Propagation du champ électromagnétique dans le vide

Table des matières

1 Onde électromagnétique

1.1 Définitions

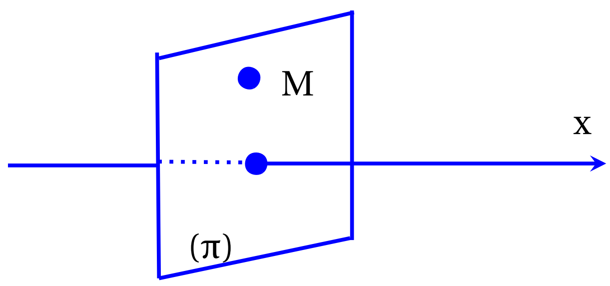
• Onde : On appelle onde tout phénomène physique décrit par une fonction S(M,t) dépendant des coordonées spatiales et du temps.

• Onde plane : Une onde ,décrite par la fonction $S(M,t)$,est dite plane s'il est possible de trouver un système de coordonnées cartésiennes telle que $S(M,t)$ ne dépend que d'une seule coordonnée d'espace et du temps.

• Onde plane progressive : Une onde plane progressive est une onde plane qui se propage dans un sens bien déterminé.

• Surface d'onde : On appelle surface d'onde l'ensemble des point M telle que $S(M,t)$ est constante.

- pour l'onde plane caractérisée par $S(x,t)$,la surface d'onde est telle que : $S(x,t) = cte$,donc c'est un plan perpendiculaire à l'axe Ox



• Onde électromagnétique : L'onde électromagnétique est représenté par le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t))$.

1.2 Equation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide

les équations de Maxwell dans le vide

- $(M-G) : div\overrightarrow{E} = 0$
- $(M-\phi) : div\overrightarrow{B} = 0$
- $(M-F) : \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$
- $(M-A) : \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

► les équations de $(M-F)$ et $(M-A)$ sont couplées spatiotemporellement,pour les découpler on utilise

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\overrightarrow{E}\right) - \Delta\overrightarrow{E}}$$

- $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}\right) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}}{\partial t} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$
- $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\overrightarrow{E}\right) - \Delta\overrightarrow{E}$

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}}$$

de la même manière on montre que

$$\Delta \overrightarrow{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

- on note $\square = \Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$. $\square$ s'appelle opérateur d'alembertien
- les équations de propagation deviennent

$$\square \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \text{ et } \square \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

• Conclusion : l'onde électromagnétique satisfait dans le vide à l'équation de propagation d'Alembert

$$\Delta \overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \text{ et } \Delta \overrightarrow{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

1.3 Solution de l'équation d'Alembert

Considérons une onde plane $S(x,t)$ qui se propage suivant Ox,$S(x,t)$ satsfait à l'équation de propagation d'Alembert

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

- pour résoudre l'équation d'Alembert il est nécessaire de poser : $\left\{\begin{array}{lcl} u & = & t - \dfrac{x}{c} \\ v & = & t + \dfrac{x}{c} \end{array}\right.$
- l'équation de propagation devient : $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)S(x,t) = 0$
- $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial v}$
- $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}$
- $\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} = -\dfrac{2}{c}\dfrac{\partial}{\partial u}$
- $\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{2}{c}\dfrac{\partial}{\partial v}$
- l'équation de propagation s'écrit : $-\dfrac{4}{c^2}\dfrac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = 0$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = 0$$

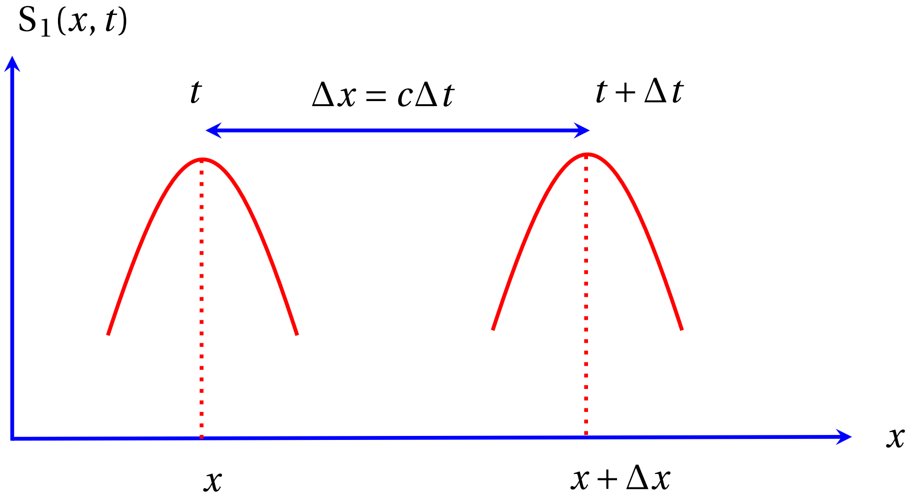
- $\dfrac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial S}{\partial v}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial S}{\partial v} = \varphi(v) \Leftrightarrow S(u,v) = \displaystyle\int \varphi(v)dv + f_+(u) = f_-(v) + f_+(u)$

$$S(x,t) = f_+\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_-\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

