Champ et potentiel électrostatique

Table des matières

1 Loi de Coulomb dans le vide

1.1 Charge électrique

- La charge électrique observée est un multiple entier de la charge élementaire e qui représente la valeur absolue de la charge d'un électron ($e = 1,6.10^{-19}C$).
- Pour un système fermé la charge électrique est constante,elle ne dépend pas du référentiel d'observation.

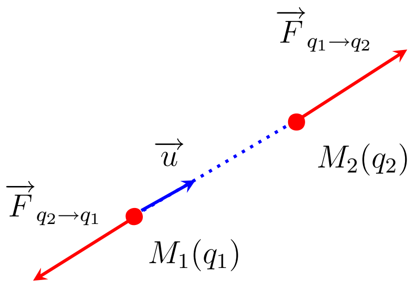
1.2 Loi de Coulomb

• Enoncé : Lorsque deux charges ponctuelles q_1, q_2 sont placées dans le vide,elle sont en interaction électrostatique réciproque,selon la loi

$$\overrightarrow{F}_{q_1\to q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{1\to 2} = -\overrightarrow{F}_{q_2\to q_1}$$

- $\overrightarrow{F}_{q_1\to q_2}$: la force appliquée par q_1 sur q_2
- $\overrightarrow{F}_{q_2\to q_1}$: la force appliquée par q_2 sur q_1
- r : la distance entre les deux charges
- $\overrightarrow{u}_{1\to 2}$: le vecteur unitaire dirrigé de q_1 vers q_2
- ε_0 : la permittivité absolue du vide avec $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$(S.I)

- $\overrightarrow{F}_{q_1\to q_2} = -\overrightarrow{F}_{q_2\to q_1} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{u}}{r^2}$
- $r = M_1M_2$
- $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$

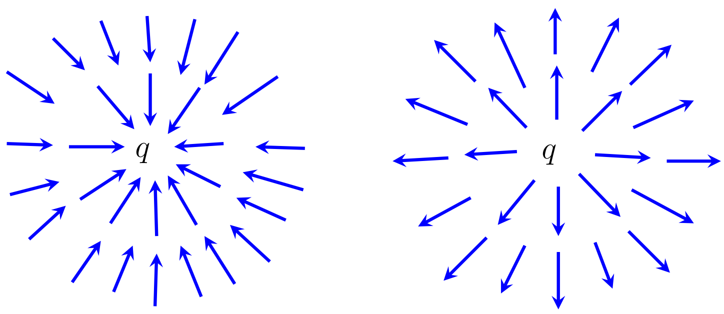


1.3 Champ électrostatique

• Définition : le champ électrostatique crée par une charge q placée en un point O,en un point M est :

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{e}_r}{r^2}$$

avec $\overrightarrow{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$



$q < 0$ $q > 0$

• Exemple : dans la figure précédente

- $\overrightarrow{F}_{q_1 \to q_2} = q_2 \overrightarrow{E}_1(M_2)$

$$\overrightarrow{E}_1(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

- $\overrightarrow{F}_{q_2 \to q_1} = q_1 \overrightarrow{E}_2(M_1)$

$$\overrightarrow{E}_2(M_1) = -\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$$

• Remarque : La loi de Coulomb reste valable dans un milieu diélectrique parfait (linéaire,isotrope,homogène) en remplaçant ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0.\varepsilon_r$ avec ε_r représente la permittivité relative du milieu (constante diéléctrique).
Pour l'air $\varepsilon_r = 1,0006$ donc $\varepsilon \approx \varepsilon_0$

1.4 Analogie formelle avec le champ de gravitation

- loi de Coulomb : $\overrightarrow{F}_{q_1 \to q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{1\to 2}$
- loi de Newton : $\overrightarrow{F}_{m_1 \to m_2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{1\to 2}$

On déduit l'analogie :

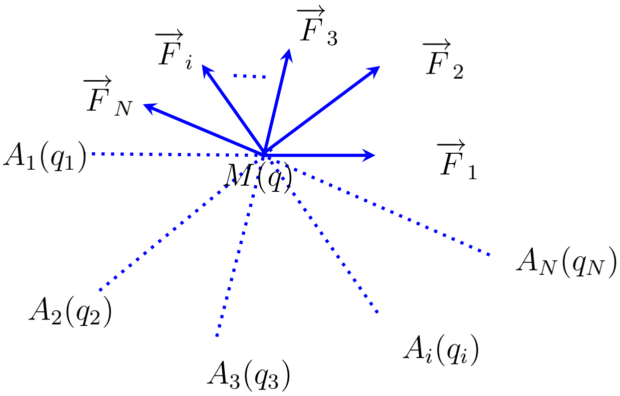
$$q \Leftrightarrow m \text{ et } \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Leftrightarrow -G$$

- les forces gravitationnelles sont totalement négligeables à l'echelle atomique devant les forces électriques.

1.5 Champ électrique d'une distribution de charge

1.5.1 Principe de superposition

• Enoncé : Soit $\mathcal{D} = \{A_1(q_1), A_2(q_2)...A_N(q_N)\}$ une distribution de charges ponctuelles . La résultante de force $\overrightarrow{F}$ exercée par la distribution de charge sur une charge témoin q placée en un point M est la somme vectorielle des N forces exercées par chaque charge q_i supposée seule : $\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{u}_i}{r_i^2}$ avec $r_i = A_iM$ et $\overrightarrow{u}_i = \frac{\overrightarrow{A_iM}}{A_iM}$



1.5.2 Champ crée par une distribution discréte de charge

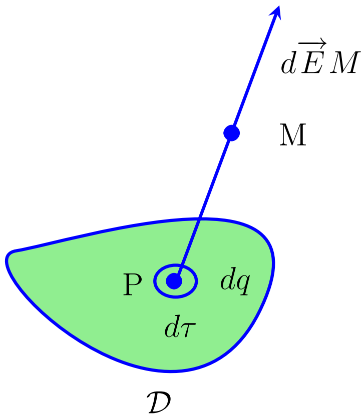
le champ électrostatique crée par une distribution discrète de charges ponctuelles est donné par

