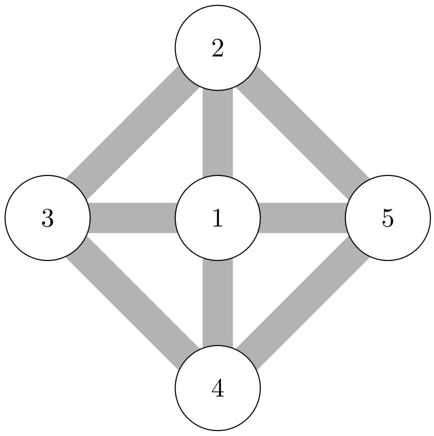
Matrices stochastiques



Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous

Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ $(k \in \mathbb{N})$. On admet que, si le rat se trouve à l'instant k $(k \in \mathbb{N})$ dans la salle numéro i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. A titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k = 1) \\ \mathbb{P}(S_k = 2) \\ \mathbb{P}(S_k = 3) \\ \mathbb{P}(S_k = 4) \\ \mathbb{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$$

Pour une matrice B, ${}^tB$ représente sa matrice transposée.

Partie I: Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme combinaison linéaire des $\mathbb{P}(S_k = i)$ pour $i = 1, \ldots, 5$.

2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout entier naturel k.

3. En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de ${}^tB$ et expliciter un vecteur propre associé.

   On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

4. Montrer qu'alors les variables alétoires S_k ont toutes la même loi.

5. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

Partie II: Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$.

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme $r_k = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} u^i = \dfrac{1}{k} \left(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1} \right)$ où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

6. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - I_E)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} r_k(x)$.

7. Soit $x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$ et soit $y \in E$ tels que $x = u(y) - y$

   (a) Montrer que $r_k(x) = \dfrac{1}{k}(u^k(x) - x)$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} r_k(x) = 0_E$.

8. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)$.

9. Soit x un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} A^i = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

Partie III: Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

- *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1.*
- *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0 \tag{3}$$

$$\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

12. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

13. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

    On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ où les x_i sont les coefficients de X.

14. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} A^i$$

15. Montrer que $\operatorname{Ker}(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

    Indication . Soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in Ker(A^p - I_n)$. Quitte à prendre $-X$, on considère $s \in [|1,n|]$ un indice tel que $x_s = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

16. En déduire que $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.
17. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
18. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, stochastique de rang 1.
19. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne stochastique.
20. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
21. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.
22. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A.

    Indication **.** *On pourra utiliser la question 8.*

Partie IV: Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie **1** en exploitant les résultats de la partie **3**.

On pose $A = {}^tB$ où B est la matrice construite dans la partie **1**.

Un calcul qui n'est pas demandé montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

23. Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie en (2).
24. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[|1, 5|]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle la présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants).

Partie I: Premiers pas

1. $(S_k = i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 1) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = i)\mathbb{P}(S_k = i)$$

Il reste à remarquer que les salles $2, 3, 4, 5$ mènent toutes à 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ pour en déduire

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5} \mathbb{P}(S_k = i)$$

2. On peut procéder de même pour expliciter $\mathbb{P}(S_{k+1} = j)$ pour $j = 2, 3, 4, 5$ et obtient

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = 2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 5)$$
$$\mathbb{P}(S_{k+1} = 3) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 4)$$
$$\mathbb{P}(S_{k+1} = 4) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 5)$$
$$\mathbb{P}(S_{k+1} = 5) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k = 4)$$

Ce qui se traduit matriciellement par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = BX_k \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

3. La somme des éléments de chaque colonne de B, et donc de chaque ligne de ${}^tB$, vaut 1. Ceci signifie que

$${}^tB \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore que

$$1 \in \mathrm{Sp}({}^tB) \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}({}^tB - I_5)$$

4. Un calcul immédiat donne $BX_0 = X_0$ et, par récurrence immédiate, $X_k = B^k X_0 = X_0$ pour tout entier k. X_k donnant la loi de S_k, toutes les S_k ont même loi dans ce cas

5. Si le rat est dans une pièce, il la quitte au temps suivant. Ainsi, $\mathbb{P}(S_0 = 1 \cap S_1 = 1) = 0$. Or $\mathbb{P}(S_0 = 1)\mathbb{P}(S_1 = 1) = \frac{1}{16} \neq 0$. Ainsi S_0 et S_1 ne sont pas indépendantes

Partie II: Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

6. Soit $x \in \text{Ker}(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ et par récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout k. Ainsi, $r_k(x) = x$ et

$$\forall x \in \text{Ker}(u - I_E),\ r_k(x) \to x$$

7. (a) Soit $x \in \text{Im}(u - I_E)$. Il existe y tel que $x = (u - I_E)(y)$ et donc $x = u(y) - y$. Ainsi $u^i(x) = u^{i+1}(y) - u^i(y)$ et (télescopage)

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(u^{i+1}(y) - u^i(y)) = \frac{1}{k}(u^k(y) - y)$$

