SESSION 2022

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Fonctions L et P

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{1}{n} \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$. La suite $(a_n 1^n)$ est bornée et donc $R_a \geqslant 1$. Mais la série de terme général $a_n 1^n$, $n \in \mathbb{N}$, diverge. Donc, $R_a \leqslant 1$. Finalement, $R_a = 1$. Ceci montre que pour tout z de D, la série de terme général $a_n z^n$ converge.

Si de plus, z est réel, élément de $]-1,1[$, on sait que $L(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$.

2) Soit $z \in D$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = a_n z^n$.
Si $z = 0$, la série entière de terme général $t \mapsto b_n t^n$ converge pour tout réel t et donc $R_b = +\infty > 1$. Si $z \neq 0$, la série entière de terme général $t \mapsto b_n t^n$ converge pour tout réel $t \in \left]-\dfrac{1}{|z|}, \dfrac{1}{|z|}\right[$ et donc $R_b \geqslant \dfrac{1}{|z|} > 1$. Dans tous les cas, $R_b > 1$.
En particulier la série entière de terme général $t \mapsto b_n t^n$ est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

Ainsi, pour tout réel t de $[0,1]$,

$$\frac{d}{dt}(L(tz))(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = z \sum_{n=1}^{+\infty} (tz)^{n-1} = \frac{z}{1-tz}.$$

Pour $t \in [0,1]$, posons $f(t) = (1-tz)e^{L(tz)}$. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout réel t de $[0,1]$,

$$f'(t) = -ze^{L(tz)} + (1-tz) \times \frac{z}{1-tz} e^{L(tz)} = 0.$$

On en déduit que la fonction f est constante sur $[0,1]$ puis, pour tout réel t de $[0,1]$, $(1-zt)e^{L(tz)} = f(t) = f(0) = e^{L(0)} = e^0 = 1$. En particulier, pour $t = 1$, on obtient $e^{L(z)} = \dfrac{1}{1-z}$. On a montré que

$$\forall z \in D,\ e^{L(z)} = \frac{1}{1-z}.$$

3) Soit $z \in D$. $|L(z)| = \left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|)$ (car $|z| < 1$).

Soit $z \in D$. Si $z = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L(z^n) = L(0) = 0$. Dans ce cas, la série de terme général $L(z^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.
Si $z \neq 0$, $|L(z^n)| \leqslant -\ln(1-|z|^n)$ où de plus $-\ln(1-|z|^n) \underset{n \to +\infty}{\sim} |z|^n > 0$. La série géométrique de terme général $|z|^n$ converge. Il en est de même de la série de terme général $-\ln(1-|z|^n)$. Mais alors, la série de terme général $L(z^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et en particulier converge.

B. Développement de P en série entière

4) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}$.

Pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, $a_k \leqslant ka_k \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{N} ja_j = n$ et donc $(a_1, \dots, a_N) \in [\![0,n]\!]$. Ainsi, $P_{n,N} \subset [\![0,n]\!]^N$ puis $\operatorname{card}(P_{n,N}) \leqslant (n+1)^N < +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{N} ka_k = n \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} ka_k + (N+1) \times 0 = n \Rightarrow (a_1, \dots, a_N, 0) \in P_{n,N+1}$.
Ainsi $(a_1, \dots, a_N) \mapsto (a_1, \dots, a_N, 0)$ est une application de $P_{n,N}$ vers $P_{n,N+1}$ et cette application est bien sûr injective. Donc,

$$p_{n,N} = \operatorname{card}(P_{n,N}) \leqslant \operatorname{card}(P_{n,N+1}) = p_{n,N+1}.$$

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(p_{n,N})_{N \geqslant 1}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sum_{k=1}^{N} ka_k = n$ admet pour unique solution dans $\mathbb{N}^N$ le N-uplet $(0, \ldots, 0)$. Donc, pour tout $N \geqslant 1$, $p_{0,N} = 1$. La suite $(p_{0,N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ est donc constante à partir du rang $1 = \text{Max}(0, 1)$.

Supposons maintenant $n \geqslant 1$. Soit $N > n$. Soit $(a_1, \ldots, a_N) \in P_{n,N}$. S'il existe $j \in [\![n+1, N]\!]$ tel que $a_j \neq 0$, alors $n = \sum_{k=1}^{N} ka_k \geqslant ja_j \geqslant (n+1) \times 1 > n$ ce qui est faux. Donc, pour tout $j \in [\![n+1, N]\!]$, $a_j = 0$ puis $\sum_{k=n+1}^{N} ka_k = 0$ de sorte que $(a_1, \ldots, a_n) \in P_{n,n}$. La réciproque étant claire, les solutions dans $\mathbb{N}^N$ de l'équation $\sum_{k=1}^{N} ka_k = n$ sont les N-uplets $(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in P_{n,n}$.

L'application $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)$ est une bijection de $P_{n,n}$ sur $P_{n,N}$ et en particulier, $p_{n,N} = p_{n,n}$. Ainsi, la suite $(p_{n,N})_{N \geqslant 1}$ est constante à partir du rang $n = \text{Max}(n, 1)$.

On a montré dans tous les cas que la suite $(p_{n,N})_{N \geqslant 1}$ est constante à partir du rang $\text{Max}(n, 1)$.

5) Soit $z \in D$. Montrons par récurrence que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n,1}$ est le nombre de solutions (a_1) dans $\mathbb{N}$ de l'équation $a_1 = n$. Cette équation a une solution et une seule à savoir (n). Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n,1} = 1$ puis

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = \prod_{k=1}^{1} \frac{1}{1-z^k}.$$

  L'égalité à démontrer est vraie quand $N = 1$.

