1 Séries à termes positifs

Exercice :1

Soit σ une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$

① On suppose dans cette question que σ est bijective .Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{\sigma(n)}$ *et* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{(\sigma(n))^2}$

② On suppose dans cette question que σ est injective .Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente

Solution :1

① ✎.la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{\sigma(n)}$ est une série à termes positifs .Si on pose pour $n\in\mathbb{N}^*$, $N=\max\left\{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(n)\right\}$, alors on a $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{\sigma(k)}$ et comme la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente alors la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{\sigma(n)}$ diverge

✎.On a pour tout entier naturel non nul n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\sigma(n))^2}\leq\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\leq\frac{\pi^2}{6}\quad avec\quad N=\max\left(\sigma\left([\![1,n]\!]\right)\right)$$

Ce qui prouve alors que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{(\sigma(n))^2}$ est convergente

② Notons pour n non nul $u_n=\frac{\sigma(n)}{n^2}$, alors on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ \sum_{k=n+1}^{2n}u_k\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sigma(k)}{4n^2}=\frac{1}{4n^2}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\sigma(k)\right)=\frac{1}{4n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma(n+k)\right)$$

Et comme l'application σ est injective alors les entiers $\sigma(n+1)\ \dots\ ,\ \sigma(2n)$ sont distincts deux à deux et sont supérieur ou égal à 1 et par suite on a $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\sigma(k)\geq\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et par suite $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}u_k\geq\frac{n+1}{8n}\geq\frac{1}{8}$ ce qui entraine alors que la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sigma(n)}{n^2}$ n'est pas une suite de Cauchy de l'espace de Banach $(\mathbb{R},|.|)$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente

Exercice :2

Soit $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}^+$ est une application telle que $x\longmapsto xf(x)$ est minorée .Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1}f(n)$ est divergente

Solution :2

Soit $m\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x\in[1,+\infty[\ ,\ xf(x)\geq m$ .On a pour n entier naturel

$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=1}^{2n}f(n+k)\geq m\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}\geq m\frac{n}{2n}=\frac{m}{2}>0$$

Ce qui montre alors que la suite $(S_n)_n$ n'est pas de Cauchy et par suite la série $\sum\limits_{n\geq 1}f(n)$ est divergente

Exercice :3

On suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 1}a_n$ est divergente.Etudier le comportement des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{1+a_n}\ ,\ \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{na_n}\ ,\ \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{1+n^2a_n}\quad et\quad \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{1+a_n^2}$$

Solution :3

① ✎.Si la suite $(a_n)_n$ est majorée par un réel strictement positif M , alors

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ \frac{a_n}{1+a_n}\geq\frac{a_n}{1+M}$$

Et comme la série $\sum\limits_{n\geq 0}a_n$ diverge alors la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{a_n}{1+a_n}$ est divergente

✎.Si la suite $(a_n)_n$ n'est pas majorée ,alors elle admet une sous suite $(a_{\varphi(n)})_n$ qui diverge vers $+\infty$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{\varphi(n)}}{a_{\varphi(n)}+1}=1$ ce qui montre alors que la série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{a_n}{1+a_n}$ diverge grossièrement

② La série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{a_n}{1+na_n}$ peut converger comme elle peut diverger .En effet

✎.Soit $(a_n)_n$ la suite définie par

$$\begin{cases}1\ si\ n \text{ est un carré}\\ \frac{1}{n^2}\ si\ non\end{cases}$$

La suite extraite $(a_{n^2})_n$ tend vers 1 , donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge grossièrement .De plus on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{1+ka_k} < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+k^2} \leq 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}$$

Et pars suite la série $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{1+na_n}$ converge dans ce cas . ✎.Si on pose pour n entier naturel non nul $a_n = \frac{1}{n}$, alors $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_n}{1+na_n} = \frac{1}{2n}$ donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{1+na_n}$ diverge

3 La convergence de la série en question se déduite de l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \frac{a_n}{1+n^2a_n} \leq \frac{a_n}{n^2a_n} = \frac{1}{n^2}$$

4 Si la suite $(a_n)_n$ est majorée par un réel strictement positif M ,alors

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \frac{a_n}{1+a_n^2} \geq \frac{a_n}{1+M^2}$$

Et la série $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{1+a_n^2}$ est divergente .Mais , si par exemple $a_n = n^2$, alors la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est divergente alors que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{1+a_n^2}$ est convergente

Exercice :4

Soient $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série divergente de réels strictement positifs et $(S_n)_n$la suite de ses sommes partielles .

① Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{S_n}$ diverge et que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{S_n^2}$ converge

② Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\beta}}$ converge pour tout $\beta > 0$

③ Prouver que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$

Solution :4

① La suite $(S_n)_n$ est croissante positive car la suite $(a_n)_n$ est une suite de rèels strictement positifs . Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} \geq \frac{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}$$

Pour n fixé on a $\lim_{p\to+\infty}\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}} = 1$, donc la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{S_n}$ n'est pas une suite de Cauchy et par suite la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{S_n}$ est alors divergente

② On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{a_n}{S_nS_{n-1}} = \frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$$

Et par suite on a

$$\sum_{n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}\right) = \frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+p}} < \frac{1}{S_n}$$

Et comme la suite $(S_n)_n$ diverge vers $+\infty$ alors la suite $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{S_n} = 0$ et par suite d'après le critère de Cauchy pour les séries la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{S_n^2}$ est convergente

