Planche n° 20. Limite d'une fonction en un point. Continuité en un point. Corrigé

Exercice n° 1

1) Soit A un réel strictement positif. Soit $x \in]5,+\infty[$. Alors, $\dfrac{3x-1}{x-5} \geqslant \dfrac{14}{x-5}$ puis

$$\frac{3x-1}{x-5} \geqslant A \Leftarrow \frac{14}{x-5} \geqslant A \Leftarrow 0 < x-5 \leqslant \frac{14}{A}.$$

Soit $\alpha = \dfrac{14}{A}$. α est un réel strictement positif tel que pour tout $x \in]5,+\infty[$, si $(0 <)x-5 \leqslant \alpha$, alors $f(x) \geqslant A$.

Maintenant, si A est un réel négatif ou nul, $\alpha = 1$ est un réel strictement positif tel que pour tout $x \in]5,+\infty[$, si $(0 <)x-5 \leqslant \alpha$, alors $f(x) \geqslant A$ (puisque pour tout $x > 5$, $f(x) > 0$).

On a montré que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists \alpha > 0/\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$, $(0 < x-5 \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A)$. Donc, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} \frac{3x-1}{x-5} = +\infty$.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Pour $x \neq 5$,

$$|f(x) - f(x_0))| = \left|\frac{3x-1}{x-5} - \frac{3x_0-1}{x_0-5}\right| = \frac{14|x-x_0|}{|x-5| \times |x_0-5|}.$$

Ensuite, pour $x \in \left[x_0 - \dfrac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \dfrac{|x_0-5|}{2}\right]$ ou encore si $|x-x_0| \leqslant \dfrac{|x_0-5|}{2}$, on a $|x-5| \geqslant \dfrac{|x_0-5|}{2}$ (faire un dessin). Ainsi,

$$\forall x \in \left[x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2}\right],\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{28}{(x_0-5)^2}|x-x_0|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha = \text{Min}\left\{\dfrac{|x_0-5|}{2}, \dfrac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28}\right\} (> 0)$. On a

$$\begin{aligned}
|x-x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| &\leqslant \frac{28}{(x_0-5)^2}|x-x_0| \text{ (car } |x-x_0| \leqslant \frac{|x_0-5|}{2}) \\
&\leqslant \frac{28}{(x_0-5)^2} \times \frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28} \text{ (car } |x-x_0| < \frac{(x_0-5)^2\varepsilon}{28 \times 2}) \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a monté que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0/\ (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}),\ (|x-x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon)$. f est donc continue en chaque point de $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Exercice n° 2

$\text{Min}(f,g) = \dfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ et $\text{Max}(f,g) = \dfrac{1}{2}(f-g+|f-g|)$ sont continues en x_0 en vertu de théorèmes généraux.

Exercice n° 3

Notons $\chi_{\mathbb{Q}}$ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$. Soit x_0 un réel. On note que

$$x_0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \chi_{\mathbb{Q}}\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$ existe, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \chi_{\mathbb{Q}}\left(x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$ existe et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \chi\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n \to +\infty} \chi\left(x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$ (l'une des deux limites valant 1 et l'autre valant 0) bien que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_0 + \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} = x_0$. Ainsi, pour tout réel $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'a pas de limite en x_0 et est donc discontinue en x_0.

Exercice n° 4

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 2n\pi$ et $v_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$. On a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty = \lim_{n \to +\infty} v_n$ mais $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sin(u_n) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sin(v_n) = 1$. Puisque $1 \neq 0$, on en déduit que la fonction $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin(u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin(v_n) = 1$. Puisque $1 \neq 0$, on en déduit que la fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

3) Pour tout réel non nul x, $\left|x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| = |x| \times \left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$. Puisque $|x|$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on en déduit que $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Ainsi, la fonction $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ a une limite réelle quand x tend vers 0 ou encore la fonction $x \mapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeante par continuité en 0.

Exercice n° 5

• Soit $x \in \mathbb{R}$.Si $x > 1$, $6x - 5 \geqslant 0$ et donc $f(x)$ existe. D'autre part si $x < 1$, $f(x)$ existe. Finalement f est définie sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

• Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $x - 1$ tend vers 0 et $\sqrt{6x-5} - b$ tend vers $1 - b$. Donc, si $b \neq 1$, la fonction n'a pas de limite réelle en 1 à droite. Si $b = 1$, pour $x > 1$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{6x-5} - 1}{x - 1} = \frac{6x - 5 - 1}{(x-1)\left(\sqrt{6x-5} + 1\right)} = \frac{6}{\sqrt{6x-5} + 1},$$

et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \dfrac{6}{2} = 3$. Finalement, f a une limite à droite en 1 si et seulement si $b = 1$ et dans ce cas, cette limite est égale à 3. Dorénavant, b est égal à 1.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = a$.
Donc, si $a \neq 3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$ et f n'a pas de limite quand x tend vers 1. Si par contre $a = 3$, f a une limite réelle quand x tend vers 1 ou encore f est prolongeable par continuité en 1.

