École Marrakech Prépas

Devoir Surveillé N°: 5

MATHÉMATIQUES

Durée: 4h 00min

Attention:

- **Les différents parties de l'épreuve doivent se rédiger sur des feuilles de composition séparées.**
- **Il est strictement interdit de quitter la salle pendant le déroulement du DS.**
- **Il est strictement interdit d'emprunter des accessoires de votre collègue.**
- **Garder le silence complet dans la salle.**

MY_PREPA

Informations:

- ***Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les*** $\boxed{\textit{références}}$ ***des questions abordées.***

- ***Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.***

PROBLÈME I

On se donne dans la suite un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Dans la suite les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles discrètes.
Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, la fonction génératrice des moments de X est la fonction numérique de la variable réelle $M_X : t \longmapsto \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$

Partie I: Quelques exemples

1. X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Déterminer M_X , avec précision, dans les cas suivants (on indiquera clairement le domaine de définition de M_X).
   (a) X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
   (b) X suit une loi de géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ ayant même loi qu'une variable aléatoire Y . On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   Soit t un élément du domaine de définition de M_Y . Montrer que $M_{S_n}(t)$ existe et l'exprimer en fonction de $M_Y(t)$.
3. Trouver M_X lorsque X suit une loi binômiale de taille r et de paramètre p.

Partie II: Cas des variables aléatoires discrètes finies

X est une variable aléatoire discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
On suppose que $X(\Omega)$ est de cardinal r et on pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$.

4. Montrer que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout entier naturel k, $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$.
5. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires discrètes finies mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, qui suivent la même loi que X. On note m l'espérance de X et σ son écart-type que l'on suppose strictement positif.
   On pose, pour tout entier naturel non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel non nul t,
   $$M_{S_n^*}(t) = e^{-\frac{mt\sqrt{n}}{\sigma}}\left(M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{S_n^*}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Partie III: Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

Soit X une variable aléatoire discrète réelle infinie, notons I_X l'ensemble des réels t pour lesquels M_X existe.

6. (a) Montrer que, pour tous réels a, b, c tels que $a \leqslant b \leqslant c$ et tout réel x, $e^{bx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$.
   (b) En déduire que I_X est un intervalle contenant 0.
7. Soit Y une variable aléatoire discrète réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la fonction génératrice des moments M_Y de Y.

8. On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle de la forme $]-a,a[$, $(a>0)$. Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X.
   Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in]-a,a[$, $u_n(t)=P(X=x_n)e^{tx_n}$. Soit $\alpha>0$ tel que $[-\alpha,\alpha]\subset]-a,a[$, et soit $\rho\in]\alpha,a[$.
   (a) Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, tout $t\in]-\alpha,\alpha[$ et tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$|u_n^{(k)}(t)|\leqslant P(X=x_n)|x_n|^k e^{\alpha|x_n|}$$
   où $u_n^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction u_n.
   (b) Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $M_k>0$, pour tout $t\in]-\alpha,\alpha[$ et tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$|u_n^{(k)}(t)|\leqslant M_k P(X=x_n)|e^{\rho|x_n|}.$$
   (c) En déduire que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$, et que pour tout $k\in\mathbb{N}, \mathbb{E}\left(X^k\right)=M_X^{(k)}(0)$
9. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

Problème II

1. Pour tout entier n strictement positif, on se donne un réel p_n strictement positif et n variables aléatoires $(X_k)_{k=1}^n$ indépendantes et suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On suppose que (np_n) a une limite finie strictement positive et on pose $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$
   (a) Quelle est la loi de $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$?
   (b) Soit k un entier naturel.
      i. Donner l'expression de $P(S_n=k)$ pour n supérieur ou égal à k
      ii. Que peut-on dire de la limite de (p_n) quand n tend vers l'infini? Étudier la limite de $(1-p_n)^n$ quand n tend vers l'infini.
      iii. Montrer que
      $$P(S_n=k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
   (c) On pose $N_n=\max(X_1,\cdots,X_n)$
      i. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire N_n?
      ii. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}P(N_n=0)$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}P(N_n=1)$
2. Soit λ un réel strictement positif et n un entier strictement positif tels que $0<\lambda\leqslant n$. On considère U une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On a donc $P(U=1)=\frac{\lambda}{n}$, $P(U=0)=1-\frac{\lambda}{n}$ et pour tout $i\in\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, $P(U=i)=0$
   (a) Justifier que pour tout réel positif u, $1-u\leqslant e^{-u}$
   (b) Montrer que
   $$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(U=k)-\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|=\frac{2\lambda}{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)$$
   (c) En déduire que
   $$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(U=k)-\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|\leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$
3. Soit λ un réel strictement positif et n un entier strictement positif tels que $0<\lambda\leqslant n$. Soit Z, U et V trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et que V suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.
   (a) Soit i un entier naturel fixé. Montrer que $\sum_{k\geqslant 0}|(P(U=k-i)-P(V=k-i)|$ est convergente. Puis montrer que
   $$A_i=\sum_{k=0}^{+\infty}|(P(U=k-i)-P(V=k-i)|\leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

