SESSION 2021

Concours commun Centrale

MATHÉMATIQUES 1. FILIERE MP

I - Inégalité de Hoffman-Wielandt

I.A -

Q 1. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(P, Q) \in (\mathscr{O}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned}\|PMQ\|_F^2 &= \mathrm{Tr}\left((PMQ)(PMQ)^T\right) = \mathrm{Tr}\left(PMQQ^TM^TP^T\right) = \mathrm{Tr}\left(PMM^TP^T\right) \text{ (car } Q \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})\text{)}\\ &= \mathrm{Tr}\left(P^T\left(PMM^T\right)\right) \text{ (car } \forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)\text{)}\\ &= \mathrm{Tr}\left(MM^T\right) \text{ (car } P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})\text{)}\\ &= \|M\|_F^2\end{aligned}$$

et donc $\|PMQ\|_F = \|M\|_F$.

Q 2. D'après le théorème spectral, il existe $(P_1, P_2) \in (\mathscr{O}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A = P_1D_AP_1^T$ et $B = P_2D_BP_2^T$.

$$\begin{aligned}\|A-B\|_F^2 &= \left\|P_1D_AP_1^T - P_2D_BP_2^T\right\|_F^2 = \left\|P_1\left(D_AP_1^TP_2 - P_1^TP_2D_B\right)P_2^T\right\|_F^2\\ &= \left\|D_AP_1^TP_2 - P_1^TP_2D_B\right\|_F^2 \text{ (d'après Q1).}\end{aligned}$$

Si on pose $P = P_1^TP_2$, P est une matrice orthogonale, en tant que produit de deux matrices orthogonales, telle que $\|A-B\|_F^2 = \|D_AP - PD_B\|_F^2$.

Q 3. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_F^2 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient ligne i, colonne j, de D_AP est $\lambda_i(A)p_{i,j}$ et le coefficient ligne i, colonne j, de PD_B est $\lambda_j(B)p_{i,j}$. Donc, $D_AP - PD_B = \left(p_{i,j}\left(\lambda_i(A) - \lambda_j(B)\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ puis

$$\|A-B\|_F^2 = \|D_AP - PD_B\|_F^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2\left(\lambda_i(A) - \lambda_j(B)\right)^2.$$

I.B -

Q 4. Montrons que $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note que $\mathscr{B}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ car par exemple $I_n \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})$. Alors $\|M\|_F \leqslant \sqrt{1^2 + \ldots + 1^2} = \sqrt{n^2} = n$. Donc $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

• Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, soit $P_{i,j} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) /\ m_{i,j} \geqslant 0\}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'application $\varphi_{i,j}\ :\ M \mapsto m_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que forme linéaire sur un espace de dimension finie. De plus, $[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire, à savoir $]-\infty,0[$, est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc, $P_{i,j} = \varphi_{i,j}^{-1}([0,+\infty[)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, posons $H_i = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) /\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1\right\}$. La forme linéaire $\psi_i\ :\ M \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et le singleton $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Donc, $H_i' = \psi_i^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De même, pour $j \in [\![1,n]\!]$, $H_j' = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) /\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1\right\}$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Mais alors, $\mathscr{B}_n(\mathbb{R}) = \left(\displaystyle\bigcap_{1\leqslant i,j\leqslant n} P_{i,j}\right) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} H_i\right) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{1\leqslant j\leqslant n} H_j'\right)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On a montré que $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ est un fermé, borné de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, le théorème de BOREL-LEBESGUE permet d'affirmer que $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

f est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on en déduit que f est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, f est continue sur le compact $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On sait alors que f admet un minimum sur $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$.

Q 5. Soient $x \in \mathbb{R}^+$ puis $M' = M + xE_{i,i} + xE_{j,k} - xE_{i,k} - xE_{j,i} = (m'_{u,v})_{1 \leqslant u,v \leqslant n}$. Pour $(u,v) \notin \{(i,i),(i,k),(j,k),(j,i)\}$, $m'_{u,v} = m_{u,v}$. Ensuite, $m'_{i,i} - m_{i,i} = m'_{j,k} - m_{j,k} = x$ et $m'_{i,k} - m_{i,k} = m'_{j,i} - m_{j,i} = -x$. Il reste

$$\begin{aligned}
f(M') - f(M) &= x(\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 - x(\lambda_i(A) - \lambda_k(B))^2 + x(\lambda_j(A) - \lambda_k(B))^2 - x(\lambda_j(A) - \lambda_i(B))^2 \\
&= x(-2\lambda_i(A)\lambda_i(B) + 2\lambda_i(A)\lambda_k(B) - 2\lambda_j(A)\lambda_k(B) + 2\lambda_j(A)\lambda_i(B)) \\
&= 2x(\lambda_i(A)(\lambda_k(B) - \lambda_i(B)) - \lambda_j(A)(\lambda_k(B) - \lambda_i(B))) \\
&= 2x(\lambda_i(A) - \lambda_j(A))(\lambda_k(B) - \lambda_i(B)).
\end{aligned}$$

Puisque $i \leqslant k$, on a $\lambda_k(B) - \lambda_i(B) \geqslant 0$ et puisque $j \geqslant i$, $\lambda_i(A) - \lambda_j(A) \leqslant 0$. Puisque $x \in \mathbb{R}^+$, on a donc

$$f(M') - f(M) = 2x(\lambda_i(A) - \lambda_j(A))(\lambda_k(B) - \lambda_i(B)) \leqslant 0.$$

Q 6. On note que si dans une ligne (resp. une colonne) d'un élément de $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$, l'un des coefficients de cette ligne (resp. colonne) est égal à 1, alors tous les autres coefficients sont nuls et de même, si l'un des coefficients est strictement positif, un autre est strictement inférieur à 1.