► Interprétation physique

- considérons la fonction $S_1(x,t) = f_+\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$

- $S_1(x+\Delta x, t+\Delta t) = f_+\left(t+\Delta t - \frac{x}{c} - \frac{\Delta x}{c}\right) = f_+\left(t - \frac{x}{c} + \Delta t - \frac{\Delta x}{c}\right)$
- $S_1(x+\Delta x, t+\Delta t) = S_1(x,t)$ si $\boxed{\Delta x = c\Delta t}$
- $S_1(x,t) = f_+\left(t - \frac{x}{c}\right)$ se propage sans déformation avec la célérité c le long de l'axe Ox

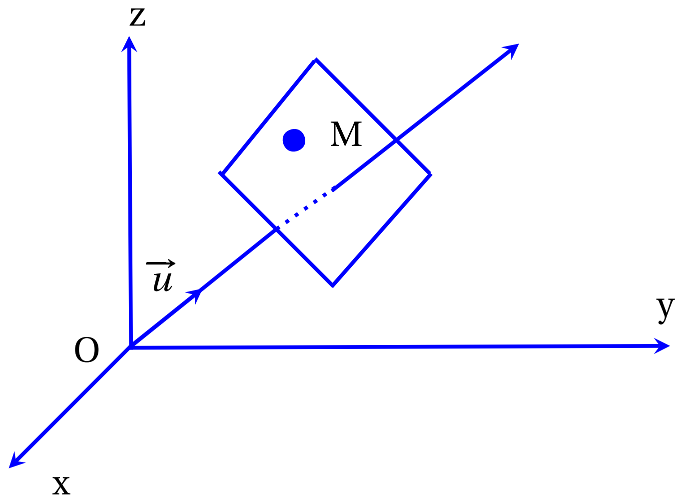


- $f_+\left(t - \frac{x}{c}\right)$ représente une onde plane progressive (OPP) se propageant avec la célérité c le long de l'axe Ox dans le sens des x croissants
- $f_-\left(t + \frac{x}{c}\right)$ représente une onde plane progressive (OPP) se propageant avec la célérité c le long de l'axe Ox dans le sens des x décroissants

• Conclusion : la solution générale de l'équation d'onde d'Alembert à une dimension est la superposition de deux ondes planes se propageant à la célérité c dans deux sens opposés.

- Cas d'une direction quelconque

  Dans le cas de la propagation d'une onde plane dans une direction quelconque suivant $\vec{u}$



$$\boxed{S(M,t) = f_+\left(t - \frac{\vec{OM}.\vec{u}}{c}\right) + f_-\left(t + \frac{\vec{OM}.\vec{u}}{c}\right)}$$

• Remarque

- L'onde plane ne présente pas une réalitée physique car les plans d'ondes sont d'extension infini ce qui entraine une divergence en énergie,on dit qu'elle est illimitée transversalement (même valeur en tout point du plan d'onde) .

- L'onde plane a une direction priviligie,alors que les ondes éléctromagnétiques emises à partir d'une source ponctuelle se propagent dans toutes les directions de l'espace.

1.4 Structure de l'onde électromagnétique plane progressive

Soit une OEMPP dépendant de z et de t

- $\vec{E}(M,t) = \vec{E}(z,t)$ et $\vec{B}(M,t) = \vec{B}(z,t)$
- les équations de propagation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \text{ et } \boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

- les solutions

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = \vec{E}_+\left(t-\frac{z}{c}\right) + \vec{E}_-\left(t+\frac{z}{c}\right)} \text{ et } \boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{B}_+\left(t-\frac{z}{c}\right) + \vec{B}_-\left(t+\frac{z}{c}\right)}$$

- on s'interesse dans la suite de ce paragraphe à l'onde électromagnétique plane progressive se propgeant suivant Oz dans le sens des z croissants

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = \vec{E}_+\left(t-\frac{z}{c}\right)} \text{ et } \boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{B}_+\left(t-\frac{z}{c}\right)}$$

