SESSION 2020

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Préliminaires

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\binom{2n}{n}$ est le coefficient de X^n dans l'expression développée de $(X+1)^{2n}$.

Puisque $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right)$, ce coefficient est aussi égal à $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2) Formule de **Stirling** : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$. Par suite,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}(2\pi n)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

3) Soit $\alpha \in]0,1[$. Puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue positive et décroissante sur $]0,+\infty[$, la série de terme général $\frac{1}{k^\alpha} - \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge (comparaison série intégrale). En notant S sa somme, on a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} &\underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha} + S + o(1)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \int_1^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha} + S + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + S + o(1)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + o(n) \text{ (car } 1-\alpha > 0 \text{ et donc } (n+1)^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Pour $k \geqslant 1$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$ et le théorème des gendarmes montre que $k^\alpha\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha} \underset{k\to+\infty}{\to} 1$ ou encore $\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^\alpha}$. D'après la règle de l'équivalence des restes à l'ordre n de séries à termes positifs convergentes,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha} = \int_{n+1}^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \text{ (car } \alpha > 1)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

4) Soit $x \geqslant 2$. Les deux fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ sont de classe C^1 sur le segment $[2,x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_2^x\frac{dt}{\ln(t)} = \int_2^x 1 \times \frac{1}{\ln(t)}\,dt = \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_2^x - \int_2^x t\left(-\frac{1/t}{(\ln(t))^2}\right)\,dt = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x\frac{dt}{(\ln(t))^2}.$$

Ensuite, $\dfrac{1}{(\ln(t))^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$ avec $\dfrac{1}{(\ln(t))^2} > 0$ et $\dfrac{1}{\ln(t)} > 0$ et de plus, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{(\ln(t))^2}\,dt$ diverge car $\dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{t}$ en $+\infty$. D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \underset{x\to+\infty}{=} o(I(x)).$$

Ainsi, $I(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)} + o(I(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}$ puisque $\dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc,

$$I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}.$$

5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. En particulier, pour $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n.$$

Ensuite, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+(n-1)\right)}{n!} \\
&= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}{2^n n!} = \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2)2^n n!} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$. Donc,

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.$$

B. Marches aléatoires, récurrence

6) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = P(S_n = 0_d)$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $b_n = P(R = n)$ et $c_n = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leqslant |c_n|$ et $|b_n| \leqslant |c_n|$. Donc, $R_a \geqslant R_c = 1$ et $R_b \geqslant R_c = 1$. Ainsi, les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En particulier, F et G sont définies sur $]-1,1[$ au moins.

La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence et $]-1,1[$ est contenu dans chacun des intervalles ouverts de convergence des séries entières définissant F et G. Donc, F et G sont de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

$(\{R = n\})_{n\in\mathbb{N}^*} \cup (\{R = +\infty\})$ est un système complet d'événements. La série numérique de terme général $P(R = n)1^n = b_n$ converge et a pour somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(R = n) = 1 - P(R = +\infty) = P(R \neq +\infty)$. Donc, $G(1)$ existe dans $\mathbb{R}$ et $G(1) = P(R \neq +\infty)$. La série numérique de terme général $P(R = n)(-1)^n = (-1)^n b_n$ est absolument convergente et en particulier convergente. Donc, $G(-1)$ existe dans $\mathbb{R}$. Finalement, G est définie sur $[-1,1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$, posons $g_n(x) = P(R = n)x^n$ de sorte que $G = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$,

$$|g_n(x)| = P(R = n)|x|^n \leqslant P(R = n)$$

et donc $\|g_n\|_{\infty,[-1,1]} \leqslant P(R = n)$. On en déduit que la série de terme général $\|g_n\|_{\infty,[-1,1]}$ converge. Par suite, la série de fonctions de terme général g_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[-1,1]$. Ainsi,

- chaque fonction g_n est continue sur $[-1,1]$,
- la série de fonctions de terme général g_n converge uniformément vers G sur $[-1,1]$.

Donc, la fonction G est continue sur $[-1,1]$.

