Décomposition de Dunford

Dans ce problème, on considère une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé , c'est à dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A. Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note :

- α_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, c'est à dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P.
- P_i le polynôme défini par $P_i(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
- F_i le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}((f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i})$.
- f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i

Partie I: Diagonalisation simultanée

Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. On suppose que u et v sont diagonalisables et ils commutent

1. Justifier que les sous-espaces propres de u sont stables par v
2. Montrer que chaque sous-espace propre de E_λ de u admet une base formée de vecteurs propres de v
3. Dénduire que u et v sont digonalisables dans une même base

On dit qu'ils sont simultanément diagonalisables

Partie II: Décomposition de Dunford

4. Justifier que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est somme directe des espaces F_i:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

5. En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente , montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le polynôme caractéristique de f_i est P_i.

On pourra d'abord établir que P_i est un polynôme annulateur de f_i

6. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice définie par bloc de la forme suivante:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

7. En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = D + N$ où D est une matrice diagonalisable et N est une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent.
8. Soient D' une matrice diagonalisable et N' une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A = D' + N'$ et $D'N' = N'D'$. Montrer que $D = D'$ et $N = N'$
9. Calculer la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

DÉCOMPOSITION DE DUNFORD

Partie III: Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P de $M_n(\mathbb{C})$, on note comm_B et conj_P les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \quad \begin{cases} \text{comm}_B(X) = BX - XB \\ \text{conj}_P(X) = PXP^{-1} \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

10. Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$. Calculer $\text{conj}_{P^{-1}} \circ \text{comm}_A \circ \text{conj}_P$.
    Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

11. Si A est une matrice diagonale, montrer que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A.

12. En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.

13. Montrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $(\text{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.

14. Montrer que si A est nilpotente, et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle.
    D'après la partie I, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Dunford de la forme $\text{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent: $dn = nd$.

15. Déterminer la décomposition de Dunford de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

Décomposition de Dunford

Partie I: Diagonalisation simultanée

1. u et v commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre
2. L'endomorphisme induit d'un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable
3. Posons $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$, m_i l'ordre de multiplicité de λ_i, $E_i = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \mathrm{Id_E})$, $\mathcal{B}_i$ base de E_i et $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{m_1}} & & & (0) \\ & \boxed{\lambda_2 I_{m_2}} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{\lambda_p I_{m_p}} \end{pmatrix}$$

Or pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'endomorphisme v_{λ_i} est diagonalisable, donc il existe une base $\mathcal{C}_i$ de E_i pour laquelle $D_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}_i}(v_{\lambda_i})$ est diagonale. Soit finalement $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{C}_i$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & & (0) \\ & \boxed{D_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{D_p} \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $\mathcal{C}$ est une base de diagonalisation de u et v.

Partie II: Décomposition de Dunford

4. Comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$, le polynôme P est scindé, donc s'écrit par définition de l'ordre de multiplicité des racines d'un polynôme : $P = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$. Le polynôme caractéristique de f est P celui de A, matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton, P est un polynôme annulateur de f et donc, via le lemme des noyaux, comme les polynômes $(\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre-eux, on a

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker} P(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

5. Pour tout i de 1 à r, comme f et $P_i(f)$ commutent, le noyau F_i de $P_i(f)$ reste stable par l'endomorphisme f et on peut bien considérer l'endomorphisme f_i induit par f sur F_i, ainsi $P_i(f_i)$ est l'endomorphisme induit par $P_i(f)$ sur $F_i = \mathrm{Ker} P_i(f)$ donc $P_i(f_i)$ est l'endomorphisme nul i.e. P_i est un polynôme annulateur de f_i. Toute valeur propre complexe de f_i est donc racine de P_i ainsi la seule valeur propre possible de f_i est λ_i, or les racines complexes du polynôme caractéristique χ_{f_i} de f_i sont exactement les valeurs propres complexes de f_i. Ainsi le polynôme caractéristique de f_i est du type $\chi_{f_i} = (X - \lambda_i)^{\nu_i}$.

   Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{C}^n$, adaptée à la décomposition de $\mathbb{C}^n$ en la somme directe de la question 4, Comme f laisse stable chacun des F_i, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ de F_i, est diagonale par blocs avec

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}(f_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_{\mathcal{B}_r}(f_r) \end{pmatrix}$$

   Ainsi son polynôme caractéristique vaut $\prod_{i=1}^{r} \chi_{f_i} = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\nu_i}$ et aussi $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ par hypothèse; donc par unicité d'une décomposition en éléments irréductibles, on obtient $\alpha_i = \nu_i$ pour tout i. Ainsi pour tout i, le polynôme caractéristique de f_i est $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} = P_i$.