▶ Calculons $\vec{\nabla} f\left(t-\frac{z}{c}\right)$

- $\vec{\nabla} f\left(t-\frac{z}{c}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial f}{\partial\left(t-\frac{z}{c}\right)}\frac{\partial\left(t-\frac{z}{c}\right)}{\partial z}\vec{e}_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\left(t-\frac{z}{c}\right)}\vec{e}_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\vec{e}_z$
- donc on peut écrire

$$\boxed{\vec{\nabla}\bullet = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bullet}{\partial t}\vec{e}_z}$$

- (M-G) : $div\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}.\vec{E} = 0$
- $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\vec{e}_z \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}.\vec{e}_z\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{E}.\vec{e}_z = \psi(M) = cte$
- $\psi(M)$ est un champ scalaire indépendant du temps donc il n'intervient pas dans le phénomène de propagation d'où la nécessité de choisir $\boxed{\psi(M) = 0}$
- l'OMPP qui se propage suivant Oz vérifie

$$\boxed{\vec{E}.\vec{e}_z = 0} \text{ et } \boxed{\vec{B}.\vec{e}_z = 0}$$

• **Définitions**

- une onde électromagnétique plane progressive est transverse électrique (TE) si le champ électrique est pependiculaire à la direction de propagation.
- une onde électromagnétique plane progressive est transverse magnétique (TM) si le champ magnétique est pependiculaire à la direction de propagation.

- si le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à la direction de propagation ,on dit que le champ électrique est transversal

- si le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire à la direction de propagation ,on dit que le champ magnétique est transversal
- dans notre cas $\vec{E}.\vec{e}_z = 0$ et $\vec{B}.\vec{e}_z = 0$,l'OEMPP est transverse électrique et magnétique (TEM)

• Conclusion : l'onde électromagnétique plane progressive dans le vide est transverse électrique et magnétique (TEM)

- $(M-F) : \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{c}\vec{e}_z \dfrac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{e}_z \wedge \dfrac{\vec{E}}{c}\right) = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}}$$

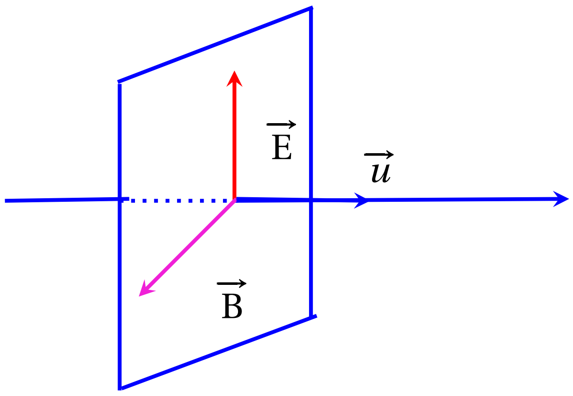
- $(M-A) : \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\boxed{\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{e}_z}$$

• Généralisation : pour une onde électromagnétique plane progressive se propageant suivant la direction $\vec{u}$ on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \text{ et } \vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}$$

donc $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u})$ est un trièdre direct



• Remarque : $\dfrac{E}{B} = c >> 1$,d'où l'idée de construire des détecteurs électriques basée sur $\vec{E}$ et non $\vec{B}$ (l'oeil,détecteur photoélectrique)

1.5 Onde sphérique

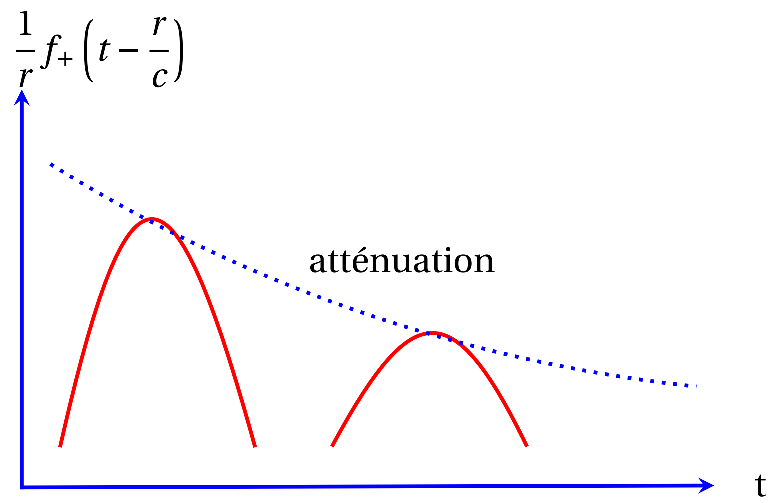
• Définition : Une onde sphérique est une onde décrite par une fonction $S(r,t)$ qui ne dépend que du temps et de la distance $r = OM$ entre M et l'origine O .

