Conducteurs en équilibre électrostatique

Table des matières

1 Conducteurs en équilibre électrostatique

1.1 Conducteur

• Définition : Un conducteur est un matériau contenant des charges électriques mobiles (charges libres),capables de se déplacer dans tout le volume disponible.

- si les charges sont fixes le matériau est un isolant
- Exemples : métaux...

1.2 Equilibre électrostatique

• Définition : Un conducteur est en équilibre électrostatique si ses charges libres n'ont aucune mouvement d'ensemble dans un référentiel lié au conducteur,donc le champ électrostatique $\overrightarrow{E}_{int}$ est nul dans tout le volume du conducteur

$$\overrightarrow{E}_{int} = \overrightarrow{0}\,; V_{int} = cte$$

2 Champ produit par un conducteur en équilibre électrostatique

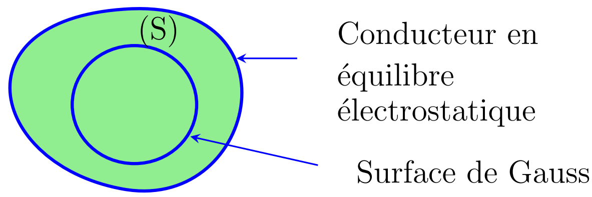
2.1 Répartition des charges

- théorème de Gauss : $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{E}.dS.\overrightarrow{n} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ donc

$$Q_{int} = 0$$

- $\displaystyle Q_{int} = \iiint_V \rho_{int} d\tau = 0$

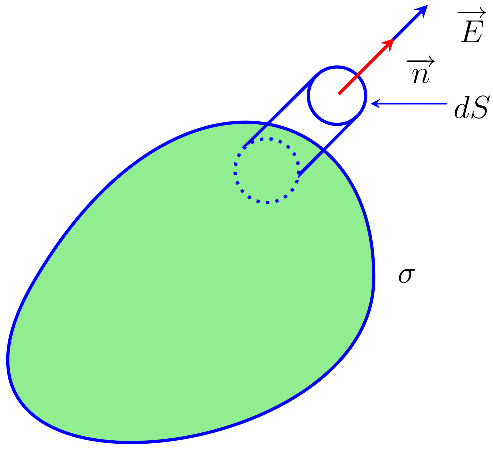
$$\rho_{int} = 0$$



► Si le conducteur est chargé avec une charge Q,elle est répartie totalement sur la surface du conducteur avec une densité σ

$$Q = \iint_S \sigma.dS$$

2.2 Théorème de Coulomb



- au voisinage de la surface du conducteur $\overrightarrow{E}$ est orthogonal à la surface du conducteur
- $\iint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$
- $S = S_{int} + dS + S_{lat}$
- $\overrightarrow{E}_{int} = \overrightarrow{0}$
- $\iint_{S_{int}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = 0$ et $\iint_{S_{lat}} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS} = 0$
- $\iint_S \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS} = E.dS = \frac{\sigma.dS}{\varepsilon_0}$

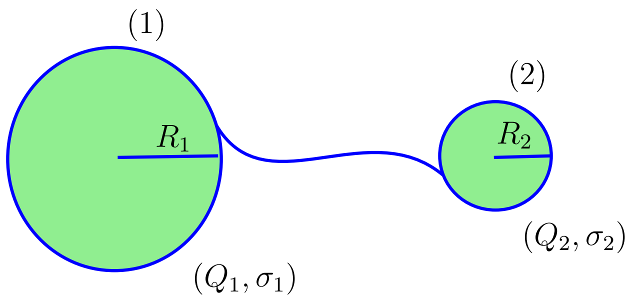
$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}}$$

• Théorème de Coulomb : Au voisinage de la surface d'un conducteur chargé,le champ électrostatique est perpendiculaire à cette surface et vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}$$

2.3 Pouvoir des pointes

Considérons deux sphères conductrices de rayons R_1 et R_2 reliées par un fil conducteur



