

Planche n° 28. Fractions rationnelles. Corrigé

Exercice n° 1

1) Soit $F = \frac{X^2 + 3X + 5}{X^2 - 3X + 2} = \frac{X^2 + 3X + 5}{(X-1)(X-2)}$.

1 et 2 ne sont pas racines du polynôme $X^2 + 3X + 5$ et donc F est bien sous forme irréductible. La partie entière est de degré $2 - 2 = 0$. La décomposition en élément simples de F s'écrit

$$F = a + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2},$$

où a , b et c sont deux réels.

- $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- $b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F(x) = \frac{1+3+5}{1-2} = -9$.
- $c = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)F(x) = \frac{4+6+5}{2-1} = 15$. Donc,

$$\frac{X^2 + 3X + 5}{X^2 - 3X + 2} = 1 - \frac{9}{X-1} + \frac{15}{X-2}.$$

2) Soit $F = \frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. F est sous forme irréductible. La partie entière de F est nulle. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3},$$

où a , b et c sont trois réels.

- $a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F(x) = \frac{1+1}{(1-2)(1-3)} = 1$.
- $b = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)F(x) = \frac{4+1}{(2-1)(2-3)} = -5$.
- $c = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)F(x) = \frac{9+1}{(3-1)(3-2)} = 5$. Donc,

$$\frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}.$$

3) Soit $F = \frac{1}{X(X-1)^2}$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2},$$

- $a = \lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = 1$.
- $c = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = 1$.
- Enfin, $a + b = \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$ et donc $b = -1$ (ou bien $x = -1$ fournit $-1 - \frac{b}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ et donc $b = -1$). Donc,

$$\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Autre démarche.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(X-1)^2} &= \frac{-(X-1) + X}{X(X-1)^2} = -\frac{1}{X(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{X-1-X}{X(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}. \end{aligned}$$

4) Soit $F = \frac{X^2 + 1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{X^2 + 1}{(X^2 - 1)^2}$. F est sous forme irréductible car 1 et -1 ne sont pas racine du numérateur. La partie entière de F est nulle. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

- $b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \frac{1}{2}$
- $x = 0$ fournit $-2a + 2b = 1$ et donc $a = 0$.

$$\frac{X^2 + 1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2} \right).$$

5) Soit $F = \frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{1}{(X^2-4)^3}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{(X-2)^3} - \frac{a}{X+2} + \frac{b}{(X+2)^2} - \frac{c}{(X+2)^3}.$$

- $c = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^3 F(x) = \frac{1}{64}$ puis,

$$\begin{aligned} F - \frac{1}{64} \left(\frac{1}{(X-2)^3} - \frac{1}{(X+2)^3} \right) &= \frac{64 - (X+2)^3 + (X-2)^3}{64(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{-12X^2 + 48}{64(X-2)^3(X+2)^3} \\ &= -\frac{3}{16} \frac{X^2 - 4}{(X-2)^3(X+2)^3} = -\frac{3}{16} \frac{1}{(X-2)^2(X+2)^2} \end{aligned}$$

- $b = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 \left(F(x) - \frac{1}{64} \left(\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x+2)^3} \right) \right) = -\frac{3}{16} \frac{1}{(2+2)^2} = -\frac{3}{256}.$
- Enfin, $x = 0$ fournit $-\frac{1}{64} = -a - \frac{3}{512} - \frac{1}{256}$ et $a = \frac{1}{64} - \frac{5}{512} = \frac{7}{512}$. Donc,

$$\frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{7}{512} \left(\frac{3}{X-2} - \frac{6}{(X-2)^2} + \frac{8}{(X-2)^3} - \frac{3}{X+2} - \frac{6}{(X+2)^2} - \frac{8}{(X+2)^3} \right).$$

6) Soit $F = \frac{X^3}{X^3-1} = \frac{P}{Q}$. On a déjà $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$.

Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{\bar{b}}{X-j^2}.$$

- $a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1^3}{3 \times 1^2} = \frac{1}{3}.$
- $b = \frac{P(j)}{Q'(j)} = \frac{1^3}{3j^2} = \frac{j}{3}.$

La décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} est

$$\frac{X^3}{X^3-1} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2} \right).$$

Décomposition sur \mathbb{R} .