7) Soient k et n deux entiers naturels non nuls tels que $k \leqslant n$.

$$P\left((S_n = 0_d) \cap (R = k)\right) = P\left((S_1 \neq 0_d) \cap (S_2 \neq 0_d) \ldots \cap (S_{k-1} \neq 0_d) \cap (S_k = 0_d) \cap (S_n - S_k = 0_d)\right).$$

D'après le lemme des coalitions, les variables $(S_1, \ldots, S_k) = (X_1, X_1 + X_2, \ldots, X_1 + \ldots + X_k)$ (qui est un k-uplet de variables) et $S_n - S_k = X_{k+1} + \ldots + X_n$ sont indépendantes. Donc

$$\begin{aligned} P\left((S_n = 0_d) \cap (R = k)\right) &= P\left((S_1 \neq 0_d) \cap (S_2 \neq 0_d) \ldots \cap (S_{k-1} \neq 0_d) \cap (S_k = 0_d)\right) P\left(S_n - S_k = 0_d\right) \\ &= P(R = k) P\left(S_n - S_k = 0_d\right). \end{aligned}$$

Puisque les variables X_i, $i \in \mathbb{N}^*$, ont mêmes lois et sont mutuellement indépendantes, $P\left(X_{k+1} + \ldots + X_n = 0_d\right) = P\left(X_1 + \ldots + X_{n-k} = 0_d\right) = P\left(S_{n-k} = 0_d\right)$ et donc

$$P\left((S_n = 0_d) \cap (R = k)\right) = P(R = k) P\left(S_{n-k} = 0_d\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $k \in [\![n+1, +\infty]\!]$, l'événement $(S_n = 0_d) \cap (R = k)$ est vide et donc $P\left((S_n = 0_d) \cap (R = k)\right) = 0$. Par suite,

$$\begin{aligned} P\left(S_n = 0_d\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left((S_n = 0_d) \cap (R = k)\right) + P\left((S_n = 0_d) \cap (R = +\infty)\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left((S_n = 0_d) \cap (R = k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(R = k) P\left(S_{n-k} = 0_d\right). \end{aligned}$$

8) Avec les notations de la question 6, on a donc $a_0 = P\left(S_0 = 0_d\right) = 1$, $b_0 = P(R = 0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

En effectuant le produit de Cauchy sur $]-1, 1[$ des deux séries entières définissant F et G (dont les rayons sont supérieurs ou égaux à 1), on obtient pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} 1 + F(x)G(x) &= 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k}\right) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = F(x). \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x \in]-1, 1[, \ F(x) = 1 + F(x)G(x).$$

Pour $x \in]-1, 1[$, on a encore $F(x)(1 - G(x)) = 1$ (de sorte que $1 - G(x) \neq 0$) puis $F(x) = \dfrac{1}{1 - G(x)}$. La fonction G est continue en 1. Donc, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} G(x) = G(1) = P(R \neq +\infty)$ et d'autre part, pour $x \in [0, 1[$, $G(x) \leqslant G(1)$. Donc, si $P(R \neq +\infty) < 1$, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x) = \frac{1}{1 - P(R \neq +\infty)} = \frac{1}{P(R = +\infty)}$ et si $P(R \neq +\infty) = 1$, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x) = +\infty$.

9) Pour $x \in]-1, 1[$, posons $H(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$. Soit $(x, y) \in [0, 1[^2$ tel que $x \leqslant y$. Puisque la suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est positive, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k x^k \leqslant c_k y^k$ puis en sommant, on obtient $H(x) \leqslant H(y)$. La fonction H est donc croissante sur $[0, 1[$. On en déduit que la fonction H a une limite ℓ en 1 à gauche, réelle ou infinie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0, 1[$, $H(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. Quand x tend vers 1, on obtient $\ell \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k$ (*). Cette inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque les c_k sont des réels positifs et que la série de terme général c_k diverge, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k = +\infty$. Quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient $\ell \geqslant +\infty$ et donc $\ell = +\infty$. On a montré que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} H(x) = +\infty$.

10) On applique le résultat précédent à la série de terme général $a_n = \mathsf{P}(S_n = 0_d)$ qui est à termes positifs et à la fonction $H = F$. D'après la question précédente, si la série de terme général a_n, $n \in \mathbb{N}$, diverge, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x) = +\infty$ et donc $\mathsf{P}(R \neq +\infty) = 1$ d'après la question 8.

