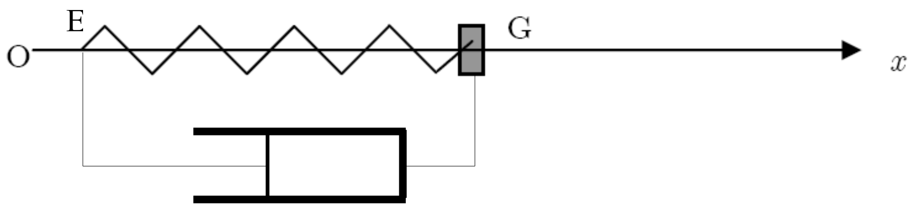
DNS

Sujet

Équations différentielles de base (oscillateurs en mécanique du point)

Dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen muni du repère cartésien $(O,\vec{u}_x;\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, on considère un corps solide (S) de masse $m=0{,}100\,kg$ et de centre d’inertie G pouvant se déplacer sans frottement solide le long de l’axe horizontal Ox (cf. figure) ; G est relié au point E par un ressort de raideur k ; le ressort est mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement β de sorte que (S) est soumis à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta\vec{V}(G)$ où $\vec{V}(G)$ est la vitesse de G par rapport au référentiel $\mathscr{R}'$ de repère cartésien associé $(E,\vec{u}_x;\vec{u}_y,\vec{u}_z)$.



On repère la position de G par $x=EG-l_0$ (l_0 longueur à vide du ressort).

I. Détermination des caractéristiques de l’oscillateur

Dans un premier temps, E est fixe en O . On écarte G de sa position d’équilibre vers la droite, d’une distance $x_0=10{,}0\,cm$ et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Déterminer l’équation du mouvement; on posera $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ et $2\lambda=\frac{\beta}{m}$.

2. Établir l'expression de $x(t)$ dans le cas d’un régime pseudo-périodique. Préciser la pseudopulsation Ω . Que vaut l'amplitude $A(t)$. Préciser la phase.

3. La durée séparant 10 passages de G par la position d’équilibre, de droite à gauche, est $\Delta t=12{,}0\,s$. Par ailleurs, l’amplitude au début de la dixième oscillation est égale à $7{,}5\,cm$. En déduire les valeurs de Ω , de β et de k .

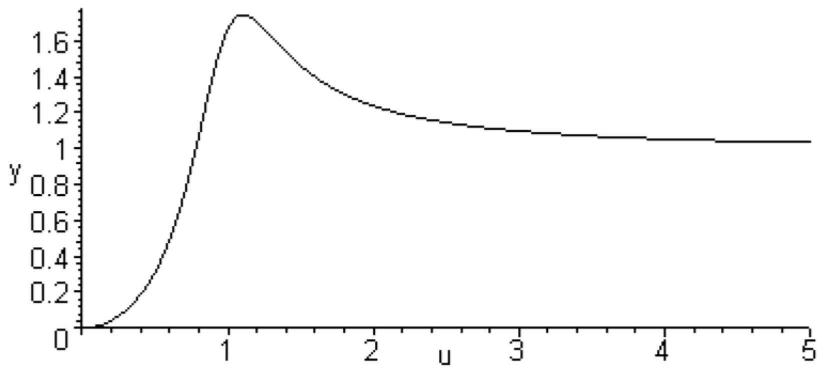
II. Mesure d’une accélération

Dans cette question le point E est solidaire d’un solide en vibration dans $\mathscr{R}$. Sa position est donnée par $\overline{OE}=a\ \cos(\omega t)\ \vec{u}_x$. L'amortissement est ici réglé à une valeur nettement supérieure par rapport à la première partie.

4. Déterminer l’équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

5. Déterminer $x(t)$ en régime forcé.

6. Le tracé de l’amplitude X_0 des oscillations en fonction de la pulsation a l’allure suivante en coordonnées réduites $y=\frac{X_0}{a}$ en fonction de $u=\frac{\omega}{\omega_0}$:



- Retrouver l'expression du maximum de cette courbe ? Cette situation avec maximum se présente-t-elle pour toute valeur du coefficient d’amortissement ? Préciser la réponse.
- Peut-on retrouver une situation analogue lors de l'étude d'un circuit RLC série? Préciser la réponse.
- Déduire graphiquement l’amplitude a dans le cas où, pour $\omega=7{,}0\,rad.s^{-1}$, on mesure $X_0=0{,}200\,m$.

