

DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: autorisée

durée: 4 heures

Sujet

<u>Écrantage d'un champ magnétique</u>	2
I. <u>Deux solénoïdes</u>	2
II. <u>Cylindre conducteur dans un solénoïde</u>	3
A. <u>Approximation du cylindre surfacique</u>	3
B. <u>Cylindre non surfacique: estimation de la pulsation de coupure</u>	4
<u>Lévitaiton d'une sphère supraconductrice dans un champ magnétique</u>	6
I. <u>Champ magnétique au voisinage d'un axe de révolution</u>	7
II. <u>Force exercée sur un anneau supraconducteur</u>	8
III. <u>Équilibre de lévitation magnétique d'une sphère supraconductrice</u>	9
A. <u>Sphère sur l'axe de la spire</u>	10
B. <u>Sphère en dehors de l'axe de la spire</u>	10
C. <u>Mesures de variation de g. Sensibilité</u>	10
<u>Pollution de l'air par le mercure</u>	12
I. <u>Incinération d'une pile bouton</u>	13
A. <u>Diagramme potentiel-pH du zinc</u>	13
B. <u>Étude de la pile</u>	14
C. <u>Incinération de la pile</u>	14
II. <u>Pollution d'un local par du mercure liquide</u>	14

Remarque :

On rappelle que toute réponse numérique sans unité ou dont l'unité est mauvaise est considérée comme fausse.

Écrantage d'un champ magnétique

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

On utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ, z) et la base locale associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Dans tout le problème, on se place dans l'approximation des régimes quasi permanents.

I. Deux solénoïdes

On considère deux solénoïdes Σ_1 et Σ_2 coaxiaux, d'axe Oz , de même longueur $\ell = 20 \text{ cm}$ et de rayons $r_1 = 10 \text{ cm}$ et $r_2 = 5 \text{ cm}$ et comportant respectivement $N_1 = 700$ et $N_2 = 500$ spires jointives, enroulées dans le même sens (voir *Figure 1*). Ces deux bobines ont pour résistance respectivement R_1 et $R_2 = 50 \Omega$. On pourra introduire les nombres de spires par unité de longueur $n_1 = \frac{N_1}{\ell}$ et $n_2 = \frac{N_2}{\ell}$.

Dans toute la suite on négligera les effets de bord; on considèrera donc les solénoïdes comme très longs. On admet que le champ magnétique créé par un solénoïde infini à l'extérieur du solénoïde est nul.

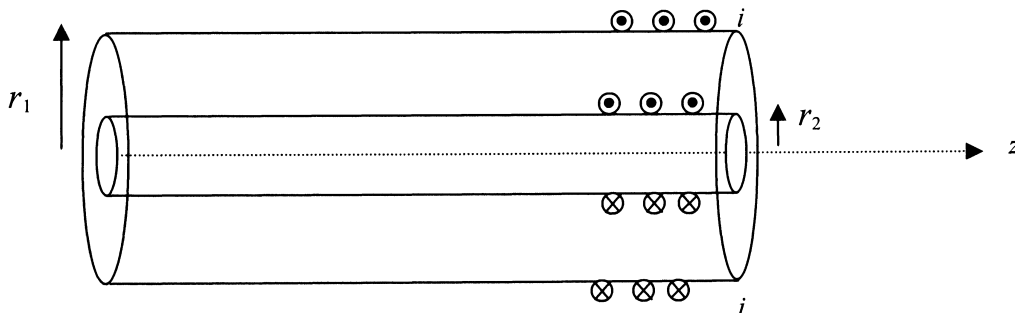


Figure 1. Vue en coupe longitudinale

Le solénoïde Σ_1 , est parcouru par un courant d'intensité i_1 , Σ_2 , étant en circuit ouvert.

1. Démontrer l'expression du champ magnétique \vec{B}_1 , créé dans tout l'espace.
2. Déterminer l'expression du coefficient d'inductance L_1 , de Σ_1 en fonction de μ_0 , N_1 , r_1 , ℓ . Donner l'expression de L_2 , l'inductance de Σ_2 .
3. Définir le coefficient de mutuelle inductance M entre les deux solénoïdes. Déterminer l'expression de M en fonction de μ_0 et de certaines des grandeurs suivantes : N_1 , N_2 , r_1 , r_2 , ℓ .
4. Vérifier que $\frac{M}{L_2}$ est égal au rapport des nombres de spires.

5. Application numérique : calculer L_2 et M .

Le solénoïde Σ_1 est alimenté par un générateur idéal de courant électromoteur $i_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$ avec $I_0 = 1 \text{ A}$; les deux extrémités du solénoïde Σ_2 , sont reliées par un fil sans résistance.

6. Quelle est l'expression de la force électromotrice induite dans Σ_2 en fonction des inductances et des intensités ?

7. Déterminer l'amplitude complexe du courant $\underline{i}_2(t)$ circulant dans Σ_2 , en fonction de M , L_2 , R_2 , ω et $\underline{i}_1(t)$.

8. Écrire cette amplitude sous la forme $\underline{i}_2 = \frac{K j \frac{\omega}{\omega_c} \underline{i}_1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$. On donnera l'expression de K en fonction de N_1 et N_2 et celle de ω_c en fonction de R_2 et L_2 .

9. En déduire l'expression de l'amplitude complexe \underline{B}_{int} , du champ magnétique total à l'intérieur du solénoïde Σ_2 . Montrer que ce champ tend vers 0 à haute fréquence. Commenter ce résultat à partir de l'équation obtenue à la question 7 .

10. Applications numériques :

- Calculer ω_c ainsi que la fréquence correspondante
- Calculer le rapport des amplitudes $\frac{|\underline{B}_{int}|}{|\underline{B}_1|}$ pour une fréquence de 11 kHz .

II. Cylindre conducteur dans un solénoïde

Le solénoïde Σ_2 est remplacé par un cylindre conducteur de rayon intérieur $r_2 = 5 \text{ cm}$, d'épaisseur $h = 50 \mu\text{m}$, de longueur ℓ et de conductivité $\gamma = 4 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$. On néglige à nouveau les effets de bord.

Le solénoïde Σ_1 est encore traversé par un courant $i_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

A. Approximation du cylindre surfacique

Dans un premier temps, on assimile le cylindre à une surface.

11. Que peut-on déduire des symétries concernant le champ magnétique \vec{B} dans tout l'espace. Idem pour le champ \vec{E} apparu dans l'espace et pour le vecteur densité de courant surfacique \vec{j}_s apparu sur le conducteur.

12. On désigne par \vec{B}_e le champ magnétique dans l'espace $r_2 < r < r_1$ et par \vec{B}_i le champ magnétique dans l'espace $r < r_2$.

- Déterminer \vec{B}_e . On désigne la composante scalaire par B_e .
- Montrer que \vec{B}_i est uniforme. On désigne la composante scalaire par B_i .

13. On désigne par \vec{E}_e le champ électrique dans l'espace $r_2 < r < r_1$ (composante scalaire E_e) et par \vec{E}_i le champ électrique dans l'espace $r < r_2$ (composante scalaire E_i).

- Exprimer E_i en fonction notamment de B_i .
- Exprimer E_e .
- \vec{E} est-il continu en $r=r_2$? En quoi ce résultat était-il prévisible?

14. Justifier rapidement que l'on puisse écrire $\vec{j}_s = \gamma h \vec{E}$ où \vec{j}_s est la densité de courant surfacique sur le conducteur et \vec{E} le champ électrique au même point. Préciser l'expression de l'amplitude complexe \underline{j}_s du courant surfacique en fonction de \underline{B}_i , amplitude complexe de \vec{B}_i .

15. Dédurre, des résultats précédents, la relation $\underline{B}_i = \frac{\underline{B}_e}{1 + j\omega\tau}$ où \underline{B}_e désigne l'amplitude complexe de \vec{B}_e ; on exprimera τ en fonction de h , r_2 , γ et μ_0 .

16. Application numérique. $I_0 = 1A$, la fréquence est de $11kHz$; calculer le rapport des amplitudes $\frac{|\underline{B}_i|}{|\underline{B}_e|}$ ainsi que l'amplitude de la densité de courant surfacique qui traverse le conducteur.

B. Cylindre non surfacique: estimation de la pulsation de coupure

Dans ce paragraphe, le conducteur cylindrique n'est plus assimilé à une surface. De plus, on considère ici que ce cylindre est seul dans l'espace.

On cherche à caractériser le cylindre par son inductance L_2 , et par sa résistance R_2 .

17. On suppose le cylindre parcouru par une densité volumique uniforme de courant orthoradiale $\vec{j} = j\vec{u}_\theta$; déterminer le champ magnétique dans tout l'espace.

18. Déterminer l'intensité du courant I qui traverse une section droite du conducteur de longueur ℓ et de hauteur h .

19. Calculer l'énergie magnétique dans tout l'espace en négligeant (cf $h \ll r_2$) la contribution du volume du cylindre $r_2 < r < r_2 + h$. En déduire l'expression de l'inductance L_2 .

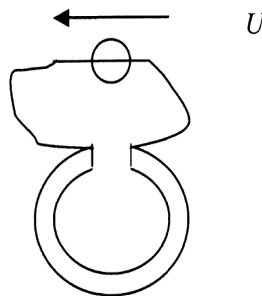


Figure 2. Cylindre vu de face

Pour calculer la résistance R_2 , on fend le cylindre selon une génératrice et on soumet les deux

bords obtenus à une différence de potentiel U (voir *Figure 2*). On suppose que les courants se répartissent uniformément dans le volume.

20. Relier la densité de courant au champ électrique, puis à la différence de potentiel (rappel $h \ll r_2$) ; en déduire la résistance R_2 .

21. Construire un temps caractéristique. Conclure.

Lévitaiton d'une sphère supraconductrice dans un champ magnétique

La base locale des coordonnées cylindriques est notée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

On rappelle les expressions de la divergence et du rotationnel d'un vecteur en coordonnées cylindriques :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z$$

Au début des années 1970 une nouvelle famille de gravimètres relatifs a été développée : les gravimètres supraconducteurs.

Le principe d'un gravimètre supraconducteur est de réaliser l'équilibre d'une sphère en niobium soumise d'une part à l'action de son poids et d'autre part à l'action d'une force de « lévitation magnétique ». La force de « lévitation magnétique » résulte de l'action du champ magnétique, créé par deux bobines parcourues par un courant permanent, sur les courants qui parcourent la sphère.

