

Premier problème :
Étude d'un guide d'onde

I- Conducteur parfait

1.

- ▷ La puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur parfait est *nulle*.
- ▷ Les champs \vec{E} et \vec{B} dans un *conducteur parfait* :
 - ▷ Dans un conducteur, la loi d'Ohm (valable dans le domaine des hyperfréquences) s'écrit : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$; la conductivité d'un conducteur parfait est très élevée (*infini*) et \vec{j} reste *fini*, ce qui implique que $\vec{E} = \vec{0}$.
 - ▷ L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ implique que le champ \vec{B} est stationnaire.
1^{ère} conséquence
 - De l'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_o \vec{j} = \vec{0}$, donc \vec{B} est à circulation conservative.
2^{ème} conséquence
 - ce qui implique $\vec{B} = \vec{0}$.

2. Relations de passage

$$\begin{aligned}\vec{E}_2(M_o) - \vec{E}_1(M_o) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2(M_o) - \vec{B}_1(M_o) &= \mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}\end{aligned}$$

Cas où le milieu (1) est un conducteur parfait :

$$\begin{aligned}\vec{E}_2(M_o) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2(M_o) &= \mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}\end{aligned}$$

II- Propagation d'une onde électromagnétique TE_{no} dans un guide d'onde rectangulaire

3. Un ordre de grandeur de la fréquence correspondante aux *hyperfréquences*(¹) est $\nu = 1 \text{ GHz}$ et la longueur d'onde correspondante $\lambda = 30 \text{ cm}$.

4. Pour une fréquence $\nu = 1 \text{ GHz}$ et pour $\gamma \sim 10^8 \text{ S}$ (ordre de grandeur pour l'argent), la profondeur $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \gamma \pi \nu}} \approx 1,59 \mu\text{m}$: la profondeur de pénétration est de l'ordre de *micromètre*, ce qui justifie le choix de couche mince.

5. L'expression du champ électrique associé à une onde plane s'écrit :

$$\vec{E} = (E_{ox} \vec{e}_x \pm E_{oy} \vec{e}_y) \exp i(\omega t - kz) \quad , \text{ avec } E_{ox} \text{ et } E_{oy} \text{ deux constantes}$$

Un tel champ ne satisfait pas les conditions aux limites imposées par le guides (annulation de $E_x = \vec{E} \cdot \vec{e}_x$ en $y = 0$ et $y = a$ et de la composante $E_y = \vec{E} \cdot \vec{e}_y$ en $x = 0$ et $x = b$) : la propagation de telle onde dans le guide est, donc, impossible.

¹ Le domaine des *hyperfréquences* est tel que : $300 \text{ MHz} \leq \nu < 300 \text{ GHz}$.

6. Équations de Maxwell dans le guide :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{B} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Équations de propagation dans le guide : de l'identité

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}$$

on en déduit (en utilisant les équations de Maxwell) :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

7.

- L'onde se propage suivant $Oz \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_n(M, t) = 0$: ondes transverse électrique.
- Structure : L'onde n'est pas plane, mais elle est stationnaire et progressive.
- État de polarisation : l'onde est polarisée *rectilignement* suivant Oy .

8. $\operatorname{div} \vec{E}_n(M, t) = \frac{\partial E_n(M, t)}{\partial y} = 0$: l'équation de Maxwell-Gauss est, donc, vérifiée.

9. Relation de dispersion

$$\begin{aligned}\vec{E}_n(M, t) &= E_{on} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp i(\omega t - kz) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \Delta \vec{E}_n(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_n(M, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Rightarrow -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} &= 0 \quad \text{ou} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\end{aligned}$$

- La propagation de telle onde n'est possible que si k est réel : soit pour $k^2 > 0 \Rightarrow \omega > \omega_c = \frac{n\pi c}{a}$
- si $\omega < \omega_c$, le vecteur d'onde k devient imaginaire pure et l'amplitude de $\vec{E}_n(M, t)$ s'amortie en exponentielle : l'onde est dite *évanescence* (ou *onde stationnaire exponentiellement amortie*), on aura, alors, *atténuation* de l'onde et ne peut pas se propager dans le guide étudié.

10. On pose $\omega_{nc} = \omega_c = \frac{n\pi c}{a} = 2\pi\nu_{nc}$

10.1. Pour que l'onde puisse se propager à la fréquence ν_o dans le guide étudié, cette fréquence doit au moins prendre la valeur de la plus petite des fréquences de coupure $\nu_{nc} = \frac{\omega_{nc}}{2\pi}$. Soit pour $n = 1$:

$$\nu_o > \nu_{1c} = \frac{\omega_{1c}}{2\pi} = \frac{c}{2a} \Rightarrow a > \frac{c}{2\nu_o} = 1,63 \text{ cm}$$

