda = 5$. Ainsi, $\chi_A = (X+1)^2(X-5)$.

$E_{-1}(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Une base de ce plan est (V_1, V_2) où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$E_5(A)$ est l'orthogonal de $E_{-1}(A)$ pour le produit scalaire canonique (les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux) et donc $E_5(A) = \text{Vect}(V_3)$ où $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(-1, -1, 5)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (on rappelle que le calcul de P^{-1} est inutile).

Soient alors X une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $Y = P^{-1}X$ de sorte que $X = PY$.

$$\begin{aligned} X' = AX &\Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow \left(P^{-1}X\right)' = D\left(P^{-1}X\right) \Leftrightarrow Y' = DY \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \\ ce^{5t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{-t} \\ ce^{5t} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 /\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} (a+b)e^{-t} + ce^{5t} \\ -ae^{-t} + ce^{5t} \\ -be^{-t} + ce^{5t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

❏

Exemple 2. Soit (S) : $\left\{\begin{array}{l} x' = 4x + y + z \\ y' = 6x + 4y + 2z \\ z' = -10x - 4y - 2z \end{array}\right.$. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1 \\ -6 & X-4 & -2 \\ 10 & 4 & X+2 \end{vmatrix} = (X-4)\left(X^2 - 2X\right) + 6(-X+2) + 10(X-2) = (X-2)\left(X(X-4) - 6 + 10\right) \\ &= (X-2)\left(X^2 - 4X + 4\right) = (X-2)^3. \end{aligned}$$

On est dans le cas où A n'a qu'une seule valeur propre. On sait que le calcul de e^{tA} est rapide en profitant du fait que $\left(A - 2I_3\right)^3 = 0$ grâce au théorème de Cayley-Hamilton :

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t(A-2I_3)} \times e^{2tI_3} \text{ (car les matrices } t(A-2I_3) \text{ et } 2tI_3 \text{ commutent)} \\ &= e^{2t}\left(I_3 + t(A-2I_3) + \frac{t^2}{2}(A-2I_3)^2\right) \end{aligned}$$

avec $(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et donc

$$e^{tA} = e^{2t}\begin{pmatrix} 2t+1 & t & t \\ 2t^2+6t & t^2+2t+1 & t^2+2t \\ -2t^2-10t & -t^2-4t & -t^2-4t+1 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système proposé sont alors les fonctions du type

$$\begin{aligned} X\ :\ t \mapsto e^{tA}C &= e^{2t}\begin{pmatrix} 2t+1 & t & t \\ 2t^2+6t & t^2+2t+1 & t^2+2t \\ -2t^2-10t & -t^2-4t & -t^2-4t+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((2a+b+c)t+a)e^{2t} \\ \left((2a+b+c)t^2+(6a+2b+2c)t+b\right)e^{2t} \\ \left((-2a-b-c)t^2+(-10a-4b-4c)t+c\right)e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. ❑

Exemple 3. Soit (S) : $\begin{cases} x' = x+2y \\ y' = 2x+y \end{cases}$.

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ solution de } (S) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+2y \\ y' = 2x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y' = 3x+3y \\ x'-y' = -x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)' = 3(x+y) \\ (x-y)' = -(x-y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t)+y(t) = ae^{3t} \\ x(t)-y(t) = be^{-t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}\left(ae^{3t}+be^{-t}\right) \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\left(ae^{3t}-be^{-t}\right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (c_1,c_2) \in \mathbb{R}^2/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = c_1e^{3t}+c_2e^{-t} \\ y(t) = c_1e^{3t}-c_2e^{-t} \end{cases}, \end{aligned}$$

(car (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$ décrit $\mathbb{R}^2$). On a résolu le système en additionnant et en retranchant les deux équations. Ici, les combinaisons linéaires intéressantes étaient faciles à deviner. Dans le cas général, les coefficients de combinaisons linéaires intéressantes sont les composantes de vecteurs propres de A^T (A^T ayant les mêmes valeurs propres que A).

1.2.2 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants avec second membre

1.2.2.a) Résolution de $X'(t) = AX(t)+B(t)$ *par la méthode de* Lagrange. *Théorème de* Cauchy

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une fonction de I, intervalle de $\mathbb{R}$, dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, continue sur I. On considère l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$X' = AX+B \quad (\mathscr{E}).$$

On cherche donc les fonctions X, éléments de $\mathscr{D}^1(I,\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, vérifiant

$$\forall t \in I,\ X'(t) = AX(t)+B(t).$$

Le système ci-dessus est un système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants (car la matrice A est constante quand t varie). Le second membre est la fonction B (le système s'écrivant aussi $X'-AX = B$). Le système est homogène si et seulement si $B = 0$.

Soit X une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit t_0 un réel fixé de I. Sous l'hypothèse de dérivabilité,

$$\begin{aligned}
X \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall t \in I,\ X'(t) - AX(t) = B(t)\\
&\Leftrightarrow \forall t \in I,\ e^{-tA}X'(t) - Ae^{-tA}X(t) = e^{-tA}B(t)\\
&\text{(car } \forall t \in I,\ e^{-tA} \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et car } \forall t \in \mathbb{R},\ A \text{ et } e^{-tA} \text{ commutent)}\\
&\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \frac{d}{dt}\left(e^{-tA}X\right)(t) = e^{-tA}B(t)\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})/\ \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-tA}X(t) = C + \int_{t_0}^{t} e^{-uA}B(u)\ du\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})/\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{tA}C + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-uA}B(u)\ du.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $u \mapsto e^{-uA}B(u)$ est continue sur I, les fonctions X obtenues sont toutes dérivables sur I et donc toutes solutions de (E) sur I. On peut énoncer :

Théorème 10.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit B une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Les solutions sur I de l'équation différentielle $X' = AX + B$, où X est une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{tA}C + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-uA}B(u)\ du,\ C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

2) Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie puis $a \in \mathscr{L}(E)$ et b une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Les solutions sur I de l'équation différentielle $x' = a(x) + b$, où x est une fonction dérivable sur I à valeurs dans E, sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{ta}(c) + e^{ta}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-ua}(b(u))\ du\right),\ c \in E.$$

⇛ **Commentaire** . *Dans la dernière formule du théorème 10, pour* t *fixé,* e^{ta} *est un endomorphisme de* E*, de même que* e^{-ua}, $e^{-ua}(b(u))$ *est à* u *fixé un vecteur élément de* E *puis* $\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-ua}(b(u))\ du$ *est un vecteur élément de* E *dont on calcule ensuite l'image par l'endomorphisme* e^{ta}.

On a aussi le théorème de Cauchy :

Théorème 11. (théorème de Cauchy).

1) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, B une une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe une et une seule solution sur I de l'équation différentielle $X' = AX + B$ vérifiant de plus $X(t_0) = X_0$ à savoir la fonction

$$t \mapsto e^{(t-t_0)A}X_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-uA}B(u)\ du.$$

2) Soient $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie puis $a \in \mathscr{L}(E)$ et b une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. Il existe une et une seule solution sur I de l'équation différentielle $x' = a(x) + b$ vérifiant de plus $x(t_0) = x_0$ à savoir la fonction

$$t \mapsto e^{(t-t_0)a}(x_0) + e^{ta}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-ua}(b(u))\ du\right).$$

Démonstration . Soient $C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puis $X\ :\ t \mapsto e^{tA}C + e^{tA}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-uA}B(u)\ du$.

$$X(t_0) = X_0 \Leftrightarrow e^{t_0A}C = X_0 + 0 \Leftrightarrow C = e^{-t_0A}X_0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-uA}B(u)\ du.$$

❏

1.2.2.b) Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 12. .

1) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, B une une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $X' = AX + B$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension n et de direction l'espace des solutions de l'équation homogène associée $X' = AX$.

2) Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie puis $a \in \mathscr{L}(E)$ et b une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $x' = a(x) + b$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension n et de direction l'espace des solutions de l'équation homogène associée $x' = a(x)$.

Démonstration . On note $(\mathscr{E})$ l'équation $X' = AX + B$, $(\mathscr{E}_h)$ l'équation homogène associée $X' = AX$, $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur I et $\mathscr{S}_h$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I. D'après le théorème 6, page 12, $\mathscr{S}_h$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Le théorème 10 montre en particulier que l'équation $(\mathscr{E})$ a au moins une solution sur I. Soit donc X_0 une solution de l'équation $(\mathscr{E})$ sur I. Soit X une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}X \text{ solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur I} &\Leftrightarrow X' - AX = B \Leftrightarrow X' - AX = X_0' - AX_0 \Leftrightarrow (X - X_0)' = A(X - X_0) \\ &\Leftrightarrow X - X_0 \text{ solution de } (\mathscr{E}_h) \text{ sur I.}\end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{S} = X_0 + \mathscr{S}_h$ ce qui démontre le théorème. ❑

1.2.2.c) Méthode de variation de la constante

Dans ce paragraphe, on découvre comment obtenir une solution particulière de $(\mathscr{E}) : X' = AX + B$ sur I, quand on connaît un système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$ de solutions de $(\mathscr{E}_h) : X' = AX$ sur I. Le théorème qui suit est un lemme préparant le théorème décrivant la méthode de variation de la constante.

Théorème 13. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathscr{E}_h) : X' = AX$.

Pour toute fonction X dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe n fonctions $c_1, \dots, c_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = c_1(t)X_1(t) + \dots + c_n(t)X_n(t).$$

Démonstration . Puisque $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathscr{E}_h) : X' = AX$, on sait, d'après le théorème 8, page 14, que pour tout réel t,

$$W(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t)) \neq 0.$$

Donc, pour chaque réel t, la famille $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ (famille d'éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On en déduit que pour chaque réel t, il existe des nombres $c_1(t), \dots, c_n(t)$, uniquement définis, tels que

$$X(t) = c_1(t)X_1(t) + \dots + c_n(t)X_n(t) \quad (*).$$

On vient de définir des fonctions $c_1, \dots, c_n$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ telles que $X = c_1X_1 + \dots + c_nX_n$. Il est à vérifier que les fonctions $c_1, \dots, c_n$, sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(*)$ est un système de n équations linéaires à n inconnues $c_1(t), \dots, c_n(t)$, dont le déterminant est

$$\Delta(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t)) = W(t).$$

Puisque pour tout réel t, $\Delta(t) \neq 0$, $(*)$ est un système de Cramer. Les formules de Cramer s'écrivent pour tout réel t et tout $i \in [\![1; n]\!]$

$$c_i(t) = \frac{\Delta_i(t)}{\Delta(t)},$$

où $\Delta_i(t)$ est le déterminant obtenu en remplaçant dans $\Delta(t)$ la i-ème colonne $X_i(t)$ par la colonne $X(t)$. La fonction Δ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de même, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction Δ_i est dérivable sur $\mathbb{R}$. Mais alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction c_i est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

❑

Remarque. Dans le théorème précédent, on peut bien sûr remplacer $\mathbb{R}$ par un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$.

