Rayonnement dipolaire

Table des matières

1 Rayonnement dipolaire électrique

1.1 Modèle de dipôle de Hertz

• Modèle du dipôle de Hertz : Le dipôle oscillant de Hertz est l'ensemble de deux charges :

- une charge $-q$ fixe à l'origine O d'un système d'axes orthonormés $(Oxyz)$
- une charge $+q$,en un point P, est en mouvement de translation rectiligne sinusoïdal de pulsation ω

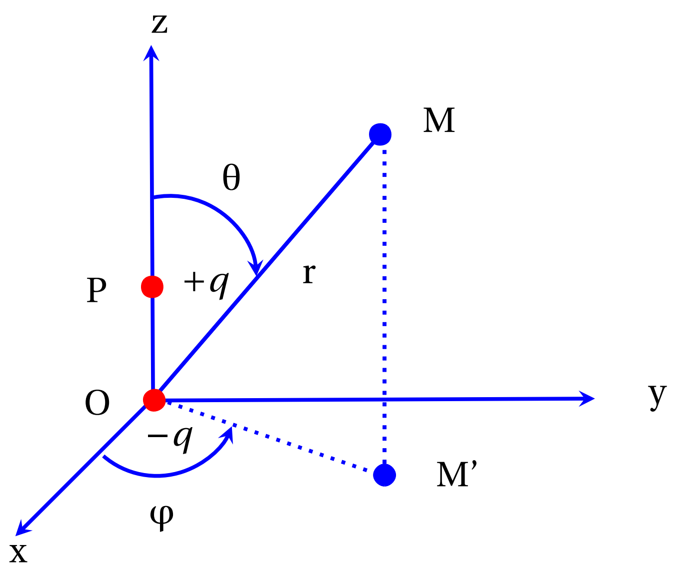
$$\overrightarrow{OP} = z(t)\overrightarrow{e}_z = z_0 \cos\omega t\,\overrightarrow{e}_z$$

- $-q$ fixe en O
- $+q$ animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation ω

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = z(t)\overrightarrow{e}_z = z_0 \cos\omega t\,\overrightarrow{e}_z}$$

- la vitesse de $+q$ est
$\overrightarrow{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = -z_0\omega\sin\omega t\,\overrightarrow{e}_z$
- on pose : $v_{max} = z_0\omega$

$$\boxed{\overrightarrow{v}(t) = -v_{max}\sin\omega t\,\overrightarrow{e}_z}$$



- Moment dipolaire $\overrightarrow{p}$
  - le moment dipolaire est

$$\boxed{\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{OP}}$$

  - $\overrightarrow{OP} = z_0\cos\omega t\,\overrightarrow{e}_z \Rightarrow \overrightarrow{p} = qz_0\cos\omega t\,\overrightarrow{e}_z$
  - on pose $p_0 = qz_0$

$$\boxed{\overrightarrow{p} = p_0\cos\omega t\,\overrightarrow{e}_z}$$

- Approximation dipolaire

•Approximation dipolaire : Dans l'approximation dipolaire on néglige la distance entre les deux charges devant la distance à laquelle on veut calculer le champ électromagnétique.

$$z_0 << OM = r$$

- Approximation non relativiste

•Approximation non relativiste : la vitesse maximale de déplacement de la charge $+q$ est très inférieure à la vitesse de la lumière c

$$v_{max} << c$$

  - $v_{max} << c \Leftrightarrow \omega z_0 << c \Leftrightarrow 2\pi\dfrac{c}{\lambda}z_0 << c \Leftrightarrow z_0 << \lambda$; λ : longueur d'onde de l'onde rayonnée
  - l'approximation non relativiste devient

$$z_0 << \lambda$$

- Conclusion
  - Approximation dipolaire : $z_0 << r$
  - Approximation non relativiste : $z_0 << \lambda$

1.2 Champ électromagnétique rayonné par le dipôle oscillant

1.2.1 Potentiel vecteur

- $\vec{A}(M,t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(V)} \dfrac{\vec{j}\left(P, t - \dfrac{PM}{c}\right)}{PM} d\tau$
- $\vec{j}\left(P, t - \dfrac{PM}{c}\right) = \rho_m \vec{v}\left(P, t - \dfrac{PM}{c}\right)$; ρ_m : densité volumique des charges mobiles
- $\vec{A}(M,t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{(V)} \rho_m \dfrac{\vec{v}\left(P, t - \dfrac{PM}{c}\right)}{PM} d\tau = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{v}\left(P, t - \dfrac{PM}{c}\right)}{PM}\iiint_{(V)} \rho_m d\tau$

