DÃĽterminant d'une matrice dÃĽpendant d'un paramÃĽtre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$\begin{cases} a_{ij} = -1 & \text{si} \quad j < i \\ a_{ij} = 0 & \text{si} \quad j = i \\ a_{ij} = 1 & \text{si} \quad j > i \end{cases} \text{ c'est-à-dire } A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notation :

- *On note I_n la matrice identité d'ordre n.*
- *Pour tout α de $\mathbb{C}$, on pose $M_n(\alpha) = A_n + \alpha I_n$ et $D_n(\alpha) = \det(M_n(\alpha))$.*
- *On note f_α l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice $M_n(\alpha)$ dans la base canonique.*

Les parties I et II sont totalement indépendantes, et devront être traitées comme telles.

Partie I

On note $u = (x_1, \cdots, x_n)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$.
Pour tout k de $\{1, \cdots, n\}$, on pose $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $\omega_k = e^{2i\theta_k}$ et $\alpha_k = -i\text{cotan}\theta_k$

1. Montrer que l'égalité $f_\alpha(u) = 0$ équivaut au système $\begin{cases} (\alpha - 1)x_k = (\alpha + 1)x_{k-1} & \text{si} \quad 2 \leqslant k \leqslant n \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = \alpha x_n \end{cases}$

   Vérifier que f_1 est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.
2. Pour tout α distinct de 1, on pose $q_\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$
   (a) Montrer que si $q_\alpha^n \neq -1$, alors f_α est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.
   (b) Vérifier que $q_\alpha^n = -1 \iff \alpha \in \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$
   (c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = \alpha_k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$.
   Montrer que $\text{Ker} f_{\alpha_k}$ est la droite engendrée par $u_k = (1, \omega_k, \omega_k^2, \cdots, \omega_k^{n-1})$.
   (d) Préciser le rang de l'application f_α, suivant les valeurs de α.
3. On reprend ici les notations de la question précédente, et α est quelconque dans $\mathbb{C}$.
   (a) Montrer que les vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_n$ forment une base de $\mathbb{C}^n$.
   (b) Préciser la matrice de f_α dans cette base.
   (c) En déduire que le déterminant de f_α est égal à $\dfrac{(\alpha-1)^n + (\alpha+1)^n}{2}$

Partie II

Dans cette partie, on voit deux méthodes distinctes de calcul de $D_n(\alpha)$.

1. (a) Calculer $D_1(\alpha)$ et $D_2(\alpha)$.
   Montrer que si $n \geqslant 3$, alors $D_n(\alpha) - 2\alpha D_{n-1}(\alpha) + (\alpha^2 - 1)D_{n-2}(\alpha) = 0$.
   (b) En déduire l'expression de $D_n(\alpha)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout α de $\mathbb{C}$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 1.
   Pour tous complexes α et x, on pose $\Delta_n(\alpha, x) = \det(M_n(\alpha) + xJ_n)$.
   (a) Montrer que $x \mapsto \det(M_n(\alpha) + xJ_n)$ est une fonction affine de la variable x.
   (b) Retrouver l'expression de $D_n(\alpha)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout α de $\mathbb{C}$.
3. (a) Montrer que si $D_n(\alpha) = 0$ alors $D_{n-1}(\alpha) \neq 0$.
   (b) En déduire le rang de la matrice $M_n(\alpha)$ quand elle n'est pas inversible.
4. Dans cette question, on fixe $n \geqslant 1$, et on définit les θ_k et les α_k comme au début de la partie I.
   Montrer que les solutions de $D_n(\alpha) = 0$ sont les $\alpha_k = -i\text{cotan}\theta_k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$.

Partie I

1. Soit U le vecteur-colonne représentant le vecteur u dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Il s'agit de résoudre la système $M_n(\alpha)U = 0$.
On applique les opérations $L_i \longleftarrow L_i - L_{i+1}$, de $i = 1$ à $i = n-1$.

$$M_n(\alpha)U = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = & 0 \\ -x_1 + \alpha x_2 + \cdots + x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ -x_1 - x_2 \cdots - x_{n-1} + \alpha x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} (\alpha+1)x_1 + (1-\alpha)x_2 = 0 \\ (\alpha+1)x_2 + (1-\alpha)x_3 = 0 \\ \vdots \\ (\alpha+1)x_{n-1} + (1-\alpha)x_n = 0 \\ -x_1 - x_2 \cdots - x_{n-1} + \alpha x_n = 0 \end{array}\right.$$

On a donc l'équivalence $f_\alpha(u) = 0 \iff \begin{cases} (\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1} & \text{si} \quad 2 \leqslant k \leqslant n \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = \alpha x_n \end{cases}$

Si $\alpha = 1$, le système précédent donne $\begin{cases} 2x_{k-1} = 0 & \text{si} \quad 2 \leqslant k \leqslant n \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = x_n \end{cases}$ donc $u = 0$.

