Planche n° 15. Trigonométrie hyperbolique. Corrigé

Exercice n° 1

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{ch}(a+b)=\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b+\text{sh}\,a\,\text{sh}\,b & \text{et} & \text{ch}(a-b)=\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b-\text{sh}\,a\,\text{sh}\,b,\\ \text{sh}(a+b)=\text{sh}\,a\,\text{ch}\,b+\text{ch}\,a\,\text{sh}\,b & \text{et} & \text{sh}(a-b)=\text{sh}\,a\,\text{ch}\,b-\text{sh}\,b\,\text{ch}\,a\\ \text{th}(a+b)=\dfrac{\text{th}\,a+\text{th}\,b}{1+\text{th}\,a\,\text{th}\,b} & \text{et} & \text{th}(a-b)=\dfrac{\text{th}\,a-\text{th}\,b}{1-\text{th}\,a\,\text{th}\,b}.\end{array}}$$

Deux démonstrations :

$$\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b+\text{sh}\,a\,\text{sh}\,b=\frac{1}{4}((e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b})+(e^a-e^{-a})(e^b-e^{-b}))=\frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-a-b})=\text{ch}(a+b).$$

$$\text{th}(a+b)=\frac{\text{sh}(a+b)}{\text{ch}(a+b)}=\frac{\text{sh}\,a\,\text{ch}\,b+\text{sh}\,b\,\text{ch}\,a}{\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b+\text{sh}\,a\,\text{sh}\,b}=\frac{\text{th}\,a+\text{th}\,b}{1+\text{th}\,a\,\text{th}\,b}$$

après division du numérateur et du dénominateur par le nombre non nul $\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b$.

En appliquant à $a=b=x$, on obtient :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \text{ch}(2x)=\text{ch}^2\,x+\text{sh}^2x=2\text{ch}^2x-1=2\text{sh}^2x+1,\ \text{sh}(2x)=2\,\text{sh}\,x\,\text{ch}\,x\text{ et }\text{th}(2x)=\frac{2\,\text{th}\,x}{1+\text{th}^2\,x}.}$$

En additionnant entre elles les formules d'addition, on obtient les formules de linéarisation :

$$\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b=\frac{1}{2}(\text{ch}(a+b)+\text{ch}(a-b)),\ \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b=\frac{1}{2}(\text{ch}(a+b)-\text{ch}(a-b))\text{ et }\text{sh}\,a\,\text{ch}\,b=\frac{1}{2}(\text{sh}(a+b)+\text{sh}(a-b)),$$

et en particulier

$$\text{ch}^2\,x=\frac{\text{ch}(2x)+1}{2}\text{ et }\text{sh}^2\,x=\frac{\text{ch}(2x)-1}{2}.$$

Exercice n° 2

Dérivée et variations. Pour tout réel x, $\text{ch}\,x>0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x}-1=\text{th}\,x-1<0.$$

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Etude en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\text{ch}\,x=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\text{ch}\,x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. De plus, pour tout réel x,

$$f(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}-x=\ln(e^x+e^{-x})-\ln 2-x=\ln(e^{-x})-x-\ln 2+\ln(1+e^{2x})=-2x-\ln 2+\ln(1+e^{2x}).$$

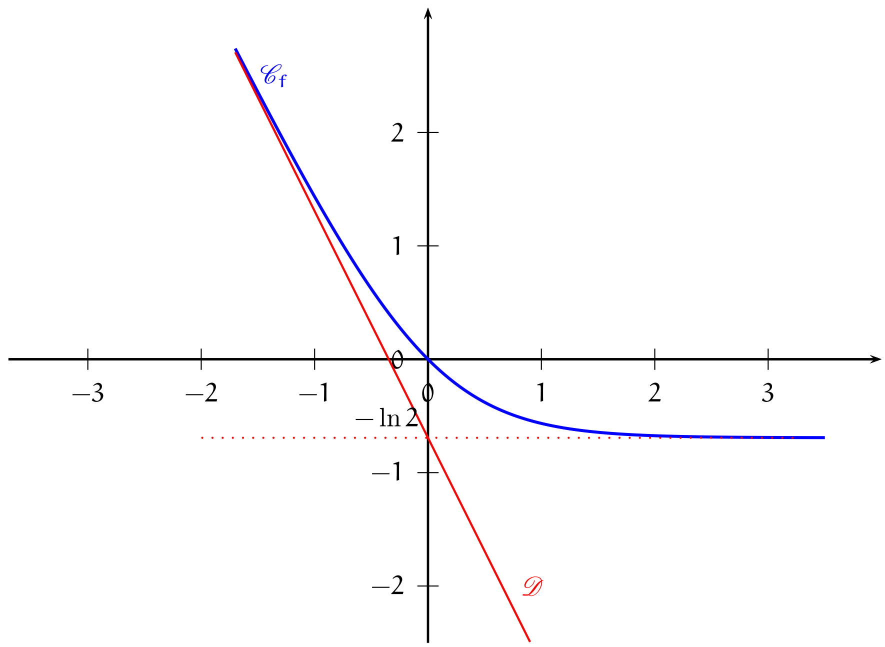
Donc, pour tout réel x, $f(x)-(-2x-\ln 2)=\ln(1+e^{2x})$. D'une part $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1+e^{2x})=\ln 1=0$ et donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-2x-\ln 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et d'autre part, pour tout réel x, $\ln(1+e^{2x})>0$ et la courbe représentative de f est strictement au dessus de $\mathscr{D}$ sur $\mathbb{R}$.