Décomposition de Dunford

6. Soit P la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ fixée de $\mathbb{C}^n$, adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$; la matrice P est bien une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$. Comme A est la matrice de l'endomorphimse f dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, la formule de changements de bases assure que $A' = P^{-1}AP$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

   Avec les notations de la question **5**, pour tout i, notons N_i la matrice de $f_i - \lambda_i \mathrm{id}_{F_i}$ dans la base $\mathcal{B}_i$ de F_i. Toujours d'après la question **5**, le polynôme $P_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est annulateur de f_i donc $(f_i - \lambda_i \mathrm{id}_{F_i})^{\alpha_i}$ est l'endomorphisme nul donc sa matrice dans la base $\mathcal{B}_i$, vaut $0 = N_i^{\alpha_i}$ et N_i est bien nilpotente. Finalement, on a bien (cf question **5**),

$$\boxed{\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(f) = A' = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}(f_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_{\mathcal{B}_r}(f_r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

7. Soit D' et N' les matrices diagonales par blocs suivantes

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N' = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix}$$

   Les matrices D' et N' commutent (via un produit par blocs), la matrice N' est nilpotente puisque $N'^{\alpha} = 0$ avec $\alpha = \max(\alpha_i \mid i = 1 \dots r)$, et $A' = D' + N'$. Ainsi, on obtient par définition de $A' = P^{-1}AP$, $\boxed{A = D + N}$ avec:

   - $\underline{D = P^{-1}D'P \text{ diagonalisable}}$ car semblable à D' diagonale,
   - $\underline{N = P^{-1}N'P \text{ nilpotente}}$ car

$$N^{\alpha} = (P^{-1}N'P)^{\alpha} = P^{-1}N'P \cdots P^{-1}N'P = P^{-1}(N')^{\alpha}P = 0$$

   - $\underline{N \text{ et } D \text{ commutent}}$ puisque comme N' et D' commutent, on a:

$$ND = P^{-1}N'PP^{-1}D'P = P^{-1}N'D'P = P^{-1}D'N'P = P^{-1}D'PP^{-1}N'P = DN$$

   Remarque : on a traduit dans la base canonique, les propriétés observées sur f dans une base adaptée.

8. Supposons l'existence d'un autre couple (D', N') répondant au problème. On a alors $D' - D = N - N'$. Comme D' commute avec N', il commute aussi avec A, donc avec tout polynôme en A. En particulier D' commute avec D. Ainsi D et D' sont codiagonalisables et donc $D' - D$ est diagonalisable. De même N commute avec N'. Il en découle que $N - N'$ est nilpotent. Le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent étant 0 on a $D = D'$ et $D = D'$.

9. Calculons le polynôme caractéristique de A. Via les combinaisons $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{aligned} P &= \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ X-2 & X & -1 \\ 0 & 1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X-1) \end{aligned}$$

   Ainsi, dans cet exemple, on a $r = 2$, avec $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\alpha_2 = 2$.

Décomposition de Dunford

En notant $(e_1;e_2;e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on observe $A(e_2+e_3)=e_2+e_3$ i.e. $b_1=e_2+e_3$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre simple 1 (car 1 est racine simple de P) donc b_1 est une base de F_1. On a aussi $A(e_1+e_2)=2(e_1+e_2)$ donc $b_2=e_1+e_2$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Cherchons b_3 tel que $(b_2;b_3)$ est une base de $F_2=\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{id})^2$: nous avons

$$A-2I=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\text{ donc }(A-2I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

Donc on observe que b_2 et $b_3=e_3$ sont bien dans le noyau de $(A-2I)^2$ et que $(b_2;b_3)$ est une famille libre, donc via la question **1**, la famille $(b_2;b_3)$ est une base de F_2 car via la question **1**, on a $F_1\bigoplus F_2=\mathbb{C}^3$ donc $\dim F_2=3-\dim F_1=3-1=2$. Ainsi avec les notations précédentes, en prenant $\mathcal{B}=(b_1;b_2;b_3)$, comme $e_3=b_3, e_2=b_1-b_3$ et $e_1=b_2-b_1+b_3$, nous avons