- Soit $N \geqslant 1$. Supposons que $\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} &= \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} \times \frac{1}{1-z^{N+1}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,N} z^k\right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} z^{l(N+1)}\right) \text{ par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \\ k+l(N+1)=n}} p_{k,N} \right) z^n \text{ (produit de CAUCHY de deux séries entières).}
\end{aligned}$$

  Maintenant, $p_{n,N+1}$ est le nombre de solutions $(a_1, \ldots, a_N, a_{N+1}) \in \mathbb{N}^{N+1}$ de l'équation $\sum_{k=1}^{N} ka_k = n - (N+1)a_{N+1}$. Il y a $p_{n,N}$ solutions telles que $a_{N+1} = 0$, $p_{n-(N+1),N}$ solutions telles que $a_{N+1} = 1$, $p_{n-2(N+1),N}$ solutions telles que $a_{N+1} = 2$, ... et donc $p_{n,N+1} = p_{n,N} + p_{n-(N+1),N} + p_{n-2(N+1),N} + \ldots = \sum_{\substack{(k,l) \in \mathbb{N}^2 \\ k+l(N+1)=n}} p_{k,N}$, la somme étant finie.

  Finalement, $\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N+1} z^n$.

Le résultat est démontré par récurrence.

6) Pour $(n, N) \in \mathbb{N}^2$, posons $u_{n,N} = (p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n$. Vérifions la sommabilité de la suite double $(u_{n,N})_{(n,N) \in \mathbb{N}^2}$.

- Soit $N \in \mathbb{N}$. Puisque la suite $(p_{n,N})_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante d'après la question 4 et en tenant compte de $p_{n,0} = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n,N}| = (p_{n,N+1} - p_{n,N}) |z|^n$ puis, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,N}| &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)|z|^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N+1}|z|^n-\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}|z|^n \text{ (les deux séries convergent d'après la question précédente)}\\ &= \prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-|z|^k}-\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-|z|^k}<+\infty.\end{aligned}$$

D'autre part, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,0}|=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,1}|z|^n=\frac{1}{1-|z|}<+\infty.$

• Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{N=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,N}|\right) &= \frac{1}{1-|z|}+\sum_{N=1}^{+\infty}\left(\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-|z|^k}-\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-|z|^k}\right)\\ &= \frac{1}{1-|z|}+\lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{N=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-|z|^k}-\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-|z|^k}\right)\right)\\ &= \frac{1}{1-|z|}+\lim_{m\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{m+1}\frac{1}{1-|z|^k}-\frac{1}{1-|z|}\right) \text{ (somme télescopique)}\\ &= P(|z|)<+\infty.\end{aligned}$$

Donc, la suite $(u_{n,N})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{N=0}^{+\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)\right)z^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty}\sum_{N=0}^{m}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)\right)z^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{m\to+\infty}\left(p_{n,m+1}-p_{n,0}\right)\right)z^n \text{ (somme télescopique)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}p_nz^n \text{ (en tenant compte de } p_{n,0}=0\text{)},\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)z^n &= \sum_{N=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(p_{n,N+1}-p_{n,N}\right)z^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,1}z^n+\sum_{N=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N+1}z^n-\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n,N}z^n\right)\\ &= \frac{1}{1-z}+\lim_{m\to+\infty}\sum_{N=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^k}-\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k}\right)\\ &= \frac{1}{1-z}+\lim_{m\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{m+1}\frac{1}{1-z^k}-\frac{1}{1-z}\right) \text{ (somme télescopique)}\\ &= P(z).\end{aligned}$$

On a montré que pour tout $z\in D$, $P(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}p_nz^n$.

Le rayon de convergence de la série entière associée à la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc au moins égal à 1. Mais puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 1$, la série de terme général $p_n 1^n$ diverge. Ce rayon est donc inférieur ou égal à 1. Finalement, le rayon de convergence de la série entière associée à la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à 1.

7) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$. Tout d'abord, pour tout réel $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\left|e^{-t+i\theta}\right| = e^{-t} < 1$ et donc $P\left(e^{-t+i\theta}\right)$ est bien défini.

Ensuite, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, posons $f(\theta) = e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right) = e^{-in\theta}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{k(-t+i\theta)} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-kt}e^{i(k-n)\theta}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$, posons $f_k(\theta) = p_k e^{-kt}e^{i(k-n)\theta}$ de sorte que $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $\theta \in [-\pi, \pi]$, $|f_k(\theta)| = p_k\left(e^{-t}\right)^k$ puis $\|f_k\|_\infty = p_k\left(e^{-t}\right)^k$. Puisque $e^{-t} \in]-1, 1[$, la série numérique de terme général $\|f_k\|_\infty$ converge (d'après la question précédente). Donc, la série de fonctions de terme général f_k converge normalement et en particulier uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

Ainsi,

- chaque fonction f_k est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$,
- la série de fonctions de terme général f_k converge uniformément vers f sur le segment $[-\pi, \pi]$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,

- f est continue et donc intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$,
- la série de terme général $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta)\, d\theta$ converge,
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta)\, d\theta$.

Plus explicitement,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right) d\theta &= \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-kt}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta}\, d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-kt}2\pi\delta_{k,n} = 2\pi p_n e^{-nt}.\end{aligned}$$

Donc, $p_n = \dfrac{e^{nt}}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right) d\theta = \dfrac{e^{nt}P\left(e^{-t}\right)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\dfrac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} d\theta$.

C. Contrôle de P

8) Soient $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque $\left|xe^{i\theta}\right| = x < 1$, la question 2 permet d'affirmer que $\dfrac{1}{1 - xe^{i\theta}} = e^{L\left(xe^{i\theta}\right)}$ puis

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| = (1-x)\left|e^{L\left(xe^{i\theta}\right)}\right| = (1-x)e^{\mathrm{Re}\left(L\left(xe^{i\theta}\right)\right)}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(L\left(xe^{i\theta}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n e^{in\theta}}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\cos(n\theta)}{n} &= x\cos(\theta) + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n\cos(n\theta)}{n} \\ &\leqslant x\cos(\theta) + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\ (\text{car } x \geqslant 0) \\ &= x\cos(\theta) - \ln(1-x) - x\end{aligned}$$

et donc $\left|\dfrac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leqslant (1-x)e^{x\cos(\theta)-\ln(1-x)-x} = e^{-(1-\cos(\theta))x}$.