Théorème 14. (méthode de variation des constantes).

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ puis B une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathscr{E}_h) : X' = AX$.

Il existe une fonction X dérivable sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, solution de l'équation $X' = AX + B$, de la forme $X = c_1X_1 + \ldots + c_nX_n$ où $c_1, \ldots, c_n$ sont n fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, telles que

$$c_1'X_1 + \ldots + c_n'X_n = B.$$

Démonstration . Soit X une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. D'après le théorème 13, il existe des fonctions $c_1, \ldots, c_n$ dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $X = c_1X_1 + \ldots + c_nX_n$.

$$\begin{aligned} X' - AX &= c_1'X_1 + \ldots + c_n'X_n + c_1X_1' + \ldots + c_nX_n' - A(c_1X_1 + \ldots + c_nX_n) \\ &= c_1'X_1 + \ldots + c_n'X_n + c_1(X_1' - AX_1) + \ldots + c_n(X_n' - AX_n) \\ &= c_1'X_1 + \ldots + c_n'X_n \end{aligned}$$

puis

$$X' - AX = B \Leftrightarrow \forall t \in I,\ c_1'(t)X_1(t) + \ldots + c_n'(t)X_n(t) = B(t) \quad (*).$$

Comme dans la démonstration du théorème précédent, $(*)$ est, à t fixé, un système de Cramer d'inconnues $c_1'(t), \ldots, c_n'(t)$. L'équation $X' - AX = B$ est équivalente à un système du type : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $c_i' = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ où cette fois-ci, $\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ est un quotient de fonctions continues sur I (car B est continue sur I) dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. Chaque fonction $\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i \in [\![1, n]\!]$, est ainsi une fonction continue sur I et donc chaque fonction $\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i \in [\![1, n]\!]$, admet au moins une primitive sur I. On en déduit que le système $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $c_i' = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ admet au moins un n-uplet solution de fonctions dérivables sur I.

❑

Exemple. On a vu aux pages 16 et 17 que le système $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{array}\right.$ admettait pour ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $t \mapsto c_1\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ de ce système homogène est donc (X_1, X_2) où, pour tout réel t, $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$. On note que le wronskien de ce système fondamental de solutions est défini pour tout réel t par

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2e^{2t}.$$

On veut maintenant résoudre sur $I = \mathbb{R}$ le système $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 2y + t \\ y' = 2x + y + 1 \end{array}\right.$ qui s'écrit encore $X' = AX + B \quad (E)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout réel t, $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ (la fonction B est continue sur $\mathbb{R}$).
On sait qu'il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $X = c_1X_1 + c_2X_2$ où c_1 et c_2 sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $c_1'X_1 + c_2'X_2 = B$.

$$\begin{aligned} c_1'X_1 + c_2'X_2 = B &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ c_1'(t)\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + c_2'(t)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} e^{3t}c_1'(t) + e^{-t}c_2'(t) = t \\ e^{3t}c_1'(t) - e^{-t}c_2'(t) = 1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ c_1'(t) = \frac{1}{-2e^{2t}}\begin{vmatrix} t & e^{-t} \\ 1 & -e^{-t} \end{vmatrix} \text{ et } c_2'(t) = \frac{1}{-2e^{2t}}\begin{vmatrix} e^{3t} & t \\ e^{3t} & 1 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ c_1'(t) = \frac{1}{2}(t+1)e^{-3t} \text{ et } c_2'(t) = \frac{1}{2}(t-1)e^{t}. \end{aligned}$$

Ensuite, des intégrations par parties fournissent

$$\int (t+1)e^{-3t}\,dt = -\frac{1}{3}(t+1)e^{-3t} + \frac{1}{3}\int e^{-3t}\,dt = -\frac{1}{3}(t+1)e^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} + \lambda = -\frac{1}{9}(3t+4)e^{-3t} + \lambda$$

et

$$\int (t-1)e^t\,dt = (t-1)e^t - \int e^t\,dt = (t-1)e^t - e^t + \lambda = (t-2)e^t + \lambda.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
c_1'X_1 + c_2'X_2 = B &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ c_1'(t) = \frac{1}{2}(t+1)e^{-3t} \text{ et } c_2'(t) = \frac{1}{2}(t-1)e^t \\
&\Leftarrow \forall t \in \mathbb{R},\ c_1(t) = -\frac{1}{18}(3t+4)e^{-3t} \text{ et } c_2(t) = \frac{1}{2}(t-2)e^t \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = -\frac{1}{18}(3t+4)e^{-3t}\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(t-1)e^t\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \\
&\Leftarrow \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -(3t+4)+9(t-1) \\ -(3t+4)-9(t-1) \end{pmatrix} \\
&\Leftarrow \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6t-13 \\ -12t+5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée est la fonction $t \mapsto \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6t-13 \\ -12t+5 \end{pmatrix}$ et donc les solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto c_1\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 6t-13 \\ -12t+5 \end{pmatrix},\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ou encore

$$t \mapsto \begin{pmatrix} c_1e^{3t} + c_2e^{-t} + \dfrac{t}{3} - \dfrac{13}{18} \\ \\ c_1e^{3t} - c_2e^{-t} - \dfrac{2t}{3} + \dfrac{5}{18} \end{pmatrix},\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

❏

1.3 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre : cas général

On s'intéresse dorénavant aux équations différentielles de la forme $X' = AX + B$ où $A\ :\ t \mapsto A(t)$ et $B\ :\ t \mapsto B(t)$ sont des fonctions continues sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement. On cherche toutes les fonctions X, dérivables sur I, à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, vérifiant

$$\forall t \in I,\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (E).$$

Il est clair que la section 1.3 englobe la section 1.2 (cas particulier où la fonction $t \mapsto A(t)$ est constante ou encore cas particulier des systèmes à coefficients constants). Néanmoins, le fait que la matrice carrée A soit variable quand t varie apporte une nuance importante :

on ne sait pas résoudre.

Le cours devrait donc s'arrêter là. Néanmoins, un certain nombre de résultats déjà énoncés dans le cas particulier des systèmes à coefficients constants, comme par exemple le théorème de Cauchy, restent vrais dans le cas général. Mais ces résultats ne se démontrent plus à partir de la résolution de (E) par une méthode de Lagrange par exemple. On admettra que cette méthode ne fonctionne plus dans le cas général.

1.3.1 Le théorème de Cauchy

Théorème 15. (théorème de Cauchy)

Soient A et B deux fonctions définies et continues sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement. Soit $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle $X' = AX + B$.

Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une solution X de $(\mathscr{E})$ et une seule sur I vérifiant $X(t_0) = X_0$.

On a aussi la version « avec application linéaire » du théorème précédent.

Théorème 15 bis. (théorème de CAUCHY)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ et E respectivement. Soit $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle $x' = a(x) + b$.

Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une solution x de $(\mathscr{E})$ et une seule sur I vérifiant $x(t_0) = x_0$.

On peut sans dommage (ou on doit ?) s'abstenir de lire la démonstration qui suit.

DÉMONSTRATION . Il s'agit de montrer que le problème de CAUCHY : $\left\{\begin{array}{l} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{array}\right.$ $(\mathscr{P})$, a une solution et une seule.

• **Transformation du problème $(\mathscr{P})$ en une équation intégrale.** Si X est une solution de $(\mathscr{P})$ sur I, alors la fonction X est dérivable sur I et en particulier continue sur I puis $X' = AX + B$ est continue sur I ou encore X est de classe C^1 sur I. Ensuite, la fonction $u \mapsto A(u)X(u) + B(u)$ est continue sur I puis, pour tout réel t de I,

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} X'(u)\ du = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\ du \quad (\mathscr{E}_0).$$

Inversement, si X est une fonction continue sur I vérifiant $(\mathscr{E}_0)$ sur I, alors la fonction $t \mapsto X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\ du = X(t)$ est de classe C^1 sur I et en particulier dérivable sur I. En dérivant, on obtient $X' = AX + B$. D'autre part, $X(t_0) = X_0 + \int_{t_0}^{t_0} (A(u)X(u) + B(u))\ du = X_0$. Donc,

$$X \text{ solution de } (\mathscr{P}) \text{ sur } I \Leftrightarrow X \text{ continue sur } I \text{ et solution de } (\mathscr{E}_0) \text{ sur } I.$$

Il s'agit dorénavant de montrer que l'équation $(\mathscr{E}_0)$ admet une solution et une seule continue sur I.

Construction d'une suite de fonctions convergeant vers la solution de $(\mathscr{E}_0)$. Pour tout réel t de I, on pose $Y_0(t) = 0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puis, pour $p \in \mathbb{N}$, $Y_{p+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)Y_p(u) + B(u))\ du$. Par récurrence, chaque Y_p, $p \in \mathbb{N}$, est une fonction définie et continue sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On va vérifier que la suite de fonctions $(Y_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers une certaine fonction X.

Puisque, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $Y_p = Y_0 + \sum_{k=0}^{p-1} (Y_{k+1} - Y_k) = \sum_{k=0}^{p-1} (Y_{k+1} - Y_k)$, il suffit de vérifier que la série de terme général $Y_{p+1} - Y_p$, $p \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur tout segment contenu dans I.

• **Convergence uniforme de la série de terme général $Y_{p+1} - Y_p$.** On fixe un segment $[a, b]$ de I contenant t_0. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de la norme infinie et on note $\|\ \|_\infty$ cette norme.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout réel t de $[a, b]$,

$$\begin{aligned} Y_{p+2}(t) - Y_{p+1}(t) &= \left(X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)Y_{p+1}(u) + B(u))\ du\right) - \left(X_0 + \int_{t_0}^{t} (A(u)Y_p(u) + B(u))\ du\right) \\ &= \int_{t_0}^{t} A(u)\left(Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\right)\ du, \end{aligned}$$

puis

$$\|Y_{p+2}(t) - Y_{p+1}(t)\|_\infty = \left\|\int_{t_0}^{t} A(u)\left(Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\right)\ du\right\|_\infty \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} \|A(u)\left(Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\right)\|_\infty\ du\right|.$$

On note $|||\ |||$ la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, subordonnée à la norme $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}$:

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K},\ |||M||| = \operatorname{Sup}\left\{\frac{\|MC\|_\infty}{\|C\|_\infty},\ C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}.$$

On sait que : $\forall C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\|MC\|_\infty \leqslant |||M||| \times \|C\|_\infty$.

