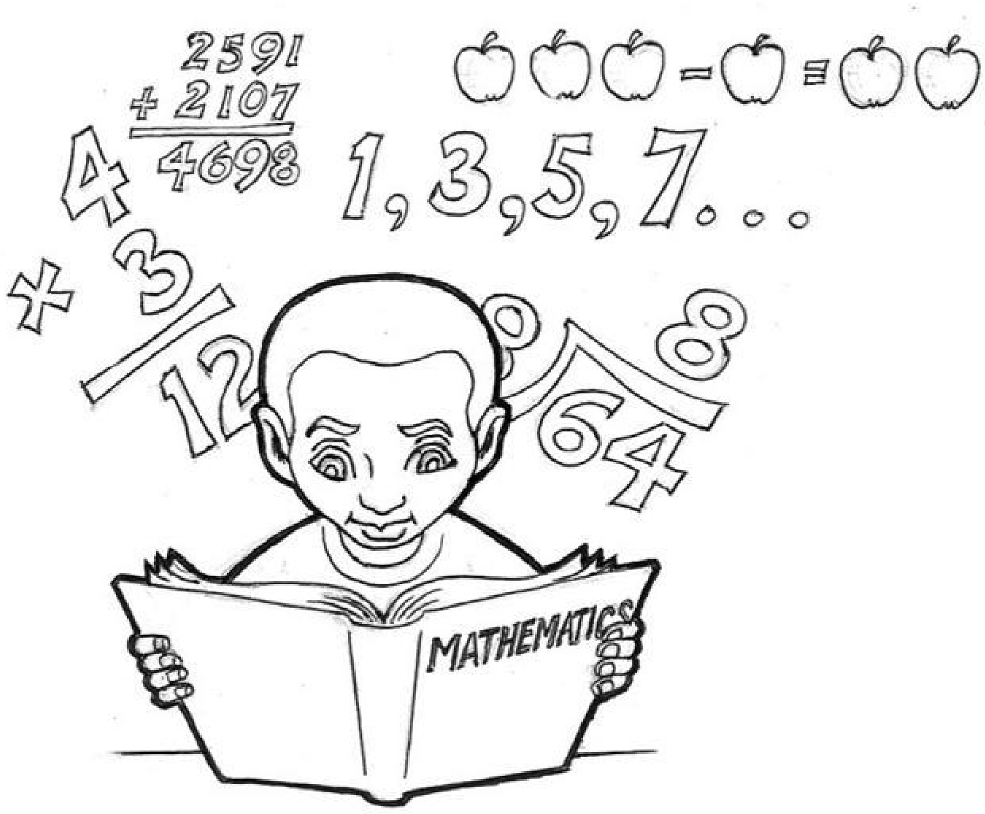
ALGEBRE et GEOMETRIE

Partie I

ALGEBRE LINEAIRE



Mohamed HOUIMDI

Version octobre 2008

Table des matières

Chapitre 1

Compléments sur les espaces vectoriels

1.1 Définitions et propriètés élémentaires

1.1.1 Espace vactoriel sur un corps commutatif quelconque

Définition 1.1.1
Soient $(E,+)$ un groupe commutatif et $(K,+,\times)$ un corps commutatif. On dit que E est un K-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur K) s'il existe une application :

$$\begin{aligned} K \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda.x \end{aligned}$$

appelée loi externe sur E et vérifiant les axiomes suivants :
i) $\forall x \in E,\ 1_K x = x$
ii) $\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
iii) $\forall \alpha \in K,\ \forall \beta \in K,\ \forall x \in E,\ (\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$
iv) $\forall \alpha \in K,\ \forall \beta \in K,\ \forall x \in E,\ (\alpha \times \beta).x = \alpha.(\beta.x)$

Remarque 1.1.1
Si E est un K-espace vectoriel, les éléments de E s'appellent des **vecteurs** *et se notent x , y , z ... et les éléments de K s'appellent des* **scalaires** *et se notent α , β , γ , λ , ...*

1.1.2 Conséquences de la définition

- $\forall x \in E, 0_K.x = 0_E$:
  On a $(0_K + 0_K).x = 0_K.x + 0_K.x$ et $(0_K + 0_K).x = 0_K.x$
  Donc $0_K.x = 0_E$ (car $(E,+)$ est un groupe)
- $\forall \lambda \in K, \lambda.0_E = 0_E$:
  On a $\lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$ et $\lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E$
  Donc pour la même raison , on a le résultat
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \lambda.x = 0_E \Longleftrightarrow x = 0_E$ ou $\lambda = 0_K$:
  $(\Longleftarrow)$ déjà vu
  $(\Longrightarrow)$ Supposons que $\lambda.x = 0_E$ et $x \neq 0_E$ et montrons que $\lambda = 0_K$

$\lambda.x = 0_E \implies \lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E$
Or on a $\lambda^{-1}.(\lambda.x) = (\lambda^{-1} \times \lambda).x = 1_K.x = x$ et $\lambda^{-1}.0_K = 0_E$
d'où le résultat

1.1.3 Exemples fondamentaux

1. Soient $(L, +, \times)$ un corps commutatif et K un sous-corps de L, alors L peut-être considéré comme un K-espace vectoriel pour la loi externe :

$$\begin{aligned} K \times L &\longrightarrow L \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda.x = \lambda \times x \end{aligned}$$

   Par exemple :
   – $L = \mathbb{C}$ *et* $K = \mathbb{R}$
   – $L = \mathbb{C}$ *et* $K = \mathbb{Q}$
   – $L = \mathbb{R}$ *et* $K = \mathbb{Q}$
   En particulier, tout corps commutatif K peut-être considéré comme un K-espace vectoriel sur lui-même

2. Soit K un corps commutatif, alors pour tout entier $n \geq 1$,K^n est un K-espace vectoriel pour la loi externe :

$$\begin{aligned} K \times K^n &\longrightarrow K^n \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda.x \end{aligned}$$

   Où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\lambda.x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

3. Soient K un corps commutatif, on désigne par $K^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites d'éléments de K. Alors $K^{\mathbb{N}}$ est un K-espace vectoriel pour la loi externe :

$$\begin{aligned} K \times K^{\mathbb{N}} &\longrightarrow K^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda.x \end{aligned}$$

   Où $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\lambda.x = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

4. Soient K un corps commutatif, A un ensemble quelconque et K^A l'ensemble de toutes les applications $f : A \longrightarrow K$. Alors K^A est un K-espace vectoriel pour la loi externe :

$$\begin{aligned} K \times K^A &\longrightarrow K^A \\ (\lambda, f) &\longmapsto \lambda.f \end{aligned}$$

   où $\lambda.f$ est l'application de A vers K défini par :

$$\forall x \in A,\ (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$$

   Rappelons aussi que si f et g sont deux éléments de $\mathbb{R}^A$, alors $f + g$ est définie par :

$$\forall x \in E,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

5. Soient K un corps commutatif et $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K. Alors $K[X]$ est un K-espace vectoriel pour la loi externe :

$$\begin{aligned} K \times K[X] &\longrightarrow K[X] \\ (\lambda, P) &\longmapsto \lambda.P \end{aligned}$$

$$\text{où } P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ et } \lambda.P = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) X^i$$

6. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels sur le même corps K, alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un K-espace vectoriel pour la loi externe :

$$\begin{aligned} K \times (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) &\longrightarrow E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \\ (\lambda, (x_1, x_2, \ldots, x_n)) &\longmapsto (\lambda.x_1, \lambda.x_2, \ldots, \lambda.x_n) \end{aligned}$$

$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ s'appelle le K-espace vectoriel produit des K-espaces vectoriels $E_1, E_2, \ldots, E_n$

7. Soient E un K-espace vectoriel, A un ensemble quelconque non vide et E^A l'ensemble de toutes les applications $f : A \longrightarrow E$. On définit sur E^A une addition et une loi externe par :
i) $\forall f \in E^A$, $\forall g \in E^A$, l'application $f + g$ est définie par

$$\forall a \in A, \ (f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

ii) $\forall f \in E^A$, $\forall \lambda \in K$, l'application $\lambda.f$ est définie par :

$$\forall a \in E^A, \ (\lambda.f)(a) = \lambda.f(a)$$

Alors $(E, +, .)$ est un K-espace vectoriel.

1.1.4 Sous-espace vectoriel

Définition 1.1.2
Soient E un K-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E, si :
- $(F, +)$ *est un sous-groupe de* $(E, +)$
- $\forall \lambda \in K, \ \forall x \in F, \ \lambda.x \in F$

Proposition 1.1.1
Soient E un K-espace vectoriel et F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si
i) $F \neq \varnothing$
ii) $\forall x \in F, \ \forall y \in F, \ x + y \in F$
iii) $\forall \lambda \in K, \ \forall x \in F, \ \lambda.x \in F$

Preuve 1.1.1
La démonstration est laissée à titre d'exercice

Remarque 1.1.2
Soit K un corps commutatif. Pour montrer qu'un ensemble F est K-espace vectoriel, il suffit, dans la plupart des cas, de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un K-espace vectoriel connu.

Exemple 1.1.1

1. *Pour tout K-espace vectoriel E, les parties $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E*
2. *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coëfficients dans $\mathbb{K}$. Alors pour tout entier $n \geq 1$,*

$$E_n = \{P \in \mathbb{K}[X] \ : \ \deg(P) \leq n\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. En effet, on a :
i) $E_n \neq \emptyset$, car le polynôme nul est dans E_n.
ii) On sait que $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ et $\forall Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$\deg(P+Q) \leq \sup(\deg(P), \deg(Q))$$

donc si $\deg(P) \leq n$ et $\deg(Q) \leq n$, alors $\deg(P+Q) \leq n$, et par suite $P+Q \in E_n$.
iii) On sait que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall P \in \mathbb{K}[X]$,

$$\deg(\lambda.P) \leq \deg(P)$$

donc si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in E_n$, alors $\lambda.P \in E_n$.

3. *L'enseble F des suites réelles qui tendent vers zéro à l'infini est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

$$F = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} u_n = 0\}$$

Il suffit de vérifier que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il suffit de vérifier que $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^I$.*

1.1.5 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Intersection

Proposition 1.1.2
Soit E un K-espace vectoriel, alors l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

Preuve 1.1.2
La démonstration est laissée à titre d'exercice

Remarque 1.1.3
En particulier, l'intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

Reunion

La reunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas toujours un sous-espace vectoriel de E. Cependant on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.3
Soient E un K-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si :

$$F \subseteq G \text{ ou } G \subseteq F$$

Preuve 1.1.3
$(\Longrightarrow)$ *Supposons que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et montrons que $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.*
Pour cela supposons par absurde que $F \nsubseteq G$ et $G \nsubseteq F$
$F \nsubseteq G$, donc il existe $x \in E$, tel que $x \in F$ et $x \notin G$
$G \nsubseteq F$, donc il existe $y \in E$, tel que $y \in G$ et $y \notin F$
Or $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $x + y \in F \cup G$
$\Longrightarrow x + y \in F$ *ou* $x + y \in G$
Si $x + y \in F$, puisque $x \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de E, alors $(x + y) - x \in F$, et par suite $y \in F$. Contradiction
Si $x + y \in G$, alors de la même manière on voit que $x \in G$. Ce qui est encore contradictoire avec le fait que $x \notin G$
D'où le résultat
$(\Longleftarrow)$ *Trivial*

Somme

Soient E un K-espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E et $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ le produit cartésien de $F_1, F_2, \dots, F_n$.
On définit l'ensemble $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ par :
$z \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ si seulement si , il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ tel que $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
L'ensemble $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ ainsi défini est une partie de E qui forme un sous-espace vectoriel appelé sous-espace vectoriel somme de $F_1, F_2, \dots, F_n$

Somme directe

Définition 1.1.3
Soient E un K-espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$, des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est **directe** *si pour tout $z \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$, il existe* **un unique** *$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ tel que $z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$*

Notations 1.1.1
Dans le cas où la somme de $F_1, F_2, \dots, F_n$ est directe on la note

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

Lemme 1.1.1
La somme de $F_1, F_2, \dots, F_n$ est directe, si et seulement si,

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Preuve 1.1.4
$(\Longrightarrow)$ *Supposons que* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$
Donc $0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ *et* $0 = 0 + 0 + \ldots + 0$
Or la somme est directe, donc d'après l'unicité on a :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

$(\Longleftarrow)$ *Montrons que* $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ *est une somme directe. Pour cela , soit* $z \in F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ *tel que :*

$$z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \text{ et } z = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

A-t-on $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \dots,\ x_n = y_n$ *?*
On a $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ *et on a aussi*
$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \cdots + (x_n - y_n) = 0$
Donc $(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = \cdots = (x_n - y_n) = 0$
D'où le résultat

Théorème 1.1.1
Soient E un K-espace vectoriel et $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. alors la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ est directe, si et seulement si,

$$\boxed{\forall i,\ 1 \leq i \leq n-1,\ F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n) = \{0\}}$$

Preuve 1.1.5
$(\Longrightarrow)$ *Supposons que* $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ *est directe*
Soit $x_i \in F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n)$
$\Longrightarrow\ x_i = x_{i+1} + \cdots + x_n$, *où* $x_{i+1} \in F_{i+1}, \dots, x_n \in F_n$
Donc $x_i - x_{i+1} - \cdots - x_n = 0$
Donc d'après le lemme précédent, on a $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0$
D'où le résultat.
$(\Longleftarrow)$ *Supposons que* $\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n) = \{0\}$
Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ *tel que* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$
D'après le lemme précédent , il suffit de montrer que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
Pour cela on procède par récurrence sur i , $1 \leq i \leq n$
Pour i=1 on a $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$
$\Longrightarrow x_1 \in F_1 \cap (F_2 + \cdots + F_n)$
$\Longrightarrow x_1 = 0$
Supposons que $i > 1$ *et* $x_1 = \cdots = x_{i-1} = 0$ *et montrons que* $x_i = 0$
$x_1 = \cdots = x_{i-1} = 0 \Longrightarrow x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = 0$
Donc $x_i \in F_i \cap (F_{i+1} + \cdots + F_n)$ *et par suite* $x_i = 0$
D'où le résultat

Remarque 1.1.4
D'après le théorème précédent, la somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est directe, si et seulement si

$$F \cap G = \{0\}$$

1.1.6 Sous-espaces supplémentaires

Définition 1.1.4
Soient E un K-espace vectoriel , F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont supplémentaires dans E si :
i) $F+G$ est une somme directe
ii) $E = F \oplus G$

Remarques 1.1.1

1. *F et G sont supplémentaires dans E , si et seulement si :*

$$\begin{cases} E = F + G \\ et \\ \forall x \in F \ , \ \forall y \in G \ , \ x + y = 0 \Longrightarrow x = y = 0 \end{cases}$$

2. *F et G sont supplémentaires dans E , si et seulement si :*

$$\begin{cases} E = F + G \\ et \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

Exemple 1.1.2
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ $F = \{f \in E \ : \ f \text{est paire}\}$
$G = \{f \in E \ : \ f \text{est impaire}\}$
Alors F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires dans E.
En effet, le fait que F et G sont deux sous-espaces vectoriels est un exercice facile
Si $f \in F \cap G$ alors f est à fois une fonction paire et impaire, donc f est nulle et par suite $F \cap G = \{0\}$
Pour montrer que $E = F + G$ il suffit de remarquer que pour tout $f \in E$, les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

sont respectivement paire et impaire et que $f = g + h$
Autrement dit, toute fonction réelle est la somme, d'une manière unique, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Théorème 1.1.2
Soit E un K-espace vectoriel quelconque, alors tout sous-espace vectoriel de E admet au moins un supplémentaire dans E

Preuve 1.1.6
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrons qu'il existe au moins un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.
Pour cela nous allons appliquer le fameux lemme de Zorn (Voir Annexe) à l'ensemble défini par :

$$\mathcal{M} = \{M \ : \ M \text{sous-espace vectoriel de } E \text{ et } M \cap F = \{0\}\}$$

ordonné par inclusion.
- $\mathcal{M} \neq \varnothing$, car $\{0\} \in \mathcal{M}$
- *Soit $\mathcal{A}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}$ et soit $H = \bigcup_{M \in \mathcal{A}} M$. Puisque $\mathcal{A}$ est totalement ordonnée par inclusion , alors H est un sous-espace vectoriel de E et on a :*

$$\forall M \in \mathcal{A} \text{ , } M \cap F = \{0\}$$

Donc $H \cap F = \{0\}$ et par suite $H \in \mathcal{M}$ et H est un majorant de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$, donc $\mathcal{M}$ est inductif et d'après le lemme de Zorn $\mathcal{M}$ admet un élément maximal noté G.
Montrons que $E = F \oplus G$. On sait que $F \cap G = \{0\}$ car $G \in \mathcal{M}$, donc il reste à montrer que $E = F + G$.
Pour cela, supposons par absurde que $F + G \neq E$ donc il existe $x \in E$ tel que $x \notin F + G$
Posons $L = M + Vect(x)$ donc $G \subsetneq L$, car $x \in L$ et $x \notin G$
$x \notin F + G$ donc $L \cap F = \{0\}$ et par suite $L \in \mathcal{M}$ ce qui est absurde, car G est maximal et $G \subsetneq L$.

1.1.7 Espace vectoriel quotient

Proposition 1.1.4
Soient E un K-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et E/F le groupe quotient de E par F. Alors E/F est un K-espace vectoriel pour la loi externe :

$$\begin{aligned} K \times E/F &\longrightarrow E/F \\ (\lambda, \overline{x}) &\longmapsto \lambda.\overline{x} = \overline{\lambda.x} \end{aligned}$$

appelé espace vectoriel quotient de E par F.

Preuve 1.1.7
Exercice

1.2 Partie génératrice-Partie libre-Base

1.2.1 Combinaisons linéaires

Définition 1.2.1
Soient E un K-espace vectoriel et A une partie **non vide** *de E. On dit qu'un élément x de E est une* **combinaison linéaire** *d'éléments de A, s'il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de A et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ éléments de K tels que :*

$$\boxed{x = \alpha_1.x_1 + \alpha_2.x_2 + \cdots + \alpha_n.x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i}$$

Proposition 1.2.1
Soient E un K-espace vectoriel et A une partie non vide de E . Alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A est un sous-espace vectotiel de E, appelé sous-espace vectoriel engendré par A et se note $Vect(A)$.

Preuve 1.2.1
Soient $x \in Vect(A)$ et $y \in Vect(A)$, alors par définition on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^{m} \beta_i y_i$$

$\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \alpha_i \in K$ et $x_i \in A$ et $\forall j,\ 1 \leq j \leq m,\ \beta_j \in K$ et $y_j \in A$, donc on aura

$$x + y = \sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k z_k$$

$$\text{où } \gamma_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ \beta_{k-n} & \text{si } k \in \{n+1, \dots, n+m\} \end{cases} \quad \text{et } z_k = \begin{cases} x_k & \text{si } k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ y_{k-n} & \text{si } k \in \{n+1, \dots, n+m\} \end{cases}$$

Donc $x + y \in Vect(A)$. Et de même on montre que $\lambda.x \in Vect(A)$ lorsque $\lambda \in K$ et $x \in Vect(A)$

Remarques 1.2.1

1. *On vérifie facilement que $Vect(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A, c'est à dire, si F est un autre sous-espace vectoriel de E qui contient A, alors F contient aussi $Vect(A)$*
2. *Si $A = \varnothing$ alors $\{0_E\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\varnothing$. Donc on peut écrire $Vect(\varnothing) = \{0_E\}$ et c'est pour cela qu'on convient d'écrire :*

$$0_E = \sum_{i \in \varnothing} \alpha_i.x_i$$

Définition 1.2.2
Soient E un K-espace vectoriel, une partie A de E est dite génératrice si
$E = Vect(A)$

Exemple 1.2.1

1. *$A = \varnothing$ est une partie génératrice de l'espace vectoriel nul $\{0_E\}$, car on a vu que $\{0_E\} = Vect(\varnothing)$*
2. *E est une partie génératrice de E*
3. *$A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une partie génératrice du K-espace vectoriel K^n, où :*

$$e_1 = (1_K, 0, \ldots, 0)\,, e_2 = (0, 1_K, 0, \ldots, 0)\,, \ldots\,, e_n = (0, \ldots, 0, 1_K)$$

4. *$A = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ est une partie génératrice du K-espace vectoriel $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K*

1.2.2 Partie libre

Définition 1.2.3

Soient E un K-espace vectoriel et L une partie de E

- *Si L* **est finie**, *$L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on dit que L est libre si*

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K\,,\, \alpha_1.x_1 + \alpha_2.x_2 + \cdots + \alpha_n.x_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- *Si L* **est infinie**, *on dit que L est libre, si toute partie finie de L est libre*
- *Une partie de E qui n'est pas libre est dite liée*

Exemple 1.2.2

1. *$L = \varnothing$ est, par convention, une partie libre du K-espace vectoriel nul $E = \{0_E\}$*
2. *$L = \{x\}$ où $x \in E$ avec $x \neq 0$, est une partie libre de E*
3. *$L = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, où $e_1 = (1_K, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1_K, 0, \ldots, 0)$, $\ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1_K)$, est une partie libre du K-espace vectoriel K^n*
4. *$L = \{x^{(m)} \ : \ m \in \mathbb{N}\}$, où $\forall m \in \mathbb{N}\,, x^{(m)} = (x_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$*

$$\text{où } \ \forall m, \ \forall n, \ x_{m,n} = \begin{cases} 1 & Si\ n = m \\ 0 & Si\ n \neq m \end{cases}$$

   est une partie libre du K-espace vectoriel $K^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites de K

5. *$L = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ est une partie libre de $K[X]$*
6. *$L = \{f_y \ : \ y \in K^*\}$ est une partie libre du K-espace vectoriel K^I de toutes les applications de I vers K,*
   où $\forall y \in K\,, \forall x \in K\,,\, f_y(x) = \begin{cases} y & si \quad x = y \\ 0 & si \quad x \neq y \end{cases}$

1.2.3 Base

Définition 1.2.4

Soit E un K-espace vectoriel, on dit qu'une partie B de E **forme une base de** *E si B est à la fois libre et génératrice*

Remarques 1.2.2

- *En fait,* **une base de** E *est une famille* $(x_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* E *tels que :*
  i) $\forall i \in I, \forall j \in I,\ i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$
  ii) $B = \{x_i\ :\ i \in I\}$ *est une partie de* E *qui est à la fois libre et génératrice*
- *Donc si* B *est une partie de* E *qui forme une base de* E*, alors "le nombre" de bases qu'on peut former à partir de* B *est égal au "nombre" de permutations qu'on peut faire sur les éléments de* B

Exemple 1.2.3

1. *Par convention* $B = \varnothing$ *est une base de l'espace vectoriel nul* $E = \{0\}$
2. $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *, où* $e_1 = (1_K, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1_K, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1_K)$ *, forme une base du* K*-espace vectoriel* K^n *, donc* $\forall \sigma \in S_n$ *,* $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ *est une base de* K^n
3. $B = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ *forme une base de* $K[X]$*. Si donc on pose pour tout n,* $e_n = X^n$*, alors* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base de* E *et pour toute permutation* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*,* $(e_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est aussi une base de* E

Lemme 1.2.1
Soient E *un* K*-space vectoriel,* L *une partie* **libre** *de* E *et* $x \in E$ *avec* $x \notin L$*. Alors*

$$x \notin Vect(L) \Longleftrightarrow L \cup \{x\} \text{ est libre}$$

Preuve 1.2.2
Par contraposée, il suffit de montrer que

$$x \in Vect(L) \Longleftrightarrow L \cup \{x\} \text{ est liée}$$

($\Longrightarrow$*) Trivial*
($\Longleftarrow$*) Supposons que* $L \cup \{x\}$ *est liée, donc, par définition, il existe* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *éléments de* $L \cup \{x\}$ *et il existe* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *éléments de* K *non tous nuls, tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

Puisque L *est libre, alors il existe un* i_0*,* $1 \leq i_0 \leq n$*, tel que* $x_{i_0} = x$ *et pour la même raison, puisque* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$*, on aura* $\alpha_{i_0} \neq 0$*. Donc*

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} \alpha_i x_i$$

Par suite $x \in Vect(L)$

Théorème 1.2.1 (Caractérisation d'une base)
Soient E *un* K*-espace vectoriel et* B *une partie de* E*. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
i) B *forme une* **base** *de* E
ii) B *est une partie* ***génératrice minimale*** *de* E
iii) B *est une partie* ***libre maximale*** *de* E.

Preuve 1.2.3
i) $\Longrightarrow$ ii) Supposons que B forme une base de E et soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les parties génératrice de E.
On doit montrer que B est un élément minimal de $(\mathcal{A},\subseteq)$
Soit A un élément de $\mathcal{A}$ tel que $A\subseteq B$, a-t-on $A=B$? Supposons par absurde que $A\neq B$, donc il existe x tel que $x\in A$ et $x\notin B$. Or A est une partie génératrice de E et $x\in E$ donc il existe $x_1,x_2,\ldots,x_n\in A$ et il existe $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in K$ tels que :

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.x_i$$

$\Longrightarrow\{x,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ est lié et $\{x,x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subseteq B$, ce qui est absurde car B est libre. D'où le résultat.
ii) $\Longrightarrow$ iii) Supposons que B est une partie génératrice minimale de E et soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de toutes les parties libres de E. On doit montrer que B est un élément maximal de $(\mathcal{L},\subseteq)$. Pour cela, montrons d'abord que B est libre.
Supposons par absurde que B n'est pas libre, donc il existe $x_1,x_2,\ldots,x_n\in B$ et il existe $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in K$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.x_i=0 \ \text{ et } \ (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq(0,0,\ldots,0)$$

$$\begin{aligned}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\neq(0,0,\cdots,0) &\Longrightarrow \exists i_0\ :\ \alpha_{i_0}\neq 0\\ &\Longrightarrow x_{i_0}=-\frac{1}{\alpha_{i_0}}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n}\alpha_i.x_i\\ &\Longrightarrow A=B\setminus\{x_{i_0}\}\text{ est une partie génératrice de }E\end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que B est génératrice minimale. Donc B est libre
Montrons maintenant que B est libre maximale. Pour cela soit $L\in\mathcal{L}$ tel que $B\subseteq L$, a-t-on $B=L$?
Supposons par absurde que $B\neq L$, donc il existe x tel que $x\in L$ et $x\notin B$. Or $E=Vect(B)$ donc il existe $x_1,x_2,\ldots,x_m\in B$ et il existe $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in K$ tel que

$$x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i.x_i$$

$\Longrightarrow\{x,x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ est lié
$\Longrightarrow L$ est liée , car $\{x,x_1,x_2,\ldots,x_m\}\subseteq L$. Ce qui est absurde , donc $B=L$ et par suite B est libre maximale.
iii) $\Longrightarrow$ i) Supposons que B est libre maximale et montrons que B forme une base de E. Pour cela il suffit de montrer que $E=Vect(B)$
Supposons par absurde que $E\neq Vect(B)$ et soit $x\in E$ tel que $x\notin Vect(B)$

$$[x\notin Vect(B)\text{ et }B\text{ libre}]\Longrightarrow B\cup\{x\}\text{ libre}$$

Or $B\subsetneq B\cup\{x\}$, ce qui est absurde, car B est libre maximale.

Remarque 1.2.1
Le théorème précédent nous permet, en utilisant le lemme de Zorn (Voir Annexe), de montrer que tout espace vectoriel sur un corps commutatif quelconque admet au moins une base.

Théorème 1.2.2
Tout espace vectoriel admet au moins une base

Preuve 1.2.4
Soit E un K-espace vectoriel quelconque
Si $E = \{0\}$, alors $B = \varnothing$ est une base de E
Si $E \neq \{0\}$, considérons l'ensemble $\mathcal{L}$ de toutes les parties libres de E. D'après le théorème précédent il suffit de montrer que $(\mathcal{L}, \subseteq)$ admet un élément maximal.

- *$\mathcal{L} \neq \varnothing$, car si $x \in E$ avec $x \neq 0$, alors $L = \{x\}$ est libre*
- *$(\mathcal{L}, \subseteq)$ est innductif (à vérifier)*
  Donc d'après le lemme de Zorn, $\mathcal{L}$ admet au moins un élément maximal.

Exemple 1.2.4

1. *$B = \varnothing$ est une base de $E = \{0\}$*
2. *$B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $e_1 = (1_K, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1_K, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $e_n = (0, \ldots, 0, 1_K)$, est une base du K-espace vectoriel K^n*
3. *$B = (1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ est une base du K-espace vectoriel $K[X]$*
4. *D'après le theorème précédent, $\mathbb{R}$ considèré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ admet au moins une base. Cependant personne n'a jamais pu construire une telle base ! ! !*

1.3 Espaces vectoriels de dimension finie

1.3.1 Définition et exemples

Définition 1.3.1
Soit E un K-espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie sur** *K si E possède au moins une* **partie génératrice finie**. *Dans le cas contraire on dit que E est de dimension infinie sur K*

Exemple 1.3.1

1. *Soit K un corps commutatif, alors pour tout entier $n \geq 1$, K^n est de dimention finie sur K, car $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une partie génératrice finie de K^n, où :*
$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$
2. *Pour tout corps commutatif K et pour tout entier $n \geq 1$, le sous-espace vectoriel de $K[X]$ défini par :*
$$E_n = \{P \in K[X] \ : \ deg(P) \leq n\}$$
a pour partie génératrice $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ donc il est de dimension finie
3. *Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E est aussi de dimension finie (Pour la justification Corollaire 1.3.2)*
4. *Si E est de dimension finie sur K et si F est un sous-espace vectoriel quelconque de E, alors E/F, l'espace vectoriel quotient, est aussi de dimension fini sur K. Car si $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ est une partie génératrice de E alors il est facile de voir que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\}$*

1.3.2 Theorème de la dimension finie

Lemme 1.3.1
Soient E un K-espace vectoriel, A et B deux parties de E et n un entier ≥ 0 tels que
i) $Cardinal(A) = n$ et $Cardinal(B) = n+1$
ii) Tout élément de B est combinaison linéaire d'éléments de A,
(c'est à dire $B \subseteq Vect(A)$). Alors B est liée

Preuve 1.3.1
On va procèder par récurrence sur $n \geq 0$
Pour $n = 0$, on a $A = \varnothing$ et $B = \{y\}$, or par hypothèse on a $y \in Vect(\varnothing)$ donc $y = 0$ et par suite $B = \{0\}$ est liée
Pour $n = 1$, on a $A = \{x_1\}$ et $B = \{y_1, y_2\}$ et par hypothèse on a
$y_1 \in Vect(A)$ et $y_2 \in Vect(A)$
$\Longrightarrow y_1 = \alpha.x_1$ et $y_2 = \beta.x_1$
$\Longrightarrow \beta.y_1 - \alpha.y_2 = 0$
Avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ car sinon on aura $y_1 = y_2 = 0$, ce qui est impossible, car $Cardinal(B) = 2$.
$\Longrightarrow B = \{y_1, y_2\}$ est liée
Supposons $n \geq 1$ et le lemme vrai pour tout entier $m < n$
Posons $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\}$. On sait, par hypothèse, que pour tout i, $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$, on a

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}.x_j$$

Si $\forall i,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \alpha_{i,n} = 0$ alors

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subseteq Vect(\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$$

Donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est liée et par suite B est liée.
Si maintenant, il existe un i_0 tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$ alors quitte à reordonner les éléments de B, on peut supposer que $\alpha_{n+1,n} \neq 0$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1,n} \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad y_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n+1,j}.x_j \\
&\Longrightarrow \quad x_n = \frac{1}{\alpha_{n+1,n}}(y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n+1,j}.x_j) \\
&\Longrightarrow \quad \forall i,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ y_i = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{i,j}.x_j \ + \ \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}}(y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{n+1,j}.x_j) \\
&\Longrightarrow \quad y_i - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}}.y_{n+1} = \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{i,j} - \frac{\alpha_{n+1,j}}{\alpha_{n+1,n}}).x_j
\end{aligned}$$

Pour chaque i, $i = 1, 2, \ldots, n$, posons $z_i = y_i - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}} y_{n+1}$
Donc tout élément de $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$

et par suite, d'après l'hypothèse de récurrence, $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ *est liée, donc il existe* $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n \in K$ *tels que*

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i.z_i = 0 \text{ et } (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n) \neq (0,0,\ldots,0)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i.z_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{n}\gamma_i.(y_i - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}}.y_{n+1}) = 0$$

$\forall i,\ i = 1,2,\ldots,n,$ *posons* $\lambda_i = \gamma_i$ *et* $\lambda_{n+1} = -\frac{1}{\alpha_{n+1,n}}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\alpha_{i,n}$

$$\begin{aligned}(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n) \neq (0,0,\ldots,0) &\implies (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}) \neq (0,0\ldots,0) \ \ (\text{avec } \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i.y_i = 0)\\ &\implies B = \{y_1,y_2,\ldots,y_n,y_{n+1}\} \text{ est liée}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Corollaire 1.3.1
Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie et* A *une partie génératrice finie de* E*. Alors pour toute partie libre* L *de* E *on a :*

$$\boxed{Cardinal(L) \leq Cardinal(A)}$$

Preuve 1.3.2
Posons $A = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ *et supposons, par absurde, que* L *est une partie libre de* E *telle que* $Cardinal(L) > n$*. Soient* $y_1,y_2,\ldots,y_n,y_{n+1},\ n+1$ *éléments deux à deux dintints de* L *, puisque* $E = Vect(A)$ *alors*

$$\{y_1,y_2,\ldots,y_n,y_{n+1}\} \subseteq Vect(A)$$

donc d'après le lemme précèdent, $\{y_1,y_2,\ldots,y_n,y_{n+1}\}$ *est liée et par suite* L *est liée, ce qui est absurde.*

Corollaire 1.3.2
Soit E *un* K*-espace vectoriel. Alors* E *est de dimension infinie, si et seulement si,* E *admet au moins une partie libre infini.*

Preuve 1.3.3
($\Longrightarrow$*) Supposons que* E *est de dimension infinie. Soit* $x_1 \in E$ *avec* $x_1 \neq 0$*.* E *est de dimension infinie, donc* $Vect(x_1) \neq E$*, soit* $x_2 \in E$ *tel que* $x_2 \notin Vect(x_1)$*, alors* $\{x_1,x_2\}$ *est libre. Puisque* E *est de dimension infinie, il existe* $x_3 \in E$ *tel que* $x_3 \notin Vect(x_1,x_2)$*, donc* $\{x_1,x_2,x_3\}$ *est libre. Ainsi, par récurrence, on construit une suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *telle que pour tout* $n \geq 1$*,* $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ *soit libre. Donc* $\{x_n\ :\ n \geq 1\}$ *est une partie libre infinie de* E*.*
($\Longleftarrow$*) Supposons que* E *possède une partie libre infinie* L *et supposons, par absurde, que* E *est de dimension finie. Soit* A *une partie génératrice finie de* E*. D'après le corollaire précédent, on aura* $Cardinal(L) \leq Cardinal(A)$*, ce qui est absurde.*

Exemple 1.3.2

1. *Pour tout corps commutatif K, $K[X]$ est de dimension infinie, car*
   $L = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ *est une partie libre infinie de* $K[X]$
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de toutes les suites réelles est de dimension infinie :*
   Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $e^{(n)}$ la suite réelle définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall m \in \mathbb{N}\ ,\ e_m^{(n)} = \begin{cases} 1 & si \quad m = n \\ 0 & si \quad m \neq n \end{cases}$$
   Alors $L = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}, \dots\}$ *est une partie libre infinie de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
3. *Si E admet un sous-espace vectoriel de dimension infinie alors E est de dimension infinie*
4. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*, l'espace vectoriel de toutes les applications de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$*, donc* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *est de dimension infinie.*
5. *Un élément $\alpha \in \mathbb{R}$ est dit* ***algèbrique****, s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Q}[X]$, tel que $P(\alpha) = 0$. Si α n'est pas algèbrique, on dit que α est* ***transcendant****.*
   Il est facile de montrer, en utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, que l'enseble des éléments algèbriques est dénombrable et puisque $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, alors l'ensemble des nombres transcendants est non vide et possède le même cardinal que $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre transcendant, alors par définition,
   $$L = \{1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots\}$$
   est une partie libre infinie de $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Exercice 1.3.1 (de recherche)
Montrer que π et e sont des nombres transcendants.