Autrement dit, l'endomorphisme f_1 est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.

2. (a) On sait que si $\alpha = 1$ alors $\mathrm{Ker} f_\alpha = \{0\}$.
Pour trouver les α tels que $\mathrm{Ker} f_\alpha \neq \{0\}$, on peut donc supposer $\alpha \neq 1$.
Les égalités $(\alpha-1)x_k = (\alpha+1)x_{k-1}$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$ s'écrivent alors $x_k = q_\alpha x_{k-1}$.
Ces égalités donnent immédiatement : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = q_\alpha^{k-1} x_1$.
L'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = \alpha x_n$ s'écrit alors $x_1(1 + q_\alpha + \cdots + q_\alpha^{n-2}) = \alpha q_\alpha^{n-1} x_n$.
On note que $q_\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1} \neq 1$ et que réciproquement $\alpha = \dfrac{q_\alpha+1}{q_\alpha-1}$.
Dans ces conditions :

$$x_1(1 + q_\alpha + \cdots + q_\alpha^{n-2}) = \alpha q_\alpha^{n-1} x_1 \iff x_1 \frac{q_\alpha^{n-1} - 1}{q_\alpha - 1} = \frac{(q_\alpha+1)q_\alpha^{n-1}}{q_\alpha - 1} x_1$$
$$\iff (q_\alpha^n + 1)x_1 = 0$$

En résumé, $f_\alpha(u) = 0 \iff u = x_1(1, q_\alpha, ..., q_\alpha^{n-1})$ avec $(q_\alpha^n + 1)x_1 = 0$.
On constate que si $q_\alpha^n \neq -1$, alors $x_1 = 0$, puis $x_2 = ... = x_n = 0$ et donc f_α est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$.

(b) Les racines n-ièmes de -1 sont les $e^{i\frac{(2k-1)\pi}{n}} = e^{2i\theta_k} = \omega_k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$.
Ainsi $q_\alpha^n = -1 \iff \exists k \in [\![1, n]\!]\,, q_\alpha = \omega_k$.
Mais $q_\alpha = \omega_k \iff \alpha = \dfrac{q_\alpha+1}{q_\alpha-1} = \dfrac{\omega_k+1}{\omega_k-1} = \dfrac{e^{2i\theta_k}+1}{e^{2i\theta_k}-1} = \dfrac{2\cos\theta_k}{2i\sin\theta_k} = -i\mathrm{cotan}\theta_k$.
On obtient ainsi les $\alpha_k = -i\mathrm{cotan}\theta_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Ces solutions sont distinctes deux à deux car $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n < \pi$.

(c) On suppose $\alpha = \alpha_k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$. On a donc $q_\alpha = \omega_k$ et $q_\alpha^n = -1$.
La question (a) donne alors : $f_\alpha(u) = -\omega_0 \iff u = x_1(1, \omega_k, ..., \omega_k^{n-1})$ avec $x_1 \in \mathbb{C}$.
Ainsi $\mathrm{Ker} f_{\alpha_k} = \mathbb{C}u_k$, où $u_k = (1, \omega_k, \omega_k^2, ..., \omega_k^{n-1})$.

(d) Si α n'est pas dans l'ensemble $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ alors f_α est un automorphisme de $\mathbb{C}^n$ et est donc une application de rang n.
Si $\alpha \in \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, on sait que $\dim \mathrm{Ker} f_\alpha = 1$: le théorème de la dimension permet donc d'affirmer que f_α est de rang $n-1$.

3. (a) La matrice de $u_1, ..., u_n$ dans la base canonique est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}$

Mais $\det P$ est un déterminant de Van der Monde.

Plus précisément, $\det P = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (\omega_k - \omega_j)$.
Mais $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sont distincts deux à deux (ce sont les racines n-ièmes de -1.)
On en déduit $\det P \neq 0$: les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ forment donc une base de $\mathbb{C}^n$.