Soient $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \in [0, 1[$ puis

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| &= \left|\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\right| = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\right| \text{ (par continuité du module sur } \mathbb{C})\\
&\leqslant \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}e^{-(1-\cos(n\theta))x^n} = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=0}^{N}e^{-(1-\cos(n\theta))x^n}\\
&= \exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}x^n\cos(n\theta)\right) \text{ (par continuité de l'exponentielle sur } \mathbb{R})\\
&= \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^ne^{in\theta}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right).
\end{aligned}$$

9) Soient $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-xe^{-i\theta}}{\left(1-xe^{i\theta}\right)\left(1-xe^{-i\theta}\right)}\right) = \frac{1-x\cos(\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1},$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x\cos(\theta)}{x^2-2x\cos(\theta)+1} = \frac{x^2-2x\cos(\theta)+1-(1-x\cos(\theta))(1-x)}{(1-x)\left(x^2-2x\cos(\theta)+1\right)}\\
&= \frac{x^2(1-\cos(\theta))+x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\\
&\geqslant \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}
\end{aligned}$$

Ensuite, si $x(1-\cos(\theta)) \leqslant (1-x)^2$, alors $(1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)) \leqslant 3(1-x)^2$ puis $\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geqslant \frac{\frac{1}{2}(1-\cos(\theta))}{(1-x)\times 3(1-x)^2} = \frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}$ et finalement

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right).$$

Sinon, $x(1-\cos(\theta)) > (1-x)^2$, alors $(1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)) \leqslant 3x(1-\cos(\theta))$ puis $\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geqslant \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\times 3x(1-\cos(\theta))} = \frac{1}{3(1-x)}$ et finalement

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

10) Soient $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (car $1-e^{-x} > 0$) et positive sur $]0,+\infty[$.

$\varphi_{n,\alpha}(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^n\times 1}{x^n} = 1$. $\varphi_{n,\alpha}$ est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur un voisinage de 0.

$x^2\varphi_{n,\alpha}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{n+2}e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ car $\alpha > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc, $\varphi_{n,\alpha}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ puis la fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

La fonction $\varphi_{n,\alpha}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel strictement positif x,

$$\begin{aligned}\varphi_{n,\alpha}'(x) &= \frac{\left(nx^{n-1} - \alpha x^n\right)e^{-\alpha x}\left(1-e^{-x}\right)^n - x^n e^{-\alpha x} n e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}}{\left(1-e^{-x}\right)^{2n}} \\ &= \frac{\left((n-\alpha x)\left(1-e^{-x}\right) - nxe^{-x}\right)x^{n-1}e^{-\alpha x}}{\left(1-e^{-x}\right)^{n+1}}.\end{aligned}$$

$\left(1-e^{-x}\right)^{n+1} \underset{x\to 0}{\sim} x^{n+1}$ puis

$$\begin{aligned}(n-\alpha x)\left(1-e^{-x}\right) - nxe^{-x} &\underset{x\to 0}{=} (n-\alpha x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) - nx\left(1 - x + o(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(-\alpha + \frac{n}{2}\right)x^2 + o\left(x^2\right)\end{aligned}$$

et donc, $\varphi_{n,\alpha}'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{\left(\left(-\alpha + \frac{n}{2}\right)x^2 + o\left(x^2\right)\right)\times x^{n-1}\times(1+o(1))}{x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)} \underset{x\to 0}{=} -\alpha + \dfrac{n}{2} + o(1)$. La fonction $\varphi_{n,\alpha}'$ est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur un voisinage de 0.
Ensuite, $x^2\varphi_n'(x) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\dfrac{O(x)x^{n-1}e^{-\alpha x}}{1+o(1)} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x^{n+2}e^{-\alpha x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ puis $\varphi_{n,\alpha}'(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et la fonction $\varphi_{n,\alpha}'$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
Finalement, la fonction $\varphi_{n,\alpha}'$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

11) Soient $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t > 0$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 - e^{-kt} > 0$.
Ensuite, $k^2\dfrac{k^n e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^n} \underset{k\to+\infty}{\sim} k^{n+2}\left(e^{-t}\right)^k \underset{k\to+\infty}{=} o(1)$ car $0 < e^{-t} < 1$ et d'après un théorème de croissances comparées.
Donc, $\dfrac{k^n e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^n} \underset{k\to+\infty}{\sim} o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. On en déduit la convergence de la série de terme général $\dfrac{k^n e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^n}$, $k \in \mathbb{N}^*$, puis l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{k^n e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^n} > 0$ et donc $S_{n,\alpha}(t) > 0$.

Puisque $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(x)\ dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}\varphi_{n,\alpha}(x)\ dx$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les deux fonctions $x \mapsto x - kt$ et $x \mapsto \varphi_{n,\alpha}(x)$ sont de classe C^1 sur le segment $[kt,(k+1)t]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_{kt}^{(k+1)t}\varphi_{n,\alpha}(x)\ dx &= \left[(x-kt)\varphi_{n,\alpha}(x)\right]_{kt}^{(k+1)t} - \int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi_{n,\alpha}'(x)\ dx \\ &= t\varphi_{n,\alpha}((k+1)t) - \int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi_{n,\alpha}'(x)\ dx \\ &= \frac{(k+1)^n e^{-\alpha(k+1)t}}{\left(1-e^{-(k+1)t}\right)^n}t^{n+1} - \int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi_{n,\alpha}'(x)\ dx\ (*)\end{aligned}$$