Pour tout u de $[a, b]$, on a donc $\|A(u)\left(Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\right)\|_\infty \leqslant |||A(u)|||\, \|Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\|_\infty$. Maintenant, l'application $A\ :\ u \mapsto A(u)$ est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on sait que l'application $M \mapsto |||M|||$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc, l'application $u \mapsto |||A(u)|||$ est continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette application admet un maximum sur $[a, b]$ que l'on note k. Pour tout u de $[a, b]$, on a

$$\|A(u)\left(Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\right)\|_\infty \leqslant |||A(u)|||\, \|Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\|_\infty \leqslant k\, \|Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\|_\infty$$

et donc

$$\|Y_{p+2}(t) - Y_{p+1}(t)\|_\infty \leqslant k\left|\int_{t_0}^{t} \|Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\|_\infty\ du\right|.$$

On pose $m = \text{Max}\left\{\|Y_1(u) - Y_0(u)\|_\infty\,,\ u \in [a,b]\right\}$. m existe dans $\mathbb{R}^+$ car la fonction $u \mapsto \|Y_1(u) - Y_0(u)\|_\infty$ est continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout $t \in [a,b]$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|Y_{p+1}(t) - Y_p(t)\|_\infty \leqslant m\dfrac{k^p\,|t-t_0|^p}{p!}$.

- L'inégalité est vraie pour $p = 0$ par définition de m.
- Soit $p \geqslant 0$. Supposons que pour tout $t \in [a,b]$, $\|Y_{p+1}(t) - Y_p(t)\|_\infty \leqslant m\dfrac{k^p\,|t-t_0|^p}{p!}$. Alors, pour $t \in [a,b] \cap [t_0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}\|Y_{p+2}(t) - Y_{p+1}(t)\|_\infty &\leqslant k\int_{t_0}^{t} \|Y_{p+1}(u) - Y_p(u)\|_\infty\ du\\ &\leqslant k\int_{t_0}^{t} m\frac{k^p}{p!}\,(u-t_0)^p\ du \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= m\frac{k^{p+1}}{p!}\times\frac{(t-t_0)^{p+1}}{p+1} = m\frac{k^{p+1}\,(t-t_0)^{p+1}}{(p+1)!}.\end{aligned}$$

La démarche est analogue pour $t \leqslant t_0$.

On a montré par récurrence que pour tout $t \in [a,b]$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|Y_{p+1}(t) - Y_p(t)\|_\infty \leqslant m\dfrac{k^p\,|t-t_0|^p}{p!}$.

On en déduit encore que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\text{Sup}\left\{\|Y_{p+1}(t) - Y_p(t)\|_\infty\,,\ t \in [a,b]\right\} \leqslant m\dfrac{(k(b-a))^p}{p!}$.

La série numérique de terme général $m\dfrac{(k(b-a))^p}{p!}$, $p \in \mathbb{N}$, converge (et a pour somme $me^{k(b-a)}$). Donc, la série de fonction de terme général $Y_{p+1} - Y_p$, $p \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$ et finalement la suite de fonctions $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une certaine fonction X définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Puisque chaque fonction Y_p, $p \in \mathbb{N}$, est continue sur $[a,b]$, la fonction X est continue sur $[a,b]$. Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, la fonction X est définie et continue sur I.

• **La limite X est solution du problème $(\mathscr{P})$.** On fixe toujours un segment $[a,b]$ contenu dans I et on pose toujours $k = \text{Max}\{|||A(u)|||,\ u \in [a,b]\}$. Pour $u \in [a,b]$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|(A(u)Y_p(u) + B(u)) - (A(u)X(u) + B(u))\|_\infty &= \|A(u)\,(Y_p(u) - X(u))\|_\infty \leqslant \|A(u)\|\,\|Y_p(u) - X(u)\|_\infty\\ &\leqslant k\ \text{Sup}\left\{\|Y_p(v) - X(v)\|_\infty\,,\ v \in [a,b]\right\}.\end{aligned}$$

Ceci montre que la suite de fonctions $(AY_p + B)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ (et donc aussi sur tout segment contenu dans $[a,b]$) vers la fonction $AX + B$. Soit $t \in [a,b] \cap [t_0, +\infty[$ (la démarche est analogue pour $t \leqslant t_0$). Puisque la suite de fonctions $(AY_p + B)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[t_0, t]$, on en déduit que

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{t_0}^{t} (A(u)Y_p(u) + B(u))\ du = \int_{t_0}^{t} \lim_{p\to+\infty} (A(u)Y_p(u) + B(u))\ du = \int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\ du.$$

On fait tendre p vers $+\infty$ dans les égalités : $\forall t \in [a,b],\ Y_{p+1}(t) = X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (A(u)Y_p(u) + B(u))\ du$ et on obtient $\forall t \in [a,b]$, $X(t) = X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\ du$. Ceci étant pour tout segment de $[a,b]$ contenu dans I, on a montré que X est continue sur I et vérifie $\forall t \in I$, $X(t) = X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\ du$.

On a ainsi montré l'existence d'une solution au problème $(\mathscr{P})$.

Unicité de la solution au problème $(\mathscr{P})$. Supposons avoir deux solutions au problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} X' = AX + B\\ X(t_0) = X_0\end{array}\right.$. La différence de ces deux solutions est solution du problème de $(\mathscr{P}_0)$: $\left\{\begin{array}{l} X' = AX\\ X(t_0) = 0\end{array}\right.$, problème équivalent à l'équation intégrale $(\mathscr{E}_0)$: $\forall t \in I$, $X(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} A(u)X(u)\ du$, X continue sur I. Il s'agit de prouver que l'équation $(\mathscr{E}_0)$ admet pour unique solution continue sur I, la fonction nulle.

On travaille de nouveau sur un segment $[a,b]$ contenu dans I et contenant t_0. On note X une solution quelconque de $(\mathscr{E}_0)$ sur $[a,b]$, continue sur I. X est donc continue sur le segment $[a,b]$. On note k un réel tel que $\forall u \in [a,b]$, $|||A(u)||| \leqslant k$ et m un majorant de la fonction $t \mapsto \|X(t)\|_\infty$ sur $[a,b]$.

Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a,b]$, $\|X(t)\|_\infty \leqslant m\dfrac{(k\,|t-t_0|)^p}{p!}$.

- Le résultat est clair quand $p = 0$.
- Soit $p \geqslant 0$. Supposons que pour tout $t \in [a,b]$, $\|X(t)\|_\infty \leqslant m\dfrac{(k\,|t-t_0|)^p}{p!}$. Soit $t \geqslant t_0$ (la démarche est analogue

si $t \leqslant t_0$).

$$\begin{aligned}\|X(t)\|_\infty &= \left\|\int_{t_0}^{t} A(u)X(u)\,du\right\|_\infty \leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(u)X(u)\|_\infty\,du \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} |||A(u)|||\|X(u)\|_\infty\,du \leqslant k\int_{t_0}^{t} \|X(u)\|_\infty\,du \\ &\leqslant k\int_{t_0}^{t} m\frac{k^p(u-t_0)^p}{p!}\,du \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= m\frac{(k(t-t_0))^{p+1}}{(p+1)!}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Soit alors $t \in [a,b]$. Quand p tend vers $+\infty$, $m\dfrac{(k|t-t_0|)^p}{p!}$ tend vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|X(t)\|_\infty \leqslant m\dfrac{(k|t-t_0|)^p}{p!}$, quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\|X(t)\|_\infty = 0$.

Ainsi une solution de $(\mathscr{E}_0)$ est nulle sur tout segment contenu dans I et donc est nulle sur I. L'unicité de la solution au problème de Cauchy en (t_0, X_0) est donc démontrée.

❑

1.3.2 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 16. Soient A et B deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement.

• L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène $X' = AX$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\begin{array}{cccc}\varphi : & \mathscr{S}_h & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \mapsto & X(t_0)\end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

• L'ensemble des solutions sur I de l'équation $X' = AX + B$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension n et de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée $X' = AX$.

On a une version analogue du théorème 16 pour l'équation $x' = a(x) + b$ ...

Démonstration. On note $(\mathscr{E})$ l'équation $X' = AX + B$ et $(\mathscr{E}_h)$ l'équation $X' = AX$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur I et $\mathscr{S}_h$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I.

• Vérifions que $\mathscr{S}_h$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(D^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})), +, .\right)$.

- La fonction nulle est dans $(\mathscr{S}_h)$.
- Si $(X_1, X_2) \in \mathscr{S}_h^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$, alors

$$(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)' = \lambda_1 X_1' + \lambda_2 X_2' = \lambda_1 A X_1 + \lambda_2 A X_2 = A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2),$$

et donc $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est dans $\mathscr{S}_h$.

On a montré que $\mathscr{S}_h$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

• Soit t_0 un réel fixé de I. Soit $\begin{array}{cccc}\varphi : & \mathscr{S}_h & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \mapsto & X(t_0)\end{array}$. L'application φ est linéaire. D'autre part, le théorème de Cauchy (théorème 15, page 21) montre que φ est une bijection.
Finalement, φ est un isomorphisme de $\mathscr{S}_h$ sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On en déduit que $\dim(\mathscr{S}_h) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = n$.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\left(D^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})), +, .\right)$, de direction $\mathscr{S}_h$.

Le théorème de Cauchy montre en particulier que l'équation $(\mathscr{E})$ a au moins une solution sur I que l'on note X_0 (X_0 désigne donc ici une fonction dérivable sur I vérifiant $X_0' = AX_0 + B$ et pas un vecteur colonne constant).

Soit X une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}X \in \mathscr{S} &\Leftrightarrow X' - AX = B \Leftrightarrow X' - AX = X_0' - AX_0 \Leftrightarrow (X - X_0)' = A(X - X_0) \\ &\Leftrightarrow X - X_0 \in \mathscr{S}_h \Leftrightarrow X \in X_0 + \mathscr{S}_h.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S} = X_0 + \mathscr{S}_h$ ou encore $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de l'espace vectoriel $\left(D^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})), +, .\right)$, de direction $\mathscr{S}_h$. En particulier, $\dim(\mathscr{S}) = n$. ❑

DÉFINITION 3. On appelle **système fondamental de solutions** sur I de l'équation $X' = AX$ toute base $(X_1, \ldots, X_n)$ de l'espace des solutions sur I de cette équation.

