Diagramme de Bode des filtres du premier et second ordre

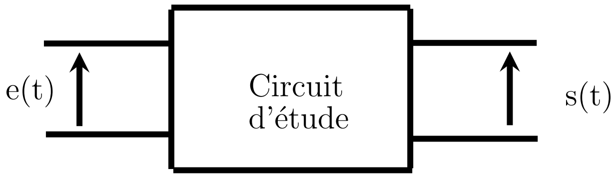
Table des matières

Le filtrage est une forme de traitement de signal qui consiste :

- Sélectionner une partie de l'information utile dans un signal et le transmettre (transmission de quelques fréquences du signal et atténuation des autres)
- Eliminer les fréquences parasites dans un signal
- Un filtre est tout circuit linéaire réalisant l'opération filtrage

1 Fonction de transfert d'un circuit linéaire

1.1 Ordre d'un circuit

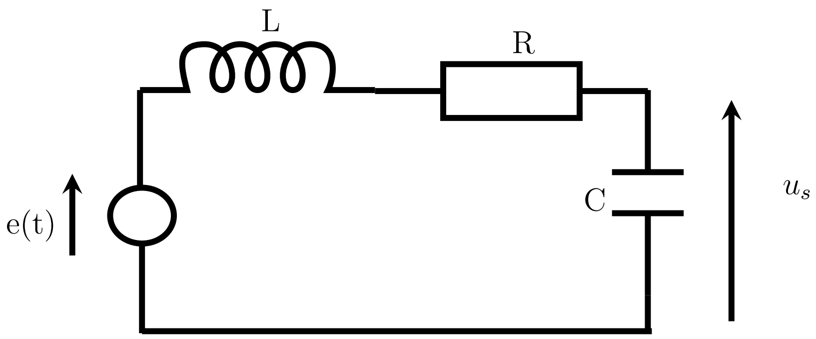


Du fait de la linéarité du système les signaux $e(t)$ et $s(t)$ sont reliées par une équation différentielle de type :

$$\boxed{a_0 s + a_1\frac{ds}{dt} + ... + a_n\frac{d^n s}{dt^n} = b_0 e + b_1\frac{de}{dt} + ... + b_m\frac{d^m e}{dt^m}}$$

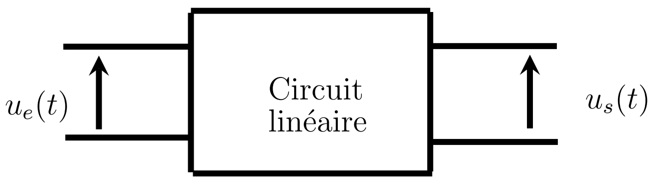
• Définition : On appelle ordre du circuit linéaire,l'ordre de l'équation différentielle linéaire associée c'est-à-dire l'ordre de la dérivation le plus élevé (n si $n > m$)

• Exemples



$e(t) = u_s + Rc\frac{du_s}{dt} + Lc\frac{d^2u_s}{dt^2}$ circuit d'ordre 2

1.2 Fonction de transfert harmonique H



Le signal d'entrée est supposé sinusoidal, du fait de la linéarité du système le signal de sortie est aussi sinusoidal .

On définit la fonction de transfert harmonique par :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}}$$

cette fonction permet de déterminer l'amplitude et le déphasage du signal de sortie $u_s(t)$ par rapport à $u_e(t)$.

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = H(\omega)\exp j\varphi} \text{ avec } \varphi = \varphi_s - \varphi_e$$

$$\boxed{U_s = H(\omega)U_e}$$

$$\boxed{\varphi_s = \varphi_e + \arg(\underline{H}(j\omega))}$$

À partir de l'équation différentielle :
$a_0 s + a_1\frac{ds}{dt} + ... + a_n\frac{d^n s}{dt^n} = b_0 e + b_1\frac{de}{dt} + ... + b_m\frac{d^m e}{dt^m}$
En régime harmonique $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 j\omega + ... + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1 j\omega + ... + a_n(j\omega)^n}}$$

1.3 Stabilité d'un circuit linéaire

1.3.1 Définition

un circuit est dit stable lorsque sa réponse $s(t)$, à un signal d'entrée $e(t)$ restant borné,ne diverge pas quelque soient les pramètres du signal d'entrée et les conditions initiales du système .

1.3.2 Critère de stabilité en régime sinusoidal forcé

Notons $p = j\omega$, la fonction de transfert s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{b_0 + j\omega b_1 + ... + (j\omega)^m b_m}{a_0 + j\omega a_1 + ... + (j\omega)^n a_n} = \frac{b_0 + b_1 p + ... + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n}$$

• Définition : On appelle pôles de fonction $\underline{H}(p)$les racines de l'équation $D(p) = 0$.
Afin que $\underline{H}(p)$ ne diverge pas , il faut que les pôles p_k ne soient pas des imaginaires purs (si non pour ω_k telle que $p_k = j\omega_k$,$\underline{H}$ devient infini).
D'autre part : lorsque $\omega \rightarrow \infty$ $\underline{H}(p) \approx \frac{b_m}{a_n}p^{(m-n)}$
$\underline{H}(p)$ reste fini si $m \leqslant n$

1.3.3 Critère de stabilité en régime libre

- ▶ Système du premier ordre
  En régime libre : $a_0 s + a_1\frac{ds}{dt} = 0 \Rightarrow s(t) = k\exp(-\frac{a_0}{a_1}t)$
  Lorsque $t \rightarrow \infty$ le signal diverge si a_0 et a_1 ont des signes contraires .