- la sphère (1) prend à l'équilibre une charge Q_1 répartie sur sa surface avec une densité σ_1
- la sphère (2) prend à l'équilibre une charge Q_2 répartie sur sa surface avec une densité σ_2
- les deux sphères sont supposées assez loin l'une de l'autre
- les sphères sont reliées par un fil,don elles portent le même potentiel aux voisinages de leurs surfaces $V_1 = V_2 = V$
- $V_1 = V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$ et $V_2 = V = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$
- $\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{\varepsilon_0 V}{R_1}$ et $\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{\varepsilon_0 V}{R_2}$
- le champ électrostatique au voisinage de la sphère (1) : $E_1 = \frac{V}{R_1}$
- le champ électrostatique au voisinage de la sphère (2) : $E_2 = \frac{V}{R_2}$
- $R_2 >> R_1$,donc

$$\boxed{E_2 >> E_1 \text{ et } \sigma_2 >> \sigma_1}$$

• Conclusion : Pour un même conducteur,le champ au voisinage de la surface est d'autant plus grand que son rayon de courbure est plus petit,c'est le pouvoir des pointes

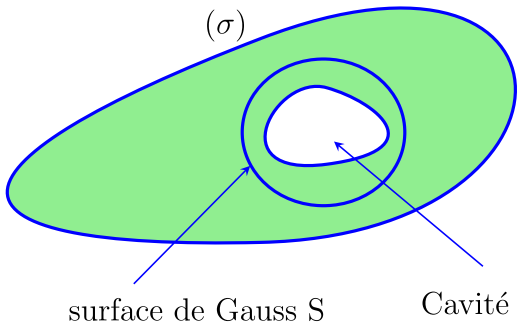
• Autrement : le champ électrostatique au voisinage d'une pointe d'un conducteur est plus intense.

2.4 Champ dans une cavité d'un conducteur

- le conducteur est creux
- la cavité du conducteur est vide de charge
- le théorème d'extremum : $V = cte$ dans la cavité
- $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V = \overrightarrow{0}$ à l'intérieur de la cavité
- $\iint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ donc

$$\sigma_{int} = 0$$

donc pas de charges sur la surface interne du conducteur



• Conclusion : Dans une cavité vide de charge d'un conducteur

- ▶ le champ électrostatique est nul
- ▶ il n' y a pas de charge sur la surface interne du conducteur

•Application : cage de Faraday
Il s'agit d'un conducteur creux,maintenu à un potentiel constant,permet de réaliser un écran électrostatique. On utilise la cage de faraday pour protéger les appareils de mesure contre un champ électrostatique .

2.5 Capacité d'un conducteur

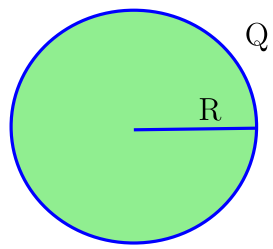
• Définition : la capacité d'un conducteur est définie par

$$C = \frac{Q}{V}$$

- Q : charge du conducteur (surfacique)
- V : potentiel du conducteur
- l'unité de C est le Farad : F

- ▶ la capacité C ne dépend que de la forme géométrique du conducteur et $C > 0$
- ▶ Exemple : sphère métallique chargée en surface

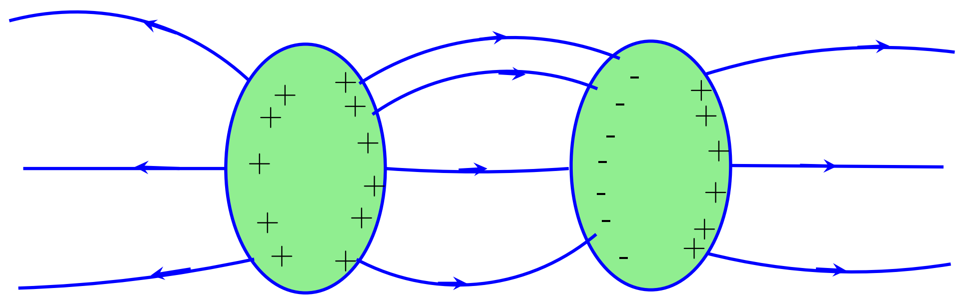
- $\overrightarrow{E} = E(r)\overrightarrow{e}_r$
- au voisinage de la surface $V_s = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$
- $C = \dfrac{Q}{V_s} = 4\pi\varepsilon_0 R$
- terre de rayon $R_T = 6400km$:
  $C = 710\mu F$



