SESSION 2022

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

---

1 Questions préliminaires

1) A commute avec B puis, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A commute avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} B^k$. Maintenant, l'application $f : M \mapsto AM - MA$ est continue sur l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car linéaire. Donc,

$$\begin{aligned} Ae^B - e^B A = f\left(e^B\right) &= f\left(\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} B^k\right) \\ &= \lim_{p\to+\infty} f\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} B^k\right) \text{ (par continuité de } f \text{ sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et donc en } e^B) \\ &= \lim_{p\to+\infty} f(0) = \lim_{p\to+\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que les matrices A et e^B commutent.

2) f_A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $f_A'(t) = Ae^{tA} = Af_A(t)$. De plus, $f_A(0) = e^0 = I_n$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $g'(t) = (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB} + e^{t(A+B)}(-B)e^{-tB}$. Maintenant, pour tout réel t, $-B$ commute avec A et B puis avec $t(A+B)$ et donc avec $e^{t(A+B)}$ d'après la question précédente. Par suite, pour tout réel t,

$$g'(t) = (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB} - Be^{t(A+B)}e^{-tB} = (A+B-B)e^{t(A+B)}e^{-tB} = Ae^{t(A+B)}e^{-tB} = Ag(t).$$

De plus, $g(0) = e^0 \times e^0 = I_n$.

Ainsi, les fonctions f_A et g sont solutions du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} Y' - AY = 0 \\ Y(0) = 0 \end{array}\right.$ (où Y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). On sait qu'une telle solution est unique et donc $f_A = g$. Plus explicitement, pour tout réel t, $e^{t(A+B)}e^{-tB} = e^{tA}$. Ce résultat est valable pour toutes matrices A et B telles que A et B commutent. En particulier, quand $A = 0_n$, pour tout réel t, $e^{tB}e^{-tB} = e^{0_n} = I_n$ et donc e^{tB} est inversible et $\left(e^{tB}\right)^{-1} = e^{-tB}$.

Mais alors, de l'égalité $e^{t(A+B)} \times e^{-tB} \times e^{tB} = e^{tA} \times e^{tB}$ valable pour tout réel t, on déduit que pour tout réel t, $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$.

3) En dérivant une première fois, l'égalité (1), on obtient pour tout réel t, $(A+B)e^{t(A+B)} = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}$. En dérivant une deuxième fois, on obtient pour tout réel t, $(A+B)^2e^{t(A+B)} = A^2e^{tA}e^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + e^{tA}B^2e^{tB}$. Quand $t = 0$, on obtient $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ou encore $A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Après simplification (pour l'addition), il reste $AB = BA$ et donc A et B commutent.

4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left\|\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k\right\| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \|A\|^k$ car $\|\ \|$ est sous-multiplicative d'après (N_2) et car $\left\|A^0\right\| = \|I_n\| = 1 = \|A\|^0$ d'après (N_1). Quand p tend vers $+\infty$, le membre de droite de l'inégalité tend vers $e^{\|A\|}$ et d'autre part, le membre de gauche tend vers $\left\|e^A\right\|$ par continuité de l'application $M \mapsto \|M\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Donc, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\left\|e^A\right\| \leqslant e^{\|A\|}$.

5) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On sait que A est semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire supérieure T. Puisque T est semblable à A, T s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \ldots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. On sait alors que $e^T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \times & \ldots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Puisque A est semblable à T, on sait que e^A est semblable à e^T et donc, puisque la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres, chacune comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité,

$$\det\left(e^{A}\right) = \det\left(e^{T}\right) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} = e^{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k} = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

2 Formule de Trotter-Kato

6) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\|X_k\| &\leqslant \left\|\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right\|\\ &\leqslant \left\|\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right\|\left\|\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right\| \text{ (car } \|\ \| \text{ est sous-multiplicative)}\\ &\leqslant \exp\left(\left\|\frac{1}{k}A\right\|\right)\exp\left(\left\|\frac{1}{k}B\right\|\right) \text{ (d'après 4))}\\ &= \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\|Y_k\| &\leqslant \exp\left(\left\|\frac{1}{k}(A+B)\right\|\right)\\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \text{ (par croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}).\end{aligned}$$

