# Chapitre 2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

## Plan du chapitre

En math sup, nous avons découvert la notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel quand $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les notions rencontrées ou presque se généralisent à un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque. Un tout petit nombre de résultats peuvent poser problème si par exemple, $\mathbb{K}$ est un corps du type $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+)$, $p$ premier.

Par exemple, si $s$ est une symétrie d'un espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on montre en math sup que $E = \text{Ker}\,(s - Id_E) \oplus \text{Ker}\,(s + Id_E)$. La démonstration débute de la façon suivante : pour $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}\,(s - Id_E) \cap \text{Ker}\,(s + Id_E) \Rightarrow s(x) = x \text{ et } s(x) = -x \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Malheureusement cette démonstration ne fonctionne plus si $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{F}_2$ ou encore le corps $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+,\times)$ car dans ce corps, « $2$ égale $0$ » ou plutôt $\widehat{2} = \widehat{0}$ ou aussi $\widehat{1} + \widehat{1} = \widehat{0}$. L'égalité $2x = 0$ (qui doit se lire $\widehat{2}\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ et qui vient de $\left(\widehat{1} + \widehat{1}\right) = \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$) n'entraine plus l'égalité $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Pour éviter ce genre de problème, le programme officiel de math spé se place donc dans la situation où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou même $\left\{a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$. Donc, dorénavant,

**$\mathbb{K}$ est un sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$.**

# 1 Rappels de math sup et compléments d'algèbre linéaire

## 1.1 Matrices semblables

Définition 1. Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. La matrice $A$ est semblable à la matrice $B$ si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

**Théorème 1.** La relation « $A$ est semblable à $B$ » est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration .

**Réflexivité.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice $I_n$ est inversible et $A = I_n^{-1}AI_n$. Donc, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}AP$ ce qui montre que $A$ est semblable à $A$.

**Symétrie.** Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Supposons $A$ semblable à $B$. Alors, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que $A = PBP^{-1}$ ou encore $A = \left(P^{-1}\right)^{-1} BP^{-1}$. La matrice $P' = P^{-1}$ est une matrice inversible telle que $A = P'^{-1}BP'$ et donc $B$ est semblable à $A$.

**Transitivité.** Soit $(A,B,C) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^3$. Supposons $A$ semblable à $B$ et $B$ semblable à $C$. Alors, il existe $(P,P') \in (GL_n(\mathbb{K}))^2$ telle que $B = P^{-1}AP$ et $C = P'^{-1}BP'$. On en déduit que $C = P'^{-1}P^{-1}APP' = (PP')^{-1}A(PP')$. La matrice $P'' = PP'$ est une matrice inversible telle que $C = P''^{-1}AP''$ et donc $A$ est semblable à $C$. ❏

**Commentaire.** On peut donc dire dorénavant : les matrices $A$ et $B$ sont semblables.

Rappelons maintenant sans démonstration le lien avec les changements de base.

**Théorème 2.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $E$.
Soient $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. Alors $B = P^{-1}AP$ ou aussi $A = PBP^{-1}$.

Ainsi, deux matrices $A$ et $B$ semblables sont aussi les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases d'un même espace de dimension finie. Deux matrices semblables ont donc de nombreuses propriétés en commun.

**Théorème 3.** Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose que $A$ et $B$ sont semblables. Alors,

- $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.
- $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ et $\det(A) = \det(B)$.

Si deux matrices ont même trace et/ou même déterminant et/ou même rang, ces deux matrices ne sont pas nécessairement semblables. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont toutes deux une trace égale à $2$, un déterminant égal à $1$ et un rang égal à $2$. Pourtant, ces deux matrices ne sont pas semblables car **une matrice semblable à $I_2$ est nécessairement égale à $I_2$**. De manière générale, une matrice semblable à $\lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$, est égale à $\lambda I_n$ ou encore la classe de similitude d'une matrice scalaire est un singleton.

**Théorème 4.** Soit $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose que $A$ et $B$ sont semblables. Alors, $A$ est inversible si et seulement si $B$ est inversible.

**Démonstration .** Si $A$ et $B$ sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$. Par suite, $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B) \neq 0$ et donc $A$ est inversible si et seulement si $B$ est inversible.

❑

**Théorème 5.** Soit $(A, B, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ B^k = P^{-1}A^kP.$$

Si de plus, $A$ est inversible, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ B^k = P^{-1}A^kP.$$

**Démonstration .** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $A$ et soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $\mathscr{B}'$ la base de $\mathbb{K}^n$ de matrice $P$ dans la base $\mathscr{B}$. Donc, $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. D'après les formules de changement de base,

$$B = P^{-1}AP = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f).$$

Mais alors, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$B^k = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f))^k = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\left(f^k\right) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^k\right)P = P^{-1}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^k P = P^{-1}A^kP,$$

ces égalités restant vraies pour $k \in \mathbb{Z}$ en cas d'inversibilité.

❑

## 1.2 Matrices diagonales. Matrices triangulaires

### 1.2.1 Matrices diagonales

Définition 2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$A$ est une matrice **diagonale** si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\ \ (i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$.
La matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ se note $\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ou encore $\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
L'ensemble des matrices diagonales de format $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

Une matrice scalaire c'est-à-dire une matrice de la forme $\lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$, est une matrice diagonale d'un type particulier. Tout élément de $\mathscr{M}_1(\mathbb{K}$ est une matrice diagonale.

On a les formules :

**Théorème 6.**
- $\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} + \mathrm{diag}\,(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \mathrm{diag}\,(\lambda_i + \mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ;
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\ \mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \mathrm{diag}\,(\lambda\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ;
- $\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \times \mathrm{diag}\,(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \mathrm{diag}\,(\lambda_i\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left(\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)^k = \mathrm{diag}\,\left(\lambda_i^k\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

De plus,

**Théorème 6bis.**
$\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$.

Dans ce cas, $\left(\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)^{-1} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \left(\mathrm{diag}\,(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)^k = \mathrm{diag}\,\left(\lambda_i^k\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

**Théorème 7.**
- $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ de dimension $n$. Une base de $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{i,i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
- $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, . , \times)$.

**Théorème 8.** Le déterminant d'une matrice diagonale est égale aux produit de ses coefficients diagonaux :

$$\det\left(\operatorname{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i.$$

### 1.2.2 Matrices triangulaires

DÉFINITION 3. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$A$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $(i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$ (resp. $(i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$).
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de format $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$).

Une matrice diagonale est en particulier une matrice triangulaire supérieure ou aussi une matrice triangulaire inférieure. Plus précisément, $\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$.

**Théorème 9.** Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

**DÉMONSTRATION.** Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & & & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \ldots & \ldots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $A$ et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Soit $\mathscr{B}' = (e_n, \ldots, e_1)$. $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (car par exemple, $\mathscr{B}'$ est une famille de rang $n$) et

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{n,n} & a_{n,n-1} & \ldots & \ldots & a_{n,1} \\ 0 & a_{n-1,n-1} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{2,2} & a_{2,1} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{1,1} \end{pmatrix} = B.$$

La matrice $A$ est semblable à la matrice $B$ et $B$ est triangulaire supérieure.

❏

**Théorème 10.**
- $\mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$) est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Une base de $\mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$) est $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ (resp. $(E_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$).
- $\mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{T}_{n,i}(\mathbb{K})$) est une sous-algèbre de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$.

Le théorème précédent signifie en particulier qu'une combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) et un produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure). Contentons-nous de revérifier qu'un produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices triangulaires supérieures.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$. Le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de la matrice $AB$ est

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}.$$

Dans cette somme, si $k < i$, $a_{i,k} = 0$ et donc $a_{i,k}b_{k,j} = 0$ et si $k \geqslant i$, alors $k > j$ et donc $b_{k,j} = 0$ puis $a_{i,k}b_{k,j} = 0$. Finalement, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,k}b_{k,j} = 0$ puis $c_{i,j} = 0$.

Notons qu'avec un raisonnement analogue, si $i = j$, $c_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = 0 + \ldots + 0 + a_{i,i}b_{i,i} + 0 + \ldots + 0 = a_{i,i}b_{i,i}$ et donc

**Théorème 11.**

• $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$.

• $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

• Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

• $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$ et dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

## 1.3 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

DÉFINITION 4.

**1)** Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. $f$ est nilpotent si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $A$ est nilpotente si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

**Exemples.**

• Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(P) = P^{(k)}$.
En particulier, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $f^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$. Donc, $f^{n+1} = 0$ et $f$ est nilpotent. Par contre, $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui n'est pas nilpotent.

• L'endomorphisme nul est nilpotent.

• Soit $A = E_{1,2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geqslant 2$. $A \neq 0$ mais $A^2 = E_{1,2} \times E_{1,2} = 0$. Donc $A$ est nilpotente. De même, soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. $B \neq 0$ mais

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc $B$ est nilpotente. ❑

Soit alors $f$ un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Par définition, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$. L'ensemble $\mathscr{E} = \left\{k \in \mathbb{N}^* / \ f^k = 0\right\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ (et même de $\mathbb{N}^*$). On sait alors que $\mathscr{E}$ admet un plus petit élément. On peut donc énoncer (la démarche étant identique pour une matrice) :

DÉFINITION 5.

**1)** Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f$ un endomorphisme nilpotent de $E$. L'**indice de nilpotence** (ou nilindice) de $f$ est $p = \text{Min}\left\{k \in \mathbb{N}^* / \ f^k = 0\right\}$.

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. L'**indice de nilpotence** (ou nilindice) de $A$ est $p = \text{Min}\left\{k \in \mathbb{N}^* / \ A^k = 0\right\}$.

L'endomorphisme nul est nilpotent d'indice 1. Les endomorphismes nilpotent d'indice supérieur ou égal à 2 sont les endomorphismes nilpotents non nuls.

Le théorème suivant est immédiat :

**Théorème 12.** Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$. Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$.
Soient $f$ un endomorphisme de $E$ puis $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors, $f$ est nilpotent si et seulement si $A$ est nilpotente.
De plus, si $f$ est nilpotent, $f$ et $A$ ont le même indice de nilpotence.

**Théorème 13.** Soit $(A,B,P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Alors, $A$ est nilpotente si et seulement si $B$ est nilpotente et dans ce cas, $A$ et $B$ ont même indice de nilpotence.

Dit autrement, deux matrices semblables sont simultanément nilpotentes ou pas, et si elles sont nilpotentes, elles ont le même indice de nilpotence.

DÉMONSTRATION. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = P^{-1}A^kP$. Puisque $P$ et $P^{-1}$ sont inversibles, $P$ et $P^{-1}$ sont simplifiables. Par suite, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$B^k = 0 \Leftrightarrow P^{-1}A^kP = 0 \Leftrightarrow A^k = 0,$$

ce qui démontre le résultat.

❏

**Exemple.** Soient $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$N_1^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})(E_{1,2} + E_{2,3}) = E_{1,3} \neq 0$ puis $N_1^3 = (E_{1,2} + E_{2,3})E_{1,3} = 0$. La matrice $N_1$ est nilpotente d'indice 3.
$N_2^2 = (E_{1,2} + E_{3,4})(E_{1,2} + E_{3,4}) = 0$. La matrice $N_2$ est nilpotente d'indice 2.
Les matrices $N_1$ et $N_2$ ne sont pas semblables (mais ont même trace, même déterminant, même rang, ...) ❏

L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent ou une matrice nilpotente est entièrement caractérisé par le théorème suivant :

**Théorème 14.**

**1)** Soit $f$ un endomorphisme nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $k < p$, $f^k \neq 0$, et pour tout $k \geqslant p$, $f^k = 0$.

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $k < p$, $A^k \neq 0$, et pour tout $k \geqslant p$, $A^k = 0$.

DÉMONSTRATION. Par définition de $p$, si $k < p$, $f^k \neq 0$. D'autre part, toujours par définition de $p$, $f^p = 0$. mais alors, pour $k \geqslant p$, $f^k = f^{k-p} \circ f^p = f^{k-p} \circ 0 = 0$.

La démarche est analogue pour une matrice.

❏

**Exercice 1.**

**1)** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$ puis $f$ un endomorphisme nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.
  **a)** Il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est libre.
  **b)** $p \leqslant n$ (ce qui équivaut à $f^n = 0$).

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $p \leqslant n$ (ce qui équivaut à $A^n = 0$).

**Solution 1.**

**1) a)** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$ puis $f$ un endomorphisme nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.

$f^{p-1}$ n'est pas l'endomorphisme nul et donc, il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
Supposons par l'absurde la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ liée. Il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0.$$

Soit $k = \text{Min}\{i \in [\![0, p-1]\!] / \ \lambda_i \neq 0\}$. Par définition de $k$,

$$\sum_{i=k}^{p-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0.$$

On prend l'image des deux membres par $f^{p-1-k}$ (avec $p-1-k \geqslant 0$). En tenant compte de $f^i = 0$ pour $i \geqslant p$, il reste

$$\lambda_k f^{p-1}(x_0) = 0.$$

Mais cette égalité est impossible car $\lambda_k \neq 0$ et $f^{p-1}(x_0) \neq 0$. Donc, la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est libre.

**b)** Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p \leqslant n$.

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $A$. $f$ est nilpotent d'indice $p$. D'après 1), $p \leqslant n$.

---

**Exercice 2.** Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Solution 2.** Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,3}$. Alors, $N^2 = E_{1,3} \neq 0$ puis $N^3 = 0$. $N$ est nilpotente d'indice 3.

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ une éventuelle solution. Alors, $M^6 = N^3 = 0$ et donc $M$ est nilpotente, de format 3. Mais alors $M^3 = 0$ puis $M^4 = 0$. Ceci contredit $M^4 = N^2 \neq 0$. Donc, l'équation proposée n'a pas de solution dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

---

## 1.4 Sommes de plusieurs sous-espaces

On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ puis $F_1$, ..., $F_p$, $p$ sous-espaces vectoriels de $E$ ($p \geqslant 2$).

Définition 6. La somme des sous-espaces $F_1$, ..., $F_p$ est l'ensemble des sommes d'un vecteur de $F_1$, d'un vecteur de $F_2$ ... et d'un vecteur de $F_p$ ou encore $F_1 + \ldots + F_p = \{x_1 + \ldots + x_p, \ (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p\}$.

La somme $F_1 + \ldots + F_p$ peut se noter $\sum_{k=1}^{p} F_k$. Si $p = 1$, $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est tout simplement $F_1$.

**Théorème 15.** $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.

**Démonstration .**

Chaque $F_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, contient $0$ et donc $0 = 0 + \ldots + 0$ est dans $\sum_{i=1}^{p} F_i$.

Soient $((x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_p)) \in (F_1 \times \ldots \times F_p)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

$$\lambda(x_1 + \ldots + x_p) + \mu(y_1 + \ldots + y_p) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + \ldots + (\lambda x_p + \mu y_p) \quad (*).$$

Mais chaque $F_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, est un sous-espace vectoriel de $E$ et donc, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda x_i + \mu y_i \in F_i$. Mais alors, $(*)$ montre que $\lambda(x_1 + \ldots + x_p) + \mu(y_1 + \ldots + y_p)$ est dans $F_1 + \ldots + F_p$.

Ainsi, $\sum_{i=1}^{p} F_i$ contient $0$ et est stable par combinaison linéaire. Donc, $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Autre démonstration. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc}\prod_{i=1}^{p} F_i & \to & E\\ (x_1,\ldots,x_p) & \mapsto & x_1+\ldots+x_p\end{array}$ est linéaire et $\sum_{i=1}^{p} F_i = \mathrm{Im}(\varphi)$. Donc, $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

❏

**Définition 7.** La somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe si et seulement si tout vecteur $x$ de cette somme peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_p$ où $x_1 \in F_1, \ldots, x_p \in F_p$. Dit autrement,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k \text{ directe} \Leftrightarrow \forall \left((x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}, (x_i')_{1\leqslant i\leqslant p}\right) \in \left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right)^2, \left(\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} x_i' \Rightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ x_i = x_i'\right).$$

Ceci peut encore s'énoncer sous la forme

$$\sum_{k=1}^{p} F_k \text{ directe} \Leftrightarrow \text{l'application } \varphi : \begin{array}{ccc}\prod_{i=1}^{p} F_i & \to & E\\ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i\end{array} \text{ est injective.}$$

Dans ce cas, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ se note $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ ou aussi $\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} F_i$ ou aussi $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

⇛ **Commentaire**. *L'application $\varphi$ étant linéaire, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si $\varphi$ induit un isomorphisme de $\prod_{i=1}^{p} F_i$ sur $\mathrm{Im}(\varphi) = \sum_{i=1}^{p} F_i$.*

On dispose de deux caractérisations des sommes directes :

**Théorème 16.**

**1)** La somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ F_i \cap \sum_{j\neq i} F_j = \{0\}$.

**2)** La somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est directe $\Leftrightarrow \forall i \in [\![2,p]\!],\ F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}$.

Ainsi, si $F$, $G$ et $H$ sont trois sous-espaces d'un espace $E$, la somme $F+G+H$ est directe si et seulement si $F\cap(G+H) = \{0\}$ et $G\cap(F+H) = \{0\}$ et $H\cap(F+G) = \{0\}$ (d'après 1)) mais aussi

la somme $F+G+H$ est directe si et seulement si $G\cap F = \{0\}$ et $H\cap(F+G) = \{0\}$ (d'après 2)).

Si la somme est directe, il est nécessaire que l'on ait $\forall i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0\}$ mais cette condition n'est pas suffisante.
Par exemple, notons $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis posons $D_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$, $D_2 = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $D_3 = \mathrm{Vect}(e_1+e_2)$. On a $D_1\cap D_2 = D_1\cap D_3 = D_2\cap D_3 = \{0\}$. Pourtant, la somme $D_1+D_2+D_3$ n'est pas directe car le vecteur $e_1+e_2$ est un vecteur de $D_1+D_2+D_3$ pouvant se décomposer de plusieurs manières distinctes comme somme d'un vecteur de $D_1$, d'un vecteur de $D_2$ et d'un vecteur de $D_3$ :

$$e_1+e_2 = 0.e_1 + 0.e_2 + 1.(e_1+e_2) = 1.e_1 + 1.e_2 + 0.(e_1+e_2) = \frac{1}{2}.e_1 + \frac{1}{2}.e_2 + \frac{1}{2}.(e_1+e_2)\ldots$$

**Démonstration.** (du théorème 16).

**1)** • Supposons la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ directe. Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Soit $x_i \in F_i \cap \sum_{j\neq i} F_j$. Alors, il existe $(x_j)_{j\neq i} \in \prod_{j\neq i} F_j$ tel que $x_i = \sum_{j\neq i} x_j$. Cette égalité s'écrit plus explicitement

$$\underbrace{0}_{\in F_1} + \ldots + \underbrace{0}_{\in F_{i-1}} + \underbrace{x_i}_{\in F_i} + \underbrace{0}_{\in F_{i+1}} + \ldots + \underbrace{0}_{\in F_p} = \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \ldots + \underbrace{x_{i-1}}_{\in F_{i-1}} + \underbrace{0}_{\in F_i} + \underbrace{x_{i+1}}_{\in F_{i+1}} + \ldots + \underbrace{x_p}_{\in F_p}.$$

L'unicité d'une telle décomposition nous permet d'identifier terme à terme ce qui fournit en particulier $x_i = 0$.

On a montré que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$.

• Supposons que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$. Soit $\left((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}, (x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}\right) \in \left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right)^2$ tel que $\sum_{j=1}^{p} x_j = \sum_{j=1}^{p} x'_j$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. On a

$$x_i - x'_i = \sum_{j \neq i} \left(x'_j - x_j\right).$$

Le vecteur $\sum_{j \neq i} \left(x'_j - x_j\right)$ est un élément de $\sum_{j \neq i} F_j$ et donc le vecteur $x_i - x'_i$ est dans $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j$. Par suite, le vecteur $x_i - x'_i$ est nul et donc $x_i = x'_i$.

Ceci montre que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

**2)** • Supposons la somme $\sum_{k=1}^{p} F_i$ directe. Soit $i \in [\![2, p]\!]$. D'après 1), $F_i \cap \sum_{j<i} F_j \subset F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}$ et donc $F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}$.

• Supposons $\forall i \in [\![2, p]\!]$, $F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}$. Montrons que la somme $\sum_{j=1}^{p} F_j$ est directe.

Soit $\left((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}, (x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}\right) \in \left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right)^2$ tel que $\sum_{j=1}^{p} x_j = \sum_{j=1}^{p} x'_j$.

Supposons par l'absurde que $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \neq (x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$. Soit $i = \text{Max}\left\{j \in [\![1, p]\!],\ x_j \neq x'_j\right\}$. Par définition de $i$, $\sum_{j=1}^{i} x_j = \sum_{j=1}^{i} x'_j$. Si $i = 1$, on obtient $x_1 = x'_1$ ce qui contredit la définition de $i$. Si $i \geqslant 2$, on obtient

$$x_i - x'_i = \sum_{j<i} \left(x'_j - x_j\right),$$

Le vecteur $\sum_{j<i} \left(x'_j - x_j\right)$ est dans $\sum_{j<i} F_j$ et donc le vecteur $x_i - x'_i$ est dans $F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}$. On en déduit que $x_i = x'_i$ ce qui contredit encore une fois la définition de $i$.

Donc, $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} = (x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$. Ceci montre que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

❑

Définition 8. Les sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont **supplémentaires** dans $E$ si et seulement si $\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i = E$.

Il revient au même de dire que les sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans $E$ si et seulement si tout vecteur $x$ de $E$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = x_1 + \ldots + x_p$ où $x_1 \in F_1, \ldots, x_p \in F_p$ ou encore si et seulement si l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{p} F_i & \to & E \\ (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \end{array}$ est bijective.

⇛ **Commentaire**. *Les sous-espaces $F_1, \ldots, F_p$ sont supplémentaires dans $E$ si et seulement si $\varphi$ est un isomorphisme.*

**Théorème 17.** On suppose de plus que $\dim(E) < +\infty$.

**1)** $\dim\left(\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$

**2)** $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

**3)** Si la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe ou si $E = \sum_{i=1}^{p} F_i$, alors $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i \Leftrightarrow \dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

**Démonstration .**

**1)** Si la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe, $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{p} F_i$ et donc

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \dim\left(\prod_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

**2)** Montrons l'inégalité et son cas d'égalité par récurrence sur $p \geqslant 2$.

• Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces de $E$.

$$\begin{aligned}\dim\left(\sum_{i=1}^{2} F_i\right) &= \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2) \text{ (relation de Grassmann)}\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{2} \dim(F_i)\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ ou encore si et seulement si la somme $F_1 + F_2$ est directe.
Le résultat à démontrer est donc vrai pour $p = 2$.

• Soit $p \geqslant 2$. Supposons que si $F_1, \ldots, F_p$ sont $p$ sous-espaces de $E$, alors $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Soient $F_1, \ldots, F_{p+1}$, $p+1$ sous-espaces vectoriels de $E$.

$$\begin{aligned}\dim\left(\sum_{i=1}^{p+1} F_i\right) &= \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i + F_{p+1}\right)\\ &= \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) + \dim(F_{p+1}) - \dim\left(\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \cap F_{p+1}\right)\\ &\leqslant \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) + \dim(F_{p+1})\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) + \dim(F_{p+1}) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= \sum_{i=1}^{p+1} \dim(F_i).\end{aligned}$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si chacune des deux inégalités écrites est une égalité. La première inégalité écrite est une égalité si et seulement si $\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \cap F_{p+1} = \{0\}$. La deuxième est une égalité si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe, par hypothèse de récurrence.

Donc, d'après le théorème 15, on a l'égalité si et seulement si $\forall i \in [\![2, p+1]\!]$, $F_i \cap \sum_{j<i} F_j = \{0\}$ ou encore si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^{p+1} F_i$ est directe, toujours d'après le théorème 15.

Le résultat est démonté par récurrence.