Théorème 1.3.1 (de la dimension finie)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, alors :
- *i) Toute base de E est de cardinal fini*
- *ii) Toutes les bases de E ont le même cardinal.*
  Ce cardinal s'appelle la dimension de E sur K et se note $dim_K(E)$

Preuve 1.3.4
i) Soient A une partie génératrice finie de E et B une base quelconque de E. B est libre donc d'après les corollaires précèdents on a $Cardinal(B) \leq Cardinal(A)$, A est finie donc B est finie
ii) Soient B_1 et B_2 deux bases de E, donc d'après i) B_1 et B_2 sont finies .
B_1 est libre et B_2 est une partie génératrice finie de E donc d'après ce qui précède $Cardinal(B_1) \leq Cardinal(B_2)$. Et de la même manière on montre que $Cardinal(B_2) \leq Cardinal(B_1)$
D'où le résultat

Corollaire 1.3.3
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$. Alors :
- *i) Toute partie libre de E est de cardinal $\leq n$*
- *ii) Toute partie génératrice de E est de cardinal $\geq n$*
- *iii) Toute base de E est de cardinal $= n$*
- *iv) Toute partie libre de cardinal $= n$ est une base de E*
- *v) Toute partie génératrice de cardinal $= n$ est une base de E*

Preuve 1.3.5
Exercice

Remarque 1.3.1

1. *Le corrollaire précédent est très utile en pratique, pour montrer qu'une partie libre ou génératrice d'un espace vectoriel E de dimension finie, forme une base de E. Nous allons rappeler ce corollaire sous une autre forme :*
Soit A une partie d'un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$. Alors,

$$\boxed{A \text{ libre } \Longrightarrow Cardinal(A) \leq n}$$

$$\boxed{A \text{ génératrice } \Longrightarrow Cardinal(A) \geq n}$$

$$\boxed{A \text{ libre et } Cardinal(A) = n \Longrightarrow A \text{ base de } E}$$

$$\boxed{A \text{ génératrice et } Cardinal(A) = n \Longrightarrow A \text{ base de } E}$$

2. *La dimension d'un K-espace vectoriel dépend du corps de base K, par exemple :*

$$\boxed{dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1\ ,\ dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 \text{ et } dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}) = \infty}$$

Proposition 1.3.1
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie :

i) Si F et G sont deux sous-espaces tel que $E = F \oplus G$ alors

$$\boxed{dim_K(E) = dim_K(F) + dim_K(G)}$$

ii) Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors

$$\boxed{dim_K(F+G) = dim_K(F) + dim_K(G) - dim_K(F \cap G)}$$

iii) Si F est un sous-espace vectoriel quelconque de E alors :

$$\boxed{dim_K(E/F) = dim_K(E) - dim_K(F)}$$

iv) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors :

$$\boxed{E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \quad et \\ dim_K(F) + dim_K(G) = dim_K(E) \end{cases}}$$

Preuve 1.3.6
i) Soient B_1 une base de F et B_2 une base de G, alors il est facile de vérifier que $B = B_1 \cup B_2$ est une base de E et que $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ car une base ne contient jamais le vecteur nul, donc $Cardinal(B) = Cardinal(B_1) + Cardinal(B_2)$
ii) Soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G, alors on a $G = (F \cap G) \oplus H$, et par suite

$dim_K(G) = dim_K(F \cap G) + dim_K(H)$
Or on vérifie facilement que $F + G = F \oplus H$ *donc :*

$$\begin{aligned} dim_K(F+G) &= dim_K(F+G) = dim_K(F) + dim_K(H) \\ &= dim_K(F) + (dim_K(G) - dim_K(F \cap G)) \end{aligned}$$

D'o'u le résultat.
iii) Soit G *un supplémentaire de* F *dans* E *et soit* $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ *une base de* G*. Pour tout* $x \in E$*, on a* $x = y + z$ *avec* $y \in F$*,* $z \in G$ *et* $z = \alpha_1.x_1 + \alpha_2.x_2 + \cdots + \alpha_m.x_m$

$$\Longrightarrow \overline{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.\overline{x}_i$$

$\Longrightarrow \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_m\}$ *est une partie génératrice de* E/F
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in K$ *tel que :*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i.\overline{x}_i = \overline{0}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.\overline{x}_i = \overline{0} &\Longrightarrow \overline{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i.x_i} = \overline{0} \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.x_i \in F \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i.x_i = 0 \ \text{ car } \ F \cap G = \{0\} \\ &\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \ \text{ car } \ \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \ \text{ est libre} \end{aligned}$$

Donc $\overline{B} = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_m\}$ *est une base de* E/F *et par suite on a :*

$$dim_K(E/F) = Cardinal(\overline{B}) = Cardinal(B) = dim_K(G)$$

$$\text{avec } \ dim_K(G) = dim_K(E) - dim_K(F)$$

D'où le résultat
iv) Exercice

Remarque 1.3.2
Soient E *un* K*-espace vectoriel de* ***dimension finie****,* $F_1, F_2, \dots, F_n$ *des sous-espaces vectoriels de* E*. Alors*

$$\boxed{\dim_K(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \leq \dim_K(F_1) + \dim_K(F_2) + \cdots + \dim_K(F_n)}$$

Corollaire 1.3.4
Soient E *un* K*-espace vectoriel de* ***dimension finie****,* $F_1, F_2, \dots, F_n$ *des sous-espaces vectoriels de* E*. Alors on vérifie facilement par récurrence sur* n *que*

$$\boxed{E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F_1 + F_2 + \cdots + F_n \\ \dim_K(E) = \dim_K(F_1) + \dim_K(F_2) + \cdots + \dim_K(F_n) \end{cases}}$$

Preuve 1.3.7
($\Longrightarrow$) Trivial
($\Longleftarrow$) *On sait que la somme $F_1+F_2+\cdots+F_n$ est directe, si et seulement si,*

$$\forall i,\ 1\leq i<n,\ F_i\cap(F_{i+1}+\cdots+F_n)=\{0\}$$

Supposons, par absurde, qu'il existe un i, $1\leq i<n$, tel que

$$F_i\cap(F_{i+1}+\cdots+F_n)\neq\{0\}$$

Or $\dim_K(F_i+F_{i+1}+\cdots+F_n)=\dim(F_i)+\dim_K(F_{i+1}+\cdots+F_n)-\dim_K(F_i\cap(F_{i+1}+\cdots+F_n)\neq\{0\})$
Donc $\dim_K(F_i+F_{i+1}+\cdots+F_n)<\dim(F_i)+\dim_K(F_{i+1}+\cdots+F_n)$
D'autre part, on a

$$\begin{array}{rcl}\dim_K(F_1+F_2+\cdots+F_n) & = & \dim_K(F_1+F_2+\cdots+F_{i-1}+F_{i+1}+\cdots+F_n)\\ & \leq & \dim_K(F_1+F_2+\cdots+F_{i-1})+\dim_K(F_i+F_{i-1}+F_{i+1}+\cdots+F_n)\\ & < & \dim_K(F_1+F_2+\cdots+F_{i-1})+\dim_K(F_i)+\dim_K(F_{i-1}+F_{i+1}+\cdots+F_n)\\ & < & \dim_K(F_1)+\dim_K(F_2)+\cdots+\dim_K(F_n)\end{array}$$

Ce qui est absurde.

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1
On muni $\mathbb{R}_+^*$ de la loi interne notée $\oplus$ et définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall y\in\mathbb{R}_+^*,\ x\oplus y=xy$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \lambda\cdot x=x^\lambda$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*,\oplus,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exercice 1.4.2
Soient $(E,+)$ un groupe commutatif et p un nombre premier
Trouver une condition necessaire et suffisante pour que E soit un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel

Exercice 1.4.3
Parmi les ensembles suivants lequel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
- *i)* $\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}\ :\ f$ *est croissante*$\}$
- *ii)* $\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}\ :\ f(0)=1\}$
- *iii)* $\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}\ :\ f(1)=0\}$
- *iv)* $\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}\ :\ f$ *continue et* $f(1)=0$ *ou* $f(5)=0\}$
- *v)* $\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}\ :\ \exists(A,\varphi)\in\mathbb{R}^2:\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=A\cos(x+\varphi)\}$

Exercice 1.4.4
Soit E un K-espace vectoriel, où K est un corps commutatif quelconque

a) Montrer que si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si , $F_1 \subseteq F_2$ ou $F_2 \subseteq F_1$

b) Soient n un entier ≥ 2 , $F_1, F_2, \ldots, F_n$, des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que K est de caractéristique $\geq n$. Montere que
$F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si, il existe un i_0 , $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $\forall j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $F_j \subseteq F_{i_0}$

Exercice 1.4.5

Dans chacune des cas suivants, montrer que E est un espace vectoriel et déterminer une base de E.

a) $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ : \ P(X^2) = X^2 P(X)\}$
b) $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ : \ P(-1) = P(0)\}$
c) $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ : \ P(\frac{1}{2}) = 2P(1)\}$
d) $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y+z+t = 0 \text{ et } x+2y-z-t = 0\}$
e) $E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$
f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E est l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour chaque $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, f est constante sur $]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$.

Exercice 1.4.6

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, H_1 et H_2 deux hyperplans de E. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice 1.4.7

Soient E un K-espace vectoriel F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $H \subseteq F \cup G$. Montrer que $H \subseteq F$ ou $H \subseteq G$

Exercice 1.4.8

On note F l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$, (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), tels que :

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = 0$$

Est-ce que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$?

Exercice 1.4.9

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. Montrer que :

$$G \subseteq F \Longrightarrow [F \cap (G+H) = G + (F \cap H)]$$

Exercice 1.4.10

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

a) Pour $a \in \mathbb{R}$ on note f_a, l'élément de E défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f_a(x) = |x - a|$$

Montrer que $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note g_k l'élément de E défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \,,\; g_k(x) = (\sin(x))^k$$

Montrer que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de E

c) Montrer que $\{f_a \;:\; a \in \mathbb{R}\}$ est une partie libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ où pour chaque a, f_a est défine par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\; f_a(x) = e^{ax}$$

Exercice 1.4.11

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer que F et G possède au moins un supplémentaire commun dans E

Exercice 1.4.12

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice 1.4.13

Soient E un K-espace vectoriel, $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de E et G un sous-espace vectoriel de E

a) On suppose G de dimension finie. Montrer que :

$$(\bigcap_{n\geq 0} F_n) + G = \bigcap_{n\geq 0} (F_n + G)$$

b) Montrer, par un contre-exemple, que la propriètè précédente ne subsiste plus dans le cas où G est de dimension infinie

Exercice 1.4.14

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $F_1, F_2, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{k} \dim(F_j) > n(k-1) \Longrightarrow \bigcap_{j=1}^{k} F_j \neq \{0\}$$

Exercice 1.4.15

Soient K un corps commutatif, P un polynôme non nul de $K[X]$ et (P) l'ideal engendré par P. Montrer que $K[X]/(P)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension

Exercice 1.4.16

Soit K un corps commutatif, pour chaque $a \in K$, soit
$E_a = \{P \in K[X] \;:\; P(a) = 0\}$. Montrer que

$$\forall a \in K,\; \forall b \in K,\; a \neq b \Longrightarrow K[X] = E_a + E_b$$

La somme est-elle directe ?

Exercice 1.4.17

Soit K un corps commutatif et soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $K[X]$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $deg(P_n) = n$

1. *Montrer que* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base de* $K[X]$
2. *En déduire que tout endomorphisme de* $K[X]$ *qui conserve le degré est un automorphisme*

Exercice 1.4.18
Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E *avec* $\dim_K(F) = \dim_K(G)$. *Montrer que* F *et* G *possède un supplémentaire commun dans* E.

Exercice 1.4.19
Soit E *le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel des fonction dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$. *Pour* $f \in E$ *et* $a \in \mathbb{R}$, *on définit la fonction* f_a *par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = f(x+a)$$

Puis on pose $F_f = Vect(\{f_a\ :\ a \in \mathbb{R}\})$ *et on note* V *l'ensemble des fonction* $f \in E$ *telles que* F_f *soit de dimension finie.*

1. *Montrer que* V *est un sous-espace vectoriel de* E.
2. *Pour* $f \in V$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *on définit la fonction* $g_{(f,\lambda)}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_{(f,\lambda)}(x) = e^{\lambda x} f(x)$$

   Montrer que $g_{(f,\lambda)} \in V$.
3. *Montrer que* V *contient tous les polynômes.*
4. *On pose* $W = Vect(\{g_{(P,\lambda)}\ :\ \lambda \in \mathbb{C}$ *et* $P \in \mathbb{R}[X]\})$.
   Montrer que $W \subseteq V$.
5. *Soit* G *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E. *Soit* $(g_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions de* G *qui converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* g. *Montrer que* $g \in G$.
6. *Montrer que*

$$\forall f,\ f \in V \Longrightarrow f' \in F_f$$

   (On pourra considérer la suite de fonctions $h_n = n(f_{\frac{1}{n}} - f)$*).*
7. *Monter que tout élément de* V *est solution d'une équation différentielle linéaire à coëfficients constants. En déduire que* $V = W$.

Chapitre 2

Applications linéaires-Matrices

2.1 Applications linéaires

2.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 2.1.1
Soient E et F deux espaces vectoriel sur le même corps K et $u : E \to F$ une application

1. *On dit que u est linéaire (ou K-linéaire) si :*
   - $\forall x \, , \, y \in E \, , \, u(x+y) = u(x) + u(y)$
   - $\forall \alpha \in K \, , \, \forall x \in E \, , \, u(\alpha . x) = \alpha . u(x)$
2. *Si une application linéaire u est bijective, on dit que u est un* **isomorphisme** *d'espaces vectoriels et que E et F sont isomorphes*
3. *Si $u : E \to E$ est linéaire on dit que u est un* **endomorphisme** *de E et si de plus u est bijective, on dit que u est un* **automorphisme** *de E*
4. *Si $u : E \to K$ est linéaire on dit que u est une* **forme linéaire** *sur E*

Notations 2.1.1
- $L_K(E,F)$ *désigne l'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F*
- $L_K(E)$ *désigne l'ensemble de tous les endomorphismes de E*
- $GL_K(E)$ *désigne l'ensemble de tous les automorphismes de E*

Exemple 2.1.1
1. *Soient E un K-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E alors :*

$$\begin{aligned} s : E &\longrightarrow E/F \\ x &\longmapsto s(x) = \overline{x} \end{aligned}$$

   est linéaire

2. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, alors l'application :*

$$\begin{aligned} u : K^n &\longrightarrow E \\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i . e_i \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.
Donc tous les K-espaces vectoriels de même dimension sur le même corps K sont isomorphes.

Définition 2.1.2
Soient $(\mathcal{A},+,\times)$ un anneau quelconque et K un corps commutatif. On dit que $\mathcal{A}$ est une K-algèbre (ou une algèbre sur K), s'il existe une loi externe :

$$\begin{aligned} K\times\mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (\lambda,x) &\longmapsto \lambda.x \end{aligned}$$

telle que,
i) $(\mathcal{A},+,.)$ *soit un K-espace vectoriel.*
ii) $\forall\lambda\in K,\forall x\in\mathcal{A},\forall y\in\mathcal{A},\ \lambda.(x\times y)=(\lambda.x)\times y=x\times(\lambda.y)$.

Proposition 2.1.1
Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Pour u et v deux éléments de $L_K(E,F)$ et pour $\alpha\in K$ on définit les applications $u+v$ et $\alpha.u$ par :

$$\forall x\in E\ ,\ (u+v)(x)=u(x)+v(x)\ \text{ et }\ (\alpha.u)(x)=\alpha.u(x)$$

Pour u et v deux endomorphismes de E, on rappelle que $u\circ v$ est définie par

$$\forall x\in E,\ (u\circ v)(x)=u(v(x))$$

Alors

i) $(L_K(E,F),+,.)$ *est un K-espace vectoriel*

ii) $(L_K(E),+,\circ)$ *est un anneau unitaire, non intègre et non commutatif, (si $dim_K(E)>1$).*

iii) $(L_K(E),+,\circ,.)$ *est une K-algèbre.*

iv) $(GL_K(E),\circ)$ *est un groupe, c'est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(L_K(E),+,\circ)$.*

Preuve 2.1.1
Exercice

Théorème 2.1.1
Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie sur K. Alors $L_K(E,F)$ est de dimension finie sur K et on a :

$$\boxed{dim_K(L_K(E,F))=dim_K(E)\times dim_K(F)}$$

Preuve 2.1.2
Soient $(e_1,e_2,\ldots,e_m)$ une base de E , $(e_1^{'},e_2^{'},\ldots,e_n^{'})$ une base de F et $B=\{u_{i,j}\ :\ 1\le i\le n\ ,\ 1\le j\le m\}$ la partie de $L_K(E,F)$ définie par :

$$u_{i,j}(e_k)=\begin{cases} 0 & si \quad k\neq j \\ u_{i,j}(e_j) & = \quad e_i^{'} \end{cases}$$

Alors B forme une base de $L_K(E,F)$ avec $Cardinal(B) = m \times n$

2.1.2 Image et Noyau d'une application linéaire

Proposition 2.1.2
Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire Alors :
i) L'image d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F, donc en particulier $Im(u) = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé **image** *de u*
ii) L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E, donc en particulier $Ker(u) = u^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **noyau** *de u*

Preuve 2.1.3
Exercice

Théorème 2.1.2
Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire, alors
i) u est injective, si et seulement si, $Ker(u) = \{0_E\}$.
ii) u est surjective, si et seulement si, $Im(u) = E$.
iii) $E/Ker(u)$ est isomorphe à $Im(u)$.

Preuve 2.1.4
Soit $\overline{u}\ :\ E/Ker(u) \longrightarrow Im(u)$ la relation définie par :

$$\forall x \in E,\ \overline{u}(\overline{x}) = \overline{u(x)}$$

- *$\overline{u}$ définit bien une application, car si $\overline{x} = \overline{y}$ alors $\overline{x-y} = \overline{0} \mod (Ker(u))$, donc $x - y \in Ker(u)$ et par suite $u(x-y) = 0$, donc $u(x) = u(y)$*
- *Il est facile de vérifier que $\overline{u}$ est linéaire*
- *Si $\overline{x} \in Ker(\overline{u})$ alors $\overline{u(x)} = 0$ et par conséquent $u(x) = 0$ donc $x \in Ker(u)$ et ainsi $\overline{x} = \overline{0}$*

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad Ker(\overline{u}) = \{\overline{0}\} \\ &\Longrightarrow \quad \overline{u}\ \text{ est injective} \end{aligned}$$

- *Il est trivial que $\overline{u}$ est surjective*

Remarque 2.1.1
Soient $s : E/Ker(u) \longrightarrow E$ la surjection canonique et $j : Im(u) \longrightarrow F$ l'injection canonique, alors on vérifie facilement que :

$$u = jo\overline{u} \circ s$$

C'est ce qu'on appelle la décomposition canonique de u :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ E/Ker(u) & \xrightarrow{\overline{u}} & Im(u) \end{array}$$

Corollaire 2.1.1 (Théorème du rang)
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie** *et F un K-espace vectoriel quelconque. Alors :*
i) $Im(u)$ est de dimension finie
ii) $\boxed{dim_K(E) = dim_K(Ker(u)) + dim_K(Im(u))}$

Preuve 2.1.5
i) Si $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ est une partie génératrice finie de E alors $u(A) = \{u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_m)\}$ est une partie génératrice finie de $Im(u)$.
ii) $E/Ker(u)$ est isomorphe à $Im(u)$ donc $dim_K(E/Ker(u)) = dim_K(Im(u))$.
Or $dim_K(E/Ker(u)) = dim_K(E) - dim_K(Ker(u))$, d'où le résultat.

Corollaire 2.1.2
Soient E et F deux K-espaces vectoriels de **dimension finie** *avec $dim_K(E) = dim_K(F)$ et u une application linéaire de E vers F, alors les propositions suivantes sont equivalentes :*
i) u est injectif
ii) u est surjective
iii) u est bijective

Preuve 2.1.6
i) $\Longrightarrow$ ii) Si u est injectif alors $Ker(u) = \{0\}$, donc d'après le corollaire précèdent $dim_K(E) = dim_K(Im(u))$ donc $dim_K(Im(u)) = dim_K(F)$ et par suite $Im(u) = F$ car $Im(u)$ est un sous-espace vectoriel de F

ii) $\Longrightarrow$ iii) Si u est surjectif alors $Im(u) = F$ donc $dim_K(Im(u)) = dim_K(F) = dim_K(E)$ et d'après le corollaire précèdent, $dim_K(Ker(u)) = 0$ et par suite $Ker(u) = \{0\}$

iii) $\Longrightarrow$ i) Trivial

Remarque 2.1.2
Soient E un K-espace vectoriel **de dimension finie** *et u un endomorphisme de E, alors on a toujours :*

$$dim_K(E) = dim_K(Ker(u)) + dim_K(Im(u))$$

Par contre on a pas toujours :

$$E = Ker(u) \oplus Im(u)$$

Néanmoins, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.3
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie** *et u un endomorphisme de E, alors les propositions suivantes sont equivalentes :*
i) $E = Ker(u) \oplus Im(u)$
ii) $Im(u) = Im(u^2)$
iii) $Ker(u) = Ker(u^2)$
iv) $Ker(u) \cap Im(u) = \{0\}$

Preuve 2.1.7
i) $\Longrightarrow$ *ii) Pour tout endomorphisme* u *on a toujours* $Im(u^2) \subseteq Im(u)$*, donc il suffit de montrer que* $Im(u) \subseteq Im(u^2)$
Pour cela soit $y \in Im(u)$ *donc* $y = u(x)$ *où* $x \in E$*, or* $E = Ker(u) + Im(u)$ *donc* $x = x_1 + u(x_2)$ *avec* $x_1 \in Ker(u)$
$\Longrightarrow y = u(x) = u^2(x_2)$
$\Longrightarrow y \in Im(u^2)$

ii) $\Longrightarrow$ *iii) On a toujours , pour tout endomorphisme* u*,* $Ker(u) \subseteq Kre(u^2)$*, et on a aussi*

$$dim_K(E) = dim_K(Ker(u)) + dim_K(Im(u)) = dim_K(Ker(u^2)) + dim_K(Im(u^2))$$

Or $dim_K(Im(u)) = dim_K(Im(u^2))$ *donc* $dim_K(Ker(u^2)) = dim_K(Ker(u))$ *et par suite on a* $Ker(u^2) = Ker(u)$*, car* $Ker(u) \subseteq Ker(u^2)$

iii) $\Longrightarrow$ *iv) Soit* $y \in Ker(u) \cap Im(u)$ *alors* $u(y) = 0$ *et* $y = u(x)$ *donc* $u^2(x) = 0$ *et par suite* $x \in Ker(u^2)$ *donc* $x \in Ker(u)$*. D'où* $y = u(x) = 0$

iv) $\Longrightarrow$ *i) Trivial car on sait que :*

$$E = Ker(u) \oplus Im(u) \iff \begin{cases} Ker(u) \cap Im(u) = \{0\} \\ \\ dim_K(E) = dim_K(Ker(u)) + dim_K(Im(u)) \end{cases}$$

2.2 Calcul matriciel

2.2.1 Opérations sur les matrices

Définition 2.2.1
Soit K *un corps commutatif, une matrice* A *à coefficients dans* K *est une suite double finie* $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m\,,\,1 \leq j \leq n}$ *d'éléments de* K*.*
On pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m\,,\,1 \leq j \leq n}$*.*

Remarque 2.2.1
1. *Une matrice* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m\,,\,1 \leq j \leq n}$ *est représentée par un tableau de la manière suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ce tableau est constitué de m *lignes et* n *colonnes.*
Pour chaque i*,* $1 \leq i \leq m$ *et pour chaque* j*,* $1 \leq j \leq n$*,* i *indique la* i^{ieme} *ligne et* j *la* j^{ieme} *colonne. Donc* A *est une matrice à* m *lignes et* n *colonnes. On dit que* A *est une* (m,n)*-matrice.*

2. *Pour tout corps commutatif K et pour tout entier $n \geq 1$, les éléments de K^n peuvent être considérés comme des $(n,1)$-matrices ou des $(1,n)$-matrices, ainsi si $X \in K^n$, alors, suivant les besoins, X peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ou \quad X = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix}$$

3. *Si $m = n$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n.*

Notations 2.2.1

1. *On désigne par $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ l'ensemble de toutes les (m,n)-matrices à coefficients dans K. On munit $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ d'une addition et d'une loi externe de la manière suivante :*

$$Si\, A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m\,,\, 1 \leq j \leq n} \text{ et } B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m\,,\, 1 \leq j \leq n}$$

   alors,

$$A + B = (c_{ij})_{1 \leq i \leq m\,,\, 1 \leq j \leq n}, \text{ où } \forall i,\ \forall j,\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$Si\ \lambda \in K, \text{ alors } \lambda.A = (c_{ij})_{1 \leq i \leq m\,,\, 1 \leq j \leq n}, \text{ où } \forall i,\ \forall j,\ c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

2. *Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, on définit le produit de A par B, qu'on note $A \times B$ ou AB, par*

$$AB = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}\,, \text{ où } \forall i,\ \forall j,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

   Donc on aura

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(K) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{n,p}(K) \Longrightarrow AB \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$$

3. *On désigne par $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble de toutes les matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K. Donc si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ alors $AB \in \mathcal{M}_n(K)$.*
   La multiplication des matrices définit donc une loi interne sur $\mathcal{M}_n(K)$

Proposition 2.2.1
Soit K un corps commutatif quelconque et n un entier ≥ 2. Alors,
i) $(\mathcal{M}_{m,n}(K), +, \cdot)$ *est un K-espace vectoriel.*
ii) $(\mathcal{M}_n(K), +, \times)$ *est une K-algèbre unitaire, non commutatif et non intègre.*

Preuve 2.2.1
i) Il est facile de vérifier que $(\mathcal{M}_{m,n}(K), +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel, l'élément neutre de l'addition est la matrice nulle dont tous les coefficients sont nuls.
ii) Il suffit de vérifier que la multiplication est associative. Soient A, B et C trois éléments de $(\mathcal{M}_n(K)$, posons :

$$A(BC) = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ et } (AB)C = (\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \sum_{l=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl})c_{lj})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj})\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\end{aligned}$$

Donc on voit que $\forall i,\ \forall j,\ \alpha_{ij} = \beta_{ij}$
L'élément neutre de la multiplication est la matrice identité :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Proposition 2.2.2
Pour chaque i, $1 \leq i \leq m$ *et pour chaque* j, $1 \leq j \leq n$, *on considère la matrice* E_{ij} *de* $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ *dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la* i^{ieme} *ligne et la* j^{ieme} *colonne qui est égal à* 1. *Alors* $\{E_{ij}\ :\ 1 \leq i \leq m\, j,\ 1 \leq j \leq n\}$ *forme une base de* $\mathcal{M}_{m,n}(K)$, *appelée base canonique de* $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Preuve 2.2.2
Exercice

Définition 2.2.2
Les matrices E_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, *sont appelées les matrices élémentaires de* $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Remarque 2.2.2
Soit $M_n(K)$ *l'algèbre des matrices carrées à coëfficients dans un corps commutatif* K. *Alors on vérifie facilement qu'on a*

$$\boxed{\forall i,j,k,l \in \{1,2,\dots,n\},\ \ E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k\\ E_{il} & \text{si } j = k\end{cases}}$$

2.2.2 Trace d'une matrice carrée

Définition 2.2.3
Soient K un corps commutatif et $M_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées à coëfficients dans K. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $M_n(K)$, on définit **la trace** *de A, qu'on note $Tr(A)$ par*

$$\boxed{Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

Proposition 2.2.3
Soient K un corps commutatif et $M_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées à coëfficients dans K. Alors

i) $\forall A \in M_n(K),\ \forall B \in M_n(K),\ \ Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
ii) $\forall \lambda \in K,\ \forall A \in M_n(K),\ \ Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$
iii) $\forall A \in M_n(K),\ \forall B \in M_n(K),\ \ Tr(AB) = Tr(BA)$.

Preuve 2.2.3
i) *Exercice*
ii) *Exercice*
ii) *Posons* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *et* $BA = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, *alors on a*

$$\begin{aligned}
Tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = Tr(BA)
\end{aligned}$$

Définition 2.2.4
Soient K un corps commutatif et $M_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées à coëfficients dans K. Deux matrices A et B de $M_n(K)$ sont dites **semblables**, *s'il existe une $P \in M_n(K)$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.*

Corollaire 2.2.1
Soient K un corps commutatif et $M_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées à coëfficients dans K. Alors deux matrices semblables de $M_n(K)$ ont même trace.

Preuve 2.2.4
Soient A et B deux matrices semblables, donc $B = P^{-1}AP$, où P est une matrice inversible de $M_n(K)$. Donc on aura

$$Tr(B) = Tr(P^{-1}(AP)) = Tr((AP)P^{-1}) = Tr(A(PP^{-1})) = Tr(A)$$

2.3 Applications linéaires et matrices

2.3.1 Matrice d'une application linéaire

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m,1\leq j\leq n}$ une (m,n)-matrice, alors A peut être considérée comme une application linéaire, qu'on note encore A, de K^n vers K^m de la manière suivante :
Pour chaque $X \in K^n$, l'image de X, qu'on note AX, est définie par :

$$Y = AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

Autrement dit,

$$Si\, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ alors } \forall i,\ 1 \leq i \leq m,\ y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

Soient maintenant E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ une base de E et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une base de F. Pour chaque j, $1 \leq j \leq m$, on a $u(e_j) \in F$, donc on aura :

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq m,\ u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e'_i$$

Définition 2.3.1
La matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq m}$ s'appelle la matrice de u par rapport aux bases β et β' et se note $A = Mat(u, \beta, \beta')$

Remarque 2.3.1

1. *Si $\dim_K(E) = m$ et $\dim_K(F) = n$ et si β et β' sont respectivement des bases de E et F, alors la matrice d'une application linéaire de E vers F est une (n,m)-matrice.*
2. *E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$. Si $u : E \longrightarrow E$ est un endomorphisme et si β est une base de E alors la matrice de u par rapport à β est une matrice carrée d'ordre n :*

$$Mat(u, \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2.3.2 Matrice de passage - Changement de base

Définition 2.3.2
Soient E un K espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases de E telles que

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$$

Alors la matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ s'appelle la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à la base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.

Remarque 2.3.2

1. *Par définition, la matrice de passage P de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à la base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est la matrice de l'endomorphisme p de E défini par*

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ p(e_j) = e'_j$$

   L'endomorphisme p transforme une base en une base, donc p est un automorphisme et par suite, la matrice P est inversible.

2. *Si P est la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à la base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, alors P^{-1} est la matrice de passage de la base $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.*

3. *Soit $x \in E$ tel que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$$

$$\textit{Posons} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

   Nous avons

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j\right) e_i \end{aligned}$$

   Donc on voit que

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j$$

   Par suite on a

$$X = PX'$$

Théorème 2.3.1 (de changement de base)
Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie, n et m respectivement. $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E vers F.
$\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *et* $\gamma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *deux bases de E.*
$\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)$ *et* $\gamma' = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_m)$ *deux bases de F.*
P la matrice de passage de β à γ et Q la matrice de passage de β' à γ'.
$A = Mai(u, \beta, \beta')$ et $B = Mat(u, \gamma, \gamma')$. Alors on a

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

Preuve 2.3.1
β et γ sont deux bases de E, donc tout $x \in E$, sécrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ \text{ et } \ x = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

β' et γ' sont deux bases de F, donc pour tout $x \in E$, $u(x)$ s'écrit

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i \ \text{ et } \ u(x) = \sum_{i=1}^{n} y'_i v'_i$$

Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ \text{ et } \ Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Alors on sait que

$$X = PY, \ X' = QY', \ X' = AX \ \text{ et } \ Y' = BY$$

On en déduit que, d'une pat, ona $\forall Y \in M_{n,1}(K)$, $BY = (Q^{-1}AP)Y$. Or ceci n'est possible que si $B = Q^{-1}AP$.

Corollaire 2.3.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E.
$\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *et* $\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ *deux bases de E.*
$A = Mat(u, \beta)$, $B = Mat(u, \beta')$ et P la matrice de passage de β à β'. Alors on a

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Preuve 2.3.2
Exercice

2.3.3 Rang - Matrices équivalentes

Rappelons que toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ peut-être interprétée comme une application linéaire de $M_{n,1}(K)$ vers $M_{m,1}(K)$, notée encore A et définie par :

$$\forall X \in M_{n,1}(K),\ A(X) = AX$$

.

Définition 2.3.3

i) Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E vers F. On définit le **rang** *de u, qu'on note $rg(u)$, par*

$$\boxed{rg(u) = \dim_K(Im(u))}$$

ii) Soit A une matrice de $M_{m,n}(K)$, alors par définition, le rang de A est égal au rang de l'application linéaire définie par A :

$$\boxed{rg(A) = \dim_K(Im(A))}$$

Remarque 2.3.3

1. *E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, n et m respectivement. $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors*

$$Im(u) = Vect(\{u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\})$$

Donc $rg(u) = \dim_K(Vect(\{u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\}))$.

2. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ une matrice de $M_{m,n}(K)$. Pour chaque j, $1 \leq j \leq n$, soit v_j l'élément de $M_{m,1}(K)$ défini par :*

$$v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Alors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ s'appelles les vecteurs colonnes de la matrice A.
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(K)$, alors on aura

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ Ae_j = v_j$$

Donc, on en déduit que le rang d'une matrice est égal à la dimension du sous-espace vectoriel de $M_{m,1}(K)$ engendré par les vecteurs colonnes de A.

3. *E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, n et m respectivement.*
$u : E \longrightarrow F$ une application linéaire .
$\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, $\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)$ une base de F et $A = Mat(u, \beta, \beta')$.
Alors

$$rg(u) = rg(A)$$

En effet, soit $\varphi : M_{m,1}(K) \longleftrightarrow F$ *l'isomorphisme canonique, défini par :*

$$\forall Y \in M_{m,1}(K),\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Longrightarrow \varphi(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i$$

Alors il est facile de vérifier que $\varphi(Im(A)) = Im(u)$, *donc* $\dim_K(Im(A)) = \dim_K(Im(u))$.

Définition 2.3.4
Soit K *un corps commutatif, deux matrices* A *et* B *de* $M_{m,n}(K)$ *sont dites* ***équivalentes****, s'il existe deux matrices inversibles* $P \in M_n(K)$ *et* $Q \in M_m(K)$ *tel que*

$$\boxed{B = QAP}$$

Remarque 2.3.4
Deux matrices équivalentes ont même rang.
Soient A *et* B *deux matrices équivalenyes de* $M_{m,n}(K)$, *alors il existe* $P \in GL_n(K)$ *et il existe* $Q \in GL_m(K)$, *telles que* $B = QAP$. *Posons* $E = M_{n,1}(K)$ *et* $F = M_{m,1}(K)$ *et soit* $u : E \longrightarrow F$ *l'application linéaire de matrice* A *par rapport aux bases canoniques* β *et* β' *de* E *et* F *respectivement. Soient, d'autre part,* γ *la base de* E *dont* P *est la matrice de passage de* β *à* γ *et* γ' *la base de* F *dont* Q *est la matrice de passage de* β' *à* γ', *alors d'après le théorème de changement de base,* $B = Mat(u,\gamma,\gamma')$. *Or, d'après la remarque précédente, on a* $rg(u) = rg(A)$ *et* $rg(u) = rg(B)$, *d'où le résultat.*
Dans la suite, nous allons montré que la réciproque est aussi vraie.

Lemme 2.3.1
Soit K *un corps commutatif,* A *une matrice non nul de* $M_{m,n}(K)$ *et* r *un entier* ≥ 1. *Alors* A *est de rang* r, *si et seulement si,* A *est équivalente à la matrice en blocs* $I(n,r)$, *définie par*

$$I(n,r) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r *est la matrice identité d'ordre* r.

Preuve 2.3.3
$(\Longrightarrow)$ *Supposons que* A *est de rang* r.
Soient $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *et* $\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_m)$ *les bases canoniques de* $E = M_{n,1}(K)$ *et de* $F = M_{m,1}(K)$ *respectivement. Soit* $u : E \longrightarrow F$ *l'application linéaire de matrice* A *par rapport aux bases* β *et* β'. $rg(A) = r$, *donc* $\dim_K(Im(u)) = r$, *soit* $(v'_1, v'_2, \ldots, v'_r)$ *une base de* $Im(u)$ *et soient* $v'_{r+1}, \ldots, v'_m$ *des vecteurs de* F *tels que* $\gamma' = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_r, v'_{r+1}, \ldots, v'_m)$ *soit une base de* F.
Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, *soit* $v_i \in E$ *tel que* $v'_i = u(v_i)$, *alors il est facile de voir que* $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ *est libre et que* $Vect(\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}) \cap \ker(u) = \{0\}$. *Puisque* $r + \dim_K(\ker(u)) = n = \dim_K(E)$ *alors*

$$E = Vect(\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}) \oplus \ker(u)$$

Soit $(v_{r+1},\dots,v_n)$ *une base de* $\ker(u)$, *alors* $\gamma=(v_1,v_2,\dots,v_r,v_{r+1},\dots,v_n)$ *est une base de* E *et on voit facilement que* $Mat(u,\gamma,\gamma')=I(n,r)$. *Soient* P *et* R *les matrices de passage de* β *à* β' *et de* γ *à* γ' *respectivement, alors on sait, d'après le théorème de changement de bases que*

$$I(n,r)=R^{-1}AP=QAP, \quad \text{où } Q=R^{-1}$$

Donc A *et* $I(n,r)$ *sont équivalentes.*
$(\Longleftarrow)$ *D'après la remarque précédente.*

Théorème 2.3.2
Soient K *un corps commutatif,* A *et* B *deux matrices de* $M_{m,n}(K)$. *Alors* A *et* B *sont équivalentes, si et seulement si,* $rg(A)=rg(B)$.

Preuve 2.3.4
$(\Longrightarrow)$ *Si* A *et* B *sont équivalentes, alors, d'après la remarque précédente,* $rg(A)=rg(B)$.
$(\Longleftarrow)$ *Si maintenant* $rg(A)=rg(B)=r$, *alors, d'après le lemme précédent,* A *et* B *sont équivalentes à la matrice* $I(n,r)$, *puisque la relation d'équivalence entre matrices est transitive, alors* A *et* B *sont équivalentes.*

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1
On considère le corps $\mathbb{C}$ *comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

a) *Trouver une base de* $\mathbb{C}$.
b) *Montrer que pour tout endomorphisme* f *de* $\mathbb{C}$, *il existe* $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ *tel que*

$$\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=az+b\overline{z}$$

c) *Trouver une condition necessaire et suffisante sur* a *et* b *pour que* f *soit un isomorphisme de* $\mathbb{C}$.

Exercice 2.4.2
Soit $E=M_2(\mathbb{R})$ *muni de sa base canonique* (e_1,e_2,e_3,e_4). *Rappelons que*

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Soit f *l'application de* E *définie par*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix}a-d&-b-c\\b+c&d-a\end{pmatrix}\end{aligned}$$

a) *Montrer que* f *est un endomorphisme de* E *et déterminer sa matrice par rapport à base canonique de* E.
b) *Donner une base de* $Ker(f)$, $Im(f)$ *et* $Ker(f)\cap Im(f)$.

Exercice 2.4.3
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, F un K-espace vectoriel quelconque et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

a) *Montrer que si H est un sous-espace de E, alors*

$$\dim(u(H)) = \dim(H) - \dim(H \cap Ker(u))$$

b) *Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de F, alors*

$$\dim(u^{-1}(G)) = \dim(G \cap Im(u) + \dim(Ker(u))$$

c) *Soit v une autre application linéaire de E vers F. Montrer que*

$$\dim(Ker(u+v)) \leq \dim(Ker(u) \cap Ker(v)) + \dim(Im(u) \cap Im(v))$$

Exercice 2.4.4
Soient E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E

a) *On suppose que E est de dimension finie sur K. Montrer que les propositions suivantes sont equivalentes :*
   i) $E = Ker(u) \oplus Im(u)$
   ii) $Ker(u) = Ker(u^2)$
   iii) $Im(u) = Im(u^2)$

b) *Si E est de dimension infinie sur K, trouver une condition necessaire et suffisante pour que $E = Ker(u) \oplus Im(u)$*

Exercice 2.4.5
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E. Montrer que

a) $\dim(Ker(u+v)) \leq \dim(Ker(u) \cap Ker(v)) + \dim(Im(u) \cap Im(v))$
b) $dim(Ker(v \circ u)) \leq \dim(Ker(u)) + \dim(Ker(v))$
c) $u(Ker(v \circ u)) = Ker(v) \cap Im(u)$

Exercice 2.4.6
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$.
Montrer que $rg(u) + rg(v) = \dim(E)$.

Exercice 2.4.7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^3 = 0$.

a) *Montrer que $rg(u) + rg(u^2) \leq \dim(E)$.*
b) *Montrer que $2.rg(u^2) \leq rg(u)$.*

Exercice 2.4.8
Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimension finie

a) *Pour $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$, montrer que :*

$$rg(f) + rg(g) - dim_K(F) \leq rg(gof) \leq \inf(rg(f), rg(g))$$

b) *Pour f et g deux éléments de $L(E,F)$, montrer que :*

$$|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$$

Exercice 2.4.9

Soient E et F deux K-espaces vectoriels avec Ede dimension finie. u et v deux applications linéaires de E vers F. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $rg(u+v) = rg(u) + rg(v)$.

ii) $Im(u) \cap Im(v) = \{0\}$ *et* $E = \ker(u) + \ker(v)$.