  Résultat : Un système du premier ordre est stable si les coefficients a_0 et a_1 de l'équation différentielle ont le même signe .

- Système du sécond ordre
$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$ on montre le système est stable si les coefficients a_0, a_1, a_2 ont le même signe

2 Diagramme de Bode d'un filtre

2.1 Gain en décibel

$\underline{u}_e = U_{em} \exp j\omega t$ et $\underline{u}_s = U_{sm} \exp j\varphi \exp j\omega t$
On appelle gain du filtre $G(\omega)$ tq

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|}$$

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega)}$$

• Définition : On appelle gain en décibels (dB)(grandeurs électriques)

$$\boxed{G(dB) = 20 \log G(\omega)}$$

• Remarque : Pour des grandeurs énergétiques (ou de puissance) le gain en décibels est défini par :

$$\boxed{X(dB) = 10 \log(\frac{p_1}{p_2})}$$

2.2 Diagramme de Bode

2.2.1 Définition

On appelle diagramme de Bode d'un filtre l'ensemble de deux graphes :

- $G(dB) = f(\log \omega)$: courbe de réponse en gain
- $\varphi = f(\log \omega)$: courbe de réponse en phase

On appelle décade un intervalle de $\log \omega$ égale à 1 ($\omega_2 = 10\omega_1$)

2.2.2 Pulsation de coupure ω_c - bande passante à $-3dB$

• La pulsation de coupure ω_c d'un filtre est définie par :

$$\boxed{G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}}$$

• $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}(max) - 3$
• La bande passante d'un filtre est l'intervalle de pulsation qui satisfait à :

$$\boxed{\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leqslant G(\omega) \leqslant G_{max}}$$

2.2.3 Diagramme asymptotique-diagramme réel

Il s'agit de représenter les asymptôtes,associées à $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$,des graphes $G_{dB} = f(\log\omega)$
On déduit ensuite le diagramme réel en faisant intervenir la pulsation de coupure .

3 Filtre d'ordre un

3.1 Filtre passe bas

La fonction de transfert d'un filtre passe bas s'écrit sous la forme :

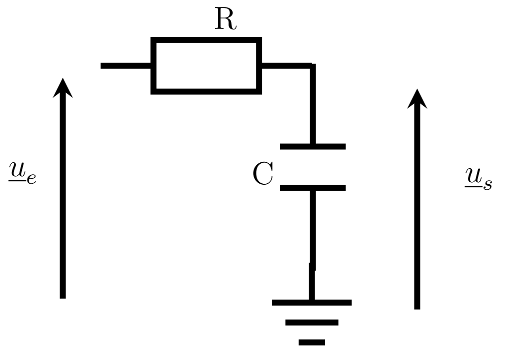
$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}}$$

avec ω_c : la pulsation de coupure

$$\boxed{G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\dfrac{\omega}{\omega_c})^2}}}$$

$$\boxed{\varphi = -\arctan(\frac{\omega}{\omega_c})}$$

• Exemples



$\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{\underline{z}_c}{\underline{z}_R + \underline{z}_c}$

$\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jRc\omega} = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$ donc $\omega_c = \dfrac{1}{Rc}$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2c^2\omega^2}}$$

$G(0) = G_{max} = 1$ et $G(\omega_c) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

la bande passante du filtre passe bas tq : $\dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leqslant G(\omega) \leqslant G_{max}$

donc la bande passante est $[0, \omega_c]$

• Si $\omega >> \omega_c \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}} \approx \dfrac{\omega_c}{j\omega} = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \Rightarrow \dfrac{d\underline{u}_s}{dt} = \omega_c \underline{u}_e$

$$\boxed{\underline{u}_s = \omega_c \int \underline{u}_e dt}$$

Résultat : En haute fréquence le filtre passe bas du premier ordre se comporte comme un intégrateur

