Planche n° 6. Espaces préhilbertiens

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (* I)** (Polynômes de Legendre)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $P|Q = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

a) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, \mid\,)$.
b) Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Déterminer l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de E.

3) Déterminer la distance de X^3 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice n° 2 (* I)** (Polynômes d'Hermite) (nécessite d'avoir traité le chapitre « Intégration sur un intervalle quelconque »).

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = \left(X^n e^{-X}\right)^{(n)} e^X$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E.
b) Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ).
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E, φ).

Exercice n° 3 (I)** (Polynômes de Tchebychev) (nécessite d'avoir traité le chapitre « Intégration sur un intervalle quelconque »).

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n-ème polynôme de Tchebychev de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2) a) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ).
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Exercice n° 4 (I)**

On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-dire les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) Pour $(u, v) \in E^2$, on pose $\varphi(u, v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice n° 5 (* I)

Soit Φ l'application qui à deux matrices carrées réelles A et B de format n associe $\mathrm{Tr}\left(A^T \times B\right)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est ce que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice n° 6 (****) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme, notée $\|\ \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Exercice n° 7 (I)**

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, ..., e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout vecteur x de E, on ait $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. Montrer que la famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice n° 8 (***)

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P,Q)=\displaystyle\int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\ dt$.

1) Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n, $\deg(P_n)=n$.

3) (****) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n, $n\in\mathbb{N}^*$, a n racines réelles simples.

Exercice n° 9 (* I)** (Matrices et déterminants de Gram) Soit E un espace préhilbertien réel.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1,\dots,x_n)=(x_i|x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de Gram) puis $\gamma(x_1,\dots,x_n)=\det(G(x_1,\dots,x_n))$ (déterminant de Gram).

1) Montrer que $\operatorname{rg}(G(x_1,\dots,x_n))=\operatorname{rg}(x_1,\dots,x_n)$.

2) Montrer que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1,\dots,x_n)=0$ et que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1,\dots,x_n)>0$.

3) On suppose que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre dans E. On pose $F=\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n)$. Pour $x\in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x,F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|^2$). Montrer que $d(x,F)=\sqrt{\dfrac{\gamma(x,x_1,\dots,x_n)}{\gamma(x_1,\dots,x_n)}}$.

Planche n° 7. Espaces euclidiens

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice n° 1 (* I)**

Montrer que la matrice de HILBERT $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est définie positive (c'est-à-dire $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXH_nX \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0$).

Exercice n° 2 (* I)**

1) Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = A^TA$. Montrer que S est une matrice symétrique positive.
2) Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = A^TA$. A-t-on l'unicité de A ?
3) Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4) Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$.
5) (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive.
Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

Exercice n° 3 (** I)**

Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille de p vecteurs de E $(p \geqslant 2)$. On dit que la famille $(x_1, ..., x_p)$ est une famille obtusangle si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ $(i < j \Rightarrow x_i|x_j < 0)$. Montrer que si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est une famille obtusangle alors $p \leqslant n+1$.

Exercice n° 4 (I)** (Inégalité de HADAMARD)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Montrer que pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1, ...x_n)$, on a : $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, ..., x_n)| \leqslant \|x_1\|...\|x_n\|$. Cas d'égalité ?

Exercice n° 5 (**)

Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de format n, on a $|\det A| \leqslant \sqrt{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

Exercice n° 6 (***)

Soit A une matrice orthogonale. A l'aide du vecteur colonne U dont toutes les composantes sont égales à 1, montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n. Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

Exercice n° 7 (I)**

Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(A, B) \in E^2$, on pose $\langle A, B\rangle = \text{Tr}\left(A^TB\right)$.

1) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit salaire sur E. On note $\|\ \|$ la norme associée.

2) Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

3) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la distance de A à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (dans $(E, \|\ \|)$).

Exercice n° 8 (***)

Soit A une matrice carrée réelle symétrique positive de format n. Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det\left(I_n + A\right)}$.

Exercice n° 9 (**)

Déterminer $\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))$.

Exercice n° 10 (**)

Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices A^TA et AA^T sont orthogonalement semblables.

Exercice n° 11 (* I)**

Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

Exercice n° 12 (* I)**

Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det(A) + \det(B) \leqslant \det(A + B)$.

Exercice n° 13 (* I)**

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice n° 14 (I)**

Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \end{array}\right.$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1) Déterminer les matrices dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.

2) Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Exercice n° 15 (***)

$O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?

Exercice n° 16 (***)

Résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M = \text{com}(M)$ $(n \geqslant 2)$.

Exercice n° 17 (**)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathbb{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que $\text{Ker}\,(f + f^*) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}\,(f^*)$.

Exercice n° 18 (I)**

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien puis $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes entrainent la troisième :

(1) $f^2 = -\text{Id}_E$,
(2) $f \in O(E)$,
(3) $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = 0$.

Exercice n° 19 (* I)**

1) Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que $A = T^T T$ (décomposition de Choleski) (on pourra considérer l'orthonormalisée de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(X, Y) \mapsto X^T AY$). Réciproque ?

2) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Exercice n° 20 (**) Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f eswt dit *normal* si et seulement si $f^* \circ f = f \circ f^*$.

Déterminer tous les endomorphismes normaux de f quand $\dim(E) = 2$.