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\left(P, t - \dfrac{PM}{c}\right)}{PM}$$

- $PM^2 = \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}\right)^2$
  $= PO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{PO}.\overrightarrow{OM}$
  $= z^2 + r^2 - 2rz\cos\theta$

$$PM = r\left(1 + \frac{z^2}{r^2} - \frac{2z}{r}\cos\theta\right)^{1/2}$$

- approximation dipolaire : $z_0 << r \Rightarrow z << r$ et $z\cos\theta << r$

$$\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{r}$$

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\vec{v}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r}$$

- $\dfrac{d\vec{p}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[q\overrightarrow{OP}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)\right] = q\vec{v}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)$

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{d\vec{p}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{dt}$$

- En notation complexe
  - $\underline{\vec{p}}(t) = p_0 \exp i\omega t\, \vec{e}_z$
  - $\underline{\vec{p}}\left(t - \dfrac{r}{c}\right) = p_0 \exp\left[i\left(\omega t - \omega\dfrac{r}{c}\right)\right]\vec{e}_z = p_0 \exp\left[i(\omega t - kr)\right]\vec{e}_z$

- $\dfrac{d\vec{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{dt} = i\omega p_0 \exp(i\omega t)\exp(-ikr) = i\omega \underline{p}(t)\exp(-ikr)\vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{\underline{A}}(M,t) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi r}\underline{p}(t)\exp(-ikr)\vec{e}_z}$$

1.2.2 Potentiel scalaire

- la jauge de Lorentz : $div\vec{\underline{A}}(M,t) + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \underline{V}}{\partial t} = 0$
- $div(f\vec{a}) = f\,div\vec{a} + \overrightarrow{grad}f.\vec{a}$
- $div\vec{\underline{A}}(M,t) = \dfrac{i\omega\mu_0}{4\pi}\underline{p}(t)div\left(\dfrac{\exp(-ikr)\vec{e}_z}{r}\right)$
- $div\left(\dfrac{\exp(-ikr)\vec{e}_z}{r}\right) = \dfrac{\exp(-ikr)}{r}.div\vec{e}_z + \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{\exp(-ikr)}{r}\right).\vec{e}_z$
$= \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{\exp(-ikr)}{r}\right).\vec{e}_z$
$= \left(-\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{ik}{r}\right)\exp(-ikr)\vec{e}_r.\vec{e}_z$
$= -\left(\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{ik}{r}\right)\exp(-ikr)\cos\theta$
- $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \underline{V}}{\partial t} = \dfrac{i\omega}{c^2}\underline{V}$

$$\boxed{\underline{V}(M,t) = \frac{\underline{p}(t)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1+ikr}{r^2}\exp(-ikr)\cos\theta}$$

•**Remarque** : en statique ($\omega \to 0; k \to 0$) : $V(M,t) = \dfrac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$

1.2.3 Champ électrique

- $\vec{\underline{E}} = -\overrightarrow{grad}\underline{V}(M,t) - \dfrac{\partial\vec{\underline{A}}(M,t)}{\partial t}$
- $\overrightarrow{grad}\underline{V}(M,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial \underline{V}}{\partial r}\vec{e}_r \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \underline{V}}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \underline{V}}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{\underline{p}(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2+2ikr+(ikr)^2\right)\cos\theta\exp(-ikr)\vec{e}_r \\ -\dfrac{\underline{p}(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(1+ikr)\sin\theta\exp(-ikr)\vec{e}_\theta \\ \vec{0} \end{cases}$
- $\dfrac{\partial\vec{\underline{A}}(M,t)}{\partial t} = \begin{cases} -\dfrac{\underline{p}(t)k^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta\exp(-ikr)\vec{e}_r \\ \dfrac{\underline{p}(t)k^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\sin\theta\exp(-ikr)\vec{e}_\theta \\ \vec{0} \end{cases}$
- le champ électrique

$$\vec{\underline{E}}(M,t)=\begin{cases}\dfrac{2\underline{p}(t)\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[1+ikr]\exp(-ikr)\vec{e}_r\\[2ex]\dfrac{\underline{p}(t)\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[1+ikr-k^2r^2]\exp(-ikr)\vec{e}_\theta\end{cases}$$