1ère méthode. On utilise la décomposition sur \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} \frac{X^3}{X^3-1} &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2} \right) = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{j(X-j^2) + j^2(X-j)}{(X-j)(X-j^2)} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{X^3}{X^3-1} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{X+2}{X^2+X+1} \right).$$

2ème méthode. On trouve directement la décomposition sur \mathbb{R} sans passer par \mathbb{C} . Puisque $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$ et que le trinôme $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine réelle, la décomposition sur \mathbb{R} s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}.$$

- $a = \frac{1^3}{3 \times 1^2} = \frac{1}{3}.$

- $c + bj = \lim_{z \rightarrow j} (z^2 + z + 1)F(z) = \lim_{z \rightarrow j} \frac{z^3}{z-1} = \frac{j^3}{j-1} = \frac{j^2-1}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{-1-j-1}{j^3-j-j^2+1} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}j.$

Puisque j n'est pas réel, on en déduit que $c = -\frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$ et on retrouve le résultat précédent.

7) Soit $F = \frac{X^6}{(X^3-1)^2}$. On a déjà $(X^3-1)^2 = (X-1)^2(X-j)^2(X-j^2)^2$.

Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\bar{c}}{X-j^2} + \frac{\bar{d}}{(X-j^2)^2}.$$

- $b = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 F(z) = \frac{1^6}{(1^2+1+1)^2} = \frac{1}{9}$

- Ensuite

$$\begin{aligned} d &= \lim_{z \rightarrow j} (z-j)^2 F(z) = \frac{j^6}{(j-1)^2(j-j^2)^2} = \frac{1}{j^2(j-1)^4} = \frac{1}{j^2(j^2-2j+1)^2} \\ &= \frac{1}{j^2(-3j)^2} = \frac{j^2}{9}. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{(j+j^2)X^2 - 2(j+j^2)X + 2}{(X-j)^2(X-j^2)^2} \\ &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-X^2 + 2X + 2}{(X-j)^2(X-j^2)^2} = \frac{(X^2+X+1)^2 + (X-1)^2(-X^2+2X+2)}{(X^3-1)^2} \\ &= \frac{(X^4+2X^3+3X^2+2X+1) + (X^2-2X+1)(-X^2+2X+2)}{(X^3-1)^2} \\ &= \frac{6X^3+3}{(X^3-1)^2}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F - 1 - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} \right) &= \frac{X^6}{(X^3-1)^2} - 1 - \frac{2X^3+1}{3(X^3-1)^2} \\ &= \frac{3X^6 - 3(X^3-1)^2 - 2X^3 - 1}{3(X^3-1)^2} = \frac{4X^3-4}{3(X^3-1)^2} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{X^3-1}. \end{aligned}$$

Mais alors, $a = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3 \times 1^2} = \frac{4}{9}$. De même, $c = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3j^2} = \frac{4j}{9}$.

Donc,

$$\frac{X^6}{(X^3-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{4j}{X-j} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{4j^2}{X-j^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} \right).$$

Décomposition sur \mathbb{R} . On regroupe les conjugués.

$$\begin{aligned}
 F &= 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{4j(X-j^2) + 4j^2(X-j)}{X^2 + X + 1} + \frac{j^2(X-j^2)^2 + j(X-j)^2}{(X^2 + X + 1)^2} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-4X-8}{X^2 + X + 1} + \frac{-X^2 + 2X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-4X-8}{X^2 + X + 1} + \frac{-X^2 - X - 1 + 3X + 3}{(X^2 + X + 1)^2} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{4X+9}{X^2 + X + 1} + \frac{3X+3}{(X^2 + X + 1)^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\frac{X^6}{(X^3-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{4X+9}{X^2 + X + 1} + \frac{3X+3}{(X^2 + X + 1)^2} \right).$$

