Mécanique

MECA2 - Dynamique

Cours

Programme PSI/MP 2022 (LIEN)		
Id	Compétence développée	Connaissances associées
B2-10	Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.
C1-05	Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.
C2-08	Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.	Torseurs cinétique et dynamique d'un solide ou d'un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen. Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen. Énergie cinétique. Inertie et masse équivalentes. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen. Puissance intérieure à un ensemble de solides. Théorème de l'énergie cinétique. Rendement en régime permanent.
C2-09	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.	

Actions dynamiques des liaisons et équations différentielles du mouvement

1.I. Objectifs

Nous savons aujourd'hui étudier les mécanismes et déterminer les actions dans les liaisons en statique, à l'aide des équations issues du principe fondamental de la statique (PFS). Toutefois, dès qu'il y a accélération, les actions changent et le PFS ne permet plus de les déterminer.

C'est le principe fondamental de la dynamique (PFD) qui va nous permettre de caractériser les actions mécaniques dès lors que l'équilibre statique est rompu.

Le PFS donne les relations suivantes :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext \to S}} = \vec{0} \quad ; \quad \sum \overrightarrow{M_{ext \to S}} = \vec{0}$$

Aujourd'hui, nous sommes en passe de montrer de nouvelles relations tenant compte des accélérations. Nous connaissons bien la relation suivante :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext \to S}} = m\vec{a}$$

Nous ferons toutefois un rappel des calculs de masses des solides.

Mais ce n'est pas tout, il y a aussi une relation en rotation. Dans ce cas, nous allons mettre en place des outils permettant de traduire les caractéristiques des solides en rotation, en particulier la matrice d'inertie, puis la relation du principe fondamental de la dynamique permettant de caractériser ces mouvements de rotation en présence d'accélérations angulaires.

1.II. Caractéristiques des solides

1.II.1 Masse d'un solide

La masse d'un ensemble matériel volumique E s'écrit :

$$M(E) = \int_E \rho(M) dV$$

avec $\rho(M)$ sa masse volumique.

Si $\rho(M)$ est constante $\rho(M) = \rho$ et V est son volume, alors

$$M(E) = \rho V$$

On raisonne de la même façon avec des masses surfaciques et linéiques.

1.II.2 Centre de gravité

1.II.2.a Définition

Le centre de gravité G d'un ensemble matériel volumique E est défini dans un repère d'origine O par :

$$\int_E \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$$

Soit :

$$\int_E (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}) dm = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \int_E \overrightarrow{GO} dm + \int_E \overrightarrow{OM} dm = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \int_E \overrightarrow{OM} dm = m\overrightarrow{OG}$$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_E \overrightarrow{OM}\, dm$		
$x_G = \frac{1}{m}\int_E x dm$	$y_G = \frac{1}{m}\int_E y dm$	$z_G = \frac{1}{m}\int_E z dm$

Si la masse volumique $\rho(M) = \rho = constante$, on a aussi :

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V}\int_E \overrightarrow{OM}\, dV$		
$x_G = \frac{1}{V}\int_E x dV$	$y_G = \frac{1}{V}\int_E y dV$	$z_G = \frac{1}{V}\int_E z dV$

Pour éviter des calculs inutiles : Si l'ensemble matériel comporte des éléments de symétrie (sur sa géométrie ET sa répartition de masse), le centre de gravité appartient à ces éléments. Autrement dit, si la masse volumique est constante, G est sur les éléments de symétrie volumique de l'ensemble (axe cylindre, centre sphère…

1.II.2.b Relations barycentriques

Si l'on connaît les N centres de gravité G_i de N sous-ensembles de masse respectives m_i (positive ou négative ex. cylindre creux), on peut déterminer le centre de gravité par :

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OG_i}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OG_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Petit exemple pour s'en convaincre : Soient deux solides E_1 et E_2 de centres de gravité G_1 et G_2 et de masses m_1 et m_2 :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_E \overrightarrow{OM}\, dm = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(\int_{E_1} \overrightarrow{OM}\, dm + \int_{E_2} \overrightarrow{OM}\, dm\right) = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2}\right)$$

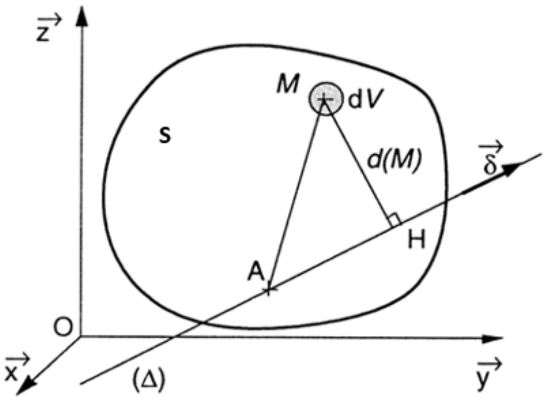
$$= \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m_2}$$

Avec $\int_{E_1} \overrightarrow{OM}\, dm = m_1\overrightarrow{OG_1}$ et $\int_{E_2} \overrightarrow{OM}\, dm = m_2\overrightarrow{OG_2}$

1.II.3 Moments d'inertie d'un solide

1.II.3.a Définition

Soit un solide S, un point A et une droite Δ passant par A.



$$\|\vec{\delta}\| = 1$$

On appelle « moment d'inertie du solide S par rapport au point A », la quantité :

$$I_A = \int_S \overrightarrow{AM}^2 dm$$

On appelle « moment d'inertie du solide S par rapport à la droite Δ », la quantité :

$$I_\Delta = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AM}\right)^2 dm = \int_S \overrightarrow{HM}^2 dm = \int_S d(M)^2 dm$$

Remarques :

- $I > 0$ (cas particulier de la masse ponctuelle : $I = 0$ « en son centre »)
- Unité : Kgm^2

1.II.3.b Traduction analytique

Soit le solide S, le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et un point M de coordonnées (x, y, z)..

Le moment d'inertie de S par rapport à l'origine O du repère :

$$I_O = \int_S \overrightarrow{OM}^2 dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Le moment d'inertie de S par rapport aux trois axes du repère :

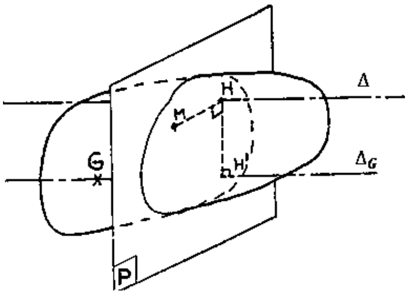
$I_{O_x} = \int_S (y^2 + z^2) dm$	$I_{O_y} = \int_S (x^2 + z^2) dm$	$I_{O_z} = \int_S (x^2 + y^2) dm$

1.II.3.c Théorème d'Huygens

1.II.3.c.i Enoncé

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe D qui ne passe pas par le centre de gravité G est égal au moment d'inertie d'un axe parallèle au premier passant par G augmenté de md^2, m étant sa masse et d la distance entre G et D.

1.II.3.c.ii Expression du théorème



Soit le solide S, l'axe Δ_G passant par G et l'axe Δ parallèle à Δ_G distant de d.

$$I_\Delta(S) = \int_S \overrightarrow{HM}^2 dm$$

$$\overrightarrow{HM}^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + \overrightarrow{H'M}^2 + 2\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M} = d^2 + \overrightarrow{H'M}^2 + 2\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M}$$

$$I_\Delta(S) = \int_S \left(d^2 + \overrightarrow{H'M}^2 + 2\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M}\right)dm = \int_S d^2 dm + \int_S \overrightarrow{H'M}^2 dm + 2\overrightarrow{HH'}.\int_S \overrightarrow{H'M} dm$$

$$\overrightarrow{H'M} = \overrightarrow{H'G} + \overrightarrow{GM}$$

$$I_\Delta(S) = md^2 + I_{\Delta_G}(S) + 2\overrightarrow{HH'}.\int_S \overrightarrow{H'G} dm + 2\overrightarrow{HH'}.\int_S \overrightarrow{GM} dm$$

$$\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'G} = 0 \ et \ \int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$$

$$I_\Delta(S) = md^2 + I_{\Delta_G}(S)$$

Donc :

$$\boxed{I_\Delta(S) = I_{\Delta_G}(S) + m(S)d^2}$$

Attention au sens d'expression !

Remarques : on notera que l'inertie d'un objet autour d'un axe est toujours supérieure à l'inertie de l'objet autour d'un axe parallèle qui passe par G : $\boldsymbol{I_\Delta(S) \geq I_{\Delta_G}(S)}$

Enfin, pour passer d'un axe quelconque (ne passant pas par G) à un autre parallèle axe quelconque (ne passant par G), il suffit d'appliquer deux fois cette formule :

$$\begin{matrix} I_{\Delta_1}(S) = I_{\Delta_G}(S) + m(S){d_1}^2 \\ I_{\Delta_2}(S) = I_{\Delta_G}(S) + m(S){d_2}^2 \end{matrix} \Rightarrow I_{\Delta_1}(S) - I_{\Delta_2}(S) = m(S)\left({d_1}^2 - {d_2}^2\right)$$

Soit :

$$I_{\Delta_2}(S) = I_{\Delta_1}(S) + m(S)\left({d_2}^2 - {d_1}^2\right)$$

1.II.4 Opérateur d'inertie d'un solide

1.II.4.a Définition

Soit un solide S et un point A.

L'opérateur d'inertie, $I(A,S)$, est l'opérateur linéaire qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $I(A,S)\vec{u}$ tel que :

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$$

Cet terme va apparaître lors du calcul du moment cinétique des solides un peu plus tard dans le cours.

Cet opérateur est linéaire et symétrique.

1.II.4.b Matrice d'inertie

Soit $\mathfrak{B}_S$ une base $(\overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S})$ liée au solide S étudié.

1.II.4.b.i Expression

On place l'origine du repère au point où est calculée la matrice, c'est-à-dire les intégrales.

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{x_S} + y\overrightarrow{y_S} + z\overrightarrow{z_S}$$

$$\vec{u} = a\overrightarrow{x_S} + b\overrightarrow{y_S} + c\overrightarrow{z_S}$$

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} \wedge \begin{bmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} ay^2 - bxy - cxz + az^2 \\ bz^2 - cyz - axy + bx^2 \\ cx^2 - axz - byz + cy^2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$\begin{bmatrix} ay^2 - bxy - cxz + az^2 \\ bz^2 - cyz - axy + bx^2 \\ cx^2 - axz - byz + cy^2 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm = I(A,S)\vec{u}$$

En prenant A comme origine du repère, on a :

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S (x^2+z^2)dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S (x^2+y^2)dm \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Origine des intégrales en A

Astuce pour reconstruire cette matrice : on associe x à 1, y à 2 et z à 3

- Les termes diagonaux à la ligne et colonne i ne contiennent pas i
- Les termes hors diagonaux à la ligne i et la colonne j contiennent le terme ij

A, B et C sont appelés moments d'inertie par rapport aux axes $(A,\overrightarrow{x_S})$, $(A,\overrightarrow{y_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$, ils sont positifs.

D, E et F sont appelés **produits d'inertie** par rapport aux axes $(A,\overrightarrow{y_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$, $(A,\overrightarrow{x_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$ ou $(A,\overrightarrow{y_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$.

1.II.4.b.ii *Signification physique des termes de I*

• Termes diagonaux

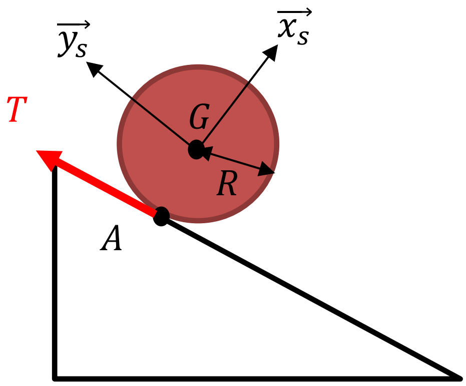
Soit $(M,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$. Les termes A, B et C de la diagonale représentent l'inertie du solide autour de l'un des 3 axes de rotation $(M,\overrightarrow{x_S})$, $(M,\overrightarrow{y_S})$ ou $(M,\overrightarrow{z_S})$. Ainsi, si l'on fait tourner le solide autour de l'un de ces 3 axes en appliquant un couple C_O sur le solide selon l'axe concerné, on obtiendra l'équation du mouvement $C_O=J\ddot{\theta}$ avec J respectivement égal à A, B ou C.

Autrement dit, ces termes représentent la **quantité de matière autour de l'axe concerné** en considérant que plus elle est loin, plus elle a d'effets (masse fois rayon au carré).

Les termes diagonaux interviennent donc dans les **équations différentielles du mouvement** en rotation.

Exemples :

- En supposant qu'une porte de frigidaire possède une matrice d'inertie $I(A,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$ dans une base où $(A,\overrightarrow{z_S})$ est son axe de rotation. Le comportement de l'ouverture de la porte ou l'homme force avec une force F orthogonalement à la porte à une distance d, est régit par l'équation : $C_O=Fd=C\ddot{\theta}$. En ajoutant une bouteille de masse m dans la porte à un rayon R de l'axe de rotation et considérant l'hypothèse que l'inertie de la bouteille autour de son centre de gravité est négligeable, on aurait alors l'équation : $Fd=(C+mR^2)\ddot{\theta}$. Pour la même force, la porte s'ouvre moins vite.
- Soit un cylindre (rayon R, matrice $I(G,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$), roulant autour de $(A,\overrightarrow{z_S})$ soumis à la gravité et à la force tangentielle T au contact en A. On a : $C\ddot{\theta}=-RT$



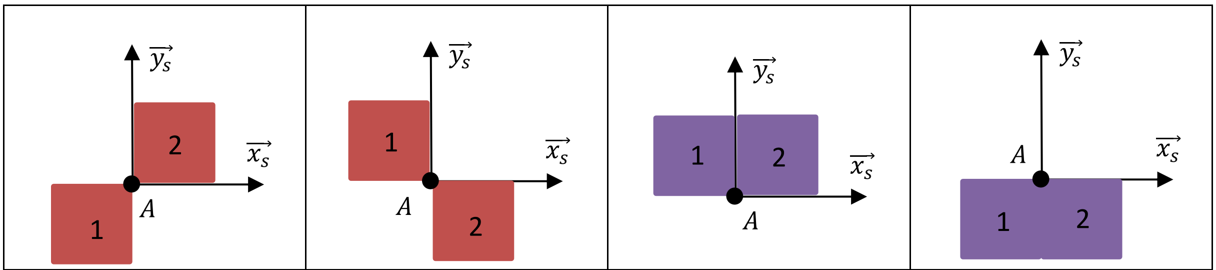
- **<u>Termes hors diagonaux</u>**

Soit la matrice d'un solide $I(A,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$.

La présence de termes hors diagonaux représente la **répartition de la masse au point où est exprimé la matrice d'inertie dans des directions diagonales à la base $\mathfrak{B}_S$**.

Pour mieux comprendre, supposons un solide dont la forme est constante suivant $\overrightarrow{z_S}$.

Voyons alors différentes formes du solide de même inertie A autour de $(A,\overrightarrow{x_x})$ et la valeur du terme $F=\int_S xydm$ associée :

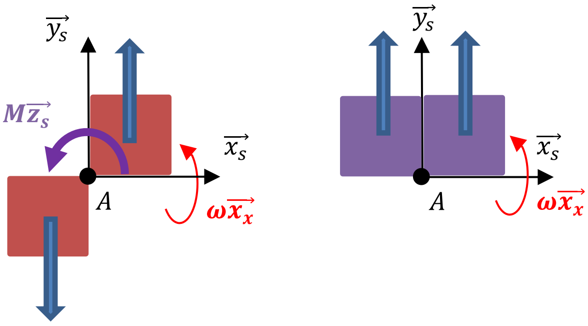


$$F=\int_S xydm=\int_1 xydm+\int_2 xydm$$

$\int_1 xydm=\int_2 xydm$ $F\neq 0$	$\int_1 xydm=-\int_2 xydm$ $F=0$

On voit que le terme F représente la manière avec laquelle la matière se répartie dans les directions $\overrightarrow{x_S}+\overrightarrow{y_S}$, $\overrightarrow{x_S}-\overrightarrow{y_S}$, $-\overrightarrow{x_S}+\overrightarrow{y_S}$ et $-\overrightarrow{x_S}-\overrightarrow{y_S}$.

