SESSION 2020

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Partie I - Développement ternaire

Etude de l'application σ

Q1. Montrons que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La suite nulle est une suite réelle bornée et donc un élément de ℓ^∞.
Soient $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) \in (\ell^\infty)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe deux réels positifs M_u et M_v tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leqslant M_u$ et $|v_n| \leqslant M_v$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n| \leqslant |\lambda| M_u + |\mu| M_v.$$

Puisque le réel $|\lambda|M_u + |\mu|M_v$ est indépendant de n, ceci montre que la suite $\lambda\,(u_n) + \mu\,(v_n)$ est un élément de ℓ^∞. En résumé, ℓ^∞ contient 0 et est stable par combinaison linéaire. Donc, ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En particulier,

$$\boxed{\ell^\infty \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

Montrons que $\|\ \|$ est une norme sur ℓ^∞.

• Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$. L'ensemble $E_u = \{|u_n|,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Donc, E_u admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $\|u\|$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$. $\|u\| \geqslant |u_1| \geqslant 0$. Donc, $\forall u \in \ell^\infty$, $\|u\| \geqslant 0$ (positivité).

• Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$. $\|u\| = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \leqslant \|u\| = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0 \Rightarrow u = 0$. Donc, $\forall u \in \ell^\infty$, $(\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0)$ (axiome de séparation).

• Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n| \leqslant |\lambda|\|u\|$. Ainsi, $|\lambda|\|u\|$ est un majorant de $E_{\lambda u}$. Puisque $\|\lambda u\|$ est le plus petit de ces majorants, on a montré que $\|\lambda u\| \leqslant |\lambda|\|u\|$.

Cette inégalité est vraie pour tout $u \in \ell^\infty$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Inversement, si $\lambda = 0$, on a immédiatement $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$. Sinon, $\lambda \neq 0$ et on applique l'inégalité précédente au réel $\lambda' = \dfrac{1}{\lambda}$ et à la suite $u' = \lambda u \in \ell^\infty$. On obtient $\|u\| = \|\lambda' u'\| \leqslant |\lambda'|\|u'\| = \dfrac{1}{|\lambda|}\|u\|$ et donc $|\lambda|\|u\| \leqslant \|\lambda u\|$ (car $|\lambda| > 0$). Finalement, $\forall u \in \ell^\infty$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ (homogénéité).

• Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux éléments de ℓ^∞. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Ainsi, $\|u\| + \|v\|$ est un majorant de E_{u+v}. Puisque $\|u+v\|$ est le plus petit de ces majorants, on a donc $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$. Donc, $\forall (u, v) \in (\ell^\infty)^2$, $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire).

On a montré que

$$\boxed{\|\ \| \text{ est une norme sur } \ell^\infty.}$$

Q2. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|v_n| = \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \frac{\|u\|}{3^n}.$$

La série géométrique de terme général $\dfrac{\|u\|}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge car $\dfrac{1}{3} \in]-1, 1[$. Donc, la série de terme général v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et en particulier converge.

$$\boxed{\forall u \in \ell^\infty, \text{ la série de terme général } \frac{u_n}{3^n},\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ est convergente.}}$$

Q3. σ est définie sur ℓ^∞ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $(u,v) \in (\ell^\infty)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\sigma(\lambda u + \mu v) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda u_n + \mu v_n}{3^n} \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n} \text{ (car les deux séries convergent)} \\ &= \lambda\sigma(u) + \mu\sigma(v).\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\sigma \text{ est une forme linéaire sur } \ell^\infty.}$$

Soit $u \in \ell^\infty$.

$$|\sigma(u)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \|u\| \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\|u\|.$$

Ainsi, il existe un réel k (à savoir $k = \frac{1}{2}$) tel que pour tout $u \in \ell^\infty$, $|\sigma(u)| \leqslant k\|u\|$. Puisque σ est une application linéaire de l'espace normé $(\ell^\infty, \| \ \|)$ vers l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, | \ |)$, on sait que ceci montre que

$$\boxed{\sigma \text{ est une forme linéaire sur } \ell^\infty\text{, continue sur l'espace vectoriel normé } (\ell^\infty, \| \ \|).}$$