En résumé, f est prolongeable par continuité en 1 si et seulement si $a = 3$ et $b = 1$. Le prolongement encore noté f est la fonction

$$f \ : \ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{3\left(e^{x-1} - 1\right)}{x - 1} \text{ si } x > 1 \\ 3 \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{\sqrt{6x-5} - 1}{x - 1} \text{ si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{3\left(e^{x-1} - 1\right)}{x - 1} \text{ si } x > 1 \\ \dfrac{6}{\sqrt{6x-5} + 1} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Exercice n° 6

Pour $x \in [0, 1]$, posons $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \setminus \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\} \\ 1 - x \text{ si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \\ 0 \text{ si } x = \dfrac{1}{2} \text{ et } \dfrac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

f est bien une application définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. De plus, si $x \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \setminus \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$, alors $f(f(x)) = f(x) = x$.
Si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$, alors $1 - x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ et donc $f(f(x)) = f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$.
Enfin, $f(f(0)) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et $f\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = f(0) = \dfrac{1}{2}$.

Finalement, $f \circ f = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ et f, étant une involution de $[0, 1]$, f est une permutation de $[0, 1]$.

Soit a un réel de $[0, 1]$. On note que $\lim\limits_{x \to a,\ x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} f(x) = 1 - a$ et $\lim\limits_{x \to a,\ x \in \mathbb{Q}} f(x) = a$. Donc, si f a une limite en a, nécessairement $1 - a = a$ et donc $a = \dfrac{1}{2}$. Ceci montre déjà que f est discontinue en tout réel de $[0, 1]$ distinct de $\dfrac{1}{2}$. D'autre part, si $a = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to a,\ x \in \mathbb{Q},\ x \neq a} f(x) = a = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et donc f est discontinue en tout point de $[0, 1]$.

Exercice n° 7

Donnons tout d'abord une expression plus explicite de $f(x)$ pour chaque réel x.

- Si $x > 1$, alors $\dfrac{1}{x} \in]0,1[$ et donc, $f(x) = 0$.
- Si $\exists p \in \mathbb{N}^* / \ x \in \left]\dfrac{1}{p+1}, \dfrac{1}{p}\right]$, $f(x) = px$.
- $f(0) = 1$ et d'autre part, $\forall p \in \mathbb{Z}^*$, $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = 1$.
- Si $x \leqslant -1$, alors $\dfrac{1}{x} \in [-1, 0[$ et donc, $f(x) = -x$.
- Enfin, si $\exists p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ tel que $x \in \left]\dfrac{1}{p+1}, \dfrac{1}{p}\right]$, alors $\dfrac{1}{p+1} < x \leqslant \dfrac{1}{p} (< 0)$ fournit, par décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$, $p \leqslant \dfrac{1}{x} < p+1 (< 0)$ et donc $f(x) = px$.

Etude en 0. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x}$ et donc $1 - x < f(x) \leqslant 1$ si $x > 0$ et $1 \leqslant f(x) < 1 - x$ si $x < 0$. Par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x) - 1| \leqslant |x|.$$

