Concours National Commun - Session 2010

Corrigé de l'épreuve de mathématiques II
Filière MP

Pour toute matrice complexe A, il existe une matrice unitaire U telle que les éléments diagonaux de la matrice UAU^{-1} soient tous égaux.

Corrigé par M.TARQI[1]

I. UN PEU DE GÉMOÈTRIE

1.1 **Question de cours :** L'équation d'une ellipse dans une repère orthonormé du plan euclidien est de la forme $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a>b>0$ de foyer $F(c=\sqrt{a^2-b^2},0)$, de directrice d'équation $x=\dfrac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e=\dfrac{c}{a}<1$. Pour des raisons de symétrie, il existe un autre couple de foyer et directrice. Ce sont $F'(-c,0)$ et la droite D' d'équation $x=\dfrac{-a^2}{c}$.

1.2

1.2.1 On a $\lambda e^{i\theta}+\mu e^{-i\theta}=(\lambda+\mu)\cos\theta+i(\lambda-\mu)\sin\theta$, donc $(x,y)\in E_{\lambda,\mu}$ si et seulement si $x=(\lambda+\mu)\cos\theta$ et $y=(\lambda-\mu)\cos\theta$, donc $\dfrac{x^2}{(\lambda+\mu)^2}+\dfrac{y^2}{(\lambda-\mu)^2}=1$, ainsi (x,y) décrit l'ellipse d'équation réduite $\dfrac{x^2}{(\lambda+\mu)^2}+\dfrac{y^2}{(\lambda-\mu)^2}=1$.

1.2.2 $r_{\omega,\varphi}$ est une rotation affine ; de centre w et d'angle φ.

1.2.3 Prenons $w=0$ et $\varphi=\frac{\varepsilon+\tau}{2}$. Alors

$$r_{0,\varphi}(\lambda e^{i\theta}+\mu e^{-i\theta})=\lambda e^{i\varepsilon}e^{i(\theta+\frac{\tau-\varepsilon}{2})}+\mu e^{i\tau}e^{-i(\theta+\frac{\tau-\varepsilon}{2})}=be^{i(\theta+\frac{\tau-\varepsilon}{2})}+ce^{-i(\theta+\frac{\tau-\varepsilon}{2})},$$

donc $r_{0,\varphi}(\lambda e^{i\theta}+\mu e^{-i\theta})\in E_{b,c}$.
D'autre part, si $bz+cz'=be^{i\theta}+ce^{-\theta}\in E_{b,c}$, alors

$$be^{i\theta}+ce^{-i\theta}=r_{0,\varphi}\left(\lambda e^{i(\theta-\frac{\tau-\varepsilon}{2})}+\mu e^{-i(\theta-\frac{\tau-\varepsilon}{2})}\right).$$

Donc $E_{b,c}=r_{0,\varphi}(E_{\lambda,\mu})$, et comme $r_{0,\varphi}$ est une rotation, donc une isométrie, et que se fait autour de 0, alors $E_{b,c}$ est une ellipse centrée à l'origine.

1.3

1.3.1 $\mathbb{C}$ est considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soient $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors

$$f(z+\alpha z')=b(z+\alpha z')+c(\overline{z+\alpha z'})=bz+c\overline{z}+\alpha(bz+c\overline{z})=f(z)+\alpha f(z')$$

Donc f est bien linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
Soit $z=x+iy$ tel que $f(z)=0$, posons $b=\alpha+i\beta$ et $c=\alpha'+i\beta'$, alors

$$\begin{cases}(\alpha+\alpha')x+(\beta'-\beta)y=0\\(\beta+\beta')x+(\alpha-\alpha')y=0\end{cases},$$

système qui est inversible puisque son déterminant $(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha'^2+\beta'^2)=|b|^2-|c|^2$ est no nul, donc $x+iy=z=0$, ainsi f est injective.

[1]M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc. E-mail : medtarqi@yahoo.fr

1.3.2 Soit $C = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ le cercle unité, alors $f(C) = \{bz + c\overline{z}/|z| = 1\} = E_{b,c}$ est une ellipse de centre O (d'après la question [1.2.3]).