③ On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\beta}} = \frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}^{\beta}}$$

On suppose que $\beta > 0$ et p un entier naturel non nul tel que $\frac{1}{p} < \beta$ .Pour n suffisamment grand on a l'inégalité

$$\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\beta}} < \frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\frac{1}{p}}}$$

Il suffit alors d'établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\frac{1}{p}}}\right)$ .On rappelle que

$$\forall x \in]0,1]\ ,\ \forall p \in \mathbb{N}^*\ ,\ 1-x^p \leq p(1-x)$$

Alors on en déduit que

$$1-\frac{S_{n-1}}{S_n} \leq p\left(1-\frac{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{S_n^{\frac{1}{p}}}\right)\ ,\ pour\ \ x = \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}^{\frac{1}{p}}} \leq p\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}-\frac{1}{S_n^{\frac{1}{p}}}\right)$$

Et comme la suite $\left(\frac{1}{S_n}\right)_n$ converge alors d'après le critère de Cauchy pour les séries la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\frac{1}{p}}}\right)$ est converge et par suite la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\beta}}\right)$ est convergente

4 ✎.Pour $\alpha>1$ .On a alors pour $n\geq 2$, $\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\leq\frac{a_n}{S_nS_{n-1}^{\alpha-1}}$ et d'après la question précédente la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\right)$ est convergente

✎.Pour $\alpha\leq 1$ et pour n suffisamment grand on a $\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\geq\frac{a_n}{S_n}$ ce qui entraine d'après la première question que la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\right)$ est divergente

Exercice :5

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et α un réel distinct de 1

① On suppose dans cette question que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

① Montrer que si $\alpha>1$ alors la série $\sum_{n\geq 1}a_n$ est convergente

② Montrer que si $\alpha<1$,alors la série $\sum_{n\geq 1}a_n$ est divergente

② On suppose dans cette question que $(a_n)_n$ vérifie :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{\alpha}{n}+v_n\ ,\ \text{avec}\ \sum_n v_n\ \text{est absolument convergente}$$

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}a_n$ converge si $\alpha>1$ et diverge si $\alpha\leq 1$

Solution :5

① On suppose que la suite $(a_n)_n$ vérifie $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

① On suppose que $\alpha>1$ .Soit $\gamma\in]1,\alpha[$ et $(v_n)_n$ la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{1}{n^{\gamma}}$. On a $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\gamma}=1-\frac{\gamma}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et par suite

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\gamma-\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n}\sim\frac{\gamma-\alpha}{n}$ et par suite

$$\exists n_0\in\mathbb{N}^*\ ,\ \forall n\geq n_0\ ,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

et comme la série de Reimann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\gamma}}$ est convergente alors d'après le critère de comparaison logarithmique la série $\sum_{n\geq 1}a_n$ est convergente

② Dans cette question on suppose que $\alpha<1$ .Soit $\gamma\in]\alpha,1[$ et $(v_n)_n$ la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{1}{n^{\gamma}}$,alors en faisant les mêmes calculs de la question précédente on a $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\geq n_0$, $\frac{v_{n+1}}{v_n}\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}$ et comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\gamma}}$ est divergente alors d'après le critère de comparaison logarithmique la série $\sum_{n\geq 1}a_n$ est divergente

② On va étudier la suite $u_{n+1}-u_n$ avec $u_n=\ln\left(n^{\alpha}a_n\right)$.Soit $n\in\mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1}-u_n=\ln\left((n+1)^{\alpha}a_n\right)-\ln\left(n^{\alpha}a_n\right)=\alpha.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{\alpha}{n}+v_n\right)$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0}v_n$ est absolument convergente alors la suite $(v_n)_n$ converge vers 0 et par suite

$$u_{n+1}-u_n=\alpha\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\left(-\frac{\alpha}{n}+v_n+O\left(\left(-\frac{\alpha}{n}+v_n\right)^2\right)\right)$$

On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left(-\frac{\alpha}{n}+v_n^2\right)\leq 2\left(\frac{\alpha^2}{n^2}+v_n^2\right)$ donc $O\left(\left(-\frac{\alpha}{n}+v_n\right)^2\right)=O\left(v_n^2\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et par suite $u_{n+1}-u_n=v_n+O\left(v_n^2\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .Les séries $\sum_{n\geq 0}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\sum_{n\geq 0}\left(v_n+O\left(v_n^2\right)\right)$ sont absolument convergente donc la série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente et cela signifie que la suite $(u_n)_n$ est convergente vers une limite l et alors la suite $\left(e^{u_n}\right)_n$ est convergente vers e^l , ce qui donne le résultat

Exercice :6.Critère de Schloimilch

Ce théorèe est une généralisation du critère de condensation ou de la loupe de Cauchy.
Soit $(g_n)_n$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$$\exists c>0\ ,\ \forall n\geq 1\ ,\ g_{n+1}-g_n\leq c\left(g_n-g_{n-1}\right)$$

On considère une suite $(a_n)_n$décroissante de réels strictement positifs .