•Remarque : en statique ($\omega=0; k=0$)

$$\vec{E}(M,t)=\begin{cases}\dfrac{2p_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r\\[2ex]\dfrac{p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta\end{cases}$$

1.2.4 Champ magnétique

- $\vec{\underline{B}}(M,t)=\overrightarrow{rot}\,\vec{\underline{A}}(M,t)$
- $\overrightarrow{rot}(f\vec{a})=f\,\overrightarrow{rot}\,\vec{a}+\overrightarrow{grad}f\wedge\vec{a}$
- $\vec{\underline{B}}(M,t)=\dfrac{i\mu_0\omega\underline{p}(t)}{4\pi}\overrightarrow{rot}\left(\dfrac{\exp(-ikr)}{r}\vec{e}_z\right)$
  $=\dfrac{i\mu_0\omega\underline{p}(t)}{4\pi}\overrightarrow{grad}\left(\dfrac{\exp(-ikr)}{r}\right)\wedge\vec{e}_z$
- $\vec{e}_z=\cos\theta\,\vec{e}_r-\sin\theta\,\vec{e}_\theta$

$$\vec{\underline{B}}(M,t)=\frac{i\mu_0\omega\sin\theta\,\underline{p}(t)}{4\pi r^2}(1+ikr)\exp(-ikr)\vec{e}_\varphi$$

1.3 Expression du champ électromagnétique dans la zone de rayonnement

1.3.1 Définition

•Définition : On appelle zone de rayonnement la zone ou on peut considérer $r>>\lambda$

•Exemples

- en télécomunication : λ de $1cm$ à $1m$,donc il suffit de prendre $r>1km$
- en optique : domaine visible $0,4\leqslant\lambda\leqslant 0,8\mu m$,donc il suffit de prendre $r>1cm$

1.3.2 Expression du champ électromagnétique

- $r>>\lambda\Rightarrow kr>>k\lambda=2\pi\Rightarrow kr>>1$
- $kr>>1\Rightarrow k^2r^2>>kr>>1$
- $\vec{\underline{E}}(M,t)=\begin{cases}\dfrac{2\underline{p}(t)\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(ikr)\exp(-ikr)\vec{e}_r\\[2ex]\dfrac{\underline{p}(t)\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-k^2r^2)\exp(-ikr)\vec{e}_\theta\end{cases}$
- $\dfrac{|\underline{E}_\theta|}{|\underline{E}_r|}=\left|\dfrac{\sin\theta.kr}{2\cos\theta}\right|\approx\dfrac{kr}{2}>>1\Rightarrow E_\theta>>E_r$

$$\vec{E}(M,t) = -\frac{\underline{p}(t)k^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp(-ikr)\vec{e}_\theta$$

- la champ magnétique

$$\vec{B}(M,t) = -\frac{\mu_0 k\omega\sin\theta\underline{p}(t)}{4\pi r}\exp(-ikr)\vec{e}_\varphi$$

- le vecteur d'onde : $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e}_r$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}(M,t)}{\omega}$$

•Conclusion : Dans la zone de rayonnement l'onde électromagnétique a une structure d'une onde plane,on dit qu'elle est quasi-plane où localement plane.

1.3.3 Aspect énergétique

- $<\vec{\pi}> = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^*}{\mu_0}\right] = \frac{\omega k^3 p_0^2\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

$$<\vec{\pi}> = \frac{\omega^4 p_0^2\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\vec{e}_r = <\pi>_{max}\sin^2\theta$$

- la puissance moyenne rayonnée à travers une surface de rayone $r >> \lambda >> z_0$

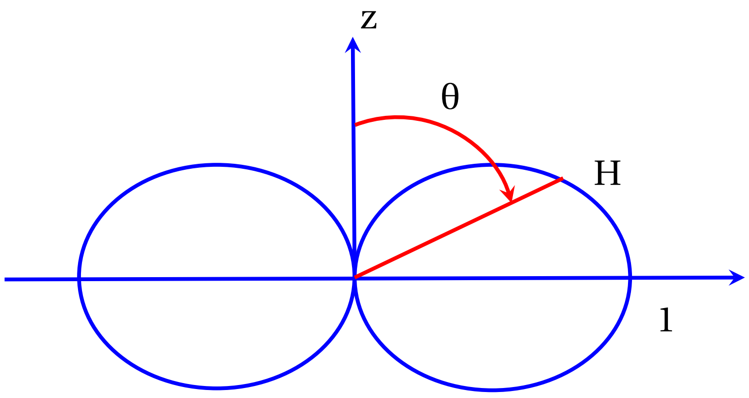
$$\mathscr{P}_{moy} = \oiint_{(S)} <\vec{\pi}>.d\vec{S} = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