Ainsi, l'écriture générale des solutions sur I de l'équation $(\mathscr{E}) : X' = AX + B$ est

$$X_0 + c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n$$

où X_0, X_1, ..., X_n sont $n+1$ fonctions dérivables sur I, à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, X_0 est une solution particulières de $(\mathscr{E})$: $X' = AX + B$ sur I, $(X_1, \ldots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h) : X' = AX$ sur I et $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$.

Exemple. Résolvons sur $\mathbb{R}$ le système $\left\{\begin{array}{l}\left(t^2+1\right) x' = tx - y - t + 1 \\ \left(t^2+1\right) y' = x + ty - t - 1\end{array}\right.$.

Sur $I = \mathbb{R}$, le système proposé s'écrit encore $(\mathscr{E}) : X' = AX + B$ où, pour tout réel t, $A(t) = \dfrac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ et $B(t) = \dfrac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} -t+1 \\ -t-1 \end{pmatrix}$. Les deux fonctions A et B sont continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ respectivement. Donc, l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2 et de direction l'espace vectoriel $\mathscr{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée $(\mathscr{E}_h) : X' = AX$ sur $\mathbb{R}$.

Les deux fonctions $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux solutions de $(\mathscr{E}_h) : \left\{\begin{array}{l}\left(t^2+1\right) x' = tx - y \\ \left(t^2+1\right) y' = x + ty\end{array}\right.$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\alpha X_1 + \beta X_2 = 0 &\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) = 0 \Rightarrow \alpha X_1(0) + \beta X_2(0) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0.\end{aligned}$$

Donc (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$ (nous reparlerons de la notion de wronskien au paragraphe suivant).

La fonction $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution de $(\mathscr{E}) : \left\{\begin{array}{l}\left(t^2+1\right) x' = tx - y - t + 1 \\ \left(t^2+1\right) y' = x + ty - t - 1\end{array}\right.$ sur $\mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + c_1 + c_2 t \\ 1 + c_1 t - c_2 \end{pmatrix},\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1.3.3 Wronskien

La définition du wronskien est toujours la même que dans le cas des systèmes à coefficients constants ou presque :

DÉFINITION 4. Soit A une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de n solutions de l'équation homogène $(\mathscr{E}_h) : X' = AX$, sur I.

Le **wronskien** de la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est la fonction W définie par :

$$\forall t \in I,\ W(t) = \det\left(X_1(t), \ldots, X_n(t)\right).$$

On reprend le calcul de page 13, il est identique à la nuance près que la matrice A est maintenant variable et on obtient :

$$\forall t \in I,\ W'(t) = \operatorname{Tr}(A(t))W(t).$$

puis, en fixant un réel t_0 dans I et en constatant que la fonction $t \mapsto \operatorname{Tr}(A(t))$ est continue sur I,

$$\forall t \in I,\ W(t) = W\left(t_0\right) e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr}(A(u))\, du}.$$

On retrouve alors le résultat :

Théorème 17.

$$\left(\forall t \in I,\ W(t) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\exists t_0 \in I / \ W\left(t_0\right) = 0\right).$$

Sinon, puisque nous avons toujours le théorème de CAUCHY à disposition, la démonstration du théorème 8, page 14, peut être reproduite à l'identique et on obtient :

Théorème 18.
$(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I si et seulement si $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$.
$(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I si et seulement si $\exists t_0 \in I /\ W(t_0) \neq 0$.

Dans l'exemple du paragraphe précédent, un système de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$ était (X_1, X_2) où, pour tout réel t, $X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc pour tout réel t

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & -1 \end{vmatrix} = -\left(t^2+1\right).$$

Ce wronskien ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et on retrouve le fait que (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$.

1.3.4 Méthode de variation de la constante

La théorie est exactement la même que dans le cas des systèmes à coefficients constants (pages 19 et 20) et on énonce directement

Théorème 19. Soit A une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h) : X' = AX$ sur I.

Pour tout fonction X dérivable sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe n fonctions $c_1, \dots, c_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, dérivables sur I telles que :

$$\forall t \in I,\ X(t) = c_1(t)X_1(t) + \dots + c_n(t)X_n(t).$$

Puis,

Théorème 20. (méthode de variation de la constante)

Soient A et B deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement.
Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h) : X' = AX$ sur I.

Il existe une solution X de $(\mathscr{E}) : X' = AX + B$ sur I de la forme $X = c_1X_1 + \dots + c_nX_n$ où $c_1, \dots, c_n$, sont n fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant de plus

$$c_1'X_1 + \dots + c_n'X_n = B.$$

⇛ **Commentaire**. *Si on utilise l'expression « méthode de variation de la constante », la constante dont on parle et que l'on « fait varier » est le vecteur colonne* $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. *Mais on peut aussi utiliser l'expression « méthode de variations des constantes », auquel cas ce sont les* n *constantes* $c_1, \dots, c_n$*, que l'on « fait varier ».*

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(\mathscr{E}) : \left\{\begin{array}{l} \left(t^2+1\right)x' = tx - y + 1 \\ \left(t^2+1\right)y' = x + ty + t \end{array}\right.$.

Solution 6. Sur $\mathbb{R}$, l'équation $(\mathscr{E})$ s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{t^2+1} & -\dfrac{1}{t^2+1} \\ \dfrac{1}{t^2+1} & \dfrac{t}{t^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t^2+1} \\ \dfrac{t}{t^2+1} \end{pmatrix}.$$

Puisque les fonctions $t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{t^2+1} & -\dfrac{1}{t^2+1} \\ \dfrac{1}{t^2+1} & \dfrac{t}{t^2+1} \end{pmatrix}$ et $t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t^2+1} \\ \dfrac{t}{t^2+1} \end{pmatrix}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Un système fondamental de solutions du système homogène associé est (X_1, X_2) où pour tout réel t, $X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche alors une solution particulière X_0 de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $X_0 = c_1X_1 + c_2X_2$ où c_1 et c_2 sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant de plus $c_1'X_1 + c_2'X_2 = B$ ou encore, plus précisément,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} c_1'(t) + tc_2'(t) = \dfrac{1}{t^2+1} \\ tc_1'(t) - c_2'(t) = \dfrac{t}{t^2+1} \end{array}\right. .$$

Les formules de Cramer fournissent pour tout réel t,

$$c_1'(t) = -\frac{1}{t^2+1}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{t^2+1} & t \\ \dfrac{t}{t^2+1} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{t^2+1}$$

et

$$c_2'(t) = -\frac{1}{t^2+1}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{t^2+1} \\ t & \dfrac{t}{t^2+1} \end{vmatrix} = 0.$$

On peut prendre pour tout réel t, $c_1(t) = \text{Arctan}(t)$ et $c_2(t) = 0$ puis, pour tout réel t,

$$X_0(t) = \text{Arctan}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$t \mapsto \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + \text{Arctan}(t) \\ c_1 t - c_2 + t\,\text{Arctan}(t) \end{pmatrix},\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1.3.5 Principe de superposition des solutions

Théorème 21.

Soient A, B_1 et B_2 trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement.
Soit X_1 (resp. X_2) une solution de $(\mathscr{E}_1)$: $X' = AX + B_1$ (resp. $X' = AX + B_2$) sur I.

Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda X_1 + \mu X_2$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$: $X' = AX + B$ sur I où $B = \lambda B_1 + \mu B_2$.

Démonstration. $(\lambda X_1 + \mu X_2)' - A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda(X_1' - AX_1) + \mu(X_2' - AX_2) = \lambda B_1 + \mu B_2 = B$.

❑

Par exemple, si $(\mathscr{E})$ est l'équation $y' + 2y = 3x + e^{-3x}$, une solution de $(\mathscr{E}_1)$: $y' + 2y = x$ est $f_1 : x \mapsto \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$ et une solution de $(\mathscr{E}_2)$: $y' + 2y = e^{-3x}$ est $f_2 : x \mapsto -e^{-3x}$. Donc, une solution particulière de $(\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x}{2} - \dfrac{3}{4} - e^{-3x}$.

2 Le second ordre

2.1 Equations différentielles linéaires scalaires du second ordre à coefficients constants (rappels de sup)

On rappelle ici quelques résultats de maths sup.

• On se donne $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\mathscr{E}_h).$$

L'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

Pour résoudre l'équation $(\mathscr{E}_h)$, on considère l'équation caractéristique (E_c) associée à $(\mathscr{E}_h)$ qui est

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (E_c).$$

1er cas. Si $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$, (E_c) a deux solutions complexes distinctes r_1 et r_2. Dans ce cas, l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_h) est

$$\mathscr{S}_h = \left\{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

2 ème cas. Si $\Delta = 0$, (E_c) a une solution complexe double r. Dans ce cas, l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_h) est

$$\mathscr{S}_h = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

• On se place de plus dans le cas particulier où a, b et c sont réels et où on cherche les solutions réelles de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$.

1er cas. Si $\Delta = b^2 - 4c > 0$, (E_c) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Dans ce cas, l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_h) est

$$\mathscr{S}_h = \left\{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2 ème cas. Si $\Delta = 0$, (E_c) a une solution réelle r. Dans ce cas, l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_h) est

$$\mathscr{S}_h = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3 ème cas. Si $\Delta < 0$, (E_c) a deux solutions non réelles conjuguées $r_1 = u + iv$ et $r_2 = u - iv$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $v > 0$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_h) est

$$\mathscr{S}_h = \left\{x \mapsto e^{ux}\left(\lambda\cos(vx) + \mu\sin(vx)\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

• On se donne de plus une fonction g continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = g \quad (\mathscr{E}).$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de $(\mathscr{E})$ sur I est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension 2 et de direction l'espace des solutions sur I de l'équation homogène associée. La solution générale de $(\mathscr{E})$ sur I est donc de la forme

$$f_0 + \lambda f_1 + \mu f_2,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$

où f_0 est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur I et f_1 et f_2 sont deux solutions non colinéaires de $(\mathscr{E}_h)$ sur I.

Tous ces résultats établis en maths sup ont pour point de départ le théorème de Cauchy qui lui, est énoncé et n'est pas démontré en maths sup :

Théorème de Cauchy. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $a \neq 0$. Soit g une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une solution f et une seule de $(\mathscr{E})$: $ay'' + by' + cy = g$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

2.2 Equations différentielles linéaires scalaires du second ordre : cas général

2.2.1 Système du premier ordre associé

On se donne trois fonctions a, b et c continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = c \quad (\mathscr{E}).$$

$(\mathscr{E})$ est une équation différentielle linéaire scalaire du second ordre (résolue en y''). Une solution de $(\mathscr{E})$ sur I est une fonction f deux fois dérivables sur I vérifiant :

$$\forall x \in I,\ f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x).$$

Résoudre l'équation $(\mathscr{E})$ sur I, c'est trouver toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sur I. On note dorénavant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur I. L'équation différentielle homogène associée est

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (\mathscr{E}_h).$$

On note $\mathscr{S}_h$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation $(\mathscr{E}_h)$.

