LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

Dans ce document

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier supérieur ou égal à deux;
- Pour $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_p - A)$

PROBLÈME 1: $\mathrm{GL_p}(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$

1. Montrer que l'application det est continue sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$
2. En déduire que $GL_p(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
3. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que $\exists \alpha > 0, \forall \lambda \in]0, \alpha[, \chi_A(\lambda) \neq 0$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = A - \dfrac{\alpha}{2n} I_p$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n \in \mathrm{GL_p}(\mathbb{K})$
4. En déduire $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.
5. **Application:** Soit $A, B \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$
   (a) On suppose que $A \in \mathrm{GL_p}(\mathbb{K})$, montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.
   (b) Montrer que l'égalité précédente est encore vraie si A n'est plus inversible.

PROBLÈME 2: Propriétés topologiques de l'ensemble des matrices nilpotentes

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer la continuité de l'application $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto M^n$
2. En déduire que $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
3. $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est -il borné?
4. Soit $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$
   (a) Montrer que A n'est pas inversible.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathcal{B}(A, \varepsilon) \not\subseteq \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$
   (c) Déduire $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{N}_n(\mathbb{K})}}$.
5. Montrer que $N_n(\mathbb{K})$ est étoilé en $\mathcal{O}_n$, puis qu'il est connexe par arcs dans $M_n(\mathbb{K})$.

PROBLÈME 3: Matrices stochastiques

Une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsqu'elle est à coefficients positifs et que de plus

$$\sum_{i=1}^{p} m_{i,j} = 1, \text{ pour tout } j \in [|1, p|].$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est un compact convexe de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

2. On munit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de la norme :$\|A\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant p}\left(\sum\limits_{j=1}^{p}|a_{ij}|\right)$ si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.
   On note f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(A) = \mathrm{Tr}\,(A)$
   (a) Montrer que f est linéaire continue
   (b) Montrer que f est bornée sur $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ et atteint ses bornes puis déterminer ces bornes.
   (c) Montrer que $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$ est un segment de $\mathbb{R}$ qu'on déterminera.

PROBLÈME 4: Connexité par arcs de $\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$ et de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$

1. (a) Montrer que l'ensemble E des matrices non inversibles dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est étoilée en $0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$
   (b) En déduire que E est connexe par arcs
2. Soit $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$
   (a) Justifier qu'il existe $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ et une matrice $T = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls telles que $A = PTP^{-1}$
   (b) On écrit $m_{kk} = \rho_k e^{i\theta_k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, avec $\rho_k > 0$ et on considère l'application $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par
   $$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \rho_1^t e^{it\theta_1} & tm_{12} & \cdots & \cdots & tm_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & tm_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & & \rho_n^t e^{it\theta_n} \end{pmatrix}$$
   Justifier que φ est continue sur $[0,1]$
   (c) Montrer que $\forall t \in [0,1], \quad \varphi(t) \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ et calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(0)$
   (d) Considérer $\psi = P\varphi P^{-1}$ et montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ est connexe par arcs
3. Que dire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

PROBLÈME 5: Composantes connexes dans $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$

1. On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n \mid \det(M) = 1\}$ le groupe spécial linéaire. On admet que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les transvections $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. On pourra relier toute matrice M à I_n.
   (b) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est-il étoilé en I_n?
2. On note $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \mid \det(\mathrm{M}) > 0\}$. Soit $M, M' \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $D(\alpha) = \mathbf{diag}(1, 1, \cdots, 1, \alpha)$.
   (a) Justifier l'existence de N, $N' \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \alpha' > 0$, telles que $M = D(\alpha)N$ et $M' = D(\alpha')N'$.
   (b) En utilisant que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, relier les deux matrices M et M' par un chemin continu et inclus dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Conclure

3. On pose $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \mid \det(\mathrm{M}) < 0\}$ et soit $\sigma \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que l'application $\gamma : \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \sigma M \end{cases}$ est continue
   (b) Montrer que $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \gamma\left(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})\right)$
   (c) En déduire que $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

Problème 6: Groupe orthogonal d'ordre $n \geqslant 2$

On rappelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\right\}$

1. (a) Montrer que l'application $A \longmapsto {}^tAA$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$;
   (b) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
3. Montrer que $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ est compact.