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{\overrightarrow{F}}{q} = \sum_i \overrightarrow{E}_i(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u}_i$$

1.5.3 Distribution volumique de charge

Soit $\mathcal{D}$ une distribution volumique de charge et dq une charge élementaire contenue dans un volume élementaire $d\tau$ de cette distribution.
On définit la densité volumique $\rho(P)$ en un point P par

$$dq = \rho(P)d\tau \Leftrightarrow \rho(P) = \frac{dq(P)}{d\tau}(C.m^{-3})$$



- l'élement de charge $dq(P)$ crée un champ électrostatique élementaire en un point M tel que

$$d\overrightarrow{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d\tau$$

- le champ crée par la distribution continue $\mathcal{D}$ est :

$$\overrightarrow{E}(M) = \iiint_{\mathcal{D}} d\overrightarrow{E}(M) = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d\tau$$

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{D}} \rho(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d\tau$$

1.5.4 Distribution surfacique de charge

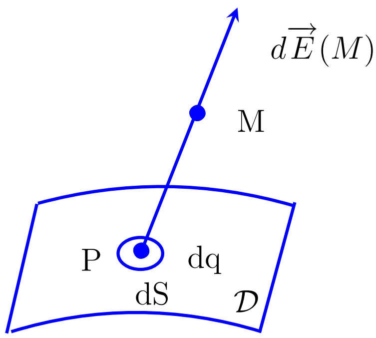
Soit D une distribution surfacique de charge et dq une charge élementaire contenue dans un élement de surface dS. On définit la densité de charge surfacique $\sigma(P)$ en un point P par :

$$dq(P) = \sigma(P)dS \Rightarrow \sigma(P) = \frac{dq(P)}{dS} \ (C.m^{-2})$$

- la charge élementaire $dq(P)$ crée un champ électrostatique élementaire $d\overrightarrow{E}(M)$ en un point M

$$d\overrightarrow{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$$d\overrightarrow{E}(M) = \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dS$$



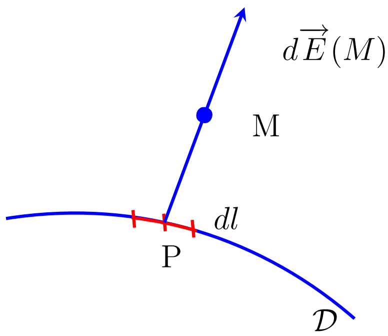
- le champ crée par la distribution surfacique $\mathcal{D}$:

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\mathcal{D}} \sigma(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dS$$

1.5.5 Distribution linéique de charge

Soit $\mathcal{D}$ une distribution linéique de charge et dq une charge contenue dans un élement de longueur dl. On défini la densité de charge linéique $\lambda(P)$ en un point P par :

$$\lambda(P) = \frac{dq(P)}{dl} \ (C.m^{-1})$$



- la charge élementaire dq crée un champ électrostatique en un point M :

$$d\overrightarrow{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dl$$

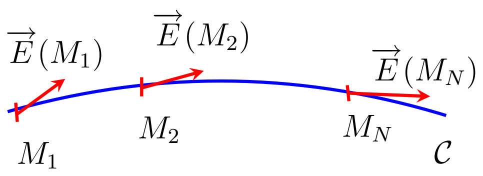
- le champ électrostatique cée par la distribution linéique $\mathcal{D}$ est donné par

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{D}} \lambda(P).\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dl$$

2 Topographie du champ

2.1 Ligne de champ

• Définition : Il s'agit d'une courbe tangente en chacune de ses points au vecteur champs électrostatique $\overrightarrow{E}$.



• équation du ligne du champ

Soit $\overrightarrow{dl}$ un élément de longueur le long d'une ligne de champ donc $\overrightarrow{E}//\overrightarrow{dl}$ donc l'équation d'une ligne de champ s'obtient par

$$\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{dl}=\overrightarrow{0}$$

- en coordonées cartésiennes : $\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

  donc

$$\left\{\begin{array}{lcll} E_y dz & - & E_z dy & = 0 \\ E_z dx & - & E_x dz & = 0 \\ E_x dy & - & E_y dx & = 0 \end{array}\right.$$

  donc

$$\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}=\frac{dz}{E_z}$$

- En coordonnées cylindriques

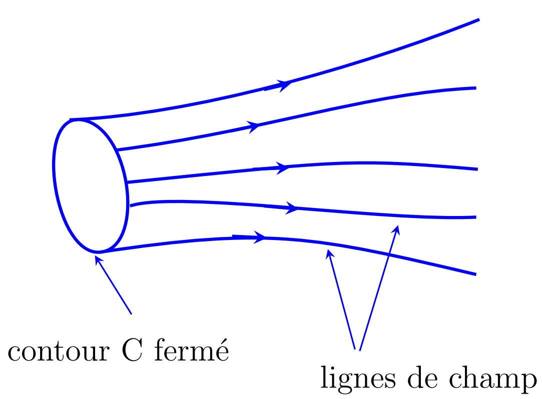
$$\frac{dr}{E_r}=\frac{rd\theta}{E_\theta}=\frac{dz}{E_z}$$

- En coordonnées sphériques

$$\frac{dr}{E_r}=\frac{rd\theta}{E_\theta}=\frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

2.2 Tube de champ

Il s'agit d'un ensemble de ligne de champ s'appuyant sur un contour fermé.



