SESSION 2013

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Produit scalaire de matrices

1) Puisque la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$, le coefficient ligne i, colonne i, $1\leqslant i\leqslant n$, de la matrice A est $a_{i,i}=\langle Ae_i,e_{\rangle}$. Donc $\mathrm{tr}(A)=\sum\limits_{i=1} n\langle Ae_i,e_{\rangle}$.

2) Soient $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices carrées.

$$\mathrm{tr}((^{t}AB)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j}\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}b_{i,j}.$$

On reconnaît l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3) La matrice B est symétrique réelle et donc, d'après le théorème spectral, la matrice B est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle.

Soit $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée (pour le produit scalaire canonique) de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de B et associée à la famille de valeurs propres $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$$\begin{aligned}\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(^{t}AB\right)&=\sum_{i=1}^{n}\langle {}^{t}ABe'_i,e'_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle {}^{t}Ae'_i,e'_i\rangle\\&=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle e'_i,Ae'_i\rangle.\end{aligned}$$

Soit alors $(e''_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée (pour le produit scalaire canonique) de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A et associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Soit $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie''_i\in\mathbb{R}^n$. Puisque la base $(e''_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$

$$\langle x,Ax\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}x_ie''_i,\sum_{j=1}^{n}x_j\lambda_je''_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2.$$

Par hypothèse, les λ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, sont des réels positifs et on a donc montré que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $\langle x,Ax\rangle\geqslant 0$.

En particulier, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\langle e'_i,Ae'_i\rangle\geqslant 0$. Comme d'autre part les μ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, sont des réels positifs, on a montré que

$$\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\langle e'_i,Ae'_i\rangle\geqslant 0.$$

B. Décomposition polaire

4) ${}^{t}\left({}^{t}AA\right)={}^{t}A^{t}\left({}^{t}A\right)={}^{t}AA$ et donc la matrice ${}^{t}AA$ est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, ses valeurs propres sont réelles.

Soient λ une valeur propre de ${}^{t}AA$ puis x un vecteur propre associé.

$$\lambda\|x\|_2^2=\lambda^{t}xx={}^{t}x\lambda x={}^{t}x^{t}AAx={}^{t}(Ax)Ax=\|Ax\|_2^2.$$

Puisque x n'est pas nul, $\|x\|_2^2>0$ puis $\lambda=\dfrac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}\geqslant 0$. Ceci montre que la matrice ${}^{t}AA$ est une matrice symétrique réelle positive.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$.

$$\|AX\|^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX({}^tAA)X = \langle X, {}^tAAX\rangle.$$

Soit alors $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée (pour le produit scalaire canonique) de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de ${}^tAA$ et associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où la numérotation a été effectuée de telle sorte que $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Posons $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$$\langle X, {}^tAAX\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_i \lambda_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_n.$$

Donc, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$, $\|AX\|_2^2 \leqslant \lambda_n$ ou encore $\|AX\|_2 \leqslant \sqrt{\lambda_n}$. Ceci montre que $\|A\|_2 \leqslant \sqrt{\lambda_n}$.
D'autre part, e_n est un vecteur unitaire et $\|Ae_n\|^2 = \langle e_n, {}^tAAe_n\rangle = \lambda_n\langle e_n, e_n\rangle = \lambda_n$ ou encore $\|Ae_n\| = \sqrt{\lambda_n}$. Ceci montre que $\|A\|_2 \geqslant \sqrt{\lambda_n}$. Finalement, $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_n}$. On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\|_2 = \sqrt{\max(\mathrm{Sp}({}^tAA))}.}$$

5) Puisque A est la matrice de f dans une base orthonormée, la matrice de $f^* \circ f$ dans cette même base est ${}^tAA$. D'après la question précédente, la matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle positive et donc $f^* \circ f$ est un endomorphisme auto-adjoint positif.

Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $f^* \circ f$ et associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Soit h l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $h\left(e_i\right) = \sqrt{\lambda_i}\, e_i$. h est diagonalisble dans une base orthonormée et donc h est un endomorphisme auto-adjoint.
Les valeurs propres de h sont les $\sqrt{\lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ qui sont des réels positifs et donc h est un endomorphisme auto-adjoint positif.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $h^2\left(e_i\right) = \lambda_i e_i = f^* \circ f\left(e_i\right)$. Ainsi, les endomorphismes h^2 et $f^* \circ f$ coïncident sur une base de E et on en déduit que $f^* \circ f = h^2$.

On a montré que pour tout endomorphisme f de E, il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h tel que $f^* \circ f = h^2$.

6) Si $h = 0$, $\mathrm{Im}(h) = \{0\}$ et donc la restriction de h à $\mathrm{Im}(h)$ induit un automorphisme de $\mathrm{Im}(h)$.
Si h est un automorphisme de E, alors $\mathrm{Im}(h) = E$ et donc la restriction de h à $\mathrm{Im}(h)$ induit un automorphisme de $\mathrm{Im}(h)$.

Supposons dorénavant h non nul et non inversible. Soit $p = \dim(\mathrm{Ker}h)$ (on a $1 \leqslant p \leqslant n-1$). Puisque h est diagonalisable, p est aussi l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0.
Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E formée de vecteurs propres de h et associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
On suppose que la numérotation a été faite de telle sorte que $0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_p < \lambda_{p+1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Par suite, $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(h)$.

$$\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}(h(e_1), \ldots, h(e_n)) = \mathrm{Vect}\left(\lambda_{p+1}e_{p+1}, \ldots, \lambda_n e_n\right) = \mathrm{Vect}\left(e_{p+1}, \ldots, e_n\right).$$

Ceci montre que $\mathrm{Im}(h)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}h$ dans E (et même $\mathrm{Im}h = (\mathrm{Ker}h)^\perp$). La version complète du théorème du rang montre alors que la restriction de h à $\mathrm{Im}(h)$ induit un automorphisme de $\mathrm{Im}(h)$.

7) Soit $x \in E$.

$$\|h(x)\|^2 = \langle h(x), h(x)\rangle = \langle x, h(h(x))\rangle = \langle x, f^* \circ f(x)\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \|f(x)\|^2,$$

et donc $\|h(x)\| = \|f(x)\|$.

Ainsi, pour tout x de E, $\|h(x)\| = \|f(x)\|$. En particulier, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(h)$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}h) = \dim(\mathrm{Ker}f) = n - \dim(\mathrm{Im}f) = \dim\left((\mathrm{Im}f)^\perp\right).$$

Si $\mathrm{ker}h = \{0\} = (\mathrm{Im}f)^\perp$, $v = 0$ convient. Sinon, soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}h$ et $(e'_1, \ldots, e'_p)$ une base orthonormée de $(\mathrm{Im}f)^\perp$. Soit v l'application linéaire de $\mathrm{Ker}h$ dans $(\mathrm{Im}f)^\perp$ définie par : $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $v(e_i) = e'_i$. L'image par v d'une base orthonormée de $\mathrm{Ker}h$ est une base orthonormée de $(\mathrm{Im}f)^\perp$. Donc v est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}h$ sur $(\mathrm{Im}f)^\perp$ qui conserve la norme.

8) Si $x \in \mathrm{Im}h$, on pose $u(x) = f(\widetilde{h}^{-1}(x))$ et si $x \in \mathrm{Ker}h = (\mathrm{Im}h)^\perp$, on pose $u(x) = v(x)$. On définit ainsi un endomorphisme u de E par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires ($\mathrm{Im}h$ et $\mathrm{Ker}h$ sont supplémentaires d'après la question 7)).

De plus, si $x \in \mathrm{Im}h$, $u(h(x)) = f(\widetilde{h}^{-1}(\widetilde{h}(x))) = f(x)$ et si $x \in \mathrm{Ker}h = \mathrm{Ker}f$ (d'après la question 7)), $u(h(x)) = 0 = f(x)$. Donc $u \circ h_{/\mathrm{Im}h} = f_{/\mathrm{Im}h}$ et $u \circ h_{/\mathrm{Ker}h} = f_{/\mathrm{Ker}h}$ et finalement $f = u \circ h$.

