Étude de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{e^{nx}-1}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n}{e^{nx}-1}$

Partie I: Étude de convergence

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser sa limite simple
2. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$
4. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$

   (b) La convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$

Partie II: Étude de la somme f

On pose $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$

5. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
6. Déterminer la limite de f en $+\infty$
7. (a) Déterminer la monotonie de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ puis déduire celle de f

   (b) Démontrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$
8. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite double $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$ où $u_{n,m} = ne^{-nmx}$

   (a) Montrer que la suite $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable

   (b) Montrer que $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{nx}}{(e^{nx}-1)^2}$

   <u>*Indication*</u> **:** *Utiliser l'égalité :* $\forall x \in \,]-1, 1[\,, \quad \dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$
9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \big\{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid pq = n\big\}$.

   (a) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \omega_n e^{-nx}$ où $\omega_n = \sum\limits_{p|n} p$ somme des diviseurs de n
10. Pour $n \geqslant 1$, on définit l'application g_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_n(x) = \omega_n e^{-nx}$

    (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

    (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Étude de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{e^{nx}-1}$

Partie I: Étude de convergence

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_n(x) = \frac{n}{e^{nx}-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers l'application nulle
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) = \frac{n}{e^{nx}-1} \xrightarrow[n\to 0^+]{} +\infty$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée et par suite sa convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_n(x) = \frac{n}{e^{nx}-1} \sim ne^{-nx}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} ne^{-nx}$ à termes positifs est convergente d'après le critère de D'Alembert, donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge et par suite la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$
4. (a) Soit $a \in]0,+\infty[$. La fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(a)$ et la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} f_n(a)$ converge. La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est donc normalement convergente sur $[a,+\infty[$ et, par suite, la convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$

   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$

Partie II: Étude de la somme f

5. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

   — Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$, donc elle l'est sur $[a,b]$

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
6. — La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$

   — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(x) = \frac{n}{e^{nx}-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

   Donc, d'après le théorème d'interversion limite et somme, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$
7. (a) Soit $x, y \in]0,+\infty[$ tels que $x < y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(y) < f_n(x)$. Les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ et $\sum_{n\geqslant 1} f_n(y)$ sont convergentes, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y) < \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, soit $f(y) < f(x)$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

   (b) Pour tout réel $x > 0$, on a $f_1(x) \leqslant f(x)$, on fait tendre x vers 0^+ ce qui nous fournit, par le théorème de minoration, que $\ell = +\infty$
8. (a) Il s'agit d'une suite double à termes positifs

   — Soit $n \geqslant 1$, la série $\sum_{m\geqslant 1} ne^{-nmx}$ est convergente de somme $S_n = \frac{ne^{-nx}}{1-e^{-nx}}$

   — $S_n \sim ne^{-nx}$. D'après le critère de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} ne^{-nx}$ est convergente et par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} S_n$ converge.

Étude de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{e^{nx}-1}$

D'où $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable

(b) D'après le théorème de Fubini, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} ne^{-nmx} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nmx}$.

D'une part $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} ne^{-nmx} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\sum_{m=1}^{+\infty}\left(e^{-nx}\right)^m = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ne^{-nx}}{1-e^{-nx}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{e^{nx}-1} = f(x)$.

D'autre part, on a $\forall m\in\mathbb{N}^*$: $e^{-mx}\in\,]0,1[$, donc, d'après la formule donnée

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nmx} = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(e^{-mx}\right)^n = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{e^{-mx}}{\left(1-e^{-mx}\right)^2} = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{e^{mx}}{\left(e^{mx}-1\right)^2}$$

Ce qui fournit l'égalité $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{nx}}{(e^{nx}-1)^2}$

9. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left\{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2} \mid pq = n\right\}$.

   (a) — Soit $n\in\mathbb{N}^*$ l'élément $(1,n)\in I_n$, donc $I_n\neq\emptyset$

   — Soit $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $m\neq n$. Si $(p,q)\in I_n\cap I_m$, alors $pq = m = n$, donc $m = n$. Absurde

   — Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $I_n\subset\mathbb{N}^{*2}$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n\subset\mathbb{N}^{*2}$. Inversement si $(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$, on pose $n = pqq$, donc $(p,q)\in I_n$, ainsi $\mathbb{N}^{*2}\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$. D'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = \mathbb{N}^{*2}$

   On conclut que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$;

   (b) Par le théorème de la sommation par paquets on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}} pe^{-pqx} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in I_n} pe^{-pqx} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(p,q)\in I_n} pe^{-nx} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p|n} pe^{-nx} \end{aligned}$$

   Donc pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\omega_n e^{-nx}$ où $\omega_n = \sum_{p|n} p$

10. Pour $n\geqslant 1$, on définit l'application g_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_n(x) = \omega_n e^{-nx}$

   (a) Remarquons d'abord que g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $g_n^{(p)}(x) = (-n)^p\omega_n e^{-nx}$.
   Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x\in[a,+\infty[$, on a

$$\left|g_n^{(p)}(x)\right| = n^p\omega_n e^{-nx} \leqslant n^{p+1}(n+1)e^{-na}$$

   Par le critère de D'Alembert la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{p+1}(n+1)e^{-na}$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 1} g_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, et, par suite, elle converge uniformément sur $[a,+\infty[$

   (b) On a

   — $\forall n\in\mathbb{N}^*, g_n\in C^\infty(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$;

   — La série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$;

ÉTUDE DE LA SÉRIE $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{e^{nx}-1}$

— $\forall p \geqslant 1, \sum_{n\geqslant 1} g_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$