Q4. Soit $t \in T$ (en particulier, $t \in \ell^\infty$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant t_n \leqslant 2$, et donc

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{3^n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1.$$

Donc,

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in T,\ \sigma(t) \in [0,1].}$$

Q5. $\sigma(\tau) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_n}{3^n} = \frac{\tau_1}{3^1} = \frac{1}{3}$ et $\sigma(\tau') = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau'_n}{3^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

Ainsi, τ et τ' sont deux éléments distincts de T tels que $\sigma(\tau) = \sigma(\tau')$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{l'application } \sigma \text{ n'est pas injective sur } T.}$$

Développement ternaire propre

Q6. Soit $x \in [0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $t_n(x)$ est un entier relatif. Ensuite,

$$3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leqslant 3 \times 3^{n-1}x = 3^n x < 3\left(\lfloor 3^{n-1}x \rfloor + 1\right) = 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor + 3.$$

Tout d'abord, $3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $3^n x$ et $\lfloor 3^n x \rfloor$ est le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à $3^n x$. Donc, $3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leqslant \lfloor 3^n x \rfloor$ puis $t_n(x) \geqslant 0$.
Ensuite, $\lfloor 3^n x \rfloor \leqslant 3^n x < 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor + 3$ et donc $\lfloor 3^n x \rfloor < 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor + 3$ ou encore $\lfloor 3^n x \rfloor \leqslant 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor + 2$ (car $\lfloor 3^n x \rfloor$ et $3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor + 2$ sont des entiers). On en déduit que $t_n(x) = \lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1}x \rfloor \leqslant 2$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n(x) \in \{0,1,2\}$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ t(x) \in T.}$$

Q7. Soit $x \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor - 3\lfloor 3^n x \rfloor}{3^{n+1}} = \dfrac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}} \geqslant 0$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - x_n + \left(\dfrac{1}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{3^n}\right) = \dfrac{t_{n+1}(x) - 2}{3^{n+1}} \leqslant 0$. Donc, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroisante.

Enfin, $y_n - x_n = \dfrac{1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. On a montré que

$$\boxed{\text{les suites } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$$

On en déduit que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une limite commune ℓ. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor 3^n x \rfloor \leqslant 3^n x < \lfloor 3^n x \rfloor + 1$ puis $x_n \leqslant x < y_n$ après division par le réel strictement positif 3^n. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell \leqslant x \leqslant \ell$ et donc $\ell = x$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k(x)}{3^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor 3^k x \rfloor - 3\lfloor 3^{k-1}x \rfloor}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lfloor 3^k x \rfloor}{3^k} - \frac{\lfloor 3^{k-1}x \rfloor}{3^{k-1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \text{ (en posant } x_0 = \lfloor x \rfloor = 0) \\
&= x_n - x_0 \text{ (somme télescopique)} \\
&= x_n.
\end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k(x)}{3^k} = x$.

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k(x)}{3^k}.}$$

Ainsi, pour tout x de $[0,1[$, il existe $t \in T$ tel que $\sigma(t) = x$. D'autre part, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = 2$, alors la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans T puis

$$\sigma(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \dfrac{1}{3}} = 1$$

et donc 1 a également un antécédent par σ dans T. Ceci montre que

$$\boxed{\text{l'application } \left\{\begin{array}{ccc} T & \to & [0,1] \\ u & \mapsto & \sigma(u) \end{array}\right. \text{ est surjective.}}$$

Q8. *Informatique pour tous.*

```python
def flotVersTern(n,x):
    T=[]
    for k in range(1,n+1):
        T.append(int(3**k*x)-3*int(3**(k-1)*x))
    return T
```


Q9. *Informatique pour tous.*

```
def ternVersFlot(l):
    x=0
    for k in range(len(l)):
        x+=l[k]/3**(k+1)
    return x
```

Q10. *Informatique pour tous.*

```
 def ajout(l):
    s=0
    for k in l:
        s+=k
    if s%2==0:
        l.append(-1)
    else:
        l.append(2)
    return(l)
```

```
def verif(l):
    s=0
    for k in range(len(l)-1):
        s+=l[k]
    if s%2==0 and l[len(l)-1]==-1:
        return True
    if s%2==0 and l[len(l)-1]==2:
        return False
    return False
```

Remarque. On peut remplacer `l[len(l)-1]` par `l[-1]`.

