DNS

Sujet

Calculs de base en ondes électromagnétiques

Toutes les ondes envisagées sont polarisées selon $\vec{u_x}$.

A. Une onde

Une onde électromagnétique sinusoïdale transversale se propage, dans le vide, dans le sens croissant de l'axe des z , $\underline{\vec{E}}(z,t)=\underline{\vec{E}}_0 \exp j(\omega t-k_0 z)$ avec $\underline{\vec{E}}_0=E_0 \exp(-j\varphi_0)\ \vec{u_x}$. On suppose connus: $E_0, \varphi_0, \omega, c$.

1. Quelle est la phase retard $\varphi(M)$ de l'onde en un point M de cote z ?

2. Retrouver l'expression de $k_0>0$ en fonction de ω .

3. Retrouver l'expression de $\underline{\vec{B}}(z,t)$.

B. Réflexion sur un conducteur parfait

A une cote z , perpendiculairement à l'axe z , on a placé un plan infiniment conducteur. On indique que le champ électrique dans le vide (continuité de la composante tangentielle du champ électrique) doit s'annuler au niveau du plan infiniment conducteur. Il y a alors création d'une onde réfléchie. L'onde incidente est $\underline{\vec{E}}_0 \exp j(\omega t-k_0 z)$ (voir ci-dessus).

1) Métal parfait en z=0

On suppose que le plan se trouve en $z=0$. On cherche la solution en complexes sous la forme: $\underline{\vec{E}}(z,t)=\underline{\vec{E}}_0 \exp j(\omega t-k_0 z)+\underline{\vec{E}}'_0 \exp j(\omega t+k_0 z)$ (avec $z<0$).

4. Déterminer $\underline{\vec{E}}'_0$ en utilisant la condition aux limites.

5. En déduire le déphasage retard $\Delta\varphi=\varphi'(M)-\varphi(M)$ de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente en un point M de cote z . Commenter les deux termes du résultat.

6. Quel est la valeur du coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r}_E$ pour le champ $\vec{E}$ défini comme

$$\underline{r}_E = \left(\frac{\underline{E}_{réfléchi}}{\underline{E}_{incident}} \right)_{au\ niveau\ du\ plan}$$

7. Donner l'expression du champ magnétique de l'onde réfléchie. Déterminer la valeur du coefficient de réflexion $\underline{r}_B$ pour le champ $\vec{B}$.

8. Donner l'expression simplifiée au maximum de $\underline{\vec{E}}(z,t)$ et celle de $\underline{\vec{B}}(z,t)$. Ces expressions doivent faire intervenir $\cos(k_0 z)$ ou $\sin(k_0 z)$. Donner aussi les expressions réelles des deux champs. Quel est le déphasage de $\vec{B}(z,t)$ par rapport à $\vec{E}(z,t)$.

9. Donner le position des plans nodaux de $\vec{E}$ (plans pour lesquels $\vec{E}=\vec{0}$).

2) Métal parfait en z=L

On reprend la même étude mais en supposant cette fois que le plan se trouve non pas en $z=0$ mais en $z=L$. On cherche toujours la solution en complexes sous la forme: $\underline{\vec{E}}(z,t)=\underline{\vec{E}}_0 \exp j(\omega t-k_0 z)+\underline{\vec{E}}'_0 \exp j(\omega t+k_0 z)$ (avec $z<L$).

10. Déterminer $\underline{\vec{E}}'_0$.

11. En déduire le déphasage retard $\Delta\varphi=\varphi'(M)-\varphi(M)$.

12. Déterminer $\underline{r}_E$ et $\underline{r}_B$.

13. Donner les expressions simplifiées au maximum de $\vec{E}(z,t)$ et $\vec{B}(z,t)$ .Ces expressions doivent faire intervenir $\cos(k_0(L-z))$ ou $\sin(k_0(L-z))$.