(b) Pour tout k de $\{1, \cdots, n\}$, on sait que $f_{\alpha_k}(u_k) = 0$.
Pour tout α de $\mathbb{C}$, on peut écrire : $f_\alpha = f_{\alpha_k} + (\alpha - \alpha_k)\mathrm{Id}$.
On en déduit $f\alpha(u_k) = (\alpha - \alpha_k)u_k$. Il en résulte que la matrice de f_α dans la base $u_1, u_2, \cdots, u_n$ est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux successifs $\alpha - \alpha_1,\ \alpha - \alpha_2, \cdots, \alpha - \alpha_n$.

(c) Le déterminant de l'endomorphisme f_α est le déterminant de la matrice de f_α dans n'importe quelle base de $\mathbb{C}^n$. Il est bien sûr avantageux d'utiliser la base $u_1, \cdots, u_n$ dans laquelle la matrice de f_α est diagonale.
On en déduit $\det f_\alpha = \prod_{k=1}^{n} (\alpha - \alpha_k) = \prod_{k=1}^{n} \left(\alpha - \dfrac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha + 1 - (\alpha - 1)\omega_k}{1 - \omega_k}$.

Les ω_k sont les racines n-èmes de -1, donc $x^n + 1 = \prod_{k=1}^{n} (x - \omega_k)$.

On en déduit d'abord $\prod_{k=1}^{n} (x - \omega_k) = 2$. De même, pour tout α distinct de 1, on trouve, toujours avec $q_\alpha = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} (\alpha + 1 - (\alpha - 1)\omega_k) &= (\alpha - 1)^n \prod_{k=1}^{n} (q_\alpha - \omega_k) \\ &= (\alpha - 1)^n (q_\alpha^n + 1) = (\alpha + 1)^n + (\alpha - 1)^n \end{aligned}$$

Remarquons que ce résultat est encore vrai si $\alpha = 1$ car $\prod_{k=1}^{n} (\alpha + 1) = 2^n$.

Ainsi pour tout α de $\mathbb{C}$, $\det f_\alpha = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha + 1 - (\alpha - 1)\omega_k}{1 - \omega_k} = \dfrac{(\alpha + 1)^n + (\alpha - 1)^n}{2}$

Partie II

1. (a) On a $A_1(\alpha) = (\alpha)$ et $A_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$ donc $D_1(\alpha) = \alpha$ et $D_2(\alpha) = \alpha^2 + 1$.
On se donne maintenant un indice $n \geqslant 3$. Dans le déterminant $D_n(\alpha)$, on retranche la deuxième ligne à la première puis la deuxième colonne à la première. On obtient :

$$\begin{aligned} D_n(\alpha) &= \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & \alpha & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\alpha & 1 - \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \alpha & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha + 1 & 1 - \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 - \alpha & \alpha & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & \alpha \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On développe maintenant par rapport à la première ligne. On obtient :

$$D_n(\alpha) = 2\alpha D_{n-1}(\alpha) + (\alpha-1)\begin{vmatrix} -\alpha-1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & \alpha \end{vmatrix}$$

Il reste à développer le dernier déterminant par rapport à la première colonne.
On trouve finalement : $D_n(\alpha) = 2\alpha D_{n-1}(\alpha) - (\alpha^2-1)D_{n-2}(\alpha)$.
En conclusion : $\forall n \geqslant 3,\ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad D_n(\alpha) - 2\alpha D_{n-1}(\alpha) + (\alpha^2-1)D_{n-2}(\alpha) = 0$.

(b) Fixons α dans $\mathbb{C}$, et notons $u_n = D_n(\alpha)$, pour tout n de $\mathbb{N}^n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la récurrence linéaire : $\forall n \geqslant 3,\ u_n - 2\alpha u_{n-1} + (\alpha^2-1)u_n = 0$.
On peut donner un sens à u_0 en écrivant $u_2 \alpha u_1 + (\alpha^2-1)u_0 = 0$.
Il en résulte $\alpha^2 + 1 - 2\alpha^2 + (\alpha 2 - 1)u_0 = 0$ et on voit que $u_0 = 1$ convient. L'équation caractéristique est $t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 - 1 = 0$ admet deux solutions distinctes $\alpha+1$ et $\alpha-1$. Il existe donc λ et μ dans $\mathbb{C}$ tels que : $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \lambda(\alpha+1)^n + \mu(\alpha-1)^n$.
Enfin

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda(\alpha-1) + \mu(\alpha+1) = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ -\lambda + \mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ et tout α de $\mathbb{C}$: $D_n(\alpha) = \dfrac{(\alpha+1)^n + (\alpha-1)^n}{2}$.