Exercice 2.4.10

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, u et v deux endomorphismes de E. On suppose que $u+v$ inversible et $uov = 0$

Montrer que $rg(f) + rg(g) = n$

Exercice 2.4.11

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. *A quelle condition existe-t-il un endomorphisme u de E tel que*
   $Im(u) = F$ *et* $Ker(u) = G$?
2. *On pose $\mathcal{E} = \{u \in L(E) \,:\, Im(u) = F \text{ et} Ker(u) = G\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ muni de la loi $\circ$ est un groupe, si et seulement si, $E = F \oplus G$.*

Exercice 2.4.12

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, u et v deux endomorphismes de E tels que :

$$E = Im(u) + Im(v) = Ker(u) + Ker(v)$$

Montrer que :

a) Les sommes $Im(u) + Im(v)$ et $Ker(u) + Ker(v)$ sont directes

b) $E = Im(u+v)$ *et* $rg(u+v) = rg(u) + rg(v) = n$

Exercice 2.4.13

Soient K un coprs commutatif et $A \in M_n(K)$ avec $rg(A) = 1$.

1. *Montrer qu'il existe $X \in M_{n,1}(K)$ et $Y \in M_{n,1}(K)$, tels que $A = X^tY$.*
2. *Montrer que $Tr(A) = {}^tXY$.*
3. *Pour chaque entier naturel p, exprimer une relation entre A^p, A et $Tr(A)$.*
4. *Pour $\alpha \in K$, calculer $(I+A)(I+\alpha A)$ et en déduire une condition necessaire et suffisante sur $Tr(A)$ pour que $I+A$ soit inversible.*

Exercice 2.4.14

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{aligned}$$

1. *Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*
2. *Soit $(e_0, e_1 \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour chaque i, $0 \leq i \leq n$, expliciter l'expression de $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$ et justifier que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

3. *En déduire que pour chaque* $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$*, il existe un unique polynôme* P *de degré inérieur ou égal à* n *tel que*

$$\forall i,\ 0 \leq i \leq n,\ P(a_i) = \alpha_i$$

Expliciter le polynôme P *dans la base* $(L_0, L_1, \dots, L_n)$

4. *Déterminer l'unique polynôme* P *tel que* $P(-1) = 1$, $P(1) = -5$ *et* $P(2) = \sqrt{2}$.
5. *Soit* $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,:\, f(a_0) = f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0\}$*. Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *et déterminer un supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 2.4.15

Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme de* E *de rang* 1.

1. *Montrer que si* $u^2 \neq 0$ *alors il existe une base* β *de* E *et il existe* $\alpha \neq 0$ *tels que*

$$Mat(u, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Montrer que si* $u^2 = 0$*, alors il existe une base de* β *de* E *telle que*

$$Mat(u, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Montrer que* $u^2 = tr(u)u$.
4. *Montrer que si* $\varphi : L(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ *est une application telle que pour tout endomorphisme* u *de rang* 1 *on a* $u^2 = \varphi(u)u$*, alors* $\varphi = tr$.

Exercice 2.4.16

Soient K *un corps commutatif,* $M_n(K)$ *l'algèbre des matrices carrées à coëfficients dans* K *et* A *une matrice non nulle de* $M_n(K)$*. On définit l'application* $u : M$ *par*

$$\begin{aligned} u : M_n(K) &\longrightarrow M_n(K) \\ M &\longmapsto u(M) = M + Tr(M)A \end{aligned}$$

a) *Déterminer, en fonction de* A*, le noyau et l'image de* u.
b) *Soit* $B \in M_n(K)$*, résoudre l'équation* $M + Tr(M)A = B$.

Exercice 2.4.17

Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $= n$*, où* K *est un corps de caractéristique nulle, et* G *un sous-groupe fini de* $GL(E)$ *de cardinal* r*. Pour* $u \in L(E)$*, on pose :*

$$\tilde{u} = \frac{1}{r} \sum_{v \in G} v \circ u \circ v^{-1}$$

Montrer que :

a) $\forall v \in G\ ,\ \tilde{u} \circ v = v \circ \tilde{u}$

b) $\forall v \in G\ ,\ u = \tilde{u} \iff v \circ u = u \circ v$

c) *Tout sous-espace* G*-stable de* E *possède un supplémentaire* G*-stable*

d)

$$dim_K(\bigcap_{v\in G} Ker(v - Id_E)) = \frac{1}{r}\sum_{v\in G} tr(v)$$

Exercice 2.4.18

Soient n *un entier* ≥ 1 *et* p *un nombre premier. Montrer que :*

$$\forall A \in M_n(\mathbb{Z})\ \ ,\ \ tr(A^p) \equiv tr(A)\ \ mod(p)$$

Exercice 2.4.19

Soient $M_n(K)$ *le* K*-espace vectoriel des matrices carrées à coëfficients dans* K*,* $A \in M_n(K)$ *et* u *l'endomorphisme de* $M_n(K)$ *défini par*

$$\forall M \in M_n(K),\ u(M) = AM + MA$$

Montrer que $Tr(u) = 2nTr(A)$*.*

Exercice 2.4.20

Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $= n$ *et* u *un endomorphisme nilpotent d'indice* p

a) *montrer que* $p \leq n$

b) *Montrer que si* $Ker(u^i) \neq E$*, alors* $Ker(u^i) \neq Ker(u^{i+1})$

c) *Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes :*

i) $p = n$

ii) $\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\}\ ,\ dim_K(Ker(u^k) = k$

iii) *Il existe* $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ *tel que* $dim_K(Ker(u^k) = k$

d) *On suppose* $p = n$ *et soit* F *un sous-espace vectotiel de* E *stable par* u*. Montrer qu'il existe* $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ *tel que* $F = Ker(u^k)$

Exercice 2.4.21

Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $= n$ *et* u *un endomorphisme nilpotent d'indice* p

a) *Montrer que* $p \leq n$

b) *Montrer que si* $Ker(u^i) \neq E$*, alors* $Ker(u^i) \neq Ker(u^{i+1})$

c) *Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes :*

i) $p = n$

ii) $\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\}\ ,\ dim_K(Ker(u^k) = k$

iii) *Il existe* $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ *tel que* $dim_K(Ker(u^k) = k$

d) *On suppose* $p = n$ *et soit* F *un sous-espace vectotiel de* E *stable par* u*. Montrer qu'il existe* $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ *tel que* $F = Ker(u^k)$

Exercice 2.4.22

Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie et* u *un endomorphisme de* E*.*

a) *Montrer que les propositions suivantes sont equivalentes :*

i) *u est nilpotent*
ii) $\forall m \in \mathbb{N}$, $tr(u^m) = 0$

b) *Soient* u *et* v *deux endomorphismes de* E *vérifiant* $u \circ v - v \circ u = v$. *Montrer que* v *est nilpotent*

Exercice 2.4.23
Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $= n$, *avec* $n \geq 2$, *et* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *des endomorphismes nilpotents de* E *deux à deux commutant. Montrer que* $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = 0$

Exercice 2.4.24
Soit K *un corps de caractéristique nulle . Pour* $A, B \in M_n(K)$, *on pose* $[A, B] = AB - BA$ *et on suppose que* $[A, [A, B]] = 0$

a) *Montrer que* $[A, B]$ *est nilpotente*
b) *On suppose de de plus que* A *est nilpotente. Montrer que* AB *est nilpotente*

Exercice 2.4.25
Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie,* u *et* v *deux endomorphismes nilpotents de* E *d'indice* 2 *tels que :*

$$Ker(u) \cap Ker(v) = \{0\}$$

a) *Montrer que* $dim_K(Ker(u)) = dim_K(Ker(v))$
b) *Montrer que* $u + v$, $u - v$, $u \circ v + v \circ u$ *et* $u \circ v - v \circ u$ *sont inversibles*
c) *Montrer que* $E = Ker(u) \oplus Ker(v)$
d) *Montrer que* u *et* v *sont semblables*

Exercice 2.4.26
Soit E *un* K*-espace vectoriel quelconque.*

1. *Soient* F *un sous-espace vectoriel de* E *et* G *un supplémentaire de* F *dans* E. *On appelle projection sur* F *parallèlement à* G, *qu'on note* p_F, *l'endomorphisme de* E *défini par :*

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus G &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

   a) *Vérifier que* $p_F^2 = p_F$.
   b) *Vérifier que* $Im(p_F) = F$ *et* $\ker(p_F) = G$.
   c) *Vérifier que si* p_G *est la projection sur* G *parallèlement à* F, *alors*

$$\forall x \in E,\ x = p_F(x) + p_G(x)$$

2. *On dit qu'un endomorphisme de* E *est un projecteur de* E, *si* $u^2 = u$. *On suppose que* u *est un projecteur de* E. *Montrer que*
   a) $Id_E - u$ *est un projecteur de* E.
   b) $Im(u) = \{x \in E\ :\ u(x) = x\}$.
   c) $E = Ker(u) \oplus Im(u)$.
   d) u *est la projection sur* $Im(u)$ *parallèlement à* $\ker(u)$.
   e) $rg(u) = Tr(u)$.
3. *Soient* F *un sous-espace vectoriel de* E *et* p *un projecteur de* E. *Montrer que :*
   a) $p^{-1}(F) = \ker(p) \oplus (F \cap Im(p))$

b) F est stable par p, si et seulement si, $F = F \cap \ker(p) \oplus F \cap Im(p)$.

4. Soient u et v deux projecteurs de E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que
   a) $u \circ v$ et $u + v - u \circ v$ sont des projecteurs de E.
   b) $Im(u \circ v) = Im(u) \cap Im(v)$
   c) $Im(u + v - u \circ v) = Im(u) + Im(v)$
5. Soient u et v deux projecteurs quelconques de E (On ne suppose plus que $u \circ v = v \circ u$).
   a) Trouver une condition necessaire et suffisante pour que $u + v$ soit un projecteur de E.
   b) Dans le cas où $u + v$ est un projecteur de E, montrer que
      i) $Im(u) \cap Im(v) = \{0\}$
      ii) $Ker(u + v) = Ker(u) \cap Ker(v)$
      iii) $Im(u + v) = Im(u) \oplus Im(v)$
6. On suppose K de caractéristique nulle, (Par exemple $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$). Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ des projecteurs de E. Montrer que $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ est un projecteur de E, si et seulement si,
$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2,\ i \neq j \Longrightarrow u_i \circ u_j = 0$$

Exercice 2.4.27
Soit N un entier naturel et soit $F = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\ :\ f(0) = f'(0) = \dots f^{(N)}(0) = 0\}$.
   a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   b) Trouver un supplémentaire G de F dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et déterminer la projection de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ sur G parallèlement à F.

Exercice 2.4.28
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.

1. On suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.
   a) montrer que $u \circ p = 0$.
   b) En déduire que $u \circ u = 0$.
2. Réciproquement, on suppose que $u \circ u = 0$.
   a) Montrer que $Im(u) \subset Ker(u)$.
   b) Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $Im(u) \subset F \subset Ker(u)$ et soit G un supplémentaire de F dans E. Soit q la projection de E sur F parallèlement à G. Calculer $q \circ u - u \circ q$.
3. Donner une condition necessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p de E tel que
$$p \circ u - u \circ p = u$$
   Cette condition etant supposée remplie, y-a-t-il toujours unicité du projecteur p ?
4. On prend $E = \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de E défini par :
$$\forall (x, y) \in E,\ u(x, y) = (-2x + 4y, -x + 2y)$$
   a) Vérifier que $u \circ u = 0$.
   b) Déterminer un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

Exercice 2.4.29
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que

i) Il existe un projecteur p *et un automorphisme* f *tel que* $u = p \circ f$.
ii) Il existe un projecteur q *et un automorphisme* g *tel que* $u = g \circ q$.

Exercice 2.4.30
Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie,* p *et* q *deux projecteurs de* E *tels que* $p + q - Id_E$ *soit inversible. Montrer que* $rg(u) = rg(v)$.

Exercice 2.4.31
Soient E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{P}$ *l'ensemble de tous les projecteurs de* E *et* γ *un chemin de* $\mathcal{P}$*. Montrer qu'il existe* $e_1, e_2, \ldots, e_m$ *des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *vers* E *telles que* $\forall t,\ (e_1(t), e_2(t), \ldots, e_m(t))$ *soit une base de* $Im(\gamma(t))$.

Exercice 2.4.32
Soient E *un* K*-espace vectoriel et* f *un endomorphisme non nul de* E.
On pose $E_f = \{u \circ f \ :\ u \in L_K(E)\}$.
a) Montrer que E_f *est un sous-espace vectoriel de* $L_K(E)$.
b) Soit g *un endomorphisme de* E*. Montrer que*

$$g \in E_f \Longleftrightarrow \ker(f) \subseteq \ker(g)$$

c) Montrer qu'il existe un projecteur non nul, appartenant à E_f.

Exercice 2.4.33
Soit u *un endomorphisme de* E *tel que* $u^2 = -Id_E$*. Pour chaque* $x \in E$*, on pose* $E_x = Vect(\{x, u(x)\})$.

1. *Calculer* $\dim(E_x)$.
2. *Soit* F *un sous-espace stable par* u*. Montrer que*
   i) $E_x \cap F \neq \{0\} \Longrightarrow E_x \subset F$
   ii) Si $x \notin F$ *alors la somme* $E_x + F$ *est directe.*
3. *Montrer qu'il existe* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *dans* E *tels que*

$$E = E_{x_1} \oplus E_{x_2} \oplus \cdots \oplus E_{x_m}$$

Exercice 2.4.34
Soient A *une matrice de* $M_n(\mathbb{K})$ *et* k *un entier* ≥ 1 *tel que* $A^k = I$*. On pose* $B = I + A + \cdots + A^{k-1}$ *et soient* u *et* v *les endomorphismes de* $\mathbb{K}^n$ *de matrices respectivement* A *et* B *dans la base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

1. *Montrer que*
   i) $Ker(u - Id) = Im(v)$.
   ii) $Im(u - Id) = Ker(v)$.
   iii) $\mathbb{K}^n = Ker(v) \oplus Im(v)$.
2. *En déduire que* $tr(B) = k.rg(B)$.

Exercice 2.4.35
Soient E, F *deux* K*-espaces vectoriels de dimension finie et* f, g *deux éléments de* $L(E, F)$

1. *Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes :*
   i) $Im(g) \subseteq Im(f)$

ii) Il existe $h \in L(E)$ tel que $g = f \circ h$

2. *Montrer l'equivalence des conditions suivantes :*
   i) $Ker(g) \subseteq Ker(f)$
   ii) Il existe $h \in L(F)$ tel que $f = h \circ g$
3. *Montrer que les propositions suivantes sont equivaletes :*
   i) $rang(g) \leq rang(f)$
   ii) Il existe $h \in L(E)$ et $k \in L(F)$ tels que $k \circ g = f \circ h$
   iii) il existe $u \in L(E)$ et $v \in L(F)$ tels que $g \circ u = v \circ f$

Exercice 2.4.36
Soient n un entier ≥ 2, $E = M_n(\mathbb{C})$ et $G = GL_n(C)$

1. *Pour $A \in E$, montrer l'equivalence des conditions suivantes :*
   i) A est non inversible
   ii) Il existe $P \in G$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P - \lambda.A \in G$
2. *Soient $A \in E$, $r \leq n$ et (C) la condition suivante :*
   (C) : Il existe $P \in G$ tel que pour exactement r valeurs de λ, $P - \lambda.A$ est non inversible.
   Montrer que :
   a) Si $rang(A) = r$ alors (C) est vérifiée
   b) Si (C) est vérifiée alors $rang(A) \geq r$
3. *Soit $f \in L(E)$ tel que $f(G) \subseteq G$. Montrer que :*
   a) $\forall A \in E$, $f(A) \in G \Longrightarrow A \in G$
   b) $\forall A \in E$, $rang(f(A)) \geq rang(A)$
   c) Montrer que f conserve le rang et que f est un automorphisme de E

Exercice 2.4.37
Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes P de $\mathbb{C}[X,Y]$ tels que
$deg_X(P) \leq 2$ et $deg_Y(P) \leq 2$

1. *Quel est la dimension de E ?*
2. *Soit u l'application défini sur E par :*

$$\forall P \in E \ , \ u(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y}$$

   Montrer que u est un endomorphisme de E et déterminer la dimension de $Ker(u)$ puis celle de $Im(u)$

Exercice 2.4.38
Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels, $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$. On suppose que $F/Im(f)$ et $G/Im(g)$ sont de dimension finie. Montrer que $G/Im(g \circ f)$ est de dimension finie

Exercice 2.4.39
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E F et G les parties de E définies par :

$$F = \bigcup_{p \geq 0} Ker(u^p) \ , \ G = \bigcap_{p \geq 0} Im(u^p)$$

a) *Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, stables par u*
b) *Montrer que $E = F \oplus G$, que $u|_F$ est nilpotent et que $u|_G$ est inversible*
c) *Soient M et N deux sous-espaces vectoriels de E, stables par u tels que $u|_M$ soit nilpotent et $u|_N$ soit inversible.*
Montrer que $M = F$ et $N = G$

Exercice 2.4.40
Soient E, F deux K-espaces vectoriels non nuls, $f \in L(E,F)$ et

$$H = \{g \in L(F,E) \ : \ f \circ g \circ f = 0\}$$

a) *Montrer que si $H = \{0\}$ alors f est bijective*
b) *On suppose que $dim_K(E) = n$, $dim_K(F) = p$ et $rang(f) = r$. Déterminer la dimension de H sur K.*

Exercice 2.4.41
Soient K un corps de caractéristique nulle et $M_n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coëfficients dans K. On dit qu'une partie $\mathcal{G}$ de $M_n(K)$ est un S-groupe, si $\mathcal{G}$ muni de la multiplication matricielle est un groupe (Attention : $\mathcal{G}$ n'est pas necessairement un sous-groupe de $GL_n(K)$). Dans ce cas on appelle l'élément neutre de $\mathcal{G}$, qu'on note J, la S-unité de $\mathcal{G}$ et l'inverse d'un élément A de $\mathcal{G}$, qu'on note $\tilde{A}$ le S-inverse de A.

1. *Pour tout $\lambda \in K^*$, $A(\lambda)$ est l'élément de $M_n(K)$ dont tous les coëfficients sont égaux à λ. Montrer que $\mathcal{G} = \{A(\lambda) \ : \ \lambda \in K^*\}$ est un S-groupe dont on déterminera la S-unité et le S-inverse d'un élément*
2. *Soit $\mathcal{G}$ un S-groupe quelconque de $M_n(K)$*
   a) *Montrer que tous les éléments de $\mathcal{G}$ ont même image et même noyau*
   b) *En déduire que si $\mathcal{G} \cap GL_n(K)$ est non vide alors $\mathcal{G}$ est un sous-groupe, au sens ordinaire, de $GL_n(K)$*
   c) *Montrer que pour tout $A \in \mathcal{G}$, on a :*

$$Ker(A) \oplus Im(A) = K^n$$

3. *Réciproquement, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de K^n et soit $\mathcal{G}$ la partie de $M_n(K)$ formée des matrices $A \in M_n(K)$ telles que F et G soient stables par A, $A|_F$ est inversible et $A|_G = 0$*
   Montrer que $\mathcal{G}$ est un S-groupe

Exercice 2.4.42
Soit $f \ : \ M_n(K) \to K$ une application **non constante** *vérifiant :*

$$\forall A \in M_n(K) \ , \ \forall B \in M_n(K) \ , \ f(A.B) = f(A)f(B)$$

a) *Montrer que $f(0) = 0$ et f(I)=1*
b) *Montrer que*

$$\forall A \in M_n(K) \ , \ f(A) \neq 0 \iff A \in GL_n(K)$$

Problème 2.4.1
Soit E un K-espace vectoriel quelconque. Pour tout endomorphisme u de E on pose $\forall k$, $N_k = Ker(u^k)$

a) Vérifier que $\forall k \geq 1$, $N_k \subseteq N_{k+1}$ *et* $u(N_{k+1}) \subseteq N_k$

b) Soit F *un sous-espace vectoriel de* E*, de dimension finie. Montrer que :*

i) $\forall k \geq 1$, $N_k \cap F$ *et* $u^k(F)$ *sont de dimension finie*

ii) $dim_K(F) = dim_K(u^k(F)) + dim_K(N_k \cap F)$

c) Dans cette partie on suppose que u *n'est pas injectif et que* N_1 *est de dimension finie . On pose* $\forall k \geq 1$, $n_k = dim_K(N_k)$

i) Montrer que $\forall k \geq 1$, N_k *est de dimension finie*

ii) Montrer que $\forall k \geq 1$, $n_k \leq kn_1$

iii) On suppose que $\forall k \geq 1$, $N_k \neq N_{k+1}$ *et qu'il existe* k_0 *tel que* $n_{k_0} = k_0$*. Montrer que* $\forall k \geq 1$, $n_k = k$

iv) On suppose que E *est de dimension finie* $= n$ *et que* u *est nilpotent non nul. Montrer que :*

$$[indice(u) = n] \iff [\exists k_0 \ : \ n_{k_0} = k_0]$$

Problème 2.4.2

Dans toute la suite E *désigne un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* u *un endomorphisme de* E *tel que* $u^2 = -Id_E$

1. *a) Montrer que* E *est necessairement de dimension paire*

   b) i) Montrer que s'il existe $e_1, e_2, \dots, e_r \in E$ *tels que* $(e_1, e_2, \dots, e_r, u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_{r-1}))$ *soit libre, alors* $(e_1, e_2, \dots, e_r, u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ *est aussi libre*

   ii) En déduire qu'il existe un entier p *tel que* $(e_1, e_2, \dots, e_p, u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_p))$ *soit une base de* E

   c) Montrer que si la dimension de E *est paire, alors il existe au moins un endomorphisme* u *de* E *tel que* $u^2 = -Id_E$

2. *On suppose dans la suite que la dimension de* E *est paire*

   a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F *de* E *tel que :*

$$E = F \oplus u(F)$$

   b) Soit $\mathbb{K} = \{P(u) \ : \ P \in \mathbb{R}[X]\}$*. Montrer que* $\mathbb{K}$ *est un corps commutatif et que pour tout* $v \in \mathbb{K}$*, il existe* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $v = a.Id_E + b.u$

   c) On munit E *de la loi externe suivante :*

$$\underset{(v,x) \mapsto v.x = v(x)}{\mathbb{K} \times E \to E}$$

   Montrer que E *muni de cette loi externe est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel que l'on note* $\hat{E}$

   d) Montrer que $dim_{\mathbb{R}}(E) = 2dim_{\mathbb{K}}(\hat{E})$

Problème 2.4.3

Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $= n$ *et* u *un endomorphisme non injectif de* E*. Pour tout entier* $k \geq 0$*, on pose* $N_k = Ker(u^k)$ *et* $I_k = Im(u^k)$

1. *Vérifier que pour tout* $k \geq 0$, $N_k \subseteq N_{k+1}$ *et* $I_k \subseteq I_{k+1}$

2. *Montrer que :*

   a) $\forall k \geq 0$, $N_k = N_{k+1} \Longrightarrow N_{k+1} = N_{k+2}$

b) *Il existe un entier naturel* $p \geq 1$ *tel que :*
i) $\forall k \geq 0$, $k < p \Longrightarrow N_k \neq N_{k+1}$
ii) $\forall k \geq p$, $N_k = N_{k+1}$

c) *Montrer que :*
i) $p \leq n$, *(Où* $n = dim_K(E)$*)*
ii) $\forall k < p$, $I_k \neq I_{k+1}$
iii) $\forall k \geq p$, $I_k = I_{k+1}$

3. *Montrer que :*
a) $E = N_p \oplus I_p$
b) *L'application* $u_p : I_p \rightarrow I_p$ *qui à* x *fait correspondre* $u_p(x) = u(x)$ *est un automorphisme de* I_p

Problème 2.4.4

Soit E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie, où* K *est un corps de caractéristique différente de 2. Dans ce problème on se propose de montrer que tout endomorphisme* f *de* E *vérifie la propriètè (P) suivante :*
(P) : f *est la différence de deux automorphismes de* E

1. *Montrer que que si* f *est un automorphisme de* E *, alors* $2_K.f$ *est un automorphisme de* E*. En déduire que tout automorphisme de* E *possède la propriètè (P)*
2. *On suppose que* f *est un endomorphisme de* E *non nul et non injectif et que* $E = Ker(f) \oplus Im(f)$
   a) *Soit* $\tilde{f} : Im(f) \rightarrow Im(f)$ *l'application qui à* x *fait correspondre* $f(x)$ *. Montrer que* $\tilde{f}$ *est un automorphisme de* $Im(f)$ *. En déduire qu'il existe deux automorphismes* f_1 *et* f_2 *de* $Im(f)$ *tels que* $\tilde{f} = f_1 - f_2$
   b) *Montrer que l'on peut prolonger* f_1 *et* f_2 *en deux automorphismes de* E *,* g_1 *et* g_2 *respectivement, tels que les restrictions de* g_1 *et* g_2 *à* $Ker(f)$ *coincident*
   c) *En déduire que* f *possède la propriètè (P)*
3. *Soit maintenant* f *un endomorphisme de* E*, non nul et non inversible. Soit* F *un supplémentaire de* $Im(f)$ *dans* E
   a) *Justifier que* $F \neq \{0\}$
   b) *Montrer qu'il existe un isomorphisme* h_1 *de* F *sur* $Ker(f)$
   c) *Montrer que l'on peut prolonger* h_1 *en un automorphisme* h *de* E
   d) *Montrer que* $Ker(foh) = F$ *et* $Im(foh) = Im(f)$
   e) *En déduire que l'endomorphisme* foh *vérifie la propriètè (P)*
   f) *Déduire de ce qui précède que* f *possède la propriètè (P)*

Problème 2.4.5

Soient E *un* K*-espace vectoriel quelconque*

1. *On suppose que* E *de dimension finie. Soient* u *un endomorphisme non nul de* E*,* D *une droite vectoriel de* E *et* H *un hyperplan de* E*. Montrer qu'il existe deux endomorphismes de* E*,* v *et* w *tels que :*

$$D = Im(v \circ u \circ w) \ \ et \ \ H = Ker(v \circ u \circ w)$$

2. a) *Montrer que les conditions suivates sont equivalentes :*

i) E est de dimension finie

ii) Les seuls idéaux bilatères de $L(E)$ sont $\{0\}$ et $L(E)$

b) On suppose que $K = \mathbb{R}$ ou que $K = \mathbb{C}$, et que E est de dimension finie. Soit p une semi-norme non nul de $L(E)$ tel que :

$$\forall u \in L(E)\ ,\ \forall v \in L(E)\ ,\ p(u \circ v) \leq p(u)p(v)$$

Montrer que p est une norme sur E

Problème 2.4.6

I) *Pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$, on pose $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$*

1. *Etudier l'inversibilité de $M_{a,b}$ et calculer son inverse lorsqu'elle existe.*
2. *La matrice $M_{a,b}$ est-elle diagonalisable ?*

II) *On désigbe par $\mathcal{S}_n$ l'enseble des matrices $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$ telles que*

$$\forall i,\, 1 \leq i \leq n,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Un élément de $\mathcal{S}_n$ s'appelle une matrice stochastique. On désigne aussi par $\mathcal{S}_n^+$ les éléments de $\mathcal{S}_n$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et par J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. *a) Montrer que*

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ A \in \mathcal{S}_n \Longleftrightarrow AJ_n = J_n$$

b) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est stable pour la multiplication des matrices.

c) Montere que si $A \in \mathcal{S}_n$ est inversible, alors $A^{-1} \in \mathcal{S}_n$.

d) Montrer que $\mathcal{S}_n^+$ est stable pour la multiplication des matrices.

e) Si $A \in \mathcal{S}_n^+$ est inversible, a-t-on $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$?

2. *Soient $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, σ une permutation de S_n et f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :*

$$\forall i,\, 1 \leq i \leq n,\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

a) Déterminer la matrice M_σ de f_σ dans la base β et vérifier que $M_\sigma \in \mathcal{S}_n^+$.

b) Justifier que M_σ est inversible et déterminer M_σ^{-1} en fonction de σ. Vérifier que $M_\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$

3. *Soit A une matrice inversible de $\mathcal{S}_n^+$ telle que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$. On pose $A^{-1} = (b_{ij})$.*

a) Montrer que

$$\forall (i,j,k) \in \{1,2,\ldots,n\}^3,\ i \neq j \Longrightarrow b_{ik}a_{kj} = 0$$

b) En déduire que chaque colonne de A contient un unique élément non nul.

c) En déduire qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $A = M_\sigma$.

Problème 2.4.7

Une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{K})$ est dite magique, si la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne quelconque de A est la même, c'est à dire, il esiste une constante, notée $s(A)$, telle que

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = s(A) \text{ et } \forall j, 1 \leq j \leq n, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} = s(A)$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de toutes les matrices mgiques de $M_n(\mathbb{K})$ et on désigne par U la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ définie par

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ et que l'application :*
$$s : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A \longmapsto s(A)$$
est un homomorphisme d'algèbres.
2. *Montrer que si A est magique inversible, alors A^{-1} est aussi magique.*
3. *Montrer que $\mathcal{M}$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques magiques et du sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques magiques.*
4. *Pour chaque $A \in M_n(\mathbb{K})$ on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On pose*
$$G = Vect((1,1,\dots,1)) \text{ et } H = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$
a) Montrer que $A \in \mathcal{M} \iff G$ et H sont stables par f_M
b) En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

Problème 2.4.8

Soient K un corps commutatif et $M_2(K)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coëfficients dans K.

1. *Pour tout $T \in M_2(K)$, Montrer que les P.S.S.E :*
i) $T^2 = T$
ii) Il existe $P \in GL_2(K)$ tel que $T = PJP^{-1}$
$$\text{où } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$
iii) $tr(T) = 1$ et $det(T) = 0$
2. *On suppose que K est un corps fini de cardinal q*
a) Soit β l'ensemble de toutes les bases du K-espace vectoriel K^2 et soit (e_1, e_2) la base canonique de K^2. Montrer que l'application :
$$\Phi : GL_2(K) \longrightarrow \beta$$
$$T \longmapsto (Te_1, Te_2)$$
est bijective

b) Sur $K^2 \setminus \{(0,0)\}$ *on définit la relation* $\mathcal{R}$ *par :*

$$\forall x \in K^2 \setminus \{(0,0)\}\ ,\ \forall y \in K^2 \setminus \{(0,0)\}\ ,\ x\mathcal{R}y \iff \exists \alpha \in K\ :\ y = \alpha x$$

i) Vérifier que $\mathcal{R}$ *est une relation d'equivalence*
ii) Pour tout $x \in K^2 \setminus \{(0,0)\}$, *déterminer le cardinal de la classe de* x *modulo la relation* $\mathcal{R}$.
iii) Quel est le nombre des classes d'equivalence modulo la relation $\mathcal{R}$ *?*

c) Montrer que (x,y) *est une base de* K^2, *si et seulement si, il existe deux classes d'equivalence distinctes* C_1 *et* C_2 *telles que* $x \in C_1$ *et* $y \in C_2$

d) Déduire, de ce qui précède, le cardinal de $GL_2(K)$

3. *On pose* $H = \{P \in GL_2(K)\ :\ PJP^{-1} = J\}$

$$(o\ \grave{u}\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

a) Montrer que H *est un sous-groupe de* $GL_2(K)$
b) Montrer que $P \in H$, *si et seulement si,* P *est une matrice diagonale*
c) Quel est le cardinal de H *?*
d) En déduire le cardinal de l'ensemble :

$$I(M_2(K)) = \{T \in M_2(K)\ :\ T^2 = T\}$$

Chapitre 3

Formes linéaires-Dualité

3.1 Définition et Exemples

Rappelons que si E est un K-espace vectoriel, alors une forme linéaire sur E est une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow K$

Définition 3.1.1
Soit E un K-espace vectoriel. On appelle **espace vectoriel dual** *de E, qu'on note E^*, l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E*

$$\boxed{E^* = L_K(E,K)}$$

Notations 3.1.1
Pour toute forme linéaire $\phi \in E^*$ et pour tout $x \in E$ on pose :

$$< x,\phi >= \phi(x)$$

Remarque 3.1.1
Si E est de dimension finie sur K alors E^* est aussi de dimension finie et on a $dim_K(E) = dim_K(E^*)$, donc dans ce cas E et E^* sont isomorphes. Cependant, si E n'est pas de dimension finie alors E peut ne pas être isomorphe à E^*, (Voir exemple ci-dessous)

Exemple 3.1.1

1. *Soient K un corps commutatif et $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ la base canonique de K^n. Alors pour tout $y \in K^n$, l'application ϕ_y définie par :*

$$\forall x \in K^n\ ,\ < x,\phi_y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{où } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

est une forme linéaire sur K^n
Réciproquement , pour toute forme linéaire $\phi \in (K^n)^*$ il existe un unique $y \in K^n$ tel que :

$$\forall x \in K^n\ ,\ < x,\phi >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

En effet, soient φ une forme linéaire sur K^n, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n et y l'élément de K^n définie par

$$y = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))$$

Alors on vérifie facilement que y est l'unique élément de K^n vérifiant :

$$\forall X \in K^n,\ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Longrightarrow \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2. *Soit K un corps commutatif et soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $K^{\mathbb{N}}$ alors l'application ϕ définie sur $K[X]$ par :*

$$\forall P \in K[X]\ ,\ P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \Longrightarrow \phi(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$$

est une forme linéaire sur $K[X]$
Réciproquement, si ϕ est une forme linéaire sur $K[X]$ alors il existe un unique $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $K^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\forall P \in K[X]\ ,\ P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \Longrightarrow < P, \phi >= \sum_{i=0}^{n} x_i a_i$$

En effet, soit $\Phi : K^{\mathbb{N}} \to (K[X])^*$, $x \mapsto \phi_x$ définie par :

$$\forall P \in K[X],\ \ P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \Longrightarrow < P, \phi_x >= \sum_{i=0}^{n} x_i a_i$$

Alors Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc pour tout corps commutatif K, $(K[X])^*$ est isomorphe à $K^{\mathbb{N}}$

Remarque 3.1.2
Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[X]$ n'est pas isomorphe à son dual $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$
En effet, pour chaque entier $n \geq 0$ posons $E_n = \{P \in \mathbb{Q}[X]\ :\ deg(P) \leq n\}$, alors E_n est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie $= n+1$, $\{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ est une base de E_n, donc E_n est isomorphe à $\mathbb{Q}^{n+1}$. Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc pout tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et par suite $\forall n \in \mathbb{N}$, E_n est dénombrable.
On a $\mathbb{Q}[X] = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, donc $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable
Or on sait que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable, donc $\mathbb{Q}[X]$ ne peut pas être isomorphe à son dual.

