Concours National Commun
Épreuve de Mathématiques I
Session 2022 - Filière MP

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP.
L'usage de tout matériel électronique, y compris La calculatrice, est interdit
Durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. n convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et d'un problème indépendants entre eux.

Exercice
Calcul d'intégrales
(Noté 4 points sur 20)

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$. On considère le polynôme $P_\lambda = X^2 + 2\lambda X + 1 \in \mathbb{C}[X]$, et on définit la fonction de la variable réelle F_λ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad F_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda + \cos x}.$$

0.1 Étude des racines du polynôme P_λ

On note z_1 et z_2 les racines complexes du polynôme P_λ et on suppose que $|z_1| \leqslant |z_2|$.

0.1.1 Préciser les valeurs de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.

0.1.2 On suppose que $|z_1| = 1$ et on choisit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = e^{i\theta}$. Justifier que $z_2 = e^{-i\theta}$ puis trouver une contradiction.

0.1.3 Montrer que $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$.

0.2 Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{P_\lambda}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

0.3 Développement de la fonction F_λ en série trigonométrique

0.3.1 Vérifier que pour tout réel x, $\ F_\lambda(x) = \dfrac{2e^{ix}}{P_\lambda(e^{ix})}$.

0.3.2 Montrer que pour tout réel x, $\ F_\lambda(x) = \frac{2}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{1-e^{-ix}z_1} + \frac{z_1 e^{ix}}{1-e^{ix}z_1}\right)$.

0.3.3 Justifier que, pour tout réel x, la série numérique $\sum\limits_{n \geq 1} z_1^n \cos(nx)$ est convergente et que

$$F_\lambda(x) = \frac{2}{z_1 - z_2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n \cos(nx)\right).$$

0.4 Application au calcul d'intégrales

On considère la suite de fonctions $(w_n)_{n \geqslant 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad w_n(x) = z_1^n \cos(nx)$$

0.4.1 Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} w_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

0.4.2 En déduire les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(pt)}{\lambda + \cos t}\, dt$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

0.5 Donner en particulier les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{2 + \cos t}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{\cos t + \cosh a}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $a > 0$, où cosh désigne la fonction cosinus hyperbolique.

Problème

Étude d'une série entière

Pour tout $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on pose $\binom{\alpha}{n} = 1$ si $n = 0$, et $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n \geq 1$.
On considère la suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)dt = \int_0^1 \binom{t}{n}dt.$$

Le problème a pour objectif de déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$, puis de calculer sa somme sur son intervalle ouvert de convergence et en fin d'étudier son comportement aux bornes de cet intervalle.

1ère Partie

Quelques résultats préliminaires

1.1 Une inégalité utile

Soit $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\varphi'' \leq 0$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

1.1.1 Montrer que, pour tout $t \in [0,1]\,, \varphi(t) = t\varphi'(0) + \displaystyle\int_0^t (t-s)\varphi''(s)ds$.

1.1.2 En déduire que $\varphi'(0) = -\displaystyle\int_0^1 (1-s)\varphi''(s)ds$.

1.1.3 Montrer que, pour tout $t \in [0,1]\,, \varphi(t) = -\displaystyle\int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(s)ds$.

1.1.4 Montrer que, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2\,, 0 \leq \min(s,t) - st \leq \frac{1}{4}$, puis en déduire que

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \frac{\varphi'(0) - \varphi'(1)}{4}$$

1.2 Étude de la convergence d'une intégrale et d'une série numérique

1.2.1 Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln^2 t}$ est intégrable sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt$.

1.2.2 En déduire que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente.

1.3 Formule du binôme généralisée

Si N est un entier naturel et x un nombre réel, alors $(1+x)^N = \sum\limits_{n=0}^{N} \binom{N}{n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{N}{n} x^n$; c'est la formule du binôme de Newton. L'objectif de cette section est d'établir une généralisation de cette formule au cas où N est remplacé par un réel qui n'est pas un entier naturel.