La sphère en niobium ainsi que les bobines sont à l'état supraconducteur, c'est-à-dire notamment que leur résistance électrique est nulle. Ceci exige, en particulier, d'opérer dans un bain d'hélium liquide dont la température est de 4,2 K, condition indispensable pour pouvoir observer le phénomène de « lévitation magnétique ».



Gravimètre supraconducteur de l'observatoire gravimétrique de Strasbourg

I. Champ magnétique au voisinage d'un axe de révolution

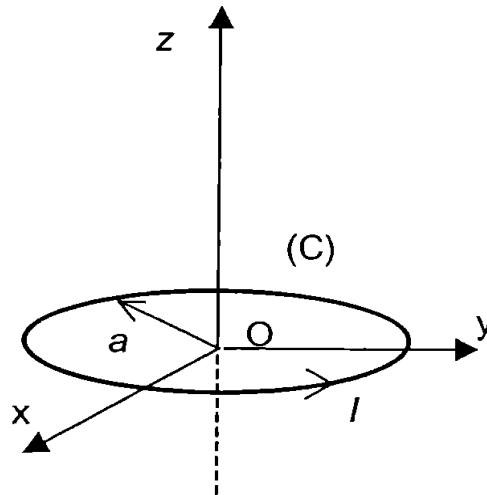


Figure 1

On étudie une spire conductrice (C) de rayon a et d'axe Oz , parcourue par un courant d'intensité I constante (Figure 1).

1. En utilisant la loi de Biot et Savart, déterminer l'expression vectorielle du champ magnétostatique $\vec{B}_0(z)$ que (C) crée en un point M de son axe situé à la cote z . On montrera que $\vec{B}_0(z) = B_0(z) \vec{u}_z$. On notera $B_0(z) = f(z) I$ et l'on exprimera $f(z)$ en fonction de a , z et μ_0 .

On cherche à préciser le champ au voisinage de l'axe. On considère un point $P(r, \theta, z)$ situé au voisinage immédiat de M sur l'axe et de cote z .

2. Écrire les deux équations satisfaites par le vecteur \vec{B} au voisinage de l'axe Oz .
3. Compte tenu des propriétés de symétrie du champ \vec{B} , quelles sont les composantes de \vec{B} non nulles et de quels paramètres dépendent-elles ?
4. Vérifier que le développement en série de Taylor limité au deuxième ordre (inclus) en r du champ magnétique : $B_r(P) = \alpha(z) r I$ et $B_z(P) = f(z) I + \beta(z) r^2 I$ satisfait aux équations.
5. Exprimer les coefficients $\alpha(z)$, $\beta(z)$ en fonction de $f(z)$ ou de ses dérivées $f'(z) = \frac{df}{dz}$ et $f''(z) = \frac{d^2f}{dz^2}$.

Dans toute la suite, on admettra les expressions suivantes:

$$\alpha(z) = \frac{3}{4} \frac{\mu_0 a^2 z}{(a^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \beta(z) = \frac{3}{8} \frac{\mu_0 a^2}{(a^2 + z^2)^{7/2}} (a^2 - 4z^2)$$

II. Force exercée sur un anneau supraconducteur

La spire (C) est maintenant parcourue par un courant d'intensité variable $I(t)$

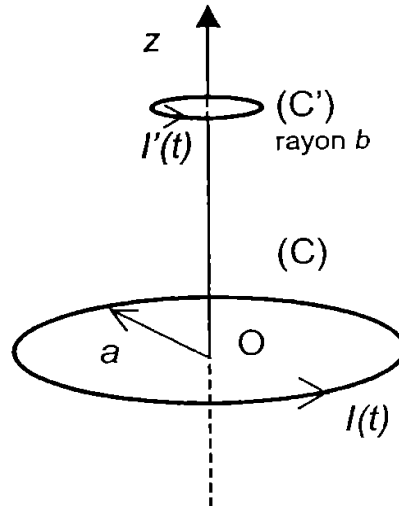


Figure 2

On place à la cote z une spire conductrice circulaire (C') d'axe Oz , de rayon b très petit ($b \ll a$ et $b \ll z$) (voir Figure 2). On note L' le coefficient d'auto induction de (C') et R' sa résistance électrique. La spire (C') est supposée immobile. Le courant induit dans (C') est désigné par $I'(t)$. On se place dans l'approximation des régimes quasi permanents.

Pour les réponses des questions 6 à 10, on conserve $f(z)$, $\alpha(z)$, $\beta(z)$ sans les remplacer par leur expression en fonction de z .

6. Calculer au deuxième ordre (inclus) en b le flux Φ du champ magnétique créé par (C) à travers (C').
7. Établir l'équation différentielle permettant de déterminer $I'(t)$.

On suppose dans la suite que la spire (C') est dans l'état supraconducteur. Dans ces conditions, on a donc $R'=0$.

Initialement les intensités dans les deux spires sont nulles. A partir de $t=0$, on augmente progressivement l'intensité dans la bobine (C) jusqu'à une valeur I_0 , après quoi elle est maintenue constante (régime permanent).

8. Exprimer $I'(t)$ en fonction de $I(t)$ et des autres grandeurs connues. En déduire l'intensité I'_0 existant dans la spire (C') lorsque le régime permanent est atteint, ce que l'on suppose dans la suite.
9. Dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, exprimer les composantes de la force élémentaire de Laplace, $d\vec{F}$ subie par un élément $d\ell$ de (C') en fonction de I'_0 , $d\ell$, $B_r(r=b, z)$, $B_z(r=b, z)$.
10. Donner l'expression de la résultante des forces de Laplace \vec{F} subie par (C') en fonction de I_0 et des autres grandeurs connues.

11. Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle de la forme: $E_p = K B_0^2(z)$ où $B_0(z)$ est le champ défini plus haut et K une constante que l'on explicitera en fonction de b et L' .

III. Équilibre de lévitation magnétique d'une sphère supraconductrice

On étudie désormais en régime permanent l'action d'une bobine sur une sphère supraconductrice (creuse), (Σ) , de masse $m = 5 \times 10^{-3} \text{ kg}$ et de rayon $R = 1,5 \text{ cm}$ (voir Figure 3).

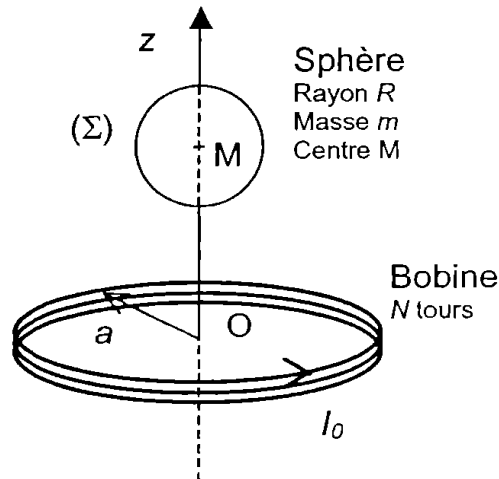


Figure 3

La bobine est constituée de $N=100$ spires circulaires, de rayon $a=5 \text{ cm}$, parcourue par un courant d'intensité I_0 constante. Les spires sont très resserrées, de sorte que les expressions du champ magnétique établies précédemment restent valables, en remplaçant I par $N I_0$.

Du fait de l'effet Meissner, la surface de la sphère est parcourue de courants induits analogues à ceux qui existaient dans la spire (C') de la question précédente.

Nous généralisons les résultats établis précédemment, avec les hypothèses simplificatrices suivantes:

- Le changement de géométrie de la spire à la sphère se traduit par une modification du facteur K .
- L'expression de l'énergie potentielle reste valable lorsque le centre de la sphère est hors de l'axe.

Avec ces hypothèses, nous admettrons que lorsque le centre de (Σ) se trouve au point M (non nécessairement sur l'axe), où la bobine crée un champ $\vec{B}(M)$, la sphère est soumise à une force

\vec{F} dérivant de l'énergie potentielle: $E_p = \frac{\pi R^3}{\mu_0} \|\vec{B}(M)\|^2$. En plus de cette force \vec{F} , (Σ) est soumise à son poids $m \vec{g}$. On néglige toute autre force.

L'axe Oz correspond à la verticale ascendante et $\vec{g} = -g \vec{u}_z$. On prendra $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$

On étudie seulement les mouvements de translation de la sphère, repérés par les coordonnées

cylindriques (r, θ, z) de son centre M .

A. Sphère sur l'axe de la spire

Dans un premier temps on suppose que M est sur l'axe Oz de la spire, de telle sorte que $r=0$; par ailleurs, on suppose $z>0$.

12. La sphère est soumise à une force $\vec{F}(z)=F(z)\vec{u}_z$. Montrer que $F(z)$ peut se mettre sous la forme $F(z)=\gamma \frac{z}{(a^2+z^2)^4} I_0^2$ et exprimer γ en fonction de a , N , μ_0 et R .
Application numérique: calculer γ .

13. Graphe de $F(z)$:

- Montrer que $F(z)$ passe par un maximum à une cote z_m que l'on exprimera en fonction de a .
- Exprimer la force maximale F_m sous la forme $F_m = \frac{c\gamma}{a^p} I_0^q$, où c est un facteur (indépendant de I_0 et a) dont on donnera la valeur numérique. Préciser la valeur des exposants p et q .
- Représenter graphiquement $F(z)$ pour $z>0$.

14. Montrer que l'équilibre de la sphère n'est possible que si l'intensité I_0 est supérieure à une intensité I_m que l'on exprimera en fonction de γ , c et des autres grandeurs connues. Calculer numériquement I_m .

15. Montrer que pour $I_0 > I_m$ il existe deux positions d'équilibre que l'on notera z_1 , z_2 , avec $z_1 < z_2$ (on pourra raisonner graphiquement). Montrer qu'une d'entre elles seulement est stable vis à vis d'un petit déplacement selon l'axe Oz et préciser s'il s'agit de z_1 ou z_2 .

B. Sphère en dehors de l'axe de la spire

On suppose maintenant que la sphère est à l'altitude z_s de la position d'équilibre stable déterminée précédemment et qu'elle peut légèrement s'écarter de l'axe Oz .

16. En utilisant les expressions de \vec{B} hors de l'axe établies au début du problème, et en se limitant à l'ordre 2 en r , exprimer l'énergie potentielle de la sphère, $E_p(r, z_s)$ en fonction de r , μ_0 , R , N , I_0 , $f(z_s)$, $\alpha(z_s)$ et $\beta(z_s)$.