① Montrer que les séries

$$\sum_{n\geq 1}a_n\quad et\quad\sum_{n\geq 1}(g_{n+1}-g_n)\,a_{g_n}\ \text{ont même nature}$$

② En déduire que les séries suivantes

$$\sum_{n\geq 1}a_n\ ,\ \sum_{n\geq 1}3^na_{3^n}\ ,\ \sum_{n\geq 1}na_{n^2}\ et\ \sum_{n\geq 1}n^2a_{n^3}\ \text{sont d mêmes natures}$$

Solution :6

Dans cette exercice on a besoin du lemme suivant vu en sup :
Si $(u_n)_n$ est une suite monotone de réels admettant une suite extraite convergente alors la suite $(u_n)_n$ est convergente

① On pose pour n entier naturel $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ et on considère la suite $(v_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} v_0 = S_{g_1} \\ \forall n \geq 1 \ , \ v_n = \sum_{g_n+1}^{g_{n+1}} \end{cases}$$

Il est clair que $\forall n \geq 1$, $v_n = S_{g_{n+1}} - S_{g_n}$ et par suite si $(V_n)_n$ désigne la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} v_n$,alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = S_{g_{n+1}}$.La suite $(a_n)_n$ est décroissante donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall k \in [\![g_n + 1, g_{n+1}]\!] \ , \ a_{g_{n+1}} \leq a_k \leq a_{g_n+1} \leq a_{g(n)}$$

Et par suite

$$\sum_{k=g_n+1}^{g_{n+1}} a_{g_{n+1}} \leq v_n \leq \sum_{k=g_n+1}^{g_{n+1}} a_{g_n} \text{ ce qui est équivalent à } (*) \ : \ (g_{n+1} - g_n)a_{g_{n+1}} \leq v_n \leq (g_{n+1} - g_n)a_{g_n}$$

✎ :Si la série $\sum_{n\geq 0} (g_{n+1} - g_n)\, a_{g_n}$ est convergente alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge c'est à dire que la suite de ses sommes partielles $(V_n)_n$ converge , donc la suite $(S_{g_{n+1}})_n$ est convergente .Comme la suite $(S_n)_n$ est une suite croissante admettent une suite extraite $(S_{g_{n+1}})$ alors elle converge et par suite la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente

✎.Supposons que $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente , donc la suite $(S_{g_{n+1}})_n$ est convergente c'est à dire que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente ,donc d'après $(*)$ la série $\sum_{n\geq 1} (g_{n+1} - g_n)\, a_{g_{n+1}}$ converge c'est à dire que la série $\sum_{n\geq 1} (g_n - g_{n-1})\, a_{g_n}$ est convergente .Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{c}\,(g_{n+1} - g_n) \leq (g_n - g_{n-1})$ et comme les a_n sont strictement positifs alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{c}\,(g_{n+1} - g_n)\, a_{g_n} \leq (g_n - g_{n-1})\, a_{g_n}$ ce qui prouve alors la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} (a_{g_{n+1}} - g_n)\, a_{g_n}$

② On retrouve le critère de condensation de Cauchy , il suffit de prendre $g_n = 2^n$ et pour la série $\sum_{n\geq 0} 3^n a_{3^n}$ prendre $g_n = 3^n$

Pour la série $\sum_{n\geq 0} n a_{n^2}$ on prend $g_n = n^2$, il est clair que $(g_n)_n$ est une suite strictement croissante et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ g_{n+1} - g_n = 2n + 1 \leq 3(g_n - g_{n-1})$$

.Donc par application du critère précédent on a $\sum_{n\geq 0} (2n+1)a_{n^2}$ est de même nature que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et comme $(2n+1)a_{n^2} \sim 2na_{n^2}$ alors la série $\sum_{n\geq 0} na_{n^2}$ est de même nature que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$

Pour la série $\sum_{n\geq 0} n^2 a_{n^3}$ il suffit de prendre $g_n = n^3$, il est clair que la suite $(g_n)_n$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ g_{n+1} - g_n = 3n^2 + 3n + 1 \leq 10(g_n - g_{n-1})$$

Donc les deux séries $\sum_{n\geq 0} (3n^2 + 3n + 1)a_{n^3}$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$ sont de même nature or on a $(3n^2 + 3n + 1)a_{n^3} \sim 3n^2 a_{n^3}$ et par suite la série $\sum_{n\geq 0} n^2 a_{n^3}$ est de même nature que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$

Exercice :7

Soient $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série de nombres complexes dont la suite des sommes partielles est bornée et $(b_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ *et* $\sum_{n\geq 1} |b_n - b_{n+1}|$ est convergente .Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n b_n^k$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

Solution :7

Notons pour n entier naturel $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^k$ et $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ .On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ S_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \left(b_i^k - b_{i+1}^k\right) + A_n b_n^k$$

La suite $(A_n)_n$ est borneé , donc il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \leq M$. La suite $(b_n)_n$ converge vers 0 , donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|b_i| \leq \varepsilon$.Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m > n \geq n_0$ On a

$$|S_m - S_n| = \sum_{i=n}^{m} a_i b_i^k = \sum_{i=n}^{m-1} A_i \left(b_i^k - b_{i+1}^k\right) - A_n b_n^k + A_m b_m^k \leq \sum_{i=n}^{m-1} |A_i| \left|b_i^k - b_{i+1}^k\right| + |A_n b_n^k| + |a_m b_m^k|$$

$$|S_m - S_n| \leq M \left(\sum_{i=n}^{m-1} |b_i - b_{i+1}| \left|\sum_{l=0}^{k-1} b_i^l b_{i+1}^{k-1-l}\right| + |b_n^k| + |b_m^k|\right) \leq M \left(\sum_{i=n}^{m-1} |b_i - b_{i+1}| \left(\sum_{l=0}^{k-1} |b_i^l||b_{i+1}^{k-1-l}|\right) + |b_n^k| + |b_m^k|\right)$$