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\text{ et }D'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

Ainsi : $D=P^{-1}D'P=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&0&0\\1&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$

Donc par construction (cf question précédente), nous avons

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}\text{ et }N=A-D=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}$$

Partie III: Commutation et conjugaison

10. Pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{conj}_{P^{-1}}\circ\mathrm{comm}_A\circ\mathrm{conj}_P)(X)&=P^{-1}\left(\mathrm{comm}_A(PXP^{-1})\right)P\\&=P^{-1}(A(PXP^{-1})-(PXP^{-1})A)P\\&=P^{-1}APXP^{-1}P-P^{-1}PXP^{-1}AP\\&=P^{-1}APX-XP^{-1}AP\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{conj}_{P^{-1}}\circ\mathrm{comm}_A\circ\mathrm{conj}_P=\mathrm{comm}_{P^{-1}AP}=\mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_{P^{-1}}(A)}.}$

11. Soit $a_1,\dots a_n$ les coefficients diagonaux de A, alors pour tout i et j dans $\{1,\dots,n\}$:
$\mathrm{comm}_A(E_{i,j})=AE_{i,j}-E_{i,j}A=a_i\,E_{i,j}-a_jE_{i,j}=(a_i-a_j)\,E_{i,j}$
Comme $E_{i,j}$ est non nul, on conclut que pour tout i et j de $\{1,\dots,n\}$,
$\boxed{\text{la matrice } E_{i,j} \text{ est vecteur propre de } \mathrm{comm}_A \text{ associé à la valeur propre } a_i-a_j.}$
Comme $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension n^2, l'endomorphisme comm_A admet au plus n^2 vecteurs propres formant une famille libre; ici, on a trouvé n^2 vecteurs propres libres, les $E_{i,j}$, on en déduit que
$\boxed{\text{le spectre de } \mathrm{comm}_A \text{ est l'ensemble des } a_i-a_j \text{ avec } i,\ j \text{ décrivant } 1\dots n.}$

12. Si A est diagonalisable, il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A'=P^{-1}AP$ est diagonale. D'après la question 11, la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ formée par les $E_{i,j}$ est alors une base de vecteurs propres de $\mathrm{comm}_{A'}$. Ainsi $\mathrm{comm}_{A'}$ est diagonalisable car de matrice dans la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ diagonale. Or d'après la question 10, $\mathrm{conj}_{P^{-1}}\circ\mathrm{comm}_A\circ\mathrm{conj}_P=\mathrm{comm}_{P^{-1}AP}$, donc conj_P et $\mathrm{conj}_{P^{-1}}$ étant inverses l'un de l'autre, on a $\mathrm{comm}_{A'}=(\mathrm{conj}_P)^{-1}\circ\mathrm{comm}_A\circ\mathrm{conj}_P$. On vient donc de prouver, en notant Q la matrice conj_P dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $M_n(\mathbb{R})$ la relation $Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_{A'})=Q^{-1}\,Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_A)\,Q$. Ainsi $Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_{A'})$ et $Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_A)$ sont semblables et comme $Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_{A'})$ est diagonale, $\boxed{\text{l'endomorphisme } \mathrm{comm}_A \text{ est diagonalisable.}}$

13. Soit A fixé dans $M_n(\mathbb{C})$, calculons pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{comm}_A)^2(X)&=A(\mathrm{comm}_A(X))-(\mathrm{comm}_A(X))A\\&=A(AX-XA)-(AX-XA)A=A^2X-2AXA+XA^2\\(\mathrm{comm}_A)^3(X)&=A(A^2X-2AXA+XA^2)-(A^2X-2AXA+XA^2)A\\&=A^3X-2A^2XA+AXA^2)-A^2XA+2AXA^2-XA^3\\&=A^3X-3A^2XA+3AXA^2-XA^3\end{aligned}$$

Soit l'hypothèse de récurrence au rang k : $\forall X \in M_n(\mathbb{C}), (\text{comm}_A)^k(X) = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s}(-1)^s A^{k-s} X A^s$