14. Déterminer en partant de $\vec{E}(z,t)$ la position des plans nodaux de $\vec{E}$.

C. Réflexion et transmission

On envisage cette fois le cas de l'onde $\underline{\vec{E}}_0 \exp j(\omega t-k_0 z)$ arrivant sur un diélectrique (exemple: verre) occupant l'espace $z>0$ d'indice n connu. Dans ce cas, il apparaît une onde réfléchie dans le vide $\underline{\vec{E}}'_0 \exp j(\omega t+k_0 z)$ et une onde transmise dans le diélectrique $\underline{\vec{E}}''_0 \exp j(\omega t-n k_0 z)$.

15. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, écrire le champ magnétique $\vec{B}''$ dans le diélectrique connaissant le champ électrique $\vec{E}''$.

Le champs électrique tangentiel et le champ magnétique doivent être continus à l'interface en $z=0$ .On suppose connus: $\underline{E_0}, \omega, c, n$.

16. En écrivant ces relations de continuité, on obtient deux relations entre $\underline{r}_E$ et $\underline{t}_E$ (coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour $\vec{E}$). Déterminer $\underline{r}_E$ et $\underline{t}_E$. Déterminer aussi $\underline{r}_B$ et $\underline{t}_B$.

17. En se rappelant que l'amplitude d'un nombre complexe $\underline{z}$ s'obtient plus simplement en faisant $|\underline{z}|=\sqrt{\underline{z}\,\underline{z}*}$ où $\underline{z}*$ désigne le complexe conjugué, déterminer l'amplitude A (réel positif) du champ $\vec{E}$ dans le vide en fonction de z .

18. On pose $Y=A/2E_0$ et $X=z/\lambda_0$. Tracer la courbe $Y(X)$ pour $n=1{,}50$. Commenter.

Réponses

1) $$\underline{\vec{E}}(z,t) = \underline{E_0} \exp j(\omega t - k_0 z)\ \vec{u_x}$$
$$= E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 z)\ \vec{u_x}$$
$$= E_0 \exp j(\omega t - \varphi(z))\ \vec{u_x}$$

donc $$\boxed{\varphi(z) = \varphi_0 + k_0 z}$$

On retrouve : $$\varphi(M) = \varphi(0) + \vec{k}\,\overrightarrow{OM}$$
$$\begin{array}{c|c|c} \vec{u_z} & k_0 & z \end{array}$$

---

2) L'équation de propagation (dans le vide)
$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = 0$$
$$/\vec{u_x} \quad \Delta\underline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0$$

permet de retrouver l'équation de dispersion.

Ici $$\vec{\nabla}\ \begin{array}{|l} 0 \\ 0 \\ -jk_0 \end{array}_{\vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

donc
$$(-jk_0)^2\underline{E} - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2\underline{E} = 0$$
$$-k_0^2\underline{E} - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)\underline{E} = 0$$
$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$
$$\boxed{k_0 = \frac{\omega}{c}}$$

---

3) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday
$$\overrightarrow{\text{rot}\,E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\wedge\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{\vec{B}}$$
$$-jk_0\vec{u_z}\wedge\underline{E}\,\vec{u_x} = -j\omega\,\underline{\vec{B}}$$
$$\underline{\vec{B}} = \frac{k_0}{\omega}\,\underline{E}\,\vec{u_y}$$
$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{1}{c}E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 z)\vec{u_y}}$$

---

4) $\underline{\vec{E}}_{(z,t)} = \underline{\vec{E}_o} \exp j(\omega t - k_o z) + \underline{\vec{E}'_o} \exp j(\omega t + k_o z)$

doit être nul en $z = 0$

$$\vec{0} = \underline{\vec{E}_o} \exp j(\omega t) + \underline{\vec{E}'_o} \exp j(\omega t)$$

soit $\boxed{\underline{\vec{E}'_o} = - \underline{\vec{E}_o}}$

$$= - E_o \exp(-j\varphi_o) \vec{u_x}$$

---

5) $\underline{\vec{E}}_{(z,t)} = E_o \exp j(\omega t - \varphi_o - k_o z) \vec{u_x}$
$- E_o \exp j(\omega t - \varphi_o + k_o z) \vec{u_x}$

ou :

$= E_o \exp j(\omega t - \varphi_o - k_o z) \vec{u_x}$
$+ E_o \exp j(\omega t - \varphi_o + k_o z - \pi) \vec{u_x}$

donc :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_{(M)} = \varphi_o + k_o z \\ \varphi'_{(M)} = \varphi_o - k_o z + \pi \end{array} \right.$$

$$\boxed{\varphi'_{(M)} - \varphi_{(M)} = -2 k_o z + \pi}$$

Le retard de l'onde réfléchie se décompose en deux :

* $k_o\, 2|z|$: à cause de la différence de chemin. L'onde réfléchie a parcouru $2|z|$ en plus. ($|z| = -z$)
* π : déphasage supplémentaire dû à la réflexion.