En supposant que le solide tourne par l'intermédiaire d'une liaison pivot autour de l'axe $(A,\overrightarrow{x_S})=(A,\overrightarrow{x_0})$ dans un référentiel Galiléen 0, on montrera à l'aide du PFD (cf td équilibrage) que E et F (termes à la ligne x ou colonne x) génèrent **chacun** des moments autour des axes $(A,\overrightarrow{y_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$, pendant la rotation (vitesse constant ou non), donc aussi sur $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ par projection.



Ces termes interviennent donc dans les actions en moment dans les liaisons.

1.II.4.b.iii Remarque : Axes principaux d'inertie

Remarque : La matrice d'inertie étant carrée, symétrique et réelle, elle est diagonalisable. Il existe donc une base de vecteurs propres $\mathfrak{B}_S{}'$ dans laquelle $I(A,S)$ est diagonale. Elle s'écrit dans cette base :

$$I(A,S) = \begin{bmatrix} A^* & 0 & 0 \\ 0 & B^* & 0 \\ 0 & 0 & C^* \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S{}'}$$

A^*, B^* et C^* s'appellent les **moments principaux d'inertie** et la base $\mathfrak{B}_S{}'$ est la base principale d'inertie.

Une matrice d'inertie de la forme $I(A,S) = \begin{bmatrix} A^* & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$ montre que $\vec{x}$ est (une) axe principal d'inertie du solide S.

Remarque : en tout point M d'un solide, il existe un repère principal d'inertie $\left(M, \overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y^*}, \overrightarrow{z^*}\right)$. En ce point, les 3 axes $\left(M, \overrightarrow{x^*}\right)$, $\left(M, \overrightarrow{y^*}\right)$ et $\left(M, \overrightarrow{z^*}\right)$ sont axes principaux d'inertie du solide.

Equilibrage dynamique : Nous verrons dans un TD que l'axe principal d'inertie nous intéresse quand il s'agit de faire tourner un solide autour d'un axe de manière équilibrée (actions indépendantes du temps). En effet, l'une des conditions pour qu'un solide qui tourne autour d'un axe $(A, \vec{u})$ soit équilibré, est que l'axe $(A, \vec{u})$ soit axe principal d'inertie du solide !

1.II.4.b.iv Théorème de Huygens généralisé

Soit le point A et un solide S de masse m tel que : $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{x_S} + b\overrightarrow{y_S} + c\overrightarrow{z_S} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$

Dans la même base, on a la relation entre $I(A,S)$ et $I(G,S)$ suivante :

$$I(A,S) = I(G,S) + m\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Attention au sens d'expression !

Remarque : la matrice d'inertie ne dépend pas du sens d'expression de $\overrightarrow{AG}$ – On peut utiliser $\overrightarrow{GA}$

Démonstration :

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM})dm = \int_S (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})\wedge\left(\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})\right)dm$$

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})\right)dm + \int_S \overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})\right)dm$$

$$I(A,S)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})dm + \int_S \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM})dm + \int_S \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})dm + \int_S \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM})dm$$

$$I(A,S)\vec{u} = \overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})\int_S dm + \overrightarrow{AG}\wedge\vec{u}\wedge\int_S \overrightarrow{GM}dm + \int_S \overrightarrow{GM}dm\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}) + I(G,S)\vec{u}$$

$$I(A,S)\vec{u} = I(G,S)\vec{u} + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}$$

$$\overrightarrow{AG}\wedge\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \wedge \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \wedge \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} bw-cv \\ cu-aw \\ av-bu \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \wedge \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} c^2u-acw-abv+b^2u \\ a^2v-abu-bcw+c^2v \\ b^2w-bcv-acu+a^2w \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$= \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(A,S)\vec{u} = I(G,S)\vec{u} + m\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \vec{u}$$

$$\boxed{I(A,S) = I(G,S) + m\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}}$$

On remarquera la présence de 3 fois la formule du théorème de Huygens pour le déplacement des 3 moments d'inertie autour des axes $(A,\overrightarrow{x_S})$, $(A,\overrightarrow{y_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$:

$$\boxed{\begin{array}{l} I_A^x = I_G^x + m(b^2+c^2) = I_G^x + md_x^2 \\ I_A^y = I_G^y + m(a^2+c^2) = I_G^y + md_y^2 \\ I_A^z = I_G^z + m(a^2+b^2) = I_G^z + md_z^2 \end{array}}$$

Remarque : pour obtenir la relation liant l'opérateur d'inertie en deux points O et O' quelconques, il suffit d'appliquer le théorème de Huygens en O puis en O', et d'en faire la différence membre à membre :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad ; \overrightarrow{O'G} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GO'} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} - \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} a - a' \\ b - b' \\ c - c' \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$A = \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad ; \quad A' = \begin{bmatrix} b'^2 + c'^2 & -a'b' & -a'c' \\ -a'b' & a'^2 + c'^2 & -b'c' \\ -a'c' & -b'c' & a'^2 + b'^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(O,S) = I(G,S) + mA \quad ; \quad I(O',S) = I(G,S) + mA'$$

$$I(O',S) - I(O,S) = m(A' - A)$$

$$\boldsymbol{I(O',S) = I(O,S) + m(A' - A)}$$

Avec :

$$A' - A = \begin{bmatrix} (b'^2 + c'^2) - (b^2 + c^2) & ab - a'b' & ac - a'c' \\ ab - a'b' & (a'^2 + c'^2) - (a^2 + c^2) & bc - b'c' \\ ac - a'c' & bc - b'c' & (a'^2 + b'^2) - (a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Remarque : il est nécessaire de connaître le centre de gravité de S pour utiliser cette formule (définition des matrices A et A')

1.II.4.b.v Symétries et calculs de $I(O,S)$

Les différents cas suivants permettent de considérablement simplifier les calculs de matrices d'inertie.

On suppose à chaque fois que le point O appartient aux éléments de symétrie proposés.

Attention : on ne parle que de forme de la matrice, car les termes peuvent changer d'un point à l'autre.

• **$(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})$ plan de symétrie de normale $\overrightarrow{z_S}$**

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Démonstration :

$$D=\int_S yzdm=\int_{z<0} yzdm+\int_{z>0} yzdm=\int_{z<0} yzdm-\int_{z<0} yzdm=0$$

$$E=\int_S xzdm=\int_{z<0} xzdm+\int_{z>0} xzdm=\int_{z<0} xzdm-\int_{z<0} xzdm=0$$

• **Deux plans de symétrie parmi les plans $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})$, $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{z_S})$, $(O,\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$**

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Démonstration :

- Si $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})$ plan de symétrie : $D=E=0$
- Si $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{z_S})$ plan de symétrie : $D=F=0$
- Si $(O,\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$ plan de symétrie : $E=F=0$
- Si deux d'entre eux sont plans de symétrie : $D=E=F=0$

• **Solide de révolution d'axe $(O,\overrightarrow{z_S})$**

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad \forall \mathfrak{B}(\_,\_,\overrightarrow{z_S})$$

$$A=\frac{C}{2}+\int_S z^2 dm$$

Démonstration :

Il existe une infinité de plans de symétrie contenant l'axe $(O,\overrightarrow{z_S})$, et en particulier les plans $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{z_S})$ et $(O,\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$, on a donc :

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Puis :

$$A+B=\int_S (y^2+z^2)dm+\int_S (x^2+z^2)dm=\int_S (x^2+y^2)dm+2\int_S z^2 dm$$

$$2A=C+2\int_S z^2 dm \Rightarrow A=\frac{C}{2}+\int_S z^2 dm$$

Remarque : cette propriété reste valable pour tout solide de symétrie de révolution sur ¼ de tour, un ½ ou ¾ de tour :

$$A=\int_V (y^2+z^2)dm=\int_V y^2 dm+\int_V z^2 dm$$

$$B=\int_V (x^2+z^2)dm=\int_V x^2 dm+\int_V z^2 dm$$

$$\int_V x^2 dm=\rho\int_a^b\int_{r_1}^{r_2}\int_0^\alpha r^2\cos^2\theta\, r dr d\theta dz=\rho\int_a^b dz\int_{r_i}^{r_2} r^3 dr\int_0^\alpha \cos^2\theta\, d\theta$$

$$\int_V y^2 dm=\rho\int_a^b\int_{r_1}^{r_2}\int_0^\alpha r^2\sin^2\theta\, r dr d\theta dz=\rho\int_a^b dz\int_{r_i}^{r_2} r^3 dr\int_0^\alpha \sin^2\theta\, d\theta$$

$$\int_0^\alpha \cos^2\theta\, d\theta=\int_0^\alpha (1-\sin^2\theta)d\theta=\alpha-\int_0^\alpha \sin^2\theta\, d\theta$$

$$\int_0^\alpha \sin^2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\alpha (1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left[\alpha-\int_0^\alpha \cos 2\theta\, d\theta\right]=\frac{1}{2}\left[\alpha-\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\alpha\right]=\frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{4}$$

$$\int_0^\alpha \cos^2\theta\, d\theta = \alpha - \int_0^\alpha \sin^2\theta\, d\theta = \alpha - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4} = \frac{4\alpha - 2\alpha + \sin 2\alpha}{4} = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{4}$$

$$\int_0^\alpha \sin^2\theta\, d\theta = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}$$

$$\int_0^\alpha \cos^2\theta\, d\theta = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{4}$$

	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \pi$	$\alpha = \frac{3\pi}{2}$
$\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}$	$\frac{\pi - \sin\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi - \sin 2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi - \sin 3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
$\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{4}$	$\frac{\pi + \sin 2\alpha}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi + \sin 2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi + \sin 3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
Conclusion	$\int_V x^2 dm = \int_V y^2 dm$		

Finalement, on montre donc que :

$$\forall \alpha = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \int_0^\alpha \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^\alpha \cos^2\theta\, d\theta$$

$$\int_V x^2 dm = \int_V y^2 dm = \frac{1}{2}\int_V (x^2 + y^2) dm = \frac{\mathrm{C}}{2}$$

$$A = \int_V (y^2 + z^2) dm = \int_V y^2 dm + \int_V z^2 dm = \frac{\mathrm{C}}{2} + \int_V z^2 dm$$

$$B = \int_V (x^2 + z^2) dm = \int_V x^2 dm + \int_V z^2 dm = \frac{\mathrm{C}}{2} + \int_V z^2 dm$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm}$$

Conclusion : quelle que soit la révolution sur $\theta = k\frac{\pi}{2}$, k $\in \mathbb{Z}$, la diagonale de la matrice est inchangée :

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & \dots & \dots \\ \dots & A & \dots \\ \dots & \dots & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ;\ A = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm\ \ \forall S\ de\ révolution\ d'axe\ (O,\vec{z})\ sur\ \theta = k\frac{\pi}{2}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$$

On exploitera le cas échéant d'éventuelles symétries pour montrer qu'en plus, elle est diagonale.

• **Solide sphérique de centre 0**

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad \forall \mathfrak{B}_S$$

$$A=\frac{2}{3}I_O \quad avec \quad I_O=\int_S r^2 dm$$

Preuve :

$$A+B+C=\int_S (y^2+z^2)dm+\int_S (x^2+z^2)dm+\int_S (x^2+y^2)dm=2\int_S (x^2+y^2+z^2)dm=2I_O$$

$$\int_S x^2 dm=\int_S y^2 dm=\int_S z^2 dm \Rightarrow A=B=C \Rightarrow \int_S (x^2+y^2+z^2)dm=3A$$

$$2I_O=3A$$

$$A=B=C=\frac{2}{3}I_O$$

• **Plaque plane de plan $(\boldsymbol{O},\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})$ – $\boldsymbol{z=0}$**

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad \textit{Problèmes plans !}$$

Démonstration :

$$z=0$$

$$A=\int_S (y^2+z^2)dm=\int_S y^2 dm$$

$$B=\int_S (x^2+z^2)dm=\int_S x^2 dm$$

$$C=\int_S (x^2+y^2)dm=A+B$$

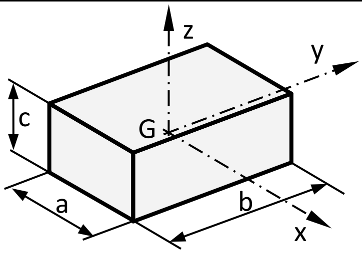
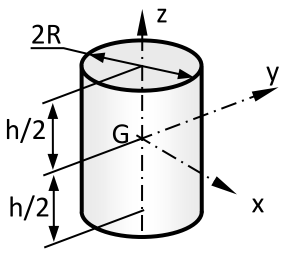
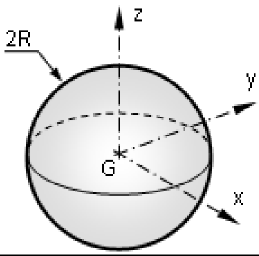
$$D=\int_S yzdm=0$$

$$E=\int_S xzdm=0$$

Remarque : en réalité, ceci est une approximation. Avec un $\varepsilon \ll 1$ et $\varepsilon' \ll 1$, on a :

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A+\varepsilon' & -F & \varepsilon \\ -F & B+\varepsilon' & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & A+B+2\varepsilon' \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

1.II.4.b.vi Matrices d'inertie de quelques solides

	$I(G,S)=\begin{bmatrix}\frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2)\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$
	$I(G,S)=\begin{bmatrix}m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0\\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0\\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2}\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$ *Matrice inchangée dans toute base contenant l'axe de révolution*
	$I(G,S)=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$

Remarque : Bien penser à exprimer les matrices d'inerties calculées sur les solides en fonction de leur masse.

1.II.4.b.vii Cas d'une masse ponctuelle

Soit une masse ponctuelle S_i de masse m_i placée en M_i telle que :

$$\overrightarrow{OM_i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(M_i, S_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

D'après le théorème de Huygens généralisé avec M_i centre d'inertie de la masse ponctuelle, on a :

$$I(O, S_i) = I(M_i, S_i) + m_i \begin{bmatrix} {y_i}^2 + {z_i}^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & {x_i}^2 + {z_i}^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & {x_i}^2 + {y_i}^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(O, S_i) = m_i \begin{bmatrix} {y_i}^2 + {z_i}^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & {x_i}^2 + {z_i}^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & {x_i}^2 + {y_i}^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Remarque : moment d'inertie I_Δ d'une masse ponctuelle autour d'un axe Δ, prenons $(O, \vec{z})$. Soit d la distance du point M à l'axe $(O, \vec{z})$:

$$d = \sqrt{{x_i}^2 + {y_i}^2}$$

$$I_\Delta = m_i \, d^2$$

1.II.4.b.viii Matrice d'inertie d'un ensemble de solides en un même point

• Principe

Soit un solide S composé de N solides S_i de centres de gravité G_i tels que $\overrightarrow{AG_i} = x_i\overrightarrow{x_S} + y_i\overrightarrow{y_S} + z_i\overrightarrow{z_S}$, de masse m_i et de matrice d'inertie autour de leur centre de gravité $I(G_i, S_i)$.