On note aussi que $i < n$ car sinon, $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{j,j} = 1$ et donc $a_{n,1} = \ldots = a_{n,n-1} = 0$ puis $a_{n,n} = 1$. Mais alors $M = I_n$ ce qui est faux.

On note enfin que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, la matrice M' de la question Q5 est une matrice dont la somme des coefficients d'une ligne quelconque (resp. colonne) reste égale à 1 (car $x - x = 0$). Mais les coefficients de cette nouvelle matrice ne sont plus nécessairement tous positifs.

Par hypothèse, $m_{i,i} < 1$ et donc il existe $(j_0, k_0) \in [\![i+1, n-1]\!]^2$ tel que $m_{j_0,i} > 0$ et $m_{i,k_0} > 0$. On applique alors Q5 avec le réel $x = \text{Min}\{m_{j_0,i}, m_{i,k_0}\} > 0$. On obtient une nouvelle matrice M_1 avec un coefficient nul supplémentaire dans la ligne ou la colonne de $m_{i,i}$ et cette matrice est dans $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ puisque ses coefficients sont restés positifs. Enfin, $f(M_1) \leqslant f(M)$ d'après Q5.

On recommence le même procédé jusqu'à obtenir dans la ligne ou la colonne de $m_{i,i}$ des coefficients tous nuls à l'exception de $m_{i,i}$. Supposons par exemple que la ligne de $m_{i,i}$ soit devenue $(0 \ \ldots \ 0 \ m_{i,i} \ 0 \ \ldots \ 0)$. Puisque la matrice M' obtenue est dans $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$, ceci impose $m_{i,i} = 1$ puis la colonne de $m_{i,i}$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice M' est une matrice de $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall j \in [\![1, i]\!]$, $m'_{j,j} = 1$ et $f(M') \leqslant f(M)$

Q 7. Soit $M_1 \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{Min}\{f(M),\ M \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})\} = f(M_1)$.
Si le coefficient ligne 1, colonne 1, de M_1 est égal à 1, on prend $M_2 = M_1$ et si le coefficient ligne 1, colonne 1, de M_1 est différent de 1, d'après la question Q5, on peut choisir une matrice $M_2 \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M_2) \leqslant f(M_1)$ et dont le coefficient ligne 1, colonne 1, est égal à 1. Dans tous les cas, $f(M_1) \leqslant f(M_2) \leqslant f(M_1)$ et donc $f(M_2) = f(M_1) = \text{Min}\{f(M),\ M \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})\}$ où de plus M_2 est une matrice de $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient ligne 1, colonne 1, est égal à 1.

Plus généralement, si pour $k \geqslant 1$, $\text{Min}\{f(M),\ M \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})\} = f(M_k)$ où M_k est un élément de $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall i < k$, le coefficient ligne i, colonne i, de M_k est égal à 1, alors, toujours d'après la question Q5, avec le même raisonnement, il existe une matrice $M_{k+1} \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Min}\{f(M),\ M \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})\} = f(M_{k+1})$ et $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $m^{(k)}_{i,i} = 1$.

Ceci montre par récurrence finie que pour tout $k \geqslant 1$, $\text{Min}\{f(M),\ M \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})\} = f(M_k)$ où M_k est un élément de $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall i < k$, le coefficient ligne i, colonne i, de M_k est égal à 1.

En particulier, $\text{Min}\{f(M),\ M \in \mathscr{B}_n(\mathbb{R})\} = f(M_{n+1}) = f(I_n)$.

I.C -

Q 8. Puisque la matrice P est une matrice orthogonale, la matrice $M = \left(p_{i,j}^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dans $\mathscr{B}_n(\mathbb{R})$. Mais alors,

$$\begin{aligned}\|A-B\|_F^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2\left(\lambda_i(A)-\lambda_j(B)\right)^2 = f(M)\\ &\geqslant f(I_n) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \delta_{i,j}\left(\lambda_i(A)-\lambda_j(B)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i(A)-\lambda_i(B)\right)^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (A,B)\in\left(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ \|A-B\|_F^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i(A)-\lambda_i(B)\right)^2.$$

II - Dénombrements des mots bien parenthésés

II.A -

Q 9. Il n'y a qu'un parenthésage de longueur 2 à savoir (). Donc, $C_1 = 1$.
Il y a deux parenthésages de longueur 4, à savoir ()() et (()). Donc, $C_2 = 2$.
Les parenthésages de longueur 6 sont ()()(), ()(()), (())(), (()()), ((())). Donc $C_3 = 5$.

Q 10. Un mot bien parenthésé de longueur $2n$ est d'abord une succession de $2n$ parenthèses chacune étant ouvrante ou fermante. Pour chacune des $2n$ parenthèses, on a 2 possibilités et on obtient donc au plus $\underbrace{2\times\ldots\times 2}_{2n\text{ facteurs}} = 2^{2n}$ mots de longueur $2n$ bien parenthésés. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|C_n| = C_n \leqslant a_n$ où $a_n = 2^{2n} = 4^n$. Mais alors, $R_C \geqslant R_a = \dfrac{1}{4}$.