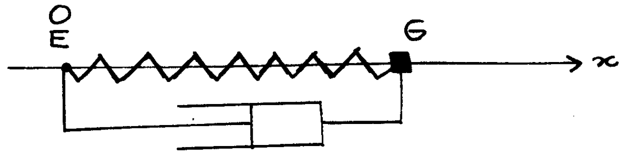
7. Exprimer puis calculer la puissance moyenne dissipée par les frottements.

Réponses

1) On travaille dans $\mathcal{R}$ galiléen. De plus E est fixe en O

$$\overrightarrow{F}_{ressort} + \overrightarrow{R}_{\substack{réaction\\support}} + m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}_{\substack{frottement\\fluide}} = m\overrightarrow{a_G}$$

$$\boxed{-k(\ell-\ell_0)\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{g} - \beta\overrightarrow{v_G} = m\overrightarrow{a_G}}$$



avec la longueur du ressort ℓ telle que

$$\longrightarrow \quad \overrightarrow{OG} = x_G\,\overrightarrow{u_x}$$
$$= \ell\,\overrightarrow{u_x}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = (\ell_0 + x)\,\overrightarrow{u_x}}$$

(x désigne ici l'allongement du ressort - par rapport à la longueur à vide -. En général, on pose $x = \ell - \ell_{équilibre}$ mais ici $\ell_{équilibre} = \ell_0$)

$$\longrightarrow \quad \overrightarrow{v_G} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$

$$\longrightarrow \quad \overrightarrow{a_G} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$

On projette la relation fondamentale sur l'axe x

$$-kx \qquad -\beta\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

---

2) On résout l'équation caractéristique sachant que le régime est pseudo-périodique

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$r = -\lambda \pm j\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}_{\Omega}$$

La pseudopulsation est $\boxed{\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$

Donc

$$\left| \begin{array}{l} x = e^{-\lambda t}\,(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) \\ \dot{x} = -\lambda\, x + \Omega\, e^{-\lambda t}\,(-A \sin \Omega t + B \cos \Omega t) \end{array} \right.$$

On porte les conditions initiales : en $t=0$ $x = x_0$ et $\dot{x} = 0$

$$x_0 = 1 \quad (A + B \times 0)$$

$$0 = -\lambda x_0 + \Omega \quad (-A \times 0 + B)$$

d'où

$$\boxed{\begin{array}{l} A = x_0 \\ B = \dfrac{\lambda}{\Omega} x_0 \end{array}}$$

$$\boxed{x = x_0\, e^{-\lambda t} \left(\cos \Omega t + \frac{\lambda}{\Omega} \sin \Omega t \right)}$$

On écrit le résultat sous la forme

$$x = x_0 e^{-\lambda t}\,(\alpha \cos(\Omega t + \varphi))$$

$$= x_0 e^{-\lambda t}\,(\alpha \cos\varphi \cos \Omega t - \alpha \sin \varphi \sin \Omega t)$$

par identification avec l'écriture précédente

$$\alpha \cos\varphi = 1$$

$$-\alpha \sin\varphi = \frac{\lambda}{\Omega}$$

d'où , en choisissant α positif par exemple :

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\Omega^2}}$$

$$= \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$$\varphi = -\arctan \frac{\lambda}{\Omega}$$

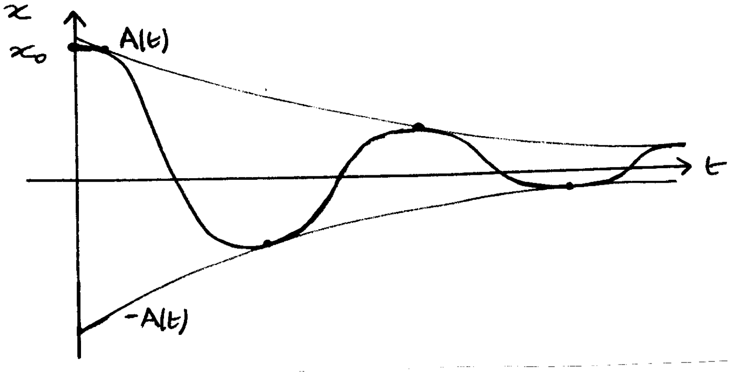
$$= -\arctan \frac{\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$$\boxed{x = x_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\omega_0)^2}}\, e^{-\lambda t} \cos\left(\Omega t - \arctan \frac{\lambda / \omega_0}{\sqrt{1 - (\lambda/\omega_0)^2}}\right)}$$

$$= A(t) \quad \cos(\Omega t + \varphi)$$

finalement

$A(t) = x_0 \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}} e^{-\lambda t}$	
$\varphi = -\arctan \dfrac{(\lambda/\omega_0)}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}}$	