La série de terme général $\dfrac{(k+1)^n e^{-\alpha(k+1)t}}{\left(1-e^{-(k+1)t}\right)^n}t^{n+1}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^n e^{-\alpha(k+1)t}}{\left(1-e^{-(k+1)t}\right)^n}t^{n+1} = t^{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^n e^{-\alpha kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^n} = t^{n+1}S_{n,\alpha}(t).$$

Mais alors, la série de terme général $\displaystyle\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi_{n,\alpha}'(x)\ dx$ converge et en additionnant membre à membre les égalités $(*)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(x)\ dx = t^{n+1}S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi_{n,\alpha}'(x)\ dx.$$

On en déduit que $S_{n,\alpha}(t) = \dfrac{1}{t^{n+1}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x)\ dx + \dfrac{1}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\ dx$. Ensuite, puisque la fonction $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\ dx\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}|x-kt|\,|\varphi'_{n,\alpha}(x)|\ dx \leqslant t\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}|\varphi'_{n,\alpha}(x)|\ dx\\ &= t\int_0^{+\infty}|\varphi'_{n,\alpha}(x)|\ dx.\end{aligned}$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\ dx \underset{t\to 0^+}{=} O(t)$ puis

$$S_{n,\alpha}(t) \underset{t\to 0^+}{=} \frac{1}{t^{n+1}}\int_0^{+\infty}\frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n}\ dx + O\left(\frac{1}{t^n}\right).$$

12) La fonction $\varphi_{1,1}\ :\ x \mapsto \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Pour $x>0$,

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = xe^{-x}\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-kx} = \sum_{k=0}^{+\infty}xe^{-(k+1)x} = \sum_{k=1}^{+\infty}xe^{-kx}.$$

Pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, posons $f_k(x) = xe^{-kx}$. Une intégration parties fournit

$$\int_0^{+\infty}f_k(x)\ dx = \int_0^{+\infty}xe^{-kx}\ dx = \left[-x\frac{e^{-kx}}{k}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{k}\int_0^{+\infty}e^{-kx}\ dx = \frac{1}{k}\left[-\frac{e^{-kx}}{k}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{k^2}.$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_k(x)|\ dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_k(x)\ dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty$.

Ainsi,

- chaque fonction f_k, $k\in\mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f_k, $k\in\mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction $\varphi_{1,1}$ sur $]0,+\infty[$ et la fonction $\varphi_{1,1}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f_k(x)|\ dx < +\infty$.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque,

- la fonction $\varphi_{1,1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$,
- la série numérique de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_k(x)\ dx$, $k\in\mathbb{N}^*$, converge,
- $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_{1,1}(x)\ dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_k(x)\ dx$.

Plus explicitement,

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\ dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

13) Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|\Phi_X(\theta)| &= |E(\cos(\theta X)) + iE(\sin(\theta X))| = |E(\cos(\theta X) + i\sin(\theta X)| = \left|E\left(e^{i\theta X}\right)\right|\\ &\leqslant E\left(\left|e^{i\theta X}\right|\right) = E(1) = 1.\end{aligned}$$

14) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}\Phi_{aX+b}(\theta) &= E\left(e^{i\theta(aX+b)}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{i\theta(ak+b)} p(1-p)^{k-1} = pe^{i(a+b)\theta} \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)e^{ia\theta}\right)^{k-1} \\ &= \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1-(1-p)e^{ia\theta}} = \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{ia\theta}} \text{ (car } \left|(1-p)e^{ia\theta}\right| = 1-p < 1).\end{aligned}$$

15) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, $\left|j^k P(X = j)\right| = j^k p(1-p)^{j-1} \underset{j \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{j^2}\right)$. Donc, la série de terme général $\left|j^k P(X = j)\right| = j^k p(1-p)^{j-1}$ converge puis, X^k est d'espérance finie d'après le théorème de transfert.

Pour tout réel θ, $\Phi_X(\theta) = E\left(e^{i\theta}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} p(1-p)^{n-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(\theta) = e^{in\theta} p(1-p)^{n-1}$. La série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction Φ_X sur $\mathbb{R}$ (car $|f_n(\theta)| = p(1-p)^{n-1}$ avec $|1-p| < 1$) et chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_n^{(k)}(\theta) = (in)^k e^{in\theta} p(1-p)^{n-1}.$$

Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty = n^k p(1-p)^{n-1}$. Puisque $n^k p(1-p)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série numérique de terme général $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge ou encore, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions de terme général $f_n^{(k)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme généralisé, la fonction Φ_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \Phi_X^{(k)}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} (in)^k e^{in\theta} p(1-p)^{n-1}.$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k p(1-p)^{n-1} = i^k E\left(X^k\right)$, ce qui reste clair quand $k = 0$.

16) D'après la question 14), pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(\theta) = \dfrac{pe^{i\theta}}{1-qe^{i\theta}}$.

Montrons, par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{C}[X]$, indépendant de p, tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\Phi_X^{(k)}(\theta) = pi^k e^{i\theta} \dfrac{P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1}}$ et $P_k(0) = 1$ $(\mathscr{P}_k)$.

- $(\mathscr{P}_0)$ est vraie avec $P_0 = 1$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons $(\mathscr{P}_k)$. Alors, pour tout réel θ,

$$\begin{aligned}\Phi_X^{(k+1)}(\theta) &= \left(\Phi_X^{(k)}\right)'(\theta) \\ &= pi^{k+1} e^{i\theta} \frac{P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1}} + pi^k e^{i\theta} \frac{iqe^{i\theta} P_k'\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+1}} + pi^k e^{i\theta} P_k\left(qe^{i\theta}\right) \times \frac{(k+1)iqe^{i\theta}}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+2}} \\ &= pi^{k+1} e^{i\theta} \frac{\left(1-qe^{i\theta}\right) P_k\left(qe^{i\theta}\right) + \left(1-qe^{i\theta}\right) qe^{i\theta} P_k'\left(qe^{i\theta}\right) + (k+1)qe^{i\theta} P_k\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+2}} \\ &= pi^{k+1} e^{i\theta} \frac{P_{k+1}\left(qe^{i\theta}\right)}{\left(1-qe^{i\theta}\right)^{k+2}}\end{aligned}$$

  en posant $P_{k+1} = (1-X)P_k + X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$. P_{k+1} est un polynôme indépendant de p et $P_{k+1}(0) = P_k(0) = 1$.

