SESSION 2002

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

I. Généralités et exemples

1. Supposons que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge. Posons $P = \prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. Par définition P est un réel non nul.

Pour tout entier naturel n, $P_n \neq 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\prod_{k=0}^{n} u_k}{\prod_{k=0}^{n-1} u_k} = u_n.$$

Puisque $P \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{P}{P} = 1$.

2. **a)** En appliquant la définition de la limite au réel $\varepsilon = 1$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n > 1 - 1 = 0$.

b) Pour tout $n \geqslant n_0$, $\prod_{k=0}^{n} u_k = \lambda \prod_{k=n_0}^{n} u_k$ où $\lambda = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} u_k\right)$. Comme $\lambda \neq 0$, la suite $\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite non nulle si et seulement si la suite $\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers une limite non nulle. Donc les produits infinis $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ et $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ sont de même nature.

3. **a)** Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$. Par hypothèse la suite (P_n) est strictement positive et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = \ln(P_n)$ ou encore $P_n = e^{S_n}$.
Si la suite (S_n) converge vers un réel S, $P_n = e^{S_n}$ converge vers e^S qui est un réel strictement positif.
Si la suite P_n converge vers une limite non nulle P, on a $P > 0$ puisque la suite $(P - N)$ est positive et de plus $S_n = \ln(P_n)$ converge vers le réel $\ln(P)$.

Finalement, le produit infini de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général $\ln(u_n)$ converge.

b) La suite $(1 + u_n)$ est strictement positive. D'après la question précédente, le produit infini $\prod_{n\geqslant 0}(1 + u_n)$ converge si et seulement si la série de terme général $\ln(1 + u_n)$ converge.

Si la série de terme général u_n converge, alors en particulier u_n tend vers 0 puis $\ln(1 + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n > 0$. Mais alors la série de terme général $\ln(1 + u_n)$ converge.
Si la série de terme général $\ln(1 + u_n)$ converge, alors en particulier $\ln(1 + u_n)$ tend vers 0 puis $u_n = e^{\ln(1+u_n)} - 1$ tend vers 0. Mais alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1 + u_n) > 0$. Mais alors la série de terme général u_n converge.

Finalement , le produit infini de terme général $1 + u_n$ converge si et seulement si la série de terme général u_n converge.

c) On réécrit tout se qui précède en remplaçant u_n par $-u_n$ et on obtient le résultat.

4. **a)** Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{4n^2} \in]0,1[$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2}$ converge, les questions 2.b et 3.c permettent d'affirmer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ converge.

b) Soit $x \in]-\pi,\pi[$. Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{x^2}{n^2\pi^2} \in \left]0, \dfrac{x^2}{\pi^2}\right] \subset]0,1[$. Puisque la série de terme général $\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}$ converge, le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ converge.

c) Soit $x > 0$. Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-x/n}$. Alors, pour tout $n \geqslant 1n$ $u_n > 0$ puis

$$\ln(u_n) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, la série de terme général $\ln(u_n)$, $n \geqslant 1$, converge et d'après la question 3.a, le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$ converge.

5. **a** Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} > 0$. D'après la question 3.b, la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, et le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ sont de même nature.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$ (produit télescopique). Par suite, le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge vers $+\infty$ et il en est de même de la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

b Soit $p \geqslant 2$. Alors $0 < \dfrac{1}{p} < 1$ et la série géométrique de terme général $\dfrac{1}{p^k}$, $k \geqslant 0$, converge puis

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p^k} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{p}}.$$

c) Soit $N \geqslant 2$ puis $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, les nombres premiers deux à deux distincts inférieurs ou égaux à N. Tout entier $k \in [\![1,n]\!]$ s'écrit donc de manière unique sous la forme $p_1^{\beta_1}\ldots p_n^{\beta_n}$ où $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i = E\left(\dfrac{N}{p_i}\right)$. Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} &\leqslant \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in[\![0,\alpha_1]\!]\times\ldots\times[\![0,\alpha_n]\!]}\frac{1}{p_1^{\beta_1}\ldots p_n^{\alpha_n}} = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{\beta_i=0}^{\alpha_i}\frac{1}{p_i^{\beta_i}}\right)\\ &\leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{\beta_i=0}^{+\infty}\frac{1}{p_i^{\beta_i}}\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_i}}\\ &= \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n}}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $N \geqslant 2$, $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n}} \geqslant \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$. Quand N tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n}} = +\infty$. La question 3.a permet d'affirmer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p_n}}\right) = -\ln\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)$ diverge. Enfin, p_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et donc $\dfrac{1}{p_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors $-\ln\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{p_n} > 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{p_n}$ diverge.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.}$$

