CORRIGÉ DM N°2 (CENTRALE MP, 1989)

Première partie : Généralités

I.1 a) Soit une suite (u_n) de S, constante égale à $a \in \mathbb{R}$.
Alors $a = \dfrac{a^2+a^2}{2} = a^2$, d'où $a \in \{0,1\}$.
La réciproque est immédiate.
$\boxed{\text{Les suites constantes de } S \text{ sont donc 0 et 1.}}$

b) Soit (u_n) une suite de S.
Si on suppose qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, par passage à la limite dans la relation $(\mathscr{R})$, on obtient $\ell^2 = \ell$, d'où $\ell \in \{0,1\}$.
De plus, par récurrence immédiate on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$, donc la seule limite infinie possible est $+\infty$.
Conclusion : $\boxed{\text{les limites possibles d'une suite de } S \text{ sont : } 0,\ 1 \text{ et } +\infty.}$

c) Soit (u_n) une suite de S. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = a \in \mathbb{R}$. Alors $a = a^2$, et par récurrence immédiate, $\forall p \in \mathbb{N},\ p \geqslant n \Longrightarrow u_p = a$.
De plus, $u_{n+1} = \dfrac{u_{n-1}^2 + u_n^2}{2} = a$, d'où $u_{n-1}^2 = a^2$, et comme $u_{n-1} \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, on a $u_{n-1} = a$. Par récurrence descendante, on obtiendra ainsi $u_0 = u_1 = \cdots = u_n = a$.
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est constante.}}$

d) Soit (u_n) une suite de S. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_{n+1} = 1$. Alors $u_{n+2} = \dfrac{1^2+1^2}{2} = 1$, et donc (u_n) a trois termes consécutifs égaux. D'après la question précédente, $\boxed{(u_n) \text{ est donc constante.}}$

e) Soit (u_n) une suite de S. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que $u_n = 0$.
Alors $\dfrac{u_{n-1}^2 + u_{n-2}^2}{2} = 0$, d'où $u_{n-1} = u_{n-2} = 0$.
La suite a donc trois termes consécutifs égaux, $\boxed{\text{elle est donc constante (égale à 0).}}$

I.2. a) Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2}{2} - \frac{u_{n-1}^2 + u_{n-2}^2}{2} = \frac{u_n^2 - u_{n-2}^2}{2} = \frac{(u_n - u_{n-2})(u_n + u_{n-2})}{2}$$

On a déjà vu que les termes de la suite sont tous positifs, donc $u_n + u_{n-2} \geqslant 0$. *Mais cela ne suffit pas pour conclure tout de suite !*
En effet, si $u_n + u_{n-2}$ était nul, on ne pourrait rien dire a priori ; mais ce cas est en fait exclu, car il impliquerait $u_n = u_{n-2} = 0$, et la suite serait nulle d'après I.1.e, donc constante, ce qui est exclu ici.
Ainsi, on a $u_n + u_{n-2} > 0$ ce qui permet de conclure : $\boxed{\text{Le signe de } u_{n+1} - u_n \text{ est celui de } u_n - u_{n-2}.}$

b) On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{N+1} \geqslant u_{N-1}$ et $u_{N+1} \geqslant u_N$. L'une de ces deux inégalités est nécessairement stricte d'après I.1.c, sinon la suite serait constante ce qui est exclu.

- Si $u_{N+1} = u_{N-1}$, alors $u_{N+2} = \dfrac{1}{2}(u_{N+1}^2 + u_N^2) = \dfrac{1}{2}(u_{N-1}^2 + u_N^2) = u_{N+1}$, et $u_{N+3} - u_{N+2}$ est du signe de $u_{N+2} - u_N = u_{N+1} - u_N > 0$. On obtient donc $u_{N+3} > u_{N+2}$ et $u_{N+3} > u_{N+1}$.
- Si $u_{N+1} = u_N$, alors $u_{N+2} - u_{N+1}$ est du signe de $u_{N+1} - u_{N-1} > 0$, donc $u_{N+2} > u_{N+1}$ et $u_{N+2} > u_N$.
  Quitte à remplacer N par $N+1$ ou $N+2$, on peut donc supposer $u_{N+1} > u_{N-1}$ et $u_{N+1} > u_N$.