Maintenant, la restriction de u à $\mathrm{Ker}h$ à savoir v conserve la norme et d'autre part, si $x \in \mathrm{Im}h$, d'après la question 7),

$$\|u(x)\| = \|f(\widetilde{h}^{-1}(x))\| = \|h(\widetilde{h}^{-1}(x))\| = \|x\|,$$

et donc les restrictions de u à $\mathrm{Ker}h$ et $\mathrm{Im}h$ conservent la norme. Soit alors $x \in E$. On pose $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \mathrm{Im}h$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}h = (\mathrm{Im}h)^{\perp}$. Comme $u(\mathrm{Ker}h) \subset (\mathrm{Im}f)^{\perp}$ et $u(\mathrm{Im}h) \subset \mathrm{Im}f$, le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$\|u(x)\|^2 = \|u(x_1)\|^2 + \|u(x_2)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2.$$

Ainsi, u est un endomorphisme qui conserve la norme et donc u est un automorphisme orthogonal de E qui vérifie de plus $f = u \circ h$.

9) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Soient h et u définis comme précédemment et soient S et U leurs matrices respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée, U est une matrice orthogonale et S est une matrice symétrique positive. De plus, $A = US$.

C. Projeté sur un convexe compact

10) Soit $x \in E$.

Existence. La fonction $h \mapsto \|x - h\|$ est continue sur le compact H à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette fonction admet donc un minimum sur H ou encore il existe $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$.

Unicité. Soit $(h_0, h_1) \in H^2$ tel que $h_1 \neq h_0$ et $d(x, H) = \|x - h_0\| = \|x - h_1\|$. Puisque H est convexe, pour tout réel $t \in [0, 1]$, $th_0 + (1-t)h_1$ appartient à H. Considérons alors la fonction $q\ :\ t \mapsto \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2 = \|x - h_1 + t(h_1 - h_0)$.

q est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et vérifie $q(0) = \|x - h_0\| = \|x - h_1\| = q(1)$. D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $\tau \in]0, 1[$ tel que $q'(\tau) = 0$. En posant $h = x - \tau h_0 - (1 - \tau)h_1 \in H$, l'égalité $q'(\tau) = 0$ s'écrit

$$2\langle h_1 - h_0, x - h\rangle = 0.$$

Comme h est sur le segment $[h_0, h_1]$, on a aussi $\langle h - h_0, x - h\rangle = 0$. Mais alors, d'après le théorème de Pythagore,

$$(d(x, H))^2 = \|x - h_0\|^2 = \|(x - h) + (h - h_0)\|^2 = \|x - h\|^2 + \|h - h_0\|^2 > \|x - h\|^2,$$

car $h \in]h_0, h_1[$. Ceci est impossible et on a donc démontré l'unicité de h_0.

11) • Soit $h \in H$. Soit $t \in]0, 1]$. Puisque H est convexe, $th + (1 - t)h_0 \in H$ et donc

$$\|x - h_0\|^2 \leqslant \|x - th - (1 - t)h_0\|^2 = \|x - h_0 + t(h_0 - h)\|^2 = \|x - h_0\|^2 + 2t < \langle x - h_0, h_0 - h\rangle + t^2\|x - h\|^2$$

et donc, $2t < \langle x - h_0, h_0 - h\rangle + t^2\|x - h\|^2 \geqslant 0$ ou encore $2t < \langle x - h_0, h - h_0\rangle \leqslant t^2\|x - h\|^2$ et finalement $\langle x - h_0, h - h_0\rangle \leqslant \dfrac{t}{2}\|x - h\|^2$. Cette inégalité étant valable pour tout réel t de $]0, 1]$, quand t tend vers 0, on obtient $\langle x - h_0, h - h_0\rangle \leqslant 0$.

