FORMES LINÉAIRES CONTINUES, DISTANCE À UN HYPERPLAN

Partie I

Soit H un hyperplan d'un evn E et h une forme linéaire non nulle sur E de noyau H

1. Dans cette question, E est supposé de dimension finie, on désigne par x_0 un vecteur de E

   (a) On note $d(x_0, H)$ la distance de x_0 à l'hyperplan H. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de H telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_0 - u_n\| = d(x_0, H)$

   (b) Montrer que la suite (u_n) est bornée

   (c) En déduire qu'il existe $y \in H$ tel que : $d(x_0, H) = \|x_0 - y\|$
   On dit que la distance de x_0 à H est atteinte en y

   Dans la suite de cette partie E est $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé de dimension quelconque .

2. Montrer que si h est une forme linéaire continue sur E alors le noyau $\operatorname{Ker}(h)$ est fermé dans E

3. On veut établir la réciproque. Par absurde on suppose que $\operatorname{Ker}(h)$ est fermé et h n'est pas continue.

   (a) Justifier l'existence d'une suite $(t_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0 \\ h(t_n) = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   (b) En considérant la suite $(t_n - t_0)_{n\geqslant 0}$, aboutir à une contradiction puis conclure .

4. (a) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel E, alors $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .

   (b) En déduire que tout H hyperplan de E est fermé ou dense dans E,c'est-à-dire $\overline{H} = H$ ou $\overline{H} = E$

Partie II

On suppose dans cette partie que H est un hyperplan fermé, d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé E de dimension quelconque . H est le noyau d'une forme linéaire h, continue non nulle sur E. x_0 désigne un vecteur fixé de E.

5. (a) Justifier que l'ensemble $\left\{ \dfrac{|h(x)|}{\|x\|}, \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$ est majoré

   (b) Justifier l'existence de $|\!|\!| h |\!|\!| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|h(x)|}{\|x\|}$, puis montrer que $\forall x \in E, |h(x)| \leqslant |\!|\!| h |\!|\!| \, \| x \|$

6. (a) Montrer que, pour tout y de H on a :$\|x_0 - y\| \geqslant \dfrac{|h(x_0)|}{|\!|\!| h |\!|\!|}$

   (b) En déduire que $d(x_0, H) \geqslant \dfrac{|h(x_0)|}{|\!|\!| h |\!|\!|}$.

   (c) En déduire que $d(x_0, H) = 0$ si et seulement si $x_0 \in H$

7. On considère dans cette question que $x_0 \notin H$.

   (a) Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_n$ d'éléments de $E\setminus\{0\}$ vérifiant :

$$|\!|\!| h |\!|\!| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$$

   (b) Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel λ_n et un vecteur y_n de H tel que :

$$w_n = \lambda_n x_0 + y_n$$

FORMES LINÉAIRES CONTINUES, DISTANCE À UN HYPERPLAN

(c) Prouver que, pour tout entier n : $\dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \dfrac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$

8. En déduire que, pour tout vecteur x_0 de E , on a :$d(x_0, H) = \dfrac{|h(x_0)|}{\||h\||}$

Partie III

Dans cette partie, E est l'ensemble des suites réelles de limite nulle, on munit cet ensemble de la norme infinie, c'est-à-dire que si $u = (u_n)_n \in E$ alors $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

9. Établir que si $u = (u_n)_n$ est une suite bornée alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ est convergente.

   Soit h l'application définie sur E dans $\mathbb{R}$ par:

$$h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

10. Montrer que h est une forme linéaire continue non nulle sur E et que $\| h \| \leqslant 1$

11. Soit $(v_p)_{p\geqslant 0}$ une suite d'éléments de E, on notera $v_p(n)$ le terme de rang n de la suite v_p.
    On définit v_p par :

$$v_p(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant p \\ 0 & \text{si } n \geqslant p+1 \end{cases}$$

   Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty}$,en déduire $\| h \|$

12. Montrer qu'il n'existe pas d'élément u non nul de E telle que :

$$\||h\|| = \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty}$$

13. On note H le noyau de h , vérifier que H est un hyperplan fermé de E .

14. Montrer que la distance d'un vecteur x de E à H n'est pas atteinte .

Formes linéaires continues, distance à un hyperplan

Partie I

1. (a) On rappelle que $\mathrm{d}(x_0, H) = \inf_{y \in H} \|x_0 - y\|$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe $u_n \in H$ tel que :
$$\mathrm{d}(x_0, H) \leqslant \|x_0 - u_n\| < \mathrm{d}(x_0, H) + \frac{1}{2^n}$$
Par suite, par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \|x_0 - u_n\| = \mathrm{d}(x_0, H)$

(b) On a $\|u_n\| \leqslant \|u_n - x_0\| + \|x_0\|$. La suite $(\|u_n - x_0\|)_n$ est convergente , donc bornée
Par suite $(\|u_n\|)_n$ est aussi bornée.