(b) Montrer que la série $\sum_{i\geqslant 0} A_i P(Z=i)$ est convergente

(c) Justifier que la famille $\left(\left|\left(P(U=k-i)-P(V=k-i)\right|P(Z=i)\right)_{(k,i)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}\left|\left(P(U=k-i)-P(V=k-i)\right|P(Z=i)=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\left(P(U=k-i)-P(V=k-i)\right|P(Z=i)$$

4. On conserve dans cette question les notations et les hypothèses de la question (3) concernant les variables aléatoires Z, U et V

(a) Montrer que le série de terme général $\left|P(Z+U=k)-P(Z+V=k)\right|$ est convergente

(b) Déduire de la question (3) que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(Z+U=k)-P(Z+V=k)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\left(P(U=k-i)-P(V=k-i)\right|P(Z=i)$$

Puis que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(Z+U=k)-P(Z+V=k)\right|\leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$$

5. Soient $U_1,\cdots,U_n,V_1,\cdots,V_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que pour tout entier $i\in[\![1,n]\!]$, la variable U_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$ et la variable V_i suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

Finalement posons $\Psi_0=\sum_{i=1}^{n}V_i$, $\Psi_n=\sum_{i=1}^{n}U_i$ et pour $j\in[\![1,n-1]\!]$, $\Psi_j=\sum_{i=1}^{j}U_i+\sum_{i=j+1}^{n}V_i$

(a) Montrer que pour tout entier k, on a:

$$\left|P(\Psi_n=k)-P(\Psi_0=k)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\left|P(\Psi_{i+1}=k)-P(\Psi_i=k)\right|$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(\Psi_n=k)-P(\Psi_0=k)\right|\leqslant\frac{2\lambda^2}{n}$$

(c) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de taille n et de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$. Conclure de ce qui précède que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(X=k)-e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right|\leqslant\frac{2\lambda^2}{n}$$

MY_PREPA

Problème I

Partie I: Quelques exemples

1. (a) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors e^{tX} est finie, par le théorème du transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$M_X(t) = \mathbb{P}(X=0) + e^t\mathbb{P}(X=1) = p\left(e^t - 1\right) + 1$$

   (b) On a
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ e^{tk}\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}e^{tk} = \frac{p}{1-p}((1-p)e^t)^k$$
   C'est le terme général d'une série géométrique de raison $(1-p)e^t$ qui converge ssi $e^t < \frac{1}{1-p}$ (tout est positif) i.e. $t < -\ln(1-p)$. C'est la condition pour que $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe. On sait alors calculer la somme :
$$\forall t < -\ln(1-p),\ \mathbb{E}(e^{tX}) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$, les variables $e^{tX_1}, \cdots, e^{tX_n}$ sont indépendantes, car $X_1, \cdots, X_n$ le sont, donc
$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right)$$
Par hypothèse les variables $X_1, \cdots, X_n$ suivent la même loi que Y, alors $\mathbb{E}\left(e^{tX_i}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tY}\right)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et par suite
$$M_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = M_Y(t)^n$$

3. On a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(r,p)$, alors $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$, où $X_1, \cdots, X_r$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p. D'après la question précédente Pour $t \in \mathbb{R}$,
$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \left(p\left(e^t - 1\right) + 1\right)^r$$

Partie II: Cas des variables aléatoires discrètes finies

4. X est finie, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ la variable e^{tX} est finie, en particulier elle admet une espérance, par le théorème du transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{tx_i}\mathbb{P}(X = x_i)$$
Donc M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout entier naturel k,
$$M_X^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{r} x_i^k e^{tx_i}\mathbb{P}(X = x_i)$$
En particulier $M_X^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^{r} x_i^k\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$

