TD n°11
Ondes électromagnétiques dans les milieux dispersifs

On prendra pour les applications numériques :

- masse de l'électron $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
- charge élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
- permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Exercice 1 : Ondes longitudinales dans un plasma

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense de densité électronique complexe notée $\underline{n}_0$, dans lequel la densité volumique de charge $\underline{\rho}$ est non nulle. Le champ électromagnétique associé à cette onde est noté, en représentation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \vec{B}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

1. Établir l'équation du mouvement d'un électron de masse m_e et de charge $-e$ soumis au champ électromagnétique. Justifier les approximations faites.
2. Définir alors une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ pour le plasma.
3. En utilisant les équation de Maxwell et l'équation locale de conservation de la charge, établir une nouvelle expression de $\underline{\gamma}$ en fonction de ω et ε_0.
4. Montrer que $\underline{\vec{B}} = \vec{0}$.
   Astuce : Un vecteur est nul si son rotationnel et sa divergence sont nuls.
5. En déduire la position relative des vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{E}$.
6. Montrer que la pulsation ne peut prendre qu'une seule valeur.

Exercice 2 : Dispersion dans un plasma interstellaire

Un plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m_e et de charge $-e$, de nombre volumique n_0 et en mouvement non relativiste. Des ions sont également présents, mais sont supposés immobiles. Ce plasma est localement neutre et le reste au passage d'une onde électromagnétique. Avec ces hypothèses, on cherche des solutions des équations de Maxwell sous forme d'ondes planes progressives monochromatiques (OPPM) de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{B}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

1. Montrer que de telles solutions n'existent que si la densité de courant $\vec{j}$ est elle-même une OPPM de même vecteur d'onde et de même pulsation, c'est-à-dire de la forme : $\underline{\vec{j}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{j}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$.
2. Montrer que $\underline{\vec{j}}$ est orthogonal à $\vec{k}$.
   Astuce : Interpréter la phrase "ce plasma est localement neutre et le reste au passage d'une onde électromagnétique".
3. Écrire l'équation du mouvement d'un électron et montrer que l'effet du champ magnétique y est négligeable. Montrer alors que les vecteurs $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont colinéaires et déterminer la conductivité $\underline{\gamma}$ du plasma. Commentaire ?

4. À l'aide des équations de Maxwell, exprimer $\underline{\vec{j}}$ en fonction de ω, $\vec{k}$, $\underline{\vec{E}}$ et des constantes. En déduire une nouvelle expression de $\underline{\gamma}$.
5. Déterminer alors la relation de dispersion $\omega(k)$.
6. En posant $K = \sqrt{\dfrac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e}}$, établir les expressions des vitesses de phase v_φ et de groupe v_g des ondes dans le plasma. Commentaire ?

Deux trains d'ondes, de longueurs d'onde respectives λ_1 et $\lambda_2 > \lambda_1$ sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance L. On suppose $K^2\lambda_1^2 \ll 1$ et $K^2\lambda_2^2 \ll 1$.

7. Montrer que le terme principal dans la différence $\delta t = t_2 - t_1$ des temps de réception des deux ondes est donné par :
$$\delta t = \frac{L\,K^2}{8\pi^2 c}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$
8. Des mesures de dispersion à partir de signaux émis par des pulsars dont la distance est connue donnent $n_0 = 2{,}8 \times 10^4\,\mathrm{m^{-3}}$. Calculer δt dans ces conditions, pour deux signaux de longueurs d'onde $\lambda_1 = 0{,}4\,\mu\mathrm{m}$ et $\lambda_2 = 0{,}8\,\mu\mathrm{m}$, émis par une étoile située à $L = 1 \times 10^3$ années lumières.

Exercice 3 : Bilan énergétique pour une OPPM dans un plasma

Un plasma est constitué d'une part d'électrons de masse m_e, de charge $-e$ et de densité particulaire n, et d'autre part d'ions positifs quasiment immobiles du fait de leur masse très grande devant celle des électrons. Ce plasma reste localement neutre, de sorte que $\rho = 0$ mais il peut exister un vecteur densité de courant électrique $\underline{\vec{j}}$ non nul. La conductivité complexe du plasma est notée :

$$\underline{\gamma} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

avec $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}}$ la pulsation plasma. On étudie la propagation d'une onde EM associée au champ électrique :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp[i(\omega t - kz)]\vec{u}_x$$

en se placant dans le cas où $\omega > \omega_p$. La relation de dispersion du plasma est : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$.

1. Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ associé puis calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ instantané.
2. Exprimer la densité volumique d'énergie $u_{em}(t)$ de cette onde.
3. Exprimer la densité volumique de puissance $\mathcal{P}_{v,cedee}$ cédée au plasma.