2.3 Propriétées des lignes de champ

- Points de convergence ou divergence : ce sont des points où se situent des charges ponctuelles.
- Les lignes de champ convergent vers les positions des charges négatives $q < 0$
- Les lignes de champ divergent à partir des positions des charges positives $q > 0$
- Une ligne de champ ne se referme pas sur lui même
- deux lignes de champ se coupent en un point M si le champ $\overrightarrow{E}$ en un point M est nul : point de champ nul

3 Propriétés de symétrie et calcul du champ électrostatique

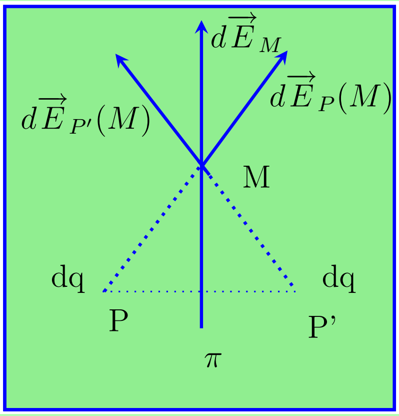
3.1 Symétrie ou antisymétrie plane

• Définition 1 : Une distribution volumique de charge $\mathcal{D}$ admet un plan de symétrie π,si $\forall P, P' \in \mathcal{D}$ tel que $P' = sym_\pi(P)$ alors $\rho(P) = \rho(P')$.
avec ρ : la densité de charge et sym_π : le symétrie par rappor au plan

• Autrement

π est un plan de symétrie de $\mathcal{D} \Rightarrow \begin{cases} P' = sym_\pi(P) & \text{symétrie géométrique} \\ \rho(P') = \rho(P) & \text{symétrie matérielle} \end{cases}$

- $dq' = dq = \rho d\tau$
- $P' = sym_\pi(P)$
- $d\overrightarrow{E}_{P'}(M) = sym_\pi(d\overrightarrow{E}_P(M))$
- $d\overrightarrow{E}(M) = d\overrightarrow{E}_P(M) + d\overrightarrow{E}_{P'}(M)$ est donc dans le plan π . Il en va de même pour le champ $\overrightarrow{E}$ crée par l'ensemble de la distribution

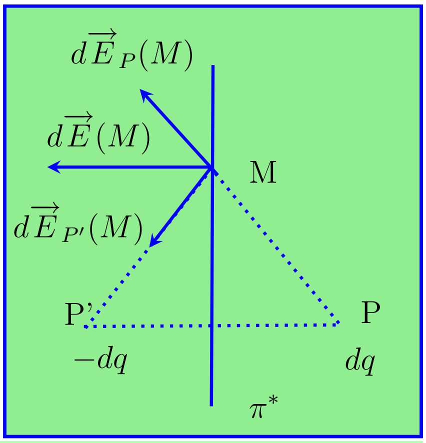


• Conclusion : le champ électrostatique crée en un point M du plan de symétrie π d'une distribution appartient à ce plan .

• Définition 2
π^* est un plan antisymétrique pour une distribution volumique de charge $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} P' &= sym_{\pi^*}(P) \quad \text{symétrie géométrique} \\ \rho(P') &= -\rho(P) \quad \text{antisymétrie matérielle} \end{cases}$$

- $dq = -dq'$
- $\rho(P') = -\rho(P)$
- $d\overrightarrow{E} = d\overrightarrow{E}_P(M) + d\overrightarrow{E}_{P'}(M)$ est perpendiculaire au plan π^*
- le champ crée par l'ensemble de la distribution en M est perpendiculaire au plan antisymétrique π^*



• Conclusion : le champ électrostatique crée en un point M du plan antisymétrique π^* d'une distribution de charge est perpendiculaire à ce plan en M .

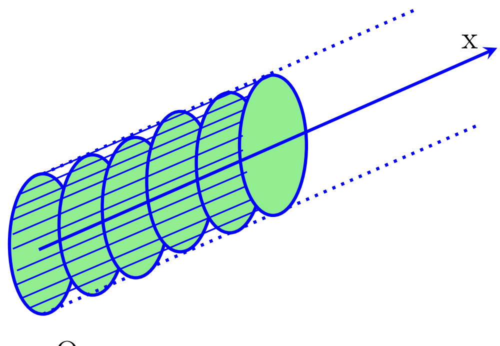
3.2 Invariance par translation et rotation d'une distribution

• Invariance par translation : si une distribution de charge est invariante par translation suivant un axe Oz,le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de z et n'a pas de composante suivant $\overrightarrow{e}_z$:

$$\overrightarrow{E}(x, y, z) = E_x(x, y)\overrightarrow{e}_x + E_y(x, y)\overrightarrow{e}_y$$

• Exemple 1

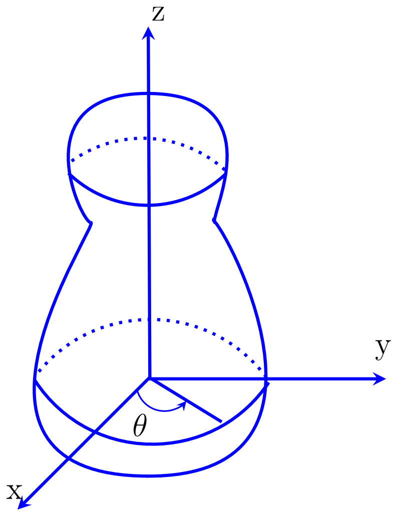
- la distribution est invariante par translation suivant Ox donc le champ électrostatique ne dépend pas de x : $\overrightarrow{E}(x, y, z) = \overrightarrow{E}(y, z)$
- tout plan perpendiculaire à Ox est un plan de symétrie de la distribution donc : $\overrightarrow{E}(y, z) = E_y(y, z)\overrightarrow{e}_y + E_z(y, z)\overrightarrow{e}_z$



• Invariance par rotation : si une distibution de charge est invariante par rotation d'une angle θ quelconque ,alors le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ ne dépend pas de θ.