Pour déterminer la matrice d'inertie $I(A, S)$ de l'ensemble de ces solides en un point A, il faut :

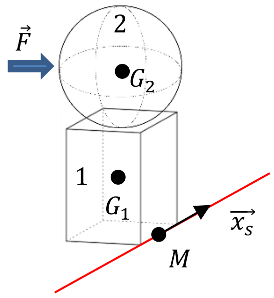
- Exprimer chaque matrice d'inertie $I(A, S_i)$ en ce point à l'aide du théorème de Huygens généralisé

- Sommer les différentes matrices au même point (linéarité de l'intégrale)

$$I(A,S) = \sum_{i=1}^{N} I(A,S_i) = \sum_{i=1}^{N} \left[I(G_i,S_i) + m_i \begin{bmatrix} {y_i}^2 + {z_i}^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & {x_i}^2 + {z_i}^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & {x_i}^2 + {y_i}^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \right]$$

• Exemple

Imaginons un solide composé d'un pavé droit et d'une sphère collée à celui-ci. On suppose que le matériau permet au pavé d'adhérer avec le sol sur lequel il est posé et on souhaite étudier son mouvement par rapport à l'axe autour duquel il va basculer, soumis à une force extérieure.



Si l'on souhaite exprimer la matrice d'inertie pour caractériser cette situation (on verra un peu plus loin dans ce cours qu'il n'est pas nécessaire de déterminer toute la matrice), on peut utiliser les matrices d'inertie du pavé $I(G_1, S_1)$ et de la sphère $I(G_2, S_2)$, connues en leurs centres de gravité respectifs. Il suffit alors de les déplacer avec Huygens généralisé connaissant la position de G_1 et G_2, puis de les sommer au point M.

$$I(M, S_1 + S_2) = I(M, S_1) + I(M, S_2) = I(G_1, S_1) + M_1[\ldots] + I(G_2, S_2) + M_2[\ldots]$$

1.II.4.b.ix Matrice d'inertie d'un solide creux

Traitons l'exemple d'un cylindre creux.

Pour trouver la matrice d'inertie d'un cylindre creux C de rayons intérieur r et extérieur R, il suffit d'additionner les matrices d'inertie d'un cylindre plein C_R de rayon extérieur avec sa masse M_R, et d'un cylindre plein C_r de rayon extérieur r avec sa masse M_r, mais prise négativement ☺. Appelons C_{R-r} le cylindre creux.

Chaque intégrale dans la matrice d'inertie s'écrit $\int_{...} f(x,y,z)dm$. On peut donc écrire :

$$\int_{C_{R-r}} f(x,y,z)dm = \int_{C_R} f(x,y,z)dm - \int_{C_r} f(x,y,z)dm$$

$$\int_{C_{R-r}} f(x,y,z)dm = \int_{C_R} f(x,y,z)dm + \int_{C_r} f(x,y,z)(-dm)$$

$\int_{C_R} f(x,y,z)dm$ est un terme de la matrice d'inertie du cylindre plein de masse locale dm, soit de masse totale M_R sur le volume de C_R.

$\int_{C_r} f(x,y,z)(-dm)$ est un terme de la matrice d'inertie du cylindre plein de masse locale $(-dm)$, soit de masse totale $-M_r$ sur le volume de C_r. Appelons C_{r-} le cylindre de masse négative.

Soit G le centre de gravité de C, C_R et C_r :

$$I(G, C_R) = \begin{bmatrix} M_R\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M_R\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & M_R\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \quad I(G, C_{r-}) = \begin{bmatrix} -M_r\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -M_r\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -M_r\frac{r^2}{2} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(G, C_{R-r}) = I(G, C_R) + I(G, C_{r-})$$

$$= \begin{bmatrix} M_R\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) - M_r\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M_R\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) - M_r\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & M_R\frac{R^2}{2} - M_r\frac{r^2}{2} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$= [\dots]$$

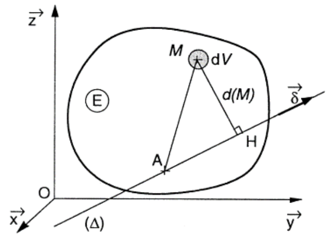
$$= \begin{bmatrix} M_t\left(\frac{h^2}{12}+\frac{R^2+r^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M_t\left(\frac{h^2}{12}+\frac{R^2+r^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & M_t\frac{R^2+r^2}{2} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Attention, chaque année, des élèves commettent des erreurs sur ce calcul. Pour le terme C par exemple, par calcul intégral, on trouve $C = M_t\frac{R^2+r^2}{2}$

- L'intuition nous pousse à croire que l'on devrait trouver $R^2 - r^2$ du fait des bornes de l'intégrale, mais en réalité quand on fait apparaître la masse du cylindre creux et que l'on remplace ρV, le – devient +
- De même, qu'en sommant les deux matrices de cylindre de masse positive et négative, ils on obtient $\frac{M_R R^2 - M_r r^2}{2}$. Il faut alors faire apparaître la masse totale pour avoir le $M\frac{R^2+r^2}{2}$…

1.II.4.c Opérations avec les matrices d'inertie

1.II.4.c.i *Moment d'inertie par rapport à un axe*



• **<u>En passant par la matrice définie en un point de l'axe</u>**

Soit l'axe Δ_A défini par le point A et le vecteur unitaire $\vec{\delta}$ ($\|\vec{\delta}\| = 1$). Le moment d'inertie $I_{\Delta_A}(S)$ du solide S par rapport à l'axe Δ_A est égal au produit scalaire du vecteur unitaire $\vec{\delta}$ et du vecteur $I(A,S)\vec{\delta}$

$$I_{\Delta_A}(S) = \vec{\delta}.I(A,S)\vec{\delta}$$

A sur l'axe ! ; $\boldsymbol{\vec{\delta}}$ et $\boldsymbol{I(A,S)}$ exprimés dans la même base

Démonstration :

$$I_{\Delta_A}(S) = \int_S \overrightarrow{HM}^2 dm$$

$$= \int_S (\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{HA}^2)dm = \int_S \left[\overrightarrow{AM}^2 - \left(\overrightarrow{AM}.\vec{\delta}\right)^2\right] dm$$

$$= \int_S [(\overrightarrow{AM}^2\vec{\delta}).\vec{\delta} - (\overrightarrow{AM}.\vec{\delta})(\overrightarrow{AM}.\vec{\delta})]dm = \vec{\delta}.\int_S \left[(\overrightarrow{AM}^2\vec{\delta}) - \left((\overrightarrow{AM}.\vec{\delta})\overrightarrow{AM}\right)\right] dm$$

$$= \vec{\delta}.\int_S \overrightarrow{AM}\wedge(\vec{\delta}\wedge\overrightarrow{AM})dm = \vec{\delta}.I(A,S)\vec{\delta}$$

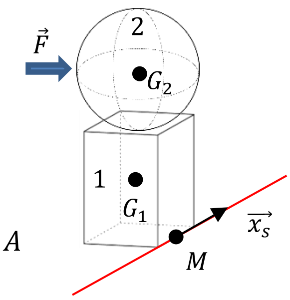
$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$$

Remarque : Dans le cas particulier de rotations autour de l'un des 3 axes $(A,\vec{x_s})$, $(A,\vec{y_s})$ ou $(A,\vec{z_s})$, il suffira de récupérer dans la matrice le bon terme A, B ou C plutôt que d'appliquer la formule générale $\vec{\delta}.I(A,S)\vec{\delta}$.

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Exemple : Reprenons l'exemple vu plus haut et supposons que nous avons obtenu la matrice $I(M,S)$ à l'aide de Huygens généralisé.

$$I(M,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$



On trouve alors l'inertie autour de l'axe de rotation $(M,\vec{x_s})$:

$$I_{\Delta_M}(S) = \vec{x_s}.I(M,S)\vec{x_s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} . \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} . \begin{bmatrix} A \\ -F \\ -E \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} = A$$

L'équation du mouvement sera alors : $\overrightarrow{M_M(\vec{F})} = A\ddot{\theta}$

• **En passant par la matrice définie au centre de gravité G**

On cherche $I_{\Delta_A}(S)$ et on connaît $I(G,S)$. Soit $\vec{\delta}$ un vecteur directeur unitaire de Δ_A.

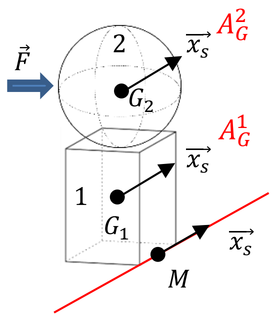
Dans ce cas, il est **inutile de déplacer toute la matrice d'inertie de G à A** avec le théorème de Hyugens généralisé pour appliquer le calcul précédent avec $I_{\Delta_A}(S) = \vec{\delta}.I(A,S)\vec{\delta}$.

On définit Δ_G la droite parallèle à Δ_A passant par G. On trouve $I_{\Delta_G}(S)$ en appliquant la formule précédente : $\boldsymbol{I_{\Delta_G}(S) = \vec{\delta}.I(G,S)\vec{\delta}}$.

En connaissant la distance d entre Δ_G et Δ_A, on a alors :

$$\boldsymbol{I_{\Delta_A}(S) = I_{\Delta_G}(S) + md^2 = \vec{\delta}.I(G,S)\vec{\delta} + md^2}$$

Exemple : Reprenons une dernière fois l'exemple précédent. Cette fois-ci, si on ne souhaite que le moment d'inertie autour de l'axe $(M,\overrightarrow{x_S})$, il suffit de récupérer les moments d'inertie sur $\overrightarrow{x_S}$ de la sphère A_G^2 et du pavé A_G^1 en leurs centres de gravité puis d'appliquer deux théorèmes de Huygens connaissant les distances $d_1 = MG_1$ et $d_2 = MG_2$:



$$I_{(M,\overrightarrow{x_S})}(S) = I_{(M,\overrightarrow{x_S})}(S_1) + I_{(M,\overrightarrow{x_S})}(S_2)$$

$$= I_{(G_1,\overrightarrow{x_S})}(S_1) + m_1 {d^1}^2 + I_{(G_2,\overrightarrow{x_S})}(S_2) + m_2 {d^2}^2$$

$$= A_G^1 + m_1 {d^1}^2 + A_G^2 + m_2 {d^2}^2$$

Il est inutile de calculer toute la matrice en M dans ce cas.

1.II.4.c.ii Moment d'inertie autour d'un point

Soit A le point où est exprimée une matrice d'inertie $I(A,S)$.

$$I(A,S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$A+B+C=\int_S (y^2+z^2)dm+\int_S (x^2+z^2)dm+\int_S (x^2+y^2)dm=2\int_S (x^2+y^2+z^2)dm=2I_A$$

Soit :

$$I_A=\frac{A+B+C}{2}=\frac{1}{2}Tr\big(I(A,S)\big)$$

1.II.4.c.iii Changement de base d'une matrice d'inertie

Lorsque l'on utilise les matrices d'inerties pour un calcul, il est obligatoire que la matrice et le vecteur avec lequel elle est utilisée soient dans la même base. Il peut donc être nécessaire d'effectuer un changement de base, soit de la matrice, soit du vecteur. Voici comment changer la base d'expression de la matrice d'inertie.

Soit P la matrice de passage de la base B_1 vers la base B_2, elle présente en colonnes les composantes des vecteurs de la base B_2 exprimés dans la base B_1. Alors :

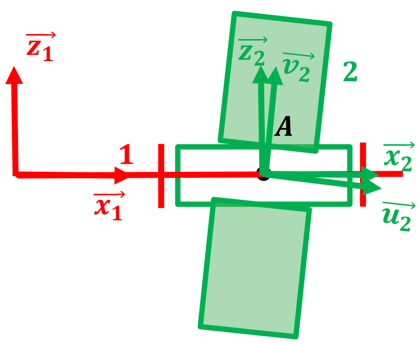
$$I(O,S)_{B_2}=P^{-1}I(O,S)_{B_1}P$$

Les bases B_1 et B_2 étant orthonormées directes, P est orthogonale, son déterminant est égal à ± 1.

On a donc :

$$P^{-1}=P^T$$

Exemple d'application : Soit une roue 2 de forme cylindrique désaxée d'un angle constant $\left|\left(\widehat{\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{u_2}}\right)\right| = \left|\left(\widehat{\overrightarrow{z_2},\overrightarrow{v_2}}\right)\right| = \alpha$, en rotation autour de la pièce 1 selon l'axe $\overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{x_2}$ telle que $\left(\widehat{\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{z_1},\overrightarrow{z_2}}\right)=\theta_{21}$



Pour appliquer le PFD et trouver les actions de liaison engendrées par le désaxage α , il sera nécessaire d'exprimer $I(A,2)$ dans $\mathfrak{B}_1$ et d'utiliser donc, le produit des matrices de rotation de l'angle α et de l'angle θ_{21}.

1.III. Cinétique - Dynamique

Soit G le centre de gravité de l'ensemble de solides E ou du solide S de masse M et R_0 un repère.

1.III.1 Préliminaires

1.III.1.a Dérivée sous le signe somme

Nous allons utiliser des outils mathématiques relatifs à la dérivée sous le signe somme.

Dans le cas de systèmes matériels E à masse conservative, c'est-à-dire que leur masse m est indépendante

- du repère dans lequel on observe leur mouvement
- du temps t auquel on observe leur mouvement

On montre en mathématiques que si f est une fonction vectorielle qui à tout point M de E et à tout instant t associe le vecteur $\vec{f}(M,t)$, alors :

$$\frac{d}{dt}\int_E \vec{f}(M,t)\,dm = \int_E \frac{d}{dt}\vec{f}(M,t)\,dm$$

On admettra cette relation dans la suite pour le calcul des résultantes cinétique et dynamique.

1.III.1.b Vitesse et accélération du centre de gravité d'un ensemble de solides

Lorsque l'on parle d'un ensemble de solides E de centre de gravité G, on ne peut plus calculer simplement $\vec{V}(G,E/R_0)$ et $\vec{\Gamma}(G,E/R_0)$. En effet, l'ensemble E possède des pièces en mouvement les unes par rapport aux autres et ces expressions ne peuvent pas être développées. Dans ce cas, on doit passer par l'expression :

$$\vec{V}(G,E/R_0) = \vec{V}(G/R_0) \quad ; \quad \vec{\Gamma}(G,E/R_0) = \left.\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right)_0$$

Avec :

$$\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(G/S_i) + \vec{V}(G,S_i/R_0)$$

Ou toute autre composition du mouvement nécessaire…

1.III.2 Torseur cinétique

1.III.2.a Définition

Soit E un ensemble matériel, c'est-à-dire un ensemble de N solides, en mouvement possible les uns par rapport aux autres, de centre de gravité G et de masse M.

$$\{C(E/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c}(E/R_0) = \int_E \vec{V}(M,E/R_0)dm \\ \vec{\sigma}(A,E/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,E/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$\int_S \vec{V}(M,E/R_0)dm$ s'appelle la résultante cinétique $\overrightarrow{R_c}(E/R_0)$ de E dans son mouvement par rapport à R_0.

$\vec{\sigma}(A,E/R_0)$ s'appelle le moment cinétique en A de E dans son mouvement par rapport à R_0.

Le moment cinétique est un champ de moment du torseur cinétique, soit :

$$\vec{\sigma}(A,E/R_0) = \vec{\sigma}(B,E/R_0) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_c}(E/R_0)$$

1.III.2.b Résultante cinétique

Soit O un point fixe dans R_0.

$$\overrightarrow{R_c}(E/R_0) = \int_S \vec{V}(M,E/R_0)dm = \int_S \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_0} dm = \frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{OM}dm\Bigg)_{R_0} = \frac{d}{dt} M\overrightarrow{OG}\Bigg)_{R_0} = M\vec{V}(G,E/R_0)$$

1.III.2.c Moment cinétique

1.III.2.c.i Cas d'un solide

- **Calcul**

Soit le point A lié à S.