---

6) $$\underline{r_E} = \left(\frac{-E_o \exp j(\omega t - \varphi_o + k_o z)}{E_o \exp j(\omega t - \varphi_o - k_o z)} \right)_{z=0}$$

$$\boxed{\underline{r_E} = -1}$$

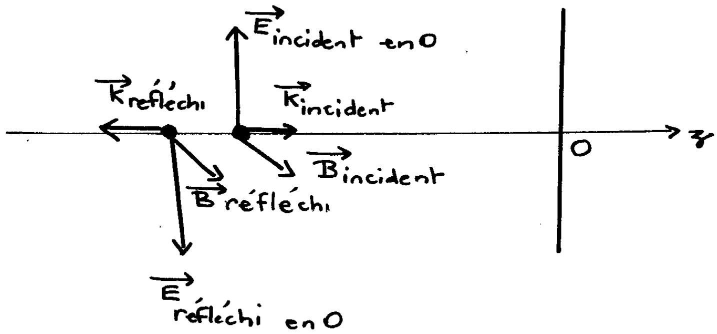
cf : à la réflexion, l'amplitude est ici conservée mais il y a déphasage de π pour E

---

7) Champ magnétique réfléchi :

$$\underline{\vec{B}}' = \frac{-k_0 \vec{u_z} \wedge \underline{E}' \vec{u_x}}{\omega}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}}' = \frac{1}{c} E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 + k_0 z) \vec{u_y}}$$



(champs en O)

$$\underline{r}_B = \left(\frac{\frac{1}{c} E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 + k_0 z)}{\frac{1}{c} E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 z)} \right)_{z=0}$$

$$\boxed{\underline{r}_B = +1}$$

cf : à la réflexion, l'amplitude est conservée
il n'y a pas de déphasage pour B

---

8) $$\underline{E} = E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0) \underbrace{\left[\exp -jk_0 z - \exp jk_0 z\right]}_{-2j \sin k_0 z}$$

$$\boxed{E = 2 E_0 \sin(k_0 z) \sin(\omega t - \varphi_0)}$$

$$\underline{B} = \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - \varphi_0) \underbrace{\left[\exp -jk_0 z + \exp jk_0 z\right]}_{2 \cos k_0 z}$$

$$\boxed{B = \frac{2E_0}{c} \cos(k_0 z) \cos(\omega t - \varphi_0)}$$

$$\downarrow$$

$$\sin(\omega t - \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

le champ magnétique est en avance de $\frac{\pi}{2}$ (quadrature avance) par rapport au champ E.

---

9) E est nul pour $\sin k_0 z = 0$

$$k_0 z = m\pi$$

$$z = m \frac{\pi}{k_0}$$

$$\boxed{z = m \frac{\pi c}{\omega}}$$

(Ici $m = 0, -1, -2, -3 \ldots$)

(avec $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, $z = m \frac{\lambda_0}{2}$)

---

10) $$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} \exp j(\omega t - k_0 z) + \underline{\vec{E}'_0} \exp j(\omega t + k_0 z)$$

doit être nul en $z = L$

$$\vec{0} = \underline{\vec{E_0}} \exp -j k_0 L + \underline{\vec{E}'_0} \exp j k_0 L$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}'_0} = -\underline{\vec{E_0}} \exp -2 j k_0 L}$$

---

11) $$\underline{E} = E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 z) - E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 + k_0 z - 2 k_0 L)$$

$$= E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 z) + E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 (2L - z) - \pi)$$

donc :

$$\varphi(M) = \varphi_0 + k_0 z$$

$$\varphi'(M) = \varphi_0 + k_0 (2L - z) + \pi$$

(l'onde incidente parcourt z
l'onde réfléchie parcourt $2L - z$)

$$\boxed{\varphi'(M) - \varphi(M) = \underbrace{k_0 \, 2(L - z)}_{\text{cf différence de chemin}} \underbrace{+\pi}_{\text{cf réflexion}}}$$

