

# Mathématiques 2

70 TO Sées

CONCOURS CENTRALE SUPÉLEC

4 heures

Calculatrices autorisées

Le problème étudie quelques propriétés de variables aléatoires réelles finies de la forme  $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ , où les  $a_k$  sont des réels et les  $X_k$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans  $\{1, -1\}$  La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes.

À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite  $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé  $(\Omega,\mathcal{A},P)$ , à valeurs dans  $\{1,-1\}$  et vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

# I Suites et intégrales

### I.A – Étude d'une intégrale à paramètre

Pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , on pose

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$$

- **I.A.1)** Montrer que f est définie et continue sur  $[0, +\infty[$  et de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ .
- **I.A.2)** Déterminer les limites de f et f' en  $+\infty$ .
- **I.A.3)** Exprimer f'' sur  $]0, +\infty[$  à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x>0, \quad f'(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

I.A.4) Montrer

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall x>0, \quad f(x)=x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\\ f(0)=\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

I.A.5) Montrer

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |s| = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$$

#### I.B - Étude d'une suite d'intégrales

Dans cette section, on étudie la suite  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^\infty \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt$$

- **I.B.1)** Justifier l'existence de la suite  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  et préciser la monotonie de la sous-suite  $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ .
- **I.B.2)** Montrer que  $u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}$ .
- I.C Calcul d'un équivalent de  $u_n$
- I.C.1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \, v_n \qquad \text{avec} \qquad v_n = \int\limits_0^\infty \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$$

I.C.2) Montrer que

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times ]0,1], \quad \left|1 - \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| \leqslant u$$

**I.C.3)** Montrer que la suite  $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  admet une limite finie l vérifiant

$$l = \int_{0}^{\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$$

**I.C.4)** On admet la relation  $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}.$ 

Conclure que  $u_n \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$ .

# II Autour du pile ou face

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite  $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans  $\{1,-1\}$  et telles que, pour tout  $k\in\mathbb{N}^*$ ,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée E(Z) et sa variance V(Z).

 $II.A - \acute{E}tude de E(|S_n|)$ 

**II.A.1)** Déterminer l'espérance et la variance de  $S_n$ .

**II.A.2)** Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On suppose que T et -T ont même loi.

Montrer que  $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$ .

II.A.3) On considère la fonction  $\varphi_n$  de  $\mathbb R$  dans  $\mathbb R$  telle que  $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$  pour tout réel t.

Montrer que  $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout réel t.

**II.A.4)** Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi}u_n$ .

On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.

**II.A.5)** Déduire de la question précédente que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2n+1} = u_{2n+2}$ .

II.B – Étude de 
$$\frac{S_n}{n}$$

On se propose de démontrer que la suite  $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$  converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable  $\mathcal{Z}\in\mathcal{A}$  tel que

$$\forall \omega \in \Omega \smallsetminus \mathcal{Z}, \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

2016-02-09 08:17:29

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Z}_n = \left\{\omega \in \Omega, \ \exists k \geqslant n, \ U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$$

**II.B.1)** Montrer que  $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**II.B.2)** Montrer que, pour tout 
$$n \in \mathbb{N}^*$$
,  $P\left(U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}$ .

**II.B.3)** Montrer que  $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et que  $\lim_{n \to \infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$ .

II.B.4) En considérant  $\mathcal{Z} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$ , montrer que  $\left(\frac{S_n}{n}\right)$  converge presque sûrement vers 0.

## III D'autres sommes aléatoires

On conserve la suite  $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  de la partie précédente et on considère de plus une suite  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  de réels positifs ou nuls. Pour tout  $n\in\mathbb{N}^*$ , on pose  $T_n=\sum_{k=1}^n a_k X_k$ .

III.A - Étude de  $E(|T_n|)$ 

**III.A.1)** Montrer que la suite  $\big(E(|T_n|)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$  est croissante.

III.A.2) Montrer que si la série  $\sum a_n^2$  est convergente, alors la suite  $\big(E(|T_n|)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$  est convergente.

**III.A.3)** On suppose  $a_1\geqslant a_2+\cdots+a_n$ . Montrer  $E(|T_n|)=E(|T_1|)=a_1$ .

#### III.B - Application à une suite d'intégrales

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit

$$J_n = \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

III.B.1) Montrer que  $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$  est une suite bien définie et qu'elle est croissante et convergente.

On posera  $a_k=\frac{1}{2k-1}$  et on exprimera l'espérance de  $|T_n|$  avec la méthode de la question II.A.4.

III.B.2) Montrer que  $J_n = \frac{\pi}{2}$  pour  $1 \leqslant n \leqslant 7$  et que  $(J_n)_{n \geqslant 7}$  est strictement croissante.

• • • FIN • • •