8) Soit $F = \frac{1}{X^6+1}$. $F = \sum_{k=0}^5 \frac{\lambda_k}{X - \omega_k}$ où $\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6})}$. De plus, pour $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$,

$$\lambda_k = \frac{1}{6\omega_k^5} = \frac{\omega_k}{6\omega_k^6} = -\frac{\omega_k}{6}.$$

Donc,

$$\frac{1}{X^6+1} = \frac{1}{6} \left(-\frac{i}{X-i} + \frac{i}{X+i} - \frac{e^{i\pi/6}}{X-e^{i\pi/6}} - \frac{e^{-i\pi/6}}{X-e^{-i\pi/6}} + \frac{e^{i\pi/6}}{X+e^{i\pi/6}} + \frac{e^{-i\pi/6}}{X+e^{-i\pi/6}} \right).$$

Décomposition sur \mathbb{R} . On utilise la décomposition sur \mathbb{C} .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{X^6+1} &= \frac{1}{6} \left(-\frac{i}{X-i} + \frac{i}{X+i} - \frac{e^{i\pi/6}}{X-e^{i\pi/6}} - \frac{e^{-i\pi/6}}{X-e^{-i\pi/6}} + \frac{e^{i\pi/6}}{X+e^{i\pi/6}} + \frac{e^{-i\pi/6}}{X+e^{-i\pi/6}} \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{2}{X^2+1} + \frac{-e^{i\pi/6}(X-e^{-i\pi/6}) - e^{-i\pi/6}(X-e^{i\pi/6})}{(X-e^{i\pi/6})(X-e^{-i\pi/6})} + \frac{e^{i\pi/6}(X+e^{-i\pi/6}) + e^{-i\pi/6}(X+e^{i\pi/6})}{(X+e^{i\pi/6})(X+e^{-i\pi/6})} \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(\frac{2}{X^2+1} + \frac{-\sqrt{3}X+2}{X^2-\sqrt{3}X+1} + \frac{\sqrt{3}X+2}{X^2+\sqrt{3}X+1} \right).
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{X^6+1} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{X^2+1} + \frac{-\sqrt{3}X+2}{X^2-\sqrt{3}X+1} + \frac{\sqrt{3}X+2}{X^2+\sqrt{3}X+1} \right).$$

9) Soit $F = \frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$.

$$\begin{aligned}
 X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2 &= (X-1)(X^4-2X^3+3X^2-4X+2) = (X-1)^2(X^3-X^2+2X-2) \\
 &= (X-1)^2(X^2(X-1)+2(X-1)) = (X-1)^3(X^2+2).
 \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} est donc de la forme

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{X-i\sqrt{2}} + \frac{\bar{d}}{X+i\sqrt{2}}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
 d &= \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} (z - i\sqrt{2}) F(z) = \frac{(i\sqrt{2})^2 + 3}{(i\sqrt{2}-1)^3(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})} = \frac{1}{(2i\sqrt{2})(-2i\sqrt{2}+6+3i\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{-4+10i\sqrt{2}} \\
 &= -\frac{2+5i\sqrt{2}}{108}.
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{d}{X-i\sqrt{2}} + \frac{\bar{d}}{X+i\sqrt{2}} = -\frac{1}{108} \frac{(2+5i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2}) + (2-5i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})}{X^2+2} = -\frac{1}{108} \frac{4X-20}{X^2+2} = \frac{-X+5}{27(X^2+2)}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} &= \frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} - \frac{-X+5}{27(X^2+2)} \\ &= \frac{27(X^2+3) - (-X+5)(X-1)^3}{27(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{27X^2+81 + (X-5)(X^3-3X^2+3X-1)}{27(X-1)^3(X^2+2)} \\ &= \frac{X^4-8X^3+45X^2-16X+86}{27(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{(X^2+2)(X^2-8X+43)}{27(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{X^2-8X+43}{27(X-1)^3} \\ &= \frac{X^2-2X+1-6X+6+36}{27(X-1)^3} = \frac{1}{27} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{6}{(X-1)^2} + \frac{36}{(X-1)^3} \right). \end{aligned}$$