Etude en $+\infty$. Pour tout réel x,

$$f(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}-x=\ln(e^x+e^{-x})-\ln 2-x=\ln(e^x)-x-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})=-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})$$

et f tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que la droite d'équation $y=-\ln 2$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

Graphe.



Exercice n° 3

Soit x un réel.

$$S = \sum_{k=1}^{100} \operatorname{sh}(2+kx) = \frac{1}{2}\left(e^2 \sum_{k=1}^{100} e^{kx} - e^{-2} \sum_{k=1}^{100} e^{-kx}\right).$$

Si $x = 0$ alors directement $S = 100 \operatorname{sh} 2 \neq 0$. Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$. Dans ce cas,

$$S = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2} e^{-x} \frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 e^x \frac{1-e^{100x}}{1-e^x} + e^{-2} \frac{1-e^{-100x}}{1-e^x}\right).$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par le réel non nul e^x. Pour $x \neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} S = 0 &\Leftrightarrow e^{x+2}\left(1-e^{100x}\right) + e^{-2}\left(1-e^{-100x}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2}\left(1-e^{100x}\right) + e^{-2-100x}\left(e^{100x}-1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(1-e^{100x}\right)\left(e^{x+2} - e^{-100x-2}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2} \text{ (car } x \neq 0 \text{ et donc } 1-e^{100x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x+2 = -100x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{101}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{4}{101}\right\}.}$$

Exercice n° 4

1) On a vu dans l'exercice n° 1 que pour tout réel x, $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\dfrac{1+\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th} x} = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou encore $\operatorname{th} x + \dfrac{1}{\operatorname{th} x} = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)}$ ou finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.}$$

2) Soient n un entier naturel et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

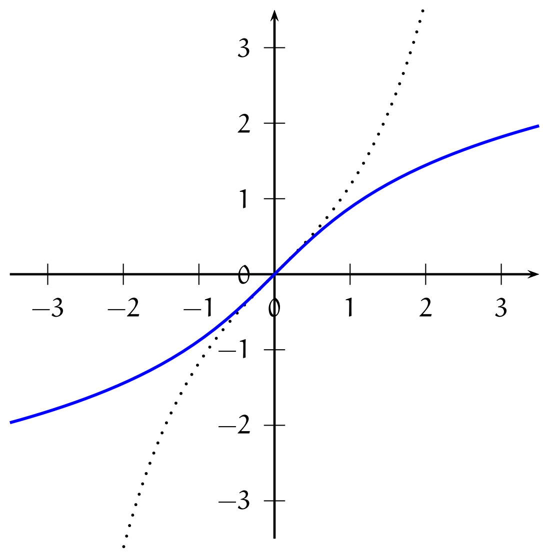
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{\operatorname{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\operatorname{th}(2^k x)}\right) = \frac{2^{n+1}}{\operatorname{th}(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\operatorname{th} x} \text{ (somme télescopique).}$$

Ensuite, pour $x > 0$, $\text{th}(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x > 0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x < 0$.