Le résultat est démontré par récurrence.

17) D'après les deux questions précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $i^k E\left(X^k\right) = \Phi_X^{(k)}(0) = p i^k \dfrac{P_k(q)}{(1-q)^{k+1}} = i^k \dfrac{P_k(q)}{p^k}$ et donc $E\left(X^k\right) = \dfrac{P_k(q)}{p^k}$. Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|E\left(X^k\right) - \frac{1}{p^k}\right| = \frac{|P_k(q) - P_k(0)|}{p^k}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction P_k est de classe C^1 sur le segment $[0,1]$ et donc la fonction P_k' est bornée sur ce segment. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|P_k(q) - P_k(0)| \leqslant q \underset{t\in[0,1]}{\text{Sup}} |P_k'(t)|$. En posant $C_k = 1 + \underset{t\in[0,1]}{\text{Sup}} |P_k'(t)|$ pour $k \in \mathbb{N}$, C_k est un réel strictement positif indépendant de p tel que

$$\left|E\left(X^k\right) - \frac{1}{p^k}\right| \leqslant \frac{C_k q}{p^k}.$$

18)

$$\begin{aligned}
E\left((X - E(X))^4\right) &= E\left(X^4 - 4X^3E(X) + 6X^2(E(X))^2 - 4X(E(X))^3 + (E(X))^4\right)\\
&= E\left(X^4\right) - 4E\left(X^3\right)E(X) + 6E\left(X^2\right)(E(X))^2 - 4E(X)(E(X))^3 + (E(X))^4\\
&= \left(E\left(X^4\right) - \frac{1}{p^4}\right) - \frac{4}{p}\left(E\left(X^3\right) - \frac{1}{p^3}\right) + \frac{6}{p^2}\left(E\left(X^2\right) - \frac{1}{p^2}\right) - \frac{4}{p^3}\left(E(X) - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p^4}(1-1)\\
&\leqslant \left|E\left(X^4\right) - \frac{1}{p^4}\right| + \frac{4}{p}\left|E\left(X^3\right) - \frac{1}{p^3}\right| + \frac{6}{p^2}\left|E\left(X^2\right) - \frac{1}{p^2}\right| + \frac{4}{p^3}\left|E(X) - \frac{1}{p}\right|\\
&\leqslant \frac{(C_4 + 4C_3 + 6C_2 + 4C_1)\,q}{p^4}
\end{aligned}$$

Le réel $K = C_4 + 4C_3 + 6C_2 + 4C_1$ est un réel strictement positif indépendant de p tel que, pour tout $p \in]0,1[$, $E\left(X - (E(X))^4\right) \leqslant \dfrac{Kq}{p^4}$.

19) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$E\left(Y^2\right) = \left|E\left(Y^2 \times 1\right)\right| \leqslant \left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(E\left(1^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

puis, par croissance de la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{2}}$ sur $[0, +\infty[$,

$$E\left(|Y|^3\right) = E\left(Y^2|Y|\right) \leqslant \left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(E\left(Y^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{3}{4}} < +\infty.$$

20) Soit $u \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor-Laplace fournit

$$e^{iu} = 1 + iu + i^2\frac{u^2}{2} + \int_0^u \frac{(t-u)^2}{2} i^3 e^{it}\,dt.$$

Par suite, $\left|e^{iu} - 1 - iu + \dfrac{u^2}{2}\right| = \left|\displaystyle\int_0^u \frac{(t-u)^2}{2} e^{it}\,dt\right|$.

Si $u \geqslant 0$, $\left|\displaystyle\int_0^u \frac{(t-u)^2}{2} i^3 e^{it}\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_0^u \frac{(t-u)^2}{2}\left|e^{it}\right|\,dt = \int_0^u \frac{(t-u)^2}{2}\,dt = \frac{u^3}{6} = \frac{|u|^3}{6}$.

Si $u \leqslant 0$, $\left|\displaystyle\int_0^u \frac{(t-u)^2}{2} i^3 e^{it}\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_u^0 \frac{(t-u)^2}{2}\,dt = -\frac{u^3}{6} = \frac{|u|^3}{6}$. On a montré que

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \left|e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \frac{|u|^3}{6}.$$

Mais alors, pour $\theta \in \mathbb{R}$, puisque $E(Y) = 0$,

$$\Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{E\left(Y^2\right)\theta^2}{2} = E\left(e^{i\theta Y}\right) - 1 - i\theta E(Y) + \frac{E\left(Y^2\right)\theta^2}{2} = E\left(e^{i\theta Y} - 1 - i\theta Y + \frac{(\theta Y)^2}{2}\right)$$

puis, par croissance de l'espérance,

$$\begin{aligned}\left|\Phi_X(\theta)-1+\frac{E\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right| &\leqslant E\left(\left|e^{i\theta}Y-1-i\theta Y+\frac{(\theta Y)^2}{2}\right|\right)\\ &\leqslant E\left(\frac{|\theta Y|^3}{6}\right)=\frac{|\theta|^3}{6}E\left(|Y|^3\right)\\ &\leqslant \frac{|\theta|^3}{6}\left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{3}{4}} \text{ (d'après la question 19).}\end{aligned}$$

21) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On montre que la même manière qu'à la question précédente que pour tout réel u, $|e^u-1-u|\leqslant\dfrac{u^2}{2}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|\Phi_Y(\theta)-\exp\left(-\frac{E\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)\right| &= \left|\left(\Phi_Y(\theta)-1+\frac{E\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)-\left(\exp\left(-\frac{E\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)-1+\frac{E\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)\right|\\ &\leqslant \frac{|\theta|^3}{6}\left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\left(-\frac{E\left(Y^2\right)\theta^2}{2}\right)^2=\frac{|\theta|^3}{6}\left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{3}{4}}+\frac{\theta^4}{8}\left(E\left(Y^2\right)\right)^2\\ &\leqslant \frac{|\theta|^3}{6}\left(E\left(Y^4\right)\right)^{\frac{3}{4}}+\frac{\theta^4}{8}E\left(Y^4\right).\end{aligned}$$

F. Convergence vers une gaussienne

22) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $((z_1,\ldots,z_n),(u_1,\ldots,u_n))\in\left((D_f(0,1))^n\right)^2$,

$$\left|\prod_{k=1}^{n}z_k-\prod_{k=1}^{n}u_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k-u_k|\ (\mathscr{P}_n).$$

- C'est immédiat quand $n=1$.
- Soit $n\geqslant 1$. Supposons $(\mathscr{P}_n)$. Soit $((z_1,\ldots,z_{n+1}),(u_1,\ldots,u_{n+1}))\in\left((D_f(0,1))^{n+1}\right)^2$.

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n+1}z_k-\prod_{k=1}^{n+1}u_k\right| &= \left|(z_{n+1}-u_{n+1})\prod_{k=1}^{n}z_k+u_{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}z_k-\prod_{k=1}^{n}u_k\right)\right|\\ &\leqslant |z_{n+1}-u_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}|z_k|+|u_{n+1}|\left|\prod_{k=1}^{n}z_k-\prod_{k=1}^{n}u_k\right|\\ &\leqslant |z_{n+1}-u_{n+1}|+\left|\prod_{k=1}^{n}z_k-\prod_{k=1}^{n}u_k\right|\\ &\leqslant |z_{n+1}-u_{n+1}|+\sum_{k=1}^{n}|z_k-u_k| \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}|z_k-u_k|.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

23) Soient $\theta\in\mathbb{R}$ et $t>0$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, d'après la question 14) appliquée avec $a=k$ et $b=-kE(Z_k)=-\dfrac{k}{1-e^{-kt}}$,

$$\Phi_{Y_k}(\theta)=\Phi_{kZ_k-kE(Z_k)}(\theta)=\frac{\left(1-e^{-kt}\right)e^{i\frac{ke^{-kt}}{1-e^{kt}}\theta}}{1-e^{-kt}e^{ik\theta}}.$$

Puis, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^{n}\Phi_{Y_k}(\theta)=\exp\left(-i\theta\sum_{k=1}^{n}\frac{ke^{-kt}}{1-e^{-kt}}\right)\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\left(e^{-t}\right)^k\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)^k\right)}.$$

Par suite, d'après la question 3) et la définition de $S_{n,\alpha}$ fournie au début de la partie D,

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\Phi_{Y_k}(\theta)=\exp\left(-im_t\theta\right)\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}=h(t,\theta).$$

Ensuite, $e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2e^{-kt}\theta^2}{2\left(1-e^{kt}\right)^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\exp\left(-\dfrac{k^2e^{-kt}\theta^2}{2\left(1-e^{kt}\right)^2}\right)$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $z_k=\Phi_k(\theta)$ et $u_k=\exp\left(-\dfrac{k^2e^{-kt}\theta^2}{2\left(1-e^{kt}\right)^2}\right)$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $|z_k|\leqslant 1$ et $|u_k|\leqslant 1$ et d'après la question 21, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\Phi_{Y_k}(\theta)-\prod_{k=1}^{n}\exp\left(-\frac{k^2e^{-kt}\theta^2}{2\left(1-e^{kt}\right)^2}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\Phi_{Y_k}(\theta)-\exp\left(-\frac{k^2e^{-kt}\theta^2}{2\left(1-e^{kt}\right)^2}\right)\right|$$

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{E}\left(Y_k^2\right)=\mathrm{E}\left(Y_k^2\right)-\left(\mathrm{E}\left(Y_k\right)\right)^2=\mathrm{V}\left(Y_k\right)=k^2\mathrm{V}\left(Z_k\right)=k^2\dfrac{e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^2}$ puis, d'après la question 21,

$$\begin{aligned}\left|\Phi_{Y_k}(\theta)-\exp\left(-\frac{k^2e^{-kt}\theta^2}{2\left(1-e^{kt}\right)^2}\right)\right|&=\left|\Phi_{Y_k}(\theta)-\exp\left(-\frac{\mathrm{E}\left(Y_k^2\right)\theta^2}{2}\right)\right|\\&\leqslant\frac{|\theta|^3}{3}\left(\mathrm{E}\left(Y_k^4\right)\right)^{\frac{3}{4}}+\frac{\theta^4}{8}\mathrm{E}\left(Y_k^4\right).\end{aligned}$$

Ensuite, d'après la question 18 (la constante K est indépendante de p et donc de k),

$$\mathrm{E}\left(Y_k^4\right)=k^4\mathrm{E}\left(\left(Z_k-\mathrm{E}\left(Z_k\right)\right)^4\right)\leqslant K\frac{k^4e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^4}.$$

On obtient donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n}\Phi_{Y_k}(\theta)-\prod_{k=1}^{n}\exp\left(-\frac{k^2e^{-kt}\theta^2}{2\left(1-e^{kt}\right)^2}\right)\right|&\left|\sum_{k=1}^{n}\left|\Phi_{Y_k}(\theta)-\exp\left(-\frac{k^2e^{-kt}\theta^2}{2\left(1-e^{kt}\right)^2}\right)\right|\right.\\&\leqslant K^{\frac{3}{4}}\frac{|\theta|^3}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3e^{-\frac{3}{4}kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^3}+K\frac{\theta^4}{8}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^4}\\&\leqslant K^{\frac{3}{4}}|\theta|^3\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3e^{-\frac{3}{4}kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^3}+K\theta^4\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4e^{-kt}}{\left(1-e^{-kt}\right)^4}.\end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient enfin

$$\left|h(t,\theta)-e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right|\leqslant K^{\frac{3}{4}}|\theta|^3S_{3,\frac{3}{4}}(t)+K\theta^4S_{4,1}(t).$$

24) D'après la question 11) et le résultat admis à la fin de la question 12,

$$\sigma_t^2=S_{2,1}(t)\underset{t\to0^+}{=}\frac{1}{t^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x}}{\left(1-e^{-x}\right)^2}\,dx+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\underset{t\to0^+}{=}\frac{\pi^2}{3t^3}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{\pi^2}{3t^3}.$$

Mais alors, puisque $\sigma_t\geqslant 0$, $\sigma_t=\sqrt{\sigma_t^2}\underset{t\to0^+}{\sim}\dfrac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$.