10.2. Pour que l'onde puisse se propager dans le guide à la fréquence ν_o selon le seul mode $n = 1$, il faut exclure la propagation selon les modes $n \geq 2$. Soient $\nu_{2c}, \nu_{3c}, \nu_{4c}, \dots$ les fréquences de coupure correspondantes à ces modes $n = 2, n = 3, n = 4, \dots$. Ces fréquences vérifient l'inégalité : $\nu_{2c} < \nu_{3c} < \nu_{4c} < \dots$. La condition est par conséquent $\nu_o \leq \nu_{2c} = \frac{c}{a}$, d'où :

$$\frac{c}{2\nu_o} = 1,63 \text{ cm} < a \leq \frac{c}{\nu_o} = 3,26 \text{ cm}$$

11. Le phénomène de *dispersion* peut s'interpréter en soulignant que la propagation résulte de l'interférence *constructive* entre les différentes ondes réfléchies par les parois (*conductrices*), cette condition d'interférence constructive est sensible à la fréquence.

12.

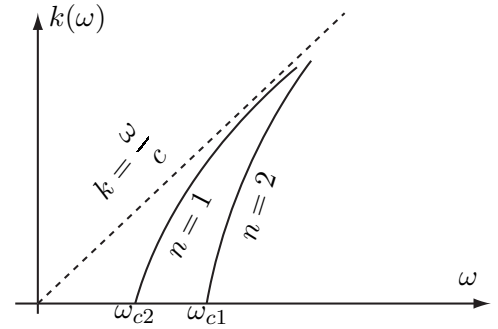
$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

$$\omega > \omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a}$$

Commentaire :

Dans le domaine des hautes fréquences $\omega \gg \omega_c$ (*petites longueurs d'onde* devant $2a$), $k = \frac{\omega}{c}$: on peut considérer que l'onde se propage dans un milieu illimité (*infini*).

Dans le cas où $\lambda \gg 2a$, k peut être négligeable et l'onde devient *stationnaire* dans le guide.

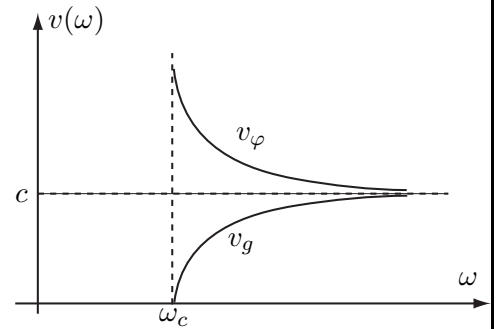


13.

- Vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$
- Vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$

Commentaire :

Dans le domaine des hautes fréquences $\omega \gg \omega_c$ (*petites longueurs d'onde* devant $2a$), $k = \frac{\omega}{c}$: la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g sont voisines de c (*vitesse de la lumière dans le vide*) et le guide n'est plus *dispersif*. On retrouve la structure d'une onde *plane* dans le guide.



14. L'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E}_n(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}_n(M, t)}{\partial t} = -i\omega \vec{B}_n(M, t)$$

D'autre part :

$$\text{rot } \vec{E}_n(M, t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_n(M, t) = -\frac{\partial \vec{E}_n(M, t)}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{E}_n(M, t)}{\partial x} \vec{e}_z$$

Soit :

$$\vec{B}_n(M, t) = E_{on} \left[-\frac{k}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{e}_x + i \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{e}_z \right] \exp i(\omega t - kz)$$

$\vec{k} \cdot \vec{B}_n(M, t) \neq 0$: l'onde n'est pas *transverse* magnétique.

15.

- En $x = 0$ et $x = a$, $E_{ny} = 0$: la continuité de la composante tangentielle de \vec{E}_n est vérifiée.
- En $x = 0$ et $x = a$, $B_{nx} = 0$: la continuité de la composante normale de \vec{B}_n est vérifiée.
- En $y = 0$ et $y = b$, $0 = 0$: résultat trivial !

Les champs $\vec{E}_n(M, t)$ et $\vec{B}_n(M, t)$ sont, alors compatibles avec les relations de passage sur les parois du guide.

16. On utilise le résultat des questions 2. et 15.

- ▷ En $x = 0$: $\underline{\sigma}_1 = \varepsilon_o \underline{E}_{ny}(x = 0, t) = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 0$
- ▷ En $x = a$: $\underline{\sigma}_3 = \varepsilon_o \underline{E}_{ny}(x = a, t) = 0 \Rightarrow \sigma_3 = 0$

17. On utilise le résultat de la question 2.

▷ En $y = 0$: $\underline{\sigma}_2 = \varepsilon_o \underline{E}_{ny}(y = 0, t) = \varepsilon_o E_{no} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp i(\omega t - kz)$

▷ En $y = a$: $\underline{\sigma}_4 = -\varepsilon_o \underline{E}_{ny}(y = a, t) = -\varepsilon_o E_{no} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp i(\omega t - kz)$

▷ Soit : $\sigma_2 = -\sigma_4 = \varepsilon_o E_{no} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz)$