---

3) → Entre 10 passages de G, dans le même sens, à la position d'équilibre, il s'écoule 9 pseudopériodes donc :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\Delta t}{9}$$

T	$= 1{,}33\ s$
Ω	$= 4{,}71\ rad\ s^{-1}$

→ Au début de la 10ème oscillation, on a donc

(1) $$A(t=\Delta t) = x_0 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}} e^{-\lambda \Delta t} \quad (\text{avec } \Delta t = 9T)$$

$$\boxed{\frac{A_{\Delta t}}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}} e^{-\frac{18\pi(\lambda/\omega_0)}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}}}}$$

une résolution numérique avec le solveur de la machine à calculer donne $\frac{\lambda}{\omega_0} = 0{,}00509$

On va choisir une <u>méthode approchée</u> (qui revient à supposer que $A_{t=0} = x_0$. Ceci est correct si l'amortissement est faible donc si $\boxed{\frac{\lambda}{\omega_0} \ll 1}$

on a alors (à l'ordre 1 en λ/ω_0)

(1) $$\frac{A_{\Delta t}}{x_0} = e^{-\lambda \Delta t}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{x_0}{A_{\Delta t}}}$$

A.N. $$= \frac{1}{12} \ln \frac{10}{7{,}5}$$

$$\boxed{\lambda = 0{,}0240 \ s^{-1}}$$

$$\beta = 2 \lambda m$$

$$\boxed{\beta = 4{,}79 \ 10^{-3} \ kg\, s^{-1}}$$

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\Omega = \omega_0 \quad \text{(au premier ordre en } \frac{\lambda}{\omega_0}\text{)}$$

$$\boxed{\omega_0 = 4{,}71 \ rad\, s^{-1}}$$

$$k = m\, \omega_0^2$$

A.N. $$= 0{,}1 \times (4{,}71)^2$$

$$\boxed{k = 2{,}22 \ N\, m^{-1}}$$

vérification de cohérence

on avait supposé $\frac{\lambda}{\omega_0} \ll 1$

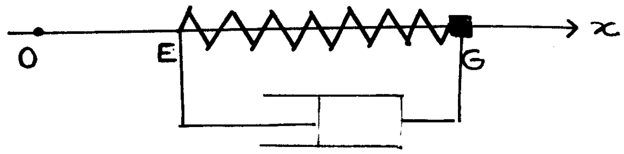
A.N. $$\frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{24{,}0 \ 10^{-3}}{4{,}71}$$

$$= 0{,}00510$$

satisfaisant.

4) On travaille dans $\mathcal{R}$ galiléen (dans $\mathcal{R}'$ non galiléen, il faudrait ajouter la force d'inertie d'entraînement)
Ici E n'est plus fixe.

$$\boxed{-k\,(\ell-\ell_0)\,\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{g} - \beta\,\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}'}} = m\,\overrightarrow{a_G}}$$



avec

$\longrightarrow$
$$\overrightarrow{OG} = x_G\,\overrightarrow{u_x}$$
$$= (x_E + \ell)\,\overrightarrow{u_x}$$
$$\boxed{\overrightarrow{OG} = (x_E + \ell_0 + x)\,\overrightarrow{u_x}}$$

$\longrightarrow$
$$\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{E/\mathcal{R}}} + \dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{v_{G/\mathcal{R}'}} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} \quad (\text{E est fixe dans } \mathcal{R}')$$

on retrouve d'ailleurs :

$$\overrightarrow{v_G/\mathcal{R}} = \overrightarrow{v_G/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{v_E/\mathcal{R}}$$
("absolue") ("relative") ("entrainement")

$\longrightarrow$
$$\overrightarrow{a_{G/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{a_{E/\mathcal{R}}} + \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$