17. Vérifier que $r=0$ est bien une position d'équilibre. À quelle condition, faisant intervenir $f(z_s)$, $\alpha(z_s)$ et $\beta(z_s)$, cet équilibre est-il stable vis à vis de petits déplacements latéraux

18. Déduire finalement l'intervalle des valeurs de z_s pour lesquelles l'équilibre de lévitation est stable vis à vis de tout déplacement (de petite ampleur). Les bornes de cet intervalle seront exprimées en fonction de a .

C. Mesures de variation de g. Sensibilité.

Le système précédent est utilisé pour détecter les petites variations de l'accélération de la pesanteur \vec{g} . Le déplacement de la sphère est mesuré par un pont de condensateurs, qui permet d'être sensible à une variation δz de la position de la sphère de l'ordre de $10^{-11} m$.

19. Commenter qualitativement et de manière pertinente la valeur numérique de δz , la plus petite variation détectable de la position de la sphère.

La méthode, dite «à sphère fixe» consiste à mesurer la variation d'intensité δI_0 à appliquer à I_0 pour maintenir la sphère à une attitude constante, alors que le champ de pesanteur g varie de δg . On cherche à déceler des variations relatives du champ de pesanteur telles que $\frac{\delta g}{g} = 10^{-9}$.

20. Déterminer la valeur de δI_0 à imposer (formule littérale puis application numérique) et commenter cette valeur numérique. On supposera $I_0 = 13 A$.

Pollution de l'air par le mercure

Un composé A en solution aqueuse est noté A , en phase solide est noté $A(s)$, en phase liquide est noté $A(liq)$ et en phase gazeuse est noté $A(g)$.

Le mercure est dangereux pour la santé humaine, il affecte principalement les fonctions cérébrales et rénales. Il est toxique sous de nombreuses formes. On étudie ici la toxicité du mercure métallique.

Données diverses :

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

La température est : $T = 298 \text{ K}$.

Valeur du Faraday : $1 F = 96500 \text{ C.mol}^{-1}$

Les gaz sont assimilés à des gaz parfaits.

Pression standard : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

Données concernant le mercure :

Masse molaire du mercure : $M_{\text{Hg}} = 200,6 \text{ g.mol}^{-1}$.

Température de fusion du mercure sous une pression de 1 bar : $\theta_{\text{fusion}} = -39^\circ \text{C}$.

Le mercure $\text{Hg}(liq)$ est un liquide non miscible avec une solution aqueuse. Son activité est égale à 1 lorsqu'il est seul dans sa phase.

Valeur limite d'exposition au mercure dans l'air des locaux de travail : $0,05 \text{ mg.m}^{-3}$

Potentiels standard à 298 K (à $\text{pH} = 0$) :

$$E^\circ([\text{Zn}(\text{OH})_4]^{2-}/\text{Zn}(s)) = 0,442 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{HgO}(s)/\text{Hg}(liq)) = 0,926 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2(g)) = E^\circ(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2(g)) = 0,00 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{O}_2(g)/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}.$$

Constantes de réaction à 298 K :

Produit de solubilité: $K_s(\text{Zn}(\text{OH})_2(s)) = K_s = 10^{-17}$

Constante de formation globale : $\text{Zn}^{2+} + 4 \text{HO}^- = [\text{Zn}(\text{OH})_4]^{2-} \quad \beta_4 = 10^{15,5}$

Produit ionique de l'eau: $K_e = 10^{-14}$

1. Pour le coefficient numérique apparaissant dans la loi de Nernst, on prendra $0,059 \text{ V}$. Justifier en partant des valeurs fournies plus haut.

I. Incinération d'une pile bouton

La pile $Zn(s)/[Zn(OH)_4]^{2-}, HO^- // HO^- / HgO(s) / Hg(liq)$ est miniaturisée sous forme de pile "bouton" utilisée par exemple pour l'alimentation électrique des montres, calculatrices, appareils photos et autres.

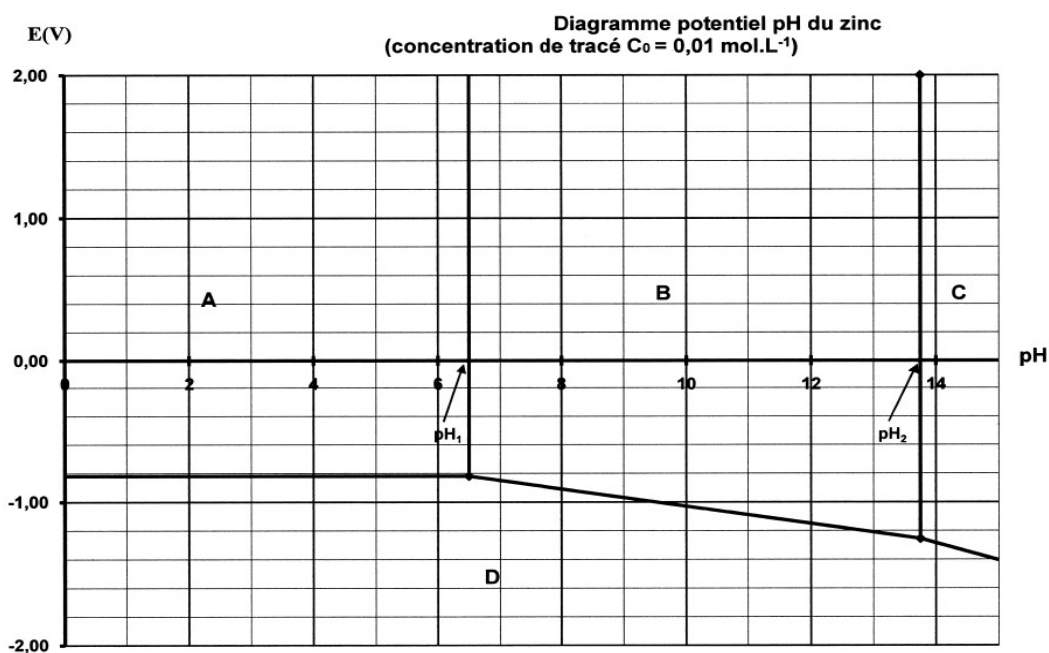
A. Diagramme potentiel-pH du zinc

On donne le diagramme potentiel-pH simplifié du zinc (concentration de tracé $C_0 = 0,01 \text{ mol.L}^{-1}$).

Conventions de frontière pour le diagramme potentiel-pH

convention (a): à la frontière du domaine de stabilité d'un gaz, la pression partielle du gaz est prise égale à 1 bar .

convention (b): à la frontière entre une espèce solide et une espèce dissoute, la concentration de l'espèce dissoute est prise égale à la concentration de tracé, soit ici $c_0 = 0,01 \text{ mol.L}^{-1}$



- Sur ce diagramme, le plan est séparé en quatre zones A, B, C et D. Attribuer chacune de ces zones à une des espèces suivantes : $Zn(s)$, Zn^{2+} , $Zn(OH)_2(s)$ et $[Zn(OH)_4]^{2-}$. Justifier. A $pH = 14$, quelle est l'espèce dissoute majoritaire pour le zinc au degré d'oxydation II?
- Calculer la valeur de pH_1 , pH d'apparition de l'hydroxyde de zinc $Zn(OH)_2(s)$
- pH de disparition de l'hydroxyde de zinc :
 - Écrire la réaction de dissolution de $Zn(OH)_2(s)$ en milieu basique.

- Exprimer la constante d'équilibre de cette réaction en fonction de constantes fournies dans l'énoncé. Calculer la valeur de cette constante d'équilibre.
 - Calculer la valeur de pH_2 , pH de disparition de l'hydroxyde de zinc.
5. On souhaite tracer le diagramme potentiel-pH de l'eau. L'eau intervient dans deux couples oxydant-réducteur: $H_2O/H_2(g)$ et $O_2(g)/H_2O$
- Déterminer les potentiels de frontière de ces deux couples.
 - Tracer le diagramme potentiel-pH de l'eau (document réponse à rendre).
 - Indiquer les zones de prédominance des différentes espèces (document réponse à rendre).
6. Conclure quant à la stabilité du zinc métallique dans l'eau.

B. Étude de la pile

7. Quels sont les deux couples oxydant-réducteur qui interviennent dans cette pile? Écrire les demi-équations oxydant-réducteur correspondantes. Écrire ensuite ces demi-équations en milieu basique puisque cette pile fonctionne en milieu basique.

La pile fonctionne à 298 K sous 1 bar en milieu basique à $pH=14$. La concentration en $[Zn(OH)_4]^{2-}$ est égale à 1 mol. L^{-1} .

8. Déterminer la force électromotrice de la pile. Déduire le signe des pôles et le sens des échanges électroniques.
9. Dans les conditions précédentes, écrire la réaction chimique se produisant lorsque la pile débite.

C. Incinération de la pile

Une pile bouton mélangée aux ordures ménagères est incinérée. Lors de la construction de cette pile, la cathode a été faite en acier, ce qui ne change rien aux réactions prévues précédemment.

La pile a débité $0,1\text{ A}$ pendant une heure.

10. Exprimer littéralement la quantité d'électricité fournie par la pile de deux façons différentes.
11. En déduire une expression littérale de la masse de mercure formé lors de l'utilisation de la pile. Application numérique : calculer cette masse de mercure.
12. Calculer le volume d'air qui peut être pollué lors de l'incinération de cette pile sachant que la valeur limite d'exposition au mercure dans l'air des locaux de travail est de $0,05\text{ mg.m}^{-3}$

II. Pollution d'un local par du mercure liquide

Un thermomètre contenant un gramme de mercure liquide est cassé dans une pièce.

