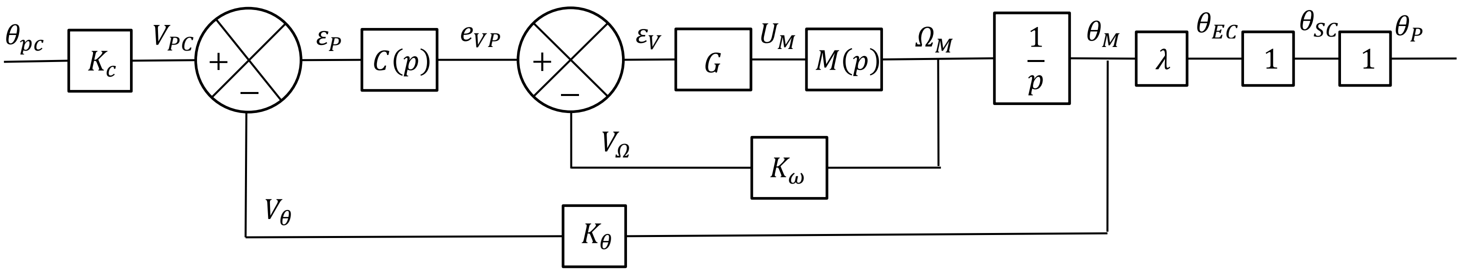
Extrait du concours X-ENS MP 2002
Robot Delta

Mise en place du schéma bloc

Question 1: Tracer le schéma bloc d'asservissement en position, d'entrée $\boldsymbol{\theta_{PC}(p)}$ et de sortie $\boldsymbol{\theta_P(p)}$, faisant apparaître toutes les variables et les fonctions de transfert définies ci-dessus.



Performance de précision

Question 2: En déduire la relation entre $\boldsymbol{K_C}$, $\boldsymbol{K_\theta}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ puis la valeur numérique de $\boldsymbol{K_C}$ qui permette d'assurer cet écart nul.

Quand $\theta_{PC}(p) = \theta_P(p)$, on veut $V_{PC}(p) = V_\theta(p)$.

$$\theta_P(p) = \lambda\theta_M(p)$$

$$V_{PC}(p) = K_C\theta_{PC}(p)$$
$$V_\theta(p) = K_\theta\theta_M(p) = \frac{K_\theta}{\lambda}\theta_P(p) = \frac{K_\theta}{\lambda}\theta_{PC}(p)$$

$$V_{PC}(p) - V_\theta(p) = K_C\theta_{PC}(p) - \frac{K_\theta}{\lambda}\theta_{PC}(p) = 0$$

$$K_C = \frac{K_\theta}{\lambda}$$

Performance de rapidité

Question 3: Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique du gain G de l'amplificateur pour que la boucle tachymétrique (d'entrée e_{VP} et de sortie ω_M) présente un temps de réponse à 5 % minimum pour une entrée en échelon. Quel est alors le temps de réponse à 5 % ?

Le temps de réponse à 5% le plus court est obtenu pour $z = 0{,}69$. La FTBF a pour expression :

$$FTBF(p) = \frac{GM(p)}{1 + GM(p)K_\omega}$$
$$M(p) = \frac{K_T}{K_E K_T + JRp + JLp^2}$$
$$FTBF(p) = \frac{G\frac{K_T}{K_E K_T + JRp + JLp^2}}{1 + G\frac{K_T}{K_E K_T + JRp + JLp^2}K_\omega}$$
$$FTBF(p) = \frac{GK_T}{K_T(K_E + GK_\omega) + JRp + JLp^2}$$
$$FTBF(p) = \frac{\frac{GK_T}{K_T(K_E + GK_\omega)}}{1 + \frac{JR}{K_T(K_E + GK_\omega)}p + \frac{JL}{K_T(K_E + GK_\omega)}p^2}$$
$$FTBF(p) = \frac{\frac{G}{(K_E + GK_\omega)}}{1 + \frac{JR}{K_T(K_E + GK_\omega)}p + \frac{JL}{K_T(K_E + GK_\omega)}p^2} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$$

Par identification, on trouve :

$$K = \frac{G}{K_E + GK_\omega}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T(K_E + GK_\omega)}{JL}}$$
$$z = \frac{1}{2}\omega_0 \frac{JR}{K_T(K_E + GK_\omega)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K_T(K_E + GK_\omega)}{JL}}\frac{JR}{K_T(K_E + GK_\omega)} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{J}{LK_T(K_E + GK_\omega)}}$$