---

12) $$\underline{r}_E = \left(\frac{-E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 (2L - z))}{E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 z)} \right)_{z = L}$$

$$\boxed{\underline{r}_E = -1}$$

$$\underline{B} = \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 z) + \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0(2L - z))$$

$$\boxed{\underline{r}_B = +1}$$

on retrouve, bien entendu, les mêmes coefficients de réflexion.

---

13)

$$\begin{aligned}\underline{E} &= E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0) \left[\exp(-jk_0 z) - \exp(-jk_0(2L-z))\right] \\ &= E_0 \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 L) \underbrace{\left[\exp jk_0(L-z) - \exp -jk_0(L-z)\right]}_{2j \sin k_0(L-z)}\end{aligned}$$

$$\boxed{E = -2E_0 \sin k_0(L-z) \sin(\omega t - k_0 L - \varphi_0)}$$

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - \varphi_0) \left[\exp(-jk_0 z) + \exp(-jk_0(2L-z))\right] \\ &= \frac{E_0}{c} \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 L) \underbrace{\left[\exp jk_0(L-z) + \exp -jk_0(L-z)\right]}_{2 \cos k_0(L-z)}\end{aligned}$$

$$\boxed{B = 2\frac{E_0}{c} \cos k_0(L-z) \cos(\omega t - k_0 L - \varphi_0)}$$

---

14) E est nul pour $\sin k_0(L-z) = 0$

$$k_0(L-z) = m\pi$$

$$\boxed{z = L - \frac{m\pi c}{\omega}}$$

$$= L - m\frac{\lambda_0}{2}$$

$$(m = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

---

remarque : questions 8 et 13

Connaissant E on peut trouver B directement en utilisant

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\underline{E}} = -j\omega \vec{\underline{B}}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

donc

$$\underline{B} = \frac{j}{\omega} \frac{\partial \underline{E}}{\partial z}$$

Par exemple : 13)

$$\underline{E} = 2jE_0 \sin k_0(L-z) \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 L)$$

donc

$$\underline{B} = -2\frac{E_0}{\omega}(-k_0)\cos k_0(L-z) \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 L)$$

$$= 2\frac{E_0}{c} \cos k(L-z) \exp j(\omega t - \varphi_0 - k_0 L)$$

---

15)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{\underline{E}''} = -\frac{\partial \overrightarrow{\underline{B}''}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\underline{E}''} = -j\omega \overrightarrow{\underline{B}''}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -jnk_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{E}'' \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

donc $\overrightarrow{\underline{B}''} = \underline{B}''\, \overrightarrow{u_y}$ avec

$$\underline{B}'' = n\frac{k_0}{\omega}\underline{E}''$$

$$= \frac{n}{c}\underline{E}''$$

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{B}''} = \frac{n}{c}\underline{E}_0'' \exp j(\omega t - nk_0 z)\, \overrightarrow{u_y}}$$

---

16) En $z=0$, continuité de $\overrightarrow{E}$ tangentiel, donc selon $\overrightarrow{u_x}$:

$$\underline{E} + \underline{E}' = \underline{E}''$$

$$\underline{E}_0 \exp j\omega t + \underline{E}_0' \exp j\omega t = \underline{E}_0'' \exp j\omega t$$

$$\boxed{1 + \underline{r}_E = \underline{t}_E}$$

et continuité de $\overrightarrow{B}$, donc selon $\overrightarrow{u_y}$ (en $z=0$)

$$\frac{\underline{E}}{c} - \frac{\underline{E}'}{c} = n\frac{\underline{E}''}{c}$$

$$\boxed{1 - \underline{r}_E = n\,\underline{t}_E}$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{t}_E &= \frac{2}{n+1} \\ \underline{r}_E &= -\frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}}$$