II. Développements eulériens du sinus et formule de Wallis

6. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction f_α est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. De plus, $f_\alpha(\pi^+) = f_\alpha(-\pi^+) = \cos(-\alpha\pi) = \cos(\alpha\pi) = f_\alpha(\pi) = f_\alpha(\pi^-)$. Donc, f_α est continue en π puis en tous les $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, par 2π-périodicité.

En résumé, la fonction f_α est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f_α converge simplement vers f_α sur $\mathbb{R}$.

f_α est paire. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f_\alpha) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n(f_\alpha) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha t)\cos(nt)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos((\alpha+n)t) + \cos((\alpha-n)t))\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)t)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)t)}{\alpha-n}\right]_0^\pi \text{ (car } \alpha \notin \mathbb{Z}) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right) = \frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right) = \frac{(-1)^n 2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}.
\end{aligned}$$

Mais alors, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos(\alpha t) = f_\alpha(t) = \frac{a_0(f_\alpha)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f_\alpha)\cos(\alpha t) + b_n(f_\alpha)\sin(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nt).$$

Pour $t = \pi$, on obtient en particulier $\cos(\alpha\pi) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}$ puis en divisant par le réel non nul $\sin(\alpha\pi)$,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \text{cotan}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}.}$$

7. **a)** La fonction g est continue sur $]0, x] \subset]0, \pi[$ en vertu de théorèmes généraux. De plus,

$$g(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t\sin t} \underset{t\to0,\ t>0}{\sim} \frac{t^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)}{t^2} = -\frac{t}{3} \underset{t\to0,\ t>0}{\to} 0 = g(0).$$

Par suite, g est continue en 0 et finalement g est continue sur $[0, x]$.

En particulier, $\displaystyle\int_0^x g(t)\ dt$ existe et de plus

$$\int_0^x g(t)\ dt = \lim_{\varepsilon\to0} [\ln(\sin t) - \ln(t)]_\varepsilon^x = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) - \lim_{\varepsilon\to0} \ln\left(\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

$$\boxed{\forall x \in]0, \pi[,\ \int_0^x g(t) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).}$$

b) La formule est vraie quand $t = 0$. Soit $t \in]0, x] \subset]0, 1[$ puis $\alpha = \dfrac{t}{\pi} \in]0, 1[$. Alors $\alpha \notin \mathbb{Z}$ et d'après la question 6,

$$g(t) = \text{cotan}(t) - \frac{1}{t} = \left(\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{2t}{\pi}}{\pi\left(\frac{t^2}{\pi^2} - n^2\right)}\right) - \frac{1}{t} = 2t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

c) Soit $x \in]0,\pi[$. Pour $t \in [0,x]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n(t) = \dfrac{2t}{t^2-n^2\pi^2}$. Tout d'abord, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,x]$, $n^2\pi^2 - t^2 \geqslant \pi^2 - x^2 > 0$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,x]$,

$$|g_n(t)| = \frac{2t}{n^2\pi^2 - t^2} \leqslant \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$$

et donc $\|g_n\|_\infty \leqslant \dfrac{2x}{n^2\pi^2-x^2}$ (où $\|g_n\|_\infty = \sup\{|g_n(t)|,\ t \in [0,x]\}$). Comme la série numérique de terme général $\dfrac{2x}{n^2\pi^2-x^2}$, $n \geqslant 1$, converge (car $\dfrac{2x}{n^2\pi^2-x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{n^2\pi^2}$, on a montré que la série de fonctions de terme général g_n, $n \geqslant 1$, converge normalement et donc uniformément sur $[0,x]$.