Détermination de G :

$$z^2 = \frac{J^2R^2}{4JLK_T(K_E + GK_\omega)}$$
$$J^2R^2 = z^2 4JLK_T K_E + z^2 4JLK_T GK_\omega$$
$$G = \frac{J^2R^2 - z^2 4JLK_T K_E}{z^2 4JLK_T K_\omega}$$
$$G = \frac{JR^2 - z^2 4LK_T K_E}{z^2 4LK_T K_\omega}$$

$$G = \frac{1}{K_\omega}\left(\frac{JR^2}{4z^2LK_T} - K_E\right)$$

Détermination des constantes en USI :

$$K_\omega = 6\frac{V}{1000\frac{tr}{min}} = 6\ \frac{1}{1000 * \frac{2\pi}{60}}\frac{V}{rad.s} = 0{,}057\frac{V}{rad.s}$$

$$K_E = 14{,}3\frac{V}{1000\frac{tr}{min}} = 1 = 0{,}0137\frac{Vs}{rad}$$

Régime le plus rapide : $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$G = \frac{1}{0{,}057}\left(\frac{12.10^{-5} * 1^2}{4 * \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 * 1{,}65.10^{-3} * 0{,}137} - 0{,}0137\right) = 2{,}25$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_T(K_E + GK_\omega)}{JL}} = 299\ rad/s$$

$$tr_{5\%}\omega_0 = 3$$

$$tr_{5\%} = \frac{3}{299} = 0{,}01\ s$$

Performance de stabilité

Question 4: Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode en amplitude et phase de la fonction de transfert $H_B(p)$ du système non corrigé en plaçant avec précision les points caractéristiques.

On s'intéresse ici au système entier.
$H_B(p)$ est bien la FTBO du système.

$$H_B(p) = \frac{1}{p}\frac{86}{10^3 + 3{,}2p + 5{,}3.10^{-3}p^2}$$

$$\frac{86}{10^3 + 3{,}2p + 5{,}3.10^{-3}p^2} = \frac{86.10^{-3}}{1 + 3{,}2.10^{-3}p + 5{,}3.10^{-6}p^2}$$

Identification des coefficients :

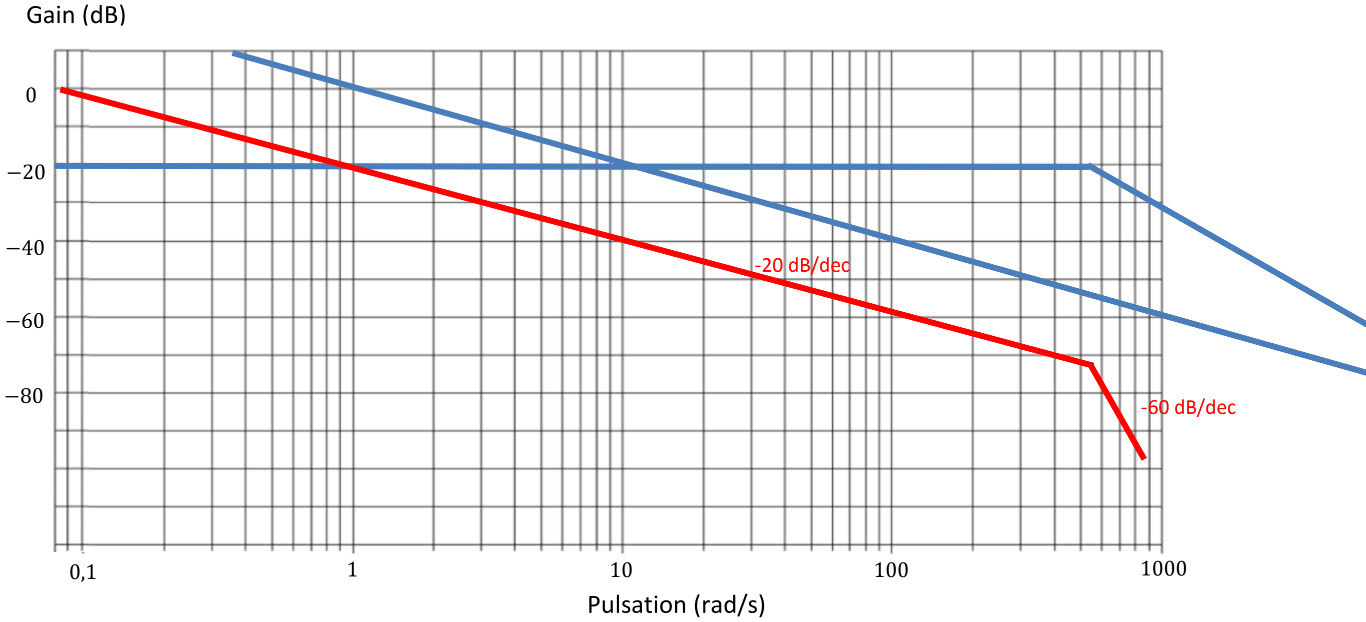
$$K = 86.10^{-3}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{5{,}3.10^{-6}}} = \sqrt{\frac{10^6}{5{,}3}} = 434{,}37$$