• Réciproquement, soit $h'_0 \in H$ tel que pour tout $h \in H$ tel que $\langle x - h'_0, h - h'_0\rangle \leqslant 0$.

$$\|x - h\|^2 = \|x - h'_0\|^2 + 2\langle x - h, h'_0 - h\rangle + \|h'_0 - h\|^2 \geqslant \|x - h'_0\|^2 + 0 + 0 = \|x - h'_0\|^2,$$

et donc $h'_0 = h_0$.

D. Théorème de Carathéodory et compacité

12) Soit H un convexe non vide. Par définition, $\mathrm{conv}(H)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant H et donc $\mathscr{C}_0 = \mathrm{conv}(H)$.
Soit $\mathscr{C}_0$ l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de H.

• Montrons que $\mathscr{C}_0$ est un convexe contenant H. $\mathscr{C}_0$ contient les combinaisons convexes d'un élément de H et donc $\mathscr{C}_0$ contient H.

Soient x et y deux éléments de $\mathscr{C}_0$. O peut écrire $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i$ où p est un entier naturel non nul, les h_i sont des éléments de H et les λ_i sont des réels positifs de somme 1 et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \mu_i k_i$ où q est un entier naturel non nul, les k_i sont des éléments de H et les μ_i sont des réels positifs de somme 1.

Soit alors $t \in [0,1]$.

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{p} t\lambda_i h_i + \sum_{i=1}^{q} (1-t)\mu_i k_i.$$

De plus, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $t\lambda_i \geqslant 0$, pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, $(1-t)\mu_i \geqslant 0$ et enfin

$$\sum_{i=1}^{p} t\lambda_i + \sum_{i=1}^{q} (1-t)\mu_i = t\sum_{i=1}^{p} \lambda_i + (1-t)\sum_{i=1}^{q} \mu_i = t + 1 - t = 1.$$

Par suite, $tx + (1-t)y \in \mathscr{C}_0$. On a montré que $\mathscr{C}_0$ est un convexe contenant H.

• Soit $\mathscr{C}$ un convexe contenant H. Montrons que $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$. Pour cela, montrons par récurrence que toute combinaison convexe de p éléments de H, $p \in \mathbb{N}^*$, est dans $\mathscr{C}$.

- Puisque $\mathscr{C}$ contient H, le résultat est vrai pour $p = 1$.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que toute combinaison convexe d'éléments de H soit dans $\mathscr{C}$.

Soient $(h_i)_{1\leqslant i\leqslant p+1} \in H^{p+1}$ et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant p+1} \in [0,1]^{p+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$. Si $\lambda_{p+1} = 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i h_i = h_{p+1} \in \mathscr{C}$.
Supposons maintenant que $\lambda_{p+1} \in [0,1[$.

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i h_i = (1-\lambda_{p+1})\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} h_i + \lambda_{p+1} h_{p+1}.$$

Chaque $\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}}$ est positif et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} = \frac{1-\lambda_{p+1}}{1-\lambda_{p+1}} = 1$. Par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} h_i \in \mathscr{C}$. Mais alors, $(1-\lambda_{p+1})\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} h_i + \lambda_{p+1} h_{p+1}$ car $\mathscr{C}$ est convexe.
Le résultat est démontré par récurrence.

En résumé, $\mathscr{C}_0$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant H et donc $\mathscr{C}_0 = \text{conv}(H)$.

13) La famille $(x_i - x_1)_{2\leqslant i\leqslant p}$ est de cardinal $p-1 \geqslant n+1 > n$. Elle est donc liée. Par suite, il existe $p-1$ réels non tous nuls $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tels que $\displaystyle\sum_{i=2}^{p} \mu_i(x_i - x_1) = 0$.

Posons $\mu_1 = -\displaystyle\sum_{i=2}^{p} \mu_i$ et pour $2 \leqslant i \leqslant p$, $\mu_i = \alpha_i$. Les μ_i sont$p$ réels non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0$.