On va transformer cette équation différentielle linéaire du second ordre à une seule dimension (équation scalaire) en une autre équation différentielle du premier ordre à deux dimensions à partir de la constatation simple : $y'' = (y')'$. On pourra ainsi profiter d'un certain nombre de résultats établis dans la section A.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. En posant $z = y'$, on obtient

$$y'' + ay' + by = c \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y' = y' \\ y'' = -by - ay' + c \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

Ainsi, y est une solution de $(\mathscr{E})$ sur I si et seulement si la fonction vectorielle $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, où $z = y'$, est solution de l'équation $X' = AX + B$ où pour tout x de I, $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}$ et $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}$.

Cette constatation a une conséquence très importante. **On ne sait pas résoudre** l'équation différentielle $y''+ay'+by = c$ dans le cas général. En particulier, la notion d'équation caractéristique associée n'a plus de sens quand les coefficients a et b sont variables.

2.2.2 Théorème de Cauchy

Théorème 22. Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$.

Pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une solution f et une seule de $(\mathscr{E})$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Démonstration . Soit $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Pour $x \in I$, on pose $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}$ et $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}$. Les fonctions A et B sont continues sur I. On note $(\mathscr{E}')$ l'équation différentielle $X' = AX + B$.
Si y est une solution de $\mathscr{E}$ sur I vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$, alors, en posant $z = y'$, la fonction $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ est une solution de $(\mathscr{E}')$ sur I vérifiant de plus $X(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Le théorème de Cauchy pour le premier ordre (théorème 15, page 21) assure l'unicité d'une telle fonction X et donc l'unicité de y.

Le théorème de Cauchy pour le premier ordre assure aussi l'existence d'une fonction $X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ solution de $(\mathscr{E}')$ sur I (de sorte que $z = y'$) et vérifiant de plus $X(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. La première composante y de X est solution de $(\mathscr{E})$ sur I et vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$. Ceci montre l'existence de y.

❏

⇛ **Commentaire** . *En particulier, si x_0 est un réel donné de I. Il existe une solution y et une seule de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ vérifiant $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ à savoir la fonction nulle. Mais il existe une infinité de solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ s'annulant en x_0 (en laissant libre la valeur de $y'(x_0)$) contrairement au premier ordre (au premier ordre, une solution non nulle de l'équation homogène ne s'annule pas).*
Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y = 0$ et cette solution s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.
Plus généralement, les graphes de deux solutions distinctes de l'équation $y'' + ay' + by = c$ peuvent se couper.

2.2.3 Structure de l'ensemble des solutions

Théorème 23. Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur I.
Soit $(\mathscr{E}_h)$ l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$. On note $\mathscr{S}_h$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I.

$\mathscr{S}_h$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. Les solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I sont de la forme $\lambda f_1 + \mu f_2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, où f_1 et f_2 sont deux solutions non colinéaires de $(\mathscr{E}_h)$ sur I.

$\mathscr{S}$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension 2, de direction $\mathscr{S}_h$. Les solutions de $(\mathscr{E})$ sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1 + \mu f_2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, où f_0 est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur I et f_1 et f_2 sont deux solutions non colinéaires de $(\mathscr{E}_h)$ sur I.

On note que ce théorème démontre en particulier le théorème énoncé en maths sup dans le cas des coefficients constants.

Démonstration .

• Vérifions que $\mathscr{S}_h$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}^2(I,\mathbb{K})$.
La fonction nulle est un élément de $\mathscr{S}_h$. Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(f,g)\in\mathscr{S}_h^2$.

$$(\lambda f+\mu g)''+a(\lambda f+\mu g)'+b(\lambda f+\mu g)=\lambda(f''+af'+bf)+\mu(g''+ag'+bg)=0.$$

Donc, $\mathscr{S}_h$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

• Vérifions que $\dim(\mathscr{S}_h)=2$. Soit x_0 un réel fixé de I. Soit $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}\mathscr{S}_h & \to & \mathbb{K}^2\\ f & \mapsto & (f(x_0),f'(x_0))\end{array}$.
φ est une bijection d'après le théorème de Cauchy. D'autre part, φ est linéaire. Finalement, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, $\dim(\mathscr{S}_h)=\dim\left(\mathbb{K}^2\right)=2$.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{D}^2(I,\mathbb{K})$, de direction $\mathscr{S}_h$. D'après le théorème de Cauchy, l'équation $(\mathscr{E})$ admet au moins une solution f_0 sur I. Donc, $\mathscr{S}$ n'est pas vide.

De plus, si f est une fonction deux fois dérivable sur I,

$$\begin{aligned}f\in\mathscr{S}&\Leftrightarrow f''+af'+bf=c\Leftrightarrow f''+af'+bf=f_0''+af_0'+bf_0\Leftrightarrow(f-f_0)''+a(f-f_0)'+b(f-f_0)=0\\&\Leftrightarrow f-f_0\in\mathscr{S}_h\Leftrightarrow f\in f_0+\mathscr{S}_h.\end{aligned}$$

❑

⇛ **Commentaire** . *Comme pour les systèmes du premier ordre, une base (f_1,f_2) de l'espace des solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I s'appelle un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I.*

Exemple. Considérons sur $I=]1,+\infty[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})\ :\ (x-1)y''-xy'+y=1$. L'équation différentielle homogène associée est $(\mathscr{E}_h)\ :\ (x-1)y''-xy'+y=0$.
Sur I, l'équation $(\mathscr{E})$ s'écrit encore $y''-\dfrac{x}{x-1}y'+\dfrac{1}{x-1}y=\dfrac{1}{x-1}$. Les trois fonctions $a\ :\ x\mapsto-\dfrac{x}{x-1}$, $b\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{x-1}$ et $c\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{x-1}$ sont continues sur I. Donc, les solutions de $(\mathscr{E})$ sur I sont de la forme $f_0+\lambda f_1+\mu f_2$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, où f_0 est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur I et f_1 et f_2 sont deux solutions non colinéaires de $(\mathscr{E}_h)$ sur I.

La fonction $f_0\ :\ x\mapsto1$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur I. La fonction $f_1\ :\ x\mapsto x$ est solution de $(\mathscr{E}_h)$ sur I. Puisque la somme des coefficients de $(\mathscr{E}_h)$ est nulle, la fonction $f_2\ :\ x\mapsto e^x$ est solution de $(\mathscr{E}_h)$ sur I. La famille de fonctions (f_1,f_2) est libre et donc

$$\mathscr{S}_{]1,+\infty[}=\left\{x\mapsto1+\lambda x+\mu e^x,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

❑

2.2.4 Wronskien

Avec les notations des paragraphes précédents, si f_1 et f_2 sont deux solutions sur I de l'équation $y''+ay'+by=0$ alors $X_1=\begin{pmatrix}f_1\\f_1'\end{pmatrix}$ et $X_2=\begin{pmatrix}f_2\\f_2'\end{pmatrix}$ est solution de l'équation différentielle $X'=AX$ où $A=\begin{pmatrix}0&1\\-a&-b\end{pmatrix}$. On est donc amené à poser la définition suivante :

Définition 5. Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient f_1 et f_2 deux solutions sur I de l'équation différentielle homogène $(\mathscr{E}_h)\ :\ y''+ay'+by=0$.

Le **wronskien** de la famille de (f_1,f_2) est la fonction w définie sur I par :

$$\forall x\in I,\ w(x)=\begin{vmatrix}f_1(x)&f_2(x)\\f_1'(x)&f_2'(x)\end{vmatrix}=f_1(x)f_2'(x)-f_1'(x)f_2(x).$$

Nous allons maintenant calculer ce wronskien. Il est intéressant de le calculer directement sans réutiliser les calculs déjà effectués pour les systèmes du premier ordre. C'est ce que nous allons faire.

Puisque f_1 et f_2 sont deux fois dérivables sur I, la fonction w est dérivable sur I et

$$w'=f_1f_2''+f_1'f_2'-f_1'f_2'-f_1''f_2=f_1(-af_2'-bf_2)-f_2(-af_1'-bf_1)=-a(f_1f_2'-f_1'f_2)=-aw.$$

La fonction w est donc solution sur I de l'équation différentielle $y'+ay=0$. On en déduit que pour tout réel x de I,

$$w(x)=w(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x}a(t)\,dt},$$

où x_0 est un réel fixé de I. On peut alors énoncer :

Théorème 24. $w = 0 \Leftrightarrow \exists x_0 \in I/\ w(x_0) = 0$.

Théorème 25. Soient a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient f_1 et f_2 deux solutions sur I de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_h) : y'' + ay' + by = 0$.

(f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $w(x) \neq 0$.
(f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I si et seulement si $\exists x_0 \in I$, $w(x_0) \neq 0$.

Comme plus haut, on donne une démonstration directe qui n'utilise pas les différents résultats sur le premier ordre. Cette démonstration trouve un intérêt propre dans l'utilisation du théorème de Cauchy.

Démonstration . Soit $x_0 \in I$.

• Supposons la famille de fonctions (f_1, f_2) liée. Si $f_1 = 0$, alors $w(x_0) = 0$.
Sinon, $f_1 \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f_2 = \lambda f_1$. Dans ce dernier cas, $\begin{pmatrix} f_2(x_0) \\ f_2'(x_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_1'(x_0) \end{pmatrix}$ puis encore une fois $w(x_0) = 0$.

• Supposons que $w(x_0) = 0$ ou encore $f_1(x_0) f_2'(x_0) - f_1'(x_0) f_2(x_0) = 0$. Montrons que la famille de fonctions (f_1, f_2) liée.
Si $f'(x_0) \neq 0$. Posons $\lambda = \dfrac{f_2'(x_0)}{f_1'(x_0)}$ de sorte que $f_2'(x_0) = \lambda f_1'(x_0)$. Puisque $w(x_0) = 0$, on a aussi $f_2(x_0) = \lambda f_1(x_0)$.
Les deux fonctions λf_1 et f_2 sont alors deux solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I prenant la même valeur en x_0 ainsi que leurs dérivées. D'après le théorème de Cauchy, $f_2 = \lambda f_1$ et donc la famille de fonctions (f_1, f_2) est liée.