La série entière $\sum C_k x^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

Q 11. Soit $k\geqslant 1$. Un mot bien parenthésé de longueur $2k$ s'écrit sous la forme $(m)m'$ où m est un mot bien parenthésé dont la longueur est un nombre pair $2i$ avec $i\in[\![0,k-1]\!]$ (car une paire de parenthèses est déjà écrite) et donc m' est un mot bien parenthésé de longueur $2k-2i-2 = 2(k-i-1)$.
Le mot m et sa longueur $2i$ étant fixés, il y a C_{k-i-1} mots bien parenthésés de longueur $2k$ du type $(m)m'$. Puisqu'il y a C_i mots bien parenthés de longueur $2i$, il y a donc $C_i\times C_{k-i-1}$ mots bien parenthésés où m est un mot bien parenthésé de longueur $2i$, i donné dans $[\![0,k-1]\!]$. Finalement, en faisant varier i de 0 à $k-1$,

$$\forall k\geqslant 1,\ C_k = \sum_{i=0}^{k-1} C_iC_{k-i-1}.$$

II.B -

Q 12. D'après Q10, le rayon de convergence de la série entière de somme F est au moins égal à $\dfrac{1}{4}$. Donc, F est définie sur $\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$ au moins. Pour $x\in\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} C_kx^k = C_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} C_kx^k\\ &= 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k-1} C_iC_{k-1-i}\right)x^k \text{ (d'après Q11)}\\ &= 1+\sum_{k'=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k'} C_iC_{k'-i}\right)x^{k'+1} \text{ (en posant } k'=k-1)\\ &= 1+x\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} C_iC_{k-i}\right)x^k\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}F(x) &= 1 + x\left(\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k\right) \text{ (produit de Cauchy sur l'intervalle ouvert de convergence)}\\ &= 1 + x(F(x))^2.\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $F(x) = 1 + x(F(x))^2$.

Q 13. Soit $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Si $f(x) = 0$, alors $2xF(x)-1 = 0$ puis $xF(x) = \frac{1}{2}$. D'autre part, d'après Q12, $xF(x) = x+(xF(x))^2 = x + \frac{1}{4}$. Donc, $x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ et donc $x = \frac{1}{4}$. Puisque $\frac{1}{4} \notin \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, on a montré que f ne s'annule pas sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$.

Q 14. D'après Q12, pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $x(F(x))^2 - F(x) + 1 = 0$ et donc, $F(0) = 1$ et pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$,

$$F(x) \in \left\{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}\right\}$$

(le signe $+$ ou $-$ étant une fonction de x) ou encore $f(x) = 2xF(x) - 1 \in \left\{-\sqrt{1-4x}, \sqrt{1-4x}\right\}$.

F est continue sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ en tant que somme d'une série entière de rayon supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$. Donc, f est continue sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et ne s'annule pas sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ d'après Q13. On en déduit que f garde un signe constant sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Puisque $f(0) = -1 < 0$, f est strictement négative sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et donc, pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, $f(x) = -\sqrt{1-4x}$. On en déduit que

$$F(0) = C_0 = 1 \text{ et } \forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[,\ F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Q 15. Pour $u \in]-1, 1[$, $\sqrt{1-u} = (1-u)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}(-u)^n = 1 - \frac{1}{2}u + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}u^n$ avec pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\ldots\times\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}\\ &= (-1)^{2n-1}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{2n-3}{2}}{n!} = -\frac{1}{2^n n!}(2n-3)(2n-5)\ldots(3)\\ &= -\frac{1}{2^n n!}\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots(3)(2)}{(2n-2)(2n-4)\ldots 2} = -\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 1$. Donc

$$\forall u \in]-1, 1[, \sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}u^n.$$

Q 16. Par suite, pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}(4x)^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2(k+1)-2)!}{(k+1)!k!}x^k \text{ (en posant } k=n-1)\\
&= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}x^n\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $x=0$. Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}.$$

III - Lois du demi-cercle, cas uniformément borné

III.A -

Q 17. Soit $k\in\mathbb{N}$. La fonction $x\mapsto x^{2k+1}\sqrt{4-x^2}$ est continue sur le segment $[-2,2]$ et impaire. Donc, $m_{2k+1}=0$.

Q 18. Pour $x\in[-2,2]$, posons $t=\text{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)$ de sorte que $x=2\sin(t)$ puis $dx=2\cos(t)\ dt$. On obtient

$$\begin{aligned}m_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\text{Arcsin}(-2/2)}^{\text{Arcsin}(2/2)}\sqrt{4-4\sin^2(t)}\,2\cos(t)\ dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2|\cos(t)|\times 2\cos(t)\ dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\ dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))\ dt = \frac{1}{\pi}\left(\pi+\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\\
&= 1.\end{aligned}$$

Donc, $m_0=1$.

Q 19. Soit $k\in\mathbb{N}$. Les deux fonctions $x\mapsto x^{2k+1}$ et $x\mapsto -\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$ sont de classe C^1 sur le segment $[-2,2]$. On peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}2\pi\, m_{2k+2} &= \int_{-2}^{2}x^{2k+1}\times x\sqrt{4-x^2}\ dx = \left[x^{2k+1}\times -\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2} + \frac{2k+1}{3}\int_{-2}^{2}x^{2k}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\ dx\\
&= \frac{2k+1}{3}\int_{-2}^{2}x^{2k}\left(4-x^2\right)\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{2k+1}{3}\left(4\int_{-2}^{2}x^{2k}\sqrt{4-x^2}\ dx - \int_{-2}^{2}x^{2k+2}\sqrt{4-x^2}\ dx\right)\\
&= \frac{2k+1}{3}\times 2\pi\left(4m_{2k}-m_{2k+2}\right)\end{aligned}$$

puis $m_{2k+2}=\frac{4(2k+1)}{3}m_{2k}-\frac{2k+1}{3}m_{2k+2}$ puis $\frac{2k+4}{3}m_{2k+2}=\frac{4(2k+1)}{3}m_{2k}$ et donc