MY_PREPA

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^*$. On a $\mathbb{E}(S_n) = nm$ et $\mathbb{V}(S_n) = n\sigma^2$, d'autre part les variables $t\dfrac{X_1 - m}{\sigma\sqrt{n}}, \cdots, t\dfrac{X_n - m}{\sigma\sqrt{n}}$ sont finies et mutullement indépendantes, et par un calcul direct

$$\begin{aligned}
M_{S_n^*}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{n} t\frac{X_i - m}{\sqrt{n}\sigma}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{t\frac{X_i - m}{\sqrt{n}\sigma}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i - m}{\sqrt{n}\sigma}}\right) \quad \text{Par indépendance} \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{tm}{\sqrt{n}}} \mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{tm}{\sigma\sqrt{n}}} \mathbb{E}\left(e^{t\frac{X_i}{\sqrt{n}\sigma}}\right) \\
&= e^{-\frac{tm\sqrt{n}}{\sigma}} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\
&= e^{-\frac{tm\sqrt{n}}{\sigma}} \left(M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n
\end{aligned}$$

(b) Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de M_X donne

$$\begin{aligned}
M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= M_X(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} M_X'(0) + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2 n} M_X''(0) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \mathbb{E}(X) + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2 n} \mathbb{E}(X^2) + \circ\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Puis par composition par ln et le développement $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln(M_X(t)) &= \frac{tm}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2 n}\mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2 n}\mathbb{E}(X)^2 + \circ\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{tm}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2 n}\mathbb{V}(X) + \circ\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{tm}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
M_{S_n^*}(t) &= e^{-\frac{tm\sqrt{n}}{\sigma}} \left(M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n \\
&= e^{-\frac{tm\sqrt{n}}{\sigma}} e^{n\ln(M_X(t))} \\
&= e^{\frac{t^2}{2} + \circ(1)}
\end{aligned}$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{S_n^*}(t) = \dfrac{t}{2}$.

MY_PREPA

Partie III: Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

6. (a) On peut écrire $b = \lambda a + (1-\lambda)c$, avec $\lambda \in [0,1]$, et par convexité de la fonction exponentielle

$$e^{bx} = e^{\lambda ax + (1-\lambda)cx} \leqslant \lambda e^{ax} + (1-\lambda)e^{cx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$$

(b)
- $0 \in I_X$, car $\mathbb{E}\left(e^{0X}\right) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$
- Soit $a, c \in I_X$ tels que $a \leqslant c$. Montrons que $[a,c] \subset I_X$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{bx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$, donc $e^{bX} \leqslant e^{aX} + e^{cX}$, et comme les deux variables positives admettent des espérances, alors la variable positive e^{bX} admet une espérance, donc $b \in I_X$, ainsi l'inclusion $[a,c] \subset I_X$. On déduit I_X est un intervalle de $\mathbb{R}$.

7. Soit $t \in \mathbb{R}$, la variable e^{tX} admet une espérance si, et seulement, si la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{tn}\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ converge. Or la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(\lambda e^t)^n}{n!}$ converge de somme $e^{\lambda e^t}$, donc M_Y est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M_Y(t) = e^{\lambda e^t - \lambda}$$

8. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, l'application $u_n : t \in]-\alpha,\alpha[\longmapsto P(X = x_n)e^{tx_n}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et ,

$$u_n^{(k)}(t) = P(X = x_n)x_n^k e^{tx_n}$$

les inégalités $e^{tx_n} \leqslant e^{|t||x_n|} \leqslant e^{\alpha|x_n|}$ donnent

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \leqslant P(X = x_n)\,|x_n|^k\, e^{\alpha|x_n|}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\psi_k : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^k e^{(\alpha-\rho)x}$ est continue, positive, strictement décroissante sur $\left[\frac{k}{\rho-\alpha}, +\infty\right[$ et strictement croissante sur $\left[0, \frac{k}{\rho-\alpha}\right]$ il existe $M_k = \psi_k\left(\frac{k}{\rho-\alpha}\right) > 0$,

t	0		$\frac{k}{\rho-\alpha}$		$+\infty$
$\psi_k'(t)$		$+$	0	$-$	
ψ_k	0	$\nearrow$	M_k	$\searrow$	0

Pour $k = 0$, la fonction $\psi_k : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{(\alpha-\rho)x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $M_0 = 1$.
Bref pour tout $t \in]-\alpha,\alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leqslant P(X = x_n)\,|x_n|^k\, e^{\alpha|x_n|} = P(X = x_n)\psi_k\left(|x_n|\right) e^{\rho|x_n|} \leqslant M_k P(X = x_n)|e^{\rho|x_n|}.$$

(c)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$
- Soit $k \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{\rho|x_n|} \leqslant e^{\rho x_n} + e^{-\rho x_n}$ et $-\rho, \rho \in]-a,a[\subset I_X$, donc la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(X = x_n)e^{\rho|x_n|}$ converge et, par suite, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment $[-\alpha,\alpha]$ inclus dans $]-a,a[$