18. On utilise le résultat de la question 2.

▷ En $x = 0$: $\vec{J}_{s1} = \underline{J}_{s1y} \vec{e}_y + \underline{J}_{s1z} \vec{e}_z$ et $n_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_x$

$$\vec{B}_n(x = 0, t) = \mu_o \vec{J}_{s1} \wedge \vec{e}_x = \mu_o (\underline{J}_{s1z} \vec{e}_y - \underline{J}_{s1y} \vec{e}_z) = i \frac{n\pi}{a\omega} E_{no} \vec{e}_z \exp i(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \underline{J}_{s1z} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{J}_{s1y} = i \frac{n\pi}{a\omega\mu_o} E_{no} \exp i(\omega t - kz) \quad \text{ou} \quad \vec{J}_{s1} = \frac{n\pi}{a\omega\mu_o} E_{no} \sin(\omega t - kz)$$

▷ En $x = a$: $\vec{J}_{s3} = \underline{J}_{s3y} \vec{e}_y + \underline{J}_{s3z} \vec{e}_z$ et $n_{1 \rightarrow 2} = -\vec{e}_x$

$$\vec{B}_n(x = a, t) = -\mu_o \vec{J}_{s3} \wedge \vec{e}_x = \mu_o (-\underline{J}_{s3z} \vec{e}_y + \underline{J}_{s3y} \vec{e}_z) = i \frac{n\pi}{a\omega} E_{no} \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \vec{e}_z \exp i(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \underline{J}_{s3z} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{J}_{s3y} = i \frac{n\pi}{a\omega\mu_o} E_{no} (-1)^n \exp i(\omega t - kz)$$

$$\text{Soit} \quad \vec{J}_{s3} = -\frac{n\pi}{a\omega\mu_o} E_{no} (-1)^n \sin(\omega t - kz) = (-1)^{n+1} \vec{J}_{s3}$$

19. On utilise le résultat de la question 2.

▷ En $y = 0$: $\vec{J}_{s2} = \underline{J}_{s2x} \vec{e}_x + \underline{J}_{s2z} \vec{e}_z$ et $n_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_y$

$$\begin{aligned} \vec{B}_n(y = 0, t) &= \mu_o \vec{J}_{s2} \wedge \vec{e}_y = \mu_o (-\underline{J}_{s2z} \vec{e}_x + \underline{J}_{s2x} \vec{e}_z) \\ &= E_{on} \left[-\frac{k}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{e}_x + i \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{e}_z \right] \exp i(\omega t - kz) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{J}_{s2x} = i \frac{n\pi}{a\omega\mu_o} E_{no} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp i(\omega t - kz) \quad \text{et} \quad \underline{J}_{s2z} = \frac{k}{\omega\mu_o} E_{no} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp i(\omega t - kz)$$

$$\text{Soit} \quad \vec{J}_{s2} = \frac{E_{no}}{\omega\mu_o} \left[i \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x + k \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \right]$$

▷ En $y = b$: $\vec{J}_{s4} = \underline{J}_{s4x} \vec{e}_x + \underline{J}_{s4z} \vec{e}_z$ et $n_{1 \rightarrow 2} = -\vec{e}_y$

$$\begin{aligned} \vec{B}_n(y = b, t) &= -\mu_o \vec{J}_{s4} \wedge \vec{e}_y = \mu_o (\underline{J}_{s4z} \vec{e}_x - \underline{J}_{s4x} \vec{e}_z) \\ &= E_{on} \left[-\frac{k}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{e}_x + i \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{e}_z \right] \exp i(\omega t - kz) = \mu_o \vec{J}_{s2} \wedge \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{J}_{s4} = -\underline{J}_{s2} \quad \text{ou} \quad \vec{J}_{s4} = -\vec{J}_{s2}$$

20.

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = -\omega \varepsilon_o E_{no} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) = -\frac{\omega}{\mu_o c^2} E_{no} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \quad (\text{équation II-1})$$

$$\frac{\partial J_{s2x}}{\partial x} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{E_{on}}{\omega\mu_o} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \quad (\text{équation II-2})$$

$$\frac{\partial J_{s2z}}{\partial z} = \frac{k^2}{\omega\mu_o} E_{on} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \quad (\text{équation II-3})$$

En utilisant la relation de dispersion établie en 9. et en remplaçant dans l'équation II-3 qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial J_{s2z}}{\partial z} = \frac{1}{\omega \mu_o} \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] E_{on} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin(\omega t - kz) = -\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \frac{\partial J_{s2x}}{\partial x}$$

$$\text{soit : } \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} + \frac{\partial J_{s2x}}{\partial x} + \frac{\partial J_{s2z}}{\partial z} = 0 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_{s2}$$

- ▷ Cette équation traduit, localement, la conservation de la charge électrique.
- ▷ En $x = 0$ et $x = a$, les lignes de courant sont parallèles aux lignes de champ et l'orientation dépend de n . Les lignes de courant sont à divergence nulle.