$$m_{2k+2}=\frac{4(2k+1)}{2k+4}m_k=\frac{2(2k+1)}{k+2}m_k.$$

Q 20. D'après Q17, si k est impair, alors $m_k=0$. D'autre part, d'après Q18, $m_0=1=C_0$. Soit alors $k\in 2\mathbb{N}^*$. Posons $k=2n$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}m_k = m_{2n} &= \frac{2(2n-1)}{n+1}\times\frac{2(2n-3)}{n}\times\ldots\times\frac{2(1)}{2}m_0 = \frac{2^n}{(n+1)!}(2n-1)(2n-3)\ldots 1\\
&= \frac{2^n}{(n+1)!}\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 2}{(2n)(2n-2)\ldots 2} = \frac{2^n}{(n+1)!}\frac{(2n)!}{2^n n!}\\
&= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = C_n = C_{k/2} \text{ (d'après Q16).}\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $k = 0$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_k = \begin{cases} C_{k/2} \text{ si } k \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}$.

III.B -

Q 21. $\text{Sp}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}M_n\right) = (\Lambda_{1,n}, \ldots, \Lambda_{n,n})$ et on sait alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Sp}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{k}{2}}}M_n^k\right) = \left(\Lambda_{1,n}^k, \ldots, \Lambda_{n,n}^k\right)$ puis

$$\text{Tr}\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}}}M_n^k\right) = \sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k.$$

Ensuite, pour $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k\right| &= \left|\text{Tr}\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}}}M_n^k\right)\right| = \frac{1}{n^{\frac{k}{2}}}\left|\sum_{i=1}^{n}X_{i,i}^{(k)}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n^{\frac{k}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\left|X_{i,i}^{(k)}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{k}{2}}} \times nK^k.\end{aligned}$$

Ainsi, la variable $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k$ est bornée (sur Ω) et en particulier, la variable $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k$ admet une espérance. Par linéarité de l'espérance et de la trace, on a donc

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\text{Tr}\left(\frac{1}{n^{\frac{k}{2}}}M_n^k\right)\right) = \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\mathbb{E}\left(\text{Tr}\left(M_n^k\right)\right).$$

Montrons alors par récurrence que $\forall k \geqslant 2$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient ligne i, colonne j de M_n^k est

$$\sum_{(i_2,\ldots,i_k)\in[\![1,n]\!]^{k-1}} X_{i,i_2}X_{i_2,i_3}\ldots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,j}.$$

- Si $k = 2$, soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j de M_n^2 est $\displaystyle\sum_{i_2\in[\![1,n]\!]} X_{i,i_2}X_{i_2,j}$.

  L'égalité à démontrer est vraie quand $k = 2$.
- Soit $k \geqslant 2$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de M_n^{k+1} est (avec des notations évidentes)

$$\begin{aligned}X_{i,j}^{(k+1)} &= \sum_{i_{k+1}=1}^{n} X_{i,i_{k+1}}^{(k)}X_{i_{k+1},j} \\ &= \sum_{i_{k+1}=1}^{n}\left(\sum_{(i_2,\ldots,i_k)\in[\![1,n]\!]^{k-1}} X_{i,i_2}\ldots X_{i_k,i_{k+1}}\right)X_{i_{k+1},j} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{(i_2,\ldots,i_k,i_{k+1})\in[\![1,n]\!]^k} X_{i,i_2}\ldots X_{i_k,i_{k+1}}X_{i_{k+1},j}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

En particulier, pour $i_1 \in [\![1,n]\!]$ donné, le coefficient ligne i_1, colonne i_1 de M_n^k est

$$\sum_{(i_2,\ldots,i_k)\in[\![1,n]\!]^{k-1}} X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\ldots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}$$

puis

$$\text{Tr}\left(M_n^k\right) = \sum_{i_1=1}^{n}\left(\sum_{(i_2,\ldots,i_k)\in[\![1,n]\!]^{k-1}} X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\ldots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right) = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in[\![1,n]\!]^k} X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\ldots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a montré que

$$\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^{k}\right)=\frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}\left(M_n^k\right)\right)=\frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_k)\in[\![1,n]\!]^k}\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right),$$

ce qui reste vrai quand $k=1$.

Q 22. On fixe ℓ éléments deux à deux distincts de $[\![1,n]\!]$. Il y a au plus $\ell\times\ell\times\dots\times\ell=\ell^k$ cycles $(i_1,\dots,i_k,i_1)$ de longueur k admettant pour sommets ces ℓ éléments.

Maintenant, il y a $\binom{n}{\ell}$ choix possibles de ℓ éléments deux à deux distincts parmi $[\![1,n]\!]$ et de plus,

$$\binom{n}{\ell}=\frac{n(n-1)\dots(n-(\ell-1))}{\ell!}\leqslant n(n-1)\dots(n-(\ell-1))\leqslant n^\ell.$$

Au total, il y a au plus $n^\ell\ell^k$ cycles de longueur k passant par ℓ sommets deux à deux distincts.

