DS N^{o}5 (le 20/12/2008)

PROBLÈME 1 :

I. Questions de cours

Question 1.

Les assertions suivantes, dans lesquelles $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ désignent deux séries numériques réelles, sont-elles vraies, ou fausses ? En cas de réponse affirmative, vous démontrerez le résultat, et en cas de réponse négative, vous donnerez un contre-exemple.

1°) (u_n) converge vers 0 $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2°) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow (u_n)$ converge vers 0.

3°) $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

4°) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Question 2.

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

II. Préliminaires :

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$: il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |t_n| \leq \varepsilon.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} t_k$.

1°) On écrit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > N$,

$$T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N} t_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n} t_k.$$

a) Prouver que : $\left|\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} t_k\right| \leq n\varepsilon$.

b) En déduire que la suite (T_n) converge vers 0.

2°) Prouver alors le cas général : “Si (t_n) converge vers T, alors (T_n) converge aussi vers T.”
On pourra par exemple utiliser la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = t_n - T$.

3°) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \cos(n\theta)$, $\theta \in]0, 2\pi[$, fixé.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{1}{n+1}\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left((n+1)\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}.$$

b) La suite (T_n) converge-t-elle ?

c) On prend ici $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. La suite (t_n) converge-t-elle ?

d) Conclure.

III.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que :
(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

1°) Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq \frac{K}{n}.$$

2°) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in [0,1[$.

On note alors $f(x)$ sa somme : $\forall x \in [0,1[\,,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Désormais, on suppose de plus que :

(ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = L \in \mathbb{R}$.

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = L - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Prouver que l'on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ u_n = L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

4°) **a)** Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n} (|ka_k|)$.

b) Prouver que la suite (M_n) converge. Quelle est sa limite ?

5°) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ |u_n| \leqslant |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(x^k - 1\right) + \frac{1}{n(1-x)} M_n$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[\,,\ |u_n| \leqslant |L - f(x)| + (1-x) \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + \frac{1}{n(1-x)} M_n.$$

6°) On prend $x = 1 - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
En utilisant tout ce qui précède, y compris les préliminaires, prouver alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7°) Conclure en énonçant clairement le résultat obtenu concernant la fonction f.

Début de E4A 2008

PROBLÈME 2 :

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $n_0 \in \mathbb{N}$ et si $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, on note, pour $n \geqslant n_0$: $\quad P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k$.

Si la suite $(P_n)_{n \geqslant n_0}$ converge , on notera $P = \prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ sa limite et on dira que le produit infini $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ existe.

Partie I : Étude d'exemples :

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1°) Calculer : $\prod_{n=2}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n})$, $\prod_{n=2}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$, $\prod_{n=2}^{+\infty} (1 - \frac{2}{n(n+1)})$.

2°) **a)** Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $1 + \frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{\operatorname{th} t}{\operatorname{th}(t/2)}$ et que, si l'on pose $u = \operatorname{th}(t/2)$, $\operatorname{ch} t = \frac{1+u^2}{1-u^2}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite définie par :

$$v_1 = x, \text{ et, pour tout } n \geqslant 1 : v_{n+1} = 2{v_n}^2 - 1$$

Montrer l'existence et donner la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{1}{v_n})$.

Partie II :

Dans cette partie encore, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1°) **a)** Donner un exemple de suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P = 0$.

b) Prouver que, si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P \neq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

c) On suppose ici que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Montrer que le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

d) On suppose ici que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

On suppose que la série $\sum \ln(u_n)$ converge. Montrer alors que le produit infini $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe et est non nul.

Que peut-on dire si la série $\sum \ln(u_n)$ diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$?

2°) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente.

3°) **a)** On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$ et que la série $\sum u_n$ converge.

Montrer l'existence de $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ soit non nul.

Indication : pour ces deux questions, on distinguera deux cas, selon que la série $\sum {u_n}^2$ est , ou non, convergente.

b) Exemple : Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n})$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}})$.

Partie III :

Dans cette partie encore, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

1°) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \geqslant 1\ ,\ u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad u_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

a) Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum {u_n}^2$.

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de : $\prod_{k=3}^{+\infty}(1+u_k)$

2°) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$ et que $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe et est non nul.

a) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum {u_n}^2$ l'est.

b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ si et seulement si la série $\sum {u_n}^2$ est divergente.

Partie IV :

Dans cette partie encore, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

1°) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$. On pose alors :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\ ,\ v_n = \frac{u_n}{p_n}$$

a) Pour $n \geqslant 1$, exprimer v_n en fonction de $\dfrac{1}{p_n}$ et $\dfrac{1}{p_{n-1}}$.

b) On suppose dans cette question que la série $\sum {u_n}^2$ est convergente.

i) Établir que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

ii) La convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum u_n$? (justifier).

c) Donner un exemple d'une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

2°) Soit α un réel strictement positif, et, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sin\left(\dfrac{c}{n^\alpha}\right)$, où c est un nombre réel tel que, pour tout $n \geqslant 1$, u_n soit différent de -1.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur α et c pour que $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n) \ = \ 0$.

b) On suppose ici que $\alpha = 1$.
Étudier la convergence de la série $\sum p_n$.

Partie V :

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1°) Montrer que $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left| 1 + \frac{i}{n} \right|$ existe.

2°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \neq -1$.
Montrer que, si $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe et vaut 0, alors la série de terme général $\ln(|1+u_n|)$ est divergente.

3°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe et soit non nul.
Montrer que la suite (u_n) ne prend pas la valeur -1, et que la série de terme général $\ln(|1+u_n|)$ est convergente.
Que peut-on en déduire pour $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$?

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n nombres complexes $z_1, \ldots z_n$.
Comparer $\displaystyle\left| \prod_{k=1}^{n} (1+z_k) - 1 \right|$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1+|\,z_k\,|) - 1$.

5°) Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\,u_n\,| < 1$ et si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe.
Indication : On pourra utiliser le critère de Cauchy et la question précédente.

6°) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ et $u_n \neq -1$.
On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = e^{i\theta_n} \quad (\text{avec } -\pi < \theta_n < +\pi).$$

Montrer que $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe si et seulement si la série $\sum \theta_n$ converge.

7°) Le produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$ existe-t-il ?

D'après : CENTRALE TA 1981, ESTP/ENSAM PC 1997 et E4A 2003