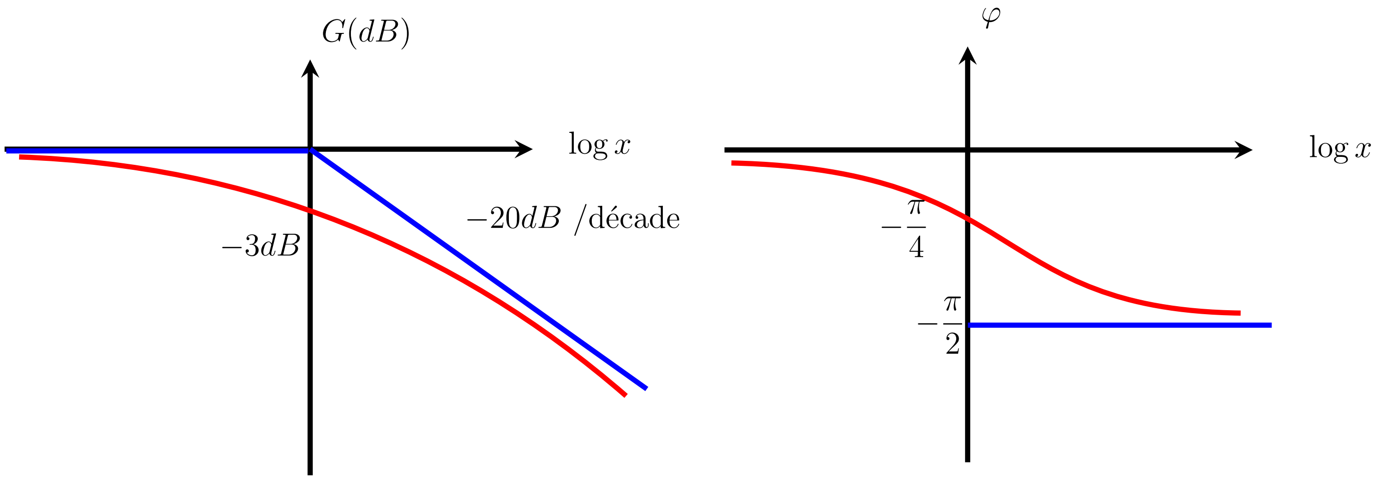
• Diagramme de Bode

$G(dB) = 20\log G = 20\log \dfrac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{\omega}{\omega_c})^2}} = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_c}$

• pour $x \to 0^+$,$G(dB) \to 0$ asymptôte horizontale .
• pour $x \to +\infty$,$G(dB) \to -20\log x$ asymptôte oblique de pente $-20dB$ par décade

$$\varphi = \arg \underline{H}(j\omega) = -\arctan x$$

• pour $x \to 0, \varphi \to 0$
• pour $x \to +\infty, \varphi \to -\dfrac{\pi}{2}$



3.2 Filtre passe haut

La fonction de transfert d'un filtre passe haut s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}}$$

$$\boxed{G = \frac{1}{\sqrt{1+(\dfrac{\omega_c}{\omega})^2}}}$$

$G(\infty) = 1 = G_{max}$ et $G(\omega_c) = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

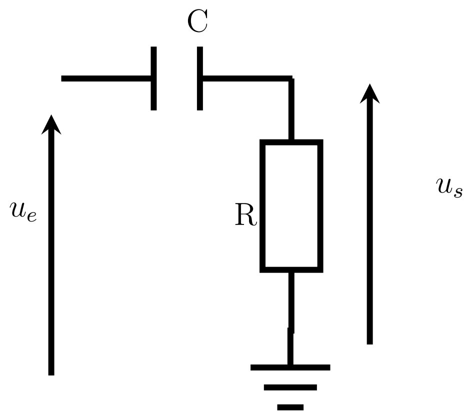
la bande passante du filtre passe haut est : $[\omega_c, \infty]$

• Pour $\omega << \omega_c \Rightarrow \underline{H}(j\omega) \approx j\dfrac{\omega}{\omega_c} = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$

$$\boxed{\underline{u}_s = \frac{1}{\omega_c}\frac{d\underline{u}_e}{dt}}$$

Résultat : En basse fréquence le filtre passe haut du premier ordre se comporte comme un dérivateur

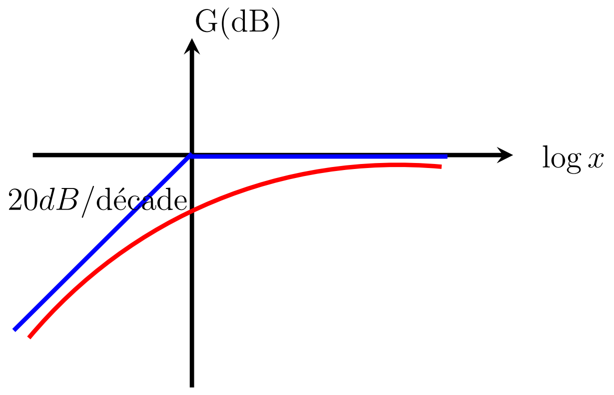
• Exemple

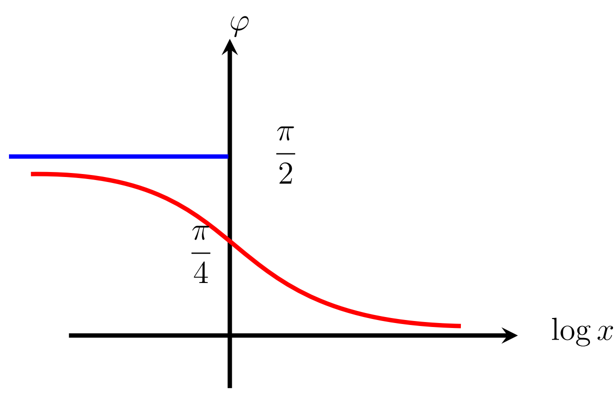


$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{jc\omega R}{1 + jc\omega R} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \omega_c = \frac{1}{Rc}$$

• Diagramme de Bode

- $G(dB) = 20\log\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_c}{\omega})^2}} = -10\log(1 + \frac{1}{x^2})$
- $x \to \infty \Rightarrow G(dB) \to 0$
- $x \to 0 \Rightarrow G(dB) \to 20\log x$
- $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan x$
- $x \to 0 \Rightarrow \varphi \to \frac{\pi}{2}$
- $x \to \infty \Rightarrow \varphi \to 0$





