

Champ magnétique et propriétés de la matière
--

On se propose dans ce problème d'étudier, à travers deux exemples différents, comment un champ magnétostatique externe peut agir sur certaines propriétés de la matière. C'est ainsi que le problème aborde d'abord l'action d'un champ magnétique sur les charges d'un faisceau électronique. Ensuite, on s'intéresse à la modification du spectre d'émission d'un atome sous l'action d'un champ magnétique extérieur. Toutes les questions du problème seront abordées dans le cadre de la théorie classique non relativiste et non quantique. Dans toute cette étude, le référentiel du laboratoire sera considéré comme galiléen.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêtée au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagnée de son unité dans le système international des unités (SI).

### Données utiles

- Charge élémentaire :  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C.
- Masse de l'électron :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$  kg.
- Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup>.
- Célérité de la lumière dans le vide :  $c_0 = 3 \times 10^8$  m.s<sup>-1</sup>.

### 1<sup>ère</sup> partie

#### Faisceau électronique

Un électron, d'un faisceau électronique, de masse  $m_e$  et de charge  $q = -e$  est animé d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{v}_0$ . À l'instant pris comme origine des temps  $t = 0$ , il pénètre une région de l'espace où règne un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ . On suppose que la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  n'a pas de composante non nulle suivant la direction du champ magnétostatique  $\vec{B}$ . On négligera le poids de l'électron.

#### 1.1. Nature de la trajectoire et application

1.1.1. Écrire le théorème de la résultante cinétique pour l'électron considéré.

1.1.2. En projetant l'équation obtenue, d'abord sur la direction du champ magnétique, puis ensuite sur le vecteur vitesse instantanée, montrer que la trajectoire de l'électron est plane et que le module de la vitesse de l'électron reste constant au cours du mouvement.

1.1.3. Quelle est la nature de la trajectoire de l'électron ? La dessiner en l'orientant relativement au champ magnétique  $\vec{B}$ .

1.1.4. Exprimer son rayon de giration  $R$  en fonction de  $m_e$ ,  $e$ ,  $B$  et du module  $v_0$  de  $\vec{v}_0$ .

1.1.5. Montrer que la période  $T$  du mouvement de l'électron s'exprime simplement en fonction de la pulsation cyclotron définie par :

$$\omega_c = \frac{q B}{m_e} \quad (1)$$

Calculer numériquement  $T$  dans le cas d'un électron plongé dans un champ magnétique  $B = 5 \times 10^{-3}$  T.

1.1.6. L'électron, initialement émis avec une vitesse négligeable, est accéléré sous une différence de potentiel  $\Delta V = 10$  kV. Il décrit une trajectoire circulaire de diamètre  $D = 13,4$  cm dans la région de l'espace où règne un champ magnétostatique de module  $B = 5 \times 10^{-3}$  T. Exprimer la charge spécifique de l'électron donnée par le rapport  $\frac{e}{m_e}$  en fonction de  $B$ ,  $D$  et  $\Delta V$ . Commenter le résultat numérique obtenu et préciser les éventuelles sources d'incertitude.

1.1.7. Comment mesure-t-on la charge électrique de l'électron ?

1.1.8. Vérifier à l'aide d'un calcul numérique, que le poids de l'électron est effectivement négligeable devant la force de LORENTZ.

1.1.9. Sans faire de calcul supplémentaire, dessiner la trajectoire de l'électron dans la région où règne le champ magnétostatique  $\vec{B} = B \vec{u}_z$  lorsque la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  possède une composante non nulle suivant l'axe Oz. Quelle est sa nature ?

## 1.2. Stabilité de la trajectoire électronique

On se propose d'étudier la stabilité de la trajectoire électronique circulaire initiale décrite dans le plan  $z = 0$ . Pour cela on se place en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe Oz et on pose :

$$\begin{cases} r(t) = R + \epsilon_r(t) \\ \dot{\theta}(t) = -\omega_c + \dot{\epsilon}_\theta(t) \end{cases} \quad (2)$$

où  $\omega_c = q B / m_e$ . Les trois grandeurs algébriques  $\epsilon_r(t)$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta(t)$  et  $z(t)$  seront considérées comme des infiniment petits de même ordre et nuls à  $t = 0$ . On rappelle l'expression de l'accélération  $\vec{a}$  en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z \quad (3)$$

1.2.1. Écrire le théorème de la résultante cinétique en projection sur les vecteurs de base  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_z$  des coordonnées cylindriques.

