Problème de révision

Fonctions génératrices des moments
Énoncé

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, par la suite, les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles discrètes ou à densité. Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, la fonction génératrice des moments de X, lorsqu'elle existe, est la fonction numérique de la variable réelle t, $M_X : t \longrightarrow \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$, où $\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire e^{tX}.

Partie I: Variables aléatoires discrètes finies

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \cdots, x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, \cdots, p_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction φ_X sur $\mathbb{R}^*$ par,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\ln(M_X(t))$$

1. Déterminer M_Z , lorsque Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0, 1]$.
2. Montrer que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout entier naturel k, $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$.
3. (a) Montrer que φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0. On pose $\varphi_X(0) = \mathbb{E}(X)$ et on note encore φ_X la fonction ainsi prolongée.
   (b) Démontrer que φ_X est dérivable en 0 et calculer $\varphi'_X(0)$ en fonction de la variance $\mathbb{V}(X)$ de X.
4. (a) Montrer que pour tout $u \leqslant 0$, $e^u \leqslant 1 + u + \frac{1}{2}u^2$;
   (b) Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors, pour tout $t \geqslant 0$,
   $$\varphi_X(t) \leqslant \mathbb{E}(X) + \frac{t}{2}\mathbb{E}\left(X^2\right)$$
5. (a) Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, part $t \longmapsto e^{tx_i}$. Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_r)$ est libre.
   (b) En déduire que deux variables discrètes finies X et Y ont la même loi si, et seulement si, les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.
6. Montrer que si X et Y sont des variables discrètes finies indépendantes, alors,
   $$\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$$
7. En déduire M_X , lorsque X suit une loi binomiale de paramètre s et p, s est un entier naturel non nul et $0 \leqslant p \leqslant 1$.
8. On dit qu'une variable aléatoire réelle X est symétrique si X et $-X$ ont la même loi.
   Montrer que φ_X est impaire si, et seulement si, X est une variable aléatoire réelle symétrique.
9. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires discrètes finies mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, qui suivent la même loi que X. On note m l'espérance de X et σ son écart-type que l'on suppose strictement positif.
   On pose, pour tout entier naturel non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel non nul t,
   $$\varphi_{S_n^*}(t) = \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi_{S_n^*}(t) = \frac{t}{2}$.

Partie II: Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

Soit X une variable aléatoire discrète réelle infinie, notons I_X l'ensemble des réels t pour lesquels M_X existe.

10. (a) Montrer que, pour tous réels a, b, c tels que $a \leqslant b \leqslant c$ et tout réel x, $e^{bx} \leqslant e^{ax} + e^{cx}$.

    (b) En déduire que I_X est un intervalle contenant 0.

11. Soit Y une variable aléatoire discrète réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la fonction génératrice des moments M_Y de Y.

12. On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle de la forme $]-a, a[$, $(a > 0)$. Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X.
    Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]-a, a[, u_n(t) = P(X = x_n)e^{tx_n}$ et x_n. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset]-a, a[$, et soit $\rho \in]\alpha, a[$.

    (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$|u_n^{(k)}(t)| \leqslant P(X = x_n)(|x_n|)^k e^{\alpha|x_n|}$$
    où $u_n^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction u_n.

    (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $M_k > 0$, pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$|u_n^{(k)}(t)| \leqslant M_k P(X = x_n)|e^{\rho|x_n|}.$$

    (c) En déduire que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a, a[$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\left(X^k\right) = M_X^{(k)}(0)$

13. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Partie III: Cas des variables aléatoires à densité

Si X est une variable aléatoire à densité, on note I_X l'intervalle de $\mathbb{R}$, qui contient 0, pour lequel M_X existe.

14. Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes, qui admettent respectivement des fonctions génératrices des moments M_X et M_Y, montrer que
    $$\forall t \in I_X \cap I_Y, \quad M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

15. Soit X une variable aléatoire à densité possédant une fonction génératrice des moments M_X et une densité f. On suppose que cette fonction génératrice des moments soit définie sur $I_X =]a, b[, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < 0 < b$, et soit s un réel tel que, $0 < s < \min(-a, b)$.

    (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}, |t^k| \leqslant \dfrac{k!}{s^k} e^{s|t|}$.

    (b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}\left(|X|^k\right)$ est finie.

    (c) Montrer que, pour tout $t \in]-s, s[, M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(X^k\right) \frac{t^k}{k!}$

    (d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}, M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}\left(X^k\right)$