Partie II - Etude d'une fonction définie par une série

Q11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi_n(x) = \dfrac{1+\sin(nx)}{3^n}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x)$ existe et

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{1+|\sin(nx)|}{3^n} \leqslant \frac{2}{3^n}.$$

La série géométrique de terme général $\dfrac{2}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et donc la série numérique de terme général $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et donc converge. Ainsi, pour tout réel x, $\varphi(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Chaque fonction φ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n'(x) = \dfrac{n\cos(nx)}{3^n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|\varphi_n'(x)| = \frac{n|\cos(nx)|}{3^n} \leqslant \frac{n}{3^n},$$

puis $\|\varphi_n'\|_\infty \leqslant \dfrac{n}{3^n}$. $n^2 \times \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{n^3}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\dfrac{n}{3^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Ceci montre que la série de terme général $\dfrac{n}{3^n}$ converge et il en est de même de la série de terme général $\|\varphi_n'\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Par suite, la série de fonctions de terme général φ_n', $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur $\mathbb{R}$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général φ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers φ sur $\mathbb{R}$,
- chaque fonction φ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,
- la série de fonctions de terme général φ_n', $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et la dérivée de φ s'obtient par dérivation terme à terme.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Q12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{e^{inx}}{3^n}\right| = \dfrac{1}{3^n}$. Donc, la série numérique de terme général $\dfrac{e^{inx}}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge absolument et en particulier converge. On sait alors que la série des parties imaginaires converge et que

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n}.$$

D'autre part, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$. Donc,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{3^n}\right).$$

Ensuite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{3}\right)^n = \frac{e^{ix}}{3}\times\frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{3}} = \frac{e^{ix}}{3-e^{ix}}$ puis

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{3^n}\right) &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{3-e^{ix}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}\left(3-e^{-ix}\right)}{\left(3-e^{ix}\right)\left(3-e^{-ix}\right)}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{3e^{ix}-1}{10-6\cos x}\right) = \frac{3\sin x}{10-6\cos x}\end{aligned}$$

et finalement,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin x}{10-6\cos x} = \frac{5-3\cos x+3\sin x}{10-6\cos x}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{5-3\cos x+3\sin x}{10-6\cos x}.}$$

Q13. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n} &= \varphi'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sin x}{5-3\cos x}\right)'\\ &= 3\frac{(\cos x)(5-3\cos x)-(3\sin x)(\sin x)}{(5-3\cos x)^2} = 3\frac{5\cos x-3\cos^2 x-3\sin^2 x}{(5-3\cos x)^2} = \frac{15\cos x-9}{(5-3\cos x)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{15\cos x-9}{(5-3\cos x)^2}.}$$

Q14. Pour tout réel x, $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} + 3\dfrac{\sin x}{10-6\cos x}$ puis $\displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)\ dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\ dx + 3\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\ dx$ et donc

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\ dx = \frac{1}{3}\int_0^\pi \left(\varphi(x)-\frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^\pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n}\right) dx.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \pi]$, posons $\psi_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{3^n}$. Chaque fonction ψ_n est continue sur le segment $[0, \pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\psi_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{3^n}$ de sorte que la série de fonctions de terme général ψ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et en particulier uniformément sur le segment $[0, \pi]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin x}{10 - 6\cos x}\,dx &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{3^n}\,dx\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{\cos(nx)}{n3^n}\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-(-1)^n + 1}{n3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^{n+1}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{\sin x}{10 - 6\cos x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^{n+1}}.}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \frac{1}{3}\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = -\frac{1}{3}\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ et finalement,