Sinon, $f_1'(x_0) = 0$. Si de plus, $f_1(x_0) = 0$, f_1 est la fonction nulle d'après le théorème de Cauchy et de nouveau la famille (f_1, f_2) est liée.
Il reste à étudier le cas où $f_1(x_0) \neq 0$ et $f_1'(x_0) = 0$. L'égalité $w(x_0) = 0$ impose $f_2'(x_0) = 0$. Si on pose $\lambda = \dfrac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}$, les deux fonctions λf_1 et f_2 prennent la même valeur en x_0 ainsi que leur dérivée. De nouveau, le théorème de Cauchy permet d'affirmer que $f_2 = \lambda f_1$ et donc que la famille de fonctions (f_1, f_2) est liée.

❑

Exemple. On a vu qu'un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h) : (x-1)y'' - x + y = 0$ sur $I =]1, +\infty[$ est (f_1, f_2) où, $\forall x \in]1, +\infty[$, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = e^x$. Pour tout réel x de $]1, +\infty[$, on a

$$w(x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = (x-1)e^x.$$

On a effectivement $\forall x \in]1, +\infty[$, $w(x) \neq 0$. Mais on peut noter que $w(1) = 0$ ce qui n'est pas un problème car $1 \notin]1, +\infty[$.

2.2.5 Quelques techniques de résolution de $(\mathscr{E}_h)$

a) On rappelle tout d'abord que dans le cas général, on ne sait pas résoudre l'équation $(\mathscr{E}_h) : y'' + ay' + by = 0$ et donc plus généralement, l'équation $(\mathscr{E}) : y'' + ay' + by = c$ (a, b et c fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand les coefficients a et b varient.

b) Si on devine f_0 une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur I et (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I, alors les solutions de $(\mathscr{E})$ sur I sont les fonctions de la forme $f_0 + \lambda f_1 + \mu f_2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. C'est ce que l'on a fait dans l'exemple de la page 30.

c) On va maintenant exposer une technique permettant, quand on connaît f_1 une solution non nulle de $(\mathscr{E}_h)$ **ne s'annulant pas sur** I, d'en découvrir une deuxième f_2 non colinéaire à f_1 (on rappelle qu'au second ordre, une solution non nulle peut malheureusement s'annuler).

Soit y une fonction définie sur I. On pose $y = f_1 z$ (changement de fonction inconnue) de sorte que $z = \dfrac{y}{f_1}$. Puisque la fonction f_1 est deux fois dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, y est deux fois dérivable sur I si et seulement si z est deux fois dérivable sur I. Ensuite, d'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (f_1 z'' + 2f_1' z' + f_1'' z) + a(f_1 z' + f_1' z) + b(f_1 z) \\ &= f_1 z'' + (2f_1' + af_1) z' + (f_1'' + af_1' + bf_1) z \\ &= f_1 (z')' + (2f_1' + af_1) z' \end{aligned}$$

puis

$$y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow f_1 (z')' + (2f_1' + af_1) z' = 0.$$

On voit maintenant l'intérêt du changement de fonction inconnue. La nouvelle équation est du premier ordre en z'. On sait donc résoudre.

Exercice 7. Résoudre sur $]-1,+\infty[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : (x+1)y''-y'-xy=0$

Solution 7. Sur $I=]-1,+\infty[$, $(\mathscr{E})$ s'écrit encore $y''-\dfrac{1}{x+1}y'-\dfrac{x}{x+1}y=0$. Puisque les deux fonctions $a : x\mapsto -\dfrac{1}{x+1}$ et $b : x\mapsto -\dfrac{x}{x+1}$ sont continues sur I, l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Puisque la somme des coefficients de l'équation $(\mathscr{E})$ est nulle, la fonction $f_1 : x\mapsto e^x$ est solution de $(\mathscr{E})$ sur I.

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. Posons $y=f_1z$ ou encore $\forall x\in]-1,+\infty[$, $y(x)=e^xz(x)$ de sorte que $\forall x\in]-1,+\infty[$, $z(x)=e^{-x}y(x)$. z est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout réel x de $]-1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}(x+1)y''(x)-y'(x)-xy(x)&=\left((x+1)\left(z''(x)+2z'(x)+z(x)\right)-\left(z'(x)+z(x)\right)-xz(x)\right)e^x\\&=\left((x+1)\left(z''(x)+2z'(x)\right)-z'(x)\right)e^x\\&=\left((x+1)z''(x)+(2x+1)z'(x)\right)e^x.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}y\text{ solution de }(\mathscr{E})\text{ sur }]-1,+\infty[&\Leftrightarrow\forall x\in]-1,+\infty[,\ (x+1)z''(x)+(2x+1)z'(x)=0\\&\Leftrightarrow\forall x\in]-1,+\infty[,\ (z')'(x)+\left(2-\frac{1}{x+1}\right)z'(x)=0\\&\Leftrightarrow\forall x\in]-1,+\infty[,\ e^{2x-\ln(x+1)}(z')'(x)+\left(2-\frac{1}{x+1}\right)e^{2x-\ln(x+1)}z'(x)=0\\&\Leftrightarrow\forall x\in]-1,+\infty[,\ \left(\frac{e^{2x}}{x+1}z'\right)'(x)=0\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-1,+\infty[,\ z'(x)=\lambda(x+1)e^{-2x}\end{aligned}$$

De plus, $\displaystyle\int(x+1)e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx=\left(-\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}+\mu=-\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}+\mu$ et donc

$$\begin{aligned}y\text{ solution de }(\mathscr{E})\text{ sur }]-1,+\infty[&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in]-1,+\infty[,\ z(x)=-\frac{\lambda}{4}(2x+3)e^{-2x}+\mu\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in]-1,+\infty[,\ z(x)=\lambda(2x+3)e^{-2x}+\mu\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda',\mu')\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in]-1,+\infty[,\ e^{-x}y(x)=\lambda'(2x+3)e^{-2x}+\mu'\\&\quad(\text{car }(\lambda,\mu)\text{ décrit }\mathbb{R}^2\text{ si et seulement si }\left(-\frac{\lambda}{4},\mu\right)\text{ décrit }\mathbb{R}^2)\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in]-1,+\infty[,\ y(x)=\lambda(2x+3)e^{-x}+\mu e^x.\end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{S}_{]-1,+\infty[}=\left\{x\mapsto\lambda(2x+3)e^{-x}+\mu e^x,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

d) Il existe des situations où on ne devine pas une solution particulière f_1 mais pourtant, il en existe une assez simple. On doit alors chercher une telle solution dans l'un des types suivants :

- fonction polynôme (dans ce cas, on commence par analyser le degré).
- fonction puissance $x\mapsto x^\alpha$.
- fonction exponentielle $x\mapsto e^{ax}$.
- fonction développable en série entière.

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}) : (2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$ sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

Solution 8. Puisque les deux fonctions $a : x\mapsto\dfrac{4x-2}{2x+1}$ et $b : x\mapsto-\dfrac{8}{2x+1}$ sont continues sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, les solutions de $(\mathscr{E})$ sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Cherchons une éventuelle fonction exponentielle solution. Pour $a\in\mathbb{R}$, soit f_a la fonction $x\mapsto e^{ax}$.

$$\begin{aligned}
f_a \text{ solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur } \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[&\Leftrightarrow \forall x > -\frac{1}{2},\ \left(a^2(2x+1)+a(4x-2)-8\right)e^{ax} = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > -\frac{1}{2},\ \left(2a^2+4a\right)x + a^2-2a-8 = 0\\
&\Leftrightarrow 2a(a+2) = a^2-2a-8 = 0 \Leftrightarrow a = -2.
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto e^{-2x}$ est une solution particulière non nulle.

Cherchons une éventuelle fonction polynôme non nulle solution. Soit P une fonction polynômiale non nulle de degré $n \in \mathbb{N}$. Si P est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, le coefficient de x^n dans $(2x+1)P''(x)+(4x-2)P'(x)-8P(x)$ doit nécessairement être nul. Ce coefficient est $(4n-8)\mathrm{dom}(P)$ ce qui impose $n = 2$. Posons donc $P = aX^2+bX+c$.

$$\begin{aligned}
P \text{ solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur } \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[&\Leftrightarrow \forall x > -\frac{1}{2},\ (2x+1)(2a)+(4x-2)(2ax+b)-8\left(ax^2+bx+c\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > -\frac{1}{2},\ (-4b)x+2a-2b-8c = 0\\
&\Leftrightarrow b = 0 \text{ et } a = 4c.
\end{aligned}$$

Ainsi, par exemple $P\ :\ x \mapsto 4x^2+1$ est une solution polynomiale non nulle de $(\mathscr{E})$ sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$. Les deux solutions particulières non nulles que nous avons obtenues ne sont pas colinéaires et donc

$$\mathscr{S}_{]-\frac{1}{2},+\infty[} = \left\{x \mapsto \lambda(4x^2+1)+\mu e^{-2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 9. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $x^2y''+xy'-4y = 0$.

Solution 9. Les deux fonctions $a\ :\ \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $b\ :\ x \mapsto -\dfrac{4}{x^2}$ sont continues sur $]0,+\infty[$. Donc, les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $]0,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Cherchons des solutions de la forme $f_\alpha\ :\ x \mapsto x^\alpha$.

$$\begin{aligned}
f_\alpha \text{ solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+x\alpha x^{\alpha-1}-4x^\alpha = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ \left(\alpha^2-4\right)x^\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2-4 = 0\\
&\Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = -2.
\end{aligned}$$

Les deux fonctions $f_1\ :\ x \mapsto x^2$ et $f_2\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ ne sont pas colinéaires et donc $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda x^2+\dfrac{\mu}{x^2},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Quand tout ce qui précède échoue, on essaie de chercher une série entière solution de l'équation différentielle proposée. Considérons l'équation différentielle $2xy''+y'-y = 0$ à résoudre sur $]0,+\infty[$. Soit $\sum a_nx^n$ une série entière dont le rayon R est **supposé à priori strictement positif**. Pour $x \in]-R,R[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ (si f est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-R,R[$, alors f est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]0,R[$).