Problème 7: Densité des matrices diagonalisables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$

1. Justifier que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
   On pose $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & \cdots & ? \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ telle que $A = PTP^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
2. On pose $\alpha = \begin{cases} 1 \text{ si } \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = \lambda_j \\ \inf\{|\lambda_i - \lambda_j|,\ \mid \lambda_i \neq \lambda_j\} \end{cases}$ et on définit la suite de matrices $(T_k)_{k\geqslant 1}$ par $T_k = T + \Delta_k$, où $\Delta_k = \mathbf{diag}\left(\frac{\alpha}{k}, \frac{\alpha}{2k}, \cdots, \frac{\alpha}{nk}\right)$
   (a) Montrer que T_k admet n valeurs propres distinctes deux à deux.
   (b) Montrer que $A_k = PT_kP^{-1}$ est diagonalisable
   (c) Déterminer la limite de la suite $(A_k)_{k\geqslant 1}$
3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$
4. Le résultat reste-t-il vrai dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

Problème 8: Matrice de rang $\leqslant r$

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ On appelle matrice extraite de A toute matrice B obtenue de A en supprimant un certain nombre de lignes ou de colonnes. Soit r un entier naturel, avec $r \leqslant n$.
On admet les deux résultats suivant : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$

(i) *Si le rang de A est égal à r alors il existe une matrice extraite carrée d'ordre r de la matrice A qui est inversible.*

(ii) *S'il existe une matrice extraite de la matrice A, qui soit d'ordre r et inversible, alors le rang de A est supérieur ou égal à r .*

1. On notera $R_r = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg}(A) = r\}$et $R_r^- = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg}(A) \leqslant r\}$. On définit la fonction f de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par:
$$f(A) = \sum_{\substack{B \text{ extraite de } A \\ \text{Ordre de } B > r}} |\det(B)|$$
La somme étant prise sur toutes les matrices carrées B extraites de A et d'ordre supérieure strictement à r
   (a) Justifier que f est continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$
   (b) Montrer qu'une matrice $A \in R_r^-$ si et seulement si $f(A) = 0$
   (c) En déduire que R_r^- est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$
2. **Application:** Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers une matrice M du rang r
   (a) Justifier que $\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \ , \ \mathbf{rg}(A) \geqslant r\}$ est ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$
   (b) Montrer que pour p assez grand, on a $\dim \mathrm{Ker}(M_p) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(M)$
3. Prouver que l'adhérence de R_r est inclus dans R_r^-
4. Inversement, si $A \in R_r^-$
   (a) Justifier que A s'écrit: $A = P \begin{pmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ où $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant r$.
   (b) Construire une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de rang r convergeant vers A.
5. Conclure que $\overline{R_r} = R_r^-$
6. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

LES CLASSIQUES DE LA TOPOLOGIE DANS $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

PROBLÈME 1: $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$

1. L'application $E_{ij}^* : \left\{ \begin{array}{ccc} M_p(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (a_{k\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} & \longmapsto & a_{ij} \end{array} \right.$ est linéaire et $M_p(\mathbb{K})$ est de dimension finie, donc elle continue.

   $\mathbb{K}$ étant une $\mathbb{K}$-algèbre normée et par la formule de Leibniz $\det = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} E_{i\sigma(i)}^*$, l'application det est continue est continue sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$

2. On a

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) &\iff \det(A) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \in \mathbb{K}^* \\ &\iff A \in \det^{-1}(\mathbb{K}^*) \end{aligned}$$

   Alors $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$, avec $\mathbb{K}^*$ ouvert dans $\mathbb{K}$ et det est continue, donc $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ est ouvert dans de $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

3. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$.

   (a) Rappelons que $\mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\}$ est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal p.

   - Si $\mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\} = \emptyset$, alors on prend α quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors pour tout $\lambda \in]0, \alpha[$, on a $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$, donc $\chi_A(\lambda) \neq 0$
   - Sinon soit $\alpha = \min\{|z| \ , \ z \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\}\}$. Alors pour tout $\lambda \in]0, \alpha[$, on a $\chi_A(\lambda) \neq 0$, car sinon λ sera une racine non nulle de χ_A et par suite $\lambda = |\lambda| \geqslant \alpha$. Absurde

   Bref $\exists \alpha > 0, \forall \lambda \in]0, \alpha[, \chi_A(\lambda) \neq 0$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{\alpha}{2n} \in]0, \alpha[$, donc $\det(A_n) = \det(A - \dfrac{\alpha}{2n} I_p) = (-1)^p \chi_A\left(\dfrac{\alpha}{2n}\right) \neq 0$. Donc $A_n \in \mathrm{GL_p}(\mathbb{K})$

4. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$. D'après la question 3a il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall \lambda \in]0, \alpha[$, $\chi_A(\lambda) \neq 0$. Posons $A_n = A - \dfrac{\lambda}{2n} I_p$, alors la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est d'éléments de $\mathrm{GL_p}(\mathbb{K})$ vérifiant $\| A_n - A \| = \dfrac{\alpha}{2n} \| I_p \| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$

5. **Application:** Soit $A, B \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$

   (a) Si $A \in \mathrm{GL_p}(\mathbb{K})$, alors AB et $BA = A^{-1}(AB)A$ sont semblables, donc elles ont le même polynôme caractéristique et, par suite $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda)$.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Les deux applications

$$\psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_p(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \det(\lambda I_p - AB) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_p(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \det(\lambda I_p - BA) \end{array} \right.$$

   sont continues et elles coïncident sur $\mathrm{GL_p}(\mathbb{K})$ qui est dense dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, donc elles sont égales.

PROBLÈME 2: Propriétés topologiques de l'ensemble des matrices nilpotentes

1. Soit

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^n \\ A & \longmapsto & (A, \cdots, A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^n & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A_1, \cdots, A_n) & \longmapsto & \prod_{i=1}^{n} A_i \end{array} \right.$$

   φ_1 est continue en dimension finie, donc elle est continue et φ_2 est n-linéaire en dimension finie, donc elle est continue. Ainsi $f = \varphi_2 \circ \varphi_1$ est continue par composition.

2. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on a
$$M \in N_n(\mathbb{K}) \iff M^n = 0 \iff f(M) = 0 \iff f(M) \in \{0\} \iff M \in f^{-1}(\{0\})$$
Alors $N_n(\mathbb{K}) = f^{-1}(\{0\})$, avec $\{0\}$ fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et f est continue, donc $N_n(\mathbb{K})$ est fermé dans de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = pE_{1,n} = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & p \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $A_p \in N_n(\mathbb{K})$ et $\| A_p \| = p \| E_{1,n} \| \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$, donc $N_n(\mathbb{K})$ n'est pas borné.

4. Soit $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$
   (a) A est nilpotente, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{0\}$, donc A n'est pas inversible.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Par absurde si $\mathcal{B}(A,\varepsilon) \nsubseteq \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$. Mais $\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathcal{B}(A,\varepsilon) \cap \mathrm{GL_n}(\mathbb{K}) \neq \emptyset$, donc la boule $\mathcal{B}(A,\varepsilon)$ contient une matrice inversible et, par suite, l'ensemble $N_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible. Absurde
   (c) Si $\overset{\circ}{\widehat{\mathcal{N}_n(\mathbb{K})}} \neq \emptyset$, alors il existe $A \in N_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(A,\varepsilon) \subset N_n(\mathbb{K})$. Absurde, vu le résultat de la question précédente

5. On a $\mathcal{O}_n \in N_n(\mathbb{K})$. Soit $N \in N_n(\mathbb{K})$, montrons $[\mathcal{O}_n, N] \subset N_n(\mathbb{K})$. Soit $t \in [0,1]$, on a $(tN)^n = t^n N^n = \mathcal{O}_n$, donc $tN \in N_n(\mathbb{K})$. Donc $N_n(\mathbb{K})$ est étoilée en $\mathcal{O}_n$.En fin Toue partie étoilée est connexe par arcs.

Problème 3: Matrices stochastiques

1. • Montrons que $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est fermé.
   Pour $i,j \in [\![1,p]\!]$, on pose
$$\psi_{i,j} : \begin{cases} \mathrm{M}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (m_{k,\ell})_{1 \leqslant k,\ell \leqslant p} & \longmapsto & m_{i,j} \end{cases}$$
   et pour $j \in [\![1,p]\!]$ on pose
$$S_j : \begin{cases} \mathrm{M}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (m_{k,\ell})_{1 \leqslant k,\ell \leqslant p} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{I=0}^{p} m_{i,j} \end{cases}$$
   Les applications considérées sont linéaires et $\dim \mathrm{M}_p(\mathbb{R}) < +\infty$, donc elles sont continues.
   Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$, on a:
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R}) & \iff \begin{cases} \forall i,j \in [\![1,p]\!], & \psi_{i,j}(M) \geqslant 0 \\ \forall j \in [\![1,p]\!], & S_j(M) = 1 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \forall i,j \in [\![1,p]\!], & M \in \psi_{i,j}^{-1}([0,+\infty[) \\ \forall j \in [\![1,p]\!], & M \in S_j^{-1}(\{1\}) \end{cases} \end{aligned}$$
   Donc
$$\mathcal{C}_p(\mathbb{R}) = \left(\bigcap_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \psi_{i,j}^{-1}([0,+\infty[) \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{p} S_j^{-1}(\{1\}) \right)$$
   Pour tous $i,j\, [\![1,p]\!]$, les ensembles $\psi_{i,j}^{-1}([0,+\infty[)$ et $S_j^{-1}(\{1\})$ sont des fermés, car ils sont des images réciproques des fermés par des applications continues, en conséquence $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est fermé comme intersection de fermés