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{10 - 6\cos x}\,dx = \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{4}{3}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{\ln(2)}{3}.$$

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{\sin x}{10 - 6\cos x}\,dx = \frac{\ln(2)}{3}.}$$

Q15. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{10 - 6\cos x}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^\pi \frac{6\sin x}{10 - 6\cos x}\,dx = \frac{1}{6}\left[\ln|10 - 6\cos x|\right]_0^\pi = \frac{1}{6}(\ln(16) - \ln(4)) = \frac{1}{6}\ln\left(2^2\right) = \frac{\ln(2)}{3}$.

Partie III - Développements ternaires aléatoires

Q16. Soient $n \geqslant 1$ et $N \geqslant 2$. $T_{n,N}$ prend un nombre fini de valeurs et donc $T_{n,N}$ admet une espérance et une variance.

$$E(T_{n,N}) = 0 \times P(T_{n,N} = 0) + 1 \times P(T_{n,N} = 1) + 2 \times P(T_{n,N} = 2) = \frac{1}{N} + 2\left(1 - \frac{2}{N}\right) = 2 - \frac{3}{N}.$$

Ensuite, d'après la formule de transfert,

$$E\left(T_{n,N}^2\right) = 0 \times P(T_{n,N} = 0) + 1^2 \times P(T_{n,N} = 1) + 2^2 \times P(T_{n,N} = 2) = \frac{1}{N} + 4\left(1 - \frac{2}{N}\right) = 4 - \frac{7}{N},$$

et donc d'après la formule de Koënig-Huygens,

$$V(T_{n,N}) = E\left(T_{n,N}^2\right) - (E(T_{n,N}))^2 = \left(4 - \frac{7}{N}\right) - \left(2 - \frac{3}{N}\right)^2 = \frac{5}{N} - \frac{9}{N^2} = \frac{5N - 9}{N^2}.$$

Par linéarité de l'espérance, X_N admet une espérance et

$$\begin{aligned}E(X_N) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3^n}E(T_{n,N}) = \left(2 - \frac{3}{N}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3^n} \\ &= \left(2 - \frac{3}{N}\right)\frac{1}{3}\frac{1 - \frac{1}{3^N}}{1 - \frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{3}{2N}\right)\left(1 - \frac{1}{3^N}\right).\end{aligned}$$

Enfin, les variables $\dfrac{1}{3^n}T_{n,N}$ étant indépendantes et en particulier deux à deux indépendantes, X_N admet une variance et

$$\begin{aligned}V(X_N) &= \sum_{n=1}^{N} V\left(\frac{1}{3^n}T_{n,N}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{9^n}V(T_{n,N}) = \frac{5N-9}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{9^n} = \frac{5N-9}{N^2}\frac{1}{9}\frac{1-\frac{1}{9^N}}{1-\frac{1}{9}}\\ &= \frac{5N-9}{8N^2}\left(1-\frac{1}{9^N}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X_N) = \left(1-\frac{3}{2N}\right)\left(1-\frac{1}{3^N}\right) \text{ et } V(X_N) = \frac{5N-9}{8N^2}\left(1-\frac{1}{9^N}\right).}$$

Q17. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$0 \leqslant P(|X_N - E(X_N)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X_N)}{\varepsilon^2} = \frac{5N-9}{8N^2\varepsilon^2}\left(1-\frac{1}{9^N}\right).$$

Or, $\dfrac{5N-9}{8N^2\varepsilon^2}\left(1-\dfrac{1}{9^N}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{5}{8N} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_N - E(X_N)| \geqslant \varepsilon) = 0$.