Donc, par le théorème de dérivation terme à terme, $M_X = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$, et

$$\forall t \in]-\alpha,\alpha[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k e^{tx_n}\mathbb{P}\left(X = x_n\right)$$

En particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n^k \mathbb{P}\left(X = x_n\right)$ est absolument convergente, donc X admet un moment d'ordre k. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$$

9. Dans ce cas $M_Y : t \longmapsto e^{\lambda e^t - \lambda}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} M_Y'(t) &= \lambda e^t e^{\lambda e^t - \lambda} \\ M_Y'(0) &= \lambda \\ M_Y''(t) &= \lambda^2 e^t e^{\lambda e^t - \lambda} + \lambda e^{2t} e^{\lambda e^t - \lambda} \\ M_Y''(0) &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Alors $\mathbb{E}\left(Y\right) = M_Y'(0) = \lambda$ et par la formule de Huygens kœnig

$$\mathbb{V}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2 = M_Y''(0) - M_Y'(0) = \lambda$$

PROBLÈME II

1. (a) Par stabilité S_n suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p_n. En abrégé $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$

(b) Soit k un entier naturel

i. On a $P\left(S_n = k\right) = C_n^k p_n^k \left(1 - p_n\right)^{n-k}$

ii.
- Par hypothèse $p_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$, donc $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- On a $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\ln(1 - p_n) = -p_n + \circ\left(p_n\right)$, soit

$$n\ln(1 - p_n) = -np_n + \circ\left(np_n\right) = -\lambda + \circ(1)$$

Donc $(1 - p_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}$

iii. On a $P(X_n=k)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}$, avec $C_n^k \sim n^k$ et $(1-p_n)^{n-k}\sim e^{-\lambda}$, il vient

$$P(X_n=k)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\sim \frac{(np_n)^k}{k!}e^{-\lambda}\sim \frac{(\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}$$

(c) i. Les valeurs prises par X_i sont 0 et 1, donc $N_n(\Omega)=\{0,1\}$

ii. Par définition $N_n=\max(X_1,\cdots,X_n)$, donc $[N_n=0]=\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=0]$. Par indépendance, il vient

$$\begin{aligned} P(N_n=0) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=0]\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}P(X_k=0)\\ &= \prod_{k=1}^{n}(1-p_n)\\ &= (1-p_n)^n \end{aligned}$$

Ainsi $P(N_n=0)\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}$ On a $P(N_n=1)=1-P(N_n=0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1-e^{-\lambda}$.

2. (a) Inégalité de convexité

(b) On a tout d'abord $\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}=1-\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)e^{-\frac{\lambda}{n}}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(U=k)-\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| &= \left|P(U=0)-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|+\left|P(U=1)-\frac{\lambda}{n}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|+\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}\\ &= \left|1-\frac{\lambda}{n}-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right|+\left|\frac{\lambda}{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right|+\left(1-\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\\ &= e^{-\frac{\lambda}{n}}-1+\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)+\left(1-\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\\ &= \frac{2\lambda}{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) \end{aligned}$$

(c) D'après la question (2a), on a $1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\leqslant\frac{\lambda}{n}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(U=k)-\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\frac{1}{k!}e^{-\frac{\lambda}{n}}\right| &= \frac{2\lambda}{n}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\\ &\leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

3. (a) $([U=k-i])_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles, donc la série ATP $\sum_{k\geqslant 0}P(U=k-i)$ converge. De même $([V=k-i])_{k\in\mathbb{N}}$ st une famille d'événements deux à deux incompatibles, donc la série ATP $\sum_{k\geqslant 0}P(V=k-i)$ converge. Or $|P(U=k-i)-P(V=k-i)|\leqslant P(V=k-i)+P(U=k-i)$, donc par le critère de comparaison des séries ATP, la série $\sum_{k\geqslant 0}|(P(U=k-i)-P(V=k-i)|$ est convergente.