1.2.2. En se limitant aux termes d'ordre un, montrer que la projection sur  $\vec{u}_\theta$  conduit à une relation simple entre  $\epsilon_r$  et  $\dot{\epsilon}_\theta$ .

1.2.3. Montrer alors que la projection sur  $\vec{u}_r$  permet d'obtenir une équation différentielle de second ordre vérifiée par  $\epsilon_r(t)$ .

1.2.4. Donner la solution  $\epsilon_r(t)$  de l'équation différentielle précédente en tenant compte des conditions initiales et en déduire  $\dot{\epsilon}_\theta(t)$ . Le mouvement radiale suivant  $\vec{u}_r$  et le mouvement orthoradial suivant  $\vec{u}_\theta$  sont-ils stables ?

1.2.5. Qu'en est-il de la stabilité du mouvement axial suivant Oz ?

## 2<sup>ème</sup> partie Effet ZEEMAN

### 2.1. Théorème de Larmor

Considérons un électron atomique de masse  $m_e$  et de charge  $q = -e$  en mouvement orbital autour du noyau supposé fixe dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . L'électron est soumis de la part de son entourage à l'action d'un champ électrostatique  $\vec{E}$ .

2.1.1. Exprimer l'accélération  $\vec{a}_0$  d'un tel électron relativement au référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire en fonction de  $m_e$ ,  $q$  et  $\vec{E}$ .

2.1.2. L'électron est en plus soumis à l'action d'un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ . Exprimer son accélération  $\vec{a}$  en fonction de  $m_e$ ,  $q$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et de la vitesse  $\vec{v}$  de l'électron par rapport au référentiel du laboratoire.

2.1.3. On considère un référentiel  $\mathcal{R}'$  en *rotation uniforme* par rapport à  $\mathcal{R}$ . On désigne par  $\vec{\Omega}$  le vecteur rotation instantané de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  et on note  $\vec{a}'$  (resp.  $\vec{v}'$ ) l'accélération (resp. la vitesse) de l'électron relativement au référentiel  $\mathcal{R}'$ . On rappelle les formules de composition des vitesses et des accélérations :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (4)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2 \vec{\Omega} \times \vec{v}' \quad (5)$$

2.1.3.1. En utilisant les résultats précédents, exprimer  $\vec{a}'$  en fonction de  $m_e$ ,  $q$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{\Omega}$ ,  $\vec{v}'$  et  $\vec{r}$ .

2.1.3.2. Montrer que par un choix judicieux de  $\vec{\Omega}$ , l'accélération  $\vec{a}'$  de l'électron relativement au référentiel  $\mathcal{R}'$  est donnée par :

$$m_e \vec{a}' = q \vec{E} + \frac{q^2}{4 m_e} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}) \quad (6)$$

Un tel choix définit le référentiel de LARMOR relatif au champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

On se propose d'examiner l'ordre de grandeur des deux termes qui constituent le second membre de (6). Pour cela on considère le cas simple de l'atome d'hydrogène.

2.1.3.3. Exprimer le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par le noyau de l'atome d'hydrogène.

2.1.3.4. En déduire que le rapport  $\varrho$  des deux termes du second membre de (6) peut être majoré par :

$$\varrho_{\max} = \frac{\pi}{\mu_0 c_0^2} \frac{B^2 r^3}{m_e} \quad (7)$$

2.1.3.5. Compte tenu des ordres de grandeurs des dimensions atomiques ( $r \approx 10^{-10}$  m) et des champs magnétostatiques qui peuvent être créés au laboratoire ( $B \approx 1$  T), vérifier à l'aide d'un calcul numérique, que  $\varrho_{\max} \ll 1$ . Montrer alors que :

$$m_e \vec{a}' = q \vec{E} \quad (8)$$

**2.1.4.** En déduire le théorème de LARMOR : le mouvement électronique dans le référentiel de LARMOR après établissement du champ magnétostatique  $\vec{B}$ , est identique au mouvement existant normalement en l'absence de champ magnétique dans le référentiel du laboratoire par rapport auquel le référentiel de LARMOR est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation instantané  $\vec{\Omega}$  donné par :

$$\vec{\Omega} = -\frac{q}{2m_e} \vec{B} \quad (9)$$

## 2.2. Oscillateur harmonique spatial

Dans le cadre de la théorie classique de l'émission de la lumière par les atomes, l'électron est élastiquement lié au noyau à l'aide de la seule force de rappel  $\vec{f}_r$  donnée par :

$$\vec{f}_r = -m_e \omega_0^2 \vec{r} \quad (10)$$

$\omega_0$  étant une constante positive.