• Exemple 2

- la distribution de charge est invariante par rotation d'un angle θ suivant Oz
- en coordonnées cylindriques (r, θ, z) $\overrightarrow{E}(r, \theta, z) = \overrightarrow{E}(r, z)$



3.3 Symétries multiples

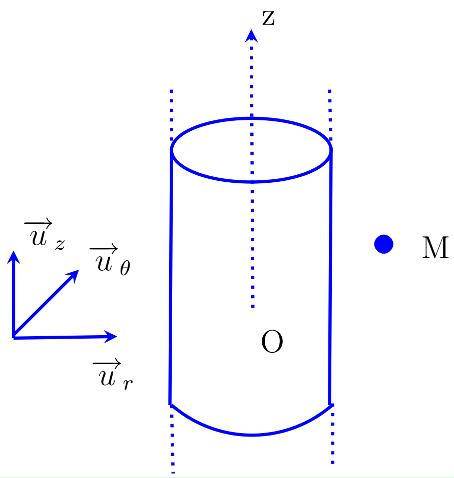
3.3.1 Axe de symétrie

Le champ électrostatique en un point M d'un axe de symétrie d'une distribution de charge est colinéaire à cet axe de symétrie.

3.3.2 Symétrie cylindrique

Considérons un cylindre infini de rayon R et de longueur l : $l >> R$

- la distribution est invariante par translation suivant Oz donc $\overrightarrow{E}(r, \theta, z) = \overrightarrow{E}(r, \theta)$
- la distribution est invariante par rotation suivant Oz donc $\overrightarrow{E}(r, \theta) = \overrightarrow{E}(r)$
- les plans $(M, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$ et $(M, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_z)$ sont des plans de dymétrie donc $\overrightarrow{E}(r) = E(r)\overrightarrow{u}_r$

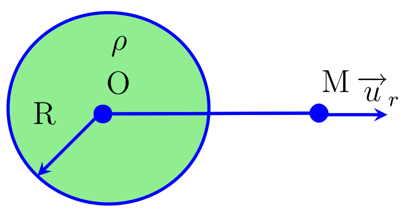


- Conclusion : Pour une symétrie cylindrique le champ électrostatique est radial :

$$\overrightarrow{E}(r, \theta, z) = E(r)\overrightarrow{u}_r$$

3.3.3 Symétrie sphérique

- la distribution est invariante par rotation de tout axe passant par O, donc $\overrightarrow{E}(r, \theta, \varphi) = \overrightarrow{E}(r)$
- tout plan passant par M et O est un plan de symétrie,donc OM est un axe de symétrie donc $\overrightarrow{E}(M) = E(M)\overrightarrow{u}_r$

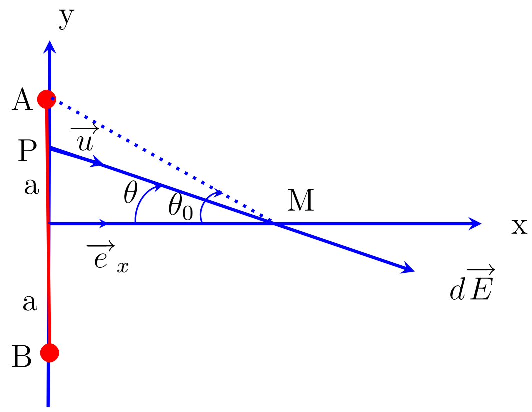


• Conclusion : Pour une distribution de charge de symétrie sphérique le champ électrostatique est radial

$$\overrightarrow{E}(r,\theta,\varphi) = E(r)\overrightarrow{u}_r$$

4 Application

4.1 Champ électrostatique crée par un ségment fini uniformément chargé en un point M de son axe de symétrie



- Considérons un ségment $AB = 2a$ uniformément chargé avec une densité linéique de charge $\lambda = cte$
- $dq = \lambda dl = \lambda dy$
- Ox est l'axe de symétrie du ségment

$$\overrightarrow{E}(M) = E(M)\overrightarrow{e}_x$$

- $PM = r$ et $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM}$
- $x = OM$ et $OP = y$
- $E(M) = \displaystyle\int_{-a}^{a} d\overrightarrow{E}.\overrightarrow{e}_x = \int_{-a}^{a} dE_x$
- $d\overrightarrow{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dy}{r^2}\overrightarrow{u}$
- $d\overrightarrow{E}.\overrightarrow{e}_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dy}{r^2}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{e}_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dy}{r^2}\cos\theta \Rightarrow \boxed{dE_x = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda dy}{r^2}\cos\theta}$
- $y = x\tan\theta$ et $r = \dfrac{x}{\cos\theta}$ avec $x = OM = cte$ donc $\boxed{dy = \dfrac{xd\theta}{\cos^2\theta}}$
- $E(x) = \displaystyle\int_{-a}^{a} dE_x = \int_{-\theta_0}^{\theta} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{xd\theta\cos^2\theta}{x^2\cos^2\theta}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\theta_0}^{\theta}\cos\theta d\theta$
- cos est une fonction paire donc $\displaystyle\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\cos\theta d\theta = 2\int_{0}^{\theta_0}\cos\theta d\theta$
- $E(x) = \dfrac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{0}^{\theta_0}\cos\theta d\theta = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\sin\theta_0$
- $\sin\theta_0 = \dfrac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$ donc

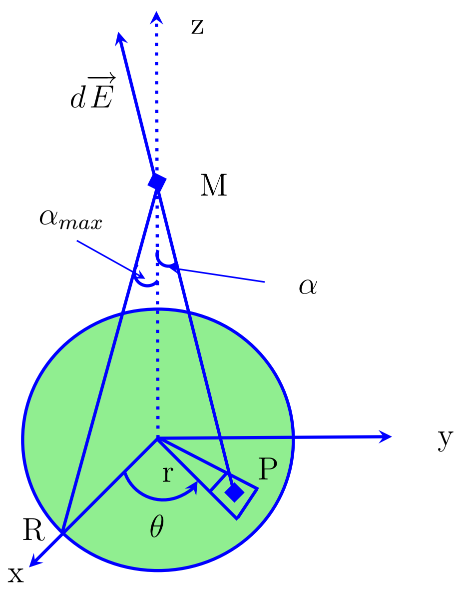
$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{x\sqrt{x^2+a^2}}\overrightarrow{e}_x}$$