Soit alors $\mathscr{P}(n)$ la propriété pour $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N+2$: « $u_{n+1} > u_n$ et $u_{n+1} > u_{n-1}$ ».

- $\mathscr{P}(N+2)$ est vraie par hypothèse.

- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $n \geqslant \mathrm{N}+2$.
  Comme $u_{n+2} - u_{n+1}$ a le signe de $u_{n+1} - u_{n-1}$, d'après $\mathscr{P}(n)$, $u_{n+2} > u_{n+1}$, et toujours d'après $\mathscr{P}(n)$, $u_{n+1} > u_n$ donc $u_{n+2} > u_n$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

  On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \mathrm{N}+2 \Longrightarrow u_{n+1} > u_n$, on peut conclure :

  $\boxed{\text{la suite est donc strictement croissante à partir du rang } \mathrm{N}+2 \text{ (au moins).}}$

- On a ici $u_0 = \sqrt{2} \approx 1,4,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = \dfrac{1}{2} = 0,5,\ u_4 = \dfrac{5}{8} \approx 0,6,\ u_5 = \dfrac{41}{128} \approx 0,3$

On a donc $u_5 < u_3$ et $u_5 < u_4$, la suite est donc décroissante à partir du rang 5. Étant minorée par 0, elle converge, vers une limite inférieure à $u_5 < 1$, et donc d'après I.1.b $\boxed{\text{elle converge vers 0.}}$

- On a ici $u_0 = 2,\ u_1 = 0,\ u_2 = 2$ donc $u_2 \geqslant u_0$ et $u_2 \geqslant u_1$, la suite est donc croissante à partir du rang 2. Comme elle ne pourrait converger que vers une limite supérieure à $u_2 > 1$, elle ne peut converger, et donc $\boxed{\text{elle diverge vers } +\infty.}$

I.3) Remarquons qu'on ne peut pas avoir $u_0 = u_1$, car alors on aurait ($u_2 \geqslant u_0$ et $u_2 \geqslant u_1$) ou ($u_2 \leqslant u_0$ et $u_2 \leqslant u_1$), donc la suite serait strictement croissante (ou décroissante) à partir du rang 4, ce qui est exclu par hypothèse.

Supposons $u_0 < u_1$

Alors on ne peut pas avoir $u_2 \leqslant u_0$ ni $u_1 \leqslant u_2$ sinon la suite serait strictement monotone à partir du rang 3, ce qui est exclu, donc $u_0 < u_2 < u_1$.
Puisque $u_3 - u_2$ a le signe de $u_2 - u_0$, on a $u_3 > u_2$. Si on avait $u_3 \geqslant u_1$, la suite serait strictement croissante à partir du rang 2 et cela est exclu. On a donc $u_3 \in \left]u_2, u_1\right[$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété pour $n \in \mathbb{N}$: « $u_{2n} < u_{2n+2} < u_{2n+3} < u_{2n+1}$ ».

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie d'après ce qui précède.
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On ne peut pas avoir $u_{2n+4} \leqslant u_{2n+2}$ ni $u_{2n+3} \leqslant u_{2n+4}$ sinon la suite serait strictement monotone à partir d'un certain rang. On a donc $u_{2n+2} < u_{2n+4} < u_{2n+3}$.
On montre de la même façon que $u_{2n+4} < u_{2n+5} < u_{2n+3}$, et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On obtient donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ suite décroissante, et de plus $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} < u_{2n+1}$.
La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par u_1, elle converge vers une limite ℓ.
De même, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0, elle converge donc vers une limite ℓ'.

De plus, on a $u_0 < \ell \leqslant \ell' < u_1$. En passant alors à la limite dans les deux égalités

$$u_{2n+1} = \frac{1}{2}(u_{2n}^2 + u_{2n-1}^2) \quad \text{et} \quad u_{2n+2} = \frac{1}{2}(u_{2n+1}^2 + u_{2n}^2)$$

on obtient

$$2\ell' = \ell^2 + \ell'^2 \quad \text{et} \quad 2\ell = \ell'^2 + \ell^2$$

d'où $\ell = \ell' \in \{0, 1\}$.
La valeur 0 est exclue puisque $\ell > u_0$, donc $\ell = \ell' = 1$ et finalement : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers 1.}}$

Le cas $u_0 > u_1$ se traiterait de façon similaire, on obtiendrait le même type de résultats, avec $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, convergeant toutes les deux vers 1.