**3)** On suppose de plus la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ directe. Donc, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ puis

$$E = \sum_{i=1}^{p} F_i \Leftrightarrow \dim(E) = \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \Leftrightarrow \dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

❑

⇛ **Commentaire** . *Finalement, comme dans le cas de deux sous-espaces, deux des trois propriétés suivantes entrainent la troisième et donc le fait que les $F_i$ sont supplémentaires :*

*(1)* $E = \sum_{i=1}^{p} F_i$,

*(2) la somme* $\sum_{i=1}^{p} F_i$ *est directe,*

*(3)* $dim(E) = \sum_{i=1}^{p} dim(F_i)$.

Donnons maintenant un résultat qui fait le lien entre bases et sous-espaces supplémentaires. On se donne $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle. On se donne ensuite $F_1, \ldots, F_p$, $p$ sous-espaces vectoriels de $E$ de dimensions toutes non nulles, où $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note $n_i$ la dimension de $F_i$.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on définit $\mathscr{B}_i = (e_{1,i}, e_{2,i}, \ldots, e_{n_i,i})$ une base de $F_i$ puis on note $\mathscr{B}$ la famille de vecteurs de $E$ obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_i$ :

$$\mathscr{B} = \left(e_{1,1}, e_{2,1}, \ldots, e_{n_1,1}, e_{1,2}, e_{2,2}, \ldots, e_{n_2,2}, \ldots, e_{1,p}, e_{2,p}, \ldots, e_{n_p,p}\right).$$

Alors,

**Théorème 18.**
$E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i \Leftrightarrow \mathscr{B}$ est une base de $E$.

Quand la somme $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$, on dit alors que la base $\mathscr{B}$ est une **base adaptée** à la décomposition $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$.

**Démonstration.** D'après le théorème 17,

$$\begin{aligned} E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i &\Leftrightarrow E = \sum_{i=1}^{p} F_i \text{ et } n = \sum_{i=1}^{p} n_i \\ &\Leftrightarrow \mathscr{B} \text{ est génératrice de } E \text{ et } \operatorname{card}(\mathscr{B}) = \dim(E) \\ &\Leftrightarrow \mathscr{B} \text{ est une base de } E. \end{aligned}$$

❏

Donnons maintenant un résultat qui dit qu'un endomorphisme est entièrement déterminé par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires. On revient au cas général où $E$ est de dimension quelconque.

**Théorème 19.** Soient $F_1, \ldots, F_p$, $p$ sous-espaces supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)$. Alors
**1)** $f = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_{/F_i} = 0$.
**2)** $f = g \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_{/F_i} = g_{/F_i}$.

**Démonstration.**

**1)** Si $f = 0$, alors ses restrictions aux $F_i$ sont nulles et si les restrictions de $f$ aux $F_i$ sont nulles, par linéarité, $f$ est nulle.
**2)** On applique le 1) à $g - f$.

❏

Plus précisément,

**Théorème 20.** Soient $F_1, \ldots, F_p$, $p$ sous-espaces supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Soit $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \prod_{i=1}^{p} \mathscr{L}(F_i, E)$. Alors, il existe un et un seul endomorphisme $f$ de $E$ tel que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_{/F_i} = f_i$.

**Démonstration.** Montrons l'existence de $f$. Pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p$ tel que $x = x_1 + \ldots + x_p$ et on pose alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i).$$

On définit ainsi une application $f$ de $E$ dans $E$. Vérifions que $f$ est linéaire. Soient $(x, y) \in E^2$ et $(\lambda\mu) \in \mathbb{K}^2$ puis $((x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_p)) \in (F_1 \times \ldots \times F_p)^2$ tel que $x = x_1 + \ldots + x_p$ et $y = y_1 + \ldots + y_p$. On a alors $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i + \mu y_i)$ avec pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda x_i + \mu y_i \in F_i$. On en déduit que

$$f(\lambda x+\mu y)=\sum_{i=1}^{p} f_i\left(\lambda x_i+\mu y_i\right)=\lambda \sum_{i=1}^{p} f_i\left(x_i\right)+\mu \sum_{i=1}^{p} f_i\left(y_i\right)=\lambda f(x)+\mu f(y).$$

Ceci montre l'existence de $f$. L'unicité de $f$ est assurée par le théorème 19.

❑

Notons enfin la notion de projecteurs associés à une décomposition $E$ en somme de sous-espaces supplémentaires. On suppose que $E=F_1\oplus\ldots\oplus F_k$. Tout $x$ de $E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme $x=x_1+\ldots+x_k$ où $x_1\in F_1$, ..., $x_k\in F_k$. Pour $i\in [\![1,k]\!]$, on définit la projection $p_i$ par

$$\forall x\in E,\ p_i(x)=x_i.$$

Pour chaque $i\in [\![1,k]\!]$, $p_i$ est la projection sur $F_i$ parallèlement à $\sum\limits_{j\neq i} F_j$ (les sous-espaces $F_i$ et $\sum\limits_{j\neq i} F_j$ sont supplémentaires).

Les projections $p_i$ vérifient

- $\forall i\in [\![1,k]\!],\ p_i^2=p_i$.
- $\forall (i,j)\in [\![1,k]\!]^2,\ (i\neq j\Rightarrow p_i\circ p_j)=0$.
- $p_1+\ldots+p_k=Id_E$.

## 1.5 Matrices définies par blocs. Calculs par blocs

### 1.5.1 Matrices définies par blocs

On se donne une matrice $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n\geqslant 2$ et $p\geqslant 2$. On va découper cette matrice en deux blocs verticaux (resp. horizontaux) et on cherche à interpréter le découpage en terme d'application linéaire.

On suppose que $A$ est la matrice d'une application linéaire d'un espace $E$ de dimension $p$ dans un espace $E'$ de dimension $n$ relativement à des bases $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_p)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,\ldots,e'_n)$ de $E$ et $E'$ respectivement.

• On effectue un découpage de la matrice $A$ en deux blocs verticaux : $A=\begin{pmatrix} B & C\end{pmatrix}$ avec $B\in\mathscr{M}_{n,p_1}(\mathbb{K})$, $p_1\geqslant 1$, $C\in\mathscr{M}_{n,p_2}(\mathbb{K})$, $p_2\geqslant 1$, et $p_1+p_2=p$.
On pose $\mathscr{B}_1=(e_1,\ldots,e_{p_1})$ et $\mathscr{B}_2=(e_{p_1+1},\ldots,e_p)$ puis $F_1=\text{Vect}\left(\mathscr{B}_1\right)$ et $F_2=\text{Vect}\left(\mathscr{B}_2\right)$. $\mathscr{B}_1$ est une base de $F_1$, $\mathscr{B}_2$ est une base de $F_2$ et $E=F_1\oplus F_2$.

La matrice B est alors la matrice de $f_{/F_1}$ (la restriction de $f$ à $F_1$ qui est un élément de $\mathscr{L}\left(F_1,E'\right)$) relativement aux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'$. De même, $C$ est la matrice de $f_{/F_2}$ relativement aux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'$.

• On effectue un découpage de la matrice $A$ en deux blocs horizontaux : $A=\begin{pmatrix} B\\ C\end{pmatrix}$ avec $B\in\mathscr{M}_{n_1,p}(\mathbb{K})$, $n_1\geqslant 1$, $C\in\mathscr{M}_{n_2,p}(\mathbb{K})$, $n_2\geqslant 1$, et $n_1+n_2=n$.
On pose $\mathscr{B}'_1=(e'_1,\ldots,e_{n_1})$ et $\mathscr{B}'_2=\left(e'_{n_1+1},\ldots,e'_n\right)$ puis $F'=\text{Vect}\left(\mathscr{B}'_1\right)$ et $G=\text{Vect}\left(\mathscr{B}_2\right)$. $\mathscr{B}'_1$ est une base de $F'_1$, $\mathscr{B}'_2$ est une base de $F'_2$ et $E'=F'_1\oplus F'_2$.
On note $\pi_1$ (resp. $\pi_2$) l'application de $E'$ dans $F'_1$ (resp. $F'_2$) qui à tout $x$ de $E'$ associe son projeté sur $F'_1$ (resp. $F'_E$) parallèlement à $F'_2$ (resp. $F'_1$) ($\pi_1$ n'est pas tout à fait la projection sur $F'_1$ parallèlement à $F'_2$ qui est une application de $E'$ dans $E'$).

La matrice B est alors la matrice de $\pi_1\circ f$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'_1$. De même, $C$ est la matrice de $\pi_2\circ f$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'_2$.

• Plus généralement, un découpage d'une matrice $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en blocs sous la forme $A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,l}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,l}\\ \vdots & & & \vdots\\ A_{k,1} & A_{k,2} & \ldots & A_{k,l}\end{pmatrix}$ où, pour tout $(i,j)\in [\![1,k]\!]\times [\![1,l]\!]$, $A_{i,j}$ est une matrice de format $(n_i,p_j)$ avec $n_i\geqslant 1$, $p_j\geqslant 1$, $n_1+\ldots+n_k=n$ et $p_1+\ldots+p_l=p$, correspond à une décomposition des espaces de départ et d'arrivée de $f$ en sommes de sous-espaces supplémentaires.

### 1.5.2 Calculs par blocs

Il s'agit maintenant d'apprendre à calculer par blocs.

• Il est immédiat que si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,j} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,j} & \dots & A_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,j} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,j} & \dots & B_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{i,1} & \dots & B_{i,j} & \dots & B_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{k,1} & \dots & B_{k,j} & \dots & B_{k,l} \end{pmatrix}$ où pour tout $(i, j)$, $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ sont de même format $(n_i, p_j)$, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} + \mu B_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,j} + \mu B_{1,j} & \dots & \lambda A_{1,l} + \mu B_{1,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{i,1} + \mu B_{i,1} & \dots & \lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j} & \dots & \lambda A_{i,l} + \mu B_{i,l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{k,1} + \mu B_{k,1} & \dots & \lambda A_{k,j} + \mu B_{k,j} & \dots & \lambda A_{k,l} + \mu B_{k,l} \end{pmatrix}.$$

• Le produit de deux matrices définies par blocs n'est pas plus compliqué. Il y a juste quelques précautions à prendre. On se donne deux matrices $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de sorte que le produit $AB$ est défini. Commençons par découper $A$ et $B$ en quatre blocs : $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$. Si on a envie que les produits $A_{1,1}B_{1,1}$ ou $A_{1,1}B_{1,2}$ ou ... soient définis, il s'agit à chaque fois que le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ soit égal au nombre de lignes de $B_{k,j}$. On impose donc au découpage de $A$ en colonnes d'être identique au découpage de $B$ en lignes :

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \end{array} \text{ et } B = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \end{array}$$

On a alors

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Vérifions-le en analysant par exemple le bloc en haut à gauche. $A_{1,1}B_{1,1}$ est défini et de format $(n_1, q_1)$ de même que $A_{1,2}B_{2,1}$. Donc, $A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1}$ est défini et de format $(n_1, q_1)$. On pose alors $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$, $A_{1,1} = (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant p_1}}$, $A_{1,2} = \left(\alpha'_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant p_2}}$, $B_{1,1} = (\beta_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p_1 \\ 1 \leqslant j \leqslant q_1}}$ et $B_{2,1} = \left(\beta'_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p_2 \\ 1 \leqslant j \leqslant q_1}}$.
Soit $(i, j) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, q_1]\!]$. Le coefficient ligne $i$, colonne $j$, de la matrice $AB$ est

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} &= \sum_{k=1}^{p_1} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=p_1+1}^{p} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{p_1} \alpha_{i,k}\beta_{k,j} + \sum_{k=p_1+1}^{p} \alpha'_{i,k-p_1}\beta'_{k-p_1,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p_1} \alpha_{i,k}\beta_{k,j} + \sum_{l=1}^{p_2} \alpha'_{i,l}\beta'_{l,j} \end{aligned}$$

qui est bien le coefficient ligne $i$, colonne $j$, de la matrice $A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1}$.

Plus généralement, si on découpe la matrice $A$ en blocs $A_{i,k}$ et la matrice $B$ en blocs $B_{k,j}$, de sorte que le découpage en colonne de $A$ soit le même que le découpage en ligne de $B$ ($n = n_1 + \ldots + n_s$, $p = p_1 + \ldots + p_t$, $q = q_1 + \ldots + q_u$), alors on peut effectuer le calcul de $AB$ par blocs, le bloc n° $(i, j)$ étant $\displaystyle\sum_{k=1}^{t} A_{i,k}B_{k,j}$.

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $A$ peut s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} S & 0_2 \\ 0_2 & D \end{pmatrix},$$

où $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1, 2)$. On a $S^2 = (E_{1,2} + E_{2,1})(E_{1,2} + E_{2,1}) = E_{1,1} + E_{2,2} = I_2$. On peut alors calculer $A^2$ et plus généralement les puissances de $A$ par blocs :

$$A^2 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}$$
$$= \text{diag}(1,1,1,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$, $A^{2p} = \left(A^2\right)^p = \begin{pmatrix} I_2^p & 0 \\ 0 & D^{2p} \end{pmatrix} = \text{diag}\left(1,1,1,2^p\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$ et

$A^{2p+1} = A^{2p}A = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & D^{2p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0_2 \\ 0_2 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D^{2p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p+1} \end{pmatrix}$.

En terme de calcul, tout s'est passé comme si les matrices $S$, $D$ et $0_2$ étaient des nombres alors que ce sont des matrices carrées de format 2. ❑

• Enfin, on peut transposer par blocs : il est clair que si $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ alors $M^T = \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{pmatrix}$ et plus généralement, si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} A_{1,1}^T & \dots & A_{1,k}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{l,1}^T & \dots & A_{k,l}^T \end{pmatrix}$.

**Exercice 3.**

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B$ l'élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $B = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de $B$ en fonction du rang de $A$.

**Solution 3.** On note $r$ le rang de $A$. Si $r = 0$, $A$ est nulle et donc $B$ est nulle.

Sinon, il existe deux matrices carrées inversibles $P$ et $Q$ de format $(n,n)$ telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soient $P' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ et $Q' = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$.

Un calcul par blocs fournit $\begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{np}$. Donc la matrice $P'$ est inversible. De même la matrice $Q'$ est inversible.

(Si on connaît déjà les déterminants par blocs, on peut aussi écrire : $\det(P') = (\det(P))^p \neq 0$ et $\det(Q') = (\det(Q))^p \neq 0$).

De nouveau, un calcul par blocs fournit

$$B = \begin{pmatrix} PJ_rQ & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & PJ_rQ \end{pmatrix} = P'J_r'Q' \text{ où } J_r' = \begin{pmatrix} J_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}.$$

La matrice B est équivalente a la matrice $J'_r$ et a donc même rang que $J'_r$. Enfin, en supprimant les lignes nulles et les colonnes nulles de $J'_r$, on voit que la matrice $J'_r$ a même rang que la matrice $I_{pr}$ à savoir $pr$. Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{\mathrm{rg}B = p\,\mathrm{rg}A.}$$

---

### 1.5.3 Déterminants par blocs

**Théorème 21.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $n$ est un entier naturel non nul pair. On suppose que $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}$ où $A_1$ et $A_2$ sont des matrices rectangulaires de même format $\left(\dfrac{n}{2}, n\right)$.

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(A) = \det(A')$ où $A' = \begin{pmatrix} A_1 + \lambda A_2 & A_2 \end{pmatrix}$

**Démonstration .** Posons $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$, puis notons $C_1, \ldots, C_n$, les colonnes de la matrice A. On effectue sur le déterminant de A les transformations : $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + C_{j+p}$. Ces transformations ne modifient pas la valeur du déterminant et on obtient

$$\det(A) = \det\left(C_1, \ldots, C_p, C_{p+1}, \ldots, C_{2p}\right) = \det\left(C_1 + \lambda C_{p+1}, \ldots, C_p + \lambda C_{2p}, C_{p+1}, \ldots, C_{2p}\right) = \det(A').$$

❏

On a aussi bien sûr $\det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 + \lambda A_1 \end{pmatrix}$ ou aussi $\det\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 + \lambda A_2 \\ A_2 \end{pmatrix}$ et $\det\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 + \lambda A_1 \end{pmatrix}$.

**Théorème 22.**

**1)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A = \begin{pmatrix} B & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix}$ où $p$ et $q$ sont deux entiers naturels non nuls tels que $p + q = n$, $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}$, $C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $0_{p,q}$ est la matrice nulle de format $(p, q)$. Alors,

$$\det(A) = \det(B) \times \det(C).$$

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix}$ où $p$ et $q$ sont deux entiers naturels non nuls tels que $p + q = n$, $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}$, $C \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.Alors,

$$\det(A) = \det(B) \times \det(C).$$

**Démonstration .**

**1)** Un calcul par blocs fournit $A = \begin{pmatrix} B & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix}$ puis

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} B & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix}.$$

Ensuite, en développant systématiquement suivant la dernière colonne, on obtient $\det\begin{pmatrix} B & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix} = \det(B) \times 1 \times \ldots \times 1 = \det(B)$.
De même, $\det\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix} = \det(C)$ et finalement

$$\det(A) = \det(B) \times \det(C).$$

**2)** Si B n'est pas inversible, les $p$ premières colonnes de la matrice A constituent une famille liée et donc A n'est pas inversible. Dans ce cas, $\det(A) = 0 = \det(B) \times \det(C)$.
Sinon, les colonnes de B constituent une base de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Les colonnes de la matrice D sont alors des combinaisons linéaires des colonnes de B. On retranche à chacune des $n - p$ colonnes de A les combinaisons linéaires précédentes des $p$ premières colonnes de A ce qui ne modifie la valeur du déterminant. Les coefficients de la matrice C ne sont pas modifiés par ces combinaisons linéaires car les coefficients des $p$ premières colonnes situés strictement en dessous de la ligne $p$ sont tous nuls. On obtient

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} B & D \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix} = \det(B) \times \det(C).$$

❏

On en déduit immédiatement par récurrence :

**Théorème 23.** Si la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire par blocs, de la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \times & A_k \end{pmatrix}$ où les blocs diagonaux $A_1, \dots, A_k$, sont des matrices carrées, alors,

$$\det(A) = \det(A_1) \times \dots \times \det(A_k).$$

**Exercice 4.**

Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées réelles de format $n \geqslant 1$. Montrer que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ de format $2n$ est un réel positif.

**Solution 4.** On effectue sur la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ les transformations : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + iC_{n+j}$ (où $i^2 = -1$) sans modifier la valeur du déterminant. On obtient $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix}$.
Puis en effectuant les transformations : $\forall j \in [\![n+1, 2n]\!]$, $L_j \leftarrow L_j - iL_{j-n}$, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{pmatrix} = \det(A + iB) \times \det(A - iB).$$

Puisque les matrices $A$ et $B$ sont réelles, $\det(A - iB) = \overline{\det(A + iB)}$ et donc

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A + iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

---

⇛ **Commentaire**. *La « solution » : « det* $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 + B^2) \geqslant 0$ *» est totalement fausse. D'abord, l'égalité* $\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ *est fausse en général (elle vraie quand* $B = 0$ *ou* $C = 0$ *ou dans certains autres cas particuliers) et d'autre part, la matrice* $A^2 + B^2$ *n'est pas nécessairement à coefficients positifs et le déterminant d'une matrice à coefficients positifs n'est pas nécessairement un réel positif (par exemple,* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$*).*

# 2 Sous-espaces stables

## 2.1 Cas général

### 2.1.1 Définition

Définition 9. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f$ un endomorphisme de $E$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$
$F$ est **stable** par $f$ si et seulement si $f(F) \subset F$ ou encore

$$F \text{ stable par } f \Leftrightarrow \forall x \in E,\ (x \in F \Rightarrow f(x) \in F).$$

On a immédiatement

**Théorème 24.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f$ un endomorphisme de $E$.
Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$. Alors la restriction $f_{/F}$ de $f$ à $F$ induit un endomorphisme de $F$ que l'on peut noter $f_F$.

⇛ **Commentaire**. *Si* $F$ *est stable par* $f$*, alors pour tout* $x \in F$, $f(x) \in F$*. On peut alors définir l'application* $f_F : \begin{array}{rcl} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
$f_F$ *est linéaire et donc* $f_F \in \mathscr{L}(F)$. $f_F$ *n'est pas tout à fait la restriction* $f_{/F}$ *de* $f$ *à* $F$ *car cette restriction est* $f_{/F} : \begin{array}{rcl} F & \to & E \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

*et est un élément de $\mathscr{L}(F, E)$. D'où le vocabulaire « $f_{/F}$ induit un endomorphisme de $F$ » et non pas « $f_{/F}$ est un endomorphisme de $F$ ».*

On décrit maintenant une situation importante où des sous-espaces sont stables par un certain endomorphisme. C'est la situation où deux endomorphismes **commutent**. Nous reviendrons sur cette situation dans le paragraphe « commutant d'un endomorphisme ».

**Théorème 25.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $g \circ f = f \circ g$. Alors, $g$ laisse stable $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ et plus généralement $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

**Démonstration .** Supposons que $f$ et $g$ commutent.

• Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par $g$. Pour tout $x \in E$,

$$g\,(f(x)) = f\,(g(x)) \in \mathrm{Im}(f).$$

Ainsi, $\forall x \in E$, $g(f(x)) \in \mathrm{Im}(f)$ ou encore $g\,(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$.

• Montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par $g$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathrm{Ker}(f)$, $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ ou encore $g\,(\mathrm{Ker}(f)) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par $g$.

$$g \circ (f - \lambda \mathrm{Id}_E) = g \circ f - \lambda g = f \circ g - \lambda g = (f - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ g.$$

Puisque les endomorphismes $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ et $g$ commutent, $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par $g$ d'après le paragraphe précédent.

Autre démonstration : on peut montrer directement que $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par $g$ de la façon suivante. Tout d'abord, pour $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E)\,(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda x.$$

Mais alors

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

et donc $g(x) \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

❏

### 2.1.2 Interprétation matricielle

On se place dans le cas particulier où $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. On se donne un endomorphisme $f$ de $E$ puis un sous-espace $F$ de $E$ non nul et distinct de $E$. On se donne ensuite $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$ puis $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. On note $p$ la dimension de $F$ et $n$ la dimension de $E$.

Si $F$ est stable par $f$, l'image d'un vecteur de $F$ est un vecteur de $F$. Donc, la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{n-p,p} & B \end{pmatrix}$ où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $0_{n-p,p}$ est la matrice nulle de format $(n-p, p)$. Dit autrement, la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ est **triangulaire supérieure par blocs**.

Si on suppose de plus que $G$ est stable par $f$, la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0_{p,n-p} \\ 0_{n-p,p} & B \end{pmatrix}$ ou encore la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ est **diagonale par blocs**.

Plus généralement, si on a décomposé $E$ en sommes directes de sous-espaces stables par $f$ ($E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} F_i$ où $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f\,(F_i) \subset F_i$) et si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à cette décomposition, alors la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

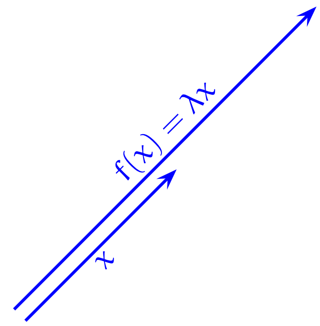
(les $0$ représentant des blocs de zéros) et donc la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs.

## 2.2 Droites stables

Un cas particulier de sous-espace stable par un endomorphisme est quand ce sous-espace est une droite. Soit $x$ un vecteur **non nul** puis $D = \text{Vect}(x)$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$.

$$D \text{ stable par } f \Leftrightarrow f(\text{Vect}(x)) \subset \text{Vect}(x) \Leftrightarrow f(x) \in \text{Vect}(x) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda x.$$

Un vecteur $x$ **non nul** tel que $f(x)$ soit colinéaire à $x$ sera appelé plus loin **vecteur propre** de $f$.




Supposons maintenant que $E$ soit de dimension finie non nulle et que l'on ait trouvé une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$ telle que chaque $e_i$ soit un vecteur propre de $f$. La matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ est alors de la forme

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où les $\lambda_i$ sont des nombres. La matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ est dans ce cas une **matrice diagonale**.