3 Système de conducteurs

3.1 Lignes de champ

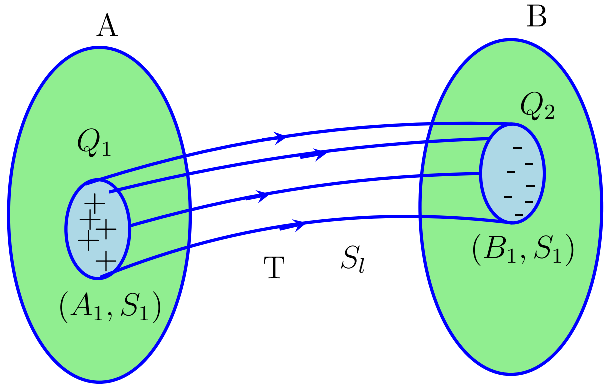
- les lignes de champ sont normales à la surface des conducteurs et partent des charges positives vers les charges négatives
- une ligne de champ ne peut se refermer sur lui un même conducteur



3.2 Théorème des éléments correspondants

Soient deux conducteurs (A) et (B) placés l'un à coté de l'autre et portant des densités surfaciques de charge σ_1 et σ_2. Soit (T) le tube de champ reliant les éléments A_1 de A et B_1 de B.

•Définition : On dit que A_1 et B_1 sont des éléments correspondants si tout ligne de champ partant de A_1 arrivant à B_1



- théorème de Gauss : $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
- $Q_{int} = Q_1 + Q_2$ et $\Sigma = S_1 + S_2 + S_l$

- $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ sur S_1 et S_2
- $\iint_{S_l} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS_l} = 0$ car $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{dS_l}$
- $\iint_{\Sigma} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = 0 = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

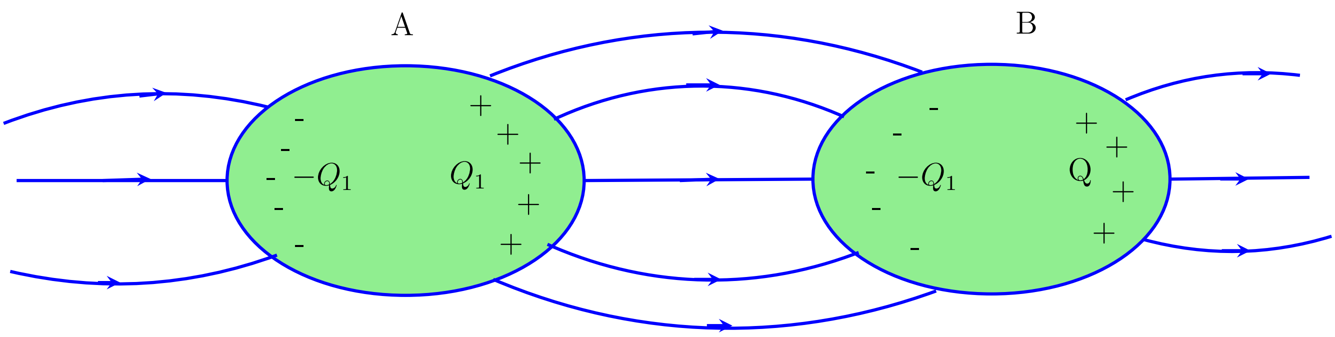
$$\boxed{Q_1 = -Q_2}$$

•Théorème : les charges électriques portées par deux éléments correspondant sont égales et de signs opposés.

$$Q_1 = -Q_2$$

3.3 Influence électrostatique

• Définition : On dit qu'il y a une influence électrostatique entre deux conducteur A et B s'il existe une partie des lignes de champ partent de A et arrivant en B,alors les charges au départ et à l'arrivée ne sont pas indépendantes.