(c) H étant de dimension finie, d'après Bolzano-weirstrass, on peut extraire une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ convergente. Notons y sa limite, alors par continuité de la norme
$$\lim_{n \to +\infty} \left\|u_{\varphi(n)} - x_0\right\| = \|y - x_0\|$$
D'autre part : $\mathrm{d}(x_0, H) = \lim_{n \to +\infty} \left\|u_{\varphi(n)} - x_0\right\|$, car $\left(\left\|u_{\varphi(n)} - x_0\right\|\right)$ est extraite de la suite convergente $\left((\|u_n - x_0\|)_n\right)$.
On en déduit que $\mathrm{d}(x_0, H) = \|y - x_0\|$.

2. $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{Ker}(h) = h^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E

3. (a) h est linéaire non continue, donc elle n'est pas continue en 0, donc
$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0 \text{ ,} \exists x \text{ tel que } \|x\| < \delta \text{ et } |h(x)| \geqslant \varepsilon$$
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| < \dfrac{1}{2^n}$ et $|h(x_n)| \geqslant \varepsilon$
Posons $t_n = \dfrac{x_n}{h(x_n)}$, on a $h(t_n) = 1$ et $\|t_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{|h(x_n)|} \leqslant \dfrac{\|x_n\|}{\varepsilon} \leqslant \dfrac{1}{2^n \varepsilon}$ donc $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$

(b) On a $h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 0$ donc $t_n - t_0 \in H$ mais $\lim_{n \to +\infty} (t_n - t_0) = -t_0 \notin H$. Ce qui contredit que H est fermé

4. Soit F un sous-espace de E,
- $\overline{F} \neq \emptyset$ (Car F l'est)
- Soit $(x, y) \in \overline{F}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ telles que :
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \to +\infty} y_n = y$$
On a alors $(\lambda x_n + y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $\lim_{n \to +\infty} \lambda x_n + y_n = \lambda x + y$ donc $\lambda x + y \in \overline{F}$

5. Soit H un hyperplan de E on a $H \subset \overline{H}$. Supposons que $\overline{H} \neq H$, soit $a \in \overline{H} \backslash H$
H est un hyperplan et $a \notin H$ donc $E = H \oplus \mathbb{R}a$
Soit $x \in E$, il existe $(x_1, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que : $x = x_1 + \lambda a$
On a $x_1 \in H \subset \overline{H}$ et $\overline{H}$ est un sev de E , donc $x \in \overline{H}$. Par suite $\overline{H} = E$

Partie II

FORMES LINÉAIRES CONTINUES, DISTANCE À UN HYPERPLAN

6. (a) L'application h est linéaire continue, donc elle est bornée sur la sphère unité, ainsi il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in S(O,1), |h(x)| \leqslant K$$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\dfrac{x}{\| x \|} \in S(O,1)$, donc

$$\frac{|h\,(x)|}{\|x\|} = \left| h\left(\frac{x}{\| x \|}\right)\right| \leqslant K$$

Donc $\left\{\dfrac{|h(x)|}{\|x\|},\ |\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$ est majoré

(b) L'ensemble $\left\{\dfrac{|h(x)|}{\|x\|},\ |\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, donc elle admet une borne supérieure, ce qui justifie l'existence de $\| h \| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|h\,(x)|}{\|x\|}$.
Soit $x \in E \setminus \{0\}$, alors $\dfrac{|h(x)|}{\|x\|} \leqslant \| h \|$, donc $|h(x)| \leqslant \| h \| \, \| x \|$.
Une telle inégalité est vérifiée si $x = 0$. Ainsi

$$\forall x \in E, |h(x)| \leqslant \| h \| \, \| x \|$$

7. (a) On a $y \in H$ donc $h\,(y) = 0$, par suite :

$$|h\,(x_0)| = |h\,(x_0) - h\,(y)| = |h\,(x_0 - y)| \leqslant \| h \| \, \|x - y_0\|$$

Donc $\|x_0 - y\| \geqslant \dfrac{|h\,(x_0)|}{\| h \|}$

(b) D'après la question précedente on a $\mathrm{d}\,(x_0, H) = \inf\limits_{y\in H} \|x_0 - y\| \geqslant \dfrac{|h\,(x_0)|}{\| h \|}$

(c) Si $x_0 \in H$, alors $\mathrm{d}\,(x_0, H) = 0$.
Réciproquement. Si $\mathrm{d}\,(x_0, H) = 0$ alors, d'après la question précédente, on a:

$$0 = \mathrm{d}\,(x_0, H) \geqslant \frac{|h\,(x_0)|}{\| h \|} \geqslant 0$$

Donc $h\,(x_0) = 0$, soit $x_0 \in \mathrm{Ker}\,(h) = H$.