## 2.3 Réduire un endomorphisme ou une matrice carrée

Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $E$ de dimension finie non nulle. On va chercher une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ soit la plus simple possible : diagonale , triangulaire , diagonale ou triangulaire par blocs. **Réduire** l'endomorphisme $f$, c'est chercher (et trouver) une telle base.

Soit $A$ une matrice carrée. On va chercher une matrice carrée semblable à $A$ et la plus simple possible ou encore, plus explicitement, on va chercher une matrice inversible $P$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit la plus simple possible : diagonale, triangulaire , diagonale ou triangulaire par blocs. **Réduire** la matrice $A$, c'est chercher (et trouver) une telle matrice.

Quel est l'intérêt ? Un des premiers buts de ce chapitre est le calcul des puissances successives d'une matrice. Si on a pu écrire $A = PBP^{-1}$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = PB^pP^{-1}$, cette dernière égalité restant valable pour $p \in \mathbb{Z}$ si la matrice $A$ est inversible.

Si $B$ est une matrice plus simple que $A$, on peut espérer que le calcul des puissances de $B$ se fasse plus facilement que le calcul des puissances de $A$. Ceci est en particulier le cas si $B$ est une matrice diagonale $D$.

Ainsi, par exemple, on peut montrer que $A = PDP^{-1}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n &= A^n = PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ -1 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{3^n-1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# 3 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

## 3.1 Valeurs et vecteurs propres

DÉFINITION 10. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis $f$ un endomorphisme de $E$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda$ est une **valeur propre** de $f$ si et seulement si $\exists x \in E \setminus \{0\}/\ f(x) = \lambda x$.
• Soit $x \in E$. $x$ est un **vecteur propre** de $f$ si et seulement si $x \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ f(x) = \lambda x$.

⇛ **Commentaire** .

◇ *La définition précédente est donnée pour un espace $E$ de dimension quelconque non nulle, éventuellement infinie.*

◇ *L'équation $f(x) = \lambda x$, d'inconnues $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, est appelée* ***équation aux éléments propres*** *de $f$.*

DÉFINITION 11. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda$ est une **valeur propre** de $A$ si et seulement si $\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}/\ AX = \lambda X$.
• Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $X$ est un **vecteur propre** de $A$ si et seulement si $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}/\ AX = \lambda X$.

⇛ **Commentaire** .

◇ *Si $E$ est de dimension finie non nulle, $\mathscr{B}$ est une base de $E$, $f$ un endomorphisme de $E$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} f$, alors il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \Leftrightarrow \lambda \text{ valeur propre de } A.$$

◇ *L'équation $AX = \lambda X$, d'inconnues $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, est appelée* ***équation aux éléments propres*** *de $A$.*

Un tout premier résultat est le fait qu'un vecteur propre est associé à une unique valeur propre :

**Théorème 26.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis $f$ un endomorphisme de $E$.
Soit $x$ un vecteur non nul. Si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $f(x) = \lambda x$ et $f(x) = \mu x$, alors $\lambda = \mu$.

⇛ **Commentaire** . *Quand $x$ est un vecteur* ***non nul*** *et $\lambda$ est un nombre tel que $f(x) = \lambda x$, on dit que $x$ est un vecteur propre* ***associé*** *à la valeur propre $\lambda$.*

DÉMONSTRATION . Si $f(x) = \lambda x$ et $f(x) = \mu x$, alors $(\lambda - \mu)x = 0$ et donc $\lambda - \mu = 0$ car $x \neq 0$ puis $\lambda = \mu$. ❏

⇛ **Commentaire** . *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f(0) = 0 = \lambda.0$. Pourtant, le vecteur nul n'est pas un vecteur propre de $f$ car par définition,* ***un vecteur propre est non nul****.*

**Exemple 1.** Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$AU = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.U \text{ avec } U \neq 0.$$

Donc, $1$ est une valeur propre de $A$ et $U$ est un vecteur propre associé. ❏

**Exemple 2.** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces non nuls d'un espace $E$ de dimension quelconque. On suppose que $E = F \oplus G$ et on note $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$.
On sait que pour tout vecteur $x$ de $F$, $p(x) = x = 1.x$ et donc $1$ est valeur propre de la projection $p$ et tout vecteur **non nul** de $F$ est un vecteur propre associé.
De même, on sait que pour tout vecteur $x$ de $G$, $p(x) = 0 = 0.x$ et donc $0$ est valeur propre de la projection $p$ et tout vecteur **non nul** de $G$ est un vecteur propre associé. ❏

**Exemple 3.** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. On sait que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$.

• Si $P$ est un polynôme tel que $\deg(P) = 0$ (et donc $P \neq 0$), alors $f(P) = 0 = 0.P$ et donc $P$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $0$.

• Si d'autre part $\deg(P) \geqslant 1$ et $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P) > \deg(P')$ et en particulier, $P' = f(P) \neq \lambda P$. Donc, si $\lambda \neq 0$, $\lambda$ n'est pas valeur propre de $f$.

Ainsi, $f$ admet une valeur propre et une seule à savoir le nombre $0$. ❑

**Exemple 4.** Un endomorphisme (ou une matrice) n'admet pas nécessairement de valeur propre. Par exemple, considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array}$. Il est clair que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$.

Si $P$ est un polynôme non nul et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\deg(f(P)) = \deg(XP) = 1 + \deg(P) > \deg(P) \geqslant \deg(\lambda P)$ et en particulier, $f(P) \neq \lambda P$.

Donc, il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tels que $f(P) = \lambda P$ ou encore $f$ n'admet ni valeur propre, ni vecteur propre. ❑

**Exemple 5.** On peut donner un autre exemple où $E$ est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie. Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique et de son orientation canonique, notons $r$ la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Si $x$ est un vecteur non nul de $E$, $r(x)$ n'est bien sûr pas colinéaire à $x$ et donc $x$ n'est pas un vecteur propre de $r$. De nouveau, on a un exemple d'endomorphisme n'admettant ni valeur propre, ni vecteur propre.

Le problème est plus ambigu si on analyse la matrice de $r$ dans la base canonique orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Cette matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, cette matrice n'a pas de valeur propre **réelle**. Mais on peut penser $A$ comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si c'est le cas, on remarque que si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ (où $i^2 = -1$), alors

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = iU.$$

Donc, si on conçoit $A$ comme un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, alors $A$ admet $i$ pour valeur propre (complexe non réelle). ❑

Définition 9. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme $f$ s'appelle le **spectre** de $f$ et se note $\mathrm{Sp}(f)$.
L'ensemble des valeurs propres d'une matrice $A$ s'appelle le **spectre** de $A$ et se note $\mathrm{Sp}(A)$.

⇛ **Commentaire** .

◇ *Pour une matrice $A$ à coefficients réels, la notation Sp$(A)$ peut se révéler ambigüe. Suivant que l'on conçoive $A$ comme une matrice à coefficients rationnels, réels, complexes, ... on ne cherchera que des valeurs propres rationnelles, réelles, complexes ...*
*S'il y a ambiguïté, on écrira $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ alors que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \varnothing$ puisque $i \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.*

◇ *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$, il est clair que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.*

◇ *La définition du spectre donnée ci-dessus n'est pas définitive. Pour l'instant, le spectre désigne l'**ensemble** des valeurs propres. Par exemple, Sp$(A) = \{1; 2\}$ signifie que $A$ admet deux valeurs propres à savoir $1$ et $2$. Néanmoins, on découvrira plus loin dans ce chapitre qu'une valeur propre donnée peut l'être « plusieurs fois ». A partir de ce moment-là, le spectre de $A$ pourra aussi désigner la **famille** des valeurs propres. Par exemple, on écrira Sp$(A) = (1; 1; 2)$ pour préciser le fait que $1$ est valeur propre deux fois.*

**Théorème 27.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ puis $f$ un endomorphisme nilpotent de $E$.

$f$ admet une valeur propre et une seule, à savoir $0$.

Démonstration . Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul. Soit $f$ un endomorphisme nilpotent de $E$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une éventuelle valeur propre de $f$. Il existe un vecteur non nul $x$ tel que $f(x) = \lambda x$.

On en déduit par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(x) = \lambda^k x$. Mais alors, $\lambda^p x = f^p(x) = 0$ et donc $\lambda^p = 0$ (car $x \neq 0$) puis $\lambda = 0$.

On a montré que si $f$ admet une valeur propre $\lambda$, nécessairement $\lambda = 0$.

Réciproquement, supposons par l'absurde que $0$ ne soit pas valeur propre de $f$. Il n'existe donc pas de vecteur $x$ non nul tel que $f(x) = 0$ ou encore $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ ou enfin $f$ est injectif. Mais alors, $f^p$ est injectif ce qui contredit l'égalité $f^p = 0$ (puisque $E \neq \{0\}$, l'endomorphisme nul n'est pas injectif). Donc, $f$ n'est pas injectif puis $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et donc, il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0 = 0.x$. Ceci montre que $0$ est valeur propre de $f$ et finalement que $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

❑

Dans la démonstration précédente, plusieurs idées ont été utilisées qui méritent d'être énoncées explicitement. Ce sont les trois théorèmes qui suivent.

**Théorème 28.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis $f$ un endomorphisme de $E$.

- $0$ est valeur propre de $f$ si et seulement si $f$ n'est pas injectif.
- $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda$ valeur propre de $f \Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

Si de plus, $\dim(E) < +\infty$, alors

- $0 \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f \notin GL(E)$
- $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E \notin GL(E)$.

**Démonstration .** $0 \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists x \neq 0/\ f(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \neq \{0\} \Leftrightarrow f$ non injectif. Plus généralement, pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \exists x \neq 0/\ f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \exists x \neq 0/\ \left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right)(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\left(f - \lambda \mathrm{Id}_E\right) \neq \{0\} \Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ non injectif.}$$

Enfin, si de plus $\dim(E) < +\infty$, on sait que $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ non injectif $\Leftrightarrow f - \lambda \mathrm{Id}_E \notin GL(E)$.

❏

Pour une matrice carrée, cela donne

**Théorème 29.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- $0 \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow A \notin GL_n(\mathbb{K})$.
- $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$.

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $\mathrm{rg}\left(A - 2I_3\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 < 3$. Donc, $A - 2I_3 \notin GL_3(\mathbb{R})$ ou encore $2$ est une valeur propre de $A$. ❏

**Exercice 5.** Déterminer le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$.

**Solution 5.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de $A$ sont les complexes $\lambda$ tels que $A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{C})$. Une valeur propre de $A$ est évidente : si $\lambda = 0$, la matrice $A - \lambda I_n = A$ est de rang $1 < n$ et n'est donc pas inversible. Donc $0$ est une valeur propre de $A$.

**1 ère solution.** Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + \ldots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + \ldots + x_n = \lambda x_2 \\ \qquad\vdots \\ x_1 + \ldots + x_n = \lambda x_n \end{array}\right. \quad (S).$$

Les valeurs propres de $A$ sont les complexes $\lambda$ tels que le système $(S)$ admettent au moins une solution non nulle.

- Si $\lambda = 0$, $(S) \Leftrightarrow x_1 + \ldots + x_n = 0$. Donc, $(S)$ admet au moins une solution non nulle comme $(1, -1, 0, \ldots, 0)$ par exemple. On en déduit que $0$ est valeur propre de $A$.

- Si $\lambda \neq 0$, on effectue les transformations $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}\left(L_2 - L_1\right)$, ..., $L_n \leftarrow \dfrac{1}{\lambda}\left(L_n - L_1\right)$ et on obtient

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ \qquad\vdots \\ x_n = x_1 \\ x_1 + \ldots + x_1 = \lambda x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ \qquad\vdots \\ x_n = x_1 \\ (n - \lambda)x_1 = 0 \end{array}\right. .$$

Si $\lambda \neq n$, alors $(S) \Leftrightarrow x_1 = 0 = x_2 = \ldots = x_n$. Dans ce cas, $(S)$ n'admet pas de solution non nulle et donc $\lambda$ n'est pas valeur propre de $A$.

Si $\lambda = n$, $(S) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Dans ce cas, $(S)$ admet une solution non nulle comme $(1, \ldots, 1)$ par exemple. On en déduit que $\lambda = n$ est valeur propre de $A$.

**2 ème solution.**

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} n-\lambda & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ n-\lambda & 1-\lambda & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-\lambda & 1 & \ldots & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \ (C_1 \leftarrow C_1 + \ldots + C_n).
\end{aligned}$$

Si $\lambda = n$, $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$ (car la première colonne de la dernière matrice est nulle). Donc, $A - nI_n \notin GL_n(\mathbb{C})$ puis $n$ est valeur propre de $A$.
Si $\lambda \neq n$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \ \left(C_1 \leftarrow \frac{1}{n-\lambda} C_1\right) \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \ (\forall i \in [\![2, n]\!],\ L_i \leftarrow L_i - L_1).
\end{aligned}$$

Si $\lambda \neq 0$ (et $\lambda \neq n$), $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) = n$ et donc $\lambda$ n'est pas valeur propre de $A$. Si $\lambda = 0$, $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$ et donc $0$ est valeur propre de $A$.

On a montré que

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{0, n\}.}$$

---

**Théorème 30.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis $f$ un endomorphisme de $E$.
Soit $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}$. On suppose que $f(x) = \lambda x$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(x) = \lambda^k x$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $(X, \lambda) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$. On suppose que $AX = \lambda X$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k X = \lambda^k X$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $k$.

- Puisque $f^1 = f$ et que $\lambda^1 = \lambda$, le résultat est vrai quand $k = 1$.
- Soit $k \geqslant 1$. Supposons que $f^k(x) = \lambda^k x$. Alors, $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) = \lambda^k f(x) = \lambda^{k+1} x$.

Le résultat est démontré par récurrence.

❏

On a vu (page 20) des exemples d'endomorphismes n'admettant pas de valeur propre. Dans les deux cas, $f$ était un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une fois de dimension infinie et une fois de dimension finie. Il existe pourtant une situation où on sait à l'avance que $f$ a au moins une valeur propre :

**Théorème 31.**
- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre.
- Toute élément $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

**Démonstration .** Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle puis $f$ un endomorphisme de $E$. D'après le théorème 28, page 21, $\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow f - \lambda \text{Id}_E \notin GL(E) \Leftrightarrow \det(f - \lambda \text{Id}_E) = 0$.

Maintenant, $z \mapsto \det(f - z\text{Id}_E) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - z & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - z & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - z \end{vmatrix}$ est une fonction polynomiale (à partir de l'expression développée de ce déterminant). De plus, dans l'expression développée de ce déterminant, tous les termes sont des polynômes en $z$ de degré inférieur ou égal à $n$ et un et un seul terme de ce développement est de degré $n$ à savoir $(a_{1,1} - z) \dots (a_{n,n} - z)$. Donc $\det(f - z\text{Id}_E)$ est un polynôme de degré $n (\geqslant 1)$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\det(f - \lambda \text{Id}_E) = 0$. $\lambda$ est une valeur propre de $f$.

❏

On donne maintenant un résultat important sur des familles de vecteurs propres.

**Théorème 32.** Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

**Démonstration .** On démontre le résultat pour un endomorphisme. Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ non réduit à $\{0\}$.

Pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer que toute famille finie de vecteurs propres de $f$ associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre. On montre le résultat par récurrence sur le cardinal $n$ d'une telle famille.

- Soit $x_1$ un vecteur propre de $f$. Par définition $x_1 \neq 0$ et donc la famille $(x_1)$ est libre. Le résultat est donc vrai quand $n = 1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute famille de cardinal $n$ de vecteurs propres de $f$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes soit libre. Soit $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une famille de $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes de $f$ puis $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ une famille de vecteurs propres associée. Montrons que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est libre.

  Soit $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que
  $$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0 \qquad \text{(I)}.$$
  En prenant l'image des deux membres par $f$, on obtient
  $$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0 \qquad \text{(II)}.$$
  Mais alors
  $$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) x_1 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) x_n = 0 \quad ((\text{II}) - \lambda_{n+1}(\text{I})).$$
  Par hypothèse de récurrence, la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre. Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ puis $\alpha_i = 0$ (car $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$). Il reste $\alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$ et donc $\alpha_{n+1} = 0$ car $x_{n+1} \neq 0$. On a montré que la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est libre.

Le résultat est démontré par récurrence.

❏

**Exercice 6.** Pour $a \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_a(x) = e^{ax}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est libre.

**Solution 6.** Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$. $\varphi$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $E$. De plus, pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\varphi(f_a) = af_a$. Puisque $f_a \neq 0$, $a$ est valeur propre de $\varphi$ et $f_a$ est un vecteur propre de $\varphi$ associé à la valeur propre $a$.

Ainsi, la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est une famille de vecteurs propres de $\varphi$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On en déduit que famille $(f_a)_{a \in \mathbb{C}}$ est libre.

**Exercice 7.** Montrer que la famille $\left((q^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{q\in\mathbb{C}}$ est une famille libre de l'espace vectoriel des suites complexes (quand $q=0$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)$).

**Solution 7.** Soit $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{array}$. $\varphi$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. De plus, pour tout $q\in\mathbb{C}$, $\varphi\left((q^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)=(q-1)\,(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}\neq 0$, $q-1$ est valeur propre de $\varphi$ et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un vecteur propre de $\varphi$ associé à la valeur propre $q-1$.

Ainsi, la famille des suites géométriques $\left((q^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{q\in\mathbb{C}}$ est une famille de vecteurs propres de $\varphi$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. On en déduit que famille $\left((q^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{q\in\mathbb{C}}$ est libre.

---

Une conséquence immédiate du théorème 32 est :

**Théorème 33.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle et $f$ un endomorphisme de $E$.
Alors, $f$ admet au plus $n$ valeurs propres et en particulier, $f$ admet un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs propres.

• Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors, $A$ admet au plus $n$ valeurs propres et en particulier, $A$ admet un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs propres.

**Démonstration .** Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et on conclut avec le théorème 32.

❏

**Exercice 8.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle. Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ vérifiant $fg-gf=f$.

**1)** Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^kg-gf^k=kf^k$.
**2)** Soit $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E) & \rightarrow & \mathscr{L}(E)\\ h & \mapsto & fh-hf\end{array}$. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.
**3)** Déduire de ce qui précède que $f$ est nilpotent.

**Solution 8.**

**1)** Le résultat est clair pour $k=0$ ou $k=1$. Soit $k\geqslant 2$.

$$\begin{aligned}f^kg-gf^k&=\sum_{i=0}^{k-1}\left(f^{k-i}gf^i-f^{k-(i+1)}gf^{i+1}\right)\ \text{(somme télescopique)}\\&=\sum_{i=0}^{k-1}f^{k-i-1}\,(fg-gf)\,f^i=\sum_{i=0}^{k-1}f^{k-i-1}\circ f\circ f^i=\sum_{i=0}^{k-1}f^k=kf^k.\end{aligned}$$

On a montré que $\forall k\in\mathbb{N},\ f^kg-gf^k=kf^k$.

**2)** Soit $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E) & \rightarrow & \mathscr{L}(E)\\ h & \mapsto & f\circ h-h\circ f\end{array}$. Tout d'abord, $\varphi\,(\mathscr{L}(E))\subset\mathscr{L}(E)$ car $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau. Ensuite, pour $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{K}^2$ et $(h_1,h_2)\in(\mathscr{L}(E))^2$,

$$\begin{aligned}\varphi\,(\alpha_1h_1+\alpha_2h_2)&=f\,(\alpha_1h_1+\alpha_2h_2)-(\alpha_1h_1+\alpha_2h_2)\,f=\alpha_1\,(fh_1-h_1f)+\alpha_2\,(fh_2-h_2f)\\&=\alpha_1\varphi\,(h_1)+\alpha_2\varphi\,(h_2)\,.\end{aligned}$$

Donc, $\varphi\in\mathscr{L}\,(\mathscr{L}(E))$.

**3)** Supposons que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $f^k\neq 0$. D'après 1), $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\varphi\left(f^k\right)=kf^k$. Puisque $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $f^k\neq 0$, on en déduit que $\varphi$ admet pour valeurs propres tous les entiers naturels non nuls.

Ceci est impossible car $\dim\,(\mathscr{L}(E))=n^2<+\infty$. Donc, $\exists k\in\mathbb{N}^*/\ f^k=0$ et $f$ nilpotent.

---

**Exercice 9.** Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{2n}[X] & \to & \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P & \mapsto & (X^2-1)P' - 2nXP \end{array}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

**1)** Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$.

**2)** Déterminer les valeurs propres de $\varphi$.

**Solution 9.**

**1)** Soit $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. deg $\left(\left(X^2-1\right)P'\right) \leqslant 2n+1$ et deg $(2nXP) \leqslant 2n+1$. Donc, deg $(\varphi(P)) \leqslant (2n+1)$. De plus, si on pose $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, le coefficient de $X^{2n+1}$ dans $\varphi(P)$ est

$$a_{2n} \times (2n-2n) = 0.$$

Donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. D'autre part, si $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_{2n}[X])^2$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) &= \left(X^2-1\right)(\alpha_1 P_1' + \alpha_2 P_2') - 2nX(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) \\ &= \alpha_1\left(\left(X^2-1\right)P_1' - 2nXP_1\right) + \alpha_2\left(\left(X^2-1\right)P_2' - 2nXP_2\right) \\ &= \alpha_1 \varphi(P_1) + \alpha_2 \varphi(P_2).\end{aligned}$$

On a montré que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{2n}[X])$.

**2)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de $\varphi$. Il existe $P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$.

$$\begin{aligned}\varphi(P) = \lambda P &\Leftrightarrow \left(X^2-1\right)P' - 2nXP = \lambda P \Leftrightarrow \left(X^2-1\right)P' = (2nX+\lambda)P \\ &\Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{2nX+\lambda}{X^2-1} \text{ (car } P \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{(2n+\lambda)/2}{X-1} + \frac{(2n-\lambda)/2}{X+1}.\end{aligned}$$

En identifiant à la décomposition en éléments simples usuelles de $\frac{P'}{P}$ (si $P = K(X-z_1)^{\alpha_1} \dots (X-z_k)^{\alpha_k}$ où $K \neq 0$, les $z_i$ sont des complexes deux à deux distincts et $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$, alors $\frac{P'}{P} = \frac{\alpha_1}{X-z_1} + \dots + \frac{\alpha_k}{X-z_k}$), on voit que $P$ est nécessairement de degré $\frac{2n+\lambda}{2} + \frac{2n-\lambda}{2} = 2n$ puis que $P$ est nécessairement de la forme $K(X-1)^k(X+1)^{2n-k}$ où $K \in \mathbb{R}^*$ puis $k \in [\![0, 2n]\!]$.

Réciproquement, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$, posons $P_k = (X-1)^k(X+1)^{2n-k}$. D'après ce qui précède, un vecteur propre de $\varphi$ est nécessairement de la forme $KP_k$ où $k \in [\![0, 2n]\!]$ et $K \in \mathbb{R}^*$. Or,

- $\varphi(P_0) = (2n)\left(X^2-1\right)(X+1)^{2n-1} - 2nX(X+1)^{2n} = (2n(X-1) - 2nX)(X+1)^{2n} = -2nP_0$ ;
- $\varphi(P_{2n}) = (2n)(X^2-1)(X-1)^{2n-1} - 2nX(X-1)^{2n} = (2n(X+1) - 2nX)(X-1)^{2n} = 2nP_{2n}$ ;
- Pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\varphi(P_k) &= \left(X^2-1\right)\left[k(X-1)^{k-1}(X+1)^{2n-k} + (2n-k)(X-1)^k(X+1)^{2n-k-1}\right] - 2nX(X-1)^k(X+1)^{2n-k} \\ &= (k(X+1) + (2n-k)(X-1) - 2nX)(X-1)^k(X+1)^{2n-k} = 2(k-n)P_k,\end{aligned}$$

  ce qui reste vrai pour $k = 0$ ou $2n$. Puisque chaque $P_k$ est non nul, ceci montre que les nombres $2(k-n)$, $k \in [\![0, 2n]\!]$, sont valeurs propres de $\varphi$.