**2.2.1.** Montrer que, dans le cas général, le mouvement est plan. Peut-il être rectiligne ? Dans quel cas ? Par la suite on considérera le cas général.

**2.2.2.** Dans cette question, on se place dans le plan de la trajectoire. On note  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires de l'électron dans ce plan et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la trajectoire.

**2.2.2.1.** Exprimer la projection  $\sigma$  sur  $\vec{u}$  du moment cinétique de l'électron en fonction de  $m_e$ ,  $r$  et  $\dot{\theta}$ .

**2.2.2.2.** Montrer que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad (11)$$

et exprimer  $U_{\text{eff}}(r)$  en fonction de  $m_e$ ,  $\omega_0$ ,  $\sigma$  et  $r$ . On pourra prendre l'origine de l'énergie potentielle en  $r = 0$ .

**2.2.2.3.** Représenter graphiquement  $U_{\text{eff}}(r)$  et en déduire la nature de la trajectoire de l'électron. On montrera auparavant que l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

**2.2.2.4.** La trajectoire peut-elle être circulaire ? Quel est son rayon dans ce cas ? Quelle est l'énergie mécanique correspondante ?

**2.2.3.** Écrire le théorème de la résultante cinétique et en déduire l'expression du vecteur position  $\vec{r}(t)$  de l'électron en fonction de  $\vec{r}(0)$ ,  $\dot{\vec{r}}(0)$ ,  $\omega_0$  et  $t$ .

**2.2.4.** On s'intéresse au mouvement de l'électron le long de l'axe Oz.

**2.2.4.1.** Donner l'expression de  $z(t)$  en fonction de  $z(0)$ ,  $\dot{z}(0)$ ,  $\omega_0$  et  $t$ .

**2.2.4.2.** Montrer que la représentation complexe de la composante suivant l'axe Oz du déplacement de l'électron peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{z}(t) = Z \exp -i(\omega_0 t + \zeta) \vec{u}_z \quad (12)$$

et donner les expressions du module  $Z$  et de l'argument  $\zeta$  en fonction de  $z(0)$ ,  $\dot{z}(0)$  et  $\omega_0$ .

**2.2.5.** De même, la représentation complexe de la composante du déplacement de l'électron le long de l'axe Ox peut s'écrire :

$$\underline{x}(t) = A \exp -i(\omega_0 t + \alpha) \vec{u}_x \quad (13)$$

**2.2.5.1.** Montrer que l'on peut toujours écrire :

$$\underline{x}(t) = A'(\vec{u}_x + i \vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha) + A'(\vec{u}_x - i \vec{u}_y) \exp -i(\omega_0 t + \alpha) \quad (14)$$

et exprimer  $A'$  en fonction de  $A$ .

**2.2.5.2.** En déduire que la composante suivant  $Ox$  du mouvement de l'électron peut se décomposer en un mouvement circulaire dans le sens direct (ou circulaire gauche) et un mouvement circulaire dans le sens rétrograde (ou circulaire droit).

**2.2.6.** Montrer de même que la composante suivant  $Oy$  du mouvement de l'électron peut se décomposer en un mouvement circulaire gauche et un mouvement circulaire droit. On prendra :

$$\underline{y}(t) = B \exp -i(\omega_0 t + \beta) \vec{u}_y \quad (15)$$

**2.2.7.** Plus généralement, considérons le mouvement de l'électron dans le plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  décrit par :

$$\underline{r}_\perp(t) = \underline{x}(t) + \underline{y}(t) \quad (16)$$

**2.2.7.1.** Montrer que l'on peut écrire :

$$\underline{r}_\perp(t) = \underline{R}_g(\vec{u}_x + i \vec{u}_y) \exp -i\omega_0 t + \underline{R}_d(\vec{u}_x - i \vec{u}_y) \exp -i\omega_0 t \quad (17)$$

et donner les expressions de  $\underline{R}_g$  et  $\underline{R}_d$  en fonction de  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

**2.2.7.2.** Quelle est ainsi la nature du mouvement le plus général dans le plan  $xOy$  ?

## 2.3. Changements de fréquence dus à la rotation de Larmor

On se propose d'étudier l'influence d'un champ magnétostatique  $\vec{B} = B \vec{u}_z$  uniforme sur le mouvement de l'électron atomique. L'étude précédente (2.2.) a montré que le mouvement le plus général d'un tel électron peut être décomposé en :

- un mouvement rectiligne sinusoïdal le long de l'axe  $Oz$  de pulsation  $\omega_0$  ;
- deux mouvements circulaires l'un gauche, l'autre droit dans le plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  de même pulsation  $\omega_0$ .