8. On considère dans cette question $x_0 \notin H$.

(a) D'après la caractérisation de la borne supérieure , on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists x_\varepsilon \in E \setminus \{0\} \text{ tel que : } \| h \| - \varepsilon \leqslant \frac{|h\,(x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|} \leqslant \| h \|$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $w_n \in E \setminus \{0\}$ tel que :

$$\| h \| - \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{|h\,(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \| h \|$$

Donc $\| h \| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|h\,(w_n)|}{\|w_n\|}$

(b) H est un hyperplan et $x_0 \notin H$, donc $E = H \oplus \mathbb{R}x_0$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_n \in \mathbb{R}$ et y_n de H tel que : $w_n = \lambda_n x_0 + y_n$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n \in H = \mathrm{Ker}(h)$, donc $h\,(w_n) = \lambda_n h\,(x_0)$ et par suite $|h\,(w_n)| = |\lambda_n| \, |h\,(x_0)|$

- Si $\lambda_n = 0$, alors $|h(w_n)| = 0$ et l'inégalité $\dfrac{|h\,(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \dfrac{|h\,(x_0)|}{d\,(x_0, H)}$ est triviale

Formes linéaires continues, distance à un hyperplan

- Sinon, on a $\|w_n\| = |\lambda_n| \left\| x_0 + \dfrac{y_n}{\lambda_n} \right\| \geqslant |\lambda_n| \,\mathrm{d}\,(x_0, H)$

  Donc : $|\lambda_n| \leqslant \dfrac{\|w_n\|}{\mathrm{d}\,(x_0, H)}$ ($\mathrm{d}\,(x_0, H) > 0$ car $x_0 \notin H$)

  Par suite :

$$\frac{|h\,(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \frac{|h\,(x_0)|}{\mathrm{d}\,(x_0, H)}$$

9. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente , on a :

$$\|\, h \,\| \leqslant \frac{|h\,(x_0)|}{\mathrm{d}\,(x_0, H)} \text{ donc } \mathrm{d}\,(x_0, H) \leqslant \frac{|h\,(x_0)|}{\|\, h \,\|}$$

Ainsi: $\mathrm{d}\,(x_0, H) = \dfrac{|h\,(x_0)|}{\|\, h \,\|}$

Partie III

10. La suite $(u_n)_n$ est convergente donc bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left| \dfrac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leqslant \dfrac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ converge , donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{u_n}{2^{n+1}}$ est absolument convergente par suite elle est convergente .

11. L'application h est linéaire car pour $u = (u_n)_n$, $v = (v_n)_n$ deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$h\,(u + \lambda v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n + \lambda v_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{2^{n+1}} = h(u) + \lambda h(v)$$

De plus pour tout $u \in E$,

$$|h\,(u)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) \|u\|_\infty = \|u\|_\infty$$

On a pour tout $u \in E$, $|h\,(u)| \leqslant \|u\|_\infty$, donc u est continue et on a $\|\, h \,\| \leqslant 1$

12. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a $h\,(v_p) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_p\,(n)}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^p}$ et $\|v_p\|_\infty = 1$, donc $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{|h\,(v_p)|}{\|\, v_p \,\|_\infty} = 1$. On a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{|h\,(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leqslant \|\, h \,\|$ par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $1 \leqslant \|\, h \,\|$. Ainsi $\|\, h \,\| = 1$

13. Supposons qu'il existe $u \in E \backslash \{0\}$ telle que : $\dfrac{|h\,(u)|}{\|u\|_\infty} = \|\, h \,\| = 1$

    Alors $|h\,(u)| = \|u\|_\infty$, ce qui donne que :

$$|h\,(u)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) \|u\|_\infty = \|u\|_\infty$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) \|u\|_\infty$ ce qui donne que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(\|u\|_\infty - |u_n|)}{2^{n+1}}}_{\geqslant 0} = 0$

Donc $|u_n| = \|u\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement-dit la suite $|u|$ est constante. Mais par définition de E, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ par suite $\|u\|_\infty = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0$ absurde car $u \neq 0$

Formes linéaires continues, distance à un hyperplan

14. h est continue , donc H est fermé

15. Soit $x \notin H$, supposons qu'il existe $u \in H$ tel que : $d(x, H) = d(x, u) = \|x - u\|$

    On a
$$\|x - u\|_\infty = d(x, H) = \frac{|h(x)|}{\| h \|} = |h(x)| = |h(x - u)| \ \ (\ h(u) = 0 \text{ car } u \in H)$$

    En posant $a = x - u$, on a $|h(a)| = \|a\|_\infty$ ce qui n'est pas possible d'après la question précedente .