Planche n° 44. Fonctions de deux variables réelles. Corrigé

Exercice n° 1 Cet exercice n'est pas dans la mentalité du programme officiel de math sup mais prépare la math spé avec des fonctions de deux variables. On se contentera assez souvent d'un point de vue intuitif.

1) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Quand x tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si f a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.
Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\dfrac{1}{2} \neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \times |xy| \leqslant \dfrac{1}{2}|xy|$. Comme $\dfrac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de f. $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

3) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $y \neq 0$, $f(0,y) = \dfrac{y^3}{y^4} = \dfrac{1}{y}$. Quand y tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

Pour $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \dfrac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0)$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

5) f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$.

$\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \dfrac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \dfrac{|x|}{2}$ et donc f tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Exercice n° 2 Même remarque que pour l'exercice n° 1.

• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

• f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• **Continuité en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy|\,\left|x^2-y^2\right|}{x^2+y^2} \leqslant |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$. On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ est de classe } C^0 \text{ au moins sur } \mathbb{R}^2.$$

• **Dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.** f est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = -f(y,x)$. Donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• **Existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0,$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\text{ si }(x,y)\neq(0,0)\\ 0\text{ si }(x,y)=(0,0)\end{array}\right.\quad\text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\text{ si }(x,y)\neq(0,0)\\ 0\text{ si }(x,y)=(0,0)\end{array}\right..$$

• **Continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.** Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\frac{|y||x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2}\leqslant|y|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}\leqslant|y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2}=2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on en déduit que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Donc la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

$$\boxed{f\text{ est au moins de classe }C^1\text{ sur }\mathbb{R}^2.}$$

Exercice n° 3

On dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^r f(x,y)$. On obtient

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\lambda>0,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x,\lambda y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x,\lambda y)=r\lambda^{r-1}f(x,y),$$

et pour $\lambda=1$, on obtient

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=rf(x,y).$$

Exercice n° 4

1) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x_0y_0=0\\ x_0^2+\dfrac{2y_0}{1+y_0^2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0=0\\ y_0=0\end{array}\right..$$

Si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, alors $(x_0,y_0)=(0,0)$.

Réciproquement, pour tout réel $x\neq0$, $f\left(x,x^2\right)-f(0,0)=f(x,y)=x^4+\ln\left(1+x^4\right)>0$. Puisque $\left(x,x^2\right)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\rightarrow}(0,0)$, l'expression $f(x,y)-f(0,0)$ prend des valeurs strictement positives dans tout voisinage de $(0,0)$.

D'autre part, pour tout réel $x\neq0$, $f\left(x,-x^2\right)-f(0,0)=f(x,y)=-x^4+\ln\left(1+x^4\right)<0$ (inégalité de convexité). L'expression $f(x,y)-f(0,0)$ prend aussi des valeurs strictement négatives dans tout voisinage de $(0,0)$.

Ainsi, $f(0,0)$ n'est ni un minimum local, ni un maximum local et finalement, f n'a pas d'extremum local.

2) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4(x-y)+4x^3=0\\ 4(x-y)+4y^3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^3+y^3=0\\ -4(x-y)+4x^3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-x\\ x^3-2x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow(x,y)\in\left\{(0,0),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\right\}.$$

• Etude en $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$. $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=-8$ puis, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}f(x,y)-f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)&=x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy+8\geqslant x^4+y^4-2x^2-2y^2-2\left(x^2+y^2\right)+8\\&=x^4-4x^2+y^4-4y^2+8=\left(x^2-2\right)^2+\left(y^2-2\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

et donc f admet un minimum global en $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ égal à -8.

• Etude en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. $f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=-8$ et donc f admet aussi un minimum global en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ égal à -8.

• Etude en $(0,0)$. $f(0,0)=0$. Pour $x\neq 0$, $f(x,x)=2x^4>0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Pour $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\setminus\{0\}$, $f(x,0)=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

En résumé, f admet un minimum global atteint en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ et $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ et uniquement en ces points et ce minimum global est égal à -8. f n'admet pas d'autre extremum local.