3.2 Base duale

Proposition 3.2.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour chaque i , $i = 1, 2, \cdots, n$ on définit $e_i^* \in E^*$ par :

$$\forall j\ ,\ j = 1, 2, \cdots, n\ ,\ e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \ j = i \\ 0 & si\ \ j \neq i \end{cases}$$

Alors $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée **base duale** *de $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$*

Preuve 3.2.1
Exercice

Proposition 3.2.2
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ sa base duale, alors on a :
i)

$$\boxed{\forall x \in E \ , \ x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i^* > e_i}$$

ii)

$$\boxed{\forall \phi \in E^* \ , \ \phi = \sum_{i=1}^{n} < e_i, \phi > e_i^*}$$

Preuve 3.2.2
i) Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, donc pour tout i , $i = 1, 1, \cdots, n$:

$$< x, e_i^* >= \sum_{k=1}^{n} x_k < e_k, e_i^* >$$

Or pour $k \neq i$, $< e_k, e_i^* >= 0$ et $< e_i, e_i^* >= 1$
Donc $\forall i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $< x, e_i^* >= x_i$. D'où le résultat

ii) Soit $\phi \in E^*$ alors $\phi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k^*$ donc pour chaque i , $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$< e_i, \phi >= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k < e_i, e_k^* >$$

Donc pour la même raison on a $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\alpha_i =< e_i, \phi >$

Remarque 3.2.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale.
Pour chaque i , $1 \leq i \leq n$ et chaque j , $1 \leq j \leq n$, on désigne par $e_i \otimes e_j^*$, l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E \ , \ (e_i \otimes e_j^*)(x) =< x, e_j^* > e_i$$

Alors la famille $(e_i \otimes e_j^*)_{1 \leq i,j \leq n}$ forme une base de $L(E)$
Pour chaque i et chaque j, on a

$$Mat(e_i \otimes e_j^*, (e_1, e_2, \ldots, e_n)) = E_{ij}$$

où les E_{ij} sont les matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3.2.1

1. *$E = K^n$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de K^n alors $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$, sa base duale, est définie par :*

$$\forall i\ ,\ i = 1, 2, \cdots, n\ ,\ \forall x \in K^n\ ,\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \Longrightarrow < x, e_i^* >= x_i$$

Donc pour tout i , $i = 1, 2, \cdots, n$, e_i^* est la i^{ieme} projection de K^n sur K

2. *K un corps commutatif et $E = \{P \in K[X]\ :\ deg(P) \leq n\}$ muni de la base canonique $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$. Alors la base duale $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ de $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est définie par :*

$$\forall i,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ \forall P \in E,\ < P, e_i^* >= a_i \text{ où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Pour chaque $a \in K$, soit ϕ_a la forme linéaire définie par :

$$\forall P \in K[X],\ < P, \phi_a >= P(a)$$

Alors ϕ_a a pour composantes sur la base duale de $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$:

$$\phi_a = \sum_{i=1}^{n} < X^i, \phi_a > e_i^* = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i^*$$

3. *$E = \mathbb{R}^n$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ sa base canonique.*
Dans ce cas , pour chaque i, $i = 1, 2, \cdots, n$, on pose $e_i^* = dx_i$ donc, d'après le 1^{er} exemple, $\forall i$, dx_i est la i^{ieme} projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point $x_0 \in \Omega$, alors on sait que $f'(x_0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et par suite pour chaque i, $< e_i, f'(x_0) >$ est la i^{ieme} composante de $f'(x_0)$ sur la base duale $(dx_1, dx_2, \cdots, dx_n)$:

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} < e_i, f'(x_0) > dx_i$$

Dans votre cours de calcul différentiel, vous avez vu que :

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) dx_i$$

Donc on en déduit que $\forall i,\ i = 1, 2, \cdots, n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) =< e_i, f'(x_0) >$

Proposition 3.2.3

Soiet E un K-espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ sa base duale . Soit u un endomorphisme de E et
$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$, alors :

$$\boxed{\forall i,\ \forall j,\ 1 \leq i, j \leq n,\ a_{i,j} =< u(e_j), e_i^* >}$$

Preuve 3.2.3
Pour tout $j,\ j = 1,2,\cdots,n$ *, on a :*

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k$$

$$\Longrightarrow < u(e_j), e_i^* >= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} < e_k, e_i^* >$$

Or $< e_k, e_i^* >= 0$ *pour* $k \neq i$ *et* $< e_i, e_i^* >= 1$ *d'où :*

$$\forall i,\ \forall j,\ 1 \leq i, j \leq n,\ a_{i,j} =< u(e_j), e_i^* >$$

3.3 prolongement des formes linéaires

Théorème 3.3.1
Soient E *un* K*-espace vectoriel quelconque et* F *un sous-espace vectoriel de* E
Alors toute forme linéaire sur F *se prolonge en une forme linéaire sur* E*.*

Preuve 3.3.1
Soit ψ *une forme linéaire sur* F *et soit* G *un supplémentaire de* F *dans* E*.* $E = F \oplus G$ *donc tout* $x \in E$ *s'ecrit d'une manière unique* $x = x_1 + x_2$ *avec* $x_1 \in F$ *et* $x_2 \in G$
Pour $x \in E$, $x = x_1 + x_2$*, posons* $\phi(x) = \psi(x_1)$*, alors* $\phi \in E^*$ *et* ϕ *restreinte à* F *est égale à* ψ

Corollaire 3.3.1
Soit E *un* K*-espace vectoriel. Alors pour tout* $x \in E$, $x \neq 0$ *il existe* $\phi \in E^*$*, telle que* $< x, \phi >= 1$

Preuve 3.3.2
Posons $F = Vect(x) = \{\alpha.x\ :\ \alpha \in K\}$ *et considèrons l'application :*

$$\begin{aligned} \psi : F &\longrightarrow K \\ y &\longmapsto \psi(y) = \alpha \end{aligned}$$

Où α *est l'unique élément de* K *tel que* $y = \alpha.x$
Donc $\psi \in F^*$ *et* $< x, \psi >= 1$
D'après le théorème précèdent ψ *se prolonge en une forme linéaire* ϕ *sur* E

$$\Longrightarrow < x, \phi >=< x, \psi >= 1$$

3.4 Orthogonalité

Définition 3.4.1
Soit E *un* K*-espace vectoriel*

i) Pour toute partie A *de* E*,* **l'orthogonal de** A *dans* E^**, qu'on note* $A^\perp$*, est la partie de* E^* *définie par :*

$$A^\perp = \{\phi \in E^*\ :\ \forall x \in A,\ < x, \phi >= 0\}$$

ii) Pour toute partie B *de* E^**,* **l'orthogonal de** B *dans* E*, qu'on note* $\perp_B$*, est la partie de* E *définie par :*

$$\perp_B = \{x \in E\ :\ \forall \phi \in B,\ < x, \phi >= 0\}$$

Proposition 3.4.1

i) Pour toute partie A de E, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E^*

ii) Pour toute partie A de E, $A^{\perp} = (Vect(A))^{\perp}$

$(\Longrightarrow \varnothing^{\perp} = \{0_{E^*}\}^{\perp} = E)$

iii) Pour toute partie B de E^*, $\perp_B$ est un sous-espace vectoriel de E

iv) Pour toute partie B de E^*, $\perp_B = \perp_{(Vect(B)}$

$(\Longrightarrow \perp_{\varnothing} = \perp_{\{0_E\}} = E^*)$

v) $E^{\perp} = \{0_{E^*}\}$ et $\perp_{E^*} = \{0_E\}$

Preuve 3.4.1

i) Pour chaque $x \in A$ soit $\tilde{x}$ la forme linéaire définie sur E^* par :

$$\forall \phi \in E^*\ ,\ <\phi, \tilde{x}> = <x, \phi>$$

Donc $A^{\perp} = \underset{x \in A}{\cap} Ker(\tilde{x})$

$A^{\perp}$ est une intersection de sous-espaces vectoriels de E^*, donc $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E^*

ii) Remarquons d'abord que si $A \subseteq B$ alors $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$. On a $A \subseteq Vect(A)$ donc $(Vect(A)^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, l'autre inclusion est aussi facile à voir

iii) Il suffit de remarquer que $\perp_B = \underset{\phi \in B}{\cap} Ker(\phi)$

iv) Exercice

v)

$$\phi \in E^{\perp} \iff \forall x \in E\ ,\ <x, \phi> = 0$$

Donc $\phi \in E^{\perp}$ si et seulement si, $\phi = 0_{E^*}$

Si maintenant $x \in \perp_{E^*}$ alors pour tout $\phi \in E^*$, $<x, \phi> = 0$ donc $x = 0_E$, car si $x \neq 0$, d'après le théorme de prolongement, il existe $\phi \in E^*$ tel que $<x, \phi> \neq 0$

Théorème 3.4.1

Soient E un K-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E Alors :

- *F^* est isomorphe à $E^*/F^{\perp}$*
- *$(E/F)^*$ est isomorphe à $F^{\perp}$*

Preuve 3.4.2

i) Soit $l : E^* \longrightarrow F^*$ l'application qui à $\phi \in E^*$ fait correspondre la restriction de ϕ à F. Alors il est clair que l est linéaire et que, d'après le théorème de prolongement des formes linéaires, l est surjective et on a :

$$\begin{aligned} \phi \in Ker(l) &\iff \phi|_F = 0_{F^*} \\ &\iff \forall x \in F, <x, \phi> = 0 \\ &\iff \phi \in F^{\perp} \end{aligned}$$

D'où $Ker(l) = F^{\perp}$ *et par suite on a le résultat.*
ii) Soit $s : E \longrightarrow E/F$ *la surjection canonique et soit* $j : (E/F)^* \longrightarrow E^*$ *l'application qui à* $\phi \in (E/F)^*$ *fait correspondre* $\phi \circ s$
Alors il est clair que j *est linéaire et que* j *est injective*
Soit $\psi \in Im(j)$, *donc il existe* $\phi \in (E/F)^*$ *tel que*

$$\forall x \in E,\ < x, \psi > = < s(x), \phi >$$

Donc en particulier pour tout $x \in F$, $< x, \psi > = 0$
$\Longrightarrow Im(j) \subseteq F^{\perp}$
Soit maintenant $\psi \in F^{\perp}$ *et soit* ϕ *définie par :*

$$\forall x \in E,\ < s(x), \phi > = < x, \psi >$$

Si $s(x) = s(y)$ *alors* $x - y \in F$ *donc* $< x - y, \psi > = 0$ *et par suite* ϕ *définit bien une application et on a* $\phi \in (E/F)^*$ *avec* $l(\phi) = \psi$
D'où lerésultat

Corollaire 3.4.1
Soit E *un* K*-espace vectoriel de* **dimension finie**. *Alors pour tout sous-espace vectoriel* F *de* E, *on a :*

$$\boxed{dim_K(E) = dim_K(F) + dim_K(F^{\perp})}$$

Preuve 3.4.3
On sait que $(E/F)^*$ *est isomorphe à* $F^{\perp}$, *donc* $dim_K((E/F)^*) = dim_K(F^{\perp})$ *avec* $dim_K((E/F)^*) = dim_K(E/F) = dim_K(E) - dim_K(F)$. *D'où le résultat*

3.5 Bidual - Base préduale

Définition 3.5.1
Soit E *un* K*-espace vectoriel, on appelle* **bidual de** E, *qu'on note* E^{**}, *l'espace vectoriel dual de* E^*

$$\boxed{E^{**} = (E^*)^* = L_K(E^*, K)}$$

Remarque 3.5.1
Considèrons l'application

$$\begin{aligned} j : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto j(x) = \widetilde{x} \end{aligned}$$

où $\widetilde{x} : E^* \longrightarrow K$ *est définie par :*

$$\forall \phi \in E^*,\ < \widetilde{x}, \phi > = < x, \phi >$$

Alors j *est liéaire injective, donc* E *s'identifie canoniquement à un sous-espace vectoriel de* E^{**}
En particulier, si E *est de dimension finie, alors* j *est un isomorphisme et dans ce cas* E *s'identifie canoniquement à* E^{**}
Donc E^{***} *s'identifie à* E^*, E^{****} *s'identifie à* E, *etc...*

Proposition 3.5.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$.

i) Pour toute base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ de E^*, il existe une base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E, appelée base préduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, telle que

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ \ v_j^* = \varphi_j$$

ii) Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ sa base duale dans E. Soient P la matrice de passage de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à $(v_1, v_2, \dots, v_n)$et Q celle de $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ à $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. Alors

$$Q = (< e_i, \varphi_j >)_{1 \leq i,j \leq n} \ \text{ et } \ P = ({}^tQ)^{-1}$$

Preuve 3.5.1

i) Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* et soit $(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*)$ sa base duale dans $(E^*)^* = E^{**}$. Puisque E est de dimension finie, alors l'application

$$\begin{aligned} j : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto \hat{x} \end{aligned}$$

est bijective. Donc l'image réciproque $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de $(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*)$ par j est une base de E et on a $\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ \hat{v}_j = \varphi_j^*$. Par suite pour tout i, $1 \leq i \leq n$ et pour tout j, $1 \leq j \leq n$, on aura

$$< v_i, \varphi_j > = < \varphi_j, \hat{v}_i > = < \varphi_j, \varphi_i > = \delta_{ij}$$

D'où $\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ \ \varphi_j = v_j^*$.

ii) Psons $Q^{-1} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ \ e_j^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \varphi_k \quad \text{et} \quad v_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} e_k$$

Donc pour tout i et pour tout j on aura

$$< v_i, e_j^* > = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} < v_i, \varphi_k > \quad \text{et} \quad < v_i, e_j^* > = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} < e_k, e_j^* >$$

Puisque pour tout k, $\varphi_k = v_k^*$, alors $p_{ji} = \alpha_{ij}$.

3.6 Transposée d'une application linéaire

Définition 3.6.1
Soient E, F deux K-espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle **application transposée** *de u, qu'on note ${}^tu$ l'élément de $L_K(F^*, E^*)$ défini par :*

$$\forall \phi \in F^*,\ {}^tu(\phi) = \phi \circ u$$

Remarque 3.6.1
D'après la définition de ^tu *on a :*

$$\boxed{\forall \phi \in F^*,\ \forall x \in E,\ < x, {}^tu(\phi) >=< u(x), \phi >}$$

Proposition 3.6.1
Soient E, F *deux* K*-espaces vectoriels et* $u : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. Si* $v : F^* \longrightarrow E^*$ *est une application linéaire vérifiant :*

$$\forall \phi \in F^*,\ \forall x \in E,\ < x, v(\phi) >=< u(x), \phi >$$

Alors $v = {}^t u$*, (c.à.d :* ^tu *est l'unique élément de* $L_K(F^*, E^*)$ *vérifiant la relation ci-dessus)*

Preuve 3.6.1
Exercice

Proposition 3.6.2
i) a)

$$\forall u \in L_K(E,F),\ \forall v \in L_K(E,F),\ {}^t(u+v) = {}^tu + {}^tv$$

b)

$$\forall \lambda \in K,\ \forall u \in L_K(E,F),\ {}^t(\lambda.u) = \lambda.{}^tu$$

ii)

$$\forall u \in L_K(E,F),\ \forall v \in L_k(F,G),\ {}^t(v \circ u) = {}^tu \circ {}^tv$$

Preuve 3.6.2
Exercice

Théorème 3.6.1
Soient E *et* F *deux* K*-espaces vectoriels,* u *une application linéaire de* E *vers* F*, alors :*
i) $Ker({}^tu) = (Im(u))^\perp$
ii) $Im({}^tu) = (Ker(u))^\perp$

Preuve 3.6.3
i)

$$\begin{aligned} \phi \in Ker({}^tu) &\iff {}^tu(\phi) = 0_{E^*} \\ &\iff \forall x \in E\ ,\ < x, {}^tu(\phi) >=< u(x), \phi >= 0 \\ &\iff \phi \in (Im(u))^\perp \end{aligned}$$

D'où $Ker({}^tu) = (Im(u))^\perp$

ii) Soit $\psi \in Im({}^tu)$ *donc il existe* $\phi \in F^*$ *tel que :*

$$\forall x \in E\ ,\ < u(x), \phi >=< x, \psi >$$

Donc en particulier, pour $x \in Ker(u)$ *on a* $< x, \psi >= 0$
Donc $Im({}^tu) \subseteq (Ker(u))^\perp$

Soit maintenant $\psi \in (Ker(u))^{\perp}$. *Montrons qu'il existe* $\phi \in F^*$ *tel que* $\psi = {}^t u(\phi)$
Pour cela, soit G *un supplémentaire de* $Im(u)$ *dans* F *et soit* $\phi : F \to K$ *la relation qui à* $y \in F$, $y = u(x) + z$ *avec* $z \in G$ *fait correspondre*
$< y, \phi > = < x, \psi >$.
Alors ϕ *définit bien une application, car si* $u(x) = u(x')$ *alors* $x - x' \in Ker(u)$ *et par suite* $< x - x', \psi > = 0$, *et* ψ *est linéaire et on a :*

$$\forall x \in E\ ,\ < u(x), \phi > = < x, \psi >$$

Donc $\psi = {}^t u(\phi)$

Théorème 3.6.2
Soient E *un* K*-espace vectoriel de* **dimension finie**, u *un endomorphisme de* E,
$\beta = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ *une base de* E *et* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = Mat(u, \beta)$, *alors*

$$\boxed{Mat({}^t u, \beta^*) = {}^t A}$$

où β^* *est la base duale de* β.

Preuve 3.6.4
Rappelons que $a_{i,j} = < u(e_j), e_i^* >$
Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *la matrice de* t_u *dans la base* $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ *alors on a :*

$$\forall j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ t_u(e_j^*) = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} e_k^*$$

Donc pour tout i, $1 \leq i \leq n$ *on a :*

$$< e_i, {}^t u(e_j^*) > = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} < e_i, e_k^* > = b_{i,j}$$

Donc $b_{i,j} = < e_i, {}^t u(e_j^*) > = < u(e_i), e_j^* > = a_{j,i}$
D'où le résultat .

3.7 Exercices

Exercice 3.7.1
Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes réels de degré* ≤ 3, $\beta = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* E *et* F *la partie de* E *définie par :*

$$P \in F \Longleftrightarrow P(1) = 0 \text{ et } P''(0) = 0$$

Rappelons que $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$ *et* $e_3 = X^3$.

1. *Vérifier que* F *est un sous-espace vectoriel de* E *et déterminer une base de* F.
2. a) *Quelle est la dimension de* $F^{\perp}$?

b) Montrer que

$$\varphi \in F^{\perp} \iff \varphi(e_0) = \varphi(e_1) = \varphi(e_3)$$

.

c) Soient φ_0, φ_1, φ_2, *et* φ_3 *les formes linéaires définies par :*

$$\begin{cases} \varphi_0 = e_2^* \\ \varphi_1 = e_0^* + e_1^* + e_3^* \\ \varphi_2 = e_1^* - e_2^* \\ \varphi_3 = e_2^* - e_3^* \end{cases}$$

Vérifier que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ *est une base de* E *et déterminer sa base préduale* (v_0, v_1, v_2, v_3).

Exercice 3.7.2

Soient n *un entier* ≥ 1 *et* $\mathbb{R}_n[X]$ *l'ensemble des polynômes à coëfficients réels de degré* $\leq n$ *et soit l'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \varphi(P) = \textstyle\int_0^1 P(t)dt \end{aligned}$$

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?*

b) Montrer que φ *est une forme linéaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, *soit l'application*

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(\tfrac{i}{n}) \end{aligned}$$

Montrer que $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, φ_i *est une forme linéaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$ *et que* $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *est une base de* $(\mathbb{R}_n[X])^*$.

d) En déduire qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *tel que*

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} a_i P(\frac{i}{n})$$

Exercice 3.7.3

Soit E *l'espace vectoriel des polynômes de degré* ≤ 3 *à coëfficients réels. On considère les formes linéaires* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ *définies sur* E *par :*

$$\forall P \in E, \ \ \varphi_1(P) = P(0), \ \varphi_2(P) = P(1), \ \varphi_3(P) = P'(0), \ \varphi_4(P) = P'(1)$$

où P' *désigne le polynôme dérivé de* P.

a) Montrer que $B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ *est une base de* E^*.

b) Déterminer la base $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $\mathcal{B}^*$ *soit la base duale de* $\mathcal{B}$.

c) Soit φ *la forme linéaire sur* E *définie par :*

$$\forall P \in E, \ \ \varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt$$

Déterminer les composantes de φ *dans la base* B^*.

Exercice 3.7.4
Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, dans chacune des cas suivants, montrer que β est une base de E et d''eterminer sa base duale

i) $\beta = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, *où chaque φ_i, $0 \le i \le n$, est définie par :*

$$\forall P \in E,\ \varphi_i(P) = P(x_i)$$

où $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

ii) $\beta = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, *où chaque φ_i, $0 \le i \le n$, est définie par :*

$$\forall P \in E,\ \varphi_i(P) = P^{(i)}(0)$$

iii) $\beta = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, *où chaque φ_i, $0 \le i \le n$, est définie par :*

$$\forall P \in E,\ \varphi_i(P) = P^{(i)}(x_i)$$

où $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

Exercice 3.7.5
Soient $E = \mathbb{K}_n[X]$ et φ une forme linéaire sur E.

1. *On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que*

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X],\ \varphi((X-a)P) = 0$$

   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall P \in E,\ \varphi(P) = \lambda P(a)$.

2. *On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que*

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-2}[X],\ \varphi((X-a)^2P) = 0$$

   Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$$

Exercice 3.7.6

1. *Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et si l'espace quotient E/F est de dimension finie, alors E est de dimension finie.*
2. *Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. Montrer que si E est de dimension infinie alors $\cap_{i=1}^{n} Ker(\varphi_i) \neq \{0\}$ et que $\cap_{i=1}^{n} Ker(\varphi_i)$ est de codimension finie.*

Exercice 3.7.7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et p un entier ≥ 1. On suppose qu'il existe p formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, telles que

$$\forall x \in E,\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Montrer que E est de dimension finie $\le p$.

Exercice 3.7.8
Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, telle que $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ soit libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$, telle que

$$\det\left((f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}\right) \neq 0$$

Exercice 3.7.9
Soient K un corps commutatif et $E = K_n[X]$. Soient $Q \in E$ et pour chaque i, $1 \leq i \leq n$, $Q_i = Q(X+i)$.

1. *Montrer que $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ est une base de E.*
2. *Montrer que si φ est une forme linéaire sur E, alors il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1}$, tel que*
$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P'(0) + \alpha_2 P''(0) + \cdots + \alpha_n P^{(n)}(0)$$
3. *Soit $\varphi \in E^*$, telle que $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \ldots = \varphi(Q_n) = 0$. Montrer que φ est nulle.*
4. *En déduire que $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est une base de E.*

Exercice 3.7.10
Soient K un corps commutatif, $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ un élément de $M_n(K)$. Rappelons que la trace de A est dfinie par :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

a) *Montrer que pour tout $A, B \in M_n(K)$, $tr(A.B) = tr(B.A)$ et en déduire que deux matrices semblables ont même trace*
b) *Montrer que si pour tout $A \in M_n(K)$, $tr(A.B) = 0$ alors $B = 0$*
c) *Montrer que l'application $\Phi\ :\ M_n(K) \to (M_n(K))^*$ qui à A fait correspondre ϕ_A qui est défini par :*
$$\forall B \in M_n(K)\ ,\ < B, \phi_A >= tr(A.B)$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels
d) *Soit $A \in M_n(K)$ tel que pour tout $B \in M_n(K)$, $A.B = B.A$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda.I$*
e) *Soit ϕ une forme linéaire sur $M_n(K)$ tel que :*
$$\forall A \in M_n(K)\ ,\ \forall B \in M_n(K)\ ,\ \phi(A.B) = \phi(B.A)$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que :
$$\forall A \in M_n(K)\ ,\ \phi(A) = \lambda.tr(A)$$

Exercice 3.7.11
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^3 - 2u^2 + u = 0$. Montrer que $tr(u) \in \mathbb{N}$

Exercice 3.7.12
Soient $E = \{P \in \mathbb{C}[X]\ \ :\ \ deg(P) \leq 2\}$, (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E. Rappelons que $e_1 = 1$, $e_2 = X$ et $e_3 = X^2$

a) *Déterminer la base* (e_1^*, e_2^*, e_3^*) *de* E^* *duale de la base* (e_1, e_2, e_3)

b) *Soient* a, b, c *trois éléments de* $\mathbb{C}$ *deux à deux distincts. On pose* $P_1 = (X-b)(X-c)$, $P_2 = (X-c)(X-a)$ *et* $P_3 = (X-a)(X-b)$. *Montrer que* (P_1, P_2, P_3) *est une base de* E *et trouver les coordonnées d'un polynôme* P *dans cette base*

c) *Déterminer la base* (P_1^*, P_2^*, P_3^*) *duale de la base* (P_1, P_2, P_3)

d) *Soit* u *l'endomorphisme de* E *défini par :*

$$\forall P \in E \ , \ u(P) = XP' + P$$

Déterminer ${}^t u$

Exercice 3.7.13

Soient $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux bases d'un* K*-espace vectoriel* E *et soit* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}_1$ *à* $\mathcal{B}_2$. *Déterminer la matrice de passage* Q *de* $\mathcal{B}_1^*$ *à* $\mathcal{B}_2^*$.

Exercice 3.7.14

Soient E_n *l'espace vectoriel des polynômes de de degré* $\leq n$ *à coëfficients réels,* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *des réels deux à deux distincts et* $f_0, f_1, \ldots, f_n$ *les formes linéaires sur* E_n *définies par :*

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ \forall P \in E_n,\ f_j(P) = P(a_j)$$

a) *Montrer que* $\mathcal{B}^* = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ *est une base de* E_n^*.

b) *En déduire que la matrice* $(a_j^k)_{0 \leq j,k \leq n}$ *est inversible.*

c) *Déterminer la base* $\mathcal{B}$ *de* E_n *telle que* $\mathcal{B}^*$ *soit la base duale de* $\mathcal{B}$.

d) *(Interpolation de Lagrange). Etant donnés des réels* $b_0, b_1, \ldots, b_n$, *déterminer un polynôme* P *tel que*

$$\forall j,\ 0 \leq j \leq n,\ P(a_j) = b_j$$

Exercice 3.7.15

Soient a *et* b *deux nombres réels quelconques et* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *les formes linéaires définies sur* $\mathbb{R}^3$ *par*

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = x + ay + bz \\ \varphi_2(x,y,z) = ax + a^2y + z \\ \varphi_3(x,y,z) = bx + y + a^2z \end{cases}$$

a) *Trouver une condition necessaire et suffisante sur* a *et* b *pour que* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ *soit une base de* $(\mathbb{R}^3)^*$.

b) *Dans le cas où* $a = 1$ *et* $b = 2$ *déterminer, dans* $\mathbb{R}^3$, *la base préduale de* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Exercice 3.7.16

Soient K *un corps commutatif,* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *les formes linéaires sur* K^n *définies par :*

$$\forall i,\ 1 = 1, 2, \ldots n-1,\ \varphi_i(x) = x_i + x_{i+1},\ \ \varphi_n(x) = x_1 + x_n$$

a) *Pour quelles valeurs de* n, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ *forme une base de* $(K^n)^*$ *?*

b) *Dans le cas où* $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ *forme une base, déterminer dans* K^n *sa base duale.*

Exercice 3.7.17
Soient E un K-espace vectoriel et $\phi, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ des formes linéaires sur E. ($m \geq 2$). Montrer que les propositions suivantes sont equivalentes :

i) $\bigcap_{i=1}^{m} Ker(\phi_i) \subseteq Ker(\phi)$

ii) Il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in K$ *tel que* $\phi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi_i$

Exercice 3.7.18

a) Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Montrer que $(\mathbb{K}[X])^*$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites de $\mathbb{K}$

b) Montrer que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable

c) En déduire que $\mathbb{Q}[X]$ n'est pas isomorphe à $(\mathbb{Q})^*$

Chapitre 4

Formes multilinéaires - Déterminants

4.1 Formes multilinéaires

4.1.1 Définition et propriètés élémentaires

Définition 4.1.1
Soit E un K-espace vectoriel et p un entier ≥ 1, une forme p-linéaire sur E est une application :

$$\begin{aligned} f : E^p &\longrightarrow K \\ (x_1,x_2,\dots,x_p) &\longmapsto f(x_1,x_2,\dots,x_p) \end{aligned}$$

telle que pour chaque i, $1 \leq i \leq p$, l'application :

$$\begin{aligned} f_i : E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto (x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_p) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E.

Remarque 4.1.1

1. *Soit f une forme p-linéaire sur E, s'il existe i, $1 \leq i \leq p$, tel que $x_i = 0$ alors $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$*
2. *Une forme 1-linéaire sur E est tout simplement une forme linéaire sur E.*
3. *Une 2-forme sur E s'appelle une forme bilinéaire sur E.*
4. *Une 3-forme sur E s'appelle une forme trilinéaire sur E.*
5. *On note $L_p(E)$ l'ensemble de toutes les formes p-linéaires sur E, alors $L_p(E)$ est un K-espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications de E^p vers K.*

Notations 4.1.1
Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose $\mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n\}$. On note $\mathcal{F}(\mathbb{N}_p,\mathbb{N}_n)$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}_p$ vers $\mathbb{N}_n$. On rappelle que toute application de $\mathbb{N}_p$ vers $\mathbb{N}_n$ est déterminée par un unique p-uplet de $\mathbb{N}_n^p$, autrement dit, l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{N}_p,\mathbb{N}_n) &\longrightarrow \mathbb{N}_n^p \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(1),\varphi(2),\dots,\varphi(p)) \end{aligned}$$

est une bijection.
Rappelons aussi qu'une bijection de $\mathbb{N}_n$ vers $\mathbb{N}_n$ s'appelle une permutation de $\mathbb{N}_n$, que l'ensemble de toutes les permutations de $\mathbb{N}_n$ se note S_n et que S_n munit de la loi de composition des applications est un groupe.

Règles de calcul

1. Si f est une forme bilinéaire sur E, alors
   i)
$$\forall x_1,x_2,y_1,y_2 \in E,\ \forall \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in K,\ f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,\beta_1 y_1+\beta_2 y_2)$$
$$=\alpha_1\beta_1 f(x_1,y_1)+\alpha_1\beta_2 f(x_1,y_2)+\alpha_2\beta_1 f(x_2,y_1)+\alpha_2\beta_2 f(x_2,y_2)$$
   ii)
$$\forall x_1,x_2,\dots,x_n \in E,\ \forall y_1,y_2,\dots,y_n \in E,\ \forall \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in K,\ \forall \beta_1,\beta_2\dots,\beta_n \in K,$$
$$f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\sum_{j=1}^{n}\beta_j y_j)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}\alpha_i\beta_j f(x_i,y_j)$$
2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $=n$, $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E et f une forme p-linéaire de E. Soit $(x_1,x_2,\dots,x_p)\in E^p$, alors
$$\forall j,\ 1\le j\le p,\ x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$$
   Donc on aura
$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\dots,x_p) &= f(\sum_{i_1=1}^{n}a_{i_1 1}e_{i_1},\sum_{i_2=1}^{n}a_{i_2 2}e_{i_2},\dots,\sum_{i_p=1}^{n}a_{i_p p}e_{i_p}) \\ &= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_p)\in\mathbb{N}_n^p} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_p p}f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_p}) \end{aligned}$$
   Pour chaque $(i_1,i_2,\dots,i_p)\in\mathbb{N}_n^p$, soit $\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_p,\mathbb{N}_n)$ définie par :
$$\varphi(1)=i_1,\ \varphi(2)=i_2,\ \dots,\ \varphi(p)=i_p$$
   alors on aura
$$\boxed{f(x_1,x_2,\dots,x_p)=\sum_{\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_p,\mathbb{N}_n)}a_{\varphi(1),1}a_{\varphi(2),2}\cdots a_{\varphi(p),p}f(e_{\varphi(1)},e_{\varphi(2)},\dots,e_{\varphi(p)})}$$

4.1.2 Formes multilinéaires alternées

Définition 4.1.2
Soient E un K-espace vectoriel et f une forme p-linéaire sur E,
i) On dit que f est **symétrique**, *si*

$$\forall \sigma \in S_p,\ \forall (x_1,x_2,\ldots,x_p) \in E^p,\ f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(p)}) = f(x_1,x_2,\ldots,x_p)$$

ii) On dit que f est **antisymétrique**, *si*

$$\forall \sigma \in S_p,\ \forall (x_1,x_2,\ldots,x_p) \in E^p,\ f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,x_2,\ldots,x_p)$$

iii) On dit que f est **alternée**, *si*

$$\forall (x_1,x_2,\ldots,x_p) \in E^p,\ \forall i,\ \forall j,\ 1 \leq i,j \leq p,\ [i \neq j \text{ et } x_i = x_j] \Longrightarrow f(x_1,x_2,\ldots,x_p) = 0$$

Remarque 4.1.2
Soit f une forme bilinéaire sur E, alors
i) f est symétrique, si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(y,x) = f(x,y)$$

ii) f est antisymétrique, si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(y,x) = -f(x,y)$$

iii) f est alternée, si et seulement si

$$\forall x \in E,\ f(x,x) = 0$$

Théorème 4.1.1
Soient E un K-espace vectoriel, où K est un corps de caractéristique $\neq 2$, et f une p-forme sur E, alors f est antisymétrique, si et seulement si, f est alternée.

Preuve 4.1.1
($\Longrightarrow$) *Supposons que f est antisymétrique et soit $(x_1,x_2,\ldots,x_p) \in E^p$, tel qu'il existe i et j avec $i \neq j$ et $x_i = x_j$. Montrons que $f(x_1,x_2,\ldots,x_p) = 0$, pour cela, supposons par exeple que $i < j$, et soit τ la transposition de S_p qui échange i et j, rappelons que τ est définie par :*

$$\tau(i) = j,\ \tau(j) = i,\ \text{et } \tau(k) = k,\ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{i,j\}$$

Puisque f est antisymétrique, alors on a :

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\ldots,x_{\tau(i)},\ldots,x_{\tau(j)},\ldots,x_{\tau(p)}) &= \varepsilon(\tau) f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) \\ &= -f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) \\ (\text{ Car } \varepsilon(\tau) = -1) & \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\ldots,x_{\tau(i)},\ldots,x_{\tau(j)},\ldots,x_{\tau(p)}) &= f(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p) \\ &= f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) \\ (\text{ Car } x_i = x_j) & \end{aligned}$$

Donc on aura

$$2_K.f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) = 0$$

Puisque K est de caractéristique $\neq 2$, alors
$f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) = 0$ et par suite f est alternée.
($\Longleftarrow$) Supposons que f est alternée et montrons que f est antisymétrique. Pour cela et puisque S_p est engendré par les transpositions, il suffit de montrer que si τ est une transposition de S_p, alors

$$f(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\ldots,x_{\tau(p)}) = \varepsilon(\tau)f(x_1,x_2,\ldots,x_p) = -f(x_1,x_2,\ldots,x_p)$$

Posons $\tau = (i,j)$ avec $i < j$, puisque f est alternée, alors on a

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_p) = 0$$

D'autre part, puisque f est p-linéaire et f alternée, on a

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_i+x_j,\ldots,x_p) =$$

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p) + f(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p)$$

$$\text{D'où } f(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_p) = -f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_p)$$

Remarque 4.1.3

1. *D'après la démonstration précédente, si K est de caractéristique 2, alors toute forme alternée sur E est antisymétrique, cependant, dans ce cas, la réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, soit $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $E = K^n$ et f la forme bilinéaire définie par :*

$$\text{Si } x = (x_1,x_2,\ldots,x_n), \text{ et } y = (y_1,y_2,\ldots,y_n), \text{ alors } f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

   alors f est à la fois symétrique et antisymétrique, mais non alternée.

2. *On note $\mathcal{A}^p(E)$ l'ensemble de toutes les formes p-linéaires alternées sur E. Alors $\mathcal{A}^p(E)$ est un K-espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_p(E)$.*

Théorème 4.1.2
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, alors on a
- *i) Pour tout $p > n$, $\mathcal{A}^p(E) = \{0\}$.*
- *ii) $\mathcal{A}^n(E)$ est de dimension 1.*

Preuve 4.1.2

i) Soit $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de E et f une p-forme alternée sur E avec $p>n$. On doit montrer que f est nulle. Pour cela, rappelons que si $(x_1,x_2,\dots,x_p)\in E^p$ tel que

$$\forall j,\ 1\le j\le p,\ x_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$$

alors d'après ce qui précéde (Voir exemple 4.1.1), on a :

$$f(x_1,x_2,\dots,x_p)=\sum_{\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_p,\mathbb{N}_n)}a_{\varphi(1),1}a_{\varphi(2),2}\cdots a_{\varphi(p),p}f(e_{\varphi(1)},e_{\varphi(2)},\dots,e_{\varphi(p)})$$

Puisque $p>n$ alors $\forall\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_p,\mathbb{N}_n)$, φ est non injective, donc pour tout $\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_p,\mathbb{N}_n)$, φ, il existe $i\in\mathbb{N}_p$ et il existe $j\in\mathbb{N}_p$ avec $i\neq j$ tel que $\varphi(i)=\varphi(j)$ et puisque f est alternée, alors $f(e_{\varphi(1)},e_{\varphi(2)},\dots,e_{\varphi(p)})=0$ et ceci $\forall\varphi\in\mathcal{F}(\mathbb{N}_p,\mathbb{N}_n)$, donc f est identiquement nulle.

ii) Si maintenant $p=n$, alors, d'après ce qui pécéde, pour chaque $\varphi\notin S_n$, on a

$$f(e_{\varphi(1)},e_{\varphi(2)},\dots,e_{\varphi(n)})=0$$

Donc pour tout $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E^n$, on a

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\dots,x_n)&=\sum_{\sigma\in S_n}a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots e_{\sigma(n)})\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}f(e_1,e_2,\dots e_n)\end{aligned}$$

(Car f est alternée, donc f est antisymétrique.)

$$\text{Posons }\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}\ \text{ et }\ \alpha=f(e_1,e_2,\dots e_n)$$

Alors $\Delta\in\mathcal{A}^n(E)$ et $f=\alpha\Delta$, donc $\mathcal{A}^n(E)=Vect(\Delta)$ avec $\Delta\neq 0$,
car $\Delta(e_1,e_2,\dots,e_n)=1$, donc $\dim_K(\mathcal{A}^n(E))=1$
Il est clair que Δ est p-linéaire. Vérifions que Δ est alternée, pour cela,
soit $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E^p$ tel que, il existe i et il existe j, $1\le i<j\le p$ et $x_i=x_j$, on doit donc montrer que $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$. Soit $\tau=(i,j)$ la transposition qui echange i et j, alors on a :

$$\Delta(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(i),i}\cdots a_{\sigma(j),j}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

Soit A_n le sous -groure de S_n constitué des permutations paires. Rappelons que
$A_n=\{\sigma\in S_n\ :\ \varepsilon(\sigma)=1\}$ et que pour toute transposition $\tau\in S_n$,
$\tau(S_n\setminus A_n)=\{\tau\sigma\ :\ \sigma\in S_n\setminus A_n\}=A_n$. On a alors :

$$\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(i),i}\cdots a_{\sigma(j),j}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$=\sum_{\sigma\in A_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(i),i}\cdots a_{\sigma(j),j}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$+\sum_{\sigma\in S_n\setminus A_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(j),j}\dots a_{\sigma(n),n}$$

$$=\sum_{\sigma\in A_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(j),j}\dots a_{\sigma(n),n}$$

$$+\sum_{\sigma\in S_n\setminus A_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(\tau(1)),1}\dots a_{\sigma(\tau(j)),i}\dots a_{\sigma(\tau(i)),j}\dots a_{\sigma(\tau(n)),n}$$

$$=\sum_{\sigma\in A_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(j),j}\dots a_{\sigma(n),n}$$

$$+\sum_{\sigma\in S_n\setminus A_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma\tau(1),1}\dots a_{\sigma\tau(j),i}\dots a_{\sigma\tau(i),j}\dots a_{\sigma\tau(n),n}$$

Dans le deuxième membre de cette somme faisons le changement d'indice $\varphi=\tau\sigma$, donc on aura, $\varepsilon(\sigma)=-\varepsilon(\varphi)$ et lorsque σ décrit $S_n\setminus A_n$, φ décrit A_n, et par suite on a :

$$\sum_{\sigma\in S_n\setminus A_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma\tau(1),1}\dots a_{\sigma\tau(j),i}\dots a_{\sigma\tau(i),j}\dots a_{\sigma\tau(n),n}$$

$$=-\sum_{\varphi\in A_n}\varepsilon(\sigma)a_{\varphi(1),1}\dots a_{\varphi(j),i}\dots a_{\varphi(i),j}\dots a_{\varphi(n),n}$$

Or $x_i=x_j$, donc pour tout k, $1\leq k\leq n$, $a_{k,i}=a_{k,j}$ et par conséquent on aura $a_{\varphi(j),i}=a_{\varphi(j),j}$ et $a_{\varphi(i),j}=a_{\varphi(i),i}$, donc

$$\Delta(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=$$

$$\sum_{\sigma\in A_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(i),i}\dots a_{\sigma(j),j}\dots a_{\sigma(n),n}-\sum_{\varphi\in A_n}\varepsilon(\varphi)a_{\varphi(1),1}\dots a_{\varphi(i),i}\dots a_{\varphi(j),j}\dots a_{\varphi(n),n}=0$$

D'où le résultat.

Exemple 4.1.1

1. *Si $\dim_K(E)=2$, si f est une forme bilinéaire alternée sur E et si (e_1,e_2) est une base de E, alors pour $x=x_1e_1+x_2e_2$ et $y=y_1e_1+y_2e_2$, on a*

$$f(x,y)=f(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2)=(x_1y_2-x_2y_1)f(e_1,e_2)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}f(e_1,e_2)$$

   Donc

$$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

2. *Si $\dim_K(E)=3$, si f est une forme trilinéaire alternée sur E et si (e_1,e_2,e_3) est une base de E, alors pour $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$, $y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3$ et $z=z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3$, on a*

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=f(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3,y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3,z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3)\\&=(x_1y_2z_3-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3+x_3y_1z_1+x_2y_3z_1-x_3y_2z_1)f(e_1,e_2,e_3)\\&=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_3\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}f(e_1,e_2,e_3)\end{aligned}$$

4.2 Déterminants

4.2.1 Déterminant d'un système de vecteurs

Définition 4.2.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ tel que :

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

On définit le déterminant de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, par :

$$\boxed{det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}}$$

Remarque 4.2.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, alors d'après ce qui précéde, l'application :

$$\begin{aligned} det_B : E^n &\longrightarrow K \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est une forme n-linéaire alternée sur E telle que pour toute forme n-linéaire alternée f sur E, on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) f(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

En particulier, si $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une autre base de E, alors $f = det_{B'}$ est une forme n-linéaire sur E, donc on aura

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n,\ det_{B'}(x_1, x_2, \dots, x_n) = det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) det_{B'}(B)$$

Donc nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.2.1
E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$,
$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Alors,

$$\boxed{det_B(B') det_{B'}(B) = 1}$$

Preuve 4.2.1
D'après la remarque précédente, on a

$$1 = det_{B'}(B') = det_B(B') det_{B'}(B)$$

Théorème 4.2.2
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$. Alors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E, si et seulement si, il existe une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ tel que $\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$

Preuve 4.2.2 (Exercice)

4.2.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 4.2.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, et u un endomorpisme de E. Alors la quantité :

$$det_B(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

ne dépend pas de la base B.