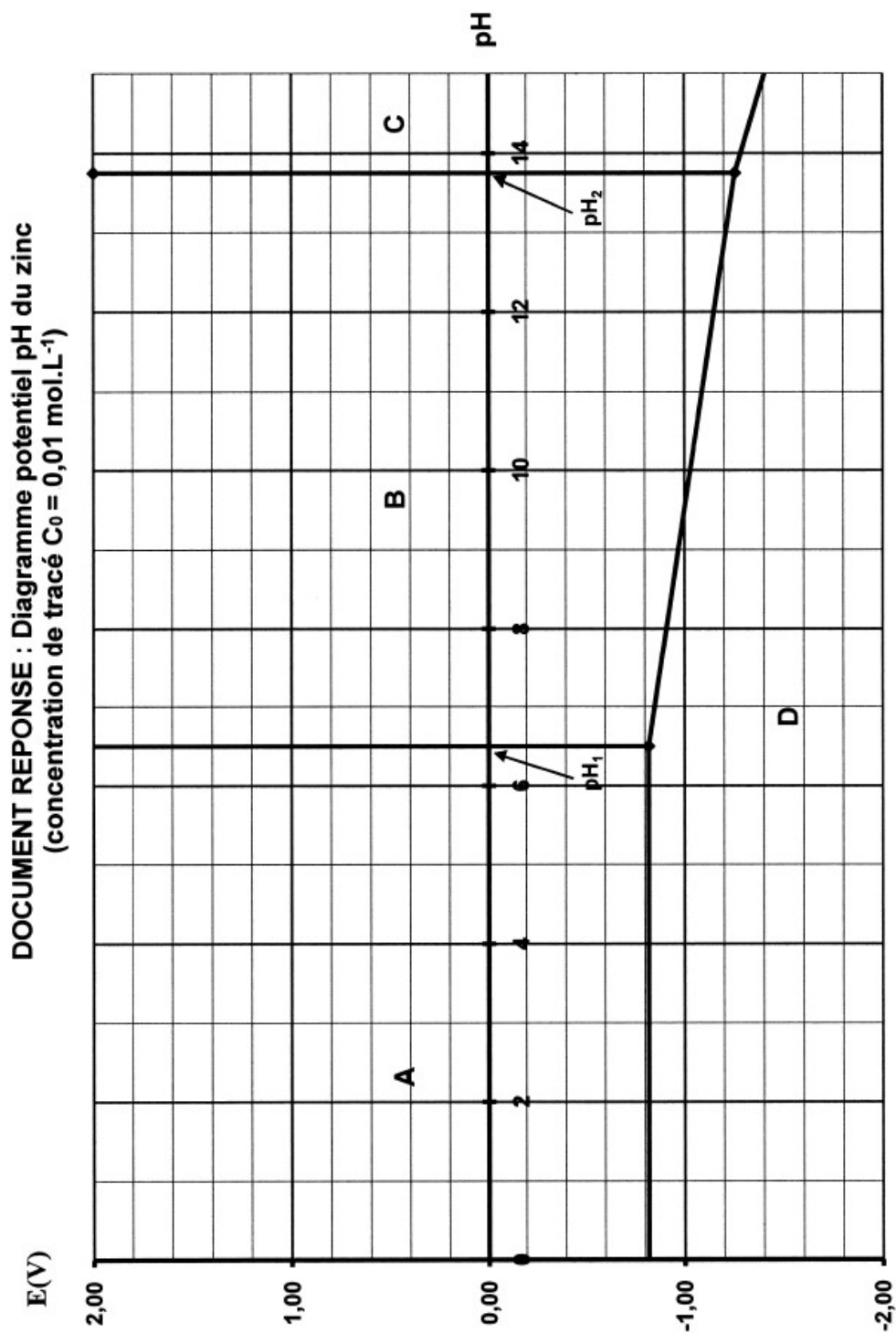
13. Compte tenu de sa toxicité, calculer la pression partielle (pression calculée en supposant que le mercure est seul), P_{max} , de mercure gazeux autorisée dans une pièce.

On appelle pression de vapeur saturante (P_{sat}) du corps A à la température T , la pression partielle de la vapeur de A atteinte lorsque l'équilibre $A(liq)=A(g)$ est réalisé. On étudie cet équilibre pour le mercure à 298 K pour lequel $\Delta_r G^\circ = 31,8\text{ kJ.mol}^{-1} = 31,8 \cdot 10^3\text{ J.mol}^{-1}$.

14. Calculer la constante d'équilibre de cette transformation.
 15. Écrire cette constante d'équilibre en fonction des activités des espèces. En déduire la pression de vapeur saturante du mercure, c'est-à-dire la pression de mercure à l'équilibre.
 16. Combien de fois la norme de pollution est elle dépassée, lorsqu'on laisse du mercure à l'air libre dans une pièce fermée si l'équilibre est établi? La pièce a un volume de 30 m^3 , quelle masse de mercure est alors sous forme de vapeur lorsque l'équilibre est atteint? Conclure.
-

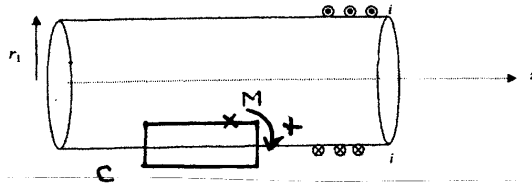
DOCUMENT REPONSE

NOM:



Réponses

Écrantage d'un champ magnétique



- 1) Un plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie donc $\vec{B}_1(M)$ est perpendiculaire à ce plan

$$\vec{B}_1(M) = B_1(r, \phi, z) \vec{u}_z$$

$\uparrow \uparrow$
 invariance en translation selon z
 invariance en rotation selon θ

$$\vec{B}_1(M) = B_1(r) \vec{u}_z$$

On applique alors le théorème d'Ampère au contour (C) représenté sur la figure (sachant que $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$) avec $\Delta z = z_{MAX} - z_{MIN}$

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

$$B_1(r < r_1) \Delta z = \mu_0 N_{\text{enlacé}} i_1$$

$$\downarrow$$

$$n_1 \Delta z$$

$$B_1(r < r_1) = \mu_0 n_1 i_1$$

finallement :

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(r < r_1) &= \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1 \vec{u}_z \\ \vec{B}_1(r > r_1) &= \vec{0} \end{aligned}$$

2)

Φ_{propre}
1 spire

$$= \iint_{1 \text{ spire}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

$$= B_1 S_{\text{intérieur}}$$

$$= \mu_0 \frac{N_1}{\ell} \pi r_1^2 i_1$$

Φ_{propre}
 N_1 spires

$$= \left(\mu_0 \frac{N_1^2}{\ell} \pi r_1^2 \right) i_1$$

Ce flux propre vaut $L_1 i_1$ donc

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{\ell} \pi r_1^2$$

de même

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{\ell} \pi r_2^2$$

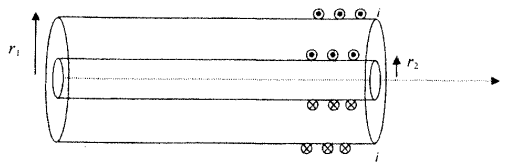
3) On a

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

Par exemple

$$\begin{aligned} \Phi_{1 \rightarrow 2} &= N_2 B_{1 \text{ int}} \pi r_2^2 \\ &= N_2 \mu_0 \frac{N_1}{\ell} \pi r_2^2 i_1 \end{aligned}$$



$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \pi r_2^2$$

4)

$$\frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

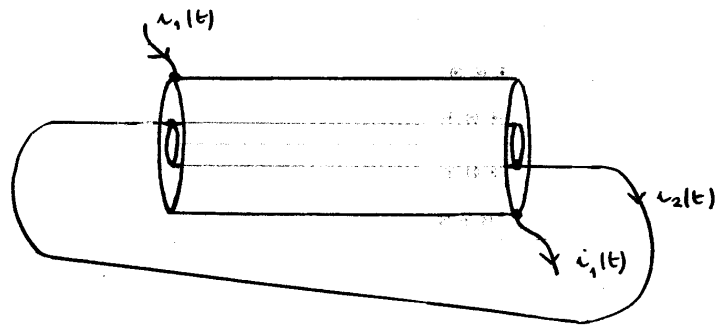
5)

$$\begin{aligned} L_2 &= \mu_0 \frac{N_2^2}{\ell} \pi r_2^2 \\ &= 4\pi 10^{-7} \frac{(500)^2}{0,20} \pi (0,05)^2 \end{aligned}$$

$$L_2 = 12,3 \text{ mH}$$

$$\begin{aligned} M &= \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \pi r_2^2 \\ &= 4\pi 10^{-7} \frac{700 \cdot 500}{0,20} \pi (0,05)^2 \end{aligned}$$

$$M = 17,3 \text{ mH}$$



$$\begin{aligned} \phi_2 &= L_2 i_2(t) + M i_1(t) \\ e_2 &= - \frac{d\phi_2}{dt} \end{aligned}$$

$$e_2 = - \left(L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \right)$$

$$\text{D) } e_2 = R_2 i_2$$

d'où l'équation :

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

en complexes

$$R_2 \underline{i}_2 + j L_2 \omega \underline{i}_2 = -j M \omega \underline{i}_1$$

$$\underline{i}_2 = - \frac{j M \omega}{R_2 + j L_2 \omega} \underline{i}_1$$

$$\text{8) } \underline{i}_2 = - \frac{j \frac{M}{R_2} \omega}{1 + j \frac{L_2}{R_2} \omega} \underline{i}_1$$

on pose

$$\omega_c = \frac{R_2}{L_2}$$

$$\underline{u}_2 = \frac{-\frac{M}{L_2} \pm \frac{\omega}{\omega_c}}{1 \pm \frac{\omega}{\omega_c}} \underline{u}_1$$

on pose

$$K = -\frac{M}{L_2}$$

$$K = -\frac{N_1}{N_2}$$

$$\underline{u}_2 = \frac{K \pm \frac{\omega}{\omega_c}}{1 \pm \frac{\omega}{\omega_c}} \underline{u}_1$$

g)

$$\begin{aligned} \vec{B}_{int} (r < a_2) &= \vec{B}_1 (r < a_1) + \vec{B}_2 (r < a_2) \\ &= \left(\mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1(t) + \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2(t) \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

En complexes :

$$\underline{B}_{int} = \frac{\mu_0 \underline{u}_1}{\ell} \left(N_1 + N_2 \frac{-\frac{N_1}{N_2} \pm \frac{\omega}{\omega_c}}{1 \pm \frac{\omega}{\omega_c}} \right)$$

$$\underline{B}_{int} = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} \underline{u}_1 \frac{1}{1 \pm \frac{\omega}{\omega_c}}$$

remarque

Le champ à l'extérieur de Σ_2 entre r_2 et r_1 est :

$$\underline{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} \underline{u}_1$$

Le solénoïde Σ_2 fait donc écran.

Le champ y est affaibli.

$$\frac{\underline{B}_{int}}{\underline{B}_1} = \frac{1}{1 \pm \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Le comportement étant celui d'un passe-bas.