En résumé, une valeur propre de $\varphi$ est nécessairement de la forme $\lambda_k = 2(k-n)$ pour $k \in [\![0, 2n]\!]$ et réciproquement, chaque $\lambda_k$, $k \in [\![0, 2n]\!]$, est valeur propre de $\varphi$. On a montré que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \{2(k-n),\ k \in [\![0, 2n]\!]\}.}$$

### 3.2 Sous-espaces propres

**Théorème 34.**

• Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f$ un endomorphisme de $E$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble des vecteurs $x$ de $E$ tels que $f(x) = \lambda x$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble des vecteurs colonnes $X$ tels que $AX = \lambda X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration . On démontre le résultat pour une endomorphisme $f$. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (f - \lambda Id_E)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}(f - \lambda Id_E).$$

L'ensemble des vecteurs $x$ de $E$ tels que $f(x) = \lambda x$ est donc $\text{Ker}(f - \lambda Id_E)$. En particulier, puisque $f - \lambda Id_E \in \mathscr{L}(E)$, l'ensemble des vecteurs $x$ de $E$ tels que $f(x) = \lambda x$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

❏

Définition 10.
• Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis $f$ un endomorphisme de $E$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre éventuelle de $f$. Le **sous-espace propre** de $f$ associé à la valeur propre $\lambda$ est

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda Id_E) \text{ (ou plus simplement } E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id_E)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre éventuelle de $A$. Le **sous-espace propre** de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ est

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) \text{ (ou plus simplement } E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)).$$

Par définition d'une valeur propre,

**Théorème 35.**
• $\lambda$ est valeur propre de $f \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si $\text{Ker}(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}$.
• $\lambda$ est valeur propre de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$.

⇛ **Commentaire** .

◇ *Quand $\lambda$ n'est pas une valeur propre de $f$, Ker$(f - \lambda Id_E) = \{0\}$. Dans ce cas, Ker$(f - \lambda Id_E)$ n'est pas un sous-espace propre de $f$.*

◇ *Quand $\lambda$ est une valeur propre de $f$, par définition, le sous-espace propre $E_\lambda(f) =$ Ker$(f - \lambda Id_E)$ associé à $\lambda$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Dans ce cas, on trouve dans $E_\lambda(f)$ deux types de vecteurs : d'une part le vecteur nul et d'autre part les vecteurs propres de $f$ associés à la valeur propres $\lambda$ (vecteurs propres qui sont par définition non nuls).*

◇ *Pour tout $x$ de $E_\lambda(f)$, $f(x) = \lambda x$. Donc, la restriction de $f$ à $E_\lambda(f)$ « est » l'homothétie de rapport $\lambda$.*

◇ *On rappelle un résultat (théorème 25, page 17) et on le réénonce avec le nouveau vocabulaire : si $f$ et $g$ sont deux endomorphismes qui commutent, les sous-espaces propres de $g$ sont stables par $f$.*

**Exercice 10.** Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie non nulle. On suppose que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $f$ et $g$ ont un vecteur propre en commun.

**Solution 10.** Puisque $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $f$ admet au moins une valeur propre $\lambda$. Par définition, $E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda Id_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Puisque $g \circ f = f \circ g$, on sait que $g$ laisse stable $E_\lambda(f)$. Par suite, l'application $\tilde{g} : \begin{array}{ccc} E_\lambda(f) & \to & E_\lambda(f) \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$ est un endomorphisme de $E_\lambda(f)$. Puisque $E_\lambda(f)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $\tilde{g}$ admet au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre $x_0$ (associé à cette valeur propre).

$x_0$ est par construction un vecteur propre de $g$. D'autre part, $x_0$ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(f - \lambda Id_E)$ et donc $x_0$ est un vecteur propre de $f$.

On a trouvé un vecteur propre commun à $f$ et à $g$.

---

On donne maintenant une propriété importante des sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice :

**Théorème 36.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ puis $f$ un endomorphisme de $E$.

On suppose que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de $f$. Alors, la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ est directe.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de $A$. Alors, la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A)$ est directe.

**Démonstration .** Montrons le résultat par récurrence sur $p$.

• Si $p = 1$, la somme $\sum_{i=1}^{1} E_{\lambda_i}$ est directe.

• Soit $p \geqslant 1$. Supposons qu'une somme de $p$ sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes soit directe.
Soit $f$ un endomorphisme de $E$ admettant (au moins) $p+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$.
Montrons que la somme $\sum_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i}$ est directe.

On sait déjà par hypothèse de récurrence que la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ est directe et donc que $\forall i \in [\![2, p]\!]$, $E_{\lambda_i} \cap \sum_{j<i} E_{\lambda_j} = \{0\}$ (si $p = 1$, il n'y a plus rien à dire).

Soit $x \in E_{\lambda_{p+1}} \cap \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$. Donc, $x \in E_{\lambda_{p+1}}$ et il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in E_{\lambda_1} \times \ldots \times E_{\lambda_p}$ tel que

$$x = x_1 + \ldots + x_p \qquad \text{(I)}.$$

En prenant l'image des deux membres par $f$, on obtient

$$\lambda_{p+1} x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p \qquad \text{(II)}.$$

Puis $\text{(II)} - \lambda_{p+1}\text{(I)}$ fournit

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\, x_1}_{\in E_{\lambda_1}} + \ldots + \underbrace{(\lambda_p - \lambda_{p+1})\, x_p}_{\in E_{\lambda_p}} = 0.$$

Puisque la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ est directe, on en déduit que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_{p+1})\, x_i = 0$ et donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $x_i = 0$ car $\lambda_i - \lambda_{p+1} \neq 0$. Mais alors, (I) fournit $x = 0$.

Ceci montre que $E_{\lambda_{p+1}} \cap \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i} = \{0\}$ puis que $\forall i \in [\![2, p+1]\!]$, $E_{\lambda_i} \cap \sum_{j<i} E_{\lambda_j} = \{0\}$ et finalement que la somme $\sum_{i=1}^{p+1} E_{\lambda_i}$ est directe.

Le résultat est démontré par récurrence.

❏

# 4 Endomorphismes ou matrices diagonalisables

## 4.1 Définition

On commence par la définition d'un endomorphisme diagonalisable en dimension quelconque non nulle.

Définition 11. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul puis $f$ un endomorphisme de $E$.
$f$ est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$.

**Exemple 1.** Une homothètie ($f = \lambda \mathrm{Id}_E$) est diagonalisable car toute base de $E$ est constituée de vecteurs propres de $f$ ($\forall x \neq 0,\ f(x) = \lambda.x$). ❏

**Exemple 2.** Considérons $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array}$. $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. De plus, $f(1) = 0 = 0.1$ et pour $n \geqslant 1$, $f(X^n) = X \times nX^{n-1} = n.X^n$. Donc, la base canonique de $\mathbb{K}[X]$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ constituée de vecteurs propres de $f$. On en déduit que $f$ est diagonalisable. ❏

On donne ensuite la définition d'un endomorphisme diagonalisable en dimension finie non nulle et d'une matrice diagonalisable, définition qui motive bien davantage la référence à une diagonale.

DÉFINITION 12.

• Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f$ un endomorphisme de $E$.
$f$ est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est une matrice diagonale.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$A$ est **diagonalisable** si et seulement si $A$ est semblable à une matrice diagonale.

Les formules de changement de base fournissent immédiatement :

**Théorème 37.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $\mathscr{B}$ une base de $E$.
Soient $f$ un endomorphisme de $E$ puis $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors,

$f$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

**Exemple 1.** Une matrice diagonale est diagonalisable (car semblable à elle-même). ❏

**Exemple 2.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ distinct de $\{0\}$ et de $E$ puis $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$.
On note $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$ et $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$. Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Pour tout vecteur $x$ de $F$, on a $p(x) = x = 1.x$ et $s(x) = x = 1.x$ et pour tout vecteur $x$ de $G$, on a $p(x) = 0 = 0.x$ et $s(x) = -x = (-1).x$. Donc, $\mathscr{B}$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $p$ ou de $s$. On en déduit que $p$ et $s$ sont des endomorphismes diagonalisables.
On note que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \text{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \text{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$. ❏

## 4.2 Premières caractérisations de la diagonalisabilité en dimension finie

**Théorème 38.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f$ un endomorphisme de $E$.

$f$ est diagonalisable si et seulement si $E$ est somme directe des sous-espaces propres de $f$.

**Démonstration.** On sait déjà que si $f$ admet au moins une valeur propre, alors $f$ admet un nombre fini de valeurs propres deux à deux distinctes et que la somme des sous-espaces propres de $f$ est directe.

• Supposons que $E$ soit somme directe des sous-espaces propres de $f$ (ce qui suppose implicitement que $f$ admet au moins une valeur propre puisque $\dim(E) \geqslant 1$). Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f$ ($p \leqslant n = \dim(E)$). Une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$ (car chaque vecteur de $\mathscr{B}$ est un vecteur non nul d'un sous-espace propre de $f$). Donc, $f$ est diagonalisable.

• Supposons que $f$ soit diagonalisable (ce qui suppose implicitement que $f$ admet au moins une valeur propre). Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$. On regroupe alors les vecteurs de $\mathscr{B}$ associés à une même valeur propre et on obtient une base $\mathscr{B}' = \left(e_{1,1}, \ldots, e_{n_1,1}, \ldots, e_{1,q}, \ldots, e_{n_q,q}\right)$ où $e_{i,j}$ est un vecteur propre associé à une certaine valeur propre $\mu_j$ et où $\mu_1, \ldots, \mu_q$, $(1 \leqslant q \leqslant p)$, sont des valeurs propres deux à deux distinctes de $f$.
Pour $j \in [\![1, q]\!]$, on pose $F_j = \text{Vect}\left(e_{1,j}, \ldots, e_{n_j,j}\right)$. Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $E$, on sait que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_q$. D'autre part, les vecteurs d'une base de $F_j$ sont des vecteurs propres de $f$ associés à une même valeur propre. Donc chaque $F_j$ est contenu dans un $E_{\lambda_k}$ et deux $F_j$ distincts sont contenus dans deux $E_\lambda$ distincts. On en déduit que

$$E = \sum_{j=1}^{q} F_j \subset \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i},$$

puis que $E = \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ et enfin que $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}$ (on note alors que $q = p$, que $\mu_1, \ldots, \mu_q$ sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et que $F_1, \ldots, F_q$ sont $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$).

**Théorème 39.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle puis $f$ un endomorphisme de $E$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, les valeurs propres deux à deux distinctes de $f$.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$. Alors

$$f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \sum_{i=1}^{p} n_i = n.$$

**Démonstration.** D'après le théorème précédent et le théorème 17, page 9, (en tenant compte du fait que la somme des sous-espaces propres est directe)

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} E_{\lambda_i} \Leftrightarrow n = \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

❏

Une conséquence importante du théorème précédent est :

**Théorème 40.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle puis $f$ un endomorphisme de $E$.

**Si** $f$ a $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, **alors** $f$ est diagonalisable. De plus, dans ce cas, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

**Démonstration.** On reprend les notations du théorème précédent. Si $f$ a $n$ valeurs propres deux à deux distinctes, alors $n \leqslant p \leqslant n$ et donc $p = n$. D'autre part, chaque $E_{\lambda_i}$ est par définition non nul et donc chaque $n_i$ est supérieur ou égal à 1. Par suite,

$$n \geqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{p} n_i = \sum_{i=1}^{n} n_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Ceci montre tout à la fois que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i = n$ et donc que $f$ est diagonalisable et aussi que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $n_i = 1$.

❏

# 5 Polynôme caractéristique

## 5.1 Polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme

### 5.1.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Dans la démonstration du théorème 31, page 23, on a écrit : $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$. Ce faisant, nous avons fait apparaître un polynôme (le polynôme $z \mapsto \det(f - z\mathrm{Id}_E)$) dont les racines sont les valeurs propres de $f$. Ce polynôme a un défaut : son coefficient dominant est $(-1)^n$ et il n'est pas unitaire. On adopte donc la définition suivante :

Définition 13. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Le **polynôme caractéristique** de la matrice $A$ est la fonction polynomiale $\chi_A \; : \; \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$ ou encore le polynôme $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

⇛ **Commentaire**. *Il est clair que* $\det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \ldots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X - a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \ldots & -a_{n,n-1} & X - a_{n,n} \end{vmatrix}$ *est un polynôme.*

**Exemple.** Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors immédiatement $\chi_A = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$. Plus généralement, si $A$ est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) du type $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \ldots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$. ❏

On a immédiatement :

**Théorème 41.** Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0.$$

⇛ **Commentaire** . *Les racines du polynôme caractéristique de la matrice $A$ sont les valeurs propres de $A$. En particulier, les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses coefficients diagonaux.*

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $-A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ puis, en développant suivant la dernière ligne,

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & 1 & 4 \\ -4 & X+2 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\left[(X-3)(X+2)+4\right] = (X-2)(X^2-X-2) = (X-2)(X+1)(X-2)$$
$$= (X-1)(X-2)^2.$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$. ❑

### 5.1.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition 14. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$ puis $f$ un endomorphisme de $E$.
Le **polynôme caractéristique** de l'endomorphisme $f$ est la fonction polynomiale $\chi_f \ :\ \lambda \mapsto \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$ ou encore le polynôme $\chi_f = \det(X\mathrm{Id}_E - f)$.

On rappelle que le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de sa matrice dans une base donnée et que ce déterminant ne dépend pas du choix d'une base.

## 5.2 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 14. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ puis $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $A$.
L'**ordre de multiplicité** de la valeur propre $\lambda$ est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de $A$.

Si $\lambda$ est racine simple de $\chi_A$, on dit que $\lambda$ est valeur propre simple de $A$.
Si $\lambda$ est racine double de $\chi_A$, on dit que $\lambda$ est valeur propre double de $A$ ...
Si $\lambda$ est racine d'ordre au moins égal à 2 de $\chi_A$, on dit que $\lambda$ est valeur propre multiple de $A$.

⇛ **Commentaire** .

◇ *Par convention, une valeur propre d'ordre $0$ n'est pas une valeur propre de $A$.*

◇ *Une valeur propre donnée d'une matrice $A$ peut donc « être valeur propre plusieurs fois ». La définition du spectre d'une matrice (définition 9, page 20) est devenue insuffisante devant cette nouvelle situation. Par exemple, on a vu que si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. Quand on lit Sp$(A) = \{1, 2\}$, on ne voit pas que le nombre $2$ est valeur propre double de $A$. On a deux manières de pallier à cette difficulté. La première est d'écrire Sp$(A) = \{1(1); 2(2)\}$ en précisant entre parenthèses l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre. Cette notation peut s'avérer pénible à lire dans certaines situations. La deuxième est de ne plus parler de l'**ensemble** des valeurs propres mais plutôt de la **famille** des valeurs propres. Dans ce cas, on écrira Sp$(A) = (1, 2, 2)$. Dorénavant, la plupart du temps, le mot spectre désignera la famille des valeurs propres et de toute façon, on précisera toujours explicitement quelle est la signification adoptée.*

Dans ce qui suit suit, l'ordre de multiplicité d'une valeur propre $\lambda$ sera noté $o(\lambda)$.

**Théorème 42.**

• Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\lambda$ une (éventuelle) valeur propre de $f$. Alors,

$$1 \leqslant \dim\left(E_\lambda(f)\right) \leqslant o(\lambda) \text{ et donc aussi } o(\lambda) \geqslant \dim\left(E_\lambda(f)\right) \geqslant 1.$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda$ une (éventuelle) valeur propre de $A$. Alors,

$$1 \leqslant \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leqslant o(\lambda) \text{ et donc aussi } o(\lambda) \geqslant \dim\left(E_\lambda(A)\right) \geqslant 1.$$

**Démonstration .** Notons $p$ la dimension de $E_\lambda(f)$. Par définition d'une valeur propre, $E_\lambda(f) \neq \{0\}$ et donc $p \geqslant 1$.
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E_\lambda(f)$ que l'on complète éventuellement en $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de $E$. La matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Un calcul par blocs fournit alors

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \det \begin{pmatrix} (X-\lambda)\, I_p & -C \\ 0 & XI_{n-p} - B \end{pmatrix} = (X-\lambda)^p \chi_B.$$

On en déduit que $o(\lambda) \geqslant p$.

❏

⇛ **Commentaire** .
◇ *On peut se demander si la démonstration précédente n'a pas en fait permis d'établir que* $o(\lambda) = p$. *Ce n'est pas le cas car* $\lambda$ *peut encore être racine de* $\chi_B$. *Considérons par exemple la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Le polynôme caractéristique de* $A$ *est* $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$. $1$ *est donc valeur propre d'ordre* $2$. *Maintenant, d'après le théorème du rang*

$$\textit{dim}\,(\textit{Ker}\,(A - I_3)) = 3 - \textit{rg}\,(A - I_3) = 3 - \textit{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

*Donc,* $\textit{dim}\,(E_1(A)) = 1 < 2$. *Si on n'est toujours pas convaincu, on peut déterminer explicitement* $E_1(A)$. *Soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = x \\ y = y \\ 2z = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

*Donc,* $E_1(A)$ *est la droite vectorielle engendrée par le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ❏

◇ *Le théorème 42 fournit un encadrement de la dimension d'un sous-espace propre. Par exemple, si* $\chi_A = (X-1)^2(X-2)$, *la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre* $1$ *est* $1$ *ou* $2$. *Mais lu en sens inverse, le théorème 42 fournit une minoration de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre :*

$$o(\lambda) \geqslant \textit{dim}\,(\textit{Ker}\,(A - \lambda I_n)).$$

*Ce résultat est fréquemment utilisé dans la pratique quand la dimension de* $\textit{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ *peut être obtenue rapidement sans déterminer explicitement le noyau de la matrice* $A - \lambda I_n$ *par le théorème du rang :*

$$o(\lambda) \geqslant \textit{dim}\,(\textit{Ker}\,(A - \lambda I_n)) = n - \textit{rg}\,(A - \lambda I_n).$$

Une conséquence immédiate du théorème 42 est :

**Théorème 43.**

• Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit $\lambda$ une (éventuelle) valeur propre simple de $f$. Alors, $\dim(E_\lambda(f)) = 1$.
• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda$ une (éventuelle) valeur propre simple de $A$. Alors, $\dim(E_\lambda(A)) = 1$.

⇛ **Commentaire** . *Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est toujours une droite vectorielle.*

## 5.3 Degré et coefficients du polynôme caractéristique

Tout d'abord, $\chi_A$ est un polynôme **unitaire, de degré** $n$ :

**Théorème 44.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\deg(\chi_A) = n \text{ et } \mathrm{dom}\,(\chi_A) = 1.$$

**Démonstration.** Posons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $XI_n - A = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $\alpha_{i,j} = \left\{\begin{array}{l} X - a_{i,i} \text{ si } i = j \\ -a_{i,j} \text{ si } i \neq j \end{array}\right.$.
En développant complètement $\det(XI_n - A)$, on obtient $\chi_A = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(n),n}$. Chacun des $n!$ termes de cette somme est un produit de $n$ polynômes de degré inférieur ou égal à $1$ et donc chacun des $n!$ termes de la somme est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$. Ceci montre que $\deg(\chi_A) \leqslant n$.
De plus, un terme $\varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(n),n}$ est de degré $n$ exactement si et seulement si chaque facteur est de degré $1$ exactement. Ceci est équivalent au fait que $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\chi_A &= (X - a_{1,1})\dots(X - a_{n,n}) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1\\ &= X^n + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1.\end{aligned}$$

On a montré que $\chi_A$ est un polynôme unitaire, de degré $n$.

❏

Une conséquence importante du théorème 44 est :

**Théorème 45.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $A$ admet au plus $n$ valeurs propres (en tenant compte de l'ordre de multiplicité).

Si de plus $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors $A$ admet exactement $n$ valeurs propres (en tenant compte de l'ordre de multiplicité).

⇛ **Commentaire**. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou bien si $\chi_A$ soit scindé sur $\mathbb{K}$, on peut écrire ou bien*

$$\chi_A = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n)$$

*où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sont les valeurs propres de $A$ distinctes ou confondues, ou bien*

$$\chi_A = (X - \lambda_1)^{\alpha_1}\dots(X - \lambda_p)^{\alpha_p},$$

*où cette fois-ci, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, sont les valeurs propres deux à deux distinctes de $A$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, les ordres de multiplicité respectifs de ces valeurs propres.*

**Exercice 11.** Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$.
A quelle condition nécessaire et suffisante la matrice $A$ est-elle inversible ?

**Solution 11.** $\mathrm{rg}\,(A - (a-b)I_n) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} b & \dots & b \\ \vdots & & \vdots \\ b & \dots & b \end{pmatrix} \leqslant 1$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - (a-b)I_n)) \geqslant n - 1 > 0$. Ceci montre que $a - b$ est valeur propre de la matrice $A$ et que l' ordre de multiplicité de $a - b$ vérifie

$$o\,(a-b) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}\,(A - (a-b)I_n)) \geqslant n - 1.$$

$a - b$ est valeur propre de $A$ d'ordre $n - 1$ **au moins**. On vient en particulier de trouver $n - 1$ des $n$ valeurs propres de $A$ dans $\mathbb{C}$, toutes égales à $a - b$.

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. $U$ est un vecteur non nul et immédiatement $AU = (a + (n-1)b)U$. Donc, $a + (n-1)b$ est valeur propre de $A$. De plus,

$$a + (n-1)b = a - b \Leftrightarrow nb = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

**1er cas.** Si $b \neq 0$, $a - b$ est valeur propre d'ordre $n - 1$ exactement et $a + (n-1)b$ est valeur propre simple de $A$. Dans ce cas,

$$\mathrm{Sp}(A) = \left(\underbrace{(a-b), \dots, (a-b)}_{n-1}, a + (n-1)b\right) \text{ et } \chi_A = (X - (a-b))^{n-1}(X - (a + (n-1)b)).$$

**2 ème cas.** Si $b = 0$, $A = aI_n = \text{diag}(a, \dots, a)$. Dans ce cas,

$$\text{Sp}(A) = (a, \dots, a) \text{ et } \chi_A = (X - a)^n.$$

Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{Sp}(A) = ((a - b), \dots, (a - b), a + (n - 1)b) \text{ et } \chi_A = (X - (a - b))^{n-1} (X - (a + (n - 1)b)).}$$

En particulier,

$$A \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(A) \Leftrightarrow a - b \neq 0 \text{et } a + (n - 1)b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b \text{ et } a \neq -(n - 1)b.$$

---

Continuons à analyser les coefficients du polynôme caractéristique.

**Théorème 46.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\chi_A = X^n - (\text{Tr}(A)) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A).$$

En particulier,

**Théorème 47.** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\chi_A = X^2 - (\text{Tr}(A)) X + \det(A).$$

**Démonstration .** (du théorème 46). Le coefficient constant de $\chi_A$ est sa valeur en $0$. Puisque $\chi_A = \det (XI_n - A)$, le coefficient constant de $\chi_A$ est $\det(-A)$ ou encore $(-1)^n \det(A)$.

