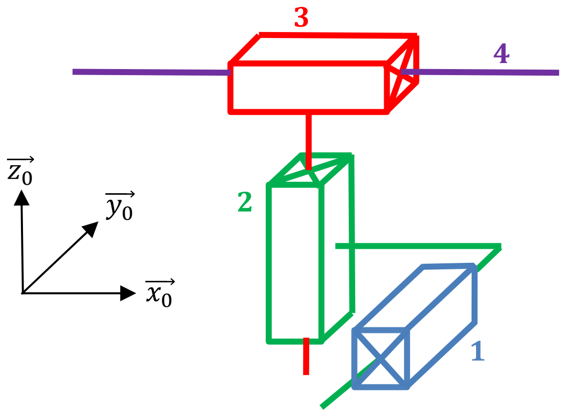
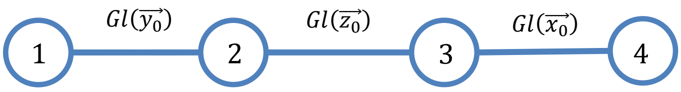
Liaisons équivalentes

Exercice 1: 3 glissières orthogonales



Question 1: Etablir le graph des liaisons du mécanisme



Question 2: Les liaisons sont-elles en série ou en parallèle ?

$$Série\ -\ Cinématique - \ Somme$$

Question 3: Choisir, en le justifiant, point et base utiles à la détermination de la liaison équivalente

On ne reconnaît pas de liaison normalisée :

- On peut prendre n'importe quel point de l'espace : Notons le P
- Compte tenu des axes des glissières, on choisit la base : $\mathfrak{B}_0$

Question 4: Mener l'analyse et donner le torseur équivalent

$$\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \{\mathcal{V}_{4/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$$
$$\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{4/1} & U_{4/1} \\ Q_{4/1} & V_{4/1} \\ R_{4/1} & W_{4/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$$

Liaison	Torseur canonique	Changement de pt	En P dans $\mathfrak{B}$
$\{\mathcal{V}_{4/3}\}$	$\begin{Bmatrix} 0 & U_{4/3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} 0 & U_{4/3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{3/2}\}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & W_{3/2} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & W_{3/2} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{2/1}\}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$

$$\begin{Bmatrix} P_{4/1} & U_{4/1} \\ Q_{4/1} & V_{4/1} \\ R_{4/1} & W_{4/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & W_{3/2} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$$
$$\{\mathcal{V}_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/3} \\ 0 & V_{2/1} \\ 0 & W_{3/2} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{4/1} \\ 0 & V_{4/1} \\ 0 & W_{4/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$$

Question 5: Les inconnues de la liaison équivalente sont-elles indépendantes

$$\begin{cases} U_{4/1} = U_{4/3} \\ V_{4/1} = V_{2/1} \\ W_{4/1} = W_{3/2} \end{cases}$$

Les 3 inconnues $U_{4/1}$, $V_{4/1}$ et $W_{4/1}$ sont indépendantes.

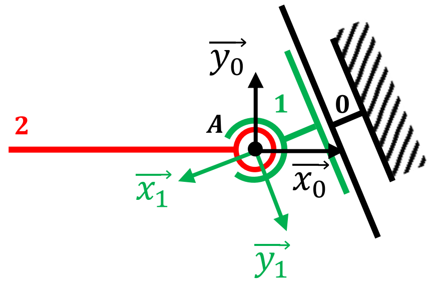
Question 6: Combien d'inconnues indépendantes possède cette liaison équivalente ?

$$I_c = 3$$

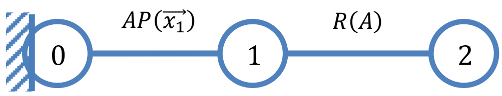
Question 7: La liaison est-elle une liaison normalisée ?

$$Non$$

Exercice 2: Pompe hydraulique à pistons axiaux



Question 1: Etablir le graph des liaisons du mécanisme



Question 2: Les liaisons sont-elles en série ou en parallèle ?