Preuve 4.2.3
Soit $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une autre base de E. On doit démontrer que

$$det_{B'}(u(e'_1), u(e'_2), \dots, u(e'_n)) = det_B(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

Pour cela, considérons l'application f définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n,\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = det_B(u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n))$$

Alors il est clair que f est une forme n-linéaire alternée sur E, donc d'après ce qui précéde, on aura :

$$\begin{aligned} &\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n,\ det_B(u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)) \\ &= det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) det_B(u(e_1), u(e_2), \dots, , u(e_n)) \end{aligned}$$

En paticulier, on a :

$$det_B(u(e'_1), u(e'_2), \dots, u(e'_n)) = det_B(B') det_B(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \quad (1)$$

D'autre part, l'application g définie par

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n,\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) = det_{B'}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est une forme n-linéaire sur E, donc on aura aussi,

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n,\ det_{B'}(x_1, x_2, \dots, x_n) = det_{B'}(B) det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donc en paticulier, pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (u(e'_1), u(e'_2), \dots, u(e'_n))$, on a

$$det_{B'}(u(e'_1), u(e'_2), \dots, u(e'_n)) = det_{B'}(B) det_B(u(e'_1), u(e'_2), \dots, u(e'_n)) \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on déduit que

$$det_{B'}(u(e'_1), u(e'_2), \dots, u(e'_n)) = det_{B'}(B) det_B(B') det_B(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

Puisque $det_{B'}(B) det_B(B') = 1$, alors on a le résultat.

Définition 4.2.2
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et u un endomorpisme de E. On définit le déterminant de u par :

$$\boxed{\det(u) = det_B(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))}$$

Remarque 4.2.2

1. *D'après la proposition précédente, la définition a un sens, car* $\det(u)$ *ne dépend pas de la base choisie.*
2. *Supposons que*
$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$
Alors on a
$$\det(u) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$$

Théorème 4.2.3
Soit E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie. Alors*
i) $\det(Id_E) = 1$
ii) $\forall u \in \mathcal{L}_K(E)$, $\forall v \in \mathcal{L}_K(E)$, $\det(v \circ u) = \det(v)\det(u)$
iii) Un endomorphisme u *est inversible, si et seulement si,* $\det(u) \neq 0$.

Preuve 4.2.4
Fixons une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ *de* E*. Alors*
i)
$$\det(Id_E) = det_B(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$
ii) On sait que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, *on a*
$$det_B(v(x_1), v(x_2), \dots, v(x_n)) = det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) det_B(v(e_1), v(e_2), \dots, v(e_n))$$
Donc en particulier, pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$, *on aura*
$$det_B(v(u(e_1)), v(u(e_2)), \dots, v(u(e_n)))$$
$$= det_B(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) det_B(v(e_1), v(e_2), \dots, v(e_n))$$
D'où le résultat.
iii)
$$\begin{aligned} \det(u) \neq 0 &\iff det_B(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \neq 0 \\ &\iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)) \text{ est une base de } E \\ &\iff u \text{ est inversible} \end{aligned}$$

4.2.3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 4.2.3
Soient K *un corps commutatif et* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *une matrice carrée d'ordre* n *à coëfficiens dans* K*. Alors le déterminant de* A *est défini par :*
$$\boxed{det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}}$$

Remarque 4.2.3

1. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *une matrice carrée d'ordre* n *à coëfficients dans* K, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* K^n. *Pour chaque* j, $1 \leq j \leq n$, *posons*
$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$
Alors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *s'appellent les vecteurs colonnes de la matrice* A *et on a*
$$\det(A) = det_B(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
2. *Soient* E *un* K*-espace vectoriel,* $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *une base de* E, u *un endomorphisme de* E *et* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *la matrice de* u *dans la base* B. *Alors*
$$\det(u) = \det(A)$$
En effet, on a :
$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ u(e_j) = \sum_{i=1} a_{i,j} e_i$$
3. *En pratique, le déterminant d'une matrice* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, *se note*
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$
4. *Puisque* $\det(A) = det_B(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, *où* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *sont les vecteurs colonnes de la matrice* A *et puisque* $\det_B$ *est une forme* n*-linéaire alternée, alors*
   i) Si l'on effectue une permutation σ *sur les colonnes de* A, $\det(A)$ *se change en* $\varepsilon(\sigma)\det(A)$.
   ii) Si les vecteurs colonnes de A *forment un système lié, alors* $\det(A) = 0$.
   iii) $\forall \lambda \in K$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
   iv) Le déterminant ne change pas de valeur, si l'on ajoute à une colonne de A *une combinaison linéaire quelconque des autres colonnes de* A.

Théorème 4.2.4
Soient K *un corps commutatif,* A *et* B *deux matrices carrée d'ordre* n *à coëfficients dans* A *et* I_n *la matrice identité. Alors*
i) $\det(I_n) = 1$
ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
iii) A *est inversible, si et seulement si,* $\det(A) \neq 0$

Preuve 4.2.5
i) Trivial
ii) Soient u *et* v *les endomorphismes de* K^n *de matrices respectivement* A *et* B *dans la base canonique de* K^n, *donc* $u \circ v$ *est de matrice* AB *dans la base canonique de* K^n. *Par suite on a :*
$$\det(AB) = \det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(A)\det(B)$$

iii) Exercice

Proposition 4.2.2
Soient A une matrice carrée, alors $\det({}^tA) = \det(A)$, où ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Preuve 4.2.6
Posons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et ${}^tA = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ alors $\forall i,\ \forall j,\ b_{i,j} = a_{j,i}$, donc

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} b_{\sigma(2),2} \dots b_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

Remarquons que pour tout $\sigma \in S_n$, on a

$$a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1),1} a_{\sigma^{-1}(2),2} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n}$$

Puis posons $\varphi = \sigma^{-1}$ et remarquons que $\varepsilon(\varphi) = \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$, donc on aura :

$$\det({}^tA) = \sum_{\varphi\in S_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \dots a_{\varphi(n),n} = \det(A)$$

4.2.4 Développement d'un déterminant

Définition 4.2.4
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle **mineur** *relativement au terme $a_{i,j}$, le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans A la i^{ieme} ligne et la j^{ieme} colonne.*

Notations 4.2.1
On note $\Delta_{i,j}$ le mineur relativement au terme $a_{i,j}$

Théorème 4.2.5 (Développement d'un déterminant suivant une colonne)
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. Alors

$$\forall j,\ 1 \leq j \leq n,\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Preuve 4.2.7
Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin du lemme suivant

Lemme 4.2.1
Soit M une matrice carrée d'ordre n. On suppose que

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

où A et B sont deux matrices carrées d'ordre respectivement p et q avec $p+q = n$, alors

$$\det(M) = \det(A)\det(B)$$

Preuve 4.2.8 (du lemme)
Posons $M = (\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}$ *et* $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}$, *alors*

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & \alpha_{1,p+1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & \alpha_{p,p+1} & \dots & \alpha_{p,n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{q,1} & \dots & b_{q,q} \end{pmatrix}$$

Donc on voit que

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & 1\leq i\leq p \text{ et } 1\leq j\leq p \\ b_{i-p,j-p} & p+1\leq i\leq n \text{ et } p+1\leq j\leq n \\ 0 & p+1\leq i\leq n \text{ et } 1\leq j\leq p \end{cases}$$

D'autre part, on sait que

$$\det(M) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1}\alpha_{\sigma(2),2}\dots\alpha_{\sigma(n),n}$$

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{\sigma\in S_n \,:\, \sigma(\{1,2,\dots,p\}) = \{1,2,\dots,p\}\}$$

Alors pour $\sigma\notin\mathcal{A}$, *il existe* $i\in\{1,2,\dots,p\}$ *tel que* $\sigma(i)\in\{p+1,p+2,\dots,n\}$, *donc* $\alpha_{\sigma(i),i} = 0$ *et par suite* $\alpha_{\sigma(1),1}\alpha_{\sigma(2),2}\dots\alpha_{\sigma(n),n} = 0$, *cette remarque entraîne que*

$$\det(M) = \sum_{\sigma\in\mathcal{A}} \varepsilon(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1}\dots\alpha_{\sigma(p),p}\alpha_{\sigma(p+1),p+1}\dots\alpha_{\sigma(n),n}$$

Pour $\sigma\in\mathcal{A}$, *soient* $\sigma_1\in S_p$ *et* $\sigma_2\in S_q$ *définie par*

$$\begin{cases} \sigma_1(i) = \sigma(i) & 1\leq i\leq p \\ \sigma_2(i) = \sigma(i+p)-p & 1\leq i\leq q \end{cases}$$

Alors on aura

$$\begin{cases} \alpha_{\sigma(i),i} = a_{\sigma_1(i),i} & 1\leq i\leq p \\ \alpha_{\sigma(p+i),p+i} = \alpha_{\sigma_2(i)+p,i+p} = b_{\sigma_2(i),i} & 1\leq i\leq q \end{cases}$$

Donc on aura

$$\det(M) = \sum_{(\sigma_1,\sigma_2)\in S_p\times S_q} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma_1(1),1}\dots a_{\sigma_1(p),p}b_{\sigma_2(1),1}\dots b_{\sigma_2(q),q}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(i-j)} \\ &= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq p}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{1\leq i<j\leq p}(i-j)} \times \frac{\prod_{1\leq i<j\leq q}(\sigma(i+p)-\sigma(j+p))}{\prod_{1\leq i<j\leq q}(i-j)} \\ &= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq p}(\sigma_1(i)-\sigma_1(j))}{\prod_{1\leq i<j\leq p}(i-j)} \times \frac{\prod_{1\leq i<j\leq q}(\sigma_2(i)-\sigma_2(j))}{\prod_{1\leq i<j\leq q}(i-j)} \\ &= \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\det(M) &= \sum_{(\sigma_1,\sigma_2)\in S_p\times S_q} \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)a_{\sigma_1(1),1}\dots a_{\sigma_1(p),p}b_{\sigma_2(1),1}\dots b_{\sigma_2(q),q} \\ &= \sum_{\sigma_1\in S_p}\varepsilon(\sigma_1)a_{\sigma_1(1),1}\dots a_{\sigma_1(p),p}\times\sum_{\sigma_2\in S_q}\varepsilon(\sigma_2)b_{\sigma_2(1),1}\dots b_{\sigma_2(q),q} \\ &= \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

Preuve 4.2.9 (du théorème)
Soient $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice carrée d'ordre* n, $B=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ *la base canonique de* K^n *et* $v_1,v_2,\dots,v_n$ *les vecteurs colonnes de* A, *donc on a :*

$$\forall j,\ v_j=\sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$$

Fixons j *avec* $1\leq j\leq n$, *alors on a :*

$$\begin{aligned}\det(A) &= det_B(v_1,\dots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\dots,v_n) \\ &= det_B(v_1,\dots,v_{j-1},\sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i,v_{j+1},\dots,v_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j}det_B(v_1,\dots,v_{j-1},e_i,v_{j+1},\dots,v_n) \\ &= \sum_{i=1}^n(-1)^{j-1}a_{i,j}det_B(e_i,v_1,\dots,v_{j-1},v_{j+1},\dots,v_n)\end{aligned}$$

$$\text{Avec } det_B(e_i,v_1,\dots,v_{j-1},v_{j+1},\dots,v_n)=\begin{vmatrix}0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n}\\ 0 & a_{2,1} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n}\\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}$$

Dans la matrice ci-dessus, faisons permuter la i^{ieme} *ligne avec la* $(i-1)^{ieme}$ *ligne puis avec la* $(i-2)^{ieme}$ *ligne et ainsi de suite jusqu'à la* 1^{iere} *ligne, alors on obtient,*

$$det_B(e_i,v_1,\dots,v_{j-1},v_{j+1},\dots,v_n)=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix}1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n}\\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n}\\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}$$

Soit $A_{i,j}$ la matrice d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i^{ieme} ligne et la j^{ieme} colonne de la matrice A et $C = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix}$, alors d'après le lemme précédent, on a

$$det_B(e_i, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & C \\ 0 & A_{i,j} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \det(A_{i,j}) = (-1)^{i-1} \Delta_{i,j}$$

D'où

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j-2} a_{i,j} \Delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Remarque 4.2.4
Puisque $\det({}^tA) = \det(A)$, *alors on peut développer une matrice A par rapport à une ligne quelconque, c'est à dire*

$$\forall i,\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Définition 4.2.5
i) Le terme $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ s'appelle le **cofacteur** *de $a_{i,j}$*
ii) La matrice dont les coëfficients sont les cofacteurs des $a_{i,j}$ s'appelle la **comatrice** *de la matrice A et se note $co(A)$.*

$$co(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{i,j})_{\leq i,j \leq n}$$

4.2.5 Inverse d'une matrice

Définition 4.2.6
Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n et $co(A)$ la comatrice de A. Alors la matrice transposée de $co(A)$ s'appelle la matrice **adjointe** *de A et se note $\widetilde{A}$.*

$$\widetilde{A} = {}^t(co(A))$$

Théorème 4.2.6
Pour toute matrice carrée A d'ordre n on a

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A) I_n$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n.

Preuve 4.2.10
Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $A\widetilde{A} = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors on a

$$\forall i,\ \forall j,\ 1 \leq i,j \leq n,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{k+j} \Delta_{j,k}$$

Donc pour $i = j$, on aura

$$c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{k+i} \Delta_{i,k} = \det(A)$$

D'autre part, pour $i \neq j$, la quantité

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{k+j}\Delta_{j,k}$$

est l'expression d'un déterminant dont la i^{ieme} et la j^{ieme} ligne sont identiques, donc pour $i \neq j$, $c_{i,j} = 0$. D'où le résultat.

Remarque 4.2.5
Pour toute matrice inversible A, on a

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}}$$

Exemple 4.2.1

1.
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Alors
$$co(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Et par suite
$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Donc
$$co(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & g \\ c & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Et par suite
$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & g \\ c & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

4.3 Exercices

Exercice 4.3.1
Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ a & 1 & a & \vdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ a & a & \ddots & 1 & a \\ a & a & \dots & a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots \dots & 0 & \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \ , \text{ où } a_{i,j} = \frac{1}{a_i + b_j}$$

Exercice 4.3.2
Soit A_n la matrice définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{pmatrix}$$

a) *Vérifier que*

$$\forall n \geq 3, \ \det(A_n) = (a+b)\det(A_{n-1}) - (ab)\det(A_{n-2})$$

b) *Montrer que*

$$\det(A_n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Exercice 4.3.3
Montrer que

$$\begin{vmatrix} \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(a-c) + \sin(b-a) + \sin(c-b) = 4\sin(\frac{a-c}{2})\sin(\frac{b-a}{2})\sin(\frac{c-b}{2})$$

Exercice 4.3.4

a) Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \dots & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & -x & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

b) Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Exercice 4.3.5

Soit A *la matrice défini par :*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & b \\ b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant de A *et dans le cas où* A *est inversible , déterminer son inverse*

Exercice 4.3.6

$$\text{Soit} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a & x & \dots & x \\ y & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

a) Montrer que

$$\forall n \geq 3, \;\; \Delta_n = a\Delta_{n-1} - xya^{n-2}$$

b) En déduire une expression de Δ_n *en fonction de* n, a, x *et* y.

Exercice 4.3.7

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\det(A)$

b) Déterminer, suivant les valeurs de m, le rang de la matrice A.

Exercice 4.3.8
Soient A et N deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ telles que N soit nilpotente et $AN = NA$. Montrer que $\det(A+N) = \det(A)$.

Exercice 4.3.9
Soient A et B deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{C})$ et soit $P \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversibletelle que $B = P^{-1}AP$.

1. *Montrer qu'il existe deux matrices U et V de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $P = U + iV$.*
2. *Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(U+tV)B = A(U+tV)$.*
3. *Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que* $\det(U+tV) \neq 0$.
4. *En déduire que A et B sont deux matrices semblables de $M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 4.3.10
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et M la matrice en bloc définie par

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det(M) = \det(A+B)\det(A-B)$.

Exercice 4.3.11
Soient A, B, C, D des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ avec A inversible et $AC = CA$. Soit M la matrice en bloc définie par

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det(M) = \det(AD - CB)$

Exercice 4.3.12
Soient $A = (a_{ij})$ une matrices quelconque de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 4.3.13
Soit $A = (a_{ij})$ une matrices quelconque de $M_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $a \neq 0$ tel que

$$\forall \sigma \in S_n, \; \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = a$$

Montrer que $rg(A) = 1$.

Exercice 4.3.14
Soient p un nombre premier et $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ des éléments de $\mathbb{Z}$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{m}$ la classe de m modulo p. Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ définie par

$$A = (a_{\overline{i-j}})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Montrer que $\det(A) = \overline{a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1}}$.

Exercice 4.3.15
Soit q une forme quadratique non nulle sur $M_2(\mathbb{C})$, telle que

$$\forall A \in M_2(\mathbb{C}),\ \forall B \in M_2(\mathbb{C}),\ \ q(AB) = q(A)q(B)$$

On désigne par f la forme bilinéaire symétrique associée à q, I la matrice identité d'ordre 2 et par (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $M_2(\mathbb{C})$, on rappelle que :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $q(I) = 1$.
b) Montrer que si A et B sont semblables, alors $q(A) = q(B)$.
c) Montrer que si A est inversible, alors $q(A) \neq 0$.
d) Montrer que si A est non inversible, alors $q(A) = 0$.
e) On suppose que A est une matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $q(A) = \lambda_1 \lambda_2$.
f) Quelle est la matrice de q dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) ?
g) En déduire que $\forall A \in M_2(\mathbb{C}),\ \ q(A) = \det(A)$.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

5.1 Polynômes et endomorphismes

5.1.1 Polynôme minimal

Notations 5.1.1
Soit E un K-espace vectoriel, pour tout endomorphisme u de E, et pour tout entier $i \geq 0$ on définit u^i par récurrence de la manière suivante :

$$u^0 = Id_E \text{ et } \forall i \,,\, i \geq 1 \,,\, u^i = u \circ u^{i-1}$$

C'est à dire :

$$\forall i \,,\, i \geq 1 \,,\, u^i = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{i \ fois}$$

Pour $P \in K[X]$ avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, on pose $P(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$

Proposition 5.1.1
i) $P = 1 \Longrightarrow P(u) = Id_E$
ii)

$$\forall P \in K[X] \,,\, \forall Q \in K[X] \,,\, \forall u \in L_K(E) \,,\, (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$$

iii)

$$\forall P \in K[X] \,,\, \forall Q \in K[X] \,,\, \forall u \in L_K(E) \,,\, (P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$$

Preuve 5.1.1
Exercice

Théorème 5.1.1
Soit E un K-espace vectoriel de **dimension finie**. *Alors pour tout endomorphisme u de E, il existe un* **unique** *polynôme unitaire et non constant, $P \in K[X]$ tel que :*

$$\begin{cases} i) P(u) = 0 \\ ii) \forall Q \in K[X] \,,\, Q(u) = 0 \Longrightarrow P \text{ divise } Q \end{cases}$$

P s'appelle le polynôme minimal de u et se note M_u

Preuve 5.1.2

Si $u = 0$ alors il est facile de voir que $M_u = X$. Donc, dans la suite, on suppose que $u \neq 0$.

Méthode 1 *Soit $n = \dim_K(E)$, alors on sait que $\dim_K(L_K(E)) = n^2$, par suite, le système $(Id_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$, qui contient n^2+1 vecteurs est lié, donc il existe $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in K^{n^2+1}$ avec $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ tel que :*

$$\sum_{i=1}^{n^2} a_i u^i = 0$$

$$\text{donc si } P = \sum_{i=1}^{n^2} a_i X^i \text{ alors } P(u) = 0 \text{ et } \deg(P) \geq 1 \ \ (\text{Car } u \neq 0)$$

Soit $\mathcal{A} = \{\deg(Q) \ : \ Q \in K[X],\ \deg(Q) \geq 1 \text{ et } Q(u) = 0\}$, alors $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, car $\deg(P) \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ admet un plus petit élément noté p.

$p \in \mathcal{A}$, donc il existe $Q \in K[X]$, tel que $\deg(Q) = p$. Soit P un polynôme quelconque, tel que $P(u) = 0$. Effectuant la division euclidienne de P par Q, on aura :

$$P = AQ + B \ \text{ avec } \ \deg(B) < \deg(Q)$$

$P(u) = Q(u) = 0$, donc $B(u) = 0$, par suite, si $B \neq 0$ alors $\deg(B) \geq \deg(Q)$, ce qui est absurde, donc $B = 0$ et par conséquent, Q divise P.

Méthode 2 *On considère l'application :*

$$\begin{aligned} \phi_u : K[X] &\longrightarrow L_K(E) \\ P &\longmapsto \phi_u(P) = P(u) \end{aligned}$$

Alors ϕ_u est un homomorphisme d'algèbres, c'est à dire, ϕ_u est un homomorphisme d'espaces vectoriels et ϕ_u est un homomorphisme d'anneaux :

i) $\phi_u(P+Q) = \phi_u(P) + \phi_u(Q)$

ii) $\phi_u(\lambda.P) = \lambda.\phi_u(P)$

iii) $\phi_u(PQ) = \phi_u(P) \circ \phi_u(Q)$

$L_K(E)$ est de dimension finie, car E est de dimension finie, et $K[X]$ est de dimension infinie, donc ϕ_u qui est un homomorphisme d'espaces vectoriels ne peut pas être injective, car sinon $K[X]$ serait isomorphe à un sous-espace vectoriel de $L_K(E)$ et par suite $K[X]$ serait de dimension finie, ce qui est absurde. Donc $\ker(\phi_u) \neq \{0\}$

Or ϕ_u est un homomorphisme d'anneaux, donc $\ker(\phi_u)$ est un ideal de $K[X]$ et on sait que $K[X]$ est un anneau principal, donc il existe un unique polynôme unitaire $P \in K[X]$ tel que $\ker(\phi_u) = (P)$ où (P) est l'ideal engendré par P

- $\ker(\phi_u) \neq \{0\} \Longrightarrow P \neq 0$
- *$\phi_u(1) = Id_E$ donc $\phi_u \neq 0$ et par suite $\ker(\phi_u) \neq K[X]$ ce qui prouve que P n'est pas constant*
- *Si $Q \in K[X]$ est tel que $Q(u) = 0$ alors $Q \in \ker(\phi_u)$ et par suite $Q \in (P)$, donc P divise Q*

D'où le résultat.

Remarques 5.1.1

1. *Le polynôme minimal M_u est caractérisé par :*

$$\boxed{\begin{cases} M_u(u) = 0 \\ \text{Si } Q \text{ est un autre polynôme vérifiant } Q(u) = 0 \text{ alors } M_u \text{ divise } Q \end{cases}}$$

2. $\forall u \in L_K(E)$, $deg(M_u) \geq 1$

Exemple 5.1.1

1. $u = 0 \Longrightarrow M_u = X$
2. $u = Id_E \Longrightarrow M_u = X - 1$
3. *On dit qu'un endomorphisme u est un projecteur, si $u \neq 0$, $u \neq Id_E$ et $u^2 = u$.*
   Soient u un projecteur et $P = X^2 - X$, alors $P(u) = 0$ et par suite M_u divise P. Puisque $deg(M_u) \geq 1$ alors $M_u = X, M_u = X - 1$ ou $M_u = X^2 - X$.
   $u \neq 0 \Longrightarrow M_u \neq X$ et $u \neq Id_E \Longrightarrow M_u \neq X - 1$
   D'où $M_u = X^2 - X$

5.1.2 Polynôme caractéristique

Définition 5.1.1
Soient K un corps commutatif et A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K. Alors $XI - A$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $K[X]$ et par suite $\det(XI - A)$ est un élément de $K[X]$. Ce déterminant s'appelle le polynôme caractéristique de A et se note χ_A :

$$\boxed{\chi_A = \det(XI - A)}$$

Proposition 5.1.2
Soit A une matrice carrée d'ordre n.
Alors χ_A est un polynôme **unitaire de degré** *n.*

Preuve 5.1.3
Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ donc $XI - A = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où :

$$\forall i\ ,\ \forall j\ ,\ 1 \leq i,j \leq n\ ,\ \begin{cases} b_{i,j} = -a_{i,j} & si \quad i \neq j \\ b_{i,i} = X - a_{i,i} \end{cases}$$

D'autre part on sait que :

$$\det(XI - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

(Où S_n est le groupe symétrique de degré n)
Pour $\sigma = e$, élément neutre de S_n, on a $\varepsilon(\sigma) = 1$ et $\forall i\ ,\ 1 \leq i \leq n$,
$b_{i\sigma(i)} = b_{ii} = X - a_{ii}$

$$\Longrightarrow \chi_A = \det(XI - A) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii}) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq e}} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

Pour $\sigma \neq e$ on a ou bien $b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = 0$ ou bien $deg(b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}) < n$

$$\Longrightarrow deg(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq e}} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}) < n$$

Or $\prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$ est un polynôme unitaire de degré n, donc χ_A est unitaire de degré n

Lemme 5.1.1
Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique

Preuve 5.1.4
Soient A et B deux matrices semblables, donc il existe une matrice inversible P, telle que $B = P^{-1}AP$. Donc $XI - B = XP^{-1}P - P^{-1}AP = P^{-1}(XI - A)P$
Donc $XI - A$ et $XI - B$ sont deux matrices semblables à coefficients dans $K[X]$ et par suite, $\det(XI - A) = \det(XI - B)$

Définition 5.1.2
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie**, *u un endomorphisme de E et A la matrice de u dans une base quelconque de E. Alors le polynôme caractéristique de A s'appelle le polynôme caractéristique de u et se note χ_u*

$$\boxed{\chi_u = \det(XI - A)}$$

Remarques 5.1.2

1. *La définition précèdente a un sens, car si A et B sont deux matrices de u dans deux bases différentes de E, alors A et B sont semblables, donc $\chi_A = \chi_B$*
2. *Si $dim_K(E) = n$ alors pour tout $u \in L_K(E)$, $deg(\chi_u) = n$*
3. *Le polynôme minimal d'un endomorphisme est loin d'être son polynôme caractéristique*

Exemple 5.1.2
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie$= n$ et soit u un endomorphisme de E :

1. $u = 0 \Longrightarrow M_u = X$ *et* $\chi_u = X^n$
2. $u = Id_E \Longrightarrow M_u = X - 1$ *et* $\chi_u = (X - 1)^n$
3. *Si u est un projecteur de E (c.à.d : $u^2 = u$, $u \neq 0$ et $u \neq Id_E$). Soit $p = dim_K(\ker(u))$ alors :*
$$M_u = X^2 - X = X(X - 1) \text{ et } \chi_u = X^p(X - 1)^{n-p}$$
4. *On dit que $u \in L_K(E)$ est une symétrie vectorielle, si $u^2 = Id_E$. On supose que $u \neq \pm Id_E$, alos on a*
$$M_u = (X - 1)(X + 1) \text{ et } \chi_u = (X - 1)^p(X + 1)^{n-p}$$
où $p = \dim_K(\ker(u - Id_E))$.

5.1.3 Théorème de Caylet-Hammilton

Théorème 5.1.2
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors pour tout endomorphisme u de E, le polynôme minimal M_u **divise** *le polynôme caractéristique χ_u.*

Preuve 5.1.5
Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 5.1.2
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de E **stable par** *u et v la restriction de u à F. Alors χ_v divise χ_u*

Preuve 5.1.6
Soient $p = dim_K(F)$, G un supplémentaire de F dans E, $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-p})$ une base de G. Alors $(e_1, e_2, \ldots, e_p, e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-p})$ est une base de E.
Posons $A = Mat(u; (e_1, e_2, \ldots, e_p, e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-p}))$ et $B = Mat(v; (e_1, e_2, \ldots, e_p))$
Alors $\chi_u = \det(XI - A)$ et $\chi_v = \det(XI - B)$. Or on a :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Donc on aura

$$\det(XI - A) = \begin{vmatrix} XI - B & -C \\ 0 & XI - D \end{vmatrix} = \det(XI - B)\det(XI - D)$$

Par suite,

$$\chi_u = \chi_v \det(XI - D)$$

D'où le résultat

Lemme 5.1.3
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Alors pour tout $x \neq 0$, il existe un ***unique polynôme unitaire non constant*** *M_x de $K[X]$, tel que*
i) $M_x(u)(x) = 0$.
ii) $\forall P \in K[X],\ P(u)(x) = 0 \Longrightarrow M_x$ divise P

Preuve 5.1.7
On considère la partie J de $K[X]$ définie par

$$P \in J \Longleftrightarrow p(u)(x) = 0$$

Alors il est facile de vérifier que J est un idéal de $K[X]$ et que $M_u \in J$. Puisque $K[X]$ est principal et puisque J est un idéal non nul, alors il existe un unique polynôme unitaire Q de $K[X]$, tel que $J = (Q)$, où (Q) est l'idéal engendré par Q. $x \neq 0$, donc Q est non constant. Il suffit alors de prendre $M_x = Q$.

Lemme 5.1.4
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Pour chaque $x \neq 0$, on suppose que $M_x = a_0 + a_1X + \cdots + a_{p-1}X^{p-1} + X^p$ puis on pose

$$F_x = Vect(\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\})$$

Alors on aura :
i) $\dim(F_x) = \deg(M_x) = p$.
ii) *F_x est stable par u.*
iii) *Si v est la réstriction de u à F_x, alors $\chi_v = M_x$.*

Preuve 5.1.8

i) Il suffit de montrer que le système $(x,u(x),\dots,u^{p-1}(x))$ *est libre. Pour cela, on suppose, par absurde, que ce système est lié ; donc il existe* $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1})\in K^p$ *avec.* $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1})\neq(0,0,\dots,0)$*, tel que*

$$\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i u^i(x)=0$$

Posons $P=\alpha_0+\alpha_1X+\cdots+\alpha_{p-1}X^{p-1}$*, alors on voit que* $P(u)(x)=0$ *avec* $P\neq 0$*, donc* M_x *divise* P*. Ce qui est absurde, car* $\deg(P)<\deg(M_x)$*. Par suite* $(x,u(x),\dots,u^{p-1}(x))$ *est libre.*

ii) Pour la stabilité de F_x*, il suffit de montrer que*

$$\forall i\in\{0,1,,\dots,p-1\},\ u(u^i(x))\in F_x$$

Si $i\in\{0,1,,\dots,p-2\}$*,* $u(u^i(x))=u^{i+1}(x)$ *avec* $i+1\leq p-1$*, donc* $u(u^i(x))\in F_x$*.*
Si $i=p-1$*, puisque* $M_x(u)(x)=0$*, alors* $a_0x+a_1u(x)+\cdots+a_{p-1}u^{p-1}(x)+u^p(x)=0$*, donc* $u(u^{p-1}(x))=-(a_0x+a_1u(x)+\cdots+a_{p-1}u^{p-1}(x))$ *et par suite* $u(u^{p-1}(x))\in F_x$*.*

iii On a vu que $(x,u(x),\dots,u^{p-1}(x))$ *est une base de* F_x*, soit* v *la restriction de* u *à* F_x *et soit* $A=Mat(v,(x,u(x),\dots,u^{p-1}(x))$*, alors on aura :*

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&-a_0\\1&0&\dots&0&-a_1\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\dots&\ddots&1&0&-a_{p-2}\\0&\dots&0&1&-a_{p-1}\end{pmatrix}$$

On montre, par récurrence sur l'entier $p\geq 1$*, que* $\chi_u=\det(XI-A)=M_x$*.*

Remarque 5.1.1
Pour tout $x\in E$*, avec* $x\neq 0$*,* $F_x=\{P(u)(x)\ :\ P\in K[X]\}$*.*

Preuve 5.1.9 (Preuve du théorème)
Pour montrer que $\chi_u(u)=0$*, il suffit de montrer que*

$$\forall x\in E,\ x\neq 0\Longrightarrow\chi_u(u)(x)=0$$

Pour $x\in E$*, avec* $x\neq 0$*, soit* v *la restriction de* u *à* F_x*, alors on a vu que* $\chi_v=M_x$*, donc* $\chi_v(u)(x)=0$*. Or* χ_v *divise* χ_u*, par suite,* $\chi_u(u)(x)=0$*.*

5.1.4 Théorème de décomposition

Lemme 5.1.5
Soient E *un* K*-espace vectoriel quelconque,* u *et* v *deux endomorphismes qui* **commutent***, alors* $\ker(u)$ *et* $Im(u)$ *sont stables par* v*.*

Preuve 5.1.10
Pour $x \in \ker(u)$ on a $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $v(x) \in \ker(u)$ et par suite $\ker(u)$ est stable par v

ii) Pour $y \in Im(u)$ on a $y = u(x)$, $x \in E$ et $v(y) = v(u(x)) = u(v(x))$ donc $v(y) \in Im(u)$ et par suite $Im(u)$ est stable par v

Théorème 5.1.3
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie**, *u un endomorphisme de E, P et Q deux polynômes de $K[X]$ qui sont* **premiers entre eux**, *tels que $(PQ)(u) = 0$. Alors :*
i) $\ker(P(u))$ et $\ker(Q(u))$ sont stables par u
ii) $E = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$

Preuve 5.1.11
i) $P(u) \circ u = u \circ P(u)$ et $u \circ Q(u) = Q(u) \circ u$ donc d'après le lemme précèdent on a le résultat

ii)
$$E = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u)) \iff \begin{cases} E = \ker(P(u)) + \ker(Q(u)) \\ \ker(P(u)) \cap \ker(Q(u)) = \{0\} \end{cases}$$

P et Q sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe A , $B \in K[X]$ tel que $AP + BQ = 1$

$$\begin{aligned} AP + BQ = 1 &\implies (AP + BQ)(u) = 1(u) \\ &\implies A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = Id_E \\ &\implies \forall x \in E,\ x = A(u)(P(u)(x)) + B(u)(Q(u)(x)) \\ &\implies \forall x \in E,\ x = P(u)(A(u)(x)) + Q(u)(B(u)(x)),\ \textit{(Car deux polynômes en } u \textit{ commutent)} \end{aligned}$$

Posons $x_1 = Q(u)(B(u)(x))$ et $x_2 = P(u)(A(u)(x))$, alors on voit facilement que $x_1 \in \ker(P(u))$, $x_2 \in \ker(Q(u))$ et $x = x_1 + x_2$, donc $E = \ker(P(u)) + \ker(Q(u))$
Si maintenant $x \in \ker(P(u)) \cap \ker(Q(u))$, puisque $x = A(u)(P(u)(x)) + B(u)(Q(u)(x))$ alors $x = 0$ et par suite $\ker(P(u)) \cap \ker(Q(u)) = \{0\}$.

Corollaire 5.1.1
Soient E un K-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $P_1, P_2, \ldots, P_m$ des polynômes de $K[X]$ qui sont deux à deux premiers entre eux, tels que $(P_1 P_2 \cdots P_m)(u) = 0$. Alors :
i) Pour tout i , $i = 1, 2, \ldots, m$, $\ker(P_i(u))$ est stable par u
ii) $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \ker(P_i(u))$

Preuve 5.1.12
On procède par récurrence sur $m \geq 2$

Exemple 5.1.3
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, où K est un corps **algèbriquement clos**, *u un endomorphisme de E et M_u le polynôme minimal de u. Puisque K est algèbriquement clos,*

alors $M_u = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$
Pour chaque i , $i = 1,2,\dots r$, *posons* $P_i = (X-\lambda_i)^{m_i}$
Donc $P_1, P_2, \dots, P_r$ *sont des polynômes deux à deux premiers entre eux et on a*

$$(P_1P_2\cdots P_r)(u) = M_u(u) = 0$$

Donc d'après le théorème de décomposition :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(P_i(u))$$

$$P_i = (X-\lambda_i)^{m_i} \Longrightarrow P_i(u) = (u-\lambda_i)^{m_i}$$

D'où $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker[(u-\lambda_i)^{m_i}]$

5.2 Diagonalisation

5.2.1 Valeurs propres-Vecteurs propres

Définition 5.2.1
Soient E *un* K*-espace vectoriel quelconque et* u *un endomorphisme de* E. *On dit que* $\lambda \in K$ *est une* **valeur propre** *de* u, *s'il existe* $x \in E$ *avec* $x \neq 0$, *tel que :*

$$\boxed{u(x) = \lambda.x}$$

Dans ce cas x *s'appelle un* **vecteur propre** *associé à la valeur propre* λ

Remarque 5.2.1
Si λ *est une valeur propre de* u, *alors il existe* $x \neq 0$ *tel que* $(u-\lambda)(x) = 0$, *donc* $\ker(u-\lambda) \neq \{0\}$ *et par suite* $u-\lambda$ *n'est pas injectif*
Donc λ *est valeur propre de* u, *si et seulement si,* $\lambda - u$ *n'est pas injectif*

Proposition 5.2.1
Soient E *un* K*-espace vectoriel de* **dimension finie** *et* u *un endomorphisme de* E, *alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
i) $\lambda \in K$ *est une valeur propre de* u
ii) $\ker(\lambda - u) \neq \{0\}$
iii) $\lambda - u$ *n'est pas injectif*
iv) $\lambda - u$ *n'est pas inversible*
v) $\det(\lambda - u) = 0$

Preuve 5.2.1
D'après la remarque précèdente on a i) $\Longrightarrow$ *ii)*
ii) $\Longrightarrow$ *iii) et iii)* $\Longrightarrow$ *iv) sont triviaux*
Nous savons qu'un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension finie est inversible, si et seulement si, son déterminant est non nul, donc

iv) $\Longrightarrow$ *v) est vraie*
v) $\Longrightarrow$ *i)* $\det(\lambda - u) = 0$ *donc* $\lambda - u$ *n'est pas inversible et puisque* E *est de dimension finie, alors* $\lambda - u$ *n'est pas injectif donc d'après la remarque précèdente* λ *est valeur propre de* u

Définition 5.2.2
Soient E *un* K*-espace vectoriel,* u *un endomorphisme de* E *et* λ *une valeur propre de* u*. On appelle* **sous-espace propre** *associé à la valeur propre* λ*, le sous-espace de* E *défini par :*

$$\boxed{E_\lambda = \ker(\lambda - u)}$$

Remarques 5.2.1
1. x *est un vecteur propre associé à la valeur propre* λ*, si et seulement si,* $x \in E_\lambda$ *et* $x \neq 0$*.*
2. *Pour toute valeur propre* λ *de* u*, le sous-espace propre* E_λ *est stable par* u*.*
3. *Si* λ_1 *et* λ_2 *sont deux valeurs propres distinctes de* u*, alors*

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$$

Théorème 5.2.1
Soient E *un* K*-espace vectoriel de* **dimension finie***,* u *un endomorphisme de* E *et* λ *un élément de* K*. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
i) λ *est une valeur propre de* u
ii) λ *est une racine du polynôme minimal* M_u
iii) λ *est racine du polynôme caractéristique* χ_u

Preuve 5.2.2
i) $\Longrightarrow$ *ii) Supposons que* λ *est une valeur propre de* u*, donc il existe* $x \neq 0$ *tel que* $u(x) = \lambda.x$
Posons $M_u = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_1X + a_0$
Donc $M_u(u) = u^m + a_{m-1}u^{m-1} + \cdots + a_1u + a_0Id_E$
Donc $M_u(u)(x) = u^m(x) + a_{m-1}u^{m-1}(x) + \cdots + a_1u(x) + a_0x$
Or $u(x) = \lambda.x$ *donc pour tout entier* $i \geq 1$*,* $u^i(x) = \lambda^i.x$
D'où $M_u(u)(x) = M_u(\lambda).x$ *avec* $M_u(u) = 0$ *et* $x \neq 0$*, donc* $M_u(\lambda) = 0$
ii) $\Longrightarrow$ *iii) D'après Cayley-Hammilton,* M_u *divise* χ_u*, donc toute racine de* M_u *est racine de* χ_u*.*
iii) $\Longrightarrow$ *i) Supposons que* $\chi_u(\lambda) = 0$*. Donc* $\det(\lambda - u) = 0$ *et par conséquent* $\lambda - u$ *n'est pas inversible et comme* E *est de dimension finie, alors* $\lambda - u$ *n'est pas injectif. D'où le résultat*

Remarque 5.2.2
Soit E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie, alors pour tout endomorphisme* u *de* E*, le polynôme minimal* M_u *et le polynôme caractéristique* χ_u *ont les mêmes racines dans* K

$$\boxed{\forall \lambda \in K,\ M_u(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0}$$

Définition 5.2.3
Un corps commutatif K *est dit* **algèbriquement clos***, si tout polynôme non constant de* $K[X]$*, possède au moins une racine dans* K*.*

Remarque 5.2.3

1. *K est algèbriquement clos, si et seulement si, les seuls polynômes irréductibles de $K[X]$, sont les polynômes de degré 1.*
2. *Si K est algèbriquement clos, alors tout polynôme unitaire non constant de $K[X]$, se décompose en un produit de polynômes de degré 1, donc P s'écrit sous la forme :*

$$P = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont, donc, les racines deux à deux distinctes de P dans K.