7) La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet en particulier un développement d'ordre 2 en 0, son développement de TAYLOR-Young. $h(0) = 0$ puis pour $t \in \mathbb{R}$,

$$h'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} - (A+B)e^{t(A+B)}$$

et en particulier, $h'(0) = A + B - A - B = 0$. Donc,

$$h(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{t^2}{2}h''(0) + o\left(t^2\right) \underset{t\to 0}{=} O\left(t^2\right).$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k - Y_k = \exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right) - \exp\left(\frac{1}{k}(A+B)\right) = h\left(\frac{1}{k}\right)$ avec $\frac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$. Donc,

$$X_k - Y_k \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

8) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}X_k - Y_k &= \sum_{i=0}^{k-1}\left(X_k^{i+1}Y^{k-(i+1)} - X_k^iY_k^{k-i}\right) \text{ (somme télescopique)}\\ &= \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i\left(X_k - Y_k\right)Y_k^{k-i-1}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left\|\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k - \exp(A+B)\right\| &= \left\|X_k^k - Y_k^k\right\|\\ &= \left\|\sum_{i=0}^{k-1} X_k^i\left(X_k - Y_k\right)Y_k^{k-i-1}\right\|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\|X_k\|^i\,\|X_k - Y_k\|\,\|Y_k\|^{k-i-1}\end{aligned}$$

‘

puis, d'après la question 6),

$$\begin{aligned}\left\|\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k-\exp(A+B)\right\| &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\left(\exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)\right)^i\|X_k-Y_k\|\left(\exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)\right)^{k-i-1}\\ &= k\left(\exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)\right)^{k-1}\|X_k-Y_k\|.\end{aligned}$$

D'après la question 7), $k\|X_k-Y_k\| \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k}\right)$. D'autre part,

$$\left(\exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)\right)^{k-1}=\exp\left(\frac{(k-1)(\|A\|+\|B\|)}{k}\right)\underset{k\to+\infty}{=}\exp\left((1+O(1))(\|A\|+\|B\|)\right)\underset{k\to+\infty}{=}O(1).$$

Ainsi, $\left\|\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k-\exp(A+B)\right\| \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k}\right)$ et en particulier,

$$\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k \underset{k\to+\infty}{\to} \exp(A+B).$$

3 Vers les algèbres de Lie

9) Dans cette question, $G=SL_n(\mathbb{R})$. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}M\in\mathscr{A}_G &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ e^{tM}\in SL_n(\mathbb{R})\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ \det\left(e^{tM}\right)=1\\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ e^{\mathrm{Tr}(tM)}=1 \text{ (d'après la question 5)}\\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \mathrm{Tr}(tM)=0 \text{ (par injectivité de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R} \text{ et car } \mathrm{Tr}(M)\in\mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ t\mathrm{Tr}(M)=0\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M)=0.\end{aligned}$$

$\mathscr{A}_{SL_n(\mathbb{R})}$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.

10) Dans cette question, $G=O_n(\mathbb{R})$. Tout d'abord, la transposition est linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc continue sur cet espace. Donc, pour toute matrice A,

$$(\exp(A))^T=\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}A^k\right)^T=\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}A^k\right)^T=\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\left(A^T\right)^k=\exp\left(A^T\right).$$

Soit alors $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}M\in\mathscr{A}_{O_n(\mathbb{R})} &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ e^{tM}\in O_n(\mathbb{R})\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ (\exp(tM))^T=(\exp(tM))^{-1}\\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \exp\left(tM^T\right)=\exp(-tM).\end{aligned}$$

Ainsi, si $M^T=-M$, alors $M\in\mathscr{A}_{O_n(\mathbb{R})}$. Réciproquement, si $M\in\mathscr{A}_{O_n(\mathbb{R})}$, en dérivant l'égalité précédente, on obtient pour tout réel t, $M^T\exp\left(tM^T\right)=-M\exp(-tM)$ puis en évaluant en 0, on obtient $M^T=-M$.

En résumé, $M\in\mathscr{A}_{O_n(\mathbb{R})}$ si et seulement si $M^T=-M$ ou encore $M\in\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Donc, $\mathscr{A}_{O_n(\mathbb{R})}=\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

11) On sait que l'élément neutre de G (pour $\times$) est l'élément neutre de $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$ à savoir I_n. Mais alors, pour tout réel t, $\exp(t0_n)=\exp(0_n)=I_n\in G$. Donc, $0_n\in\mathscr{A}_G$.

Soient $A\in\mathscr{A}_G$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Pour tout réel t, $\exp(t(\lambda A))=\exp((t\lambda)A)\in G$ et donc $\lambda A\in\mathscr{A}_G$. $\mathscr{A}_G$ est donc stable pour la loi externe.