14) Soit θ un réel.

$$x = \sum_{i=}^{p} \lambda_i x_i = \sum_{i=}^{p} \lambda_i x_i - \theta\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i)\, x_i.$$

On note de plus que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \theta\mu_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i - \theta\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1$. Il reste à vérifier que l'on peut choisir θ de sorte l'un des $\lambda_i - \theta\mu_i$ soit nul et les autres soient positifs.
Les μ_i sont non tous nuls de somme nulle. Donc l'un au moins des μ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, est strictement positif. On peut alors considérer $\theta = \text{Min}\left\{\dfrac{\lambda_i}{\mu_i},\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ \mu_i > 0\right\}$. Soit $i_0 \in [\![1,p]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}$.

• si $i = i_0$, $\lambda_i - \theta\mu_i = 0$,
• si $\mu_i > 0$, alors $\theta \leqslant \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$ et donc $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$,
• si $\mu_i \leqslant 0$, $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$ car $\lambda_i \geqslant 0$ et $-\theta\mu_i \geqslant 0$.
Donc, θ convient.

D'après tout ce qui précède, si $p \geqslant n+2$ et si x est combinaison convexe de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ d'éléments de h, alors x est combinaison convexe de la famille $(x_i)_{i\neq i_0}$ qui est une famille de $p-1$ éléments de H.

Par récurrence descendante, il est immédiat que tout élément de $\text{conv}(H)$ est combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de H.

15) Vérifions que Λ est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Λ est l'intersection des demi-espaces affines $t_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$, qui sont des fermés de $\mathbb{R}^{n+1}$ et de l'hyperplan affine d'équation $\sum_{i=1}^{n+1} t_i$ qui est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc Λ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Λ est borné car contenu dans $[0,1]^{n+1}$.
Finalement, Λ est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ et donc un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ car $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension finie et d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

D'autre part, H^{n+1} est un compact de E^{n+1} en tant que produit de compacts de E et finalement $\Lambda \times H^{n+1}$ est un compact de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} & \to & E \\ ((t_1, \dots, t_{n+1}), (x_1, \dots, x_{n+1})) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \end{array}$. L'application φ est bilinéaire sur l'espace $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ qui est de dimension finie. En particulier, φ est continue sur $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$.

D'après la question précédente, $\text{conv}(H) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i,\ (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \Lambda,\ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in H^{n+1} \right\} = \varphi\left(\Lambda \times H^{n+1}\right)$.
Donc $\text{conv}(H)$ est une partie compacte de E en tant qu'image directe d'un compact par une application continue.

E. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

16) Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
• Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ M & \mapsto & ({}^tM, M) \end{array}$ et $f : \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M, N) & \mapsto & MN \end{array}$ puis $h = g \circ f$ de sorte que pour tout matrice M $h(M) = {}^tMM$.

f est continue en tant qu'application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie et g est continue en tant qu'application bilinéaire dont l'espace de départ est de dimension finie. Par suite, $h = g \circ f$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $O_n(\mathbb{R}) = h^{-1}\{I_n\}$ et que le singleton $\{I_n\}$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

• Le maximum des valeurs absolues des coefficients d'une matrice orthogonale est au plus égal à 1 et donc $O_n(\mathbb{R})$ est bornée pour $\| \ \|_\infty$.

Finalement, $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée, bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un compact de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Mais alors, d'après la question précédente, $\text{conv}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$ est un compact de $O_n(\mathbb{R})$.

17) Soient A une matrice orthogonale et X un vecteur colonne unitaire. Alors, $\|AX\| = \|X\| = 1$. Par suite, $\|A\|_2 = 1$.

Soient alors $p \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in [0,1]^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et enfin $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in (O_n(\mathbb{R})^p$.

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i \right\|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda \|A_i\|_2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

Donc, $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}$.

18) Tout d'abord

$$\text{tr}(AM) - \text{tr}(AN) = \text{tr}(A(M - N)) = \text{tr}({}^t(M - N)(M - N)) = \|M - N\|_1^2 > 0,$$

car $M \notin \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ et en particulier, $M - N \neq 0$.