Pour le coefficient de $X^{n-1}$, reprenons la démonstration du théorème 44. Quand $\sigma \neq \text{Id}_{[\![1,n]\!]}$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) \neq i$. Posons $j = \sigma^{-1}(i)$ de sorte que $i = \sigma(j)$. $j$ n'est pas $i$ car sinon $i = \sigma(i)$ ce qui est faux. On ne peut pas non plus avoir $\sigma(j) = j$ car alors $j = \sigma(j) = i$ ce qui est faux. Mais alors, $\alpha_{\sigma(i),i} = -a_{\sigma(i),i}$ et $\alpha_{\sigma(j),j} = -a_{\sigma(j),j}$ (toujours avec les notations de la démonstration du théorème 44). Le terme

$$\varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(i),i} \dots \alpha_{\sigma(j),j} \dots \alpha_{\sigma(n),n}$$

est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 2$. Il reste

$$\begin{aligned}
\chi_A &= (X - a_{1,1}) \dots (X - a_{n,n}) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n - 2 \\
&= X^n - (a_{1,1} + \dots + a_{n,n}) X^{n-1} + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n - 2 \\
&= X^n - (\text{Tr}(A)) X^{n-1} + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n - 2.
\end{aligned}$$

❑

On fait maintenant le lien entre les coefficients du polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice. Dans le théorème qui suit $A$ est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ (étant entendu qu'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$, sous-corps de $\mathbb{C}$, est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$) de sorte que son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k).$$

On pose $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, $\sigma_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et plus généralement, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}.$$

Les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé fournissent immédiatement :

**Théorème 48.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\chi_A = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^k \sigma_k X^{n-k} + \dots + (-1)^n \sigma_n.$$

En particulier,

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \text{ et } \det(A) = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n.$$

Ainsi,

**la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres, chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité**

et

**le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres, chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.**

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 1 est valeur propre de $A$ car $\mathrm{rg}\,(A - I_3) = 1 < 3$. Plus précisément, $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(A - I_3)) = 2$ et donc $1$ est valeur propre de $A$ d'ordre **au moins** 2. On a ainsi deviné deux valeurs propres de $A$ dans $\mathbb{C}$. La dernière valeur propre $\lambda$ de $A$ est fournie par la trace de $A$ :

$$1 + 1 + \lambda = \mathrm{Tr}(A) = 6$$

et donc $\lambda = 4$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = (1, 1, 4)$ ou encore $\chi_A = (X - 1)^2(X - 4)$. De plus, $\det(A) = 1 \times 1 \times 4 = 4$. ❑

Terminons cette séquence sur les racines et les coefficients du polynôme caractéristique par deux exercices, l'un s'intéressant aux valeurs propres de $A^{-1}$ sans tenir compte de leurs ordres de multiplicité et l'autre tenant compte des ordres de multiplicité.

**Exercice 12.** Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Montrer que

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ valeur propre de } A^{-1}.$$

**Solution 12.** Puisque $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on sait que $0$ n'est pas valeur propre de $A$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. En multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$ à gauche, on obtient $\frac{1}{\lambda}X = A^{-1}X$. Puisque $X \neq 0$, ceci montre que $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de $A^{-1}$.

Réciproquement, si $\lambda$ est une valeur propre de $A^{-1}$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. On a montré que

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ valeur propre de } A^{-1}.$$

---

⇛ **Commentaire**.

◇ *La solution précédente peut être améliorée. Soit* $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}A^{-1} \times AX = \frac{1}{\lambda}A^{-1} \times \lambda X \Leftrightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X.$$

*Ceci redémontre que* $\lambda$ *est valeur propre de* $A$ *si et seulement si* $\frac{1}{\lambda}$ *est valeur propre de* $A^{-1}$ *mais établit un résultat plus précis : si* $\lambda$ *est valeur propre de* $A$ *(et donc* $\frac{1}{\lambda}$ *est valeur propre de* $A^{-1}$*), alors*

$$E_\lambda(A) = E_{\frac{1}{\lambda}}\left(A^{-1}\right)$$

*où* $E_\lambda(A)$ *est le sous-espace propre de* $A$ *associé à la valeur propre* $\lambda$ *et* $E_{\frac{1}{\lambda}}\left(A^{-1}\right)$ *est le sous-espace propre de* $A^{-1}$ *associé à la valeur propre* $\frac{1}{\lambda}$. ❑

◇ *L'exercice 12 montre que* $Sp\left(A^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in Sp(A)\right\}$ *ou encore l'exercice 12 fournit l'****ensemble*** *des valeurs propres de* $A^{-1}$. *Mais cet exercice ne dit rien de l'ordre multiplicité de chaque valeur propre. L'exercice suivant précise le résultat en fournissant la* ***famille*** *des valeurs propres de* $A^{-1}$.

**Exercice 13.** Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Exprimer le polynôme caractéristique de $A^{-1}$ en fonction du polynôme caractéristique de $A$. En déduire que

$$\text{si } \mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \text{ alors } \mathrm{Sp}\left(A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

**Solution 13.** Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

$$\chi_{A^{-1}} = \det\left(XI_n - A^{-1}\right) = \det\left(-XA^{-1}\left(\frac{1}{X}I_n - A\right)\right) = (-X)^n \det\left(A^{-1}\right)\det\left(\frac{1}{X}I_n - A\right) = \frac{(-X)^n}{\det(A)}\chi_A\left(\frac{1}{X}\right).$$

Supposons de plus que $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors (puisque $\det(A)$ est le produit des valeurs propres de $A$, chacune comptée un nombre de fois à son ordre de multiplicité),

$$\begin{aligned}\chi_{A^{-1}} &= \frac{(-X)^n}{\lambda_1 \dots \lambda_n}\left(\frac{1}{X} - \lambda_1\right)\dots\left(\frac{1}{X} - \lambda_n\right) = \left(-\frac{X}{\lambda_1}\left(\frac{1}{X} - \lambda_1\right)\right)\dots\left(-\frac{X}{\lambda_n}\left(\frac{1}{X} - \lambda_n\right)\right)\\ &= \left(X - \frac{1}{\lambda_1}\right)\dots\left(X - \frac{1}{\lambda_n}\right),\end{aligned}$$

et en particulier, $\mathrm{Sp}\left(A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

---

⇛ **Commentaire** . *Si par exemple, Sp*$(A) = (1, 2, 2)$*, l'exercice 12, permet d'affirmer que l'ensemble des valeurs propres de* $A^{-1}$ *est* $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ *ou que la famille des valeurs propres de* $A$ *est ou bien* $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$*, ou bien* $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$*. L'exercice 13 permet d'affirmer plus précisément que la famille des valeurs propres de* $A$ *est* $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

## 5.4 Propriétés du polynôme caractéristique

**Théorème 49.** $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{A^T} = \chi_A$.

**Démonstration .** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\chi_{A^T} = \det\left(XI_n - A^T\right) = \det\left((XI_n - A)^T\right) = \det(XI_n - A) = \chi_A.$$

❑

**Théorème 50.** $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

**Démonstration .** Soit $(A, B) \in (\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

• Supposons tout d'abord $A$ inversible. Puisque deux matrices semblables ont même déterminant, on peut écrire

$$\begin{aligned}\chi_{AB} &= \det(XI_n - AB) = \det\left(A^{-1}(XI_n - AB)A\right) = \det(XI_n - BA)\\ &= \chi_{BA}.\end{aligned}$$

• Supposons maintenant $A$ non inversible. La matrice $A - xI_n$ est inversible sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de $x$ à savoir quand $x$ est une valeur propre de $A$. Donc, pour tout $x$ sauf peut-être un nombre fini,

$$\det(XI_n - (A - xI_n)B) = \det(XI_n - B(A - xI_n)).$$

Les deux expressions ci-dessus sont deux polynômes en $x$ qui coïncident en une infinité de valeurs de $x$. Ces deux polynômes sont donc égaux et en particulier, ces deux polynômes prennent la même valeur en $0$. Quand $x = 0$, on obtient de nouveau $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

❑

**Théorème 51.** Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

**Démonstration .** Soit $(A, B, P) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

$$\chi_B = \chi_{P^{-1}(AP)} = \chi_{(AP)P^{-1}} = \chi_A.$$

❑

⇛ **Commentaire** . *Dire que deux matrices ont même polynôme caractéristique revient à dire que ces deux matrices ont même* ***famille*** *de valeurs propres ou encore ont mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.*

Deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement semblables.
Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, alors $A$ et $B$ ont même polynôme caractéristique à savoir $(X-1)^2$. Pourtant, ces deux matrices ne sont pas semblables car une matrice semblable à $I_2$ est égale à $I_2$ (et $A$ n'est pas égale à $I_2$).

## 5.5 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

On refait un détour par la notion de polynôme caractéristique d'un endomorphisme. On rappelle que

Définition 15. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f$ un endomorphisme de $E$.
Le **polynôme caractéristique** de $f$ est $\chi_f = \det(XId_E - f)$.

Le polynôme caractéristique de $f$ est donc le déterminant de $XI_n - A$ ou encore $\chi_A$ où $A$ est la matrice de $f$ dans une base donnée. Ce résultat ne dépend pas du choix d'une base ou encore si $B$ est la matrice de $f$ dans une autre base, alors $\chi_A = \chi_B$ puisque deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

**Exemple.** Si $f$ est l'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ ou encore si $f = \lambda Id_E$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$, alors la matrice de $f$ dans une base donnée de $E$ est $\lambda I_n$. On en déduit que

$$\chi_f = \chi_{\lambda I_n} = (X-\lambda)^n.$$

❑

**Exercice 14.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces de $E$ supplémentaires dans $E$. Soient $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$ et $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

Déterminer $\chi_p$ et $\chi_s$.

**Solution 14.** Notons $r$ la dimension de $F$ (et donc $\dim(G) = n-r$). Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

On a $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \text{diag}\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{r},\underbrace{0,\ldots,0}_{n-r}\right)$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \text{diag}\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{r},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-r}\right)$. Donc,

$$\chi_p = (X-1)^r X^{n-r} \quad \text{et} \quad \chi_s = (X-1)^r (X+1)^{n-r}.$$

---

**Théorème 52.**

**1)** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$ puis $f$ un endomorphisme nilpotent de $E$. Alors, $\chi_f = X^n$.

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée nilpotente de format $n$. Alors, $\chi_A = X^n$.

Démonstration . Soit $f$ un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $0$ $f$ admet une valeur propre et une seule à savoir $0$ ou encore la famille des valeurs propres de $f$ est $(0,\ldots,0)$. On en déduit que $\chi_f = X^n$.

❑

# 6 Diagonalisation

## 6.1 Une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

**Théorème 53.** (une condition nécessaire et suffisante de diagonalisablité)

• Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
$f$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$A$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

**Démonstration .**

• Supposons que $\chi_f$ soit scindé sur $\mathbb{K}$ et que l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre soit égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

Posons $\chi_f = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les $\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont les valeurs propres deux à deux distinctes de $f$ et les $\alpha_i$ sont leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, posons encore $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$. Par hypothèse, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_i = n_i$. Mais alors,

$$n = \deg(\chi_f) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \sum_{i=1}^{p} n_i.$$

Le théorème 39, page 29, permet d'affirmer que $f$ est diagonalisable.

• Supposons que $f$ soit diagonalisable. $E$ est donc somme directe des sous-espaces propres de $F$ :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de $f$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, posons $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$. Dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} E_{\lambda_i}$, la matrice de $f$ est

$$D = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{n_p}\right).$$

Mais alors, $\chi_f = \chi_D = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{n_i}$. En particulier, $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant.

❏

**Théorème 54.** (une condition suffisante de diagonalisablité)

• Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle. **Si** $f$ a $n$ valeurs propres simples, **alors** $f$ est diagonalisable. De plus, les sous-espaces propres de $f$ sont des droites vectorielles.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. **Si** $A$ a $n$ valeurs propres simples, **alors** $A$ est diagonalisable. De plus, les sous-espaces propres de $A$ sont des droites vectorielles.

**Démonstration .** Si $f$ a $n$ valeurs propres simples, alors en particulier $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Le théorème 43, page 31, permet d'affirmer que les sous-espaces propres de $f$ sont des droites vectorielles. En particulier, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de $f$ est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant. Donc $f$ est diagonalisable. ❏

**Exemple 1.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. $\chi_A = X^2(X-4)$. $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$. $A$ admet $4$ pour valeur propre simple et $0$ pour valeur propre double. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $4$ est obligatoirement une droite vectorielle. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $0$ est de dimension $1$ ou $2$.

$\operatorname{rg}(A) = 2$ et donc $\dim(E_0) = \dim(\operatorname{Ker}(A)) = 1 < 2$. La matrice $A$ n'est pas diagonalisable. ❏

**Exemple 2.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\chi_A = X^2 + 1$. $\chi_A$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Donc, la matrice $A$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Par contre, $\chi_A = (X - i)(X + i)$ est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples. Donc, la matrice $A$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. ❏

**Exercice 15.** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable (dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$) ?

**Solution 15.** $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$. En particulier, $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker}(A - I_4)) = 2 \text{ et } \dim(\operatorname{Ker}(A - 2I_4)) = 2 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A - I_4) = 4 - 2 \text{ et } \operatorname{rg}(A - 2I_4) = 4 - 2 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A - I_4) = 2 \text{ et } \operatorname{rg}(A - 2I_4) = 2. \end{aligned}$$

• $\mathrm{rg}\,(A-I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $a = 0$, $\mathrm{rg}\,(A-I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \\ 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ car $\begin{vmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Si $a \neq 0$, $\mathrm{rg}\,(A-I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geqslant \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ et en particulier, $\mathrm{rg}\,(A-I_4) \neq 2$.

Donc, $\mathrm{rg}\,(A-I_4) = 2 \Leftrightarrow a = 0$.

• $\mathrm{rg}\,(A-2I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

Si $f = 0$, $\mathrm{rg}\,(A-2I_4) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \end{pmatrix} = 2$ car $\begin{vmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Si $f \neq 0$, $\mathrm{rg}\,(A-I_4) \geqslant \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & a & c \\ 0 & -1 & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = 3$ et en particulier, $\mathrm{rg}\,(A-2I_4) \neq 2$.

Donc, $\mathrm{rg}\,(A-2I_4) = 2 \Leftrightarrow f = 0$.

En résumé,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow a = f = 0.}$$

---

## 6.2 Diagonalisation explicite

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Dire que $A$ est diagonalisable équivaut à dire qu'il existe $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = P \times D \times P^{-1}$.

**Diagonaliser** la matrice diagonalisable $A$, c'est trouver explicitement $D$, $P$ et $P^{-1}$.

Les matrices $A$ et $D$ sont semblables. Donc, $\chi_D = \chi_A$ et le spectre $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de $D$ est encore le spectre de $A$. Pour comprendre la matrice $P$, introduisons $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice $A$ et notons $\mathscr{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Dire que $A$ est diagonalisable équivaut à dire que $f$ est diagonalisable. Donc, il existe $\mathscr{B} = (e'_1, \ldots, e'_n)$ base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de $f$. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées aux vecteurs de $\mathscr{B}$ (donc, $\lambda_1$ est valeur propre associée à $e'_1$, ..., $\lambda_n$ est valeur propre associée à $e'_n$).

Par construction, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f\,(e'_i) = \lambda_i e'_i$ et donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = D$. Si on note $P$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$, les formules de changement de bases fournissent

$$A = P \times D \times P^{-1}.$$

Les colonnes de $P$ « sont » donc les vecteurs $e'_1$, ...,$e'_n$. Si on s'exprime uniquement avec un vocabulaire matriciel, alors les colonnes $C_1$, ..., $C_n$ de $P$ forment une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$. Plus précisément, si $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $C_1$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda_1$, ..., $C_n$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda_n$.

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-6 & -2 & 0 \\ -2 & X-3 & 0 \\ 10 & 5 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\,[(X-6)(X-3)-4] = (X-1)\left(X^2 - 9X + 14\right)$$
$$= (X-1)(X-2)(X-7).$$

$\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et donc $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Notons $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

**Détermination de $E_2(A)$.** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -10 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -10x - 5y - z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ z = -10x - 5(-2x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Donc, $E_2(A) = \text{Vect}\,(e_1')$ où $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Détermination de $E_7(A)$.** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in E_7(A) \Leftrightarrow (A - 7I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -10 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \\ -10x - 5y - 6z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ z = -\dfrac{25}{6}y \end{array} \right.$$

Donc, $E_7(A) = \text{Vect}\,(e_2')$ où $e_2' = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -25 \end{pmatrix}$.

**Détermination de $E_1(A)$.** $E_1(A)$ est une droite vectorielle. La troisième colonne de $A$ nous donne $Ae_3 = e_3$. Donc immédiatement $E_1(A) = \text{Vect}\,(e_3')$ où $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$.

Donc, $A = P \times D \times P^{-1}$ où $D = \text{diag}(2, 7, 1)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & -25 & 1 \end{pmatrix}$.

**Calcul de $P^{-1}$.** On sait que si $P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}_0}^{\mathscr{B}}$, alors $P^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_0}$. Or,

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1' = e_1 - 2e_2 \\ e_2' = 12e_1 + 6e_2 - 25e_3 \\ e_3' = e_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_3 = e_3' \\ e_1 - 2e_2 = e_1' \\ 12e_1 + 6e_2 = e_2' + 25e_3' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_3 = e_3' \\ e_1 = \dfrac{1}{15}(3e_1' + e_2' + 25e_3') \\ e_2 = \dfrac{1}{30}(-12e_1' + e_2' + 25e_3') \end{array} \right.$$

Donc, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} & 0 \\ \dfrac{1}{15} & \dfrac{1}{30} & 0 \\ \dfrac{5}{3} & \dfrac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{A = P \times D \times P^{-1} \text{ où } D = \text{diag}(2, 7, 1),\ P = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & -25 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} & 0 \\ \dfrac{1}{15} & \dfrac{1}{30} & 0 \\ \dfrac{5}{3} & \dfrac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}.}$$

## 7 Endomorphismes ou matrices trigonalisables

On a vu dans les paragraphes précédents qu'une matrice prise au hasard n'est pas nécessairement diagonalisable. On va voir dans cette section que par contre, toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

### 7.1 Définition

Définition 16.

• Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f$ un endomorphisme de $E$.
$f$ est trigonalisable (ou triangulable) si et seulement si il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est triangulaire supérieure.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$A$ est trigonalisable (ou triangulable) si et seulement si $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

⇛ **Commentaire** .

◇ *Il est clair que $f$ est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base donnée est trigonalisable.*

◇ *D'après le théorème 9, page 4, toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure. Dans la définition précédente, on aurait pu remplacer « triangulaire supérieure » par « triangulaire inférieure ».* ❏

◇ *Une matrice triangulaire, inférieure ou supérieure, est trigonalisable.*

### 7.2 Une condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité

**Théorème 55.** (une condition nécessaire et suffisante de trigonalisablité)

• Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle. $f$ est trigonalisable si et seulement si $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $A$ est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

En particulier,

**Théorème 56.**

• Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle est trigonalisable.

• Toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.

Démonstration . (du théorème 55.)

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A$ est trigonalisable, il existe $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ tels que $A = P \times T \times P^{-1}$. En posant $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\chi_A = \chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)\,.$$

Puisque les $\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont dans $\mathbb{K}$, ceci montre que $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

• Montrons la réciproque du résultat précédent par récurrence sur $n \geqslant 1$.

• Si $n = 1$, tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire et donc trigonalisable.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que tout élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ soit trigonalisable (dans $\mathbb{K}$).

Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que $\chi_A$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ canoniquement associé à $A$. On note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.
$\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$. En particulier, $A$ admet au moins une valeur propre $\lambda_1$ dans $\mathbb{K}$. $\lambda_1$ est encore une valeur propre de $f$. On note $e_1$ un vecteur propre associé.
$e_1$ est un vecteur non nul et donc la famille $(e_1)$ est libre. On peut compléter cette famille en une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.
La matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}_1$ s'écrit sous la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & L & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K}),$$

où $L$ est un élément de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Les formules de changement de base fournissent $P' \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $A = P'A'P'^{-1}$. Puisque les matrices $A$ et $A'$ sont semblables, $\chi_A = \chi_{A'}$. Un calcul par blocs fournit

$$\chi_A = \chi_{A'} = (X - \lambda_1) \det (XI_n - A_1) = (X - \lambda_1) \chi_{A_1}.$$

Puisque $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$, on peut poser $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_{n+1})$ où les $\lambda_i$ sont dans $\mathbb{K}$. Il vient $(X - \lambda_1) \chi_{A_1} = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_{n+1})$ et donc

$$\chi_{A_1} = (X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_{n+1}).$$

Ainsi, $A_1$ est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $P_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T_1 \in \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{K})$ telles que $A_1 = P_1 T_1 P_1^{-1}$. Soit $P'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

Puisque $\det(P'') = 1 \times \det(P_1) \neq 0$, la matrice $P''$ est inversible. Un calcul par blocs montre que $P''^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs fournit encore

$$\begin{aligned} P''^{-1}A'P'' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & L & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & L & \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1}A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & LP_1 & \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1^{-1}A_1P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & LP_1 & \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Posons $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & LP_1 & \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $P = P'P''$. $P$ est un élément de $GL_{n+1}(\mathbb{K})$, $T$ est un élément de $\mathscr{T}_{n+1,s}(\mathbb{K})$ et

$$P^{-1}AP = P''^{-1}P'^{-1}AP'P'' = P''^{-1}A'P'' = T.$$

La matrice $A$ est donc trigonalisable.

Le résultat est démontré par récurrence.

❏

⇛ **Commentaire** . *Quand on a triangulé et donc écrit $A$ sous la forme $A = PTP^{-1}$, on retrouve sur la diagonale de $T$ la famille des valeurs propres de $A$ (puisque $T$ et $A$ ont même polynôme caractéristique).*

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-6 & 6 & -5 \\ -14 & X+13 & -10 \\ -7 & 6 & X-4 \end{vmatrix} = (X-6)(X^2+9X+8)+14(6X+6)-7(5X+5)$$
$$= (X-6)(X+1)(X+8)+49(X+1) = (X+1)\left(X^2+2X+1\right)$$
$$= (X+1)^3.$$

$-1$ est valeur propre triple de $A$ mais

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(A+I_3\right)\right) = 3-\operatorname{rg}\left(A+I_3\right) = 3-\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 14 & -12 & 10 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} = 3-1 = 2 < 3.$$

Donc, $A$ n'est pas diagonalisable (on aurait aussi pu constater que si $A$ était diagonalisable, $A$ serait semblable à $\operatorname{diag}(-1,-1,-1) = -I_3$ et donc égale à $-I_3$ ce qui n'est pas). Néanmoins, $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc $A$ est trigonalisable dans $\mathbb{R}$. Notons $f$ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$ puis $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\operatorname{Ker}\left(f+Id_E\right)$ est un plan vectoriel. Notons $(e_1', e_2')$ une base de ce plan puis complétons cette famille libre en $\mathscr{B} = (e_1', e_2', e_3')$ base de $\mathbb{R}^3$. Notons $P$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}$. Sans aucun calcul supplémentaire, on peut affirmer que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \times \\ 0 & -1 & \times \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Achevons les calculs. $\operatorname{Ker}\left(f+Id_E\right)$ est le plan vectoriel d'équation $7x-6y+5z=0$. On peut prendre $e_1' = (6,7,0)$ et $e_2' = (0,5,6)$. On pose $e_3' = (0,0,1) = e_3$ puis

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(P) = 30 \neq 0$, $(e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, par construction, $Ae_1' = -e_1'$, $Ae_2' = -e_2'$ et enfin, la dernière colonne de $A+I_3$ fournit

$$\left(A+I_3\right)e_3' = 5e_1+10e_2+5e_3 = \frac{5}{6}\left(6e_1+7e_2\right)+\frac{5}{6}\left(5e_2+6e_3\right) = \frac{5}{6}e_1'+\frac{5}{6}e_2',$$

et donc $Ae_3' = \dfrac{5}{6}e_1'+\dfrac{5}{6}e_2'-e_3'$. Par suite, si $P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5/6 \\ 0 & -1 & 5/6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

❑

## 7.3 Quelques conséquences

**Théorème 57.**

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\operatorname{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Sp}\left(A^k\right) = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right).$$

Plus généralement, si $\pi = a_0 + a_1X + \ldots + a_pX^p$

$$\operatorname{Sp}\left(\pi(A)\right) = \left(\pi\left(\lambda_1\right), \ldots, \pi\left(\lambda_n\right)\right),$$

où $\pi(A) = a_0I_n + a_1A + \ldots + a_pA^p$.

• Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $\operatorname{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \operatorname{Sp}\left(A^k\right) = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right).$$

**Démonstration.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. $A$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T$ dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Mais alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k$ est semblable à $T^k$. Le théorème 11, page 5, fournit alors

$$\mathrm{Sp}\left(A^k\right) = \mathrm{Sp}\left(T^k\right) = \left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)\ (*).$$

Plus généralement, en posant $A = PTP^{-1}$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\pi(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k PT^kP^{-1} = P\pi(T)P^{-1}$ et donc $\pi(A)$ est semblable à $\pi(T)$ puis

$$\mathrm{Sp}(\pi(A)) = \mathrm{Sp}(\pi(T)) = (\pi(\lambda_1), \ldots, \pi(\lambda_n)).$$

Si de plus, $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $0$ n'est pas valeur propre de $A$ et les égalités $(*)$ restent vraies pour $k \in \mathbb{Z}$.

❑

Ainsi, si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors par exemple, $\mathrm{Sp}\left(A^2 - A + I_n\right) = \left(\lambda_1^2 - \lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_n^2 + \lambda_n + 1\right)$.

Une conséquence du théorème 57 est

**Théorème 58.**

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}\left(A^k\right) = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k.$$

- Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Tr}\left(A^k\right) = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k.$$

**Exercice 16.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 3$. Déterminer les valeurs propres de $A$.

**Solution 16.** Les colonnes $C_2, \ldots, C_{n-1}$, de la matrice $A$ sont colinéaires à la colonne $C_1$. Donc, $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$ puis, grâce au théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) \geqslant n - 2 > 0$. $0$ est donc une valeur propre de $A$ et son ordre de multiplicité est au moins $\dim(\mathrm{Ker}(A))$ et donc au moins $n-2$. Il manque deux valeurs propres $\lambda$ et $\mu$.

On obtient une première équation avec la trace de $A$ :

$$0 + \ldots + 0 + \lambda + \mu = \mathrm{Tr}(A) = n$$

et donc $\lambda + \mu = n$. Une deuxième équation est fournie par $\mathrm{Tr}\left(A^2\right)$ :

$$0^2 + \ldots + 0^2 + \lambda^2 + \mu^2 = \mathrm{Tr}\left(A^2\right) = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + \left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2\right),$$

et donc $\lambda^2 + \mu^2 = 2 \times \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \dfrac{n[(n-1)(2n-1) + 3n]}{3} = \dfrac{n\left(2n^2+1\right)}{3}$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = n \\ \lambda^2 + \mu^2 = \dfrac{n\left(2n^2+1\right)}{3} \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = n \\ (\lambda+\mu)^2 - 2\lambda\mu = \dfrac{n\left(2n^2+1\right)}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = n \\ \lambda\mu = \dfrac{1}{2}\left(n^2 - \dfrac{n\left(2n^2+1\right)}{3}\right) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = n \\ \lambda\mu = -\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \lambda \text{ et } \mu \text{ sont les solutions de l'équation } X^2 - nX - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = 0\ (E).
\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $(E)$ est $\Delta = n^2 + 4 \times \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \dfrac{3n^2 + 2n(n-1)(2n-1)}{3} = \dfrac{n\left(4n^2 - 3n + 2\right)}{3}$.
On en déduit que

$$\text{Sp}(A) = \left(\underbrace{0,\ldots,0}_{n-2}, \frac{1}{2}\left(n - \sqrt{\frac{n\left(4n^2-3n+2\right)}{3}}\right), \frac{1}{2}\left(n + \sqrt{\frac{n\left(4n^2-3n+2\right)}{3}}\right)\right).$$

---

⇛ **Commentaire** . *Dans l'exercice précédent, il nous manquait deux valeurs propres* $\lambda$ *et* $\mu$. *Il nous fallait donc deux équations. Une fois écrit* $\lambda + \mu = \text{Tr}(A) = n$, *on pouvait avoir envie d'utiliser le déterminant de* $A$. *Malheureusement, ce déterminant ne sert à rien car il est nul (l'équation obtenue est* $0 \times \lambda \times \mu = 0$*).*

# 8 Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrices

## 8.1 L'algèbre des polynômes en $f$ (ou en $A$)

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f$ un endomorphisme de $E$. Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$ (on n'a pas nécessairement $a_p \neq 0$). On définit l'endomorphisme $P(f)$ par

$$P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k = a_0 \text{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_p f^p.$$

On note $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des $P(f)$ où $P$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

De même, si $A$ est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_p A^p.$$

On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble des $P(A)$ où $P$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Un premier résultat immédiat est :

**Théorème 59.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $f$ puis $\mathscr{B}$ une base de $E$. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ puis $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f)) = P(A)$.

Ensuite,

**Théorème 60.**

- Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$.

  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ (P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$ ;
  $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda P)(f) = \lambda P(f)$ ;
  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ (P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ (P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$ ;
  $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda P)(A) = \lambda P(A)$ ;
  $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2,\ (P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$.

**Démonstration .** On montre les différents résultats pour un endomorphisme $f$.

- Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres, nulles à partir d'un certain rang. Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$. Alors

$$(P + Q)(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) f^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k f^k = P(f) + Q(f).$$

• Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres, nulle à partir d'un certain rang. Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$(\lambda P)(f) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f^k = \lambda P(f).$$

• Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres nulles à partir d'un certain rang. Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$. Alors

$$(P \times Q)(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) f^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k f^k\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k f^k\right) = P(f) \circ Q(f).$$

❑

Ainsi, par exemple, si $P = (X-1)^2(X+2)$, alors

$$P(f) = (f - \mathrm{Id}_E)^2 \circ (f + 2\mathrm{Id}_E)$$

ou

$$P(A) = (A - I_n)^2 \times (A + 2I_n).$$

❑

**Théorème 61.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$. De plus, l'application $\begin{array}{rccc} \varphi_f : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ & P & \mapsto & P(f) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres et $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Im}(\varphi_f)$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$. De plus, l'application $\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ & P & \mapsto & P(A) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres et $\mathbb{K}[A] = \mathrm{Im}(\varphi_A)$.

**Démonstration.** On fait la démonstration pour un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

• Si $P$ est le polynôme nul, alors $P(f) = 0$. Donc, l'endomorphisme nul de $E$ est dans $\mathbb{K}[f]$.

• Soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

$$\lambda P(f) + \mu Q(f) = (\lambda P + \mu Q)(f) \in \mathbb{K}[f].$$

Ceci montre déjà que $\mathbb{K}[f]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{L}(E), +, .)$.

• Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

$$P(f) \circ Q(f) = (P \times Q)(f) \in \mathbb{K}[f].$$

• $\mathrm{Id}_E = 1(f) \in \mathbb{K}[f]$ et donc $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre de $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.

• Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

$$P(f) \circ Q(f) = (P \times Q)(f) = (Q \times P)(f) = Q(f) \circ P(f).$$

Donc, $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative de $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$.

• Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\varphi_f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f) = \lambda \varphi_f(P) + \mu \varphi_f(Q),$$

et

$$\varphi_f(P \times Q) = (P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = \varphi_f(P) \circ \varphi_f(Q),$$

et

$$\varphi_f(1) = 1(f) = \mathrm{Id}_E.$$

Donc, $\varphi_f$ est un morphisme d'algèbres.

❏

⇛ **Commentaire** . *Un moment important dans la démonstration précédente est le fait que*

***deux polynômes en*** $f$ ***commutent.***

## 8.2 Commutant d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

On s'intéresse maintenant à l'ensemble des endomorphismes (respectivement des matrices) qui commutent avec un endomorphisme donné (respectivement une matrice donnée). Il existe de nombreuses situations où savoir que deux endomorphismes commutent est important. Rappelons le binôme de NEWTON

$$(f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k g^{n-k},$$

que l'on peut utiliser uniquement quand $f$ et $g$ commutent. Rappelons aussi le théorème 25, page 17, qui dit que quand deux endomorphismes commutent, l'un des deux endomorphismes laisse stable l'image, le noyau et les sous-espaces propres de l'autre.

D'autre part, il est fréquent que l'on soit amené à chercher des matrices inconnues (ou des endomorphismes) parmi les matrices commutant avec une matrice donnée. L'exemple le plus simple est la recherche des « racines carrées » d'une matrice carrée donnée. Si $A$ est une matrice carrée donnée, les matrices $M$ (s'il en existe) vérifiant $M^2 = A$ commutent avec $A$ car

$$M \times A = M \times M^2 = M^3 = M^2 \times M = A \times M.$$

DÉFINITION 17.

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f$ un endomorphisme de $E$.
Le **commutant** de $f$, noté $C(f)$, est l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui commutent avec $f$.

$$C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E)/\ g \circ f = f \circ g\}.$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Le **commutant** de $A$ est l'ensemble des matrices carrées qui commutent avec $A$.

$$C(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})/\ B \times A = A \times B\}.$$

**Exemple.** Si $f = \lambda \mathrm{Id}_E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $g$ de $\mathscr{L}(E)$,

$$g \circ f = f \circ g = \lambda g.$$

Donc le commutant d'une homothétie est $\mathscr{L}(E)$ tout entier. De même, le commutant d'une matrice scalaire de format $n$ est $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. ❏

On redonne maintenant l'exercice qui consiste à montrer que les matrices scalaires sont les seules matrices commutant avec toute matrice. Ainsi, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A$ est une matrice scalaire si et seulement si $C(A) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 17.**

Déterminer les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

**Solution 17.**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A$ commutent avec toute matrice, alors $A$ commute en particulier avec les matrices élémentaires $E_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Or, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$AE_{i,j}=\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n}a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j}=\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n}a_{k,l}\delta_{l,i}E_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}E_{k,j}$$

$$=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&\dots&0&a_{1,i}&0&\dots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&&0&a_{i,i}&0&&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\dots&0&a_{n,i}&0&\dots&0\end{pmatrix}\\ \uparrow\\ j\text{-ème colonne}\end{array}\begin{array}{l}\longleftarrow i\text{-ème ligne}\\ \\ \\ \end{array}$$

et

$$E_{i,j}A=\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n}a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l}=\sum_{1\leqslant k,l\leqslant n}a_{k,l}\delta_{j,k}E_{i,l}=\sum_{l=1}^{n}a_{j,l}E_{i,l}$$

$$=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&\dots&0&\dots&0\\ \vdots&&&&\vdots\\ 0&\dots&0&\dots&0\\ a_{j,1}&&a_{j,j}&&a_{j,n}\\ 0&\dots&0&\dots&0\\ \vdots&&&&\vdots\\ 0&\dots&0&\dots&0\end{pmatrix}\\ \uparrow\\ j\text{-ème colonne}\end{array}\begin{array}{l}\longleftarrow i\text{-ème ligne}\\ \\ \\ \end{array}$$

Si de plus, $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $AE_{i,j}=E_{i,j}A$, alors $\forall k\neq l$, $a_{k,l}=0$ et $\forall i\neq j$, $a_{i,i}=a_{j,j}$. Donc, $A$ est nécessairement de la forme $\lambda I_n$, $\lambda\in\mathbb{K}$.

Réciproquement, les matrices scalaires commutent avec toute matrice.

---

**Théorème 62.**

- Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f\in\mathscr{L}(E)$. $C(f)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{L}(E),+,.,\circ)$.
- Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $C(A)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,.,\times)$.

**Démonstration .** Montrons que $C(f)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{L}(E),+,.,\circ)$.

- $f\circ 0=0\circ f=0$ et donc $0\in C(f)$. De plus, si $(g,h)\in(C(f))^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, alors

$$(\lambda g+\mu h)\circ f=\lambda g\circ f+\mu h\circ f=\lambda f\circ g+\mu f\circ h=f\circ(\lambda g+\mu h)$$

et donc $\lambda g+\mu h\in C(f)$. Ceci montre déjà que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{L}(E),+,.)$.

- Vérifions que $C(f)$ est stable pour $\circ$. Soit $(g,h)\in(C(f))^2$.

$$(g\circ h)\circ f=g\circ h\circ f=g\circ f\circ h=f\circ g\circ h=f\circ(g\circ h).$$

Donc, $C(f)$ est stable pour $\circ$. Enfin, $Id_E\circ f=f\circ Id_E=f$ et donc $Id_E\in C(f)$. Finalement $C(f)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathscr{L}(E),+,.,\circ)$.

❑

Il ne faut pas croire que deux éléments $g$ et $h$ de $C(f)$ commutent. On a nécessairement $g\circ f=f\circ g$ et $h\circ f=f\circ h$, mais on peut avoir $g\circ h\neq h\circ g$.

Soit $f$ est un endomorphisme donné. Puisque deux polynômes en $f$ commutent, en particulier tout polynôme en $f$ commute avec $f$ ou encore

**Théorème 62.**

- Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f\in\mathscr{L}(E)$. $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(C(f),+,.,\circ)$.
- Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathbb{K}[A]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(C(A),+,.,\times)$.

**Exercice 18.** (dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $f$ est diagonalisable. On note $\lambda_1$, ..., $\lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de $f$ puis $E_{\lambda_1}(f)$, ..., $E_{\lambda_p}(f)$ les sous-espaces propres associés et enfin on note $n_1$, ..., $n_p$ les dimensions respectives de ces sous-espaces propres.

**1)** Montrer que : $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, $g \in C(f) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!]$, $g\left(E_{\lambda_i}(f)\right) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

**2)** En déduire que $\dim(C(f)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i^2$.

**3)** Montrer que $\dim(C(f)) \geqslant n$ avec égalité si et seulement si $f$ a $n$ valeurs propres simples.

**Solution 18.**

**1)** Puisque $f$ est diagonalisable, on a $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}(f)$.

Soit $g \in \mathscr{L}(E)$.

Si $g \in C(f)$, on sait que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $g\left(E_{\lambda_i}(f)\right) \subset E_{\lambda_i}(f)$ (théorème 25, page 17).
Réciproquement, supposons que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $g\left(E_{\lambda_i}\right) \subset g\left(E_{\lambda_i}\right)$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, notons $f_i$ (resp. $g_i$) l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(f)$ induit par $f$ (resp. $g$). Pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i$ est l'homothétie de rapport $\lambda_i$. Mais alors, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i$ et $g_i$ commutent.

Les endomorphismes $g \circ f$ et $f \circ g$ coïncident sur des sous-espaces supplémentaires. On en déduit que $g \circ f = f \circ g$ ou encore que $g \in C(f)$. On a montré que

$$g \in C(f) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ g\left(E_{\lambda_i}\right) \subset g\left(E_{\lambda_i}\right).$$

**2)** Donc, $C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) / \ \forall i \in [\![1, p]\!],\ g\left(E_{\lambda_i}\right) \subset g\left(E_{\lambda_i}\right)\}$. Avec les notations de la question précédente, considérons

$$\begin{array}{rccc} \varphi\ : & C(f) & \to & \mathscr{L}\left(E_{\lambda_1}(f)\right) \times \ldots \times \mathscr{L}\left(E_{\lambda_p}(f)\right) \\ & g & \mapsto & (g_1, \ldots, g_p) \end{array}.$$

$\varphi$ est bien une application d'après la question 1). $\varphi$ est linéaire, injective car un endomorphisme est uniquement déterminé par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires, surjective d'après 1). Finalement, $\varphi$ est un isomorphisme. On en déduit que

$$\dim(C(f)) = \dim(\varphi(C(f))) = \dim\left(\prod_{i=1}^{p} \mathscr{L}\left(E_{\lambda_i}(f)\right)\right) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2.$$

**3)** Chaque $n_i$ est un entier supérieur ou égal à 1. Donc, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $n_i^2 \geqslant n_i$. On en déduit que

$$\dim(C(f)) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{p} n_i = n \text{ (car } f \text{ est diagonalisable)}.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si chaque inégalité écrite est une égalité. Ceci équivaut à $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $n_i^2 = n_i$ ou encore $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $n_i = 1$.
Puisque $f$ est diagonalisable, pour chaque $i$, $n_i$ est l'ordre de multiplicité de $\lambda_i$. Donc,

$$\dim(C(f)) = n \Leftrightarrow \text{les valeurs propres de } f \text{ sont simples.}$$

Ceci impose en particulier $p = n$.

---

**Exercice 19.** (racines carrées d'une matrice de format 3 ayant 3 valeurs propres simples)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.

**Solution 19.** Soit $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $X^2 = A$ alors $AX = X^3 = XA$ et donc $X$ et $A$ commutent.
$A$ admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres de $A$ sont des droites. $X$ commute avec $A$ et donc laisse stable les trois droites propres de $A$.
Ainsi une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$ est également une base de vecteurs propres de $X$ ou encore, si $P$ est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit la matrice diagonale $D_0 = \operatorname{diag}(3, 4, 1)$ alors pour la même matrice $P$, $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale $D$ (on dit que $X$ et $A$ sont simultanément diagonalisables). De plus

$$X^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

ce qui fournit huit solutions deux à opposées. On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où les solutions

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1 + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$.

---

## 8.3 Polynômes annulateurs d'un endomorphisme (ou d'une matrice)

**Théorème 63.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(f) = 0$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(A) = 0$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

**Démonstration.** On démontre le résultat pour un endomorphisme $f$. Notons $I_f$ l'ensemble des polynômes $P$ tels que $P(f) = 0$.

• Si $P$ est le polynôme nul, alors $P(f) = 0$. Donc, le polynôme nul est dans $I_f$.
• Soit $(P, Q) \in (I_f)^2$. $(P - Q)(f) = P(f) - Q(f) = 0$ et donc $P - Q \in I_f$.
• Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times I_f$. $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = P(f) \circ 0 = 0$. Donc, $P \times Q \in I_f$.

On a montré que $I_f$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

❏

On note que $I_f$ n'est autre que le noyau du morphisme d'algèbres $\varphi_f$ défini dans le théorème 61.

## 8.4 Polynôme minimal d'un endomorphisme (ou d'une matrice)

**Théorème 64.**

• Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Il existe au moins un polynôme non nul $P$ tel que $P(f) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe au moins un polynôme non nul $P$ tel que $P(A) = 0$.

**Démonstration.** On démontre le résultat pour un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$. $(\mathscr{L}(E), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie $n^2$. La famille $\left(f^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ est une famille de cardinal $n^2 + 1 > \dim(\mathscr{L}(E))$. La famille $\left(f^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ est donc liée. Par suite, il existe $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2} \in \mathbb{K}^{n^2+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0$.

La polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est un polynôme non nul et annulateur de $f$.

❏

⇛ **Commentaire.** *Le théorème précédent fournit un polynôme non nul de degré au plus $n^2$ et annulateur de $f$. Nous améliorons plus loin ce résultat en fournissant un polynôme de degré $n$ exactement et annulateur de $f$ : le polynôme caractéristique de $f$.*

**Théorème 65.**

• Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un polynôme unitaire $P_0$ et un seul tel que

$$I_f = P_0 \times \mathbb{K}[X] \text{ (où } I_f = \{P \in \mathbb{K}[X]/\ P(f) = 0\}).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe un polynôme unitaire $P_0$ et un seul tel que

$$I_A = P_0 \times \mathbb{K}[X] \text{ (où } I_A = \{P \in \mathbb{K}[X]/\ P(A) = 0\}).$$

**Démonstration .** On démontre le résultat pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace de dimension finie.

D'après le théorème 63, $I_f = \{P \in \mathbb{K}[X]/\ P(f) = 0\}$ est un idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$. D'après le théorème 64, $I_f$ n'est pas réduit à $\{0\}$. On sait alors qu'il existe un polynôme non nul et unitaire $P_0$ et un seul, tel que $I_f = P_0 \times \mathbb{K}[X]$.

❏

⇛ **Commentaire** . *L'hypothèse de dimension est essentielle. Considérons par exemple* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. $f$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{K}[X]$. *Supposons par l'absurde qu'il existe des nombres* $a_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, *tels que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$ *et* $a_n \neq 0$.

*Alors,*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)} = 0.$$

*En particulier, si* $P = X^n$, *on obtient*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} = 0 \quad (*).$$

*Mais le coefficient constant du polynôme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ *est* $a_n n!$. *Ce coefficient n'est pas nul et donc l'égalité* $(*)$ *est fausse. Par suite, il n'existe pas de polynôme non nul et annulateur de* $f$ *ou encore, ici,*

$$I_f = \{0\}.$$

Définition 18.

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f$ un endomorphisme de $E$. L'unique polynôme unitaire $P_0$ tel que $I_f = P_0 \times \mathbb{K}[X]$ s'appelle le **polynôme minimal** de $f$ et se note $\mu_f$ (ou $\pi_f$).

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.L'unique polynôme unitaire $P_0$ tel que $I_A = P_0 \times \mathbb{K}[X]$ s'appelle le **polynôme minimal** de $A$ et se note $\mu_A$ (ou $\pi_A$).

⇛ **Commentaire** .

◇ *Si* $E$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension infinie et* $f$ *un endomorphisme de* $E$, *il est possible que* $f$ *admette ou n'admette pas de polynôme minimal. Par contre, si* $E$ *est de dimension finie non nulle,* $f$ *admet toujours un polynôme minimal. De même, une matrice carrée admet toujours un polynôme minimal.* ❏

◇ *Soit* $\mu_f$ *le polynôme minimal de* $f$ *(en cas d'existence). Par construction, on a les propriétés suivantes :*

- $\mu_f$ *est le polynôme* ***non nul*** *unitaire de plus bas degré et annulateur de* $f$.
- *Si* $P$ *est un polynôme annulateur de* $f$, *alors* $\mu_f$ *divise* $P$ *ou encore, il existe un polynôme* $Q$ *tel que* $P = \mu_f \times Q$.

◇ *En cas d'existence,* $\mu_f$ *est de degré supérieur ou égal à* $1$, *car un polynôme constant non nul n'est pas annulateur de* $f$.

**Exemple.** Soit $p$ une projection. On sait $p^2 = p$ ou encore le polynôme $P = X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de $p$. Le polynôme minimal de $p$ est un diviseur unitaire de $X(X-1)$ et est donc $1$ ou $X$ ou $X-1$ ou $X(X-1)$.
Le polynôme $1$ n'est jamais annulateur de $p$.
Le polynôme $X$ est annulateur de $p$ si et seulement si $p = 0$.
Le polynôme $X-1$ est annulateur de $p$ si et seulement si $p = Id_E$ (on rappelle que $0$ et $Id_E$ sont des projections).
Dans tous les autres cas, $1$, $X$ et $X-1$ ne sont pas des polynômes annulateurs de $p$.

En résumé,

$$\text{si } p = 0,\ \mu_p = X, \text{ si } p = Id_E,\ \mu_p = X - 1 \text{ et si } p \neq 0 \text{ et } p \neq Id_E,\ \mu_p = X^2 - X.$$

De même, si $s$ est une symétrie,

$$\mu_s = X - 1 \text{ si } s = Id_E,\ \mu_s = X + 1 \text{ si } s = -Id_E \text{ et } \mu_s = X^2 - 1 \text{ si } s \neq Id_E \text{ et } s \neq -Id_E.$$

❏

La connaissance du polynôme minimal d'un endomorphisme (ou d'une matrice) permet de donner une base et la dimension de $\mathbb{K}[f]$ (ou $\mathbb{K}[A]$) :

**Théorème 66.**

**1)** Soient $E$ un espace de dimension finie non nulle $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ le degré de $\mu_f$.

Alors, $\left(f^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[f]$ et en particulier, $\dim(\mathbb{K}[f]) = d$.

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ le degré de $\mu_A$.

Alors, $\left(A^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[A]$ et en particulier, $\dim(\mathbb{K}[A]) = d$.

**Démonstration .** On fait la démonstration pour un endomorphisme $f$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $\mu_f$ n'est pas nul et est de degré $d \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de $P$ par $\mu_f$ s'écrit :

$$P = Q \times \mu_f + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $(a_0, \ldots, a_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$. En évaluant en $f$ et en tenant compte de $\mu_f(f) = 0$, on obtient

$$P = Q(f) \circ \mu_f(f) + a_{d-1}f^{d-1} + \ldots + a_1 f + a_0 Id_E = a_{d-1}f^{d-1} + \ldots + a_1 f + a_0 Id_E.$$

Ainsi, tout polynôme en $f$ est une combinaison linéaire de $Id_E$, $f$, ..., $f^{d-1}$. Ceci montre que la famille $\left(f^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[f]$.