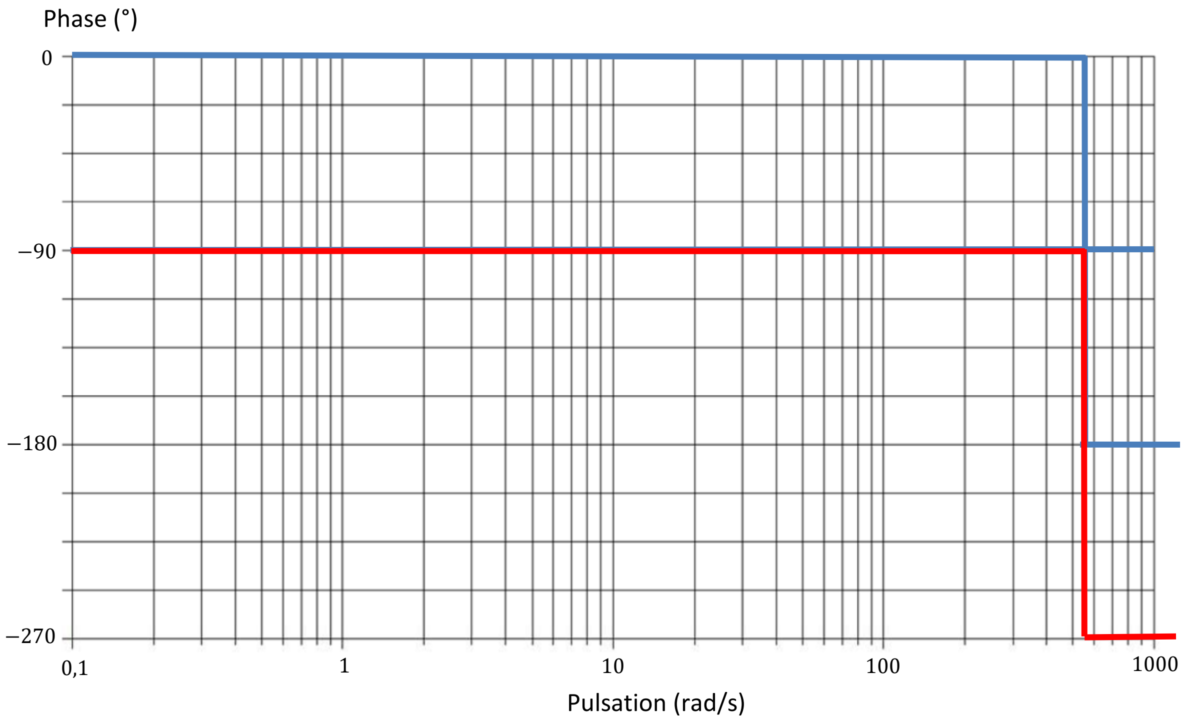
$$z = \frac{1}{2} * 434{,}37 * 3{,}2.10^{-3} = 0{,}69$$