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)dm$$

$$\vec{V}(M,S/R_0) = \vec{V}(A,S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R_0) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(A,S/R_0) + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R_0)dm = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(A,S/R_0)dm + \boldsymbol{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM} dm}$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = \int_S \overrightarrow{AM}dm \wedge \vec{V}(A,S/R_0) + \boldsymbol{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{AM} dm}$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = M\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R_0) + \boldsymbol{I(A,S)}\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0) + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A,S/R_0)$$

• **Récapitulatif**

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c}(E/R_0) = M\vec{V}(G,S/R_0) \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0) + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

• **Remarque importante**

Le produit $I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$ ne peut être réalisé que si $I(A,S)$ et $\vec{\Omega}(S/R_0)$ sont exprimés dans la même base !

• **Cas particulier**

- $A = G$: $\vec{\sigma}(G,S/R_0) = I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$
- A fixe dans R_0 : $\vec{\sigma}(A,S/R_0) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$

• **En pratique**

On se sert souvent de la formule de Varignon afin de calculer simplement le moment cinétique en G puis de le déplacer en un point A plutôt que de calculer moment cinétique en un point A :

$$\vec{\sigma}(A,S/R_0) = \vec{\sigma}(G,S/R_0) + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(G,S/R_0)$$

Car $\vec{\sigma}(G,S/R_0)$ est facile à calculer :

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0) = I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Cela dépend aussi du point où est exprimée la matrice d'inertie : comparer le calcul du déplacement matriciel avec Huygens généralisé au changement de point avec Varignon

1.III.2.c.ii Cas d'un ensemble matériel

Le torseur cinétique d'un ensemble E de N solides S_i est obtenu en calculant le torseur cinétique de chaque solide puis en faisant la somme au même point:

$$\{\mathcal{C}(E/R_0)\} = \sum_{i=1}^{N}\{\mathcal{C}(S_i/R_0)\}$$

1.III.2.c.iii Cas d'une masse ponctuelle en G

$$I(G,S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0) = I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{0}$$

Il suffit alors de changer de point :

$$\vec{\sigma}(O,S/R_0) = \vec{\sigma}(G,S/R_0) + \overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{R_c}(S/R_0) = M\overrightarrow{OG}\wedge\vec{V}(G,S/R_0)$$

1.III.3 Torseur dynamique

1.III.3.a Définition

Soit E un ensemble matériel de centre de gravité G et de masse M.

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(E/R_0) = \int_E \vec{\Gamma}(M,E/R_0)dm \\ \vec{\delta}(A,E/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M,E/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$\int_S \vec{\Gamma}(M,E/R_0)dm$ s'appelle la résultante dynamique $\overrightarrow{R_d}(E/0)$ de E dans son mouvement par rapport à R_0.

$\vec{\delta}(A,E/R_0)$ s'appelle le moment dynamique en A de E dans son mouvement par rapport à R_0.

Le moment dynamique est un champ de moment du torseur dynamique, soit :

$$\vec{\delta}(A,E/R_0) = \vec{\delta}(B,E/R_0) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_d}(E/R_0)$$

1.III.3.b Résultante dynamique

Soit O un point fixe dans R_0.

$$\overrightarrow{R_d}(E/R_0) = \int_S \vec{\Gamma}(M,E/R_0)dm = \int_S \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{R_0} dm = \left.\frac{d^2}{dt^2}\int_S \overrightarrow{OM}dm\right)_{R_0} = M\left.\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OG}\right)_{R_0}$$
$$= M\vec{\Gamma}(G,E/R_0)$$

1.III.3.c Moment dynamique

1.III.3.c.i *Cas d'un solide*

La démonstration qui suit est valable que ce soit pour un solide ou pour un ensemble matériel.

• **Calcul**

Exprimons la dérivée du moment cinétique :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\left(\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)dm\right)}{dt}\right)_{R_0} = \int_S \left.\frac{\left(d\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\right)}{dt}\right)_{R_0} dm$$

$$= \int_S \left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R_0} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\, dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} dm$$

Première intégrale :

$$\int_S \left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{R_0} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\,dm = \int_S \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right)}{dt}\right)_{R_0} \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\,dm$$

O fixe dans R_0

$$= \int_S \left(\vec{V}(M,S/R_0) - \vec{V}(A,S/R_0)\right) \wedge \vec{V}(M,S/R_0)\,dm$$

$$= \int_S -\vec{V}(A,S/R_0)\wedge\vec{V}(M,S/R_0)\,dm = -\vec{V}(A,S/R_0)\wedge\int_S \vec{V}(M,S/R_0)\,dm$$

$$= -M\vec{V}(A,S/R_0)\wedge\vec{V}(G,S/R_0)$$

Seconde intégrale :

$$\int_S \overrightarrow{AM}\wedge\left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M,S/R_0)\,dm = \vec{\delta}(A,S/R_0)$$

Soit :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} = -M\vec{V}(A,S/R_0)\wedge\vec{V}(G,S/R_0) + \vec{\delta}(A,S/R_0)$$

Soit

$$\vec{\delta}(A,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} + M\vec{V}(A,S/R_0)\wedge\vec{V}(G,S/R_0)$$

• **Récapitulatif**

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \begin{Bmatrix} M\vec{\Gamma}(G,S/R_0) \\ \vec{\delta}(A,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} + M\vec{V}(A,S/R_0)\wedge\vec{V}(G,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

• **Cas particuliers**

- $A = G$: $\vec{\delta}(G,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}$
- A fixe dans R_0 : $\vec{\delta}(A,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}$

• **En pratique**

On se sert souvent de la formule de Varignon afin de calculer simplement le moment cinétique puis dynamique en G puis de le déplacer en un point A plutôt que de calculer moment cinétique et dynamique en un point A :

$$\vec{\delta}(A,S/R_0)=\vec{\delta}(G,S/R_0)+M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{\Gamma}(G,S/R_0)$$

Car $\vec{\sigma}(G,S/R_0)$ est facile à calculer :

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0)=I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Et $\vec{\delta}(G,S/R_0)$ est facile à calculer :

$$\vec{\delta}(G,S/R_0)=\left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}$$

Cela dépend aussi du point où est exprimée la matrice d'inertie : comparer le calcul du déplacement matriciel avec Huygens généralisé au changement de point avec Varignon

1.III.3.c.ii Cas d'un ensemble matériel

Bien que le calcul précédent soit valable pour un solide et pour un ensemble matériel, le torseur dynamique d'un ensemble E de N solides S_i est obtenu généralement en calculant le torseur dynamique de chaque solide puis en faisant la somme au même point :

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\}=\sum_{i=1}^{N}\{\mathcal{D}(S_i/R_0)\}$$

1.III.3.c.iii Cas d'une masse ponctuelle en G

$$I(G,S)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$$\vec{\sigma}(G,S/R_0)=I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)=\vec{0}$$
$$\vec{\delta}(O,S/R_0)=\left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}=\vec{0}$$

Il suffit alors de changer de point :

$$\vec{\delta}(O,S/R_0)=\vec{\delta}(G,S/R_0)+\overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{R_d}(S/R_0)=M\overrightarrow{OG}\wedge\vec{\Gamma}(G,S/R_0)$$

1.III.3.c.iv *Cas d'une rotation autour d'un axe fixe*

Soit un solide en rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{z})$ et $I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_B$.

$$\vec{\sigma}(O,S/R_0) = I(O,S)\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} -E\dot{\theta} \\ -D\dot{\theta} \\ C\dot{\theta} \end{bmatrix}^B$$

$$\vec{\delta}(O,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(O,S/R_0)}{dt}\right)_0 = \begin{bmatrix} -E\ddot{\theta} \\ -D\ddot{\theta} \\ C\ddot{\theta} \end{bmatrix}^B$$

On a donc très facilement le moment dynamique autour de l'axe concerné $(O,\vec{z})$:

$$\boxed{\vec{\delta}(O,S/R_0).\vec{z} = C\ddot{\theta}}$$

Dans le cas d'un problème plans de normale $\vec{z}$ (souvent rencontré dans les sujets de concours qui simplifient les études), on a $D = E = 0$, comme vu dans pour les plaques planes :

$$I(O,S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_B$$

On a alors directement :

$$\vec{\delta}(O,S/R_0) = C\ddot{\theta}\vec{z}$$

Résultat à retenir pour application immédiate !

1.IV. Principe fondamental de la dynamique

1.IV.1 Référentiel Galiléen

un référentiel galiléen, ou inertiel, est un référentiel dans lequel un objet isolé (sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est en mouvement de translation rectiligne uniforme.

Tour référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen est Galiléen.

Le référentiel lié à la Terre, est généralement considéré comme Galiléen dans les expériences de laboratoire.

1.IV.2 Principe fondamental de la dynamique

1.IV.2.a Enoncé

Il existe au moins un espace/temps appelé Galiléen R_g, tel que pour tout ensemble matériel E, le torseur dynamique de E dans cet espace/temps est constamment égal au torseur des efforts extérieurs appliqués à E :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \rightarrow E)\}$$

Le référentiel terrestre est en général considéré comme Galiléen.

1.IV.2.b Théorèmes généraux de la dynamique

1.IV.2.b.i Cas général

Le principe fondamental de la dynamique s'exprime de façon vectorielle par le théorème de la résultante dynamique et le théorème du moment dynamique :

$$M\vec{\Gamma}(G, E/R_g) = \vec{R}_{\overline{E}\rightarrow E} \quad ; \quad \vec{\delta}(A, E/R_g) = \overrightarrow{M_{A}}_{\overline{E}\rightarrow E}$$

On obtient alors un système de 6 équations, 3 en résultante et 3 en moment.

Le principe fondamental de la statique est un dérivé du principe fondamental de la dynamique. De la même manière que le PFS, le PFD permet de déterminer les actions dans les liaisons, mais cette fois ci en tenant compte de la dynamique des pièces en mouvement.

La résolution complète d'un mécanisme en dynamique (actions de liaisons) se mène donc exactement de la même façon que la résolution statique des mécanismes en isolant des ensembles bien choisis.

1.IV.2.b.ii *Cas particuliers d'un solide indéformable en :*

• **Mouvement de translation dans une direction fixe**

Dans le cas d'un mouvement de translation d'accélération a sous l'action F dans une direction fixe, on peut directement appliquer le théorème de la résultante dynamique en projection sur cette direction :

$$ma = F$$

• **Mouvement de rotation autour d'un axe de direction fixe**

Dans le cas d'un mouvement de rotation d'accélération angulaire $\Omega = \ddot{\theta}$ sous le couple C autour d'un axe fixe, connaissant le moment d'inertie J du solide en rotation autour de cet axe, on peut directement appliquer le théorème du moment dynamique en projection sur cette direction :

$$J\ddot{\theta} = C$$

Dans ce cas, le moment dynamique en un point de l'axe de rotation vaut : $J\ddot{\theta}$

1.IV.2.c Remarques

1.IV.2.c.i *Masses et inerties négligées*

Négliger les masses ⇒

- Résultantes cinétique et dynamique nulles ⇒ Torseurs cinétiques et dynamique identiques $\forall P$
- Les formules simplifiées de σ et δ s'appliquent
- Matrices d'inerties constantes (si elles ont une raison d'exister…). En effet, le théorème de Huygens donne : $I(A,S) = I(G,S) + 0 * K = I(G,S)$

Négliger les inerties $\Rightarrow I(G,S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$

Négliger masses & inertie en A ⇒ torseurs cinétique et dynamique nuls partout

1.IV.2.c.ii *Relations issues du PFD*

L'application du principe fondamental de la dynamique permet d'obtenir deux types de relations :

- Détermination des actions de liaisons à travail nul
- Détermination des **équations différentielles du mouvement** reliant actions à travail non nul (participant à la mobilité), accélérations, masses et inerties. Il y a autant d'équations différentielles du mouvement que de mobilités.

On trouve donc l'ensemble des actions mécaniques du mécanisme, les lois d'accélération des pièces et la relation en effort entrée/sortie.

1.IV.2.c.iii Mouvement imposé

En dynamique, les pièces sont en mouvement. Il arrive que l'on impose une vitesse de rotation constante dans une liaison par exemple. Attention, dans ce cas, il est toujours nécessaire d'associer à ce mouvement imposé une action inconnue.

On introduit souvent l'effet d'inertie en prenant l'exemple d'une personne assise sur une chaise. On lance la chaise en rotation, puis on demande à la personne assise d'écarter les bras puis de les ramener. La vitesse n'étant pas imposée, elle évolue, diminuant quand les bras sont écartés, et augmentant quand les bras sont ramenés au centre.

Dans le cas exposé ci-dessus, comme la vitesse n'est pas imposée, elle n'est pas constante et s'adapte au solide en rotation. Mais si on souhaitait imposer une vitesse constante lors de cette même expérience, il serait obligatoire d'injecter de l'énergie au système lorsque les bras s'écartent afin que la vitesse ne diminue pas, et de la récupérer (freiner le mouvement) lorsque les bras reviennent au centre. Il faudrait donc considérer un couple extérieur C associé à cette condition de vitesse constante.

Dans le cas d'une vitesse imposée nulle, on pourra même transformer la liaison concernée en bloquant le degré de liberté concerné.

1.IV.2.c.iv PFD en projection sur un axe

Il ne faut pas systématiquement écrire les 6 équations par isolement. Il faut savoir déterminer l'équation utile au problème étudié, par exemple lors de l'application d'un TMD sur un axe :

$$\sum \overrightarrow{M_{A,F_{\bar{S}\to S}}}.\vec{u} = \vec{\delta}(A,S/R_0).\vec{u}$$

Dans le cas du calcul d'une projection d'un moment dynamique, il est intéressant d'utiliser :

$$\vec{\delta}(A,S/R_0).\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{u} + \left(M\vec{V}(A,S/R_0)\wedge\vec{V}(G,S/R_0)\right).\vec{u}$$

On peut alors calculer relativement simplement le premier terme :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0).\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} - \vec{\sigma}(A,S/R_0).\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0}$$

Pour retenir cette formule : $(uv)' = uv' + u'v$; $u = \vec{\sigma}(G,S/R_0)$; $v = \vec{u}$

On appliquera généralement cette formule en un point G ou A fixe, ce qui conduit à :

$$\boxed{\vec{\delta}(G,S/R_0).\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0).\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} - \vec{\sigma}(G,S/R_0).\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0}}$$

En G ou A fixe uniquement !!!

Et si de plus l'axe est fixe : $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$, soit $\vec{\delta}(G,S/R_0).\vec{u} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0).\vec{u}}{dt}\right)_{R_0}$

1.IV.2.c.v Mouvement de rotation autour du centre de gravité

Soit un astéroïde soumis à aucune action extérieure. Son centre de gravité est donc en translation rectiligne et uniforme. Si l'astéroïde tourne sur lui-même, et si on « le suit » à la même vitesse que son CDG, on aura l'impression qu'il tourne autour de celui-ci.

Si une action extérieure s'applique, dont la droite d'action ne passe pas par le CDG :

- Le TRD nous donnera l'équation du mouvement de son CDG
- Le TMD nous donnera l'accélération angulaire issue du moment non nul créé par la force appliquée. Dans un référentiel non tournant qui suit le CDG, on aura l'impression que l'action qui s'applique sur lui le fait tourner autour de son CDG.

Pour rappel : un mouvement de rotation est indépendant de tout point d'expression du torseur cinématique associé. Le centre de rotation associé n'a de sens que vis-à-vis d'un référentiel donné, car on cherche le point M tel que $\vec{V}(M,j/i) = \vec{0}$.

