Problème de révision

Convergence
Énoncé

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Dans les questions 1 à 3, λ désigne un paramètre réel strictement positif, inconnu.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $J_n = \lambda S_n$.

1. Calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $E(S_n)$, $V(S_n), E(J_n)$ et $V(J_n)$.
2. (a) Montrer, par récurrence que, la densité f_{J_n} de J_n est donnée par

$$f_{J_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

   (b) A l'aide du théorème de transfert, établir pour tout n supérieur ou égal à 3, l'existence de $E\left(\dfrac{1}{J_n}\right)$ et de $E\left(\dfrac{1}{J_n^2}\right)$, et donner leur valeurs respectives.
3. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et u_α le réel strictement positif tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

   (a) Enoncer le théorème de la limite centrée. En déduire que la variable aléatoire N_n définie par $N_n = \lambda \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

   (b) En déduire que $P([-u_\alpha \leqslant N_n \leqslant u_\alpha]) \sim 1 - \alpha$.

   Dans les questions 4 à 6, on suppose que $\lambda = 1$.
4. On pose pour tou n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$.
   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, on pose : $g_n(x) = \displaystyle\int_0^x F_{T_n}(t)\,dt$ et $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t f_{T_n}(t)\,dt$

   (a) Exprimer $h_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$ et $g_n(x)$.

   (b) Déterminer pour tout réel t, l'expression de $F_{T_n}(t)$ en fonction de t.
   Etablir pour tout n supérieur ou égal à 2, la relation : $g_{n-1}(x) - g_n(x) = \dfrac{1}{n} F_{T_n}(x)$

   (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, pour tout réel x positif ou nul, l'expression de $g_n(x)$ en fonction de $x, F_{T_1}(X), F_{T_2}(x), ..., F_{T_n}(x)$.

   (d) Montrer que $F_{T_n}(x) - 1$ est équivalent à $-ne^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

   (e) Déduire des questions c) et d) l'existence de $E(T_n)$ et montrer que $E(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
5. On veut étudier dans cette question la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(G_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n = T_n - E(T_n)$.
   On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\gamma_n = -\ln n + E(T_n)$ et on admet sans démonstration que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

   (a) Montrer que pour tout x réel et n assez grand, on a : $F_{G_n}(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n} e^{-(x+\gamma_n)}\right)^n$.

   (b) En déduire que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{G_n}(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$

   (c) Montrer que la fonction $F_G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_G(x) = e^{-e^{-(x+\gamma)}}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire G à densité. Conclure.
6. Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F_X strictement croissante. Déterminer la loi de la variable alétoire Y définie par $Y = F_X(X)$.