$$Série \; - \; Cinématique - \; Somme$$

Question 3: Choisir, en le justifiant, point et base utiles à la détermination de la liaison équivalente

Soit on reconnaît une liaison ponctuelle en A de normale $(A, \overrightarrow{x_1})$: on va se placer en A dans la base 1

- On choisit le point de contact : A
- On choisit la base contenant la normale : $\mathfrak{B}_1$

Sinon :

- La liaison appui plan est valable partout dans l'espace
- La liaison rotule est valable en A : il est donc judicieux de se placer en A
- On voit que la liaison appui plan est définie par le vecteur $\overrightarrow{x_1}$, le torseur de la rotule est aussi simple dans toute base de l'espace, on choisit donc la base 1

Question 4: Mener l'analyse et donner le torseur équivalent

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/0} & U_{2/0} \\ Q_{2/0} & V_{2/0} \\ R_{2/0} & W_{2/0} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

Liaison	Torseur canonique	Changement de pt	En P dans $\mathfrak{B}$
$\{\mathcal{V}_{2/1}\}$	$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{V}_{1/0}\}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0} & 0 \\ 0 & V_{1/0} \\ 0 & W_{1/0} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} P_{1/0} & 0 \\ 0 & V_{1/0} \\ 0 & W_{1/0} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$

$$\begin{Bmatrix} P_{2/0} & U_{2/0} \\ Q_{2/0} & V_{2/0} \\ R_{2/0} & W_{2/0} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} P_{1/0} & 0 \\ 0 & V_{1/0} \\ 0 & W_{1/0} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} + P_{1/0} & 0 \\ Q_{2/1} & V_{1/0} \\ R_{2/1} & W_{1/0} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} P_{2/0} & 0 \\ Q_{2/0} & V_{2/0} \\ R_{2/0} & W_{2/0} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_0}$$

Question 5: Les inconnues de la liaison équivalente sont-elles indépendantes

$$\begin{cases} P_{2/0} = P_{2/1} + P_{1/0} \\ Q_{2/0} = Q_{2/1} \\ R_{2/0} = R_{2/1} \\ V_{2/0} = V_{1/0} \\ W_{2/0} = W_{1/0} \end{cases}$$

Les 5 inconnues $P_{2/0}$, $Q_{2/0}$, $R_{2/0}$, $V_{2/0}$ et $W_{2/0}$ sont indépendantes.

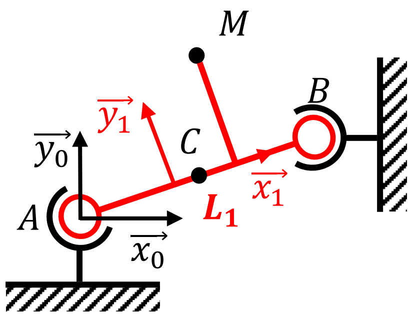
Question 6: Combien d'inconnues indépendantes possède cette liaison équivalente ?

$$I_c = 5$$

Question 7: La liaison est-elle une liaison normalisée ?

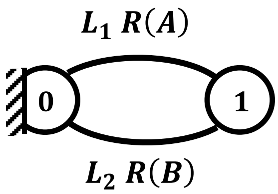
$$Pctl(A, \overrightarrow{x_1})$$

Exercice 3: Guidage en rotation



On s'intéresse à la liaison équivalente 1/0.