Soit $(A,B)\in(\mathscr{A}_G)^2$. Soit $t\in\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul k et pour tout réel t, $\exp\left(\frac{t}{k}A\right)$ et $\exp\left(\frac{t}{k}B\right)$ sont dans G puis $\left(\exp\left(\frac{t}{k}A\right)\exp\left(\frac{t}{k}B\right)\right)^k$ est dans G. La suite $\left(\left(\exp\left(\frac{t}{k}A\right)\exp\left(\frac{t}{k}B\right)\right)^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est, d'après la partie 2, une suite convergente d'éléments de G. Puisque G est fermé, la limite de cette suite, à savoir $\exp(t(A+B))$ est dans G. Ainsi, pour tout réel t, $\exp(t(A+B))\in G$ et donc $A+B\in\mathscr{A}_G$. $\mathscr{A}_G$ est stable pour l'addition.

On a montré que $\mathscr{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),+,.)$.

12) Soit $(A, B) \in (\mathscr{A}_G)^2$. Soit $t' \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t,

$$\exp(tu(t')) = \exp\left(e^{t'A}tBe^{-t'A}\right) = \exp\left(e^{t'A}tB\left(e^{t'A}\right)^{-1}\right) = e^{t'A}e^{tB}\left(e^{t'A}\right)^{-1} = e^{t'A}e^{tB}e^{-t'A}.$$

Pour tout réel t, $e^{t'A}$, e^{tB} et $e^{-t'A}$ sont des éléments du groupe G et donc pour tout réel t, $\exp(tu(t')) = e^{t'A}e^{tB}e^{-t'A}$ est un élément de G. Mais alors, $u(t')$ est un élément de $\mathscr{A}_G$.

On a montré que la fonction u est à valeurs dans $\mathscr{A}_G$.

13) Soit $(A, B) \in (\mathscr{A}_G)^2$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$u'(t) = Ae^{tA}Be^{-A} + e^{tA}B(-A)e^{-tA}.$$

En particulier, $u'(0) = AI_nBI_n - I_nBAI_n = AB - BA = [A, B]$. Puisque pour tout réel t, $u(t)$ est dans $\mathscr{A}_G$ et que $\mathscr{A}_G$ est un espace vectoriel de dimension finie et donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que pour tout réel t, $u'(t) \in \mathscr{A}_G$. En particulier, $[A, B] = u'(0) \in \mathscr{A}_G$.

14) Soit $M \in \mathscr{A}_G$. L'application $\gamma\ :\ t \mapsto e^{tM}$ est à valeurs dans G et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\gamma(0) = e^{0_n} = I_n$ et $\gamma'(0) = Me^{0_n} = M$. Donc, M est tangente à G en I_n.

On a montré que $\mathscr{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15) Notons $E_1, \dots, E_n$, les colonnes de la matrice I_n et $C_1, \dots, C_n$, les colonnes de la matrice M de sorte que, pour tout réel t,

$$\delta_M(t) = \det(E_1 + tC_1, \dots, E_n + tC_n).$$

Par n-linéarité, ce déterminant est une somme de 2^n déterminants dont les colonnes sont des E_j et des tC_j. Dans un tel déterminant, si la lettre t est écrite au moins 2 fois, le déterminant correspondant est négligeable devant t quand t tend vers 0 par n-linéarité du déterminant et par continuité du déterminant. Il reste

$$\begin{aligned}\delta_M(t) &\underset{t\to 0}{=} \det(E_1, \dots, E_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(E_1, \dots, E_{j-1}, tC_j, E_{j+1}, \dots, E_n) + o(t)\\ &\underset{t\to 0}{=} 1 + \sum_{j=1}^{n} \Delta_j(t) + o(t),\end{aligned}$$

où, pour $j \in [\![1, n]\!]$ et $t \in \mathbb{R}$ (en posant $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$),

$$\begin{aligned}\Delta_j(t) = \det(E_1, \dots, E_{j-1}, tC_j, E_{j+1}, \dots, E_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & tm_{1,j} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & & \\ & & \ddots & 1 & \vdots & & & \\ & & & 0 & tm_{j,j} & 0 & & \vdots\\ & & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 0\\ & & & & tm_{n,j} & & & 1 \end{vmatrix}\\ &= tm_{j,j} \text{ (déterminant par blocs).}\end{aligned}$$

Donc,

$$\delta_M(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + t\sum_{j=1}^{n} m_{j,j} + o(t) \underset{t\to 0}{=} 1 + t\,\mathrm{Tr}(M) + o(t).$$

δ_M admet en 0 un développement limité d'ordre 1 en 0 et est donc dérivable en 0. $\delta_M'(0)$ est le coefficient de t dans ce développement à savoir $\mathrm{Tr}(M)$.