Si $\omega \rightarrow \infty$, il est évident que $\underline{B}_{int} \rightarrow 0$

ce qui était prévisible à partir de 3)

$$R_2 \underline{i}_2 + j L_2 \omega \underline{i}_2 = -j M \omega \underline{i}_1$$

- si ω tend vers l'infini, le terme ohmique est négligeable donc

$$j L_2 \omega \underline{i}_2 = -j M \omega \underline{i}_1$$

soit

$$\boxed{N_2 \underline{i}_2 = - N_1 \underline{i}_1}$$

- Les champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 (proportionnels à $N_1 \underline{i}_1$ et $N_2 \underline{i}_2$) sont donc opposés si $\omega \rightarrow \infty$ et leur somme est nulle.

1e)

A.N.

$$\omega_c = \frac{R_2}{L_2}$$

$$= \frac{50}{12,3 \cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{\omega_c = 4,05 \cdot 10^3 \text{ rad s}^{-1}}$$

fréquence correspondante

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

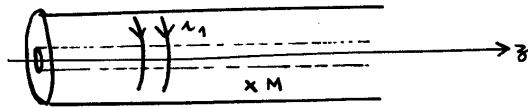
$$\boxed{f_c = 645 \text{ Hz}}$$

Pour 11 kHz on est donc loin de la bande passante

$$\begin{aligned} \frac{|\underline{B}_{int}|}{|\underline{B}_1|} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{11000}{645}\right)^2}} \\ &= 0,059 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{|\underline{B}_{int}|}{|\underline{B}_1|} = 5,9 \%}$$

11)



Un plan $(M \vec{u}_r \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie
donc les vrais vecteurs sont perpendiculaires donc selon \vec{u}_θ

$$\begin{array}{l} \vec{E} \text{ est selon } \vec{u}_\theta \\ \vec{D} \text{ est selon } \vec{u}_\theta \end{array}$$

Un plan $(M \vec{u}_r \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie (cf pas d'effets de bords)
donc les faux vecteurs sont perpendiculaires donc selon \vec{u}_z

$$\vec{B} \text{ est selon } \vec{u}_z$$

12) Le cylindre va se comporter comme le solénoïde Σ_2 de la première partie et ne crée pas de champ pour $r > r_2$

→ Pour $r_2 < r < r_1$ le champ est celui créé par Σ_1

$$\vec{B}_e = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1(t) \vec{u}_z$$

→ Pour $r < r_2$ le champ est égal au champ uniforme créé par Σ_1 auquel il faut ajouter le champ créé par le cylindre.
Le cylindre se comportant comme un solénoïde, il crée un champ uniforme.

$$\vec{B}_i \text{ est uniforme}$$

13) → \vec{E}_i est dû aux variations dans le temps de \vec{B}_i

$$\text{M.F.} \quad \text{rot } \vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t}$$

$$\text{Loi de Faraday} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

On intègre sur un contour de rayon $r < r_2$

$$E_i 2\pi r = - \frac{d}{dt} (B_i \pi r^2)$$

$$E_i = - \frac{r}{2} \frac{dB_i}{dt}$$

→ On applique la loi de Faraday sur un contour de rayon $r_2 < r < r_1$

$$E_e 2\pi r = - \frac{d}{dt} (B_i \pi r_2^2 + B_e \pi (r^2 - r_2^2))$$

$$E_e = - \left(\frac{r_2^2}{2r} \frac{dB_i}{dt} + \left(\frac{r}{2} - \frac{r_2^2}{2r} \right) \frac{dB_e}{dt} \right)$$

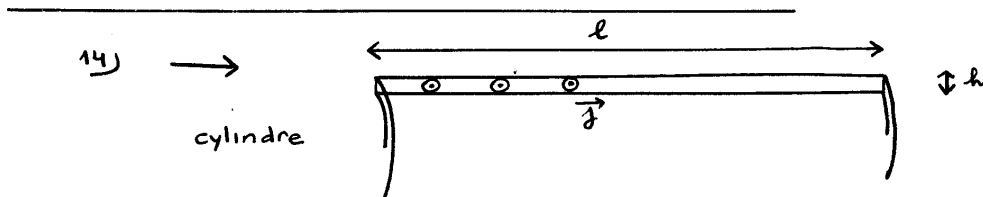
→ Pour $r = r_2^-$

$$E_i(r=r_2) = - \frac{r_2}{2} \frac{dB_i}{dt}$$

Pour $r = r_2^+$

$$E_e(r=r_2) = - \frac{r_2}{2} \frac{dB_i}{dt}$$

Le champ est continu en $r=r_2$. Ce résultat était prévisible puisque il s'agit d'un champ tangentiel, continu à la traversée d'une surface (même chargée)



Si on suppose que h étant "petit", on peut considérer que \vec{j} est uniforme dans l'épaisseur (on suppose donc $h \ll \delta$ avec δ épaisseur de peau)

alors le courant qui traverse sur la longueur l est :

- en description volumique : $j h l$
- en description surfacique : $j_s l$

donc : $\vec{j}_s = \vec{j} h$

de plus puisque l'on a $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (loi d'ohm)

$$\vec{j}_s = \gamma h \vec{E}$$

→ \vec{E} désigne donc ici \vec{E} en $r=r_2$ (voir question précédente)

$$j_s = -\gamma h \frac{r_2}{2} \frac{dB_i}{dt}$$

$$\underline{j_s} = -\frac{1}{2} j\omega \gamma r_2 h \underline{B_i}$$

15) On va écrire la relation de continuité de \vec{B} en $r=r_2$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

ici :

$$\begin{aligned} \vec{B}_e - \vec{B}_i &= \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{u_r} \\ &= \mu_0 j_s \vec{u_\theta} \wedge \vec{u_r} \\ &= -\mu_0 j_s \vec{u_z} \end{aligned}$$

soit en amplitude complexe

$$\underline{B_e} - \underline{B_i} = \frac{1}{2} j\omega \mu_0 \gamma r_2 h \underline{B_i}$$

$$\underline{B_i} = \frac{\underline{B_e}}{1 + j\omega \zeta}$$

avec

$$\zeta = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma h r_2$$

16) A.N.

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2} \mu_0 \gamma h r_2 \\ &= \frac{1}{2} 4\pi 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 0,05 \end{aligned}$$

$$\zeta = 63,8 \mu s$$

$$\omega_c = \frac{1}{\zeta}$$

$$\omega_c = 15,9 \cdot 10^3 \text{ rad s}^{-1}$$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

$$f_c = 2,53 \text{ kHz}$$

$$\frac{|\underline{B_i}|}{|\underline{B_e}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{11000}{2530}\right)^2}}$$

$$\frac{|B_i|}{|B_e|} = 0,224$$

$$\boxed{\frac{|B_i|}{|B_e|} = 22,4\%}$$

(effet d'écrantage. B est divisé par 4,5 environ)

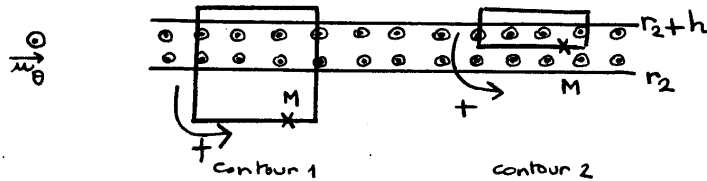
$$|j_s| = \frac{1}{2} \omega \gamma r_2 h |B_i|$$

$$\rightarrow 0,224 |B_e| \rightarrow \mu_0 \frac{N_1}{l} I_0$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi 11 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 0,05 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \times 0,224 \times 4\pi 10^{-7} \frac{700}{0,2} \cdot 1$$

$$\boxed{|j_s| = 3,41 \cdot 10^3 \text{ A m}^{-2}}$$

17)



(\vec{B} uniforme si $\delta \gg h$)

On a toujours $\vec{B} = B(r) \vec{u}_z$

et

$$\boxed{r > r_2 + h \quad \vec{B} = \vec{0}}$$

Pour déterminer \vec{B} on utilise le théorème d'Ampère.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Contour 1 :

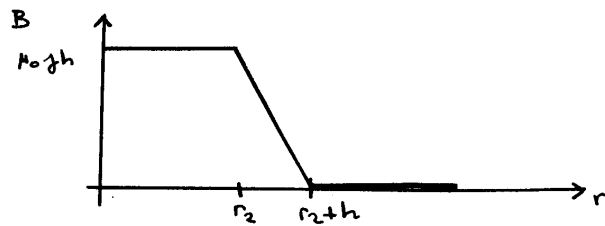
$$B(r) (z_{\text{max}} - z_{\text{min}}) = \mu_0 j h (z_{\text{max}} - z_{\text{min}})$$

$$\boxed{0 < r < r_2 \quad \vec{B} = \mu_0 j h \vec{u}_z}$$

Contour 2 :

$$B(r) (z_{\text{max}} - z_{\text{min}}) = \mu_0 j (r_2 + h - r) (z_{\text{max}} - z_{\text{min}})$$

$$r_2 < r < r_2 + h \quad \vec{B} = \mu_0 j (r_2 + h - r) \vec{u}_z$$



(B est continue puisqu'il s'agit d'une répartition volumique de courant)

18) question déjà traitée en 14 pour trouver j

$$I = j l h$$

19) L'énergie magnétique vaut :

$$U_m = \iiint_{\text{tranche } l \text{ d'espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

$$= \iiint_{\text{entre } 0 \text{ et } r_2} + \underbrace{\iiint_{\text{entre } r_2 \text{ et } r_2 + h}}_{\text{on néglige car } h \ll r_2} + \underbrace{\iiint_{r > r_2 + h}}_{\text{nul car } B_{\text{ext}} \text{ nul}}$$

$$= \frac{B_{\text{intérieur}}^2}{2\mu_0} \text{ Volume intérieur}$$

(puisque \vec{B} est uniforme à l'intérieur)

$$= \frac{\mu_0^2 j^2 h^2}{2\mu_0} \pi r_2^2 l$$

$$U_m = \frac{\mu_0}{2} \pi r_2^2 l j^2 h^2$$

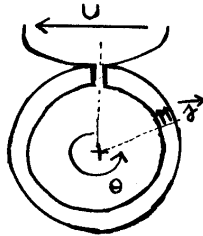
$$= \frac{1}{2} L_2 I^2$$

$$L_2 = \frac{2 U_m}{I^2}$$

$$= \frac{\mu_0 \pi r_2^2 l j^2 h^2}{l^2 j^2 h^2}$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 \pi r_2^2}{l}$$

20)



On suppose
d'où \rightarrow

$$\vec{B} = B \vec{u}_\theta$$

$$I = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint B \, dr \, dz$$

section

$$= B \, h \, l \quad (\text{d\'ej\'a obtenu en 18})$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{u}_\theta \quad (\text{avec } r \simeq r_2)$$

$$-\frac{dV}{r_2 d\theta} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\int_U^0 dV = -\frac{r_2}{\gamma} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$U = \frac{1}{\gamma} r_2 \frac{2\pi}{h}$$

$$\rightarrow R_2 = \frac{U}{I}$$

$$R_2 = \frac{1}{\gamma} \frac{2\pi r_2}{h l}$$

(on retrouve le r\'esultat attendu)

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{\text{longueur}}{\text{section}})$$

21) La constante de temps de ce circuit L, R est

$$\tau = \frac{L_2}{R_2}$$

remarque

\rightarrow Penser \`a l'\'equation diff\'erentielle :

$$e = R i + L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{e}{R} = i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$$

donc $\frac{L}{R}$ est un temps.