I.4. Supposons (a) vrai

Si $u_\mathrm{N} \geqslant 1$ et $u_{\mathrm{N}+1} \geqslant 1$, une récurrence immédiate donne $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$.
On n'est donc pas dans le cas étudié au I.3, et donc la suite est strictement monotone à partir d'un certain rang. Puisque $u_{n+2} \geqslant \dfrac{1 + u_{n+1}^2}{2} \geqslant u_{n+1}$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$, elle est en fait strictement croissante donc $\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b).}}$

Supposons (b) vrai.

Notons N le rang à partir duquel la suite est strictement croissante.

Si on avait $u_\mathrm{N} < u_{\mathrm{N}+1} \leqslant 1$, alors $u_{\mathrm{N}+2} = \dfrac{1}{2}(u_{\mathrm{N}+1}^2 + u_\mathrm{N}^2) < u_{\mathrm{N}+1}^2 \leqslant u_{\mathrm{N}+1}$, ce qui contredit la croissance de $(u_n)_{n\geqslant\mathrm{N}}$.
On a donc $u_{\mathrm{N}+1} > 1$, et la suite étant croissante à partir du rang N ne peut être majorée (car sinon elle convergerait vers une limite $\ell \geqslant u_{\mathrm{N}+1} > 1$), donc elle diverge vers $+\infty$, et $\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(c).}}$

Supposons (c) vrai.

Par définition de la limite, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n > 1$. En particulier, $u_{n_0} \geqslant 1$ et $u_{n_0+1} \geqslant 1$, d'où $\boxed{(c) \Rightarrow (a).}$

$\boxed{\text{Conclusion : (a), (b) et (c) sont équivalentes.}}$

I.5. Les démonstrations sont similaires à celles de la question précédente.

I.6. Clairement, $(0,0) \in E_0$ et $(1,1) \in E_1$. On a vu de plus que $(2,0) \in E_{+\infty}$, donc E_0, E_1 et $E_{+\infty}$ sont non vides.

Soit $(x,y) \in Q$, (u_n) la suite de S correspondante.

• Si elle est constante, (x,y) est dans E_0 ou E_1 d'après I.1.a.

• Si elle est non constante et strictement décroissante à partir d'un certain rang, d'après I.5., elle converge vers 0, donc $(x,y) \in E_0$.

• Si elle est non constante et strictement croissante à partir d'un certain rang, d'après I.4., elle diverge vers $+\infty$, donc $(x,y) \in E_{+\infty}$.

• Si elle est non constante et non strictement monotone à partir d'un certain rang, d'après I.3. elle converge vers 1, donc $(x,y) \in E_1$.

On a énuméré tous les cas possibles donc : $\boxed{E_0 \cup E_1 \cup E_{+\infty} = Q.}$

Deuxième partie

II.1. Soient $(x,y) \in Q$ et $(x',y') \in Q$ tels que $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.

Alors $u_0(x,y) \leqslant u_0(x',y')$ et $u_1(x,y) \leqslant u_1(x',y')$, puis par récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x,y) \leqslant u_n(x',y')$, d'où par passage à la limite : $\boxed{\lambda(x,y) \leq \lambda(x',y').}$

II.2. a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété pour $n \in \mathbb{N}$: « $u_n(x,y) + \varepsilon \leqslant u_n(x',y')$ ».

• $\mathscr{P}(N-1)$ et $\mathscr{P}(N)$ sont vraies par hypothèse.

• Supposons $\mathscr{P}(n-1)$ et $\mathscr{P}(n)$ vraies pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$ fixé.

Alors $\begin{cases} u_{n-1}(x,y) + \varepsilon \leqslant u_{n-1}(x',y') \\ u_n(x,y) + \varepsilon \leqslant u_n(x',y') \end{cases}$

donc $\dfrac{u_{n-1}(x,y)^2 + u_n(x,y)^2 + 2\varepsilon\big(u_{n-1}(x,y) + u_n(x,y)\big) + 2\varepsilon^2}{2} \leqslant u_{n+1}(x',y')$

et donc $u_{n+1}(x,y) + \varepsilon\big(u_{n-1}(x,y) + u_n(x,y) + \varepsilon\big) \leqslant u_{n+1}(x',y')$.