- Montrons que $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est borné. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$, on a

$$\|M\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant p}\left(\sum_{i=1}^{p}|m_{i,j}|\right) = \max_{1\leqslant j\leqslant p}\left(\sum_{i=1}^{p}m_{i,j}\right) = 1$$

Donc $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est borné. L'espace $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est compact de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$.

- Montrons que $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est convexe. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ deux matrices de $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$. Pour tout $t \in [\![0,1]\!]$, on a $tA + (1-t)B = (ta_{i,j} + (1-t)b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et

$$\forall i,j \in [\![1,p]\!], \quad ta_{i,j} + (1-t)b_{i,j} \geqslant 0$$

Et pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{p} ta_{i,j} + (1-t)b_{i,j} = t\sum_{i=1}^{p}a_{i,j} + (1-t)\sum_{i=1}^{p}b_{i,j} = t + (1-t) = 1$$

Donc $tA + (1-t)B \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$. D'où $[A,B] \subset \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$

2. (a) $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}\right.$ est linéaire et $\dim \mathrm{M}_p(\mathbb{R}) < +\infty$, donc f est continue

(b)
- f est continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ est compact, donc f est bornée sur $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ et atteint ses bornes.
- Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$, on a:

$$0 \leqslant m_{i,i} \leqslant \sum_{k=1}^{p} m_{k,i} = 1$$

Donc $0 \leqslant f(M) \leqslant p$. Or $I_p \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ et $f(I_p) = p$, donc $p = \max f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$. En outre pour $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a $J \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ et $f(J) = 0$, donc $0 = \min f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$.

(c) Montrons que $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R})) = [0,p]$
- f étant continue et $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs, donc $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$ est un intervalle
- $f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R})) \subset [0,p]$
- Comme $0, p \in f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$, donc $[0,p] \subset f(\mathcal{C}_p(\mathbb{R}))$

Problème 4: Connexité par arcs de $\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$ et de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$

1. (a) On a $\mathcal{O}_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$. Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$, montrons $[\mathcal{O}_n, N] \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$. Soit $t \in [0,1]$, on a $\det(tN) = 0$, donc $tN \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$. Donc $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$ est étoilée en $\mathcal{O}_n$.

(b) Toue partie étoilée est connexe par arcs.

2. Soit $A \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$

(a) Toute matrice complexe est trigonalisable, alors il existe $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ et une matrice $T = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nn} \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. De plus $\prod_{k=1}^{n} m_{k,k} = \det(T) = \det(A) \neq 0$, donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $m_{k,k} \neq 0$

(b) Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, l'application:

$$\varphi_{k,k} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \rho_k^t e^{it\theta_k} \end{array} \right.$$

est continue. De plus pour tout $i \neq j \in [\![1,n]\!]$, l'application affine

$$\varphi_{i,j} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & tm_{i,j} \end{array} \right.$$

est continue. Donc φ est continue sur $[0,1]$, car ses fonctions composantes sont continues sur $[0,1]$

(c) Soit $t \in [0,1]$, on a $\det \varphi(t) = \left(\prod_{k=1}^{n} \rho_k\right)^t e^{it\sum_{k=1}^{n}\theta_k} \neq 0$, donc $\varphi(t) \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$, avec $\varphi(1) = T$ et $\varphi(0) = I_n$