Sous l'hypothèse $R > 0$, f est deux fois dérivable sur $]-R,R[$ et pour tout x de $]-R,R[$,

$$\begin{aligned}
2xf''(x)+f'(x)-f(x) &= 2x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n(2n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(2(n+1)-1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)(2n+1)a_{n+1}-a_n\right)x^n.
\end{aligned}$$

Toujours sous l'hypothèse $R > 0$,

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (\mathscr{E}) \text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)(2n+1)a_{n+1}-a_n=0\\
&\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(2n+1)}\\
&\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{1}{n(2n-1)}\times\frac{1}{(n-1)(2n-3)}\times\ldots\times\frac{1}{1\times 1}a_0\\
&\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{1}{n!\times(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}a_0\\
&\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}{n!(2n)!}a_0\\
&\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{2^n}{(2n)!}a_0.
\end{aligned}$$

Qua a_0 soit nul ou pas, on a $R = +\infty$ ce qui valide tous les calculs précédents sur $\mathbb{R}$. On vient donc d'obtenir pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions $f\ :\ x\mapsto a_0\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{(2n)!}x^n$, $a_0\in\mathbb{R}$. En particulier, la fonction $f_1\ :\ x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{(2n)!}x^n$ est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]0,+\infty[$.

On note que pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}(2x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^{2n}}{(2n)!}\\
&= \mathrm{ch}\left(\sqrt{2x}\right).
\end{aligned}$$

La fonction $f_1\ :\ x\mapsto\mathrm{ch}\left(\sqrt{2x}\right)$ est solution de l'équation $2xy''+y'-y=0$ sur $]0,+\infty[$. On peut alors achever la résolution de cette équation en posant $y = f_1z$ ...

e) Considérons cette autre équation $(\mathscr{E})$: $4xy''-2y'+9x^2y=0$ à résoudre sur $]0,+\infty[$. Soit $\sum a_nx^n$ une série entière dont le rayon R est **supposé à priori strictement positif**. Pour $x\in]-R,R[$, on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

Sous l'hypothèse $R > 0$, f est deux fois dérivable sur $]-R,R[$ et pour tout x de $]-R,R[$,

$$\begin{aligned}
4xf''(x)-2f'(x)+9x^2f(x)&=4x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+9x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\
&=4\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}n(4n-6)a_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}\\
&=-2a_1+4a_2x+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)(4(n+3)-6)a_{n+3}x^{n+2}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}\\
&=-2a_1+4a_2x+\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+3)(4n+6)a_{n+3}+9a_n\right)x^{n+2}.
\end{aligned}$$

Toujours sous l'hypothèse $R>0$,

$$\begin{aligned}
f\text{ solution de }(\mathscr{E})\text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow a_1=0,\ a_2=0\text{ et }\forall n\in\mathbb{N},\ (n+3)(4n+6)a_{n+3}+9a_n=0\\
&\Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=a_{3p+2}=0\text{ et }\forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+3}=-\frac{9a_{3p}}{(3p+3)(12p+6)}\\
&\Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=a_{3p+2}=0\text{ et }\forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+3}=-\frac{a_{3p}}{2(p+1)(2p+1)}\\
&\Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=a_{3p+2}=0\text{ et }\\
&\forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p}=\left(-\frac{1}{2(p)(2p-1)}\right)\left(-\frac{1}{2(p-1)(2p-3)}\right)\dots\left(-\frac{1}{2(1)(1)}\right)a_0\\
&\Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=a_{3p+2}=0\text{ et }\forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p}=\frac{(-1)^p}{2^pp!(2p-1)(2p-3))\dots1}a_0\\
&\Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=a_{3p+2}=0\text{ et }\forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p}=\frac{(-1)^p(2p)(2p-2)\dots2}{2^pp!(2p)!}a_0\\
&\Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p+1}=a_{3p+2}=0\text{ et }\forall p\in\mathbb{N},\ a_{3p}=\frac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.
\end{aligned}$$

Qua a_0 soit nul ou pas, on a $R=+\infty$ ce qui valide tous les calculs précédents sur $\mathbb{R}$. On vient donc d'obtenir pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions $f\ :\ x\mapsto a_0\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{3p}}{(2p)!}$, $a_0\in\mathbb{R}$. En particulier, la fonction $f_1\ :\ x\mapsto\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{3p}}{(2p)!}$ est solution de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]0,+\infty[$.

On note que pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}
f_1(x)&=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{3p}}{(2p)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(x^{3/2}\right)^{2p}}{(2p)!}\\
&=\cos\left(x^{3/2}\right).
\end{aligned}$$

Plutôt que d'essayer d'appliquer la méthode générale qui consiste à poser $y=\cos\left(x^{3/2}\right)z$, l'expression de la solution f_1 nous invite à poser $t=x^{3/2}$ et d'obtenir ainsi une nouvelle équation différentielle admettant cette fois-ci la solution $t\mapsto\cos(t)$. Cette nouvelle équation différentielle a des chances d'être plus simple.

Nous allons donc apprendre à changer de variable dans une équation différentielle. Pour $x>0$, on pose $t=x^{3/2}$ de sorte que $x=t^{2/3}$. On pose ensuite $z(t)=y(x)=y\left(t^{2/3}\right)$ ou, ce qui revient au même, $y(x)=z(t)=z\left(x^{3/2}\right)$. On doit alors noter que

changer de variable, c'est en fait changer de fonction inconnue.

Plus précisément, soit $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[&\rightarrow&]0,+\infty[\\ x&\mapsto&x^{3/2}\end{array}$. φ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même, deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$ et φ^{-1} est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Puisque $y=z\circ\varphi$ et aussi $z=y\circ\varphi^{-1}$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si la fonction z est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout réel x de $]0,+\infty[$,

- $y(x) = z\left(x^{3/2}\right)$,
- $y'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}z'\left(x^{3/2}\right)$,
- $y''(x) = \dfrac{3}{4}x^{-1/2}z'\left(x^{3/2}\right) + \dfrac{9}{4}xz''\left(x^{3/2}\right)$,

puis

$$\begin{aligned}4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2y(x) &= 4x\left(\frac{3}{4}x^{-1/2}z'\left(x^{3/2}\right) + \frac{9}{4}xz''\left(x^{3/2}\right)\right) - 2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}z'\left(x^{3/2}\right)\right) + 9x^2z\left(x^{3/2}\right)\\ &= 9x^2\left(z''\left(x^{3/2}\right) + z\left(x^{3/2}\right)\right)\\ &= 9t^{4/3}\left(z''(t) + z(t)\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ 4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2y(x) = 0 &\Leftrightarrow \forall t > 0,\ 9t^{4/3}\left(z''(t) + z(t)\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall t > 0,\ z''(t) + z(t) = 0\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall t > 0,\ z(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall x > 0,\ y(x) = \lambda\cos\left(x^{3/2}\right) + \mu\sin\left(x^{3/2}\right).\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$ est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\cos\left(x^{3/2}\right) + \mu\sin\left(x^{3/2}\right),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2.2.6 Méthode de variations des constantes

On décrit ici la méthode de variations des constantes pour les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

$$(\mathscr{E})\ :\ y'' + ay' + by = c$$

où a, b et c sont trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On suppose connu (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur I. Dans le cas, si on pose $X_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}$ sont des solutions du système homogène associé au système du premier ordre

$$(S)\ :\ X' = AX + B \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

De plus, le wronskien de la famille (X_1, X_2) est aussi le wronskien de la famille (f_1, f_2). Il n'est pas nul et donc (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions de (S_h) sur I.
La méthode de variation de la constante appliquée au système (S) dit qu'il existe une solution particulière de (S) de la forme $X_0 = \lambda X_1 + \mu X_2$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, vérifiant de plus $\lambda' X_1 + \mu' X_2 = B$.
Retraduit en termes d'équation scalaire du second ordre, cela donne :

Théorème 26. (méthode de variation des constantes)

Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(\mathscr{E})$: $y''+ay'+by = c$. Soit (f_1, f_2) un système fondamental de solutions sur I de l'équation homogène associée.

Il existe une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur I de la forme $f_0 = \lambda f_1 + \mu f_2$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, vérifiant de plus

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda' f_1 + \mu' f_2 = 0 \\ \lambda' f_1' + \mu' f_2' = c \end{array}\right..$$

Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $y'' + 4y = \cos(2x)$.

Solution 10. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathscr{E}_h)$: $y'' + 4y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout réel x, on pose $f_1(x) = \cos(2x)$ et $f_2(x) = \sin(2x)$.

Il existe une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_0 = \lambda f_1 + \mu f_2$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant de plus

$$\begin{cases} \cos(2x)\lambda'(x) + \sin(2x)\mu'(x) = 0 \\ -2\sin(2x)\lambda'(x) + 2\cos(2x)\mu'(x) = \cos(2x) \end{cases}.$$

Le déterminant du système précédent est $2\left(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)\right) = 2$. Les formules de Cramer fournissent pour tout réel x,

$$\lambda'(x) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin(2x) \\ \cos(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) = -\frac{1}{4}\sin(4x)$$

et

$$\mu'(x) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos(2x) & 0 \\ -2\sin(2x) & \cos(2x) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos^2(2x) = \frac{1}{4}(1 + \cos(4x)).$$

On peut prendre pour tout réel x, $\lambda(x) = \dfrac{1}{16}\cos(4x)$ et $\mu(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{16}\sin(4x)$ puis

$$f_0(x) = \left(\frac{1}{16}\cos(4x)\right)\cos(2x) + \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{16}\sin(4x)\right)\sin(2x) = \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{16}\cos(2x).$$

On note que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{16}\cos(2x)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée et donc une autre solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4}x\sin(2x)$.
Finalement, l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 11. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout réel x, $f''(x) + f(x) \geqslant 0$. Montrer que pour tout réel x, $f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$.

Solution 11. On pose $g = f'' + f$. g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $y'' + y = g$. Résolvons cette équation différentielle.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Il existe une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_0 : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant de plus

$$\begin{cases} \cos(x)\lambda'(x) + \sin(x)\mu'(x) = 0 \\ -\sin(x)\lambda'(x) + \cos(x)\mu'(x) = g(x) \end{cases}.$$

Les formules de Cramer fournissent pour tout réel x,

$$\lambda'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ g(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = -\sin(x)g(x)$$

et

$$\mu'(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & g(x) \end{vmatrix} = \cos(x)g(x).$$

On peut alors prendre pour λ et μ les fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x) = -\int_0^x \sin(t)g(t)\ dt \text{ et } \mu(x) = \int_0^x \cos(t)g(t)\ dt.$$

Une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est alors la fonction f_0 telle que, pour tout réel x,

$$f_0(x) = -\cos(x)\int_0^x \sin(t)g(t)\ dt + \sin(x)\int_0^x \cos(t)g(t)\ dt = \int_0^x \sin(x - t)g(t)\ dt.$$

Les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $f_0 : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x - t)g(t)\ dt$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. f est l'une de ces solutions et est donc de cette forme. Pour tout réel x, on a donc

$$\begin{aligned}
f(x+\pi)+f(x) &= \lambda(\cos(x+\pi)+\cos(x))+\mu(\sin(x+\pi)+\sin(x))+\int_0^{x+\pi}\sin(x+\pi-t)g(t)\ dt+\int_0^{x}\sin(x-t)g(t)\ dt\\
&= \int_0^{x+\pi}\sin(t-x)g(t)\ dt-\int_0^{x}\sin(t-x)g(t)\ dt=\int_x^{x+\pi}\sin(t-x)g(t)\ dt\\
&= \int_0^{\pi}\sin(u)g(u+x)\ du.
\end{aligned}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Par hypothèse, la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ et en particulier, pour tout $u\in[0,\pi]$, $\sin(u)g(x+u)\geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $f(x+\pi)+f(x)\geqslant 0$.