Et par suite on a

$$|S_m - S_n| \leq M \left(k\varepsilon^{k-1} \sum_{i=n}^{m-1} |b_i - b_{i+1}| + 2\varepsilon^k\right)$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1} |b_n - b_{n+1}|$ est convergente , alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $m > m \geq n_1$, $|\sum_{i=n}^{m-1} |b_i - b_{i+1}| \leq \varepsilon$ et par suite pour $m > n \geq N = \max(n_0, n_1)$ *on a* $|S_m - S_n| \leq (k+2)M\varepsilon^k$ et donc la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} a_n b_n^k$ se déduit du critère de Cauchy pour les séries

2 Transformation d'Abel et applications

Exercice :8

Soient $\sum a_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $(v_n)_n$ est une suite réelle qui décroît vers 0 et la suite $(A_n)_n$ des sommes partielles de $\sum a_n$ est bornée .

① Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \sum_{k=0}^{n} a_k v_k = A_n v_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(v_k - v_{k+1}\right)$$

② En déduire que la série $\sum a_n v_n$ est convergente

③ **Application**

2-1 Montrer que , si $\alpha > 0$ et θ un réel qui n'est pas un multiple de 2π, les séries

$$\sum \frac{\sin n\theta}{n^\alpha} \text{ et } \sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$$

sont convergentes

2-2 Démontrer le critère de $\mathcal{L}$eibnez pour les séries alternées

Solution :8

① Soit n un entier naturel , on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k v_k = a_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} v_k \left(A_k - A_{k-1}\right) = a_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} v_k A_k - \sum_{k=1}^{n} v_k A_{k-1} = a_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} v_k A_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} A_k$$
$$= a_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + v_n A_n - v_1 A_0 = v_n A_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(v_k - v_{k+1}\right)$$

② Soit n un entier naturel , on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k v_k\right| \leq |v_n|.|A_n| + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} |A_k| \left(v_k - v_{k+1}\right)}_{\text{La suite } (v_n)_n \text{ est dcroissante}}$$

La suite $(A_n)_n$ est bornée soit alors $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \leq M$.La suite $(v_n A_n)_n$ converge vers 0 comme produit de suite bornée et d'une suite convergente vers 0 , ceci d'une part d'autre part on a $\sum_{k=0}^{n-1} |A_k| \left(v_k - v_{k+1}\right) \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \left(v_k - v_{k+1}\right) \leq M \left(v_0 - v_n\right)$ et comme la suite $(v_n)_n$ est convergente alors $\exists M' > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_0 - v_n \leq M'$ et par suite la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} |A_k| \left(v_k - v_{k+1}\right)\right)_n$ est majorée et comme elle croissante alors ell est convergente , ce qui prouve alors que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k v_k\right)_n$ est convergente c'est à dire que la série $\sum_{n\geq 0} a_n v_n$ est convergente

③ Il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente .Comme $\alpha > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ est décroissante de limite 0 , il reste à montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right)_{n\geq 1}$ est bornée .Soit $n \geq 1$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| = \left|e^{i\theta} \left(\frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

ce qui montre alors que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right)_n$ est bornée , on conclut alors que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente et par suite les séries partie réelle et partie imaginaire sont convergentes

3 Produit de Cauchy

Exercice :9.Théorème de Mertens

Soient $\sum_{n\geq 1} a_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} b_n$ deux séries non nulles convergentes dont l'une au moins converge absolument .Montrer que la série produit de Cauchy de ses deux séries est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$$

Solution :9

On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est absolument converge et on note respectivement A_n , B_n *et* C_n la n^{eme} somme partielle des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} c_n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.On remarque que $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k}$ si on pose $D_n = B_n + r_n$ avec $(r_n)_n$ une suite de réels convergente vers 0 , alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ C_n = D_n A_n - \left(a_o r^n + a_1 r_{n-1} + \ldots + a_n r_n\right)$$

Pour terminer ,montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kr_{n-k}=0$ .La suite $(r_n)_n$ tend vers 0 donc elle est bornée par un certain $m>0$, on pose $M=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|>0$

$$\text{Soit } \varepsilon>0 \textit{ et } l\in\mathbb{N} \textit{ tel que } \forall n\geq l\ ,\ |r_n|\leq\frac{\varepsilon}{2M} \textit{ et } \sum_{i=l+1}^{n}|a_i|\leq\frac{\varepsilon}{2m}$$

On a

$$|a_0r_n+a_1r_{n-1}+\ldots+a_nr_0|\leq\sum_{i=0}^{l}|a_ir_{n-i}|+\sum_{i=l+1}^{n}|a_ir_{n-i}|\leq M\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2m}m=\varepsilon$$

Ce qui prouve alors que la suite $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kr_{n-k}$ tend vers 0 donc la suite $(C_n)_n$ converge de limite AB d'ou le résultat

Exercice :10

Soit $\sum\limits_{n\geq0}a_n$ une série convergente dont la n^{eme} somme partielle est notée A_n .Prouver que la série $\sum\limits_{n\geq0}A_nx^n$ est convergente pour $|x|<1$ est que sa somme est égale à $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)$