► Cas d'un fil infini
pour un fil infini : $a >> x$ et $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\overrightarrow{e}_x}$$

4.2 Champ électrostatique crée par un disque uniformément chargé en surface

Considérons un disque chargé uniformément avec une densité surfacique $\sigma = cte$



- l'axe du disque Oz est un axe de révolution pour la distribution de charge $\overrightarrow{E} = E(M)\overrightarrow{e}_z$
- sur un axe Oz,le point M est repéré uniquement par z,car $x = y = 0$ donc $\overrightarrow{E}(M) = E_z(z)\overrightarrow{e}_z$
- (r, θ) les coordonnées polaires d'un point P du disque
- $d^2S = rdrd\theta$ l'élément de surface (infiniment petit d'ordre deux) associé en coordonnées polaires
- la charge élémentaire localisée en P est $d^2q = \sigma d^2S = \sigma rdrd\theta$
- le champ électrostatique crée par d^2q en M est donné par $d^2\overrightarrow{E} = \dfrac{d^2q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

  on pose $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ et $PM = \rho$

$$d^2\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rdrd\theta}{\rho^2}\overrightarrow{u}$$

- $d^2E_z = d^2\overrightarrow{E}.\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma rdrd\theta}{\rho^2}\cos\alpha$
- $dE_z = \displaystyle\int d^2E_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{\rho^2}\cos\alpha\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{rdr}{\rho^2}\cos\alpha$
- $\rho = \dfrac{z}{\cos\alpha}$ et $r = z\tan\alpha$ donc $dr = z\dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$
- $dE_z = \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{z\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\cos^2\alpha}{z^2}\dfrac{zd\alpha}{\cos^2\alpha}\cos\alpha = \dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sin\alpha d\alpha$
- $E_z = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^{\alpha_{max}}\sin\alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha_{max})$
- $\cos\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$ avec $z = OM$

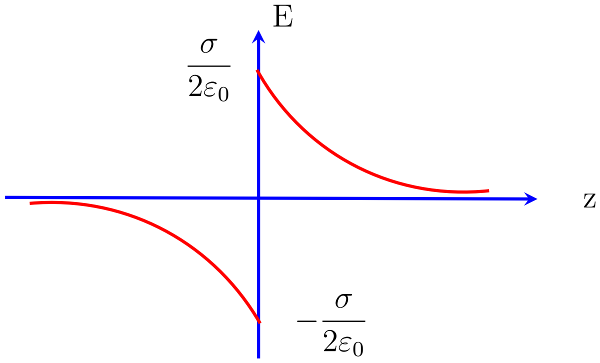
$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\overrightarrow{e}_z\,;\ z > 0$$

- en un point symétrique de M on doit avoir : $E(-z) = -E(z)$ donc pour $Z < 0$

$$\overrightarrow{E}(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\overrightarrow{e}_z\,;\ z < 0$$

• Conclusion : le champ électrostatique crée par un disque chargé uniformément en surface

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} signe(z)\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\overrightarrow{e}_z$$



► Cas d'un plan chargé uniformément

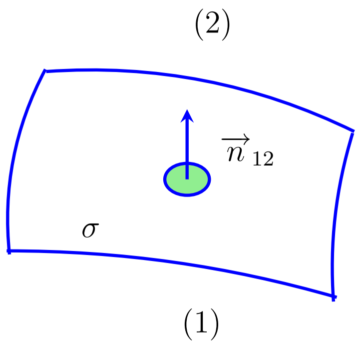
pour un plan $R \to \infty$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} signe(z)\overrightarrow{e}_z}$$

► Relations de passage d'un champ électrostatique

- $\overrightarrow{E}(0^+) = \overrightarrow{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_z$
- $\overrightarrow{E}(0^-) = \overrightarrow{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_z$
- On déduit les relations de passage

$$\boxed{\overrightarrow{E}_2 - \overrightarrow{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}_{1\to 2}}$$



avec $\overrightarrow{n}_{1\to 2}$: vecteur unitaire dirigé de (1) vers (2)

- la composante normale du $\overrightarrow{E}$ subit une discontinuité de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ à travers une surface chargé uniformément avec une densité σ

$$\boxed{E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

- la composante tangentielle est continue

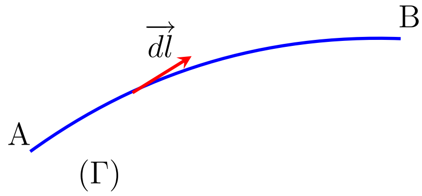
$$\boxed{E_{2t} - E_{1t} = 0}$$

5 Potentiel électrostatique

5.1 Circulation du champ électrostatique

5.1.1 Définition

Soit (Γ) une courbe liant deux points A et B,
et $\overrightarrow{dl}$ le vecteur déplacement élémentaire



• Définition : On définit la circulation élémentaire du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ par le produit scalaire suivant :

$$d\mathcal{C} = \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dl}$$

la circulation du champ électrostatique sur (Γ) entre A et B est définie par :

$$\mathcal{C}_{AB(\Gamma)} = \int_{A(\Gamma)}^{B} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl}$$

5.1.2 Conservation de la circulation du champ

▶ Cas d'une charge ponctuelle

- $\overrightarrow{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{e}_r}{r^2}$
- $\overrightarrow{E}.\overrightarrow{dr} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dr}{r^2}$
- $\mathcal{C}_{AB(\Gamma)} = \displaystyle\int_{A(\Gamma)}^{B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$
  la circulation du champ électrostatique d'une charge ponctuelle ne dépend pas du chemin suivi mais seulement des points initial et final
- sur une courbe fermé $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A^A = \displaystyle\oint_\Gamma \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 0$

▶ Cas d'une distribution de charge
en utilisant le principe de superposition ,on montre que la propriété précédente reste valable.