Or, d'après I.3., on a $u_{n-1}(x,y) \geqslant 1$ ou $u_n(x,y) \geqslant 1$, et donc $u_{n-1}(x,y) + u_n(x,y) + \varepsilon \geqslant 1$, d'où finalement $u_{n+1}(x,y) + \varepsilon \leqslant u_{n+1}(x',y')$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N,\ u_n(x,y) + \varepsilon \geqslant u_n(x',y').}$

b) • Si $x \leqslant x'$, $y \leqslant y'$ et $(x,y) \neq (x',y')$:

On a dans ce cas $\dfrac{x^2+y^2}{2} < \dfrac{x'^2+y'^2}{2}$, d'où $u_2(x,y) < u_2(x',y')$, et de même, $u_3(x,y) < u_3(x',y')$.

Il est donc possible de choisir $\varepsilon > 0$ tel que $u_2(x,y) + \varepsilon \leqslant u_2(x',y')$ et $u_3(x,y) + \varepsilon \leqslant u_3(x',y')$.

Alors d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, $u_n(x,y) + \varepsilon < u_n(x',y')$, d'où par passage à la limite : $\lambda(x,y) + \varepsilon \leqslant \lambda(x',y')$, or $\lambda(x,y) = 1$ par hypothèse,et donc $\boxed{\lambda(x',y') = +\infty.}$

• Si $x \geqslant x'$, $y \geqslant y'$ et $(x,y) \neq (x',y')$:

On a donc $\lambda(x,y) \geqslant \lambda(x',y')$.

Si on avait $\lambda(x',y') = 1$, on pourrait appliquer la première partie de la question en échangeant les rôles de (x,y) et de (x',y'), et on aurait $\lambda(x,y) = +\infty$, ce qui est exclu.

On a donc forcément $\boxed{\lambda(x',y') = 0.}$

II.3. a) Notons X l'ensemble des $x \geqslant 0$ pour lesquels $\lambda(x,0) = 0$. On a $\lambda(0,0) = 0$, donc X est non vide.

De plus, on a vu que $\lambda(2,0) = +\infty$, donc d'après II.1., $\forall x \geqslant 2$, $\lambda(x,0) = +\infty$, et donc X est majoré par 2.

$\boxed{\text{d'où l'existence de } a = \sup X.}$

b) Soit $x \in [0, a[$. Alors par propriété de la borne supérieure, il existe $x' \in X$ tel que $x' > x$. On obtient donc $\lambda(x,0) \leqslant \lambda(x',0) = 0$, et donc $\boxed{\lambda(x,0) = 0.}$

c) On sait que, pour $x \geqslant 0$, s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant 1$ et $u_{N-1} \geqslant 1$, avec $u = u(x,0)$, alors $\lambda(x,0) \geqslant 1$ et s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \leqslant 1$ et $u_{N-1} \leqslant 1$, alors $\lambda(x,0) = 0$.

On calcule donc $u_0(x,0)$, $u_1(x,0)$, $\ldots$,$u_n(x,0)$ jusqu'à ce qu'on soit dans un des deux cas décrits ci-dessus, ou jusqu'à ce qu'on ait fait (par exemple) 10000 itérations (cas ennuyeux...). Cela est réalisé par la procédure `Appartient` ci-dessous, qui teste si x appartient à l'ensemble X mentionné à la question II.3.a.

On procède ensuite par dichotomie pour trouver a, sachant qu'il est compris entre $\sqrt{2}$ et 2, jusqu'à ce que l'on ait réussi à l'encadrer dans un intervalle de longueur ε donné. Cela est réalisé par la procédure `Calcula` ci-dessous.

