Un système tridiagonal symétrique

Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |j-i| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi $A_1 = (0)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $P_n(x) = \det(A_n + xI_n)$ pour $n \geqslant 1$. Par convention, on pose $P_0(x) = 1$. Ainsi $P_1(x) = |x| = x, P_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$, $P_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$, $P_4(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, et tout $n \geqslant 2$, on a $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) = 0$.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'application P_n est une fonction polynomiale unitaire de degré n, et qu'elle a la même parité que n.
3. On fixe dans $\mathbb{R}$ la valeur de x, et on pose $u_n = P_n(x)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que si $x = 2\varepsilon$ (où $\varepsilon = \pm 1$) $u_n = (n+1)\varepsilon^n$
   (b) Montrer que si x n'est pas dans $\{-2, 2\}$, alors $u_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, en notant α et β les racines distinctes de l'équation $\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0$
   (c) On suppose $|x| < 2$. Avec $\theta = \arccos \dfrac{x}{2}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$
4. Calculer $I_{n,m} = \displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} P_n(x) P_m(x) \mathrm{d}\, x$, pour tous n, m dans $\mathbb{N}$
5. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le polynôme P_n possède n zéros distincts, tous réels, et donnés par : $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{n,k} = 2\cos\theta_{n,k}$, avec $\theta_{n,k} = \dfrac{k\pi}{n+1}$
   (b) Montrer alors que $P_{n-1}(a_{n,k}) = (-1)^{k+1}$
6. On se donne un réel λ et on considère le système $(S_{n,\lambda})$ défini par

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} + \lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + \lambda x_n = 0 \end{cases}$$

   (a) Résoudre $(S_{n,\lambda})$ quand $\lambda \notin \{a_{n,1}, \cdots, a_{n,n}\}$
   (b) On suppose que $\lambda = a_{n,k} = 2\cos\theta_{n,k}$.
   Montrer alors que le système est de rang $n-1$, et que l'ensemble des solutions est la droite engendrée par $v_n = (\sin\theta_k, -\sin 2\theta_k, \cdots, (-1)^{n-1}\sin n\theta_k)$.

Un système tridiagonal symétrique

1. Pour $n \geqslant 3$, on développe le déterminant égal à $P_n(x)$ par rapport à sa première ligne.

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}}_{=P_{n-1}(x)} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

On constate (après développement par rapport à la première colonne) que ce dernier déterminant, d'ordre $n-1$, est en fait égal à $P_{n-2}(x)$. Pour tout $n \geqslant 3$ et tout x de $\mathbb{R}$, on a ainsi obtenu : $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$. On voit que cette relation est encore vraie si $n = 2$, par définition de P_0, P_1, P_2

2. P_0 et P_1 sont polynomiales unitaires, avec $\deg P_0 = 0$ et $\deg P_1 = 1$. S'il en est ainsi de P_{n-2} et P_{n-1}, avec $n \geqslant 2$, alors $P_n : x \mapsto xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ est encore une application polynomiale unitaire, et elle est de degré n. La fonction P_0 est paire, et la fonction P_1 est impaire. On se donne un entier $n \geqslant 2$ et on suppose que P_{n-1} a la parité de $n-1$ et que P_{n-2} a celle de $n-2$ (donc celle de n.) L'application $x \mapsto xP_{n-1}$ a la parité contraire de celle de P_{n-1} donc a la parité de n.
Ainsi $P_n : x \mapsto xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ a la parité de n, ce qui achève la récurrence

3. (a) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $u_n - .2\varepsilon u_{n-1} + u_{n-2} = 0$ pour tout $n \geqslant 2$, et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2\varepsilon \end{cases}$.
L'équation caractéristique est $t^2 - 2\varepsilon t + 1 = 0$ donc $(t-\varepsilon)^2 = 0$. ε étant racine double, il existe λ, μ dans $\mathbb{R}$ tels que ; $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu)\varepsilon^n$. Les valeurs initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 2\varepsilon$ donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)\varepsilon^n$
(b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $u_n - xu_{n-1} + u_{n-2} = 0$ pour tout $n \geqslant 2$. L'équation caractéristique est $t^2 - xt + 1 = 0$. Le discriminant $\Delta = x^2 - 4$ est non nul puisque $x \notin \{-2, 2\}$. Notons alors α, β les racines (réelles ou complexes) distinctes de cette équation. On sait qu'il existe λ, μ (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$. Les conditions initiales $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = x \end{cases}$ donne $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda\alpha + \mu\beta = x = \alpha + \beta \end{cases}$ On en déduit $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha - \beta}$ et $\mu = \dfrac{\beta}{\beta - \alpha}$ donc $u_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$ pour tout $n \geqslant 0$
(c) Si $|x| < 2$, alors on peut poser $\theta = \arccos \dfrac{x}{2}$ et on a $0 < \theta < \pi$ et $x = 2\cos\theta$.
Avec les notations précédentes, on a $\Delta = -4\sin^2\theta$ donc $\begin{cases} \alpha = e^{i\theta} \\ \beta = e^{-i\theta} \end{cases}$. Dans ces conditions, pour tout $n \geqslant 0$:
$$u_n = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