Question 1: Etablir le graph des liaisons du mécanisme



Question 2: Les liaisons sont-elles en série ou en parallèle ?

$$Parallèle\ - Cinématique - \ Egalité$$

Question 3: Choisir, en le justifiant, point et base utiles à la détermination de la liaison équivalente

Soit on reconnaît une liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$

- On choisit un point de l'axe : A
- On choisit la base contenant l'axe : $\mathfrak{B}_1$

Soit :

- On voit deux rotules qui sont uniquement valables en leur centre, ce qui nous conduit à choisir soit A, soit B
- Si on ne se place pas dans la base 1, on aura un déplacement de point d'un des deux torseurs qui fera apparaître deux termes au lieu d'un, on choisit donc la base 1

Question 4: Mener l'analyse et donner le torseur équivalent dans le cas où $L_1 \neq 0$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^1\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^2\}$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} P_{1/0} & U_{1/0} \\ Q_{1/0} & V_{1/0} \\ R_{1/0} & W_{1/0} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

Liaison	Torseur canonique	Changement de pt	En P dans $\mathfrak{B}$
$\{\mathcal{V}_{1/0}^1\}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^1 & 0 \\ Q_{1/0}^1 & 0 \\ R_{1/0}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^1 & 0 \\ Q_{1/0}^1 & 0 \\ R_{1/0}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{V}_{1/0}^2\}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^2 & 0 \\ Q_{1/0}^2 & 0 \\ R_{1/0}^2 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}_1}$	$\vec{V}^2(A,1/0) = \vec{V}^2(B,1/0) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}^2}$ $= \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{pmatrix} P_{1/0}^2 \\ Q_{1/0}^2 \\ R_{1/0}^2 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -L_1 R_{1/0}^2 \\ L_1 Q_{1/0}^2 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^2 & 0 \\ Q_{1/0}^2 & -L_1 R_{1/0}^2 \\ R_{1/0}^2 & L_1 Q_{1/0}^2 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$

$$\begin{Bmatrix} P_{1/0} & U_{1/0} \\ Q_{1/0} & V_{1/0} \\ R_{1/0} & W_{1/0} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} P_{1/0}^1 & 0 \\ Q_{1/0}^1 & 0 \\ R_{1/0}^1 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} P_{1/0}^2 & 0 \\ Q_{1/0}^2 & -L_1 R_{1/0}^2 \\ R_{1/0}^2 & L_1 Q_{1/0}^2 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

$$\begin{cases} P_{1/0} = P_{1/0}^1 = P_{1/0}^2 \\ Q_{1/0} = Q_{1/0}^1 = Q_{1/0}^2 \\ R_{1/0} = R_{1/0}^1 = R_{1/0}^2 \\ U_{1/0} = 0 = 0 \\ V_{1/0} = 0 = -L_1 R_{1/0}^2 \\ W_{1/0} = 0 = L_1 Q_{1/0}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{1/0} = P_{1/0}^1 = P_{1/0}^2 \\ Q_{1/0} = Q_{1/0}^1 = 0 \\ R_{1/0} = R_{1/0}^1 = 0 \\ U_{1/0} = 0 \\ V_{1/0} = R_{1/0}^2 = 0 \\ W_{1/0} = Q_{1/0}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} P_{1/0} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

Question 5: Les inconnues de la liaison équivalente sont-elles indépendantes

Une seule inconnue, pas de problèmes d'indépendance.

Question 6: Combien d'inconnues indépendantes possède cette liaison équivalente ?

$$I_c = 1$$

Question 7: La liaison est-elle une liaison normalisée ?

$$P(A, \overrightarrow{x_1})$$

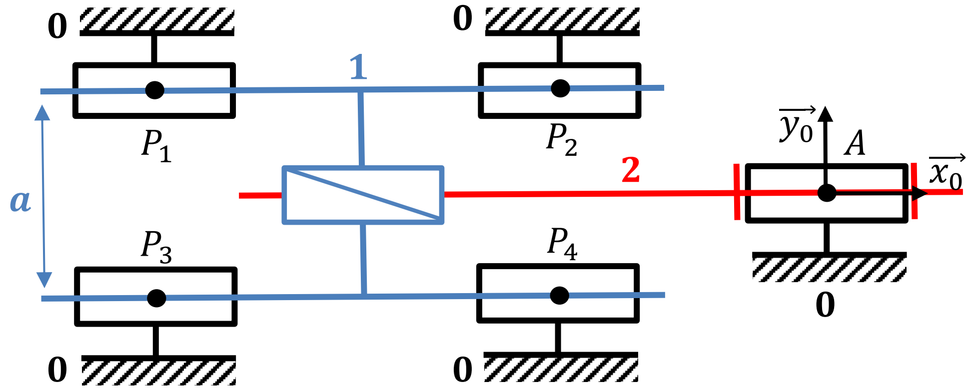
Question 8: Que se passe-t-il si $L_1 = 0$?