Nous allons donc étudier l'influence du champ magnétostatique  $\vec{B} = B \vec{u}_z$  sur chacune des trois composantes de ce mouvement.

**2.3.1.** Écrire le théorème de la résultante cinétique relativement au référentiel du laboratoire, pour l'électron atomique soumis à l'action du champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

**2.3.2.** Montrer que la composante suivant  $Oz$  du mouvement de l'électron n'est pas modifiée par l'application du champ magnétostatique.

**2.3.3.** Donner les projections du théorème de la résultante cinétique selon  $Ox$  puis selon  $Oy$ .

**2.3.4.** Considérons maintenant la composante du mouvement circulaire dans le sens direct ou gauche. D'après le théorème de LARMOR, en présence du champ magnétostatique, la trajectoire reste circulaire. Elle est décrite à la pulsation  $\omega_+$  dans le sens direct.

**2.3.4.1.** Donner sans démonstration les expressions de  $x(t)$  et  $y(t)$  pour un tel mouvement. Exprimer alors  $\dot{y}(t)$  en fonction de  $x(t)$  et  $\omega_+$ .

2.3.4.2. Montrer que  $\omega_+$  est solution de l'équation :

$$\omega_+^2 - \frac{eB}{m_e} \omega_+ - \omega_0^2 = 0 \quad (18)$$

2.3.4.3. Donner un ordre de grandeur de  $\omega_0$  dans le domaine visible ainsi que du rapport  $eB/m_e$  pour un champ fort ( $B \approx 1$  T). Commenter.

2.3.4.4. En déduire l'expression approchée du décalage en fréquence  $\Delta\nu_+ = (\omega_+ - \omega_0)/2\pi$ . Le résultat obtenu est-il en accord avec le théorème de LARMOR ? Expliquer.

2.3.5. Reprendre l'étude précédente pour la composante circulaire rétrograde de pulsation modifiée  $\omega_-$  et déterminer l'expression approchée du décalage en fréquence correspondant  $\Delta\nu_- = (\omega_- - \omega_0)/2\pi$ . Comparer  $\Delta\nu_+$  et  $\Delta\nu_-$ . Expliquer comment le résultat obtenu est-il en accord avec le théorème de LARMOR.

## 2.4. Conséquence sur les raies d'émission de l'atome

Selon la théorie classique du rayonnement, lorsque l'électron oscille à la pulsation  $\omega$ , l'atome acquiert un moment dipolaire électrique instantané  $\vec{p}(t) = -e \vec{r}(t)$ . Il rayonne alors à grande distance une onde électromagnétique  $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$  donnée, au point M par :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{\|\vec{R}\|^2} \vec{R} \times \vec{p}(t - \|\vec{R}\|/c_0) \\ \vec{\mathcal{E}} = -c_0^2 \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{\mathcal{B}} \end{cases} \quad (19)$$

où  $\vec{k} = \frac{\omega}{c_0} \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$  et  $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$  ; l'origine O étant prise au centre de l'atome.

2.4.1. On s'intéresse tout d'abord au mouvement de l'électron le long de l'axe Oz en l'absence de tout champ magnétostatique extérieur.

2.4.1.1. Trouver l'expression de  $\vec{\mathcal{E}}$  en coordonnées sphériques d'axe Oz. On prendra  $p(t) = p_0 \exp -i\omega t$ .

2.4.1.2. Montrer que dans une direction d'observation  $\Delta$  quelconque, le champ électrique rayonné est proportionnel à la projection de  $\vec{p}$  sur le plan perpendiculaire à  $\Delta$  appelé plan d'observation dans la suite. Quelle est la polarisation d'une telle onde ?

2.4.1.3. Que vaut le champ électromagnétique rayonné par un tel dipôle dans la direction de son axe ? Dans une direction perpendiculaire à son axe ?