Soit $(a_0, \ldots, a_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ tel que $/dsumk = 0d - 1a_k f^k = 0$. Alors, le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ st annulateur de $f$ et de degré strictement plus petit que le degré de $\mu_f$. Par définition de $\mu_f$, $P = 0$ puis $a_0 = a_1 = \ldots = a_{d-1} = 0$.

Ceci montre que la famille $\left(f^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[f]$ et finalement une base de $\mathbb{K}[f]$. Mais alors, $\dim(\mathbb{K}[f]) = d$.

❏

Ainsi, la famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$ mais la famille $\left(f^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille liée de $\mathbb{K}[f]$. De plus $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{d-1}[f]$.

## 8.5 Polynôme minimal et polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

**Théorème 67.**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $F$ un sous-espace vectoriel non nul de $E$ stable par $f$ puis $f_F$ l'endomorphisme de $F$ induit par $f$. Alors

- $\chi_{f_F}$ divise $\chi_f$ ;
- $\mu_{f_F}$ divise $\mu_f$.

**Démonstration .** Le résultat est immédiat si $F = E$. On suppose dorénavant que $F \neq E$.

• Soit $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$. Soient $\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F$ et $\mathscr{B}_2 = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $G$ de sorte que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$. Puisque $F$ est stable par $f$, la matrice $A$ de $f$ dans $\mathscr{B}$ s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix},$$

où $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f_F)$. Mais alors, un calcul par blocs fournit

$$\chi_f = \chi_A = \det \begin{pmatrix} XI_p - B & -D \\ 0_{n-p,p} & XI_{n-p} - C \end{pmatrix} = \det(XI_p - B) \times \det(XI_{n-p} - C) = \chi_{f_F} \times \chi_C.$$

Ceci montre que $\chi_{f_F}$ divise $\chi_f$.

• Puisque $\mu_f(f) = 0$, pour tout $x$ de $E$, $\mu_f(f)(x) = 0$. En particulier, pour tout $x$ de $F$, $\mu_f(f)(x) = 0$ ou encore $\mu_f(f_F) = 0$. Par suite, $\mu_f$ est un polynôme annulateur de $f_F$ et donc $\mu_{f_F}$ divise $\mu_f$.

❏

## 8.6 Le théorème de CAYLEY-HAMILTON

**Théorème 68.** (théorème de CAYLEY-HAMILTON)

- Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors $\chi_f(f) = 0$.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

DÉMONSTRATION . On démontre le théorème pour un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie non nulle $n$. Soit $x_0$ un vecteur non nul de $E$. On va démontrer que $\chi_f(f)(x_0) = 0$.

**Etape 1.** Soit $\mathscr{E} = \left\{k \in \mathbb{N}^* / \ \left(f^i(x_0)\right)_{0 \leqslant i \leqslant k-1} \text{ libre}\right\}$. $\mathscr{E}$ est une partie de $\mathbb{N}$. Puisque $x_0 \neq 0$, $1 \in \mathscr{E}$ et en particulier $\mathscr{E}$ n'est pas vide. Puisque le cardinal d'une famille libre de $E$ est majoré par la dimension de $E$, $\mathscr{E}$ est majoré par $n$.
En résumé, $\mathscr{E}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ (et même de $\mathbb{N}^*$). $\mathscr{E}$ admet donc un plus grand élément que l'on note $p$.

**Etape 2.** Par définition de $p$, la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est libre. On la complète (éventuellement) en $\mathscr{B} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0), e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ base de $E$.

Par définition de $p$, la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est libre et la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^p(x_0))$ est liée. On en déduit que $f^p(x_0) \in \text{Vect}\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ et on peut donc poser

$$f^p(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x_0) \quad (*).$$

La matrice $A$ de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ où } B = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Un calcul par blocs fournit $\chi_f = \chi_A = \chi_B \times \chi_C$.

**Etape 3.** En développant suivant la dernière colonne, on a

$$\begin{aligned}\chi_B &= \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_{p-2} \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & X - a_{p-1} \end{vmatrix} \\ &= X^{p-1}(X - a_{p-1}) + \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p+k+1}(-a_k)\Delta_k,\end{aligned}$$

$$\text{où } \Delta_k = \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & 0 & \times & \ldots & \ldots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & \ldots & \times & X & \times & \ldots & \ldots & \times \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & \times & \ldots & \times \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{vmatrix} = X^k(-1)^{p-1-k} \text{ (déterminant par blocs). Finalement,}$$

$$\begin{aligned}\chi_B &= X^{p-1}(X - a_{p-1}) + \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p+k+1}(-a_k) X^k (-1)^{p-1-k} = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \sum_{k=0}^{p-2} a_k X^k \\ &= X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k.\end{aligned}$$

**Etape 4.** Par suite, $\chi_f = \left(f^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k\right) \circ Q(f)$ où $Q = \chi_C$. Puisque deux polynôme en $f$ commutent, on en déduit que

$$\chi_f(x_0) = Q(f) \circ \left(f^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k\right)(x_0) = Q(f)\left(f^p(x_0) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x_0)\right) = Q(f)(0) = 0.$$

On a ainsi montré que pour tout $x$ non nul, $\chi_f(f)(x) = 0$. Ceci reste vrai pour $x = 0$ et finalement, on a montré que $\chi_f(f) = 0$.

❑

⇛ **Commentaire** .

◇ *Dans la démonstration précédente, on a implicitement cherché le plus petit sous-espace vectoriel de* $E$*, contenant* $x_0$ *et stable par* $f$*. Ce sous-espace se révèle être* $E_f(x_0) = \text{Vect}\left(f^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}} = \text{Vect}\left(f^k(x_0)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$*. Dans la base* $\left(f^k(x_0)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ *de* $E_f(x_0)$ *choisie, la matrice de l'endomorphisme induit par* $f$ *sur* $E_f(x_0)$ *est une matrice* ***compagnon****. L'endomorphisme induit par* $f$ *sur* $E_f(x_0)$ *est alors dit* ***cyclique****. On aurait pu poursuivre ce processus « jusqu'au bout de l'espace » et décomposer l'espace en sous-espaces supplémentaires sur lesquels l'endomorphisme induit est cyclique.*

◇ *D'autre part, quand nous avons calculé* $\chi_f$ *par blocs à la fin de l'étape 2, on aurait pu aussi utiliser le théorème 67 qui prouvait directement que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par* $f$ *sur* $E_f(x_0)$ *divise* $\chi_f$*.*

Ainsi, le polynôme caractéristique de $f$ (ou de $A$) est un polynôme annulateur de $f$. Puisque les polynômes annulateurs d'un endomorphisme sont les multiples du polynôme minimal de cet endomorphisme, on aurait pu énoncer le théorème de Cayley-Hamilton sous la forme :

**Théorème 68 bis.** (théorème de Cayley-Hamilton)

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors $\mu_f$ divise $\chi_f$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mu_A$ divise $\chi_A$.

**Exercice 20.** (commutant d'un endomorphisme ayant $n$ valeurs propres simples)

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ ayant $n$ valeurs propres simples.

**1)** Montrer qu'il existe un polynôme de degré $n$ annulateur de $f$.

**2) a)** Montrer que $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{n-1}[f]$.
**b)** Montrer que la famille $\left(\text{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre.
**c)** En déduire la dimension de $\mathbb{K}[f]$.
**d)** Déterminer $\mu_f$.

**3) a)** Montrer qu'il existe $x_0$ de $E$ tel que $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de $E$.
**b)** Montrer que $C(f) = \mathbb{K}_{n-1}[f]$.

**Solution 20.**

**1)** Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de $f$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de $f$, de degré $n$ exactement.

**2) a)** On a $\mathbb{K}_{n-1}[f] \subset \mathbb{K}[f]$. Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
La division euclidienne de $P$ par $\chi_f$ fournit deux polynômes $Q$ et $R$ tels que

$$P = Q \times \chi_f + R \text{ et } \deg(R) \leqslant n - 1.$$

En évaluant en $f$, on obtient $P(f) = Q(f) \circ \chi_f(f) + R(f) = R(f)$ et donc $P(f) \in \mathbb{K}_{n-1}[f]$. Ceci montre que $\mathbb{K}[f] \subset \mathbb{K}_{n-1}[f]$ et finalement que

$$\boxed{\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}_{n-1}[f].}$$

**b)** $f$ admet $n$ valeurs propres simples et donc $f$ est diagonalisable.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de $f$ associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(e_j) = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_j^k\right) e_j = 0$$

$$\Rightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_j^k = 0 \text{ (car chaque } e_j \text{ est non nul).}$$

Le déterminant du système linéaire $(S)$ d'inconnues $a_1, \ldots, a_n$ ci-dessus est $\mathrm{Van}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ce déterminant est non nul car les $\lambda_j$ sont deux à deux distincts. Le système $(S)$ est un système de CRAMER homogène. $(S)$ admet donc l'unique solution $(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (0, \ldots, 0)$. On a montré que la famille $\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre.

**c)** D'après la question a), $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ ou encore $\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[f]$. D'après la question b), $\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est libre et donc $\left(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[f]$. On en déduit que

$$\boxed{\dim(\mathbb{K}[f]) = n.}$$

**d)** On sait que si $d$ est le degré de $\mu_f$, alors $\dim(\mathbb{K}[f]) = d$. Donc, $d = n$. Ainsi, $\mu_f$ est un diviseur unitaire et de degré $n$ de $\chi_f$ qui est aussi unitaire de degré $n$. On en déduit que $\mu_f = \chi_f = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$.

**3) a)** Avec les notations de la question précédente, posons $x_0 = e_1 + \ldots + e_n$. Alors,

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^k(x_0) = \lambda_1^k e_1 + \ldots + \lambda_n^k e_n.$$

La matrice de la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Le déterminant de $A$ est $\mathrm{Van}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ce déterminant n'est pas nul car les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts. Donc, la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $E$.

**b)** On sait que $\mathbb{K}_{n-1}[f] = \mathbb{K}[f] \subset C(f)$. Réciproquement, soit $g \in C(f)$. Puisque $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $E$, on peut poser

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0).$$

Montrons alors que $g = P(f)$ où $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, puisque $g \in C(f)$ et que d'autre part deux polynômes en $f$ commutent,

$$g\left(f^j(x_0)\right) = f^j(g(x_0)) = f^j(P(f)(x_0)) = P(f)\left(f^j(x_0)\right).$$

Ainsi, les endomorphismes $g$ et $P(f)$ coïncident sur une base de $E$. On en déduit que $g = P(f)$.

Ceci montre que $C(f) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et finalement que

$$\boxed{C(f) = \mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ et en particulier, } \dim(C(f)) = n.}$$

---

$\Rrightarrow$ **Commentaire**. *On avait établi autrement le résultat* $\dim(C(f)) = n$ *quand* $f$ *a* $n$ *valeurs propres simples dans l'exercice 18, page 48.*

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON nous permet de donner une caractérisation des endomorphismes nilpotents ainsi que de l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent :

**Théorème 69.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$.

**1)** $f$ est nilpotent si et seulement si $\chi_f = X^n$.

**2)** Si $f$ est nilpotent d'indice $p$, alors $\mu_f = X^p$ et en particulier, $p \leqslant n$.

**Démonstration .** On a déjà vu que si $f$ est nilpotent, alors $\chi_f = X^n$ (théorème 52, page 36).

Réciproquement, si $\chi_f = X^n$, alors $f^n = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. En particulier, son indice de nilpotence $p$ est inférieur ou égal $n$. Le polynôme minimal de $f$ est un diviseur unitaire de $\chi_f = X^n$. Posons donc $\mu_f = X^d$. Puisque $\mu_f$ est annulateur de $f$, on a $f^d = 0$ et puisque $X^{d-1}$ n'est plus annulateur de $f$ (par définition de $\mu_f$), on a $f^{d-1} \neq 0$. Donc, $d = p$ ou encore $\mu_f = X^p$. ❑

## 8.7 Polynômes annulateurs et valeurs propres

**Théorème 70.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda x$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)(x) = P(\lambda)x$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $AX = \lambda X$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)X = P(\lambda)X$.

**Démonstration .** On démontre le résultat pour un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda x$. Le théorème 30, page 22, permet déjà d'affirmer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$. Mais alors, si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme,

$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x) = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k\right) x = P(\lambda)x.$$

❑

On en déduit le théorème suivant qui montre que la connaissance d'un polynôme annulateur peut permettre de déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.

**Théorème 71.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $f$. Alors, pour toute valeur propre $\lambda$ de $f$, on a $P(\lambda) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $A$. Alors, pour toute valeur propre $\lambda$ de $A$, on a $P(\lambda) = 0$.

**Démonstration .** On démontre le résultat pour un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

Soit $P$ un polynôme annulateur de $f$. Soit $\lambda$ une (éventuelle) valeur propre de $f$. Il existe un vecteur $x$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$. D'après le théorème 61, $0 = P(f)(x) = P(\lambda)x$. Puisque $x$ n'est pas nul, on obtient $P(\lambda) = 0$.

❑

Ainsi, toute valeur propre est automatiquement racine d'un polynôme annulateur. Il ne faut cependant pas croire que toute racine d'un polynôme annulateur est valeur propre. Par exemple, une projection vérifie

$$p \circ (p - \mathrm{Id}_E) \circ (p - 2\mathrm{Id}_E) = \left(p^2 - p\right) \circ (p - 2\mathrm{Id}_E) = 0 \circ (p - 2\mathrm{Id}_E) = 0.$$

Donc le polynôme $X(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de $p$. Le théorème précédent affirme que le spectre de $p$ (c'est-à-dire ici l'ensemble des valeurs propres de $p$) est contenu dans $\{0, 1, 2\}$ :

$$\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1, 2\}.$$

Mais le théorème précédent ne dit pas si $0$ ou $1$ ou $2$ sont valeur propres de $p$. De fait, on sait que $2$ n'est pas valeur propre de $p$ et si par exemple $p = \mathrm{Id}_E$ (qui est une projection), $0$ n'est pas valeur propre de $p$. On retiendra

**les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur.**

Un cas particulier de polynôme annulateur est le polynôme minimal $\mu_f$ (ou $\mu_A$). On sait que $\mu_f$ est un diviseur de $\chi_f$. Donc, si $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit donc

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de $f$ et les $\alpha_i$ sont des entiers naturels non nuls, alors $\mu_f$ est de la forme

$$\mu_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Mais toute valeur propre de $f$ doit être racine du polynôme annulateur $\mu_f$ et on peut donc améliorer le résultat précèdent sous la forme

**Théorème 72.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit donc

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de $f$ et les $\alpha_i$ sont des entiers naturels non nuls. Alors $\mu_f$ est de la forme

$$\mu_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et s'écrit donc

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de $A$ et les $\alpha_i$ sont des entiers naturels non nuls. Alors $\mu_A$ est de la forme

$$\mu_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.

**Exercice 21.** Déterminer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

**Solution 21.**

$\chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ 4 & X+1 & 0 \\ -4 & -8 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)\left(X^2 - 2X + 1\right) = (X-1)^2(X+2)$. Le polynôme minimal de $A$ est un diviseur unitaire de $\chi_A$ et admet les nombres $1$ et $-2$ pour racines. Donc, $\mu_A$ est l'un des deux polynômes $(X-1)(X+2)$ ou $(X-1)^2(X+2)$.

Maintenant

$$(A - I_3) \times (A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \neq 0$$

et donc $\mu_A = (X-1)^2(X+2)$.

## 8.8 Le théorème de décomposition des noyaux

**Théorème 73.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $P$ et $Q$ deux polynômes **premiers entre eux**.

$$\operatorname{Ker}((P \times Q)(f)) = \operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $P$ et $Q$ deux polynômes **premiers entre eux**.

$$\operatorname{Ker}((P \times Q)(A)) = \operatorname{Ker}(P(A)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(A)).$$

Démonstration. On démontre le résultat pour un endomorphisme $f$. On note tout d'abord que pour tout $x$ de $E$, puisque deux polynômes en $f$ commutent

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(P(f)) &\Rightarrow P(f)(x) = 0 \Rightarrow Q(f)(P(f)(x)) = 0 \Rightarrow (P(f) \circ Q(f))(x) = 0 \Rightarrow (P \times Q)(f)(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Ker}((P \times Q)(f)), \end{aligned}$$

et donc $\operatorname{Ker}(P(f)) \subset \operatorname{Ker}((P \times Q)(f))$. De même, $\operatorname{Ker}(Q(f)) \subset \operatorname{Ker}((P \times Q)(f))$.

Puisque $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes $U$ et $V$ tels que

$$U \times P + V \times Q = 1.$$

En évaluant en $f$, on obtient $U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = Id_E$. Soit alors $x \in \operatorname{Ker}((P \times Q)(f)) = \operatorname{Ker}(P(f) \circ Q(f))$. En évaluant en $x$, on obtient

$$x = (U(f) \circ P(f))(x) + (V(f) \circ Q(f))(x) \quad (*).$$

Posons $y = (V(f) \circ Q(f))(x)$ et $z = (U(f) \circ P(f))(x)$ de sorte que $x = y + z$. Puisque deux polynômes en $f$ commutent, on a

$$P(f)(y) = P(f)((V(f) \circ Q(f))(x)) = V(f)((P(f) \circ Q(f))(x)) = V(f)(0) = 0$$

et aussi

$$Q(f)(z) = Q(f)((U(f) \circ P(f))(x)) = U(f)((P(f) \circ Q(f))(x)) = U(f)(0) = 0.$$

Donc, $y \in \operatorname{Ker}(P(f))$ et $z \in \operatorname{Ker}(Q(f))$. On a montré que

$$\forall x \in \operatorname{Ker}((P \times Q)(f)),\ \exists (y, z) \in \operatorname{Ker}(P(f)) \times \operatorname{Ker}(Q(f)) /\ x = y + z,$$

et donc que $\operatorname{Ker}((P \times Q)(f)) = \operatorname{Ker}(P(f)) + \operatorname{Ker}(Q(f))$.

Si maintenant $x \in \operatorname{Ker}(P(f)) \cap \operatorname{Ker}(Q(f)) (\subset \operatorname{Ker}((P \times Q)(f)))$, l'égalité $(*)$ fournit $x = 0 + 0 = 0$ et donc $\operatorname{Ker}(P(f)) \cap \operatorname{Ker}(Q(f)) = \{0\}$. On a montré que

$$\operatorname{Ker}((P \times Q)(f)) = \operatorname{Ker}(P(f)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(f)).$$

❏

⇛ **Commentaire**. *On rappelle qu'il y a d'autres manières de constater que deux polynômes sont premiers entre eux. Par exemple, deux polynômes non nuls sont premiers entre eux si et seulement si ces deux polynômes n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.*

Le théorème précédent se généralise immédiatement par récurrence (en se souvenant que si $P_{k+1}$ est premier à $P_1$ et à $P_2$ ... et à $P_k$, alors $P_{k+1}$ est premier à $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k$) :

**Théorème 74.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux**.

$$\operatorname{Ker}((P_1 \times \ldots \times P_k)(f)) = \operatorname{Ker}(P_1(f)) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}(P_k(f)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux**.

$$\operatorname{Ker}((P_1 \times \ldots \times P_k)(A)) = \operatorname{Ker}(P_1(A)) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}(P_k(A)).$$

Un cas particulier du théorème 74 est le cas où on suppose de plus que $P = P_1 \times \ldots \times P_k$ est un polynôme annulateur de $f$. On obtient :

**Théorème 75.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux** puis $P = P_1 \times \ldots \times P_k$. On suppose de plus que $P$ est annulateur de $f$.

$$E = \text{Ker}\,(P_1(f)) \oplus \ldots \oplus \text{Ker}(P_k(f)).$$

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes **deux à deux premiers entre eux** puis $P = P_1 \times \ldots \times P_k$. On suppose de plus que $P$ est annulateur de $A$.

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \text{Ker}\,(P_1(A)) \oplus \ldots \oplus \text{Ker}(P_k(A)).$$

**Exemple.** En maths sup, on étudie les projections vectorielles : un endomorphisme $p$ est une projection vectorielle si et seulement si $p^2 = p$. Le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de $p$. Les polynômes $X$ et $X-1$ sont premiers entre eux car sans racine commune dans $\mathbb{C}$. Le théorème de décomposition des noyaux fournit alors directement

$$E = \text{Ker}\,(p - Id_E) \oplus \text{Ker}(p).$$

Ce résultat a déjà été établi en maths sup « à la main ». De même, $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est annulateur d'une symétrie vectorielle $s$ et $X+1$ et $X-1$ sont premiers entre eux. Le théorème de décomposition des noyaux fournit directement

$$E = \text{Ker}\,(s - Id_E) \oplus \text{Ker}\,(s + Id_E)\,.$$

❑

## 8.9 Une nouvelle caractérisation de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité

**Théorème 76.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$.
$f$ est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme $P$ non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples tel que $P(f) = 0$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$A$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si il existe un polynôme $P$ non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples tel que $P(A) = 0$.

**Démonstration .** On montre le résultat pour un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

• Supposons que $f$ soit diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de $f$. Puisque $f$ est diagonalisable, $E = \displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \text{Ker}\,(f - \lambda_i Id_E)$.

Soit $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$. $P$ est un polynôme non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

Soient $i \in [\![1, p]\!]$ puis $x \in E_{\lambda_i}(f)$. Puisque deux polynômes en $f$ commutent,

$$P(f)(x) = \left(\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j Id_E)\right)((f - \lambda_i Id_E)(x)) = \left(\prod_{j \neq i} (f - \lambda_j Id_E)\right)(0) = 0.$$

Ainsi, la restriction de l'endomorphisme $P(f)$ à chaque $E_{\lambda_i}(f)$ est nulle. Puisque ces sous-espaces sont supplémentaires, on en déduit que $P(f) = 0$. $P$ est donc un polynôme non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et annulateur de $f$.

• Supposons qu'il existe un polynôme $P$ non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et annulateur de $f$. Posons $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - \mu_i)$ où les $\mu_i$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Les polynômes $(X - \mu_i)$ sont deux à deux premiers entre eux et le polynôme $P$ est annulateur de $f$. Le théorème de décomposition des noyaux permet d'écrire

$$E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant k} \text{Ker}\,(f - \mu_i Id_E)\,.$$

Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$ adaptée à cette décomposition (on rappelle que si un $\text{Ker}\,(f - \mu_i Id_E)$ est nul, une base de ce noyau est $\varnothing$). $\mathscr{B}$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$ et donc $f$ est diagonalisable.

❑

Une variante de ce théorème est :

**Théorème 77.**

• Soient $\mathsf{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(\mathsf{E})$.
$f$ est diagonalisable si et seulement si $\mu_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
$A$ est diagonalisable si et seulement si $\mu_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

**Démonstration .** Si $\mu_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, $\mu_f$ est un polynôme non nul, annulateur de $f$, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et donc $f$ est diagonalisable d'après le théorème précédent.

Inversement, si $f$ est diagonalisable, d'après le théorème précédent, il existe un polynôme non nul $P$, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et annulateur de $f$. Puisque $P$ est annulateur de $f$, $\mu_f$ est un diviseur de $P$ et puisque $P$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, il en est de même de $\mu_f$.

❏

**Exercice 22.**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $A^p = I_n$. Montrer que $M$ est diagonalisable.

**Solution 22.** Soit $P = X^p - 1$. $P$ est un polynôme annulateur de $A$. $P' = pX^{p-1}$ admet $0$ pour unique racine. Puisque $0$ n'est pas racine de $P$, les polynômes $P$ et $P'$ sont sans racine commune dans $\mathbb{C}$. On en déduit que $P$ et $P'$ sont premiers entre eux puis que $P$ est à racines simples.