Q18. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \geqslant 2$. $|X_N - 1| \leqslant |X_N - E(X_N)| + |E(X_N) - 1|$ et donc

$$\left(|X_N - E(X_N)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |E(X_N) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |X_N - 1| < \varepsilon$$

puis, $\left\{|X_N - E(X_N)| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{|E(X_N) - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \{|X_N - 1| < \varepsilon\}$. Par passage au complémentaire, on obtient

$$\{|X_N - 1| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|E(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

et donc

$$\begin{aligned}P(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) &\leqslant P\left(\left\{|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|E(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\\ &\leqslant P\left(|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|E(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}$$

$E(X_N) = \left(1-\dfrac{3}{2N}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^N}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et donc $E(X_N) - 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Par suite, pour N grand, $|E(X_N) - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et donc $P\left(|E(X_N) - 1| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right) = 0$. Par suite, pour N grand,

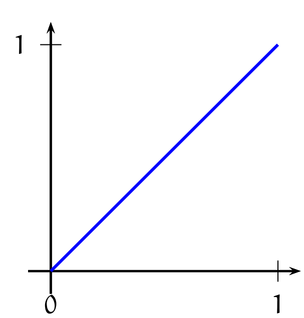
$$P(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|X_N - E(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} P\left(|X_N - E(X_N)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} P(|X_N - 1| \geqslant \varepsilon) = 0$.

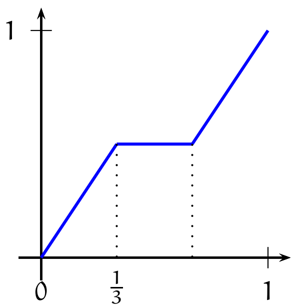
Partie IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Etude d'une suite de fonctions

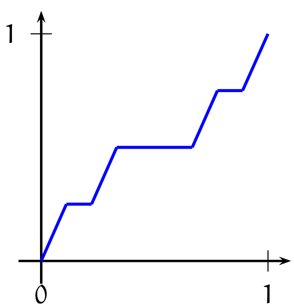
Q19. Pour tout réel $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$.



Ensuite, pour tout réel $x \in [0,1]$, $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{2} \text{ si } x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[\\ \dfrac{3x-1}{2} \text{ si } x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$.



Si $x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, $f_2(x) = \dfrac{f_1(3x)}{2}$. Si $x \in \left[0, \dfrac{1}{9}\right]$, alors $3x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ puis $f_2(x) = \dfrac{3(3x/2)}{2} = \dfrac{9x}{4}$. Si $x \in \left]\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}\right[$, alors $3x \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$ puis $f_2(x) = \dfrac{1/2}{2} = \dfrac{1}{4}$. Si $x \in \left[\dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{3}\right[$, alors $3x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$ puis $f_2(x) = \dfrac{(3(3x)-1)+2}{2} = \dfrac{9x-1}{4}$ ...



Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n([0,1]) \in [0,1]$.

- Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x = f_0(x) \leqslant 1$. L'affirmation est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $f_n([0,1]) \subset [0,1]$. Soit $x \in [0,1]$.
Si $x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, alors $0 \leqslant 3x \leqslant 1$ puis $0 \leqslant \dfrac{f_n(3x)}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant 1$.
Si $x \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant 1$.
Si $x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$, alors $0 \leqslant 3x-2 \leqslant 1$ puis $0 \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ et donc $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant 1$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n([0,1]) \in [0,1]$.

Q20. *Informatique.*

```python
def cantor(n,x):
    if n==0:
        return x
    else:
        if 0<=x<=1.0/3:
            return (cantor(n-1,3*x))/2
        if 1.0/3<x<2.0/3:
            return 1.0/2
        if 2.0/3<=x<=1:
            return 1.0/2+(cantor(n-1,3*x-2))/2
```


Q21. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}}$.

- Si $x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, $|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\dfrac{3x}{2} - x\right| = \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{1}{3 \times 2}$.
Si $x \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$, $|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right| = 0 \leqslant \dfrac{1}{3 \times 2}$.
Si $x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$, $|f_1(x) - f_0(x)| = \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{3x-2}{2} - x\right| = \dfrac{1-x}{2} \leqslant \dfrac{1 - \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{3 \times 2}$.
L'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour tout $x \in [0,1]$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}}$.
Si $x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, $|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{2}|f_{n+1}(3x) - f_n(3x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \dfrac{1}{3 \times 2^{n+2}}$.
Si $x \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[$, $|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = 0 \leqslant \dfrac{1}{3 \times 2^{n+2}}$.
Si $x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$, $|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{2}|f_{n+1}(3x-2) - f_n(3x-2)| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \dfrac{1}{3 \times 2^{n+2}}$.

