CCS 1 2019

1) $Rb : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 \mathbf{5s^1}$ Il appartient à la famille des **alcalins** (1ère colonne)

2) Une énergie potentielle négative est compatible avec un état **lié**. De plus, la fonction $Z(r)$ étant décroissante, on remarque ainsi que la force $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,U = -\frac{dU}{dr}\vec{e}_r = \frac{q}{r}\left(\frac{dZ}{dr} - \frac{Z}{r}\right)\vec{e}_r$ est **attractive**.

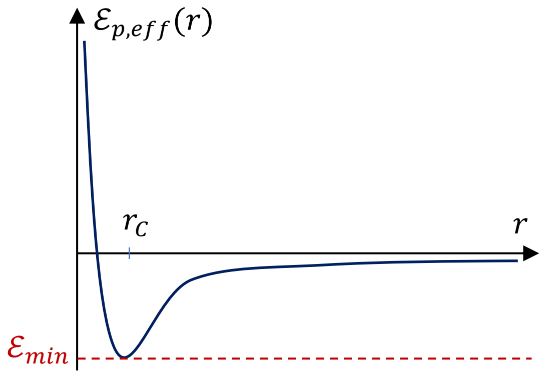
3) Quand $r \to 0$, **aucun électron ne fait écran**, le champ est celui du noyau entier.
Au contraire, quand $r \to \infty$ (!), $\boldsymbol{Z-1}$ **électrons font écran**, le champ est celui d'un seul proton.

4) $[a_0] = L = (M.L^2.T^{-1})^\alpha.(M.L^3.T^{-2})^\beta.M^\gamma \rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha = 2} \\ \boldsymbol{\beta = -1} \\ \boldsymbol{\gamma = -1} \end{cases}$ $\boldsymbol{a_0 = 5{,}3.10^{-11}\,m}$

5) Le nombre quantique étant très grand, on est dans le cas $\boldsymbol{r \gg a_0} \rightarrow Z(r) \to 1$.

6) On reconnait un mouvement à force centrale, on applique le T.M.C. à l'électron : $\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = \vec{\boldsymbol{r}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}}$
Le vecteur $\vec{r}$ est **perpendiculaire à un vecteur constant** dirigé suivant $\vec{e}_z$ $\left(\vec{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\vec{e}_z = \vec{r} \wedge m_e\vec{v}\right)$,
le mouvement est donc dans le plan Oxy avec $\boldsymbol{\mathcal{L} = m_e r^2 \dot{\varphi}}$.

7 & 8) La seule force $\vec{F}$ est **conservative**, l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + U$ se conserve.



$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m_e(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + \boldsymbol{\frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{q}{r}}$

$\rightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}_{min} \le \mathcal{E}_{p,eff}(r) \le \mathcal{E}_m}$

La seule valeur de $\mathcal{E}_m$ permettant une solution unique au problème en r est $\boldsymbol{\mathcal{E}_{min}}$: $r_C = \boldsymbol{\frac{\mathcal{L}^2}{q m_e} = \frac{\mathcal{L}^2}{\hbar^2} a_0}$

9 & 10) $-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\Delta\Phi(M)}{\Phi(M)} - \frac{q}{r} = \boldsymbol{i\hbar\frac{\dot{\chi}(t)}{\chi(t)} = cste = \mathcal{E}}$ car la 1ère égalité est vérifiée pour tout t et pour tout M.
On en déduit que $\chi(t) = A\exp\left(-i\frac{\mathcal{E}t}{\hbar}\right)$. On reconnait en $\mathcal{E}$ l'énergie de l'électron lié, elle est **négative**.
L'équation indépendante du temps, $\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\Phi(M) + \left(\mathcal{E} + \frac{q}{r}\right)\Phi(M) = 0$ confirme notre identification.