16) Posons $\det = f$. Dans la question 15, on a calculé la dérivée de l'application f en I_n suivant le vecteur M, pour toute $M \neq 0_n$: $D_M(f)(I_n) = \mathrm{Tr}(M)$. On sait que pour toute $M \neq 0_n$, $df_{I_n}(M) = D_M f(I_n) = \mathrm{Tr}(M)$, ce qui reste vrai pour $M = 0_n$ par linéarité de df_{I_n}.
Finalement, pour toute $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $df_{I_n}(M) = \mathrm{Tr}(M)$ puis $df_{I_n} = \mathrm{Tr}$.

17) On sait déjà que $\mathscr{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

• Cas où $G = SL_n(\mathbb{R})$. On sait que $\mathscr{A}_G$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.
Soit $M \in \mathcal{T}_{I_n}(SL_n(\mathbb{R}))$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma\ :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\det(\gamma(t)) = 1$.
En dérivant cette égalité, on obtient pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $d(\det)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$ et en particulier, $d(\det)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = 0$ ou encore $d(\det)_{I_n}(M) = 0$ ou enfin $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Ceci montre que $M \in \mathscr{A}_{SL_n(\mathbb{R})}$. Finalement, $\mathcal{T}_{I_n}(G) \subset \mathscr{A}_G$ puis $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathscr{A}_G$.

• Cas où $G = O_n(\mathbb{R})$. On sait que $\mathscr{A}_G$ est l'ensemble des matrices anti-symétriques.
Soit $M \in \mathcal{T}_{I_n}(O_n(\mathbb{R}))$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma\ :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\left(e^{tM}\right)^T e^{tM} = I_n$. On dérive cette dernière égalité ce qui fournit pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\left(Me^{tM}\right)^T e^{tM} + \left(e^{tM}\right)^T Me^{tM} = 0_n$ et en particulier quand $t = 0$, $M^T + M = 0_n$. Ainsi, M est anti-symétrique et donc $M \in \mathscr{A}_G$. Ceci montre encore une fois que $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathscr{A}_G$.

4 Comportement asymptotique

18) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. On a $\chi_f = (X - \alpha)(X - \beta)^2$. On pose $F_\alpha = \mathrm{Ker}\,(f - \alpha Id_{\mathbb{C}^3})$ et $F_\beta = \mathrm{Ker}\left((f - \beta Id_{\mathbb{C}^3})^2\right)$. On sait alors que $\mathbb{C}^3 = F_\alpha \oplus F_\beta$ (décomposition de $\mathbb{C}^3$ en somme des sous-espaces caractéristiques), que $\mathrm{Ker}\,(f - \beta Id_{\mathbb{C}^3}) \subset F_\beta$ et que F_β est stable par f.

On choisit e_1 un vecteur non nul de F_α. e_1 est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre α. On choisit ensuite e_2 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,(f - \beta Id_{\mathbb{C}^3})$ ou encore un vecteur propre de f associé à β. e_2 est encore un vecteur non nul de F_β. Puisque α est valeur propre simple, F_α est de dimension 1 et donc F_β est de dimension 2. On complète la famille libre (e_2) de F_β en (e_2, e_3) base de F_β. Puisque F_α et F_β sont supplémentaires, (e_1, e_2, e_3) est une base de E et la matrice de f dans cette base est de la forme $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ (en tenant compte du fait F_β est stable par f). Les formules de changement de base montrent que A est semblable à T.