$$\begin{cases} P_{1/0} = P_{1/0}^1 = P_{1/0}^2 \\ Q_{1/0} = Q_{1/0}^1 = Q_{1/0}^2 \\ R_{1/0} = R_{1/0}^1 = R_{1/0}^2 \\ U_{1/0} = 0 = 0 \\ V_{1/0} = 0 = -L_1 R_{1/0}^2 \\ W_{1/0} = 0 = L_1 Q_{1/0}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{1/0} = P_{1/0}^1 = P_{1/0}^2 \\ Q_{1/0} = Q_{1/0}^1 = Q_{1/0}^2 \\ R_{1/0} = R_{1/0}^1 = R_{1/0}^2 \\ U_{1/0} = 0 \\ V_{1/0} = 0 = 0 \\ W_{1/0} = 0 = 0 \end{cases}$$

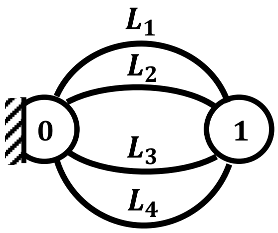
$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} P_{1/0} & 0 \\ Q_{1/0} & 0 \\ R_{1/0} & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

Liaisons rotule de centre $A = B$ à 3 DDL

Exercice 4: Guidage en translation



Question 1: Etablir le graph des liaisons du mécanisme



$$L_1 = L_2 = PG(P_1, \overrightarrow{x_0})$$

$$L_3 = L_4 = PG(P_3, \overrightarrow{x_0})$$

Question 2: Les liaisons sont-elles en série ou en parallèle ?

$$Parallèle\ -Cinématique-\ Egalité$$

Question 3: Choisir, en le justifiant, point et base utiles à la détermination de la liaison équivalente

Soit on reconnaît une liaison glissière d'axe $\overrightarrow{x_0}$

- On peut prendre tout point de l'espace mais le travail sera plus simple sur l'un des deux axes $(P_1, \overrightarrow{x_0})$ ou $(P_2, \overrightarrow{x_0})$ puisque deux des 4 torseurs y sont définis. Choix : P_1
- On prend la base : $\mathfrak{B}_0$

Soit :

- On choisit un des points des deux axes $(P_1, \overrightarrow{x_0})$ ou $(P_2, \overrightarrow{x_0})$ puisque deux des 4 torseurs y sont définis. Choix : P_1
- On choisit la base 0 commune aux 4 torseurs : $\mathfrak{B}_0$

Question 4: Mener l'analyse et donner le torseur équivalent

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^1\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^2\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^3\} = \{\mathcal{V}_{1/0}^4\}$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} P_{1/0} & U_{1/0} \\ Q_{1/0} & V_{1/0} \\ R_{1/0} & W_{1/0} \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0}$$