- l'équation de propagation d'Alembert : $\Delta S - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$
- en coordonnées sphériques : $\Delta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(r.)$

- l'équation de propagation s'écrit : $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rS) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$
- on pose $F = rS$ l'équation devient : $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$
- la solution de cette équation est : $F = F_+\left(t - \frac{r}{c}\right) + F_-\left(t + \frac{r}{c}\right)$

$$\boxed{f(r,t) = \frac{1}{r}f_+\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}f_-\left(t + \frac{r}{c}\right)}$$

- $\frac{1}{r}f_+\left(t - \frac{r}{c}\right)$: onde sphérique divergente de 0 avec atténuation
- $\frac{1}{r}f_-\left(t + \frac{r}{c}\right)$: onde sphérique convergente vers 0 avec atténuation



- Les surfaces d'ondes d'une onde sphérique sont des sphères.

1.6 Ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques (OPPH)ou monochromatiques (OPPM)

1.6.1 Définition

• Définition : Une onde plane progressive $S(M,t)$ est dite monochromatique (harmonique) s'elle s'écrit sous la forme

$$S(M,t) = S_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right)$$

- ▶ S_0 : amplitude
- ▶ ω : pulsation ou la fréquence angulaire
- ▶ $\vec{k} = k\vec{u}$: vecteur d'onde
- ▶ $\vec{u}$: vecteur unitaire suivant la direction de propagation de l'onde
- ▶ φ_0 : phase à l'origine

- la grandeur $\boxed{\phi(M,t) = \omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0}$ représente la phase de l'onde à l'instant t au point M
- on appelle plan équiphase l'ensembe des points M vérifiant : $\phi(M,t) = cte$

- la quantité $\boxed{\sigma = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda}}$ représente le nombre d'onde,avec λ : longueur d'onde
- pour l'onde électromagnétique :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right)} \text{ et } \boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right)}$$

1.6.2 Représentation complexe

- en notation complexe

$$\boxed{\underline{S}(M,t) = \underline{S}_0 e^{j\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)} = S_0 e^{j\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_0\right)}}$$

$\underline{S}_0 = S_0 e^{j\varphi_0}$: amplitude complexe

- $S(M,t) = Rel\left(\underline{S}(M,t)\right)$
- l'onde électromagnétique

$$\boxed{\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 e^{j\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)}} \text{ et } \boxed{\vec{\underline{B}} = \vec{\underline{B}}_0 e^{j\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)}}$$

- en notation complexe on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\underline{E}}}{\partial t} & = & j\omega \vec{\underline{E}} \\ div \vec{\underline{E}} & = & -j\vec{k}.\vec{\underline{E}} \\ \overrightarrow{rot} \vec{\underline{E}} & = & -j\vec{k} \wedge \vec{\underline{E}} \\ \Delta \vec{\underline{E}} & = & -k^2 \vec{\underline{E}} \end{cases}$$

1.6.3 Relation de dispersion

- l'équation de propagation : $\Delta \underline{S} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{S}}{\partial t^2} = 0$
- si l'onde électromagnétique se propage suivant Ox : $\vec{k} = k\vec{e}_x$ et $\underline{S}(M,t) = \underline{S}_0 e^{j(\omega t - kx)}$,alors $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ et $\Delta = \left(jk\right)^2 = -k^2$
- l'équation de propagation s'écrit : $-k^2\underline{S} + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{S} = 0$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

représente la relation de dispersion

•**Définition** : un milieu est dit **dispersif** si la relation de dispersion $\omega = f(k)$ n'est pas linéaire.

- dans le vide $k = \frac{\omega}{c}$ est une relation linéaire,donc le vide est un milieu non dispersif
- on montre que dans le plasma (paragraphe suivante) : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ non linéaire,donc le plasma est un milieu dispersif

1.6.4 Relation de structure des OPPM

- (M – F) : $\overrightarrow{rot}\,\underline{\overrightarrow{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega\underline{\overrightarrow{B}} = j\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}$

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega}}$$

- donc

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega}}$$

1.6.5 Insuffisance du modèle de l'OEMPPM : paquet d'onde

L'onde plane progressive monochromatique n'est qu'une solution rigoureuse de l'équation d'Alembert,elle n'a pas de réalité physique :

- l'OPPM est une onde plane : extension transversale infini (infini dans l'espace)
- l'OPPM est monochromatique : extension longitudinale infini (infini temporellement)

Pour surmonter ce problème ,il est nécessaire d'introduir le paquet d'onde.