Posons $T = D + N$ où $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \beta)$ et $N = aE_{2,3}$. On a $N^2 = 0_3$ et $DN = ND = \beta a E_{2,3}$. D'après la formule du binôme de Newton, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
T^n &= (D+N)^n = D^n + nD^{n-1}N = \mathrm{diag}\,(\alpha^n, \beta^n, \beta^n) + na\,\mathrm{diag}\left(\alpha^{n-1}, \beta^{n-1}, \beta^{n-1}\right) E_{2,3} \\
&= \mathrm{diag}\,(\alpha^n, \beta^n, \beta^n) + na\beta^{n-1}E_{2,3} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & na\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'autre part, $T^0 = I_3$. On en déduit que pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
e^{tT} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} T^n = I_3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & na\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} & a \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^n\beta^{n-1}}{n!} \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta t} & at \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(t\beta)^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & e^{\beta t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta t} & ate^{\beta t} \\ 0 & 0 & e^{\beta t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$. Alors, pour tout réel t, $e^{tA} = PE^{tT}P^{-1}$. Ensuite, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ car linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On en déduit que $e^{tA} \underset{t\to+\infty}{\to} 0_n \Leftrightarrow e^{tT} \underset{t\to+\infty}{\to} 0_n$. Cette dernière condition est équivalente que $e^{t\alpha}$, $e^{t\beta}$ et $ate^{t\beta}$ ont une limite nulle en $+\infty$.
Puisque pour tout réel t, $|e^{t\alpha}| = e^{t\mathrm{Re}(\alpha)}$, $e^{t\alpha} \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow |e^{t\alpha}| \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\alpha) < 0$. De même, $e^{t\beta} \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\beta) < 0$.
Maintenant, si $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) < 0$, pour tout $a \in \mathbb{C}$, $ate^{t\beta}$ est de limite nulle en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

Finalement, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_3$ si et seulement si les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

19) Soit $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda_0) = \alpha$. Soit u un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left(\sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(tA)^k\right)u = \left(\sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(t\lambda_0)^k\right)u$. Quand p tend vers $+\infty$, on obtient pour tout réel t, $e^{tA}u = e^{t\lambda_0}u$.

Si $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_n$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}u = 0$ puis $\left(\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\lambda_0}\right)u = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(e^{t\lambda_0}u\right) = 0$. Puisque $u \neq 0$, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\lambda_0} = 0$ et donc $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda_0) < 0$.

Ainsi, si $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t) = 0_n$, alors toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

20) $\chi_A = \prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)^{m_\lambda}$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $\chi_A(A) = 0_n$. Ensuite, les polynômes $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ sont deux à deux premiers entre eux car sans racines communes dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{Ker}\left((A-\lambda I_n)^{m_\lambda}\right) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} F_\lambda.$$

21) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. f commute avec tout polynôme en f et en particulier avec $(f-\lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}$. Donc, $F_\lambda = \mathrm{Ker}\left((f-\lambda\mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$ est stable par f. De plus, F_λ n'est pas réduit à $\{0\}$ car F_λ contient le sous-espace propre associé à λ.
f induit un endomorphisme de F_λ que l'on note f_λ. Par définition de F_λ et d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $f_\lambda - \lambda\mathrm{Id}_{F_\lambda}$ est un endomorphisme nilpotent de F_λ d'indice inférieur ou égal à m_λ, que l'on note ν_λ.

On note ν l'endomorphisme de E tel que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\nu_{/F_\lambda} = \nu_\lambda$ (ν est bien défini car les F_λ sont supplémentaires). Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\nu_\lambda^{m_\lambda} = 0_{F_\lambda}$ et donc, si $m = \mathrm{Max}\{m_\lambda,\ \lambda\in\mathrm{Sp}(f)\}$, pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(f)$, $\nu_\lambda^m = \nu^{m_\lambda}\nu^{m-m_\lambda} = 0_{F_\lambda}$. Mais alors, $\nu^m = 0$ car les restrictions de ν^m à des sous-espaces supplémentaires sont nulles. ν est un endomorphisme nilpotent.

On pose enfin $d = f - \nu$ de sorte que $f = d + \nu$. $d = f - \nu$ laisse stable chaque F_λ et pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note d_λ l'endomorphisme de F_λ induit par d. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $d_\lambda = f_\lambda - (f_\lambda - \lambda\mathrm{Id}_{F_\lambda}) = \lambda\mathrm{Id}_{F_\lambda}$ et donc d_λ est l'homothétie de rapport λ. Mais alors, pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$, d_λ et ν_λ commutent puis d et ν commutent car les F_λ sont supplémentaires. Ensuite, dans une base adaptée à la décomposition de E en somme directe des F_λ, la matrice de d est diagonale et donc d est diagonalisable.