1.3.3 Comme f et non injective et non nulle, alors Imf est une droite vectorielle (droite affine passant par O).
D'autre part, C est un compact de $\mathbb{C}$ (fermé et borné), et f est continue (linéaire) donc $f(C)$ est une partie compacte de la droite affine Imf , donc c'est un segment.
Si $z \in C$, alors $-z \in C$, donc $f(C)$ est symétrique par rapport à O.
On a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|bz + c\overline{z}| \leq |b| + |c| = 2|b|$, donc $\left|e^{i\varepsilon}e^{i\theta} + e^{i\tau}e^{-i\theta}\right| \leq 2$, et $\left|e^{i\varepsilon}e^{i\frac{\tau-\varepsilon}{2}} + e^{i\tau}e^{-i\frac{\tau-\varepsilon}{2}}\right| = \left|2e^{\frac{\varepsilon+\tau}{2}}\right| = 2$, donc les deux extrémités du segment $f(C)$ sont les points d'affixes $z_1 = 2|b|e^{i(\frac{\varepsilon+\tau}{2})}$ et $z_2 = 2|b|e^{i(\frac{\varepsilon+\tau}{2}+\pi)} = -2|b|e^{i(\frac{\varepsilon+\tau}{2})}$.

1.3.4
- Si f est injective alors $f(C) = E_{b,c}$. Soit $a \in C^*$, alors il existe un réel ξ tel que $\xi a \in E_{b,c}$ et par conséquent, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = \xi a$, donc $\dfrac{bz_0 + c\overline{z_0}}{a} = \xi \in \mathbb{R}$.
- Si f est non injective, alors il existe $z_1 \in \mathbb{C}^*$ tel $f(z_1) = 0$, donc si on considère $z_0 = \dfrac{z_1}{|z_1|}$ alors $|z_0| = 1$ et pour tout nombre complexe non nul a, on a $\dfrac{bz_0 + c\overline{z_0}}{a} = 0$ est un réel.

II. Matrices unitaires

2.1 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $A^*A = AA^* = I_2$, donc elle est unitaire.

2.2 Par définition si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\det A = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$ (S_n désigne l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$). Ainsi $\det A^* = \overline{\det A}$ et si de plus A est unitaire, alors $A^*A = I_2$, et par conséquent

$$\det(A^*A) = \det A\overline{\det A} = 1,$$

donc $|\det A| = 1$.

2.3 Il est clair que si u et v sont des complexes tels que $|u|^2 + |v|^2 = 1$, alors $A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\lambda\overline{v} & \lambda\overline{u} \end{pmatrix}$ est unitaire.
Inversement, Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un matrice unitaire, alors $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$ et $c\overline{a} + d\overline{b} = 0$ et $|ad - bc| = 1$.
Supposons $ad - bc = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Si $a \neq 0$, on déduit $c = -\dfrac{\overline{b}d}{\overline{a}}$, puis $e^{i\alpha} = ad - bc = ad + \dfrac{b\overline{b}d}{\overline{a}} = (|a|^2 + |b|^2)\dfrac{d}{\overline{a}}$ donc $d = e^{i\alpha}\overline{a}$, et $c = -e^{i\alpha}\dfrac{\overline{b}\overline{a}}{\overline{a}} = -e^{i\alpha}\overline{b}$.
- Si $a = 0$, on obtient $|b| = 1$, $\overline{b}d = 0, d = 0$, puis $|c| = 1$, $bc = -e^{i\alpha}$, donc $c = -\dfrac{e^{i\alpha}}{b} = -e^{i\alpha}\overline{b}$.

2.4 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ est unitaire si et seulement si $D^*D = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, ..., |\lambda_n|^2) = I_n$, donc si et seulement si $|\lambda_1| = |\lambda_2| = ... = |\lambda_n| = 1$.

2.5

2.5.1 Si A est une matrice à coefficients réels, alors $A^* =^t A$, donc A est unitaire si et seulement si ${}^tAA = A^tA = I_n$, c'est-à-dire A est orthogonale.

2.5.2 Soit σ une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$. Notons A_σ la matrice de permutation associée à σ. Alors

$$A_\sigma = (\sigma_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n}$$

Posons $({}^tA_\sigma) = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on obtient :
Pour tout (i, j) de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ji} \\ &= \delta_{j\sigma(i)} \\ &= \delta_{\sigma^{-1}\sigma ji),\sigma(i)} \\ &= \delta_{\sigma^{-1}(j')i'} \end{aligned}$$

Donc ${}^tA_\sigma = A_{\sigma^{-1}}$
Soient maintenant σ et $\sigma^{'} \in S_n$, on pose $A_\sigma A_{\sigma'} = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on obtient donc