Si la série de terme général a_n, $n \in \mathbb{N}$, converge, la même démonstration que celle de la question 6 pour la fonction G montre que F est définie et continue sur $[-1, 1]$. En particulier, F a une limite réelle en 1 et donc $\mathsf{P}(R \neq +\infty) \neq 1$ d'après la question 8. En résumé, la série de terme général $\mathsf{P}(S_n = 0_d)$ diverge si et seulement si $\mathsf{P}(R \neq +\infty) = 1$.

11) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, $(Y_i = 1) = \bigcap\limits_{k=0}^{i-1} (S_i - S_k \neq 0_d) = \bigcap\limits_{k=0}^{i-1} (X_{k+1} + \ldots + X_i \neq 0_d)$ et $(R > i) = \bigcap\limits_{k=1}^{i} (S_k = 0_d)$ $= \bigcap\limits_{k=1}^{i} (X_1 + \ldots + X_k \neq 0_d)$.

Maintenant, les deux i-uplets de variables $(X_i, X_i + X_{i-1}, \ldots, X_i + X_{i-1} + \ldots + X_1)$ et $(X_1, X_1 + X_2, \ldots, X_1 + X_2 + \ldots + X_i)$ ont la même loi car, les X_i étant deux à deux indépendantes et de mêmes lois, la probabilité d'un événement du type $\{(X_i, X_i + X_{i-1}, \ldots, X_i + X_{i-1} + \ldots + X_1) = (a_1, a_2, \ldots, a_i)\} = \{(X_i, X_{i-1}, \ldots, X_1) = (a_1, a_2 - a_1, \ldots)\}$ et la probabilité d'un événement du type $\{(X_1, X_1 + X_2, \ldots, X_1 + X_2 + \ldots + X_i) = (a_1, a_2, \ldots, a_i)\}$ s'expriment comme la même somme de produits de probabilités du type $\mathsf{P}(X = a)$. En particulier,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(Y_i = 1) &= \mathsf{P}(X_i \neq 0_d,\ X_i + X_{i-1} \neq 0_d, \ldots, X_i + X_{i-1} + \ldots + X_1 \neq 0_d) \\ &= \mathsf{P}(X_1 \neq 0_d,\ X_1 + X_2 \neq 0_d, \ldots, X_1 + X_2 + \ldots + X_i \neq 0_d) = \mathsf{P}(R > i). \end{aligned}$$

Ensuite, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $E(Y_i) = 0 \times \mathsf{P}(Y_i = 0) + 1 \times \mathsf{P}(Y_i = 1) = \mathsf{P}(Y_i = 1) = \mathsf{P}(R > i)$. Puisque $N_n = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$, par linéarité de l'espérance,

$$E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(R > i).$$

12) La suite $((R > i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante, la suite $(\mathsf{P}(R > i))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et

$$\lim_{i \to +\infty} \mathsf{P}(R > i) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (R > i)\right) = \mathsf{P}(R = +\infty).$$

Mais alors, d'après le lemme de Césaro, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(R > i) = \mathsf{P}(R = +\infty)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{E(N_n)}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(R > i)\right) = \mathsf{P}(R = +\infty)$. On a montré que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(N_n)}{n} = \mathsf{P}(R = +\infty).$$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

13) Modulo 2, on a $X_k \equiv 1$ puis $S_{2n+1} \equiv 2n + 1 \equiv 1$. Dit autrement, S_{2n+1} ne prend que des valeurs impaires et ne peut donc être égal à 0 qui est pair. $(S_{2n+1} = 0)$ est l'événement impossible et donc $\mathsf{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$.

$S_{2n} = 0$ si et seulement n variables X_k prennent la valeur 1 et les n autres prennent la valeur -1. Puisque les variables X_k sont indépendantes, la probabilité d'un événement du type $(X_1, \ldots, X_{2n}) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$, où n des ε_i sont égaux à 1 et les n autres à -1, est $p^n q^n = (pq)^n$.