Pour tout $\lambda_{\mathrm{Sp}}(f)$, on pose $\dim(F_\lambda) = m'_\lambda$. On a alors $\chi_d = \prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} (X-\lambda)^{m'_\lambda}$. Maintenant, pour $\lambda\in\mathrm{Sp}(f)$, le polynôme $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ est annulateur de f_λ. Puisque les valeurs propres d'un endomorphisme sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur, pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(f)$, λ est l'unique valeur propre de f_λ. Ceci montre que $\chi_f = \prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} (X-\lambda)^{m'_\lambda} = \chi_d$ (et que pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(f)$, $M'_\lambda = m_\lambda$).

Soit $\mathscr{B}$ une base fixée de E. Soient $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(d)$ et $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\nu)$. D est diagonalisable, N est nilpotente, $ND = DN$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(d) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\nu) = D + N.$$

A est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P(D+N)P^{-1}$. Enfin, $\chi_A = \chi_f = \chi_d = \chi_D$.

22) Pour tout réel t, $e^{tA} = e^{tP(D+N)P^{-1}} = Pe^{t(D+N)}P^{-1} = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}$ car tD et tN commutent.

Puisque $\chi_D = \chi_A$, e^{tD} est une matrice diagonale dont les coefficients sont des $e\lambda t$, $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$. Puisque N est nilpotente, e^{tN} est un polynôme en t à coefficients matriciels. On note p un entier naturel supérieur ou égal au degré de ce polynôme. Les $\nu_{i,j}$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, sont alors des combinaisons linéaires de produits de polynômes en t de degrés inférieurs ou égaux à p et de $e^{\lambda t}$, $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$. Tous ces coefficients sont donc dominés par $t^p e^{\alpha t}$ quand t tend vers $+\infty$.

23) Si $\alpha < 0$, alors $t^p e^{\alpha t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ d'après un théorème de croissances comparées puis pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\nu_{i,j}(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et donc $e^{tA} \underset{t\to+\infty}{\to} 0_n$.

On a montré que $e^{tA} \underset{t\to+\infty}{\to} 0_n \Leftrightarrow \alpha < 0$.

24) La matrice A est triangulable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{T}_{n,s}(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$. Pour tout réel t, on a alors $e^{tA} = Pe^{tT}P^{-1}$ avec $e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \times & & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$. En posant $Y = P^{-1}X$,

$$\begin{aligned} e^{tA}X \underset{t\to+\infty}{\to} 0 &\Leftrightarrow Pe^{tT}P^{-1}X \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow e^{tT}\left(P^{-1}X\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \text{ (par continuité de } U \mapsto PU \text{ et } V \mapsto P^{-1}V) \\ &\Leftrightarrow e^{tT}Y \underset{t\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Supposons $X \neq 0$ et $e^{tA}X \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Alors $Y = (y_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \neq 0$ car $P^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$ et $e^{tT}Y \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. On note k le plus grand indice j tel que $y_j \neq 0$ de sorte que pour un indice j tel que $j > k$, $y_j = 0$. Le coefficient ligne k de $e^{tT}Y$ est alors $e^{\lambda_k t}y_k$. Puisque $\left|e^{\lambda_k t}y_k\right| = e^{t\mathrm{Re}(\lambda_k)}\left|y_k\right| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et que $e^{t\mathrm{Re}(\lambda_k)}$ tend vers 1 ou $+\infty$ (puisque $\mathrm{Re}\,(\lambda_k) \geqslant 0$), ceci impose $y_k = 0$ ce qui est faux.

Donc, si $e^{tA}X \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, alors $X = 0$. La réciproque étant claire, on a montré que

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ \lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

25) Si l'un des produits est vide, il est conventionnellement égal à 1 et le noyau E correspondant est égal à $\{0\}$.
Les polynômes P_s, P_i et P_n sont deux à deux premiers entre eux car sans racines communes dans $\mathbb{C}$ et le polynôme $P_sP_iP_n = \chi_A$ est annulateur de A d'après le théorème de Cayley-Hamilton. D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$.

Soit $X \in E$. On pose $X = X_s + X_i + X_s$ où $X_s \in E_s$, $X_i \in E_i$ et $X_n = E_n$ de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA}X = e^{tA}X_s + e^{tA}X_i + e^{tA}X_n.$$

E_s, E_i et E_n sont stables par tout polynôme en A (car deux polynômes en A commutent) puis, par passage à la limite, par e^{tA}, car E_s, E_i et E_n sont des fermés de E en tant que sous-espaces d'un espace de dimension finie. Donc, pour tout réel t, $e^{tA}X_s \in E_s$, $e^{tA}X_i \in E_i$ et $e^{tA}X_n \in E_n$.