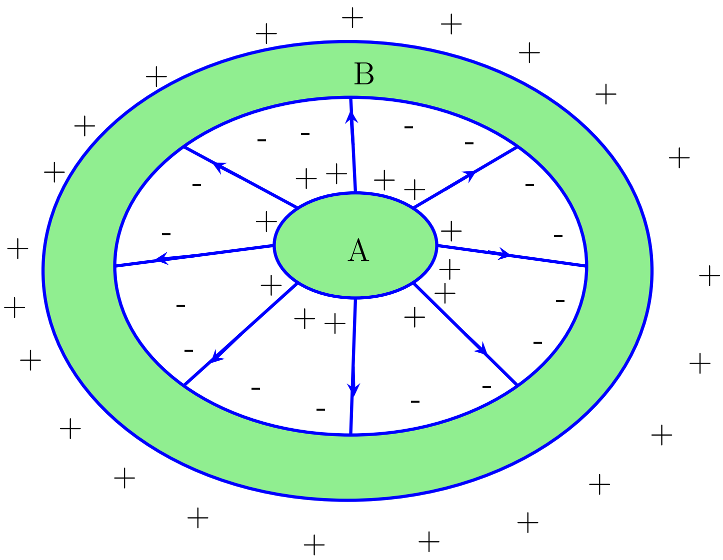
- A et B sont en influence
- la charge totale des deux conducteur reste constante
- nouvelle répartition des charges
- noveau potentiel

3.4 Conducteur relié à la terre

- Terre : sphère globalement neutre qui porte un potentiel constant on le prend par convention égale à zéro $V_T = 0$
- lorsqu'on relie un conducteur à la terre ses charges s'écoulent au sol,càd elles se répartissent sur toute la surface de la terre,donc sa charge et son potentiel deviennent nul.

3.5 Influence totale

•Définition : deux conducteurs A et B sont en influence totale si tout ligne de champ partant da A arrive en B.



- A et B sont en influence totale
- $Q_A = -Q_{B_{int}}$
- $Q_B = Q_{B_{int}} + Q_{B_{ext}}$

$$\boxed{Q_{B_{ext}} = Q_B - Q_{B_{int}}}$$

- si B est isolé au départ,il reste isolé : $Q_{B_{ext}} = Q_A$ et $Q_B = 0$

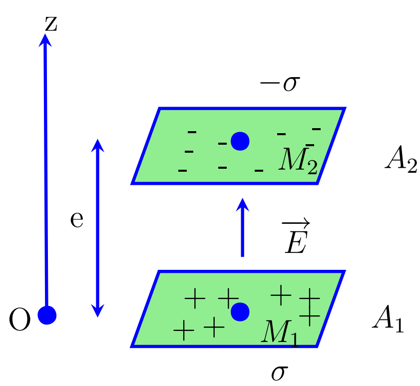
4 Condensateurs

4.1 Définition

• Définition : Un condensateur est un système de deux conducteurs en influence totale ils constituent les armatures du condensateur.

4.2 Condensateur plan

- on néglige les effets de bord
- la distance e est suffisamment faible devant les rayons de courbure pour que l'on puisse les assimiler localement à des plans
- les lignes de champs sont paralléles à Oz



- l'armature A_1(plan) crée la champ $\overrightarrow{E}_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_z$ dans l'espace entre les armatures
- l'armature A_2 crée le champ $\overrightarrow{E}_2 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_z$ dans l'espace entre les armatures

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e}_z}$$

- $V_1 - V_2 = \displaystyle\int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = E\int_0^z dz = E.e = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.e$
- $Q = \sigma.S$ donc $Q = \dfrac{\varepsilon_0.S}{e}U = C.U$, avec S : surface de l'armature