Liaison	Torseur canonique	Changement de pt	En P dans $\mathfrak{B}$
$\{\mathcal{V}_{1/0}^1\}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^1 & U_{1/0}^1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^1 & U_{1/0}^1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{1/0}^2\}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^2 & U_{1/0}^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0}$	RAS	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^2 & U_{1/0}^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{1/0}^3\}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^3 & U_{1/0}^3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_3}^{\mathfrak{B}_0}$	$\vec{V}^3(P_1,1/0) = \vec{V}^3(P_3,1/0) + \overrightarrow{P_1P_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}^3}$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{pmatrix} P_{1/0}^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ aP_{1/0}^3 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^3 & U_{1/0}^3 \\ 0 & 0 \\ 0 & aP_{1/0}^3 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0}$
$\{\mathcal{V}_{1/0}^4\}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^4 & U_{1/0}^4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_3}^{\mathfrak{B}_0}$	$\vec{V}^4(P_1,1/0) = \vec{V}^4(P_3,1/0) + \overrightarrow{P_1P_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}^4}$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0} \wedge \begin{pmatrix} P_{1/0}^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ aP_{1/0}^4 \end{pmatrix}^{\mathfrak{B}_0}$	$\begin{Bmatrix} P_{1/0}^4 & U_{1/0}^4 \\ 0 & 0 \\ 0 & aP_{1/0}^4 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0}$

$$\begin{Bmatrix} P_{1/0} & U_{1/0} \\ Q_{1/0} & V_{1/0} \\ R_{1/0} & W_{1/0} \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{1/0}^1 & U_{1/0}^1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{1/0}^2 & U_{1/0}^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{1/0}^3 & U_{1/0}^3 \\ 0 & 0 \\ 0 & aP_{1/0}^3 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0} = \begin{Bmatrix} P_{1/0}^4 & U_{1/0}^4 \\ 0 & 0 \\ 0 & aP_{1/0}^4 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0}$$

$$\begin{cases} P_{1/0} = P_{1/0}^1 = P_{1/0}^2 = P_{1/0}^3 = P_{1/0}^4 \\ Q_{1/0} = 0 = 0 = 0 = 0 \\ R_{1/0} = 0 = 0 = 0 = 0 \\ U_{1/0} = U_{1/0}^1 = U_{1/0}^2 = U_{1/0}^3 = U_{1/0}^4 \\ V_{1/0} = 0 = 0 = 0 = 0 \\ W_{1/0} = 0 = 0 = aP_{1/0}^3 = aP_{1/0}^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{1/0} = P_{1/0}^1 = P_{1/0}^2 = 0 \\ Q_{1/0} = 0 \\ R_{1/0} = 0 \\ U_{1/0} = U_{1/0}^1 = U_{1/0}^2 = U_{1/0}^3 = U_{1/0}^4 \\ V_{1/0} = 0 \\ W_{1/0} = P_{1/0}^3 = P_{1/0}^4 = 0 \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & U_{1/0} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_0}$$

Question 5: Les inconnues de la liaison équivalente sont-elles indépendantes

Une seule inconnue, pas de problèmes d'indépendance.

Question 6: Combien d'inconnues indépendantes possède cette liaison équivalente ?

$$I_c = 1$$

Question 7: La liaison est-elle une liaison normalisée ?

$$Gl(\overrightarrow{x_0})$$

Question 8: Quelle liaison est réalisée si $a = 0$?

Le système devient :

$$\begin{cases} P_{1/0} = P_{1/0}^1 = P_{1/0}^2 = P_{1/0}^3 = P_{1/0}^4 \\ Q_{1/0} = 0 = 0 = 0 = 0 \\ R_{1/0} = 0 = 0 = 0 = 0 \\ U_{1/0} = U_{1/0}^1 = U_{1/0}^2 = U_{1/0}^3 = U_{1/0}^4 \\ V_{1/0} = 0 = 0 = 0 = 0 \\ W_{1/0} = 0 = 0 = 0 = 0 \end{cases}$$