Q 23. Par hypothèse, il existe $K\in\mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $|X_{i,j}|\leqslant K$. Donc, si $\overrightarrow{i}=(i_1,i_2,\dots,i_k,i_1)$ est un cycle de longueur k,

$$|X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}|=|X_{i_1,i_2}||X_{i_2,i_3}|\dots|X_{i_{k-1},i_k}||X_{i_k,i_1}|\leqslant K^k.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\sum_{\substack{\overrightarrow{i}\in[\![1,n]\!]^k\\ \left|\overrightarrow{i}\right|\leqslant (k+1)/2}}|\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)| &= \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\sum_{\ell=1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}\left(\sum_{\substack{\overrightarrow{i}\in[\![1,n]\!]^k\\ \left|\overrightarrow{i}\right|=\ell}}|\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)|\right)\\
&\leqslant \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\sum_{\ell=1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}\left(\sum_{\substack{\overrightarrow{i}\in[\![1,n]\!]^k\\ \left|\overrightarrow{i}\right|=\ell}}K^k\right)\\
&\leqslant \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\sum_{\ell=1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}\left(n^\ell\ell^kK^k\right)\ \text{(d'après Q22)}\\
&\leqslant \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\times\frac{k+1}{2}n^{\frac{k+1}{2}}\left(\frac{k+1}{2}\right)^kK^k\\
&=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}K^k\times\frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant\frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\sum_{\substack{\overrightarrow{i}\in[\![1,n]\!]^k\\ \left|\overrightarrow{i}\right|\leqslant (k+1)/2}}|\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)|\leqslant\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}K^k\times\frac{1}{\sqrt{n}}$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\sum_{\substack{\overrightarrow{i}\in[\![1,n]\!]^k\\ \left|\overrightarrow{i}\right|\leqslant (k+1)/2}}|\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)|=0$.

Q 24. Soit $(i_1,\dots,i_k,i_1)\in\mathscr{A}_k$. Soit (i_j,i_{j+1}) une arête de ce cycle apparaissant exactement une fois. D'après le lemme des coalitions les variables $X_{i_j,i_{j+1}}$ et $X_{i_1,i_2}\dots X_{i_{j-1},i_j}X_{i_{j+1},i_{j+2}}\dots X_{i_k,i_1}$ sont indépendantes. Donc,

$$\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}\dots X_{i_k,i_1}\right)=\mathbb{E}\left(X_{i_j,i_{j+1}}\right)\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}\dots X_{i_{j-1},i_j}X_{i_{j+1},i_{j+2}}\dots X_{i_k,i_1}\right)=0.$$

Q 25. Soit $\overrightarrow{i} \in \mathscr{C}_k$. Trois des arêtes sont les mêmes (à l'ordre près des sommets) et utilisent au plus 2 sommets distincts. Les $k-3$ arêtes restantes qui apparaissent au moins deux fois utilisent au plus $\dfrac{k-3}{2}$ sommets deux deux distincts. Au total, $\left|\overrightarrow{i}\right| \leqslant \dfrac{k-3}{2} + 2 = \dfrac{k+1}{2}$.

Q 26. k est le nombre d'arêtes de $\overrightarrow{i}$. Par construction, un élément de $\mathscr{B}_k$ est constitué d'un nombre pair d'arêtes. Donc, si k est impair, $\mathscr{B}_k$ est vide puis $\displaystyle\sum_{\overrightarrow{i} \in \mathscr{B}_k} \mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right) = 0$.

D'autre part, d'après Q24, $\displaystyle\sum_{i \in \mathscr{A}_k} \mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right) = 0$. Donc, puisque $[\![1,n]\!]^k$ est la réunion disjointe de $\mathscr{A}_k$, $\mathscr{B}_k$ et $\mathscr{C}_k$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\overrightarrow{i} \in [\![1,n]\!]^k} \mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)\right| &= \left|\sum_{\overrightarrow{i} \in \mathscr{C}_k} \mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{\overrightarrow{i} \in \mathscr{C}_k} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{\substack{\overrightarrow{i} \in [\![1,n]\!]^k \\ \left|\overrightarrow{i}\right| \leqslant (k+1)/2}} \left|\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)\right| \text{ (d'après Q25)}
\end{aligned}$$

puis, d'après Q21 et Q23,

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right)\right| &= \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\left|\sum_{\overrightarrow{i} \in [\![1,n]\!]^k} \mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{\overrightarrow{i} \in [\![1,n]\!]^k \\ \left|\overrightarrow{i}\right| \leqslant (k+1)/2}} \mathbb{E}\left|\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right)\right| \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (d'après Q23)}
\end{aligned}$$

et donc, quand k est impair, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = 0$.

Q 27. Dorénavant, on pose $p = \dfrac{k}{2}$ ou encore $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Chaque arête de $\overrightarrow{i}$ apparaît exactement deux fois. Donc, chaque parenthèse ouvrante trouve sa parenthèse fermante qui lui est postérieure ou encore $\overrightarrow{i}$ définit un mot bien parenthésé, de longueur k puisque $\overrightarrow{i}$ est constituée de $2p$ arêtes.

Q 28. Inversement, un mot bien parenthésé de longueur k définit d'abord les emplacements des paires d'arêtes identiques. Il reste à choisir les $p+1$ sommets deux à deux distincts et à les placer dans $p+1$ emplacements, ce qui fournit $\dbinom{n}{p+1}(p+1)!$ cycles deux à deux distincts. Ainsi, le nombre de cycles correspondant à un mot bien parenthésé fixé est

$$\binom{n}{\frac{k}{2}+1}\left(\frac{k}{2}+1\right)! = n(n-1)\dots\left(n-\frac{k}{2}\right),$$

puis

$$\operatorname{card}\left\{\overrightarrow{i} \in \mathscr{B}_k / \left|\overrightarrow{i}\right| = \frac{k}{2}+1\right\} = \binom{n}{\frac{k}{2}+1} \times \left(\frac{k}{2}+1\right)!\, C_{\frac{k}{2}} = n(n-1)\dots\left(n-\frac{k}{2}\right) C_{\frac{k}{2}}.$$