4. Sur le segment $]-2, 2[$, on peut poser $x = 2\cos\theta$, avec $0 < \theta < \pi$. On obtient :
$$I_{n,m} = \int_0^\pi (4\sin^2\theta)\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\,\theta = \int_0^\pi \sin(n+1)\theta.\sin(m+1)\theta\mathrm{d}\,\theta$$
Ainsi
$$I_{n,m} = 2\int_0^\pi (\cos(m-n)\theta + \cos(m+n+2)\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = 2\int_0^\pi \cos(m-n)\theta\mathrm{d}\,\theta$$
Si $m \neq n$, on trouve $I_{m,n} = 0$. Si $m = n$, $I_{n,n} = 2\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}\,\theta = 2\pi$

5. (a) Sur $]-2, 2[$ on pose $x = 2\cos\theta$, avec $0 < \theta < \pi$. On a alors $\mathbb{P}_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. Dans ces conditions :
$$P_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin(n+1)\theta = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in \{1, \cdots, n\},\ \theta = \frac{k\pi}{n+1}$$
Ainsi les $x_{n,k} = \cos\theta_{n,k}$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, sont des racines (distinctes deux à deux) de P_n. On a donc obtenu n racines de P_n, toutes réelles, distinctes, et éléments de $]-2, 2[$. Comme ce polynôme est de degré n, on a obtenu toutes les racines de P_n

(b) On a $P_{n-1}(a_{n,k}) = P_{n-1}(2\cos\theta_{n,k}) = \dfrac{\sin n\theta_{n,k}}{\sin\theta_{n,k}} = \dfrac{\sin(k\pi - \theta_{n,k})}{\sin\theta_{n,k}} == (-1)^k + 1$

6. (a) Le déterminant du système, égal à $P_n(\lambda)$, est non nul si $\lambda \notin \{a_{n,1}, \cdots, a_{n,n}\}$. Ce système homogène est donc "de Cramer" : sa seule solution est $(0, 0, \cdots, 0)$

(b) Avec $\lambda = a_{n,k}$, le système n'est plus de Cramer car le déterminant est nul. On voit que le déterminant extrait des $n-1$ premières lignes et colonnes est $P_{n-1}(\lambda)$. Ici $P_{n-1}(\lambda) = P_{n-1}(a_{n,k}) = (-1)^{k+1}$ est non nul. La matrice du système est donc de rang $n-1$ (les lignes $L_1, \cdots, L_{n-1}$ sont libres.) Résoudre $(S_{n,\lambda})$, c'est trouver le noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang $n-1$. D'après le théorème de la dimension, les solutions forment une droite vectorielle. Pour conclure, il suffit de vérifier que le vecteur $v_n \neq 0$ est sur cette droite. Notons $v_{n,j} = (-1)^{j-1}\sin(j\theta_{n,k})$, pour $j \in \{1, \cdots, n\}$, les composantes de v_n. On pose aussi $v_{n,0} = 0$ et $v_{n,n+1} = (-1)^n \sin((n+1)\theta_{n,k}) = (-1)^n \sin(k\pi) = 0$. Avec cette définition étendue des $v_{n,j}$, vérifier que v_n est solution de $(S_{n,\lambda})$ consiste à établir les n égalités $v_{n,j-1} + \lambda v_{n,j} + v_{n,j+1} = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Effectivement, pour tout indice j de $\{1, \cdots, n\}$, on trouve :

$$\begin{aligned} v_{n,j-1} + v_{n,j+1} &= (-1)^{j-1}(\sin(j-1)\theta_{n,k} + \sin(j+1)\theta_{n,k}) \\ &= 2(-1)^{j-1}\sin(j\theta_{n,k})\cos(2\theta_{n,k}) \\ &= -(-1)^j\lambda\sin(j\theta_{n,k}) = -\lambda v_{n,j} \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de $(S_{n,\lambda})$ est la droite engendrée par v_n.