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{i\sigma(k)}\delta_{k\sigma'(j)} \\ &= \delta_{i\sigma\sigma'(j)}\delta_{\sigma'(i)\sigma'(j)} \\ &= \delta_{i\sigma\sigma'(j)} \end{aligned}$$

Alors $A_\sigma A_{\sigma'} = A_{\sigma\sigma'}$ et en particulier on a :

$$A_\sigma A_{\sigma^{-1}} = A_{\sigma\sigma^{-1}} = A_{id} = I_n$$

Donc A_σ est inversible et $(A_\sigma)^{-1} = A_{\sigma^{-1}} =^t A_\sigma$ c'est-à-dire A_σ est orthogonale, donc elle est unitaire.

2.6 Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note b_{ij} les coefficients de AA^*, alors

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a_{kj}}$$

Donc A est unitaire si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a_{kj}} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} étant le symbole de Kroneker), c'est-à-dire si et seulement si les colones de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ pour le produit scalaire $< .|. >$.

2.7 Il est clair que toute matrice unitaire A est inversible et $A^{-1} = A^*$, donc $\mathbb{U}_n \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. D'autre part $I_n \in \mathbb{U}(n)$ et si A et B sont $\mathbb{U}(n)$, alors

$$(AB^{-1})^*(AB) = (B^{-1})^*A^*AB^{-1} = (B^{-1})^*B^{-1} = (BB^*)^{-1} = I_n,$$

donc $AB^{-1} \in \mathbb{U}(n)$.

2.8 **Compacité de** $\mathbb{U}(n)$

2.8.1 Notons $l : A \longmapsto ({}^t\overline{A}, A)$, $b : (A, B) \longmapsto AB$ et $\varphi : A \longmapsto A^*A$. l et b sont des applications continues (l est linéaire et b est bilinéaire) et comme $\varphi = b \circ l$, alors φ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui même .

2.8.2 Par identification de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^{2n}$, l'application $\|.\|_2$ n'est autre que la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^{2n}$.
Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est unitaire alors $A^*A = I_n$ et donc pour tout $j = 1, 2, ..., n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1$.
Ainsi

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}.$$

2.8.3 On a $\mathbb{U}_n = \varphi^{-1}\{I\}$ et comme φ est continue et $\{I_n\}$ est fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathbb{U}_n$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'autre part, $\mathbb{U}_n$ est borné, car pour tout $A \in \mathbb{U}(n)$, $\|A\|_2 = \sqrt{n}$, et comme on est en dimension finie $\mathbb{U}_n$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III. Démonstration d'un résultat annoncé

3.1 Étude en dimension 2

3.1.1 Il est clair que
$U^*U = \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u} & -v \\ \overline{v} & u \end{pmatrix} = I_2$, puisque $|u|^2 + |v^2| = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, donc U est unitaire.

3.1.2 Nous avons

$$\begin{aligned} UAU^* &= \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{u} & -v \\ \overline{v} & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ua_1+vc)\overline{u} + (ub+va_2)\overline{v} & -v(ua_1+vc) + u(ub+va_2) \\ (-\overline{v}a_1+\overline{u}c)\overline{u} + (-\overline{v}b+\overline{u}a_2)\overline{v} & (-\overline{v}a_1+\overline{u}c)\overline{u} + (-\overline{v}b+\overline{u}a_2)u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} A_1 &= (ua_1+vc)\overline{u} + (ub+va_2)\overline{v} \\ &= a_1\cos^2\alpha + a_2\sin^2\alpha + (ce^{i(\beta-\gamma)} + be^{-i(\beta-\gamma)})\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_2 &= (-\overline{v}a_1+\overline{u}c)\overline{u} + (-\overline{v}b+\overline{u}a_2)u \\ &= a_1\sin^2\alpha + a_2\cos^2\alpha + (be^{i(\beta-\gamma)} + ce^{-i(\beta-\gamma)})\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

3.1.3

3.1.3.1 D'après la question [1.3.4] de la première partie, il existe z_0 de module 1 tel que $\dfrac{bz_0 + c\overline{z_0}}{a_1-a_2}$ soit un réel, et comme $|z_0| = 1$, alors on peut choisir β et γ tel que $z_0 = e^{i(\beta-\gamma)}$. Donc il existe un couple $(\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que p soit un réel.

3.1.3.2 Soit p un réel, l'application définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$\varphi : \alpha \longmapsto \cos^2\alpha + p\sin\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}$$

est continue et comme $\varphi(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-1}{2}$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2} = \cos^2\alpha + p\cos\alpha\sin\alpha$.