• Conclusion : la circulation du champ électrostatique est conservative

6 Potentiel électrostatique

- Cas d'une charge unique q

• Définition : On définit le potentiel V crée par une charge q à une distance r par la fonction scalaire suivante

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k$$

k : une constante

• Convention : à l'infini loin des charges le potentiel électrostatique est nul $V = 0$ donc $k = 0$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

  - Circulation sur une courbe finie : $\mathcal{C}_{AB} = V_A - V_B$
  - Circulation élémentaire : $d\mathcal{C} = \vec{E}.\vec{dl} = -dV$,ceci impose que l'unité de E est $V.m^{-1}$

- Cas d'une distribution discrète

D'après le principe de superposition,le potentiel V crée par la distribution $\mathcal{D} = \{A_1(q_1), A_2(q_2)...A_n(q_n)\}$ est

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \, ; \, r_i = A_iM$$

- Distribution continue
  - distribution volumique : $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{D}} \dfrac{\rho d\tau}{r}$
  - distribution surfacique : $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{\sigma dS}{r}$
  - distribution linéique : $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{D}} \dfrac{\lambda dl}{r}$

6.1 Relation champ-potentiel

- $dV = -\vec{E}.\vec{dl}$
- $dV = \overrightarrow{grad}V.\vec{dl}$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

- en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{e}_x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{x,z}\vec{e}_y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{y,x}\vec{e}_z$$

- en coordonnées cylindriques

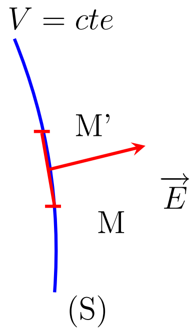
$$\overrightarrow{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta,z}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r,z}\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{r,\theta}\vec{e}_z$$

- en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}\vec{e}_\varphi$$

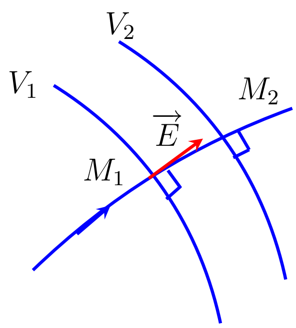
6.2 Surface équipotentielle

• Définition : une surface équipotentielle est définie par un potenyiel constant $V = cte$



- $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$
- $dV = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{MM'}$
  $= V(M') - V(M) = 0$
  donc $\overrightarrow{grad}V$ est perpendiculaire à la surface équipotentielle

• Conclusion : le champ électrostatique est normal à la surface équipotentielle



- Considérons deux surfaces équipotentielles définies par V_1 et V_2 tel que $V_2 > V_1$
- $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{M_1M_2}$
- $dV = V_2 - V_1 = \overrightarrow{grad}V.\overrightarrow{dl} > 0$ donc le $\overrightarrow{grad}V$ est orienté dans le sens croissant de V
- $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$ est orienté dans le sens décroissant de V

• Conclusion : Le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels décroissants

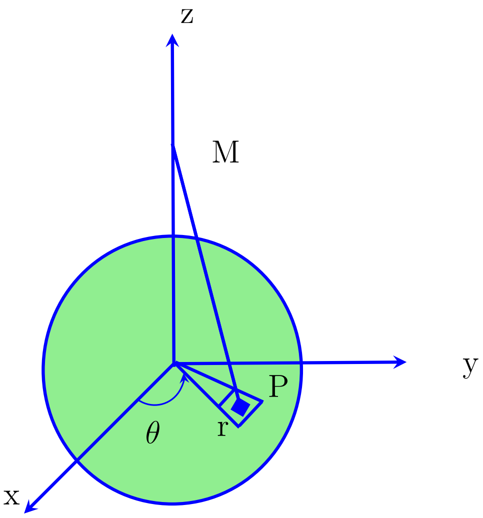
6.3 Propriétés de Symétrie

• Principe de Curie : Un phénomène physique possède au moins les élements de symétrie de ses causes

- les propriétés de symétrie du potentiel sont bien entendu associées aux propriétés de symétrie du champ électrostatique qui en dérive,et donc aux propriétés de symétrie de la distribution de charge qui le crie.
- symétrie sphérique : $V(r, \theta, \varphi) = V(r)$
- symétrie cylindrique : $V(r, \theta, z) = V(r)$

6.4 Exemple de calcul : potentiel crée par un disque

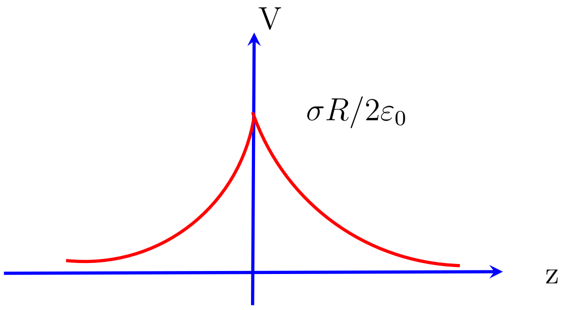
Considérons un disque chargé uniformément avec une densité surfacique $\sigma = cte$



- $d^2q = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$ et $PM = \rho$
- $dq = \sigma 2\pi r dr$
- $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{d^2q}{\rho} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{\rho}$
- $OM = z$
- $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$
- $V(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}$

$$\boxed{V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\{\sqrt{R^2+z^2} - |z|\}}$$

on constate que $V(0^+) = V(0^-) = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$ donc le potentiel électrostatique est continue