→ on équilibre aux dimensions

$$\frac{[L]}{[R]} = ?$$

$$\text{avec } U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$P_J = R I^2$$

$$\text{donc } [L] = \frac{[\text{énergie}]}{I^2}$$

$$[R] = \frac{[\text{puissance}]}{I^2}$$

$$\frac{[L]}{[R]} = \frac{[\text{énergie}]}{[\text{puissance}]}$$

$$= T$$

Ici

$$\tau = \frac{L_2}{R_2}$$

$$= \frac{\mu_0 \pi r_2^2 / l}{2\pi r_2 / h l \gamma}$$

$$\tau = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma h r_2$$

On retrouve par cette autre méthode l'expression obtenue en 15)

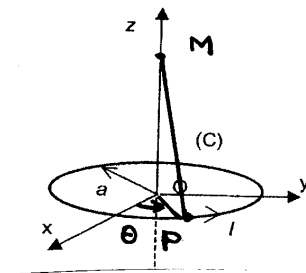
Lévitaiton d'une sphère supraconductrice

- 1) M est sur l'axe. Tous les plans contenant l'axe sont des plans d'antisymétrie donc $\vec{B}(M)$ appartient à tous ces plans. Il est donc selon l'axe

$$\boxed{\vec{B}_0(M \in \text{axe } Oz) = B(z) \vec{u}_z}$$

Par Biot-Savart

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\text{spire}} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$



$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{a d\theta \vec{u}_\theta \wedge (-a\vec{u}_r + z\vec{u}_z)}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

selon \vec{u}_z

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} a^2 \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\boxed{\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z}$$

$$\boxed{f(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}}$$

- 2) P désigne maintenant un point au voisinage de M donc dans le vide ($\vec{j} \rightarrow \text{nul}$)

$$\boxed{\text{div}_P \vec{B} = 0}$$

$$\text{rot}_P \vec{B} = \mu_0 \underbrace{\vec{j}_P}_{\text{nul}}$$

$$\boxed{\text{rot}_P \vec{B} = \vec{0}}$$

- 3) Le plan contenant l'axe et P est un plan d'antisymétrie donc $\vec{B}(P)$ appartient à ce plan.

$$\vec{B}(P) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

(en vertu de l'invariance en rotation selon θ , les composantes scalaires sont indépendantes de θ)

4) On pose

$$B_r(P) = \alpha(z) r \text{ I}$$

$$B_z(P) = f(z) \text{ I} + \beta(z) r^2 \text{ I}$$

→ ces composantes dépendent de r et z (cf 3)

→ ces composantes redonnent le champ sur l'axe (cf 1)

cf en $r=0$

$$B_r = 0 \quad \text{et}$$

$$B_z = f(z) \text{ I}$$

→ elles doivent vérifier

$$\bullet \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Puisque le développement est limité au deuxième ordre en r , il faudra limiter les relations entre dérivées au premier ordre en r

$$2 \alpha(z) \text{ I} + \frac{df(z)}{dz} \text{ I} + \cancel{\frac{d\beta(z)}{dz} r^2 \text{ I}} = 0$$

Possible si :

terme du 2^e ordre en r

$$2 \alpha(z) + \frac{df(z)}{dz} = 0$$

$$\bullet \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta = \vec{0}$$

$$\frac{d\alpha(z)}{dz} r \text{ I} - 2 r \beta(z) \text{ I} = 0$$

Possible si :

$$\frac{d\alpha(z)}{dz} - 2 \beta(z) = 0$$

5) finalement

$$\alpha(z) = -\frac{1}{2} f'(z)$$

$$\beta(z) = \frac{1}{2} \alpha'(z)$$

$$\beta(z) = -\frac{1}{4} f''(z)$$

6)

$$\Phi = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=b} \underbrace{\vec{B} \cdot \vec{dS}}_{B_z dr r d\theta}$$

↓
(f(z) + β(z) r²) I

$$= f(z) I \pi b^2 + \cancel{\beta(z) I \frac{\pi b^4}{2}} \quad \text{terme d'ordre 4}$$

$$\Phi = f(z) I \frac{\pi b^2}{4}$$

7) La force électromotrice induite dans (C') est $e = -\frac{d\Phi}{dt}$
 (à cause du B créé par (C))
 Il faut ajouter la force électromotrice causée par les variations du champ propre.
 Finalement

$$e = R' I'(t) + L' \frac{dI'(t)}{dt}$$

$$-f(z) \frac{dI(t)}{dt} \pi b^2 = R' I'(t) + L' \frac{dI'(t)}{dt}$$

8) $R' = 0$

$$-f(z) \frac{dI(t)}{dt} \pi b^2 = L' \frac{dI'(t)}{dt}$$

Par intégration

$$-f(z) I(t) \pi b^2 = L' I'(t) + K$$

En $t=0$, $I(t)=0$ et $I'(t)=0$

$$CI: \quad 0 = 0 + K$$

finalement

$$I'(t) = -\frac{f(z) \pi b^2}{L'} I(t)$$

$$I'_0 = -\frac{f(z) \pi b^2}{L'} I_0$$

9)

$$d\vec{F} = I'_0 d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$	$\begin{vmatrix} 0 \\ dl \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{vmatrix}$
--	--	---

avec $dl = b d\theta$

$$d\vec{F} = I'_0 dl \left(\underset{(r=b, z)}{B_z \vec{u}_r} - \underset{(r=b, z)}{B_r \vec{u}_z} \right)$$

10) La somme des $d\vec{F}_r$ est nulle

$$\vec{F} = -I'_0 2\pi b \underset{(r=b, z)}{B_r \vec{u}_z}$$

$$\vec{F} = -I'_0 2\pi b \alpha(z) b I_0 \vec{u}_z$$

$$\vec{F} = \frac{I_0^2 2\pi^2 b^4 f(z) \alpha(z) \vec{u}_z}{L'}$$

11) En remplaçant $\alpha(z) = -\frac{1}{2} \frac{df(z)}{dz}$

$$\vec{F} = -\frac{I_0^2 \pi^2 b^4 f(z) \frac{df(z)}{dz} \vec{u}_z}{L'}$$

$$= -\vec{\text{grad}} E_p$$

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{I_0^2 \pi^2 b^4 f^2(z)}{L'} + \text{cte}$$

choisie nulle

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 b^4}{L'} B_0^2(z)$$

K

12)

$$E_p = \frac{\pi R^3}{\mu_0} B_0^2(z)$$



Ici N spires

$$E_p = \frac{\pi R^3}{\mu_0} f(z)^2 I^2$$

avec $I = N I_0$

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

$$F(z) = - \frac{dE_p(z)}{dz}$$

$$= - \frac{\pi R^3}{\mu_0} 2 f(z) \frac{df(z)}{dz} N^2 I_0^2$$

$$= 4 \frac{\pi R^3 N^2}{\mu_0} f(z) \alpha(z) I_0^2$$

$$\downarrow \quad \nearrow$$

$$\frac{\mu_0}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \quad \frac{3}{4} \frac{\mu_0 a^2 z}{(a^2+z^2)^{5/2}}$$

$$F(z) = \underbrace{\frac{3}{2} \mu_0 \pi R^3 N^2 a^4}_{\gamma} \frac{z}{(a^2+z^2)^4} I_0^2$$

$$\text{A.N.} \quad \gamma = \frac{3}{2} \mu_0 \pi R^3 N^2 a^4$$

$$= \frac{3}{2} 4\pi 10^{-7} \pi (1,5 \cdot 10^{-2})^3 100^2 (5 \cdot 10^{-2})^4$$

$$\gamma = 1,25 \cdot 10^{-12} \text{ N m}^7 \text{ A}^{-2}$$

13)

$$\longrightarrow F(z) = \gamma \frac{z}{(a^2+z^2)^4} I_0^2$$

On cherche un extremum

$$\frac{dF(z)}{dz} = \gamma I_0^2 \left(\frac{1}{(a^2+z^2)^4} - \frac{4z^2}{(a^2+z^2)^5} \right)$$

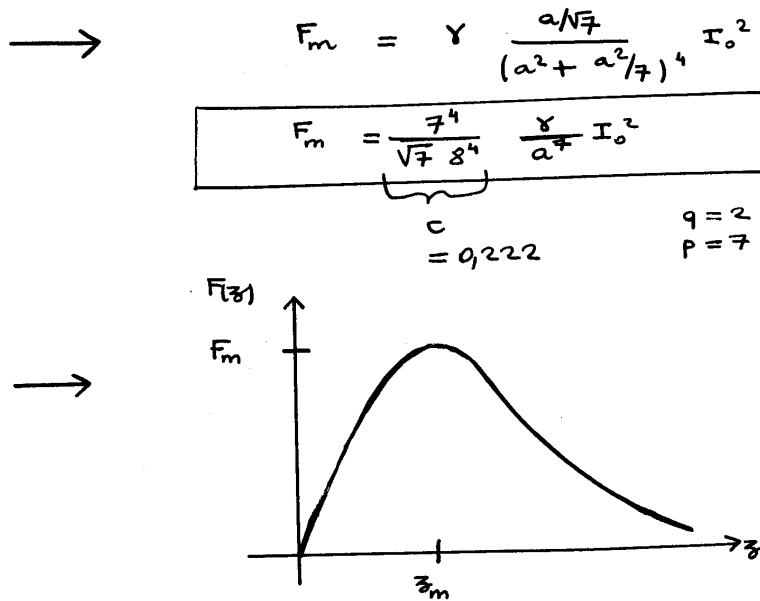
$$= \frac{\gamma I_0^2}{(a^2+z^2)^5} (a^2+z^2 - 4z^2)$$

$$= \frac{\gamma I_0^2}{(a^2+z^2)^5} (a^2 - 3z^2)$$

Puisque z est positif, l'extremum est en

$$z_m = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

remarque : F_z est positive F_z est nulle en $z=0$ est nulle si $z \rightarrow \infty$ L'extremum est donc un maximum