Remarquons que $\forall k < i$, on a $P(U = k - i) = P(V = k - i) = 0$, et alors

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P(U = k - i) - P(V = k - i)| \\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} |P(U = k - i) - P(V = k - i)| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P(U = k) - P(V = k)| \\ &\leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

(b) $([Z = i])_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles, donc la série ATP $\sum_{i\geqslant 0} P(Z = i)$ converge et comme $A_iP(Z = i) \underset{i\to+\infty}{=} O(P(Z = i))$, alors la série $\sum_{i\geqslant 0} A_iP(Z = i)$ est convergente

(c) • Soit $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geqslant 0} ((P(U = k - i) - P(V = k - i))\, P(Z = i)$ est absolument convergente. En notant $A_i == \sum_{k=0}^{+\infty} |(P(U = k - i) - P(V = k - i)| \leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2$

• D'après la question précédente la série $\sum_{i\geqslant 0} A_i\mathbb{P}(Z = i)$ converge

Donc, d'après le théorème de Fubini, la suite double est sommable et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} |(P(U = k - i) - P(V = k - i)|\, P(Z = i) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |(P(U = k - i) - P(V = k - i)|\, P(Z = i)$$

4. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|P(Z + U = k) - P(Z + V = k)| \leqslant |P(Z + U = k)| + |P(Z + V = k)|$ et puisque les deux variables $Z + U$ et $Z + V$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors les deux familles $([Z + U = k])_{k\in\mathbb{N}}$ et $([Z + V = k])_{k\in\mathbb{N}}$ constituées des événements deux à deux incompatibles d'unions Ω et, par suite, par la σ-additivité les deux séries à termes positifs $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(Z + U = k)$ et $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(Z + U = k)$ convergent. On en déduit que la série de terme général $|P(Z + U = k) - P(Z + V = k)|$ est convergente

(b) Comme $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et les variables Z et U sont indépendantes, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a:

$$\mathbb{P}(Z + U = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = i, U = k - i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = i)\, \mathbb{P}(U = k - i)$$

De même

$$\mathbb{P}(Z + V = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = i, V = k - i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = i)\, \mathbb{P}(V = k - i)$$

Alors, par différence et inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(Z + U = k) - \mathbb{P}(Z + V = k)| &= \left|\sum_{i=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(U = k - i) - \mathbb{P}(V = k - i))\, \mathbb{P}(Z = i)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(U = k - i) - \mathbb{P}(V = k - i)|\, \mathbb{P}(Z = i) \end{aligned}$$

Par la question (3), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} |P(Z + U = k) - P(Z + V = k)| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} |(P(U = k - i) - P(V = k - i)|\, P(Z = i) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |(P(U = k - i) - P(V = k - i)|\, P(Z = i) \end{aligned}$$

D'après la question (3a), on a $\sum_{k=0}^{+\infty} |(P(U=k-i) - P(V=k-i)| P(Z=i) \leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \mathbb{P}(Z=i)$, et la somme $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=i) = 1$ donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} |P(Z+U=k) - P(Z+V=k)| &\leqslant \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} |(P(U=k-i) - P(V=k-i)| P(Z=i) \\
&\leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \sum_{i=0}^{+\infty} P(Z=i) \\
&\leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, alors par télescopage $P(\Psi_n = k) - P(\Psi_0 = k) = \sum_{i=0}^{n-1} (P(\Psi_{i+1} = k) - P(\Psi_i = k))$, puis par inégalité triangulaire

$$|P(\Psi_n = k) - P(\Psi_0 = k)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |P(\Psi_{i+1} = k) - P(\Psi_i = k)|$$

(b) Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $Z_i = \sum_{j=1}^{i} U_k + \sum_{k=i+2}^{n} V_k$. On a Z_i est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $U_{i+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et $V_{i+1} \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. Par indépendance héritée Z_i et U_{i+1} sont indépendantes et Z_i et V_{i+1} le sont aussi. Or $Z_i + U_{i+1} = \Psi_{i+1}$ et $Z_i + V_{i+1} = \Psi_i$, alors d'après la question (4), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} |P(\Psi_{i+1} = k) - P(\Psi_i = k)| &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P(Z_i + U_{i+1} = k) - P(Z_i + V_{i+1} = k)| \\
&\leqslant 2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

On tire donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} |P(\Psi_n = k) - P(\Psi_0 = k)| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} |P(\Psi_{i+1} = k) - P(\Psi_i = k)| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{+\infty} |P(\Psi_{i+1} = k) - P(\Psi_i = k)| \\
&\leqslant \frac{2\lambda^2}{n}
\end{aligned}$$

(c) Soit $\Psi_n = U_1 + \cdots + U_n$, avec $U_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et $Y = \Psi_0 = V_1 + \cdots + V_n$, avec $V_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ et telles que les variables $U_1, \cdots, U_n, V_1, \cdots, V_n$ soient indépendantes, alors par stabilité $\Psi_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et $\Psi_0 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. D'après la question précédente

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|P(X=k) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} |P(\Psi_n = k) - P(\Psi_0 = k)| \leqslant \frac{2\lambda^2}{n}$$