Théorème 5.2.2 (de d'Alembert)
Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est algèbriquement clos.

Preuve 5.2.3
Voir la partie exercices

Corollaire 5.2.1
Soit E un K-espace vectoriel de **dimension finie**, *où K est un corps* **algèbriquement clos**. *Alors tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre.*

Preuve 5.2.4
Si K est algèbriquement clos alors par définition tout polynôme non constant à coefficients dans K possède au moins une racine, donc si u est un endomorphisme de E, alors M_u possède au moins une racine $\lambda \in K$, donc λ est une valeur propre de u.

Remarques 5.2.2
Lorsque E n'est pas de dimension finie ou lorsque K n'est pas algèbriquement clos, le corollaire précèdent peut ne pas être vérifié :

1. *$E = \mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $= 2$ et $\mathbb{R}$ n'est pas algèbriquement clos.*
   Soient (e_1, e_2) une base de E et u l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} u(e_1) = -e_2 \\ u(e_2) = e_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow Mat(u;(e_1,e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \chi_u = \begin{vmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{vmatrix} = X^2 + 1$$

   χ_u n'a aucune racine dans $\mathbb{R}$ donc u n'a aucune valeur propre. Cependant si on considère le même endomorphisme u sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ alors χ_u possède deux racines i et $-i$ donc u possède deux valeurs propres.
2. *$E = \mathbb{C}[X]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie et $\mathbb{C}$ est un corps algèbriquement clos*
   Soit u l'endomorphisme défini sur E par :

$$\forall n \geq 0 \ , \ u(X^n) = X^{n+1}$$

   Alors u n'a aucune valeur propre

5.2.2 Endomorphismes diagonalisables

Lemme 5.2.1
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie** $= n$, *u un endomorphisme de E et $\lambda \in K$ une valeur propre de u. On suppose que λ est une racine de χ_u de multiplicité $m \geq 1$, (c'est à dire, $\chi_u = (X-\lambda)^m.Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$). Alors :*

$$\boxed{dim_K(E_\lambda) \leq m}$$

Preuve 5.2.5
Soient $p = dim_K(E_\lambda)$ et v la restriction de u à E_λ. Puisque E_λ est stable par u, alors χ_v divise χ_u
On a pour tout $x \in E_\lambda$, $v(x) = u(x) = \lambda.x$ donc $v = \lambda.Id_{E_\lambda}$ et par suite $\chi_v = (X-\lambda)^p$
Donc $(X-\lambda)^p$ divise $(X-\lambda)^m.Q$
$Q(\lambda) \neq 0$ donc Q et $(X-\lambda)^p$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss $(X-\lambda)^p$ divise $(X-\lambda)^m$ et par suite $p \leq m$

Définition 5.2.4
Soient E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E formée uniquement de vecteurs propres de u.

Remarque 5.2.4
On suppose que E est de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E qui est diagonalisable. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Donc la matrice A de u dans cette base s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u non necessairement distinctes; chaque valeur propre apparaît sur la diagonale de la matrice A autant de fois que sa multiplicité.

Lemme 5.2.2
soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, u un endomorphisme de E et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Alors la somme

$$E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_m}$$

est directe.

Preuve 5.2.6
On sait que la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_m}$ est une somme directe , si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{n} E_{\lambda_i},\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\cdots+x_m=0 &\Longrightarrow u(x_1+x_2+\cdots+x_m)=0 \\ &\Longrightarrow \lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2+\cdots+\lambda_m.x_m=0 \\ &\Longrightarrow u(\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2+\cdots+\lambda_m.x_m)=0 \\ &\Longrightarrow \lambda_1^2.x_1+\lambda_2^2.x_2+\cdots+\lambda_m^2.x_m=0 \end{aligned}$$

Donc par récurrence on voit que pour tout entier $i \geq 1$, on a :

$$\lambda_1^i.x_1+\lambda_2^i.x_2+\cdots+\lambda_m^i.x_m=0$$

Considèrons le système S suivant de n équations à n inconnues :

$$S=\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_m=0 \\ \lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2+\cdots+\lambda_m.x_m=0 \\ \lambda_1^2.x_1+\lambda_2^2.x_2+\cdots+\lambda_m^2.x=0 \\ \vdots \\ \lambda_1^{m-1}.x_1+\lambda_2^{m-1}.x_2+\cdots+\lambda_m^{m-1}.x=0 \end{cases}$$

Ce système a pour déterminant :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Donc Δ est un déterminant de Vandermonde et par suite on a :

$$\Delta=\prod_{1\leq i<j\leq m}(\lambda_j-\lambda_i)$$

Les λ_i sont deux à deux distinctes donc $\Delta \neq 0$ et par suite le système S est un système de Cramer qui admet pour unique solution $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$. D'où le résultat

Définition 5.2.5
Soit K un corps commutatif, on dit qu'un polyôme P de $K[X]$ a toutes ses racines dans K si P s'écrit sous la forme :

$$P=a(X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$$

où a est une constante et $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ sont les racines de P deux à deux distinctes de multiplicités respectives $m_1,m_2,\ldots,m_r$

Remarque 5.2.5
Si K est un corps algèbriquement clos, alors tout polynôme P à coefficients dans K, a toutes ses racines dans K.

Théorème 5.2.3
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie** $= n$ *et u un endomorphisme de E. On suppose que χ_u a toutes ses racines dans K et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les racines deux à deux distinctes de χ_u de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$, c'est à dire :*

$$\chi_u = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r} \text{ avec } \sum_{k=1}^{r} m_i = n$$

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
i) u est diagonalisable
ii) $M_u = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)$
iii) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$
iv) $\forall i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $dim_K(E_{\lambda_i}) = m_i$

Preuve 5.2.7
i) $\Longrightarrow$ ii) Supposons que u est diagonalisable et montrons que $M_u = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)$. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont des valeurs propres de u donc se sont des racines de M_u et puisque les λ_i , $i = 1, 2, \ldots, r$, sont deux à deux distinctes alors $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)$ divise M_u
Pour conclure montrons que M_u divise $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)$. Pour cela posons $Q = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)$ et montrons que $Q(u) = 0$.
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Donc pour tout i, $i = 1, 2, \ldots, n$, il existe j , $1 \leq j \leq r$ tel que $u(e_i) = \lambda_j.e_i$.
Or $Q = [\prod_{k \neq j}(X-\lambda_k)](X-\lambda_j)$, donc on en déduit que $Q(u)(e_i) = 0$, car $(u-\lambda_j)(e_i) = 0$. Ceci est vrai pour tout i , $1 \leq i \leq n$, donc $Q(u) = 0$

ii) $\Longrightarrow$ iii) Supposons que $Q = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_r)$ et pour chaque i , $i = 1, 2, \ldots, r$, posons $P_i = X-\lambda_i$ alors $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont deux à deux premiers entre eux et on a

$$(P_1P_2\ldots P_r)(u) = M_u(u) = 0$$

donc d'après le théorème de décomposition on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u))$$

Avec $\ker(P_i(u)) = \ker(u-\lambda_i) = E_{\lambda_i}$. D'où le résultat

iii) $\Longrightarrow$ iv) Supposons que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$
Donc $n = dim_K(E) = \sum_{i=1}^{r} dim_K(E_{\lambda_i})$. Or on a aussi $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$ et pour tout i, $dim_K(E_{\lambda_i}) \leq m_i$ donc on en déduit que pour tout i , $i = 1, 2, \ldots, r$, $dim_K(E_{\lambda_i}) = m_i$

iv) $\Longrightarrow$ i) Supposons que $\forall i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $dim_K(E_{\lambda_i}) = m_i$. Pour chaque i , $i = 1, 2, \ldots, r$, soit $(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{im_i})$ une base de E_{λ_i}. Puisque la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \cdots + E_{\lambda_r}$ est directe et *puisque* $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$ *alors*

$$(e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1m_1}, \ldots\ldots, e_{r1}, e_{r2}, \ldots, e_{rm_r})$$

est une base de E *formée de vecteurs propres de* u *et dans laquelle la matrice* A *de* u *s'écrit ;*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Où chaque λ_i *apparait sur la diagonale autant de fois que sa multiplicité.*

Corollaire 5.2.2
Soient E *un* K*-espace vectoriel de* **dimension finie** $= n$ *et* u *un endomorphosme de* E*. On suppose que* u *admet* n *valeurs propres deux à deux distinctes. Alors* u *est diagonalisable*

Preuve 5.2.8
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres deux à deux distinctes de* u *, donc elles sont toutes des racines de* χ_u *avec* $deg(\chi_u) = dim_K(E) = n$ *donc on a :*

$$\chi_u = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_n)$$

Et par suite pour tout i, $i = 1, 2, \ldots, n$, λ_i *est de multiplicié* $m_i = 1$*. Donc pour tout* i,
$i = 1, 2, \ldots, n$*, on a* $1 \leq dim_K(E_{\lambda_i}) \leq 1$

$$\Longrightarrow \forall i,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ dim_K(E_{\lambda_i}) = m_i = 1$$

D'après le théorème précèdent u *est diagonalisable*

Exemple 5.2.1

1. E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie et* u *un projecteur de* E *alors* u *est diagonalisable. En effet* u *est un projecteur donc* $u^2 = u$,
   $u \neq 0$ *et* $u \neq Id_E$ *donc* $M_u = X(X-1)$ *n'a que des racines simples, donc* u *est diagonalisable*
2. E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie et* u *un endomorphisme de* E *vérifiant*
   $u^m = Id_E$*, où* m *est un entier* ≥ 1*. Alors* u *est diagonalisable*
   En effet soit $P = X^m - 1$ *alors* $P(u) = 0$ *donc* M_u *divise* P*. Or* P *n'a que des racines simples , car si* α *est une racine double alors on aura* $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ *avec* $P' = mX^{m-1}$ *donc* $\alpha = 0$ *ce qui est absurde car* 0 *n'est pas une racine de* P*, donc* M_u *n'a aussi que des racines simples et par suite* u *est diagonalisable*
3. $E = \mathbb{R}^3$ *et* (e_1, e_2, e_3) *sa base canonique. Soit* u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad m \in \mathbb{R}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\chi_u &= \begin{vmatrix} X-m & -1 & -1 \\ -1 & X-m & -1 \\ -1 & -1 & X-m \end{vmatrix} \\
&= (X-m+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & X-m \end{vmatrix} \\
&= (X-m+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & X-m \end{vmatrix} \quad (colonne2+colonne1) \\
\Longrightarrow \quad & \chi_u = (X-m+1)^2(X-m-2)
\end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 = m-1$ *est une valeur propre de multiplicité* $=2$ *et* $\lambda_2 = m+2$ *est une valeur propre de multiplicité* $=1$
$(x,y,z) \in E_{\lambda_1}$ *si et seulement si* $x+y+z=0$

$$\Longrightarrow E_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z=0)\}$$

$$\Longrightarrow (x,y,z) = (x,y,-x-y) = x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$$

Posons $e'_1 = e_1 - e_3$ *et* $e'_2 = e_2 - e_3$ *alors* (e'_1, e'_2) *est libre et*
$E_{\lambda_1} = Vect(e'_1, e'_2)$ *donc* (e'_1, e'_2) *forme une base de* E_{λ_1} *et par suite*
$dim(E_{\lambda_1}) = 2$
$(x,y,z) \in E_{\lambda_2}$ *si et seulement si :*

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

Ce système admet pour solution $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x=y=z\}$ *d'où :*

$$(x,y,z) \in E_{\lambda_2} \iff (x,y,z) = (x,x,x) = x(1,1,1)$$

Donc si on pose $e'_3 = e_1+e_2+e_3$ *alors*$E_{\lambda_2} = Vect(e'_3)$
(e'_1, e'_2, e'_3) *est donc une base de* E *formée de vecteurs propres de* u *et dans laquelle la matrice de* u *s'écrit :*

$$B := \begin{pmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

On sait que la matrice de passage P *est egale à la matrice de l'endomorphisme* p *tel que* $p(e_1) = e'_1, p(e_2) = e'_2, p(e_3) = e'_3$ *donc :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on a $\boxed{B = P^{-1}AP \quad et \quad A = PBP^{-1}}$

4. *Soit* A *la matrice de* $M_4(\mathbb{R})$ *définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A quelle condition A *est-elle diagonalisable ?*
Il est facile de voir que $\chi_A = (X+1)^2(X-1)^2$, *donc* A *est diagonalisable, si et seulement si, le polynôme minimal* M_A *de* A *n'a que des racines simples.* M_A *et* χ_A *ont les mêmes racines, donc* A *est diagonalisable, si et seulement si,* $M_A = (X+1)(X-1)$. *Ainsi on est amené à dire que* A *est diagonalisable, si et seulement si,* $(A+I)(A-I) = 0$.

$$(A+I)(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 2a & ad & ae+bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & -2f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc A *est diagonalisable, si et seulement si,*

$$2a = 0,\ ad = 0,\ ae+bf = 0,\ df = 0 \text{ et } -2f = 0$$

Donc on voit que A *est diagonalisable, si et seulement si,* $a = 0$ *et* $f = 0$.

5. $E = \mathbb{R}^4$ *muni de sa base canonique* (e_1, e_2, e_3, e_4) *et soit* u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *défini par :*

$$\begin{cases} u(e_1) = 2e_1 + e_3 - e_4 \\ u(e_2) = e_1 + 2e_2 - e_4 \\ u(e_3) = e_3 \\ u(e_4) = e_3 + e_4 \end{cases}$$

Alors la matrice de u *dans la base canonique s'écrit :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_u &= \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)^2\begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (colonne4 + colonne3) \\ \Longrightarrow\ & \chi_u = (X-1)^2(X-2)^2 \end{aligned}$$

Donc u est diagonalisable si et seulement si $(u - Id_E)(u - 2Id_E) = 0$.
Or on a $(u - Id_E)(u - 2Id_E)(e_1) = -e_3 \neq 0$ donc u n'est pas diagonalisable.

5.3 Trigonalisation - Jordanisation

5.3.1 Définition et Critère de trigonalisation

Définition 5.3.1
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie** $= n$ *et u un endomorphisme de E. On dit que u est trigonalisable, s'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous une forme* **triangulaire** *:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 5.3.1
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie** $= n$ *et u un endomorphisme de E. Alors u est trigonalisable, si et seulement si, le polynôme caractéristique de u, χ_u, a toutes ses racines dans K.*

Preuve 5.3.1
($\Longrightarrow$) Supposons que u est trigonalisable, donc il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \forall i, j \text{ , } a_{ij} \in K$$

$$\Longrightarrow \chi_u = \det(XI - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & X - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \chi_u = (X - a_{11})(X - a_{22}) \cdots (X - a_{nn})$$

Donc χ_u a toutes ses racines dans K.
($\Longleftarrow$) Supposons que χ_u a toutes ses racines dans K et montrons par récurrence sur $n = dim_K(E)$ que u est trigonalisable
Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer.
Supposons que $n > 1$ et que la propriété est vraie pour tout K-espace vectoriel de dimension $m < n$
Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et soit λ une- racine de χ_u. Soit t_u l'endomorphisme transposé de u, alors on sait que $\chi_{t_u} = \chi_u$, donc λ est racine de χ_{t_u} et par suite λ est une valeur propre de t_u. Soit $\phi \in E^*$ un vecteur propre associé à λ

Posons $F = \ker(\phi)$, *donc* $dim_K(F) = n-1$
Soit $x \in F$ *alors on a* $< u(x), \phi >=< x, t_u(\phi) >=< x, \lambda.\phi >$
$\Longrightarrow < u(x), \phi >= \lambda < x, \phi >= 0$ *donc* $u(x) \in F$ *et par suite* F *est stable par* u
Soit v *la restriction de* u *à* F, *donc* v *est un endomorphisme de* F *et comme* χ_v *divise* χ_u *et* χ_u *a toutes ses racines dans* K *alors aussi* χ_v *a toutes ses racines dans* K .
Donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ *de* F *dans laquelle la matrice de* v *est triangulaire. Soit* $x \in E$ *tel que* $x \notin F$ *et soit* $e_n = x$, *alors la matrice de* u *par rapport à la base* $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ *est triangulaire.*

Remarques 5.3.1

1. *Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable*
2. *Si* K *est un corps algèbriquement clos et si* E *est un* K*-espace vectoriel de dimension finie alors tout endomorphisme de* E *est trigonalisable*
3. *Si* u *est un endomorphisme trigonalisable et si* A *est une matrice triangulaire qui représente* u *dans une base de* E, *alors les éléments diagonaux de* A *sont les valeurs propres de* u, *c'est à dire :*
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sont les valeurs propres non necessairement deux à deux distinctes de* u. *Donc le déterminant et la trace de* u *sont exprimés uniquement en fonction des valeurs propres de* u *:*
$$\boxed{\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad et \quad trace(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Proposition 5.3.1
Soient E *un* K*-espace vectoriel de* **dimension finie** $= n$ *et* u *un endomorphisme quelconque de* E. *On suppose que :*
$$\chi_u = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$
Alors $\det(u) = (-1)^n a_0$ *et* $trace(u) = -a_{n-1}$.
En particulier, si $dim_K(E) = 2$ *alors pour tout endomorphisme* u *de* E *on a :*
$$\boxed{\chi_u = X^2 - trace(u)X + \det(u)}$$

Preuve 5.3.2
Si χ_u *a toutes ses racines dans* K, *alors on aura :*
$$\chi_u = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$
$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -a_{n-1} \quad et \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n a_0$$

Donc dans ce cas on a le résultat.
Si maintenant χ_u n'a pas toutes ses racines dans K, alors d'après votre cours d'algèbre général, il existe un corps L contenant K comme sous-corps et dans lequel χ_u a toutes ses racines.
Soit A la matrice de u dans une base de E et Soit v l'endomorphisme du L-espace vectoriel L^n de matrice A dans la base canonique de L^n. Alors :

$$\chi_v = \det(XI - A) = \chi_u = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

Or χ_v a toutes ses racines dans L donc d'après le premier cas on a
$trace(v) = -a_{n-1}$ et $\det(v) = (-1)^n a_0$
D'où le résultat, car $trace(u) = trace(A) = trace(v)$ et $\det(u) = \det(A) = \det(v)$

5.3.2 Endomorphismes nilpotents

Définition 5.3.2
Soient E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est nilpotent, s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $u^m = 0$

Proposition 5.3.2
Soit u un endomorphisme nilpotent, alors il existe un entier $q \geq 1$ tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$
q s'appelle **l'indice de nilpotence de** *u.*

Preuve 5.3.3
Soit $A = \{m \in \mathbb{N} \,:\, m \geq 1 \text{ et } u^m = 0\}$, alors par définition A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc A admet un plus petit élément noté q et on a $q \in A$ et $q - 1 \notin A$.

Théorème 5.3.2
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie** *$= n$. Alors les propositions suivantes sont equivalentes :*
- *i) u est nilpotent*
- *ii) $M_u = X^q$, où q est l'indice de nilpotence de u*
- *iii) $\chi_u = X^n$, où $n = dim_K(E)$*

Preuve 5.3.4
i) $\Longrightarrow$ ii) Supposons que u est nilpotent d'indice q, alors $u^q = 0$ donc M_u divise X^q et par suite $M_u = X^r$ avec $r \leq q$. Puisque $u^{q-1} \neq 0$ alors $r = q$

ii) $\Longrightarrow$ iii) Supposons que $M_u = X^q$, puisque M_u et χ_u ont les mêmes racines, donc 0 est l'unique racine de χ_u et puisque χ_u est unitaire de degré $= n$ alors $\chi_u = X^n$

iii) $\Longrightarrow$ i) C'est une conséquence du théorème de Cayley-Hammilton.

Remarque 5.3.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme nilpotent, **non nul**, *d'indice q. Alors, d'après le théorème précédent, on a toujours :*

$$\boxed{2 \leq q \leq n \quad \text{où } n = dim_K(E)}$$

Notations 5.3.1
Dans la suite E désigne un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphsome nilpotent non nul d'indice q.
Pour chaque i , $i = 0,1,2,\dots,q$ on pose $E_i = \ker(u^i)$

$$\Longrightarrow E_0 = \{0\} \text{ et } E_q = E$$

Lemme 5.3.1
i) $\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_q = E$
ii) $\forall i$, $i = 0,1,2,\dots,q-1$, $u(E_{i+1}) \subseteq E_i$

Preuve 5.3.5
i) Pour tout endomorphisme u, on a toujours :

$$\forall i \in \mathbb{N} \text{ , } \ker(u^i) \subseteq \ker(u^{i+1})$$

Donc on doit montrer que $\forall i$, $i = 0,1,2,\dots,q-1$, $E_{i+1} \neq E_i$
Pour cela , supposons par absurde qu'il existe i tel que $E_{i+1} = E_i$ et montrons que $u^{q-1} = 0$
Pour tout $x \in E$ on a $u^q(x) = 0$
$\Longrightarrow u^{i+1}(u^{q-i-1}(x)) = 0$
$\Longrightarrow u^{q-i-1}(x) \in E_{i+1}$
$\Longrightarrow u^i(u^{q-i-1}(x)) = 0$
$\Longrightarrow u^{q-1}(x) = 0$ *et ceci* $\forall x \in E$
Ce qui est absurde.
ii)Trivial

Lemme 5.3.2
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose qu'il existe i , $1 \leq i \leq q$ tel que $F \cap E_i = \{0\}$, alors on a :
i) $u(F) \cap E_{i-1} = \{0\}$
ii) $u|_F : F \to u(F)$ *est un isomorphisme*

Preuve 5.3.6
i) Soit $x \in F$ tel que $u(x) \in E_{i-1}$, a-t-on $x = 0$?
$u(x) \in E_{i-1} \Longrightarrow u^{i-1}(u(x)) = 0$
Donc $u^i(x) = 0$ et par suite $x \in E_i$
Or $F \cap E_i = \{0\}$ donc $x = 0$

ii)Il suffit de montrer que $\ker(u|_F) = \{0\}$.
On a $\ker(u|_F) = F \cap \ker(u)$ avec $F \cap \ker(u) \subseteq F \cap E_i$, d'où le résultat.

Lemme 5.3.3
Il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_q$ de E tels que :
i) $\forall i$, $i = 1,2,\dots,q$, $E_i = E_{i-1} \oplus F_i$
ii) $\forall i$, $i = 1,2,\dots,q$, $u(F_i) \subseteq F_{i-1}$
iii) $\forall i$, $i = 1,2,\dots,q$, $u|_{F_i} : F_i \to F_{i-1}$ *est injective*
iv) $E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$

Preuve 5.3.7
On sait que $E_{q-1} \subsetneq E_q$ donc on peut choisir un supplémentaire de E_{q-1} dans E_q qu'on note F_q

$$\Longrightarrow E = E_q = E_{q-1} \oplus F_q$$

On a donc $E_{q-1} \cap F_q = \{0\}$, par suite, d'après le lemme prècèdent , $E_{q-2} \cap u(F_q) = \{0\}$. Or $u(F_q) \subseteq u(E_q) \subseteq E_{q-1}$, donc on peut choisir un supplémentaire de E_{q-2} dans E_{q-1} qui contient $u(F_q)$, ce supplémentaire sera noté F_{q-1}

$$\Longrightarrow E_{q-1} = E_{q-2} \oplus F_{q-1} \ \text{ avec } \ u(F_q) \subseteq F_{q-1}$$

Puis de la même manière on voit que

$$E_{q-3} \cap u(F_{q-1}) = \{0\} \ \text{ et } \ u(F_{q-1}) \subseteq u(E_{q-1}) \subseteq E_{q-2}$$

donc on peut choisir un supplémentaire de E_{q-2} dans E_{q-1} qui contient $u(F_q)$, ce supplémentaire sera noté F_{q-1}

$$\Longrightarrow E_{q-2} = E_{q-3} \oplus F_{q-2} \ \text{ avec } \ u(F_{q-1}) \subseteq F_{q-2}$$

Ainsi par récurrence on aura :

$$\begin{array}{l} E = E_q = E_{q-1} \oplus F_q \\ E_{q-1} = E_{q-2} \oplus F_{q-1} \ \text{ avec } \ u(F_q) \subseteq F_{q-1} \\ E_{q-2} = E_{q-3} \oplus F_{q-2} \ \text{ avec } \ u(F_{q-1}) \subseteq F_{q-2} \\ \vdots \\ E_2 = E_1 \oplus F_2 \ \text{ avec } \ u(F_3) \subseteq F_2 \\ E_1 = E_0 \oplus F_1 \ \text{ avec } \ u(F_2) \subseteq F_1 \end{array}$$

$$\Longrightarrow E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_q$$

D'où le résultat.

Définition 5.3.3
On appelle **matrice nilpotente de Jordan** *toute martice carrée qui s'écrit sous la forme :*

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{N_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{N_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{N_r} \end{pmatrix}$$

Où pour chaque i , $i = 1, 2, \dots, r$, on a :

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 5.3.3
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie** $= n$ *et u un endomorphisme non nul de E, nilpotent d'indice q. Alors il existe une base de E, appelée* **base de Jordan de** u*, dans laquelle la matrice de u est une matrice nilpotente de Jordan.*

Preuve 5.3.8
Soient $F_1, F_2, \ldots, F_q$ les sous-espaces du lemme précèdent, alors on a :

i) $\forall i \ , \ 1 \leq i \leq q \ , \ E_i = E_{i-1} \oplus F_i$

ii) $\forall i \ , \ 1 \leq i \leq q \ , \ u(F_i) \subseteq F_{i-1}$

iii) $\forall i \ , \ 1 \leq i \leq q \ , \ u|_{F_i} : F_i \rightarrow F_{i-1} \ \ est \ \ injective$

iv) $E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$

Soit $(x_{q,1}, x_{q,2}, \ldots, x_{q,m_q})$ une base de F_q. Puisque $u|_{F_q} : F_q \rightarrow F_{q-1} \ \ est \ \ injective$ alors $(u(x_{q,1}), u(x_{q,2}), \ldots, u(x_{q,$ est une partie libre de F_{q-1} et par suite on peut la compléter en une base de F_{q-1}

Soit $(x_{q-1,1}, x_{q-1,2}, \ldots, x_{q-1,m_{q-1}})$ cette base, où pour chaque i, $i = 1, 2, \ldots, m_q \ x_{q-1,i} = u(x_{q,i})$

Ainsi par récurrence sur j, $2 \leq j \leq q$, à partir d'une base $(x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,m_j})$ de F_j on obtient une base $(x_{j-1,1}, x_{j-1,2}, \ldots, x_{j-1,m_{j-1}})$ de F_{j-1} tel que :

$$\forall i \ , \ 1 \leq i \leq m_j \ , \ x_{j-1,i} = u(x_{j,i})$$

Or $E = \bigoplus_{j=1}^{q} F_j$, donc la réunion de toutes ces bases forme une base de E

Ecrivant les élèments de cette base dans un tableau de la manière suivante :

F_q	$x_{q,1}$	$x_{q,2}$	$\ldots$	x_{q,m_q}				
F_{q-1}	$x_{q-1,1}$	$x_{q-1,2}$	$\ldots$	x_{q-1,m_q}	$\ldots$	$x_{q-1,m_{q-1}}$		
F_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\ldots$	x_{1,m_q}	$\ldots$	$x_{1,m_{q-1}}$	$\ldots$	x_{1,m_1}
	G_1	G_2	$\ldots$	G_{m_q}	$\ldots$	$G_{m_{q-1}}$	$\ldots$	G_{m_1}

Dans ce tableau, pour chaque i, $1 \leq i \leq m_1$, G_i est le sous-espace de E engendré par les vecteurs de la i^{ieme} colonne qui forment un système libre, donc ce système constitue une base de G_i

Ecrivons les éléments de cette base en commançant du bas vers le haut donc on aura $(e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,r_i})$, où :

$$\begin{cases} u(e_{i,1}) = 0 \\ u(e_{i,j}) = e_{i,j-1} \ , \ \forall j \ , \ 2 \leq j \leq r_i \end{cases}$$

Soit u_i la restriction de u à G_i, donc u_i est un endomorphisme de G_i et la matrice de u_i dans la base ci-dessus s'écrit :

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or on a $E = \bigoplus_{i=1}^{m_1} G_i$, *donc la matrice* A *de* u *dans la base* $(e_{1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{1,r_1}, \dots, \dots, e_{m_1,1}, e_{m_1,2}, \dots, e_{m_1}, r_{m_1})$ *s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{A_{m_1}} \end{pmatrix}$$

D'où le résultat

Remarques 5.3.2

Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $= n$ *et* u *un endomorphisme de* E *nilpotent et non nul, d'ndice* q

1. *on a toujours* $2 \leq q \leq n$
2. *Soient* $F_1, F_2, \dots, F_q$ *les sous-espaces associés à* u *alors on a toujours :*
   i) $F_1 = \ker(u)$
   ii) $dim_K(F_1) \geq dim_K(F_2) \geq \dots \geq dim_K(F_q)$
3. *Si* $q = n = dim_K(E)$, *alors* $u^n = 0$ *et* $u^{n-1} \neq 0$. *Soit* $x \in E$ *tel que* $u^{n-1}(x) \neq 0$, *alors* $(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \dots, u(x), x)$ *est une base de Jordan de* u, *dans laquelle la matrice* A *de* u *s'écrit :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Si* $q = n-1$ *où* $n = dim_K(E)$, *alors d'après ce qui précède on aura :*

$$\begin{cases} dim_K(F_1) = 2 \\ dim_K(F_2) = \dots = dim_K(F_q) = 1 \end{cases}$$

   Soit $x \in E$ *tel que* $u^{n-2}(x) \neq 0$ *et soit* $y \in \ker(u)$ *tel que* $(u^{n-2}(x), y)$ *forme une base de* $\ker(u)$, *(*$\ker(u) = F_1$*), alors* $(u^{n-2}(x), \dots, u(x), x, y)$ *est une base de Jordan de* u *dans laquelle la matrice de* A *de* u *s'écrit :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. *Si* $q = n-2$ *où* $n = dim_K(E)$, *alors d'après ce qui précède, deux cas sont possibles :*

– 1^{er} **Cas** $dim_K(\ker(u)) = 2$, *où* $\ker(u) = F_1$. *Alors on aura :*

$$\begin{cases} dim_K(F_2) = 2 \\ dim_K(F_3) = \cdots = dim_K(F_q) = 1 \end{cases}$$

Soit $x \in E$ *tel que* $u^{n-3}(x) \neq 0$ *et soit* $y \in E$ *tel que :*

$$\begin{cases} u^2(y) = 0 \text{ et } u(y) \neq 0 \\ (u^{n-4}(x), y) \text{ forme un système libre} \end{cases}$$

Alors $(u^{n-3}(x), \ldots, u(x), x, y, u(y))$ *est une base de Jordan de* u *dans laquelle la matrice* A *de* u *s'ècrit :*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

– $dim_K(\ker(u)) = 3$, *alors necessairement, on a :*

$$dim_K(F_2) = \ldots = dim_K(F_{n-2}) = 1$$

Soit $x \in E$ *tel que* $u^{n-3}(x) \neq 0$ *et soient* y *et* z *deux éléments de* $\ker(u)$ *tels que* $(u^{n-3}(x), y, z)$ *forme une base de* $\ker(u)$.
Alors $(u^{n-3}(x), \cdots, u(x), x, y, z)$ *est une base de Jordan de* u *dans laquelle la matrice* A *de* u *s'écrit :*

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Exemple 5.3.1
Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie et* u *un endomorphisme nilpotent non nul d'indice* q

1. $dim_K(E) = 2$ *alors on a* $q = 2 = dim_K(E)$. *Soit* $x \in E$ *tel que* $u(x) \neq 0$, *alors* $(u(x), x)$ *est une base de Jordan de* u *et on a :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *$dim_K(E)=3$, alors on a $q=2$ ou $q=3$*
   Si $q=3=dim_K(E)$, soit $x\in E$ tel que $u^2(x)\neq 0$, donc d'après ce qui précède $(u^2(x),u(x),x)$ est une base de Jordan de u et on a :
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
   Si $q=2=dim_K(E)-1$, soit $x\in E$ tel que $u(x)\neq 0$ et soit $y\in\ker(u)$ tel que $(u(x),y)$ forme une base de $\ker(u)$. Alors $(u(x),x,y)$ est une base de Jordan de u et on a :
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
3. *$dim_K(E)=4$, alors on a $q\in\{2,3,4\}$*
   Si $q=4=dim_K(E)$, on choisit $x\in E$ tel que $u^3(x)\neq 0$, alors d'après ce qui précède, $(u^3(x),u^2(x),u(x),x)$ est une base de Jordan de u et on a :
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
   Si $q=3=dim_K(E)-1$, on choisit $x\in E$ tel que $u^2(x)\neq 0$ et on choisit $y\in\ker(u)$ tel que $(u^2(x),y)$ forme une base de $\ker(u)$. Alors d'après ce qui précède, $(u^2(x),u(x),x,y)$ est une base de Jordan de u et on a :
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
   Si $q=2=dim_K(E)-2$, alors d'après la remarque précèdente, deux cas sont possibles :
   – *$dim_K(\ker(u))=2$, dans ce cas on choisit $x\in E$ et $y\in E$ tels que $u(x)\neq 0$, $u(y)\neq 0$ et (x,y) libre. Alors $(u(x),x,u(y),y)$ est une base de Jordan de u et on a :*
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
   – *$dim_K(\ker(u))=3$, dans ce cas on choisit $x\in E$ tel que $u(x)\neq 0$ et on choisit y , $z\in\ker(u)$ tels que $(u(x),y,z)$ forme une base de $\ker(u)$. Alors $(u(x),x,y,z)$ est une base de Jordan de u et on a :*
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

5.3.3 Réduite de Jordan

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme quelconque de E. On suppose que χ_u, le polynôme caractéristique de u, a toutes ses racines dans K et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les racines deux à deux distincts de χ_u, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_r$ alors on a :

$$\chi_u = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$$

Pour chaque j , $j = 1,2,\ldots,r$, posons $N_j = \ker[(u-\lambda_j)^{m_j}]$

Définition 5.3.4
$\forall j$, $j = 1,2,\ldots,r$, N_j s'appelle le sous-espace **caractéristique** *associé à la valeur propre λ_j.*

Lemme 5.3.4

i) $\forall j$, $j = 1,2,\ldots,r$, N_j *est stable par* u

ii) $E = \bigoplus_{j=1}^{r} N_j$

iii) $\forall j$, $j = 1,2,\ldots,r$, $dim_K(N_j) = m_j$

Preuve 5.3.9

i) Trivial

ii) D'après le théorème de Cayley-Hammilton, $\chi_u(u) = 0$, donc d'après le théorème de décomposition on a le résultat.

iii) Soit v_j la restriction de u à N_j, alors v_j est un endomorphisme de N_j , car N_j est stable par u, et on a $(v_j - \lambda_j)^{m_j} = 0$.
Posons $n_j = dim_K(N_j)$, alors $\chi_{v_j} = (X-\lambda_j)^{m_j}$ Or on sait que χ_{v_j} divise χ_u et par suite on aura $n_j \leq m_j$. D'autre part , on a :

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

D'où $\forall j$, $n_j = m_j$

Remarque 5.3.2

1. *$\forall j$, $j = 1,2,\ldots,r$, $E_{\lambda_j} \subseteq N_{\lambda_j}$*
2. *$\forall j$, $j = 1,2,\ldots,r$, $(v_j - \lambda_j)^{m_j} = 0$, donc $v_j - \lambda_j$ est un endomorphisme nilpotent de N_j*
3. *$\forall j$, $j = 1,2,\ldots,r$, soit q_j l'indice de nilpotence de $v_j - \lambda_j$, alors on a :*

$$M_u = (X-\lambda_1)^{q_1}(X-\lambda_2)^{q_2}\cdots(X-\lambda_r)^{q_r} \quad \text{(Exercice)}$$

4. *u est diagonalisable, si et seulement si, $\forall j$, $j = 1,2,\ldots,r$, $E_{\lambda_j} = N_{\lambda_j}$*

Théorème 5.3.4
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, où K est un corps algèbriquement clos. Alors pour tout endomorphisme u de E, il existe deux endomorphismes de E, v et w, tels que :

i) v *est diagonalisable*

ii) w *est nilpotent*

iii) $vow = wov$

iv) $u = v + w$

Preuve 5.3.10

K est algèbriquement clos, donc χ_u a toutes ses racines dans K. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les racines deux à deux distinctes de χ_u et soitent $N_1, N_2, \dots, N_r$ les sous-espaces caractéristiques associés

On sait que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$, donc pour $x \in E$, $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$ on pose :

$$\begin{cases} v(x) = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + \cdots + \lambda_r.x_r \\ w(x) = u_1(x_1) - x_1 + u_2(x_2) - x_2 + \cdots + u_r(x_r) - x_r \end{cases}$$

Où pour tout i , $i = 1, 2, \dots, r$, u_i est la restriction de u à N_i

i) Par contruction, v est diagonalisable

ii) D'après la remarque précédente, pour tout i , $i = 1, 2, \dots, r$, $u_i - \lambda_i$ est un endomorphisme nilpotent de N_i. Soit q_i l'indice de nilpotence de $u_i - \lambda_i$ et soit $q = \sup_{1 \leq i \leq r} q_i$, alors $w^q = 0$ donc w est nilpotent

iii) et iv) facile à vérifier

Corollaire 5.3.1

Soit K un corps algèbriquement clos. alors pour toute matrice carrée A d'ordre n à coëfficients dans K, il existe deux matrices carrées D et N d'ordre n à coëfficients dans K tels que :

- *i) D est diagonalisable*
- *ii) N est nilpotente*
- *iii) $D.N = N.D$*
- *iv) $A = D + N$*

Preuve 5.3.11

Exercice

Théorème 5.3.5
Soient E un K-espace vectoriel de **dimension finie** $= n$ *et u un endomorphisme de E. On suppose que χ_u a toutes ses racines dans K et que*
$\chi_u = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\cdots(X-\lambda_r)^{m_r}$, *où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de χ_u. Alors il existe une base de E, appelée base de Jordan de u, dans laquelle la matrice J de u s'écrit :*

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

Où $\forall i$, $i = 1, 2, \ldots r$, on a :

$$J_i = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i,1}} & & & \\ & \boxed{J_{i,2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{i,r_i}} \end{pmatrix}$$

Et où $\forall j$, $j = 1, 2, \ldots, r_i$, on a :

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

C'est à dire, la matrice J est de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Où $\forall i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$
Et où $\forall j$, $1 \leq j \leq r$, λ_j apparait m_j fois sur la diagonale de la matrice J.