Finalement, la décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} est

$$F = \frac{1}{27} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{6}{(X-1)^2} + \frac{36}{(X-1)^3} \right) - \frac{1}{108} \left(\frac{2+5i\sqrt{2}}{X-i\sqrt{2}} + \frac{2-5i\sqrt{2}}{X+i\sqrt{2}} \right),$$

et la décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{R} est

$$F = \frac{1}{27} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{6}{(X-1)^2} + \frac{36}{(X-1)^3} + \frac{-X+5}{X^2+2} \right).$$

10) Soit $F = \frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$.

$$\begin{aligned} X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1 &= X^4(X-1) + X^2(X-1) + (X-1) = (X-1)(X^4 + X^2 + 1) \\ &= (X-1)((X^4 + 2X^2 + 1) - X^2) = (X-1)((X^2+1)^2 - X^2) \\ &= (X-1)(X^2+X+1)(X^2-X+1) = (X-1)(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2). \end{aligned}$$

Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F sur \mathbb{C} est de la forme

$$F = aX + b + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X-j} + \frac{\bar{d}}{X-j^2} + \frac{e}{X+j} + \frac{\bar{e}}{X+j^2}.$$

- $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 1$, puis $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \dots}{x^5 \dots} = 1$.
- $c = \frac{1^6+1}{5 \times 1^4 - 4 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1} = \frac{2}{3}$,
- $d = \frac{j^6+1}{5j^4 - 4j^3 + 3j^2 - 2j + 1} = \frac{2}{3j^2 + 3j - 3} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$
- $e = \frac{(-j)^6+1}{5(-j)^4 - 4(-j)^3 + 3(-j)^2 - 2(-j) + 1} = \frac{2}{3j^2 + 7j + 5} = \frac{1}{2j+1} = \frac{2j^2+1}{3}$. Donc,

$$\frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1} = X+1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{X-1} - \frac{1}{X-j} - \frac{1}{X-j^2} + \frac{2j^2+1}{X+j} + \frac{2j+1}{X+j^2} \right).$$

11) Soit $F = \frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$. La décomposition sur \mathbb{R} s'obtient de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3} &= \frac{X^7 + X^6 + X^5 - X^6 - X^5 - X^4 + X^4 + X^3 + X^2 - X^3 - X^2 - X + X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} \\
&= \frac{(X^5 - X^4 + X^2 - X)(X^2 + X + 1) + X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} = \frac{X^5 - X^4 + X^2 - X}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} \\
&= \frac{X^5 + X^4 + X^3 - 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X^3 + X^2 + X + 2X^2 + 2X + 2 - 4X - 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} \\
&= \frac{X^3 - 2X^2 + X + 2}{X^2 + X + 1} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} \\
&= \frac{X^3 + X^2 + X - 3X^2 - 3X - 3 + 3X + 5}{X^2 + X + 1} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3} \\
&= X - 3 + \frac{3X + 5}{X^2 + X + 1} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3} = X - 3 + \frac{3X + 5}{X^2 + X + 1} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3}.$$

Exercice n° 2

1) Soient $P = X^n - 1$ puis $F = \frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle et les pôles de F sont simples (car $P = X^n - 1$ et $P' = nX^{n-1}$ n'ont pas de racines communes dans \mathbb{C}). De plus, $P = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$ où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Donc, $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\lambda_k = \frac{1}{P'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X - e^{2ik\pi/n}}.$$

2) Soit $P = (X - 1)(X^n - 1) = (X - 1)^2 (X^{n-1} + \dots + X + 1) = (X - 1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$ où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Soit $F = \frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle. D'autre part, F admet un pôle double, à savoir 1 et $n-1$ pôles simples à savoir les $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $1 \leq k \leq n-1$. Donc,

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k}.$$

- Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\lambda_k = \frac{1}{P'(\omega_k)} = \frac{1}{(n+1)\omega_k^n - n\omega_k^{n-1} - 1} = \frac{1}{n(1 - \omega_k^{n-1})} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)}$.
- $b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \frac{1}{1^{n-1} + \dots + 1^1 + 1} = \frac{1}{n}$.
- Il reste à calculer a .