3.3 Déphaseur ou filtre passe tout

La fonction de transfert d'un déphaseur s'écrit :

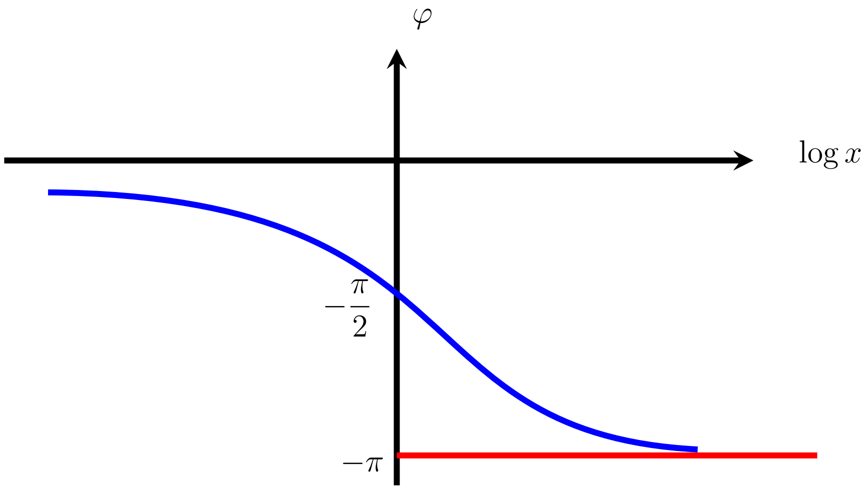
$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}}$$

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = 1}$$

donc le déphaseur n'affecte pas l'amplitude quelque soit la fréquence f .

$$\boxed{\varphi = \arg \underline{H}(j\omega) = -2 \arctan \frac{\omega}{\omega_c} = -2 \arctan x}$$

- $x \to 0 \Rightarrow \varphi \to 0$
- $x \to \infty \Rightarrow \varphi \to -\pi$



4 Filtres d'ordre 2

4.1 Filtre passe bas

4.1.1 Définition

La fonction de transfert d'un filtre passe bas d'ordre 2 s'écrit sous la forme :

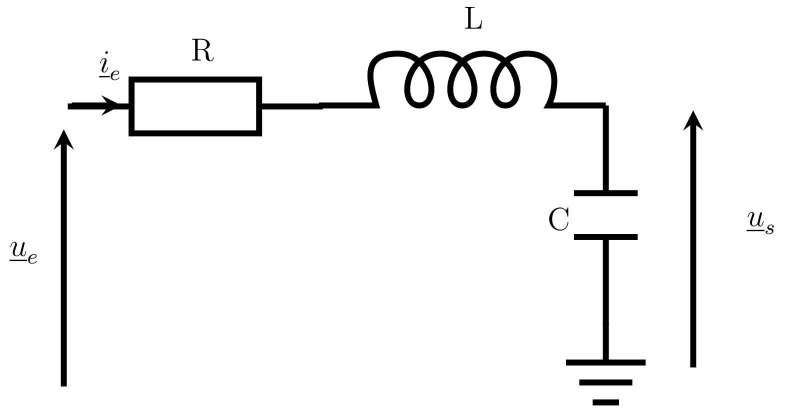
$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}(j\omega) + \omega_0^2}}$$

Q : facteur de qualité du circuit
ω_0 : pulsation propre du circuit
On pose $p = j\omega$

$$\boxed{\underline{H}(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2} = \frac{1}{1 + j\dfrac{x}{Q} + (jx)^2}}$$

avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

- Exemple



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\frac{1}{jc\omega}}{\frac{1}{jc\omega} + jL\omega + R} = \frac{1}{1 + jRc\omega - Lc\omega^2} = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{Rc\omega_0}$

4.1.2 Aspect graphique

Considérons l'équation $p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2 = 0$ avec $p = j\omega$

$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2(\frac{1}{Q^2} - 4)$

- Premier cas : $\Delta > 0 \Rightarrow Q < \frac{1}{2}$

$$\boxed{p_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}$$

$$\boxed{p_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}$$

On pose

$$\boxed{p_1 = -\omega_1 ; p_2 = -\omega_2}$$

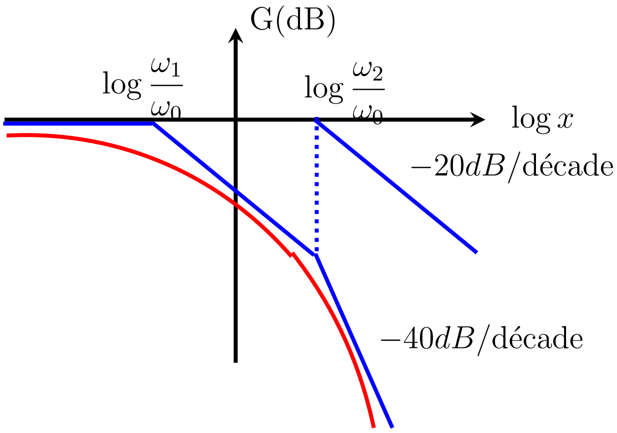
On vérifie que

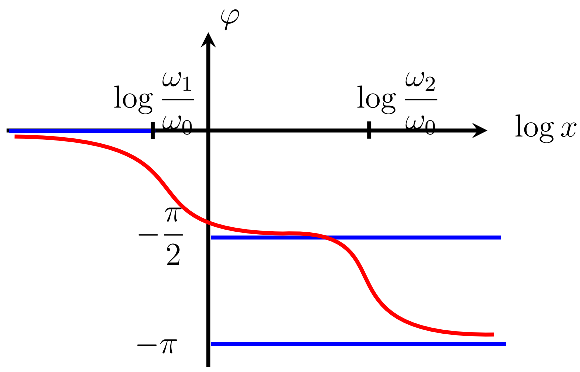
$$\boxed{\omega_1.\omega_2 = \omega_0^2}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_2)} = \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}}$$

$$\boxed{G(dB) = 20\log\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_1})^2}} + 20\log\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_2})^2}} = G_1 + G_2}$$