3.1.3.3 Dans ces conditions, on a :

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1\cos^2\alpha + a_2\sin^2\alpha + (ce^{i(\beta-\gamma)} + be^{-i(\beta-\gamma)})\sin\alpha\cos\alpha \\ &= a_1(\cos^2\alpha + p\cos\alpha\sin\alpha) + a_2(1-\cos^2)\cos^2\alpha + p\cos\alpha\sin\alpha \\ &= ta_1 + (1-t)a_2 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} A_2 &= a_1\sin^2\alpha + a_2\cos^2\alpha + (be^{i(\beta-\gamma)} + ce^{-i(\beta-\gamma)})\sin\alpha\cos\alpha \\ &= ta_2 + (1-t)a_1 \end{aligned}$$

Ainsi pour $t = \dfrac{1}{2}$, on a $A_1 = A_2$, c'est-à-dire les éléments diagonaux UAU^* sont égaux.

3.2 Étude du cas général

3.2.1 Comme f est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même , alors f est continue.

3.2.2

3.2.2.1 L'application g_A est continue comme composée des applications continues :

– l'application continue $H \longmapsto HAH^*$; puisque on a l'inégalité :

$$\begin{aligned}\|HAH^* - H_0AH_0^*\|_\infty &= \|HA(H^* - H_0^*) + (H - H_0)AH_0^*\|_\infty \\ &\leq \|H\|_\infty\|A\|_\infty\|H^* - H_0^*\|_\infty + \|A\|_\infty\|H_0^*\|_\infty\|H - H_0\|_\infty\end{aligned}$$

– l'application linéaire f ;

– l'application norme $\|.\|_\infty$ qui est continue, car elle est lipshitizienne.

3.2.2.2 g_A étant continue sur le compact $\mathbb{U}(n)$, donc elle est bornée et atteint ses bornes, en particulier il existe $H_0 \in \mathbb{U}(n)$ tel que $g_A(H_0) = \inf\{g_A(H)/H \in \mathbb{U}(n)\}$.

3.2.3

3.2.3.1 Puisque $g_A(H_0) > 0$, alors $i_0 \neq j_0$. Soit σ la permutation de $\{1, 2, ..., n\}$ définie par $\sigma(i_0) = 1$, $\sigma(j_0) = 2$ et pour tout $k \neq i_0$ et $k \neq j_0$, $\sigma(k) = k$. Notons $P = A_\sigma$, alors $PA \in \mathbb{U}(n)$ (car $\mathbb{U}(n)$ est un groupe) et

$$\|f((PH)A(PH)^*)\|_\infty = \|f(HAH^*)\|_\infty,$$

donc la supposition est possible.

Remarque : *Si $\sigma_{i,j} \in S_n$ une transposition ($\sigma_{i,j}(i) = j, \sigma_{i,j}(j) = i$ et $\sigma_{i,j}(k) = k$, pour $k \neq i$ et $k \neq j$), alors $P_{\sigma_{i,j}}AP^*_{\sigma_{i,j}}$ s'obtient en permuttant les lignes L_i et L_j et ensuite les colonnes C_i et C_j de la matrice A, dans ce cas le coefficient $a_{i,i}$ de A occupe la position (j, j) dans la matrice $P_{\sigma_{i,j}}AP^*_{\sigma_{i,j}}$ et même chose pour le coefficient $a_{j,j}$.*

3.2.3.2 C'est une conséquence de la question [3.1] de cette partie.

3.2.3.3 Comme U_0 est unitaire, alors on a :

$$UU^* = \begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_0^* & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0U_0^* & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = I_n.$$

D'autre part, si on pose $A' = \begin{pmatrix} B & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}$on a :

$$UA'U^* = \begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_0^* & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0BU_0^* & * \\ * & B_3 \end{pmatrix} = I_n.$$

Donc $(UA'U^*)_{1,1} = (UA'U^*)_{2,2} = \dfrac{a'_{1,1} + a'_{2,2}}{2}$ et pour tout $i = 3, 4, ..., n$, $(UA'U^*)_{i,i} = a'_{i,i}$. ($M_{i,j}$ désigne le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de la matrice M).