11-13) $\boldsymbol{0 \le l \le n-1}$ Nous savons reconnaître l'origine énergétique de chaque terme de l'équation de Schrödinger (Cours Dynamique quantique page 2) :

$i\hbar\frac{\partial\Psi(M,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(M,t) + V(M)\Psi(M,t)$

Termes associés à

… l'énergie totale … l'énergie cinétique … l'énergie potentielle

Avec $\mathcal{E}_c = \underbrace{\frac{1}{2}m_e\dot{r}^2}_{-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2u}{dr^2}} + \underbrace{\frac{\mathcal{L}^2}{2m_e r^2}}_{\frac{\hbar^2 \boldsymbol{l(l+1)}}{2m_e r^2}}$

$\boldsymbol{\mathcal{L}^2_{max} = n(n-1)\hbar^2}$ $\boldsymbol{r_C = n(n-1)a_0}$

14) $\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{1}{a_0^2}\frac{d^2u}{d\rho^2} = \frac{q^2m_e}{\hbar^4}\frac{d^2u}{d\rho^2}$ $\quad$ $(\mathrm{I}.1) \rightarrow$ $\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left(-\frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} + \frac{2\hbar^2\mathcal{E}}{q^2m_e}\right)u(\rho) = 0 \ \rightarrow\ \boldsymbol{\mathcal{E}_0 = \frac{q^2m_e}{2\hbar^2} = 13{,}6\ eV}$!

15) $|\Phi|^2 = A^2(n)\left(\frac{r}{a_0}\right)^{2n-2}\exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right)(\sin\theta)^{2n-2}$ $\qquad$ Le volume élémentaire indépendant de φ est $2\pi r\sin\theta\, rd\theta\, dr$ $\ \rightarrow\ $ $\boldsymbol{dP = 2\pi A^2(n)\frac{r^{2n}}{a_0^{2n-2}}\exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right)dr\int_0^\pi(\sin\theta)^{2n-1}d\theta}$

16 & 17) $\frac{dP}{dr} \propto r^{2n}\exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right) = f(r) \ \rightarrow\ f'(r) = 2n\, r^{2n-1}\exp\left(-\frac{2r}{na_0}\right)\left[\boldsymbol{1 - \frac{r}{n^2a_0}}\right]$

On retrouve la notion de **couche électronique** avec un rayon croissant avec n. $\qquad$ $\boldsymbol{r_{max}^{50} = 130\ nm}$!!

18) Pour $n = 50$, $\frac{\Delta r}{r} \sim \Delta\theta \sim \frac{1}{10}$ $\rightarrow$ L'électron est **bien localisé**, il se rapproche d'une particule classique.

19) $u(\rho) \propto \boldsymbol{\rho^n\exp\left(-\frac{\rho}{n}\right)}$ Expression que l'on injecte dans $(\mathrm{I}.2)$ et qui impose deux conditions :

$\boldsymbol{l = n - 1}$ (l maximal) $\qquad$ Et $\qquad$ $\boldsymbol{\epsilon = \frac{1}{n^2}} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{E} = -\frac{\mathcal{E}_0}{n^2}}$ (Modèle de Bohr et formule de Rydberg)

20) $\nu_{at} = \frac{\mathcal{E}_0}{h}\left(\frac{1}{50^2} - \frac{1}{51^2}\right) = \boldsymbol{5{,}1.10^{10}\ Hz}$ (SHF supérieures : Radar, micro-ondes …)

21) $E_{p\rightarrow e} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sim \boldsymbol{10^{11}\ V.m^{-1}}$ $\qquad$ L'électron est **libre quand $\boldsymbol{E}$ s'approche de $\boldsymbol{E_{p\rightarrow e}}$** : $E_c \sim E_{p\rightarrow e}$

22) Le rayon augmente avec n donc le champ $\boldsymbol{E_c}$ **diminue avec $\boldsymbol{n}$**.

23) $\boldsymbol{V_a < V_b < V_c < V_d < V_e < V_f}$ $\qquad$ Les électrons "remontent" le champ, ils sont accélérés vers *ME.*

24) La largeur du créneau correspond à la durée de parcours devant le diaphragme : $v \sim \boldsymbol{3.10^2\ m.s^{-1}}$

25) Relions le champ E à la différence de potentiel : $\boldsymbol{E(t) = \frac{V_b - V_a(t)}{d_{ab}}}$

Le potentiel $V_a(t)$ **décroit** de façon à ioniser l'atome $\boldsymbol{n = 51}$ (indice **1**) puis l'atome $\boldsymbol{n = 50}$ (indice **2**).
En $t = b_1$, $E_c^{51} = 1{,}48.10^4\ V.m^{-1}$ est atteint : $\boldsymbol{V_a(b_1) = -27{,}2\ V}$ $\qquad$ De même, $\boldsymbol{V_a(b_2) = -32{,}0\ V}$
On en déduit que $\boldsymbol{K = -1{,}26.10^6\ V.s^{-1}}$ et $\boldsymbol{t_0 = 468{,}4\ \mu s}$

26) Si $V_a(t)$ est trop rapide, les ionisations s'enchainent, il n'y a plus de temps-mort, **plus de distinction**.
Si $V_a(t)$ est trop lente, il est possible que **seule la première** ionisation soit observée.

