Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

: **Définition.** : **Résultat de cours.** : **Résultat pratique.** : **Astuce.** : **Démarche.** : **Exemple classique.** : **Attention.** : **Information**

Éléments propres

Éléments propres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- Soit $x \in E$. On dit que x est vecteur propre de u si $x \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé le spectre de u et noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.
- Soit $\lambda \in Sp(u)$. $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0_E\}$ appelé le sous-espace propre de u associé à λ

Caractérisation en dim finie

Si E est de dimension finie $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \text{ n'est pas injectif} \\ &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \text{ n'est pas surjectif} \\ &\Leftrightarrow (u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) \text{ n'est pas bijectif} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{rg}\,(u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) < n \\ &\Leftrightarrow \det(u - \lambda \cdot \mathrm{Id}_E) = 0 \end{aligned}$$

Éléments propres d'une matrice

Les éléments propres d'une matrice A sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé

$$u_A : \left\{ \begin{array}{ccc} M_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

On écrit A à la place de u_A

Polynôme caractéristique

E est de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition

- On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A = \det(X\mathrm{I_n} - \mathrm{A})$.
- On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme $\chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)$.

Endomorphisme induit

Si F est stable par u , alors $\chi_{u_F} | \chi_u$.

Plus généralement si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ tel que $\forall i \in [\![1,k]\!]$, F_i est stable par u, alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} \chi_{u_{F_i}}$

Spectre et polynôme caractéristique

$\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}\,,\ \chi_u(\lambda) = 0\}$

Ordre de multiplicité

La multiplicité d'une racine λ de χ_u est appelée l'ordre de multiplicité de λ, et ona: elle est noté $m(\lambda)$.

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$$

Polynôme minimal

Polynômes annulateurs et minimal

- Le noyau $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ du morphisme d'évaluation $P \longmapsto P(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On l'appelle l'idéal annulateur de u.
- On appelle polynôme annulateur de u tout élément de l'idéal annulateur;
- On appelle polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs.

Même définition pour les matrices

Théorème de décomposition des noyaux

Si $P_1, \ldots, P_k$ sont k polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$$\mathrm{Ker}\left[\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)(u)\right] = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,(P_i(u))$$

Si $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ un polynôme annulateur de u, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,(P_i(u))$

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit χ_u le polynôme caractéristique de u , alors $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
En conséquence $\pi_u | \chi_u$.

Diagonalisation

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.
- On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété

Si A est diagonalisable et $\Delta = P^{-1}AP$, alors les valeurs propres sont les éléments de la diagonale de Δ et la multiplicité de chacune est son nombre d'occurence dans cette diagonale.

Les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de A

Propriétés caractéristiques

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. u est diagonalisable.
2. E possède une base de vecteurs propres;
3. $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$;
4. $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = \dim E$;
5. χ_u est scindé et $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $\dim E_{\lambda_i} = m_i$.
6. π_u est scindé à racines simples.
7. u annule un polynôme scindé à racines simples.

En particulier si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.

Trigonalisation

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Définition

- u est dite trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.
- A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice T triangulaire supérieure.

Propriétés caractéristiques

Les quatres affirmations sont équivalentes :

1. u est trigonalisable.
2. χ_u est scindé.
3. u annule un polynôme scindé
4. π_u est scindé.

Corollaire

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

Toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Endomorphismes nilpotents

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$, avec $\dim E = n$.

Définition

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Ce vocabulaire se transpose aux matrices

Propriété caractéristique

- u est nilpotent $\Longleftrightarrow$ u est trigonalisable avec $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$
- A est nilpotente $\Longleftrightarrow$ elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

Décomposition spéctrale

Décomposition spéctrale

Si u est diagonalisable où E est de dim finie, avec $Sp(u) = \{\lambda_i, i \in [\![1,k]\!]\}$.
Pour $i \in [\![1,k]\!]$, on pose p_i la projection de E sur $E_{\lambda_i}(u)$ (de direction $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} E_{\lambda_j}(u)$). Alors

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$$

et

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = \sum_{i=1}^{k} P(\lambda_i) p_i$$

Contact Information

Web www.elamdaoui.com
Email elamdaoui@gmail.com
Phone 06 62 30 38 81