De manière générale, un bilan de puissance pour le champ électromagnétique en interaction avec la matière se traduit par l'équation locale de Poynting :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{\Pi} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0$$

4. Attribuer un sens à chacun de ces termes et vérifier cette égalité dans le cas du plasma.

Exercice 4 : Réflexion-transmission à la surface d'un plasma

Un plasma occupe le demi-espace $x > 0$. On rappelle qu'une OPPH électromagnétique de vecteur d'onde $\vec{\underline{k}} = \underline{k}\vec{u}_x$ peut se propager dans ce milieu à condition que la composante $\underline{k}$ soit reliée à la pulsation ω par la relation de dispersion (ω_p étant la pulsation plasma) :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Le demi-espace $x < 0$ est le vide. Une OPPH polarisée rectilignement, appelée onde incidente (O_i), se propage dans cet espace en direction du plasma. L'interface $x = 0$ donne naissance à une onde réflechie (O_r) et à une onde transmise (O_t). Les champs électriques associés à ces ondes sont :

$$\begin{cases} \vec{\underline{E}}_i &= E_0 \exp[i(k_i\, x - \omega t)]\vec{u}_y \\ \vec{\underline{E}}_r &= \underline{r}\, E_0 \exp[-i(k_r\, x + \omega t)]\vec{u}_y \\ \vec{\underline{E}}_t &= \underline{t}\, E_0 \exp[i(\underline{k}\, x - \omega t)]\vec{u}_y \end{cases}$$

où $\underline{r}$ et $\underline{t}$ sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude. On définit l'indice complexe du plasma par $\underline{n} = \dfrac{c\underline{k}}{\omega}$

1. Donner les expression de k_i et de k_r en fontion de ω.
   Astuce : dans quel milieu se propagent les ondes incidentes et réfléchies ?
2. Déterminer les champs magnétiques $\vec{\underline{B}}_i$, $\vec{\underline{B}}_r$ et $\vec{\underline{B}}_t$ associés aux trois ondes.

Il n'y a aucune charge ni aucun courant à la surface du plasma. Cela signifie que les champs électrique et magnétique sont continus à l'interface.

3. Écrire les relations de continuité en $x = 0$ et en déduire deux relations liant $\underline{r}$ et $\underline{t}$.
   Astuce : Quels sont les champs présents à gauche ? à droite ?
4. En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n}$.
5. Déterminer les valeurs moyennes $\langle\vec{\Pi}_i(x=0)\rangle$, $\langle\vec{\Pi}_r(x=0)\rangle$ et $\langle\vec{\Pi}_t(x=0)\rangle$ des vecteurs de Poynting en $x = 0$. Les exprimer en fonction de $|\underline{r}|^2$, $|\underline{t}|^2$ et $n' = \mathrm{Re}(\underline{n})$.

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en énergie par :

$$R = \frac{\|\langle\vec{\Pi}_r(x=0)\rangle\|}{\|\langle\vec{\Pi}_i(x=0)\rangle\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\langle\vec{\Pi}_t(x=0)\rangle\|}{\|\langle\vec{\Pi}_i(x=0)\rangle\|}$$

6. Calculer R et T en fonction de ω et ω_0 dans les deux cas $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$.
7. Que peut-on dire de $R + T$ dans les deux cas ?

Exercice 5 : Propagation dans un milieu isolant dilué

On se propose d'étudier le modèle simplifié de la propagation d'une onde dans un milieu isolant dilué. On s'intéresse pour cela au mouvement des électrons, dont le nombre par unité de volume est noté n_0.

Le champ électrique associé à cette onde est polarisé rectilignement selon $\vec{u}_x$ et se propage dans la direction de $\vec{u}_z$:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}\,\vec{u}_x = E_0\,e^{i(\omega t - \underline{k}z)}\,\vec{u}_x$$

Sous l'action de ce champ électrique, les électrons ont un mouvement qui lui est colinéaire, caractérisé par l'équation différentielle :

$$m_e \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\kappa\, x - f\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - e\,E$$

avec x le déplacement de l'électron, κ et f des constantes du modèle. On pose :

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{m_e}, \qquad \tau = \frac{m_e}{f}, \qquad \omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}$$

1. Comparer l'équation différentielle à celle du modèle du plasma peu dense du cours. Quels sont les termes supplémentaires ? Que représentent-ils ?
2. Chercher la solution correspondant au régime forcé sous la forme $\underline{x}(z,t) = \underline{x}_0\,e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$.
3. En déduire la densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}$. Montrer que la densité volumique de charge est nulle.
4. À partir des équations de Maxwell, établir une équation aux dérivées partielles liant $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{j}}$.
5. Déterminer alors la relation de dispersion du milieu.

Cette relation de dispersion indique que le vecteur d'onde est complexe, noté $\underline{k} = k' - i\,k''$.

6. Donner l'expression du champ électrique. Quel phénomène traduit le fait que k est complexe ?

Dans la suite, on suppose que $f = 0$ et que $\omega_0 \gg \omega$. L'indice du milieu pour la pulsation ω est défini par la relation $v_{varphi} = \dfrac{c}{n}$ avec v_{varphi} la vitesse de phase.

7. **Bonus** Retrouver la loi de Cauchy : $n = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$, donnant l'indice du milieu en fonction de la longueur d'onde dans le vide d'une onde de pulsation ω. A et B sont des constantes caractéristiques du milieu, à exprimer en fonction de ω_0, ω_p et c.