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arctan(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_1 + \varphi_2}$$

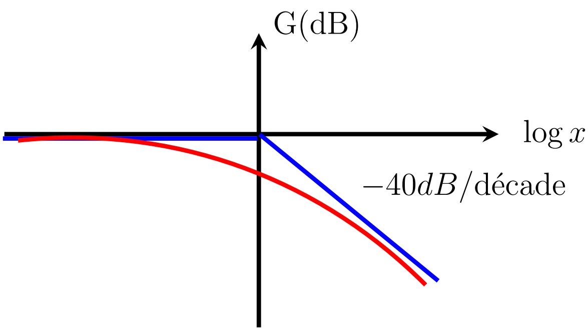


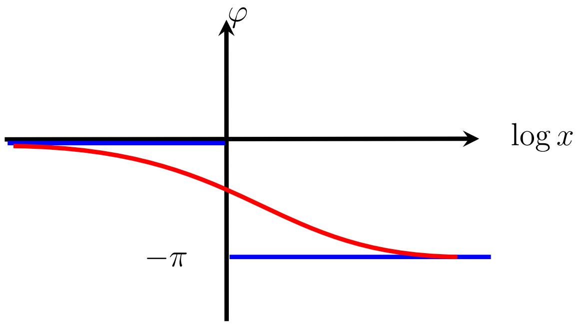


▶ Deuxième cas : $\Delta = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

$$\boxed{G(dB) = 20\log\frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2} = 2G(\text{filtre passe bas})}$$





▶ troisième cas : $\Delta < 0 \Rightarrow Q > 0$: Résonance en tension

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

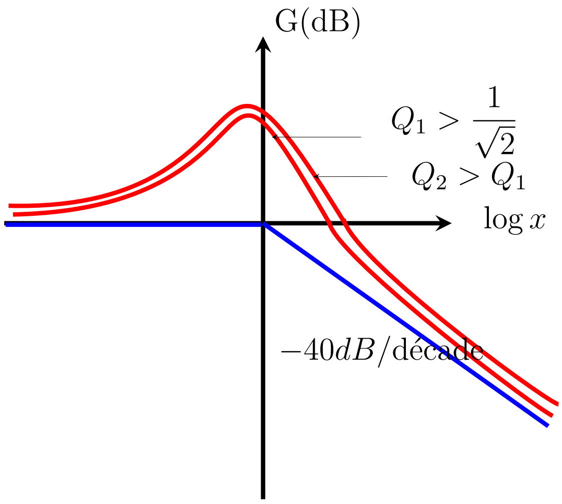
$$\boxed{G(dB) = 20\log\frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + \frac{1}{Q^2}(\frac{\omega}{\omega_0})^2}} = 20\log\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}}$$

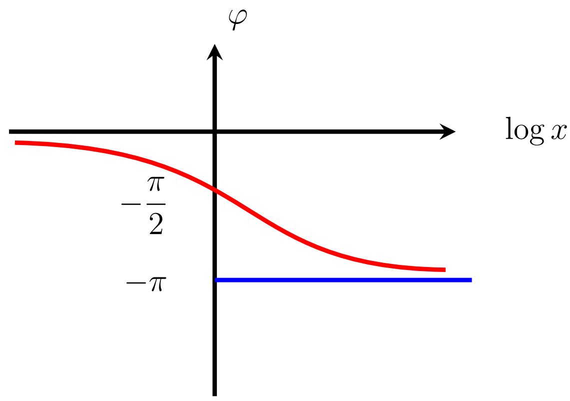
- $\omega << \omega_0$; $G \longrightarrow 0$ asymptôte horizontal
- $\omega >> \omega_0$; $G \longrightarrow -40\log\frac{\omega}{\omega_0}$ asymptôte de pente -40dB /décade
- G présente un maximum si : $\frac{d}{dx}[(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}] = 0 \Rightarrow x_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

$$\boxed{\varphi = -\arctan \frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

- $\omega << \omega_0 \Rightarrow \varphi \to 0$
- $\omega >> \omega_0 \Rightarrow \varphi \to -\pi$





4.2 Filtre passe haut

4.2.1 Fonction de transfert

$$\boxed{\underline{H}(p) = \frac{p^2}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}}$$