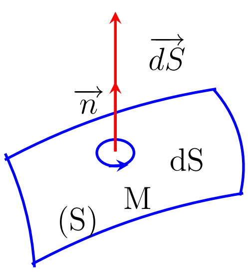
7 Théorème de Gauss

7.1 Flux du champ électrostatique

7.1.1 Orientation d'une surface

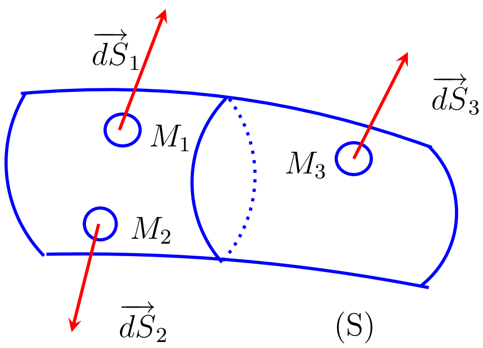
- Considérons un point M sur une surface (S),et un élément de surface dS entourant le point M. Localement,la surface présente au point M un vecteur normal $\overrightarrow{n}$. On définit le vecteur élément de surface $\overrightarrow{dS}$ par

$$\boxed{\overrightarrow{dS} = dS\overrightarrow{n}}$$



- l'orientation de (S) se fait en se basant sur l'orientation du contour autour du point M et en appliquant la régle du tire-bouchon

- Convention : Pour une surface fermée (surface qui sépare l'espace en deux zones intérieure et extérieure),on choisit toujours d'orienter par sa normale sorttante



7.1.2 Flux du champ électrostatique

- Définition
  - On appelle flux élémentaire $d\phi$ de $\overrightarrow{E}$ à travers une surface élémentaire dS le produit scalaire
$$d\phi = \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{E}.dS.\overrightarrow{n}$$
  - le flux du champ $\overrightarrow{E}$ à travers (S)
$$\phi = \iint_{(S)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS}$$
  - si la surface (S) est fermée
$$\phi = \oint_{(S)} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS}$$

- Cas d'une charge ponctuelle
$$\phi = \iint_{(S)} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\overrightarrow{n}\overrightarrow{u}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)} \frac{dS\overrightarrow{n}\overrightarrow{u}}{r^2}$$

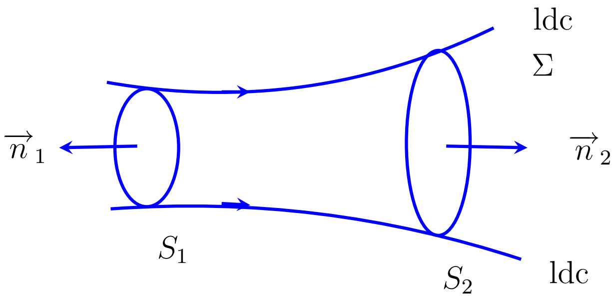
7.2 Théorème de Gauss

7.2.1 Enoncé

- Enoncé : Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée (Σ) est égal à la somme des charges intérieurs à cette surface,divisée par ε_0
$$\phi = \oint_{\Sigma} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

7.2.2 Conservation du flux du champ électrostatique

- $\Phi = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ traduit la non conservativité du flux du champ électrostatique dans une région présentant des charges
- lorsque la région considérée est vide de charge ($Q_{int} = 0$) : $\Phi = 0$: cette égalité traduit la conservation du flux porté par une tube de charge



- $\phi = \iint_{S_1} \vec{E}\vec{dS}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}\vec{dS}_2 + \phi_{lat} = 0$
- $\vec{n} = \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$
- $\phi_{lat} = 0$ car $\vec{E} \perp \vec{dS}$
- $\iint_{S_1} \vec{E}.\vec{dS} = \iint_{S_2} \vec{E}.\vec{dS} \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$

7.2.3 Théorème de l'extremum de potentiel

• Théorème : le potentiel électrostatique ne peut pas présenter d'extremum en un point de l'espace dépourvu de charge.

7.2.4 Théorème de Gauss pour un champ de gravitation

• Enoncé : le flux du champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$ à travers une surface fermée (Σ) est égal à la somme des masses M_{int} située à l'intérieur de (Σ) multipliée par $-4\pi G$

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}}.\vec{dS} = -4\pi G.M_{int}$$

7.3 Applications

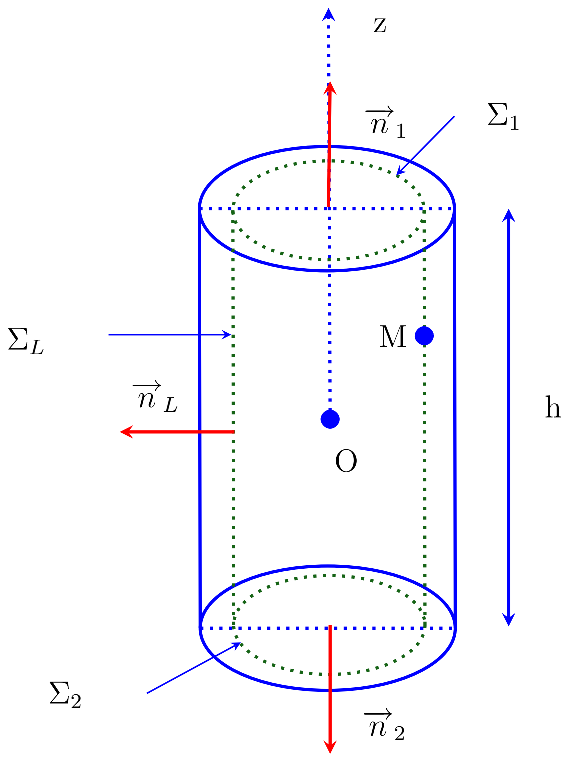
7.3.1 Champ électrostatique cée par un cylindre infini

Considérons un cylindre infini de rayon R chargé en volume avec une densité uniforme ρ

▶ Champ à l'intéreur du cylindre $r < R$

- $OM = r$
- On choisit une surface de Gauss Σ fermée comme un cylindre qui passe par le point M où on veut calculer le champ électrostatique $\vec{E}$
- symétrie cylindrique $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