Exercice n° 5

1) a) La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction sh réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty}\text{sh}\,x, \lim\limits_{x\to+\infty}\text{sh}\,x\right[=]-\infty,+\infty[$. sh est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Graphe de argsh**.**



c) Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned}y = \text{argsh}\,x &\Leftrightarrow x = \text{sh}\,y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right) \Leftrightarrow e^y - 2x - e^{-y} = 0\\ &\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^y)\\ &\Leftrightarrow e^y \text{ est solution de l'équation } X^2 - 2xX - 1 = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit de l'équation $X^2 - 2xX - 1 = 0$ est $\Delta' = x^2 + 1$. Ce discriminant est toujours strictement positif et donc l'équation $X^2 - 2xX - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $X_1 = x + \sqrt{x^2+1}$ et $X_2 = x - \sqrt{x^2+1}$. Le produit de ces deux deux nombres est égal à -1. Donc, l'un de ces deux nombres est strictement positif et l'autre est strictement négatif. Le positif est le plus grand de ces deux nombres à savoir $X_1 = x + \sqrt{x^2+1}$. Donc

$$\begin{aligned}y = \text{argsh}\,x &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \text{ ou } e^y = x - \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1}\\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).}$$

d) Pour tout réel x, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ (d'après ce qui précède ou à partir de $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$). Donc, argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$\text{argsh}'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.}$$

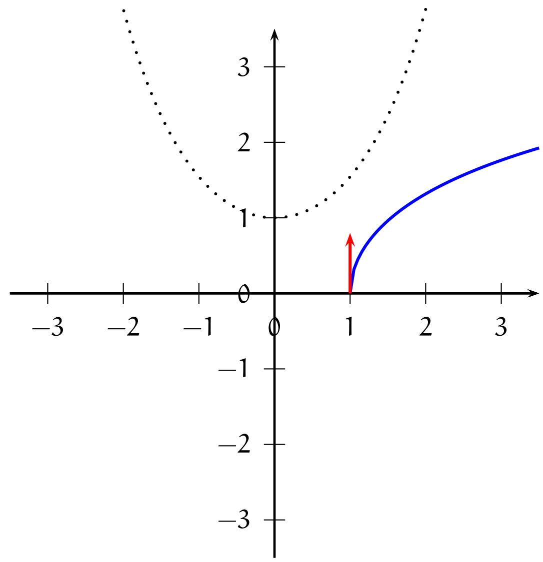
On peut aussi dériver argsh comme une réciproque. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée à savoir $\text{sh}' = \text{ch}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On sait alors que argsh est dérivable sur $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$(\text{argsh})'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(\text{argsh}\, x)} = \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

car $\text{ch}^2(\text{argsh}\, x) = \text{sh}^2(\text{argsh}\, x) + 1 = x^2 + 1$ et de plus $\text{ch}(\text{argsh}\, x) > 0$.

2) a) La fonction ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. La fonction ch réalise donc une bijection de $[, +\infty[$ sur $\left]\text{ch}(0), \lim\limits_{t\to+\infty} \text{ch}\, t\right[= [1, +\infty[$. ch réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

b) Graphe de argch**.**



c) Soient $x \geqslant 1$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = \text{argch}\, x &\Leftrightarrow x = \text{ch}\, y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right) \Leftrightarrow e^y - 2x + e^{-y} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(e^y\right)^2 - 2xe^y + 1 = 0 \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^y\text{)} \\ &\Leftrightarrow e^y \text{ est solution de l'équation } X^2 - 2xX + 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit de l'équation $X^2 - 2xX - 1 = 0$ est $\Delta' = x^2 - 1 \geqslant 0$ (car $x \geqslant 1$). Ce discriminant est toujours positif et donc l'équation $X^2 - 2xX + 1 = 0$ admet deux solutions réelles (éventuellement confondues si $x = 1$) à savoir $X_1 = x + \sqrt{x^2-1}$ et $X_2 = x - \sqrt{x^2-1}$. Le produit de ces deux deux nombres est égal à 1 et leur somme est égale à $2x \geqslant 0$. Donc, ces deux nombres sont strictement positifs. Par suite,

$$\begin{aligned} y = \text{argch}\, x &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2-1} \text{ ou } e^y = x - \sqrt{x^2-1} \\ &\Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \text{ ou } y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right). \end{aligned}$$

Comme le produit X_1X_2 est égal à 1 et que X_1 et X_2 sont strictement positifs, l'un des deux nombres, à savoir X_1 est plus grand que 1 et l'autre, à savoir X_2, est dans $]0, 1]$. Mais alors, $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \geqslant 0$ et $\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \leqslant 0$ (avec égalité à 0 si et seulement si $x = 1$ et dans ce cas, $X_1 = X_2 = 0$).