21. Les lignes de courant convergent en un point et divergent en un autre : il sont, donc, à divergence *non nulle* contrairement aux courants permanents qui le sont.

22. La ligne d'équation $x = \frac{a}{2}$ et $y = b$ correspondent aux lignes d'amplitudes maximale.

23. densité d'énergie électromagnétique

$$\begin{aligned} u_{em} &= \frac{1}{2} \varepsilon_o E_n^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_o \frac{B_n^2}{\mu_o} \\ &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_o + \frac{k^2}{\mu_o \omega^2} \right) E_{on}^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \cos^2(\omega t - kz) + \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \frac{E_{on}^2}{\mu_o \omega^2} \cos^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin^2(\omega t - kz) \\ \langle \overline{u_{em}} \rangle &= \frac{1}{4} \varepsilon_o E_{on}^2 \end{aligned}$$

24. Vecteur de Poynting

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(M, t) &= \vec{E}_n(M, t) \wedge \vec{B}_n(M, t) = \frac{E_{ny}}{\mu_o} (B_{nz} \vec{e}_x - B_{nx} \vec{e}_z) \\ \Pi_x &= -\frac{n\pi}{a \omega \mu_o} E_{no}^2 \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \\ \Pi_z &= \frac{k}{\omega \mu_o} E_{no}^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \cos^2(\omega t - kz) \\ \langle \overline{\Pi_z} \rangle &= \frac{k}{4 \omega \mu_o} E_{no}^2 \quad \text{et} \quad \langle \overline{\Pi_x} \rangle = 0 \end{aligned}$$

le vecteur de Poynting caractérise le transport de l'énergie électromagnétique suivant la direction de propagation (Oz dans ce cas) : $\langle \overline{\vec{\Pi}} \rangle = \langle \overline{\Pi_z} \rangle \vec{e}_z$.

25. Soit S une section droite du guide traversée par l'énergie électromagnétique :

► Première expression :

$$\delta W_{em} = \langle \overline{u_{em}} \rangle S v_e dt$$

► deuxième expression :

$$\delta W_{em} = \langle \overline{\vec{\Pi}} \rangle S dt$$

Soit :

$$v_e = \frac{\langle \overline{\vec{\Pi}} \rangle}{\langle \overline{u_{em}} \rangle} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g$$

L'énergie électromagnétique se propage, dans le guide, à la vitesse de groupe v_g .

26. Si les parois du guide ne sont pas des conducteurs parfaits, il y aura atténuation de l'énergie électromagnétique grâce à la dissipation par effet Joule dans les parois métallique : ce qui entraîne l'échauffement des parois du guide.

III- Réflexion et interférences dans un guide hyperfréquence

27. L'onde dans le guide est la superposition d'une onde *incidente* émise par la source et d'une onde *réfléchie* issue de la réflexion de l'onde incidente à l'extrémité du guide : l'onde résultante est stationnaire.

28. on utilisant la relation de dispersion établie en 9. , on peut écrire :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k^2 c^2 + \frac{\pi^2 c^2}{a^2}} = c \sqrt{\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{4a^2}}$$

D'autre part : $\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow \lambda_g > \lambda$

On constate que : $\vec{E}(x, z + \lambda_g = \frac{2\pi}{k}, t) = \vec{E}(x, z, t) : \lambda_g = \frac{2\pi}{k} \neq \lambda$ est, donc, une *période spatiale* caractéristique de l'onde dans le guide (ce qui justifié la nomination *longueur d'onde* de l'onde dans le guide).

29. $V(z) = A \left| E_y(x = \frac{a}{2}, z, t) \right|^2 = A \left| E'_y(x = \frac{a}{2}, z, t) + E''_y(x = \frac{a}{2}, z, t) \right|^2$

29.1.

- La tension :

$$\begin{aligned} V(z) &= AE_o^2 [\exp i(\omega t - kz) + r \exp i(\omega t + kz)] [\exp -i(\omega t - kz) + r^* \exp -i(\omega t + kz)] \\ &= AE_o^2 [1 + r^2 + r \exp i(2kz + \theta) + r \exp -i(2kz + \theta)] \\ &= AE_o^2 [1 + r^2 + 2r \cos(2kz + \theta)] \\ &= AE_o^2 \left[1 + r^2 + 2r \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda_g} z + \theta \right) \right] \end{aligned}$$

- la période : $V(z + \Lambda) = V(z) \Rightarrow \Lambda = \frac{\lambda_g}{2}$

- Les extremums de l'amplitude :

$$V_M = AE_o^2 (1 + r^2 + 2r) = AE_o^2 (1 + r)^2 \quad \text{et} \quad V_m = AE_o^2 (1 + r^2 - 2r) = AE_o^2 (1 - r)^2$$

- La position des extremums :