1.IV.3 Théorème des actions réciproques

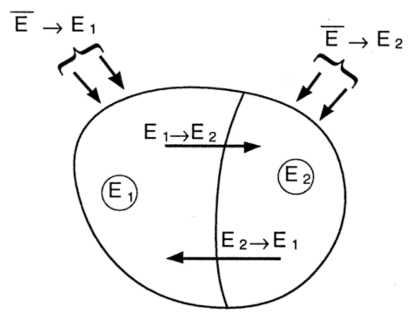
Soit un système matériel E constitué de deux sous-systèmes E_1 et E_2 tels que $E = E_1 U E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Appliquons le PFD à E, E_1 et E_2 :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_2)\}$$

$$\{\mathcal{D}(E_1/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E_1} \to E_1)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\}$$

$$\{\mathcal{D}(E_2/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E_2} \to E_2)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\}$$



Or :

$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{D}(E_1/R_g)\} + \{\mathcal{D}(E_2/R_g)\}$$

$$\{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_2)\} = \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} + \{\mathcal{T}(\overline{E} \to E_2)\} + \{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\}$$

On en déduit :

$$\{\mathcal{T}(E_2 \to E_1)\} = -\{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\}$$

C'est le théorème des actions réciproques. Si un système matériel E_1 exerce sur un autre système E_2 un torseur d'efforts $\{\mathcal{T}(E_1 \to E_2)\}$, E_2 exerce sur E_1 un torseur d'efforts opposé.

1.V. Energie – Puissance

1.V.1 Rappel

Le comoment de deux torseurs s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1} \end{Bmatrix}_P \odot \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2} \end{Bmatrix}_P = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1}$$

C'est une sorte de produit scalaire en croix.
Pour être calculé, les deux torseurs doivent être exprimés au même point.

1.V.2 Energie cinétique

1.V.2.a Définition

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_E \vec{V}^2(M,S/R_0)\,dm$$

L'énergie cinétique est un scalaire.

1.V.2.b Cas d'un solide

• **Calcul**

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_E \vec{V}^2(M,S/R_0)\,dm$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}(G,S/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\right)^2 dm$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}^2(G,S/R_0)\,dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\right)^2 dm + \int_S \vec{V}(G,S/R_0).\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\,dm$$

$$\begin{aligned} T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\int_S \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}.\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\,dm \\ + \vec{V}(G,S/R_0).\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\int_S \overrightarrow{GM}\,dm\right) \end{aligned}$$

$$\int_S \overrightarrow{GM}\,dm = 0$$

$$(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w} = \vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}.\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\right) = (\vec{v}\wedge\vec{w}).\vec{u} = \overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\right).\vec{\Omega}(S/R_0)$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\int_S \overrightarrow{GM}\wedge\vec{\Omega}(S/R_0)\wedge\overrightarrow{GM}\,dm$$

- **Récapitulatif**

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\sigma}(G,S/R_0)$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} M\vec{V}(G,S/R_0) \\ \vec{\sigma}(G,S/R_0) \end{Bmatrix}_G \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(G,S/R_0) \end{Bmatrix}_G = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R_0}\}\odot\{\mathcal{V}_{S/R_0}\}$$

Rappel : un comoment est un invariant indépendant du point d'expression des deux torseurs, on pourra donc le calculer en d'autres points et obtenir le même résultat :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} M\vec{V}(G,S/R_0) \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$
$$= \frac{1}{2}M\vec{V}(G,S/R_0).\vec{V}(A,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\sigma}(A,S/R_0)$$

1.V.2.c Cas d'un ensemble matériel

L'énergie cinétique d'un ensemble E de N solides S_i est obtenue en calculant l'énergie cinétique de chaque solide puis en faisant la somme : $T(E/R_0) = \sum_{i=1}^{N} T(S_i/R_0)$

1.V.2.d Cas particuliers

1.V.2.d.i Masses et inerties négligées

Négliger les masses ⇒

- Energies cinétiques de translation nulles
- Matrices d'inerties constantes (si elles ont une raison d'exister…). En effet, le théorème de Huygens donne : $I(A,S) = I(G,S) + 0 * K = I(G,S)$

Négliger les inerties en $A \Rightarrow I(A,S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$

Négliger masses & inertie en A ⇒ énergie cinétique nulle en A

1.V.2.d.ii Rotation autour d'un point A fixe dans R_0

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R_0}\}\odot\{\mathcal{V}_{S/R_0}\} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} M\vec{V}(G,S/R_0) \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}(G,S/R_0)\cancel{\vec{V}(A,S/R_0)} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right] = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\sigma}(A,S/R_0)}$$

1.V.2.d.iii Mouvements plans dans $(O,\vec{x},\vec{y})$

• **Mouvement de translation**

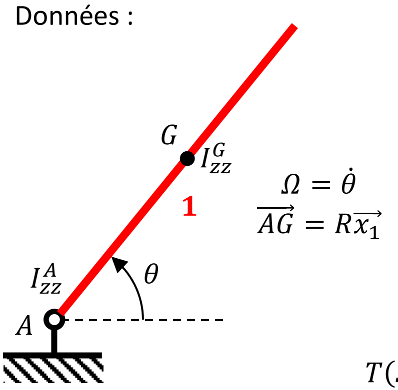
Dans le cas d'un solide S en translation à la vitesse V, on a :

$$\vec{\Omega}(S/R_0)=\vec{0} \quad \Longrightarrow \quad T(S/R_0)=\frac{1}{2}MV^2$$

• **Mouvement de rotation**

Dans le cas d'un solide S en rotation autour d'un axe fixe $(A,\vec{z})$ dans R_0 tel que $AG=R$

Données :



$$\vec{\Omega}(S/R_0)=\Omega\vec{z}$$

$I_{(G,\vec{z})}=I_{zz}^G$ le moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(G,\vec{z})$

$I_{(A,\vec{z})}=I_{zz}^A$ le moment d'inertie de S par rapport à l'axe de rotation $(A,\vec{z})$

M masse de 1 de centre de gravité G

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}MR^2\Omega^2+\frac{1}{2}I_{zz}^G\Omega^2=\frac{1}{2}\Omega^2 I_{zz}^A$$

Preuve :

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]=\frac{1}{2}MR^2\Omega^2+\frac{1}{2}\Omega^2\vec{z}.\left[I(G,S)\vec{z}\right]$$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}MR^2\Omega^2+\frac{1}{2}I_{zz}^G\Omega^2=\frac{1}{2}\left(I_{zz}^G+MR^2\right)\Omega^2$$

D'après le théorème de Huygens uniquement, on a :

$$I_{zz}^A=I_{zz}^G+M(x^2+y^2)=I_{zz}^G+MR^2$$

$$\Rightarrow T(S/R_0)=\frac{1}{2}I_{zz}^A\Omega^2$$

On peut aussi directement utiliser la formule en A : $T(S/R_0)=\frac{1}{2}\Omega^2\vec{z}.\left[I(A,S)\vec{z}\right]=\frac{1}{2}I_{zz}^A\Omega^2$

Remarque :

Dans le cas d'une masse ponctuelle en G en rotation, on a : $I_{zz}^G=0; I_{zz}^A=MR^2$

$$T(S/R_0)=\frac{1}{2}MR^2\Omega^2 \quad ; \quad \textit{Masse ponctuelle}$$

• **Mouvement de translation et de rotation**

Il suffit d'ajouter les deux termes précédents en décomposant le mouvement en une translation, et une rotation. On ajoute donc les énergies des mouvements indépendants.

1.V.3 Puissances

1.V.3.a Torseur s'exerçant sur un ou plusieurs solides indéformables

1.V.3.a.i Cas d'un solide

• **Formule**

La puissance dans le référentiel R_0 développée par un torseur $\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}$ s'exerçant sur un solide S en mouvement par rapport à R_0 s'écrit :

$$P(\bar{S} \to S/R_0) = \{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\} \odot \{\mathcal{V}(S/R_0)\}$$

La puissance est le comoment des torseurs d'effort et cinématique effectué en un point quelconque A :

$$P(\bar{S} \to S/R_0) = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{S}\to S} \\ \overrightarrow{M_A(\vec{R}_{\bar{S}\to S})} \end{Bmatrix}_A \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_0) \\ \vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A = \vec{R}_{\bar{S}\to S}.\vec{V}(A,S/R_0) + \overrightarrow{M_A(\vec{R}_{\bar{S}\to S})}.\vec{\Omega}(S/R_0)$$

On reconnaît des termes connus : FV et $C\omega$

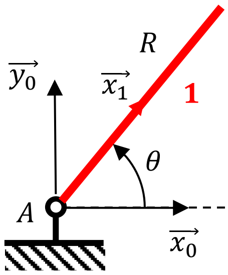
Remarques :

- Ne pas être étonné par ceci : lors de la présence d'une dissipation visqueuse avec, par exemple, couple de frottement visqueux $C_{f_v} = -k\dot{\theta}$, il est normal de trouver une puissance de dissipation du type : $P = C_{f_v}\dot{\theta} = -k\dot{\theta}^2$
- En présence d'une liaison parfaite entre un solide S et le bâti R_0 (Galiléen) sans autre action (moteur, frein…), alors (cf. exemple page suivante) : $P(0 \to S/R_0) = 0$, qui sera égal à la puissance d'inter effort $P(0,1)$ que nous aborderons dans un prochain paragraphe
- Le résultat d'un comoment est indépendant du point
- Le comoment de deux torseurs doit être calculé avec les torseurs exprimés au même point
- La puissance dépend du repère dans lequel elle est calculée

• **<u>Exemples</u>**

Dans tous les exemples, 0 est référentiel galiléen.

Exemple 1 : Puissance d'une liaison parfaite avec le bâti 0

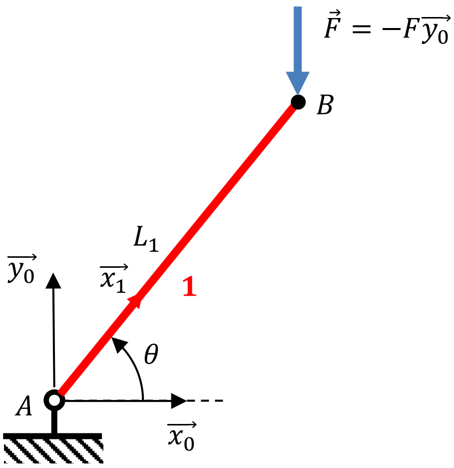


$$P(0\rightarrow S/0)=\{\mathcal{T}_{0\rightarrow 1}\}\odot\{\mathcal{V}(1/0)\}$$
$$=\begin{Bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ R_{10} & 0\end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}\odot\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01}\\ Y_{01} & M_{01}\\ Z_{01} & 0\end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}=0$$

Remarque : quand nous aurons vu les puissances d'inter-efforts, on aura : $P(0,1)=\{\mathcal{T}_{0\rightarrow 1}\}\odot\{\mathcal{V}(1/0)\}=\{\mathcal{T}_{1\rightarrow 0}\}\odot\{\mathcal{V}(0/1)\}$. . Si la liaison est parfaite, on retrouve bien $P(0,1)=0$

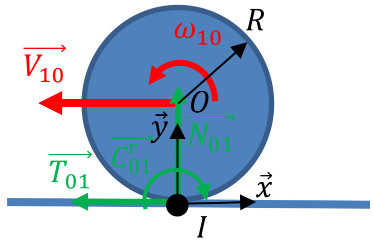
Si la liaison était imparfaite, on aurait : $P(0\rightarrow 1/0)=\begin{Bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ R_{10} & 0\end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}\odot\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01}\\ Y_{01} & M_{01}\\ Z_{01} & C_{01}^f\end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}=C_{01}^f R_{10}<0$

Exemple 2 : Puissance d'une force sur un solide en rotation



$$P(F\rightarrow 1/0)=\begin{Bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ R_{10} & 0\end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}\odot\begin{Bmatrix} 0 & 0\\ -F & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}}$$
$$=\begin{Bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\\ R_{10} & 0\end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}\odot\begin{Bmatrix} 0 & 0\\ -F & 0\\ 0 & -FL_1\cos\theta\end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$
$$=\begin{Bmatrix} 0 & -L_1R_{10}\sin\theta\\ 0 & L_1R_{10}\cos\theta\\ R_{10} & 0\end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}}\odot\begin{Bmatrix} 0 & 0\\ -F & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}}$$
$$=-FR_{10}L_1\cos\theta$$

Exemple 3 : Cas d'un contact avec roulement sans glissement



Attention, ceci est un cas où vous commettez souvent des erreurs. Soit une roue qui roule sans glisser, soumise à un couple moteur $C_m\vec{z}$ négatif sur son axe. On a : $\vec{V} = -R\omega\vec{x}$

Quand on demande la puissance au contact, vous donnez souvent trop rapidement $P = T_{01}V_{10}$…

Il faut réaliser le comoment au même point… Au point de contact, on a $\vec{V}(I,1/0) = \vec{0}$, soit $P = 0$.

D'une manière générale, il faut écrire :

$$P(0,1) = P(0 \to 1/0) = \{\mathcal{T}_{0\to 1}\} \odot \{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{Bmatrix} T_{01} & 0 \\ N_{01} & 0 \\ 0 & C_{01}^r \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}} \odot \begin{Bmatrix} 0 & V_{10}^g \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}} = T_{01}V_{10}^g + C_{01}^r\omega_{10}$$

Avec :

- C_{01}^r le couple de résistance au roulement
- V_{10}^g la vitesse de glissement au contact

Alors :

- Hypothèse de roulement sans glissement : $V_{10}^g = 0$ (et $|T_{01}| \leq f|N_{01}|$)
- Hypothèse de non-résistance au roulement : $C_{01}^r = 0$

Alors : $P_{0\to 1} = 0$

1.V.3.a.ii Cas de plusieurs solides

Pour déterminer la puissance des actions extérieures sur un ensemble E de N solides S_i, il suffit de sommer les puissances de chaque action extérieure sur l'ensemble de solides isolés :

$$P(\bar{E} \rightarrow E/R_0) = \sum_{i=1}^{N} P(\bar{S} \rightarrow S_i/R_0)$$

1.V.3.b Inter-efforts

1.V.3.b.i Entre deux solides

La puissance développée par les efforts de liaison entre deux solides S_i et S_j ou « puissance des inter-efforts entre S_i et S_j » s'écrit :

$$P(S_i, S_j) = P(S_j, S_i) = \left\{\mathcal{T}_{S_i \rightarrow S_j}\right\} \odot \{\mathcal{V}(S_j/ S_i)\}$$

La puissance des inter-efforts est le comoment des torseurs statique et cinématique du mouvement relatif de S_i et S_j en un point A quelconque :

$$P(S_i, S_j) = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow S_j}} \\ \overrightarrow{M_A\left(\overrightarrow{R_{S_i \rightarrow S_j}}\right)} \end{matrix}\right\}_A \odot \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S_j/ S_i) \\ \vec{V}(A, S_j/ S_i) \end{matrix}\right\}_A = \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow S_j}}.\vec{V}(A, S_j/ S_i) + \overrightarrow{M_A\left(\overrightarrow{R_{S_i \rightarrow S_j}}\right)}.\vec{\Omega}(S_j/ S_i)$$

Remarques :

- Sans mouvement relatif, pas de puissance intérieure !
- $P(S_j, S_i) = P(S_i, S_j) \leq 0$ dans les liaisons – Actions et mouvements sont opposés et créent des pertes
- $P(S_j, S_i) \geq 0$ dans le cas d'une liaison motorisée (moteur, vérin par exemple)
- Attention au jeu d'indices i et j
- La référence à un référentiel R_0 disparaît.
- La liaison entre deux solides est énergétiquement parfaite si $P(S_i, S_j) = 0$.