On a trouvé un polynôme $P$ (scindé sur $\mathbb{C}$) à racines simples tel que $P(A) = 0$ et donc $A$ est diagonalisable.

---

**Exercice 23.**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de $A$ est pair.

**Solution 23.**

Soit $P = X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$. $P$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de $A$. Donc $A$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et ses valeurs propres sont éléments de $\{0, j, j^2\}$. Le polynôme caractéristique de $A$ est de la forme
$X^\alpha(X - j)^\beta \left(X - j^2\right)^\gamma$ avec $\alpha + \beta + \gamma = n$. De plus, $A$ est réelle et on sait que $j$ et $j^2 = \bar{j}$ ont même ordre de multiplicité ou encore $\gamma = \beta$.

Puisque $A$ est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}A) = n - \alpha = 2\beta.$$

On a montré que $\mathrm{rg}A$ est un entier pair.

---

Le théorème 76 fournit un outil très performant pour montrer la diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable :

**Théorème 78.** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Soient $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ non réduit à $\{0\}$, stable par $f$ puis $f_F$ l'endomorphisme de $F$ induit par $f$.

Si $f$ est diagonalisable, alors $f_F$ est diagonalisable.

**Démonstration .** Puisque $f$ est diagonalisable, il existe un polynôme $P$ non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et annulateur de $f$. Pour tout $x$ de $E$, on a $(P(f))(x) = 0$ et en particulier, pour tout $x$ de $F$, $(P(f))(x) = 0$ ou encore $(P(f_F(x)))(x) = 0$. $P$ est un polynôme non nul scindé sur $\mathbb{K}$, à racines simples et annulateur de $f_F$. Donc, $f_F$ est diagonalisable.

❏

⇛ **Commentaire** . *On peut donner une variante de la démonstration précédente. D'après le théorème 67, page 51, $\mu_{f_F}$ divise $\mu_f$. De plus, $\mu_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples car $f$ est diagonalisable. Mais alors, $\mu_{f_F}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples et donc $f_F$ est diagonalisable.*

**Théorème 79.**

• Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle puis $f \in \mathscr{L}(E)$.

$f$ est trigonalisable $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ et annulateur de $f \Leftrightarrow \mu_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$A$ est trigonalisable $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ et annulateur de $A \Leftrightarrow \mu_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

**Démonstration.** Si $f$ est trigonalisable, $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et annulateur de $f$. Réciproquement, s'il existe un polynôme $P$ scindé sur $\mathbb{K}$ annulateur de $f$, $\mu_f$ est aussi scindé sur $\mathbb{K}$ en tant que diviseur de $P$. Puisque les racines de $\chi_f$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines de $\mu_f$, $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et donc $f$ est trigonalisable.

❏

On peut maintenant résumer les différentes conditions nécessaires et suffisantes ou simplement suffisantes de diagonalisabilité ou de trigonalisabilité pour un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Dans ce qui suit, $n$ est la dimension de $E$, les $\alpha_i$ sont les ordres de multiplicité des valeurs propres et les $n_i$ sont les dimensions des sous-espaces propres associés.

$f$ est diagonalisable
$\Leftrightarrow$ il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$
$\Leftrightarrow$ il existe une base de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale
$\Leftrightarrow$ $E$ est somme directe des sous-espaces propres de $f$
$\Leftrightarrow n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i$
$\Leftrightarrow \chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $n_i = \alpha_i$.
$\Leftrightarrow$ il existe un polynôme $P$ non nul, scindé sur $\mathbb{K}$, à racines simples tel que $P(f) = 0$
$\Leftrightarrow \mu_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples
$\Leftarrow$ $f$ a $n$ valeurs propres simples ou encore $\chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples

D'autre part,

$f$ est trigonalisable
$\Leftrightarrow \chi_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$
$\Leftrightarrow$ il existe un polynôme $P$ non nul, scindé sur $\mathbb{K}$ tel que $P(f) = 0$
$\Leftrightarrow \mu_f$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

## 8.10 Les sous-espaces caractéristiques $\mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\right)$

Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ non nulle dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. On peut poser

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i},$$

où les $\lambda_i$ sont des nombres deux à deux distincts et les $\alpha_i$ sont des entiers naturels non nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n$ (les $\lambda_i$ sont donc les valeurs propres deux à deux distinctes de $f$ et les $\alpha_i$ les ordres de multiplicité correspondants).

On conserve ces notations dans tout le paragraphe (et en particulier, on suppose dans tout le paragraphe que le polynôme caractéristique de $f$ est scindé sur $\mathbb{K}$).

Définition 19. Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

Le **sous-espace caractéristique** de $f$ associé à la valeur propre $\lambda_i$ est $E'_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\right)$.

**Théorème 80.**

• Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $E'_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\right)$ est un sous-espace vectoriel de $E$, stable par $f$.

• Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $E_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\right) = E'_{\lambda_i}(f)$.

• $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathrm{Ker}\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\right)$.

**Démonstration .**

• Soit $i \in [\![1,p]\!]$. $E'_{\lambda_i}(f)$ est le noyau de l'endomorphisme $(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$. Donc, $E'_{\lambda_i}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$. $(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ est un polynôme en $f$ et donc, $f$ et $(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ commutent. On en déduit que $f$ laisse stable le noyau de $(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ qui est $E'_{\lambda_i}(f)$.

• Si $g$ est un endomorphisme de $E$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ker}\left(g^k\right) \subset \text{Ker}\left(g^{k+1}\right)$ (car pour tout $x$ de $E$, $g^k(x)=0 \Rightarrow g\left(g^k(x)\right) = 0 \Rightarrow g^{k+1}(x)=0$). Ceci fournit

$$\text{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E) \subset \text{Ker}\left((f-\lambda_i Id_E)^2\right) \subset \ldots \subset \text{Ker}\left((f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}\right).$$

• Les polynômes $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux (car sans racine commune dans $\mathbb{C}$) et $\chi_f$ est un polynôme annulateur de $f$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Le théorème de décomposition des noyaux permet d'écrire :

$$E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} \text{Ker}\,(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}.$$

❏

Ainsi, l'espace $E$ a été décomposé en somme de sous-espaces supplémentaires stables par $f$. Dans une base adaptée à la décomposition de $E$ en somme directe des sous-espaces caractéristiques, la matrice de $f$ est déjà diagonale par blocs.

Le théorème suivant montre que la notion de sous-espaces caractéristique n'a aucun intérêt dans le cas où $f$ est diagonalisable.

**Théorème 81.** $f$ est diagonalisable si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $E'_{\lambda_i}(f) = E_{\lambda_i}(f)$.

**Démonstration .** Si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $E'_{\lambda_i}(f) = E_{\lambda_i}(f)$, alors $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} E_{\lambda_i}(f)$ d'après le théorème 80. On en déduit que $f$ est diagonalisable.
Réciproquement, supposons $f$ diagonalisable. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, posons $n'_i = \dim\left(E'_{\lambda_i}(f)\right)$ (et $n_i = \dim\left(E_{\lambda_i}(f)\right)$). Puisque $f$ est diagonalisable, $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant p} E_{\lambda_i}(f)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i = n = \sum_{i=1}^{p} n'_i$.

Puisque pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $E_{\lambda_i}(f) \subset E'_{\lambda_i}(f)$ et donc $n_i \leqslant n'_i$. Si l'une de ces inégalités est stricte, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i < \sum_{i=1}^{p} n'_i$ ce qui est faux. Donc, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $n_i = n'_i$ puis $E_{\lambda_i}(f) = E'_{\lambda_i}(f)$.

❏

Ainsi, dans le cas où $f$ est diagonalisable, les sous-espaces caractéristiques sont les sous-espaces propres. C'est dans le cas où $f$ n'est pas diagonalisable que les sous-espaces caractéristiques vont avoir tout leur intérêt. Dans ce cas, $E$ n'est plus somme des sous-espaces propres mais $E$ est toujours somme directe des sous-espaces caractéristiques.

Nous allons maintenant étudier quelques propriétés de l'endomorphisme d'un $E'_{\lambda_i}(f)$ induit par $f$.

**Théorème 82.** Soit $i \in [\![1,p]\!]$.

- $f$ induit un endomorphisme de $E'_{\lambda_i}(f)$ que l'on note $f_i$.
- $f_i$ admet une valeur propre et une seule, à savoir $\lambda_i$ et $f_i - \lambda_i Id_{E'_{\lambda_i}(f)}$ est nilpotent d'indice inférieur ou égal $\alpha_i$. Plus explictement, $f_i = \lambda_i Id_{E'_{\lambda_i}(f)} + \nu_i$ où $\nu_i$ est un endomorphisme nilpotent d'indice inférieur ou égal à $\alpha_i$.

**Démonstration .** Soit $i \in [\![1,p]\!]$.

• $f$ laisse stable $E'_{\lambda_i}(f)$ et donc $f$ induit un endomorphisme $f_i$ de $E'_{\lambda_i}(f)$. De plus, par définition de $E'_{\lambda_i}(f)$, $\left(f_i - \lambda_i Id_{E'_{\lambda_i}(f)}\right)^{\alpha_i} = 0_{E'_{\lambda_i}(f)}$.

• Le polynôme $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ est annulateur de $f_i$ et donc $f_i$ admet au plus une valeur propre, à savoir $\lambda_i$. D'autre part, $\left(f_i - \lambda_i Id_{E'_{\lambda_i}(f)}\right)^{\alpha_i} = 0$ et donc $f_i - \lambda_i Id_{E'_{\lambda_i}(f)}$ est nilpotent, d'indice inférieur ou égal à $\alpha_i$. $\lambda_i$ est donc effectivement valeur propre de $f_i$.

❏

**Théorème 83.** Il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonales par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_p \end{pmatrix}$$

où pour $i \in [\![1, p]\!]$, $T_i$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à $\lambda_i$ :

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

**Démonstration.** Pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, $f_i$ est trigonalisable (car le polynôme $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et annulateur de $f_i$) et admet $\lambda_i$ pour unique propre. Donc, il existe une base $\mathscr{B}_i$ de $E'_{\lambda_i}(f)$ dans laquelle la matrice de $f_i$ s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & \times & \dots & \times \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p$ (ou plutôt, soit $\mathscr{B}$ la base obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_1$, ..., $\mathscr{B}_p$ dans cet ordre). $\mathscr{B}$ est une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ a la forme voulue.

❑

On peut noter que $\chi_f = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{n'_i}$ et donc, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, dim $\left(E'_{\lambda_i}(f)\right) = n_i = \alpha_i$ l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda_i$ (et on rappelle que la dimension du sous-espace propre $\lambda_i$ est quant à elle inférieure ou égale à $/alpha_i$ dans tous les cas).

# 9 Quelques applications de la réduction

## 9.1 Calculs de puissances de matrices (ou d'endomorphismes)

On se donne une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et on veut calculer les puissances positives de $A$. On fait ici la synthèse de quelques méthodes apparaissant en classes préparatoires.

**1ère méthode. Utilisation d'un polynôme annulateur.**

Si on connaît un polynôme non nul $P$ annulateur de $A$ et de degré $d$, la division euclidienne de $X^n$ ($n \in \mathbb{N}$ donné) par $P$ s'écrit :

$$X^n = P \times Q_n + a_{d-1}^{(n)} X^{d-1} + \dots + a_1^{(n)} X + a_0^{(n)}.$$

En évaluant en $A$, on obtient

$$A^n = P(A) \times Q_n(A) + a_{d-1}^{(n)} A^{d-1} + \dots + a_1^{(n)} A + a_0^{(n)} I_p = a_{d-1}^{(n)} A^{d-1} + \dots + a_1^{(n)} A + a_0^{(n)} I_p.$$

Il n'y a donc qu'à calculer $A^0$, ..., $A^{d-1}$ et les coefficients $a_0^{(n)}$, ..., $a_{d-1}^{(n)}$.

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Un polynôme annulateur de $A$ est $\chi_A$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. En développant suivant la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A = \begin{vmatrix} X & -3 & -2 \\ 2 & X-5 & -2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix} &= X\left(X^2 - 5X + 6\right) - 2\,(-3X + 6) - 2\,(2X - 4) \\ &= X(X-2)(X-3) + 6(X-2) - 4(X-2) = (X-2)(X(X-3)+2) = (X-1)(X-2)^2. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de $X^n$ par $\chi_A$ s'écrit $X^n = Q_n \times \chi_A + a_n X^2 + b_n X + c_n$ $(*)$ où $Q_n$ est un polynôme et $a_n$, $b_n$ et $c_n$ sont trois réels. En évaluant en $A$ et en tentant compte de $\chi_A(A) = 0$, on obtient

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

Déterminons $a_n$, $b_n$ et $c_n$. On évalue les deux membres de $(*)$ en 1 et 2 (en tenant compte de $\chi_A(1) = \chi_A(2) = 0$) puis on dérive les deux membres de $(*)$ et on évalue de nouveau en 2 (en se rappelant que $\chi_A(2) = \chi_A'(2) = 0$ puisque 2 est racine double de $\chi_A$). On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} a_n + b_n + c_n = 1 \\ 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 4a_n + b_n = n2^{n-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = -4a_n + n2^{n-1} \\ a_n + \left(-4a_n + n2^{n-1}\right) + c_n = 1 \\ 4a_n + 2\left(-4a_n + n2^{n-1}\right) + c_n = 2^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = -4a_n + n2^{n-1} \\ -3a_n + c_n = 1 - \dfrac{n}{2} \times \times 2^n \\ -4a_n + c_n = (1-n)2^n \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = 1 + \left(\dfrac{n}{2} - 1\right)2^n \\ b_n = -4\left(1 + \left(\dfrac{n}{2} - 1\right)2^n\right) + \dfrac{n}{2}2^n \\ c_n = 3\left(1 + \left(\dfrac{n}{2} - 1\right)2^n\right) + 1 - \dfrac{n}{2}2^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = 1 + \left(\dfrac{n}{2} - 1\right)2^n \\ b_n = -4 + \left(-\dfrac{3n}{2} + 4\right)2^n \\ c_n = 4 + (n-3)2^n \end{array}\right..$$

De plus, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -6 & 13 & 6 \\ 6 & -9 & -2 \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} A^n &= \left(1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)2^n\right)\begin{pmatrix} -2 & 9 & 6 \\ -6 & 13 & 6 \\ 6 & -9 & -2 \end{pmatrix} + \left(-4 + \left(-\frac{3n}{2} + 4\right)2^n\right)\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + (4 + (n-3)2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -3 + 3 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ 2 - 2 \times 2^n & -3 + 4 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ -2 + 2 \times 2^n & 3 - 3 \times 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les calculs précédents étaient en fait maladroits car nous pouvions trouver un polynôme annulateur de degré strictement plus petit que 3. En effet, $\operatorname{rg}(A - 2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 1$ et donc $\dim(\operatorname{Ker}(A - 2I_3)) = 2$. Ainsi, $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est la dimension du sous-espace propre correspondant. Donc, $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ puis $\mu_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. On en déduit que $\mu_A = (X-1)(X-2)$. On recommence le même travail avec $\mu_A$ (qui est aussi annulateur de $A$ mais de degré 2).

$$X^n = Q_n \times \mu_A + a_n X + b_n$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} a_n + b_n = 1 \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{array}\right.$$

et donc $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$ puis

$$\begin{aligned} A^n = a_n A + b_n I_3 &= (2^n - 1)\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + (2 - 2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -3 + 3 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ 2 - 2 \times 2^n & -3 + 4 \times 2^n & -2 + 2 \times 2^n \\ -2 + 2 \times 2^n & 3 - 3 \times 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**2ème méthode. Utilisation d'une réduction.**

Si $A = PBP^{-1}$, alors $A^n = PB^nP^{-1}$. Si le calcul des puissances de $B$ est plus simple que celui des puissances de $A$, on utilise cette réduction. C'est par exemple le cas si $B$ est diagonale. Notons que cette méthode peut fournir aussi l'inverse de $A$ en cas d'inversibilité et plus généralement les puissances négatives de $A$.

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\chi_A = (X-1)(X-3)$ puis $E_1(A) = \text{Vect}(C_1)$ où $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_3(A) = \text{Vect}(C_2)$ où $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $A = P \times D \times P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} A^n = P \times D^n \times P^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ -1 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{3^n-1}{2} \\ \dfrac{3^n-1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**3ème méthode. Utilisation d'un binôme.**

On rappelle que si deux matrices $A$ et $B$ **commutent**, alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Si le calcul des puissances de $A$ et celui des puissances de $B$ est faisable, on peut choisir cette méthode pour calculer les puissances $A+B$.

**Exemple.** Soit $T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Posons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1,-1,2,2)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3E_{1,2} + E_{3,4}$ de sorte que $T = D + N$.

Un calcul par blocs montre directement que $D$ et $N$ commutent mais on peut retrouver ce fait :

$$DN = (-E_{1,1} - E_{2,2} + 2E_{3,3} + 2E_{4,4})(3E_{1,2} + E_{3,4}) = -3E_{1,2} + 2E_{3,4}$$

et

$$ND = (3E_{1,2} + E_{3,4})(-E_{1,1} - E_{2,2} + 2E_{3,3} + 2E_{4,4}) = -3E_{1,2} + 2E_{3,4}.$$

De plus, $N$ est nilpotente d'indice 2 car $N^2 = (3E_{1,2} + E_{3,4})(3E_{1,2} + E_{3,4}) = 0$. La formule du binôme de NEWTON fournit pour $n \geqslant 1$ :

$$\begin{aligned} T^n = (D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N &= \text{diag}\left((-1)^n, (-1)^n, 2^n, 2^n\right) + n\,\text{diag}\left((-1)^{n-1}, (-1)^{n-1}, 2^{n-1}, 2^{n-1}\right)(3E_{1,2} + E_{3,4}) \\ &= \text{diag}\left((-1)^n, (-1)^n, 2^n, 2^n\right) + 3(-1)^{n-1}nE_{1,2} + n2^{n-1}E_{3,4} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3(-1)^{n-1}n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$.

**4ème méthode. Utilisation d'un endomorphisme.**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A$ est la matrice d'un certain endomorphisme $f$ d'un espace $E$ dans une certaine base $\mathscr{B}$, alors $A^k = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^k\right)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ (ou $\mathbb{Z}$ suivant le cas).

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $A$ dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Avec la convention, pour tout $i\mathbb{Z}$, $e_{n+i} = e_i$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = e_{i+1}$ puis, immédiatement par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f^k(e_i) = e_{i+k}$. Donc,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots$$

❑

## 9.2 Calculs d'inverses de matrices inversibles (ou de réciproques d'automorphismes)

On se donne une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et on veut calculer l'inverse de $A$ et plus généralement $A^k$, $k \in \mathbb{Z}$. On fait ici un bilan des quelques méthodes apparaissant en classes préparatoires.

**1ère méthode. Utilisation d'un polynôme annulateur.**

On suppose qu'il existe un polynôme de degré $d \geqslant 1$ tel que $P(A) = 0$. En posant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0.$$

On suppose de plus que **le coefficient constant $a_0$ de $P$ n'est pas nul**. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0 &\Rightarrow a_0 I_n = -\sum_{k=1}^{d} a_k A^k \\ &\Rightarrow \left(-\frac{1}{a_0}\left(a_1 I_n + \dots + a_d A^{d-1}\right)\right) \times A = A \times \left(-\frac{1}{a_0}\left(a_1 I_n + \dots + a_d A^{d-1}\right)\right) = I_n.\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice $A$ est inversible et que $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_1 I_n + \dots + a_d A^{d-1}\right)$.

**Exemple.** Soit $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$. Soit $J = M(1,1)$. On a $M(a,b) = (a-b)I_n + bJ$.

La matrice $J$ vérifie $J^2 = nJ$ et donc

$$(M(a,b) - (a-b)I_n)^2 = b^2 J^2 = nb^2 J = nb\left(M(a,b) - (a-b)I_n\right),$$

et donc

$$(M(a,b))^2 - (2a + (n-2)b)M(a,b) + (a-b)(a+(n-1)b)I_n = 0.$$

• *1er cas.* Supposons que $a \neq b$ et $a \neq -(n-1)b$. On peut écrire

$$M(a,b) \times \left(\frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\left((2a+(n-2)b)I_n - M(a,b)\right)\right) = I_n.$$

Dans ce cas, $M(a,b)$ est inversible et

$$(M(a,b))^{-1} = \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)} \begin{pmatrix} a+(n-2)b & -b & \dots & -b \\ -b & a+(n-2)b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -b & \dots & -b & a+(n-2)b \end{pmatrix}.$$

• *2ème cas.* Si $a = b$, $\mathrm{rg}(M(a,b)) \leqslant 1 < n$ et donc $M(a,b)$ n'est pas inversible.

• *3ème cas.* Si $a = -(n-1)b$, la somme des colonnes de $M(a,b)$ est nulle et donc $M(a,b)$ n'est pas inversible. ❑

**2 ème méthode. Inversion d'une matrice de passage.**

Une matrice inversible $A$ peut toujours être interprétée comme une matrice de passage. L'inversion s'écrit alors

$$A = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \Leftrightarrow A^{-1} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}.$$

Inverser $A$ consiste donc à exprimer les vecteurs de $\mathscr{B}$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}'$.

**Exemple.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\det(A) = 1 + (-1) + 1 = 1 \neq 0$. Donc $A$ est inversible. Notons $(i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A$ dans la base $(i, j, k)$.

$$\left\{\begin{array}{l} e_1 = i - j + k \\ e_2 = i - j \\ e_3 = i - k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} j = i - e_2 \\ k = i - e_3 \\ e_1 = i - (i - e_2) + (i - e_3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i = e_1 - e_2 + e_3 \\ j = e_1 - 2e_2 + e_3 \\ k = e_1 - e_2 \end{array}\right.,$$

et donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ❏

**3 ème méthode. Utilisation de la définition de l'inverse.**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si on découvre $B$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$, alors $A$ est inversible et $B = A^{-1}$.

**Exemple.** Soit $A = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1 \leqslant k, l \leqslant n}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. $A$ est la matrice de VANDERMONDE des racines $n$-èmes de l'unité. Calculons $A \times \overline{A}$.

Soit $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$. Le coefficient ligne $k$, colonne $l$, de la matrice $A \times \overline{A}$ est

$$\sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)} \overline{\omega^{(u-1)(l-1)}} = \sum_{u=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-1)-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^{n} \left(\omega^{k-l}\right)^{u-1}.$$

Si $k = l$, ce coefficient vaut $\displaystyle\sum_{u=1}^{n} 1 = n$.

Si $k \neq l$, alors $k - l \neq 0$ et d'autre part, $-(n-1) \leqslant k - l \leqslant (n-1)$. En particulier, $k - l$ n'est pas multiple de $n$ et donc $\omega^{k-l} \neq 1$. On en déduit que

$$\sum_{u=1}^{n} \left(\omega^{k-l}\right)^{u-1} = \frac{1 - \omega^{n(k-l)}}{1 - \omega^{k-l}} = \frac{1 - 1}{1 - \omega^{k-l}} = 0.$$

Finalement, $A \times \overline{A} = nI_n$ puis $A \times \left(\dfrac{1}{n}\overline{A}\right) = I_n$. Donc, $A$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A}$. ❏

**4 ème méthode. Utilisation d'un endomorphisme.**

Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \left(\binom{j}{i}\right)_{0 \leqslant i, j \leqslant n}$. D'après la formule du binôme de NEWTON, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$(X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i.$$

$A$ est donc la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = \left(X^j\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$.

$f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de réciproque $\begin{array}{cccc} f^{-1}: & \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P(X-1) \end{array}$. On en déduit que $A$ est inversible et que

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}\left(f^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0} & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1} & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \left((-1)^{j-i}\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}.$$

❏

Dans la liste des techniques de calculs d'inverses, on peut encore rappeler la formule $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{com}A)$ ou aussi la méthode du pivot de Gauss. Ces deux techniques sont peu ou pas utilisées dans la pratique des exercices et problèmes de classes préparatoires. Rappelons enfin une dernière technique : l'utilisation de la calculatrice.