Planche n° 1. Logique

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*IT)

f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

1) a) f est la fonction nulle.

b) L'équation $f(x) = 0$ a une solution.

c) L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.

d) La fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

2) a) f est l'identité de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même. Cette fonction est notée $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$).

b) Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.

c) f a au moins un point fixe.

3) a) f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) f est monotone sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 2 (*IT)

Dans cet exercice, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle. Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

1) a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2) a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Exercice n° 3 (*IT)

Dans cet exercice, f est une fonction du plan dans lui-même. Même énoncé.

1) a) f est l'identité du plan (notée $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$).

b) f a au moins un point invariant (on dit aussi point fixe).

2) Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, M est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω est égale à R.

Exercice n° 4 (*IT) Donner la négation des phrases suivantes

1) $x \geqslant 3$

2) $0 < x \leqslant 2$.

Exercice n° 5 (IT)**

Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

1) « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ et $g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».

2) « $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)$ ».

Donner un exemple de fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux non nulles et dont le produit est nul.

Exercice n° 6 (IT)**

Dans chacun des cas suivants, dire si la proposition est vraie ou fausse puis le démontrer.

1) $\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin(x) = x$.

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \neq 0$.

3) $\forall x \in \mathbb{C},\ x^2 + 1 \neq 0$.

Exercice n° 7. (IT)**

1) Montrer que la fonction sin n'est pas nulle.

2) Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 8. (IT)**

1) Montrer que la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0)$ » est vraie.

2) Montrer que la proposition : « $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0 \text{ et } \sin x = 0)$ est fausse.

Exercice n° 9. (*IT)**

Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice n° 10. (*IT)**

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que $(\exists k \in \mathbb{N}/\ b = ka \textbf{ et } \exists k \in \mathbb{N}/\ a = kb) \Rightarrow a = b$.

Exercice n° 11. (IT)**

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes puis dans chaque cas dire si la proposition est vraie ou fausse.

1) Tout entier naturel est pair ou impair.

2) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.

3) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.

4) Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

Exercice n° 12. (IT)**

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

2) f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 13. (*IT)

Dans chacun des cas suivants, dire si l'affirmation proposée est vraie ou fausse.

1) Pour tout $n \geqslant 3$, pour que n soit premier, il suffit que n soit impair.

2) Pour tout $n \geqslant 3$, pour que n soit premier, il faut que n soit impair.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que $x^2 = 4$, il est nécessaire que $x = 2$.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que $x^2 = 4$, il est suffisant que $x = 2$.

5) Pour que $x \in \mathbb{R}$, il est nécessaire que $x > 2$ pour que $x > 3$.

6) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour que $x > 3$, il est suffisant que $x > 2$.