On vient de prouver cette relation pour $k = 2$ et $k = 3$, et elle est vraie par définition pour $k = 1$. Prouvons son caractère héréditaire en la supposant vraie à un rang k, alors pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
(\text{comm}_A)^{k+1}(X) &= A\left(\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k-s}XA^s\right) - \left(\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k-s}XA^s\right)A \\
&= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s + \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^{s+1}A^{k-s}XA^{s+1} \\
&= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s + \sum_{s=1}^{k+1}\binom{k}{s-1}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s \\
&= A^{k+1}X + \sum_{s=1}^{k}\left(\binom{k}{s}+\binom{k}{s-1}\right)(-1)^s A^{k+1-s}XA^s + (-1)^{k+1}XA^{k+1} \\
&= A^{k+1}X + \sum_{s=1}^{k}\binom{k+1}{s}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s + (-1)^{k+1}XA^{k+1} \\
&\qquad \text{via la formule du triangle de Pascal} \\
&= \sum_{s=0}^{k+1}\binom{k+1}{s}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est héréditaire, vraie au rang 1 donc par le principe de récurrence, on obtient

$$\boxed{\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (\text{comm}_A)^k(X) = \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k-s}XA^s}$$

Ainsi si A est nilpotente, il existe un entier α avec $A^\alpha = 0$ donc $A^s = 0$ pour tout $s \geqslant \alpha$. Or pour tout entier s, soit $s \geqslant \alpha$ soit $s \leqslant \alpha$ et $2\alpha - s \geqslant \alpha$, donc via la formule précédente $(\text{comm}_A)^{2\alpha} = 0$ et donc $\boxed{\text{si } A \text{ est nilpotente alors comm}_A \text{ aussi.}}$

14. Si $\text{comm}_A = 0$ alors pour tout i, on a $AE_{i,1} = E_{i,1}A$. En notant $a_{i,j}$ le coefficient en ligne i et colonne j de A, cette relation se traduit par (en regardant la première colonne):
$\forall k = 1, \dots, n, \quad a_{k,i} = \delta_{i,k}a_{1,1}$ donc $a_{i,i} = a_{1,1}$ pour tout i et $a_{k,i} = 0$ pour $i \neq k$. Ainsi A est une matrice diagonale donc du type aI_n. Si on suppose de plus A nilpotente, il existe un entier α avec $A^\alpha = 0$ soit ici $a^\alpha I_n = 0$ d'où $a = 0$ et $\boxed{A=0.}$

15. Soit D et N les matrices respectivement diagonalisable et nilpotente correspondant à la décomposition de Dunford de la matrice A. Alors via les questions 12 et 13, les endomorphismes comm_D et comm_N de $M_n(\mathbb{C})$ sont respectivement diagonalisable et nilpotent. Par linéarité du produit matriciel par une matrixe fixée, $\text{comm}_A = \text{comm}_{D+N} = \text{comm}_D + \text{comm}_N$. Ainsi, si comm_D et comm_N commutent alors par unicité de la décomposition de Dunford, on aura que
$\boxed{\text{la décomposition de Dunford de comm}_A \text{ est obtenue avec les matrices comm}_D \text{ et comm}_N.}$
Pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$, calculons
$$\begin{aligned}
&(\text{comm}_D \circ \text{comm}_N - \text{comm}_N \circ \text{comm}_D)(X) \\
&\quad = D(NX - XN) - (NX - XN)D - (N(DX - XD) - (DX - XD)N) \\
&\quad = DNX - DXN - NXD + XND - NDX + NXD + DXN - XDN \\
&\quad = (DN - ND)X + X(ND - DN) = O_nX + XO_n = 0 \quad \text{car } N \text{ et } D \text{ commutent}
\end{aligned}$$
Ainsi comm_D et comm_N commutent, ce qui permet d'obtenir la décomposition voulue.

La question 12 assure que si A est diagonalisable alors comm_A aussi. Réciproquement supposons que comm_A est diagonalisable, alors avec les notations précédentes, comm_D et comm_N correspondantent à la décomposition de Dunford de comm_A, mais comm_A et O_n aussi (ces endomorphismes commutent, le premier est diagonalisable et le second nilpotent) donc par unicité d'une telle décomposition, on obtient $\text{comm}_D = \text{comm}_A$ et $\text{comm}_N = 0$. Ainsi comme N est nilpotente, la question 14 assure $N = 0$ donc $A = D$ et A est diagonalisable.

Décomposition de Dunford

$\boxed{\text{Finalement, } A \text{ est diagonalisable si et seulement } \mathrm{comm}_A \text{ l'est.}}$