$$F - \frac{1}{n(X-1)^2} = \frac{n - (X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)}{n(X-1)^2(X^{n-1} + \dots + X + 1)} = \frac{-X^{n-2} - 2X^{n-3} - \dots - (n-2)X - (n-1)}{n(X-1)(X^{n-1} + \dots + X + 1)}.$$

$$\text{Donc, } a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left(F(x) - \frac{1}{n(x-1)^2} \right) = \frac{-[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1]}{n(1 + 1 + \dots + 1)} = -\frac{n-1}{2n}. \text{ Finalement,}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(X-1)(X^n-1)} = \frac{1}{n} \left(-\frac{n-1}{2(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{\omega_k-1} \frac{1}{X-\omega_k} \right).$$

$$3) \frac{n!}{(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X-k} \text{ avec}$$

$$\lambda_k = \lim_{x \rightarrow k} (x-k)F(x) = \frac{n!}{\prod_{j \neq k} (j-k)} = \frac{n!}{(-1)^{k-1} (k-1)!(n-k)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n!}{(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{\binom{n}{k}}{X-k}.$$

$$4) \text{ Posons } P = X^4 - 2X^2 \cos(2\alpha) + 1 \text{ puis } F = \frac{X^2}{P}.$$

$$\begin{aligned} X^4 - 2X^2 \cos(2\alpha) + 1 &= (X^2 - e^{2i\alpha})(X^2 - e^{-2i\alpha}) = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha})(X + e^{i\alpha})(X + e^{-i\alpha}) \\ &= (X^2 - 2X \cos \alpha + 1)(X^2 + 2X \cos \alpha + 1). \end{aligned}$$

P est à racines simples si et seulement si $e^{i\alpha} \neq \pm e^{-i\alpha}$ ce qui équivaut à $\alpha \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$, puisque F est paire

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} - \frac{A}{X+1} + \frac{B}{(X+1)^2}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \frac{1^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} \text{ puis } x=0 \text{ fournit } 0 = -2A + 2B \text{ et donc } A = B = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Si } \alpha \in \pi\mathbb{Z}, \frac{X^2}{X^4 - 2X^2 \cos(2\alpha) + 1} = \frac{X^2}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} \right).$$

2ème cas. Si $\alpha \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{A}{X-i} + \frac{B}{(X-i)^2} - \frac{A}{X+i} + \frac{B}{(X+i)^2}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow i} (x-i)^2 F(x) = \frac{i^2}{(i+i)^2} = \frac{1}{4} \text{ puis } x=0 \text{ fournit } 0 = 2iA - 2B \text{ et donc } A = -iB = -\frac{i}{4}.$$

$$\text{Si } \alpha \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \frac{X^2}{X^4 - 2X^2 \cos(2\alpha) + 1} = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{i}{X-i} + \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} + \frac{1}{(X+i)^2} \right).$$

Pour obtenir la décomposition sur \mathbb{R} , on écrit directement

$$F = \frac{X^2+1-1}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2}.$$

$$\text{Si } \alpha \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \frac{X^2}{X^4 - 2X^2 \cos(2\alpha) + 1} = \frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2}.$$

3ème cas. Si $a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, puisque F est réelle et paire,

$$F = \frac{A}{X - e^{ia}} + \frac{\bar{A}}{X - e^{-ia}} - \frac{A}{X + e^{ia}} - \frac{\bar{A}}{X + e^{-ia}},$$

avec

$$A = \frac{e^{2ia}}{(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ia} + e^{ia})(e^{ia} + e^{-ia})} = \frac{e^{2ia}}{8i \sin a \cos a e^{ia}} = \frac{-ie^{ia}}{4 \sin(2a)}.$$

Donc,

$$\text{Si } a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}, \frac{X^2}{X^4 - 2X^2 \cos(2a) + 1} = \frac{1}{4 \sin(2a)} \left(-\frac{ie^{ia}}{X - e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X - e^{-ia}} + \frac{ie^{ia}}{X + e^{ia}} - \frac{ie^{-ia}}{X + e^{-ia}} \right).$$