► Diagramme de rayonnement

•Définition : Le diagramme de rayonnemet est la représentation en fonction de θ de

$$\rho(\theta) = \frac{|<\vec{\pi}>|}{|<\vec{\pi}>_{max}|}$$

- $\rho(\theta) = OH = \sin^2\theta$
- pour $\theta = \frac{\pi}{2}; \rho(\theta) = 1 = OH$
- pour $\theta = 0; \rho(\theta) = 0$
  $\Rightarrow O \equiv H$



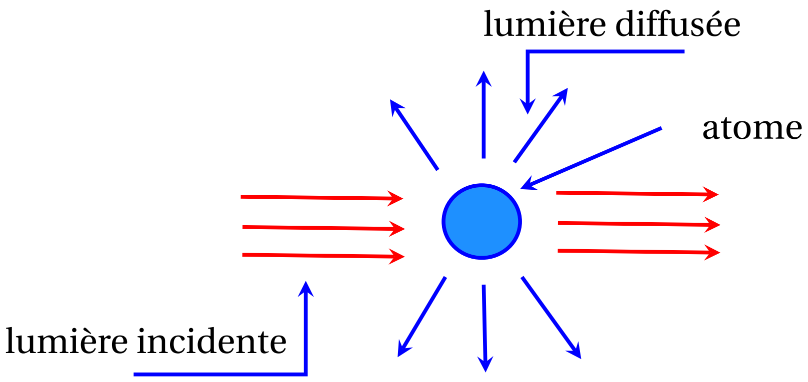
•Conclusion : la puissance rayonnée est nulle dans la direction d'oscillation du dipôle et elle est maximale dans la direction perpendiculaire à la direction d'oscillation du dipôle

2 Diffusion du rayonnement électromagnétique

2.1 Phénomène de diffusion

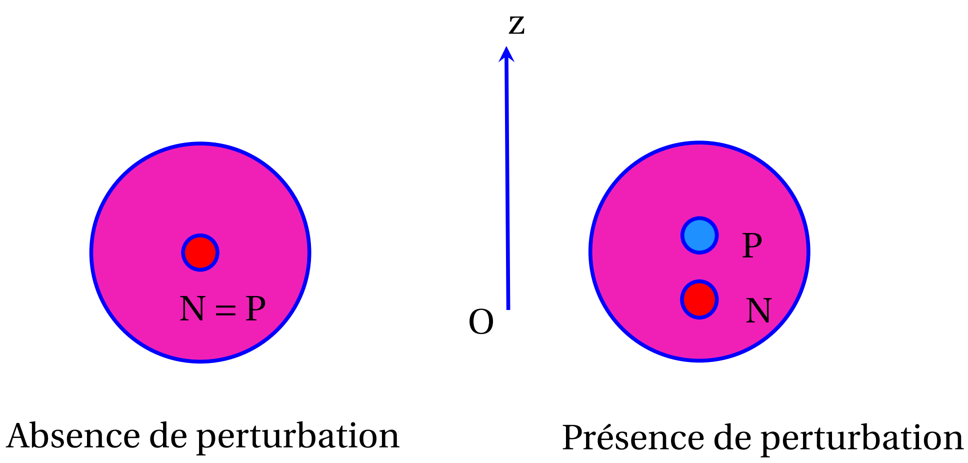
L'onde électromagnétique peut intéragir avec un atome ou molécule,qui absorbe une partie de son énergie

•Définition : On appelle diffusion de la lumière la réémission de cette dernière , par des dipôles atomiques induits, dans toutes les directions de l'espace. Cette lumière est dite diffusée.



