Cinématique du solide et des solides en contact

Table des matières

1 Champ des vitesses d'un solide

1.1 Modèle du solide

•Définition : Un solide (solide indéformable) est un système matériel indéformable,la distance entre deux points quelconque du système reste constante au cours du temps.

1.2 Formule de Varignon

- A et B deux points fixes du solide (S)
- R : référentiel galiléen
- R' : référentiel lié au solide
- $\overrightarrow{\omega}(R'/R)$: vecteur rotation du solide dans (R)
- $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_R = \left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R'} + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{AB}$
- $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{v}(B/R) - \overrightarrow{v}(A/R)$

$$\overrightarrow{v}(B/R) = \overrightarrow{v}(A/R) + \overrightarrow{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

1.3 Torseur cinématique

Le champ des vitesses d'un solide est décrit par un torseur cinématique dont les éléments de réduction sont

- Résultante : vecteur rotation du solide $\overrightarrow{\omega}$
- Moment : vitesse en un point dus solide $\overrightarrow{v}$

•Remarque :le solide est un système à 6 degrés de liberté

- 3 degrés de liberté de translation,associés aux aux trois coordonnées d'un point d'un solide
- 3 degrés de liberté d'orientation ,associés aux rotaions d'axes liés au solide

2 Mouvments d'un solide

2.1 Solide en translation

•Définition : Un solide est en translation dans un référentiel R si le vecteur de rotation du solide dans R est nul.

$$\overrightarrow{\omega}(S/R) = \overrightarrow{0}$$

On peut distinguer entre

- translation rectiligne : les points du solide décrivent une courbe rectiligne
- translation circulaire : les points du solide décrivent des cercles.

2.2 Solide en rotation autour d'u axe fixe

- (S) en rotation de l'axe (Oz) de (R)
- $\overrightarrow{\omega}$: vecteur rotation de (S) par rapport à (R)
- O : un point de l'axe de rotation (Oz)

$$\overrightarrow{v}(O/R) = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{v}(M/R) = \overrightarrow{\omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OM}$$

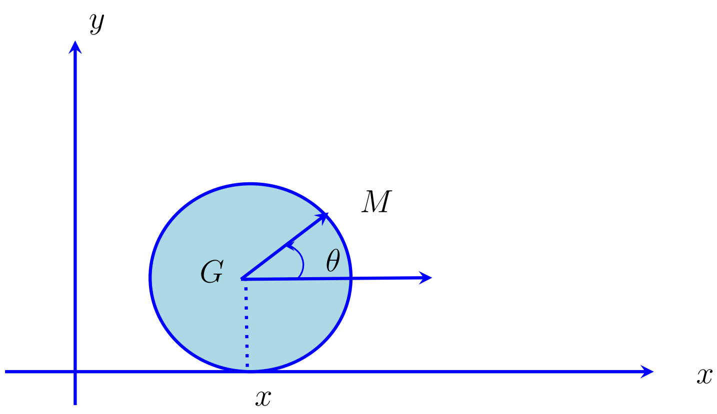
2.3 Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe

Lorsque un solide est en rotation autour d'un axe de direction fixe, son mouvement se décompose en :

- une rotation dans son référntiel barycentrique autour d'un axe de même direction
- une translation de son centre d'inartie G

•Exemple : roue qui roule sur un plan
la roue présente deux dégrés de liberté

- l'abscisse x du centre de masse
- l'angle $\theta = (\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{GM})$ où M est un point fixe sur la roue



2.4 Mouvement général d'un solide

•Axe instantané de rotation : l'axe instantané de rotation est le lieu des points du solide où le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ est colinéaire au vecteur vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega}$.

- ▶ le mouvement le plus général d'un solide est la composition,à chaque instant,d'une rotation à vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega}$ autour de l'axe instantané de rotation et d'une translation de vitesse $\overrightarrow{v}$ le long de cet axe.
- ▶ on parle du mouvement hélicoïdal si $\overrightarrow{\omega}$ et $\overrightarrow{v}$ sont constants.

2.5 Mouvement plan

Un solide est en mouvement plan si les vitesses de tous ses points sont colinéaires à un plan fixe donné.

3 Contacts entre solides

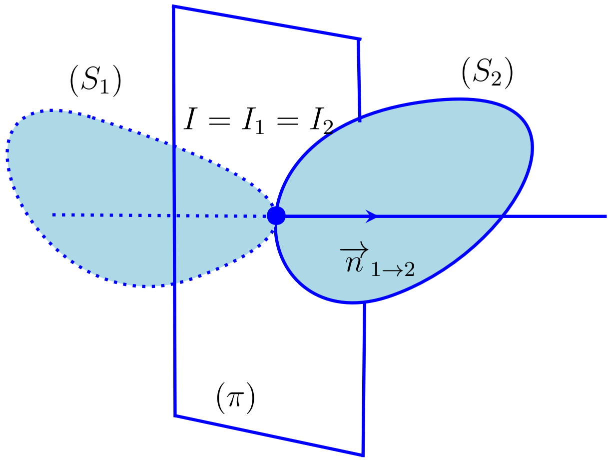
3.1 Nature de contact

Le contact entre deux solides peut se faire :