Q 29. Les arêtes d'un cycle $\overrightarrow{i}$ de $\mathscr{B}_k$ peuvent être décomposées en deux paquets identiques de p arêtes, passant chacune par $p+1$ sommets. Le nombre maximum de sommets deux à deux distincts de $\mathscr{B}_k$ est donc $p+1 = \dfrac{k}{2}+1$. Si un cycle $\overrightarrow{i}$ de $\mathscr{B}_k$ est tels que $\left|\overrightarrow{i}\right| < p+1$, alors $\left|\overrightarrow{i}\right| \leqslant n = \dfrac{k}{2} \leqslant \dfrac{k+1}{2}$. D'après les questions Q24, Q25 et Q23,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{\overrightarrow{i}\in\mathscr{B}_k \\ \left|\overrightarrow{i}\right| = \frac{k}{2}+1}} \mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right).$$

Si $\overrightarrow{i} \in \mathscr{B}_k$ est tel que $\left|\overrightarrow{i}\right| = \dfrac{k}{2}+1$, la variable $X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}$ peut se réécrire sous la forme $Y_1^2Y_2^2\dots Y_{k/2}^2$ où les variables Y_i, $1 \leqslant i \leqslant \dfrac{k}{2}$ sont deux à deux distinctes. Puisque ces variables sont indépendantes de variance égale à 1,

$$\mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right) = \mathbb{E}\left(Y_1^2\right)\dots\mathbb{E}\left(Y_{k/2}^2\right) = 1.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{\overrightarrow{i}\in\mathscr{B}_k \\ \left|\overrightarrow{i}\right| = \frac{k}{2}+1}} \mathbb{E}\left(X_{i_1,i_2}X_{i_2,i_3}\dots X_{i_{k-1},i_k}X_{i_k,i_1}\right) &= \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}} \sum_{\substack{\overrightarrow{i}\in\mathscr{B}_k \\ \left|\overrightarrow{i}\right| = \frac{k}{2}+1}} 1 = \frac{1}{n^{1+\frac{k}{2}}}\text{card}\left(\mathscr{B}_k\right) \\ &= \frac{n(n-1)\dots\left(n-\dfrac{k}{2}\right)}{n^{\frac{k}{2}+1}} C_{\frac{k}{2}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{k}{2}+1}}{n^{\frac{k}{2}+1}} C_{\frac{k}{2}} = C_{\frac{k}{2}}.\end{aligned}$$

On a montré que, si k est pair, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = C_{\frac{k}{2}}$.

III.C -

Q 30. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = m_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^k\sqrt{4-x^2}\,dx$. Soit alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P\left(\Lambda_{i,n}^k\right)\right) &= \sum_{k=0}^{p} a_k\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{i,n}^k\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{k=0}^{p} a_km_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\left(\sum_{k=0}^{p} a_kx^k\right)\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P(x)\sqrt{4-x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P\left(\Lambda_{i,n}^k\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P(x)\sqrt{4-x^2}\,dx$.

III.D -

Q 31. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Par croissance de l'espérance,

$$\begin{aligned}A^{p+2q}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p A^{p+2q}\right) \\ &\leqslant \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p |\Lambda_{i,n}|^{p+2q}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)\end{aligned}$$

et donc $\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) \leqslant \dfrac{1}{A^{p+2q}}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)$.

Q 32. Soit $p\in\mathbb{N}$. Soit $\varepsilon>0$. D'après les questions Q29 et Q16, pour tout $q\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right) = C_{p+q} = \dfrac{1}{p+q+1}\dbinom{2(p+q)}{p+q}$ $(*)$ avec

$$\frac{1}{p+q+1}\binom{2(p+q)}{p+q}\leqslant\binom{2(p+q)}{p+q}\leqslant\sum_{k=0}^{2(p+q)}\binom{2(p+q)}{k}=(1+1)^{2(p+q)}=2^{2(p+q)},$$

puis $\dfrac{1}{A^{p+2q}}\dfrac{1}{p+q+1}\dbinom{2(p+q)}{p+q}\leqslant 2^p\left(\dfrac{2}{A}\right)^{p+2q}$. Puisque $0<\dfrac{2}{A}<1$, $\lim\limits_{q\to+\infty}2^p\left(\dfrac{2}{A}\right)^{p+2q}=0$. On peut choisir $q\in\mathbb{N}$ tel que $2^p\left(\dfrac{2}{A}\right)^{p+2q}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. q est ainsi dorénavant fixé.

D'après $(*)$, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour $n\geqslant n_0$,

$$\frac{1}{A^{p+2q}}\times\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)\leqslant 2^p\left(\frac{2}{A}\right)^{p+2q}+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varepsilon.$$

Pour $n\geqslant n_0$, on a

$$0\leqslant\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|\Lambda_{i,n}|^p\right)\leqslant\frac{1}{A^{p+2q}}\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)\leqslant\frac{1}{A^{p+2q}}\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)\leqslant\varepsilon.$$

On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|\Lambda_{i,n}|^p\right)=0$.

Q 33. Si $p=0$, f est bornée et P est constant. Donc, la fonction $f-P$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\mathbb{R}\setminus]-A,A[$. Le résultat est donc vrai quand $p=0$. Dorénavant, $p\geqslant 1$.
Puisque f est bornée sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x^p}=0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{x^p}=\mathrm{dom}(P)$. Donc, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)-P(x)}{x^p}=-\mathrm{dom}(P)$.
En particulier, la fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)-P(x)}{x^p}$ est bornée sur un voisinage $]-\infty,B_1]$ de $-\infty$ avec $B_1\leqslant -A$ et sur un voisinage $[B_2,+\infty[$ de $+\infty$ avec $B_2\geqslant A$. D'autre part, la fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)-P(x)}{x^p}$ est continue sur les segments $[B_1,-A]$ et $[A,B_2]$.
Finalement, la fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)-P(x)}{x^p}$ est bornée sur $]-\infty,-A]\cup[A,+\infty[$. Donc, il existe $K\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus]-A,A[$, $\dfrac{|f(x)-P(x)|}{|x|^p}\leqslant K$ ou encore $|f(x)-P(x)|\leqslant K|x|^p$ (la constante K ce cette question n'est pas la constante K majorant les $|X_{i,j}|$).