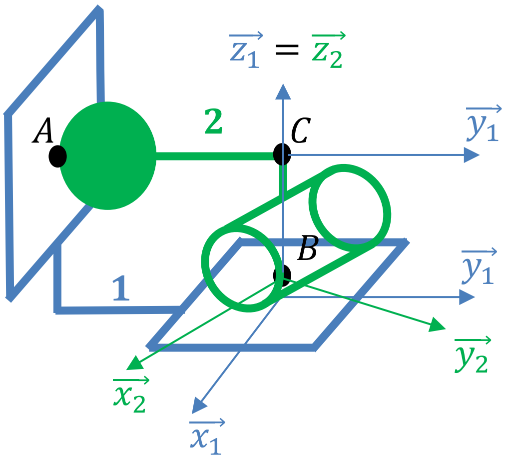
$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} P_{1/0} & U_{1/0} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{P_1}^{\mathfrak{B}_1}$$

$$I_c = 2$$

$$PG(P_1, \overrightarrow{x_0})$$

Exercice 5: Liaison complexe

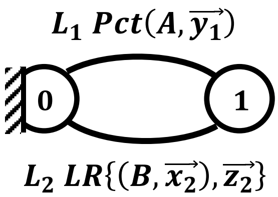
Soit le schéma cinématique suivant :



$\theta_{21} = (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}})$

On s'intéresse à la liaison équivalente 2/1.

Question 1: Etablir le graph des liaisons du mécanisme



Question 2: Les liaisons sont-elles en série ou en parallèle ?

$$Parallèle\ - Cinématique - \ Egalité$$

Question 3: Choisir, en le justifiant, point et base utiles à la détermination de la liaison équivalente

On ne reconnaît pas de liaison usuelle :

- Il existe un point commun aux lieux de définition des deux torseurs : Point C
- La ponctuelle est définie dans la base 1 et la linéaire rectiligne est définie dans la base 2. On choisit la base : $\mathfrak{B}_1$

Question 4: Mener l'analyse et donner le torseur équivalent

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^1\} = \{\mathcal{V}_{2/1}^2\}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

Liaison	Torseur canonique	Changement de pt	En P dans $\mathfrak{B}$
$\{\mathcal{V}_{2/1}^1\}$	$\begin{Bmatrix} P_{2/1}^1 & U_{2/1}^1 \\ Q_{2/1}^1 & 0 \\ R_{2/1}^1 & W_{2/1}^1 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$	RAS	$\begin{Bmatrix} P_{2/1}^1 & U_{2/1}^1 \\ Q_{2/1}^1 & 0 \\ R_{2/1}^1 & W_{2/1}^1 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{V}_{2/1}^2\}$	$\begin{Bmatrix} P_{2/1}^2 & U_{2/1}^2 \\ 0 & V_{2/1}^2 \\ R_{2/1}^2 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$	RAS	$\begin{Bmatrix} P_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} & U_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} - V_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} \\ P_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} & U_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} + V_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} \\ R_{2/1}^2 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & W_{2/1} \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}^1 & U_{2/1}^1 \\ Q_{2/1}^1 & 0 \\ R_{2/1}^1 & W_{2/1}^1 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} & U_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} - V_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} \\ P_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} & U_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} + V_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} \\ R_{2/1}^2 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

$$\begin{cases} P_{2/1} = P_{2/1}^1 = P_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} \\ Q_{2/1} = Q_{2/1}^1 = P_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} \\ R_{2/1} = R_{2/1}^1 = R_{2/1}^2 \\ U_{2/1} = U_{2/1}^1 = U_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} - V_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} \\ V_{2/1} = 0 = U_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} + V_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} \\ W_{2/1} = W_{2/1}^1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_{2/1} = P_{2/1}^1 = P_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} \\ Q_{2/1} = Q_{2/1}^1 = P_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} \\ R_{2/1} = R_{2/1}^1 = R_{2/1}^2 \\ U_{2/1} = U_{2/1}^1 = U_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} - V_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} \\ V_{2/1} = 0 = U_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1} + V_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1} \\ W_{2/1} = W_{2/1}^1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{Q_{2/1}}{P_{2/1}} = \frac{P_{2/1}^2 \sin\theta_{2/1}}{P_{2/1}^2 \cos\theta_{2/1}} = \tan\theta_{2/1} \Leftrightarrow Q_{2/1} = \tan\theta_{2/1} P_{2/1}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ \tan\theta_{2/1} P_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