Pour cela, on considère un nombre réel α, qui n'est pas un entier naturel, et on note f_α la fonction définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$\forall x > -1, \quad f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha.$$

1.3.1 Vérifier que la fonction f_α est solution sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(1+x)y' - \alpha y = 0. \tag{1}$$

1.3.2 On se propose dans cette sous section de chercher les solutions de l'équation différentielle (1) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Pour cela, on considère une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme, notée $\psi : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, est solution de (1) sur l'intervalle $]-r, r[$, avec $r = \min(R, 1)$.

(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (n+1)a_{n+1} = (\alpha - n)a_n$.

(ii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \binom{\alpha}{n} a_0$.

(iii) Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0 = 1$, puis vérifier que sa somme est bien solution de (1) sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

1.3.3 Montrer soigneusement que pour tout $x \in]-1, 1[\,,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

$2^{\text{ème}}$ Partie
Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série entière en question

On rappelle que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)dt = \int_0^1 \binom{t}{n} dt$$

2.1 Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$ et tout entier naturel n, $\left| \binom{t}{n} \right| \leq 1$.

2.2 En déduire que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ vérifie $R_1 \geqslant 1$.

2.3 Soit $x \in]-1, 1[$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,1]\,, \quad u_n(t) = \binom{t}{n} x^n$$

2.3.1 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur le segment $[0,1]$.

2.3.2 En déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[\,, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \int_0^1 (1+x)^t \, dt = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

2.4 On cherche ici à montrer que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ vaut 1 .

Raisonnant par l'absurde, on suppose que $R_1 > 1$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, x \in]-R_1, R_1[$.

2.4.1 Soit $x \in]0, 2[$. Justifier que $f(x-1) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{-1}{\ln x}$.

2.4.2 Trouver une contradiction et conclure .

$3^{\text{ème}}$ Partie
Étude du comportement de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note h_n la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad h_n(t) = t \ln n + \sum_{k=2}^{n} \ln \left(1 - \frac{t}{k}\right).$$

3.1 **Étude de la suite de fonctions $(h_n)_{n \geqslant 2}$**
On considère la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall n \geqslant 2, \forall t \in [0,1]\,, \quad v_n(t) = \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) - t \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

3.1.1 Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1]$, $h_n(t) = \sum_{k=2}^{n} v_k(t)$.

3.1.2 En utilisant le résultat de la section **1.1.** de la première partie, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant v_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)} - \dfrac{1}{4n}$.

3.1.3 En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge normalement sur le segment $[0,1]$.

3.1.4 Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers une fonction notée h, puis justifier que h est continue sur le segment $[0,1]$.

3.2 Recherche d'un équivalent de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3.2.1 Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, b_n = (-1)^{n-1}\,|b_n|$.

3.2.2 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $(n+1)\,|b_{n+1}| = \displaystyle\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h_n(t)}dt$.

3.2.3 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant h(t) - h_n(t) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

3.2.4 En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'encadrement

$$e^{-\frac{1}{4n}} \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}dt \leqslant (n+1)\,|b_{n+1}| \leqslant \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}dt$$

3.2.5 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}dt = \frac{1}{\ln^2 n}\int_0^{\ln n} se^{-s}\left(1-\frac{s}{\ln n}\right)e^{h\left(\frac{s}{\ln n}\right)}ds$$

3.2.6 On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$\forall t \geqslant 0, \quad g(t) = (1-t)e^{h(t)} \text{ si } t \in [0,1] \text{ et } g(t) = 0 \quad \text{si} \quad t > 1.$$

(i) Justifier que la fonction g est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

(ii) Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé, que la suite numérique $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} se^{-s}g\left(\frac{s}{\ln n}\right)ds\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

(iii) Déduire de ce qui précède que $|b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ et que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$.

3.3 Retour à l'étude de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence

3.3.1 Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, de la variable réelle x, converge normalement sur le segment $[-1,1]$.

On note encore f la somme de cette série sur le segment $[-1,1]$:

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

3.3.2 Justifier que, pour tout $x \in]-1,1]$, $\quad f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$,

3.3.3 Justifier la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0}(-1)^n b_n$ et calculer sa somme.

FIN DE L'ÉPREUVE