Formule de Stirling

Partie I: Formule de Wallis

On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

1. Montrer que la suite (I_n) est strictement décroissante et minorée
2. Montrer que $\forall n \geq 2$, on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$
3. En déduire I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles
4. Prouver que $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$
5. En déduire la formule de Wallis $\pi = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{4n} n!^4}{n(2n)!^2}$

Partie II: Formule de Stirling

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln\left(\dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}\right)$.
   (a) Montrer que $S_{n+1} - S_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$
   (b) En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel λ
   (c) Montrer que $n^n e^{-n}\sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} e^{\lambda} n!$
7. (a) A l'aide de 5, montrer que $\lambda = -\ln\sqrt{2\pi}$.
   (b) En déduire la formule de Stirling :
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Partie III: Développement asymptotique de $n!$

Soients $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} v_n$ deux séries à termes réels positifs, convergentes.

Pour tout entier n, on note $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

8. On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que $R_n \sim T_n$
9. En déduire que si $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, alors $R_n \sim \dfrac{1}{n}$
10. Appliquer ce qui précède à $u_n = 12(S_n - S_{n-1})$, et montrer que $\lambda - S_n \sim \dfrac{1}{12n}$
11. En déduire finalement que
$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Formule de Stirling

Partie I: Formule de Wallis

1. Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et tout n de $\mathbb{N}$:
$$0 < \sin t < 1 \Longrightarrow 0 < \sin^{n+1} t < \sin^n t$$
On en déduit par intégration de 0 à $\frac{\pi}{2}$:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < I_{n+1} < I_n$$
La suite (I_n) est donc strictement décroissante et minorée par 0.
2. On procède à une intégration par parties, pour tout $n \geqslant 2$:
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n-1} t \mathrm{d}t \\ &= \left[-\cos t \sin^{n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{n-2} t \mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\sin^{n-2} t\mathrm{d}t = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right) \end{aligned}$$
On en déduit : $\forall n \geqslant 0, \quad nI_n = (n-1)I_{n-2}$
3. — Calcul de I_{2n} :
La relation précédente donne $2nI_{2n} = (2n-1)I_{2(n-1)}$. On en déduit
$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}.\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdots\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.I_0$$
Or $I_0 = \frac{\pi}{2}$, donc $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$. Cette relation est valable pour $n = 0$
— Calcul de I_{2n+1} :
La relation 2 donne $(2n+1)I_{2n+1} = 2nI_{2n-1}$. On en déduit
$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}.\frac{2(n-1)}{2n-1)}\cdots\frac{2}{3}.I_1$$
Or $I_1 = 1$, donc $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Cette relation est valable pour $n = 0$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < I_{n+2} < I_{n+1} < I_n$ et donc $0 < \frac{I_{n+2}}{I_n} < \frac{I_{n+1}}{I_n} < 1$. Or $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+2}{n+1}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
On en déduit que $\frac{I_{n+1}}{I_n} \longrightarrow 1$, c'est-à-dire $I_{n+1} \sim I_n$
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n+1)(2n)!^2}\frac{2}{\pi} \sim \frac{2^{4n}(n!)^4}{n(2n)!^2}\frac{1}{\pi}$.
Puisque $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on obtient $\frac{2^{4n}(n!)^4}{n(2n)!^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$

Partie II: Formule de Stirling

6. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) - n - \ln(n!)$
$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - n - 1 - \ln\left((n+1)!\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + n + \ln(n!) \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\ &= \frac{1}{12n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Formule de Stirling

On a donc $S_{n+1} - S_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$

(b) On sait que la série télescopique $\sum (S_{n+1} - S_n)$ converge si, et seulement, si la suite (S_n) converge. Puisque la série $\sum (S_{n+1} - S_n)$ est convergente (par comparaison avec une série de Riemann), il en est de même de la suite (S_n). On pose $\lim S_n = \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Pour tout n de $S_n = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \dfrac{1}{n!}\right) = \ln\left(\dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}\right)$.

D'après ce qui précède : $\dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\lambda}$ et donc $n^n e^{-n}\sqrt{n} \sim e^{\lambda} n!$

7. L'égalité précédente donne $n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{-\lambda} \sim n!$ et donc aussi $(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{2n} e^{-\lambda} \sim (2n)!$.
On en déduit
$$\frac{2^{4n} n!^4}{n(2n)!^2} \sim \frac{2^{4n} n^{4n} e^{-4n} n^2 e^{-4\lambda}}{2n^{4n} e^{-4n} n e^{-2\lambda}} \sim \frac{e^{-2\lambda}}{2}$$
Puisque $\dfrac{2^{4n} n!^4}{n(2n)!^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$, on trouve $\dfrac{e^{-2\lambda}}{2} = \pi$ et donc $\lambda = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$

Partie III: Développement asymptotique de $n!$

8. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse $u_n - v_n = \circ(v_n)$. Il existe donc un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - v_n| \leqslant \varepsilon v_n$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$:
$$|R_n - T_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k - v_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \varepsilon T_n$$
Ce résultat signifie que $R_n - T_n = \circ(T_n)$, c'est-à-dire $R_n \sim T_n$

9. Supposons $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. Alors $u_n \sim \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. Ainsi :
$$R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$
Donc $R_n \sim \dfrac{1}{n}$.

10. On a bien $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. On en déduit $R_n \sim \dfrac{1}{n}$. Mais
$$\begin{aligned} R_n &= 12 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (S_k - S_{k-1}) = 12 \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} (S_k - S_{k-1}) \\ &= 12 \lim_{m\to+\infty} (S_m - S_n) = 12(\lambda - S_n) \end{aligned}$$
Donc $12(\lambda - S_n) \sim \dfrac{1}{n}$, puis $(\lambda - S_n) \sim \dfrac{1}{12n}$

11. On a $\lambda - S_n = \ln\left(\dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\right) = \dfrac{1}{12n} + \circ\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On en déduit
$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \exp\left(\frac{1}{12n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{12n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$
Soit
$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$