•Définition : Un paquet d'onde est la superposition des ondes planes progressives monochromatiques

•Remarque : en optique le paquet d'onde est remplacé par le train d'onde

1.6.6 Vitesse de phase-vitesse de groupe

▶ Vitesse de phase v_φ

•Définition : la vitesse de phase correspond à la vitesse de propagation de la phase d'une composante monochromatique . Elle n'a aucune réalité physique,c'est-à-dire ne correspond pas à un transport d'énergié.

- pour l'OPPM qui se propage suivant Ox :
  $\phi(x+\Delta x, t+\Delta t) = \phi(x,t) \Leftrightarrow \omega(t+\Delta t) - k(x+\Delta x) + \phi_0 = \omega t - kx + \phi_0$
  $\Leftrightarrow \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\omega}{k} = v_\varphi$
- la vitesse de phase est

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$$

- dans le vide la vitesse de phase d'une OEMPPM :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c}$$

▶ Vitesse de groupe v_g

•Définition : la vitesse de groupe représente la vitesse de propagation de l'enveloppe de l'onde,elle s'identifie à la vitesse de propagation de l'énergie(ou de l'information).

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

•Remarque

- la vitesse de phase peut être supérieur à la vitesse de la lumière,alors que la vitesse de groupe est inférieur à c
- si $v_\varphi \neq v_g$: l'enveloppe se déplace par rapport à la porteuse ce qui donne une déformation du paquet d'onde

1.6.7 Aspect énergétique

- le vecteur de Poynting

$$\boxed{\vec{\pi} = \frac{\text{Re}(\underline{\vec{E}}) \wedge \text{Re}(\underline{\vec{B}})}{\mu_0}}$$

- attention :

$$\boxed{\vec{\pi} \neq \frac{\text{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}})}{\mu_0}}$$

- le vecteur de Poynting moyenne

$$\boxed{<\vec{\pi}> = \frac{1}{2\mu_0}\text{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*)}$$

avec $\underline{\vec{B}}^*$: le conjugué complexe de $\underline{\vec{B}}$

- densité volumique de l'énergie électromagnétique

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\text{Re}\,\underline{\vec{E}}\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\text{Re}\,\underline{\vec{B}}\right)^2}$$

- attention : $\left(\text{Re}\,\underline{\vec{E}}\right)^2 = \left(\text{Re}\,\underline{\vec{E}}\right).\left(\text{Re}\,\underline{\vec{E}}\right) \neq \text{Re}\left(\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}\right)$
  de même : $\left(\text{Re}\,\underline{\vec{B}}\right)^2 = \left(\text{Re}\,\underline{\vec{B}}\right).\left(\text{Re}\,\underline{\vec{B}}\right) \neq \text{Re}\left(\underline{\vec{B}}.\underline{\vec{B}}\right)$
- densité volumique moyenne de l'énergie électromagnétique

$$\boxed{<u> = \frac{1}{4}\varepsilon_0\,\text{Re}\left(\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*\right) + \frac{1}{4\mu_0}\text{Re}\left(\underline{\vec{B}}.\underline{\vec{B}}^*\right)}$$

$$\boxed{<u> = \frac{1}{4}\varepsilon_0\left\|\underline{\vec{E}}\right\|^2 + \frac{1}{4\mu_0}\left\|\underline{\vec{B}}\right\|^2}$$

2 Polarisation d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique

2.1 Définition

•Définition : Une OEMPPM est dite polarisée si l'extrimité du vecteur $\overrightarrow{MA} = \vec{E}(M,t)$,décrit une courbe fermée invariante dans le temps

2.2 Cas générale d'une OEMPPM

Considérons une OEMPPM se propageant dans le vide ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$),dans le sens des z croissants :

- $\vec{E}\begin{cases} E_x &= E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y &= E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ E_z &= 0 \end{cases}$
- On pose $\alpha = \omega t - kz + \varphi_x$ et $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$
- $\vec{E}\begin{cases} E_x &= E_{0x}\cos\alpha \\ E_y &= E_{0y}\cos(\alpha + \varphi) \\ E_z &= 0 \end{cases}$
- $E_y = E_{0y}\left(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi\right)$ et $\cos\alpha = \dfrac{E_x}{E_{0x}}$
- $\dfrac{E_y}{E_{0y}} = \left(\dfrac{E_x}{E_{0x}}\right)\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi$