Ensuite, d'après la question 11), pour tout $V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R})$, $\langle M - N, N - V \rangle \leqslant 0$. Or,

$$\langle M - N, N - V \rangle = \text{tr}({}^t(M - N)(N - V)) = \text{tr}(A(N - V)) = \text{tr}(AN) - \text{tr}(AV).$$

Finalement, $\text{tr}(AN) - \text{tr}(AV) \geqslant 0$ et donc $\text{tr}(AN) \geqslant \text{tr}(AV)$. On a montré que pour tout $V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AV) \leqslant \text{tr}(AN) < \text{tr}(AM)$. En particulier, puisque U^{-1} est une matrice orthogonale et donc en particulier un élément de $\text{conv}(O_n(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(S) = \text{tr}(U^{-1}A) = \text{tr}(AU^{-1}) < \text{tr}(AM) = \text{tr}(USM).$$

19) Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$) de vecteurs propres de S associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On rappelle que les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont positifs.

D'après la question 1),

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(MUS) &= \sum_{i=1}^{n} \langle MUSe_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle MUe_i, e_i\rangle \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|MUe_i\|_2 \|e_i\|_2 \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et car les } \lambda_i \text{ sont positifs} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|MUe_i\|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ (car } M \in \mathscr{B}) \\
&= \operatorname{tr}(S).
\end{aligned}$$

20) Sous l'hypothèse qu'il existe $M \in \mathscr{B}$ telle que M n'appartient pas à $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R})$, on est arrivé à la conclusion que $\operatorname{tr}(S) < \operatorname{tr}(USM) = \operatorname{tr}(MUS) \leqslant \operatorname{tr}(S)$ ce qui est absurde. Donc, tout élément de $\mathscr{B}$ est dans $\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R})$ ou encore $\mathscr{B} \subset \operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R})$. D'après la question 1è), on a montré que

$$\boxed{\operatorname{conv}(O_n(\mathbb{R})) = \mathscr{B}.}$$

F. Points extrémaux

21) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On a $\|VX+WX\|^2 + \|VX-WX\|^2 = 2\left(\|VX\|^2 + \|WX\|^2\right)$ et donc

$$\begin{aligned}
\|VX-WX\|^2 &= 2\left(\|VX\|^2 + \|WX\|^2\right) - \|VX+WX\|^2 = 2\left(\|VX\|^2 + \|WX\|^2\right) - 4\|UX\|^2 \\
&= 2\left(\|VX\|^2 + \|WX\|^2 - 2\|X\|^2\right) \text{ (car } U \text{ est orthogonale)}
\end{aligned}$$

Maintenant, $\|VX\| \leqslant \|V\|_2\|X\| \leqslant \|X\|$ et de même $\|WX\| \leqslant \|X\|$. Par suite,

$$\|VX-WX\|^2 \leqslant 2\left(\|X\|^2 + \|X\|^2 - 2\|X\|^2\right) = 0,$$

et finalement $\|VX-WX\| = 0$. On a montré que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $VX = WX$ et donc que $V = W$. Par suite, U est extrémal dans $\mathscr{B}$.

22) Soit A appartenant à $\mathscr{B}$ mais n'appartenant pas à $O_n(\mathbb{R})$. D'après la question 9, il existe une matrice orthogonale U et une matrice symétrique réelle positive S telle que $A = US$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P_0 et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_n$ sont positifs telles que $S = P_0DP_0^{-1}$.

Posons $P = UP_0$ et $Q = P_0^{-1}$. P et Q sont deux matrices orthogonales telles que $A = PDQ$.