▷▷ z_M est tel que $V(z_M) = V_M$, soit pour $\cos(2kz_M + \theta) = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$; soit :

$$z_M = \frac{\lambda_g}{2} \left(p - \frac{\theta}{2\pi} \right)$$

▷▷ z_m est tel que $V(z_m) = V_m$, soit pour $\cos(2kz_m + \theta) = (2p + 1)\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$; soit :

$$z_m = \frac{\lambda_g}{2} \left(p + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi} \right)$$

- La différence : $d = |z_M - z_m| = \frac{\lambda_g}{4}$

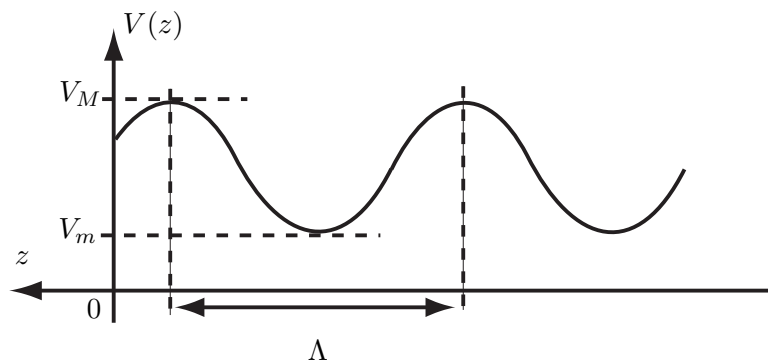
29.2.

$$\eta = \frac{V_m}{V_M} = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 \Rightarrow \frac{1-r}{1+r} = +\sqrt{\eta} > 0 \quad \text{ou} \quad r = \frac{1-\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}$$

29.3. Applications numériques $\lambda_g = 2(d_{m2} - d_{m1})$

$$r = 0,45 \quad , \quad \lambda_g = 46,38 \text{ mm} \quad , \quad \nu = 9,21 \text{ GHz} \quad , \quad \theta = 3,65 \text{ rad} = 209^\circ$$

29.4.



29.5. $\nu \cdot \lambda_g = \frac{2\pi\nu}{k} = \frac{\omega}{k} = v_\phi$: le produit s'identifie à la vitesse de phase.

Application numérique : $\nu \cdot \lambda_g \approx 4,27 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Commentaire :

$v_\phi > c$, ce n'est pas surprenant puisque cette vitesse de phase ne caractérise pas le transport de l'énergie électromagnétique (voir 25.).

Deuxième problème :
Spectrogoniomètre à réseau

I- Goniomètre

1. le goniomètre est un instrument de mesure des angles de rayons optiques !!.

2. Le terme - *achromatique* - signifie que les déviations subies par les rayons sont indépendantes de leur longueur d'onde.

On utilise des lentilles *achromatiques* dans un spectromètre afin d'étudier le seul effet du système dispersif utilisé à ce propos.

3.

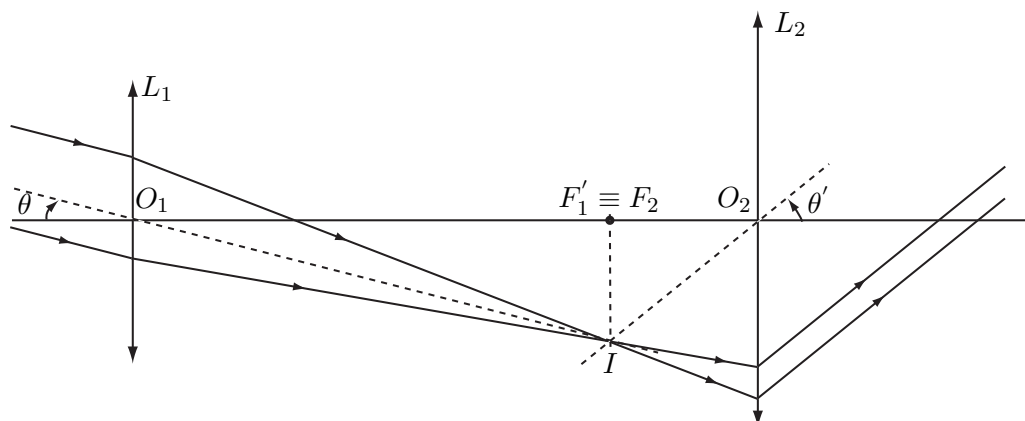
3.1.

- ◇ Objectif : composant optique placé au côté de l'objet.
- ◇ Oculaire : composant optique placé au côté de l'œil pour voir l'objet.

3.2.

- ◇ L'intérêt du réglage à l'infini d'une lunette est d'avoir une vision normale (*sans accommodation*).
- ◇ Les étapes du réglage :
 - ◇ On éclaire le réticule et on agit sur le tambour de réglage de façon à avoir une image nette du réticule à travers l'oculaire.
 - ◇ on place, ensuite, un miroir plan contre l'objectif et on règle la position de ce dernier afin de former l'image du réticule dans le plan du réticule (*méthode d'autocollimation*).
 - ◇ On finalise le réglage de telle sorte que le réticule et son image soient de même taille (*grandissement = unité*).
- ◇ l'encombrement total de la lunette : $O_1O_2 = f'_1 + f'_2 = 170 \text{ mm}$

3.3.