L'inégalité est démontrée par récurrence.

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0,1]$, $f_n(x) = f_0(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$ (somme télescopique). Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $g_k = f_{k+1} - f_k$. Pour $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1]$, $|g_k(x)| = |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{3 \times 2^{k+1}}$ et donc $\|g_k\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{3 \times 2^{k+1}}$.
Puisque la série géométrique de terme général $\dfrac{1}{3 \times 2^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général g_k, $k \in \mathbb{N}$, converge normalement et en particulier uniformément sur $[0,1]$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = f_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g_k$, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une certaine fonction que l'on note f.

Q23. En particulier, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc, f est à valeurs dans $[0,1]$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$.

- L'affirmation est vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons la fonction f_n croissante sur $[0,1]$. Soit $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $x \leqslant y$.
Si $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{3}$, alors $0 \leqslant 3x \leqslant 3y \leqslant 1$ puis $f_{n+1}(x) = \dfrac{f_n(3x)}{2} \leqslant \dfrac{f_n(3y)}{2} = f_{n+1}(y)$.
Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3} \leqslant y$, alors $f_{n+1}(x) = \dfrac{f_n(3x)}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant f_{n+1}(y)$.
Si $\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant y \leqslant \dfrac{2}{3}$, alors $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{f_n(3y)}{2} = f_{n+1}(y)$ et en particulier, $f_{n+1}(x) \leqslant f_{n+1}(y)$.
Si $\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{2}{3} \leqslant y$, alors $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} \leqslant f_{n+1}(y)$.
Si $\dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, alors $0 \leqslant 3x - 2 \leqslant 3y - 2 \leqslant 1$ puis $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3y-2)}{2} = f_{n+1}(y)$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$.

Soient alors x et y deux éléments de $[0,1]$ tels que $x \leqslant y$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leqslant f_n(y)$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(x) \leqslant f(y)$. On a montré que f est une fonction croissante sur $[0,1]$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$.

- L'affirmation est vraie quand $n = 0$.

- Soit $n \geqslant 0$. Supposons f_n continue sur $[0,1]$. La fonction $x \mapsto 3x$ est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ à valeurs dans $[0,1]$ et la fonction f_n est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction f_{n+1} est continue sur $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$. De même, la fonction f_{n+1} est continue sur $\left]\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right[$ et sur $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$. Il reste à analyser la continuité de f_{n+1} en $\dfrac{1}{3}$ à droite et $\dfrac{2}{3}$ à gauche.

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\x>\frac{1}{3}}} f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} = \frac{f_n(1)}{2} = f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ($f_0(1) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(1) = (1+f_n(1))/2$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = 1$). Donc, f_{n+1} est continue en $\dfrac{1}{3}$ à droite.

De même, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{2}{3}\\x<\frac{2}{3}}} f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{f_n(0)}{2} = f_{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)$ ($f_0(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(0) = f_n(0)/2$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$). Donc, f_{n+1} est continue en $\dfrac{2}{3}$ à gauche.

Finalement, la fonction f_{n+1} est continue sur $[0,1]$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$.

Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $[0,1]$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$. Donc, la fonction f est continue sur $[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque la fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, on sait que $f([0,1]) = \left[\underset{[0,1]}{\mathrm{Min}}(f), \underset{[0,1]}{\mathrm{Max}}(f)\right]$. Puisque f est croissante sur $[0,1]$, $\underset{[0,1]}{\mathrm{Min}}(f) = f(0) = 0$ et $\underset{[0,1]}{\mathrm{Max}}(f) = f(1) = 1$ et donc $f([0,1]) = [0,1]$. Ceci montre que f est surjective.