Pour obtenir la décomposition sur \mathbb{R} , on regroupe les conjugués

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4 \sin(2a)} \left(\frac{-ie^{ia}(X - e^{-ia}) + ie^{-ia}(X - e^{ia})}{(X - e^{ia})(X - e^{-ia})} + \frac{ie^{ia}(X + e^{-ia}) - ie^{-ia}(X + e^{ia})}{(X + e^{ia})(X + e^{-ia})} \right) \\ &= \frac{1}{4 \sin(2a)} \left(\frac{2X \sin(a)}{X^2 - 2X \cos(a) + 1} - \frac{2X \sin(a)}{X^2 + 2X \cos(a) + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4 \cos(a)} \left(\frac{X}{X^2 - 2X \cos(a) + 1} - \frac{X}{X^2 + 2X \cos(a) + 1} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Si } a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}, \frac{X^2}{X^4 - 2X^2 \cos(2a) + 1} = \frac{1}{4 \cos(a)} \left(\frac{X}{X^2 - 2X \cos(a) + 1} - \frac{X}{X^2 + 2X \cos(a) + 1} \right).$$

5) Le polynôme $X^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}\right)} \right)$ est à racines simples car n'a pas de racine commune dans \mathbb{C} avec sa dérivée. En posant $\omega_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}$, on a

$$\frac{1}{X^{2n} + 1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k},$$

où

$$\lambda_k = \frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}} = \frac{\omega_k}{2n\omega_k^{2n}} = -\frac{\omega_k}{2n}.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{X^{2n} + 1} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}}{X - e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}}.$$

Pour décomposer $\frac{1}{X^{2n} + 1}$ sur \mathbb{R} , on regroupe les conjugués. Pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$,

$$\omega_{2n-1-k} = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{(2n-1-k)\pi}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{n} + \frac{-k\pi}{n}\right)} = e^{-i\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)} = \overline{\omega_k}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^{2n} + 1} &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\omega_k}{X - \omega_k} + \frac{\overline{\omega_k}}{X - \overline{\omega_k}} \right) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k(X - \overline{\omega_k}) + \overline{\omega_k}(X - \omega_k)}{(X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k})} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)X + 1}{X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)X + 1}. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{X^{2n} + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)X + 1}{X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)X + 1}.$$

Exercice n° 3

Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, posons $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Décomposons F en éléments simples (sur \mathbb{C}). Soit $\omega \in U_n$.

$$\frac{\omega X + 1}{\omega^2 X^2 + \omega X + 1} = \frac{\omega X + 1}{(\omega X)^2 + \omega X + 1} = \frac{\omega X + 1}{(\omega X - j)(\omega X - j^2)} = \frac{a}{\omega X - j} + \frac{b}{\omega X - j^2},$$

avec $a = \frac{\omega \times \frac{j}{\omega} + 1}{\omega \times \frac{j}{\omega} - j^2} = \frac{j + 1}{j - j^2} = -\frac{j^2}{j - j^2} = \frac{j}{j - 1}$ et de même $b = \frac{j^2 + 1}{j^2 - j} = -\frac{1}{j - 1}$. Donc,

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{j-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{j}{\omega_k X - j} - \frac{1}{\omega_k X - j^2} \right) = \frac{1}{j-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{j\omega_{-k}}{X - j\omega_{-k}} - \frac{\omega_{-k}}{X - j^2\omega_{-k}} \right) \\ &= \frac{1}{j-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{j\omega_k}{X - j\omega_k} - \frac{\omega_k}{X - j^2\omega_k} \right). \end{aligned}$$

Maintenant les n nombres $j\omega_k$ sont deux à deux distincts et vérifient $(j\omega_k)^n = j^n$ et donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X - j\omega_k) = X^n - j^n.$$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{j\omega_k}{X - j\omega_k}$ est donc la décomposition en éléments simples d'une fraction du type $\frac{P}{X^n - j^n}$ avec $\deg P \leq n-1$. De plus,

par unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples sur \mathbb{C} , on sait que $j\omega_k = \frac{P(j\omega_k)}{n(j\omega_k)^{n-1}}$ et donc, $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $P(j\omega_k) = nj^n$. Le polynôme $P - nj^n$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$, admet les n racines deux à deux distinctes $j\omega_k$ et est donc le polynôme nul. Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{j\omega_k}{X - j\omega_k} = \frac{nj^n}{X^n - j^n}.$$