Le grossissement : $G = \frac{\theta'}{\theta}$. Dans les conditions de Gauss :

$$\theta' \approx \frac{F_2 I}{f_2} \quad \text{et} \quad \theta \approx -\frac{F_2 I}{f_1} \quad \Rightarrow \quad G = -\frac{f_1'}{f_2} = -3,25$$

4.

4.1. Le collimateur est destiné à éclairer le prisme au par un faisceau de lumière parallèle, et donc sous une *incidence fixée* sur le prisme.

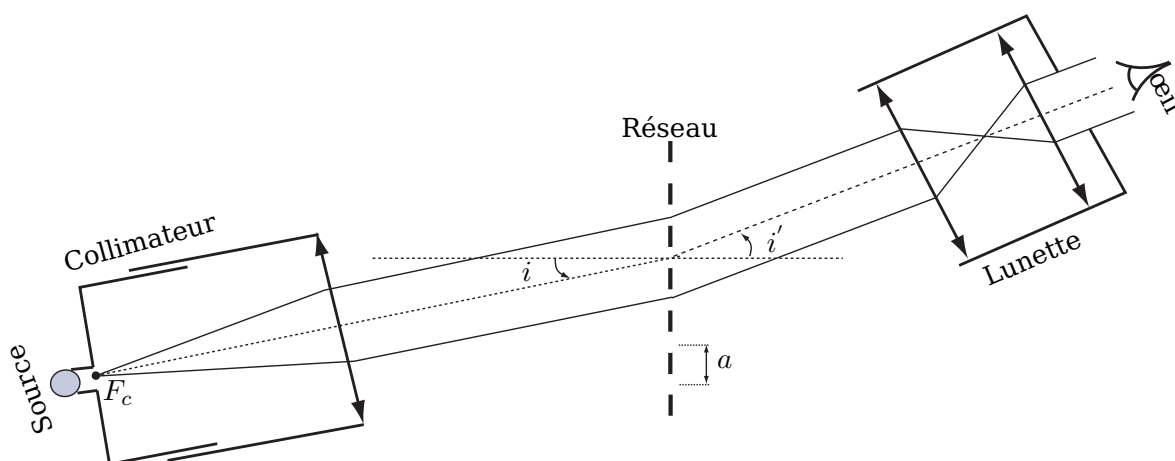
4.2. Les étapes du réglage du collimateur :

- On éclaire (à l'aide d'une lampe spectrale) la fente du collimateur et on observe son image à travers la lunette.
- On agit sur le tambour de réglage de distance fente-objectif jusqu'à observer l'image nette de la fente : image se forma à l'infini !
- On règle la largeur de la fente jusqu'à ce qu'on observe une sorte de trait fin !

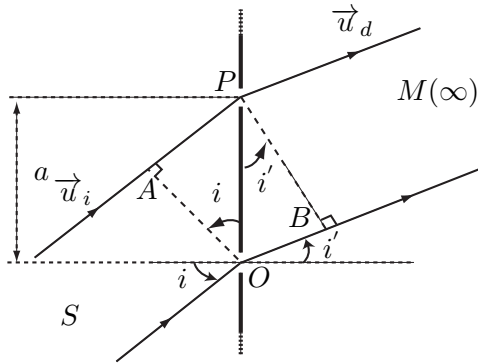
II- Réseau par transmission éclairé par un faisceau parallèle

5. Relation fondamentale

5.1.



5.2.



- différence de marche entre deux radiations successives :

$$\delta(M) = (SOM) - (SPM) = OB - AP = \overrightarrow{OP} \cdot (\vec{u}_d - \vec{u}_i)$$

$$\delta(M) = a \sin i' - a \sin i = a(\sin i' - \sin i)$$

- différence de phase entre deux radiations successives :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin i' - \sin i)$$

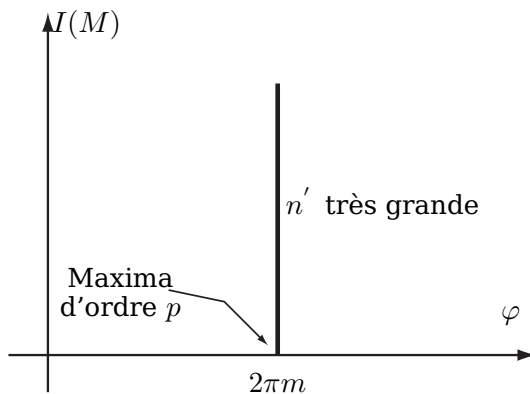
- Puisqu'on travaille dans les conditions de Gauss, les lentilles présentent un stigmatisme approché : l'objectif n'introduit, donc, pas de déphasage supplémentaire (φ est conservée).