Solution :10

Il suffit de remarquer que la série $\sum\limits_{n\geq0}A_nx^n$ est la série produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\geq0}x^n$ et la série $\sum\limits_{n\geq0}a_nx^n$ .Donc si $|x|<1$,alors la série $\sum\limits_{n\geq0}x^n$ est absolument convergente et comme la série $\sum\limits_{n\geq0}a_nx^n$ est convergente alors d'après l'exercice (5) la série produit de Cauchy est convergente de somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}A_nx^n=\left(\dfrac{1}{1-x}\right).\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)$

Exercice :11

Théorème de Toeplitz de transformation régulière suites en suites [a]

Soit $(c_{n,k})_{(n\geq1\ ,\ \leq k\leq n)}$ une famille de nombre réels vérifiant

✎.$\forall k\in\mathbb{N}^*\ ,\ \lim\limits_{n\to+\infty}c_{n,k}=0$

✎.La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}c_{n,k}\right)_n$ converge de imite 1

✎.$\exists C>0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \sum\limits_{k=1}^{n}|c_{n,k}|\leq C$

Soit $(a_n)_n$ une suite convergente .Montrer que la suite transformée $(b_n)_n$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_{n,k}a_k$ est aussi convergente et que sa limite est la même que celle de $(a_n)_n$

❄**Applications.Théorème de Césaro**

① Soit $(a_n)_n$ une suite de réels de limite $a\in\overline{\mathbb{R}}$ .Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots,a_n)=a$$

② Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suite réelles convergentes de limites respectivement a *et* b.Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots,a_nb_1)=ab$$

a. Une transformation de suite est régulière si elle transforme toute suite convergente en une suite convergente de même limite

Solution :11

La suite $(a_n)_n$ converge de limite a ,alors pour $\varepsilon>0$ il existe $n_1\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq n_1\ ,\ |a_n-a|\leq\frac{\varepsilon}{2C}$ ceci d'une part d'autre part la suite $(a_n)_n$ est bornée donc il existe $D>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ |a_n|\leq D$ .Comme $\forall k\in\mathbb{N}^+\ ,\ \lim\limits_{n\to+\infty}c_{n,k}=0$ donc $\forall k\in\mathbb{N}^*\ ,\ \lim\limits_{n\to+\infty}|c_{n,k}|=0$,ce qui entraine alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}|c_{n,k}|\right)=0$ et par suite il existe un entier naturel n_2 tel que $\forall n\geq n_2\ ,\ \sum\limits_{k=1}^{n_1-1}|c_{n,k}|\leq\dfrac{\varepsilon}{2D}$

Soit $n\geq\max(n_1,n_2)$, on a

$$\left|b_n-a\sum_{k=1}^{n}c_{n,k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}c_{n,k}\left(a_k-a\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{n_1-1}|c_{n,k}|.|a_k-a|+\sum_{n_1}^{n}|c_{n,k}|.|a_k-a|\leq D\sum_{k=1}^{n-1}|c_{n,k}|+\frac{\varepsilon}{2C}\sum_{k=n_1}^{n}|c_{n,k}|\leq D\frac{\varepsilon}{2D}+C\frac{\varepsilon}{2C}=\varepsilon$$

Ce qui entraine alors que la suite $\left(b_n-a\sum\limits_{k=1}^{n}c_{n,k}\right)_n$ converge vers 0 et comme la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}c_{n,k}\right)_n$ converge de limite 1 alors la suite $(b_n)_n$ converge de limite a ❄**Applications**

① Le théorème de Césaro pour le cas ou a est un réel se déduit du théorème de Toeplitz en prenant pour $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $k\in[\![1,n]\!]\ ,\ c_{n,k}=\frac{1}{n}$

✎.Si a n'est pas un réel alors quitte à remplacer $(a_n)_n$ par $(-a_n)_n$ on peut supposer que $a=+\infty$.

Soit $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N\ ,\ a_n\geq\varepsilon$ .On a

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n}a_k\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N}a_k\right)+\frac{1}{n}\left(\sum_{k=N+1}^{n}a_k\right)\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N}a_k\right)+\frac{(n-N)\varepsilon}{n}\geq\varepsilon+\frac{A-N\varepsilon}{n}$$

Avec $A=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{A-N\varepsilon}{n} = 0$, alors il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N'$, $\frac{A-N\varepsilon}{n} \geq -\frac{\varepsilon}{2}$ ce qui entraine alors que

$$\forall n \geq \max(N,N') \ , \ \frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n} a_k\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'ou le résultat

■.Le théorème suivant se démontre de la même manière que le cas particulier précédent .

Si $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs divergente vers $+\infty$ et $(a_n)_n$ une suite de réels ou complexes de limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite $\dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k a_k\right)$ a pour limite l

① On applique le théorème de Toeplitz dans le cas ou $b \neq 0$ en prenant pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in [\![1,n]\!]$, $c_{n,k} = \dfrac{b_{n-k+1}}{nb}$

Dans le cas ou $b = 0$ on applique le théorème de Toeplitz en prenant pou $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in [\![1,n]\!]$, $c_{n,k} = \dfrac{1+b_{n-k+1}}{n}$

Exercice :12.Théorème d'Abel

Montrer que si le produit de Cauchy $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ des deux séries convergentes $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ est convergent alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$

Solution :12

Soient A_n , B_n *et* C_n les n-èmes somme partielle respectivement des séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ .On vérifie facilement que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0$, ce qui donne alors que $C_0 + C_1 + \ldots + C_n = A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \ldots + A_n B_0$

En divisant alors par $n+1$ on a

$$\frac{C_0 + C_1 + \ldots + C_n}{n+1} = \frac{A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \ldots + A_n B_0}{n+1}$$

Donc d'après l'exercice précédent on a $C = AB$

Exercice :13

① Montrer que si parmi deux séries de réels strictement positifs , une au moins est divergente , alors leur produit de Cauchy est divergent

② Le produit de Cauchy de deux séries divergente est -il nécessairement divergente ?