Exercice n° 5

1) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Posons $f(x,y)=g(u,v)$ où $u=x+y$ et $v=x+2y$.
L'application $\varphi\ :\ (x,y)\mapsto(x+y,x+2y)=(u,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. D'après la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(g(u,v))=\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}+2\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial g}{\partial u}+2\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}-2\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite, $2\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial g}{\partial u}=0\Leftrightarrow\exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=h(v)\Leftrightarrow\exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=h(x+2y)$.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } (x,y)\mapsto h(x+2y) \text{ où } h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

Par exemple, la fonction $(x,y)\mapsto\cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ est solution.

2) Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Posons $f(x,y)=g(r,\theta)$ où $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. L'application $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)=(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(f(x,y))=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}(f(x,y))=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial y}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0\Leftrightarrow\frac{\partial g}{\partial\theta}=0&\Leftrightarrow\exists h_1\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(r,\theta)\in]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta)=h_1(r)\\&\Leftrightarrow\exists h_1\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\&\Leftrightarrow\exists h\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=h(x^2+y^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } (x,y)\mapsto h(x^2+y^2) \text{ où } h\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$

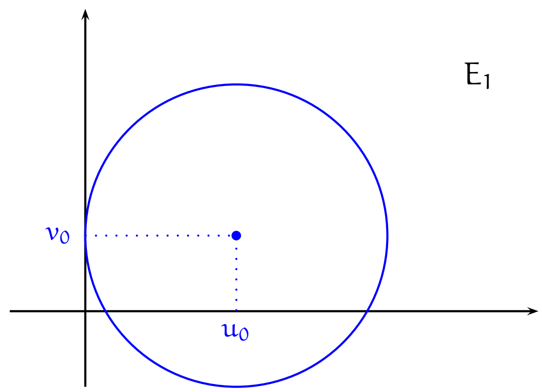
Exercice n° 6

1) T est l'intersection des ensembles $P_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \ u > 0\}$, $P_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \ v > 0\}$ et $P_3 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \ u + v < \alpha\}$.

• Montrons que E_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(u_0, v_0) \in E_1$. Donc, $u_0 > 0$. Soient $r = u_0$ puis $B = B_o((u_0, v_0), r)$. Montrons que $B \subset E_1$.
Soit $(u, v) \in B$. Donc,

$$u_0 - u \leqslant |u - u_0| \leqslant \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} = \|(u, v) - (u_0, v_0)\| < r = u_0$$

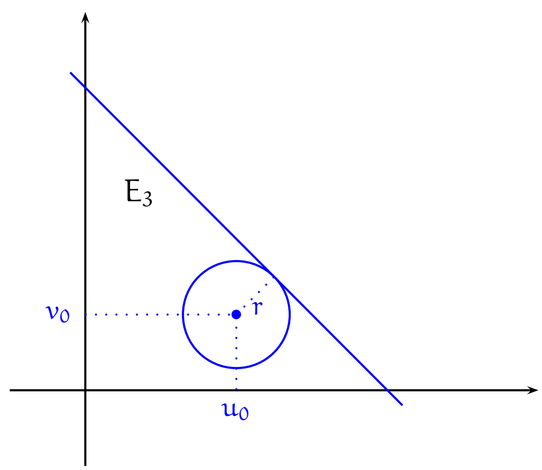
puis $u > 0$ et donc $(u, v) \in B$. Ceci montre que $B \subset E_1$.



On a montré que : $\forall (u_0, v_0) \in E_1$, $\exists r > 0 / \ B_o((u_0, v_0), r) \subset E_1$. Donc, E_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

De même, E_2 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

• Montrons que E_3 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(u_0, v_0) \in E_1$. Donc, $u_0 + v_0 < \alpha$. La distance du point (u_0, v_0) à la droite d'équation $u + v = \alpha$ est $\dfrac{|u_0 + v_0 - \alpha|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{\alpha - u_0 - v_0}{\sqrt{2}}$.
Soient donc $r = \dfrac{\alpha - u_0 - v_0}{\sqrt{2}}$ puis $B = B_o((u_0, v_0), r)$. Le dessin ci-dessous suffira probablement pour convaincre que $B \subset E_3$.