5.3. L'interférence est constructive si les radiations sont en phase ($\varphi = 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$); soit :

$$\sin i'_p = \sin i + p \frac{\lambda}{a}$$

- Les directions i'_p correspondent aux maximums principaux d'intensité $I(M)$.
- Les directions i'_p dépendent de la longueur d'onde λ : le réseau est un système *dispersif*.

5.4.



influence de la largeur des fentes

6. Minimum de déviation

6.1. Angle de déviation = angle entre l'émergence et l'incidence.

$$D = i'_p - i$$

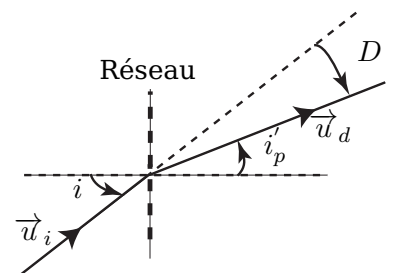
6.2. Au minimum de déviation : $\left(\frac{dD}{di}\right)_m = 0$

Lorsque l'incidence i varie, la déviation D passe par un minimum D_m dans un ordre p donné.

$$\left(\frac{dD}{di}\right)_{D_m} = 0 \Leftrightarrow di = di'_p$$

De la relation fondamentale (de dispersion) du réseau on a :

$$di \cos i = di'_p \cos i'_p \Rightarrow \cos i = \cos i'_p$$



Seule la solution $i'_{pm} = -i_m$ est acceptable physiquement (correspond à une déviation) :
 $D_m = 2i'_{pm} = -2i_m$

$$\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = \frac{p\lambda}{2a}$$

6.3. Positions relatives du réseau, des rayons incidents et émergent, au minimum de déviation :



7. Mesure du pas du réseau et d'une longueur d'onde

7.1. On fait tourner le support du réseau autour de la verticale, et on suit le faisceau dévié jusqu'à ce qu'il commence à rebrousser chemin : c'est le minimum de déviation.

7.2. Pour le spectre d'ordre 2 :

$$\sin\left(\frac{D_{mi}}{2}\right) = \frac{\lambda_i}{a} \Rightarrow a = \frac{\lambda_i}{\sin\left(\frac{D_{mi}}{2}\right)} = 1,67 \mu m$$

Le nombre de fentes par millimètre : $n' = \frac{1}{a} = 599$ fentes par millimètre.

7.3. Longueur d'onde de la raie verte du mercure

$$\sin\left(\frac{D_{mv}}{2}\right) = \frac{\lambda_v}{a} \Rightarrow \lambda_v = a \sin\left(\frac{D_{mv}}{2}\right) = 551,96 nm$$

8. Pouvoir dispersif

8.1. Cas du prisme P

$$n_p = C_1 + \frac{C_2}{\lambda^2}$$

$$\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n_p \sin\left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right) \frac{dD_m}{2} = dn_p \sin\left(\frac{A}{2}\right) = -2 \frac{C_2}{\lambda^3} d\lambda \sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\mathcal{P}_p = \left| \frac{dD_m}{d\lambda} \right| = 4 \frac{C_2}{\lambda^3} \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right)} = 4 \frac{C_2}{\lambda^3} \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\sqrt{1 - n_p^2 \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

Application numérique : $\mathcal{P}_p = 0,56 \times 10^{-3} rad.nm^{-1}$

8.2. Cas du réseau R

$$\sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = \frac{p\lambda}{2a} = \frac{p\lambda n'}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{D_m}{2}\right) \frac{dD_m}{2} = \frac{d\lambda}{2} p n'$$

$$\mathcal{P}_R = \left| \frac{dD_m}{d\lambda} \right| = \frac{|p| n'}{\cos\left(\frac{D_m}{2}\right)} = \frac{|p| n'}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{D_m}{2}\right)}} = \frac{|p| n'}{\sqrt{1 - \left(\frac{p n' \lambda}{2}\right)^2}}$$

\mathcal{P}_R est de même sens de variation de n' et de p .

Application numérique : $\mathcal{P}_R(p=1) = 0,61 \times 10^{-3} \text{ rad.nm}^{-1}$