(b) On en déduit que $\|r_k(x)\| \leqslant \frac{1}{k}(\|u^k(y)\| + \|y\|)$. Or, u contractant les normes, $\|u^k(y)\| \leqslant \|y\|$ et donc notre majorant est de limite nulle. Ceci montre que

$$\forall x \in \text{Im}(u - I_E),\ r_k(x) \to 0_E$$

8. Par théorème du rang, on a les bonnes dimensions. De plus, si $x \in \text{Im}(u - I_E) \cap \text{Ker}(u - I_E)$, $(r_k(x))$ est simultanément de limite x et 0_E et donc $x = 0_E$ par unicité de la limite. L'intersection est donc réduite à 0_E et la somme est directe. Finalement

$$E = \text{Ker}(u - I_E) \oplus \text{Im}(u - I_E)$$

9. Soit $x \in E$. Il existe $y \in \text{Ker}(u - I_E)$ et $z \in \text{Im}(u - I_E)$ tels que $x = y + z$. On a alors $r^k(x) = r^k(y) + r^k(z) \to y$. $x \mapsto y$ est la projection sur $\text{Ker}(u - I_E)$ de direction $\text{Im}(u - I_E)$.

$$\forall x \in E,\ r_k(x) \to p(x) \text{ avec } p \text{ projection sur } \text{Ker}(u - I_E) \text{ de direction } \text{Im}(u - I_E)$$

10. Pour parler de convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on doit munir cet espace d'une norme. Et comme l'espace est de dimension finie, le choix de la norme est indifférent (les normes sont équivalentes en dimension finie). Les mêmes calculs que ceux menés ci-dessus montrent que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ R_k X \to PX$$

où P est la matrice (dans la base canonique) de la projection sur $\text{Ker}(A - I_n)$ de direction $\text{Im}(A - I_n)$ (espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$). Appliquons ceci aux éléments E_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $\forall i,\ \|R_k E_i - PE_i\| \to 0$. Comme tous les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, on peut choisir de travailler avec la norme infinie associée à la base canonique. $\|R_k E_i - PE_i\| \to 0$ signifie alors que chaque suite des coefficients de $R_k Ei$ converge vers le coefficient associé de PE_i. Ceci signifie donc que chaque suite coefficient de R_k converge vers le coefficient de P associé. Ou encore que $R_k \to P$ au sens de la norme “maximum du module des coefficients". On a donc convergence de (R_k) vers P. Enfin, P est la matrice d'une projection et $P^2 = P$.

$$\exists\, P/\ R_k \to P \text{ et } P^2 = P$$

Partie III: Matrices stochastiques

11. Posons $V = AU$. On a

$$\forall i,\ V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

On en déduit que

$$(4) \text{ équivaut à } AU = U$$

12. Soient A, B stochastiques. Par les formules de produit, $C = AB$ est à coefficients positifs (chaque $c_{i,j}$ est somme et produit de termes ≥ 0). En outre $CU = ABU = AU = U$ avec la question précédente. Cette même question indique que C vérifie (4) et est donc stochastique.

$$\mathcal{E} \text{ est stable par multiplication}$$

13. Soit (A_k) une suite convergente de matrices stochastiques et A sa limite. Chaque coefficient de A est limite de la suite correspondante des coefficients de A_k et est positif comme limite de tels termes. De plus, $\forall k,\ A_kU = U$ donne $AU = U$. Ainsi A est stochastique.

$$\mathcal{E} \text{ est fermé}$$

Soient A, B stochastiques et $\lambda \in [0,1]$. Posons $M = \lambda A + (1-\lambda)B$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M. De plus $MU = \lambda AU + (1-\lambda)BU = \lambda U + (1-\lambda)U = U$ ce qui donne (4) pour M qui est donc stochastique.

$$\mathcal{E} \text{ est convexe}$$

14. Posons $Y = AX = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On a

$$\forall i,\ |y_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\cdot|x_j| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

Ceci étant vrai pour tout i, on a

$$\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n$$

15. Notons $B = A^p = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. B est une matrice stochastique (question 12) à coefficients > 0. Soit $X \in \mathrm{Ker}(B - I_n)$ et s un indice tel que x_s est le maximum des $|x_i|$. On a $BX = X$ et, en regardant le coefficient d'indice s de cet élément de $\mathbb{R}^n$,

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} b_{s,j}x_j \leqslant x_s \sum_{j=1}^{n} b_{s,j} = x_s$$

(On a utilisé la positivité des $b_{s,j}$ pour dire que $b_{s,j}x_j \leqslant b_{s,j}x_s$). Si, par l'absurde, il existait un j tel que $x_j < x_s$ alors, comme $b_{s,j} > 0$, on aurait $b_{s,j}\,|x_j| < b_{s,j}x_s$ et on obtiendrait ci-dessus $x_s < x_s$ et donc une contradiction.