Preuve 5.3.12
Pour chaque i , $i = 1, 2, \ldots, r$, soit v_i la restriction de u au sous-espace caractéristique N_i associé à la valeur propre λ_i, alors $v_i - \lambda_i$ est un endomorphisme nilpotent de N_i, donc il existe une base

$(e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,n_i})$ *de* N_i *dans laquelle la matrice de* $v_i - \lambda_i$ *s'écrit :*

$$A_i = \begin{pmatrix} \boxed{A_{i,1}} & & & \\ & \boxed{A_{i,2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_{i,r_i}} \end{pmatrix}$$

Où pour tout j , $j = 1, 2, \ldots, r_i$, $A_{i,j}$ *est de la forme :*

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or $v_i = (v_i - \lambda_i) + \lambda_i.Id_E$, *donc la matrice de* v_i *dans cette même base s'écrit :*

$$J_i = A_i + \lambda_i.I = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i,1}} & & & \\ & \boxed{J_{i,2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{i,r_i}} \end{pmatrix}$$

Où pour tout j , $j = 1, 2, \ldots, r_i$, $J_{i,j}$ *s'écrit sous la forme :*

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Puisque $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$, *donc la matrice de* u *dans la base* $(e_{1,1}, e_{1,2}, \ldots, e_{1,n_1}, \ldots, e_{r,1}, e_{r,2}, \ldots, e_{r,n_r})$ *s'écrit sous la forme :*

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

D'où le résultat.

Corollaire 5.3.2

Pour toute matrice carrée A *à coëfficients dans* $\mathbb{C}$, *il existe une matrice de Jordan* J *et il existe une matrice inversible* P *tels que :*

$$A = P^{-1}JP$$

Preuve 5.3.13

Il suffit d'appliquer le théorème précèdent à l'endomorphise u *de* $\mathbb{C}^n$ *de matrice* A *dans la base canonique de* $\mathbb{C}^n$

5.3.4 Méthode pratique de jordanisation d'une matrice d'ordre 3

Soit A une matrice quelconque de $M_3(\mathbb{K})$. On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on suppose que le polynôme caractéristique de A, χ_A a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ qui sont tous de dimension 1.

1^{er} **Cas** $\chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$.

Dans ce cas, les trois valeurs propres de A sont deux à deux distinctes, donc A est diagonalisable. Pour diagonaliser A on doit chercher les sous-espaces propres E_{λ_1}, E_{λ_2} et E_{λ_3}.

2^{ieme} **Cas** $\chi_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Dans ce cas, on commence par chercher E_{λ_1} et E_{λ_2}.

- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$ alors est A diagonalisable.
  Donc si (v_1, v_2) est une base de E_{λ_1} et v_3 est un vecteur non nul de E_{λ_2}, alors (v_1, v_2, v_3) est une base formée de vecteurs propres de A.
- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, alors A n'est pas diagonalisable. Pour jordaniser A, on cheche un vecteur v tel que $(A-\lambda_1)^2(v) = 0$ et $(A-\lambda_1)(v) \neq 0$, puis on prend $v_1 = (A-\lambda_1)(v)$, $v_2 = v$ et v_3 un vecteur non nul de E_{λ_2}. Alors (v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan de A et on a $A(v_1) = \lambda_1 v_1$, $A(v_2) = v_1 + \lambda_1 v_2$ et $A(v_3) = \lambda_2 v_3$.

3^{ieme} **Cas** $\chi_A = (X-\lambda)^3$.

Dans ce cas A est diagonalisable, si et seulement si, $A = \lambda I$. Donc on suppose que $A \neq \lambda I$.

- Si $(A-\lambda I)^2 \neq 0$, alors on peut choisir $v \in \{e_1, e_2, e_3\}$ tel que $(A-\lambda I)^2(v) \neq 0$, puis on pose
  $$v_1 = (A-\lambda I)^2(v),\ v_2 = (A-\lambda I)(v) \text{ et } v_3 = v$$
  Donc (v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan pour A et on a
  $$A(v_1) = \lambda v_1,\ A(v_2) = v_1 + \lambda v_2 \text{ et } A(v_3) = v_2 + \lambda v_3$$
- Si $(A-\lambda I)^2 = 0$, alors dans ce cas $\dim(E_\lambda) = 2$, (Pourquoi ?).
  Pour jordaniser, on prend $v \in \{e_1, e_2, e_3\}$ tel que $(A-\lambda I)(v) \neq 0$ et on cherche $y \in E_\lambda$ tel que $(y, (A-\lambda I)(v))$ soit une base de E_λ, puis on pose
  $$v_1 = (A-\lambda I)(v),\ v_2 = v \text{ et } v_3 = y$$
  Alors (v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan et on a
  $$A(v_1) = \lambda v_1,\ A(v_2) = v_1 + \lambda v_2 \text{ et } A(v_3) = \lambda v_3$$

5.3.5 Méthode pratique de jordanisation d'une matrice d'ordre 4

Soit A une matrice quelconque de $M_4(\mathbb{K})$. On désigne par (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{K}^4$ et on suppose que le polynôme caractéristique de A, χ_A a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$.

1^{er} **Cas** $\chi_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)(X-\lambda_4)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$.

Dans ce cas, les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes, donc A est diagonalisable. Pour diagonaliser A on doit chercher les sous-espaces propres E_{λ_1}, E_{λ_2}, E_{λ_3} et E_{λ_4} qui sont tous de dimension 1.

2^{er} **Cas** $\chi_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$.

- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$ alors A est diagonalisable.
  Donc si (v_1, v_2) est une base de E_{λ_1}, v_3 est un vecteur non nul de E_{λ_2} et v_4 est un vecteur non nul de E_{λ_3} alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base formée de vecteurs propres de A.
- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, alors A n'est pas diagonalisable. Pour jordaniser A, on cheche un vecteur v tel que
  $$(A-\lambda_1)^2(v) = 0 \text{ et } (A-\lambda_1)(v) \neq 0$$
  puis on prend $v_1 = (A-\lambda_1)(v)$, $v_2 = v$, v_3 un vecteur non nul de E_{λ_2} et v_4 un vecteur non nul de E_{λ_3}. Alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de A et on a
  $A(v_1) = \lambda_1 v_1, A(v_2) = v_1 + \lambda_1 v_2, A(v_3) = \lambda_2 v_3$ et $A(v_4) = \lambda_3 v_4$.

3^{er} **Cas** $\chi_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)^2$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$ et $\dim(E_{\lambda_2}) = 2$ alors A est diagonalisable.
  Donc si (v_1, v_2) est une base de E_{λ_1} et (v_3, v_4) une base de E_{λ_2}, alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base formée de vecteurs propres de A.
- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$ et $\dim(E_{\lambda_2}) = 2$ alors A n'est pas diagonalisable. Pour jordaniser A, on cheche un vecteur v tel que $(A-\lambda_1)^2(v) = 0$ et $(A-\lambda_1)(v) \neq 0$ et on pose $v_1 = (A-\lambda_1)(v)$ et $v_2 = v$. Puis on cherche une base (v_3, v_4) de E_{λ_2}, ainsi (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de A et on a
  $A(v_1) = \lambda_1 v_1, A(v_2) = v_1 + \lambda_1 v_2, A(v_3) = \lambda_2 v_3$ et $A(v_4) = \lambda_2 v_4$.

4^{er} **Cas** $\chi_A = (X-\lambda_1)^3(X-\lambda_2)$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 3$, alors A est diagonalisable.
  Donc si (v_1, v_2, v_3) est une base de E_{λ_1} et v_4 est un vecteur non nul de E_{λ_2} alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base formée de vecteurs propres de A.
- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 2$, alors A n'est pas diagonalisable. Pour jordaniser A, on cherche un vecteur v tel que
  $$(A-\lambda_1)^3(v) = 0 \text{ et } (A-\lambda_1)(v) \neq 0$$
  On pose $v_1 = (A-\lambda_1)(v)$ et $v_2 = v$, alors $v_1 \in E_{\lambda_1}$ (Pourquoi ?). Puis on choisit $v_3 \in E_{\lambda_1}$ tel que (v_1, v_3) soit une base de E_{λ_1} et v_4 un vecteur non nul de E_{λ_2}. Alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de A et on a
  $$A(v_1) = \lambda_1 v_1,\ A(v_2) = v_1 + \lambda_1 v_2,\ A(v_3) = \lambda_1 v_3, \text{ et } A(v_4) = \lambda_2 v_4$$
- Si $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, alors A n'est pas diagonalisable. Pour jordaniser A, on cherche un vecteur v tel que
  $$(A-\lambda_1)^3(v) = 0 \text{ et } (A-\lambda_1)^2(v) \neq 0$$
  Puis on pose $v_1 = (A-\lambda_1)^2(v)$, $v_2 = (A-\lambda_1)(v)$, $v_3 = v$ et v_4 un vecteur non nul de E_{λ_2}. Alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de A et on a
  $$A(v_1) = \lambda_1 v_1,\ A(v_2) = v_1 + \lambda_1 v_2,\ A(v_3) = v_2 + \lambda_1 v_3, \text{ et } A(v_4) = \lambda_2 v_4$$

5^{er} **Cas** $\chi_A = (X-\lambda)^4$.
Dans ce cas A est diagonalisable, si et seulement si, $A = \lambda I$. Donc on suppose que $A \neq \lambda I$.

– Si $(A-\lambda)^3 \neq 0$, alors on peut choisir $v \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tel que $(A-\lambda I)^3(v) \neq 0$, puis on pose

$$v_1 = (A-\lambda I)^3(v),\ v_2 = (A-\lambda I)^2(v),\ v_3 = (A-\lambda I)(v) \text{ et } v_4 = v$$

Donc (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan et on a

$$A(v_1) = \lambda v_1,\ A(v_2) = v_1 + \lambda v_2,\ A(v_3) = v_2 + \lambda v_3 \text{ et } A(v_4) = v_3 + \lambda v_4$$

– Si $(A-\lambda)^3 = 0$ et $(A-\lambda)^2 \neq 0$, alors $\dim(E_\lambda) = 2$ (Pourquoi ?).
Pour jordaniser A, on choisit $v \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tel que $(A-\lambda)^2(v) \neq 0$ et on choisit $y \in E_\lambda$ tel que $((A-\lambda)^2(v), y)$ soit une base de E_λ. Puis on pose

$$v_1 = (A-\lambda)^2(v),\ v_2 = (A-\lambda)(v),\ v_3 = v \text{ et } v_4 = y$$

Alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de A et on a

$$A(v_1) = \lambda v_1,\ A(v_2) = v_1 + \lambda v_2,\ A(v_3) = v_2 + \lambda v_3, \text{ et } A(v_4) = \lambda v_4$$

– Si $(A-\lambda)^2 = 0$, alors on aura $\dim(E_\lambda) = 2$ ou $\dim(E_\lambda) = 3$ (Pourquoi ?)
Si $\dim(E_\lambda) = 2$, on choisit $x \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $y \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tels $(A-\lambda)(x) \neq 0$ et $(A-\lambda)(y) \neq 0$, puis on pose

$$v_1 = (A-\lambda)(x),\ v_2 = x,\ v_3 = (A-\lambda)(y) \text{ et } v_4 = y$$

Alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan et on a

$$A(v_1) = \lambda v_1,\ A(v_2) = v_1 + \lambda v_2,\ A(v_3) = \lambda v_3 \text{ et } A(v_4) = v_3 + \lambda v_4$$

Si $\dim(E_\lambda) = 3$, on choisit $x \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tel que $(A-\lambda)(x) \neq 0$ et on choisit $y, z \in E_\lambda$ tels que $((A-\lambda)(x), y, z)$ soit une base de E_λ. Puis on pose

$$v_1 = (A-\lambda)(x),\ v_2 = x,\ v_3 = y, \text{ et } v_4 = z$$

Alors (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de Jordan de A et on a

$$A(v_1) = \lambda v_1,\ A(v_2) = v_1 + \lambda v_2,\ A(v_3) = \lambda v_3 \text{ et } A(v_4) = \lambda v_4$$

5.4 Application aux systèmes différenciels

5.4.1 Notations

i) $M_n(\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coëfficients dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$
ii) Rappelons que si A est un élément de $M_n(\mathbb{C})$, alors A définit un unique endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, qu'on note encore A

iii) Pour $X \in \mathbb{C}^n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = A.X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ désigne l'image de X par A. Et on sait que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors :

$$\forall i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n \ , \ y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

iv) Pour $X \in \mathbb{C}^n$, $\|X\|$ dśigne l'une des normes usuelles de $\mathbb{C}^n$:

$$\|X\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$\|X\| = (\sum_{i=1}^{n} (|x_i|)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\|X\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

5.4.2 Norme d'une matrice

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ on pose :

$$N(A) = \sup(\{\frac{\|A.X\|}{\|X\|} \ , \ \|X\| = 1\})$$

Proposition 5.4.1

i) L'application $N : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$ *définit une norme sur* $\mathbb{C}$

ii) $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$, $N(A.B) = N(A)N(B)$

iii) $N(I) = 1$, *(où I est la matrice identité)*

Preuve 5.4.1

Exercice

Remarque 5.4.1

1. $(M_n(\mathbb{C}), N)$ *est un espace normé*
2. *Rappelons qu'une suite* $(A_n)_{n \geq 0}$ *d'éléments de* $(M_n(\mathbb{C}), N)$ *est dite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists p \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \ , \ \forall m \ , \ n, m \geq p \Longrightarrow N(A_n - A_m) < \varepsilon$$

   Et qu'un espace normé E est dit complet, si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge vers un élément de E
3. *Rappelons aussi que tout espace normé de dimension finie est complet et que toutes les normes sur un tel espace sont equivalente (Voir Cours d'Analyse de MPII)*
4. $M_n(\mathbb{C})$ *est de dimension finie* $= n^2$, *donc* $(M_n(\mathbb{C}), N)$ *est un espace normé complet*

5.4.3 Exponentiel d'une matrice

Rappelons que si $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ est défini comme étant la fonction inverse de $\log(x)$, puis grâce à la formule de Taylor on montre que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \, , \, \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Si maintenant $z \in \mathbb{C}$, par analogie et en utilisant les séries entières , on définit l'exponentiel de z par :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Dans la suite nous allons utiliser la même analogie pour définir l'exponentiel d'une matrice A

Lemme 5.4.1
Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, la suite $(u_p)_{p\geq 0}$ définie par :

$$\forall p \, , \, u_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{A^n}{n!}$$

possède une limite dans $M_n(\mathbb{C})$, qu'on note :

$$\lim_{p\to\infty} u_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Preuve 5.4.2
Il suffit de vérifier que $(u_p)_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy

Définition 5.4.1
Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentiel de A par la formule :

$$\exp(A) = \lim_{p\to\infty} u_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Lemme 5.4.2
Si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui **commutent**, *alors :*

$$\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$$

Preuve 5.4.3

$$\exp(A).\exp(B) = (\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}).(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!})$$

C'est le produit de Cauchy de deux séries :

$$(\sum_{p=0}^{\infty} u_p).(\sum_{q=0}^{\infty} v_q) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{p+q=n} u_p v_q) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p})$$

Puisque $A.B = B.A$ alors on aura :

$$\exp(A).\exp(B) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{p=0}^{n}\frac{A^p}{p!}\frac{B^{(n-p)}}{(n-p)!}$$

Or on sait que :

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{A^p}{p!}\frac{B^{(n-p)}}{(n-p)!}$$

$$= \frac{1}{n!}(\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{(n-p)!p!}A^pB^{(n-p)})$$

$$= \frac{1}{n!}(A+B)^n \quad \textit{car A et B commutent}$$

$$\Longrightarrow \exp(A).\exp(B) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A+B)^n}{n!} = \exp(A+B)$$

D'où le résultat.

5.4.4 Calcul pratique de l'exponentiel d'une matrice

1. Si D est une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   Alors , en appliquant la définition, on voit facilement que :

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

2. Si N est une matrice nilpotente d'indice q, alors en appliquant la définition on aura :

$$\exp(N) = \sum_{j=0}^{q-1}\frac{N^j}{j!}$$

3. Si J est une matrice de Jordan, alors $J = D+N$, où D est une martice diagonale et N une matrice nilpotente qui commute avec D, donc on aura

$$\exp(J) = \exp(D+N) = \exp(D).\exp(N)$$

4. Si maintenant A est une matrice quelconque à coëfficients dans $\mathbb{C}$, alors on sait qu'il existe une matrice de Jordan J et il existe une matrice inversible P tels que $A = P^{-1}JP$, donc il est facile de vérifier que :
$$\exp(A) = P^{-1}\exp(J)P$$

Remarque 5.4.2
Soit A une matrice complexe. Supposons que $\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_r$, où pour chaque i , $i = 1,2,\ldots,r$, E_i est stable par A. Alors

$$\forall X \in \mathbb{C}^n \ , \ \exp(A).X = \sum_{i=1}^{r} \exp(A_i).X_i$$

Avec $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$, $\forall i$, $X_i \in E_i$ et A_i est la restriction de A à E_i.

5.4.5 Systèmes différentiels

Définition 5.4.2
Un système différentiel est un système d'equations différenteilles qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{1,1}.\frac{dx_1}{dt} + a_{1,2}.\frac{dx_2}{dt} + \cdots + a_{1,n}.\frac{dx_n}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{2,1}.\frac{dx_1}{dt} + a_{2,2}.\frac{dx_2}{dt} + \cdots + a_{2,n}.\frac{dx_n}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n,1}.\frac{dx_1}{dt} + a_{n,2}.\frac{dx_2}{dt} + \cdots + a_{n,n}.\frac{dx_n}{dt} \end{cases}$$

Où pour chaque i , $i = 1,2,\ldots,n$, $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction inconnue de classe C^1
Et où $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice à coëfficients constants dans $\mathbb{C}$

Remarque 5.4.3
Posons $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, alors $X(t)$ est une fonction inconnue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}^n$ et le système précédent est equivalent à l'equation différentielle suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

Par analogie au cas de dimension 1, ce système admet pour solution :

$$X(t) = \exp(tA).X_0 \quad avec \ \ X_0 \in \mathbb{C}^n$$

5.4.6 Résolution pratique d'un système différentiel

Méthode utilisant les sous-espaces caractéristiques

Soient A une matrice complexe, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A , $N_1, N_2, \ldots, N_r$ les sous-espaces caractéristiques associés , $M_A = (X-\lambda_1)^{q_1}(X-\lambda_2)^{q_2}\cdots(X-\lambda_r)^{q_r}$ le polynôme minimal de A et pour chaque i , $i = 1,2,\ldots,r$, A_i la restriction de A à N_i

Considèrons le système $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$ et posons
$X(t) = X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_r(t)$ alors on aura :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = \frac{dX_1(t)}{dt} + \frac{dX_2(t)}{dt} + \cdots + \frac{X_r(t)}{dt} \\ \\ AX(t) = A_1X_1(t) + A_2.X_2(t) + \cdots + A_rX_r(t) \end{cases}$$

Donc d'après l'unicité de la décomposition on aura :

$$\forall i \ , \ i = 1, 2, \ldots, r \ , \ \frac{dX_i(t)}{dt} = A_i.X_i(t)$$

$$\Longrightarrow X_i(t) = \exp(tA_i).X_{i,0} \quad avec \ \ X_{i,0} \in N_i$$

On sait que $A_i - \lambda_i$ est nilpotent d'indice q_i, donc :

$$\exp(tA_i) = \exp(\lambda_i t).\exp(t(A_i - \lambda_i))$$

$$\Longrightarrow \exp(tA_i) = \exp(\lambda_i t) \sum_{k=1}^{q_i - 1} t^k \frac{(A_i - \lambda_i)^k}{k!}$$

Pour chaque k , $i = 1, 2, \ldots, q_i - 1$, posons $Y_k = \frac{1}{k!}(A_i - \lambda_i)^k$ alors $\forall k$, $Y_k \in N_i$ donc $P_i(t) = \sum_{k=1}^{q_i-1} t^k Y_k$ est un polynôme en t à coëfficients dans N_i

Conclusion

Les solutions du système différentiel :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

s'écrivent sous la forme :

$$\boxed{X(t) = \sum_{i=1}^{r} \exp(\lambda_i t) P_i(t)}$$

Où pour tout i , $i = 1, 2, \ldots, r$, $P_i(t)$ est un polynôme en t de degré $\leq q_i - 1$ et à coëfficients dans N_i

Les coëfficients de chaque polynôme $P_i(t)$ sont déterminés par la relation :

$$\frac{d(\exp(\lambda_i t) P_i(t))}{dt} = A.(\exp(\lambda_i t) P_i(t))$$

Méthode utilisant une base de Jordan

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, on considère le système différentiel

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \quad (S)$$

Pour résoudre (S), on commence par la recherche d'une base de Jordan de A. Soit J la réduite de Jordan de A par rapport à cette base, on considère le nouveau système

$$\frac{dY(t)}{dt} = JY(t) \quad (S')$$

qui s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1(t)}{dt} = \lambda_1 y_1(t) + \varepsilon_1 y_2(t) \\ \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt} = \lambda_2 y_2(t) + \varepsilon_2 y_3(t) \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}(t)}{dt} = \lambda_{n-1} y_{n-1}(t) + \varepsilon_{n-1} y_n(t) \\ \\ \dfrac{dy_n}{dt} = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

où pour tout i, $1 \leq i \leq n-1$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, non necessairement deux à deux distinctes.
Ce système est facile à résoudre, en commençant par la dernière équation. Soit $Y(t)$ la solution générale de ce système, alors la solution du système (S) est donnée par

$$\boxed{X(t) = PY(t)}$$

5.5 Exercices

Exercice 5.5.1
Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -12 & 6 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.5.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} A & A & A & A \\ A & 0 & 0 & A \\ A & 0 & 0 & A \\ A & A & A & A \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B

Exercice 5.5.3
Soient u, v, w les suites définies par

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2},\ \ v_{n+1} = 3v_n + 2w_n \ \ et \ \ w_{n+1} = v_n + 2w_n$$

On suppose que $u_0 \geq 0$, $v_0 = u_0$ et $w_0 = 1$.

1. *Montrer que* $\forall n \geq 0,\ u_n = \frac{v_n}{w_n}$.
2. a) *Trouver une matrice* A*, tel que*

$$\forall n \geq 0,\ \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

   b) *Trouver une matrice inversible* P *et une matrice diagonale* D*, telle que* $A = PDP^{-1}$.
   c) *Calculer* A^n *et en déduire* v_n*,* w_n *et* $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 5.5.4
Soit u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *défini par sa matrice* A *dans la base canonique* (e_1, e_2, e_3, e_4) *:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Trouver le polynôme caractéristique et les valeurs propres de* u.
b) *Montrer que* u *est diagonalisable.*
c) *Trouver une base de* E*,* (v_1, v_2, v_3, v_4)*, formée de vecteurs propres de* u*. Trouver la matrice de passage de* (e_1, e_2, e_3, e_4) *à la base* (v_1, v_2, v_3, v_4).
d) *Soit* D *la matrice de* u *dans la base* (v_1, v_2, v_3, v_4)*. Quelle est la relation entre* A *et* D *?*

Exercice 5.5.5
Soit u *un endomorphisme d'un* K*-espace vectoriel* E *de dimension finie, tel que :*

$$u^4 = u^2 + u$$

a) *Montrer que*
$$E = Ker(u) \oplus Ker(u^3 - u - Id_E)$$
b) *Montrer que* $Im(u) \subseteq Ker(u^3 - u - Id_E)$
c) *En déduire que* $Im(u) = Ker(u^3 - u - Id_E)$

Exercice 5.5.6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3a \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ une matrice de } M_4(\mathbb{R})$$

1. *Montrer que* 1 *est valeur propre de* A*. Quelle est la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre* 1 *?*
2. *Pour quelles valeurs de* a*,* A *est diagonalisable ?*
3. *Soit* H *le sous-espace de* $\mathbb{R}^4$ *d'équation* $2x - y - 3z - t = 0$
   – *Montrer que* $A(H) = H$.
   – *Soit* B *la restriction de la matrice* A *à* H*.* B *est-elle diagonalisable ?*

Exercice 5.5.7
Soient A et B deux matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que $rg_{\mathbb{R}}(A) = rg_{\mathbb{C}}(A)$.*
2. *Montrer que A et B sont $\mathbb{R}$-semblables, si et seulement si, A et B sont $\mathbb{C}$-semblables. (On pourra étudier $\det(P_1 + xP_2)$ avec $P_1 + iP_2$ matrice inversible).*
3. *Dans la suite, on suppose que $A^3 + 2A^2 + 2A = 0$. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?*
4. *Montrer que A est de rang pair.*

Exercice 5.5.8
Soient $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coifficients dans $\mathbb{R}$ et (J_1, J_2, J_3, J_4) la base canonique de E.

$$\text{Rappelons que}\quad J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ \text{et}\ J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'endomorphisme u de E défini par :

$$\begin{aligned} u : E &\longrightarrow E \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto u(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) *Calculer u^2.*
b) *Montrer que u est diagonalisable.*
c) *Ecrire la matrice A de u dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).*
d) *Déterminer le polynôme caractéristique de u.*
e) *Trouver une base formée de vecteurs propres de u.*

Exercice 5.5.9
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E dont la matrice dans une base de E s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a) *Vérifier que $u^2 = Id_E$ et en déduire que u est diagonalisable*
b) *Déterminer la dimension de $\ker(u - Id_E)$ (Discuter suivant les cas où n est pair et n impair)*
c) *Quel est le polynôme caractéristique de u ?*
d) *Trouver une base de E formée de vecteurs propres de u*

Exercice 5.5.10
Soit B la matrice de $M_{2n}(\mathbb{C})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$$

Où A est une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{C})$
Exprimer χ_B en fonction de χ_A

Exercice 5.5.11
Soient u et v deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension finie $= n$. On suppose que u et v admettent chacun n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que les P.S.S.E :

i) $u \circ v = v \circ u$
ii) u et v ont mêmes vecteurs propres

Exercice 5.5.12
Soient G un groupe fini, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : G \longrightarrow GL_{\mathbb{K}}(E)$ un homomorphisme de groupes
Pour tout $a \in G$, on pose $\Phi(a) = trace(f(a))$

i) $f(a)$ est-il diagonalisable ?
ii) Montrer que $\forall a \in G$, $\Phi(a^{-1}) = \overline{\Phi(a)}$

Exercice 5.5.13
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes permutables de E

a) Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v
b) Démontrer, par récurrence sur $n = dim_K(E)$, que u et v possède un vecteur propre commun

Exercice 5.5.14
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E. Montrer que :

a) $u \circ v$ et $v \circ u$ ont mêmes valeurs propres
b) Si $Id_E - u \circ v$ est inversible, alors $Id_E - v \circ u$ est aussi inversible
c) Si u est inversible, alors $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même polynôme caractéristique
d) Montrer qu'en général $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même polynôme caractéristique
e) $u \circ v$ et $v \circ u$ ont-ils le même polynôme minimal ?

Exercice 5.5.15
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de M, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = Tr(M)$.
2. Si E est un sous-espace propre de M, déterminer la dimension de E.
3. Montrer que M est diagonalisable, si et seulement si, $Tr(M) \neq 0$
4. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ d'efini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ f(M) = Tr(AM)B$$

Montrer que f est de rang 1 et que f est diagonalisable, si et seulement si, $Tr(AB) \neq 0$.

Exercice 5.5.16
Soient A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$.

2. *Montrer que si A est diagonalisable, alors $P(A)$ est diagonalisable.*
3. *On considère les matrices de $M_{n+1}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

   a) *Motrer que A est diagonalisable.*
   b) *Montrer que $M = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$ et que M est diagonalisable.*
   c) *Quelles sont les valeurs propres de M ?*

Exercice 5.5.17
Soit V un vecteur non nul de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, de coposantes $v_1, v_2, \dots, v_n$. On pose $A = V^tV$.

1. *Pour tout couple $(i, j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, exprimer a_{ij} en fonction de $v_1, v_2, \dots, v_n$. Que vaut la trace de A ?*
2. *Exprimer les vecteurs colonnes de A en fonction de $v_1, v_2, \dots, v_n$ et V.*
3. *En déduire le rang de A.*
4. *Montrer que $\ker(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tVX = 0\}$. Quel est la dimension de $\ker(u)$?*
5. *Calculer le produit AV et en déduire que ${}^tVV$ est une valeur propre de A. Trouver le sous-espace propre associé et donner sa dimension.*
6. *En déduire que A est diagonalisable.*

Exercice 5.5.18
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie ≥ 2, H un hyperplan de E et u un endomorphisme de E qui laisse invariant tous les vecteurs de H.

a) *Montrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que :*

$$\forall x \in E \ , \ u(x) - \alpha.x \in H$$

b) *Caractériser u lorsque $\alpha = 0$*
c) *Discuter, suivant les valeurs de α, la possibilité de diagonaliser u*

Exercice 5.5.19
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, où K est un corps algèbriquement clos, et A un ensemble d'endomorphismes de E deux à deux commutants

a) *Soient $u \in A$ et $\lambda \in K$ une valeur propre de u. Montrer que E_λ, le sous-espace propre associé à λ, est stable par A, (c.à.d : $\forall u \in A$, E_λ est stable par u)*
b) *Montrer que les éléments de A ont un vecteur propre commun*
c) *Montrer que A est trigonalisable, c'est à dire, il existe une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de A est une matrice triangulaire*
d) *On suppose de plus que chaque $u \in A$ est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable*

Exercice 5.5.20

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, où K est un corps de caractéristique nulle, u et v deux endomorphismes de E tels que :

$$u \circ v - v \circ u = Id_E$$

a) *Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1}$*

b) *Montrer que pour tout $P \in K[X]$, $u \circ P(v) - P(v) \circ u = P^{'}(v)$*

c) *En déduire, par un choix convenable de $P \in K[X]$ qu'il n'existe pas de couple d'endomorphismes (u, v) tel que $u \circ v - v \circ u = Id_E$*

Exercice 5.5.21

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que u est diagonalisable, si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \ , \ \ker(u - \lambda) = \ker((u - \lambda)^2)$$

Exercice 5.5.22

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E.

a) *On suppose que u^2 est diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable, si et seulement si $\ker(u) = \ker(u^2)$*

b) *A quelle condition, la matrice A suivante est diagonalisable ?*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.5.23

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Dans chacun des cas suivants, etudier la diagonalisation de u

a) $u^2 - u - 2 = 0$

b) $(u^2 - u + 3)(u - 2)^2 = 0$ *avec* $u^2 - u + 3 \neq 0$ *et* $(u - 2)^2 \neq 0$

c) *Ici on suppose que le corps de base est $\mathbb{C}$ et que $u^m = 1$ où m est un entier ≥ 1*

Exercice 5.5.24

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. montrer que les P.S.S.E :

i) *u est diagonalisable*

ii) *Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par u*

Exercice 5.5.25

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}, \text{ où } m \text{ est un réel quelconque}$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de u.
b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles u est diagonalisable.
c) On suppose que $m = 2$. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D tel que :

$$A = PDP^{-1}$$

d) Pour tout entier $n \geq 0$, calculer A^n
e) On suppose $m = 1$. Trouver une base de Jordan de u.

Exercice 5.5.26
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$, u et v deux endomorphismes de E tels que $u = v^m$, où m est un entier ≥ 1. Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes :
i) u est diagonalisable
ii) v est diagonalisable

Exercice 5.5.27
Soient K un corps commutatif et G un sous-groupe fini de $GL_n(K)$ d'ordre p. Soit M la somme de tous les éléments de G.
a) Calculer M^2.
b) Montrer que n divise la trace de M.
c) Que dire de M si sa trace est nulle ?

Exercice 5.5.28
Soient A une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{C})$ et B la matrice de $M_{2n}(\mathbb{C})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Où pour tout entier $n \geq 1$, I_n est la matrice identité d'ordre n
Montrer que les P.S.S.E :
i) A est diagonalisable et inversible
ii) B est diagonalisable

Exercice 5.5.29
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E de polynôme minuimal :

$$M_u = a_0 + a_1X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + a_mX^m$$

On dit que u est irréductible, si les seuls sous-espaces vectoriels stables par u sont $\{0\}$ et E. On se propose de démontrer que u est irréductible, si et seulement si, le polynôme caractéristique de u, χ_u est irréductible sur K
a) On suppose que u est irréductible
i) Montrer que u est inversible
ii) Montrer que le polynôme minimal M_u est irréductible
iii) Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$. Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{m-1}(x))$ est un système générateur de E
iii) En déduire que $\chi_u = M_u$
b) On suppose que χ_u est irréductible

i) Montrer que $M_u = \chi_u$
ii) Montrer que u est irréductible

Exercice 5.5.30
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par sa matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Trouver le polynôme caractéristique de u.
b) Trouver les sous-espaces propres de u.
c) Calculer $(u - Id_E)^2(e_1)$ et $(u - 2Id_E)^2(e_1 - e_2)$
d) Trouver une base de Jordan (v_1, v_2, v_3, v_4) de u.
d) Ecrire la matrice de u dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4).

Problème 5.5.1
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n \geq 1$ et u un endomorphisme de E. Pour $x \in E$, on pose :

$$I_x = \{P \in K[X] \ : \ P(u)(x) = 0\}$$

1. *a) Montrer que I_x est un idéal de $K[X]$*
   b) En déduire qu'il existe un polynôme unitaire Q_x unique tel que $I_x = (Q_x)$, (où (Q_x) est l'idéal engendré par Q_x)
2. *Soit M_u le polynôme minimal de u. Montrer que :*
$$M_u = ppcm(Q_x \ : \ x \in E)$$
3. *Montrer que si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors on a :*
$$M_u = ppcm(Q_{e_1}, Q_{e_2}, \ldots, Q_{e_n})$$
4. *Montrer que si Q_x et Q_y sont premiers entre eux, alors $Q_{x+y} = Q_x.Q_y$*
5. *Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $M_u = Q_x$*
6. *On dit que E est u-monogène s'il existe $x \in E$ tel que :*
$$E = \{P(u)(x) \ : \ P \in K[X]\}$$
   Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes :
   i) E est u-monogène
   ii) $M_u = \chi_u$, (où χ_u est le polynôme caradtéristique de u)
7. *On suppose que E est u-monogène. soient F un sous-espace vectoriel de E, stable par u, et v la restriction de u à F. Montrer que F est v-monogène*

Problème 5.5.2
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $= n \geq 3$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et u l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} u(e_i) = ie_n \ , \ 1 \leq i \leq n-1 \\ u(e_n) = \sum_{i=1}^{n} ie_i \end{cases}$$

1. *Quelle est la matrice de u dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$?*
2. *Montrer que u est diagonalisable*
3. *Vérifier que $(e_n, u(e_n))$ est une base de $Im(u)$ et que $Im(u)$ est stable par u*
4. *Quelle est la dimension de $\ker(u)$?*
5. *Soit v la restriction de u à $Im(u)$*
   a) *Trouver la matrice de v dans la base $(e_n, u(e_n))$*
   b) *Trouver le polynôme caractéristique de v*
6. *Soit P le polynôme caractéristique de u. Montrer que :*

$$P = X^{n-2}(X^2 + aX + b)$$

   Où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$
7. a) *Déterminer a et b*
   b) *Quel est le polynôme minimal de u ?*

Problème 5.5.3
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E de polynôme minimal :

$$M_u = a_0 + a_1X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + a_mX^m$$

1. a) *Montrer que u est inversible, si et seulement si, $a_0 \neq 0$*
   b) *Dans le cas où u est inversible, montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $u^{-1} = P(u)$*
2. *On suppose que $n \geq 2$ et que la matrice A de u dans une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E s'écrit sous la forme*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Posons $x_0 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$
   a) *Exprimer $u(x_0)$ et $(u + Id_E)(e_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, en fonction de x_0, et en déduire que u est diagonalisable*
   b) *Trouver le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u*
   c) *Montrer que u est inversible et déterminer la matrice de u^{-1} dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$*
   d) *Trouver une base de E formée de vecteurs propres de u*

Problème 5.5.4
Soit B la matrice en blocs, à coëfficients dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, définie par :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline A & A \end{array}\right)$$

Où A est une matrice carrée d'ordre n à coëfficients dans $\mathbb{K}$.
On convient de noter I_{2n}, (resp. I_n) la matrice identité d'ordre $2n$, (resp. n). On a alors :

$$I_{2n} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$$

1. a) *Exprimer χ_B le polynôme caractéristique de B en fonction de χ_A, le polynôme caractéristique de A*
   b) *Déduire que les polynômes minimaux M_A et M_B de A et B respectivement, ont les mêmes racines*
2. a) *Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on a*

$$B^m = \left(\begin{array}{c|c} A^m & 0 \\ \hline mA^m & A^m \end{array}\right)$$

   b) *Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, on a :*

$$P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & 0 \\ \hline Q(A) & P(A) \end{array}\right)$$

   où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ à déterminer, (Exprimer les coëfficients de Q en fonction de ceux de P)
   c) *En déduire que M_A divise M_B et M_A divise Q*
3. *Déduire de ce qui précède que B est diagonalisable, si et seulement si, $A = 0$*

Problème 5.5.5
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme non nul de E. On dit que u est **semi-simple** *si tout Sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire dans E qui est aussi stable par u. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit* **simple** *s'il s'écrit sous la forme $P = Q_1.Q_2.\cdots.Q_m$, où les Q_i sont des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et deux à deux distinctes. Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est dite* **semi-diagonale** *s'il s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & A_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

Où D est une matrice diagonale et pour tout i , $i = 1,2,\dots,r$, A_i est une matrice carrée d'ordre 2 de la forme :

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$$

Où $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. *Soit u un endomorphisme quelconque de E*
   a) *Montrer l'existence d'un polynôme irréductible $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\ker(Q(u)) \neq \{0\}$*
   b) *En déduire qu'il existe un sous-espace de E de dimension 1 ou 2 stable par u*
2. *Dans cette partie on se propose de démontrer léquivalence des trois propriétés suivantes :*
   i) *u est semi-simple*
   ii) *Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est semi-diagonale*
   iii) *Il existe un polynôme simple P tel que $P(u) = 0$*
   A) *On suppose que la propriété $i)$ est vérifiée*
      a) *Montrer que la propriété $ii)$ est vérifiée dans le cas $n = 2$*
      b) *Dans le cas général, montrer que, pour tout sous-espace F de E stable par u, la restriction de u à F est un endomorphisme semi-simple de F*
      c) *Montrer, dans le cas général, la propriété $ii)$*
   B) *Montrer que $ii)$ implique $iii)$*
   C) *On suppose que la propriété $iii)$ est vérifiée*
      a) *Soit F un sous-espace de E stable par u, avec $F \neq E$, montrer qu'il existe $x \in E$ avec $x \notin F$ et il existe un polynôme irréductible $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(u)(x) = 0$*
      b) *Montrer que la propriété $i)$ est vérifiée*
3. *Soit A la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Trouver une matrice inversible T et une matrice semi-diagonale B telles que :

$$A = T^{-1}.B.T$$

Problème 5.5.6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E . ($\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1. *On suppose que $u^4 = 0$ et $u^3 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *On suppose que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$*
   a) *Montrer que $dim(Ker(u^2)) = 3$*
   b) *Montrer que $dim(Ker(u)) = 2$*

c) *Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *On suppose que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$*
   a) *Montrer que $Im(u) \subseteq Ker(u)$*
   b) *On suppose que $Im(u) = Ker(u)$*
      i) *Montrer que $dim(Ker(u)) = 2$*
      ii) *Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   c) *On suppose que $Im(u) \neq Ker(u)$*
      i) *Montrer que $dim(Ker(u)) = 3$*
      ii) *Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problème 5.5.7

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale.