Si $e^{tA}X_s$, $e^{tA}X_i$ et $e^{tA}X_n$ tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$, alors $e^{tA}X$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Réciproquement, les trois projections p_s, p_i, et p_n associées à la décomposition $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$ sont continues sur l'espace de dimension finie E car linéaire. Donc, si $e^{tA}X \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, $e^{tA}X_s = p_s\left(e^{tA}X\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ et de même pour $e^{tA}X_i$ et $e^{tA}X_n$. On a montré que

$$e^{tA}X \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow e^{tA}X_s \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \text{ et } e^{tA}X_i \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \text{ et } e^{tA}X_n \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

Maintenant, si on note f l'endomorphisme de E canoniquement associé à A puis, f_s, f_i et f_n les endomorphismes de E_s, E_i et E_n respectivement, induits par f, les valeurs propres de f_s sont racines de P_s et ont donc toutes une partie réelle strictement négative. De même, les valeurs propres de f_i ont toutes une partie réelle strictement positives et les valeurs propres de f_n ont toutes une partie réelle nulle.
D'après la question 23, pour tout $x \in E_s$, $e^{tf_s}x \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ ou encore pour tout $X \in E_s$, $e^{tA}X \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. D'autre part, d'après la question 24, pour tout X de E_i ou E_n, $e^{tA}X \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow X = 0$. Finalement,

$$e^{tA}X \underset{t\to+\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow X_i = X_n = 0 \Leftrightarrow X \in E_s.$$

On a montré que $E_s = \left\{X \in E/ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0\right\}$.

26)

• Montrons que si X est un élément de E_n, $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists p \in \mathbb{N}/\ \forall t \in \mathbb{R}$, $\left\|e^{tA}X\right\|_E \leqslant C\left(1+|t|^p\right)$. Si E_n est réduit à $\{0\}$, c'est immédiat. Dorénavant, $E_n \neq \{0\}$.

Notons A_n la matrice de f_n dans une base donnée de E_n puis posons $e^{tA_n} = (\nu_{i,j}(t))$ pour tout t réel. D'après la question 22), il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout (i,j), $\nu_{i,j}(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(t^{p_1}\right)$. De même, $g_n = -f_n$ étant également un endomorphisme de E_n tel que pour tout t réel, e^{tg_n} ait pour matrice $(\nu_{i,j}(-t))$, il existe un entier p_2 tel que pour tout (i,j), $\nu_{i,j}(t) \underset{t\to-\infty}{=} O\left(t^{p_2}\right)$. On pose $p = \text{Max}\{p_1, p_2\} \in \mathbb{N}$ et on a $\nu_{i,j}(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} O\left(t^p\right)$ puis $\left\|e^{tA}X\right\|_E = \left\|e^{tf_n}(X)\right\|_E \underset{t\to\pm\infty}{=} O\left(t^p\right)$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{\left\|e^{tA}X\right\|_E}{1+|t|^p}$ est bornée sur un ensemble de la forme $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$, $a > 0$. Cette fonction est d'autre part bornée sur le segment $[-a,a]$ car continue sur ce segment. Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{\left\|e^{tA}X\right\|_E}{1+|t|^p}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc, il existe un réel strictement positif C tel que, pour $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\left\|e^{tA}X\right\|_E}{1+|t|^p} \leqslant C$ ou encore $\left\|e^{tA}X\right\|_E \leqslant C\left(1+|t|^p\right)$.

• Montrons que si $X \notin E_n$, le résultat est faux. Si $X \notin E_n$, l'une des composantes X_s ou X_i n'est pas nulle. Comme à la question 24), dans une base de triangulation de f_s ou f_i, l'une des composantes de $e^{tT_s}X_s$ ou de $e^{tT_i}X_i$ (en notant T_s ou T_i la matrice de f_s ou f_i dans une telle base) est de la forme $Ce^{\lambda t}$ avec $\text{Re}(\lambda) < 0$ ou $\text{Re}(\lambda) > 0$. Une telle composante n'est dominée par aucun polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ et il en est de même de $\left\|e^{tA}X\right\|_E = \left\|e^{tf}(X)\right\|_E$ (car $\|\ \|_E$ est équivalente à la norme infinie dans une base donnée).

On a montré que $E_n = \left\{X \in E/\ \exists C \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ C\left(1+|t|^p\right)\right\}$.