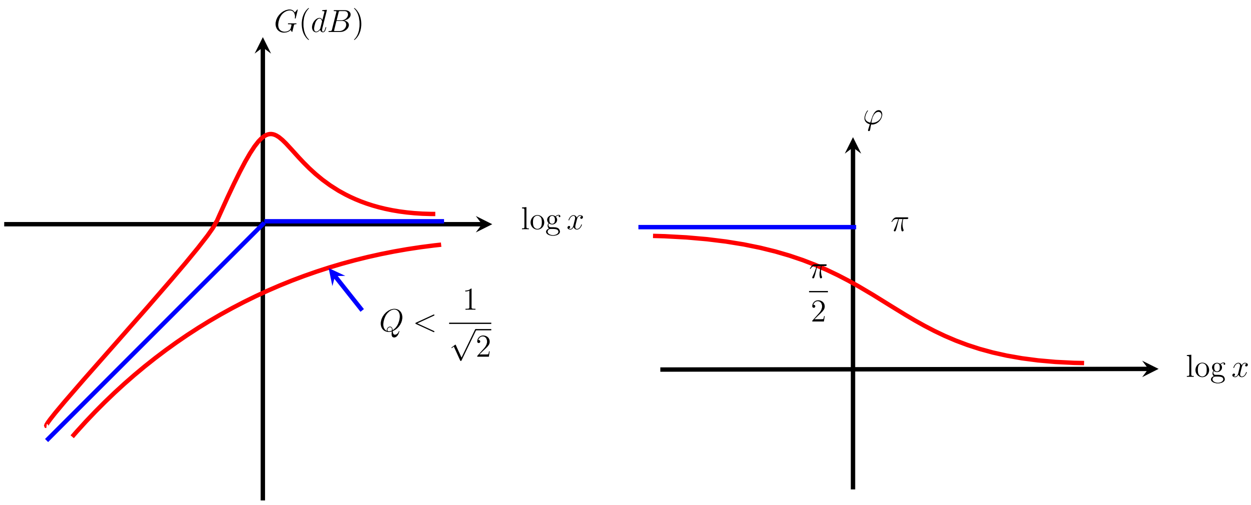
$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega} = \frac{1}{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - j\frac{1}{Q}\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{(jx)^2}{1+j\frac{x}{Q}+(jx)^2}}$$

$$\boxed{G(dB) = 20\log \frac{1}{1-(\frac{\omega_0}{\omega})^2 + \frac{1}{Q^2}(\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

En remplaçant $\frac{\omega}{\omega_0}$ par $\frac{\omega_0}{\omega}$ on retrouve le G du filtre passe bas .

$$\boxed{\varphi = \varphi(\text{filtre passe bas}) + \arg(-\omega^2) = \varphi(\text{filtre passe bas}) + \pi}$$

4.2.2 Aspect graphique



Le filtre passe haut d'ordre deux présente en basse fréquence une atténuation de $-40dB/$décade

4.3 Filtre passe bande d'ordre deux : résonance en intensité

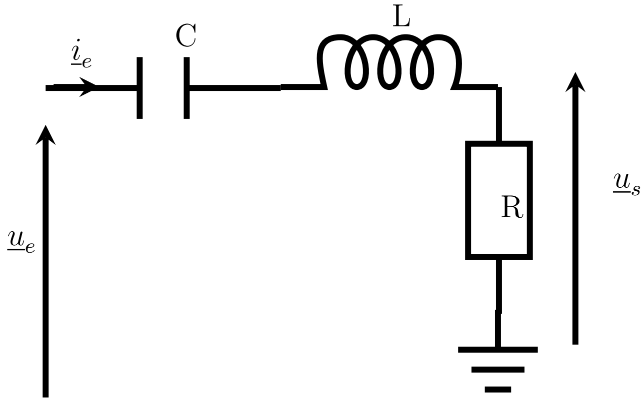
4.3.1 Fonction de transfert

$$\boxed{\underline{H}(p) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}p}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}}$$

$p = j\omega$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0}}}$$

• Exemple



La fonction de transfert s'écrit sous la forme $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R} + \frac{1}{jRc\omega}}$

On introduit les paramètres :

- La pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$
- La pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{Lc}}$
- Le facteur dr qualité $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{Rc\omega_0}$

$$\boxed{\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}}$$

$G = \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}} = \dfrac{U_{sm}}{U_{em}} = \dfrac{RI_m}{U_{em}}$

Il se produit le phénomène de résonance en intensité lorsque I_m passe par un maximum quelque soit le facteur de qualité .

$x_r - \dfrac{1}{x_r} = 0 \Rightarrow x_r = \dfrac{\omega_r}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \omega_r = \omega_0$

- Bande passante

La bande passante correspond à l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ tq :

$x - \dfrac{1}{x} = \pm\dfrac{1}{Q} \Rightarrow \dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega} = \pm\dfrac{1}{Q}$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}}$$

4.3.2 Aspect graphique

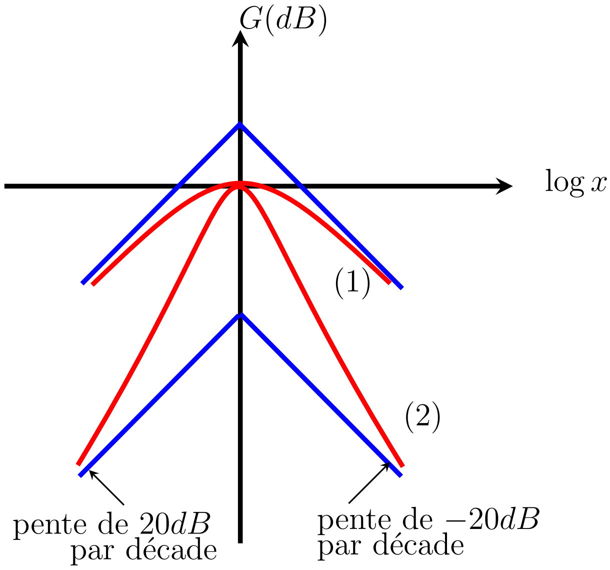
$$\boxed{G(dB) = 20\log G = -10\log[1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2]}$$

