Min, max et quotient
Énoncé

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2,. C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement, : «C_3 termine en dernier son opération ».

Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $(\min(X_1, X_2) + X_3) > \max(X_1, X_2)$. On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$. On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.
2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(\Delta = 0)$.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier : $\mathrm{P}(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X_2 = k)\,\mathrm{P}(X_1 = n + k)$
   (b) En déduire : $\mathrm{P}(\Delta = n) = 2\dfrac{pq^n}{1+q}$
4. (a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.
   (b) Montrer : $E\left((X_1 - X_2)^2\right) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.
5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.
6. (a) En déduire : $\mathrm{P}(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\Delta = k)\,\mathrm{P}(X_3 > k)$
   (b) Exprimer $\mathrm{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Partie II

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0;1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0;+\infty[$.

On note $q = 1 - p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}(X = k, Y \leqslant t) = \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}(Y \leqslant t)$$

7. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.
8. On définit la variable aléatoire Z par $Z = \dfrac{Y}{X}$.
   (a) Montrer: $\forall t \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}(Z > t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)\,\mathrm{P}(Y > tk)$
   (b) En déduire : $\forall t \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}(Z > t) = \dfrac{pe^{-\lambda t}}{1 - qe^{-\lambda t}}$
   (c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.