Pour x élément de E et ϕ élément de E^*, $x \otimes \phi$ est l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall z \in E \ , \ (x \times \phi)(z) = < z, \phi > x$$

1. *Soient u un endomorphisme de E et $E_1, E_2, \ldots, E_r$ des sous-espaces vectoriels stables par u , tels que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_r$. Pour chaque j , $1 \leq j \leq r$, soit χ_j le polynôme caractéristique de la restriction de u à E_j. Montrer que $\chi_u = \chi_1 . \chi_2 . \cdots \chi_r$*
2. *Montrer que :*
   a) $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $\forall \phi \in E^*$, $(x + y) \otimes \phi = x \otimes \phi + y \otimes \phi$
   b) $\forall x \in E$, $\forall \phi \in E^*$, $\forall \psi \in E^*$, $x \otimes (\phi + \psi) = x \otimes \phi + x \otimes \psi$
   c) $\forall x \in E$, $\forall \phi \in E^*$, $(x \otimes \phi) = 0 \iff (x = 0 \ \ ou \ \ \phi = 0)$
   d) *Déterminer $Ker(x \otimes \phi)$ et $Im(x \otimes \phi)$ ainsi que leurs dimensions*
3. *Soit u un endomorphisme quelconque de E*
   a) *Montrer que :*

$$\forall x \in E \ , \ \forall \phi \in E^* \ , \ u \circ (x \otimes \phi) = u(x) \otimes \phi$$

   b) *Calculer $(x \otimes \phi) \circ u$*

4. *a) Pour tout entier $m \geq 1$, calculer $(x \otimes \phi)^m$*
   b) Quel est le polynôme minimal de $x \otimes \phi$
   c) $(x \otimes \phi)$ est-il diagonalisable ?
   d) Déterminer sans calcul, le polynôme caractéristique de $(x \otimes \phi)$
5. *Soit $\Phi \ : \ E^n \to L(E)$ l'application définie par :*

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n \ \ , \ \ \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes e_k^*$$

   Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels
6. *Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension $= p$ et G la partie de $L(E)$ définie par :*

$$G = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes e_k^* \ \ : \ \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F \right\}$$

   a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E
   b) Quelle est la dimension de G ?
   c) Montrer que :

$$\forall u \in L(E) \ \ , \ \ u \in G \iff Im(u) \subseteq F$$

7. *Pour chaque k , $1 \leq k \leq n$, soit $A_k = \{x \otimes e_k^* \ : \ x \in E\}$*
   a) Vérifier que A_k est un sous-espace vectoriel de $L(E)$
   b) Trouver une base de A_k
   c) Vérifier que $L(E) = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$
8. *Soient f un endomorphisme de E et L celui de $L(E)$ dfini par :*

$$\forall u \in L(E) \ \ , \ \ L(u) = f \circ u$$

   a) Montrer que :

$$\forall P \in K[X] \ , \ \forall u \in L(E) \ , \ P(L)(u) = P(f) \circ u$$

   b) En déduire que L et f ont même polynôme minimal
   c) Pour chaque k , $1 \leq k \leq n$, trouver , en fonction de χ_f, le polynôme caractéristique de la restriction de L à A_k
   d) En déduire que $\chi_L = (\chi_f)^n$
9. *Soit λ une racine de χ_f, E_λ le sous-espace propre de f associé à λ et G_λ celui de L associé à λ.*
   a) Montrer que :

$$\forall u \in L(E) \ \ , \ \ u \in G_\lambda \iff Im(u) \subseteq E_\lambda$$

   b) Quelle est la dimension de G_λ, en fonction de celle de E_λ

Exercice 5.5.31

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E et u_α l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{cases} u_\alpha(e_1) = e_1 + \alpha e_2 + \alpha e_4 \\ u_\alpha(e_2) = -\alpha e_1 + e_2 - \alpha e_3 \\ u_\alpha(e_3) = -\alpha e_2 + e_3 - \alpha e_4 \\ u_\alpha(e_4) = \alpha e_1 - \alpha e_3 + e_4 \end{cases}$$

a) *Montrer que pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, $(u_\alpha - Id_E)^2 = 0$
b) *Quel est le polynôme minimal de* u_α *?*
c) *Quel est le polynôme caractéristique de* u_α *?*
d) *Trouver, pour chaque* $\alpha \in \mathbb{R}$, *une base de Jordan de* u_α

Exercice 5.5.32
Soit u *l'endomorphisme de* $\mathbb{C}^4$ *défini sur la base canonique* (e_1, e_2, e_3, e_4) *par :*

$$\begin{cases} u(e_1) = e_2 \\ u(e_2) = e_1 \\ u(e_1) = e_1 - e_2 + ae_3 + (1-a)e_4 \\ u(e_1) = -e_1 + e_2 + (1-a)e_3 + ae_4 \end{cases}$$

Où a *est un paramètre complexe quelconque*
a) *Matrice et valeurs propres de* u
b) *Pour quelles valeurs de* a, u *est diagonalisable ?*
c) *Dans le cas où* u *est diagonalisable, trouver une base formée de vecteurs propres de* u
d) *Dans le cas où* u *n'est pas diagonalisable, trouver une base de Jordan de* u

Exercice 5.5.33
Soit u *l'endomorphisme défini sur la base canonique de* $\mathbb{R}^4$ *par :*

$$\begin{cases} u(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 \\ u(e_2) = -e_1 - e_3 - e_4 \\ u(e_3) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ u(e_4) = -2e_1 - e_2 \end{cases}$$

a) *Trouver la matrice, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de* u
b) *Trouver les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques de* u
c) *Trouver une base de Jordan de* u

Exercice 5.5.34
En utilisant la réduite de Jordan, montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ *est semblable à sa transposée*

Exercice 5.5.35
Soient E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie* $= n$ *et* u *un endomorphisme de* E. *On suppose que le polynôme caractéristique* χ_u *de* u *a toutes sese racines dans* K, *c'est à dire :*

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1}(X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

Soient $N_1, N_2, \ldots, N_r$, *les sous-espaces caractéristiques associés, respectivement, à* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, *et pour chaque* j , $j = 1, 2, \ldots, r$, *soit* u_j *la restriction de* u *à* N_j. *Rappelons que* $\forall j$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $u_j - \lambda_j.Id_{N_j}$ *est un endomorphisme nilpotent de* N_j. *Soit* q_j *l'indice de nilpotence de* $u_j - \lambda_j.Id_{N_j}$. *Montrer que le polynôme minimal* M_u *de* u *s'écrit sous la forme :*

$$M_u = (X - \lambda_1)^{q_1}(X - \lambda_2)^{q_2} \cdots (X - \lambda_r)^{q_r}$$

Problème 5.5.8 (Théorème de d'Alembert)
Dans ce devoir on se propose de montrer, en utisant uniquement les techniques d'Algèbre linéaire, le théorème de d'Alembert appelé aussi théorème fondamentale de l'Algèbge (Le théorème fondamental de l'Analyse est celui des accroissements finis) :

Définition 5.5.1
Un corps commutatif K est dit algèbriquement clos, si tout polynôme non constant de $K[X]$ possède au moins une racine dans K.

Théorème 5.5.1 (de d'Alembert)
Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est algèbriquement clos.

Notations 5.5.1
Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes et $M_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour chaque $(k,l) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, on désigne par $E_{kl} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2,\ a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{si } i \neq k \text{ ou } j \neq l \end{cases}$$

E_{kl} est donc la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la k^{ieme} ligne et la l^{ieme} colonne qui est égal à 1.
Rappelons que $\{E_{kl} : (k,l) \in \{1,2,\dots,n\}^2\}$ forme une base de $M_n(\mathbb{K})$, c'est la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$: Si $A = (a_{ij})$, A s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}E_{ij}$$

Rappelons aussi que les matrices E_{kl} vérifient les règles de calcul suivantes :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2,\ \forall (k,l) \in \{1,2,\dots,n\}^2,\ E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Donc en particulier, on a
i) $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$, $E_{ii}^2 = E_{ii}$, donc pour tout i, E_{ii} est une matrice de projection.
ii) $\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, $i \neq j \Longrightarrow E_{ij}^2 = 0$, donc pour $i \neq j$, E_{ij} est nilpotente d'indice de nilpotence $= 2$.

Résultats préliminaires

1. a) *Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle. (On pourra utiliser le théorème des valeurs intemidiaires).*
   b) *En déduire que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension impaire, admet au moins une valeur propre.*
   c) *Application : Existe-t-il une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$, telle que $A^2 + A + I = 0$?*

2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.*
   a) *Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\ker(u-\lambda)$ et $Im(u-\lambda)$ sont stables par u et v.*
   b) *Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair avec $n \neq 1$, alos E possède au moins un sous-espace, non trivial, de dimension impaire stable par u et v.*
3. *Montrer par récurrece sur la dimension de E que deux endomorphismes commutables d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire, possèdent au moins un vecteur propre commun.*

Endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension impaire

Pour chaque matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $M_n(\mathbb{C})$, la matrice $\overline{M}$ est définie par $\overline{M} = (\overline{m_{ij}})_{1 \leq i,j \leq n}$. On définit la partie $\mathcal{F}$ de $M_n(\mathbb{C})$, par :

$$\mathcal{F} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : {}^tM = \overline{M}\}$$

On suppose de plus que n est impair.

1. *Vérifier que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel réel.*
2. *Vérifier que la famille constituée des éléments $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}, E_{kl} + E_{lk}, i(E_{kl} - E_{lk})$ avec $(k,l) \in \{1,2,\ldots,n\}$ et $k < l$, est une base de $\mathcal{F}$. Quelle est alors la dimension de $\mathcal{F}$? Quelle est sa parité ?*
3. *Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$; on considère les deux applcations u et v définies sur $\mathcal{F}$ par :*
$$\forall M \in \mathcal{F},\ u(M) = \frac{1}{2}(AM + M{}^t\overline{A}) \text{ et } v(M) = \frac{1}{2i}(AM - M{}^t\overline{A})$$
   a) *Montrer que u et v sont des endomorphismes de E.*
   b) *Vérifier que u et v commutent puis justifier qu'ils possèdent au moins un vecteur propre commun.*
   c) *Soit $M_0 \in \mathcal{F}$ un vecteur propre commun aux endomorphismes u et v ; on suppose que $u(M_0) = \lambda M_0$ et $v(M_0) = \mu M_0$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.*
   Exprimer la matrice AM_0 en fontion de M_0 et montrer soigneusement que $\lambda + i\mu$ est une valeur propre de la matrice A.
4. a) *Justifier que tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension impaire possède au moins une valeur propre.*
   b) *Montrer par récurrence sur la dimension que deux endomorphismes commutables d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension impaire, possèdent au moins un vecteur propre commun.*

Etude du cas général

Rappelons que tout entier $n \in \mathbb{N}$, s'écrit d'une manière unique sous la forme $n = p2^k$, où $p \in \mathbb{N}$ et m un entier impair.

On considère la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante :
Pour tout entier naturel p et pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $p2^k$:

i) Tout endomorphisme de E, possède au moins une valeur propre.
ii) Deux endomorphismes commutables de E possèdent au moins un vecteur propre commun.

On se propose de démontrer la propriété $\mathcal{P}_k$ par récurrence sur l'entier k. Pour cela, on remarque que la propriété $\mathcal{P}_0$ vient d'être établie dans la section précédente.
H.R : Supposons donc que $k \in \mathbb{N}^*$ et que $\mathcal{P}_l$ est vraie pour tout entier naturel $l < k$. Supposons aussi que $p \in \mathbb{N}$ et que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $p2^k$.

Etude de l'assertion i) de la propriété $\mathcal{P}_k$

Soient f un endomorphisme de E et A sa matrice par rapport à une base quelconque de E. On considère la partie $\mathcal{G}$ de $M_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\mathcal{G} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : {}^tM = -M\}$$

1. *Vérifier que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel et préciser sa dimension.*
2. *On considère les deux applications u et v définies sur $\mathcal{G}$ par :*

$$\forall M \in \mathcal{G},\ u(M) = AM + M{}^tA \ \text{ et } v(M) = AM{}^tA$$

   a) Vérifier que u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{G}$ et que u et v commutent.
   b) Justifier soigneusemennt que les endomorphismes u et v possèdent un vecteur propre commun.
   c) Soit $N_0 \in \mathcal{G}$ un vecteur propre commun aux endomorphismes u et v. On suppose que $u(N_0) = \lambda N_0$ et $v(N_0) = \mu N_0$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.
      i) Vérifier que $(A^2 - \lambda A + \mu I)N_0 = 0$
      Dans la suite, On note W un vecteur colonne non nul de la matrice N_0 et on désigne par α et β les racines complexes du polynôme du second degré $X^2 - \lambda X + \mu$
      ii) Vérifier que $(A - \alpha I)(A - \beta I)W = 0$.
      iii) Justifier que α et β sont valeurs propres de A et conclure.

Etude de l'assertion ii) de la propriété $\mathcal{P}_k$

Soient f et g deux endomorphismes commutables de E, on cherche à montrer que f et g ont au moins un vecteur propre commun.

1. *f est une homothétie de E, justifier que f et g possèdent au moins un vecteur propre commun.*
2. *On suppose que f n'est pas une homothétie et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f. On note $F_1 = \ker(f - \lambda Id_E)$ et $F_2 = Im(f - \lambda Id_E)$. Rappelons que F_1 et F_2 sont stables par f et g.*
   a) Si la dimension de l'un des sous-espaces F_1 ou F_2 s'écrit sous la forme $q2^l$ avec $l < k$ et q impair, comment peut-on conclure ?
   b) Sinon, justifier que l'un de ces deux sous-espaces est de dimension $q2^k$ avec q impair et l'aure de dimension $r2^k$ avec r pair. Montrer que $q < p$ et que f et g possèdent au moins un vecteur propre commun.

Retour au théorème fondamental de l'Algèbre

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de f.*
2. *En déduire que le polynôme P possède au moins une racine complexe.*
3. *Déduire de ce qui précède le théorème de d'Alembert.*

Exercice 5.5.36

a) *Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $||A|| < 1$. Montrer que $I - A$ est une matrice inversible*

b) *En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$*

c) *Montrer que l'application de $GL_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$, qui à A fait correspondre A^{-1}, est continue*

Soient A et B deux matrices diagonalisables réelles telles que

$$\exp(A) = \exp(B)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 5.5.37

Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$$

Exercice 5.5.38

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que les deux propriètés suivates sont équivalentes :

i) *A est nilpotente*

ii) *Il existe une suite $(B_n)_{n\geq 0}$ de matrices semblables à A telles que :*

$$\lim ||B_n|| = 0$$

Exercice 5.5.39

Soient a un nombre complexe non nul et J la matrice de Jordan :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$, où $A = I + aJ + a^2J^2 + \cdots + a^{n-1}J^{n-1}$

Exercice 5.5.40
$\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne. On considère le système différentiel :

$$(S) \quad : \quad \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \ \text{ où } \ A \in M_n(\mathbb{R})$$

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
i) Pour toute solution $X(t)$ de (S), la fonction $t \mapsto ||X(t)||$ est constante
ii) La matrice A est antisymétrique

Annexe A

Lemme de Zorn - Axiome du choix

A.1 Elément maximum et élément minimum

Définition A.1.1
Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et a un élément de E.

i) On dit que a est un **élément maximum** *(ou un plus grand élément) de E, si :*

$$\forall x \, , \, x \in E \Longrightarrow x \leq a$$

ii) On dit que a est un **élément minimum** *(ou un plus petit élément) de E, si :*

$$\forall x \, , \, x \in E \Longrightarrow a \leq x$$

Remarque A.1.1

1. *a est un élément maximum de E, si et seulement si,*

$$\{x \in E \ : \ x \leq a\} = E$$

2. *a est un élément minimum de E, si et seulement si,*

$$\{x \in E \ : \ a \leq x\} = E$$

3. *Si a est un élément maximum ou minimum de E, alors a est* **unique**.
En effet, supposons que b est un autre élément maximum de E, alors on aura

$$a \leq b \ \text{ et } \ b \leq a$$

Donc d'après l'antisymétrie d'une relation d'ordre on a $b = a$.

Exemple A.1.1

1. *Soient X un ensemble non vide et $E = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties de X ordonné par inclusion :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \, , \, \forall B \in \mathcal{P}(X) \, , \, A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

Alors $\emptyset$ est l'unique élément minimum de E et X est l'unique élément maximum de E

2. *Si on prend maintenant* $E = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ *alors* E *n'admet ni élément maximum, ni élément minimum.*
3. *On pose* $E = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ *ordonné par la division :*

$$\forall x \in E \ , \ \forall y \in E \ , \ x \leq y \Longleftrightarrow x \diagup y$$

Alors E *n'admet ni élément maximum, ni élément minimum.*

Théorème A.1.1
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément.*

Preuve A.1.1
La démonstration de ce théorème repose sur **l'axiome** *suivant :*
Soit A *une partie de* $\mathbb{N}$ *telle que :*

i) $0 \in A$

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$

Alors $A = \mathbb{N}$.
Soit B *une partie non vide de* $\mathbb{N}$ *et soit* A *l'ensemble de tous les minirants de* B *dans* $\mathbb{N}$ *:*

$$x \in A \Longleftrightarrow \forall b \in B \ , \ x \leq b$$

Puisque $B \neq \emptyset$*, alors on peut choisir* $b \in B$*, donc* $b+1 \notin A$*, car* $b+1$ *ne peut pas être un minirant de* B*, et par suite* $A \neq \mathbb{N}$
Puisque $0 \in A$ *et* $A \neq \mathbb{N}$*, alors* A *ne vérifie pas :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $n_0 \in A$ *et* $n_0+1 \notin A$*. Ainsi* n_0+1 *n'est pas un minirant de* B *et par suite il existe* $b \in B$ *tel que* $b < n_0+1$*. Donc on aura* $n_0 \leq b < n_0+1$*, c'est à dire* $0 \leq b - n_0 < 1$*, donc* $n_0 = b$ *et par conséquent* n_0 *est un minirant de* B *qui appartient à* B*, donc* n_0 *est un élément minimum de* B

Corollaire A.1.1
Soit a *un élément quelconque de* $\mathbb{N}$ *et soit* b *un élément* **non nul** *de* $\mathbb{N}$*. Alors il existe un couple* **unique** $(q,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*, tel que :*

$$\boxed{a = qb + r \ \ et \ \ 0 \leq r < b}$$

C'est la division euclidienne de a *par* b*.* q *s'appelle le quotient et* r *le reste de la division.*

Preuve A.1.2

i) *Existence de* (q,r)

Si $a < b$*, on prend* $q = 0$ *et* $r = a$*, donc le couple* (q,r) *vérifie les conditions du corollaire.*
Dans la suite on peut donc supposer que $b \geq a$ *et on considère l'ensemble* B *défini par :*

$$B = \{p \in \mathbb{N}^* \ : \ a < (p+1)b\}$$

On a $a < a+1$ *et* $1 \leq b$ *donc* $a < (a+1)b$ *et par suite* $a \in B$*, donc* $B \neq \emptyset$*.* B *est une partie non vide de* $\mathbb{N}$*, donc* B *admet un plus petit élément qu'on note* q*. On a* $q-1 < q$ *et* q *est le plus petit élément de* B*, donc* $q-1 \notin B$ *et par suite on aura* $qb \leq a < (q+1)b$*, donc* $0 \leq a - qb < b$
Posons $r = a - qb$ *alors on aura* $a = qb + r$ *et* $0 \leq r < b$

ii) *Unicité de* (q,r) *(Exercice)*

A.2 Borne supérieure et borne inférieure

Définition A.2.1
Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
i) On dit que $x\in E$ est un majorant de A si :

$$\forall a\in A\ ,\ a\leq x$$

ii) On dit que $x\in E$ est un minirant de A si :

$$\forall a\in A\ ,\ x\leq a$$

On note $M(A)$ l'ensemble des majorants de A et $m(A)$ l'ensemble des minirants de A.

Définition A.2.2
Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
i) Le plus petit élément de $M(A)$, s'il existe, s'appelle la **borne supérieure** *de A et se note $\sup(A)$*
ii) Le plus grand élément de $m(A)$, s'il existe, s'appelle la **borne inférieure** *de A et se note $\inf(A)$*

Remarque A.2.1
Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E

1. *Un élément maximum appartient toujours à A, tandis qu'une borne supérieure peut ne pas appartenir à A*
2. *Un élément minimum appartient toujours à A, tandis qu'une borne inférieure peut ne pas appartenir à A*
3. *Une borne supérieure ou une borne inférieure, s'il existe, est toujours unique. (Exercice)*
4. *Si A possède un élément maximum (resp. minimum), alors cet élément coincide avec sa borne supérieure (resp. inférieure)*

Exemple A.2.1
On prend $E=\mathbb{R}$
a) $A=[0,1]$ alors 0 est un élément minimum de A donc aussi c'est la borne inférieure de A. 1 est un élément maximum de A donc aussi c'est une borne supérieure de A.
b) $A=]0,1[$ dans ce cas A n'admet ni élément maximum ni élément minimum. Par contre 0 est la borne supérieure de A et 1 est la borne inférieure de A.
c) $A=]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$ alors A n'admet ni élément maximum, ni élément minimum, ni borne supérieure, ni borne inférieure.

Définition A.2.3
Un **treillis** *est un ensemble ordonné $(E,\leq)$ tel que pour tout $a\in E$ et tout $b\in E$, $A=\{a,b\}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure, notées respectivement $\sup(a,b)$ et $\inf(a,b)$*

Exemple A.2.2

1. *Soient X un ensemble quelconque et $E = \mathcal{P}(X)$ ordonné par inclusion. Alors $(E, \subseteq)$ est un treillis. En effet pour $A \in E$ et $B \in E$ on a*
$\sup(A,B) = A \cup B$ *et* $\inf(A,B) = A \cap B$.
2. *Soit $E = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ordonné par la division :*

$$\forall n \in E,\ \forall m \in E,\ \ n \leq m \Longleftrightarrow n \text{ divise } m$$

Alors $(E, \leq)$ est un treillis. En effet pour $n \in E$ et $m \in E$, on a
$\inf(n,m) = n \wedge m$ *et* $\sup(n,m) = n \vee m$
Où $n \wedge m = pgcd(n,m)$ et $n \vee m = ppcm(n,m)$

Théorème A.2.1
Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
i) $x \in E$ est la borne supérieure de A, si et seulement si :

$$(\forall a \in A,\ a \leq x) \ \ et \ \ (\forall y \in E,\ \ y < x \implies \exists a \in A\ :\ \ y < a \leq x)$$

ii) $x \in E$ est la borne inférieure de A, si et seulement si :

$$(\forall a \in A,\ x \leq a) \ \ et \ \ (\forall y \in E,\ \ x < y \implies \exists a \in A\ :\ \ x \leq a < y)$$

Preuve A.2.1
i) ($\implies$) Supposons que x est une borne supérieure de A, donc par définition on a $\forall a \in A,\ a \leq x$. Soit $y \in E$ tel que $y < x$, supposons par absurde que $\forall a \in E,\ a \leq y$, donc $y \in M(A)$ et par suite $x \leq y$, car x est, par définition, le plus petit élément de $M(A)$, ce qui est absurde car par hypothèse $y < x$.
($\Longleftarrow$) Il suffit de montrer que x est le plus petit élément de $M(A)$, pour cela on suppose par absurde qu'il existe $y \in M(A)$ tel que $y < x$, donc par hypothèse il existe $a \in A$ tel que $y < a \leq x$. Or $y \in M(A)$ donc $a \leq y$, ce qui est absurde.
ii) Se démontre de la même manière que i).

A.3 Elément maximal et élément minimal

Définition A.3.1
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
i) On dit que $a \in E$ est un élément **maximal** *de E si :*

$$\forall x \in E\ ,\ a \leq x \Longrightarrow x = a$$

ii) On dit que $a \in E$ est un élément **minimal** *de A si :*

$$\forall x \in E\ ,\ x \leq a \Longrightarrow x = a$$

Remarque A.3.1
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

1. *$a \in E$ est un un élément maximal de E, si et seulement si :*

$$\{x \in E \ : \ a \leq x\} = \{a\}$$

C'est à dire qu'il n'existe pas d'élément de E qui est supérieur ou égal à a autre que a.

2. *$a \in E$ est un un élément minimal de E, si et seulement si :*

$$\{x \in E \ : \ x \leq a\} = \{a\}$$

C'est à dire qu'il n'existe pas d'élément de E qui est inférieur ou égal à a autre que a.

3. *Un élément maximal (resp. minimal), s'il existe, n'est pas toujours unique*
4. *Si E possède un plus grand élément a, alors a est un élément maximal de E et c'est l'unique élément maximal de E.*
5. *Si $(E, \leq)$ est totalement ordonné et si E possède un élément maximal a, alors a est unique.*

Exemple A.3.1

1. *$E = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ muni de la relation d'ordre :*

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \text{ divise } y$$

Alors $2,3,5,7,11$ sont tous des éléments minimaux de E

2. *$X = \{a,b,c,d\}$ et $E = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$, donc on a :*

$$E = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$$

Alors $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$ sont des éléments minimaux de E et $\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$ sont des éléments maximaux de E.

3. *Soient X un ensemble quelconque non vide et $E = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ ordonné par inclusion. Alors $\forall x \in X$, $\{x\}$ est minimal et $X \setminus \{x\}$ est maximal*
4. *$E = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ muni de la relation d'ordre :*

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \text{ divise } y$$

Alors tout nombre premier est un élément minimal.

A.4 Le Lemme de Zorn

Définition A.4.1

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

i) On dit qu'une partie A de E est **une chaîne** *si,* $\begin{cases} A \neq \emptyset \\ (A, \leq) \text{ est totalement ordonné} \end{cases}$

ii) On dit que $(E, \leq)$ est inductif, si toute chaîne de E admet au moins un majorant dans E

Lemme A.4.1 (de Zorn)

Tout ensemble inductif admet au moins un élément maximal.

Preuve A.4.1 (à admettre)
En fait, on montre que le lemme de Zorn est équivalent à l'axiome suivant, dit **axiome du choix** *:*
Soit X un ensemble **non vide**, *alors il existe une application*

$$f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X \text{ telle que : } \forall A \in \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset, \ f(A) \in A$$

f s'appelle une fonction de choix sur X
Intuitivement, l'axiome du choix signifie qu'à chaque fois qu'on a un ensemble A non vide, on peut toujours choisir un élément x qui appartient à cette ensemble.

Exemple A.4.1

1. *Soit $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ l'application définie par :*
   $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$, $f(A)$ est le plus petit élément de A. Alors f est une fonction de choix sur $\mathbb{N}$.
2. *Si maintenant on considère le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, alors d'après l'axiome du choix, il existe au moins une fonction de choix sur $\mathbb{R}$:*

   $$f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$$

   Cependant, personne n'a jamais pu construire une telle application

A.5 Exercices d'application

Exercices A.5.1

1. *Soient E et F deux ensembles quelconques et $g : E \to F$ une application surjective. Montrer qu'il existe une application injective telle que*
   $g \circ f = Id_F$
2. *Soient E et F deux ensembles quelconques. Montrer qu'il existe une application injective ou bien de E vers F ou bien de F vers E.*

Preuve A.5.1 (solutions des exercices)

1. *Considèrons l'application $G : F \to \mathcal{P}(E)$ qui à $y \in F$ fait correspondre $g^{-1}(\{y\})$, l'image réciproque par g du singleton $\{y\}$. D'autre part, soit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to E$ une fonction de choix sur E, cette fonction φ existe d'après l'axiome du choix, donc on a :*

   $$F \xrightarrow{G} \mathcal{P}(E) \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{g} F$$

   Posons $f = g \circ \varphi \circ G$, donc pour $y \in F$ on a $f(y) = g(\varphi(G(y))) = g(\varphi(g^{-1}(\{y\})))$, or d'après l'axiome du choix, on a $\varphi(g^{-1}(\{y\}) \in g^{-1}(\{y\})$, donc par définition de l'image réciproque d'une partie on a
   $g(\varphi(g^{-1}(\{y\}))) = y$, donc $\forall y \in F$, $f(y) = y$ et par suite $g \circ f = Id_F$.
2. *Considèrons l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par :*

   $$\mathcal{E} = \{(X, f) \ : \ X \subseteq E \ \text{ et } \ f : E \to F \ \text{ injective}\}$$

On définit sur $\mathcal{E}$ une relation d'ordre par :

$$(X,f) \leq (Y,g) \Longleftrightarrow \begin{cases} X \subseteq Y \\ g\,|_X = f \end{cases} .$$

($g\,|_X$ est la restriction de g à X). Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que $\leq$ définit bien une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$
Montrons que $(\mathcal{E},\leq)$ est inductif, pour cela soit $\mathcal{A}$ une chaîne de $\mathcal{E}$. On doit montrer donc que $\mathcal{A}$ possède un majorant dans $\mathcal{E}$. Pour simplifier nous allons d'abord écrire $\mathcal{A}$ sous forme d'une famille :

$$\mathcal{A} = \{(X_i,f_i) \ : \ i \in I\}$$

Posons maintenant $X = \underset{i\in I}{\cup} X_i$ et $f : X \to F$ définie par :

$$\forall x \in X, \ f(x) = f_i(x) \ \ si\ x \in X_i$$

Alors f est bien définie, car $\mathcal{A}$ est totalement ordonné, et f est injective, car pour tout $i \in I$, f_i est injective. Donc $(X,f) \in \mathcal{E}$ et par construction, (X,f) est un majorant de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}$. $(\mathcal{E},\leq)$ est inductif, donc d'après le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ admet au moins un élément maximal qu'on note (M,φ). Pour conclure nous allons montrer que $M = E$ ou $f(M) = F$. Fn effet, supposons par absurde le contraire, c'est à dire $M \neq E$ et $f(M) \neq F$, donc il existe $x \in E$ tel que $x \notin M$ et il existe $y \in F$ tel que $y \notin f(M)$. Posons $W = M \cup \{x\}$ et soit $g : Y \to F$ l'application définie par :

$$\forall w \in W, \ \ g(w) = \begin{cases} f(w) & si\ w \in M, \\ y & si\ w = x \end{cases}$$

Alors il est facile de vérifier que g est injective, donc $(W,g) \in \mathcal{E}$ avec $(M,f) \leq (W,g)$ et $(M,f) \neq (W,g)$, ce qui contredit le fait que (M,f) est un élément maximal de $\mathcal{E}$. Donc on a bien $M = E$ ou $f(M) = F$.
i) Si $M = E$ alors $f : E \to F$ est une injection, d'où le résultat.
ii) Si $f(M) = F$, puisque $f : M \to F$ est injective et $f(M) = F$, alors f est bijective. Soit $h : F \to E$ définie par :

$$\forall y \in F, \ \ h(y) = f^{-1}(y)$$

Alors h est une injection de F vers E, d'où le résultat.

Annexe A

Maple et Algèbre linéaire

Le logiciel Maple est un outil très puissant de calcul numérique et formel. Il fournit un très grand nombre de commandes qui permettent d'une part d'effectuer des calculs avec des précisions quelconques, et d'autre part de manipuler, d'une manière formelle, des expressions mathématiques : développement, factorisation, simplification, dérivation, intégration, limites, résolution d'équations algèbriques et différentielles, etc... Sans oublier l'aspet graphique : tracage de courbes et de surfaces
Dans cette section nous allons présenter les principales commandes concernant l'Algèbre linéaire.

A.1 Matrices Carrées

A.1.1 Déclaration d'une matrice carrée

MAPLE offre plusieures possibilités pour déclarer une matrice carrée A d'ordre n :

Cas général

Dans le cas général,pour déclarer une matrice carrée A d'ordre n, on applique l'une des commandes suivantes :

- $> A := matrix(n,n,[L_1,L_2,\dots,L_n]);$
- $> A := matrix([[L_1],[L_2],\dots,[L_n]]);$
- $> A := array(1..n,1..n,[[L_1],[L_2],\dots,[L_n]]);$
- $> A := array([[L_1],[L_2],\dots,[L_n]]);$

  où $L_1,L_2,\dots,L_n$ sont les lignes de la matrice A

  Remarque

  La commande matrix est un cas particulier de la commande array qui a une utilisation plus étendue et plus générale (Voir le Help de Maple pour plus d'informations sur le sujet)

Matrice définie par une fonction de deux variables

Soit f une fonction de deux variables quelconque,alors la commande suivante :
$> A := matrix(n,n,f);$
produit la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *où* $a_{i,j} = f(i,j)$

A.1.2 Matrice définie par la commande band

$> A := band([b_1,b_2,\ldots,b_k,a,c_1,c_2,\ldots,c_k],n);$
Produit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & c_1 & c_2 & \ldots & c_{k-1} & c_k & 0 & \ldots & 0 \\ b_k & a & c_1 & c_2 & \ldots & c_{k-1} & 0\ldots & 0 & \\ b_{k-1} & b_k & a & c_1 & c_2 & \ldots & c_{k-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k & a & c_1 & c_2 & \ddots & \ldots \\ 0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_k & a & c_1 & \ldots & c_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_{k-1} & b_k & a & c_1 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_k & a & c_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_k & a \end{pmatrix}$$

où k est un entier $\leq n-1$
exemples

exemple1 `>A:=band([1],n); retourne la matrice identitï¿½ d'ordre n`
exemple2 `>A:=band([b,a,c],5);`

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & a & c & 0 \\ 0 & 0 & b & a & c \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

A.1.3 Matrice définie en blocs diagonaux

$> A := diag(A_1,A_2,\ldots,A_n);$
Retourne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & 0 & \ldots 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$

où les A_i $i = 1,2,\ldots,n$ sont des matrices carrées quelconques

A.1.4 Matrice sous forme de bloc de Jordan

$> A := JordanBlock(\lambda, n);$
Produit la matrice de Jordan d'ordre n suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

A.1.5 Matrice de Vandermonde

$> A := vandermonde([x_1, x_2, \dots, x_n]);$
Retourne la matrice de Vandermonde d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Exemple
$A := vandermonde([a, b, c, d]);$ produit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

A.1.6 Les caractéristiques d'une matrice carrée

a Déterminant , Trace et Inverse :
   $> det(A);$
   Retourne le déterminant de A
   $> trace(A);$
   Retourne la trace de A
   $> inverse(A);$
   Retourne la matrice inverse de A

b Polynômes caractéristique et minimal :
   $> charpoly(A, x);$
   Retourne le polynôme caractéristique de A
   $> minpoly(A, x);$
   Retourne le polynôme minimal de A

c Vecteurs propres et Valeurs propres :
$> eigenvals(A);$
Retourne les valeurs propres de A
$> eigenvects(A);$
Retourne une base pour chaque sous-espace propre

d Le rang, le noyau et la matrice transposée :
$> rank(A);$
Retourne le rang de A, c'est à dire la dimension de l'image de A
$> kernel(A);$
Retourne une base du noyau de A
$> transpose(A);$
Retourne la matrice transposée de A

e Jordanisation et exponentiel :
$> jordan(A);$
Retourne une réduite de Jordan de A
$> jordan(A,'P');$
Retourne une rd́uite de jordan de A ainsi que la matrice de passage de la premiere base à la base de Jordan
$> exponential(A);$
Retourne l'exponentiel de A

A.2 Opérations sur les matrices

– Addition
  $> evalm(A+B);\ ou\ > matadd(A,B);$
  Retourne la somme des matrices A et B
– Multiplication
  $> evalm(A\&*B);$ ou $multiply(A,B);$
  Retourne la matrice produit de A et B

A.3 Systèmes linéaires

– $> linsolve(A,b);$
  Où $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n et $b=[b_1,b_2,\dots,b_n)$ est un vecteur quelconque, retourne un vecteur $x=[x_1,x_2,\dots,x_n]$ tel que $A.x=b$
– $> linsolve(A,B);$
  Où A et B sont deux matrices carrée d'ordre n, retourne une matrice carrée X d'ordre n tel que $A.X=B$

A.4 Vecteurs

A.4.1 Déclaration d'un vecteur

– $v := vector([v_1, v_2, \dots, v_n]);$
  Retourne le vecteur $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]$
– Soit f une fonction quelconque d'une variable quelconque, alors :
  $> v := vector(n, f);$
  Retourne le vecteur $v = [f(1), f(2), \dots, f(n)]$

A.4.2 Base d'un sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Soit $v_1 = [v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}], v_2 = [v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n}], \dots, v_m = [v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{mn}]$ une famille de vecteurs de $\mathbb{C}^n$, alors la commande :
$> basis(\{v_1, v_2, \dots, v_m\});$ ou $> basis([v_1, v_2, \dots, v_m]);$
Retourne une base du sous-espace vectoriel, $Vect(\{v_1, v_2, \dots, v_m\})$, engendré par l'ensemble de vecteurs $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Soient $F = Vect(\{v_1, v_2, \dots, v_m\})$ et $G = Vect(\{u_1, u_2, \dots, u_p\})$ deux sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par les familles de vecteurs $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ et $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$, alors la commande :
$> intbasis(\{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \{u_1, u_2, \dots, u_p\});$
Retourne une base du sous-espace vectoriel $F \cap G$

Opérations sur les vecteurs

– **Norme d'un vecteur**
  $> norm(v);$
  Retourne la norme sup du vecteur $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]$
  Pour obtenir les autres normes , on doit ajouter un argument :
  $> norm(v, p);$
  Où p est un nombre réel ≥ 1 , par exemple :
  $p = 1$ donne $\sum_{i=1}^{n} | v_i |$
  $p = 2$ donne $(\sum_{i=1}^{n} | v_i |^2)^{\frac{1}{2}}$
– **Poduit scalaire et angle de deux vecteurs**
  Soit $u = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ et $v = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ alors la commande :
  $> dotprod(u, v);$
  Retourne le produit scalaire des vecteurs u et v
  Tandis que la commande :
  $> angle(u, v);$
  Retourne l'angle déterminé par u et v
– **Produit vectoriel**
  Soient $u = [u_1, u_2, u_3]$ et $v = [v_1, v_2, v_3]$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors la commande :

$> crossprod(u,v);$
Retourne le produit vectoriel de u et v