2. (a) Notons $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes de $M_n(\alpha)$, considérées comme vecteurs de C_n.
Notons U le vecteur de C_n de composantes toutes égales à 1.
Avec ces notations, $\Delta_n(\alpha, x) = \det C_1 + xU, C_2 + xU, ..., C_n + xU$. On sait que l'application déterminant (ici dans la base canonique de C_n) est multilinéaire alternée. On peut donc développer cette expression de $\Delta_n(\alpha, x)$, en ne conservant que les déterminants où le vecteur U apparaît au plus une fois (tous les autres déterminants obtenus dans le développement étant nuls.) On trouve

$$\Delta_n(\alpha, x) = det(C_1, C_2, ..., C_n) + x\sum_{j=1}^{n} \det C_1, ..., C_{j-1}, U, C_{j+1}, ..., C_n$$

La fonction $x \mapsto \Delta_n(\alpha, x)$ s'écrit donc $\Delta_n(\alpha, x) = \lambda x + \mu$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
C'est effectivement une fonction affine. On remarque bien sûr que $\mu = \Delta_n(\alpha, 0) = D_n(\alpha)$.

(b) Avec $x = -1$ la matrice $M_n(\alpha)$ est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux sont tous égaux à $\alpha - 1$. Il en résulte $\Delta_n(\alpha, -1) = (\alpha-1)^n$.
De même, avec $x = 1$ on trouve $\Delta_n(\alpha, 1) = (\alpha+1)^n$. En ayant posé $\Delta_n(\alpha, x) = \lambda x + \mu$ cela donne les égalités $\begin{cases} \mu - \lambda = (\alpha-1)^n \\ \mu + \lambda = (\alpha+1)^n \end{cases}$
Il en résulte $D_n(\alpha) = \mu \dfrac{(\alpha+1)^n + (\alpha-1)^n}{2}$

3. (a) En utilisant l'expression déjà obtenue pour $D_n(\alpha)$, on trouve $\begin{cases} D_n(1) = 2^{n-1} \\ D_n(-1) = (-1)^n 2^{n-1} \end{cases}$.
Supposons par l'absurde que $D_n(\alpha) = D_{n-1}(\alpha) = 0$. Nécessairement $\alpha \neq \pm 1$. La relation $D_n(\alpha) = 2\alpha D_{n-1}(\alpha) - (\alpha^2-1)D_{n-2}(\alpha)$ donne alors $D_{n-2}(\alpha) = 0$. De proche en proche, $\begin{cases} D_1(\alpha) = 0 \\ D_2(\alpha) = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 + 1 = 0 \end{cases}$ ce qui est absurde.
On en déduit que si $D_n(\alpha) = 0$, alors $D_{n-1}(\alpha) \neq 0$.

(b) On suppose que $M_n(\alpha)$ n'est pas inversible, c'est-à-dire que $D_n(\alpha)$ est nul. On sait qu'alors le déterminant $D_{n-1}(\alpha)$ est non nul. Mais $D_{n-1}(\alpha)$ n'est autre que le déterminant extrait de la matrice $M_n(\alpha)$ formé par l'intersection des $n-1$ premières lignes et des $n-1$ premières colonnes. Cela implique que les $n-1$ premières colonnes de $M_n(\alpha)$ sont indépendantes. Il en résulte que si $M_n(\alpha)$ n'est pas de rang n, alors elle est de rang $n-1$.

4. Les racines n-ièmes de -1 sont les $e^{i\frac{(2k-1)\pi}{n}} = e^{2i\theta_k} = \omega_k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$.
Ainsi $q_\alpha^n = -1 \iff \exists k \in [\![1,n]\!], q_\alpha = \omega_k$.
Mais $q_\alpha = \omega_k \iff \alpha = \dfrac{q_\alpha + 1}{q_\alpha - 1} = \dfrac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \dfrac{e^{2i\theta_k}+1}{e^{2i\theta_k}-1} = \dfrac{2\cos\theta_k}{2i\sin\theta_k} = -i\text{cotan}\theta_k$.
On obtient ainsi les $\alpha_k = -i\text{cotan}\theta_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.