De même, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X - j^2\omega_k} = \frac{nj^{2n-2}}{X^n - j^{2n}}$, puis

$$F = \frac{n}{j-1} \left(\frac{j^n}{X^n - j^n} - \frac{j^{2n-2}}{X^n - j^{2n}} \right).$$

- Si $n \in 3\mathbb{N}$, posons $n = 3p$ où $p \in \mathbb{N}$. Dans ce cas,

$$F = \frac{3p}{j-1} \left(\frac{1}{X^{3p} - 1} - \frac{j}{X^{3p} - 1} \right) = \frac{3p}{1 - X^{3p}}.$$

- Si $n \in 3\mathbb{N} + 1$, posons $n = 3p + 1$ où $p \in \mathbb{N}$. Dans ce cas,

$$F = \frac{3p+1}{j-1} \left(\frac{j}{X^{3p+1} - j} - \frac{1}{X^{3p+1} - j^2} \right) = \frac{(3p+1)(X^{3p+1} + 1)}{X^{6p+2} + X^{3p+1} + 1}.$$

- Si $n \in 3\mathbb{N} + 2$, posons $n = 3p + 2$ où $p \in \mathbb{N}$. Dans ce cas,

$$F = \frac{3p+2}{j-1} \left(\frac{j^2}{X^{3p+2} - j^2} - \frac{j^2}{X^{3p+2} - j} \right) = \frac{3p+2}{X^{6p+4} + X^{3p+2} + 1}.$$

Exercice n° 4

Soient P et Q deux polynômes non nuls et premiers entre eux, puis soit $F = \frac{P}{Q}$. Si F est paire, alors $\frac{P(-X)}{Q(-X)} = \frac{P(X)}{Q(X)}$, ou encore $P(-X)Q(X) = P(X)Q(-X)$ (*).

Par suite, $P(X)$ divise $P(X)Q(-X) = Q(X)P(-X)$ et $P(X)$ est premier à $Q(X)$. D'après le théorème de GAUSS, $P(X)$ divise $P(-X)$. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(-X) = \lambda P(X)$ (car $\deg(P(-X)) = \deg(P)$). L'analyse des coefficients dominants des deux membres fournit $\lambda = (-1)^n$ où $n = \deg P$. Ceci s'écrit $P(-X) = (-1)^n P(X)$. En reportant dans (*), on obtient encore $Q(-X) = (-1)^n Q(X)$. Ainsi, si F est paire, alors P et Q sont ou bien tous deux pairs, ou bien tous deux impairs. Ce dernier cas est exclu, car alors P et Q admettraient tous deux 0 pour racine contredisant le fait qu'ils sont premiers entre eux. Finalement, si F est paire, alors P et Q sont pairs. La réciproque est claire.

$$F \text{ paire} \Leftrightarrow (P \text{ et } Q \text{ sont pairs.})$$

Je vous laisse établir que

$$F \text{ impaire} \Leftrightarrow (P \text{ est impair et } Q \text{ est pair}) \text{ ou } (P \text{ est pair et } Q \text{ est impair.})$$

Exercice n° 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i} \right)$. Donc,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{X^2+1} \right)^{(n)} &= \frac{1}{2i} \left[\left(\frac{1}{X-i} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{X+i} \right)^{(n)} \right] = \frac{1}{2i} \left(\frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{(X-i)^{n+1}} - \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{(X+i)^{n+1}} \right) \\ &= (-1)^n n! \operatorname{Im} \left(\frac{1}{(X-i)^{n+1}} \right) = (-1)^n n! \operatorname{Im} \left(\frac{(X+i)^{n+1}}{(X^2+1)^{n+1}} \right) \\ &= (-1)^n n! \frac{\sum_{0 \leq k \leq n/2} (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} X^{n-2k}}{(X^2+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Exercice n° 6