14) A l'équilibre :

$$\begin{aligned} \vec{F} + m\vec{g} &= \vec{0} \\ \text{sur } \vec{u}_z \quad F - mg &= 0 \end{aligned}$$

$$mg = F < F_m$$

$$mg < c \frac{\gamma}{a^7} I_0^2$$

soit

$$I_0 > \underbrace{\left(\frac{mg a^7}{c \gamma} \right)^{1/2}}_{I_m}$$

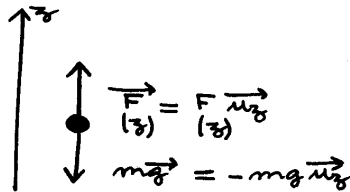
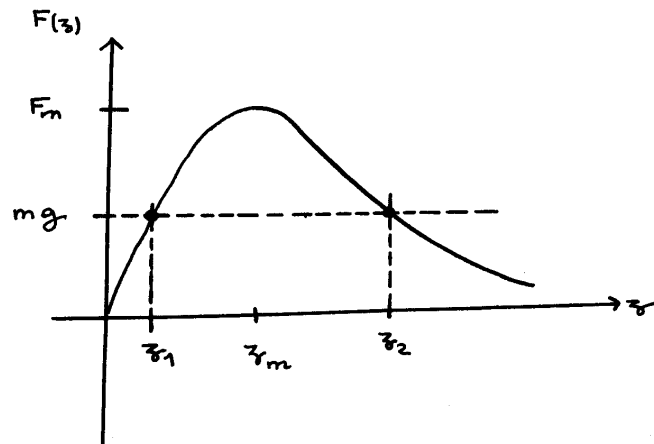
L'équilibre n'est possible que si $I_0 > I_m$

A.N.

$$\begin{aligned} I_m &= \left(\frac{mg a^7}{c \gamma} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^7}{0,222 \cdot 1,25 \cdot 10^{-12}} \right)^{0,5} \end{aligned}$$

$$I_m = 11,7 \text{ A}$$

- 15) Dans le cas général $F = mg$ avec $F < F_m$
il y a donc deux solutions.



→ on étudie la stabilité de z_1

- supposons que z augmente, F augmente, mg ne change pas. La sphère part vers le haut encore plus.
- supposons que z diminue, F diminue. La sphère part vers le bas encore plus.

Position z_1 instable

→ on étudie la stabilité de z_2

- supposons que z augmente, F diminue donc mg l'emporte et la sphère descend pour revenir vers z_2
- supposons que z diminue, F augmente donc F l'emporte et la sphère remonte pour revenir vers z_2

Position z_2 stable. ($z_2 > \frac{a}{\sqrt{7}}$)

16)

$$E_P = \frac{\pi R^3}{\mu_0} B^2$$

$$(r, z) = \frac{\pi R^3}{\mu_0} (B_r^2 + B_z^2)$$

$$E_P = \frac{\pi R^3}{\mu_0} \left(\alpha^2(z) r^2 I^2 + (f(z) I + \beta(z) r^2 I)^2 \right)$$

$$E_P = \frac{\pi R^3 \mu_0 I^2}{\mu_0} \left(f(z)^2 + (\alpha^2(z) + 2f(z)\beta(z)) r^2 \right)$$

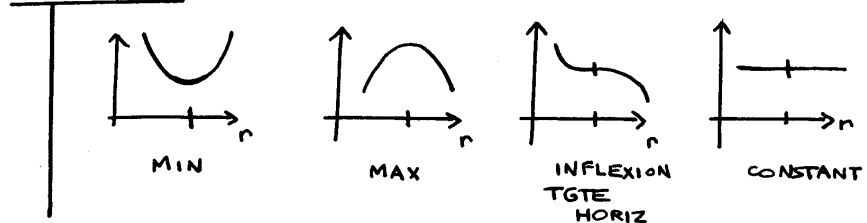
en ne tenant pas compte du terme en r^4

17)

→ $E_P(r)$ est stationnaire en $r=0$ $\left(\left(\frac{dE_P}{dr} \right)_{r=0} = 0 \right)$
 donc $r=0$ est position d'équilibre

remarque

fonction stationnaire



→ L'équilibre est stable en $r=0$ si $\left(\frac{d^2 E_P}{dr^2} \right)_{r=0} > 0$
 c'est à dire si E_P est minimal en $r=0$

$$\text{stable si } (\alpha^2(z_s) + 2f(z_s)\beta(z_s)) > 0$$

18)

$$\left(\frac{3}{4} \frac{\mu_0 a^2 z_s}{(a^2 + z_s^2)^{5/2}} \right)^2 + 2 \frac{\mu_0 a^2}{2 (a^2 + z_s^2)^{3/2}} \frac{3}{8} \frac{\mu_0 a^2}{(a^2 + z_s^2)^{7/2}} (a^2 - 4z_s^2)$$

$$\frac{3}{16} \frac{\mu_0^2 a^4}{(a^2 + z_s^2)^5} (3z_s^2 + 2(a^2 - 4z_s^2)) \stackrel{?}{>} 0$$

Donc stabilité si :

$$2a^2 - 5z_s^2 > 0$$

(avec $z_s > 0$)

$$z_s < \sqrt{\frac{2}{5}} a$$

finalament, stabilité' selon z et selon r si

$$\frac{a}{\sqrt{7}} < z_s < \frac{\sqrt{2}}{5} a$$

$$0,38 a < z_s < 0,63 a$$

19)

$$\delta z = 10^{-11} \text{ m}$$

Ceci est inférieur à la taille typique d'un atome
(ex: rayon de l'atome d'hydrogène $0,53 \text{ \AA}$ ou $5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$)

Les précisions atteintes par ce type d'appareil relèvent du domaine de la métrologie de très haute précision.

20) A l'équilibre

$$F(z) = mg$$

$$\gamma \frac{z}{(a^2 + z^2)^4} I_0^2 = mg$$

les variations étant infimes pour I_0 et g , on peut utiliser le calcul différentiel pour déterminer la relation entre δI_0 et δg .

une différentielle logarithmique est ici adaptée :

$$\ln \frac{\delta z}{(a^2 + z^2)^4} + 2 \ln I_0 = \ln m + \ln g$$

on différentie :

$$2 \frac{\delta I_0}{I_0} = \frac{\delta g}{g}$$

d'où le résultat :

$$\frac{\delta I_0}{I_0} = \frac{1}{2} \frac{\delta g}{g}$$

A.N.

$$\frac{\delta I_0}{I_0} = \frac{1}{2} 10^{-9}$$

$$= 0,5 \cdot 10^{-9}$$

$$\delta I_0 = 13 \times 0,5 \cdot 10^{-9}$$

$$\delta I_0 = 6,5 \text{ nA}$$

Pollution de l'air par le mercure

1) La loi de Nernst est :

$$E = E_0 + \frac{RT}{nF} \ln \frac{\prod_i a_{\text{oxi}}^{\nu_{\text{oxi}}}}{\prod_j a_{\text{red}}^{\nu_{\text{red}}}}$$

et on fera

$$E = E_0 + \frac{0,059}{n} \log \frac{\prod_i a_{\text{oxi}}^{\nu_{\text{oxi}}}}{\prod_j a_{\text{red}}^{\nu_{\text{red}}}}$$

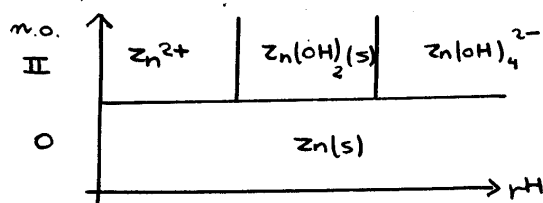
On doit donc vérifier que :

$$\frac{RT}{F} \ln(10) \stackrel{?}{=} 0,059 \text{ V}$$

A.N.

$$\frac{8,31 \cdot 298}{96500} \underbrace{\ln(10)}_{2,30} = 0,0591 \text{ V}$$

2) diagramme primitif pour le Zn

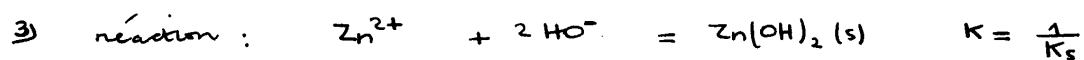


(plus il y a d' HO^- complexés avec Zn^{2+} , plus le milieu est basique)

donc :

A	: Zn^{2+}
B	: $\text{Zn}(\text{OH})_2 (\text{s})$
C	: $\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}$
D	: $\text{Zn}(\text{s})$

les espèces dissoutes sont Zn^{2+} et $\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}$.A $\text{pH} = 14$, l'espèce majoritaire est $\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}$



au début de la précipitation (à la frontière) on pose
 $[\text{Zn}^{2+}] = c_0$

donc

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2}$$

$$K_s = c_0 \frac{K_e^2}{h_1^2}$$

$$h_1^2 = c_0 \frac{K_e^2}{K_s}$$

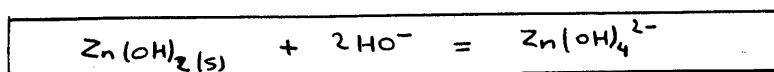
$$2\text{pH}_1 = \text{p}c_0 + 2\text{p}K_e - \text{p}K_s$$

$$\text{pH}_1 = \text{p}K_e + \frac{1}{2}(\text{p}c_0 - \text{p}K_s)$$

A.N. $= 14 + \frac{1}{2}(2 - 17)$

$$\text{pH}_1 = 6,5$$

4) réaction :



$$K = \frac{[\text{Zn(OH)}_4^{2-}]}{[\text{HO}^-]^2}$$

on est en présence de précipité donc on peut écrire $[\text{Zn}^{2+}][\text{HO}^-]^2 = K_s$

on a aussi l'équilibre de complexation



avec $\beta_4 = \frac{[\text{Zn(OH)}_4^{2-}]}{[\text{Zn}^{2+}][\text{HO}^-]^4}$

$$K = \beta_4 K_s$$

A.N.