Q 34. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, d'après Q33,

$$0\leqslant\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)\leqslant\frac{K}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|\Lambda_{i,n}|^p\right),$$

puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)=0$ d'après la question Q32 et le théorème des gendarmes.

III.E -

Q 35. Soit P un polynôme quelconque. On écrit d'abord

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,dx &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f-P+P)\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}(f-P+P)(x)\sqrt{4-x^2}\,dx\\ &= A_n+B_n-C\end{aligned}$$

où $A_n=\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f-P)\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)$, $B_n=\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}P(x)\sqrt{4-x^2}\,dx$ et $C=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}(f-P)(x)\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Soit $\varepsilon>0$. D'après le théorème d'approximation de WEIERSTRASS, puisque f est continue sur le segment $[-A,A]$ (avec $[-2,2]\subset]-A,A[$), on peut trouver un polynôme P tel que $\|f-P\|_{\infty,[-A,A]}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$. P est ainsi dorénavant fixé.

- D'abord, $|C|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}|f-P|(x)\sqrt{4-x^2}\,dx\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{\varepsilon}{4}m_0=\frac{\varepsilon}{4}$ d'après Q18.
- Ensuite, d'après Q30, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}P(x)\sqrt{4-x^2}\,dx=0$. Donc, il existe $n_1\in\mathbb{N}^*$ tel que pour $n\geqslant n_1$, $|B_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$.
- Pour $n\geqslant n_1$, on a $\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}f(x)\sqrt{4-x^2}\,dx\right|\leqslant|A_n|+|B_n|+|C|\leqslant|A_n|+\frac{\varepsilon}{2}$. Ensuite,

$$A_n=\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)+\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|<A}}|f-P|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right).$$

D'après la question Q34, il existe $n_0\geqslant n_1$ tel que, pour $n\geqslant n_2$, $\left|\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant A}}|f-P|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$. Pour $n\geqslant n_0$, on a

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}f(x)\sqrt{4-x^2}\,dx\right| &\leqslant\left|\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|<A}}|f-P|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)\right|+\frac{3\varepsilon}{4}.\\ &\leqslant\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|<A}}\frac{\varepsilon}{4}\right)+\frac{3\varepsilon}{4}\\ &\leqslant\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\varepsilon}{4}\right)+\frac{3\varepsilon}{4}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}f(x)\sqrt{4-x^2}\,dx$.

IV - Loi du demi-cercle, cas général

IV.A -

Q 36. Tout d'abord, pour tout réel C, $\left|X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right|\leqslant|X|$ et donc $X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}$ est d'espérance finie.

Ensuite, le résultat est immédiat si X est bornée car dans ce cas, pour $C\geqslant M$ où M est un majorant de $\{|X(\omega)|,\ \omega\in\Omega\}$, $\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right)=\mathbb{E}(X)$.

On suppose maintenant que l'ensemble des valeurs prises par X est un ensemble dénombrable non borné que l'on range en une suite non bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La famille $\left(x_n \mathbb{1}_{[-C,C]}(x_n) P(X = x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant sommable, on peut écrire pour $C \geqslant 0$,

$$E\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_n \mathbb{1}_{[-C,C]}(x_n) P(X = x_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $C \geqslant 0$, posons $f_n(C) = x_n \mathbb{1}_{[-C,C]}(x_n) P(X = x_n)$.

- Pour tout réel $C \geqslant 0$, $|f_n(C)| \leqslant |x_n| P(X = x_n)$ puis $\|f_n\|_\infty \leqslant |x_n| P(X = x_n)$. Puisque la série numérique de terme général $|x_n| P(X = x_n)$ converge, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément sur $[0, +\infty[$.
- $\lim\limits_{C\to+\infty} f_n(C) = x_n P(X = x_n)$.

D'après le théorème d'interversion des limites,

$$\lim_{C\to+\infty} \mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{|X|\leqslant C}\right) = \lim_{C\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{C\to+\infty} f_n(C) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) = \mathbb{E}(X).$$

Q 37. Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. D'après la formule de KÖENIG-HUYGENS,

$$\mathbb{V}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leqslant C}\right) = \mathbb{E}\left(X_{i,j}^2 \mathbb{1}^2_{|X_{i,j}|\leqslant C}\right) - \left(\mathbb{E}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leqslant C}\right)\right)^2 = \mathbb{E}\left(X_{i,j}^2 \mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leqslant C}\right) - \left(\mathbb{E}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leqslant C}\right)\right)^2.$$

Puisque $X_{i,j}$ et $X_{i,j}^2$ sont d'espérance finie, la question précédente montre que

$$\lim_{C\to+\infty} \sigma_{i,j}(C) = \sqrt{\mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X_{i,j}\right)\right)^2} = \sqrt{\mathbb{V}\left(X_{i,j}\right)} = 1.$$

Q 38. Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Puisque $\lim\limits_{C\to+\infty} \sigma_{i,j}(C) = 1$, il existe $C_{i,j} \in \mathbb{R}$ tel que, pour $C \geqslant C_{i,j}$, $\sigma_{i,j}(C) \geqslant \dfrac{1}{2}$. Donc, pour $C \geqslant C_{i,j}$, $\widehat{X_{i,j}}(C)$ est définie. De plus, les variables $\widehat{X_{i,j}}(C)$ sont centrées, de variance 1 et bornées car

$$\left|\widehat{X_{i,j}}(C)\right| \leqslant \frac{\left|X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leqslant C}\right| + \mathbb{E}\left(|X_{i,j}|\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leqslant C}\right)}{\sigma_{i,j}(C)} \leqslant \frac{C + C}{1/2} = 4C.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les variables $\widehat{X_{i,j}}(C)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, sont bien définies pour $C \geqslant C_0 = \mathrm{Max}\{C_{i,j},\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$, et indépendantes d'après le lemme des coalitions.