Solution :13

① Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}_*^+$ et $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ la série produit de Cauchy .Supposons par exemple que $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ est divergente .On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 > a_0 b_n$$

Et comme la série $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ est divergente alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ est divergente .

② La réponse est négative ,en effet considérons les deux séries divergentes suivantes $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \\ b_0 = 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$$

On alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ c_n = a_0 b_n + b_0 a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}\right)\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Et la série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ est convergente

Exercice :14

Prouver que le produit de Cauchy de deux séries convergentes $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ converge si, et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{n} a_k\left(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1}\right)\right) = 0$$

Solution :14

Soient A_n , B_n *et* C_n les n-èmes somme partielle respectivement des séries $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$.On a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1}\right) = a_1\left(B_n - B_{n-1}\right) + a_2\left(B_n - B_{n-2}\right) + \ldots + a_n\left(B_n - B_0\right) = B_n\left(A_n - a_0\right) - a_1 B_{n-1} - a_2 B_{n-2} - \ldots - a_n B_0$$

Ce qui entraine alors que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1}\right) = B_n A_n - C_n \quad (*)$$

✎.Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ converge donc d'après le théorème d'Abel cette série à pour somme $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n B_n - C_n = 0$ ce qu'il fallait démontrer

✎.Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{n}a_k\left(b_n+b_{n-1}+\ldots+b_{n-k+1}\right)\right)=0$, d'après l'égalité $(*)$, la suite $(A_nB_n-C_n)_n$ est convergente vers 0 et par suite la suite $(C_n)_n$ est convergente de limite $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$ ce qui prouve alors la convergence de la série produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\geq0}a_n$ et $\sum\limits_{n\geq0}b_n$

Exercice :15

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites positives décroissantes et convergentes vers 0 .Démontrer que le produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\geq0}(-1)^n a_n$ *et* $\sum\limits_{n=0}(-1)^n b_n$ converge si, et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty}a_n\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\right)=0 \;\; et \;\; \lim_{n\to+\infty}b_n\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)=0$$

Solution :15

Soit $\sum\limits_{n\geq0}c_n$ la série produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\geq0}(-1)^n a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq0}(-1)^n b_n$.

✎.Supposons que la série $\sum\limits_{n\geq0}c_n$ est convergete alors $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=0$ .On a

$$\forall n\geq0\ ,\ c_n=(-1)^n\left(a_0b_n+a_1b_{n-1}\ldots+a_nb_1\right)$$

Et comme les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont décroissantes alors on a

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ |c_n|\geq a_n\left(b_0+\ldots+b_n\right)\ et\ |c_n|\geq b_n\left(a_0+\ldots+a_n\right)$$

Ce qui entraine alors que

$$\lim_{n\to+\infty}a_n\left(b_0+\ldots+b_n\right)=\lim_{n\to+\infty}b_n\left(a_0+\ldots+a_n\right)=0$$

✎Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\left(b_0+\ldots+b_n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\left(a_0+\ldots+a_n\right)=0$.D'après l'exercice précédent il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k\left((-1)^n b_n+(-1)^{n-1}b_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-k+1}b_{n-k+1}\right)\right)=0$$

Remarquons que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \forall k\in[\![1,n]\!]\ ,\ \left|(-1)^n b_n+(-1)^{n-1}b_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-k+1}b_{n-k+1}\right|\leq b_{n-k+1}$$

Et par conséquent on a

$$\sum_{k=1}^{n}\left|(-1)^k a_k\left((-1)^n b_n+(-1)^{n-1}b_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-k+1}b_{n-k+1}\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$$

Si on note pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$, alors on a $0\leq x_{2n}\leq\left(a_1+\ldots+a_n\right)b_n+\left(b_1+\ldots+b_n\right)a_n$ ce qui montre alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}=0$ et on montre de même que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n-1}=0$ ce qui prouve alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$ d'ou le résultat

4 Dénombrabilité -Famille sommables

4.1 Dénombrabilité

Rappels

① On dit qu'un ensemble non vide E est dénombrable si il est en bijection avec une partie non vide $\mathbb{N}$

② Si E est un ensemble infini alors E est dénombrable si il est en bijection avec $\mathbb{N}$

③ Un ensemble E est dénombrable si et seulement si il existe une application injective de E à valeurs dans $\mathbb{N}$

④ L'ensemble E est dénombrable si, et seulement si il existe une suite croissante $(J_n)_n$ de parties finies de E dont la réunion est égale à E

⑤ Toute partie dénombrable d'un ensemble dénombrable est aussi dénombrable

⑥ Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable

⑦ La réunion deux ensembles dénombrables est aussi dénombrable

⑧ Les ensembles suivants sont dénombrables :✎. Les ensembles finis , ✎$\mathbb{N}$, ✎.$\mathbb{Z}$ et ✎.$\mathbb{Q}$