3.2.3.4 Nous avons

$$\|f(UA'U^*)\|_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq n} |(UA'A)_{i,i} - (UA'U^*)_{j,j}| = \sup\left\{|x_0 - a'_{i,i}|, |a'_{i,i} - a'_{j,j}|/ij, \geq 3\right\}.$$

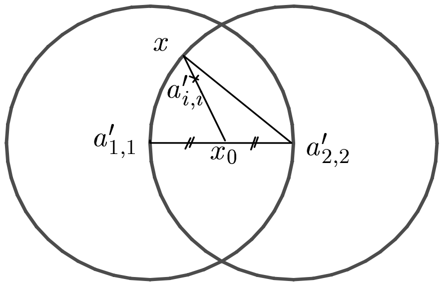
et puisque pour tout (i, j), on a $|a'_{i,i} - a'_{j,j}| \leq \|f(A')\|_\infty$, alors en particulier $|a'_{1,1} - a'_{i,i}| \leq |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$ et $|a'_{2,2} - a'_{i,i}| \leq |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$, donc

$$\begin{aligned}|x_0 - a'_{i,i}| &= \frac{1}{2}\left(|a'_{1,1} - a'_{i,i}| + |a'_{2,2} - a'_{i,i}|\right) \\ &\leq |a'_{1,1} - a'_{2,2}|,\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\|f(UA'U^*)\|_\infty \leq \|f(A')\|_\infty.$$

On a, pour tout $i = 3, 4, ..., n$, $|a'_{i,i} - a'_{1,1}| \leq |a'_{11} - a'_{22}|$ et $|a'_{i,i} - a'_{2,2}| \leq |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$, donc les $a'_{i,i}$ appartiennent à l'intersection des deux disques centrés en $a'_{1,1}$ et $a'_{2,2}$ et de même rayon $|a'_{1,1} - a'_{2,2}|$.



D'après la figure, on voit bien que pour tout $i \in \{3, 4, ..., n\}$:

$$|x_0 - a'_{i,i}| \leq |x_0 - x| < |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$$

3.2.3.5
- Si $n = 3$, l'inégalité $\|f(UA'U^*)\|_\infty \leq \|f(A')\|_\infty$ devient stricte ce qui est en contradiction avec la définition de H_0.
- Si $n > 3$, alors comme $UH_0 \in \mathbb{U}(n)$, alors $\|f(UA'U^*)\|_\infty = \|f(A')\|_\infty$, et donc il existe un couple (i, j) $(i < j)$ tel que $\|f(A')\|_\infty = |a'_{i,i} - a'_{j,j}| = |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$. Notons donc

$$E = \left\{(i, j) \in [3, n]^2 \ \text{ tel que } \ i < j \ \text{ et } \ |a'_{i,i} - a'_{j,j}| = |a'_{11} - a'_{22}|\right\}.$$

On suit le même raisonnement qu'on a fait dans la question [3.2.3.4], mais cette fois pour chaque couple (i, j) de E, et quitte à permuter les lignes et les colonnes on peut supposer $i = 3$ et $j = 4$, ainsi il existe une matrice unitaire V telle que les éléments diagonaux de $VUA'U^*V^* = (VU)A'(VU)^*$ sont

$$x_0, x_0, \frac{a'_{3,3} + a'_{4,4}}{2}, \frac{a'_{3,3} + a'_{4,4}}{2}, a'_{5,5}, ..., a'_{n,n},$$

avec

$$\|f((VU)A'(VU)^*)\|_\infty \leq \|f(A')\|_\infty.$$

et

$$\left|\frac{a'_{3,3} + a'_{4,4}}{2} - a'_{i,i}\right| < |a'_{3,3} - a'_{4,4}| = |a'_{1,1} - a'_{2,2}|.$$

On peut poursuivre ce raisonnement pour tout les couples (i, j) de E, en dernière étape on obtient une matrice H, produit de matrices unitaires, telle que

$$\|f(HA'H^*)\|_\infty < \|f(A')\|_\infty.$$

L'inégalité précédente est en contradiction avec la définition de A', donc l'hypothèse $g_A(H_0) > 0$ est fausse.

3.2.4 D'après ce qui précède on a nécessairement $g_A(H_0) = \|f(H_0AH_0^*)\| = 0$, donc $f(H_0AH_0^*) = 0$ et par conséquent, pour tout couple (i, j), $(H_0AH_0^*)_{i,i} = (H_0AH_0^*)_{j,j}$, c'est-à-dire les éléments diagonaux de $H_0AH_0^*$ sont tous égaux.

• • • • • • • • • • • • •