Et dans l'autre base ? De toute manière, comme la relation entre composantes d'un même vecteur n'est vraie que pour un seul des deux, dans l'autre base on va faire apparaître une nouvelle dépendance

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} \cos\theta_{2/1} - \tan\theta_{2/1} P_{2/1} \sin\theta_{2/1} & U_{2/1} \cos\theta_{2/1} \\ P_{2/1} \sin\theta_{2/1} + \tan\theta_{2/1} P_{2/1} \cos\theta_{2/1} & U_{2/1} \sin\theta_{2/1} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{2/1} + \tan\theta_{2/1} P_{2/1}\sin\theta_{2/1} & U_{2/1}\cos\theta_{1/2} \\ -P_{2/1}\sin\theta_{2/1} + \tan\theta_{2/1} P_{2/1}\cos\theta_{2/1} & U_{2/1}\sin\theta_{1/2} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\cos\theta_{2/1} + P_{2/1}\dfrac{\sin^2\theta_{2/1}}{\cos\theta_{2/1}} & U_{2/1}\cos\theta_{1/2} \\ -P_{2/1}\sin\theta_{2/1} + \sin\theta_{2/1} P_{2/1} & U_{2/1}\sin\theta_{1/2} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P_{2/1}\left(\dfrac{\cos^2\theta_{2/1} + 1 - \cos^2\theta_{2/1}}{\cos\theta_{2/1}}\right) & U_{2/1}\cos\theta_{1/2} \\ 0 & U_{2/1}\sin\theta_{1/2} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{P_{2/1}}{\cos\theta_{2/1}} & U_{2/1}\cos\theta_{1/2} \\ 0 & U_{2/1}\sin\theta_{1/2} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P'_{2/1} & U'_{2/1} \\ 0 & U'_{2/1}\tan\theta_{2/1} \\ R'_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2}$$

On ne peut reconnaître une liaison usuelle car :

- Il y a dépendance entre inconnues
- La forme ne ressemble à aucun torseur connu

Question 5: Les inconnues de la liaison équivalente sont-elles indépendantes

Attention, on ne peut utiliser la tangente que si $\theta_{2/1} \neq \frac{\pi}{2}$

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} P'_{2/1} & U'_{2/1} \\ 0 & U'_{2/1}\tan\theta_{2/1} \\ R'_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_2} = \begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ \tan\theta_{2/1} P_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

Il y a dépendance entre 2 inconnues quelle que soit la base choisie

Question 6: Combien d'inconnues indépendantes possède cette liaison équivalente ?

$$I_c = 3$$

Question 7: La liaison est-elle une liaison normalisée ?

$$Non$$

Question 8: Quelle est la liaison obtenue ?

$$\theta_{21} = 0$$

$$\cos\theta_{21} = 1 \quad ; \quad \sin\theta_{21} = 0$$

$$\begin{cases} P_{2/1} = P^1_{2/1} = P^2_{2/1} \\ Q_{2/1} = Q^1_{2/1} = 0 \\ R_{2/1} = R^1_{2/1} = R^2_{2/1} \\ U_{2/1} = U^1_{2/1} = U^2_{2/1} \\ V_{2/1} = 0 = V^2_{2/1} \\ W_{2/1} = W^1_{2/1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

Liaison non normalisée à 3 DDL

Question 9: Quelle est la liaison obtenue ?

$$\theta_{21} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta_{21} = 0 \quad ; \quad \sin\theta_{21} = 1$$

$$\begin{cases} P_{2/1} = P^1_{2/1} = 0 \\ Q_{2/1} = Q^1_{2/1} = \pm P^2_{2/1} \\ R_{2/1} = R^1_{2/1} = R^2_{2/1} \\ U_{2/1} = U^1_{2/1} = -V^2_{2/1} \\ V_{2/1} = 0 = -U^2_{2/1} \\ W_{2/1} = W^1_{2/1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

Liaison Linéaire annulaire à doigt d'axe $\vec{x}$ - 3 DDL