27) La date t_l correspond à l'intersection des gaussienne : $\boldsymbol{t_l = 517{,}3\ \mu s}$
La vitesse initiale de l'électron pourrait influencer sa trajectoire et donc la date de son arrivée sur *ME.*

28) On sait que $\underline{s}_1(z,t)$ est de la forme $r_M S_0\exp\big(i(\omega t + kz + \alpha)\big)$. La continuité de la phase en $z = d$ entre $\underline{s}_0$ et $\underline{s}_1$ impose $\underline{s}_1(z,t) = r_M S_0\exp\big(i(\omega t + kz - 2kd)\big) = \boldsymbol{r_M\underline{s}_0(z,t)\exp\big(i(2kz - \Phi)\big)}$

29) De même en $z = 0$, $\underline{s}_2(z,t) = r_M^2 S_0\exp\big(i(\omega t - kz - 2kd)\big) = \boldsymbol{r_M^2\underline{s}_0(z,t)\exp(-i\Phi)}$
et de nouveau en $z = d$, $\underline{s}_3(z,t) = r_M^3 S_0\exp\big(i(\omega t + kz - 4kd)\big) = \boldsymbol{r_M^2\underline{s}_1(z,t)\exp(-i\Phi)}$

30 & 31) $\boldsymbol{\underline{s}_+ = \underline{s}_0(z,t)\frac{1}{1 - r_M^2\exp(-i\Phi)}}$ $\quad$ $\boldsymbol{\underline{s}_- = \underline{s}_1(z,t)\frac{1}{1 - r_M^2\exp(-i\Phi)}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\nu_{cav} = \frac{pc}{2d}}$ $\ (\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}^*)$

32) $\sin^2\frac{\delta\Phi}{4} = \frac{1}{M} \ll 1 \ \rightarrow\ \boldsymbol{\delta\Phi = \frac{4}{\sqrt{M}}} \ \rightarrow\ \boldsymbol{\delta\nu = \frac{c}{\pi d\sqrt{M}}}$

33) La durée d'un paquet d'ondes est $\tau = \frac{1}{\delta\nu} = \frac{2\pi d}{c(1-R)}\sqrt{R} \sim \boldsymbol{\frac{2\pi d}{c(1-R)}}$

34 & 35) La durée de vie moyenne est la somme des durées de vie multipliées par leur probabilité :
$\langle x \rangle = \sum P_i x_i$ (La fameuse formule qui vous échappe souvent !)
$\tau = \frac{d}{c}T + \frac{2d}{c}RT + \frac{3d}{c}R^2T + \cdots = \frac{d}{c}T\frac{d}{dR}(R + R^2 + \cdots) = \frac{d}{c}T\frac{d}{dR}\left(\frac{R}{1-R}\right) = \boldsymbol{\frac{d}{c(1-R)}}$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{1 - R = 8{,}9.10^{-10}}$

36) On fait appel à la distance de pénétration $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \rightarrow 0$ si $\gamma \rightarrow \infty$: La vie du photon est prolongée.

37) Première résolution en considérant le problème à une dimension (~ fente) : Au niveau du miroir de gauche, la tache centrale de diffraction déborde de chaque côté de la distance $\boldsymbol{\frac{\lambda_0 d}{2a}}$ $\left(\theta \sim \sin\theta = \frac{\lambda_0}{2a}\right)$.
On poursuit en considérant que toute l'énergie est contenue dans cette tache.
Le rapport "intensité reçue/intensité initiale" vaut donc approximativement $\boldsymbol{\frac{2a}{2a+\lambda_0\frac{d}{a}} \sim 1 - \frac{\lambda_0 d}{2a^2} = 88}$ %

On cherche le nombre de réflexions n tel que $0{,}88^n = 10^{-3}$ $\rightarrow$ $n = \frac{-3}{\log 0{,}88} = 54$

Au bout de réflexions environ, le rapport des intensités vaudra $1/1000$: $\tau_{diff} \sim 54\frac{d}{c} \sim \boldsymbol{5\ ns}$!