Exercice :16

① Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est aussi dénombrable

② En déduire que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable

Solution :16

① Soit $(E_n)_n$ une famille dénombrable d'ensembles dénombrables , posons $F_0=E_0$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$, $F_n=E_n/\left(E_1\cup\ldots\cup E_{n-1}\right)$, il est clair que les F_n sont deux à deux disjoints et que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$ .Désignons par f_n une injection de E_n dans $\mathbb{N}$ et par f l'application de $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$ dans $\mathbb{N}^2$ définie par

$$\forall x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\quad,\quad f(x)=(n,f_n(x))\ ou\ n\ est\ l'unique\ entier\ tel\ que\ x\in F_n$$

Il est facile de vérifier que f est bien définie et qu'elle est injective ce qui montre alors que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dénombrable

2 Notons pour $d\in\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}_d[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit f l'application de $\mathbb{Z}_d[X]$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^{d+1}$ définie par

$$\forall P=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \ ,\ f(P)=(a_0,\dots,a_d)$$

L'application f est clairement injective et comme $\mathbb{Z}^{d+1}$ est dénombrable , alors $\mathbb{Z}_d[X]$ est aussi dénombrable .On conclut alors que $\mathbb{Z}[X]$ est un ensemble dénombrable comme étant réunion dénombrable d'une famille d'ensembles dénombrables à savoir $(\mathbb{Z}_d[X])_d$

Exercice :17 .$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

① Montrer que $\mathbb{R}$ n'est dénombrable

② En déduire que l'ensemble des irrationnels n'est pas dénombrable

③ Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace de dimension infinie

Solution :17

① Il suffit de montrer que $[0,1]$ est non dénombrable .Pour cela on va raisonner par l'absurde en supposant que $[0,1]$ est dénombrable , alors comme $[0,1]$ est infini alors il existe une bijection f de $\mathbb{N}^*$ dans $[0,1]$.Partageons $[0,1]$ en trois segments de longueurs $\frac{1}{3}$, il est clair que l'un de ses trois intervalles noté I_1 ne contient pas $f(1)$, on partage ensuite I_1 en trois segments de longueurs $\frac{1}{3^2}$, alors l'un de ses trois segment noté I_2 ne contient pas $f(2)$, soit n un entier naturel supérieur à 1 supposons que avoir construit $I_1,\dots,I_n$ vérifiant $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $f(k)\notin I_k$, $\delta(I_k)=\frac{1}{3^k}$ *et* $I_1\subset I_2\subset\dots\subset I_n$ .On partage I_n en trois segments de longueurs $\frac{1}{3^{n+1}}$, l'un des ses trois segments noté I_{n+1} ne contient pas $f(n+1)$, ainsi on a construit une suite de segments emboités $(I_n)_n$ de diamètre $\delta(I_n)=\frac{1}{3^n}\to 0$ et vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)\notin I_n$.D'après le théorème des segments emboités l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ est réduit un point $x\in[0,1]$, soit k l'antécédent de x par la bijection f , on a $f(k)=x$ et par définition de I_k , on a $f(k)\notin I_k$ et ceci contredit la définition de x .On conclut alors que $[0,1]$ n'est pas dénombrable et par suite $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

② Si $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est dénombrable alors $\mathbb{R}=Q\cup(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$ est aussi dénombrable ce qui est absurde donc $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable

③ Supposons que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie n , donc $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^n$ (n est non nul car $\mathbb{R}$ est non nul) or $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable donc $\mathbb{R}$ serait dénombrable ce qui est absurde .On conclut alors $\mathbb{R}$ est $\mathbb{Q}$-espace de dimension infinie

Exercice :18

On dit qu'un nombre complexe x est algébrique sur $\mathbb{Z}$ si il existe un polynôme non nul P à coefficients entiers tel que $P(x)=0$, Un nombre qui n'est pas algébrique sur $\mathbb{Z}$ est dit un nombre transcendant.Montrer que l'ensemble des nombres complexes transcendants sur $\mathbb{Z}$ n'est pas dénombrable

Solution :18

L'ensemble des polynômes non nuls s à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est dénombrables , donc on peut numéroter ses éléments par une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.Soit $k\in\mathbb{N}^*$, notons par Z_k l'ensemble des racines complexes du polynômes P_k , il est clair que Z_k est fini et par suite l'ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Z}$ qui n'est autre que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} Z_k$ est dénombrable et comme $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable alors l'ensemble des complexes non algébriques c'est à dire transcendant sur $\mathbb{Z}$ n'est pas dénombrable .Comme tout complexe algébrique sur $\mathbb{Q}$ est algébrique sur $\mathbb{Z}$,alors l'ensemble des nombres complexes algébriques sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable

4.2 Sommabilité

Exercice :19

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{pq(p+q-1)}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer sa somme sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Solution :19

On a $\forall(p,q)\in(\mathbb{N}*)^2$, $u_{p,q}>0$, on peut alors appliquer le théorème de Fubini . Soit $p\geq 1$, on a $\frac{1}{pq(p+q-1)}\sim\frac{1}{pq^2}$ ce qui entraine alors que la série $\sum_{q\geq 1} u_{p,q}$ est convergente calculons alors sa somme notée σ_p