2.2 Modèle de l'électron élastiquement lié

- En absence de perturbation,le barycentre P des positions successives prises par l'électron,coincide avec le noyau supposé fixe N : O ≡ P
- En présence d'une perturbation de l'électron suivant Oz : N ≠ P



- la force exercée par le noyau sur l'électron de masse m est modélisée par une force de rappel

$$\boxed{\overrightarrow{f} = -m\omega_0^2 z \overrightarrow{e}_z}$$

avec ω_0 : pulsation propre du mouvement

- il apparait un moment dipolaire $\overrightarrow{p}(t)$

$$\boxed{\overrightarrow{p}(t) = -ez(t)\overrightarrow{e}_z}$$

- l'atome rayonne et perd de l'énergie mécanique que l'on peut modéliser par une force de type frottement visqueux

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -m\frac{\dot{z}}{\tau}\overrightarrow{e}_z}$$

avec τ : temps de relaxation

2.3 Interaction d'une onde électromagnétique monochromatique avec l'électron atomique

- le champ électrique de l'onde : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp i(\omega t)\vec{e}_z$
- la relation fondamentale de la dynamique

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\tau} + \omega_0^2 z = -\frac{eE_0}{m}\exp i(\omega t)}$$

(on néglige la force magnétique devant la force électrique)

- la solutin de l'équation en régime forcé s'écrit

$$\boxed{\underline{z}(t) = z_0 \exp i(\omega t + \varphi)}$$

- $\underline{z}(t) = -\frac{eE_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}\exp i(\omega t)$

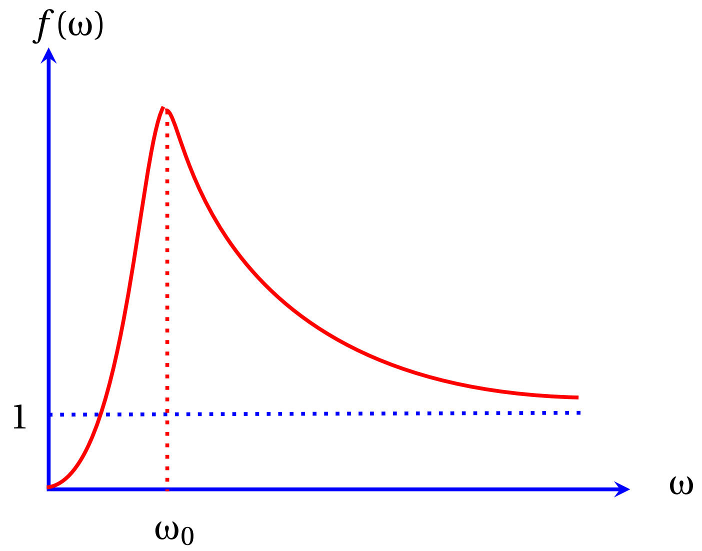
$$\boxed{z_0 = \left|\underline{z}(t)\right| = \frac{eE_0}{m}\frac{1}{\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}}$$

- la puissance moyenne rayonnée est : $\mathscr{P}_{moy} = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^2 z_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$

$$\boxed{\mathscr{P}_{moy} = \frac{e^4E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\frac{\omega^4}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

- $\mathscr{P}_{moy} = \frac{e^4E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} f(\omega)$ avec $f(\omega) = \frac{\omega^4}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$

  - si $\omega = 0$; $f(0) = 0$
  - $\omega \to \infty$; $f(\omega) \to 1$
  - $f(\omega)$ est maximale pour $\omega \approx \omega_0$ car $\omega_0 >> \frac{1}{\tau}$



▶ $\omega >> \omega_0$: diffusion de Thomson

$$\boxed{\mathscr{P}_{moy} = \frac{e^4E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} = cte}$$

exemple : diffusion des rayons X par la matière

▶ $\omega \approx \omega_0$: diffusion résonante

- $\omega^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$

$$\mathscr{P}_{moy} = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\frac{\tau^2\omega_0^2}{1+4\tau^2(\omega-\omega_0)^2}$$

- il s'agit d'un profil Lorentzien

► $\omega << \omega_0$: diffusion de Rayleigh

$$\mathscr{P}_{moy} = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

•Application

La fréquence propre des molécules de l'atmosphère terrestre est de l'ordre de $\nu_0 \approx 10^{17} Hz$. Ces molécules étant excitées par le soleil dont la fréquence du visible est de l'ordre de $\nu \approx 10^{15} Hz << \nu_0$,provoquent la diffusion de Rayleight.

- $\mathscr{P}_{moy} = cte\frac{1}{\lambda^4}$
- $\lambda_{blue} \approx 0,4 \mu m$ et $\lambda_{rouge} \approx 0,75 \mu m$
  donc le blue est beaucoup plus diffusé que le rouge
- en plein jour et par temps clair,le ciel apparait blue
- au couchet du soleil,celui-ci apparait rouge