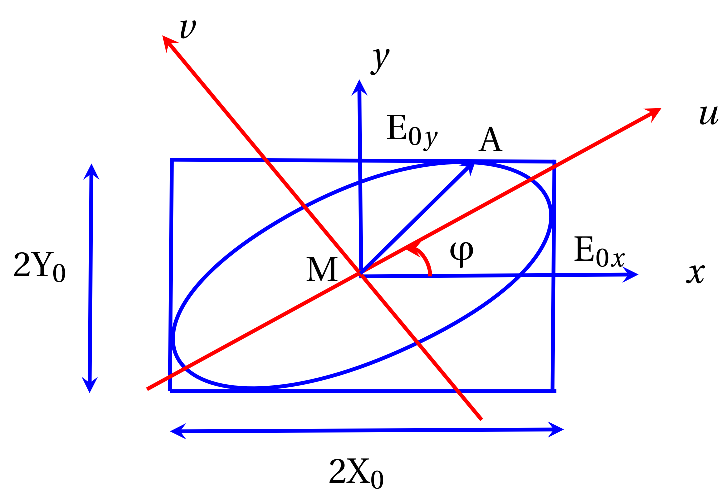
  $\sin\alpha = \left(\dfrac{E_x}{E_{0x}}\right)\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \left(\dfrac{E_y}{E_{0y}}\right)\dfrac{1}{\sin\varphi}$ avec $\sin\varphi \neq 0$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\left(\dfrac{E_x}{E_{0x}}\right)\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \left(\dfrac{E_y}{E_{0y}}\right)\dfrac{1}{\sin\varphi}\right)^2 = 1$

  $\Leftrightarrow \left(\dfrac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\dfrac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \left(\dfrac{E_y}{E_{0y}}\right)^2\dfrac{1}{\sin^2\varphi} - 2\left(\dfrac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\dfrac{E_y}{E_{0y}}\right)\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = 1$

  $$\boxed{\left(\dfrac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\dfrac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\dfrac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi}$$
- on pose $\begin{cases} X &= E_x \\ Y &= E_y \end{cases}$ et $\begin{cases} X_0 &= E_{0x} \\ Y_0 &= E_{0y} \end{cases}$ donc $\begin{cases} X &= X_0\cos\alpha \\ Y &= Y_0\cos(\alpha+\varphi) \end{cases}$

  $$\boxed{\left(\dfrac{X}{X_0}\right)^2 + \left(\dfrac{Y}{Y_0}\right)^2 - 2\left(\dfrac{X}{X_0}\right)\left(\dfrac{Y}{Y_0}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi}$$

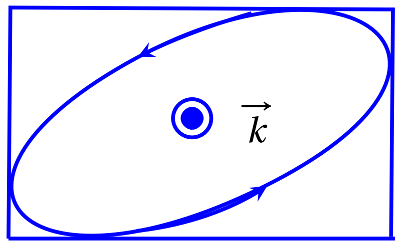
  c'est l'équation cartésienne d'une ellipse. Ainsi dans le cas général l'OEMPPM est polarisée élliptiquement



- le point A(X, Y) décrit une ellipse contenue dans rectangle de dimension $2X_0$ et $2Y_0$
- u, v repèrent les axes de l'ellipse
- φ : repère la pente de l'ellipse

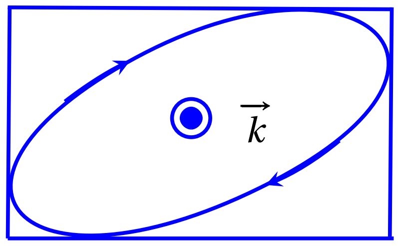
Pour décrire le sens de polarisation il y a deux méthodes

- Méthode n°1 : Déterminer le signe de la quantité $\left[\overrightarrow{MA} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{MA}}{dt}\right)\right] \vec{k}$
  - si le signe de la quantité est positif,la polarisation est elliptique gauche