Enfin, il y a $\dbinom{2n}{n}$ façons de choisir l'emplacement des n nombres 1 dans $2n$ emplacements et donc

$$\mathsf{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} (pq)^n.$$

14) Soit $x \in]-1, 1[$. Alors $0 \leqslant 4pqx^2 < 4pq = 4p(1 - p) = -(2p - 1)^2 + 1 \leqslant 1$ puis, d'après la question 5,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(S_n = 0\right) x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(S_{2n} = 0\right) x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \left(pqx^2\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \left(4pqx^2\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}.
\end{aligned}$$

puis d'après la question 8, $G(x) = 1 - \dfrac{1}{F(x)} = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}$ ce qui reste vrai pour $x = \pm 1$ par continuité de G sur $[-1,1]$. Donc,

$$\forall x \in [-1,1],\ G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}.$$

En tenant compte de $p - q = p - (1-p) = 2p - 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
P(R = +\infty) &= 1 - P(R \neq +\infty) = 1 - G(1) = \sqrt{1-4pq} = \sqrt{-4p(1-p)+1} = \sqrt{4p^2-4p+1} = \sqrt{(2p-1)^2} \\
&= |2p-1| = |p-q|.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $x \in]-1,1[$, $G(x) = 1 - \left(1-4pqx^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left(-4pqx^2\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left(4pqx^2\right)^n$. De plus, $(-1)^0 \dbinom{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$ et pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
(-1)^{n-1} \binom{\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} \\
&= \frac{(2n-3)\times(2n-5)\times\ldots\times 3\times 1}{2^n n!} = \frac{(2n-2)\times(2n-3)\times(2n-4)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{2^{n-1}(n-1)!2^n n!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} = \frac{n}{(2n)(2n-1)2^{2n-1}} \times \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(2n-1)}
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$. Donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(2n-1)} \left(4pqx^2\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}(pq)^n}{2n-1} x^{2n}.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(R = 2n+1) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(R = 2n) = \frac{\binom{2n}{n}(pq)^n}{2n-1}.$$

15) On suppose que $p = q = \dfrac{1}{2}$. Les questions 12 et 14 montrent déjà que $E\left(N_n\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$. D'après la question 2,

$$P(R = 2n) = \frac{\dbinom{2n}{n}}{4^n(2n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{4^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{4^n(2n)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}.$$

Par suite, d'après de l'équivalence des restes à l'ordre n des séries à termes positifs convergentes et d'après la question 3,

$$\begin{aligned}
P(R > 2i) &= \sum_{n=i+1}^{+\infty} P(R = 2n) \\
&\underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=i+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{i}} \\
&\underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2i}}.
\end{aligned}$$

Ensuite, $P(R > 2i+1) = P(R > 2i) \underset{i \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2i}} \underset{i \to +\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2i+1}}$ et finalement

$$P(R > i) \underset{i \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{i}}.$$

Mais alors, d'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes et d'après la question 3,

$$\begin{aligned} E\left(N_n\right) &= 1 + \sum_{i=1}^{n} P(R > i) \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{8n}{\pi}}. \end{aligned}$$

D. Un résultat asymptotique

16) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite $\left(a_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $\left(b_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est positive

$$1 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \geqslant a_n \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} = a_n B_n.$$

Puisque la suite $\left(b_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement positive, on en déduit que $B_n > 0$ puis que $a_n \leqslant \dfrac{1}{B_n}$.

Soient m et n deux entiers naturels tels que $m > n > 0$.

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{m-k} + \sum_{k=n}^{m} a_k b_{m-k} \\ &\leqslant a_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} + a_n \sum_{k=n}^{m} b_{m-k} = a_0 \sum_{k=m-n+1}^{m} b_k + a_n \sum_{k=0}^{m-n} b_k = a_0\left(B_m - B_{m-n}\right) + a_n B_{m-n}. \end{aligned}$$

Si $n = 0$ et $m > n$, on a directement $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} \leqslant a_0 B_m = a_0\left(B_m - B_{m-n}\right) + a_n B_{m-n}$.