Ainsi, chaque fonction g_n est continue sur le segment $[0,\pi]$ et la série de fonctions de terme général g_n converge uniformément vers g sur $[0,x]$. On peut donc intégrer terme à terme et on obtient

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \int_0^x g(t)\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x g_n(t)\ dt \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln|t^2-n^2\pi^2|\right]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left|\frac{x^2-n^2\pi^2}{n^2\pi^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \\
&= \ln\left(\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\right) \text{ (par continuité de } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&= \ln\left(\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right),
\end{aligned}$$

et finalement, $\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ ou encore $\sin x = x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. Cette égalité reste vraie pour $x=0$ et aussi pour $x \in]-\pi,0[$ par parité. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).}$$

8. Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient en particulier $1 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ et donc

$$\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

III. Formule de Weierstrass et constante d'Euler

9. a) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Quand t tend vers $+\infty$, $t^2e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}t^{x+1} \to 0$ et donc $e^{-t}t^{x-1} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par suite, la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
Quand t tend vers 0, $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1} > 0$. Comme $x-1 > -1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

Finalement, la fonction $\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$.

c) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1 < b$. Soit $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc}[a,b]\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t}\end{array}$.

• Pour chaque $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 9.a).

• Φ admet sur $[a, b] \times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x à savoir

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[, \ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = \ln t e^{-t} t^{x-1}.$$

De plus,

- Pour chaque $x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour chaque $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, b]$.
- Pour chaque $(x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)\right| = |\ln t| e^{-t} t^{x-1} \leqslant \begin{cases} |\ln t| e^{-t} t^{a-1} \text{ si } 0 < t < 1 \\ |\ln t| e^{-t} t^{b-1} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases} = \varphi(t)$.

  La fonction φ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction φ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
  Quand t tend vers 0, $t^{1-\frac{a}{2}} \varphi(t) = |\ln t| e^{-t} t^{\frac{a}{2}} \sim |\ln t| t^{\frac{a}{2}} \to 0$ (car $a > 0$) et donc $\varphi(t) = o\left(t^{-1+\frac{a}{2}}\right)$.
  Comme $-1 + \dfrac{a}{2} > -1$, la fonction $t \mapsto t^{-1+\frac{a}{2}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction φ.
  Finalement, la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels a et b tels que $0 < a < 1 < b$, Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} t^{x-1} \, dt.}$$

10. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $t \geqslant n$, $f_n(t) = 0$ et donc $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}$.

Soit $t \in]0, n[$. Alors, $1 - \dfrac{t}{n} \geqslant 0$ puis $f_n(t) \geqslant 0$.

Ensuite, on sait que pour tout $u \in]-1, +\infty[$, $\ln(1 + u) \leqslant u$ (inégalité de convexité). Comme $-\dfrac{t}{n} \in]-1, 0[\subset]-1, +\infty[$, on en déduit que $\ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \leqslant -\dfrac{t}{n}$ ou encore $\ln\left(\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n\right) \leqslant -t$ et finalement $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$. Encore une fois, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}$.

On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall t \in]0, +\infty[, \ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t}.}$$

b) Soit $x \in]0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, +\infty[$, posons $\gamma_n(t) = f_n(t) t^{x-1}$.

• Chaque fonction $\gamma_n : t \mapsto f_n(t) t^{x-1}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Vérifions que la suite de fonctions (γ_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$. Soit $t \in]0, +\infty[$. Pour $n > t$, on a $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)\right)$. Quand n tend vers $+\infty$,

$$f_n(t) = \exp\left(n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = e^{-t+o(1)}.$$

Ainsi, pour tout $t > 0$, $\gamma_n(t)$ tend vers $e^{-t} t^{x-1}$ quand n tend vers $+\infty$ ou encore la suite de fonctions (γ_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.

• Pour tout entier naturel non nul n et tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leqslant \gamma_n(t) \leqslant e^{-t} t^{x-1} = \varphi(t)$ où la fonction φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 9.a.

Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n(t)\,dt$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.$$

$$\boxed{\forall x>0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.}$$

11. a) Soient $x \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Les deux fonctions $u \mapsto (1-u)^n$ et $u \mapsto \dfrac{u^x}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_\varepsilon^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 (-n)(1-u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\,du$$
$$= -(1-\varepsilon)^n \frac{\varepsilon^x}{x} + \frac{n}{x}\int_\varepsilon^1 (1-u)^{n-1}u^x\,du.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $I_n(x) = \dfrac{n}{x} I_{n-1}(x+1)$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x>0$.

$$I_n(x) = \frac{n}{x}\times\frac{n-1}{x+1}\times\ldots\times\frac{1}{x+n-1}I_0(x+n) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$$

ce qui reste vrai quand $n=0$.

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x>0$. En posant $u = \dfrac{t}{n}$, on obtient

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \left(\frac{t}{n}\right)^{x-1}\frac{dt}{n} = \frac{1}{n^x}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt,$$

et donc $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = n^x I_n(x) = \frac{n!n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$. La question 10.b permet alors d'affirmer que

$$\boxed{\forall x>0,\ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.}$$

12. Application : a) Soit $x \in]0,1[$. Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue positive et non nulle sur $]0,+\infty[$, on a $\Gamma(x)>0$ et $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!n^x}$ puis $1-x \in]0,1[$ et

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)\prod_{k=0}^{n}(1-x+k)}{n!n^x n!n^{1-x}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)\prod_{k=1}^{n+1}(k-x)}{n!^2 n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x(1-x+n)}{n}\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+x)\prod_{k=1}^{n}(k-x)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k^2}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

b) Soit $x \in]0,1[$. D'après la question 7.c, $\forall x \in]-\pi,\pi[$, $\sin x = x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ ou encore $\forall x \in]-1,1[$, $\sin(\pi x) = \pi x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$ et donc

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi}$$

et finalement

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.}$$

c) En particulier, si $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\left(\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \dfrac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi$ et donc puisque $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

En posant $t = u^2$ (l'application $u \mapsto u^2$ est un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même) ou encore $u = \sqrt{t}$ puis $du = \dfrac{2dt}{\sqrt{t}}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du,$$

et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

13. a) Quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc la série de terme général u_n, $n \geqslant 2$, est absolument convergente et en particulier convergente.

b) Soit $n \geqslant 2$. $v_{n-1} - v_n = \dfrac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n-1) = u_n$. On sait que la suite (v_n) et la série de terme général $v_{n-1} - v_n$ sont de même nature. D'après la question précédente, la série de terme général $v_{n-1} - v_n$ converge et donc la suite (v_n) converge.

14. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!n^x} = x\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = x\lim_{n\to+\infty}e^{x+\frac{x}{2}+\ldots+\frac{x}{n}-x\ln n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} \\
&= x\lim_{n\to+\infty}e^{xv_n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}} \\
&= xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \text{ (d'après la question 4.c, le produit infini converge)}
\end{aligned}$$

15. **a)** Soit $x \in]0,1]$.

$$(*) \quad \ln(\Gamma(x)) = -\ln\left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{x}{n}\right) \text{ (par continuité de ln sur }]0,+\infty[).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = -\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{x}{n}$.

- La série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement sur $]0,1]$.
- Chaque fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout x de $[0,1]$,

$$f_n'(x) = -\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{x}{n}} + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

Pour tout $x \in]0,1]$, $|f_n'(x)| = \frac{x}{n(n+x)} \leqslant \frac{1}{n(n+0)} = \frac{1}{n^2}$. Comme la série numérique de terme général $\frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n' converge normalement et donc uniformément sur $]0,1]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est dérivable sur $]0,1]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

En dérivant l'égalité $(*)$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in]0,1],\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}.}$$

b) D'après la question 9.c, $\forall x > 0$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\, t^{x-1}\ dt$ et d'après la question 9.b, $\Gamma(1) = 1$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\ dt = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} &= -1-\gamma+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \\ &= -1-\gamma+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = -1-\gamma+\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right) \text{ (somme télescopique)} \\ &= -\gamma.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\ dt = -\gamma.}$$

