Polynômes de Hilbert

Notations :

— *n désigne un entier naturel*

— *$\mathbb{C}_n[X]$ l'espace des polynômes complexes de degré inférieur ou égal à n.*

— *Pour P dans $\mathbb{C}[X]$, soit $T(P)$ le polynôme $P(X+1)$. L'application T ainsi définie est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$. De plus, si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par T et on note T_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ induit par T.*

— *Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Hilbert, définie par :*

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, H_i = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k).$$

Partie I: Inversion d'une matrice

1. Soit n dans $\mathbb{N}$.
   (a) Écrire la matrice M_n de T_n dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$.
   (b) Vérifier que M_n est inversible
   (c) Expliciter M_n^{-1}.
2. (a) Montrer que $(H_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
   (b) Si $j \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $H_i(j)$ montrant que $H_i(j)$ est dans $\mathbb{Z}$.
   (On distinguera les trois cas : $j < 0$, $0 \leqslant j \leqslant i-1$ et $j \geqslant i$.)

Partie II: Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$

Soit P dans $\mathbb{C}_n[X]$. On décompose P sur $(H_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ en $P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$.

3. Vérifier l'égalité suivante : $\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^tM_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, où ${}^tM_n$ est la transposée de la matrice M_n.
4. Établir : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\quad a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$.
5. Si $i \geqslant n+1$, que vaut $\sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$?
6. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $\forall i \in \{0, \dots, n\}, P(i) \in \mathbb{Z}$
   (b) $\forall i \in \{0, \dots, n\}, a_i \in \mathbb{Z}$
   (c) $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$
   En particulier les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes de Hilbert.
7. Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \mathbb{N}, u_j = P(j)$
   (b) $\forall i \in \mathbb{N}, i \geqslant n+1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_j = 0$.

POLYNÔMES DE HILBERT

Partie I: Inversion d'une matrice

1. (a) $T_n(X^j) = (X+1)^j = \sum\limits_{i=0}^{j} C_j^i X^i$, donc le terme d'indice (i,j) de M_n est égal à C_j^i pour $i \leqslant j$, et 0 pour $i > j$, i et j variant de 0 à n.

   (b) M_n est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux valent 1, donc son déterminant vaut 1 et elle est inversible.

   (c) $T_n^{-1}(P) = P(X-1)$, d'où $T_n^{-1}(X^j) = \sum\limits_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} C_j^i X^i$, donc le terme d'indice (i,j) de M_n^{-1} est égal à $(-1)^{j-i} C_j^i$ pour $i \leqslant j$, et 0 pour $i > j$, i et j variant de 0 à n.

2. (a) H_i étant de degré i, la famille $(H_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est échelonnée en degrés, elle forme donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

   (b) $$\begin{array}{rcl} 0 \leqslant j \leqslant i-1 & \Longrightarrow & H_i(j) = 0 \\ j \geqslant i & \Longrightarrow & H_i(j) = C_j^i \\ j < 0 & \Longrightarrow & H_i(j) = (-1)^i C_{-j+i-1}^i. \end{array}$$

Partie II: Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$

3. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(k) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i H_i(k) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i C_k^i = \sum\limits_{i=0}^{n} ({}^t M_n)_{ki}.a_i$ soit $\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n . \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t M_n^{-1} . \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$, d'où $a_i = \sum\limits_{j=0}^{n} ({}^t M_n^{-1})_{ij} . P(j) = \sum\limits_{j=0}^{n} (M_n^{-1})_{ji} . P(j) = \sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$.

5. Soit $i \geqslant n+1$. On se place dans $\mathbb{C}_i[X]$, i.e on remplace l'entier n par l'entier i.

   On applique ce qui précède à $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k H_k$. La composante de P suivant H_i est nulle, donc $0 = \sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j)$.

6. $(a) \Rightarrow (b)$: La question 4 donne le résultat.

   $(b) \Rightarrow (c)$: La question 2(b) montre que $H_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, or $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i H_i$, d'où $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

   $(c) \Rightarrow (a)$: évident

7. $(a) \Rightarrow (b)$: Pour $i \geqslant n+1$, $\sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_j = \sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j P(j) = 0$ d'après la question 5.

   $(b) \Rightarrow (a)$: On pose pour $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i = \sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_j$, puis $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i H_i$.

   ${}^t M_n^{-1} \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t M_n^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, donc $P(j) = u_j$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$.