Ceci montre que les x_j sont tous égaux et donc que $X \in \mathrm{Vect}(U)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A^p - I_n) \subset \mathrm{Vect}(U)$. Mais A^p est une matrice stochastique (question 12) et on a donc $U \in \mathrm{Ker}(A^p - I_n)$. Ainsi

$$\mathrm{Ker}(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U) \text{ et donc } \dim(\mathrm{Ker}(A^p - I_n)) = 1$$

16. On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$ car A est stochastique. Si $AX = X$ alors par récurrence $A^kX = X$ pour tout k et en particulier $A^pX = X$. la question précédente montre que $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et ainsi

$$\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$$

17. Les A^i sont toutes stochastiques (question 12). R_k est donc à coefficients positifs comme somme de telles matrices. De plus

$$R_kU = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} A^iU = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} U = U$$

et on a aussi (4). Finalement R_k est stochastique pour tout k

On aurait aussi pu utiliser la convexité de $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est isobarycentre de matrices stochastiques.

18. Les questions 10 et 14 montrent que (R_k) est convergente de limite P telle que $P^2 = P$. De plus, les questions 17 et 13 (caractère fermé) montrent que P est stochastique. La partie **2** a montré que P est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$. On a donc $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$ et P est de rang 1.

$$R_k \to P,\ P \in \mathcal{E},\ \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$$

19. Toutes les colonnes de P sont ainsi multiples de P et il existe λ_i telle que la colonne i s'écrive λ_iU. En posant $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (matrice ligne) on a alors $P = UL$. Comme toutes les coordonnées de U valent 1, toutes les lignes de P valent L. Comme P est stochastique, L l'est aussi.

$$P = UL \text{ avec } L \text{ matrice ligne stochastique}$$

20. Remarquons que

$$R_k A = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} A^i = \frac{1}{k}((k+1)R_{k+1} - I_n) = \frac{k+1}{k}R_{k+1} - \frac{1}{k}I_n$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$PA = P$$

On aurait aussi pu dire que $\mathrm{Im}(A - I_n) = Ker(P)$ *et que donc* $P(A - I_n) = 0$.
P est une matrice dont toutes les lignes sont égale à L. PA est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont LA. L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$.
Si Y est une matrice ligne, $YA = A$ s'écrit aussi ${}^tA{}^tY = {}^tY$ ou encore $({}^tA - I_n){}^tY = 0$. Or, avec la question 16, $A - I_n$ est de rang $n-1$ (par théorème du rang) et il en est de même de ${}^tA - I_n$. Le noyau de ${}^tA - I_n$ est ainsi de dimension 1. Il contient la matrice ${}^tL$ qui est non nulle (car sinon $P = 0$). Ainsi, les matrices ligne Y vérifiant $YA = A$ sont les multiples de L. La somme des coefficients de λL ne valant 1 que si $\lambda = 1$, on a finalement

$$L \text{ est la seule ligne stochastique telle que } LA = L$$

21. On montre par récurrence simple que $LA^k = L$ pour tout k. En particulier, $LA^p = L$. Si, par l'absurde, on avait $\lambda_i = 0$ alors en regardant le i-ème coefficient de $LA^p = L$, on aurait

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (A^p)_{j,i}$$

Les $(A^p)_{j,i}$ étant > 0 et les λ_j positifs non tous nuls, ceci est impossible. On a montré que

$$L \text{ est à coefficients strictement positifs}$$

22. On sait que $\mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathbb{R}^n$. Les espaces $F = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $G = \mathrm{Im}(A - I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A. En notant $u_F \in \mathcal{L}(F)$ et $u_G \in \mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $F \oplus G = \mathbb{R}^n$,

$$\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$$

F est de dimension 1 et $u_F = \mathrm{Id}_F$ donc $\chi_{u_F} = (X - 1)$. Comme $F \cap G = \{0\}$, $u_G - \mathrm{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de χ_{u_G}. De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de χ_u, c'est à dire

$$1 \text{ est valeur propre simple de } A$$

Partie IV: Application au labyrinthe

23. On a $P = UL$ où L est l'unique ligne stochastique telle que $LA = L$, c'est à dire où ${}^tL$ a des coefficients positifs de somme 1 et vérifie ${}^tA{}^tL = {}^tL$, c'est à dire où ${}^tL$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre 1. $(4, 3, 3, 3, 3)$ est un tel vecteur propre et donc $L = \frac{1}{16}(4, 3, 3, 3, 3)$. Finalement,

$$P = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

24. Supposons que S_0 suive une loi convenable. On a alors $S_0 = BS_0$ et, par récurrence, $S_0 = B^k S_0$. En transposant, combinant et passant à la limite, on obtient ${}^tS_0 A = {}^tS_0$. Comme ${}^tS_0$ est stochastique, la question 20 montre que ${}^tS_0 = L$ trouvé ci-dessus.
La réciproque a été traitée en question 4.

Matrices stochastiques

Le seul cas où les S_k ont la même loi est donnée par $\begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}$