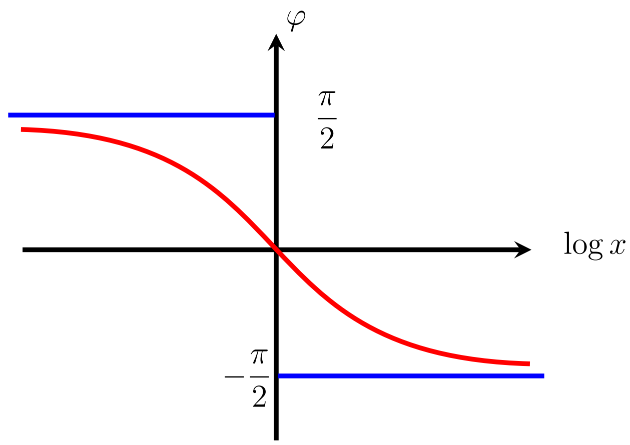
- $x \to 0 \Rightarrow G(dB) \to 20\log\dfrac{x}{Q}$ asymptote de pente $20dB$/décade
- $x \to \infty \Rightarrow G(dB) \to -20\log(xQ)$ asymptote de pente $-20dB$/décade

les asymptotes se coupent en $x = 1 \Rightarrow G(dB) = -20\log Q$

- $Q < 1$: La courbe se trouve au dessous des asymptotes
- $Q > 1$: La courbe se trouve au dessus des asymptotes

$$\boxed{\varphi = -\arctan[Q(x - \frac{1}{x})] = \varphi(\text{filtre passe bas}) + \frac{\pi}{2}}$$





$Q_1 < 1$: courbe au dessous des asymptotes
$Q_2 > 1$: courbe au dessus des asymptotes

Plus Q est grand plus le filtre est selectif

4.4 Filtre coupe bande

la fonction de transfert d'un coupe bande

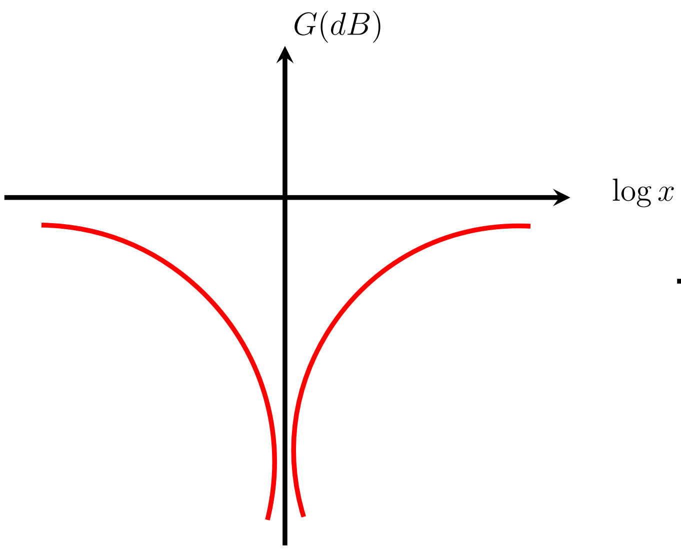
$$\boxed{\underline{H}(p) = \frac{p^2 + \omega_0^2}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}}$$

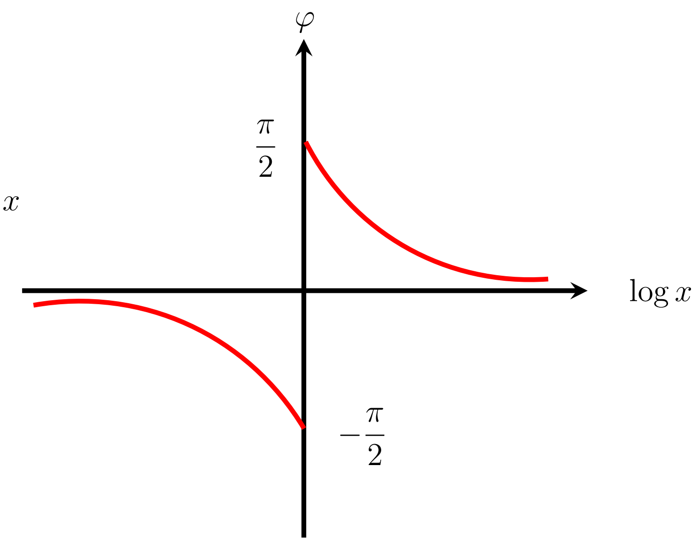
$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}}$$

$$\boxed{G(dB) = 20\log\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}(\frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2})^2}}}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi(\text{passe bas}) + \arg(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