Deuxième résolution en considérant le problème à deux dimensions (~ trou) :
La tache centrale de la figure d'Airy déborde tout autour du miroir de $\boldsymbol{\frac{1{,}22\lambda_0 d}{2a}}$.
Le rapport "intensité reçue/intensité initiale" vaut donc approximativement $\boldsymbol{\frac{(2a)^2}{\left(2a+1{,}22\lambda_0\frac{d}{a}\right)^2} \sim 75}$ %

$\rightarrow$ $n = \frac{-3}{\log 0{,}75} = 24$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{\tau_{diff} \sim 2\ ns}$ La conclusion est la même.

La diffraction est gênante car la longueur d'onde est bien plus grande qu'en optique ($\lambda_0 = 5{,}87\ mm$).
Il faut absolument régler ce problème par des miroirs sphériques.

38-40) $\boldsymbol{\omega_0 = 6{,}0\ mm}$ S'il y a p ventres, cela signifie qu'il y a $p+1$ nœuds, or $|\Phi|$ varie de π entre chaque nœud : $|\Phi|$ varie de $p\pi$ entre les deux miroirs et donc varie de $\boldsymbol{p\frac{\pi}{2}}$ entre $z = 0$ et $z = d'/2$.
$\boldsymbol{p = \frac{2d'}{\lambda_0} - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\lambda_0 d'}{2\pi\omega_0^2}\right) = 9}$
La longueur d'un fuseau est $\boldsymbol{\frac{d'}{9} \sim 3{,}1\ mm} > 0{,}7\ mm$ $\rightarrow$ Tous les atomes arrivent sur le ventre central.

41) La loi aux mailles donne 2 équations identiques : $\frac{d^2 i_{\dots}}{dt^2} + \frac{i_{\dots}}{LC_{\dots}} = 0$ $\rightarrow$ $\boldsymbol{\omega_{cav} = \sqrt{\frac{1}{LC_{cav}}}}$ et $\boldsymbol{\omega_{at} = \sqrt{\frac{1}{LC_{at}}}}$

42) Dans l'atome, l'électron accéléré perd de l'énergie par **rayonnement**. Ce phénomène est négligé.
[Pour en tenir compte, une force supplémentaire de freinage est introduite dans le modèle de Thomson. Voir le sujet CCINP ph 2019]
Dans la cavité, l'onde est **partiellement absorbée** à chaque réflexion. Ici, les réflexions sont totales.

43) La loi aux mailles donne 2 équations : $\frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{M}{L}\frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{i_{cav}}{LC_{cav}} = 0$ et $\frac{d^2 i_{at}}{dt^2} + \frac{M}{L}\frac{d^2 i_{cav}}{dt^2} + \frac{i_{at}}{LC_{at}} = 0$
On identifie $\boldsymbol{\Omega = \frac{M}{L}\omega_0}$ et $\boldsymbol{\varepsilon = \delta\omega_0}$

44) On obtient le système $\begin{cases} (\omega_0^2 - \varepsilon - \omega^2)\underline{I}_{c0} - \omega^2 \dfrac{\Omega}{\omega_0} \underline{I}_{a0} = 0 \\ -\omega^2 \dfrac{\Omega}{\omega_0} \underline{I}_{c0} + (\omega_0^2 + \varepsilon - \omega^2)\underline{I}_{a0} = 0 \end{cases}$

Ce système homogène n'a de solutions **non nulles que si son déterminant est nul**. [Cette démarche a déjà été effectuée dans l'exercice 2 du TD Dynamique quantique et dans la partie 2 du TP Oscillateurs couplés]

$$\boldsymbol{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 - \varepsilon^2 + \omega_0^4 = 0}$$

45-47) $\boldsymbol{\omega_- = \omega_{cav} - \frac{\Omega^2}{4\delta}}$ $\boldsymbol{\omega_+ = \omega_{at} + \frac{\Omega^2}{4\delta}}$ $\boldsymbol{\hbar\omega'_{at} = \hbar\omega_+ = \hbar\left(\omega_{at} + \frac{\Omega^2}{4\delta}\right) \rightarrow \Delta\omega_{at}^{(0ph)} = \frac{\Omega^2}{4\delta}}$