Voici le programme MAPLE :

```
Appartient := proc (x)
local u0, u1, u2, fini, n, result;
u0 := x; u1 := 0; n := 0;
fini := false; result := false;
while not fini and n < 10000 do
   u2 := 0.5*(u0^2+u1^2);
   u0 := u1; u1 := u2;
   if  u0 >=1 and  u1>=1 then
      fini := true;
      result := false
   end if;
   if u0 <= 1 and u1 <= 1 then
      fini := true;
      result := true
   end if;
   n := n+1
end do;
return result
end proc;

Calcula := proc (eps)
local a0, a1, a;
a0 := evalf(sqrt(2));
a1 := 2;
while eps < abs(a1-a0) do
   a := (a0+a1)/2;
   if Appartient(a) then
      a0 := a
   else
      a1 := a
   end if
end do;
return a0
end proc;

Calcula(1e-5);
                          1.586921166

Digits := 50; Calcula(1e-45);
       1.5869279328386288144202613474710366118799939915798
```

II.4. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence immédiate, $x \longmapsto u_n(x,0)$ est une fonction polynomiale, et donc $\boxed{\text{est continue sur } \mathbb{R}.}$

b) On suppose que $\lambda(a,0) = 0$. Alors, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N(a,0) < \dfrac{1}{2}$ et $u_{N-1}(a,0) < \dfrac{1}{2}$.
Par continuité de $x \longmapsto u_N(x,0)$ et $x \longmapsto u_{N-1}(x,0)$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $u_N(a+\varepsilon,0) < 1$ et $u_{N-1}(a+\varepsilon,0) < 1$, d'où d'après I.5. : $\boxed{\lambda(a+\varepsilon,0) = 0.}$

Notons que ceci est impossible vu la définition de a.

c) Démonstration similaire à la précédente, mais en utilisant ici le résultat de la question I.4.
Là encore, le résultat obtenu contredit la définition de a.

d) $\lambda(a,0)$ ne pouvant être ni 0, ni $+\infty$, on a donc $\boxed{\lambda(a,0)=1}$. De plus, d'après II.3.b, pour $x > a$, $\boxed{\lambda(x,0)=+\infty.}$

e) Toujours d'après II.3.b, pour $y>0$, $\boxed{\lambda(a,y)=+\infty.}$

Troisième partie : Étude de E_0, E_1, $\mathrm{E}_{+\infty}$.

– non corrigée –

Quatrième partie : Étude de la rapidité de croissance

IV.1. On a, pour $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n^2+u_{n-1}^2)$ donc $u_{n+1}\geqslant \dfrac{1}{2}u_n^2$.

On a déjà calculé, pour $n\geqslant 2$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2}(u_n^2-u_{n-2}^2)$, donc $u_{n+1}-u_n\leqslant \dfrac{1}{2}u_n^2$.

Finalement $\boxed{\forall n\geqslant 2\ ,\ \dfrac{1}{2}u_n^2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n+\dfrac{1}{2}u_n^2.}$

IV.2. a) On a :

$$z_{n+1}-z_n=\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{u_{n+1}}{2}\right)-\frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{u_n}{2}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{2u_{n+1}}{u_n^2}\right)$$

D'après la question précédente, on a l'encadrement $1\leqslant \dfrac{2u_{n+1}}{u_n^2}\leqslant 1+\dfrac{2}{u_n}$, donc, par croissance de la fonction $\ln$:

$$0\leqslant z_{n+1}-z_n\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{2}{u_n}\right)$$

Puisque la suite (u_n) tend vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{u_n}\right)=0$, donc $z_{n+1}-z_n=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$. Une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ étant convergente, il résulte des théorèmes de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général $z_{n+1}-z_n$ converge.D'après un résultat du cours (lien entre suites et séries télescopiques), il en résulte que $\boxed{\text{la suite } (z_n) \text{ converge.}}$

b) • Puisqu'on suppose ici $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$, les termes de la suite autres que les deux premiers ne peuvent s'annuler. La relation $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n^2+u_{n-1}^2)$ donne alors l'inégalité stricte $u_{n+1}>\dfrac{1}{2}u_n^2$ pour $n\geqslant 3$. Pour la même raison, l'autre inégalité de la question IV.1 est aussi une inégalité stricte pour $n\geqslant 4$.
Les inégalités de la question précédente sont donc strictes pour $n\geqslant 4$ et on a alors

$$0<z_{n+1}-z_n<\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{2}{u_n}\right)\leqslant\frac{1}{2^n u_n}=\frac{1}{2^{n+1}v_n}\quad(1)$$

en vertu de l'inégalité bien connue $\ln(1+x)\leqslant x$.
On sait aussi, d'après la question I.4 que la suite (u_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang N. En sommant les inégalités précédentes on obtient, pour $n\geqslant \mathrm{N}$:

$$0<\sum_{k=n}^{+\infty}z_{k+1}-z_k<\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}v_k}$$

d'où, puisque $\dfrac{1}{v_k}\leqslant\dfrac{1}{v_n}$ pour $k\geqslant n\geqslant \mathrm{N}$:

$$0<\mathrm{L}-z_n<\frac{1}{v_n}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\right)=\frac{1}{2^n v_n}$$

ce qui est bien l'inégalité cherchée.