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0.S}{e}}$$

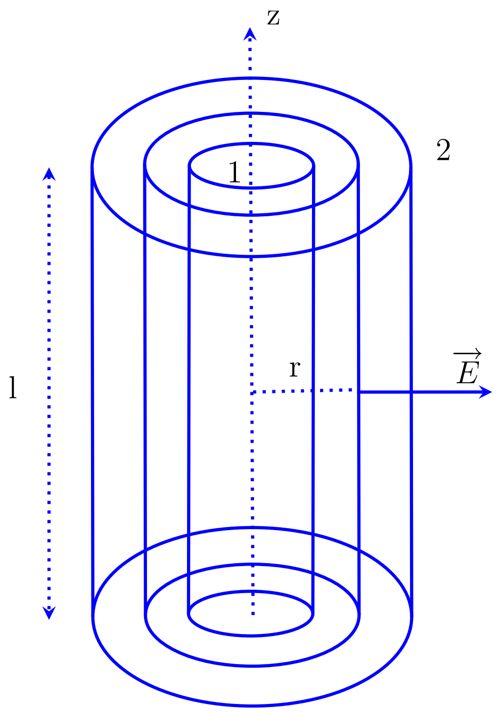
- Pour augmenter la capacité C du condensateur on introduit un diélectrique de permittivité relatif ε_r dan l'espace entre les armatures

$$\boxed{C = \varepsilon_0.\varepsilon_r\frac{S}{e}}$$

4.3 Condensateur cylindrique

- le condensateur cylindrique est constitué par deux cylindres coaxiaux 1 et 2,de rayons R_1 et R_2,portan sur des surfaces en regard les charges $-Q$ et $+Q$
- on suppose que les longueurs des cylindres sont trés grand devant les rayons pour négliger les effets de bord
- théorème de Gauss appliqué à un cylindre de longueur l de rayon r compris entre R_1 et R_2
$\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = E_r 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{l}{r}\overrightarrow{e}_r}$$



- $U = V_1 - V_2 = \displaystyle\int_1^2 \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dr} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_1^2 \frac{\overrightarrow{e}.\overrightarrow{dr}}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}$

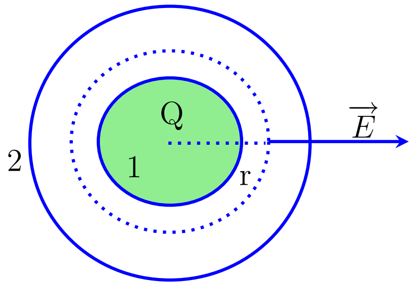
$$\boxed{U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}l\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q}{C}}$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}}$$

- R_2 est voisin de R_1 : $R_2 = R_1 + e$ avec $e << R_1, R_2$
  $R_2 = R_1\left(1 + \dfrac{e}{R_1}\right) \Rightarrow \ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) \approx \dfrac{e}{R_1}$

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 l R_1}{e}$$

4.4 Condensateur sphérique



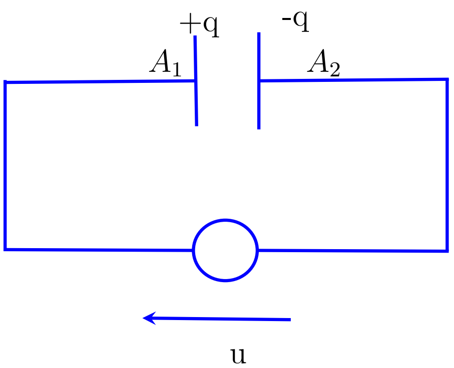
- le condensateur sphérique est constitué de deux sphères de rayons R_1 et R_2
- théorème de Gauss sur une sphère de rayon r compris entre R_1 et R_2
- $\displaystyle\iint_{\Sigma} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r$$

- $U = V_1 - V_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r.\overrightarrow{dr} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

4.5 Energie électrostatique $\mathcal{E}_e$ d'u condensateur



- $d\mathcal{E}_e = -dW_e = -dq(V_{A2} - V_{A1})$
- $d\mathcal{E}_e = udq = \dfrac{q}{C}dq$
- En intégrant entre 0 et Q

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q.U = \frac{1}{2}CU^2$$

- pour un condensateur plan : $U = e.E$ et $C = \varepsilon\dfrac{S}{e}$
- $\mathcal{E}_e = \dfrac{1}{2}E^2\varepsilon\tau$ avec $\tau = eS$

$$\mathcal{E}_e = \omega\tau \text{ et } \omega = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

ω : densité volumique d'énergie