- $\phi = \oint_\Sigma \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
- $\phi = \iint_{\Sigma_1} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS}_1 + \iint_{\Sigma_2} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS}_2 + \iint_{\Sigma_L} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS}_L$
- $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_L$
- $\phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS}_1 = \iint_{\Sigma_1} E(r)\overrightarrow{e}_r.dS.\overrightarrow{e}_z = 0$
- $\phi_2 = \iint_{\Sigma_2} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS}_2 = \iint_{\Sigma_2} E(r).dS\overrightarrow{e}_r.(-\overrightarrow{e}_z) = 0$



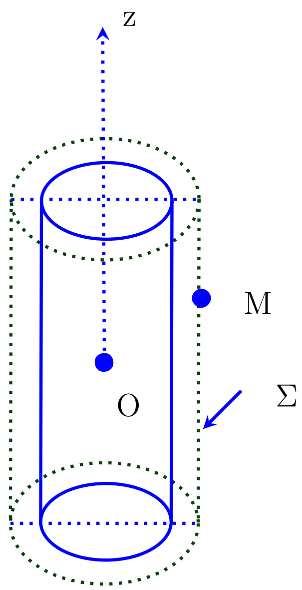
- $\phi_L = \iint_{\Sigma_L} E(r).\overrightarrow{e}_r.dS_L.\overrightarrow{e}_r = E(r).2\pi.h$
- $Q_{int} = \pi.r^2.h.\rho$
- $E(r).2\pi rh = \dfrac{\pi r^2 h\rho}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{int}(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_r}$$

► Champ à l'extérieur du cylindre $r > R$

- la surface de Gauss Σ : cylindre de rayon $OM = r > R$
- $\phi = \iint_\Sigma \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS}$
- $\phi_1 = \phi_2 = 0$
- $\phi_L = E(r).2\pi.rh$
- $Q_{int} = \pi R^2 h\rho$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{ext}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\overrightarrow{e}_r}$$



► Calcul du potentiel V

- $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$

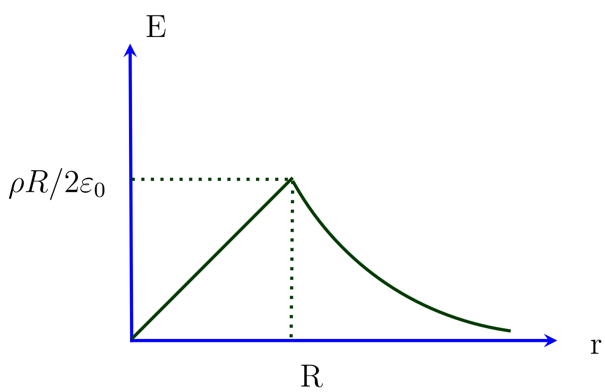
- $\left\{\begin{array}{lcl} E(r) & = & -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ 0 & = & -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ 0 & = & -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l} V = -\displaystyle\int E(r)dr \\ \text{V ne dépend pas de } \theta \\ \text{V ne dépend pas de z} \end{array}\right.$
- à l'intérieur du cylindre : $V(r) = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\displaystyle\int r dr = -\dfrac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} + C_1$
- à l'extérieur du cylindre : $V(r) = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{dr}{r} = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{r} + C_2$
- le potentiel à l'infini est différent de 0,puisqu'il y a des charges à l'infini. On choisit le potentiel de référence comme $\boxed{V(r = R) = V_0}$
- $C_2 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R} + V_0$

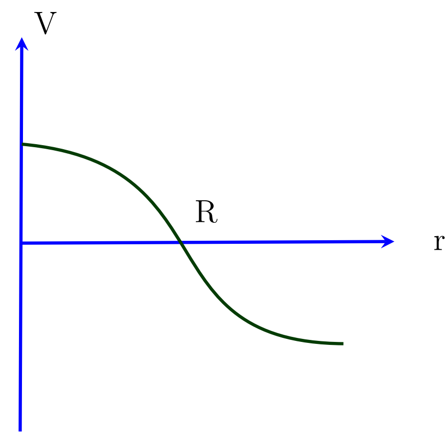
$$\boxed{V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r}\right) + V_0\,;\, r \geqslant R}$$

- la continuité de V en $r = R$: $-\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} + C_1 = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{R}{R}\right) + V_0 \Rightarrow$

  $C_1 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} + V_0$

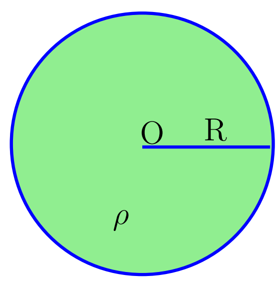
$$\boxed{V(r) = \frac{\rho(R^2 - r^2)}{2\varepsilon_0} + V_0\,;\, r \leqslant R}$$





7.3.2 Champ électrostatique crée par une sphère chargée en volume

Considérons une sphère de rayon R chargée en volume avec une densité $\rho = cte$



- la charge totale de la sphère

$$\boxed{Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}$$

- la symétrie sphérique

$$\boxed{\overrightarrow{E} = E(r)\overrightarrow{e}_r}$$

- la surface de Gauss Σ est une sphére de rayon $r = OM$ passe par le point M où on veut calculer le champ $\overrightarrow{E}$.
- Champ $\overrightarrow{E}$ à l'intérieur de la sphère
  - ▶ $\phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{E}_{int}.\overrightarrow{dS} = E_{int}.4\pi r^2 = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
  - ▶ $Q_{int} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\overrightarrow{e}_r}$$

- champ à l'extérieur $r > R$
  - $\phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{E}_{ext}.\overrightarrow{dS} = E_{ext}.4\pi r^2 = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
  - $Q_{int} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho = Q$

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{ext} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r}$$

- Potentiel électrostatique
  On montre que V s'écrit sous la forme

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho(3R^3 - r^2)}{6\varepsilon_0} + V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3R^2 - r^2}{2R^3} + V_0\,;\, r \leqslant R}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + V_0\,;\, r \geqslant R}$$

aucune charge ne se trouvant à l'infini donc $V(\infty) = 0$,d'où $V_0 = 0$