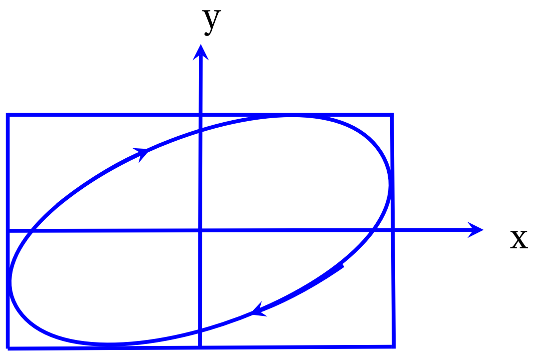
polarisation elliptique gauche

  - si le signe de la quantité est négatif,la polarisation est elliptique droite



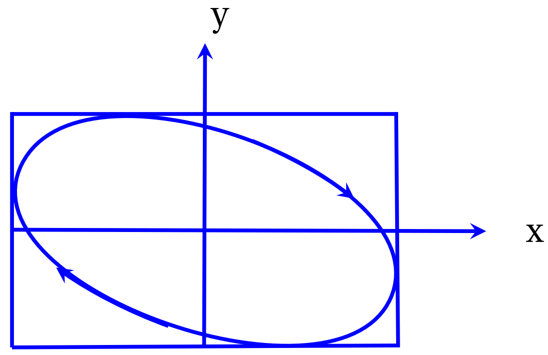
polarisation elliptique droite

  - pour l'exemple précédent $\vec{E} = \begin{cases} E_x = X & = & E_{0x}\cos\alpha \\ E_y = Y & = & E_{0y}\cos(\alpha+\varphi) \\ E_z = Z & = & 0 \end{cases}$
  - on montre que $\overrightarrow{MA} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{MA}}{dt}\right) = -\omega E_{0x}E_{0y}\sin\varphi\,\vec{e}_z$
  - $\left[\overrightarrow{MA} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{MA}}{dt}\right)\right].\vec{k} = -\omega E_{0x}E_{0y}\sin\varphi$
  - si $0 < \varphi < \pi$: l'onde est polarisée elliptiquement droite
  - si $\pi < \varphi < 2\pi$: l'onde est polarisée elliptiquement gauche
- Méthode n°2 : Calculer la quantité $\frac{dY}{dt}$ en un point A_0 où $\alpha = 0$
  - si $\dot{Y} > 0$: l'onde est polarisée elliptiquement gauche
  - si $\dot{Y} < 0$: l'onde est polarisée elliptiquement droite
  - $Y = Y_0\cos(\alpha+\varphi)$
  - $\dot{Y} = -\omega Y_0\sin(\alpha+\varphi)$
  - en un point A_0 on a : $\dot{Y} = -\omega Y_0\sin\varphi$
  - si $0 < \varphi < \pi$: l'onde est polarisée elliptiquement droite
  - si $\pi < \varphi < 2\pi$: l'onde est polarisée elliptiquement gauche



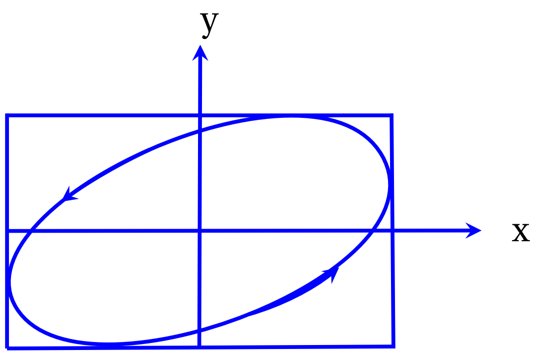
$0 < \varphi < \pi/2$

elliptiquement droite



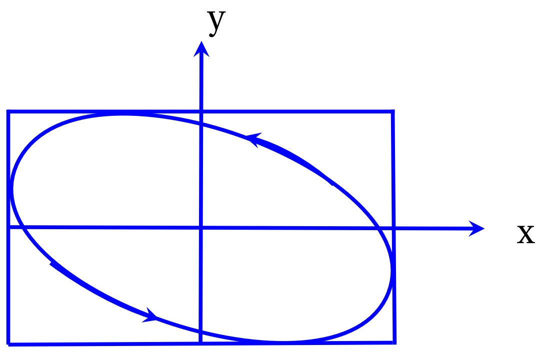
$\pi/2 < \varphi < \pi$

elliptiquement droite



$\pi < \varphi < 3\pi/2$

elliptiquement gauche



$3\pi/2 < \varphi < 2\pi$

elliptiquement gauche

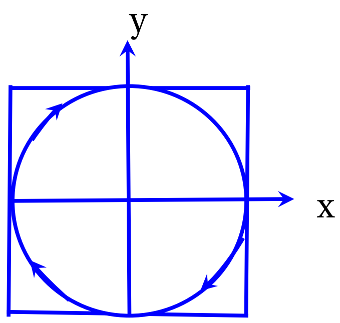
•Remarque : si $\begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\varphi_x) \\ E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\varphi_y) \\ E_z = 0 \end{cases}$