Exemples :

Pivot intérieure parfaite	Pivot avec frottement C_f de signe opposé à P_{10}
$P(1,0) = \begin{Bmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} \odot \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_0^{\mathfrak{B}} = 0$	$P(1,0) = \begin{Bmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}} \odot \begin{Bmatrix} X_{01} & C_{01}^f \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_0^{\mathfrak{B}} = P_{10}C_{01}^f$

1.V.3.b.ii Entre N solides

Soit un ensemble matériel composé de N solides. La puissance des inter-efforts entre les N solides est définie par :

$$P_i(E) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} P(S_i, S_j)$$

Démonstration : Pour chaque solide, la puissance développée par les N-1 autres solides est :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{N} P(S_j \to S_i/R_g)$$

Pour les N solides, on a donc :

$$P_i(E) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} P(S_j \to S_i/R_g)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} P(S_j \to S_i/R_g) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N-1} P(S_j \to S_i/R_g)$$

Or :

$$P(S_j \to S_i/R_g) = \{\mathcal{T}_{S_j \to S_i}\} \odot \{\mathcal{V}(S_i/R_g)\}$$

$$P(S_i \to S_j/R_g) = \{\mathcal{T}_{S_i \to S_j}\} \odot \{\mathcal{V}(S_j/R_g)\}$$

$$P(S_j \to S_i/R_g) + P(S_i \to S_j/R_g) = \{\mathcal{T}_{S_j \to S_i}\} \odot \{\mathcal{V}(S_i/R_g)\} + \{\mathcal{T}_{S_i \to S_j}\} \odot \{\mathcal{V}(S_j/R_g)\}$$

$$= \{\mathcal{T}_{S_i \to S_j}\} \odot \{\mathcal{V}(S_j/S_i)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} P(S_i, S_j)$$

1.V.3.c « Puissances réciproques » entre 2 solides

1.V.3.c.i Formule

Le terme de « puissances réciproques » n'est pas officiel. Il existe une relation entre la puissance Galiléenne des actions réciproques entre deux solides :

$$P(S_i, S_j) = P(S_j \to S_i/R_0) + P(S_i \to S_j/R_0)$$

Démonstration :

$$P(S_j \to S_i/R_0) = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_j \to S_i} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_j \to S_i}\right)} \end{Bmatrix}_A \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_i/R_0) \\ \vec{V}(A, S_i/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

Or :

$$\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_i/R_0) \\ \vec{V}(A, S_i/R_0) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_i/S_j) \\ \vec{V}(A, S_i/S_j) \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_j/R_0) \\ \vec{V}(A, S_j/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow P(S_j \to S_i/R_0) = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_j \to S_i} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_j \to S_i}\right)} \end{Bmatrix}_A \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_i/S_j) \\ \vec{V}(A, S_i/S_j) \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_j \to S_i} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_j \to S_i}\right)} \end{Bmatrix}_A \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_j/R_0) \\ \vec{V}(A, S_j/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

Et :

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_j \to S_i} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_j \to S_i}\right)} \end{Bmatrix}_A = -\begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_i \to S_j} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_i \to S_j}\right)} \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow P(S_j \to S_i/R_0) = P(S_i, S_j) - \begin{Bmatrix} \vec{R}_{S_i \to S_j} \\ \overrightarrow{M_A\left(\vec{R}_{S_i \to S_j}\right)} \end{Bmatrix}_A \odot \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_j/R_0) \\ \vec{V}(A, S_j/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

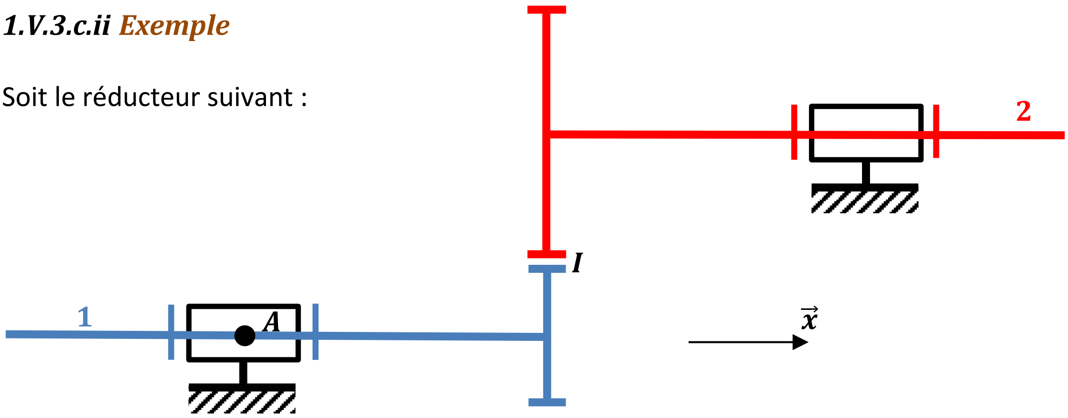
$$\Rightarrow P(S_j \to S_i/R_0) = P(S_i, S_j) - P(S_i \to S_j/R_0)$$

$$P(S_i, S_j) = P(S_j \to S_i/R_0) + P(S_i \to S_j/R_0)$$

Remarque : Si la liaison entre S_i et S_j est parfaite sans moteur, alors $P(S_i, S_j) = 0$, soit $P(S_j \to S_i/R_0) = -P(S_i \to S_j/R_0)$. Si de la puissance transite dans la liaison, alors ceci n'est pas nul ! L'isolement de S_i ou S_j doit tenir compte de cette puissance.

1.V.3.c.ii Exemple

Soit le réducteur suivant :



• Liaison transmettant de la puissance

On suppose la liaison entre les pièces 1 et 2 parfaite, ce qui veut dire : $P(1,2) = 0$. Prenons par exemple le cas d'un contact ponctuel, et dans une base locale $\mathfrak{B}_k$ contenant la normale au contact, on aurait :

$$P(1,2) = \{\mathcal{T}_{1\to 2}\}\{\mathcal{V}_{21}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}_k} \begin{Bmatrix} P_{12} & U_{12} \\ Q_{12} & 0 \\ R_{10} & W_{12} \end{Bmatrix}_I^{\mathfrak{B}_k} = 0$$

Isolons maintenant 2, cette pièce peut recevoir de la puissance de la pièce 1 par la liaison entre 1 et 2 (même si celle-ci est parfaite et ne dissipe pas de puissance) :

$$P(1 \to 2/0) = -P(2 \to 1/0)$$

Autrement dit, si la pièce 1 fournie 100W à la pièce 2 ($P(1 \to 2/0) = 100$), sans frottements, la pièce 2 reçois (prend) 100W de la pièce 1 ($P(2 \to 1/0) = -100$).

S'il y a des frottements, par exemple dissipant 10W, alors si 1 fournie la puissance (100W), 2 reçoit 90W : $P(1,2) = 10 = 100 - 90$.

• Liaisons ne transmettant pas de puissance

On s'intéresse maintenant à la liaison entre une pièce mobile (1) et le bâti (0), supposée parfaite :

$$P(0,1) = 0 = P(0 \to 1/0) + P(1 \to 0/0)$$

$$P(0,1) = \{\mathcal{T}_{0\to 1}\}\{\mathcal{V}_{10}\} \quad ; \quad P(0 \to 1/0) = \{\mathcal{T}_{0\to 1}\}\{\mathcal{V}_{10}\} = \{\mathcal{T}_{1\to 0}\}\{\mathcal{V}_{01}\}$$

On a donc dans ce cas : $P(0 \to 1/0) = P(1 \to 0/0) = P(0,1) = 0$

On peut donc se permettre de dire que si une liaison parfaite est réalisée entre une pièce mobile et le bâti, la puissance extérieure Galiléenne de 0 sur 1 est égale à la puissance $P(0,1)$, qui est donc nulle, sans besoin de poser le calcul suivant :

$$P(0 \to 1/0) = \{\mathcal{T}_{0\to 1}\}\{\mathcal{V}_{10}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}} \begin{Bmatrix} P_{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}}$$

1.V.4 Théorème de l'énergie cinétique

1.V.4.a Enoncé

Le théorème de l'énergie cinétique (TEC) s'exprime pour un solide ou un ensemble de solides dans son mouvement par rapport à un référentiel Galiléen R_g. On précise donc toujours le système isolé.

Ce théorème est aussi appelé Théorème de **l'énergie puissance**.

1.V.4.a.i Cas d'un solide

A chaque instant, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique Galiléenne du solide S est égale à la puissance galiléenne développée par les efforts extérieurs s'exerçant sur S.

$$\frac{dT(S/R_g)}{dt} = P_{ext}$$

$$P_{ext} = P(\bar{S} \to S/R_g)$$

Cette relation produit une équation différentielle qui n'est pas indépendante de celles obtenues à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

Démonstration :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \to S)\}$$

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} \odot \{\mathcal{V}(S/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{S} \to S)\} \odot \{\mathcal{V}(S/R_g)\} = P(\bar{S} \to S/R_g)$$

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\} \odot \{\mathcal{V}(S/R_g)\} = M\vec{\Gamma}(G,S/R_g).\vec{V}(A,S/R_g) + \vec{\delta}(A,S/R_g).\vec{\Omega}(S/R_g)$$

$$= \int_S \vec{\Gamma}(M,S/R_g)dm\,.\vec{V}(A,S/R_g)dm + \left[\int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M,S/R_g)dm\right].\vec{\Omega}(S/R_g)$$

$$= \int_S \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_g)}{dt}\right)_{R_g}.\left[\vec{V}(M,S/R_g) + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R_g)\right]dm + \left[\int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M,S/R_g)dm\right].\vec{\Omega}(S/R_g)$$

$$= \int_S \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_g)}{dt}\right)_{R_g}.\vec{V}(M,S/R_g)dm + \int_S \vec{\Gamma}(M,S/R_g).\left[\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R_g)\right]dm + \left[\int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M,S/R_g)dm\right].\vec{\Omega}(S/R_g)$$

Or :

$$\int_S \vec{\Gamma}(M,S/R_g).\left[\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R_g)\right]dm - \left[\int_E \vec{\Gamma}(M,S/R_g) \wedge \overrightarrow{AM}dm\right].\vec{\Omega}(S/R_g) = 0$$

Car

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$$

Soit :

$$\{\mathcal{D}(S/R_g)\}.\{\mathcal{V}(S/R_g)\} = \int_S \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R_g)}{dt}\right)_{R_g}.\vec{V}(M,S/R_g)dm$$

$$= \int_S \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\vec{V}^2(M,S/R_g)\right]dm$$

$$= \frac{d}{dt}\int_S \left[\frac{1}{2}\vec{V}^2(M,S/R_g)\right]dm$$

$$= \frac{dT(S/R_g)}{dt}$$

Finalement :

$$\frac{dT(S/R_g)}{dt} = P(\bar{S} \to S/R_g)$$

1.V.4.a.ii Cas d'un ensemble de solides US_i

A chaque instant, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique Galiléenne d'un ensemble de solides US_i est égale à la puissance galiléenne développée par les efforts extérieurs s'exerçant sur US_i augmentée de la puissance des inter-efforts développés dans les liaisons.

$$\frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$$P_{ext} = P(\overline{US_i} \to US_i/R_g)$$

$$P_{int} = P_i(US_i)$$

Démonstration :

Soit un ensemble matériel composé de N solides. Appliquons le TEC à chacun des N solides :

$$\frac{dT(S_i/R_g)}{dt} = P(\bar{S_i} \to S_i/R_g) = P(\bar{E} \to S_i/R_g) + \sum_{j=1,j\neq i}^{N} P(S_j \to S_i/R_g)$$

Pour les N solides, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{dT(S_i/R_g)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} P(\bar{E} \to S_i/R_g) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} P(S_j \to S_i/R_g)$$

$$\frac{dT(E/R_g)}{dt} = P(\bar{E} \to E/R_g) + P_i(E)$$

Remarques :

- Cette formule s'applique dans le cas d'un seul solide car $P_{int} = 0$
- Les liaisons non motorisées dissipent de l'énergie par les frottements

$$P_{int}^{liaisons} \leq 0 \ ; \ P_{ext}^{liaisons} \leq 0$$

- J'introduis personnellement la puissance $\boldsymbol{P_{diss}^{liaisons}}$ (dissipée), qui selon l'isolement est :
    - Lorsque l'on isole uniquement les pièces en mouvement : la somme
        - Des puissances dissipées dans les liaisons intérieures du mécanisme $P_{int}^{liaisons}$
        - Des puissances dissipées dans les liaisons extérieures au mécanisme $P_{ext}^{liaisons}$

$$P_{diss}^{liaisons} = P_{int}^{liaisons} + P_{ext}^{liaisons}$$

    - Lorsque l'on isole les pièces en mouvement ET le bâti :
        - Les seules puissances dissipées à l'intérieur de l'isolement :

$$P_{diss}^{liaisons} = P_{int}^{liaisons}$$

- Il peut enfin y avoir des puissances intérieures positives entre deux pièces (vérin, moteur…) voire négatives quand ces systèmes fonctionnent en récupération d'énergie

Attention : Lorsque les liaisons sont parfaites, on a $P_{diss}^{liaisons} = 0$. On peut lire dans des cours que si les liaisons sont parfaites, $P_{int} = 0$. J'y vois deux inconvénients :

- Il peut y avoir des puissances intérieures autres de celles des liaisons, positives comme négatives (moteurs, vérins en particulier)
- Cela fait souvent oublier les puissances des liaisons parfaites extérieures à l'isolement

1.V.4.a.iii Forme intégrée

L'intégration des relations précédentes entre les instants t_1 et t_2 donne la variation d'énergie cinétique Galiléenne de S entre les instants t_1 et t_2:

$$T_2(US_i/R_g) - T_1(US_i/R_g) = W_{1,2}(\overline{US_i} \rightarrow US_i/R_g) + Wi_{1,2}(US_i)$$

$W_{1,2}(\overline{US_i} \rightarrow US_i/R_g)$ est le travail Galiléen des efforts extérieurs à E entre t_1 et t_2.

$Wi_{1,2}(US_i)$ est le travail des efforts intérieurs à E entre t_1 et t_2.

Cette forme intégrée du théorème permet de comparer des états d'un système à deux instants.

1.V.4.b Relations obtenues

L'application du TEC ne permet d'obtenir que les équations différentielles du mouvement issues de l'application du PFD. On met donc en relation actions à travail non nul (participant à la mobilité), accélérations, masses et inerties.

Autrement dit, il permet d'obtenir l'équation reliant les actions mécaniques entrée/sortie qui serait obtenue avec les mêmes isolements que la stratégie d'isolement en statique, mais en une seule fois ☺. En supposant un régime stationnaire, on aurait exactement cette relation. En régime quelconque, on obtient en plus, l'effet des masses, inerties et accélérations.

Il y en a autant que de mobilités dans le mécanisme.

On peut donc :

- Mettre en relation actions extérieures participant à la mobilité (travaillant), accélérations, masses et inerties. On parle de relation entrée/sortie en effort
- Déterminer une action de liaison dans le mécanisme participant à la transmission de la puissance (travaillant)

Par rapport au PFD, les actions mécaniques qui ne travaillent pas ne pourront être déterminées.

1.V.4.c Inerties et masses équivalentes

Afin de simplifier les problèmes traités avec le théorème de l'énergie cinétique, on demande souvent avant de l'appliquer de déterminer une inertie équivalente ou une masse équivalente d'un ensemble de solides en mouvement.

L'utilisation d'une inertie équivalente ou d'une masse équivalente permet d'étudier la loi de mouvement de l'une des pièces du mécanisme en tenant compte de l'intégralité de ses pièces. En général, cette pièce étudiée est la pièce dont on veut la loi de mouvement. Sinon, il suffit d'utiliser les relations cinématiques pour avoir celle d'autres pièces.

Cela consiste à exprimer l'énergie cinétique d'un ensemble de pièces en mouvement de la forme :

$$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2}J_{eq}\omega^2 \quad ou \quad T(US_i/R_0) = \frac{1}{2}M_{eq}V^2$$

ω ou V étant une des inconnues cinématiques du système.

Illustration : Imaginez un TGV roulant à vive allure. Il est tout à coup mis en lévitation. Vous le freinez en appliquant une force de freinage parallèle à la vitesse. Lorsqu'il est à vitesse nulle, on a dissipé une certaine énergie. Il reste encore les roues à arrêter, elles ont gardé leur énergie !!! Ainsi, lors du freinage d'un TGV roulant, il faudra freiner en même temps la masse de l'ensemble et l'inertie des roues en rotation… Il devient intéressant d'exprimer une masse équivalente de l'ensemble du TGV et des roues tournantes afin de simplifier le problème. Tout se passera comme si la masse réelle du TGV était plus importante.