(d) L'application $S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array} \right.$ est continue, car elle est linéaire et $\dim \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) < +\infty$. Alors $\psi = S \circ \varphi : [0,1] \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est continue par composition. En fin pour tout $t \in [0,1]$, on a $\det(\psi(t)) = \det(\varphi(t)) \neq 0$, donc $\psi(t) \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$, donc $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ est continue, avec $\psi(0) = I_n$ et $\psi(1) = A$. Soit maintenant $A, B \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$, on sait qu'il existe un chemin dans $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ joignant A et I_n et un autre joignant B et I_n, donc il existe un chemin dans $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ joignant A et B. Ainsi $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

3. Comme $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$, det est continue et $\mathbb{R}$ n'est pas connexe par arcs, alors $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

PROBLÈME 5: Composantes connexes dans $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$

1. (a) Remarquons d'abord que $T_{i,j}^{-1}(\lambda) = T_{i,j}(-\lambda)$. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe des transvections $(T_{i_k,j_k}(\lambda_k))_{k=1}^{p}$ telles que $M = \prod_{k=1}^{p} T_{i_k,j_k}(\lambda_k)$. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, on pose $\psi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & T_{i_k,j_k}(t\lambda_k) \end{array} \right.$. De telles fonctions ψ_k sont continues car leurs fonctions coordonnées sont continues et comme $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre normée, alors $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \prod_{k=1}^{p} T_{i_k,j_k}(t\lambda_k) \end{array} \right.$ est continue sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$, on a $\det(\psi(t)) = 1$ c'est-à-dire $\psi(t) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. En outre $\psi(0) = I_n$ et $\psi(1) = M$. Donc il existe un chemin dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ joignant I_n et M. Soit maintenant $M, N \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on sait qu'il existe un chemin dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ joignant M et I_n et un autre joignant N et I_n, donc il existe un chemin dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ joignant M et N. Ainsi $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

   (b) Pour $n = 2$, on pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, mais $\mathcal{O}_2 = \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}M \notin \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ n'est pas étoilé en I_2

2. (a) Soit $\alpha = \det(M)$ et $\alpha' = \det(M')$, puis on pose $N = D\left(\frac{1}{\alpha}\right)M$ et $N' = D\left(\frac{1}{\alpha'}\right)M'$, alors $\alpha, \alpha' > 0$ et $\det(N) = \det(N') = 1$. Les nombres α et α' et les matrices N et N' vérifient les conditions demandées

   (b) Soit $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ un chemin joignant $\gamma_2(0) = N$ et $\gamma_2(1) = N'$ et soit $\gamma_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & D((1-t)\alpha + \alpha' t) \end{array} \right.$. L'application γ_1 est continue car ses fonctions coordonnées est continue sur $[0,1]$ et par le produit $\gamma = \gamma_1.\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est continue et elle vérifie $\forall t \in [0,1]$, $\det(\gamma(t)) = (1-t)\alpha + \alpha' t > 0$ et $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = M'$, c'est-à-dire γ est un chemin dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ joignant M et M'. Donc $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

3. On pose $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \mid \det(\mathrm{M}) < 0\}$ et soit $\sigma \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

Les classiques de la topologie dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

(a) L'application $\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \sigma M \end{array} \right.$ est linéaire et $\dim \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) < +\infty$, donc elle est continue

(b) Soit $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\det(\sigma M) = \underbrace{\det(\sigma)}_{<0}\underbrace{\det(M)}_{>0} < 0$, donc $\gamma(M) \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$, puis $\gamma\left(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})\right) \subset \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$. Inversement soit $N \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$, on pose $M = \sigma^{-1}N$, on a bien $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, car $\det(M) = \det(\sigma^{-1})\det(N) = \underbrace{\det(\sigma^{-1})}_{<0}\underbrace{\det(N)}_{<0} > 0$ et $\gamma(M) = \sigma M = N$, donc $N \in \gamma\left(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})\right)$ et par suite $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) \subset \gamma\left(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})\right)$

(c) Comme $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \gamma\left(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})\right)$, γ est continue et $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ es connexe par arcs, alors $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \gamma\left(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})\right)$ est connexe par arcs

Problème 6: Groupe orthogonal d'ordre $n \geqslant 2$

1. (a) Posons

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & (\mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ M & \longmapsto & (M, {}^tM) \end{array} \right. , \quad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M,N) & \longmapsto & MN \end{array} \right. \text{ puis } f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^tM \end{array} \right.$$

g est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie. h est continue sur $(M_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que $f = h \circ g$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b)
- $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.
- Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est borné. $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$ et donc $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$.

Puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Si $O_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, alors $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$ est connexe par arcs dans puisqu'il est l'image d'un connexe par arcs par une fonction continue. Absurde

3. $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé et inclus dans le compact $O_n(\mathbb{R})$, donc il s'agit d'un compact

Problème 7: Densité des matrices diagonalisables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$

1. Toute matrice complexe est trigonalisable

2. (a) Soit $k \geqslant 1$, notons que le spectre de T_k est $\left\{\lambda_i + \dfrac{\alpha}{ik}, \quad i \in [\![1,n]\!]\right\}$. Soit $i \neq j \in [\![1,n]\!]$.
   - Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $\lambda_i + \dfrac{1}{ik} \neq \lambda_j + \dfrac{1}{jk}$
   - Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors $\lambda_i + \dfrac{1}{ik} = \lambda_j + \dfrac{1}{jk}$ entraîne $|\lambda_i - \lambda_j| = \dfrac{\alpha}{k}\left|\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{j}\right| < \dfrac{\alpha}{k} \leqslant \alpha$

   ce qui contredit la définition de α et donc les valeurs propres T_k sont deux à deux distinctes

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice A_k est semblable à T_k, donc elle est diagonalisable de n valeures propres distinctes deux à deux.

   (c) $T_k = T + \Delta_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} T$ et par continuité de l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$, alors $A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$

3. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, la suite construite $(A_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite de matrices admettant n valeurs propres distinctes qui tend vers A. D'où la densité demandée

4. Le résultat précédent est faux sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Dans le cas $n=2$, l'application $\varphi : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ le discriminant de son polynôme caractéristique:

$$\varphi(M) = (a-d)^2 + 4bc$$

φ est continue car pour toute $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, l'expression de $\varphi(M)$ est un polynôme en les coefficients de M. Donc si on choisit une matrice A dont le discriminant de son polynôme caractéristique est strictement négatif et on suppose qu'il existe une suite de matrices réelles diagonalisables $(A_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$, alors $\varphi(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \varphi(A)$. Mais pour tout $k\in\mathbb{N}$, le polynôme χ_{A_k} est scindè, donc $\varphi(A_k)\geqslant 0$ et par passage à la limite $\varphi(A)\geqslant 0$. Absurde

Problème 8: Matrice de rang $\leqslant r$

1. (a) Pour toute matrice carrée B extraite $\det(B)$ est un polynôme en les coefficients de A. En outre $|.| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue, donc par composition puis par somme des fonctions continues l'application f est continue
   (b) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $f(A)=0$ si, et seulement, si le déterminant de toute matrice extraite de A d'ordre $> r$ est nul si, et seulement, si toute matrice extraite de A d'ordre $> r$ est non inversible si, et seulement, si $A \in R_r^-$
   (c) $A \in R_r^-$ si et seulement si $A \in f^{-1}(\{0\})$, donc $R_r^- = f^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc c'est un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$
2. **Application:** Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers une matrice M du rang r
   (a) On a $R_+^r = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\ ,\ \mathbf{rg}(A)\geqslant r\} = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\ ,\ \mathbf{rg}(A) > r-1\} = \complement_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}^{R_{r-1}^-}$ est le complémentaire d'un fermé de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$
   (b) Comme $M \in R_+^r$ et R_+^r est ouvert, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(M,\varepsilon) \subset R_+^r$. Par hypothèse $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} M$, alors il existe p_0 tel que pour tout $p\geqslant p_0$: $M_p \in B(M,\varepsilon)$, soit $\mathbf{rg}(M_p)\geqslant \mathbf{rg}(M)$ ou encore, par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(M_p) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(M)$
3. R_r^- contient R_r et est fermé, donc $\overline{R_r} \subset \overline{R_r^-} = R_r^-$
4. (a) Soit $\alpha = \mathbf{rg}(A)$, alors A s'écrit: $A = P\begin{pmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ où $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant r$.
   (b) Soit $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $A_k = P\begin{pmatrix} I_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k}I_{r-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ la matrice A_k est du rang r et par continuité de l'application linéaire $M \longmapsto PMQ$, alors $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$
5. D'après la question 4b, on a $R_r^- \subset \overline{R_r}$ et d'après la question 3, on a $\overline{R_r} \subset R_r^-$. Donc l'égalité demandée
6. Il suffit de voir que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = R_n$ et que $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) = R_n^-$. D'après la question précédente $\overline{R_n} = R_n^-$, alors $\overline{\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})} = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$