On projette la relation fondamentale sur l'axe des x

$$-k\,x \qquad\qquad - \beta\,\dot{x} = m\,(\ddot{x}_E + \ddot{x})$$

(on voit apparaître $-m\ddot{x}_E$ force d'inertie d'entraînement qui serait apparue directement en travaillant dans $\mathcal{R}'$ non galiléen)

$$m\ddot{x} + \beta\,\dot{x} + k\,x = -m\,\ddot{x}_E$$
$$= m\,a\,\omega^2\cos(\omega t)$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = a\omega^2\cos(\omega t)}$$

---

5) On étudie en régime forcé en passant aux complexes

$$-\omega^2 \underline{x} + 2j\lambda\omega\underline{x} + \omega_0^2\underline{x} = a\omega^2\exp(j\omega t)$$

$$\underline{x} = \frac{a\omega^2 \exp j\omega t}{(\omega_0^2-\omega^2) + j\,2\lambda\omega}$$

$$= \frac{a\omega^2\,(-j)\exp j\omega t}{j(\omega^2-\omega_0^2) + 2\lambda\omega}$$

$$\boxed{x = \underbrace{\frac{a\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}}_{X_0}\sin\Big(\omega t - \underbrace{\arctan\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\lambda\omega}}_{\varphi}\Big)}$$

---

6) L'amplitude est :

$$\boxed{X_0 = \frac{a\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}}$$

$$\frac{X_0}{a} = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2-1\right)^2+4\frac{\lambda^2}{\omega_0^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

(2) $$y = \frac{u^2}{\sqrt{(u^2-1)^2+\frac{1}{Q^2}u^2}}$$

(en posant $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}}$ cf écriture canonique $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \dots$)

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{u^2}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\frac{1}{u^2}}}}$$

Dans cette dernière écriture, le numérateur est indépendant de u. Pour trouver la résonance, il suffit de chercher le <u>minimum</u> de

$$D = \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{1}{u^2}$$

en posant $\frac{1}{u^2} = x$

$$D(x) = (1 - x)^2 + \frac{1}{Q^2}x$$

A l'extremum, la dérivée est nulle

$$\frac{dD(x)}{dx} = -2(1-x) + \frac{1}{Q^2} = 0$$

il y a extremum pour

$$x = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}}$$

$$\boxed{\omega_{\text{Résonance}} = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}}}}$$

($\omega_{\text{Résonance}}$ est donc supérieur à ω_0)

Cet extremum n'existe que si

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$$

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}}$$

(l'amortissement doit être faible)

La valeur de y est à la résonance :

$$y = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\frac{1}{u^2}}}$$

$$y_{\text{Résonance}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}}$$

$$\boxed{y_{\text{Résonance}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

(lorsque Q est "grand", $y_{\text{Résonance}} \approx Q$)

remarque : on a étudié l'extremum sans démontrer qu'il s'agissait d'un maximum. Sur le plan mathématique, il faudrait étudier la dérivée seconde. Sur le plan physique, on peut voir que si $u \to 0$ $y \to 0$
$u \to \infty$ $y \to 1$
de plus y est positif donc le seul extremum est un maximum (sinon il y a un maximum quand $u \to \infty$)

$\longrightarrow$ Le système étudié est un passe-haut (avec résonance)
C'est le filtre RLC série aux bornes de L

$$\frac{\underline{u}_L(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \qquad \text{(diviseur de tension)}$$

$$= \frac{-LC\omega^2}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}$$

avec $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$
(comme pour un circuit RLC série)

$$= \frac{-\omega^2/\omega_0^2}{j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1}$$

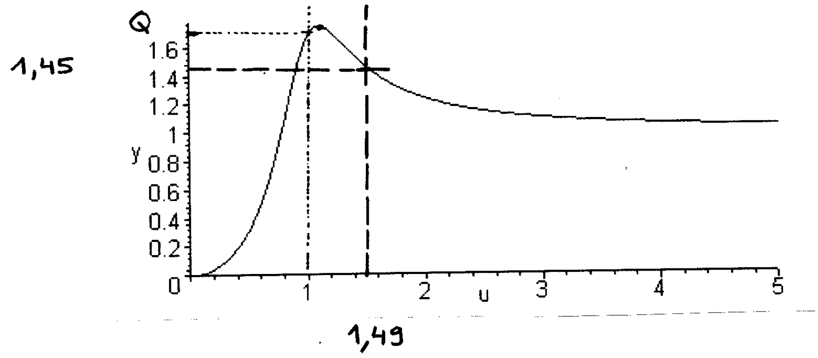
d'où pour les modules

$$y = \frac{U_L}{U} = \frac{u^2}{\sqrt{(u^2-1)^2 + \frac{1}{Q^2}u^2}}$$

on retrouve effectivement l'équation (2) du problème de mécanique.