2.4.2. Montrer que, plus généralement, la polarisation du champ électrique rayonné à grande distance par un dipôle oscillant quelconque, c'est-à-dire pas nécessairement rectiligne le long de Oz, est celle du vecteur projection de son moment dipolaire instantané  $\vec{p}$  sur le plan d'observation.

2.4.3. L'atome est soumis à l'action d'un champ magnétostatique  $\vec{B}$  uniforme. On s'intéresse à l'émission de lumière dans une direction  $\Delta$  perpendiculaire à  $\vec{B}$  ou, ce qui revient au même, dans un plan d'observation parallèle à  $\vec{B}$ .

2.4.3.1. Montrer que, pour une raie donnée de fréquence initiale  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$  (en l'absence de  $\vec{B}$ ), la lumière émise est constituée de trois radiations dont on donnera les fréquences.

2.4.3.2. Quelle est l'état et la direction de polarisation de chacune de ses trois raies ? Proposer un montage pratique pour vérifier l'état de polarisation de ces raies.

2.4.3.3. Quelles sont les intensités relatives de ces trois raies ?

2.4.4. On s'intéresse à présent à l'émission de lumière, sous le même champ magnétostatique, dans une direction  $\Delta$  parallèle à  $\vec{B}$  ou, ce qui revient au même, dans un plan d'observation perpendiculaire à  $\vec{B}$ .

2.4.4.1. De combien de raies la lumière émise est-elle constituée ?

2.4.4.2. Déterminer l'état de polarisation et l'intensité relative des raies observées.

2.4.4.3. Proposer un montage pratique pour vérifier l'état de polarisation des ces raies.

2.4.5. On plonge une lampe à vapeur de cadmium dans un champ magnétostatique uniforme et on sélectionne la radiation rouge de longueur d'onde  $\lambda_0 = 643,8 \text{ nm}$  à l'aide d'un filtre interférentiel adéquat de bande passante de largeur  $10 \text{ nm}$ . Dans une direction d'observation donnée, une telle radiation se décompose par effet ZEEMAN en trois raies de longueurs d'onde voisines  $\lambda_0$ ,  $\lambda_0 + \Delta\lambda$  et  $\lambda_0 - \Delta\lambda$ . La figure 1 donne les variations de  $\Delta\lambda$  en fonction du champ magnétostatique appliqué.

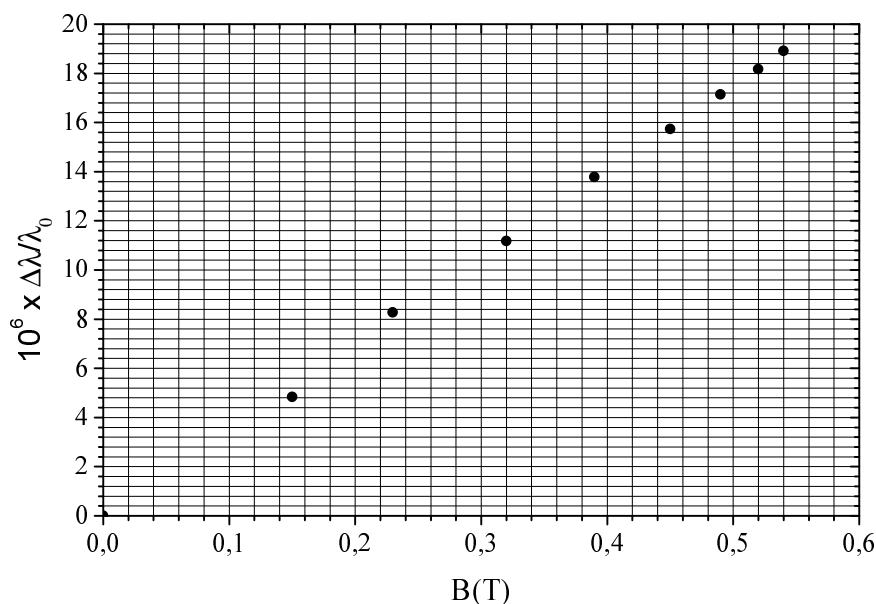


Figure 1: Variation de la longueur d'onde avec le champ magnétique.

2.4.5.1. Exprimer  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$  en fonction de  $B$ ,  $\lambda_0$ ,  $e$ ,  $m_e$  et  $c_0$ .

2.4.5.2. En déduire la valeur du rapport  $e/m_e$ .

2.4.5.3. Comment pourrait-on mesurer  $\Delta\lambda$  dans la pratique ?

FIN DE L'ÉPREUVE