2.2.7 Principe de superposition des solutions

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $y''+ay'+by=c$ où a, b et c sont trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On suppose que le second membre c se décompose sous la forme $c=\lambda c_1+\mu c_2$. Dans le but de déterminer une solution particulière f de $(\mathscr{E})$ sur I, on peut décomposer le travail à effectuer en plusieurs étapes grâce au « principe de superposition des solutions » : si f_1 est une solution particulière de $(\mathscr{E}_1)$ sur I et f_2 est une solution particulière de $(\mathscr{E}_2)$ sur I, alors $f=\lambda f_1+\mu f_2$ est une solution de $(\mathscr{E})$ sur I car

$$(\lambda f_1+\mu f_2)''+a\left(\lambda f_1+\mu f_2\right)'+b\left(\lambda f_1+\mu f_2\right)=\lambda\left(f_1''+af_1'+bf_1\right)+\mu\left(f_2''+af_2'+bf_2\right)=\lambda c_1+\mu c_2=c.$$

Ce principe est en fait valable pour toute équation différentielle linéaire.

Exemple. Considérons l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $y''+2y'+2y=\cos(x)\operatorname{ch}(x)$ à résoudre sur $\mathbb{R}$.

• L'équation homogène associée est $(\mathscr{E}_h)$: $y''+2y'+2y=0$. L'équation caractéristique associée à cette équation homogène est (E_c) : $z^2+2z+2=0$. (E_c) admet dans $\mathbb{C}$ les deux solutions non réelles conjuguées $z_1=-1+i$ et $z_2=-1-i$. Les solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))\,e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

• Le second membre de $(\mathscr{E})$ s'écrit :

$$\cos(x)\operatorname{ch}(x)=\frac{1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(-1-i)x}\right).$$

Pour tout réel x, on pose $g_1(x)=e^{(1+i)x}$ et $g_2(x)=e^{(-1+i)x}$ de sorte $\overline{g_1(x)}=e^{(1-i)x}$ et $\overline{g_2(x)}=e^{(-1-i)x}$. Si f_1 est une solution particulière de $(\mathscr{E}_1)$: $y''+2y'+2y=g_1$ et f_2 est une solution particulière de $(\mathscr{E}_2)$: $y''+2y'+2y=g_2$, alors $f=\dfrac{1}{4}\left(f_1+\overline{f_1}+g_1+\overline{g_1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{Re}\left(f_1\right)+\operatorname{Re}\left(f_2\right)\right)$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.

• $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_1\ :\ x\mapsto ae^{(1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. Pour tout réel x,

$$f_1''(x)+2f_1'(x)+2f_1(x)=a\left((1+i)^2+2(1+i)+2\right)e^{(1+i)x}=a(4+4i)e^{(1+i)x}$$

puis

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1''(x)+2f_1'(x)+2f_1(x)=e^{(1+i)x}\Leftrightarrow 4(1+i)a=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{4(1+i)}\Leftrightarrow a=\frac{1}{8}(1-i).$$

Ensuite, pour tout réel x,

$$\operatorname{Re}(f_1(x))=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{8}(1-i)e^{x}\left(\cos x+i\sin x\right)\right)=\frac{1}{8}\left(\cos x+\sin x\right)e^{x}.$$

• $-1+i$ est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_2\ :\ x\mapsto axe^{(-1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. Pour tout réel x,

$$f_2''(x)+2f_2'(x)+2f_2(x)=a\left(((-1+i)^2x+2(-1+i))+2((-1+i)x+1)+2x\right)e^{(-1+i)x}=2iae^{(-1+i)x}$$

puis

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_2''(x)+2f_2'(x)+2f_2(x)=e^{(-1+i)x}\Leftrightarrow 2ia=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{2i}\Leftrightarrow a=-\frac{i}{2}.$$

Ensuite, pour tout réel x,

$$\mathrm{Re}(f_2(x)) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}(-i)e^{-x}\left(\cos x + i\sin x\right)\right) = \frac{1}{2}\sin x e^{-x}.$$

• Une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\left(f_1\right) + \mathrm{Re}\left(f_2\right)\right)(x) = \frac{1}{16}\left(\cos x + \sin x\right)e^x + \frac{1}{4}\sin x e^{-x}$.
On note que la fonction $x \mapsto \frac{1}{4}\sin x e^{-x}$ est solution de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$ et donc, une autre solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{16}\left(\cos x + \sin x\right)e^x$. Finalement,

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \left(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)\right)e^{-x} + \frac{1}{16}\left(\cos x + \sin x\right)e^x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

❏

3 Equations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles du type

$$(\mathscr{E})\ :\ y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1y' - a_0y = b,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, a_0, ..., a_{n-1} sont n nombres éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et b est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. $(\mathscr{E})$ est une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n à coefficients constants (ceux du premier membre). L'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ est

$$(\mathscr{E}_h)\ :\ y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1y' - a_0y = 0.$$

Les solutions de $(\mathscr{E})$ sur I sont les fonctions f n fois dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant pour tout x de I

$$f^{(n)}(x) - a_{n-1}f^{(n-1)}(x) - \ldots - a_1f'(x) - a_0f(x) = b(x).$$

Le programme officiel de Maths Spé ne prévoit que peu de choses sur le sujet des équations différentielles scalaires d'ordre n à coefficients constants. Donc, nous détaillerons peu ce paragraphe.

Par un procédé analogue à ce qui a été fait dans la section précédente, on va transformer l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ en une équation différentielle linéaire du premier ordre à n dimensions :

$$y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1y' - a_0y = g \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (y)' = y' \\ (y')' = y'' \\ \quad\vdots \\ \left(y^{n-2}\right)' = y^{(n-1)} \\ \left(y^{(n-1)}\right)' = a_0y + a_1y' + \ldots + a_{n-1}y^{(n-1)} + b \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow X' = AX + B$$

où $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$. On note que la matrice A est une **matrice compagnon**.

Nous serons bien plus bref que dans la section précédente. A partir de de la transformation précédente, on obtient rapidement :

Théorème 27. Soient b une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ puis $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

L'ensemble $\mathscr{S}_h$ des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\mathscr{E}_h)$: $y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1y' - a_0y = 0$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

L'ensemble $\mathscr{S}$ des fonctions solutions sur I de $(\mathscr{E})$: $y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1y' - a_0y = b$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension n et de direction $\mathscr{S}_h$ ou encore $\mathscr{S} = f_0 + \mathscr{S}_h$ où f_0 est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur I.

et aussi

Théorème 28. (théorème de Cauchy)

Soient b une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ puis $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.
Soit $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle $y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1y' - a_0y = b$.

Pour tout $(x_0, (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})) \in I \times \mathbb{K}^n$, il existe une solution f et une seule de $(\mathscr{E})$ sur I vérifiant de plus $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y_1$, …, $f^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

On a vu (par exemple, dans la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans le chapitre « Réduction ») que le polynôme caractéristique de la matrice compagnon A est $\chi_A = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1X - a_0$. On sait que les valeurs propres de la matrice A, ou encore les racines de χ_A, apparaissent dans l'expression des solutions. On pose donc

Définition 6. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène

$$(\mathscr{E}_h)\ :\ y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1y' - a_0y = 0$$

est

$$(E_c)\ :\ z^n - a^{n-1}z^{n-1} - \ldots - a_1z - a_0 = 0.$$

On ne décrira pas les solutions de $(\mathscr{E}_h)$ dans le cas général mais uniquement dans la cas où le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, à racines simples :

Théorème 29. On suppose que l'équation caractéristique (E_c) a n racines 2 à 2 distinctes λ_1, …, λ_n, dans $\mathbb{K}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\mathscr{E}_h)$: $y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1y' - a_0y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto c_1e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_ne^{\lambda_n x},\ (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Démonstration. On sait que l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = e^{\lambda_k x}$. La fonction f_k est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_k^{(n)}(x) - a_{n-1}f_k^{(n-1)}(x) - \ldots - a_1f_k'(x) - a_0f_k(x) = \left(\lambda_k^n - a_{n-1}\lambda_k^{n-1} - \ldots - a_1\lambda_k - a_0\right)e^{\lambda_k x} = 0.$$

Ainsi, chaque f_k est solution de $(\mathscr{E}_h)$ sur I.

Vérifions que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. Soit $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $c_1f_1 + \ldots + c_nf_n = 0 \quad (*)$. On dérive les deux membres de cette égalité k fois, $k \in [\![0, n-1]\!]$ et on évalue à chaque fois en 0. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 0 \\ \lambda_1c_1 + \lambda_2c_2 + \ldots + \lambda_nc_n = 0 \\ \lambda_1^2c_1 + \lambda_2^2c_2 + \ldots + \lambda_n^2c_n = 0 \\ \qquad\vdots \\ \lambda_1^{n-1}c_1 + \lambda_2^{n-1}c_2 + \ldots + \lambda_n^{n-1}c_n = 0 \end{array}\right. \qquad (S).$$

Le déterminant de ce système d'équations linéaires homogène est $\Delta = \mathrm{Van}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ (déterminant de Vandermonde). Puisque les λ_k, $k \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux distincts, on sait que ce déterminant n'est pas nul et donc le système (S) est un système de Cramer homogène. Ce système admet une solution et une seule à savoir $(c_1, \ldots, c_n) = (0, \ldots, 0)$. Ceci montre que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Puisque $\mathrm{card}(f_1, \ldots, f_n) = n = \dim(\mathscr{S}_h)$, $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathscr{S}_h$ ce qui démontre le résultat.

Exercice 12. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

Solution 12. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathscr{E})$. L'équation caractéristique associée à $(\mathscr{E})$ est (E_c) : $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$. Or, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)\left(z^2 - 5z + 6\right) = (z-1)(z-2)(z-3)$$

et donc, $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0 \Leftrightarrow z \in \{1, 2, 3\}$. On sait alors que

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto ae^x + be^{2x} + ce^{3x},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$