- selon une surface (un livre glisse sur une table plane)
- selon une ligne (cylindre roule sur un plan)
- en un point (boule en mouvement sur une table)

3.2 Vitesse de glissement

Considérons un contact ponctuel entre deus solides (S_1) et (S_2)



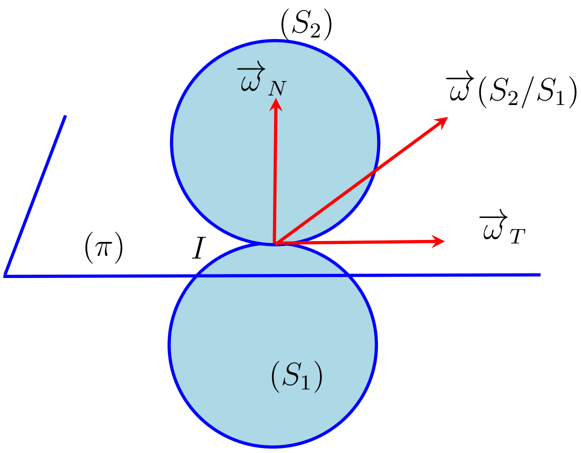
- I : intersection des surfaces des deux solides
- I_1 : point matériel appartenant au solide (S_1) et coïncidant à l'instant t avec I
- I_2 : point matériel appartenant au solide (S_2) et coïncidant à l'instant t avec I

• vitesse de glissement : On définit la vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1) par

$$\overrightarrow{v}_g(S_2/S_1) = \overrightarrow{v}(I_2) - \overrightarrow{v}(I_1)$$

•Remarque : la vitesse de glissement est indépendante du référentiel

3.3 Roulement et pivotement



- $\vec{\omega}(S_2/S_1)$: vecteur rotation du solide (S_2) par rapport à (S_1)

$$\boxed{\vec{\omega}(S_2/S_1) = \vec{\omega}(S_2/R) - \vec{\omega}(S_1/R)}$$

- $\vec{\omega}_T$: composante tangentielle de $\vec{\omega}(S_2/S_1)$,elle appartient au plan (π) tangente aux deux solides en point de contact I, on l'appelle vitesse angulaire de roulment
- $\vec{\omega}_N$: composante normale de $\vec{\omega}(S_2/S_1)$,on l'appelle vitesse angulaire de pivotement

$$\boxed{\vec{\omega}(S_2/S_1) = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_T}$$

3.4 Roulement sans glissement

Un solide (S_2),en contact avec (S_1),roule sans glisser lorsqu'en tout point de contact la vitesse de glissement est nulle.

$$\boxed{\vec{v}_g(S_2/S_1) = \vec{0}}$$

4 Lois de composition des vitesses et des accélérations

- R : référentiel absolue (référentiel d'étude)
- R' : référentiel relatif en mouvement dans (R),caractérisé par le cevteur vitesse $\vec{v}(O'/R)$ et le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$
- M : point matériel

4.1 Loi de composition des vitesses

$$\boxed{\vec{v}(M/R,t) = \vec{v}(M/R',t) + \vec{v}_e(M,t)}$$

- $\vec{v}(M/R,t)$: vitesse absolue du point M
- $\vec{v}_e(M,t)$: vitesse d'entrainement du point M

$$\boxed{\vec{v}_e(M,t) = \vec{v}(O'/R,t) + \overrightarrow{MO'} \wedge \vec{\omega}(t)}$$

- $\vec{v}(M/R',t)$: vitesse relative du point M

4.2 Loi de composition des accélérations

$$\boxed{\vec{a}(M/R,t) = \vec{a}(M/R',t) + \vec{a}_e(M,t) + \vec{a}_c(M,t)}$$

- $\vec{a}(M/R,t)$: accélération absolue du point M
- $\vec{a}(M/R',t)$: accélération relatif du point M
- $\vec{a}_e(M,t)$: accélération d'entraînement du point M

$$\boxed{\vec{a}_e(M,t) = \vec{a}(O'/R,t) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

- $\vec{a}_c(M,t)$: accélération de Coriolis

$$\boxed{\vec{a}_c(M,t) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/R',t)}$$

4.3 Composition des vecteurs rotations

- $\overrightarrow{\omega}(S/R)$: vecteur de rotation d'un solide dans (R)
- $\overrightarrow{\omega}(S/R')$: vecteur de rotation d'un solide dans (R')
- $\overrightarrow{\omega}(R'/R)$: vecteur de rotation de (R') par rapport à (R)

$$\boxed{\overrightarrow{\omega}(S/R) = \overrightarrow{\omega}(S/R') + \overrightarrow{\omega}(R'/R)}$$