17) Pour n assez grand,

$$1 - a_0\left(B_{m_n} - B_{m_n - n}\right) \leqslant a_n B_{m_n - n} = a_n B_n \frac{B_{m_n - n}}{B_n} \leqslant \frac{B_{m_n - n}}{B_n}.$$

D'après les hypothèses de l'énoncé, le membre de gauche et le membre de droite de cet encadrement tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $a_n B_{m_n - n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Donc, $1 \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n B_{m_n - n} \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n B_n$ et finalement,

$$a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{B_n}.$$

18) D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes (la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ étant divergente),

$$B_n - b_0 = \sum_{k=1}^{n} b_k \underset{n \to +\infty}{\sim} C \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Ensuite, $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{k} > 0$ et donc

$$B_n - b_0 \underset{n \to +\infty}{\sim} C \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = C \ln(n+1) \underset{n \to +\infty}{\sim} C \ln(n).$$

En particulier, $B_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et donc $B_n - b_0 \underset{k\to+\infty}{\sim} B_n$. Finalement, $B_n \underset{k\to+\infty}{\sim} C\ln(n)$.

Pour $n \geqslant 2$, posons $m_n = n + \lfloor n\ln(n)\rfloor$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $m_n > n$. On note que $m_n \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + n + O(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\ln\left(\lfloor n\ln(n)\rfloor\right) &\underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(n\ln(n) + O(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(n\ln(n)\right) \text{ (car } n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty)\\ &= \ln(n) + \ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \text{ (d'après un théorème de croissances comparées),}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}B_{m_n-n} &= B_{\lfloor n\ln(n)\rfloor}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln\left(\lfloor n\ln(n)\rfloor\right) \text{ (car } \left\lfloor \frac{n}{\ln(n)}\right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \text{ et par sommation des équivalents)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n.\end{aligned}$$

Ensuite, pour n grand, $0 \leqslant b_n \leqslant \dfrac{C+1}{n}$ et donc, pour n grand,

$$\begin{aligned}0 \leqslant B_{m_n} - B_{m_n-n} &= \sum_{k=m_n-n+1}^{m_n} b_k\\ &\leqslant (C+1)\sum_{k=m_n-n+1}^{m_n}\frac{1}{k} \leqslant (C+1)\int_{m_n-n}^{m_n}\frac{dt}{t} = (C+1)\ln\left(\frac{m_n}{m_n-n}\right)\\ &= (C+1)\ln\left(\frac{\lfloor n\ln(n)\rfloor + n}{\lfloor n\ln(n)\rfloor}\right) = (C+1)\left(1 + \frac{n}{\lfloor n\ln(n)\rfloor}\right).\end{aligned}$$

Les deux membres de cet encadrement tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $B_{m_n} - B_{m_n-n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite $(m_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie les conditions de la question 17 et donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{B_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{C\ln(n)}$.

E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdös et Dvoretzky

19) Pour $x \in]-1,1[$, posons $H(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(R > k)x^k$ (de même que F et G, le rayon de la série entière définissant H est au moins égal à 1). Pour $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(R = k)x^k = \sum_{k=1}^{+\infty}(P(R > k-1) - P(R > k))x^k\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(R > k-1)x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} P(R > k)x^k \text{ (les deux séries convergent)}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(R > k)x^{k+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} P(R > k)x^k = xH(x) - H(x) + P(R > 0) = H(x)(x-1) + 1.\end{aligned}$$

Mais alors, $F(x) = 1 + F(x)G(x) = 1 + F(x)H(x)(x-1) + F(x)$ puis $F(x)H(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(S_n = 0_d\right)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(R > n)x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

En identifiant les coefficients du produit de Cauchy des deux séries entières du membre de gauche avec les coefficients de la série entière du membre de droite, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} P\left(S_k = 0_d\right) P(R > n-k) = 1.$$

20) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $C = \{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$ puis

$$\mathscr{C}_{2n} = \left\{\left(\left(\varepsilon_1, \varepsilon_1'\right), \ldots, \left(\varepsilon_{2n}, \varepsilon_{2n}'\right)\right) \in \left(\{-1,0,1\}^2\right)^{2n} \,/\, \forall i \in [\![1, 2n]\!],\ \left(\varepsilon_i, \varepsilon_i'\right) \in C \text{ et } \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i' = 0\right\}.$$

Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = 0 \Leftrightarrow (X_1, \ldots, X_{2n}) \in \mathscr{C}_{2n}$. Puisque les variables X_i, $i \in [\![1, 2n]\!]$, sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
P\left(S_{2n} = 0_d\right) &= \sum_{\left(\left(\varepsilon_1, \varepsilon_1'\right), \ldots, \left(\varepsilon_{2n}, \varepsilon_{2n}'\right)\right) \in \mathscr{C}_{2n}} P\left((X_1, \ldots, X_{2n}) = \left(\left(\varepsilon_1, \varepsilon_1'\right), \ldots, \left(\varepsilon_{2n}, \varepsilon_{2n}'\right)\right)\right) \\
&= \sum_{\left(\left(\varepsilon_1, \varepsilon_1'\right), \ldots, \left(\varepsilon_{2n}, \varepsilon_{2n}'\right)\right) \in \mathscr{C}_{2n}} P\left(X_1 = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_1'\right)\right) \ldots P\left(X_{2n} = \left(\varepsilon_{2n}, \varepsilon_{2n}'\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \operatorname{card}\left(\mathscr{C}_{2n}\right) = \left(\frac{1}{4^n}\right)^2 \operatorname{card}\left(\mathscr{C}_{2n}\right).
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer $\operatorname{card}\left(\mathscr{C}_{2n}\right)$. $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2n} = 0$ si et seulement si k des ε_i sont égaux à 1 et k sont égaux à -1 pour un certain $k \in [\![0, n]\!]$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, il y a $\dbinom{2n}{k}$ choix de l'emplacement des 1 et pour chacun de ces choix, il y a $\dbinom{2n-k}{k}$ choix de l'emplacement des -1, soit au total $\dbinom{2n}{k}\dbinom{2n-k}{k}$ choix de l'emplacement des 1 et des -1 pour le $2n$-uplet $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$.
Pour les $2k$ numéros i tels que $\varepsilon = \pm 1$, on a $\varepsilon_i' = 0$ et pour les $2n - 2k$ numéros i tels que $\varepsilon_i = 0$, on a $\varepsilon_i' = \pm 1$. Pour avoir $\varepsilon_1' + \ldots + \varepsilon_{2n}' = 0$, il reste à choisir les $n - k$ emplacements parmi les $2n - 2k$ dans lesquels $\varepsilon_i' = 1$, les derniers emplacements étant occupés par des -1. Il y a $\dbinom{2n-2k}{n-k}$ choix possibles de ces emplacements. Au total,

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\left(\mathscr{C}_{2n}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!^2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!^2(n-k)!^2} = \frac{(2n)!}{n!^2}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!^2}{k!^2(n-k)!^2} = \binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \\
&= \binom{2n}{n}^2 \text{ (d'après la question 1).}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$P\left(S_{2n} = 0_d\right) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2.$$

D'autre part, comme à la question 13, $P\left(S_{2n+1} = 0_d\right) = 0$.

21) D'après la question 19, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P\left(S_k = 0_d\right) P(R > 2n-k) = \sum_{k=0}^{n} P\left(S_{2k} = 0_d\right) P(R > 2(n-k))$.
Poour $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = P\left(S_{2n} = 0_d\right)$ et $a_n = P(R > 2n)$. Alors, $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites strictement positives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. De plus, la suite $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Enfin,

$$b_n = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{4^n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{1}{n\pi}.$$

D'après la question 18, $P(R > 2n) = a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\ln(n)} = \dfrac{\pi}{\ln(2n)-\ln(2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\ln(2n)}$. Ensuite, $P(R > 2n+1) = P(R > 2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\ln(2n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\ln(2n+1)}$ et finalement,

$$P(R > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\ln(n)}.$$

La série de terme général général $\dfrac{\pi}{\ln(n)} > 0$ diverge (car $\dfrac{\pi}{\ln(n)}$ est prépondérant devant $\dfrac{1}{n}$) et donc d'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\begin{aligned}
E(N_n) - 1 - P(R > 1) = \sum_{k=2}^{n} P(R > k) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \pi \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \pi \int_2^n \frac{dt}{\ln(t)} \\
&\text{(puisque } t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} \text{ est décroissante positive sur } [2, +\infty[\text{ et que} \\
&\sum \frac{1}{\ln(k)} \text{ diverge (comparaison séries-intégrales))} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\pi}{\ln(n)} \text{ (d'après la question 4).}
\end{aligned}$$

En particulier, $E(N_n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et donc $E(N_n) - 1 - P(R > 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} E(N_n)$. Finalement,

$$E(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\pi}{\ln(n)}.$$