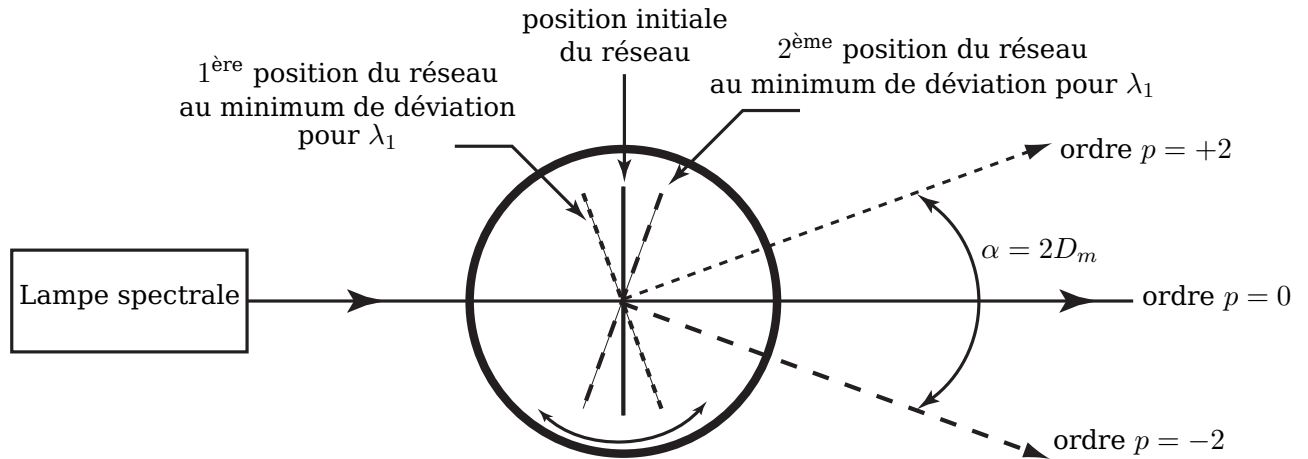
8.3.

$$\mathcal{P}_R > \mathcal{P}_P$$

Le réseau est, donc, plus performant que le prisme dans le cadre d'étude du problème.

9. Cas d'une source bichromatique

9.1.



9.2.

$$\sin\left(\frac{D_{m1}}{2}\right) = \frac{\lambda_1}{a} \Rightarrow \lambda_1 = a \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 589,01 \text{ nm}$$

9.3. $\Delta D_m = \frac{d}{f'_1}$

$$\frac{dD_m}{d\lambda} \approx \frac{\Delta D_m}{\Delta\lambda} \text{ dans l'approximation où } \Delta\lambda \ll \lambda$$

Soit :

$$\frac{\Delta D_m}{\Delta\lambda} = \frac{2}{a \cos\left(\frac{D_{m1}}{2}\right)} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{a\Delta D_m}{2} \cos\left(\frac{D_{m1}}{2}\right) = \frac{ad}{2f'_1} \cos\left(\frac{D_{m1}}{2}\right)$$

Application numérique : $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm} \Rightarrow \lambda_2 = 589,61 \text{ nm}$

10. Application : spectre et composition d'une étoile

10.1.

10.2.

- Le spectre d'émission est le spectre obtenu lorsqu'un corps émet un rayonnement : toutes les raies du spectre optique y sont présentes.
- Le spectre d'absorption est le spectre obtenu lorsqu'un rayonnement traverse une substance : le spectre contient des minima (absence de certains raies).

10.3. L'étoile Véga possède une atmosphère à cause des minima présents dans son spectre dues à l'absorption par les molécules qui constituent cette atmosphère.

10.4. Les spectre de l'étoile est un spectre *continu*, alors que celui d'un atome est un spectre *discret*.

10.5. λ_{max} se trouve dans le domaine de l'ultra-violet. La puissance rayonnée varie en $\frac{1}{\lambda^4}$: elle est, donc, plus élevée dans l'ultra-violet que dans l'infra-rouge, c'est pour cela l'étoile apparaît bleutée !

10.6. Loi de déplacement de Wien : $\lambda_{max} \times T = 2,9 \mu m K$; soit : $T_{Véga} = 9539,47 K$.

10.7. D'après la relation de Rydberg pour une transition $m \rightarrow n$:

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

La série de Balmer correspond aux transitions sur le niveau d'énergie $n = 2$, donc :

$$\lambda_{mn} = \frac{4m^2}{R_H(m^2 - 4)}$$

soient :

✓ $\lambda_{32} = 655,76 nm \approx \lambda'_1$ avec une incertitude relative de 0,00093.

✓ $\lambda_{42} = 485,75 nm \approx \lambda'_2$ avec une incertitude relative de 0,00080.

✓ $\lambda_{52} = 433,7 nm \approx \lambda'_3$ avec une incertitude relative de 0,00099.

Les trois raies correspondent, donc, à la série de raies de Balmer.

10.8. On pourra répondre à cette question de deux manières :

- Véga est une étoile de type B car d'après la question 10.6. , $T_{Véga} = 9539,47 K$ est comprise entre 7000 K et 10000 K.
- Véga est une étoile de type B car les trois minima de l'intensité spectrale (λ'_1 , λ'_2 et λ'_3) correspondent aux raies présentes dans le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène seul (434 nm, 486 nm et 656 nm) : l'étoile Véga est constitué de l'hydrogène seul.

10.9. On pourra expliquer cela par la présence de multitude de constituant dans l'atmosphère de l'étoile qui absorbent certaines radiations émise par cette dernière !!