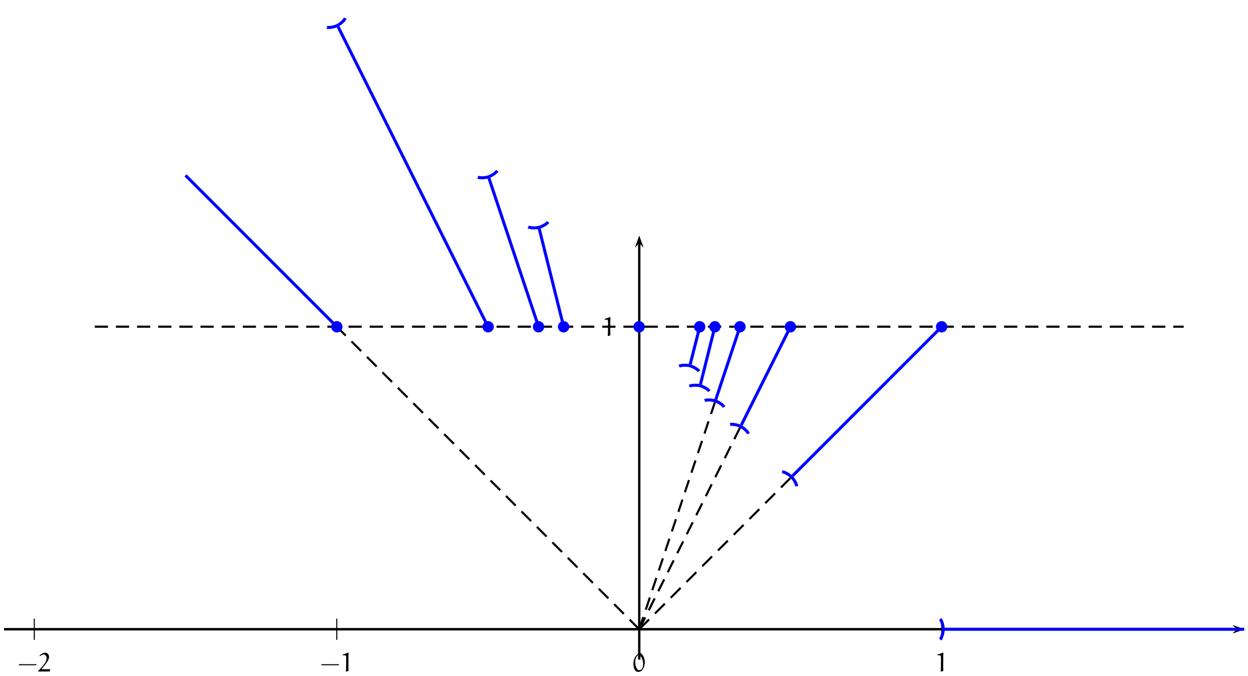
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et f est donc continue en 0.

f est affine sur chaque intervalle de la forme $\left]\dfrac{1}{p+1}, \dfrac{1}{p}\right]$ pour p élément de $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ et donc est continue sur ces intervalles et en particulier continue à gauche en chaque $\dfrac{1}{p}$. f est affine sur $]-\infty, -1]$ et aussi sur $]1, +\infty[$ et est donc continue sur ces intervalles. Il reste donc à analyser la continuité à droite en $\dfrac{1}{p}$, pour p entier relatif non nul donné. Mais,

$$f\left(\frac{1}{p}^+\right) = \lim_{x \to \frac{1}{p},\ x > \frac{1}{p}} (x(p-1)) = 1 - \frac{1}{p} \neq 1 = f\left(\frac{1}{p}\right).$$

f est donc discontinue à droite en tout $\dfrac{1}{p}$ où p est un entier relatif non nul donné.

Graphe de f **:**



Exercice n° 8

Soit T une période strictement positive de f. On note ℓ la limite de f en $+\infty$.
Soit x_0 un réel. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_0) = f(x_0 + nT)$ et quand n tend vers $+\infty$, puisque $T > 0$, on obtient :

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x + nT) = \lim_{X \to +\infty} f(X) = \ell.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ell$ et donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 9

Pour $x \neq 0$, posons $g(x) = \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$. f est définie sur un voisinage de 0 et donc il existe $a > 0$ tel que $]-a, a[\subset D_f$. Mais alors, $\left]-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right[\setminus \{0\} \subset D_g$.

Soit $x \in \left]-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right[\setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{2^{k+1}} g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Par suite, pour $x \in \left]-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right[\setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left|g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right| + \left|\frac{f\left(x/2^n\right)}{x}\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque par hypothèse, g tend vers 0 quand x tend vers 0,

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{a}{2}\right[\ /\ \forall X \in [-\alpha, \alpha],\ |g(X)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour $x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ et pour k dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{x}{2^k}$ est dans $[-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ et par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left|g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc, $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \left|\dfrac{f\left(x/2^n\right)}{x}\right|$. On a ainsi montré que

$$\forall x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right|.$$

Mais, à x fixé, $\dfrac{f\left(x/2^n\right)}{x}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, on peut choisir n tel que $\left|\dfrac{f\left(x/2^n\right)}{x}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, ce que l'on fait. On a alors $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 /\ \forall x \in D_f,\ \left(0 < |x| \leqslant \alpha \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon\right),$$

ce qui montre que (f est dérivable en 0 et que) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