$\longrightarrow$ application numérique :

$$u = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{7{,}0}{4{,}71}$$
$$= 1{,}49$$



on lit $\quad y \simeq 1,45$ (approximatif)

$$a = \frac{X_o}{y} = \frac{0,200}{1,45}$$

$$\boxed{a = 0,138 \text{ m}}$$

remarque le calcul est aussi possible.

$$y = \frac{u^2}{\sqrt{(u^2-1)^2 + \frac{1}{Q^2}u^2}}$$

avec $u = 1,49$
$Q \simeq 1,7$
(lu sur la courbe en $u=1$)

$y \simeq 1,48$

... etc

(la valeur de Q n'est pas la même que dans la première partie où l'on avait :

$Q = \dfrac{\omega_o}{2\lambda} = \dfrac{4,71}{2 \times 0,024} = 98$)

Ici $\quad Q = 1,7 \quad$ et $\quad \beta = 2m\lambda = m\dfrac{\omega_o}{Q} = 0,277$

---

7) le texte ne précise pas le référentiel pour calculer la puissance.

Puissance dissipée par les frottements dans $\mathcal{R}$

- méthode 1 Puissance de la force de frottement :

$$\boxed{P(t)_{/\mathcal{R}} = \vec{F}_{frottement}\ \vec{v}_{E/\mathcal{R}}}$$

$$= -\beta\dot{x}\ (\dot{x} + v_{E/\mathcal{R}})$$

$$= -\beta\dot{x}^2 - \beta\dot{x}\,v_{E/\mathcal{R}}$$

avec

$$x = X_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\dot{x} = X_0\omega \cos(\omega t - \varphi)$$

$$x_E = a\cos\omega t$$

$$v_E = -a\omega \sin\omega t$$

$$\boxed{P(t)_{/\mathcal{R}} = -\beta X_0^2\omega^2 \cos^2(\omega t-\varphi) + \beta X_0 a\,\omega^2 \sin\omega t \cos(\omega t-\varphi)}$$

On cherche la valeur moyenne avec

$$\langle \cos^2(\omega t-\varphi)\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin\omega t \cos(\omega t-\varphi)\rangle = \langle \sin\omega t\,(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi)\rangle$$

$$= \cos\varphi\,\underbrace{\langle \sin\omega t\cos\omega t\rangle}_{\text{nul}} + \sin\varphi\langle \sin^2\omega t\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sin\varphi$$

$$\boxed{\langle P(t)_{/\mathcal{R}}\rangle = -\beta X_0^2\omega^2\,\frac{1}{2} + \beta X_0 a\,\omega^2\,\frac{1}{2}\sin\varphi}$$

avec

$$\varphi = \arg\left(2\lambda\omega + j(\omega^2-\omega_0^2)\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}$$

$$= \frac{\omega^2-\omega_0^2}{a\,\omega^2}\,X_0$$

$$\boxed{\langle P\rangle_{/\mathcal{R}} = \frac{-\beta X_0^2\,\omega_0^2}{2}}$$

- méthode 2

Un bilan de puissance est possible. On retrouve le bilan à partir de la relation fondamentale :

$$-kx + f = m\ddot{x}_G$$

d'où

$$P(t)/\mathcal{R} = f\,\dot{x}_G$$

$$= (k x + m\ddot{x}_G)\,\underset{\downarrow \atop (\dot{x}_E + \dot{x})}{\dot{x}_G}$$

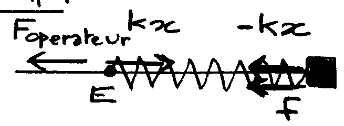
$$= k x \dot{x} + m \ddot{x}_G \dot{x}_G + k x \dot{x}_E$$

$$= \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v_G^2\right)}_{E_{\text{mécanique}}/\mathcal{R}} + k x \dot{x}_E$$