Si $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ ($n \geq 1$), on sait que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - z_k}.$$

Si maintenant, on regroupe les pôles identiques ou encore si on pose $P = \lambda(X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_k)^{\alpha_k}$ où cette fois-ci les z_j sont deux à deux distincts. La formule ci-dessus s'écrit alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{X - z_j} \quad (*).$$

Déterminons alors les polynômes divisibles par leur dérivée. Soit P un tel polynôme. Nécessairement $\deg(P) \geq 1$ puis, il existe deux complexes a et b , $a \neq 0$ tel que $P = (aX + b)P'$ ou encore $\frac{P'}{P} = \frac{1}{aX + b}$. (*) montre que P a une et une seule racine. Par suite, P est de la forme $\lambda(X - a)^n$, $\lambda \neq 0$, $n \geq 1$ et a quelconque.

Réciproquement, on a dans ce cas $P = \frac{1}{n}(X - a) \times n(X - a)^{n-1} = \left(\frac{1}{n}X - \frac{a}{n} \right) P'$ et P' divise effectivement P .

Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X - a)^n$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

Exercice n° 7

1)

$$\begin{aligned} X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 &= X^2 \left(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2 \left(X + \frac{1}{X} \right) + 3 \right) = X^2 \left(\left(X + \frac{1}{X} \right)^2 + 2 \left(X + \frac{1}{X} \right) + 1 \right) \\ &= X^2 \left(X + \frac{1}{X} + 1 \right)^2 = (X^2 + X + 1)^2 = (X - j)^2 (X - j^2)^2. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation proposée sont j et j^2 .

2) Soit $P = X^6 - 5X^5 + 5X^4 - 5X^2 + 5X - 1$. 1 et -1 sont racines de P . On écrit donc $P = (X^2 - 1)(X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1)$ puis

$$\begin{aligned} X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1 &= X^2 \left(\left(X^2 + \frac{1}{X^2} \right) - 5 \left(X + \frac{1}{X} \right) + 6 \right) = X^2 \left(\left(X + \frac{1}{X} \right)^2 - 5 \left(X + \frac{1}{X} \right) + 4 \right) \\ &= X^2 \left(X + \frac{1}{X} - 1 \right) \left(X + \frac{1}{X} - 4 \right) = (X^2 - X + 1) (X^2 - 4X + 1) \end{aligned}$$

et donc, $P = (X - 1)(X + 1)(X + j)(X + j^2)(X - 2 + \sqrt{3})(X - 2 - \sqrt{3})$. Les solutions de l'équation proposée sont $1, -1, -j, -j^2, 2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$.

3)

$$\begin{aligned} P &= X^7 - X^6 - 7X^5 + 7X^4 + 7X^3 - 7X^2 - X + 1 = (X^2 - 1)(X^5 - X^4 - 6X^3 + 6X^2 + X - 1) \\ &= (X - 1)^2(X + 1)(X^4 - 6X^2 + 1) \\ &= (X - 1)^2(X + 1)(X^2 - (3 + 2\sqrt{2}))(X^2 - (3 - 2\sqrt{2})) \end{aligned}$$

Les racines de P dans \mathbb{C} sont 1 (d'ordre 2), $-1, \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}, -\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}, \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ et $-\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

Exercice n° 7

Pour chacun des 8 numérateurs possibles, il y a $\binom{7}{2} = 21$ dénominateurs et donc au total, $8 \times 21 = 168$ termes.

$$\sum \frac{x_1}{x_2 x_3} = \sum \frac{x_1^2 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8}{x_1 x_2 \dots x_8} = \frac{1}{\sigma_8} \sum x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = \frac{1}{3} \sum x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6.$$

Ensuite,

$$\sigma_1 \sigma_6 = \left(\sum x_1 \right) \left(\sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \right) = \sum x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7,$$

et donc,

$$\sum x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = \sigma_1 \sigma_6 - \sigma_7 = (-1) \times 0 - 1 = -1.$$

Donc, $\sum \frac{x_1}{x_2 x_3} = -\frac{1}{3}.$