De même, $m_t = S_{1,1}(t) \underset{t\to 0^+}{=} \dfrac{1}{t^2}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} + O\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to 0^+}{=} \dfrac{\pi^2}{6t^2} + O\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Mais alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right) \underset{t\to 0^+}{=} u\left(\frac{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}{\pi} + o\left(t^{\frac{3}{2}}\right)\right) O\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to 0^+}{=} o(1).$$

On en déduit que $\lim\limits_{t\to 0^+} \zeta(t,u) = 1$.

Soit $u \in \mathbb{R}$. On applique l'inégalité (2) avec $t > 0$ donné et $\theta = \dfrac{u}{\sigma_t}$. On obtient

$$\left|h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) - e^{-\frac{u^2}{2}}\right| \leqslant K^{\frac{3}{4}}\frac{|u|^3}{\sigma_t^3}S_{3,\frac{3}{4}}(t) + K^4\frac{|u|^4}{\sigma_t^4}S_{4,1}(t),$$

où, toujours d'après la question 11), $S_{3,\frac{3}{4}}(t) \underset{t\to 0^+}{=} O\left(\dfrac{1}{t^4}\right)$ et donc $K^{\frac{3}{4}}\dfrac{|u|^3}{\sigma_t^3}S_{3,\frac{3}{4}}(t) \underset{t\to 0^+}{=} O\left(t^{\frac{9}{2}}\right) O\left(\dfrac{1}{t^4}\right) \underset{t\to 0^+}{=} O\left(\sqrt{t}\right)$ et aussi $K^4\dfrac{|u|^4}{\sigma_t^4}S_{4,1}(t) \underset{t\to 0^+}{=} O\left(t^6\right) O\left(\dfrac{1}{t^5}\right) \underset{t\to 0^+}{=} O(t) \underset{t\to 0^+}{=} O\left(\sqrt{t}\right)$.

En résumé, $\left|h\left(t, \dfrac{u}{\sigma_t}\right) - e^{-\frac{u^2}{2}}\right| \underset{t\to 0^+}{=} O\left(\sqrt{t}\right)$ et en particulier, $h\left(t, \dfrac{u}{\sigma_t}\right) \underset{t\to 0^+}{\to} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Finalement, $j(t,u) \underset{t\to 0^+}{\to} 1 \times e^{-\frac{u^2}{2}} = e^{-\frac{u^2}{2}}$.

25) Soit f définie sur $[-\pi,\pi]$ par : $\forall \theta \in [-\pi,\pi]$, $f(\theta) = \begin{cases} (1-\cos(\theta))/\theta^2 \text{ si } \theta \neq 0 \\ 1/2 \text{ si } \theta = 0 \end{cases}$. f est continue sur ce segment et admet donc un minimum α sur ce segment. f étant strictement positive sur $[-\pi,\pi]$ (y compris en 0), ce minimum est strictement positif. Par définition de α, pour tout réel $\theta \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}$, $1-\cos(\theta) \geqslant \alpha\theta^2$, ce qui reste vrai pour $\theta = 0$.

On a montré qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$, $1-\cos(\theta) \geqslant \alpha\theta^2$.

Pour tout $t > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $|h(t,\theta)| = \left|\dfrac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right|$. On commence déjà par choisir t de sorte que $x = e^{-t} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$. Ceci équivaut à $t \in]0, \ln(2)[$.

D'après la question 9), si $e^{-t}(1-\cos(\theta)) \leqslant (1-e^{-t})^2$, alors

$$|h(t,\theta)| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6\left(1-e^{-t}\right)^3}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6\left(1-e^{-t}\right)^3}\right).$$

Maintenant, $\dfrac{\alpha}{6\left(1-e^{-t}\right)^3} \times \dfrac{1}{\sigma_t^2} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{\alpha}{6t^3} \times \dfrac{3t^3}{\pi^2} = \dfrac{\alpha}{2\pi^2}$. Donc, il existe $t_1 \in]0, \ln(2)]$ tel que pour tout $t \in]0, t_1]$, $\dfrac{\alpha}{6\left(1-e^{-t}\right)^3} \times \dfrac{1}{\sigma_t^2} \geqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\alpha}{2\pi^2} = \dfrac{\alpha}{\pi^2}$. Soit $\beta = \dfrac{\alpha}{4\pi^2} > 0$. Pour tout $t \in]0, t_1]$, $\dfrac{\alpha}{6\left(1-e^{-t}\right)^3} \times \dfrac{1}{\sigma_t^2} \geqslant \beta$ puis $\dfrac{\alpha}{6\left(1-e^{-t}\right)^3} \geqslant \beta\sigma_t^2$ et donc

$$|h(t,\theta)| \leqslant \exp\left(-\beta\left(\sigma_t\theta\right)^2\right).$$

