Planche n$^{\text{o}}$ 15. Intégrales dépendant d'un paramètre

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 (**)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n}$.

1) Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0, +\infty[$.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3}\, dt$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 (* I) (très long)** (Intégrale de Poisson)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\, d\theta$.

1) a) Montrer que F est paire, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

c) Montrer que F est dérivable sur $]-1, 1[$ puis sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
Préciser une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.

d) Calculer $F'(x)$.

e) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (F(x) - 4\pi \ln x)$.

f) En déduire $F(x)$ pour tout réel x. Tracer le graphe de F.

2) a) Quand $x \in]-1, 1[$, retrouver ce résultat en écrivant d'abord $\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$ comme somme d'une série (commencer par dériver la fonction de θ).

b) En déduire $F(x)$ pour tout réel x de $]-1, 1[$ puis pour tout réel x.

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 (I)** (Un calcul de l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$ et $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$.

1) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
2) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser G'.
3) Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5) En déduire I.
6) Déterminer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ et $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 4 (***)

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)\, dt$ (on dérivera l'intégrale à paramètre et on admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice n$^{\text{o}}$ 5 (***)

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\, dt$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 6 (** I) (très long)**

Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\, dt$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ (indication : trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par ces deux fonctions).

Exercice n° 7 (I)** (Produit de convolution)

1) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues et T-périodiques (T réel strictement positif). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f * g(x) = \int_0^T f(x-t)g(t)\ dt.$$

Montrer que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et T-périodique.

2) $*$ est donc une loi interne sur E, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques. Montrer que cette loi est commutative.

Exercice n° 8 (I)** (Transformée de Fourier)

1) Pour $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose $\widehat{f}\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\ dt$. Montrer que $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\widehat{f}^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et intégrable sur $\mathbb{R}$). Déterminer $\widehat{f'}$ en fonction de $\widehat{f}$.

3) En admettant que , déterminer $\widehat{f * g}$ en fonction de $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$.