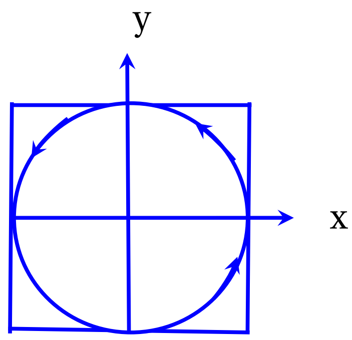
- $\alpha = kz-\omega t+\varphi_x$ et $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$
- $\dot{Y} = \omega Y_0 \sin(\alpha+\varphi)$
- en A_0 où $\alpha = 0$ on a : $\dot{Y} = \omega Y_0 \sin\varphi$
- si $0 < \varphi < \pi$: l'onde est polarisée elliptiquement gauche
- si $\pi < \varphi < 2\pi$: l'onde est polarisée elliptiquement droite

2.3 Cas particuliers

▶ Polarisation circulaire

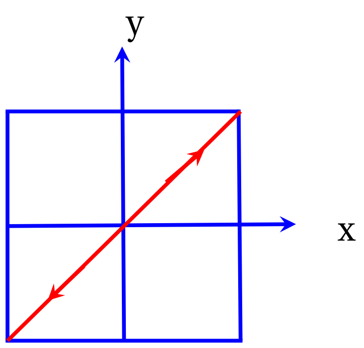
- si $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ et $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, l'équation devient : $E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$,c'est d'un cercle,en plus on a pour l'exemple de l'étude $\dot{Y} = -\omega Y_0 < 0$ donc l'onde est polarisée circulaire droite
- si $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ et $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, l'équation devient : $E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$,c'est d'un cercle,en plus on a pour l'exemple de l'étude $\dot{Y} = \omega Y_0 > 0$ donc l'onde est polarisée circulaire gauche



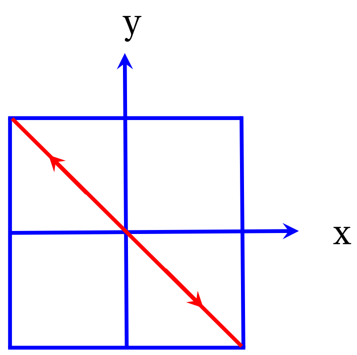


circulaire droite ($\varphi = \pi/2$) circulaire gauche ($\varphi = 3\pi/2$)

- **Polarisation rectiligne**
  - si $\varphi = 0$: $E_y = \dfrac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x$: polarisation rectiligne
  - si $\varphi = \pi$: $E_y = -\dfrac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x$: polarisation rectiligne



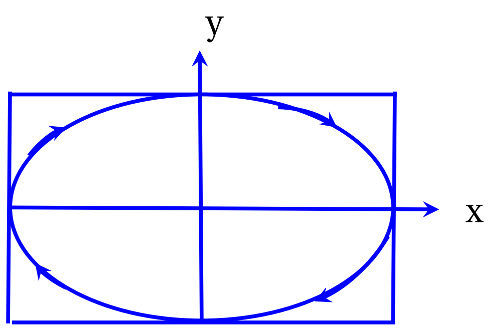
$\varphi = 0$



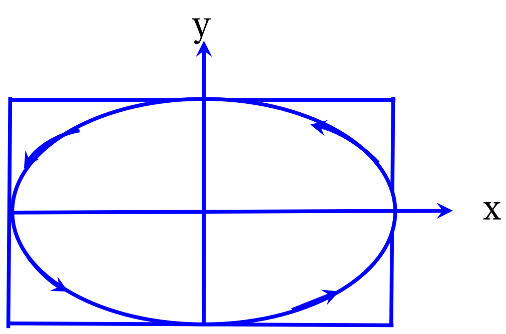
$\varphi = \pi$

  - si $E_{0x} = 0; E_{0y} \neq 0$ alors $E_x = 0$ et $E_y \neq 0$: l'OEMPPM est polarisée suivant Oy
  - si $E_{0x} \neq 0; E_{0y} = 0$ alors $E_x \neq 0$ et $E_y = 0$: l'OEMPPH est polarisée suivant Ox

- **Ellipse coïncidant avec les axes Ox et Oy**
  - si $E_{0x} \neq E_{0y}$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$: $\dfrac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \dfrac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$: polarisation elliptique droite
  - si $E_{0x} \neq E_{0y}$ et $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$: $\dfrac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \dfrac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$: polarisation elliptique gauche



$\varphi = \pi/2$



$\varphi = 3\pi/2$