E mécanique est ici une grandeur <u>périodique</u> donc la valeur moyenne de $\frac{dE_{meca}}{dt}$ est nulle car $\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left(\frac{dE_{meca}}{dt}\right)dt = 0$

$$\boxed{\langle P\rangle_{/\mathcal{R}} = \langle k x \dot{x}_E \rangle}$$

En effet, en moyenne <u>la puissance fournie par l'opérateur en E annule la puissance des frottements $\vec{f}$.</u>



$$\langle \underset{\downarrow \atop -kx}{F_{op}}\, v_E \rangle + \langle f\, v_G \rangle = 0$$

$$\langle P \rangle_{/\mathcal{R}} = \langle k\, X_0 \sin(\omega t - \varphi) * -a\omega \sin(\omega t) \rangle$$

avec

$$\langle \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) \rangle = \langle \sin(\omega t)\left(\sin(\omega t)\cos\varphi - \cos(\omega t)\sin\varphi\right) \rangle$$

$$= \cos\varphi \langle \sin^2\omega t\rangle - \sin\varphi \underbrace{\langle \sin\omega t \cos\omega t\rangle}_{\text{nul}}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\lambda\omega}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\lambda\omega}{a\omega^2}X_0$$

d'où

$$\langle P\rangle/\mathcal{R} = -a\omega k X_0 \frac{1}{2}\frac{2\lambda\omega}{a\omega^2}X_0$$

$$= -k X_0^2 \lambda \qquad \text{or} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = \frac{\beta}{2m} \\ k = m\omega_0^2 \end{array}\right.$$

$$= -\frac{\beta X_0^2\omega_0^2}{2}$$

On a alors obtenu la puissance de la force de frottement. Celle-ci est négative (puissance reçue par la masse à cause des frottements négative)
La puissance dissipée est donc, en changeant le signe :

$$\boxed{P_{\substack{\text{dissipée}\\ \text{dans } \mathcal{R}}} = \frac{\beta X_0^2\omega_0^2}{2}}$$

$$\text{A.N.} \qquad = \frac{0{,}277 \;\; 0{,}2^2 \;\; 4{,}71^2}{2}$$

$$\boxed{P_{/\mathcal{R}} = 0{,}123 \text{ W}}$$

Puissance dissipée par les frottements dans $\mathcal{R}'$

- méthode 1 Puissance de la force de frottement :

$$\boxed{P(t)/\mathcal{R}' = \vec{f}_{\text{frottement}} \; \vec{v}_{G/\mathcal{R}'}}$$

$$= -\beta \dot{x} \quad \dot{x}$$

$$= -\beta \dot{x}^2 \qquad (\text{cf } P_{\text{Joule}} = R i^2)$$

$$\boxed{P(t)/\mathcal{R}' = -\beta X_o^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \varphi)}$$

$$\boxed{\langle P(t)/\mathcal{R}' \rangle = -\frac{\beta X_o^2 \omega^2}{2}}$$

- méthode 2

Bilan de puissance dans $\mathcal{R}'$. On retrouve

$$-kx + f \underbrace{- m\ddot{x}_E}_{\text{force d'inertie}} = m\ddot{x}$$

d'où

$$P(t)/\mathcal{R}' = f\dot{x}$$
$$= (m\ddot{x}_E + m\ddot{x} + kx)\,\dot{x}$$
$$= m\ddot{x}_E\,\dot{x} + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}_{E_{\text{mécanique}}/\mathcal{R}'}$$

$$\langle P \rangle/\mathcal{R}' = \langle m\ddot{x}_E\,\dot{x} \rangle$$

Ici E est fixe et c'est la puissance de la force d'inertie qui annule la puissance des frottements.

$$\langle -m\ddot{x}_E\, v \rangle + \langle f\, v \rangle = 0$$

$$\langle P \rangle/\mathcal{R}' = \langle m * -a\omega^2 \cos\omega t * X_o\, \omega \cos(\omega t - \varphi) \rangle$$
$$= -m\, a\, \omega^3 X_o \frac{1}{2}\cos\varphi$$
$$= -m\, a\, \omega^3 X_o \frac{1}{2}\frac{2\lambda X_o}{a\omega}$$
$$= -m\,\omega^2 \lambda X_o^2$$
$$= -\frac{\beta X_o^2 \omega^2}{2}$$

$$\boxed{P_{\text{dissipée dans } \mathcal{R}'} = \frac{\beta X_o^2 \omega^2}{2}}$$

$$= \frac{0{,}277\ 0{,}2^2\ 7^2}{2}$$

$$\boxed{P/\mathcal{R}' = 0{,}271\,\mathrm{W}}$$