$$\log \omega_0 = 2{,}64$$

$$20 \log K = -21{,}3$$

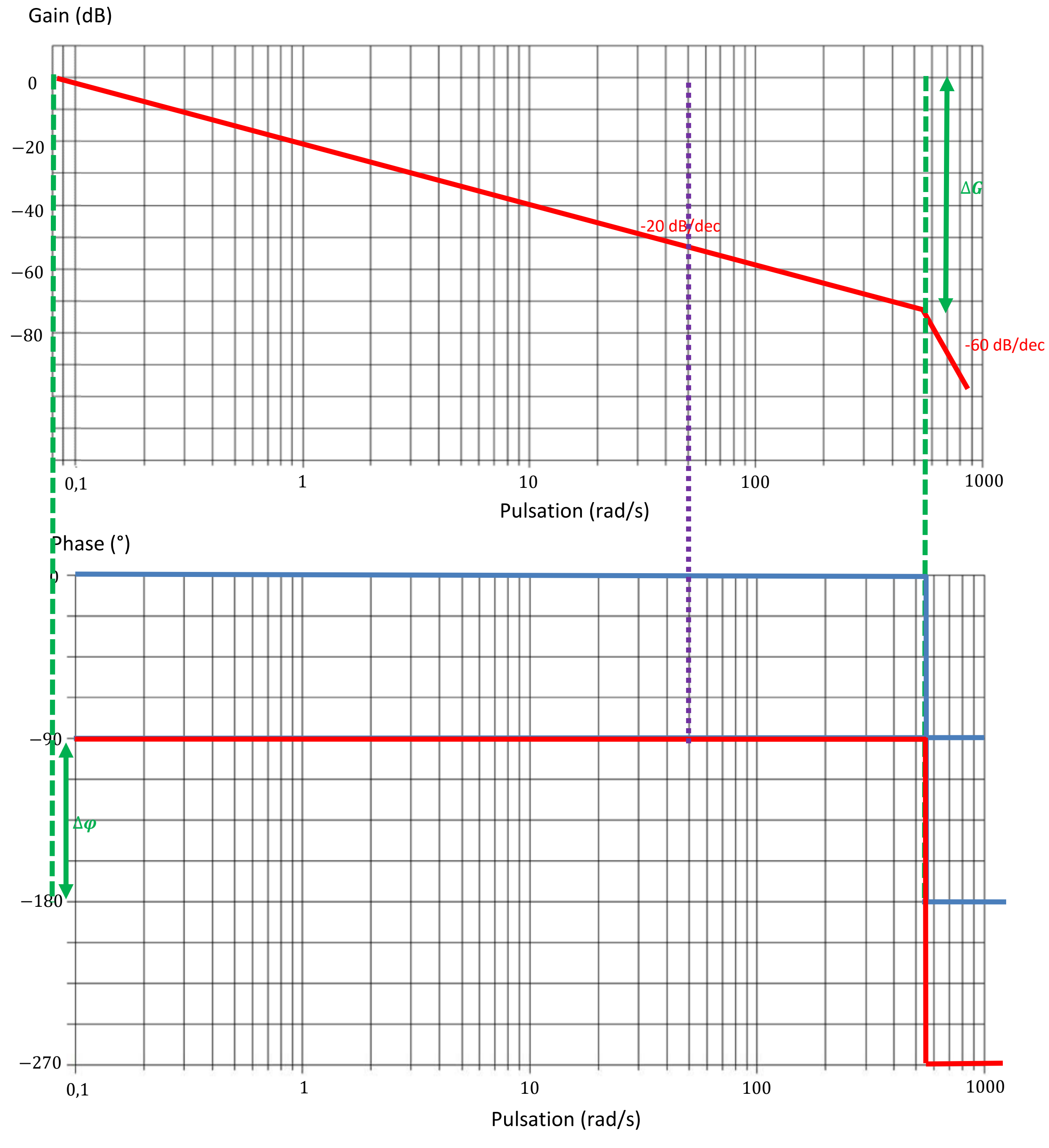


Gain (dB)
0
−20
−40
−60
−80
-20 dB/dec
-60 dB/dec
0,1
1
10
100
1000
Pulsation (rad/s)



Phase (°)
0
−90
−180
−270
0,1
1
10
100
1000
Pulsation (rad/s)

Question 5: Déterminer graphiquement les valeurs de $\Delta\varphi$, marge de phase, ΔG, marge de gain, BP_0, bande passante à 0 du système de fonction de transfert $H_B(p)$. Les critères de la fonction A42 sont-ils vérifiés ?



Précision : Présence d'une intégration, FTBO de classe 1, l'écart statique est donc nul.

Stabilité :

$$\Delta\varphi = 90° > 45°$$
$$\Delta G = 74\,dB > 10\,dB$$

Rapidité :

$$BP_0 = 0{,}08\,rad.s^{-1} < 50\,rad.s^{-1}$$

Non-respect du cahier des charges.

Question 6: Déterminer la valeur de C_0 qui permet de vérifier les critères de stabilité de la fonction A42.

Deux solutions :
Solution 1 : résoudre $\left|H\left(j\omega_{c_0}\right)\right| = 1$
Solution 2 : utiliser les résultats précédents

Le correcteur action proportionnelle translate la courbe de gain de $20\log C_0$
Pour $\omega_0 = 50\ rad.s^{-1}$, on veut $G = 0\ dB$. Et on a $G_{\omega=50} = -55\ dB$
Il faut donc :

$$20\log C_0 = 55$$
$$C_0 = 10^{\frac{55}{20}} = 562$$

Attention : les marges évoluent, on les recalcule donc :

$$\Delta G = 74 - 55 = 19\ dB$$
$$\Delta\varphi = 90°$$