Sinon, $e^{-t}(1-\cos(\theta)) > (1-e^{-t})^2$ et dans ce cas,

$$|h(t,\theta)| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3\left(1-e^{-t}\right)}\right),$$

avec $\dfrac{1}{3\left(1-e^{-t}\right)} \times \dfrac{1}{\sigma_t^{\frac{2}{3}}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{3t} \times \dfrac{3^{\frac{1}{3}}t}{\pi^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{(3\pi)^{\frac{2}{3}}}$. Donc, il existe $t_2 \in]0, \ln(2)]$ tel que pour tout $t \in]0, t_2]$, $\dfrac{1}{3\left(1-e^{-t}\right)} \times \dfrac{1}{\sigma_t^{\frac{2}{3}}} \geqslant \dfrac{1}{2(3\pi)^{\frac{2}{3}}}$. Soit $\delta = \dfrac{1}{2(3\pi)^{\frac{2}{3}}} > 0$. Pour tout $t \in]0, t_2]$, $\dfrac{\alpha}{6\left(1-e^{-t}\right)^3} \times \dfrac{1}{\sigma_t^2} \geqslant \beta$ puis $\dfrac{\alpha}{6\left(1-e^{-t}\right)^3} \geqslant \beta\sigma_t^2$ et donc

$$|h(t,\theta)| \leqslant \exp\left(-\delta\left(\sigma_t\right)^{\frac{2}{3}}\right).$$

Enfin, $\dfrac{|\theta|}{\pi} \leqslant 1$ puis $\dfrac{|\theta|^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}} \leqslant 1$ puis $-\delta\left(\sigma_t\right)^{\frac{2}{3}} \leqslant -\dfrac{\delta}{\pi^{\frac{2}{3}}}\left(\sigma_t|\theta|\right)^{\frac{2}{3}}$ et donc

$$|h(t,\theta)| \leqslant \exp\left(-\delta\left(\sigma_t\right)^{\frac{2}{3}}\frac{|\theta|^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}\right).$$

Donc, en posant $\gamma = \dfrac{\delta}{\pi^{\frac{2}{3}}} > 0$, pour tout $t \in]0, t_2]$, $|h(t,\theta)| \leqslant e^{-\gamma(\sigma_t|\theta|)^{\frac{2}{3}}}$.

Soit enfin $t_0 = \text{Min}\{t_1, t_2\} > 0$. Pour tout $t \in]0, t_0]$, on a ou bien $|h(t,\theta)| \leqslant e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2}$, ou bien $|h(t,\theta)| \leqslant e^{-\gamma(\sigma_t|\theta|)^{\frac{2}{3}}}$.

26) Posons $\begin{array}{rccc} F : &]0, t_0] \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (t, u) & \mapsto & j(t,u) \times 1_{[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]} \end{array}$ de sorte que pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\ du = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t,u)\ du.$$

• Pour chaque $t \in]0, t_0]$, la fonction $u \mapsto F(t,u)$ est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$.

• Soit $u \in \mathbb{R}$. $1_{[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]}(u) \underset{t \to 0^+}{\rightarrow} 1$ et donc $F(t,u) \underset{t \to 0^+}{\rightarrow} e^{-\frac{u^2}{2}} = \ell(u)$ d'après la question précédente. De plus, la fonction ℓ est continue par morceaux sur $]-\infty, +\infty[$.

• Si $u \in [-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]$, alors $\dfrac{u}{\sigma_t} \in [-\pi, \pi]$ puis, pour $t \in]0, t_0]$,

$$|F(t,u)| = |j(t,u)| = \left|h\left((t, \frac{u}{\sigma_t}\right)\right| \leqslant e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma|u|^{\frac{2}{3}}} = \varphi(u).$$

Cette inégalité reste vraie quand $u \notin [-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]$ car dans ce cas, $F(t,u) = 0$. La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]-\infty, +\infty[$ (car négligeable devant $\dfrac{1}{u^2}$ quand u tend vers $\pm\infty$).

D'après une version du théorème de convergence dominée,

• la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t,u)\ du$ a une limite quand t tend vers 0 par valeurs supérieures,

• la fonction ℓ est intégrable sur $]-\infty, +\infty[$,

• $\dim t0^+ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t,u)\ du = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(u)\ du$.

Ceci fournit explicitement

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\ du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\ du = \sqrt{2\pi}.$$

G. La conclusion

27) D'après la formule (1) de la question 7), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt} P\left(e^{-t}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\ d\theta.$$

On prend $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}$ et on effectue dans l'intégrale le changement $u = \sigma_t\theta$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\ d\theta &= \frac{1}{\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} e^{-in\frac{u}{\sigma_t}} \frac{P\left(e^{-t+i\frac{u}{\sigma_t}}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\ du \\
&= \frac{1}{\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} \exp\left(-i\frac{\pi^2}{6t^2}\right) e^{-im_t\frac{u}{\sigma_t}} e^{im_t\frac{u}{\sigma_t}} \frac{P\left(e^{-t+i\frac{u}{\sigma_t}}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\ du \\
&= \frac{1}{\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} \exp\left(-i\frac{u}{\sigma_t}\left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) e^{im_t\frac{u}{\sigma_t}} \frac{P\left(e^{-t+i\frac{u}{\sigma_t}}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\ du \\
&= \frac{1}{\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\ du
\end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, t tend vers 0 par valeurs supérieures puis $\displaystyle\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\,du$ tend vers $\sqrt{2\pi}$.

D'autre part, $\dfrac{1}{\sigma_t} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{3}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\pi}$

D'après le résultat admis par l'énoncé, quand $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{6n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$,

$$\frac{e^{nt}P\left(e^{-t}\right)}{2\pi} = \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}}{2\pi}P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}}{2\pi} \times \sqrt{\frac{\pi/\sqrt{6n}}{2\pi}}e^{\frac{\pi^2}{6\pi/\sqrt{6n}}}.$$

Finalement,

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\pi} \times \sqrt{2\pi} \times \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}}{2\pi} \times \sqrt{\frac{\pi/\sqrt{6n}}{2\pi}}e^{\frac{\pi^2}{6\pi/\sqrt{6n}}} = \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}.$$