Comme on ne veut retenir que la solution positive, il ne reste que $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ \text{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).}$$

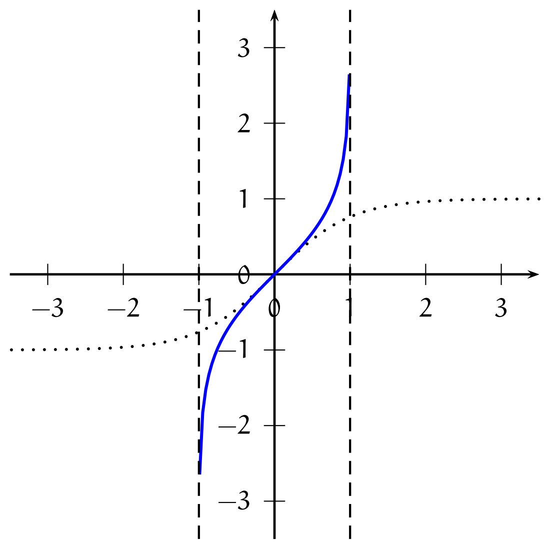
d) argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ (et pas en 1 à droite) et pour tout réel $x > 1$,

$$\text{argch}'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\boxed{\forall x > 1,\ \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.}$$

3) a) La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction th réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x, \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x\right[=]-1, 1[$. th réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

b) Graphe de argth**.**



c) Soient $x \in]-1, 1[$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
y = \operatorname{argth} x &\Leftrightarrow x = \operatorname{th} y \Leftrightarrow \frac{(e^y - e^{-y})/2}{(e^y + e^{-y})/2} = x \Leftrightarrow e^y - e^{-y} = xe^y + xe^{-y} \\
&\Leftrightarrow e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^y) \\
&\Leftrightarrow (1-x)e^{2y} = 1 + x \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \\
&\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

d) argth est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout réel x de $]-1, 1[$,

$$\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.}$$

Exercice n° 6

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 + 1 \geqslant 0$ et donc $\sqrt{x^2+1}$ existe puis

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = \operatorname{Max}\{x, -x\}.$$

Donc, $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ et $\sqrt{x^2+1} - x > 0$. L'expression proposée existe pour tout réel x. De plus,

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \ln\left(\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right) = \ln\left(x^2 + 1 - x^2\right) = \ln 1 = 0.$$

2) Pour $x > 0$,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}=\frac{1}{2x}\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=1.$$

3) Soit x et y deux réels.

$$\operatorname{sh}^2 x\cos^2 y+\operatorname{ch}^2 x\sin^2 y=\operatorname{sh}^2 x\cos^2 y+(1+\operatorname{sh}^2 x)\sin^2 y=\operatorname{sh}^2 x+\sin^2 y.$$

Exercice n° 7

1) Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x=2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=2\Leftrightarrow e^x-4+e^{-x}=0\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2-4e^x+1=0 \text{ (après multiplication par le réel non nul } e^x)\\ &\Leftrightarrow e^x \text{ est solution de l'équation } X^2-4X+1=0.\end{aligned}$$

Le discriminant réduit de cette équation est $\Delta'=(-2)^2-1=3$. L'équation $X^2-4X+1=0$ admet donc deux solutions réelles distinctes à savoir $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. Ces deux nombres sont strictement positifs et donc

$$\operatorname{ch} x=2\Leftrightarrow e^x=2+\sqrt{3} \text{ ou } e^x=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \text{ ou } x=\ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Remarque. La fonction ch est paire et donc les deux nombres obtenus sont nécessairement opposés l'un de l'autre. C'est effectivement le cas car $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=4-3=1$ et donc

$$\ln\left(2-\sqrt{3}\right)=\ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)=-\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

2) Pour tout réel x, $\operatorname{ch} x\geqslant 1$. En particulier, pour tout réel x, $\operatorname{ch} x\neq\frac{1}{2}$. L'équation proposée n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice n° 8

Soient a et b deux réels et n un entier naturel.

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(ak+b)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ak+b}+\sum_{k=0}^{n}e^{-ak-b}\right)=\frac{1}{2}\left(e^b\sum_{k=0}^{n}(e^a)^k+e^{-b}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-a}\right)^k\right)$$

1er cas. Si $a=0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(ak+b)=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(b)=(n+1)\operatorname{ch}(b)$.