Puis
$$\underline{t}_B = \left(\frac{\frac{n\underline{E}''}{c}}{\frac{\underline{E}}{c}}\right)_{z=0}$$

$$= n\,\underline{t}_E$$

$$\boxed{\underline{t}_B = \frac{2n}{n+1}}$$

$$\underline{r}_B = \left(\frac{-\frac{\underline{E}'}{c}}{\frac{\underline{E}}{c}}\right)_{z=0}$$

$$= -\underline{r}_E$$

$$\boxed{\underline{r}_B = \frac{n-1}{n+1}}$$

---

17) Dans le vide

$$\underline{E} = \underline{E_0}\exp j(\omega t - k_0 z) + \underline{E_0'}\exp j(\omega t + k_0 z)$$
$$= \underline{E_0}\exp j(\omega t - k_0 z) + \underline{r}_E\,\underline{E_0}\exp j(\omega t + k_0 z)$$
$$= \underline{E_0}\exp(j\omega t)\,\left[\exp(-jk_0 z) + \underline{r}_E\exp(jk_0 z)\right]$$

$$\underline{E}\,\underline{E}^* = \underline{E_0}\exp(j\omega t)\,\left[\exp(-jk_0 z) + \underline{r}_E\exp(jk_0 z)\right]$$
$$\times\,\underline{E_0}^*\exp(-j\omega t)\,\left[\exp(jk_0 z) + \underline{r}_E^*\exp(-jk_0 z)\right]$$

$$= E_0^2\,\left(1 + |\underline{r}_E|^2 + \underline{r}_E\exp 2jk_0 z + \underline{r}_E^*\exp -2jk_0 z\right)$$
$$= E_0^2\,\left(1 + |\underline{r}_E|^2 + 2\,\mathcal{R}_e\left(\underline{r}_E\exp 2jk_0 z\right)\right)$$

Ici $\underline{r}_E$ est réel noté r

$$= E_0^2\,\left(1 + r^2 + 2r\cos 2k_0 z\right)$$

$$\boxed{A = E_0\sqrt{1 + r^2 + 2r\cos 2k_0 z}}$$

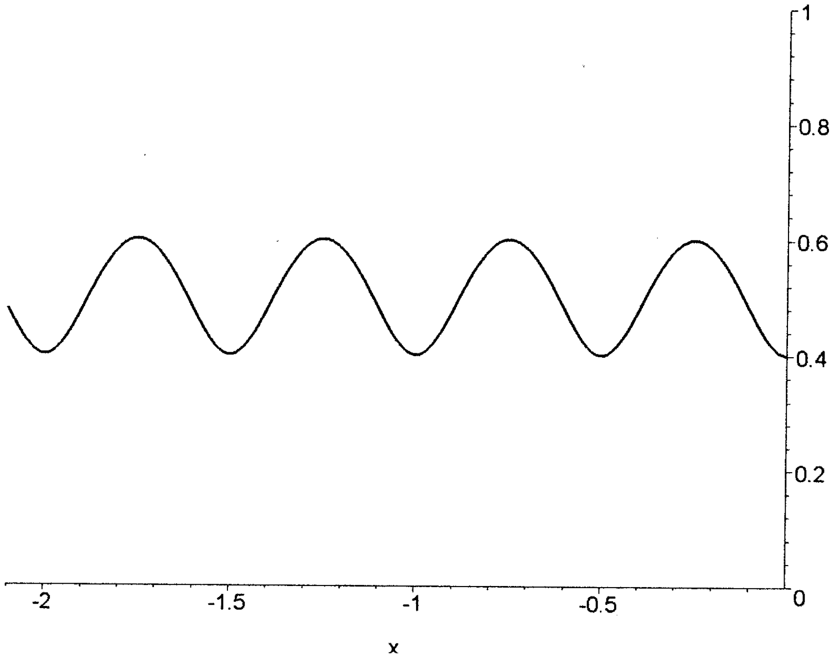
---

18) A.N. $n = 1{,}5$

$r = -0{,}2$

$$A = \sqrt{1{,}04 - 0{,}4\cos\frac{4\pi z}{\lambda_0}}\;E_0$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{1{,}04 - 0{,}4\cos(4\pi x)}$$



Les noeuds restent à la même position mais l'amplitude n'y est plus nulle. Elle est seulement minimale.