✎.On a pour $p=1$ on a $\sigma_1=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et pour $p\geq 2$ on a

$$\sigma_p=\sum_{q=1}^{+\infty}u_{p,q}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{p(p-1)}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p+q-1}\right)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\left(\sum_{q=2}^{+\infty}\frac{1}{q(p+q-1)}\right)$$

Soit $N>p$, on a

$$S_{p,N}=\sum_{q=2}^{N}\frac{1}{q(q+p-1)}=\frac{1}{p-1}\left(\sum_{q=2}^{N}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p+q-1}\right)\right)=\frac{1}{p-1}\left(\sum_{q=2}^{N}\frac{1}{q}-\sum_{q=p+1}^{p+N-1}\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{p-1}\left(\sum_{q=2}^{p}\frac{1}{q}-\sum_{q=N+1}^{p+N-1}\frac{1}{q}\right)$$

Donc lorsque N tend vers $+\infty$ on trouve $\sum_{q=2}^{+\infty}\frac{1}{q(p+q-1)}=\frac{1}{p-1}\left(\sum_{q=2}^{p}\frac{1}{q}\right)$, et donc

$$S=\sum_{p=1}^{+\infty}\sigma_p=\sigma_1+\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p(p-1)}\left(\sum_{q=2}^{p}\frac{1}{q}\right)\right)=2\sigma_1-1+\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p(p-1)}\left(\sum_{q=2}^{p}\frac{1}{q}\right)\right)$$

Le théorème de Fubini permet d' intervertir les sommations , on a alors pour $q \geq 2$ fixé et pour p variant de q à $+\infty$, on obtient alors

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \left(\sum_{q=2}^{p} \frac{1}{q} \right) = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q} \left(\sum_{p=q}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \right)$$

Or la somme $\sum_{p=q}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)}$ est la somme d'une série télescopique et vaut $\frac{1}{q-1}$, donc $\sum_{p=q}^{+\infty} \frac{1}{p(p-1)} \left(\sum_{q=2}^{p} \frac{1}{q} \right) = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q(q-1)} = 1$ .Finalement $S = 2\sigma_1 = \frac{\pi^2}{3}$

Exercice :20

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{p,q} = \begin{cases} 0 & , \ si\ p = q \\ \frac{1}{p^2-q^2} & , \ si\ p \neq q \end{cases}$

① Calculer $\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$

② La famille $\left(u_{p,q}\right)_{p,q}$ est elle sommable ?

Solution :20

① Pour $q \in \mathbb{N}^*$ fixé on a $u_{p,q} \sim \frac{1}{p^2}$ et la série $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$ converge .

Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \neq q$, on a $u_{p,q} = \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q} \right)$ .Soit $N \geq 2q$, on a :

$$S_{N,q} = \sum_{p=0}^{N} u_{p,q} = \frac{1}{2q} \left(-\sum_{p=0}^{q-1} \frac{1}{q-p} + \sum_{p=0}^{q-1} \frac{1}{p+q} + \sum_{p=q+1}^{N} \frac{1}{p-q} - \sum_{p=q+1}^{N} \frac{1}{p+q} \right)$$

En effectuant dans chaque somme le changement d'indice convenable pour obtenir le même terme $\frac{1}{n}$, on obtient

$$S_{N,q} = \frac{1}{2q} \left(-\sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n} + \sum_{n=q}^{2q-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-q} \frac{1}{q} - \sum_{n=2q+1}^{N+q} \frac{1}{n} \right)$$

Tout calcul fait on a $S_{N,q} = -\frac{1}{4q^2} - \frac{1}{2q} \left(\sum_{n=N-q+1}^{N+q} \frac{1}{n} \right)$ et comme $0 \leq \sum_{n=N-q+1}^{N+q} \frac{1}{n} \leq \frac{2q}{N-q+1}$, la suite $\left(\sum_{n=N-q+1}^{N+q} \frac{1}{n} \right)_n$ converge de limite nulle .On déduit que la suite $\left(S_{N,q}\right)_N$ converge de limite $-\frac{1}{4q^2}$, c'est à dire que $S_q = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = -\frac{1}{4q^2}$ et on a $S_0 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .Finalement on a

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{q=1}^{+\infty} -\frac{1}{4q^2} = \frac{3}{4} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \right) = \frac{\pi^2}{8}$$

② En permutant les rôles de p et q , on obtient

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{q,p} \right) = -\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$$

ce qui prouve que la famille $(u_{p,q})_{p,q}$ n'est pas sommable

Exercice :21

Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme

Solution :21

Notons pour tout $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $u_{p,q} = \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} > 0$.On a pour q fixé dans $\mathbb{N}^*$, $u_{p,q} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$ on en déduit , par sommation télescopique , pour $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{p=0}^{N} u_{p,q} = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{N+q^2+1}$ qui converge pour $N \to +\infty$ vers $\frac{1}{q^2}$ ceci montre alors que la série $\sum_{p\geq 0} u_{p,q}$ converge de somme $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} = \frac{1}{q^2}$ et comme la série $\sum_{q\geq 1} \frac{1}{q^2}$ est convergente alors d'après le théorème de Fubini d'interversion de deux sommations , pour les suites doubles positives la famille $(u_{p,q})_{p\geq 0\,,\,q\geq 1}$ est sommable et on a

✎.Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q\geq 1} u_{p,q}$ est convergente

✎.La série $\sum_{p\geq 0} \left(\sum_{q=21}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ converge

✎. $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ .On conclut alors que $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} u_{p,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$