$$= 10^{15,5} 10^{-17}$$

$$K = 10^{-1,5}$$

en fin de dissolution (à la frontière) on pose
 $[Zn(OH)_4^{2-}] = c_0$

$$K = \frac{c_0}{[H_3O^+]^2}$$

$$= \frac{c_0 h_2^2}{K_e^2}$$

$$h_2^2 = \frac{K K_e^2}{c_0}$$

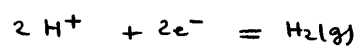
$$2 \gamma H_2 = \gamma K + 2 \gamma K_e - \gamma c_0$$

$$\gamma H_2 = \gamma K_e + \frac{1}{2} (\gamma K - \gamma c_0)$$

$$A.N. = 14 + \frac{1}{2} (1,5 - 2)$$

$$\gamma H_2 = 13,75$$

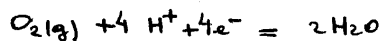
5) $H_2O / H_2(g)$



$$E = E^\circ_{H^+/H_2(g)} + \frac{0,059}{2} \log \frac{[H^+]^2}{P_{H_2}/P^\circ}$$

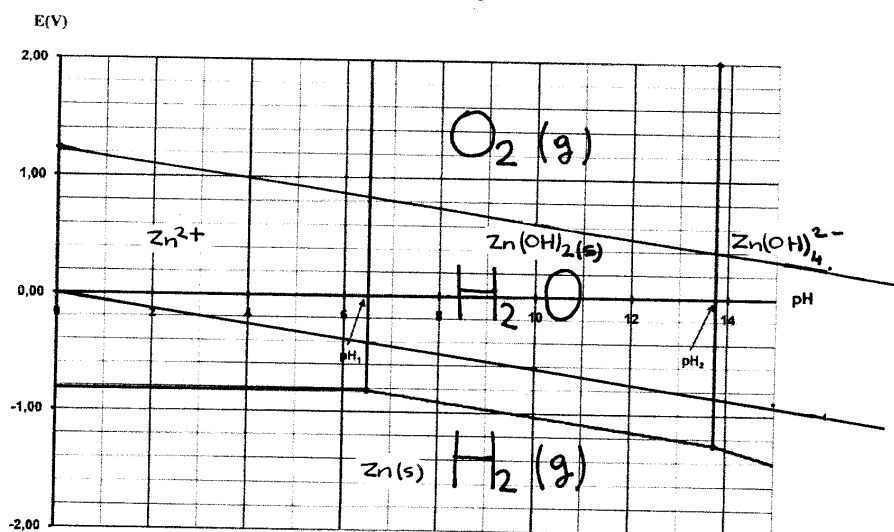
$$E_V = 0,00 - 0,059 \gamma H$$

$O_2(g) / H_2O$



$$E = E^\circ_{O_2/H_2O} + \frac{0,059}{4} \log \left(\frac{P_{O_2}}{P^\circ} [H^+]^4 \right)$$

$$E_V = 1,23 - 0,059 \gamma H$$



- 6) Il n'y a pas de domaine commun entre le zinc métallique et l'eau.

Zn(s) n'est pas stable dans l'eau

remarque

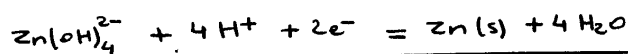
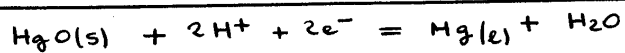
En se basant sur l'écart entre la frontière Zn(II)/Zn(s) et la frontière H₂O/H₂(g) on peut prévoir que l'attaque est plus forte en milieu acide.

(prévision thermodynamique, à vérifier par la cinétique)

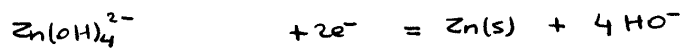
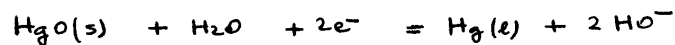
7) → couple à droite : HgO(s) / Hg(lig)

couple à gauche : Zn(OH)₄²⁻ / Zn(s)

→ demi-équations (avec des H⁺)



→ demi-équations en milieu basique (on ajoute des HO⁻)



$$8) \quad E_{\text{pile}} = E_{\substack{\frac{1}{2} \text{ pile} \\ \text{droite} \\ (E_D)}} - E_{\substack{\frac{1}{2} \text{ pile} \\ \text{gauche} \\ (E_G)}}$$

$$\text{avec } E_D = E_{\text{HgO(s)}/\text{Hg(l)}}^{\circ} + \frac{0,059}{2} \log[\text{H}^+]^2$$

$$E_{D/V} = E_{\text{HgO(s)}/\text{Hg(l)}}^{\circ} - 0,059 \text{ pH}$$

$$\text{A.N.} = 0,926 - 0,059 \times 14$$

$$E_D = 0,100 \text{ V}$$

$$\text{et } E_G = E^\circ_{\text{Zn(OH)}_4^{2-}/\text{Zn(s)}} + \frac{0,059}{2} \log [\text{Zn(OH)}_4^{2-}] [\text{H}^+]^4$$

$$E_{G/V} = E^\circ_{\text{Zn(OH)}_4^{2-}/\text{Zn(s)}} - 0,118 \text{ pH} + \frac{0,059}{2} \log [\text{Zn(OH)}_4^{2-}]$$

$$\text{A.N.} \quad = 0,442 - 0,118 \times 14 + \frac{0,059}{2} \log 1$$

$$E_G = -1,210 \text{ V}$$

donc

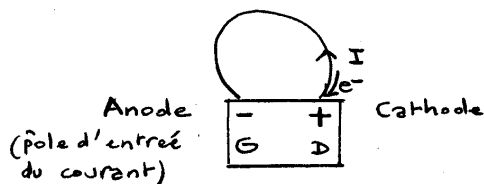
$$E_{\text{pile}} = E_D - E_G$$

$$E_{\text{pile}} = 0,100 - (-1,210)$$

$$E_{\text{pile}} = 1,31 \text{ V}$$

$$E_{\text{pile}} > 0$$

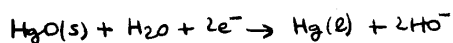
donc le pôle + est à droite (couple $\text{HgO(s)} / \text{Hg(l)}_g$)
le pôle - est à gauche (couple $\text{Zn(OH)}_4^{2-} / \text{Zn(s)}$)



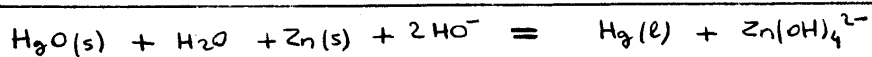
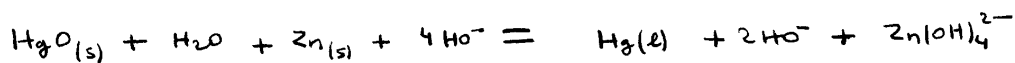
oxydation



réduction



9) La réaction chimique est donc :



10) quantités d'électricité

$$q = I t$$

$$q = 2 \mathcal{G} F$$

\mathcal{G} : avancement de la réaction

2 : car pour une mole de réaction, il passe 2 moles d'électrons dans le circuit.

11) masse de mercure:

$$m_{\text{Hg}} = M_{\text{Hg}} \xi$$

$$m_{\text{Hg}} = M_{\text{Hg}} \frac{I t}{2 F}$$

$$\text{A.N.} \quad \xi = \frac{I t}{2 F}$$

$$= \frac{0,1 \times 3600}{2 \times 96500}$$

$$= 1,87 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

$$m_{\text{Hg}} = M_{\text{Hg}} \xi \quad \text{soit, en grammes:}$$

$$= 200,6 \cdot 1,87 \cdot 10^{-3}$$

$$m_{\text{Hg}} = 0,374 \text{ g}$$

12) volume d'air pollué

$$V = \frac{m}{\text{valeur limite}}$$

$$= \frac{0,374}{0,05 \cdot 10^{-3}} \quad \leftarrow \text{g} \quad \leftarrow \text{g m}^{-3}$$

$$V = 7,5 \cdot 10^3 \text{ m}^3$$

(très important !)

13)

$$P V = n R T$$

$$P V = \frac{m}{M} R T$$

$$P = \left(\frac{m}{V} \right) \frac{R T}{M} \leftarrow \text{en kg}$$

 $\leftarrow \text{valeur limite (en kg m}^{-3}\text{)}$

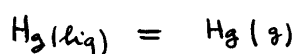
A.N.

$$= 0,05 \cdot 10^{-6} \frac{8,31 \cdot 298}{200,6 \cdot 10^{-3}}$$

$$P = 0,617 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$$

$$= 0,617 \cdot 10^{-8} \text{ bar}$$

14)

activités
à l'équilibre

1

 $\frac{P_{\text{AT}}}{P^0}$

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ(T)$$

$$K^\circ_{(T)} = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right)$$

$$\text{A.N.} = \exp\left(-\frac{31,8 \cdot 10^3}{8,31 \cdot 298}\right)$$

$$K^\circ_{(298K)} = 2,65 \cdot 10^{-6}$$

15)

$$K^\circ = \frac{P_{\text{SAT}}}{P^\circ}$$

$$P_{\text{SAT}} = \frac{1}{K^\circ} P^\circ$$

A.N.

$$= 2,65 \cdot 10^{-6} \times 1 \text{ bar}$$

$$P_{\text{SAT}} = 2,65 \cdot 10^{-6} \text{ bar}$$

$$P_{\text{SAT}} = 0,265 \text{ Pa}$$

16) La norme de pollution est alors dépassée de

$$\frac{P_{\text{SAT}}}{P_{\text{norme}}} = \frac{0,265}{0,617 \cdot 10^{-3}}$$

$$P_{\text{SAT}} = \boxed{430 \text{ fois}} P_{\text{norme}}$$

Masse de mercure dans la pièce (en g)

$$m = \frac{P_{\text{SAT}} V}{RT} M_{\text{Hg}}$$

$$= \frac{0,265 \cdot 30}{8,31 \cdot 298} \cdot 200,6$$

$$m_{\text{Hg}} = \boxed{0,64 \text{ g}}$$

Une simple goutte de mercure de rayon quelques mm entraîne dans une pièce un dépassement de 430 fois la norme de pollution.