23) $S^2 = {}^tU{}^tAAU = U^{-1}({}^tAA)U$ et donc les d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont les racines des valeurs propres de $U^{-1}({}^tAA)U$ ou encore de ${}^tAA$. Vérifions alors que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont inférieures ou égales à 1.
Soient λ une valeur propre ${}^tAA$ puis X un vecteur propre unitaire associé.

$$\lambda = \lambda\|X\|^2 = \lambda{}^tXX = {}^tX(\lambda X) = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2.$$

Puisque A est dans $\mathscr{B}$, on en déduit que $\lambda \leqslant \|A\|_2^2\|X\|^2 \leqslant 1$. Mais alors, puisque λ est positif, $\sqrt{\lambda} \leqslant 1$. Ceci montre que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_i \leqslant 1$.

Si tous les d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont égaux à 1, alors $D = I_n$ puis $A = PQ = UP_0P_0^{-1} = U \in O_n(\mathbb{R})$. Ceci n'est pas et donc il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $d_j < 1$.

24) Soit $\alpha = 1 - d_j > 0$. Alors, $-1 \leqslant d_j - \alpha \leqslant d_j + \alpha \leqslant 1$.
Soient $D_\alpha = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_{j-1}, d_j + \alpha, \ldots, d_n)$ et $D_{-\alpha} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_{j-1}, d_j + \alpha, \ldots, d_n)$ puis $A_\alpha = PD_\alpha Q$ et $A_{-\alpha} = PD_{-\alpha}Q$.

• $\dfrac{1}{2}\left(A_\alpha + A_{-\alpha}\right) = P\dfrac{1}{2}\left(D_\alpha + D_{-\alpha}\right)Q = PDQ = A$.
• $D_\alpha - D_{-\alpha} = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, 2\alpha, 0, \ldots, 0) \neq 0$ car $\alpha \neq 0$. Par suite, $D_\alpha \neq D_{-\alpha}$. Mais alors, puisque P et Q sont inversibles $A_\alpha \neq A_{-\alpha}$.
• Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur unitaire. Puisque les matrices P est Q sont orthogonales

$$\|A_\alpha X\| = \|PD_\alpha QX\| = \|D_\alpha QX\| \leqslant \|D_\alpha\|_2 \|QX\| = \|D_\alpha\|_2 \|X\| = \|D_\alpha\|_2.$$

Donc, $\|A_\alpha\|_2 \leqslant \|D_\alpha\|_2$ et de même $\|A_{-\alpha}\|_2 \leqslant \|D_{-\alpha}\|_2$.

D'après la question 4),

$$\begin{aligned}\|D_\alpha\|_2 &= \sqrt{\max\left(\mathrm{Sp}({}^tD_\alpha D_{-\alpha})\right)} = \sqrt{\max\left(\mathrm{Sp}(D_\alpha^2)\right)} = \max\{\sqrt{d_1^2},\ldots,\sqrt{d_{j-1}^2},\sqrt{(d_j+\alpha)^2},\sqrt{d_{j+1}^2},\ldots,\sqrt{d_n^2}) \\ &= \max(d_1,\ldots,d_{j-1},d_j+\alpha,d_{j+1},\ldots,d_n) \leqslant 1\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\|D_\alpha\|_2 &= \sqrt{\max\left(\mathrm{Sp}({}^tD_\alpha D_{-\alpha})\right)} = \sqrt{\max\left(\mathrm{Sp}(D_\alpha^2)\right)} = \max\{\sqrt{d_1^2},\ldots,\sqrt{d_{j-1}^2},\sqrt{(d_j-\alpha)^2},\sqrt{d_{j+1}^2},\ldots,\sqrt{d_n^2}) \\ &= \max\left(d_1,\ldots,d_{j-1},|d_j-\alpha|,d_{j+1},\ldots,d_n\right) \leqslant 1.\end{aligned}$$

Finalement, $\|A_\alpha\|_2 \leqslant 1$ et $\|A_{-\alpha}\|_2 \leqslant 1$.

On a donc trouvé deux éléments de $\mathscr{B}$ distincts dont le milieu est A. On en déduit que A n'est pas un point extrémal. Finalement, l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{B}$ ou encore de $\mathrm{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est exactement $O_n(\mathbb{R})$.