On a montré que : $\forall (u_0, v_0) \in E_3$, $\exists r > 0 / \ B_o((u_0, v_0), r) \subset E_3$. Donc, E_3 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Mais alors, T est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection d'un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{R}^2$.

2) On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC. Soit M un point intérieur au triangle ABC. On note I, J et K les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On pose $u =$ aire de MBC, $v =$ aire de MCA et $w =$ aire de MAB. On a

$$d(M, (BC)) \times d(M, (CA)) \times d(M, (AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc} uv(\mathscr{A} - u - v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f : (u, v) \mapsto uv(\mathscr{A} - u - v)$ sur le domaine

$$T_0 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \ u \geqslant 0, \ v \geqslant 0 \text{ et } u + v \leqslant \mathscr{A}\}.$$

L'énoncé nous demande d'admettre l'existence de ce maximum.

Pour tout (u, v) appartenant à la frontière de T (c'est-à-dire tel que $u = 0$ ou $v = 0$ ou $u + v = \mathscr{A}$), on a $f(u, v) = 0$. Comme f est strictement positive sur $T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 /\ u > 0,\ v > 0 \text{ et } u + v < \mathscr{A}\}$, f admet son maximum sur T_0 dans T. Puisque f est de classe C^1 sur T qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet un maximum en $(u_0, v_0) \in T$, (u_0, v_0) est nécessairement un point critique de f. Soit $(u, v) \in T$.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}v(\mathscr{A} - 2u - v) = 0\\ u(\mathscr{A} - u - 2v) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2u + v = \mathscr{A}\\ u + 2v = \mathscr{A}\end{array}\right. \Leftrightarrow u = v = \frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Puisque f admet un point critique et un seul à savoir $(u_0, v_0) = \left(\dfrac{\mathscr{A}}{3}, \dfrac{\mathscr{A}}{3}\right)$, f admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0, v_0) = \dfrac{\mathscr{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur au triangle ABC aux cotés de ce triangle est donc $\dfrac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$.

Remarque. On peut démontrer que pour tout point M intérieur au triangle ABC, on a

$$M = \text{bar}\left((A, \text{aire de } MBC), (B, \text{aire de } MAC), (C, \text{aire de } MAB)\right).$$

Si maintenant M est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en G l'isobarycentre du triangle ABC.

Exercice n° 7

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(0, a)$ et $(a, 0)$ dans un certain repère $\mathscr{R}$ orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathscr{R}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = MA + MB \geqslant AB \text{ avec égalité si et seulement si } M \in [AB].$$

Donc f admet un minimum global égal à $AB = a\sqrt{2}$, atteint en les couples (x, y) de la forme $((1 - \lambda)a, \lambda a)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Exercice n° 8

1) $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z = f(x, y)$ avec, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = x_0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -y_0$.

Une équation du plan tangent $\mathscr{P}_0$ à $\mathscr{S}$ en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est $z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ ou encore $z = z_0 + x_0(x - x_0) - y_0(y - y_0)$ ou enfin, en tenant compte de $x_0^2 - y_0^2 = 2z_0$,

$$\mathscr{P}_0\ :\ z = -z_0 + x_0 x - y_0 y.$$

En particulier, une équation du plan tangent en $\left(2, 1, \dfrac{3}{2}\right)$ (qui appartient à $\mathscr{S}$) est $z = 2x - y - \dfrac{3}{2}$.

2) $\mathscr{P}_0$ passe par O si et seulement si $0 = -z_0 + 0$ ou encore $z_0 = 0$. Les points de $\mathscr{S}$ de hauteur nulle sont les points $(x_0, \pm x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Les points $(x_0, \pm x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, sont les points de $\mathscr{S}$ en lesquels le plan tangent passe par O.