Application : Avec $V = R\omega$, M_{tot} la masse totale du train, roues incluses, et en ne s'intéressant qu'à l'influence de l'inertie des n roues sur la masse équivalente à freiner :

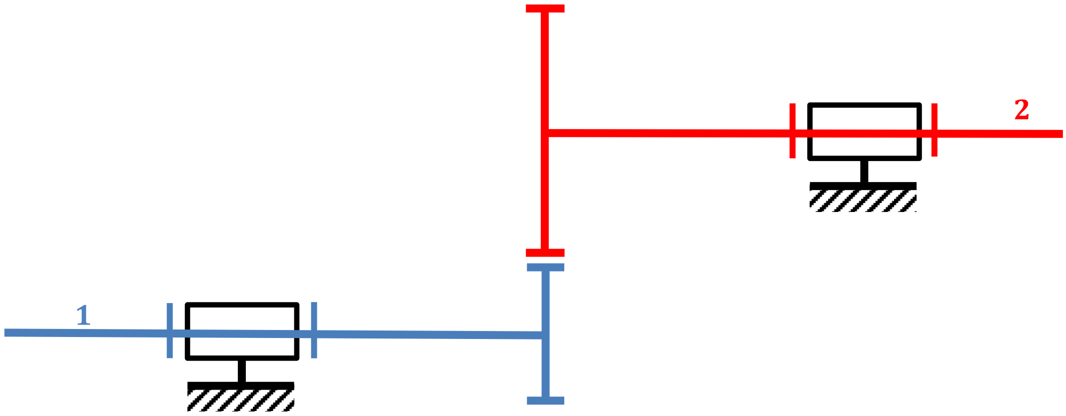
$$E_c = \frac{1}{2}M_{tot}V^2 + n\frac{1}{2}J_{roue}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(M_{tot} + n\frac{J_{roue}}{R^2}\right)V^2 = \frac{1}{2}M_{eq}V^2$$

$$M_{eq} = M_{tot} + n\frac{J_{roue}}{R^2}$$

AN : A venir

Exemple 1 :

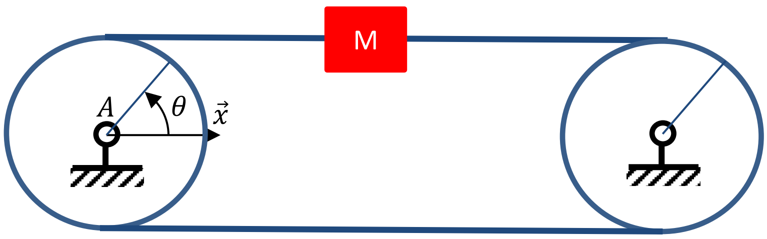
On souhaite déterminer la loi d'accélération de l'arbre d'entrée d'un réducteur en tenant compte des masses et inerties de toutes les pièces à accélérer et des actions extérieures :



Pour déterminer la loi de mouvement de l'un des arbres, on détermine l'inertie équivalente de l'ensemble ramenée à l'arbre étudié puis on détermine sa loi de mouvement en appliquant le TEC. On peut alors en plus obtenir la loi de mouvement de l'autre arbre avec le rapport de réduction.

Exemple 2 :

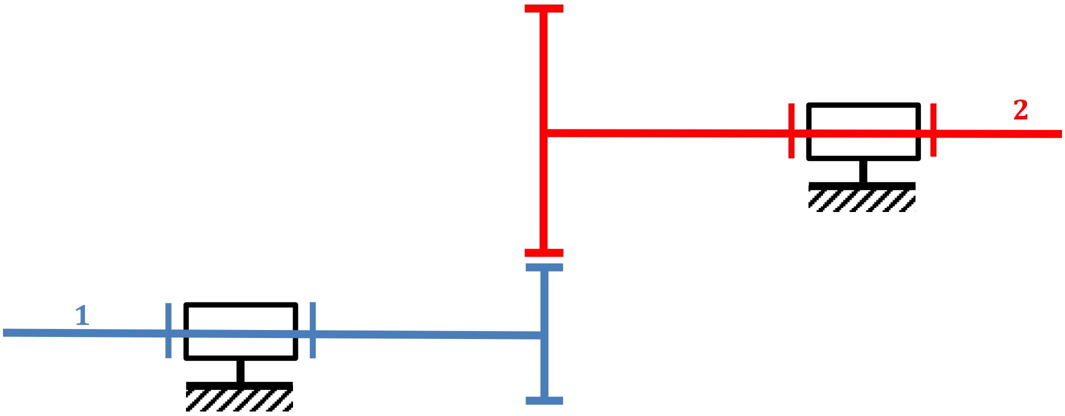
On souhaite déterminer la loi d'accélération de la masse entraînée par une courroie en tenant compte de sa masse M et des inerties des deux roues à accélérer et des actions extérieures :



Pour déterminer la loi de mouvement de la masse, on détermine la masse équivalente de l'ensemble puis on détermine sa loi de mouvement en appliquant le TEC. On peut alors en plus obtenir la loi de mouvement des poulies avec la relation $V = R\dot{\theta}$.

Dans ce problème : on néglige masse et inertie de la courroie et on suppose qu'elle ne l'allonge pas sous l'effet des actions mécaniques qui s'exercent dedans.

1.V.4.c.i Inertie équivalente



Prenons l'exemple d'un réducteur composé de deux arbres 1 et 2 en liaison pivot avec le bâti de rapport de réduction $k = \frac{\omega_2}{\omega_1}$

On peut exprimer deux inerties équivalentes pour ce problème :

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq}{}^1 \omega_1{}^2$$

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq}{}^2 \omega_2{}^2$$

$J_{eq}{}^1$ sera appelée « Inertie équivalente ramenée à l'arbre 1 »

$J_{eq}{}^2$ sera appelée « Inertie équivalente ramenée à l'arbre 2 »

Dans l'exemple proposé, on aura :

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2} J_1 \omega_1{}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2{}^2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1{}^2 + \frac{1}{2} J_2 k^2 \omega_1{}^2 = \frac{1}{2} (J_1 + J_2 k^2) \omega_1{}^2$$

$$J_{eq}{}^1 = J_1 + J_2 k^2$$

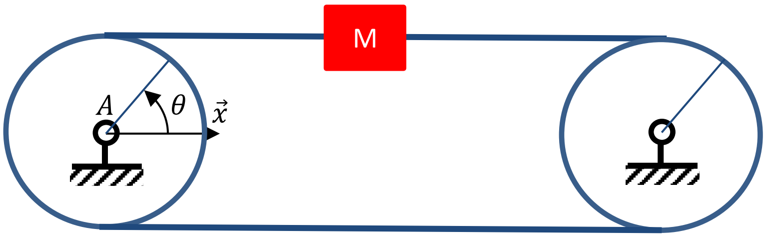
Ou alors :

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2} J_1 \omega_1{}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2{}^2 = \frac{1}{2} \frac{J_1}{k^2} \omega_2{}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2{}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} J_1 + J_2 \right) \omega_2{}^2$$

$$J_{eq}{}^2 = \frac{J_1}{k^2} + J_2$$

1.V.4.c.ii Masse équivalente

Soit le système suivant composé d'une masse M (solide 3) en translation à la vitesse V et de deux poulies 1 et 2 d'inerties J autour de leurs axes de rotation de vitesse de rotation ω :



On a la relation :

$$V = R\omega$$

On néglige le poids de la courroie. L'énergie cinétique de l'ensemble des pièces en mouvement vaut :

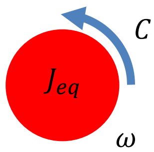
$$T(1U2U3/R_0) = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}MV^2 = J\omega^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

On peut soit déterminer une inertie équivalente ramenée à un arbre d'une des poulies

$$T(1U2U3/R_0) = \frac{1}{2}J_{eq}\omega^2 = \frac{1}{2}(2J)\omega^2 + \frac{1}{2}(MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(2J + MR^2)\omega^2$$

$$J_{eq} = 2J + MR^2$$

Finalement, étudier le mouvement de l'ensemble des pièces revient à étudier ce simple solide en rotation :



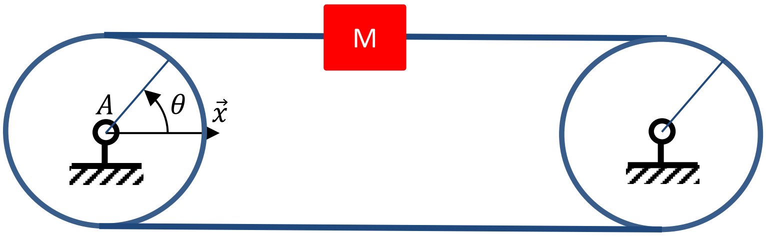
Le TEC nous donnera :

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}J_{eq}\omega^2\right)}{dt} = C\omega \Leftrightarrow J_{eq}\dot{\omega}\omega = C\omega \Leftrightarrow J_{eq}\dot{\omega} = C \; si \; \omega \neq 0 \Leftrightarrow \dot{\omega} = \frac{C}{J_{eq}}$$

On peut alors remonter à l'accélération :

$$a = \dot{V} = R\frac{C}{J_{eq}}$$

Remarque : si $\omega = 0$, le PFD nous dit : $C = J_{eq}\dot{\omega}$

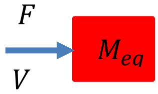


On peut aussi exprimer la masse équivalente du système :

$$T(1U2U3/R_0) = \frac{1}{2}M_{eq}V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2J}{R^2}\right)V^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2J}{R^2} + M\right)V^2$$

$$M_{eq} = \frac{2J}{R^2} + M$$

Ainsi, on peut connaître la loi de mouvement de la masse en intégrant l'inertie des deux roues avec le modèle simplifié :



Où F est soit une action directement appliquée à la masse M du modèle initial, soit $F = \frac{C}{R}$ si un couple est appliqué à l'une des poulies.

Le TEC nous donnera :

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}M_{eq}V^2\right)}{dt} = FV \Leftrightarrow M_{eq}\dot{V}V = FV \Leftrightarrow M_{eq}\dot{V} = F \; si \; V \neq 0 \Leftrightarrow \dot{V} = \frac{F}{M_{eq}}$$

On peut alors remonter à l'accélération angulaire :

$$\dot{\omega} = \frac{1}{R}\frac{F}{M_{eq}}$$

1.V.4.d Applications usuelles du TEC

1.V.4.d.i *Deux types d'applications*

Le TEC nous donne une équation différentielle liant actions entrée/sortie, inerties et accélérations. Cette équation est généralement utilisée de deux manières différentes selon le contexte :

- Recherche de la relation entrée sortie en effort pour un régime stationnaire, souvent à vitesse nulle
- Recherche de la loi d'accélération des pièces d'un mécanisme en régime non stationnaire

1.V.4.d.ii *Relation entrée/sortie en efforts/couples en régime stationnaire*

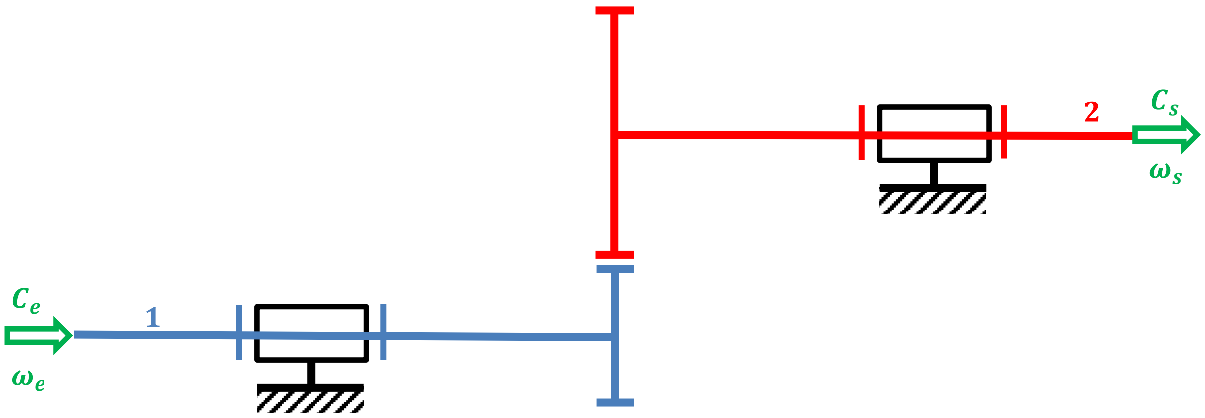
Connaissant la relation cinématique entre une entrée et une sortie d'un mécanisme à une mobilité, l'application du théorème de l'énergie cinétique permet d'obtenir immédiatement la relation en effort entre l'entrée et la sortie.

Attention toutefois à certaines précisions et hypothèses nécessaires afin d'obtenir le bon résultat :

- Système isolé ?
- Référentiel Galiléen ?
- Liaisons parfaites ?
- Régime stationnaire ?

• **Présentation du problème**

Soit un réducteur dont le rapport de réduction vaut k : $k = \frac{\omega_s}{\omega_e}\ (algébrique)$



On fait les hypothèses suivantes :

- On appelle J_1 et J_2 les moments d'inertie des solides S_1 et S_2 autour de leurs axes de rotation.
- C_e couple extérieur sur l'arbre d'entrée (la flèche dessinée n'a pas d'importance…)
- C_s couple extérieur sur l'arbre de sortie (la flèche dessinée n'a pas d'importance…)
- Le référentiel est supposé Galiléen.
- On suppose les deux pivots parfaites

On veut déterminer la relation entre C_s et C_e.

• **Inertie équivalente**

On isole l'ensemble des pièces suivantes : Arbre 1 – Arbre 2 – Bâti (pour que $P_{int} = P_{diss}^{liaisons}$)

Comme on l'a vu dans l'exemple traité plus tôt, dans le cas étudié, on a :

$$T(1U2/R_0) = T(1/R_0) + T(2/R_0) = \frac{1}{2}J_1{\omega_e}^2 + \frac{1}{2}J_2{\omega_s}^2 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2k^2){\omega_e}^2$$

$${J_{eq}}^e = J_1 + J_2k^2$$

• **Puissance extérieure**

Le terme P_{ext}, d'après la définition donnée précédemment, vaut dans notre cas :

$$P_{ext} = C_s\omega_s + C_e\omega_e$$

Remarque : la puissance dissipée dans les deux pivots est une puissance extérieure. Comme elles sont supposées parfaites, la puissance associée est nulle : $P_{01} = P_{02} = 0$

• **Relation entrée/sortie**

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{dT(1U2/R_0)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$${J_{eq}}^e\omega_e\dot{\omega}_e = C_s\omega_s + C_e\omega_e + P_{int}$$

Cette relation met en jeu vitesses de rotation et couples. Attention, connaissant la loi entrée/sortie en cinématique, cette relation permet de mettre en rapport des couples/efforts d'entrée sortie. Il ne faut pas faire l'inverse, sauf cas particulier. La relation entrée sortie cinématique est imposée par les pièces non déformables, et ne peut changer. Cependant, couples et efforts évoluent avec les pertes et les accélérations. Dans le seul cas où le régime est stationnaire avec un rendement égal à 1, si l'on connait la relation entre efforts/couples d'entrée et sortie, on peut en déduire la loi cinématique.

Remarque : il est bien plus rapide de mener une étude cinématique qu'une étude statique d'un système. La résolution cinématique donnant la relation entrée sortie cinématique, il est alors simple d'obtenir la relation entrée/sortie en efforts/couples. Ne surtout pas faire les deux démarches, et à choisir, faire une résolution cinématique.