Q 39. Puisque $\mathbb{E}\left(X_{i,j}\right) = 0$,

$$\sigma_{i,j}(C)\widehat{X_{i,j}}(C) = X_{i,j}\left(1 - \mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right) - \mathbb{E}\left(X_{i,j}\left(1 - \mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right)\right) = X_{i,j} - \left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C} - \mathbb{E}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right)\right)$$

puis $\sigma_{i,j}(C)\left(X_{i,j} - \widehat{X_{i,j}}(C)\right) = \left(\sigma_{i,j}(C) - 1\right)X_{i,j} + \left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C} - \mathbb{E}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right)\right)$ et finalement

$$X_{i,j} - \widehat{X_{i,j}}(C) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)X_{i,j} + \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C} - \mathbb{E}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right)\right).$$

Q 40. $\mathbb{E}\left(\left(X_{i,j} - \widehat{X_{i,j}}(C)\right)^2\right) = u(C) + v(C) + w(C)$ où :

- $u(C) = \left(1 - \dfrac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)^2 \mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\right) = \left(1 - \dfrac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)^2$ car $\mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\right) = \mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X_{i,j}\right)\right)^2 = 1$. Mais alors,
$$\lim_{C\to+\infty} f(C) = \left(1 - \frac{1}{1}\right)^2 = 0.$$
- $v(C) = 2\left(1 - \dfrac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)\dfrac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\mathbb{E}\left(X_{i,j}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C} - \mathbb{E}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right)\right)\right) = 2\left(1 - \dfrac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)\dfrac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right)$ par linéarité de l'espérance et puisque $\mathbb{E}\left(X_{i,j}\right) = 0$. Mais alors,
$$|v(C)| \leqslant 2\left|1 - \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right|\frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sigma_{i,j}(C)}\right)\frac{1}{\sigma_{i,j}(C)} \underset{C\to+\infty}{\to} 2\times 0\times 1 = 0.$$

Donc, $\lim\limits_{C\to+\infty} \nu(C) = 0$.

- $\sigma_{i,j}(C)^2 h(C) = \mathbb{V}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right) = \mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right) - \left(\mathbb{E}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right)\right)^2$. De plus, d'après la question Q36,

$$\lim_{C\to+\infty} \mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right) = \lim_{C\to+\infty}\left(\mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\right) - \mathbb{E}\left(X_{i,j}^2\mathbb{1}_{|X_{i,j}|\leqslant C}\right)\right) = 0$$

et de même $\lim\limits_{C\to+\infty}\left(\mathbb{E}\left(X_{i,j}\mathbb{1}_{|X_{i,j}|>C}\right)\right)^2 = 0$. Puisque $\sigma_{i,j}(C)^2$, on a donc $\lim\limits_{C\to+\infty} h(C) = 0$.

Finalement, $\lim\limits_{C\to+\infty}\mathbb{E}\left(\left(X_{i,j} - \widehat{X_{i,j}}(C)\right)^2\right) = 0$.

IV.B -

Q 41. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité et croissance de l'espérance,

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\widehat{\Lambda_{i,n}}\right)\right)\right| &= \left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\Lambda_{i,n}\right) - f\left(\widehat{\Lambda_{i,n}}\right)\right)\right)\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\Lambda_{i,n}\right) - f\left(\widehat{\Lambda_{i,n}}\right)\right|\right) \\
&\leqslant \frac{K}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda_{i,n}}\right|\right) \\
&\leqslant \frac{K}{n}\mathbb{E}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda_{i,n}}\right)^2}\right) \\
&\quad \text{(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&= \frac{K}{n}\times\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\Lambda_{i,n} - \widehat{\Lambda_{i,n}}\right)^2}\right) \\
&\leqslant \frac{K}{n}\times\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left(\sqrt{\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\widehat{M_n}(C)\right\|_F^2}\right) \text{ (d'après la question Q8)} \\
&= \frac{K}{n}\mathbb{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M_n}(C)\right\|_F\right).
\end{aligned}$$

Q 42. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M_n}(C)\right\|_F\right) = \mathbb{E}\left(\sqrt{\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(X_{i,j} - \widehat{X_{i,j}}(C)\right)^2}\right)$.

D'après la question Q40, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir un réel C (dépendant de n) tel que

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(X_{i,j} - \widehat{X_{i,j}}(C)\right)^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{\varepsilon^2}{2(K+1)} = \frac{\varepsilon^2}{2(K+1)}n^2,$$

ce que l'on fait. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\widehat{\Lambda_{i,n}}\right)\right)\right| &\leqslant \frac{K}{n}\mathbb{E}\left(\left\|M_n - \widehat{M_n}(C)\right\|_F\right) \\
&\leqslant \frac{K}{n}\mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2(K+1)}n^2}\right) = \frac{\varepsilon K}{2(K+1)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Je n'arrive pas à finir en utilisant la partie III appliquée aux $\widehat{X_{i,j}}$ car encore une fois « les réels C sont fonctions de n ».

IV.C -

Q 43. Je ne parviens pas davantage à finir par épuisement.