- On a donc, toujours pour $n \geqslant N$: $2^n L - \dfrac{1}{v_n} < \ln v_n < 2^n L$ d'où $e^{2^n L} e^{-\frac{1}{v_n}} < v_n < e^{2^n L}$. En posant $M = e^L$ on arrive à

$$M^{2^n} e^{-\frac{1}{v_n}} < v_n < M^{2^n}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on en déduit $v_n \underset{+\infty}{\sim} M^{2^n}$ et finalement : $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} 2M^{2^n}.}$

- On a de plus

$$0 < M^{2^n} - v_n < M^{2^n}\left(1 - e^{-\frac{1}{v_n}}\right) < M^{2^n}\frac{1}{v_n} < e^{\frac{1}{v_n}}$$

donc la différence entre u_n et l'équivalent trouvé est comprise entre 0 et $2e^{\frac{1}{v_n}}$.Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{v_n}} = 1$, on peut donc écrire : $\boxed{u_n = 2M^{2^n} + O(1).}$

IV.3 • L'encadrement

$$L - \frac{1}{2^n V_n} < z_n < L$$

permet d'obtenir une valeur approchée de L à 10^{-6} près dès que $2^n v_n \geqslant 10^6$ soit $2^{n-1} u_n \geqslant 10^6$
Pour $u_0 = u_1 = 2$, on trouve $u_6 = 1\,501\,594$ et il suffit de s'arrêter là. On obtient $L \approx 0,211389$.

- Le nombre de chiffres dans l'écriture en base 10 d'un nombre entier n est égal à $E\left(\dfrac{\ln n}{\ln 10}\right) + 1$ (car si n possède N chiffres, on a $10^{N-1} \leqslant n < 10^N$).

Pour $n = 20$, u_{20} est de l'ordre de $M^{2^{20}}$, donc $\ln(u_{20}) \approx 2^{20} L \approx 221657$ et u_{20} a approximativement 96000 chiffres.
Le calcul avec MAPLE (qui prend quand même 1mn) donne la valeur exacte : $\boxed{u_{20} \text{ possède 96265 chiffres.}}$
Le petit programme utilisé est le suivant :

```
u0 := 2; u1 := 2;
for k from 2 to 20 do
   u2 := (u0^2+u1^2)*(1/2);
   u0 := u1; u1 := u2;
   print(u1, trunc(ln(u1)/ln(10))+1)
end do;
```

IV.4. D'après I.5, la suite (u_n) est ici strictement décroissante à partir d'un certain rang N. On aura donc, pour $n \geqslant N+1$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + u_{n-1}^2) \leqslant \frac{1}{2}(u_{n-1}^2 + u_{n-1}^2) = u_{n-1}^2$$

On aura donc $\ln u_{n+1} \leqslant 2\ln u_{n-1}$ pour $n \geqslant N+1$, d'où $\ln u_n \leqslant 2^{\frac{n-N}{2}} \max(\ln u_N, \ln u_{N-1})$. Si on choisit N assez grand pour que $u_N < 1$ et $u_{N-1} < 1$, on aura donc l'existence d'une constante $K < 0$ telle que $\ln u_n \leqslant K.2^{n/2}$ pour n assez grand.

D'où, en posant $B = e^{-K}$, $u_n \leqslant B^{-2^{n/2}}$ (avec $B > 1$), à partir d'un certain rang N'. On peut alors trouver une constante A telle que l'inégalité $u_n \leqslant A.B^{-2^{n/2}}$ soit vérifiée pour tout n (en choisissant $A \geqslant 1$ pour que l'inégalité soit aussi vraie pour n variant de 0 à N', ce qui est possible puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