2ème cas. Si $a\neq 0$, alors $e^a\neq 1$ et $e^{-a}\neq 1$ puis

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(ak+b)&=\frac{1}{2}\left(e^b\frac{e^{(n+1)a}-1}{e^a-1}+e^{-b}\frac{1-e^{-(n+1)a}}{1-e^{-a}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(e^{b+\frac{(n+1)a}{2}-\frac{a}{2}}\frac{e^{(n+1)a/2}-e^{-(n+1)a/2}}{e^{a/2}-e^{-a/2}}+e^{-b-\frac{(n+1)a}{2}+\frac{a}{2}}\frac{e^{(n+1)a/2}-e^{-(n+1)a/2}}{e^{a/2}-e^{-a/2}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(e^{b+\frac{na}{2}}+e^{-b-\frac{na}{2}}\right)\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{na}{2}+b\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Exercice n° 9

Soient a, b et c trois réels. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}a\operatorname{ch} x+b\operatorname{sh} x=c&\Leftrightarrow a\left(e^x+e^{-x}\right)+b\left(e^x-e^{-x}\right)=2c\Leftrightarrow (a+b)e^x-2c+(a-b)e^{-x}=0\\ &\Leftrightarrow (a+b)\left(e^x\right)^2-2ce^x+(a-b)=0 \text{ (après multiplication des deux membres par le réel non nul } e^x\\ &\Leftrightarrow e^x \text{ solution de l'équation } (a+b)X^2-2cX+(a-b)=0.\end{aligned}$$

1er cas. Si $b=-a$, l'équation s'écrit $-2ce^x+2a=0$ ou encore $ce^x=a$.

- Si $c=a=0(=b)$, tout réel est solution.
- Si $c=0$ et $a=-b\neq 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $c\neq 0$ et $\dfrac{a}{c}\leqslant 0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $c\neq 0$ et $\dfrac{a}{c}>0$, l'équation a une solution et une seule à savoir $\ln\left(\dfrac{c}{a}\right)$.

2ème cas. Si $b\neq -a$, l'équation $(a+b)X^2-2cX+(a-b)=0$ est du second degré. Son discriminant réduit est

$$\Delta'=c^2-(a+b)(a-b)=c^2+b^2-a^2.$$

- Si $c^2+b^2-a^2<0$, l'équation $(a+b)X^2-2cX+(a-b)=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et donc l'équation $a\,\text{ch}\,x+b\,\text{sh}\,x=c$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $c^2+b^2-a^2=0$, l'équation $(a+b)X^2-2cX+(a-b)=0$ admet une solution double à savoir $\dfrac{c}{a+b}$.
  - Si $\dfrac{c}{a+b}\leqslant 0$, l'équation $a\,\text{ch}\,x+b\,\text{sh}\,x=c$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
  - Si $\dfrac{c}{a+b}>0$, l'équation $a\,\text{ch}\,x+b\,\text{sh}\,x=c$ a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ à savoir $\ln\left(\dfrac{c}{a+b}\right)$.
- Si $c^2+b^2-a^2>0$, l'équation $(a+b)X^2-2cX+(a-b)=0$ admet deux solutions réelles distinctes dont le produit est égal à $\dfrac{a-b}{a+b}$ et la somme est égale à $\dfrac{2c}{a+b}$.
  - Si $a^2-b^2<0$, l'équation $(a+b)X^2-2cX+(a-b)=0$ a une solution strictement négative et une solution strictement positive. Dans ce cas, l'équation $a\,\text{ch}\,x+b\,\text{sh}\,x=c$ a une solution et une seule.
  - Si $a^2-b^2>0$, l'équation $(a+b)X^2-2cX+(a-b)=0$ a deux solutions non nulles distinctes et de même signe.
    - $\star$ Si $c(a+b)<0$, l'équation $(a+b)X^2-2cX+(a-b)=0$ a deux solutions strictement négatives et dans ce cas l'équation $a\,\text{ch}\,x+b\,\text{sh}\,x=c$ n'a pas de solution.
    - $\star$ Si $c(a+b)>0$, l'équation $(a+b)X^2-2cX+(a-b)=0$ a deux solutions strictement positives et dans ce cas l'équation $a\,\text{ch}\,x+b\,\text{sh}\,x=c$ a deux solutions distinctes.
  - Enfin $a^2-b^2=0$ est impossible car $b\neq -a$.