- $\omega_0 = \omega$; $G \to -\infty$
- $\omega << \omega_0$; $G \to 0 \Rightarrow \varphi \to \varphi(p.b)$
- $\omega >> \omega_0$; $G \to 0 \Rightarrow \varphi \to \varphi(p.b) + \pi$



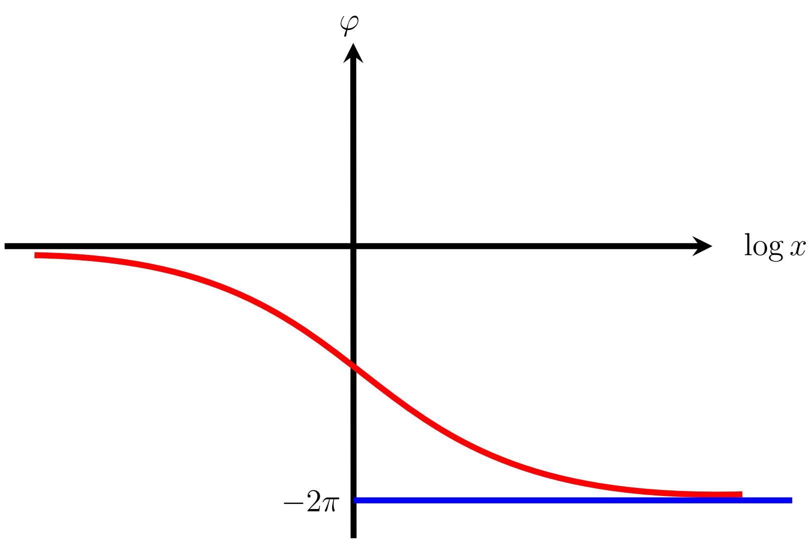


4.5 Déphaseur

$$\boxed{\underline{H}(p) = \frac{p^2 - \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}}$$

$|\underline{H}| = 1$ pas d'atténuation

$$\boxed{\varphi = 2\varphi(\text{passe bas})}$$



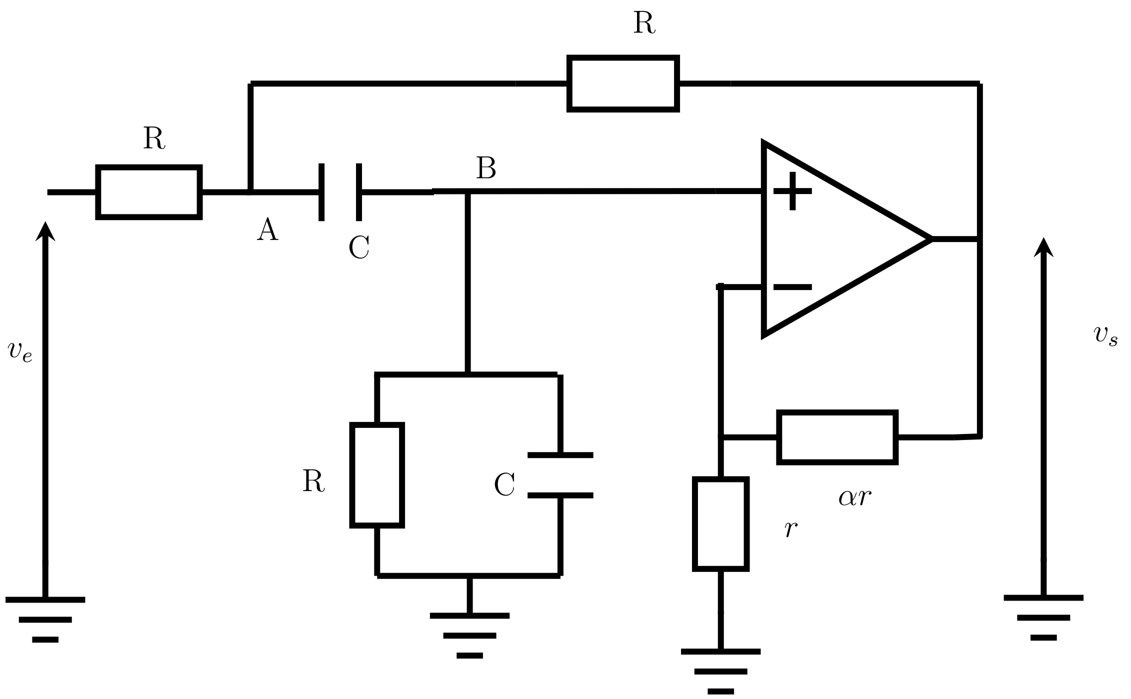
5 Filtres actifs

5.1 Problème des filtres passifs

- Les impédances de sortie et d'entré ne sont pas adaptées
- Le gain en bande passante ne dépasse pas un

- Les filtres actifs utilisent les amplificateurs opérationnels
- Les filtres passifs sont utilisées en hautes fréquences et puissance elevée (limitation des O.A)

5.2 Exemple



Millman en A et B
$v_B = v_+ = v_- = \dfrac{1}{1+\alpha} v_s$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = k\frac{j\dfrac{\omega_0}{Q}\omega}{(j\omega)^2 + j\dfrac{\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2}}$$

$\omega_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{Rc}; Q = \dfrac{\sqrt{2}}{4-\alpha}; k = \dfrac{1+\alpha}{4-\alpha}$