Nous obtenons donc une relation entre les couples d'entrée et de sortie.

Introduisons alors des hypothèses supplémentaires généralement vérifiées :

- Liaisons parfaites à l'intérieur du système isolé et pas d'actions particulières entre les pièces : $P_{int} = P_{diss}^{liaisons} = 0$
- Régime stationnaire : $\omega_e = cste \rightarrow \dot{\omega}_e = 0 \rightarrow \frac{dT(1U2/R_0)}{dt} = 0$

On obtient alors la relation suivante :

$$C_s\omega_s + C_e\omega_e = 0$$

$$C_s = -C_e\frac{\omega_e}{\omega_s} = -\frac{C_e}{k}$$

En termes de puissance :

Les choix suivants ont beaucoup d'importance pour les signes. On nomme

- « Puissance entrante $P_{entrante}$ la puissance fournie à l'arbre d'entrée par l'extérieur
- « Puissance de sortie $P_{sortante}$ la puissance que le système fournit en sortie à quelque chose d'extérieur
- C_e le couple extérieur sur l'arbre d'entrée
- C_s le couple extérieur sur l'arbre de sortie

On a alors :

$$C_e\omega_e = P_{entrante}$$

$$C_s\omega_s = -P_{sortante}$$

C_s couple extérieur sur 2 - P_{sortie} puissance sortante du réducteur

On a ainsi la relation :

$$P_{entrante} - P_{sortante} = 0$$

$$\boxed{P_{entrante} = P_{sortante}}$$

ATTENTION :

- **Cette relation n'est vraie que si : Référentiel Galiléen – Régime stationnaire – Liaisons parfaites**
- **On parle très souvent de puissance d'entrée et de puissance de sortie, notion que me dérange car le signe de la relation à obtenir dépend de que l'on entend par entrée et sortie. Par exemple, sortie veut dire en sortie de l'extérieur sur le système, ou qui sort ?**

• **Puissance intérieure – Rendement**

Dans le cas où les liaisons ne sont pas parfaites, et **uniquement en régime stationnaire (il dépend de la vitesse, et une partie de la puissance entrante est absorbée lors d'accélérations)**, on introduit la notion de rendement :

$$P_{entrante} - P_{sortante} + P_{diss}^{liaisons} = 0$$

$$P_{sortante} = P_{entrante} + P_{diss}^{liaisons}$$

$$\frac{P_{sortante}}{P_{entrante}} = 1 + \frac{P_{diss}^{liaisons}}{P_{entrante}} = \eta \leq 1 \quad ; \quad P_{diss}^{liaisons} \leq 0$$

Remarque : Connaissant le rendement η d'un système, on peut alors exprimer le terme de puissance dissipée $P_{diss}^{liaisons}$:

$$\boxed{P_{diss}^{liaisons} = -(1-\eta)P_{entrante}}$$

Il est courant d'oublier, à tort, le signe moins

Remarque : $P_{entrante} + P_{diss}^{liaisons} = \eta P_e$

On a alors :

$$\frac{-C_s\omega_s}{C_e\omega_e} = \eta$$

En reprenant l'équation du TEC précédente, on a :

$$J_{eq}{}^{e}\omega_e\dot{\omega}_e = C_s\omega_s + C_e\omega_e - (1-\eta)C_e\omega_e$$

$$J_{eq}{}^{e}\omega_e\dot{\omega}_e = C_s\omega_s + \eta C_e\omega_e$$

En régime stationnaire :

$$C_s\omega_s + \eta C_e\omega_e = 0$$

On a ainsi la relation :

$$C_s = -\eta C_e\frac{\omega_e}{\omega_s} = -\frac{\eta}{k}C_e$$

Le rendement d'un système peut être exprimé en fonction des différents rendements de la transmission de puissance. Prenons l'exemple d'un réducteur à n roues dentées en série composé de $m = n - 1$ engrenages de rendements respectifs η_i, on introduit le rendement global pour le système :

$$\eta = \frac{P_{sortante}}{P_{entrante}}$$

Supposons que les liaisons entre les arbres des roues dentées et le bâti sont parfaites.

On montre facilement la relation suivante :

$$\eta = \prod_{i=1}^{m} \eta_i$$

Démonstration :

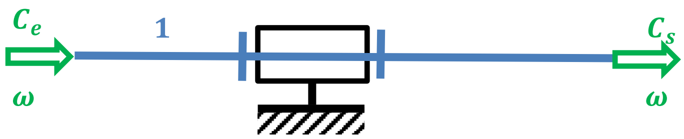
Soit C_i et Ω_i la vitesse de rotation et le couple transitant à travers la roue dentée i. Soit P_i la puissance transitant à travers la roue dentée i.

$$\eta = \frac{P_{sortante}}{P_{entrante}} = \frac{P_n}{P_1} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \dots \frac{P_2}{P_1} = \eta_{n-1}\eta_{n-2} \dots \eta_1 = \prod_{i=1}^{m} \eta_i$$

Rappel : Pas de η dans une équation différentielle du mouvement

• **<u>Cas particulier d'un seul arbre</u>**

Reprenons ce que nous venons de voir dans le cas d'un seul arbre en rotation libre auquel on applique un couple d'entrée C :



En isolant 0 et 1, on a :

$$J_{eq}{}^{e}\omega_e\dot{\omega}_e = (C_s + C_e)\omega + P_{int}$$

Supposons le cas où la vitesse est constante avec des pertes :

$$(C_s + C_e)\omega + P_{int} = 0$$

En sortie, du fait des pertes, le couple n'est pas identique à celui en entrée.

Supposons le cas où la vitesse est libre sans pertes :

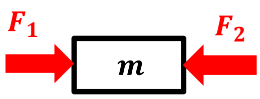
$$J_{eq}{}^{e}\omega_e\dot{\omega}_e = (C_s + C_e)\omega$$

En sortie, de la variation de vitesse, le couple n'est pas identique à celui en entrée.

OUI : $C_s \neq C_e$!!!! dans le cas général

$$C_s = C_e \Leftrightarrow \begin{cases} Régime\ permanent \\ Liaisons\ parfaites \end{cases}$$

Remarque : même chose en translation :



$$MV\dot{V} = (F_1 - F_2)V$$

$$Ma = F_1 - F_2$$

$$F_2 = F_1 - Ma$$

Oui, F_2 est plus faible !

Exemple : mettez un objet dans votre main, et faites aller votre main vers le bas assez vite pour décoller l'objet… Il t a bien une des deux forces qui diminue, et qui s'annule même…

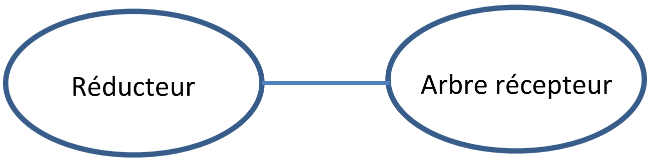
1.V.4.d.iii Détermination de lois d'accélération en régime non stationnaire

L'obtention des équations différentielles du mouvement permet d'obtenir les lois d'accélération de pièces connaissant la consigne en effort/couple en entrée. Prenons l'exemple d'un réducteur accouplé à un moteur et un récepteur dont l'arbre doit être accéléré « à vide », c'est-à-dire sans actions extérieures autres que celles de sa liaison avec le bâti et du réducteur. On sait que la consigne au niveau du moteur est un couple en échelon pendant un temps T et que la vitesse initiale des pièces est nulle.

La méthode la plus rapide si on ne souhaite obtenir que les équations différentielles du mouvement est l'utilisation du TEC.

• **Modélisation**

Généralement, on traite ce genre de problème en modélisant les différents éléments **en mouvement** par des bulles en précisant les caractéristiques importantes : rendement, puissances, vitesses, efforts/couples.

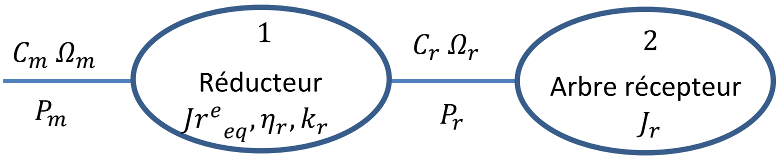


Remarques :

- On peut être tentés de mettre un bloc moteur, auquel cas il faudrait être attentif aux données associées : en entrée d'arbre moteur, considère-t-on un couple qui sera différent du couple en sortie d'arbre moteur du fait des accélérations et de son inertie, où bien des données de puissance électrique ? Lorsque l'on considère un échelon en couple moteur, entend-on un échelon sur la tension permettant d'obtenir une réponse du système, où bien un couple en sortie de l'arbre moteur… Pour simplifier la discussion, nous ne prendrons pas en compte le moteur et considérerons que **le couple moteur de type échelon est le couple qui entre dans le réducteur.**
- Le réducteur est modélisé par une seule bulle, mais il serait possible de représenter une bulle par arbre par exemple. On introduira directement son inertie équivalente ramenée soit à l'arbre d'entrée $Jr^e{}_{eq}$, soit à l'arbre de sortie $Jr^e{}_{eq}$ ainsi que son rendement η_r et son rapport de réduction k_r.
- Le récepteur est modélisé par un unique arbre. En réalité, s'il est plus complexe, on considèrera connaître l'inertie équivalente de l'ensemble du récepteur sur l'arbre de sortie du réducteur J_r.

Si l'énoncé d'un problème ne précise pas certaines grandeurs, il est recommandé d'introduire les paramètres manquants quitte à faire des hypothèses sur leurs valeurs à la fin. Nous supposerons que les liaisons entre les différents éléments sont parfaites, mis à part au niveau des engrenages du réducteur dont le rendement a été introduit.

On ajoute donc toutes les données nécessaires au traitement du problème :



Comme précisé précédemment, on ne prend pas en compte l'inertie moteur.

• **Résolution**

Il convient ensuite d'appliquer un Théorème de l'Energie Cinétique en précisant les hypothèses retenues et l'isolement effectué.

On isole l'ensemble des pièces : $\{1 - 2 - B\hat{a}ti\}$ dans un référentiel supposé Galiléen R_0.

On applique le TEC : $\frac{dT(1U2/R_0)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$

On met l'énergie cinétique de l'ensemble des pièces mobiles sous la forme suivante faisant apparaître une inertie équivalente ramenée à l'arbre d'entrée :

$$T(1U2/R_0) = \frac{1}{2}J_{eq}{}^e\omega_m{}^2 = \frac{1}{2}Jr^e{}_{eq}\omega_m{}^2 + \frac{1}{2}J_r\omega_r{}^2 = \frac{1}{2}\left(Jr^e{}_{eq} + k_r{}^2Jr\right)\omega_m{}^2$$

Attention, la notion de rendement n'a de sens qu'un régime stationnaire. Même si certains développeront le calcul en le prenant en compte, je ne considérerai pas de puissance dissipée…

$$P_{int} = P_{diss}^{liaisons} = 0$$

$$P_{ext} = C_m\omega_m$$

Soit :

$$J_{eq}{}^e\omega_m\dot{\omega}_m = C_m\omega_m$$

$$J_{eq}{}^e\omega_m\dot{\omega}_m = P_m - P_m + P_m$$

$$J_{eq}{}^e\omega_m\dot{\omega}_m = C_m\omega_m$$

Lorsque la vitesse est non nulle	Au démarrage :
$\omega_m \neq 0$ $J_{eq}{}^e\dot{\omega}_m = C_m$ $\dot{\omega}_m = \frac{C_m}{J_{eq}{}^e}$	$J_{eq}{}^e\omega_m\dot{\omega}_m = C_m\omega_m$ On ne peut rien dire de cette équation, mais… Le PFD nous dit que : $C_m = J_{eq}{}^e\dot{\omega}_m$ Il y a donc accélération… Ca va bouger !

Mettant un échelon en couple C_0 pendant un temps T :

$$\omega_m(t) = \frac{C_0}{J_{eq}{}^e} t + \omega_m(0)$$

$$\omega_m(T) = \frac{C_0}{J_{eq}{}^e} T$$

$$\omega_r(T) = k_r \frac{C_0}{J_{eq}{}^e} T$$

Ainsi, après un temps de T secondes et un couple moteur constant valant C_0, la vitesse de rotation du récepteur vaut $k_r \frac{C_0}{J_{eq}{}^e} T$.

1.VI. Choix du théorème à appliquer

1.VI.1 Critères de choix

Le théorème de l'énergie cinétique donne une équation issue du principe fondamental de la dynamique et présente l'avantage d'obtenir une relation quasi immédiate là ou l'application du PFD serait plus lourde (6 équations par isolement et résolution). Toutefois, cette relation ne peut être qu'une équation différentielle du mouvement sur une équation de mobilité reliant accélérations et actions entrée/sortie. La prise en compte des rendements lorsqu'ils sont connus est aisé avec ce théorème là où le PFD nécessiterait la modélisation fine des interactions surfaciques entre solides.

Le choix de la méthode dépend donc de ce que l'on cherche. Si on souhaite obtenir des actions de liaisons (dans des cas où les pertes sont négligées), il faut appliquer le PFD. Si on souhaite obtenir une équation différentielle du mouvement d'un problème à une mobilité liant accélérations et actions extérieures associées à la transmission de puissance, présentant ou non des pertes avec un rendement connu, l'application du TEC est à privilégier. Le PFD appliqué sur la bonne équation (ex : moment suivant $\vec{z}$) permet d'obtenir la même relation que celle du TEC.

Remarque : lorsque l'on isole seulement une partie d'un mécanisme, le TEC peut permettre de déterminer des actions de liaisons. Ce sont alors les actions associées à la mobilité, à la transmission de la puissance entre deux pièces mobiles (Ex : action au contact ponctuel entre deux roues dentées).

1.VI.2 Exemple

Soit un solide 1 en rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{z})$ de centre de gravité O et de matrice d'inertie dans la base B:

$$I(O,1) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_B$$

Un moteur applique le couple C_m sur l'axe. On suppose la liaison pivot parfaite entre 1 et 0. On néglige l'inertie du moteur. Le référentiel 0 est supposé Galiléen.

1.VI.2.a Application du PFD

$$\vec{V}(O,1/R_0) = \vec{0} \quad ; \quad \vec{\delta}(O,1/R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{\sigma}(O,1/R_0) = I(O,1)\vec{\Omega}(1/R_0) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} -E\dot{\theta} \\ -D\dot{\theta} \\ C\dot{\theta} \end{bmatrix}^B$$

$$\vec{\delta}(O,1/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(O,1/R_0)}{dt}\right)_0 = \begin{bmatrix} -E\ddot{\theta} \\ -D\ddot{\theta} \\ C\ddot{\theta} \end{bmatrix}^B$$

Application du PFD : $\{\mathcal{D}(1/0)\} = \{\mathcal{T}(0 \to 1)\} + \{\mathcal{T}(m \to 1)\} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{01} = 0 \\ Y_{01} = 0 \\ Z_{01} = 0 \\ L_{01} = -E\ddot{\theta} \\ M_{01} = -D\ddot{\theta} \\ C_m = C\ddot{\theta} \end{cases}$

On trouve :

- 5 équations donnant les actions de liaisons (à travail nul)
- 1 équation différentielle du mouvement (TMD sur $(O,\vec{z})$): $C\ddot{\theta} = C_m$

1.VI.2.b Application du TEC

On isole le solide 1 dans le référentiel Galiléen : $\frac{dT(1/R_0)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$

Soit J l'inertie de 1 autour de l'axe $(O,\vec{z})$: $J = C$

$$T(1/R_0) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad ; \quad \frac{dT(1/R_0)}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$P_{int} = 0 \quad ; \quad P_{ext} = C_m\dot{\theta}$$

$$\rightarrow J\dot{\theta}\ddot{\theta} = C_m\dot{\theta}$$

Si $\dot{\theta} \neq 0$

$$J\ddot{\theta} = C_m$$